

Р. БЕККЕР

# ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Том II

## ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ

Издание второе, исправленное  
под редакцией Т. П. КРАВЦА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Ленинград 1941 Москва

Редактор *Т. П. Кравец*

---

Тираж 10 000 экз. Подписано к печати 13/II 1941 г. М 1384. Печатных 24,5 листа. Авторских 29,45 лист. Типографских знаков печати, листе 53.850. Цена 8 руб. Переплет I р. 50 к. Заказ № 5810.

---

1-я типография Машгиза НКТП. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА КО ВТОРОМУ РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании внесено лишь немного изменений по сравнению с первым. В первоначальный текст — в общем весьма высокого качества — вновь вставлены выброшенные в первом издании ссылки и указания на 1-й том, только что вышедший вторым изданием. Обозначения и терминология также согласованы со вторым изданием первого тома. Наконец, в соответственных местах указаны новые опыты и приведены новые цифровые данные для мировых констант.

Редакция и здесь выражает признательность всем лицам, пришедшим ей на помощь своими ценными указаниями. В огромном большинстве случаев она могла ими воспользоваться.

Перевод выполнен Н. Г. Пруссаковой.

*Т. Кравец*

ЛГУ

Физический Институт  
Февраль 1939 г.

---

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

При издании первого тома „Теории электричества“ некоторая часть текста, принадлежавшая еще Абрагаму, была почти без изменения перенесена сюда из предшествующих изданий. Настоящий же второй том я счел необходимым написать полностью заново. обстоятельное изложение теории твердого электрона в Абрагамовском смысле в настоящее время потеряло почти весь интерес. В особенности после успехов специальной теории относительности можно считать ее совершенно отсталой; поэтому она была опущена. С другой стороны я считал своей задачей оттенить взаимодействие между теорией и опытом, оказавшее столь решительное влияние на успехи физики — оттенить сильнее, чем это было сделано в прежних изданиях.

Может быть, нуждается в некотором оправдании то обстоятельство, что и новое изложение существенным образом ограничивается классической электронной теорией, так как точка зрения квантовой теории хотя в отдельных случаях и привлекается, но более подробно используется только в отделах об электронах в металлах (*D*) и о равновесном излучении (*G*). При современном состоянии физического знания дидак-

тически-целесообразное представление электронной теории сопряжено с особыми трудностями. Нам ясно, что высказывания классической теории не обладают полной строгостью. Они должны, напротив, быть заменены более строгими результатами квантовой механики. Самое большее, что здесь можно утверждать, это — что в приближениях, даваемых Боровским „принципом соответствия“ и „принципом неопределенности“ Гейзенберга, материя ведет себя так, как если бы классическая теория была верна. Поэтому любой учебник, не исходящий из постулатов квантовой механики, ныне считаемых правильными, в некоторых отношениях оставляет нас неудовлетворенными. Часто видишь себя вынужденным указывать, что строгого опытного доказательства иногда с большим трудом полученных формул ожидать не приходится.

Но независимо от того, что вполне удовлетворительной квантовой теории электромагнитного поля еще не имеется, строй мысли классической электронной теории пока еще остается неизбежным как для понимания примыкающих к ней соображений квантовой теории, так и для наглядного представления предложений, получаемых из последней. К тому же неоднократно обнаруживалось, что для успеха экспериментальных исследований живое схватывание наглядных, хотя и не всегда строгих образов классической электронной теории обычно более плодотворно, чем слишком робкое следование более строгим, но гораздо менее удобным в работе правилам квантовой механики.

Литературный указатель в конце книги, конечно, не претендует на полноту. Дальнейшие литературные указания можно получить прежде всего в цитированных по отдельным главам статьях в „Handbuch'ах“.

*Беккер*

Берлин, Шарлоттенбург  
Август 1933 г.

---

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр

А. ОБЩИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ . . . . .	7
§ 1. Элементарный электрический заряд (7). § 2. Шротэффект (12). § 3. Отношение заряда электрона к массе (19). § 4. Масс-спектрография (26). § 5. Явления, вызываемые инерцией свободных электронов в металлах (30). § 6. Содержание и основные уравнения классической электронной теории (35). § 7 Закон сохранения энергии и импульса в электронной теории (39). § 8. Поле равномерно и медленно движущегося электрона (43). § 9. Поле равномерно и сколь угодно быстро движущегося заряда (48). § 10. Импульс равномерно движущегося заряда (54). § 11. Поле, вызываемое заданным распределением зарядов (61). § 12. Уравнения движения в форме Гамильтона (71).	
Б. УПРУГО СВЯЗАННЫЙ ЭЛЕКТРОН . . . . .	74
§ 13. Свободные колебания упруго связанного электрона (74). § 14. Расширение спектральных линий, вызываемое затуханием (80). § 15. Вынужденные колебания упруго связанного электрона. Расширение линий, обусловленное затуханием и столкновениями (85). § 16. Влияние постоянного магнитного поля на движение электрона в атоме (89). § 17. Индуцированный магнитный момент (97). § 18. Магнитно-механические эффекты. Момент количества движения и намагничение (101).	
В. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕПОДВИЖНЫХ СРЕДАХ . . . . .	108
<b>I. Вывод уравнений Максвелла из основных уравнений электронной теории.</b>	
§ 19. Усреднение полей (108). § 20. Токи проводимости и поляризации (111). § 21. Намагничение (115).	
<b>II. Статическая электрическая поляризация.</b>	
§ 22. Эффективное поле (119). § 23. Индуцированный дипольный момент (123). § 24. Молекулы с постоянным дипольным моментом (126).	
<b>III. Электрическая поляризация в быстропеременных полях. Дисперсия и поглощение.</b>	
§ 25. Дисперсия в прозрачной области (132). § 26. Аномальная дисперсия и поглощение (138). § 27. Магнитное вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея) (142). § 28. Влияние внешнего ориентирующего поля (148).	
<b>IV. Магнитные свойства вещества.</b>	
§ 29. Диамагнетизм (157). § 30. Парамагнетизм (160). § 31. Теория ферромагнетизма Вейсса (165). § 32. Термические эффекты при намагничении (172). § 33. Намагничение монокристаллов (177). § 34. Техническая кривая намагничения (189).	

	Стр.
Г. ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ МЕТАЛЛОВ . . . . .	194
§ 35. Теория свободных электронов по Друде (194). § 36. Метод Лоренца (201). § 37. Эффект Холла (207). § 38. Тепловая эмиссия электронов. Ток насыщения (211). § 39. Область объемных зарядов (215) § 40. Статистика Ферми для электронов в металле (221). § 41. Теория электропроводности и теплопроводности по Зоммерфельду (231). § 42. Свойства металла, не зависящие от средней длины пробега (235).	
Д. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИХСЯ НЕМАГНИТНЫХ ТЕЛАХ . . . . .	241
§ 43. Вывод уравнений поля в теории Максвелла (241). § 44. Вывод уравнений поля из электронной теории (244). § 45. Экспериментальное подтверждение основных уравнений (249). § 46. Опыт Физо (254). § 47. Опыт Майкельсона (257). § 48. Попытки объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона (261).	
Е. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ . . . . .	263
<b>I. Физические основы.</b>	
§ 49. Пересмотр понятий пространства и времени (263). § 50. Преобразование Лоренца (266). § 51. Следствия из преобразования Лоренца (270). § 52. Содержание специальной теории относительности (276).	
<b>II. Математические методы теории относительности.</b>	
§ 53. Преобразование Лоренца (в общем виде) (278). § 54. Четырехмерные векторы и тензоры (283).	
<b>III. Релятивистская электродинамика</b>	
§ 55. Уравнения поля (291). § 56. Плотность силы (297) § 57. Тензор энергии и импульса электромагнитного поля (299). § 58. Плоская световая волна (305). § 59. Излучение движущегося электрона (312).	
<b>IV. Электродинамика материальных тел</b>	
§ 60. Уравнения поля (318). § 61. Тензор моментов (324). § 62. Униполярная машина (329).	
<b>V. Релятивистская механика</b>	
§ 63. Механика материальной точки (332). § 64. Релятивистские уравнения движения в гамильтоновой форме (337). § 65. Эквивалентность энергии и массы (340). § 66. Механические напряжения (345).	
Ж. ТЕОРИЯ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ . . . . .	356
§ 67. Термодинамика излучения (356). § 68. Формула Рэлея-Джинса (361). § 69. Формула Планка (369) § 70. Вывод формулы Планка по Эйнштейну (374). § 71. Баланс импульса атомов в поле излучения (379).	
Примечания редактора перевода . . . . .	385
к § 11 (385); к § 21 (386); к § 29 (386); к § 45 (386); к § 58 (387); к § 60 (387); к § 63 (388).	
Указатель литературы . . . . .	389

## А. ОБЩИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Элементарный электрический заряд. Дальнейшее развитие теории Максвелла из того ее состояния, которое было дано в первом томе, было обусловлено тесным взаимодействием экспериментальных исследований и теоретических рассуждений. Как с той, так и с другой стороны в качестве основной задачи исследования ставилось достижение более углубленных знаний о сущности материи. Но в то время как уравнения Максвелла для вакуума вряд ли превзойдены по ясности и простоте и, кроме того, вполне согласуются с результатами опыта, — применение этих уравнений к пространству, заполненному веществом, основано на том предположении, что всякое отдельное тело характеризуется рядом индивидуальных „констант“ (электропроводность, диэлектрическая постоянная, магнитная проницаемость). Однако, такое многообразие индивидуальных констант не может быть терпимо в теории, которая ставит своей целью выработку простого, основанного на немногих исходных законах представления о картине мира. Но и помимо этого опыта показывают, что о „постоянстве“ этих величин, даже для одного и того же вещества, не может быть и речи. В частности, при быстро меняющихся электрических полях (световые волны) эти величины ведут себя совершенно иначе, чем в случае статических полей, как мы неоднократно указывали в первом томе.

Необходимая для понимания этих явлений углубленная теория материи основана, прежде всего, на чисто экспериментальном изучении сущности электрического тока. Здесь мы имеем две группы явлений, которые при дальнейшем развитии оказались ведущими, а именно: прохождение тока через электролиты и через разрядные трубки, выкачанные до высокого вакуума.

При прохождении тока  $I$  через водный раствор азотнокислого серебра на катоде выделяется за время  $t$  определенное количество серебра  $G$ , которое численно определяется фарадеевским законом электролиза:

$$G = \frac{AIt}{96500 n};$$

здесь  $I$  измеряется в амперах, а  $G$  в граммах;  $A$  и  $n$  означают атомный вес и валентность (например для серебра  $A = 107,88$  и  $n = 1$ ). Таким образом имеет место равенство:

$$It = \frac{Gn}{A} \cdot 96500 \text{ кулон. } ^1)$$

---

1) Более точное значение  $\frac{Gn}{A} \cdot 96489$ .

При электролизе каждый грамм-атом одновалентного электролита переносит через раствор количество электричества, равное 96500 кулона. Если обозначить через  $N$  число атомов в грамм-атоме (число Авогадро  $N = 6,031 \cdot 10^{23}$ ), то этот результат означает следующее: каждый отдельный ион при попадании на катод отдает ему заряд

$$e = \frac{96500}{N} \text{ кулон} = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ электростатических CGS-единиц заряда.}$$

Закон Фарадея, вместе с гипотезой о существовании атомов, приводит таким образом к заключению, что и электричество, по крайней мере при электролизе, должно состоять из дискретных элементарных зарядов, величину которых ( $e$ ) мы только что вычислили. Этот факт был впервые ясно подчеркнут Стони (Stoney) и Гельмгольцем (Н. v. Helmholtz) в 1881 г. Гельмгольц в своей знаменитой речи, посвященной памяти Фарадея (5 апреля 1881 г.), сказал:

„С каждым одновалентным ионом и с каждой валентностью многовалентного иона связано одно и то же количество положительного или отрицательного электричества, которое нераздельно сопровождает этот ион при всех его передвижениях в жидкости“.

Далее Гельмгольц называет предположение о существовании неразрушимых атомов хотя и гипотетической, но тем не менее самой лучшей теорией строения вещества, и продолжает:

„Перенесенная в область электрических явлений, эта гипотеза, при сопоставлении ее с законом Фарадея, приводит к несколько неожиданному следствию. Если мы допускаем существование атомов химических элементов, то мы должны прийти далее к тому заключению, что электричество, как положительное, так и отрицательное, также состоит из определенных элементарных зарядов, которые ведут себя, как атомы электричества“.

Равенство Фарадея  $eN = 96500$  кулон дает нам весьма точное значение произведения двух важных констант атомной теории. Для знания каждой из величин  $e$  и  $N$  в отдельности необходимо еще самостоятельное измерение одной из этих величин. Из таких измерений укажем здесь на следующие:

*а) Непосредственное измерение элементарного заряда  $e$  по Милликэну.* Идея опытов Милликэна заключается в следующем. Непосредственно измеряется заряд, который находится на электрически изолированном теле. Затем это тело каким-либо способом перезаряжают и снова определяют его заряд и т. д. Если при этом окажется, что все полученные значения заряда являются целыми кратными некоторого наименьшего заряда, то этот последний можно считать элементарным количеством электричества. Чтобы можно было с достаточной уверенностью судить о том, является ли данный заряд действительно целым кратным некоторого элементарного заряда, очевидно необходимо, чтобы тело было заряжено лишь небольшим числом этих элементарных зарядов. По этой причине необходимо брать тело очень малых размеров, — таких, что оно, как показал опыт, может быть обнаружено только при помощи ультрамикроскопа.

Опыт Милликэна производится следующим образом. Между пластин-



ками горизонтально расположенного конденсатора (расстояние между пластинками  $p$ ) находится взвешенная в воздухе капелька какого-нибудь вещества, например ртути. Если эта капелька не заряжена, то в поле тяготения она будет опускаться вниз под влиянием силы  $Mg$ . Если  $a$  — радиус капельки, которую считаем шарообразной,  $d$  — плотность капли, а  $d_0$  — плотность окружающего воздуха, то эффективная масса капельки  $M$  определяется выражением

$$M = \frac{4\pi}{3} a^3 (d - d_0).$$

Если капелька имеет заряд  $e$ , то, заряжая конденсатор до определенной разности потенциалов  $V$  между пластинками, можно как раз компенсировать силу тяжести; условием для взвешенного состояния, очевидно, будет равенство:

$$Mg = e \frac{V}{p}.$$

При помощи этого уравнения можно экспериментальным путем определить заряд  $e$ , если известна масса капельки. Так как нельзя непосредственно измерить величину ультрамикроскопической частички, то в этом способе определения заряда задача эксперимента сводится собственно к измерению массы  $M$ .

Милликэн избрал следующий способ: напряжение между пластинками конденсатора выключается, после чего измеряется скорость  $v$ , с которой частица падает под влиянием силы тяжести. Спротивление окружающего воздуха столь велико, что падение происходит с постоянной скоростью. Действующая при этом сила  $Mg$  вызывает падение со скоростью  $v = VMg$ . Коэффициент  $B$  в этом законе падения называют подвижностью частицы. Подвижность шарообразной частички радиуса  $a$ , движущейся в среде с вязкостью  $\eta$ , вычисляем по формуле Стокса

$$B = \frac{1}{6\pi\eta a}.$$

Эта формула справедлива лишь до тех пор, пока радиус частички велик по сравнению с длиной  $\lambda$  свободного пути молекул окружающего газа. Если же длина свободного пути становится сравнимой с радиусом частицы, то в эту формулу следует ввести поправку, данную Кеннингэмом (Cunningham); с этой поправкой окончательная формула для подвижности имеет вид:

$$B = \frac{1}{6\pi\eta a} \left( 1 + A \frac{\lambda}{a} \right),$$

где  $A$  — некоторая постоянная порядка 1. [По поводу этой формулы можно заметить, что для другого предельного случая (когда длина сво-

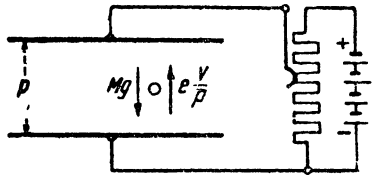


Рис. 1. Схема определения  $e$  по Милликэну.

бодного пути велика по сравнению с радиусом частицы)  $\lambda$  уже не входит в формулу, так как вязкость  $\eta$  пропорциональна произведению плотности газа на длину свободного пути]. Приведенная выше формула для  $M$  позволяет выразить радиус  $a$  через массу капельки, затем по скорости падения в поле тяжести определить массу и из условия равновесия вычислить заряд. Теперь можно ту же частицу перезарядить, осветив ее ультрафиолетовым светом, и снова определить заряд. Таким путем Милликэну действительно удалось измерить отдельные элементарные заряды, так как заряд капельки при последовательных опытах оказывался, например, равным  $2e$ ,  $-e$ ,  $3e$  и т. д., причем  $e$  (усредненное по всем произведенным опытам) имело значение  $4,77 \cdot 10^{-10}$ . При этих опытах могут возникнуть осложнения из-за того, что приходится считать плотность капельки равной плотности обыкновенной ртути. Это обстоятельство может привести к совершенно неверным результатам, если на капельке адсорбирован заметный по сравнению с ее размерами слой молекул воздуха. В таком случае эффективная плотность ртутной капельки будет, конечно, значительно меньше, чем 13,6. И в самом деле, Эренгафт (Ehrenhaft), пользуясь методом Милликэна, часто находил, что заряд капельки якобы меньше элементарного заряда. Однако, в результате тщательных опытов, которые были проделаны Регенером (Regener), можно считать доказанным, что такой заряд капельки был лишь кажущимся, и что он объясняется только что упомянутым осложнением.

*б) Определение  $e$  с помощью  $\alpha$ -излучения.* Испускаемые радием  $\alpha$ -частицы, как известно, представляют собою атомы гелия с двойным зарядом, т. е. каждая  $\alpha$ -частица должна иметь заряд  $2e$ . Следовательно, можно определить элементарный заряд, если измерить весь заряд  $\alpha$ -частиц, испускаемых в секунду радиоактивным препаратом, и, кроме того, сосчитать число испускаемых за то же время частиц. Такой подсчет возможен благодаря тому, что каждая  $\alpha$ -частица, попадающая на экран, покрытый сернистым цинком, производит вспышку, видимую в микроскоп (сцинтилляцию). Подсчитывая эти сцинтилляции, Регенер действительно смог определить заряд отдельной  $\alpha$ -частицы. Он получил число, равное удвоенному значению элементарного заряда в опыте Милликэна.

*с) Определение числа Авогадро  $N$ .* Только что описанные методы имеют целью непосредственное измерение элементарного заряда. Другие методы заключаются в том, что сначала определяется число Авогадро  $N$ , и с его помощью из электрохимического эквивалента вычисляется элементарный заряд. Методы определения  $N$  базируются по существу на основном законе статистической механики, который утверждает, что кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы системы, температура которой есть  $T$ , равна  $\frac{1}{2} kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана, связанная с обычной газовой постоянной  $R$  соотношением  $R = kN$ . Кинетическая энергия весьма мелких частиц, взвешенных в жидкости, проявляется в броуновском движении. Она может быть измерена или окольным путем из барометрического распределения по высоте большого количества взвешенных частиц, или с помощью сред-

него квадрата перемещения отдельной частицы. Барометрическая формула гласит:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

Она дает число частиц  $n$  в  $1 \text{ см}^3$  на высоте  $h$ , если известно число частиц  $n_0$  на дне сосуда. В числителе показателя степени стоит потенциальная энергия частички, находящейся на высоте  $h$ , а в знаменателе, по сути дела, — кинетическая энергия теплового движения. Для обыкновенных молекул этот показатель степени может быть написан в виде  $-\frac{Mgh}{RT}$ , где  $M$  — обычный молекулярный вес. Если же эта формула применяется к ультрамикроскопическим частицам, масса которых  $m$  еще может быть измерена непосредственно, то нахождение числа частиц на различных высотах позволяет непосредственно определить постоянную Больцмана  $k$ . Этот опыт был произведен Перреном (J. Perrin) со взвешенными частицами мастики и дал для числа  $N$  упомянутое выше значение  $6 \cdot 10^{23}$ .

Другой метод, непосредственно основанный на броуновском движении, состоит в том, что на очень тонкой кварцевой нити подвешивают маленькое зеркальце, которое может свободно совершать малые вращательные колебания.

Если через  $\theta$  обозначить момент инерции зеркала и через  $\alpha$  — отклонение зеркала от положения равновесия, то для кинетической энергии вращательного движения зеркальца также имеет место упомянутый выше основной закон статистической механики, а потому

$$\frac{1}{2} \overline{\theta \dot{\alpha}^2} = \frac{1}{2} kT.$$

Если, кроме того, известен модуль кручения  $D$  кварцевой нити, то при таком вращательном колебании кинетическая энергия в среднем равна потенциальной энергии  $\frac{1}{2} D \overline{\alpha^2}$ . Следовательно, мы получаем благодаря броуновскому движению нерегулярные отклонения отраженного от зеркальца луча света, причем среднее значение квадрата этих отклонений определяется формулой  $\overline{\alpha^2} = \frac{kT}{D}$ . Если ввести еще собственную частоту  $\nu_0$  крутильных колебаний зеркальца, определяемую формулой  $2\pi\nu_0 = \sqrt{\frac{D}{\theta}}$ , то выражение для  $\overline{\alpha^2}$  принимает вид:

$$\overline{\alpha^2} = \frac{kT}{(2\pi\nu_0)^2 \theta}.$$

Такой опыт был произведен Герлахом и Капплером и тоже дал очень близкое к действительности значение постоянной Больцмана, а, следовательно, и числа Авогадро. Надо заметить, что вызываемые броуновским движением крутильные колебания определяют естественный предел точности всех тех измерительных приборов, в которых измерение силы тока или других подобных величин производится при помощи зеркальных отсчетов. Очевидно, что угловым отклонением, которое

меньше, чем только что вычисленное среднее отклонение  $\sqrt{\alpha^2}$ , нельзя пользоваться для таких измерений.

а) В настоящее время наиболее точным методом определения  $N$  следует признать метод, основанный на сравнении интерференционных картин, получаемых при параллельном изучении одних и тех же рентгеновых (или электронных) лучей при помощи: а) обыкновенной дифракционной решетки и б) кристалла известного строения — например NaCl. Первое дает длину волны лучей в абсолютной мере; второе позволяет по формуле Брэгга-Вульфа

$$2a \cos i = n\lambda$$

определить величину элемента решетки  $a$ . Но  $Na^3 = v = \frac{M}{\delta}$ , где  $v$  — молекулярный объем,  $M$  — молекулярный вес,  $\delta$  — плотность кристалла.

Наилучшим значением  $N$  следует в настоящий момент считать  $N = (6,031 \pm 0,006) \cdot 10^{23}$  (R. Millikan, Ann. d. Phys. 1938).

§ 2. Шротэффект. В высшей степени поучительный способ определения элементарного заряда дает явление, впервые изученное Шоттки (Schottky), который назвал его „шротэффектом“. Этот эффект интересен по двум причинам. Во-первых, он дает новый метод измерения элементарного заряда; такие измерения производились неоднократно и давали значения  $e$ , отличающиеся от обычного не более чем на 10%. Во-вторых, это явление и другие ему подобные играют особую роль, например, при применении усилительных ламп для измерительных целей, так как этими явлениями определяется верхний предел практически возможного усиления.

Шротэффект основан на атомарном строении электричества. Пусть в цепь включена пустотная трубка с накаливаемым катодом. При достаточно большом напряжении накаленный катод даст в цепи ток  $i_0$  (ток насыщения), который может быть измерен при помощи гальванометра;  $i_0$  есть количество электричества, переносимое в единицу времени от катода к аноду, или вернее, среднее значение этой величины. Мы знаем, что этот перенос электричества происходит не непрерывно, а обусловлен движением электронов и поэтому представляет собою как бы бомбардировку анода множеством отдельных элементарных электрических зарядов. Поэтому истинный ток  $i$ , идущий в цепи, — даже при постоянных условиях опыта, что мы всегда и будем предполагать, — является необычайно сложной функцией времени  $i(t)$ , так что измерить удастся только его среднее значение  $i_0$ , взятое за относительно большой промежуток времени  $T$ , т. е.

$$i_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt. \quad (2.1)$$

Если  $n$  есть среднее число электронов, покидающих катод в одну секунду, то

$$i_0 = ne. \quad (2.2)$$

Испускание отдельных электронов происходит не в равноотстоящие моменты времени, а статистически, т. е. совершенно нерегулярным образом. Поэтому уравнение (2.1) верно только при усреднении за очень большой промежуток вре-

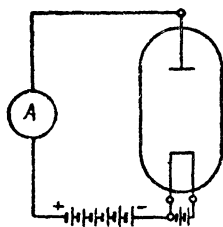


Рис. 2. Схема трубки с накаливаемым катодом.

мени  $T$ . Если же мы возьмем короткий интервал времени  $\tau$ , то измеренный за это время ток

$$i_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} i(t') dt' \quad (2.3)$$

будет давать тем большие отклонения от среднего значения (2.1), чем меньше взятое время  $\tau$ .

Для количественного описания этого явления представим себе, что время разделено на одинаковые промежутки  $\tau$ , причем эти промежутки обозначены номерами 1, 2, 3...  $k$ ..., и что измерена средняя сила тока за каждый промежуток времени по формуле (2.3). Тогда мы получим ряд значений:

$$\begin{cases} i_1 = i_0 + \delta_1 \\ i_2 = i_0 + \delta_2 \\ \vdots \\ i_k = i_0 + \delta_k \\ \vdots \end{cases} \quad (2.4)$$

где  $\delta_k$  означает, следовательно, отклонение среднего тока  $i_k$ , измеренного за  $k$ -тый интервал времени, от среднего значения  $i_0$  за очень большое время. Среднее значение  $\overline{\delta_k}$  для большого числа интервалов  $k$  очевидно равно нулю:

$$\overline{\delta_k} = 0. \quad (2.5)$$

Для нахождения среднего квадратичного значения  $\overline{\delta_k^2}$  статистика дает совершенно определенное правило: за время  $\tau$  в среднем проходят  $n\tau$  электронов. Истинное число прошедших электронов  $n_\tau$  отличается от этого среднего числа на величину

$$\delta n_\tau = n_\tau - n\tau.$$

Для отклонений  $\delta n_\tau$  статистика дает закон:

$$\overline{\delta n_\tau^2} = n\tau. \quad (2.6)$$

При этом усреднение следует понимать таким образом, что сперва определяются величины  $(\delta n_\tau)_k = \delta n_k$  для большого числа равных промежутков времени  $\tau$  и затем берется среднее квадратичное от всех этих величин. Условием применимости этой формулы является полная статистическая независимость отдельных элементарных процессов (выхода электронов из катода или попадания их на анод), т. е. формула применима только тогда, когда отдельные электроны выходят из катода независимо друг от друга, следовательно так, что, например, выход 23-го электрона никак не ускоряет и не замедляет 24-й электрон.

Дадим здесь краткое доказательство приведенного выше закона средних отклонений (2.6). Остановимся на рассмотренном примере и выделим определенный большой промежуток времени  $T$ , в течение которого на анод попадают  $nT = N$  электронов.

Если исходить из вышеупомянутого предположения о том, что отдельные электроны попадают на анод совершенно независимо друг от друга, т. е. чисто статистически, то можно найти вероятность того, что за определенный элемент времени  $\tau$  на анод попадет ровно  $n_\tau$  электронов. Число комбинаций, при которых  $n_\tau$  электронов попадают на анод за элемент времени  $\tau$ , а остальные  $N - n_\tau$  электронов — за остальное время  $T - \tau$ , как известно, составляет

$$\frac{N!}{n_\tau! (N - n_\tau)!} = \binom{N}{n_\tau}.$$

Если это число умножим еще на вероятность того, что  $n_\tau$  заданных электронов попадут на анод за время  $\tau$ , а остальные  $N - n_\tau$  за время  $T - \tau$ , то получим искомую вероятность в виде

$$W_{n_\tau} = \binom{N}{n_\tau} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{n_\tau} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^{N - n_\tau}.$$

Кстати заметим, что сумма вероятностей всех таких комбинаций равна 1

$$\sum_{n_\tau=0}^N W_{n_\tau} = \sum_{n_\tau=0}^N \binom{N}{n_\tau} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{n_\tau} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^{N - n_\tau} = \left(\frac{\tau}{T} + 1 - \frac{\tau}{T}\right)^N = 1.$$

Это является доказательством того, что при нашем подсчете мы приняли во внимание все возможные случаи.

Знание вероятности определенной комбинации позволяет нам вычислить средние значения. Для среднего числа электронов  $\overline{n_\tau}$ , которые выходят за время  $\tau$ , получаем следующее выражение:

$$\overline{n_\tau} = \sum_{n_\tau=0}^N n_\tau W_{n_\tau} = \sum_{n_\tau=1}^N \frac{N!}{(n_\tau - 1)!(N - n_\tau)!} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{n_\tau} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^{N - n_\tau}.$$

Если ввести новый индекс суммирования  $m = n_\tau - 1$ , то получается:

$$\overline{n_\tau} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{N!}{m!(N - m - 1)!} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{m+1} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^{N - m - 1} = N \frac{\tau}{T},$$

что и следовало ожидать. Аналогично этому, среднее значение

$$\overline{n_\tau(n_\tau - 1)} = \sum_{n_\tau=2}^N \frac{N!}{(n_\tau - 2)!(N - n_\tau)!} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{n_\tau} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^{N - n_\tau}$$

получится в виде

$$\overline{n_\tau(n_\tau - 1)} = N(N - 1) \left(\frac{\tau}{T}\right)^2.$$

Отсюда

$$\overline{\delta n_\tau^2} = \overline{n_\tau^2} - (\overline{n_\tau})^2 = \frac{N\tau}{T} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right).$$

Если принять еще во внимание, что  $\tau \ll T$ , то получается приведенный выше закон средних отклонений:

$$\overline{\delta n_\tau^2} = \frac{N\tau}{T} = n\tau.$$

Теперь легко найти также и среднее значение квадратов флуктуаций тока  $\overline{\delta i_\tau^2}$  при шротэффекте. Очевидно, что количество электричества, переносимое током за время  $\tau$ , равно

$$\tau i_\tau = en_\tau = e(n\tau + \delta n_\tau);$$

следовательно

$$i_\tau = en + \frac{e}{\tau} \delta n_\tau,$$

Для отклонений тока  $\delta_c$  от среднего значения имеем:

$$\delta_c = \frac{e}{\tau} \delta n_c$$

и далее, согласно (2.6),

$$\overline{\delta_c^2} \equiv \overline{\delta_k^2} = \frac{e^2}{\tau^2} n\tau = \frac{i_0 e}{\tau}. \quad (2.7)$$

С другой стороны, заметим, что флуктуации за два различных промежутка времени  $k$  и  $k'$  статистически совершенно независимы, следовательно

$$\overline{\delta_k \delta_{k'}} = 0 \text{ при } k \neq k'. \quad (2.8)$$

Из формулы (2.7) прежде всего видно, что среднее квадратичное отклонение, как и следовало ожидать, уменьшается, если увеличить интервал времени  $\tau$ , для которого определяется среднее отклонение тока; тогда лучше сглаживаются неравномерности тока. При увеличении полного тока квадратичное отклонение растет, но таким образом, что

$$\frac{\overline{\delta_k^2}}{i_0^2} = \frac{e}{i_0 \tau},$$

т. е. отношение среднего квадратичного отклонения к среднему току (относительная флуктуация) уменьшается при увеличении силы тока. Для нас важно то, что в выражении для  $\overline{\delta_k^2}$  входит элементарный заряд  $e$ . Флуктуации тока увеличились бы, если бы увеличился элементарный заряд электричества.

Тот факт, что  $e$  входит явно в выражение для флуктуаций тока, указывает на возможность определения величины элементарного заряда, исходя из шрот-эффекта. Правда, непосредственное измерение среднего квадратичного отклонения невозможно, так что с одной лишь этой формулой экспериментатор далеко не уйдет. Однако, мы попробуем теперь исследовать шрот-эффект с несколько иной точки зрения, откуда будет вытекать возможность экспериментальной проверки теории, а также, в связи с этим, возможность определения  $e$ .

Основная идея при этом заключается в следующем. Если бы не было шрот-эффекта, т. е. если бы электроны попадали на анод через совершенно одинаковые промежутки времени, то мы имели бы чисто периодический ток с основной частотой  $\omega = \frac{2\pi}{t_0} = 2\pi n$ , где  $t_0 = \frac{1}{n}$  означает промежуток времени между попаданиями двух следующих друг за другом электронов, так как  $n$  есть число электронов, попадающих на анод в одну секунду.

Гармонический анализ такого тока привел бы к ряду Фурье с этой главной частотой. Для того чтобы найти порядок величины этой частоты, предположим, что ток в трубе равен 1 миллиамперу; этому соответствовала бы основная частота  $\omega \sim 4 \cdot 10^{16}$  сек.<sup>-1</sup>, лежащая в „ультрафиолетовой“ области спектра частот, т. е. далеко за областью электрических колебаний. Иное дело, когда электроны попадают на анод по законам статистики, т. е. совершенно нерегулярно. В этом случае гармонический анализ дает в общем непрерывный спектр частот, распространенный на целую спектральную область, и, следовательно, обладающий очень большим числом компонент также и в области частот электрических колебаний. Конечно, зависимость интенсивности в спектре от частоты будет испытывать очень большие колебания во времени; но так как спектр в общем непрерывен, то можно усреднить интенсивность по узким спектральным промежуткам ( $\ll \omega$ ) и, как показал Шоттки, получить при совер-

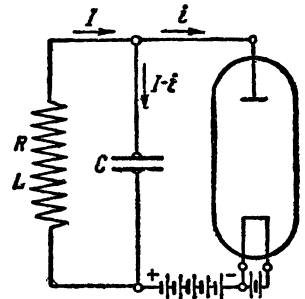


Рис. 3. Схема установки для наблюдения шрот-эффекта.

шенно нерегулярном попадании электронов на анод такое спектральное распределение, средняя интенсивность которого постоянна во всей спектральной области. Однако, в дальнейшем мы не будем пользоваться этим фактом, и поэтому не станем приводить его доказательства.

Исследование флюктуаций тока возможно благодаря тому, что параллельно с разрядной трубкой включается колебательный контур с определенной собственной частотой, который откликается на близкие к этой частоте компоненты Фурье тока в трубке; таким образом при помощи резонанса из большого числа налагающихся друг на друга различных колебаний тока в трубке выделяются как раз те, которые по своей частоте близки к частоте колебательного контура. Пусть колебательный контур характеризуется омическим сопротивлением  $R$ , самоиндукцией  $L$  и емкостью  $C$ ; тогда его собственная частота (в случае слабого затухания) равна

$$\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

а коэффициент затухания

$$\rho = \frac{R}{L}.$$

Напишем дифференциальное уравнение колебательного процесса при чисто емкостной связи, т. е. предположим, следовательно, что индуктивное действие колебательного контура на разряд в разрядной трубке настолько мало, что им можно пренебречь. Если  $I$  и  $i$  — токи в колебательном контуре и в разрядной трубке, то в ветви конденсатора пойдет ток  $I - i$ , и для разности потенциалов  $\varphi$  на обкладках конденсатора получим уравнение

$$I - i = C \frac{d\varphi}{dt},$$

так как  $C\varphi$  есть заряд конденсатора. С другой стороны, имеет место равенство:

$$RI + \varphi + L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Если продифференцировать это равенство по  $t$  и потом заменить  $\frac{d\varphi}{dt}$  его значением, указанным выше, то получим:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} (I - i) = 0,$$

или, после деления на  $L$ ,

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \rho \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 i. \quad (2.9)$$

Мы ставим себе задачу определить из этого равенства среднее по времени значение квадрата тока  $\bar{I}^2$ , протекающего в колебательном контуре, причем о ходе функции  $i(t)$  мы знаем лишь то, что задано уравнениями от (2.3) до (2.8). Легко проверить подстановкой, что интеграл уравнения (2.9) для любой заданной функции  $i(t)$  имеет вид:

$$I(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega} \int_{-\infty}^t i(t') e^{-\frac{\rho}{2}(t-t')} \sin \omega(t-t') dt'. \quad (2.10)$$

При этом  $\omega$  имеет значение:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\rho^2}{4}}.$$



После подстановки  $t - t' = \frac{p}{2}$  наше точное решение уравнения принимает вид

$$I(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega} \int_0^{\infty} i(t - \vartheta) e^{-\frac{p}{2}\vartheta} \sin \omega \vartheta d\vartheta. \quad (2.11)$$

Разделим время  $\vartheta$ , предшествующее данному моменту времени  $t$ , на равные интервалы  $\tau$ , как это мы делали выше. При этом  $\tau$  должно быть мало по сравнению с периодом собственных колебаний контура  $\frac{2\pi}{\omega}$ . В этом случае мы можем при интегрировании по отдельному интервалу  $\tau$  считать множитель  $e^{-\frac{p}{2}\vartheta} \sin \omega \vartheta$  постоянным. Его значение в  $k$ -том интервале можно считать приближенно равным

$$e^{-\frac{p}{2}k\tau} \sin \omega k\tau.$$

Для остающегося интеграла

$$\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} i(t - \vartheta) d\vartheta = \tau i_k$$

мы воспользуемся обозначением, введенным в (2.3) и (2.4). Тогда выражение (2.11) примет вид суммы:

$$I = \frac{\omega_0^2}{\omega} \tau \sum_{k=0}^{\infty} i_k e^{-\frac{p}{2}k\tau} \sin \omega k\tau.$$

Таким образом, квадрат тока дается выражением

$$I^2 = \frac{\omega_0^4 \tau^2}{\omega^2} \sum_k \sum_{k'} i_k i_{k'} e^{-\frac{p}{2}(k+k')\tau} \sin \omega k\tau \sin \omega k'\tau. \quad (2.12)$$

В данном случае нумерация интервалов  $k$  идет от момента  $t$  в прошедшее. Если составить выражения для  $I^2$  для различных моментов  $t$ , то одинаковым значкам  $k$  всегда будут соответствовать разные интервалы. Однако, время между двумя интервалами, которые соответствуют двум числам  $k$  и  $k'$ , остается всегда постоянным. Следовательно, при усреднении по времени получим сначала, согласно (2.4) и (2.5),

$$\overline{i_k i_{k'}} = i_0^2 + \overline{\delta_k \delta_{k'}}.$$

Но из формул (2.7) и (2.8) следует, что

$$\overline{i_k i_{k'}} = i_0^2 \text{ для } k \neq k', \quad (2.13a)$$

а

$$\overline{i_k^2} = i_0^2 + \frac{i_0 e}{\tau}. \quad (2.13b)$$

Поэтому

$$\overline{I^2} = \frac{\omega_0^4}{\omega^2} \left\{ i_0^2 \tau^2 \sum_k \sum_{k'} e^{-\frac{p}{2}(k+k')\tau} \sin \omega k\tau \sin \omega k'\tau + i_0 e \tau \sum_k e^{-\frac{p}{2}k\tau} \sin^2 \omega k\tau \right\}.$$

Полученные суммы, ввиду сделанного предположения о малости  $\tau$ , следует снова заменить интегралами и таким путем их вычислить.

Для двойной суммы мы получим:

$$\tau^2 \sum_k \sum_{k'} \dots = \left\{ \int_0^\infty e^{-\frac{\rho}{2}\vartheta} \sin \omega\vartheta \, d\vartheta \right\}^2 = \left( \frac{\omega}{\frac{\rho^2}{4} + \omega^2} \right)^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^4},$$

а для простой суммы:

$$\tau \sum_k \dots = \int_0^\infty e^{-\rho\vartheta} \sin^2 \omega\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{2\rho} \left( 1 - \left( \frac{\rho}{2\omega_0} \right)^2 \right) = \frac{1}{2\rho} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

(Для интегрирования целесообразно выразить  $\sin \omega\vartheta$  по формуле

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

через показательные функции).

Эти значения двух сумм позволяют написать выражение для среднего квадрата тока в колебательном контуре в виде;

$$\overline{I^2} = i_0^2 + \frac{i_0 e \omega_0^2}{2\rho}. \quad (2.14)$$

Так как  $\bar{I}$  (среднее значение тока) равно  $i_0$ , то для среднего квадратичного отклонения получаем:

$$\overline{\Delta I^2} = \overline{(I - \bar{I})^2} = \frac{i_0 e \omega_0^2}{2\rho}. \quad (2.14a)$$

Наш вывод остается строгим также при произвольно большом затухании  $\rho$ . В результат не входит собственная частота контура  $\omega$ , а только величина  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Замечательно, что из постоянных, характеризующих колебательный контур, самоиндукция вообще не входит в результат. В самом деле, подставляя в (2.14) значения

$$\rho = \frac{R}{L}$$

и

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

мы получаем:

$$\overline{I^2} = i_0^2 + \frac{i_0 e}{2RC}. \quad (2.14b)$$

Для теплоты, выделяющейся в колебательном контуре, получается таким образом интересное выражение:

$$\overline{RI^2} = Ri_0^2 + \frac{i_0 e}{2C} = R(\bar{I})^2 + n \frac{e^2}{2C}. \quad (2.15)$$

Оно состоит из части, соответствующей постоянному току и зависящей только от сопротивления, и из части, соответствующей флуктуациям тока и зависящей только от емкости. Заметим, что  $\frac{e^2}{2C}$  есть работа, которую необходимо затратить для того, чтобы дать конденсатору заряд  $e$ . Следовательно, эта работа представляет собою точное выражение доли одного электрона в образовании флуктуационной части джоулева тепла. Для предельного случая, когда сила тока чрезвычайно мала, член  $R(\bar{I})^2$  в формуле (2.15), соответствующий постоянному току, исчезающе мал по сравнению с флуктуационным членом. Если  $i_0$  настолько

мало, что конденсатор, заряженный отдельным элементарным зарядом  $e$ , разряжается прежде, чем появится следующий элементарный заряд, то выражение  $\pi \frac{e^2}{2C}$  непосредственно дает джоулево тепло, выделяемое в 1 секунду. Это замечание не в состоянии, конечно, заменить строгий вывод формулы (2.13), но оно дает дополнительную необычайно наглядную интерпретацию этой формулы.

Для измерения элементарного заряда с помощью уравнения (2.14) надо конечно, стремиться к тому, чтобы флюктуационный член  $\frac{i_0 e}{2RC}$  был как можно больше по сравнению с постоянным членом  $i_0^2$ . Отношение этих двух величин

$$\frac{\overline{\Delta I^2}}{(\bar{I})^2} = \frac{e}{2CRi_0},$$

если не считать коэффициента  $1/2$ , равно отношению напряжения, до которого конденсатор заряжается зарядом  $e$ , к вызываемому постоянным током  $i_0$  падению потенциала вдоль сопротивления  $R$ .

Измерения  $\overline{\Delta I^2}$  в колебательном контуре были произведены Гартманом с помощью телефона, а в более точных опытах (Хэлль и Вильямс, Вильямс и Винцент) измерялось выделяемое тепло (т. е.  $\bar{I}^2$ ) при помощи термоэлементов. При этом производились не абсолютные измерения, а лишь сравнение акустического или теплового эффектов, вызываемых флюктуациями (оба эффекта пропорциональны квадрату тока), с соответствующими значениями тех же эффектов, производимых переменным током той же частоты и заданной амплитуды. Другими словами, непосредственно сравнивалось  $\overline{\Delta I^2}$  шротэфекта с  $\overline{\Delta I^2}$  заданного переменного тока. Так как остальные величины, входящие в уравнение (2.14а) (величины  $\omega_0$ ,  $\rho$ ,  $i_0$ ), легко измерить, то таким путем можно определить элементарный заряд  $e$ . Измерения Гартмана не дали удовлетворительных результатов, но позднейшие измерения теплового эффекта дали значения  $e$ , в среднем действительно оказавшиеся равными точному милликэновскому числу (с максимальной ошибкой в  $10/0$ ).

**§ 3. Отношение заряда электрона к массе.** Напомним общеизвестный в настоящее время опыт, заключающийся в пропускании тока от раскаленного катода через хорошо эвакуированный стеклянный сосуд. Если катод  $K$ , расположенный как показано на рис. 4, достаточно накален, то батарея даст постоянный ток в замкнутой цепи, состоящей из проводов  $AB$ , пространства между электродами (вакуума)  $AK$  и провода  $KD$ . Ток можно поддерживать произвольно долгое время, причем ни анод, ни катод не будут испытывать ни малейших химических изменений. Внутри проводов этот ток ничем не отличается от обычного электрического тока. Из этих фактов следует, что:

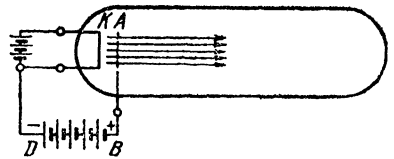


Рис. 4. Схема ускорения электронов от накаленного катода к сетке.

1. Электричество, движение которого внутри металла мы наблюдаем как электрический ток, при подходящих условиях может выходить из металла в вакуум.
2. Такое движение электричества не связано с переносом вещества, который можно было бы обнаружить химическим путем.
3. Это электричество состоит исключительно из отрицательных

зарядов, так как для его выхода в вакуум существенны только материал и температура катода (выпрямительное действие).

Более подробное изучение природы электричества, выходящего из катода — катодных лучей, оказалось возможным вследствие их способности отклоняться в электрическом и магнитном полях. Предположим, что катодные лучи состоят только из одинаковых частиц, имеющих заряд  $e$ , массу  $m$  и скорость  $v$ ; тогда опыты с их отклонением в электрическом и магнитном полях позволяют измерить величины

$$\frac{e}{m} \text{ и } v.$$

Возможность этого измерения вытекает из уравнения движения очень маленького пробного шарика с зарядом  $e$  и массой  $m$  в заданном электромагнитном поле  $E, H$ . Мы сейчас приведем это уравнение движения, поскольку оно необходимо для понимания опытов с отклонением. По закону Ньютона (сила  $F$  равна произведению массы на ускорение) имеем:

$$F = m \frac{dv}{dt}.$$

Часть этой силы, происходящая от электрического поля (как следует из определения  $E$ , равна  $eE$ . Несколько сложнее выражается часть силы, зависящая от  $H$ . Известно, что сила  $f$ , действующая в магнитном поле  $H$  на единицу объема проводника, через который проходит ток с плотностью  $j$ , равна

$$f = \frac{1}{c} j \times H.$$

Пусть тело с объемной плотностью заряда  $\rho$  движется со скоростью  $v$ . Через неподвижный элемент поверхности  $dS$  с направлением нормали  $n$  будет за время  $dt$  проходить количество электричества  $\rho v_n dS dt$ ; произведение  $\rho v$  имеет значение плотности тока. Следовательно, на единицу объема нашего движущегося заряда действует сила

$$f = \frac{\rho}{c} v \times H.$$

Поэтому, если  $dV$  есть элемент объема заряженного тела, то общая действующая на него сила равна

$$F = \int f dV = \frac{e}{c} v \times H,$$

так как  $\int \rho dV = e$ . При этом мы предполагаем, что векторы  $v$  и  $H$  можно считать постоянными во всем объеме, занимаемом зарядом. Следовательно, полная сила, действующая на электрон, — „сила Лорентца“ — равна

$$F = e \left( E + \frac{v}{c} \times H \right). \quad (3.1)$$

Поэтому искомое уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = e \left( E + \frac{v}{c} \times H \right). \quad (3.2)$$

В большинстве случаев этого уравнения вполне достаточно для истолкования опытов с отклонением зарядов. Следует все же заметить, что и левая и правая части равенства (3.2) верны лишь приближенно. Левая часть — вследствие того, что при очень больших скоростях масса не остается постоянной, а неограниченно возрастает по мере приближения  $v$  к скорости света  $c$ . Вместо  $\frac{dv}{dt}$  должно стоять точное выражение

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

В правой части, собственно говоря, отсутствует еще один член, которым учитывается то обстоятельство, что ускоряющее поле, действующее на неравномерно движущийся электрон, нельзя считать одинаковым на всем протяжении электрона. Ускоренно движущийся электрон является источником электромагнитных волн, энергия которых создается за счет кинетической энергии электрона. Это „действие электрона на самого себя“ (торможение вследствие излучения) мы рассмотрим впоследствии.

Во всех ниже рассматриваемых применениях уравнения  $m \frac{dv}{dt} = F$  этот член, впрочем, не играет никакой роли, так что мы можем здесь принимать во внимание лишь внешние поля  $E$  и  $H$ , однородные на всем протяжении электрона. Особое значение уравнения (3.2) заключается в том, что правая часть его с упомянутыми поправками представляет с точки зрения электронной теории единственную силу, существующую в природе (кроме силы тяготения).

Прежде всего заметим, что по формуле (3.2) магнитное поле не влияет на абсолютную величину скорости; в самом деле, умножая обе части (3.2) скалярно на  $v$ , получаем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = e E \cdot v.$$

Изменение кинетической энергии вызывается только электрическим полем  $E$ . Далее, если  $E$  выражается через потенциал, т. е.

$$E = - \text{grad } \varphi,$$

то имеет место уравнение:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = - e \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) = - e \frac{d\varphi}{dt}.$$

Здесь потенциал  $\varphi$ , меняющийся только в пространстве, становится функцией времени благодаря тому, что мы относим его к тому месту,

где в данный момент находится электрон. Таким образом закон сохранения энергии, выражаемый уравнением

$$\frac{1}{2} m v^2 + e \varphi = \text{const.}$$

или

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = e (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3.3)$$

остается в силе также при наличии любого магнитного поля.

Далее рассмотрим случай, когда действует только однородное магнитное поле, которое мы направим вдоль положительной оси  $z$ :  $H_x = H_y = 0$ ,  $H_z = H$ . Для этого случая из (3.2) мы получаем следующие уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= \frac{e}{c} \dot{y} H, \\ m \ddot{y} &= -\frac{e}{c} \dot{x} H, \\ m \ddot{z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Третье уравнение означает, что магнитное поле  $H$  вообще не влияет на движение в направлении поля. Поэтому мы можем рассматривать только проекцию движения в плоскости  $x, y$  (составляющие скорости  $v$  перпендикулярны к  $H$ ).

Для интегрирования первых двух уравнений (3.4) воспользуемся описанием движения в комплексной плоскости  $x, iy$ ; для этого введем комплексную величину

$$\zeta = x + iy.$$

Если умножить второе уравнение (3.4) на  $i$  и сложить с первым, то для  $\zeta$  получится уравнение:

$$\ddot{\zeta} = -i \frac{eH}{mc} \dot{\zeta} = -i \omega \dot{\zeta}, \quad (3.4a)$$

где для краткости введено обозначение  $\omega = \frac{eH}{mc}$ . При начальных условиях  $\zeta_{t=0} = \zeta_0$  и  $\dot{\zeta}_{t=0} = \dot{\zeta}_0$  первый интеграл уравнения (3.4a) дает:

$$\dot{\zeta} = \dot{\zeta}_0 e^{-i\omega t},$$

а второй:

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_0^t \dot{\zeta} dt = \zeta_0 + \frac{\dot{\zeta}_0}{i\omega} (1 - e^{-i\omega t}). \quad (3.5)$$

Таким образом в комплексной плоскости вектор  $\zeta(t)$  оказывается суммой, трех комплексных векторов

$$\zeta_0, \quad + \frac{\dot{\zeta}_0}{i\omega}, \quad - \frac{\dot{\zeta}_0}{i\omega} e^{-i\alpha}, \quad \text{где } \alpha = \omega t,$$

Пусть на рис. 5  $A$  представляет собой начальное положение ( $OA = \zeta_0$ );  $\vec{AA}'$  — направление начальной скорости. Направление  $R = \vec{AB} = \frac{\zeta_0}{i\omega}$  получим, повернув  $\vec{AA}'$  на  $90^\circ$  по часовой стрелке. Наконец  $\vec{BC} = -Re^{-i\alpha}$ . Следовательно, траектория представляет собою окружность с центром в точке  $B$  и с радиусом

$$R = \frac{vmc}{eH}; \quad (3.6)$$

движение по этой окружности происходит с постоянной угловой скоростью

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \quad (3.6a)$$

Впрочем, уравнение (3.6) следует непосредственно также и из того, что при круговом движении центробежная сила  $\frac{mv^2}{R}$  как раз должна компенсироваться силой Лоренца  $\frac{evH}{c}$ .

Из уравнения (3.6) вытекает важный способ получения катодных лучей строго определенной скорости. Именно, если по окружности радиуса  $R$ , плоскость которой перпендикулярна к  $H$ , расположить некоторое число узких диафрагм и пропустить (также  $\perp$  к  $H$ ) пучок катодных лучей через первую диафрагму, то через другие диафрагмы пройдут лишь те электроны, скорость которых выражается равенством

$$v = \frac{eH}{mc} R.$$

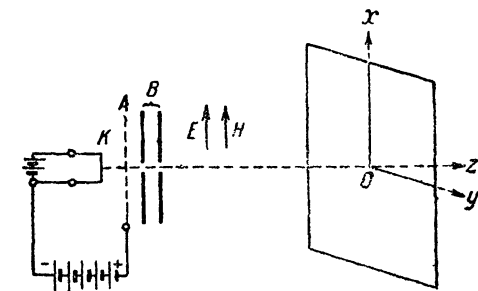


Рис. 6. Измерение  $\frac{e}{m}$  при помощи одновременного отклонения в электрическом и магнитном полях.

Отклоняющего поля встречают расположенный перпендикулярно к их направлению экран, находящийся на расстоянии  $l$  от диафрагм, в точке  $O$ . Эту точку мы примем за начало координатной системы  $x, y$ , изображенной на экране. Если лучи состоят из положительно заряженных частиц, то точка попадания частиц на экран переместится под влиянием

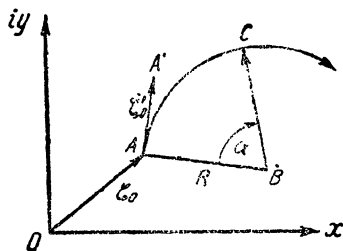


Рис. 5. Траектория  $AC$  в однородном магнитном поле при начальных условиях  $\zeta = \zeta_0$  и  $\zeta' = \zeta_0'$ .

электрического поля  $E$  по направлению оси  $x$ , а под влиянием магнитного поля  $H$  — по направлению оси  $y$ , так что при одновременном действии обоих полей она будет иметь координаты  $x$ ,  $y$ , которые мы сейчас вычислим. Предположим, что отклонения  $x$  и  $y$  весьма малы по сравнению с расстоянием  $l$ , так что можно ограничиться приближенным подсчетом. Электрическое поле  $E$  действует только на координату  $x$ :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = eE.$$

Мы отсчитываем время с момента прохождения через диафрагму и, следовательно, при  $t=0$  имеем:  $x=0$  и  $\dot{x}=0$ , так что

$$mx = \frac{1}{2} eEt^2.$$

Время  $t$ , в течение которого пучок проходит расстояние от диафрагмы до экрана, равно  $\frac{l}{v}$ , так что

$$x = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{El^2}{v^2}.$$

Для отклонения вдоль оси  $y$  имеем:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e}{c} v_2 H.$$

Если отклонения малы, как мы и предположили, то  $v_x \approx v$ . Тогда в результате интегрирования получается:

$$y = \frac{1}{2} \frac{e}{mc} \frac{Hl^2}{v}.$$

Следовательно, измерение отклонений  $x$  и  $y$  дает значения  $\frac{e}{m}$  и  $v$ :

$$\frac{y}{x} = \frac{H}{E} \frac{v}{c} \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{H^2 l^2}{c^2 E}.$$

Следы частиц, имеющих одинаковые скорости  $v$ , но разные отношения  $\frac{e}{m}$  (рис. 7), лежат на прямой  $x = \text{const} \cdot y$ , проходящей через начало координат. В экспериментальном отношении важнее второй случай, когда лучи содержат только один сорт частиц, движущихся с различными скоростями, т. е.  $\frac{e}{m}$  одинаково для всех частиц; тогда на пластинке получится изображение параболы  $x = \text{const} \cdot y^2$ . При проведении указанного измерения, которое видоизменялось на самые различные лады, для катодных лучей с небольшими скоростями всегда получались параболы, предсказываемые теорией; этим и доказывается, что эти лучи состоят из частиц только одного сорта, а именно, из одинаковых отрицательно заряженных частиц. Для отношения  $\frac{e}{m}$  измерения дают величину  $1,759 \cdot 10^7$  эл.-магн. CGS-единиц, т. е. величину,

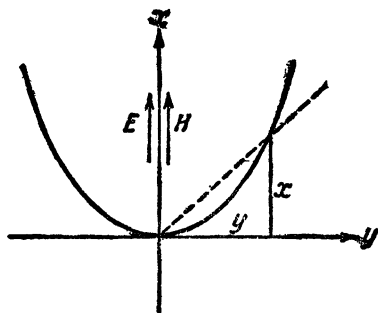


Рис. 7. Экран в опыте с отклонением катодных лучей.



которая приблизительно в 1800 раз больше, чем соответствующая величина, характеризующая ион водорода ( $F = 96500$  кулон  $= 9650$  эл.-магн. CGS-единиц). Следует особенно подчеркнуть, что опыты с отклонением лучей в магнитном и электрическом полях ни коим образом не позволяют измерить величину  $e$ , так как в основное уравнение (3.2) входит только отношение  $\frac{e}{m}$ .

В случае очень быстрых катодных лучей, т. е. когда  $v$  порядка скорости света, опыт дает кривую, которая около своей вершины сильно отличается от параболы. Здесь сказывается возрастание инертной массы при увеличении скорости — эффект, не принятый нами во внимание при выводе формул.

Другой способ измерения  $\frac{e}{m}$  основан на том факте, что по уравнению (3.6а) угловая скорость  $\omega$ , с которой электрон движется по круговой траектории в магнитном поле, не зависит от радиуса круга. Время, необходимое для прохождения круговой траектории, составляет

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi c}{\frac{e}{m} H}$$

Как указал Буш (H. Busch), этим обстоятельством можно воспользоваться для фокусировки пучка катодных лучей с помощью продольного магнитного поля. Такая установка схематически изображена на рис. 8. Электроны, выходящие из накаленной проволоки, сначала ускоряются напряжением  $V$  в направлении оси  $z$ . С достигнутой

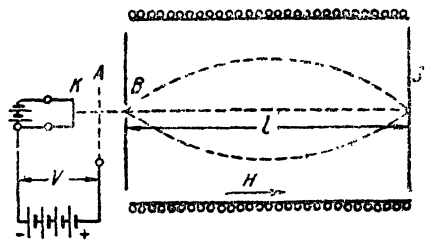


Рис. 8. Фокусировка расходящегося пучка катодных лучей продольным магнитным полем.

при этом скоростью ( $\frac{mv^2}{2} = eV$ ) они проходят через диафрагму, а затем, пройдя расстояние  $l$ , попадают на флюоресцирующий экран, на котором сначала получается размытое пятно, так как электроны выходят из диафрагмы, образуя не строго параллельный пучок. Если теперь включить однородное магнитное поле, параллельное направлению лучей, то пути электронов будут искривляться по винтовым линиям. Каждый виток винта будет пройден за время  $\tau = \frac{2\pi c}{\frac{e}{m} H}$ . Следовательно, шаг винта

во всех случаях равен  $v_z \tau$ . Если магнитное поле таково, что шаг винта как раз равен расстоянию  $l$ , то все электроны сделают ровно один оборот по винтовой линии. Таким образом на экране все они сосредоточатся в пятнышке, которое по своим размерам не больше, чем сама диафрагма. Отсюда вытекает условие фокусировки:

$$l = \frac{2\pi c v_z}{\frac{e}{m} H};$$

а так как

$$v_z \approx v = \sqrt{\frac{2eV}{m}},$$

то это дает:

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 c^2 V}{H^2 l^2}.$$

При заданном напряжении  $V$  и расстоянии  $l$ , для измерения  $\frac{e}{m}$  следует лишь подобрать такую силу поля  $H$ , при которой пятно на экране в первый раз становится резким. Эта идея Буша тоже привела к разработке точного метода измерения  $\frac{e}{m}$ .

Для того чтобы оценить огромную важность вышеописанных выводов, приведем лишь некоторые связанные с ними результаты экспериментальной физики:

- 1) измерение  $\frac{e}{m}$  для медленных катодных лучей:
- 2) проверка формулы Эйнштейна

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

для быстрых катодных лучей и  $\beta$ -частиц;

- 3) измерение отношения  $\frac{e}{m}$  для канальных лучей (положительно заряженные ионы) и, следовательно, измерение массы  $m$  отдельных ионов или атомов (открытие изотопов неона Дж. Дж. Томсоном, распространение и уточнение Астоном методики определения атомного веса);
- 4) анализ распределения скоростей  $\beta$ -частиц при радиоактивном распаде.

**§ 4. Масс-спектрография.** В связи с выводами последнего параграфа об определении  $\frac{e}{m}$  для катодных лучей мы, в виде отступления, сделаем краткий обзор методов определения массы атомов (и молекул) путем опытов с отклонением в электрических и магнитных полях. Эти непосредственные измерения  $\frac{e}{m}$  каждой отдельной заряженной частицы (иона) особенно важны потому, что благодаря им впервые оказалось возможным исследование изотопов; химические же методы определения атомного веса всегда дают только средние величины для большого числа частиц. При помощи опытов с отклонением в магнитном и электрическом полях Дж. Дж. Томсон первый доказал существование изотопов; он показал, что обыкновенный неон, атомный вес которого, измеренный химическим путем, равен 20,2, состоит из смеси двух изотопов с атомными весами 20,0 и 22,0.

Свой опыт Томсон производил описанным выше в § 3, методом парабол<sup>4</sup>, при котором заряженные частицы на своем пути подвергаются одновременному действию электрического и параллельного ему магнитного поля. Электрическое поле загибает траекторию частички в направлении, параллельном полю, а магнитное — в направлении, перпендикулярном к полю. На пластинке, расположенной перпендикулярно к направлению распространения лучей, следы частиц, как известно, образуют параболы; следы частиц с одинаковым отноше-

виem  $\frac{e}{m}$  лежат на одной и той же параболе, причем следы более быстрых и поэтому отклоняемых в меньшей степени частиц располагаются ближе к вершине параболы.

Ученик Томсона Астон пользуется значительно видоизмененным методом: он посылает ионы сначала через электрическое, а затем через перпендикулярное к нему магнитное поле, которое компенсирует отклонение в электрическом поле. Схема прибора Астона изображена на рис. 9. Диафрагмированный пучок лучей проходит между пластинками конденсатора и при этом отклоняется в большей или меньшей степени, в зависимости от массы и скорости отдельных частиц; таким образом он принимает веерообразную форму. Из этого веера лучей Астон выделяет при помощи диафрагмы *B* узкий пучок лучей, который проходит через магнитное поле и отклоняется в противоположном направлении. На рис. 9 магнитное поле направлено перпендикулярно к плоскости рисунка. Если магнитное поле достаточно сильно по сравнению с электрическим, то расходящийся пучок лучей, который выходит из диафрагмы *B*, снова делается сходящимся. Лучи, сильнее отклоняющиеся в конденсаторе, будут сильнее отклоняться и в магнитном поле, а поэтому пути частиц с определенным значе-



Рис. 9. Масс-спектрограф Астона.

нием  $\frac{e}{m}$  будут сходиться в определенной точке (фокусе). В методе Астона существенным является то, что точки фокусов лучей с различными отношениями  $\frac{e}{m}$  лежат приблизительно на одной прямой. Если вдоль нее поместить фотографическую пластинку, то на ней получают отдельные резкие почернения, которые соответствуют отдельным фокусам и, следовательно, различным значениям  $\frac{e}{m}$ . Таким образом на пластинке возникает „спектр масс“ атомов, содержащихся в первичном луче.

Рассмотрим эти явления несколько подробнее и сделаем математические выкладки. Частица отклоняется в конденсаторе на угол  $\theta$ , причем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} \frac{eEd}{mv^2}, \tag{4.1}$$

где  $d$  — длина конденсатора. При этом не принято во внимание искажение поля у краев конденсатора; кроме того, эта формула верна только в том случае, если луч входит параллельно к пластинкам конденсатора. Однако, если мы ограничиваемся малыми углами отклонения  $\theta$ , то формула

$$\theta \approx \frac{1}{2} \frac{eEd}{mv^2} \tag{4.1a}$$

остается верной и для тех лучей, которые входят в конденсатор наклонно к пластинкам. Очень важно заметить, что выходящие из конденсатора лучи

кажутся, как нетрудно доказать, исходящими из одной точки  $Z$ , которая лежит на продлении падающего луча.

Через диафрагму  $B$  проходят только те лучи, угол отклонения которых приблизительно равен определенному значению  $\theta_0$ ; в таком случае из (4.1) следует, что через диафрагму  $B$  пройдет только те частицы, кинетическая энергия которых приблизительно равна определенной постоянной величине  $E_0$ . Пока что ограничимся частицами с определенным отношением  $\frac{e}{m}$ . Пусть углу отклонения  $\theta_0$  соответствует скорость  $v_0$ . Изменению угла  $d\theta$  соответствует, согласно (4.1), относительное изменение скорости

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\theta}{\sin 2\theta}, \text{ или приближенно } \frac{dv}{v} = -\frac{d\theta}{2\theta}. \quad (4.2)$$

В магнитном поле, которое мы также считаем однородным, ионы движутся по окружностям радиуса

$$R = \frac{mvc}{eH}; \quad (4.3)$$

угол отклонения в магнитном поле выражается формулой

$$\Phi = \frac{L}{R}, \quad (4.4)$$

где  $L$  — длина пути частиц в магнитном поле. Она определяется размерами магнитного поля; Астон работает с полюсными наконечниками круглой формы, и поэтому магнитное поле также имеет круговое поперечное сечение, радиус которого мы положим равным  $\rho$ ; искажением поля у краев мы здесь также будем пренебрегать. Кроме того, обозначим расстояние между центром  $O$  круглого сечения магнитного поля и центром лучей  $Z$  буквой  $l$  и допустим, что лучи с углом отклонения  $\theta_0$  направлены к центру  $O$ .

Задача теперь состоит в том, чтобы найти точку пересечения  $P$  двух соседних лучей (с углами отклонения, приблизительно равными  $\theta_0$  и  $\theta_0 + d\theta$ ) и определить расстояние  $r$  этой точки от  $O$ . Для малых углов отклонения  $\Phi$  на этот вопрос ответить легко: расстояние от  $Z$  до точки пересечения этих двух лучей приблизительно равно  $l + r$ ; угловое расхождение  $d\theta$  тех же лучей, вызываемое электрическим полем, обусловило бы расстояние  $(l + r)d\theta$  между их концами. Однако, это расхождение лучей будет скомпенсировано противоположно направленным отклонением в магнитном поле; если  $d\Phi$  есть разность между углами отклонения лучей в магнитном поле, то должно иметь место приближенное соотношение:

$$(l + r) d\theta = r d\Phi,$$

так как расхождение лучей в магнитном поле приблизительно равно  $r d\Phi$ . Следовательно,

$$r = \frac{l}{\frac{d\Phi}{d\theta} - 1}. \quad (4.5)$$

В дальнейшем мы покажем, что это условие строго выполняется также для больших углов  $\Phi$ . Но сперва доведем до конца наш приблизительный расчет. При малых углах отклонения  $\Phi$ , в первом приближении  $L$  не изменится, что легко видеть из геометрических соотношений; поэтому приблизительно

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -\frac{dR}{R} = -\frac{dv}{v} = \frac{d\theta}{2\theta},$$

Тогда из (4.5) следует соотношение

$$r(\Phi - 2\theta) = 2l\theta, \quad (4.6)$$

которое легко интерпретируется следующим образом. Если через  $Z$  провести прямую под углом  $2\theta$  к направлению  $ZO$  (рис. 10), то уравнение (4.6) показывает, что искомая точка пересечения  $P$  лежит на этой прямой. В самом деле (4.6) есть не что иное, как теорема синусов, примененная к треугольнику  $ZOP$ , при условии, что оба угла малы, и что, следовательно, мы можем заменить синусы углами. Это утверждение, разумеется, справедливо для всех значений  $\frac{e}{m}$ , так как наклон  $2\theta_0$  прямой  $ZP$  определяется исключительно геометрическими соотношениями частей установки; следовательно, все точки фокусов лежат на этой прямой.

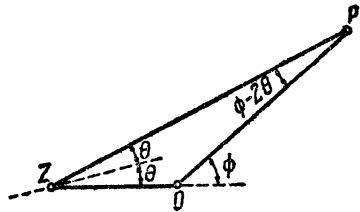


Рис. 10. Построение точки пересечения  $P$  двух траекторий с одинаковым  $\frac{e}{m}$ , но с различной скоростью.

После этого вывода, справедливого только для малых углов отклонения, мы теперь дадим точный вывод для любых углов и прежде всего докажем общую применимость формулы (4.5). Рассмотрим для этого подробнее прохождение луча в магнитном поле. Как упоминалось выше, необходимо предположить, что луч, отклоненный в конденсаторе на угол  $\theta_0$ , падает нормально к окружности, отменившей магнитное поле; он изгибается в этом поле по дуге круга и, очевидно, выходит опять нормально к той же окружности. Его угол отклонения  $\Phi_0$ , очевидно, определяется формулой:

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi_0}{2} = \frac{\rho}{R}. \quad (4.7)$$

Кроме того, рассмотрим еще второй луч, образующий с первым до попадания в магнитное поле угол  $d\theta$ . Этот луч падает уже не по нормали к окружности, ограничивающей магнитное поле, а под углом  $d\omega$ , причем

$$(l - \rho) d\theta = \rho (d\omega - d\theta),$$

или 
$$d\omega = \frac{l}{\rho} d\theta. \quad (4.8)$$

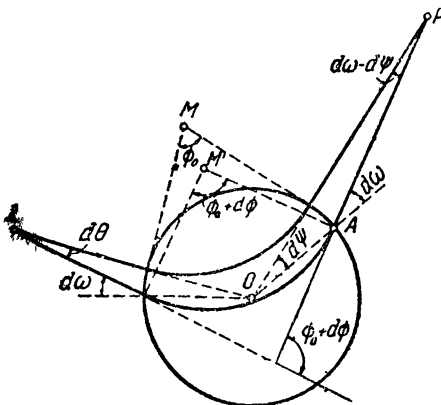


Рис. 11. Фокусировка в масс-спектрографе.

Пусть его отклонение в магнитном поле равно  $\Phi_0 + d\Phi$ . Из магнитного поля он, очевидно, выходит под углом  $d\omega$ ; пусть расстояние между точками выхода двух указанных лучей видно из центра окружности под малым углом  $d\Psi$ . Теперь вычислим положение точки пересечения  $P$  двух лучей. Обозначим расстояние этой точки от  $O$  буквой  $r$ . Из треугольника  $OAP$ , на основании теоремы синусов для малых углов, следует, что

$$r = \frac{\rho d\omega}{d\omega - d\Psi}. \quad (4.9)$$

Преобразуем это равенство; из рисунка 11 легко вывести следующее соотношение между углами:

$$d\Phi - d\omega + d\Psi - d\theta = 0.$$

Введя это соотношение в замечательную формулу (4.9) и, кроме того, пользуясь уравнением (4.8), мы получаем:

$$r = \frac{l d\theta}{d\Phi - d\theta}, \quad (4.10)$$

что в точности совпадает с уравнением (4.5), полученным на основе приближенного расчета.

Мы проведем этот строгий расчет еще несколько дальше и вычислим более точно  $\frac{d\Phi}{d\theta}$ . При переходе от первого из двух рассмотренных выше лучей ко второму угол  $\theta$  меняется по двум причинам. Сначала представим себе, что при постоянном угле  $\theta_0$  скорость частиц возрастает только на величину, определяемую формулой (4.2); затем рассмотрим и поворот луча на угол  $d\theta$ . Увеличение скорости  $dv$  вызывает увеличение радиуса кривизны, а, следовательно, по формуле (4.7), уменьшение угла отклонения на  $d\Phi_1$ :

$$\frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}} = -\frac{dR}{R} = -\frac{dv}{v} = \frac{d\theta}{\sin 2\theta},$$

так что

$$d\Phi_1 = \frac{\sin \Phi}{\sin 2\theta} d\theta.$$

Далее мы должны рассмотреть поворот луча вокруг точки  $Z$  на угол  $d\theta$ . Это влечет за собой удлинение пути луча в магнитном поле на  $dL$ , а, значит, и дополнительное отклонение на угол

$$d\Phi_2 = \frac{dL}{R}.$$

Легко показать, что  $dL = l \sin \Phi d\theta$ , так что для полного изменения получаем:

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{\sin \Phi}{\sin 2\theta} + \frac{l \sin \Phi}{R}. \quad (4.11)$$

Уравнение кривой, на которой расположены точки фокусов, имеет поэтому вид:

$$r = \frac{l \sin 2\theta}{\sin \Phi - \sin 2\theta + \frac{l}{R} \sin \Phi \sin 2\theta}, \quad (4.12)$$

или, на основании равенства (4.7),

$$r = \frac{l \sin 2\theta}{\sin \Phi - \sin 2\theta + \frac{l}{\rho} \sin 2\theta (1 - \cos \Phi)}. \quad (4.13)$$

Прежде всего видно сразу, что это уравнение переходит в (4.6), если углы  $\Phi$  и  $\theta$  малы. Из (4.13) легко можно найти также отступления при переходе к большим углам. Однако, мы не будем здесь подробно обсуждать уравнение (4.13); упомянем только, что это уравнение дает гиперболу, которая при малых значениях угла  $\theta$  очень близка к прямой; одна из ее асимптот, также при небольших  $\theta$ , приближенно совпадает с упомянутой выше прямой, проходящей через точку  $Z$  под углом  $2\theta$  к направлению  $ZO$ .

**§ 5. Явления, вызываемые инерцией свободных электронов в металлах.** Интересный в принципиальном отношении опыт для определения  $\frac{e}{m}$  основан на предположении, что большая электрическая проводимость металлов объясняется существованием свободных электронов. Замечательно, что эта гипотеза, как показали многие исследователи, весьма наглядно подтверждается чисто механическими эффектами.

Первый опыт в этом направлении принадлежит Никольсу (E. F. Nichols). Он исходил из следующего представления: если металлический диск привести во вращение вокруг его оси, то электроны под влиянием центробежной силы должны переместиться к краю диска; поэтому край диска зарядится отрицательно, а середина диска — положительно. Равновесие наступит лишь тогда, когда электрическое поле, созданное смещением зарядов, как раз уравнивает действие центробежной силы на электроны. Если  $\omega$  есть угловая скорость диска, а  $E(r)$  — поле, возникшее на расстоянии  $r$  от оси, то условием равновесия будет равенство

$$m r \omega^2 = e E(r).$$

Проинтегрировав это равенство по  $r$  от 0 до  $R$  (радиус диска), получим разность потенциалов между краем и серединой:

$$V = - \int_0^R E(r) dr = - \frac{m}{e} \frac{R^2 \omega^2}{2}.$$

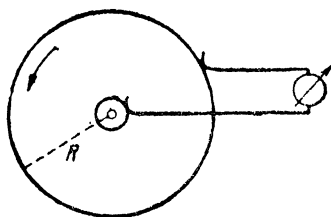


Рис. 12. Электронная центрифуга Никольса.

Чтобы иметь представление о порядке величины этого эффекта, подставим в эту формулу  $R = 10$  см и  $\omega \sim 100$  сек.<sup>-1</sup>, как было в опыте Никольса. Тогда получаем разность потенциалов порядка  $3 \cdot 10^{-10}$  вольт. О статическом измерении этого эффекта, вследствие его малой величины, не может быть речи.

Поэтому Никольс приставлял к краю диска и к его оси скользящие контакты, соединенные с гальванометром. Тогда от края диска к середине через проволоку и гальванометр должен пойти ток, стремящийся выравнять созданные вращением отрицательные заряды на краю диска и положительные на его оси. Однако Никольс не мог с уверенностью констатировать наличие такого тока, так как на ожидаемый эффект накладываются посторонние эффекты, которые возникают вследствие термоэлектродвижущих сил в скользящих контактах, и вследствие других посторонних влияний, имеющих нерегулярный и не поддающийся учету характер; все это не позволяет с уверенностью обнаружить ожидаемый эффект.

Все же этот опыт интересен с теоретической точки зрения, так как здесь мы имеем дело с особым видом электродвижущей силы. Движение электричества здесь происходит вследствие чисто механической причины. Тем не менее, мы можем, как и в других подобных случаях, представить плотность тока  $j$  в виде произведения  $\lambda E^{(e)}$  ( $\lambda$  — удельная проводимость), подразумевая под  $E^{(e)}$  напряженность такого (фиктивного) электрического поля, которая способна вызвать ту же плотность тока, какую вызывает чисто механическая причина. В случае вращающегося диска мы можем говорить о фиктивной электродвижущей силе

которая создала бы такой же ток, какой создает центробежная сила. Эту силу мы должны положить равной

$$\int_0^R E^{(e)} dr = \frac{m}{e} \frac{R^2 \omega^2}{2},$$

так как для того, чтобы перевести заряд  $e$  против центробежной силы от края диска к его середине, мы должны совершить работу

$$\int_0^R Ee dr.$$

Перейдем теперь к описанию аналогичных опытов, которые были произведены Толмэном (Tolman) и его сотрудниками и дали положительные результаты. Первая серия опытов основывалась на том представлении, что при внезапном торможении движущегося металлического тела электроны, первоначально двигавшиеся вместе с металлом, продолжают еще некоторое время двигаться в нем по инерции, до тех пор, пока и они не затормозятся возникающим вследствие разделения зарядов обратным полем или тем сопротивлением, которое они испытывают при движении через ионную решетку металла (джоулево тепло). Это движение электронов относительно металлической решетки должно проявляться в виде кратковременного тока.

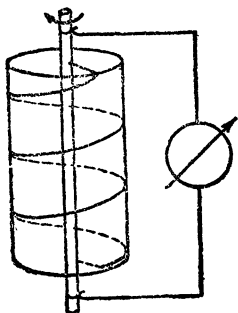


Рис. 13. Эффект инерции электронов проводимости при торможении вращающейся катушки.

Чтобы установить это, Толмэн и Стьюарт (Stewart) воспользовались проволоочной катушкой, вращающейся вокруг своей оси; концы ее обмотки были соединены с баллистическим гальванометром. При внезапной остановке вращающейся катушки действительно можно было констатировать заметное отклонение гальванометра и таким образом измерить полное количество электричества, проходящее через поперечное сечение обмотки при торможении.

Рассмотрим теперь, каким образом это количество электричества  $Q$  зависит от условий опыта (начальная скорость катушки  $v_0$ , длина обмотки  $l$ , общее сопротивление контура и катушки  $R$ ). Здесь мы имеем аналогию с вышеописанным случаем, поскольку движение электричества здесь также обусловлено чисто механической причиной. Поэтому для описания и этого явления полезно ввести фиктивную электродвижущую силу, которая определяется исключительно тем, что вызывает такое же движение электронов, как и действительная механическая причина — торможение катушки.

Мы выведем здесь в общем виде выражение для тока, которое будет справедливо во всех случаях, когда металл приводится в движение каким угодно способом; в частности, оно будет справедливо и в рассмотренном случае вращающегося диска. Если проводник движется с постоянной



скоростью, то при отсутствии внешнего поля никакого тока в нем, конечно, не будет, так как электроны в среднем движутся вместе с ионами металлической решетки. Если же ускорять (или замедлять) движение металла, то электроны, благодаря своей инерции, не сразу примут участие в ускоренном движении. Только со временем, вследствие „трения“ при их движении относительно металлической решетки, т. е. вследствие электрического сопротивления, а также, возможно, вследствие местных накоплений зарядов, они приспособятся к новому состоянию движения металлической решетки.

Если мы хотим достичь того, чтобы свободные электроны в каждый момент времени полностью принимали участие в движении металла, то мы должны приложить такое электрическое поле  $E^{(b)}$ , которое создавало бы в каждой точке ускорение электронов, равное ускорению, которое мы механическим путем сообщаем металлической решетке; следовательно, должно иметь место равенство

$$eE^{(b)} = m\dot{v}.$$

Итак, если бы внутри металла существовало такое поле, то электроны в среднем находились бы в покое относительно металла, когда последний испытывает ускорение указанной величины.

Но в наших опытах такого поля не существует. Это значит, что электроны не принимают участия в ускорении  $\dot{v}$  ионов металла; другими словами, электроны испытывают ускорение —  $\dot{v}$  относительно металла. Поэтому они движутся в металле так, как если бы в нем действовала электродвижущая сила

$$E^{(e)} = -\frac{m}{e}\dot{v}.$$

Таким образом, вводя фиктивную напряженность поля и определяя ее из вышенаписанного уравнения, мы можем также и в общем случае заменить чисто механическую причину, создающую движение электронов относительно металла, эквивалентной фиктивной электрической.

Теперь пойдем дальше и найдем проходящий по металлу ток. По законам электродинамики плотность тока  $j$  равна произведению электропроводности  $\lambda$  на электрическую напряженность, действующую в данном месте. В нашем случае последняя состоит из напряженности внешнего поля, которое может при этом существовать, и из напряженности поля, обусловленного объемными зарядами; эта часть поля является чисто электростатической и поэтому может быть выражена через потенциал; мы обозначим ее через  $E^{(st)}$ . К этому еще присоединяется, согласно всему сказанному, поле  $E^{(e)}$ , которое тоже вызывает движение электронов относительно металла. Следовательно,

$$j = \lambda (E^{(st)} + E^{(e)}) = \lambda \left( E^{(st)} - \frac{m}{e}\dot{v} \right).$$

Следует еще заметить, что введением в это уравнение электропроводности полностью учтено торможение электронов при их движении относительно металла, так как электропроводность именно и характеризует

меру подвижности электронов относительно металлической решетки. Через  $\dot{v}$  обозначено ускорение металла, а не электронов.

В формуле, написанной выше, уже содержится искомый эффект. Разделив уравнение на  $\lambda$  и интегрируя по всему контуру, получаем:

$$\oint \frac{\dot{I}_s}{\lambda} ds = \oint E_s^{(st)} ds + \oint E_s^{(e)} ds,$$

где в левой части написано произведение силы тока на общее сопротивление цепи. Если умножить числитель и знаменатель под знаком интеграла левой части на  $q$  (поперечное сечение проводника в данном месте), то в числителе получим силу тока  $I$ , которая одинакова для каждого сечения проводника и, как постоянная, может быть вынесена за знак интеграла. Остающееся же выражение  $\oint \frac{ds}{q\lambda} = R$  представляет как раз общее сопротивление цепи.

В правой части исчезает интеграл по замкнутому контуру, содержащий электростатическое поле; следовательно, остается только второй интеграл, так что

$$IR = \oint E_s^{(e)} ds = - \oint \frac{m}{e} \dot{v}_s ds.$$

Так как  $\dot{v}$  есть ускорение, которое испытывает металлическая решетка, то оно отлично от нуля только внутри движущегося металла. Этот интеграл, согласно всему вышесказанному, можно рассматривать как некоторую „фиктивную электродвижущую силу“, которая возникает между концами ускоренно движущегося куска металла.

То, что в этой формуле содержится и теория опыта Никольса, обнаружится сейчас же, если мы заменим ускорение  $\dot{v}$  для вращающегося диска через  $-\omega^2$  (центростремительное ускорение). Тогда сразу получится найденное выше выражение для электродвижущей силы, возникающей между краем диска и его серединой.

В рассмотренном нами случае с торможением, проволочной катушки ускорение  $\dot{v}$  направлено по касательной и одинаково для всех точек обмотки; поэтому интеграл принимает вид:

$$IR = - \frac{m}{e} l \dot{v}$$

( $l$  — длина обмотки). О зависимости торможения от времени нам ничего не нужно знать, так как нас интересует не изменение тока со временем, а только интеграл тока, распространенный на все время процесса торможения, т. е. общее количество электричества  $Q$ , протекающее через поперечное сечение проводника. Интегрируя уравнение за промежуток времени  $T$  (продолжительность торможения), мы получаем:

$$QR = - \frac{m}{e} l \int_T \dot{v} dt = \frac{m}{e} l v_0,$$

если перед торможением катушка двигалась со скоростью  $v_0$ , а после торможения остановилась.

Если при помощи баллистического гальванометра измерить количество электричества  $Q$ , то можно определить отношение  $\frac{e}{m}$ , так как остальные данные известны. В опытах Толмэна и Стьюарта получались значения  $\frac{e}{m}$ , отличающиеся от истинного не больше чем на 10%.

Для других своих опытов Толмэн и его сотрудники брали полый цилиндр из листовой меди, который они подвергали вращательным колебаниям вокруг его оси; во избежание помех со стороны магнитного поля земли, ось была установлена как-раз по направлению этого поля (рис. 14). Вследствие вынужденных вращательных колебаний электроны, благодаря своей инерции, тоже совершали колебания относительно металлической решетки, что и проявлялось в виде переменного тока в металлическом цилиндре. На основании вышеизложенного можно очень легко найти величину этого тока. Пусть  $\vartheta_m$  — угловая амплитуда колебаний полого цилиндра,  $\omega$  — частота колебаний. Положение цилиндра в момент времени  $t$  определяется формулой

$$\varphi = \vartheta_m \sin \omega t.$$

Если  $r$  — радиус цилиндра, то тангенциальное ускорение

$$\dot{v}_t = -r\vartheta_m \omega^2 \sin \omega t,$$

а фиктивная электродвижущая сила, вызывающая ток, равна, следовательно,

$$\frac{m}{e} 2\pi r^2 \vartheta_m \omega^2 \sin \omega t.$$

Она равна произведению тока  $I$  на общее сопротивление  $R$ .

По поводу техники измерения следует здесь еще упомянуть, что ток  $I$  может быть обнаружен, если металлический цилиндр поместить внутри индукционной катушки, концы обмотки которой через усилитель ведут к гальванометру. Однако, Толмэн избрал несколько иную схему, а именно, соединил индукционную катушку с заземленным индуктором, который работал на той же частоте  $\omega$ . Варьируя условия опыта, можно было добиться того, чтобы индукционный ток в катушке равнялся известному току в индукторе, и даже определить фазу переменного тока. В этом случае результат также оказался удовлетворительным, т. е. наблюдалось совпадение между теорией и экспериментом.

§ 6. Содержание и основные уравнения классической электронной теории. То обстоятельство, что электричество, не связанное с веществом в обычном смысле, почти всегда обнаруживается лишь в виде электронов, приводит к гипотезе, что все атомы состоят из электронов и положительных зарядов, причем именно положительные заряды оказываются главными носителями массы атомов (по сравнению с электронами). С точки зрения электронной теории всякое ве-

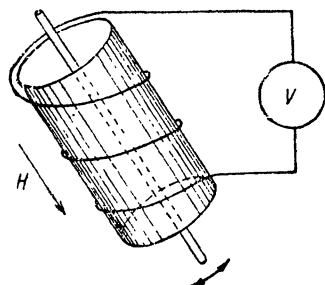


Рис. 14. Генерация переменного тока вращательными колебаниями медного цилиндра.

щество состоит из таких связанных между собой положительных и отрицательных зарядов; отыскание законов этой связи является важнейшей из задач, которыми интересовалась физика последних десятилетий. Несмотря на сильное изменение отдельных представлений (например, изменение моделей атома), в течение всей эпохи, о которой говорится в этой книге, все более укреплялось представление об электромагнитном строении материи. Согласно этой точке зрения, вещество состоит исключительно из зарядов и вызванного этими зарядами электромагнитного поля в вакууме. Грандиозная задача объяснения всех наблюдаемых явлений с помощью этой гипотезы была проведена в рамках „классической физики“ главным образом Г. А. Лорентцом. „Классической“ называют ту эпоху в физике, когда считали, что имеет смысл и принципиально возможно описывать явления, происходящие в сколь угодно малых пространственно-временных объемах (например, внутри атома), примерно так, как мы привыкли описывать макроскопические явления, т. е. считали, например, что плотность заряда, скорость, напряжение поля могут быть однозначно определены в каждой отдельной точке атома, или выражаясь математически, что можно описывать эти величины посредством определенных функций пространства и времени и применять к ним те же самые законы, которые экспериментально проверены на макроскопических объектах.

Кульминационной точкой и, вместе с тем, завершением этой „классической эпохи“ в физике являются электронная теория Г. А. Лорентца и теория относительности А. Эйнштейна.

В 1900 году, благодаря планковской теории излучения, в эту физическую картину мира вторгается инородное тело — квант действия  $h$ . Явления, связанные с этой величиной, никак не удавалось включить в рамки классической физики. Причина этих неудач была найдена Гейзенбергом в 1925 году. Эта причина заключается в том, что, пользуясь классическим способом описания явлений, мы неминуемо должны высказывать о явлениях, происходящих внутри атома, такие утверждения, которые принципиально недоступны экспериментальной проверке. Простейший пример состоит в том, что не имеет смысла одновременно задавать координаты и скорость электрона с любой степенью точности. Ведь такое задание имело бы смысл только в том случае, если бы можно было указать способ, как измерить обе величины непосредственно одну за другой, и притом так, чтобы второе измерение не уничтожило результата первого. Разберем здесь случай, когда производится измерение координат электрона. Можно себе представить, что такое измерение делается с помощью микроскопа при освещении светом частоты  $\nu$ . При этом координата электрона может быть фактически найдена с ошибкой  $\Delta x$ , которая будет порядка длины волны  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$ . Однако, при таком освещении, как показывает эффект Комптона, электрону сообщается неподдающийся контролю импульс порядка  $\Delta p \approx \frac{h\nu}{c}$ , причем этот импульс, очевидно, тем больше, чем точнее мы будем стараться определить местонахождение электрона, увеличивая частоту  $\nu$ . После определения координат мы

знаем  $x$  и  $p$  лишь с точностью до величин  $\Delta x$  и  $\Delta p$ , удовлетворяющих „соотношению неопределенности“  $\Delta x \Delta p \approx h$ , даже если до этого измерения нам было известно точное значение  $p$ .

„Квантовая механика“, развитие которой началось в 1925 году, повидимому дает нам основные математические методы, позволяющие правильно описывать также и те явления, которые происходят внутри объемов атомного порядка величины. Наглядное истолкование результатов квантовой механики чрезвычайно затруднено из-за того, что не только наши представления, но и вся наша терминология возникли на основе опытов, производимых над окружающими нас макроскопическими предметами. Поэтому при попытке наглядного истолкования нельзя избежать применения понятий и терминов классической физики, хотя и известно, что они не применимы к внутриатомным явлениям.

В этой книге мы ограничимся в основном изложением „классической“ электронной теории, указывая только в отдельных случаях на результаты, достигнутые впоследствии квантовой механикой.

Общие уравнения электронной теории легко получаются из уравнений Максвелла и из гипотезы, согласно которой все тела, а, следовательно, и отдельные атомы, состоят из положительных и отрицательных зарядов. Следовательно, существует только один род векторов, характеризующих поле, а именно: напряженности полей в пустоте, которые мы пока обозначим маленькими буквами  $e$  и  $h$ , и только один вид электрического тока — конвекционный ток, появляющийся при движении зарядов. Итак, мы вводим обозначения:

$e$  — напряженность электрического поля,

$h$  — напряженность магнитного поля,

$\rho$  — плотность заряда,

$v$  — скорость заряда

и требуем, чтобы эти величины удовлетворяли дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} h &= \frac{1}{c} \dot{e} + \frac{4\pi}{c} \rho v, \quad \operatorname{div} e = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} e &= -\frac{1}{c} \dot{h} \quad \operatorname{div} h = 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Для пустоты ( $\rho = 0$ ) эти уравнения совпадают с уравнениями Максвелла, и, следовательно, вне вещества мы просто можем отождествить наши векторы  $e$  и  $h$  с векторами теории Максвелла  $E$  и  $H$ . При истолковании векторов  $e$  и  $h$  внутри вещества, а тем более внутри атомов необходима особая осторожность. В то время как теория Максвелла описывает, например, состояние изолятора между обкладками заряженного конденсатора просто заданием двух векторов  $E$  и  $P$  (вектор поляризации), описание того же вещества при помощи вектора  $e$  несравненно сложнее. Внутри отдельного атома вектор  $e$  невероятно быстро меняется в пространстве и во времени, между тем как максвелловское  $E$  в конечном объеме тела можно считать постоянным.

Отсюда видно, что максвелловские макроскопические величины  $E$  и  $H$  могут быть выведены из микроскопических величин  $e$  и  $h$  только

путем усреднения в пространстве и во времени. Этим усреднением и выводом уравнений Максвелла из уравнений (6.1) мы подробно займемся позже (§§ 19—21).

Укажем особо еще на одно обстоятельство: в то время как справедливость уравнений Максвелла в материальных телах ограничена (диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость на самом деле не являются константами и т. д.), электронная теория считает, что зависимость между плотностью заряда и полем, выражаемая уравнениями (6.1), совершенно точна. Этому большому принципиальному достоинству противостоит, однако, тот недостаток, что, применяя наши новые уравнения к материальным телам, мы должны сделать специальные допущения о распределении зарядов внутри атомов. Только в связи со специальными моделями атомов эти уравнения приводят к конкретным выводам об электромагнитных свойствах материи.

Необходимо дополнить эти уравнения также определенными утверждениями о силе, действующей на вещество. Ведь в уравнениях (6.1) ничего не сказано о том, как меняется скорость  $v$  зарядов со временем. Напротив, можно задать  $\rho$  и  $v$  почти произвольно в виде функций от координат и от времени и потом найти из (6.1) поле, обусловленное этим движением зарядов. Слово „почти“ при этом относится к ограничению, вытекающему из первых двух уравнений (6.1). Из этих уравнений вытекает закон сохранения заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho v). \quad (6.2)$$

Это дает, при интегрировании по выбранному в пространстве объему  $V$ , элемент поверхности которого обозначим через  $dS$ , формулу:

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho dV = - \iint \rho v_n dS. \quad (6.2a)$$

Ежесекундное уменьшение заряда, содержащегося в объеме  $V$ , равно количеству электричества, выходящему в секунду через поверхность.

Нам нужно определить еще силу, действующую на заряды. Введем для плотности силы, согласно Лорентцу, выражение, которым мы уже пользовались в § 3, а именно:

$$\mathbf{f} = \rho \left( \mathbf{e} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{h} \right); \quad (6.3)$$

следовательно,  $f dV$  должно быть силой, действующей на объем  $dV$ . Курьезная непоследовательность заключается в том обстоятельстве, что уравнения (6.1) и (6.3) принято называть основными уравнениями электронной теории, хотя в этих уравнениях нет никаких указаний на электроны как на дискретные единицы заряда. В эти уравнения входит только непрерывно распределенная плотность заряда, которая должна двигаться подобно непрерывной жидкости. Из самого существования электрона следует, что лорентцова плотность силы (6.3) не может быть единственной силой, действующей на заряды, так как в противном случае электрон должен был бы разлететься на части. Таким обра-

зом в классической электронной теории сам электрон является инородным телом, которое может быть введено в теорию только с помощью не вполне удовлетворительных добавочных допущений. Резюмируя, мы могли бы в настоящий момент высказать парадоксальное утверждение, что классическая электронная теория потерпела крушение собственно из-за существования электрона.

Заметим еще, что уравнения (6.1) и (6.3) действительно заключают в себе полное каузальное описание явлений. В самом деле, представим себе величины  $e$ ,  $h$ ,  $\rho$ ,  $v$  заданными в определенный момент времени  $t$  в виде функций координат, причем должны быть соблюдены уравнения

$$\operatorname{div} e = 4\pi\rho \text{ и } \operatorname{div} h = 0.$$

Тогда уравнения (6.1) и (6.2) однозначно определяют величины  $e$ ,  $h$  и  $\rho$  в момент времени  $t + dt$ . Изменение  $v$  во времени вполне определяется уравнением (6.3). Конечно, необходимо сделать еще предположение о плотности  $\mu$  инертной массы, связанной с плотностью заряда  $\rho$ . Только тогда, на основании уравнения  $f = \frac{d}{dt}(\mu v)$ , мы смогли бы определить  $v$  в момент времени  $t + dt$ . Впрочем, нам не придется вводить плотность массы; мы будем иметь дело только с движением электрона как целого, и поэтому для нас будет достаточно знать его полную массу  $m$ .

§ 7. Закон сохранения энергии и импульса в электронной теории. Как известно, законы сохранения энергии и импульса можно вывести из основных уравнений теории Максвелла. Аналогичные выводы могут быть сделаны также исходя из уравнений (6.1) и (6.3) электронной теории.

Для вывода закона сохранения энергии рассмотрим работу той силы (6.3), с которой поле действует на вещество. Точка приложения силы  $f dV$  за время  $dt$  передвигается на расстояние  $v dt$ , так что работа, произведенная в элементе объема  $dV$  за время  $dt$ , равна  $f \cdot v dV dt$ . Следовательно, работа  $A$ , совершаемая в секунду в конечном элементе объема, составляет:

$$A = \int \int \int f v dV = \int \int \int \rho e v dV.$$

Первое из уравнений (6.1) дает:

$$\rho e v = \frac{c}{4\pi} e \cdot \operatorname{rot} h - \frac{1}{4\pi} e \cdot \dot{e}.$$

С помощью тождества

$$\operatorname{div}(e \times h) \equiv h \operatorname{rot} e - e \operatorname{rot} h$$

из (6.1) мы получаем:

$$e \operatorname{rot} h = -\frac{1}{c} h \cdot \dot{h} - \operatorname{div}(e \times h).$$

Стало быть,

$$\rho e v = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (e^2 + h^2) - \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(e \times h).$$

Поэтому работа в единицу времени равна

$$A = -\frac{d}{dt} \iiint \frac{1}{8\pi} (\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) dV - \iint \frac{c}{4\pi} (\mathbf{e} \times \mathbf{h})_n dS. \quad (7.1)$$

Это равенство истолковывается следующим известным образом:

$$\frac{1}{8\pi} (\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) \quad (7.2)$$

есть плотность энергии поля, а

$$\frac{c}{4\pi} (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) = \mathbf{S} \quad (7.3)$$

есть вектор Пойнтинга (вектор потока энергии).

Тогда уравнение (7.1) у азывает нам на две причины уменьшения полной энергии  $U$ , содержащейся в объеме  $V$ , именно:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint \frac{1}{8\pi} (\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) dV = -A - \iint S_n dS. \quad (7.4)$$

$U$  уменьшается, во-первых, за счет работы  $A$ , производимой в каждую секунду внутри объема  $V$ , и, во-вторых, за счет потока энергии  $\mathbf{S}$ , вытекающего через поверхность объема  $V$ .

Для вывода закона сохранения импульса вычислим действующую на объем  $V$  общую силу

$$\mathbf{F} = \iiint \mathbf{f} dV.$$

Физический смысл вектора  $\mathbf{F}$  состоит в том, что  $\mathbf{F}$  характеризует изменение количества движения  $\mathbf{G}_{\text{мат}}$  всей материи, содержащейся в объеме  $V$ , со временем (впрочем, при условии, что принимаются во внимание только силы электромагнитного происхождения):

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{G}_{\text{мат}}. \quad (7.5)$$

Для вычисления подставим в (6.3), вместо  $\rho$  и  $\rho v$ , их выражения из (6.1):

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{e} \operatorname{div} \mathbf{e} + \frac{1}{4\pi} \left( (\operatorname{rot} \mathbf{h}) \times \mathbf{h} \right) - \frac{1}{4\pi c} (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{h}).$$

Это равенство мы преобразуем, воспользовавшись тождеством, которое справедливо для любого вектора  $\mathbf{A}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( A_x^2 - \frac{1}{2} A^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} A_x A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_x A_z = A_x \operatorname{div} \mathbf{A} - (\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{A})_x;$$

применим это тождество в только что выведенном уравнении как для вычисления  $\mathbf{e} \operatorname{div} \mathbf{e}$ , так и для вычисления  $(\operatorname{rot} \mathbf{h}) \times \mathbf{h}$ . Тогда для  $x$ -овой компоненты плотности силы мы получим:

$$4\pi f_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( e_x^2 + h_x^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) \right) + \frac{\partial}{\partial y} (e_x e_y + h_x h_y) + \frac{\partial}{\partial z} (e_x e_z + h_x h_z) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e} \times \mathbf{h})_x. \quad (7.6)$$



Для того, чтобы получить из этих уравнений закон сохранения импульса, введем электромагнитный „тензор напряжений“:

$$T = \begin{Bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{Bmatrix} = \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{lll} e_x^2 + h_x^2 - \frac{1}{2}(e^2 + h^2) & e_x e_y + h_x h_y & e_x e_z + h_x h_z \\ e_x e_y + h_x h_y & e_y^2 + h_y^2 - \frac{1}{2}(e^2 + h^2) & e_y e_z + h_y h_z \\ e_x e_z + h_x h_z & e_y e_z + h_y h_z & e_z^2 + h_z^2 - \frac{1}{2}(e^2 + h^2) \end{array} \right\} \end{array} \right\} (7.7)$$

и вектор плотности импульса электромагнитного поля

$$g_{эл} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{e} \times \mathbf{h} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}. \quad (7.8)$$

Тогда, при интегрировании по конечному объему  $V$ , уравнения (7.5) и (7.6) дают:

$$\frac{d}{dt} (G_{мат} + G_{эл})_x = \int \int \{ T_{xx} \cos(n, x) + T_{xy} \cos(n, y) + T_{xz} \cos(n, z) \} dS, \quad (7.9)$$

где

$$G_{эл} = \int \int \int g_{эл} dV.$$

В частности, при интегрировании по объему, на поверхности которого  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  везде равны нулю, мы получаем:

$$G_{мат} + G_{эл} = \text{const}. \quad (7.10)$$

Следовательно, закон сохранения импульса выполняется строго только тогда, когда мы наряду с импульсом  $G_{мат}$ , связанным с веществом, введем еще импульс  $G_{эл}$ , связанный с излучением.

В качестве важного примера применения только что полученных уравнений энергии и импульса, рассмотрим давление света в двух простых случаях:

1. Давление света при нормальном падении и нормальном отражении световой волны. Для вычисления с помощью формулы (7.6) давления света на поглощающее или зеркально отражающее тело положим, что поверхность тела совпадает с плоскостью  $yz$ , так что само тело расположено направо от плоскости  $x = 0$ . Вы елим из этого тела цилиндр с поперечным сечением 1, расположенный от поверхности тела вправо и столь длинный, что на его правом основании ( $BC$  на рис. 15) уже не существует никакого поля. Вычислим, пользуясь уравнением (7.6),  $x$ -компоненту силы, которая действует на выделенный объем,

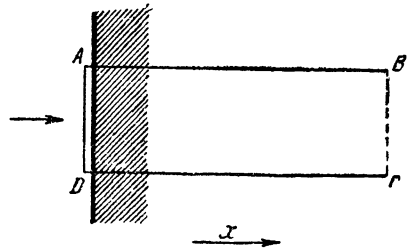


Рис. 15. Вычисление светового давления. На поверхность  $BC$  внутри поглощающего тела лучистая энергия попасть уже не может.

когда световая волна падает на поверхность тела в направлении оси  $x$ -ов. Вследствие поперечности колебаний световой волны, в нашем случае  $x$ -овые компоненты  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  равны нулю. Следовательно, для плотности силы получаем выражение:

$$4\pi f_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e} \times \mathbf{h})_x.$$

Это уравнение мы можем проинтегрировать непосредственно по всей длине нашего цилиндра; для среднего (во времени) давления получим следующее выражение:

$$p = \int_0^{\infty} \overline{f_x} dx = \frac{1}{8\pi} \overline{(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2)}_{x=0}.$$

В этом уравнении уже содержится важная зависимость между энергией и излучением и импульсом, которую мы будем подробно заниматься впоследствии. Представим себе ограниченный ряд волн длиной  $l$ , падающий на поверхность  $AD$  и целиком поглощаемый телом. Если  $u$  есть плотность энергии падающей волны, то общее количество движения, сообщенное телу, равно произведению давления света  $p$  на время  $t = \frac{l}{c}$ , в течение которого серия волн падает на тело, а так как  $p = u$ , то  $pt = \frac{ul}{c}$ . Следовательно, наш ряд волн содержит в  $1 \text{ см}^3$  импульс  $\frac{u}{c}$ . Так как волна распространяется со скоростью  $c$ , то можно сказать, что при падении на поглощающую стенку она ведет себя так, как будто бы в каждом ее  $\text{см}^3$  содержалась инертная масса  $\frac{u}{c^2}$ . Мы встречаемся здесь с зависимостью между энергией и инертной массой; с этой зависимостью мы встретимся снова, в самой общей форме, в главах, посвященных теории относительности.

2. Давление света в случае вполне беспорядочного равновесного излучения. Рассмотрим силу, с которой излучение, наполняющее полость тела, действует на стенки цилиндра  $ABCD$ , изображенного на рис. 15. Пусть это излучение изотропно, т. е. имеет свойства, в среднем одинаковые по всем направлениям. Можно считать это излучение состоящим из весьма большого числа линейно поляризованных волн. Для отдельной волны, распространяющейся в определенном направлении, напряженность электрического поля связана посредством уравнений Максвелла с перпендикулярной к ней напряженностью магнитного поля. Но компоненты напряженности электрического поля в двух взаимно перпендикулярных направлениях статистически совершенно независимы. По этой причине произведения типа  $e_x e_y$ , в случае равновесного излучения при усреднении во времени окажутся равными нулю. Далее, благодаря изотропному характеру излучения,

$$\overline{e_x^2} = \frac{1}{3} \overline{e^2}.$$

Поэтому для среднего значения  $x$ -овой компоненты плотности силы мы получим, согласно (7.6), выражение:

$$\overline{f_x} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \overline{\left( e_x^2 + h_x^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) \right)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x} \overline{(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2)}.$$

Следовательно, давление света, действующее на весь цилиндр, равно

$$p = \int \overline{f_x} dV = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{6} \overline{(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2)} = \frac{u}{3}. \quad (7.11)$$

В истории физики эта формула сыграла большую роль, так как с ее помощью Больцман обосновал закон пропорциональности плотности энергии равновесного излучения четвертой степени абсолютной температуры. Мы рассмотрим это подробнее в § 67.

**§ 8. Поле равномерно и медленно движущегося электрона.** В качестве первого применения наших уравнений поля, мы рассмотрим поле заряда, движущегося с постоянной скоростью  $v$ , малой по сравнению со скоростью света. (В следующих параграфах мы рассмотрим значительно более сложный случай, когда скорость становится сравнимой со скоростью света.) Следует ожидать, что электрическое поле медленно движущегося заряда не очень сильно будет отличаться от поля, создаваемого неподвижным зарядом. Поэтому мы сперва будем считать, что поле движущегося заряда выражается вполне точно при помощи кулоновского потенциала  $\varphi = \frac{e}{r}$ , т. е. что три компоненты поля определяются из уравнений

$$e_x = \frac{ex}{r^3}, \quad e_y = \frac{ey}{r^3}, \quad e_z = \frac{ez}{r^3}, \quad (8.1)$$

при условии, что начало координатной системы помещено в центре движущегося электрона. Если электрическое поле известно, то магнитное поле определяется непосредственно из выражения для интеграла по замкнутому пути вектора  $h$ , которое равнозначно первому уравнению (6.1):

$$\oint h \cdot ds = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint e_n dS.$$

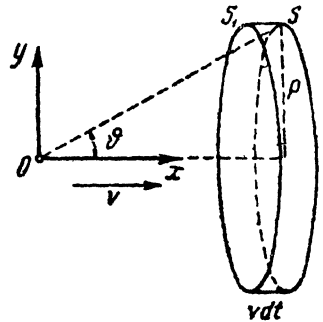


Рис. 16. Вычисление магнитного поля медленно движущегося электрона.

Пусть электрон движется со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ -ов. Для определения  $h$  мы применим только что приведенное уравнение к круглому диску  $S$ , который расположен перпендикулярно к оси  $x$ , и радиус которого виден из начала координат под углом  $\vartheta$ . Пусть  $r$  — расстояние от начала координат до точки на окружности диска,  $\rho$  — радиус диска (рис. 16). Для вычисления изменения со временем потока вектора  $e$  через этот диск, заметим, что в момент времени  $t + dt$  через него проходит тот же поток, который в момент времени  $t$  пересекал диск  $S'$ , сдвинутый влево относительно первого на расстояние  $v dt$ . Для вычисления  $\frac{d}{dt} \iint e_n dS$  нам надо найти потоки вектора  $e$ , проходящие через диски  $S$  и  $S'$  в момент времени  $t$ . Но вследствие отсутствия источников вектора  $e$  внутри плоской коробки, ограниченной дисками  $S$  и  $S'$  и боковой стенкой ширины  $v dt$ , весь поток через эту коробку равен нулю. Следовательно, разность потоков через  $S$  и  $S'$  равна потоку через боковую стенку и составляет  $2\pi r v dt e_r \sin \vartheta$ , так что мы получаем:

$$2\pi r h_\varphi = 2\pi r \frac{v}{c} \frac{e}{r^2} \sin \vartheta$$

или

$$h_{\varphi} = \frac{ev}{c^2} \sin \vartheta. \quad (8.2)$$

Электрическое поле медленно движущегося точечного заряда поэтому тождественно с электростатическим полем неподвижного заряда, а магнитное поле тождественно с полем, которое вызывается элементом тока  $ev$  согласно закону Био-Савара.

Только что полученное выражение для магнитного поля может быть также написано в виде

$$\mathbf{h} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{e}. \quad (8.3)$$

Покажем, исходя из максвелловских уравнений, что это выражение для магнитного поля является совершенно строгим для любой системы зарядов, движущейся с постоянной скоростью, если только известна электрическая напряженность  $\mathbf{e}$  этих зарядов. Для этого вернемся к уравнению

$$\text{rot } \mathbf{h} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{e}} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v} \quad (8.4)$$

и попытаемся преобразовать выражение для  $\mathbf{e}$ , принимая во внимание то обстоятельство, что при равномерном движении зарядов все вызываемое ими поле также перемещается со скоростью  $\mathbf{v}$ . Отсюда вытекает, что если  $f(x, y, z, t)$  представляет некоторую функцию поля, то в точке с координатами  $x, y, z$  в момент времени  $t$  эта функция имеет то же значение, которое она имела в момент времени  $t - dt$  в точке  $x - v_x dt, y - v_y dt, z - v_z dt$ . Следовательно, мы имеем тождество:

$$f(x, y, z, t) = f(x - v_x dt, y - v_y dt, z - v_z dt, t - dt)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \left( v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

или в векториальной форме,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - (\mathbf{v} \text{ grad}) f. \quad (8.5)$$

Итак, для изменения  $\mathbf{e}$  во времени мы находим:

$$\dot{\mathbf{e}} = - (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{e};$$

пользуясь тождеством

$$\text{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{B} \text{ grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \text{ grad}) \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{A}$$

и принимая во внимание, что в нашем случае  $\mathbf{v}$  является постоянным вектором, не зависящим от времени и от координат, мы получаем:

$$\dot{\mathbf{e}} = \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{e}) - \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{e}.$$

Подставляя последнее равенство в уравнение (8.4) и пользуясь соотношением  $\text{div } \mathbf{e} = 4\pi\rho$ , получаем:

$$\text{rot} \left( \mathbf{h} - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{e}) \right) = 0.$$

Этому уравнению мы можем непосредственно удовлетворить, положив

$$\mathbf{h} = \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{e}).$$

Для того чтобы показать, что этим мы действительно решили уравнения Максвелла, необходимо убедиться еще и в том, что найденное таким образом магнитное поле не имеет также источников. Для этого направим скорость  $\mathbf{v}$  по положительной оси  $x$ -ов. Тогда наше выражение для магнитного поля примет вид:

$$\left. \begin{aligned} h_x &= 0, \\ h_y &= -\frac{v}{c} e_z, \\ h_z &= \frac{v}{c} e_y, \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

откуда получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = \frac{v}{c} \left( \frac{\partial e_y}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial y} \right).$$

Следовательно, расходимость  $\mathbf{h}$  на самом деле исчезает, если только компонента вихря вектора  $\mathbf{e}$ , совпадающая с направлением скорости, равна нулю. В случае медленно движущегося электрона это условие выполняется, что видно из (8.1); этому условию удовлетворяют, как мы увидим в следующем параграфе, также и точные решения уравнений поля.

Вышеприведенное решение (8.1) и (8.3) наших уравнений поля не может считаться совершенно точным, так как вместо  $\mathbf{e}$  мы ввели поле, связанное с потенциалом неподвижного заряда. Фактически электрическое поле не совсем таково, так как вследствие движения заряда магнитное поле изменяется со временем, а поэтому вихрь электрического поля становится неравным нулю.

Воспользуемся нашими приближенными уравнениями для определения количества движения, связанного с движущимся электроном. Согласно общим выводам § 7, со всяким электромагнитным полем связана плотность количества движения, которая, на основании (7.8), выражается вектором

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{e} \times \mathbf{h}).$$

Для вычисления импульса заряда, движущегося с постоянной скоростью, мы подставим вместо  $\mathbf{h}$  его значение  $\frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{e})$ ; тогда для количества движения мы получим:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c^2} [\mathbf{e} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{e})] = \frac{1}{4\pi c^2} \{v\mathbf{e}^2 - \mathbf{e}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\}. \quad (8.7)$$

В этом выражении, строго говоря, вместо  $\mathbf{e}$  надо ввести значение напряженности для движущегося заряда, которое даже в случае медленных движений отличается от статического поля добавочными членами, зави-

сящими от  $v$ . Отсюда видно, что количество движения может быть пропорционально скорости только до тех пор, пока мы пренебрегаем этим изменением электростатического поля. Направим опять скорость  $v$  по положительному направлению оси  $x$ -ов; тогда  $x$ -овая компонента вектора  $\mathbf{g}$  окажется равной

$$g_x = \frac{v}{4\pi c^2} (e_y^2 + e_z^2), \quad (8.8)$$

и количество движения нашего заряда определится из формулы

$$G_x = \frac{v}{4\pi c^2} \iiint (e_y^2 + e_z^2) dx dy dz.$$

В случае шаровой симметрии в распределении зарядов для каждого шарового слоя в среднем будет

$$\overline{e_y^2 + e_z^2} = \frac{2}{3} e^2.$$

Следовательно

$$G_x = \frac{v}{4\pi c^2} \frac{2}{3} \iiint e^2 dx dy dz$$

или

$$\mathbf{G} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} \mathbf{v}, \quad (8.9)$$

где  $U_0 = \frac{1}{8\pi} \iiint e^2 dx dy dz$  есть общая энергия поля неподвижного заряда.

В частности, если заряд  $e$  расположен на поверхности шара радиуса  $R$ , то

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \int_R^\infty \frac{e^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{e^2}{R}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{G} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{Rc^2} \mathbf{v}. \quad (8.9a)$$

(Если бы вместо заряда, расположенного на поверхности шара, мы взяли такой же шар, наполненный зарядом  $e$  равномерно, то получили бы, вплоть до численного множителя порядка 1, такое же выражение для количества движения.) Представим себе, что наш заряженный шар вообще не имеет обыкновенной инертной массы. Несмотря на это, он все же обладает определенным количеством движения, которое необходимо сообщить ему, чтобы придать определенную скорость. Следовательно, он ведет себя совершенно так же, как если бы он обладал инертной массой, равной

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{Rc^2}.$$

Эта „электромагнитная масса“ тем больше, чем меньше радиус  $R$  шара; следовательно, при надлежащем подборе  $R$  мы можем

истолковать любую наблюдаемую инертную массу заряженного тела как электромагнитную массу.

До тех пор, пока измерение радиуса электрона другими способами невозможно, остается нерешенным и вопрос о том, вся ли масса электрона имеет электромагнитное происхождение, или электрон обладает, наряду с электромагнитной, также и независимой от нее механической массой. Однако, на основании наших формул мы можем вычислить, какой радиус имел бы электрон, если бы вся его масса, измеренная в опытах с отклонением пучка электронов в магнитном поле, была чисто электромагнитного происхождения. Подставляя значения величин  $e$  и  $\frac{e}{m}$  в наши формулы, находим:

$$R = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2} = 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

(При другом предположении о распределении заряда по шару мы, конечно, нашли бы несколько иное значение радиуса.) Эта величина оказывается столь малой, что всякую попытку непосредственно проконтролировать ее каким-нибудь иным путем следует считать безнадежной. Обычно полагают, что для инертной массы не существует другой первопричины, кроме электромагнитного поля, передвигающегося вместе с электроном. Однако, следует отчетливо иметь в виду, что непосредственного экспериментального подтверждения этого предположения не существует. Таким же образом и с такою же достоверностью, конечно, можно истолковать и массу протона, которая в 2000 раз больше, если предположить, что радиус протона еще в 2000 раз меньше, чем радиус электрона.

Проявление электромагнитной инерции у заряженной частички можно легко пояснить еще и следующим образом. Пусть электрон движется с постоянной скоростью. Он несет с собой магнитное поле, силовые линии которого окружают его путь. Результирующая сила, которая действует на электрон во время его движения, равна нулю. Если внезапно затормозить электрон, то при этом торможении магнитное поле, конечно, должно исчезнуть. Но такое исчезновение магнитного поля, согласно закону индукции, вызовет появление электрического поля. Легко убедиться, что вызванное таким образом электрическое поле имеет в точке нахождения электрона такое направление, что оно стремится ускорить тормозящийся электрон. Следовательно, сила инерции, возникающая при торможении, равнозначна электрической силе  $eE$ , где  $E$  означает напряженность поля, которая вызывается согласно закону индукции при изменении скорости.

Второе замечание относится к специальному виду полученного выражения для инертной массы. Эту массу мы будем называть „нулевой массой“, так как она относится только к предельному случаю очень медленных (по сравнению со скоростью света) движений. Согласно (8, 9) нулевая масса только численным коэффициентом  $\frac{4}{3}$  отличается от  $\frac{U_0}{c^2}$ . Это выражение уже встречалось нам в § 7 в связи с рассмотрением светового давления плоской волны. Там этим выражением определялась энергия масса, которую мы должны приписать волне, распространяю-

шейся в определенном направлении. Это основное соотношение между энергией и инертной массой встретится нам в самом общем виде позже, в отделе, посвященном теории относительности.

Причина того, что это последнее соотношение при рассмотрении массы электронов подтвердилось не вполне точно, а только с точностью до численного коэффициента  $\frac{4}{3}$ , заключается в следующем. Если мы подробнее рассмотрим нашу сферу, заряженную на поверхности, то увидим, что это распределение заряда в присутствии одних только электрических сил вообще не стабильно. Отдельные заряженные электричеством одинакового знака элементы сферы испытывают взаимное отталкивание. Наше распределение зарядов тотчас же разлетелось бы на части, если бы его не удерживали силы другого рода. Роль таких сил могут играть, например, упругие силы, наподобие тех, которые действуют в случае заряженного мыльного пузыря. Поэтому при последовательном рассуждении такие механические напряжения обязательно должны быть приняты во внимание. Последовательное рассмотрение этих сил может быть проведено только при помощи методов теории относительности. В дальнейшем (§ 66а) мы сможем показать, что именно вследствие этих механических напряжений, обусловленных самим распределением зарядов, нулевая масса в точности равна частному от деления „нулевой энергии“ на квадрат скорости света.

**§ 9.** Поле равномерно и сколь угодно быстро движущегося заряда. В предыдущем параграфе мы определили поле любого заряда только в том случае, когда его скорость мала по сравнению со скоростью света. Для того, чтобы определить поле также и при сколь угодно больших скоростях, мы должны найти строгие решения уравнений поля (6.1); мы будем опять определять стационарные поля, движущиеся вместе с зарядом. Решение, которое мы таким образом найдем, является, строго говоря, пригодным для того случая, когда заряд уже двигался с заданной скоростью в течение бесконечно долгого времени. При переходе от покоя к определенной скорости получается волна, которая распространяется со скоростью света от ускоренно движущегося заряда в бесконечность. Этим излучением можно пренебречь только в том случае, если скорость уже достаточно большое время была постоянной.

Для интегрирования уравнений поля (6.1) целесообразно перейти от самих полей к электромагнитным потенциалам. Это производится следующим образом: прежде всего мы удовлетворяем уравнению  $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$  (6.1) подстановкой

$$\mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (9.1)$$

Тогда из третьего уравнения (6.1) следует, что  $\operatorname{rot} \left( \mathbf{e} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \right)$  должен равняться нулю. Поэтому мы требуем, чтобы величина  $\mathbf{e} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$  равнялась градиенту какого-нибудь скаляра:

$$\mathbf{e} = - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (9.2)$$



Теперь мы еще можем произвольно распорядиться расходимостью вектора  $\mathbf{A}$ , так как векторное поле однозначно определяется заданием расходимости и вихря этого поля (до сих пор мы задали только  $\text{rot } \mathbf{A}$ ). Мы воспользуемся этим для того, чтобы положить

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\varphi} = 0. \quad (9.3)$$

Если подставить теперь (9.1) и (9.2) в оба оставшиеся уравнения (6.1), то с помощью (9.3) мы получим два уравнения для потенциалов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Для их интегрирования в рассматриваемом случае прямолинейного и равномерного движения электрона воспользуемся тем установленным в предыдущем параграфе фактом, что поле в момент времени  $t$  в какой-нибудь точке такое же, каким оно было в момент времени  $t - dt$  в точке, отодвинутой назад на отрезок  $\mathbf{v} dt$ , так что для всех величин, характеризующих поле, опять имеет место соотношение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -(\mathbf{v} \text{ grad}) f.$$

Таким образом, если скорость направлена параллельно положительной оси  $x$ , в наших уравнениях для потенциалов (9.4) вторые производные по времени заменяются производными по координате  $x$  согласно формуле

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \mathbf{v}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Итак, для потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  мы получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} &= -\frac{4\pi \rho \mathbf{v}}{c}, \\ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Заметим, что уравнения для компонент векторного потенциала отличаются от уравнения для скалярного потенциала только постоянным множителем  $\frac{v}{c}$ . Следовательно, если мы решим уравнение для  $\varphi$ , то из него непосредственно последует решение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{v}{c} \varphi. \quad (9.6)$$

Отсюда получаются два уравнения:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \text{rot}(\mathbf{v}\varphi) = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \text{grad } \varphi \\ \dot{\mathbf{A}} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{v}}\varphi = -\frac{1}{c} \mathbf{v} (\mathbf{v} \text{ grad } \varphi). \end{aligned}$$

Если мы введем их в определения (9.1) и (9.2), то получим:

$$\mathbf{e} = -\text{grad } \varphi + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{v} \text{ grad } \varphi) \quad \text{и} \quad \mathbf{h} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{e}. \quad (9.7)$$

Оказывается, что зависимость (9.6) между векторным и скалярным потенциалами приводит как раз к отмеченной уже в предыдущем параграфе зависимости (8.3) между  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{e}$ .

Итак, для решения нашей задачи мы можем ограничиться интегрированием уравнения (9.5) для  $\varphi$ . Заметим, что это уравнение отличается от уравнения для обыкновенного электростатического потенциала только постоянным коэффициентом  $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$  при  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ . Поэтому формально мы можем свести нашу задачу к простой электростатической, если вместо координат  $x, y, z, t$  введем новые координаты  $x', y', z', t'$ , с помощью преобразования

$$x = x' \sqrt{1 - \beta^2}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t', \quad (9.8)$$

где для краткости мы положили  $\beta = \frac{v}{c}$ . Благодаря этой замене, функции  $\varphi(x, y, z, t)$  и  $\rho(x, y, z, t)$  переходят в функции  $\varphi'$  и  $\rho'$  от  $x', y', z', t'$ , так что имеют место тождества:

$$\rho'(x', y', z', t') \equiv \rho(x' \sqrt{1 - \beta^2}, y', z', t')$$

и

$$\varphi'(x', y', z', t') \equiv \varphi(x' \sqrt{1 - \beta^2}, y', z', t'). \quad (9.9)$$

Следовательно, наше уравнение для потенциала в штрихованных координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} = -4\pi \rho'. \quad (9.10)$$

В таком виде это уравнение совершенно тождественно уравнению, которое определяет потенциал данной неподвижной системы зарядов. Поэтому его интегрирование мы можем произвести согласно известной теории электростатического потенциала (том I, § 14). Мы получаем:

$$\varphi'(x', y', z', t') = \iiint \frac{\rho'(\xi', \eta', \zeta', t') d\xi' d\eta' d\zeta'}{\sqrt{(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 + (z' - \zeta')^2}}.$$

Если мы опять перейдем к нештрихованным координатам с помощью (9.8) и (9.4), то получим решение уравнения (9.5) для скалярного потенциала в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (1 - \beta^2)[(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]}}. \quad (9.11)$$

Теперь найдем частное решение для того момента времени  $t = t_0$ , когда электрон находится в начале координатной системы, и ограничимся при этом случае точечного электрона, т. е. предположим, что плотность заряда отлична от нуля только в непосредственной близости от начала

координат ( $\xi = \eta = \zeta = 0$ ). Тогда интегрирование может быть выполнено, и мы получим решение

$$\varphi(x, y, z, t_0) = \frac{e}{\sqrt{x^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}}. \quad (9.12)$$

В целях сокращения письма введем для выражения, появившегося в знаменателе вместо расстояния  $r$ , обозначение

$$s = \sqrt{x^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}. \quad (9.13)$$

Тогда мы сможем представить решение нашей задачи в виде

$$\varphi = \frac{e}{s}, \quad A_x = \frac{ev}{sc}, \quad A_y = A_z = 0. \quad (9.14)$$

С помощью этих потенциалов мы вычислим поля  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  по формулам (9.1), (9.2) или (9.7), принимая во внимание, что дифференцирование по времени всегда заменяется на  $-\nu \frac{\partial}{\partial x}$ . Для электрической напряженности получается:

$$e_x = -(1 - \beta^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1 - \beta^2) \frac{e}{s^3} x,$$

$$e_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1 - \beta^2) \frac{e}{s^3} y,$$

$$e_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = (1 - \beta^2) \frac{e}{s^3} z,$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{e} = (1 - \beta^2) \frac{e}{s^3} \mathbf{r}. \quad (9.15)$$

Далее, магнитная напряженность  $\mathbf{h} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{e}$ ; следовательно:

$$h_x = 0, \quad h_y = -\frac{ev}{c} \frac{1 - \beta^2}{s^3} z, \quad h_z = \frac{ev}{c} \frac{1 - \beta^2}{s^3} y. \quad (9.16)$$

Полученные таким образом точные решения для поля, вызываемого электроном, движущимся с постоянной скоростью, в случае малых скоростей ( $\frac{v}{c} \ll 1$ ) переходят, как и следовало ожидать, в решения предыдущего параграфа. Направления векторов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  получаются из точных решений такие же, как из прежних приближенных решений: электрическое поле имеет направление радиуса-вектора, выходящего из электрона, а магнитное поле направлено перпендикулярно к электрическому и к направлению скорости. Для того чтобы выяснить отличие от старых решений, рассмотрим абсолютную величину напряженностей поля. Если обозначить через  $\vartheta$  угол между радиусом-вектором, направленным от электрона к данной точке, и направлением скорости, то благодаря тому, что

$$s = r \sqrt{\cos^2 \vartheta + (1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta} = r \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta},$$

из (9.15) следует:

$$|e| = \frac{e}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta})^3}.$$

Отсюда видно, что напряженность электрического поля зависит характерным образом от угла  $\vartheta$  между полем и направлением движения, а именно: на оси  $x$ -ов ( $\sin \vartheta = 0$ ) оно уменьшено по сравнению со статической величиной  $\frac{e}{r^2}$  в отношении  $1 - \beta^2$ , в то время как в плоскости  $x = 0$  ( $\sin \vartheta = 1$ ) оно увеличено в отношении  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ . По мере того,

как скорость электрона приближается к скорости света, все поле концентрируется в плоскости, перпендикулярной к направлению движения, причем в предельном случае при  $v = c$  поле повсюду в этой плоскости принимает бесконечно большие значения.

Особый интерес представляет еще сила, с которой система зарядов действует на движущуюся вместе с ней единицу заряда. Согласно нашей основной формуле (6.3), она равна

$$f = e + \frac{1}{c} (v \times h).$$

Подставляя полученные выше значения для напряженностей поля (9.15) и (9.16), мы получаем для этой „конвекционной силы“ выражения

$$\begin{aligned} f_x = e_x &= -(1 - \beta^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ f_y = e_y - \beta h_z &= -(1 - \beta^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ f_z = e_z + \beta h_y &= -(1 - \beta^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Эту силу можно также вычислить, если подставить в уравнение для  $f$  значения  $e$  и  $h$  из (9.7):

$$f = e + \frac{1}{c^2} [v \times (v \times e)] = e (1 - \beta^2) + \frac{1}{c^2} v (ve) = -(1 - \beta^2) \text{grad } \varphi.$$

Таким образом сила  $f$ , действующая на движущуюся единицу заряда, в отличие от  $e$ , обладает потенциалом

$$\Psi = (1 - \beta^2) \varphi; \quad f = -\text{grad } \Psi, \quad (9.18)$$

который был впервые введен Хивисайдом (Heaviside) и называется „конвекционным потенциалом“. На больших расстояниях от электрона (т. е. на таких, на которых форма электрона и распределение заряда в нем не играют уже никакой роли) конвекционный потенциал, согласно (9.12), определяется формулой:

$$\Psi = \frac{e (1 - \beta^2)}{\sqrt{x^2 + (1 - \beta^2) (y^2 + z^2)}}. \quad (9.19)$$

Он имеет постоянное значение на сплюсненном эллипсоиде вращения

$$x^2 + (1 - \beta^2) (y^2 + z^2) = \text{const}. \quad (9.20)$$

Эти хивисайловские эллипсоиды получаются из семейства концентрических сфер при сжатии по направлению оси  $x$ -ов в отношении  $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$ . Наглядное значение этого эллипсоида состоит в том, что сила, действующая на движущийся заряд, будучи пропорциональной  $-\text{grad } \Psi$ , всегда направлена по нормали к поверхности эллипсоида. Отсюда вытекает несколько замечательных следствий.

Рассмотрим сначала два точечных заряда  $e_1$  и  $e_2$ , расположенных друг от друга на расстоянии  $r$  (рис. 17). Пусть вектор  $r$ , проведенный от  $e_1$  к  $e_2$ , образует угол  $\vartheta$  с направлением общей скорости  $v$  обеих частиц. Пока оба заряда находятся в покое, сила, действующая со стороны  $e_1$  на  $e_2$ , направлена по вектору  $r$ . Но если обе частицы движутся со скоростью  $v$ , то эта сила направлена уже не по  $r$ , а расположена по нормали к только что описанному сплюсченному эллипсоиду  $\Psi = \text{const}$  с центром в точке  $e_1$ .

Отсюда чисто качественно можно заключить следующее: представим себе два заряда, расположенные на конце твердого стержня; тогда этот стержень испытывает вращательный момент, который стремится повернуть стержень в направлении движения, если знаки зарядов одинаковы. Напротив, при противоположных знаках зарядов этот вращательный момент стремится привести стержень в положение, перпендикулярное к направлению движения. Для этого вращательного момента, вызываемого электромагнитными силами, мы получаем, с помощью выражения (9.19) для конвекционного потенциала, следующее равенство:

$$N = -r \times \text{grad} \frac{e_1 e_2 (1 - \beta^2)}{\sqrt{x^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}},$$

где  $r$  есть вектор с компонентами  $x, y, z$ , соединяющий заряды  $e_1$  и  $e_2$ . Отсюда для  $z$ -овой компоненты вектора  $r$  получается выражение:

$$N_z = -\frac{e_1 e_2 x y \beta^2 (1 - \beta^2)}{(\sqrt{x^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)})^3} = -\frac{e_1 e_2 \beta^2 (1 - \beta^2) \sin \vartheta \cos \vartheta}{r (\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta})^3}. \quad (9.21)$$

Если мы ограничимся членами порядка  $\beta^2$ , т. е. отбросим четвертые и более высокие степени  $\beta$ , то для величины этого вращательного момента получим:

$$-N_z = e_1 e_2 \beta^2 \frac{xy}{r^3} = \frac{e_1 e_2 \beta^2}{2r} \sin 2\vartheta. \quad (9.21a)$$

Теперь рассмотрим заряженный металлический шар. Пока шар находится в покое, плотность заряда на всей его поверхности постоянна, так как, согласно элементарной электростатике, при таком распределении заряда эквипотенциальные поверхности имеют шаровую форму, так что сила, действующая на элементы заряда, везде перпендикулярна к поверхности шара. Но если этот шар движется со скоростью  $v$  (например, полюсом координатной системы вперед), то для

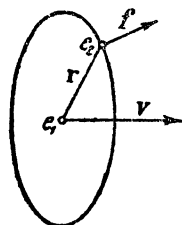


Рис. 17. Отталкивание  $f$  между двумя совместно движущимися зарядами не совпадает по направлению с отрезком, их соединяющим.

вычисления взаимодействия между находящимися на поверхности зарядами нужно воспользоваться их конвекционным потенциалом. Сила, вычисленная из выражения для этого потенциала, теперь уже не перпендикулярна к поверхности шара; напротив, она имеет тенденцию накапливать заряды на обоих полюсах, что можно вывести из описанного выше случая двух равных зарядов. По мере того, как скорость приближается к скорости света, заряды все больше и больше концентрируются на полюсах шара, в то же время экватор становится в конце концов совершенно свободным от зарядов.

Непосредственно видно, что оба только что упомянутые явления могли бы дать возможность определять абсолютное движение; так, если в какой-нибудь координатной системе два связанных друг с другом заряда не дают вращательного момента, и если распределение заряда на шаре равномерно, то в каждой движущейся по отношению к ней системе должен был бы появиться в первом случае вращательный момент, а во втором — скопление зарядов на полюсах (расположение полюсов определяется движением шара). Но, согласно основным постулатам теории относительности, подобной системы координат не существует. В дальнейшем мы подробно рассмотрим, как по этой теории только что вычисленные эффекты совершенно компенсируются, так что и с их помощью невозможно констатировать абсолютное движение. В последнем рассмотренном случае движущегося шара скоплению зарядов на полюсах препятствует то, что размеры каждого тела в направлении движения укорачиваются в отношении  $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$ . Поэтому шар превращается в сплюснутый эллипсоид вращения. Заряды же располагаются преимущественно в местах с наибольшей кривизной. Такое сплющивание нашего шара приводит к скоплению зарядов на экваторе, что в действительности и компенсирует упомянутую концентрацию зарядов на полюсах.

Значительно труднее понять, отчего при движении нескольких связанных друг с другом зарядов на самом деле не появляется вычисленный вращательный момент. В данном случае, очевидно, одно лишь укорочение не может служить объяснением. Здесь компенсация вращательного момента происходит только благодаря тому, что в стержне, который соединяет оба заряда, должны существовать механические напряжения, вызывающие со своей стороны вращательный момент, который в точности компенсирует найденный выше электромагнитный вращательный момент. Из тщательно произведенных опытов Траутона и Нобля известно, что результирующий вращательный момент на самом деле не наблюдается.

**§ 10. Импульс равномерно движущегося заряда.** В § 8 мы вычислили количество движения медленно движущегося электрона и при этом нашли, что электромагнитное поле электрона содержит в себе пропорциональное скорости количество движения, которым можно объяснить (целиком или, быть может, отчасти) наблюдаемую инертную массу электрона. Теперь мы проведем соответствующее вычисление для того случая, когда скорость электрона сравнима со скоростью света. Для этого мы будем пользоваться выведенным ранее уравнением (7. 8) для плотности импульса, подставив в него выражение

магнитного поля  $\mathbf{h} = \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{e})$ , верное для любой скорости. Тогда для плотности импульса получится формула

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) = \frac{1}{4\pi c^2} \{\mathbf{v}e^2 - \mathbf{e}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\}. \quad (10.1)$$

Тем самым для общего количества движения поля, переносимого вместе с электроном, имеем

$$G_x = \frac{v}{4\pi c^2} \iiint (e_y^2 + e_z^2) dx dy dz. \quad (10.2)$$

Две другие компоненты исчезают, что следует из соображений симметрии. Заметим, что через квадраты компонент полей могут быть просто выражены и две другие величины, а именно: плотность энергии и

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) = \frac{1}{8\pi} \left( \mathbf{e}^2 + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{e})^2 \right) = \\ &= \frac{1}{8\pi} \{e_x^2 + (1 + \beta^2)(e_y^2 + e_z^2)\}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

и скалярное произведение скорости на количество движения

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{v}(\mathbf{e} \times \mathbf{h})) = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{h}(\mathbf{v} \times \mathbf{e})) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{h}^2. \quad (10.4)$$

Раз в нашей движущейся системе известно распределение зарядов  $\rho(x, y, z)$ , то рассуждения § 9 позволяют найти в явном виде квадраты компонент электрической напряженности, входящие в эти формулы. Для этого достаточно воспользоваться уравнением (9.11) для скалярного потенциала системы зарядов с заданным распределением, движущихся со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ -ов. Тогда составляющие векторного потенциала принимают значения:

$$A_x = \beta\varphi, \quad A_y = A_z = 0,$$

а составляющие электрической напряженности, согласно (9.1), получаются в виде:

$$e_x = -(1 - \beta^2) \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad e_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad e_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Мы увидим, что количество движения (10.2) при приближении скорости зарядов к скорости света становится бесконечно большим. Характер изменения количества движения в зависимости от скорости в значительной степени зависит еще от специальных предположений относительно распределения зарядов внутри движущейся системы. Самое простое предположение, конечно, состоит в том, что это распределение зарядов тождественно с распределением, которое наблюдалось бы в неподвижной системе. Согласно этому предположению, которое подробно исследовал и защищал Абрагам, электрон должен иметь форму твердого шарика с заданной постоянной плотностью заряда, распределение которой подчиняется условию шаровой симметрии. В противоположность

этому, Бухерер и Г. А. Лорентц сделали предположение, что электрон при своем движении сжимается в отношении  $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$  („гипотеза сжатия“). С общим и более глубоким обоснованием этой гипотезы мы подробно познакомимся в главе о теории относительности, согласно которой все движущиеся масштабы сжимаются в этом отношении. Эта гипотеза была введена Лорентцом специально для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона. Существенное основание для предположения о таком сжатии заключается в результатах предыдущего параграфа о форме поверхностей постоянного конвекционного потенциала. Именно эта гипотеза приводит к следствию, что поверхность движущегося шара вследствие его сжатия при движении всегда совпадает с поверхностью равного конвекционного потенциала. Таким образом заряды на поверхности электрона Лорентца находятся в электростатическом равновесии, между тем как в случае твердого электрона Абрагама равновесие отсутствует.

Поэтому мы будем производить наши вычисления исключительно для электрона Лорентца. Пусть в состоянии покоя он характеризуется распределением заряда  $\rho_0(x, y, z)$ , обладающим шаровой симметрией. Для дальнейшего не существенно, считаем ли мы это распределение поверхностным или равномерным объемным внутри шарика радиуса  $a$ . Предположим, что движущийся электрон испытывает равномерное сжатие в направлении оси  $x$ -ов — такое, что общий заряд сохраняется. Тогда в движущейся системе в точке с координатой  $x$  появляется такой заряд, который в неподвижной системе находится в точке  $\frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ . Кроме того, плотность заряда кажется увеличившейся в  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  раз, так как при сжатии заряд сосредоточивается в меньшем объеме. Итак, в движущейся системе мы имеем плотность заряда

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rho_0\left(\frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, y, z\right). \quad (10.5)$$

Общий заряд как движущейся, так и неподвижной системы, конечно, должно быть один и тот же:

$$\begin{aligned} & \int \int \int \rho(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \int \int \int \rho_0\left(\frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, y, z\right) dx dy dz = e. \end{aligned}$$

Подставив теперь выражение (10.5) для плотности заряда в общее уравнение (9.11), получим для скалярного потенциала выражение

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \int \int \int \frac{\rho_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \eta, \zeta\right) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (1 - \beta^2)[(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]}.$$



Изменив обозначение переменных интегрирования, мы можем также написать:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \iiint \frac{\rho_0(\xi', \eta', \zeta') d\xi' d\eta' d\zeta'}{\sqrt{(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 + (z' - \zeta')^2}}.$$

Интеграл в этом равенстве формально совершенно тождественен с потенциалом  $\varphi_0$ , который вызывается в точке  $x', y', z'$  распределением неподвижных зарядов. Таким образом, мы получаем для любого распределения зарядов следующую зависимость между скалярным потенциалом зарядов, движущихся со скоростью  $v$ , и электростатическим потенциалом тех же зарядов в состоянии покоя:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \varphi_0\left(\frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z\right). \quad (10.6)$$

Теперь мы можем вычислить электрическое поле, а тем самым и полный импульс нашего распределения зарядов:

$$\begin{aligned} e_x &= -(1-\beta^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = e_{0x} \left( \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z \right), \\ e_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e_{0y} \left( \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z \right), \\ e_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e_{0z} \left( \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z \right); \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} G_x &= \frac{v}{4\pi c^2 (1-\beta^2)} \iiint \left[ e_{0y}^2 \left( \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z \right) + \right. \\ &\quad \left. + e_{0z}^2 \left( \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z \right) \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

Меня еще раз обозначения переменных интегрирования, мы получаем:

$$G_x = \frac{v}{4\pi c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \iiint [e_{0y}^2(x', y', z') + e_{0z}^2(x', y', z')] dx' dy' dz',$$

причем в интеграл входит исключительно электрическое поле системы зарядов в состоянии покоя. Так как мы считаем, что распределение этих зарядов обладает шаровой симметрией, то

$$\int e_{0y}^2 d\tau = \int e_{0z}^2 d\tau = \frac{1}{3} \int e_0^2 d\tau = \frac{8\pi}{3} U_0; \quad U_0 = \frac{1}{8\pi} \int e_0^2 d\tau,$$

где буквой  $U_0$  обозначена электростатическая энергия поля неподвижного заряда. Итак, окончательно мы получаем следующее выражение для количества движения:

$$\mathbf{G} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (10.7)$$

Если постоянный коэффициент  $\frac{4}{3} \frac{U_0'}{c^2}$  назвать „нулевой массой“  $m_0$ , то можно написать выражение для количества движения в виде

$$\mathbf{G} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10.8)$$

Тем самым мы нашли в явном виде закон зависимости количества движения от скорости.

Если бы мы производили наши вычисления не для электрона Лорентца, а для твердого шарика, согласно предположению Абрагама, то мы нашли бы закон, отличный от этого и не подтверждаемый опытом. Для зависимости между нулевой массой  $m_0$  и энергией в состоянии покоя мы получили такое же выражение (если не считать коэффициента  $\frac{4}{3}$ ), какое в более общей форме выводится и в теории относительности. По поводу появившегося численного коэффициента следует указать на сделанное в § 8 замечание; мы еще раз вернемся к нему в § 66а.

Рассмотрим еще вкратце движение электрона в заданном силовом поле. Если обозначить через  $\mathbf{F}$  силу, действующую на электрон, то уравнение движения будет:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{F} \quad (10.9)$$

Для того чтобы более удобным образом учесть то обстоятельство, что масса зависит от скорости, разложим силу  $\mathbf{F}$  на две составляющие:  $\mathbf{F}_p$ , которая должна быть параллельна мгновенной скорости  $\mathbf{v}$  (продольная составляющая  $\mathbf{F}_l$ ), и  $\mathbf{F}_t$ , перпендикулярную скорости (поперечная составляющая). Количество движения  $\mathbf{G}$ , вообще говоря, имеет вид

$$\mathbf{G} = \mathbf{v}f(v^2).$$

Следовательно

$$\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t = \dot{\mathbf{v}}f(v^2) + 2\mathbf{v}(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})f'(v^2).$$

Теперь разложим и ускорение  $\dot{\mathbf{v}}$  на продольную и поперечную составляющие  $\dot{\mathbf{v}}_l + \dot{\mathbf{v}}_t$ . Так как  $\mathbf{F}_l$  имеет направление  $\mathbf{v}$ , а  $|\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}| = |\mathbf{v}| \cdot |\dot{\mathbf{v}}_l|$ , то из только что написанного уравнения следует:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_l &= \dot{\mathbf{v}}_l [f(v^2) + 2v^2 f'(v^2)] = \dot{\mathbf{v}}_l \frac{d|\mathbf{G}|}{dv}, \\ \mathbf{F}_t &= \dot{\mathbf{v}}_t f(v^2) = \dot{\mathbf{v}}_t \frac{|\mathbf{G}|}{v}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Оба эти уравнения в отдельности можно написать в обычном для классической механики виде:

$$\text{сила} = \text{массе} \times \text{ускорение.}$$

Но при этом следует принять во внимание, что инертные массы будут различными, в зависимости от того, какое

берется ускорение—продольное или поперечное, а именно, можно говорить о продольной массе

$$m_l = \frac{m}{(\sqrt{1-\beta^2})^3} = \frac{d|G|}{dv}$$

и о поперечной массе

$$m_t = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{|G|}{v}.$$

В опытах с отклонением частиц в электрическом магнитном поле, рассмотренных в § 3 (измерения удельного заряда  $\frac{e}{m}$ ), мы, очевидно, имели дело исключительно с поперечной массой. Мы рассмотрим еще, как должна измениться форма парабол, характеризующих отклонение при малых скоростях (на рис. 7), если от малых скоростей перейти к большим.

Действующая на электрон лорентцова сила, как и прежде, равна

$$F = e \left( E + \left( \frac{v}{c} \times H \right) \right).$$

Поэтому уравнения движения (10.9) для случая, описанного в § 3 ( $E$  и  $H \parallel$  оси  $x$ , направление движения  $\parallel$  оси  $z$ ), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG_x}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = eE, \\ \frac{dG_y}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{mv_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e}{c} H v_z, \\ \frac{dG_z}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{mv_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{e}{c} H v_y. \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Если отклонения по направлениям осей  $x$  и  $y$  очень малы, т. е.  $v_x$  и  $v_y$  в течение всего времени движения электрона очень малы по сравнению с  $v_z$ , то скорость  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$  практически можно считать постоянной и равной  $v_z$ ; изменение  $v_z$  есть величина более высокого порядка, что легко заключить из третьего уравнения движения. Поэтому два других уравнения можно приближенно проинтегрировать. Первое дает:

$$x = \frac{eE}{2m} t^2 \sqrt{1-\beta^2} + C_1 t + C_2,$$

откуда, подставляя начальные условия ( $x=0$  и  $\dot{x}=0$  при  $t=0$ , т. е. в момент прохождения луча через диафрагму), для общего отклонения в направлении оси  $x$ -ов получаем:

$$x = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v^2} \sqrt{1-\beta^2}, \quad (10.12a)$$

если подставить вместо  $t$  время пробега  $t = \frac{l}{v} = \frac{l}{v}$  от диафрагмы до пластинки. Аналогично этому, отклонение в направлении оси  $y$ -ов будет:

$$y = \frac{1}{2} \frac{eH}{mc} \frac{l^2}{v} \sqrt{1-\beta^2}. \quad (10.126)$$

Если составить, как в классическом случае, отношение

$$\frac{y}{x} = \frac{H}{E} \frac{v}{c}, \quad (10.13)$$

то оказывается, что и здесь следы всех частиц, имеющих одинаковые скорости  $v$ , но различные отношения  $\frac{e}{m}$ , лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Иной результат получается во втором случае, при рассмотрении следов частиц одного сорта (с заданным  $\frac{e}{m}$ ), но движущихся с различными скоростями. Исключая из выражений (10.12а) и (10.12б) скорость  $v$ , получим уже не параболы, как в классическом случае ( $\beta^2 \ll 1$ ), а параболоподобные кривые четвертого порядка, форма которых изображена на рис. 18 (сплошная кривая; пунктирная получается при вычислении для классического случая). Нас интересует здесь прежде всего тот факт, что кривые проходят через начало координат, не касаясь оси  $y$ , но пересекая эту ось под определенным углом  $\alpha$ . Так как меньшим значениям  $x$  или  $y$  соответствует большее отношение  $\frac{v}{c}$ , то область около

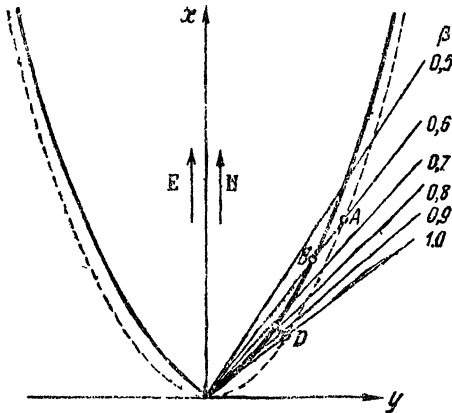


Рис. 18. Возрастание массы со скоростью. При эксперименте, изображенном на рис. 6, получается, вместо пунктирной параболы, сплошная кривая.

лучим начало координат при предельной скорости  $v = c$ . Угол  $\alpha$  получается из формулы (10.13):

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{v \rightarrow c} \frac{y}{x} = \frac{H}{E}.$$

Влияние зависимости массы от скорости легко можно демонстрировать следующим практическим способом. Пусть пунктирная кривая на рисунке представляет собой параболу, вычисленную по формуле

$$\frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} \frac{e H^2 v^2}{m E c^2},$$

т. е. в предположении постоянства массы. Она изображает след совершенно одинаковых, но движущихся с различными скоростями частиц. С другой стороны, согласно соотношению (10.13), имеющему место для любых скоростей, следы частиц с различными массами лежат на прямых, проходящих через начало координат. На рисунке в виде примера изображены прямые для  $\beta = 0,5, 0,6$  и т. д. Для получения точки, соот-

ветствующей измененной (благодаря изменению массы) кривой, проведем вектор, относящийся к определенной скорости, из начала координат до пересечения с описанной выше параболой и укоротим его в отношении  $\sqrt{1-\beta^2}$ : 1. Благодаря этому, например, точка  $A$  на прямой, соответствующей  $\beta=0,6$ , вследствие укорочения в отношении  $\sqrt{1-(0,6)^2}=0,8$  переходит в точку  $B$  и т. д. В частности видно, что при этом построении точка  $D$  (пересечение первоначальной параболы с прямой  $\beta=1$ ) передвинется в начало координат.

Описанные в § 3 опыты показали, что масса быстро движущегося электрона действительно возрастает со скоростью так, как того требует уравнение

$$G = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.8)$$

Эти наблюдения представляли до появления теории относительности особый интерес вследствие того, что с их помощью надеялись решить, имеет ли масса электрона чисто электромагнитную природу или электрон несет с собой, кроме электромагнитной массы, еще массу в обычном смысле; неоднократно высказывалось предположение, что только электромагнитная масса растет со скоростью, а обычная масса в смысле механики должна быть действительно постоянной величиной, характеризующей данное тело. С этой точки зрения только что описанные опыты потеряли свой интерес, вследствие того положения, которое заняла по отношению к ним теория относительности; согласно последней формула (10.8), которую мы здесь получили для электромагнитной части массы, применима вообще к любого рода массе, так что при помощи этих опытов нельзя экспериментально обнаружить никаких различий между массами того или иного рода.

### § 11. Поле, вызываемое заданным распределением зарядов.

*a) Запоздывающие потенциалы.* Перейдем теперь к исследованию поля, создаваемого произвольно движущимися зарядами. Предположим, что величины  $\rho$  и  $\rho v$  являются произвольно заданными функциями координат и времени. Тогда уравнения поля (6.1) могут быть проинтегрированы в общем виде.

При интегрировании будем исходить не из уравнений поля (6.1), а из уравнений для потенциалов (9.4):

$$\begin{aligned} \Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \rho v \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (11.1)$$

При этом потенциалы  $A$  и  $\varphi$  связаны с векторами поля  $e$  и  $h$  и друг с другом соотношениями (9.1), (9.2) и (9.3). Система уравнений (11.1) состоит из четырех совершенно одинаково построенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений для четырех функций  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  и  $\varphi$ . Общее решение линейного неоднородного дифференциального урав-

нения состоит из общего решения однородного уравнения и из частного решения неоднородного уравнения. Это частное решение, как может быть показано, имеет вид:

$$A(x, y, z, t) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\{\rho v\} \left( \xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (11.2)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint \frac{\rho \left( \xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\xi d\eta d\zeta.$$

Для того чтобы удовлетворить заданным начальным и пограничным условиям, можно к этим решениям, которые мы сначала рассмотрим в отдельности, прибавить еще произвольно выбранное решение однородных уравнений

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad \text{и} \quad \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (11.1a)$$

Рассмотрим наглядный смысл выражения (11.2) для скалярного потенциала  $\varphi$ . Если распределение зарядов не меняется со временем, то это выражение принимает известную форму закона Кулона:

$$\varphi = \iiint \frac{\rho dV}{r}.$$

Изменение же  $\rho$  со временем, согласно (11.2), требует следующего метода вычислений: для определения потенциала  $\varphi$  в точке  $x, y, z$  в момент времени  $t$  представим себе сферу с центром в этой точке и с переменным радиусом  $r$ , который уменьшается со скоростью света так, что к моменту времени  $t$  сфера сжимается в точку. Эта сферическая поверхность при своем сжатии пересечет точку  $\xi, \eta, \zeta$  в некоторый момент времени  $t - \frac{r}{c}$ , и для него-то и следует подставить в (11.2) плотность заряда в этой точке. Следовательно, каждый элемент объема  $d\xi d\eta d\zeta$  множается на ту плотность заряда, которую сфера застала в этом элементе. Таким образом сфера как бы собирает вместе влияние зарядов всего пространства на потенциал  $\varphi$  и переносит их действие в момент времени в  $t$  точку  $x, y, z$ .

Следует указать, что физический смысл формул (11.2) и (11.1) не совсем одинаков. Именно, в то время как в дифференциальных уравнениях знак времени совершенно не играет роли (уравнения не меняются при замене прошедшего времени будущим), мы видим, что уравнение (11.2) содержит в себе существенное различие между прошедшим и будущим временем. Согласно (11.2), для потенциала  $\varphi$  играет роль та плотность заряда  $\rho$  в элементе объема  $d\xi d\eta d\zeta$ , которая существовала там раньше момента времени  $t$ , а именно в момент  $t - \frac{r}{c}$ . Чисто математически для (11.1) было бы возможно также решение, в котором  $\rho(\xi, \eta, \zeta)$  было бы взято не для момента времени  $t - \frac{r}{c}$ , а для момента  $t + \frac{r}{c}$ , следовательно, позднее на  $\frac{r}{c}$ . Но такое решение

противоречило бы нашим традиционным представлениям, так как мы считаем заряды и их движение причиной возникновения потенциала. Отбрасывая второе частное решение и, следовательно, ограничиваясь решением (11.2), („запады в а у щ и й потенциал“), мы тем самым фактически выходим за пределы дифференциального уравнения (11.1).<sup>1)</sup>

Преобразуем теперь еще формулы (11.2) для  $\varphi$  и  $A$ , с тем, чтобы применить их к тому случаю, когда заряды, создающие поле, в согласии с представлениями электронной теории, сосредоточены в области порядка  $10^{-13}$  см. Однако, сначала будем считать плотность заряда  $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  непрерывной и перемещающейся со скоростью  $v$ , которая также является функцией времени и координат.

Для дальнейших применений теории метод интегрирования, предусматриваемый формулами (11.2), несколько неудобен, так как в одинаковых элементах объема  $d\xi d\eta d\zeta$  подинтегральная функция берется в разные моменты времени  $\tau = t - \frac{r}{c}$ . Это приводит к тому, например,

что интеграл  $\iiint \rho(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta$ , который получился бы из (11.2), если отбросить знаменатель  $r$ , не представляет общего заряда всего пространства, как в статическом случае; этот общий заряд получился бы, если бы мы брали подинтегральное выражение всюду для одного и того же момента времени  $\tau = \tau_0$ . Написанный выше интеграл отличается от интеграла, равного общему заряду, добавочным членом, который учитывает движение заряда.

При преобразовании интеграла мы будем пользоваться описанным выше представлением о том, что сфера сжимается к данной точке со скоростью света и суммирует при этом влияние зарядов со всего пространства.

Рассмотрим эту сферу между двумя моментами времени  $\tau$  и  $\tau + d\tau$ , которым соответствуют радиусы  $r = c(t - \tau)$  и  $r - dr$ , где  $dr = -c d\tau$  (рис. 19).

Количество электричества, содержащееся в шаровом слое между сферами  $r$  и  $r - dr$  в момент времени  $\tau$ , равно  $\int_F \rho(\xi, \eta, \zeta, \tau) dr dS$ , где интеграл берется по поверхности сферы. Аналогичный, хотя, вообще говоря, не равный этому интеграл получается для момента времени  $\tau + d\tau$ , но оба интеграла различаются только членами более высокого порядка, которые исчезают в пределе при  $dr \rightarrow 0$ .

С другой стороны, определим теперь количество электричества  $de$ , которое за время  $d\tau$  пересекается сжимающейся сферой и, следовательно, проходит за это время через поверхность сферы. Переход к этому количеству заряда  $de$  полезен в том отношении, что, как мы сейчас увидим, интеграл  $\int de$ , распространенный на все время процесса сжатия сферы, дает суммарный заряд. Вычисление  $de$  можно произво-

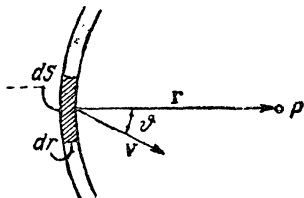


Рис. 19. К вычислению запаздывающего потенциала.

<sup>1)</sup> См. примечание в конце книги.

дить следующим образом. Если бы заряды не двигались, то  $de$  было бы равно написанному выше интегралу. Однако, за время, которое требуется сфере для прохождения через шаровой слой толщины  $dr$ , некоторые из этих зарядов, вследствие их движения, выйдут через внутреннюю пограничную поверхность, и, кроме того, некоторое количество зарядов войдет через эту поверхность в шаровой слой. А именно: через элемент внутренней поверхности  $dS$  выйдет количество заряда

$$\rho dS v d\tau \cos \vartheta = \rho \frac{v \cdot r}{r} dS d\tau,$$

если направление вектора  $r$  считать положительным к центру сферы. Таким образом, если не принимать во внимание членов более высокого порядка, то ввиду того, что  $dr = c d\tau$ , получится:

$$de = \int_S \rho \left(1 - \frac{r \cdot v}{rc}\right) dS dr.$$

Если мы разделим шаровой слой на элементарные объемы, равные  $dSdr$ , то это уравнение мы можем считать верным также и для каждого отдельного элемента объема. Найденное таким образом  $de$  мы можем считать количеством заряда, которое пересекается за время  $d\tau$  элементом поверхности  $dS$ , если только  $dr$  мало по сравнению с линейными размерами  $dS$ , т. е. если можно пренебречь зарядами, вытекающими из бокового ободка цилиндрика  $dSdr$ , по сравнению с зарядами, вытекающими через  $dS$ . Таким образом, мы можем написать выражение  $\rho d\zeta d\eta d\zeta$ , входящее в интеграл (11.2), также в форме

$$\rho d\zeta d\eta d\zeta = \rho dS dr = \frac{de}{\left(1 - \frac{r \cdot v}{rc}\right)}. \quad (11.3)$$

Тогда эти интегралы принимают вид:

$$\varphi = \int \left[ \frac{de}{r - \frac{r \cdot v}{c}} \right]_{t - \frac{r}{c}}, \quad A = \frac{1}{c} \int \left[ \frac{v de}{r - \frac{r \cdot v}{c}} \right]_{t - \frac{r}{c}}, \quad (11.4)$$

причем интегрирование производится по всем зарядам. Понятно, что в эти интегралы также следует подставлять величины, относящиеся к моменту времени  $\tau = t - \frac{r}{c}$ . Подчеркиваем, что переход от (11.2) к (11.4) является совершенно строгим, так как мы пренебрегали только членами более высокого порядка по сравнению с  $dr$ , которые, после подстановки в интегралы и перехода от конечных объемов и промежутков времени к дифференциалам, полностью исчезают.

Применим теперь формулы (11.4) к упомянутому выше случаю, когда заряды сосредоточены в чрезвычайно малой области. В этом случае, при интегрировании по заряду электрона, подинтегральное выражение можно считать постоянным, и тогда для потенциалов электрона получаются простые формулы:

$$\varphi = \left[ \frac{e}{r - \frac{r \cdot v}{c}} \right]_{t - \frac{r}{c}}, \quad A = \frac{e}{c} \left[ \frac{v}{r - \frac{r \cdot v}{c}} \right]_{t - \frac{r}{c}}, \quad (11.5)$$



которые впервые были даны Льенаром (A. Liénard) и Вихертом (E. Wiechert).

Прежде чем перейти к вычислению поля произвольно движущегося электрона на основании потенциалов Льенара-Вихерта, докажем, что последние, в частном случае электрона, движущегося с постоянной скоростью, приводят к выведенным в § 9 формулам (9.14). Эти формулы дают потенциал в данной точке  $P$  для того момента времени, когда электрон при своем прямолинейном движении как раз проходит через начало координат. Напротив, в формулу (11.4) входит расстояние  $r$  от точки  $P$  до точки, в которой находится электрон в момент излучения электромагнитного действия. Если обозначить (рис. 20) через  $r_0$  радиус-вектор, проведенный к точке  $P$  из точки  $B$ , в которой расположен электрон в данный момент времени  $t$ , а через  $r$ , как и раньше, вектор от точки  $A$ , в которой в момент времени  $t - \frac{r}{c}$  возникло электромагнитное поле, дошедшее в момент  $t$  до точки  $P$ , то имеет место равенство

$$r_0 = r - \frac{v \cdot r}{c},$$

так как  $\frac{r}{c}$  есть время, которое необходимо, с одной стороны, для того, чтобы электромагнитное поле из точки  $A$  распространилось до точки  $P$ , а с другой стороны — для того, чтобы электрон перешел из точки  $A$  в точку  $B$ . Нам надо выразить знаменатель потенциала Вихерта  $r - \frac{r \cdot v}{c}$  как функцию от  $r_0$ . Для этой цели составим следующее выражение для  $r_0^2$ :

$$r_0^2 = r^2 - \frac{2(r \cdot v)r}{c} + \frac{r^2 v^2}{c^2}.$$

Далее, так как  $r_0 \times v = r \times v$ , то

$$(r_0 \times v)^2 = (r \times v)^2 = r^2 v^2 - (r \cdot v)^2.$$

Отсюда следует:

$$r_0^2 - \left( r_0 \times \frac{v}{c} \right)^2 = \left( r - \frac{(r \cdot v)}{c} \right)^2.$$

В правой части стоит квадрат знаменателя уравнения (11.5). Если вектор  $v$  совпадает с направлением оси  $x$ -ов координатной системы, начало которой расположено в точке  $B$ , то

$$r - \frac{r \cdot v}{c} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - \frac{v^2}{c^2}(y^2 + z^2)} = s,$$

где  $s$  имеет то же самое значение, как и в (9.14). Таким образом мы вновь приходим к выведенным ранее формулам для электрона, движущегося с постоянной скоростью.

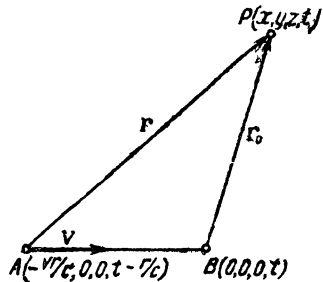


Рис. 20. Пока электромагнитное действие, исходящее из точки  $A$  траектории электрона, доходит до точки  $P$ , электрон успевает передвинуться в точку  $B$ .

б) Вычисление поля с помощью потенциалов Вихерта. Величины  $e$  и  $h$  получаются (см. (9.1) и (9.2)) из этих потенциалов по формулам

$$e = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad h = \text{rot } A. \quad (11.6)$$

Напишем потенциалы Вихерта в следующем виде:

$$\varphi = \left( \frac{e}{s} \right)_{\tau}, \quad A = \left( \frac{ev}{cs} \right)_{\tau}, \quad (11.7)$$

где принято для краткости

$$s = r - \frac{r \cdot v}{c}. \quad (11.8)$$

Значок  $\tau$  указывает на то, что величины  $r$  и  $v$  подставляются для момента времени  $\tau = t - \frac{r}{c}$ . Если координаты электрона заданы как функции времени:

$$\xi = \xi(\tau), \quad \eta = \eta(\tau), \quad \zeta = \zeta(\tau),$$

то  $\tau$  определяется из уравнения

$$c(t - \tau) = r = \sqrt{(x - \xi(\tau))^2 + (y - \eta(\tau))^2 + (z - \zeta(\tau))^2}. \quad (11.9)$$

Если это уравнение решить относительно  $\tau$ , то  $\tau$  будет известной функцией от  $x, y, z, t$ . Вектор  $r$ , составляющие которого суть  $x - \xi(\tau), y - \eta(\tau), z - \zeta(\tau)$ , зависит явно только от  $x, y, z, \tau$ , а вектор скорости  $v = v\{\dot{\xi}(\tau), \dot{\eta}(\tau), \dot{\zeta}(\tau)\}$  — только от  $\tau$ . Время  $t$  в явном виде в потенциалах не входит.

Подставляя потенциалы (11.7) в выражение (11.6), получаем:

$$e = + \frac{e}{s^2} \text{grad } s + \frac{ev}{c^2 s^2} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{e}{c^2 s} \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$h = - \frac{e}{cs^2} (\text{grad } s) \times v + \frac{e}{cs} \text{rot } v.$$

Таким образом необходимо теперь найти значение выражений  $\frac{\partial s}{\partial t}, \text{grad } s, \frac{\partial v}{\partial t}$  и  $\text{rot } v$ . Заметив, что  $v$  зависит от  $x, y, z$  и  $t$  только неявно через  $\tau$ , между тем как  $s$  содержит  $x, y, z$  также и явно, легко проверить справедливость соотношений:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \left( -\frac{(r \cdot v)}{r} + \frac{v^2}{c} - \frac{(r \cdot \dot{v})}{c} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

$$\text{grad } s = \frac{r}{r} - \frac{v}{c} + \left( -\frac{(r \cdot v)}{r} + \frac{v^2}{c} - \frac{(r \cdot \dot{v})}{c} \right) \text{grad } \tau,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \dot{v} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad \text{rot } v = (\text{grad } \tau) \times \dot{v}.$$

Обе величины  $\frac{\partial \tau}{\partial t}$  и  $\text{grad } \tau$  легко получаются из уравнения (11.9), определяющего  $\tau$ , посредством частного дифференцирования по  $t$  или посредством вычисления градиента:

$$c \left( 1 - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = \frac{\partial r}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r} \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

$$- c \text{ grad } \tau = \text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r} \text{ grad } \tau.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{rc}} = \frac{r}{s}; \quad \text{grad } \tau = \frac{-\mathbf{r}}{rc \left( 1 - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{rc} \right)} = - \frac{\mathbf{r}}{cs}.$$

Подставим полученные выражения и равенства (11.6). После несложных промежуточных выкладок мы получим окончательно:

$$\mathbf{e} = - \frac{e}{s^2} \frac{r \dot{\mathbf{v}}}{c^2} + \frac{er}{s^3} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2} \right),$$

$$\mathbf{h} = - \frac{e}{s^2} \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})}{c^2} + \frac{e}{s^3} \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{r})}{c} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2} \right). \quad (11.10)$$

Этими формулами определяется электромагнитное поле произвольно движущегося точечного заряда. Все входящие в них величины относятся к положению электрона в момент времени  $\tau = t - \frac{r}{c}$ . Следует еще раз подчеркнуть, что эти формулы, в такой же мере, как потенциалы Вихерта, являются приближенными, и что поэтому к ним относятся те же ограничения, которые имеют место для формул (11.5). В частности, они совершенно не применимы к области, непосредственно примыкающей к электрону.

Для выяснения смысла формул (11.10) заметим сначала, что они удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{e}; \quad (11.11)$$

следовательно, магнитный вектор всегда перпендикулярен к электрическому, а также и к радиусу-вектору  $\mathbf{r}$ . Напротив, электрический вектор в общем случае не перпендикулярен к  $\mathbf{r}$ ; его радиальная составляющая равна

$$\left( \mathbf{e} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{e}{s^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Далее, весьма важно отметить тот факт, что поля в (11.10) могут быть представлены как результат сложения двух полей, которые мы будем различать значками  $_1$  и  $_2$ . Одно из этих полей, а именно

$$\mathbf{e}_1 = \frac{er}{s^3} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad \mathbf{h}_1 = - \frac{er}{s^3} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (11.12)$$

представляет поле электрона, движущегося прямолинейно с постоянной скоростью  $v$ ; уравнения такого поля мы вывели в § 9. В этом случае, как было показано выше,  $s$  имеет то же значение, что и в (9.13), а именно:

$$s = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c} = \sqrt{r_0^2 - \left(\mathbf{r}_0 \times \frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2},$$

где  $\mathbf{r}_0$  есть вектор, проведенный к точке, в которой вычисляется поле, от того места, куда попал бы электрон в момент времени  $t$ , если бы он продолжал двигаться со скоростью  $v$ ; следовательно, как и выше, имеет место равенство

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{v} \frac{r}{c},$$

так что первая составная часть поля может быть также представлена в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{e}{s^3} \mathbf{r}_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad \mathbf{h}_1 = -\frac{e}{s^3} \left(\mathbf{r}_0 \times \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \\ &= \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{e}_1\right), \end{aligned} \quad (11.12a)$$

что полностью совпадает с (9.15) и (9.16).

Остающаяся вторая составная часть поля

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 &= -\frac{er\dot{\mathbf{v}}}{s^2c^2} + \frac{er(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{s^3c^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right), \\ \mathbf{h}_2 &= -\frac{e(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})}{s^2c^2} + \frac{e(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{s^3c^2} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{r}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (11.13)$$

существенно отличается от первой. В то время как поле, представляемое уравнениями (11.12), убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от электрона, т. е. повсюду обладает характером электростатического поля, движущегося вместе с электроном, — поле (11.13) убывает пропорционально  $1/r$ . Кроме того,  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{h}_2$  перпендикулярны к радиусу-вектору. Следовательно, это поле имеет характер электромагнитной сферической волны, испускаемой электроном. Все это легче усмотреть, если написать выражения (11.13) в несколько ином виде, а именно:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{c}{s^3c^2} \mathbf{r} \times \left[ \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} r\right) \times \dot{\mathbf{v}} \right], \quad \mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{e}_2. \quad (11.13a)$$

Итак, резюмируя, можно сказать, что поле произвольно движущегося электрона создается путем наложения друг на друга двух полей, из которых первое можно рассматривать как электростатическое поле электрона, движущееся вместе с последним, между тем как второе имеет характер электромагнитной волны и возникает только при ускорении (или торможении) электрона. При больших значениях  $r$  волновое поле преобладает над статическим; такую область пространства мы называем волновой зоной (см. том I, § 72).

В виде примера, иллюстрирующего применение равенств (11.10) и (11.13), вычислим энергию, испускаемую движущимся ускоренно или тормозным электроном. Пусть движение электрона, как и выше, задано в виде функции от времени. Найдем количество энергии  $dW$ , которое испускается электроном за время  $d\tau$  в виде излучения. Так как эта энергия распространяется от электрона со скоростью света, то в некоторый последующий момент времени  $t$  она будет находиться между сферическими поверхностями с радиусами  $r = c(t - \tau)$  и  $r' = c(t - \tau - d\tau)$ , центры которых совпадают с положениями электрона в моменты времени  $\tau$  и  $\tau + d\tau$ . Для того, чтобы при вычислении энергии, содержащейся в этом шаровом слое, получить только энергию излучения, а не энергию статического поля, движущегося вместе с электроном, полезно взять значения  $t - \tau$  и  $r$  настолько большими, чтобы статическое поле, убывающее при возрастании  $r$  пропорционально  $\frac{1}{r^2}$ , уже не играло заметной роли. В этом случае энергию шарового слоя можно вычислить, исходя только из волновой части поля (11.13). Отбрасывая значок  $2$  у векторов  $e$  и  $h$ , напишем выражения для плотности энергии:

$$u = \frac{1}{8\pi} (e^2 + h^2) = \frac{1}{4\pi} e^2, \quad (11.14)$$

и для вектора Пойнтинга:

$$S = \frac{c}{4\pi} e \times h = \frac{c}{4\pi} \frac{r}{r} e^2. \quad (11.15)$$

При этом, согласно (11.13),

$$e^2 = \frac{e^2 r^2}{c^4} \left( \frac{\dot{v}^2}{s^4} + \frac{2(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{cs^5} - \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{s^6} \right), \quad (11.16)$$

где, как обычно,  $\beta = \frac{v}{c}$ . Для вычисления энергии, содержащейся в рассмотренном выше шаровом слое, напишем выражение для элемента объема:

$$dV = r^2 d\omega dl,$$

где  $dl$  — толщина шарового слоя и  $d\omega$  — элемент телесного угла, по которому надо интегрировать. Из рис. 21 видно, что при больших значениях  $r$

$$dl = r - r' - v_r d\tau = cd\tau \left( 1 - \frac{v_r}{c} \right) = cd\tau \frac{s}{r}.$$

Поэтому уменьшение энергии электрона в секунду, вызванное излучением, равно

$$-\frac{dW}{d\tau} = \frac{c}{4\pi} \int e^2 r s d\omega. \quad (11.17)$$

Аналогичным образом можно вычислить импульс, отдаваемый электроном в единицу времени. Вследствие того, что плотность импульса  $\mathbf{g} = \frac{S}{c^2}$ , этот импульс равен импульсу излучения, который содержится в шаровом слое:

$$-\frac{d\mathbf{G}}{d\tau} = \frac{1}{4\pi} \int e^2 r s d\omega. \quad (11.18)$$

Эти два выражения — для отдаваемой энергии и импульса — отличаются друг от друга, помимо коэффициента  $c$ , еще лишь тем, что в формуле (11.18), вместо абсолютной величины  $r$ , стоит вектор  $\mathbf{r}$ .

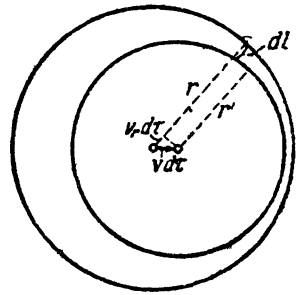


Рис. 21. Форма волнового поля, испущенного электроном в течение времени  $d\tau$ .

Сначала мы применим обе эти формулы к тому частному случаю, когда электрон в рассматриваемый момент времени находится в покое. В этом случае формула для  $e^2$  значительно упрощается; на основании того, что  $s = r$ , получаем:

$$e^2 = \frac{e^2}{r^2 c^4} \left( \dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{r^2} \right) = \frac{e^2}{r^4 c^4} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})^2. \quad (11.16a)$$

Если перейти теперь в (11.17) и (11.18) к полярным координатам, полярная ось которых направлена вдоль ускорения, то

$$(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})^2 = r^2 \dot{\mathbf{v}}^2 \sin^2 \vartheta.$$

Поэтому интеграл (11.17) будет:

$$-\frac{dW}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{c^3}, \quad (11.19)$$

между тем как все три слагающие интеграла (11.18) выражающего потерю импульса, исчезают:

$$\frac{d\mathbf{G}}{d\tau} = 0. \quad (11.20)$$

Следовательно, электрон, находящийся в данный момент времени в покое, совсем не отдает импульса излучением.

Для того чтобы найти выражения излучаемой энергии и импульса в общем случае, т. е. при произвольной скорости, подставим точную формулу (11.16) в интегралы (11.17) и (11.18). Не приводя здесь подробно всех кропотливых выкладок, связанных с интегрированием, укажем сразу результат:

$$-\frac{dW}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2}}{(1 - \beta^2)^3} \quad (11.21)$$

и

$$-\frac{d\mathbf{G}}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^5} \mathbf{v} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2}}{(1 - \beta^2)^3} = -\frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{dW}{d\tau}. \quad (11.22)$$

При  $\mathbf{v} \rightarrow 0$  эти формулы превращаются в выражения (11.19) и (11.20). Кроме того, можно заметить, что формула излучения (11.21) содержит только квадрат скорости, так что если ограничиться нерелятивистским приближением ( $\beta^2 \ll 1$ ), то получается та же формула (11.19). Позднее, при изложении теории относительности, мы выведем еще раз оба выражения (11.21) и (11.22) более простым путем; там они получаются непосредственно из частного случая (11.19), если перейти посредством так называемого преобразования Лоренца от координатной системы, в которой электрон неподвижен, к системе, по отношению к которой он движется со скоростью  $\mathbf{v}$ .

Позднее мы вернемся к выводам, которые можно извлечь из только что полученных результатов, в особенности к вопросу об обратном воздействии излучения на электрон. Упомянем еще, что формула (11.21) имеет значение для объяснения „спектра торможения“ рентгеновых лучей. Эти лучи, как известно, возникают при попадании быстрых электронов, — например, электронов катодных лучей — на твердые тела. Спектральное исследование испускаемого излучения показало, что оно представляет собой наложение двух резко отличающихся друг от друга частей. Одна часть излучения обладает линейчатым спектром и зависит от вещества антиматериала. Она испускается атомами твердого тела, возбужденными в результате электронной бомбардировки. Другая часть рентгеновского излучения обладает непрерывным спектром и может быть объяснена только что вычислен-

ным излучением электронов, которое возникает вследствие их торможения при проникновении в антикатод. Полное теоретическое исследование излучения, возникающего при торможении, возможно, впрочем, только в рамках квантовой теории.

§ 12. Уравнения движения в форме Гамильтона. Если требуется вычислить в конкретном случае путь электрона в заданном силовом поле, то для большинства задач самым простым и удобным исходным уравнением является уравнение

$$m\dot{\mathbf{v}} = e \left\{ \mathbf{e} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{h} \right) \right\}. \quad (12.1)$$

Однако, для некоторых целей выгодно пользоваться уравнениями движения в ином виде — в виде так называемых уравнений Гамильтона. Для системы с  $n$  степенями свободы уравнения Ньютона (12.1) дают  $n$  дифференциальных уравнений 2-го порядка. Вместо них можно ввести уравнения Гамильтона, которые образуют систему  $2n$  уравнений первого порядка в следующем, так называемом „каноническом“, виде. Пусть мгновенное состояние системы или „фаза“ описывается  $2n$  переменными, а именно:  $n$  координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $n$  импульсами  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ . Требуется определить фазу по прошествии времени  $dt$ . Иными словами, найти скорости изменения всех  $2n$  переменных, т. е. их производные по времени  $\dot{x}_1 \dots \dot{x}_n, \dot{p}_1 \dots \dot{p}_n$ . Уравнения движения выражаются в гамильтоновой форме, если можно указать такую функцию

$$\mathcal{H}(x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n, t), \quad (12.2)$$

чтобы было

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (12.3)$$

Мы утверждаем: пока масса  $m$  считается постоянной, т. е. пока можно пренебрегать релятивистской зависимостью массы от скорости, уравнения (12.1) и (12.3) совершенно эквивалентны друг другу, если только положить, что функция (12.2) имеет вид:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[ \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \left( p_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 + \left( p_z - \frac{e}{c} A_z \right)^2 \right] + e\phi. \quad (12.4)$$

Здесь  $\phi$  — скалярный и  $\mathbf{A}$  — векторный потенциалы, посредством которых определяется электромагнитное поле уравнений

$$\mathbf{e} = - \text{grad } \phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}, \quad (12.5)$$

$$\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Импульсы  $p_x, p_y, p_z$  входят в выражение для функции  $\mathcal{H}$  только в явном виде, а координаты  $x, y, z$  и время  $t$  — через зависящие от этих величин потенциалы. Вывод функции Гамильтона (12.2) для релятивистского случая будет приведен в § 64. Теперь же ограничимся тем, что непосредственно докажем эквивалентность формул (12.1) и (12.3).

Уравнения для  $\dot{x}$  и  $\dot{p}_x$ , согласно (12.3) и (12.4), имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{m} \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right), \\ p_x &= -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{e}{mc} \left\{ \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right) \frac{\partial A_x}{\partial x} + \left( p_y - \frac{e}{c} A_y \right) \frac{\partial A_y}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \left( p_z - \frac{e}{c} A_z \right) \frac{\partial A_z}{\partial x} \right\}.\end{aligned}\quad (12.6)$$

Подставляя

$$p_x = m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x \quad (12.6)$$

из первого уравнения во второе и принимая еще во внимание, что

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t},$$

мы получаем:

$$m\ddot{x} = -e \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + \frac{e\dot{y}}{c} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{e\dot{z}}{c} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right).$$

Ввиду (12.5), последнее уравнение эквивалентно (12.1). Если мы имеем не один электрон, а несколько точечных зарядов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , движущихся в заданном поле, то их движение описывается функцией Гамильтона

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2m_i} \left[ \left( p_{x_i} - \frac{e_i}{c} A_{x_i} \right)^2 + \left( p_{y_i} - \frac{e_i}{c} A_{y_i} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( p_{z_i} - \frac{e_i}{c} A_{z_i} \right)^2 \right] + e_i \varphi_i \right\}, \quad (12.7)$$

где значок  $i$  у потенциалов означает, что в (12.7) подставляются значения  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  в том месте пространства, в котором находится  $i$ -тая частица.

Мы упомянем еще некоторые случаи, в которых полезно применять гамильтоновы уравнения движения.

1. Статистическая механика. Если систему, описываемую функцией Гамильтона (12.2), которая, однако, не должна содержать время  $t$  в явном виде, привести в „контакт“ с тепловым резервуаром температуры  $T$ , то движение этой системы — благодаря обмену энергии с резервуаром — уже не будет происходить согласно уравнениям (12.3). Тогда мы уже не в состоянии указать для каждого момента времени точное значение фазы  $(x_i, p_i)$ . Основная теорема Больцмана дает, вместо этого, вероятность  $W(x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n) dx_1 \dots dp_n$  того, что в произвольно выбранный момент координаты и импульсы системы будут заключаться в пределах между  $x_1$  и  $x_1 + dx_1, \dots, p_n$  и  $p_n + dp_n$ ; а именно: эта вероятность равна

$$W dx_1 \dots dp_n = C e^{-\frac{\mathcal{H}(x_1 \dots p_n)}{kT}} dx_1 \dots dp_n, \quad (12.8)$$



где  $k = \frac{R}{N}$  есть газовая постоянная, отнесенная к одной молекуле, а постоянная  $C$  определяется из условия

$$\int \dots \int W dx_1 \dots dp_n = 1.$$

Если  $f(x_1 \dots p_n)$  есть доступная наблюдению функция „фазы“, то ее среднее значение, т. е. результат ее усреднения во времени для одной системы, а также и мгновенное среднее при одновременном наблюдении очень многих систем (молекул), определяется равенством:

$$f = \frac{\int \dots \int f(x_i p_i) e^{-\frac{\mathcal{H}(x_i p_i)}{kT}} dx_1 \dots dp_n}{\int \dots \int e^{-\frac{\mathcal{H}(x_i p_i)}{kT}} dx_1 \dots dp_n}. \quad (12.9)$$

2. Вычисление электрических и магнитных моментов. Рассмотрим вкратце подлежащий в дальнейшем более подробному разбору вопрос об электрическом и магнитном моменте атома при наличии поля. Если атом состоит из  $n$  зарядов  $e_1 \dots e_n$ , соответственные радиусы-векторы которых суть  $r_1 \dots r_n$ , то его электрический и магнитный дипольные моменты равны

$$p_{эл} = \sum e_i r_i, \quad p_{магн} = \frac{1}{2c} \sum e_i (r_i \times v_i). \quad (12.10)$$

(Второе из этих равенств будет подробно выведено в § 17). Составим функцию Гамильтона для этого атома в том случае, когда он находится в однородном электрическом ( $E$ ) и однородном магнитном поле ( $H$ ); пусть оба поля направлены по положительной оси  $z$ -ов. Это внешнее поле выражается через потенциалы:

$$\varphi = -Ez, \quad A_x = -\frac{1}{2} Hy, \quad A_y = \frac{1}{2} Hx, \quad A_z = 0,$$

так что для потенциалов  $\varphi_i$  и  $A_i$ , входящих в (12.7), мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_i^0 - Ez_i, \\ A_{x_i} &= -\frac{1}{2} Hy_i, \\ A_{y_i} &= \frac{1}{2} Hx_i, \\ A_{z_i} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

причем потенциалы  $\varphi_i^0$  определяются только взаимными электростатическими силами между отдельными зарядами, находящимися в атоме. Это значит, что мы пренебрегаем действием магнитного поля, вызываемого отдельными электронами, на движение остальных электронов. Оно и в самом деле очень мало по сравнению с электростатическим взаимодействием  $\frac{e^2}{r_{ik}}$ . С помощью функции Гамильтона (12.7) вообще невоз-

можно учесть магнитное взаимодействие, так как тогда векторный потенциал  $A$  зависел бы не только от координат, но и от импульсов.

Обозначим через  $p$  составляющие моментов (12.10) по направлению внешних полей  $E$  и  $H$ ; тогда из (12.7), принимая во внимание значения потенциалов (12.11), получаем простую зависимость:

$$p_{эл} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{K}}}{\partial E}, \quad p_{магн} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{K}}}{\partial H}. \quad (12.12)$$

Легко непосредственно проверить первое уравнение ( $p_{эл} = \sum e_i z_i$ ). Для доказательства второго уравнения нужно лишь после дифференцирования по  $H$  заменить  $p_{x_i} - \frac{e_i}{c} A_{x_i}$  через  $m x_i$  согласно с (12.6а).

Сочетание уравнений (12.9) и (12.12) дает важный и применимый в общем случае способ вычисления электрической и магнитной восприимчивости. А именно, мы находим:

$$p_{эл} = -\frac{\int \dots \int \frac{\partial \bar{\mathcal{K}}}{\partial E} e^{-\frac{\bar{\mathcal{K}}}{kT}} dx_1 \dots dp_n}{\int \dots \int e^{-\frac{\bar{\mathcal{K}}}{kT}} dx_1 \dots dp_n} \quad (12.13)$$

(мы написали в явном виде только формулу для электрической восприимчивости).

Для вычисления поляризации, вызываемой полями  $E$  или  $H$ , нужно только вычислить фазовый интеграл

$$Z = Z(E, H, T) = \int \dots \int e^{-\frac{\mathcal{K}(E, H, x_1, \dots, p_n)}{kT}} dx_1 \dots dp_n, \quad (12.14)$$

из которого на основании (12.13) определяются средние значения поляризации:

$$p_{эл} = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial E}, \quad p_{магн} = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial H}.$$

Этим вычислением мы займемся для некоторых специальных случаев в §§ 24 и 38.

## Б. УПРУГО СВЯЗАННЫЙ ЭЛЕКТРОН

§ 13. Свободные колебания упруго связанного электрона. Одной из наиболее важных задач электронной теории является детальное описание строения атома. Каким же образом построить из положительных и отрицательных зарядов модель атома так, чтобы свойства этой модели, вычисленные с помощью основных уравнений электродинамики, соответствовали наблюдаемым на опыте явлениям? В развитии электронной теории за последние десятилетия ясно заметны три ступени, соответствующие последовательному приближению к этой цели. Первая из них (до 1912 г.) — модель атома Томсона (Sir J. J. Thomson). Вторая ступень — модель Нильса Бора (1912—1926); третья начинается с применения квантовой механики (Гейзенберг, Шрёдингер, с 1926 г.). На каждой из этих ступеней были достигнуты столь большие успехи, что каждый раз можно было считать выработанную на предыдущей ступени

точку зрения окончательно ликвидированной. Поэтому с точки зрения дедуктивного метода аксиомы квантовой механики представляют теперь исходную точку для всякого систематического изложения этого вопроса. Тем не менее, в дальнейшем мы подробно рассмотрим свойства модели Томсона (упруго связанные электроны). Это вполне оправдывается тем обстоятельством, что существенные черты магнитных и электрических свойств атомов могут быть разобраны с помощью этой модели особенно наглядно и просто. Но надо иметь в виду, что полученные таким образом результаты должны подвергнуться более или менее серьезным поправкам с помощью более строгих методов теории Бора и квантовой механики. Применяя эти более строгие методы, мы должны, однако, заранее отказаться от физической наглядности в обычном смысле слова. Все же результаты этих методов большей частью допускают в дальнейшем такое истолкование, что можно сказать: атом ведет себя так, как будто он содержит в себе упруго связанные заряды, в смысле модели Томсона. Поэтому точное знание свойств модели Томсона необходимо хотя бы в виду того, что терминология, посредством которой обычно описываются квантовомеханические соотношения, большей частью основана на понятиях, заимствованных из наглядной модели Томсона.

Эмпирической исходной точкой современного изучения атомов является существование характерных для каждого вида атома спектральных линий (свечение разреженных газов в разрядной трубке или в пламени бунзеновской горелки). С точки зрения электромагнитной теории света, каждую такую линию должен испускать некоторый излучатель, колеблющийся с частотой, которая соответствует цвету рассматриваемой линии. Наиболее простым типом такого излучателя является отдельный электрон, привязанный к положению равновесия таким образом, что он может совершать гармонические колебания именно с этой частотой. Его уравнение движения по направлению оси  $x$ -ов будет:

$$m\ddot{x} + m(2\pi\nu)^2x = 0,$$

а общий интеграл этого уравнения:

$$x = A \cos 2\pi\nu t + B \sin 2\pi\nu t.$$

Итак, для того чтобы электрон совершал колебания с частотой  $\nu$ , он должен быть привязан к положению равновесия  $x=0$  таким образом, чтобы при удалении на расстояние  $x$  из этого положения он притягивался туда с силой

$$- m(2\pi\nu)^2x.$$

Томсоном была предложена следующая модель. Пусть электрон с зарядом  $-e$  движется внутри равномерно заполненного положительным зарядом шара, радиус которого  $a$ ; при этом пусть весь положительный заряд равен  $+e$ . Вычислим силу, действующую на электрон, когда он находится на расстоянии  $r < a$  от центра шара. Заряд, расположенный вне сферы радиуса  $r$ , ничего не прибавляет к силе, действующей на электрон. Положительный заряд внутри шара радиуса  $r$  равен  $e \frac{r^3}{a^3}$ ; этот

заряд действует на электрон так, как будто он сосредоточен в центре шара, так что мы получаем силу

$$F = -\frac{e^2 r}{a^3}.$$

Эта сила вызывает гармонические колебания с частотой

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{a^3 m}}.$$

Если подставить сюда известные значения  $e$  и  $m$ , а вместо  $\nu$  взять величину порядка оптических собственных колебаний изолированных атомов ( $10^{15}$  сек.<sup>-1</sup>), то для искомого радиуса положительного шара получим величину порядка  $10^{-8}$  см. Это значение совпадает с порядком величины радиуса атома, вычисленной по кинетической теории газов из длины свободного пробега (теплопроводность, диффузия). Этот результат можно было в начале рассматривать как подтверждение модели Томсона. Однако в дальнейшем, на основании опытов с рассеянием  $\alpha$ -частиц, Резерфорд (Rutherford) непосредственно показал, что положительный заряд атомов сосредоточен в объеме, не превосходящем  $10^{-12}$  или  $10^{-13}$  см. Таким образом, размеры положительного заряда примерно в 100 000 раз меньше, чем они должны быть по Томсону для объяснения оптических спектральных линий. Именно, результат  $a \approx 10^{-8}$  см, который раньше мог рассматриваться как подтверждение модели Томсона, после опытов Резерфорда стал решающим доказательством ее полной несостоятельности. Упомянутые выше опыты Резерфорда стали началом эпохи Бора в квантовой теории.

Не вдаваясь в дальнейшем в подробности модели Томсона (не существующей в природе), рассмотрим теперь движение электрона под действием упругой силы  $-kr$ . Согласно классической механике уравнение его движения будет

$$m\ddot{r} + kr = 0, \quad (13.1)$$

с общим решением

$$r = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (\omega^2 = \frac{k}{m}). \quad (13.2)$$

Постоянными интегрирования являются произвольно выбранные векторы  $a$  и  $b$ . Их можно определить, если задать, например, положение и скорость электрона в момент времени  $t = 0$ .

Энергия этой механической системы равна

$$W = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} kr^2;$$

отсюда, по (13.2),

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 + b^2). \quad (13.3)$$

Так как электрон, кроме массы  $m$ , имеет еще заряд  $e$ , то, совершая колебательное движение, он становится центром излучения, посылая в окружающее пространство определенное количество энергии.

В частности, (13.3) дает максимальное количество энергии, которое может быть испущено при заданных начальных значениях  $a$  и  $b$ . Следовательно, мы противоречили бы закону сохранения энергии, если бы стали утверждать, что (13.1) является точным уравнением движения. Напротив, мы должны ожидать, что амплитуды  $a$  и  $b$  будут убывать со временем, в зависимости от количества излучаемой энергии. В § 11 мы нашли количество лучистой энергии, испускаемой колеблющимся зарядом в течение одной секунды. Эта величина равна

$$S = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{r}^2 \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}. \quad (13.4)$$

Следовательно, на эту величину — как того требует закон сохранения энергии — должна ежесекундно уменьшаться энергия колеблющегося электрона:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \ddot{r}^2. \quad (13.5)$$

Уравнения (13.4) и (13.5) имеют смысл только тогда, когда энергия  $S\tau$ , излученная во время одного колебания  $\tau$ , мала по сравнению с энергией  $W$ , другими словами — когда мы имеем случай слабо затухающих колебаний. Но с этим ограничением мы можем из (13.5) непосредственно получить закон затухания амплитуд. Согласно (13.2), мы имеем:

$$\ddot{r}^2 = \frac{1}{2} \omega^4 (a^2 + b^2),$$

следовательно, на основании (13.4) и (13.3),

$$S = \frac{e^2 \omega^4}{3c^3} (a^2 + b^2) = \frac{2e^2 \omega^2}{3mc^3} W.$$

Отсюда мы получаем закон излучения и затухания излучения в виде

$$S = \gamma W, \\ W = W_0 e^{-\gamma t} \quad \left( \gamma = \frac{2e^2 \omega^2}{3mc^3} \right). \quad (13.6)$$

За время

$$T = \frac{1}{\gamma} = \frac{3mc^3}{2e^2 \omega^2} \quad (13.7)$$

энергия излучающего атома уменьшается в  $e$  раз. При  $\frac{\omega}{2\pi} = 10^{14}$  сек $^{-1}$ ,  $T = 4 \cdot 10^{-7}$  сек, а при  $\frac{\omega}{2\pi} = 10^{15}$  сек $^{-1}$ ,  $T = 4 \cdot 10^{-9}$  сек. Соответствующий закон затухания амплитуд должен быть:

$$a = a_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t}, \quad b = b_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t},$$

причем логарифмический декремент равен:

$$\delta = \frac{\gamma}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3} \frac{\pi e^2 \omega}{mc^3}.$$

Следовательно, мы удовлетворим закону сохранения энергии, если решение (13.2) нашего уравнения движения заменим следующим:

$$\mathbf{r} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a_0 \cos \omega t + b_0 \sin \omega t). \quad (13.8)$$

Конечно, (13.8) не является решением исходного уравнения движения (13.1), а лишь результатом последующего и поэтому весьма грубого исправления решения (13.2).

Поэтому естественно сделать еще один шаг в том же направлении и поставить вопрос, нельзя ли сразу ввести в уравнение (13.1) такую добавочную силу  $F$ , чтобы с самого начала избежать противоречия с законом сохранения энергии. Возможное выражение для такой силы можно в самом деле найти, если мы будем ограничиваться рассмотрением почти-периодических движений. Вводя эту силу  $F$ , мы получим вместо (13.1)

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = F$$

или, по умножении на  $\mathbf{r}$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{k}{2} \mathbf{r}^2 \right) = F \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

В левой части уравнения стоит изменение энергии, требуемое уравнением (13.5). Следовательно,  $F$  должно быть таким, чтобы

$$F \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}^2. \quad (13.9)$$

Вряд ли возможно решить простым способом это уравнение относительно  $F$ . Здесь мы также ограничимся лишь тем, что удовлетворим закону сохранения энергии в среднем по времени. Тогда, воспользовавшись тождеством

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) = \ddot{\mathbf{r}}^2 + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}}),$$

мы можем написать:

$$F \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{2e^2}{3c^3} \left[ (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}}) - \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \right].$$

Вычислим среднее значение  $(F\dot{\mathbf{r}})$  в интервале от  $t=0$  до  $t=T$ ; это дает:

$$\overline{(F\dot{\mathbf{r}})} = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}})} - \frac{2e^2}{3c^3} \frac{[(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})_{t=T} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})_{t=0}]}{T}.$$

Если время  $T$  достаточно велико, то второе слагаемое мало по сравнению с первым и может быть опущено.

Тогда мы удовлетворим нашему уравнению, если напишем

$$F = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}. \quad (13.10)$$

Таким образом мы получили исправленное в соответствии с законом сохранения энергии уравнение движения упруго связанного электрона:

$$m\ddot{r} + kr - \frac{2e^2\cdots}{3c^3} \ddot{r} = 0. \quad (13.11)$$

Само собою разумеется, что оно должно приводить к решению (13.8). Если определить  $r$  как  $r = Ae^{i\omega t}$ , где  $A$  — комплексный вектор, то для определения  $\omega$  из (13.11) мы получаем уравнение

$$-\omega^2 + \frac{2e^2}{3c^3 m} i\omega^3 + \frac{k}{m} = 0.$$

Если положить для краткости

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 \text{ и } \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3} = \gamma,$$

то наше уравнение примет вид:

$$-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2 = 0.$$

Если ограничиться случаем  $\gamma \ll \omega_0$ , то решения будут:

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{i}{2} \gamma, \quad \omega_2 = -\omega_0 + \frac{i}{2} \gamma.$$

Тогда общее решение уравнения (13.11) напишется в виде

$$r = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right)t} + Be^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)t}. \quad (13.12)$$

Это решение, написанное в комплексной форме, совпадает с решением (13.8). Для вещественности  $r$  необходимо, чтобы было  $r = r^*$ , а отсюда  $B = A^*$ . Поэтому в уравнении (13.12) остается только 6 произвольных постоянных, а именно 3 для вещественной и 3 для мнимой части вектора  $A$ .

Необходимо особенно подчеркнуть, что выражение (13.10) для „сопротивления излучения“ имеет смысл только в случае почти-периодических движений, т. е. таких, для которых можно положить

$$\frac{2e^2\cdots}{3c^3} \ddot{r} \approx -\frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3} r.$$

Применяя же (13.10) к другим видам движения, например к торможению свободного электрона в постоянном внешнем поле, мы получили бы совершенно бессмысленные результаты. В этом случае только вторая (но не третья) производная от радиуса-вектора по времени отлична от нуля, так что уравнение (13.10) в этом случае вообще не дало бы никакого затухания излучения.

Наш вывод формулы затухания излучения остается в высшей степени неудовлетворительным в том отношении, что из него совершенно не видно, каким именно образом излученная шаровая волна может влиять на движение электрона. Для того чтобы ближе понять истинную природу этого обратного воздействия электрона на самого себя, надо фактически вычислить результирующую силу, действующую на все элементы объема электрона. Если считать сначала элек-

трон с плотностью заряда  $\rho$  неподвижным, то на элемент объема электрона  $dV_1$  действует со стороны другого элемента  $dV_2$  сила

$$F_{12} = \frac{\rho_1 \rho_2 dV_1 dV_2}{r_{12}^3} (r_1 - r_2).$$

В общем, на  $dV_1$  действует сила

$$F_1 = \rho_1 dV_1 \int \frac{r_1 - r_2}{r_{12}^3} \rho_2 dV_2.$$

Результирующая сила, с которой электрон действует сам на себя, будет

$$F = \int \int \rho_1 \rho_2 \frac{r_1 - r_2}{r_{12}^3} dV_1 dV_2.$$

В случае, когда электрон остается неподвижным или движется с постоянной скоростью, эта сила равна нулю. Совершенно иное положение вещей мы имеем при ускоренном движении электрона. Тогда влияние  $dV_2$  на  $dV_1$  следовало бы учитывать, принимая во внимание создаваемые элементом объема  $dV_2$  запаздывающие потенциалы, по которым можно определить поле в точке нахождения объема  $dV_1$  в любой заданный момент времени. Это вычисление настолько сложно, что до сих пор его не сумели провести в строгой форме. Только сделав ряд специальных допущений, Лорентц смог получить приближенное решение, которое, как и следовало ожидать, совпадает с решением, полученным нами просто на основании закона сохранения энергии (сравни изложение Лорентца в его книге „Теория электронов“, ГТИ, Л.-М. 1934, стр. 334—336).

**§ 14. Расширение спектральных линий, вызываемое затуханием.** Строго монохроматический свет был бы эквивалентен бесконечно длинному ряду гармонических волн вида

$$a \sin 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Всякое отклонение от этого вида колебаний имеет следствием то, что при спектральном разложении серии волн мы получаем смесь разных цветов, т. е. различные частоты чисто гармонического типа. С помощью разложения Фурье можно вычислить частоты, содержащиеся в данной серии волн. Это разложение состоит в том, что данная серия представляется как результат простой суперпозиции многих бесконечно длинных серий волн. Возможность такого разложения для любой волны заданного вида составляет основное содержание теоремы Фурье. Если рассматриваемый ряд волн имеет приближенно гармонический характер с определенной частотой  $\nu_0$ , то отклонение от строгой гармоничности скажется в некотором расширении  $\delta\nu_0$  линии, имеющей среднюю частоту  $\nu_0$ .

Во многих случаях можно указать приближенное значение расширения линии  $\delta\nu$  почти без вычислений. Рассмотрим, например, серию волн конечной длины  $L$ , которую в определенный момент времени (например,  $t = 0$ ) можно представить в виде

$$f = a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda_0} \quad \text{для } 0 < x < L,$$

$$f = 0 \quad \text{для } x < 0 \text{ и } x > L.$$



Число длин волн составляет  $n = \frac{L}{\lambda_0}$ , причем  $n$  должно быть велико по сравнению с 1.

Для того чтобы представить этот ряд волн в виде взаимного наложения одних только бесконечно длинных рядов волн, надо подобрать такие колебания, которые путем интерференции уничтожили бы вне отрезка  $L$  колебания воображаемого бесконечно длинного ряда волн с длиной  $\lambda_0$ . При этом в разложении Фурье должны играть существенную роль колебания, содержащие как  $n+1$ , так и  $n-1$  длин волн в отрезке длины  $L$ . Ведь если на середине отрезка  $L$  эти колебания совпадают по фазе с основным колебанием, то на концах отрезка они должны разойтись с ним по фазе на  $180^\circ$ . Следовательно, в разложении появятся наряду с основным колебанием еще колебания, длина волны которых  $\lambda'$  определяется соотношением  $n+1 = \frac{L}{\lambda'}$ . Переходя к частоте  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , имеем:

$$\nu_0 = \frac{nc}{L} \text{ и } \nu' = \frac{(n+1)c}{L}.$$

Ширина линии  $\delta\nu = \nu' - \nu_0$  оказывается порядка

$$\delta\nu \approx \frac{c}{L} = \frac{1}{\tau},$$

где  $\tau$  — время, в течение которого данный ряд волн проходит мимо неподвижного наблюдателя. Если размытость линии хотят выразить не в частотах, а в длинах волн, то можно написать ширину линии в виде

$$|\delta\lambda| = \frac{|\delta\nu|}{\nu} \lambda^2 \approx \frac{\lambda^2}{L}.$$

Особенно простой вид имеет выражение относительной размытости линии, а именно:

$$\frac{|\delta\nu|}{\nu} = \frac{|\delta\lambda|}{\lambda} \approx \frac{1}{n},$$

т. е. относительная размытость равна обратному числу длин волн, содержащихся в рассматриваемой серии.

Волны, испускаемые электроном, колеблющимся по закону (13.12), имеют, правда, вид не резко ограниченной, но лишь постепенно затухающей серии колебаний, амплитуда которых за время  $\tau = \frac{2}{\gamma}$  уменьшается в  $e$  раз. Но можно сделать естественное предположение, что эти волны сравнимы по ширине спектральных линий с резко ограниченным рядом волн, испущенных в течение того же промежутка времени  $\tau$ , и что поэтому можно просто написать

$$\delta\nu \approx \frac{\gamma}{2}, \quad (14.1)$$

т. е. декремент затухания  $\gamma$  численно как раз равен ширине спектральной линии в шкале частот.

Подтвердим это нестрогое рассуждение строгим гармоническим анализом выражения (13.12) для колебаний излучающего электрона. Так как в волновой зоне поле зависит от ускорения линейно, то, разлагая  $\mathbf{r}$  в ряд, мы, очевидно, получим соответствующее разложение и для излучаемой серии волн. Если сначала ограничиться первым слагаемым в формуле (13.12), то нужно найти такую функцию  $\mathbf{a}(\omega)$ , чтобы имели место равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega_0 t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{для } t > 0; \\ 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{для } t < 0. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Эти уравнения по теореме Фурье могут быть решены относительно  $\mathbf{a}(\omega)$  следующим образом. Умножим обе части на  $e^{-i\mu t}$  и проинтегрируем по  $t$  от  $-T$  до  $+T$  с тем, чтобы потом стремить  $T$  к бесконечности. Это дает:

$$\mathbf{A} \int_0^T e^{(-\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0 - \mu))t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}(\omega) d\omega \int_{-T}^{+T} e^{i(\omega - \mu)t} dt.$$

После интегрирования мы тотчас же можем в левой части уравнения перейти к пределу  $T \rightarrow \infty$  и получаем:

$$\frac{\mathbf{A}}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0 - \mu)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}(\omega) d\omega \frac{2 \sin(\omega - \mu)T}{\omega - \mu}.$$

В правой части, вводя переменную интегрирования  $\sigma = \omega - \mu$ , мы получим, согласно теореме Фурье,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}(\sigma + \mu) \frac{2 \sin \sigma T}{\sigma} d\sigma = 2\pi \mathbf{a}(\mu).$$

Отсюда

$$\mathbf{a}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{A}}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0 - \mu)}. \quad (14.3)$$

Выполняя аналогичные вычисления для второго слагаемого (13.12), мы получим такое же выражение, в котором только вместо  $\omega_0$  стоит  $-\omega_0$ . Таким образом получается результат:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{A} e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right)t} + \mathbf{A}^* e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\mathbf{A}}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0 - \omega)} + \frac{\mathbf{A}^*}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0 + \omega)} \right] e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned} \quad (14.4)$$

Чтобы составить себе понятие о распределении интенсивности на спектрограмме, нужно иметь в виду, что там речь идет не о нахождении зависимости интенсивности от времени; измерение, наоборот, всегда состоит в том, что определяется полное количество энергии, приходящее на определенное место спектра. Таким образом, нас интересует спектральное разложение величины

$$\int_0^{+\infty} S dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int_0^{+\infty} \ddot{r}^2 dt$$

в виде

$$\int_0^{\infty} S dt = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (14.5)$$

Для  $\ddot{r}$ , согласно (14.4), мы имеем разложение

$$\ddot{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где

$$f(\omega) = -\frac{\omega^2}{2\pi} \left[ \frac{A}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0 - \omega)} + \frac{A^*}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0 + \omega)} \right]. \quad (14.6)$$

Но  $\ddot{r}$  — величина вещественная, так как

$$f(\omega) = f^*(-\omega).$$

Поэтому также

$$\ddot{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\mu) e^{-i\mu t} d\mu,$$

откуда

$$\ddot{r}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) f^*(\mu) e^{i(\omega - \mu)t} d\omega d\mu.$$

Интегрирование по  $t$  можно производить от  $-\infty$ , так как для  $t < 0$   $\ddot{r} = 0$ . Таким образом

$$\int_0^{\infty} \ddot{r}^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) f^*(\mu) \frac{2 \sin(\omega - \mu) T}{\omega - \mu} d\omega d\mu.$$

На основании теоремы Фурье,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\mu) \frac{2 \sin(\omega - \mu) T}{\omega - \mu} d\mu = 2\pi f^*(\omega).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{r}^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) f^*(\omega) d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega,$$

так как  $|f(\omega)|^2$  равно  $|f(-\omega)|^2$ , в чем можно легко убедиться на основании (14.6). Этим мы выполнили разложение и определили количество лучистой энергии, соответствующее области спектра от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ :

$$S(\omega) d\omega = \frac{2e^2}{3c^3} 4\pi |f(\omega)|^2 d\omega. \quad (14.7)$$

Для вычисления (14.7) следует составить  $|f(\omega)|^2$  по формуле (14.6), причем получается довольно длинное выражение. Задача, однако, упрощается, если ограничиться областью, близкой к частоте  $\omega_0$ . Это имеет смысл потому, что, по приведенным выше нестрогим соображениям, почти вся интенсивность распределена в узком интервале частот порядка  $\gamma$ . Поэтому мы ограничиваемся такими частотами  $\omega$ , для которых  $|\omega - \omega_0| \ll |\omega_0|$ . Да и в самом деле, как мы условились в предыдущем параграфе, мы рассматриваем случай, когда  $\gamma \ll \omega_0$ . Возвращаясь к выражению (14.6) для  $f(\omega)$ , мы находим, что в этой области первое слагаемое по абсолютной величине гораздо больше второго. Так как нас интересует только приближенная величина векторной суммы (14.6), то мы можем ограничиться первым слагаемым.

Тогда получаем:

$$|f(\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4}{4\pi^2} \frac{AA^*}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (14.8)$$

При этом мы, в порядке допущенного приближения, заменили  $\omega^4$  в числителе на  $\omega_0^4$ . Как легко видеть,  $|f(\omega)|^2$  имеет в точке  $\omega = \omega_0$  резкий максимум, значение которого равно  $\frac{\omega_0^4 AA^*}{\pi^2 \gamma^2}$ . Кроме того, мы видим, что на расстоянии  $\omega - \omega_0 = \frac{\gamma}{2}$  от середины линии интенсивность уменьшается до половины своего максимального значения. Таким образом величина „полуширины“ нашей линии определяется соотношениями

$$\delta\omega = \gamma \text{ или } \delta\nu = \frac{\gamma}{2\pi}, \quad (14.9)$$

что приблизительно совпадает с грубой оценкой (14.1). Таким образом мы получаем дополнительное подтверждение того, что мы имели право ограничиться областью, непосредственно примыкающей к частоте  $\omega_0$ .

Для контроля определим, пользуясь соотношениями (14.7) и (14.8), количество всей излучаемой энергии, исходя из ее спектрального распределения ср. (14.5)]:

$$\int_0^{\infty} S(t) dt = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\omega_0^4}{\pi} AA^* \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

Вводя здесь новую переменную  $x = \frac{2(\omega - \omega_0)}{\gamma}$ , получим:

$$\int_0^{\infty} S(t) dt = \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \frac{\omega_0^4}{\pi} AA^* \frac{2}{\gamma} \int_{-\frac{2\omega_0}{\gamma}}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

Так как подинтегральное выражение заметно отличается от нуля только при малых значениях  $x$ , величина интеграла не изменится существенно при замене его нижней границы на  $-\infty$ , ввиду того, что  $\omega_0 \gg \gamma$ . Тогда интеграл принимает значение  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi$ ; взяв декремент затухания  $\gamma$  из (13.7), мы получим общее количество всей излучаемой энергии:

$$\int_0^{\infty} S(t) dt = 2m\omega_0^2 AA^*.$$

Эта энергия должна равняться полной механической энергии упруго связанного электрона в момент  $t = 0$ , т. е.

$$W_0 = \left( \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{k}{2} r^2 \right)_{t=0}.$$

Из уравнений движения (13.12) или (14.4), пренебрегая  $\gamma$  по сравнению с  $\omega_0$ , получаем для механической энергии выражение

$$W_0 = 2m\omega_0^2 AA^*.$$

Следовательно, действительно вся начальная энергия колебания полностью переходит в энергию излучения.

**§ 15. Вынужденные колебания упруго связанного электрона. Расширение линий, обусловленное затуханием и столкновениями.** Для понимания оптических свойств материи очень важно знать поведение упруго связанного электрона в периодически переменном поле, особенно в поле падающей световой волны.

Ограничимся рассмотрением линейно-поляризованного луча, который вызывает в точке нахождения электрона поле

$$E = E_0 e^{i\omega t}.$$

Тогда уравнение движения электрона будет

$$\ddot{r} + \gamma \dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E_0 e^{i\omega t}, \quad (15.1)$$

причем уменьшение энергии за счет излучения мы учитываем введением члена  $\gamma \dot{r}$ ;  $\gamma$  означает декремент затухания, который был определен в (13.6).

Неоднородное уравнение (15.1) удовлетворяется подстановкой

$$r = r_0 e^{i\omega t}, \quad (15.2)$$

причем  $r_0$  определяется из (15.1):

$$r_0 = \frac{\frac{e}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (15.2a)$$

Если мы напишем

$$r_0 = s_0 e^{-i\varphi},$$

где  $s_0$  и  $\varphi$  вещественны, то получим следующий результат: движение, вызываемое полем  $E = E_0 e^{i\omega t}$ , может быть описано как колебание

$$r = s_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (15.3)$$

с амплитудой

$$s_0 = \frac{e}{m} \frac{E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}}$$

и с фазой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

(Общий интеграл уравнения (15.1) можно получить, добавив общее решение однородного уравнения; но так как последний интеграл экспоненциально убывает со временем, то в результате, если подождать достаточно большое время или достаточно долго оставить электрон только под действием световой волны, остается лишь (15.3), т. е. вынужденная часть колебания).

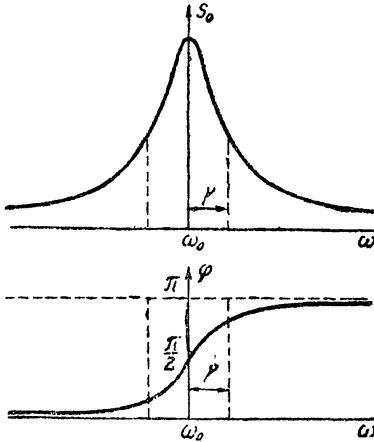


Рис. 22. Амплитуда  $s_0$  и отставание по фазе  $\varphi$  вынужденного колебания вблизи области резонанса  $\omega_0$ .

Наоборот, по другую сторону области резонанса фаза вынужденного колебания противоположна фазе возбуждающей силы. Амплитуда в случае неограниченно растущих частот, в конце концов, стремится к нулю. Вблизи точки резонанса ( $|\omega - \omega_0| \approx \gamma$ ) амплитуда  $s_0$  резко возрастает, достигая при  $\omega \approx \omega_0$  наибольшего значения  $\frac{e}{m} \frac{E_0}{\omega_0 \gamma}$ . Значение полуширины для квадрата амплитуды и здесь равно  $\delta\omega = \gamma$ , как и в случае свободных колебаний (ср. § 13).

Вынужденные колебания, вследствие наличия в уравнении (15.1) слагаемого, соответствующего „трению“, не будут затухать только в том случае, если электрон получает энергию извне. Среднее значение работы силы, приложенной к электрону, при периодическом движении мы можем определить из уравнения

$$m\ddot{r} + m\gamma\dot{r} + m\omega_0^2 r = F.$$

Работа силы  $F$  в единицу времени равна  $F \cdot \dot{r}$ . Если вычислить среднее во времени от этого выражения, то члены  $\dot{r} \cdot \ddot{r} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{r}^2}{dt}$  и  $\ddot{r} \cdot r = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt}$  отпадают, и мы просто получим [принимая во внимание (15.3)]

$$\overline{Fr} = m\overline{\gamma r^2} = \frac{1}{2} m\gamma\omega^2 r_0^2. \quad (15.4)$$

В том случае, когда затухание происходит только вследствие излучения, т. е. когда электрон теряет энергию только за счет излучения, эта работа должна равняться энергии, излучаемой электроном в секунду. Согласно (13.6), последняя равна

$$S = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{r}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\omega^4 r_0^2}{2}.$$

Если эту энергию положить равной только что найденному значению работы (15.4), то мы получим величину, характеризующую затухание излучения.

Уравнение вынужденных колебаний (15.3) может быть экспериментально проверено по конечной ширине линий поглощения при прохождении света через газ, состоящий из большого числа атомов. При отсутствии других возмущающих причин мы получаем для полуширины, обусловленной одним лишь затуханием излучения, величину

$$(\delta\omega)_{\text{rad}} = \gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2\omega^2}{mc^3}.$$

Рассматривая в § 14 излучение свободно колеблющегося электрона, мы видели, что конечную ширину линии можно просто понимать как величину, обратную продолжительности испускания энергии электроном. Если  $\tau_{\text{rad}}$  обозначает время, за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз, то

$$\gamma = \frac{2}{\tau_{\text{rad}}}. \quad (15.5)$$

Если свободные колебания будут преждевременно прерываться из-за столкновения нашего атома с другими, то мы должны ожидать сильного расширения линии. Это совершенно очевидно для процесса испускания, так как, на основании вступительных замечаний к § 14, существенное значение при спектральном разложении имеют самые размеры отдельных серий волн, а вовсе не то, по какой именно причине волны ограничены во времени. Если мы обозначаем через  $\tau$  среднее время, протекающее между двумя столкновениями, то полуширина, обусловленная одними лишь столкновениями, будет порядка  $d\omega \approx \frac{1}{\tau}$ . Рассматривая влияние столкновений на движение атомных электронов при одновременном действии переменного электрического поля, мы покажем, что это же соотношение имеет место для поглощения. При этом окажется,

что для этого движения в среднем также справедливо уравнение (15.1), причем к  $\gamma$  добавляется член

$$g = \frac{2}{\tau}, \quad (15.6)$$

где  $\tau$  означает среднее время между столкновениями. Таким образом при одновременном действии обоих факторов, обуславливающих затухание, можно характеризовать усредненное движение электрона при помощи коэффициента затухания

$$\gamma + g.$$

При доказательстве будем исходить из общего интеграла уравнения (15), который, принимая во внимание (15.2), напомним в виде:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{i\omega t} + (\mathbf{A} e^{i\omega_0 t} + \mathbf{B} e^{-i\omega_0 t}) e^{-\frac{\gamma}{2} t}, \quad (15.7)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — постоянные интегрирования. При этом  $\mathbf{r}_0$  связано с комплексным вектором амплитуды световой волны  $\mathbf{E}_0$  соотношением

$$\mathbf{r}_0 = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (15.8)$$

Пусть атом испытал последнее столкновение в момент времени  $t_1$ . Мы могли бы определить постоянные  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , если бы нам были известны значения  $\mathbf{r}$  и  $\dot{\mathbf{r}}$  непосредственно после столкновения. Однако мы не знаем этих величин для каждого отдельного атома. Если мы рассмотрим большое число таких осцилляторов, которые все испытали столкновения в один и тот же момент  $t_1$ , то для них все направления радиуса-вектора и скорости непосредственно после момента  $t_1$  будут равновероятны. Таким образом  $\mathbf{r}$  и  $\dot{\mathbf{r}}$  для всех этих осцилляторов в момент  $t_1$  в среднем будут равны нулю. Отсюда, согласно (15.7), получаются уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$\mathbf{r}_0 e^{i\omega t_1} + (\mathbf{A} e^{i\omega_0 t_1} + \mathbf{B} e^{-i\omega_0 t_1}) e^{-\frac{\gamma}{2} t_1} = 0,$$

$$i\omega \mathbf{r}_0 e^{i\omega t_1} + \left[ \left( i\omega_0 - \frac{\gamma}{2} \right) \mathbf{A} e^{i\omega_0 t_1} - \left( i\omega_0 + \frac{\gamma}{2} \right) \mathbf{B} e^{-i\omega_0 t_1} \right] e^{-\frac{\gamma}{2} t_1} = 0.$$

Если подставить в (15.7) вычисленные отсюда значения  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , то введя время  $\vartheta = t - t_1$ , прошедшее после последнего столкновения, мы получим:

$$\mathbf{r}_\vartheta(t) = \mathbf{r}_0 e^{i\omega t} \left\{ 1 - \frac{\omega_0 + \omega - \frac{i\gamma}{2} - \left( i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2} \right) \vartheta}{2\omega_0} e^{-\frac{\gamma}{2} \vartheta} - \frac{\omega_0 - \omega + \frac{i\gamma}{2} - \left( i(\omega_0 + \omega) + \frac{\gamma}{2} \right) \vartheta}{2\omega_0} e^{-\frac{\gamma}{2} \vartheta} \right\}.$$



Если  $\tau$  есть среднее время от столкновения до столкновения, а  $N$ — общее число осцилляторов, находящихся в рассматриваемом объеме то

$$\frac{N}{\tau} e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} d\vartheta$$

представляет число тех осцилляторов, которые испытали последнее столкновение в промежутке времени, заключающемся между  $\vartheta$  и  $\vartheta + d\vartheta$ . Поэтому средний вклад отдельного осциллятора в результирующую элонгацию равен

$$\overline{\mathbf{r}(t)} = \int_{\vartheta=0}^{\infty} \mathbf{r}_{\vartheta}(t) e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} \frac{d\vartheta}{\tau}. \quad (15.9)$$

Интегрирование может быть строго выполнено и дает

$$\overline{\mathbf{r}(t)} = \mathbf{r}_0' e^{i\omega t} \quad (15.10)$$

где для краткости введено обозначение

$$\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}_0 \frac{\omega_0^2 - \left(\omega - \frac{i\gamma}{2}\right)^2}{\omega_0^2 - \left(\omega - \frac{i\gamma}{2} - \frac{i}{\tau}\right)^2}.$$

Опуская, как и прежде, члены, содержащие  $\gamma^2$ , и принимая во внимание (15.8), мы получаем

$$\mathbf{r}_0' = \frac{e}{m} \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \left(\gamma + \frac{2}{\tau}\right)}.$$

Мы видим, что первоначальный резонансный знаменатель, входящий в (15.8), исчезает, а на его месте появляется новый резонансный знаменатель, отличающийся от предыдущего только тем, что вместо постоянной  $\gamma$  теперь стоит постоянная сумма  $\gamma + g$ , обуславливающая затухание вследствие излучения и столкновений, причем  $g$  определяется равенством (15.6). Таким образом выставленное выше положение доказано.

**§ 16. Влияние постоянного магнитного поля на движение электрона в атоме.** Влияние внешнего магнитного поля на движение одного или нескольких электронов в атоме дает основание для объяснения эффекта Зеемана и диамагнетизма, Оба явления подчиняются одному общему закону, который был открыт Лармором; он будет выведен в дальнейшем. Предварительно же мы разберем частный случай электрона, упруго привязанного к положению равновесия. Рассмотрим сперва круговую орбиту. Пусть упругая сила притяжения, направленная к центру орбиты, равна  $-kr$ . Тогда частота  $\omega_0$  обращения по кругу может быть выведена на основании равенства силы притяжения и центробежной силы:

$$-kr + m\omega_0^2 r = 0; \quad \omega_0 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (16.1)$$

Если перпендикулярно к плоскости орбиты приложено еще и магнитное поле  $\mathbf{H}$ , то появляется дополнительная сила

$$\frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}).$$

В нашем случае направление вектора  $\mathbf{v} \times \mathbf{H}$  совпадает с  $\mathbf{r}$ ; при этом он равен  $\mathbf{r}\omega H$ , если мы будем считать  $\omega$  положительным при обращении электрона вокруг направления поля по часовой стрелке. При наличии магнитного поля мы таким образом получаем для частоты обращения  $\omega$  уравнение

$$-k + m\omega^2 + \frac{e}{c} \omega H = 0$$

или, если ввести сокращенное обозначение

$$\omega_L = -\frac{eH}{2mc}, \quad (16.2)$$

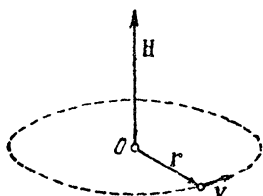


Рис. 23. Схема элементарной теории эффекта Зеемана.

$$-\omega_0^2 + \omega^2 - 2\omega_L\omega = 0.$$

Пусть магнитное поле так слабо, что  $\omega_L$  исчезающе мало по сравнению с  $\omega_0$  (мы увидим ниже, что это условие выполняется в атоме даже для самых сильных технически достижимых полей). Тогда два решения полученного выше квадратного уравнения для  $\omega$  будут:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\omega_0 + \omega_L, \\ \omega_2 &= +\omega_0 + \omega_L. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Таким образом, частота обращения электрона, вращающегося направо, увеличивается на  $\omega_L$ , а частота электрона, вращающегося налево, уменьшается на ту же величину. Если, следовательно, (16.1) представляет одно из возможных движений без магнитного поля  $\mathbf{H}$ , то (16.3) представляет возможное движение в присутствии поля. Однако, отсюда вовсе еще не явствует, что уравнение (16.1) при включении поля  $\mathbf{H}$  переходит именно в (16.3).

Чтобы выяснить этот вопрос, мы должны принять во внимание следующее обстоятельство: мы знаем вообще, что сила, с которой магнитное поле действует на электрон, всегда перпендикулярна к траектории электрона. Магнитное поле не может произвести работу над электроном, а потому не может изменить и его кинетической энергии. На самом же деле кинетическая энергия, например, для движения  $\omega_2$ , больше кинетической энергии исходного движения, причем разность составляет:

$$\frac{m}{2} r^2 (\omega_0 + \omega_L)^2 - \frac{m}{2} r^2 \omega_0^2 \approx m r^2 \omega_0 \omega_L.$$

Как может возникнуть это приращение энергии? Надо принять во внимание, что во время включения магнитного поля, согласно уравнению индукции

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}},$$

должно существовать электрическое поле, которое способно производить работу; работа, производимая полем  $E$  над электроном, равна  $\int_1^2 eE \, dr$ .

В течение одного периода, т. е. за время  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , поле  $E$  производит работу

$$\oint eE \, dr = e \int_S (\text{rot } E)_n dS = e (\text{rot } E)_n \pi r^2,$$

а в секунду — одну  $\tau$ -ую часть этой величины, а именно:  $(\text{rot } E)_n \frac{er^2\omega_0}{2}$ . Таким образом работа, производимая в 1 секунду над вращающимся направо электроном, будет

$$- \dot{H} \frac{er^2\omega_0}{2c}.$$

Следовательно, полная работа, произведенная при увеличении поля от 0 до  $H$ , равна

$$- H \frac{er^2\omega_0}{2c} = - mr^2\omega_0 \frac{eH}{2mc}.$$

Согласно определению  $\omega_L$  из (16.2) это как раз и есть найденное приращение энергии  $mr^2\omega_0\omega_L$ .

При этом выводе предполагается, что индуцируемое поле приблизительно постоянно в течение одного оборота. Это, вообще, имеет место только тогда, когда поле возрастает так медленно, что за это время электрон совершает много оборотов. Только в этом случае движение (16.1) действительно переходит в (16.3). Если же, наоборот, это время мало по сравнению с временем обращения, то должны получиться совершенно другие результаты.

Оба частных случая круговой орбиты с вращением направо и налево, приведенные в (16.3), могут быть сведены к одному закону: влияние медленно включаемого магнитного поля  $H$  на движение электрона состоит в том, что после включения  $H$  движение электрона по отношению к координатной системе, вращающейся с угловой частотой  $\omega_L$ , остается таким же, каким движение электрона было до включения по отношению к неподвижной системе координат.

Убедимся теперь еще в том, что, рассматривая две круговые орбиты, мы в действительности получили результат, годный для самого общего случая упруго связанного электрона. Для этого мы рассмотрим уравнение движения электрона, упруго привязанного к положению равновесия, в том случае, когда, кроме упругой связи, действует еще магнитное поле  $H$  вдоль оси  $z$ . Тогда в уравнениях движения, кроме упругой силы, появится еще сила Лоренца:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}); \left( \frac{k}{m} = \omega_0^2 \right), \tag{16.4}$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{e}{mc} \dot{y} H, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= -\frac{e}{mc} \dot{x} H, \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z &= 0.\end{aligned}$$

Умножая второе уравнение на мнимую единицу  $i$  и складывая его с первым, получим (вводя комплексную величину  $\zeta = x + iy$ ):

$$\ddot{\zeta} + \omega_0^2 \zeta = -i \frac{eH}{mc} \dot{\zeta} = + 2i\omega_L \dot{\zeta}. \quad (16.4a)$$

Общий интеграл этого уравнения будет:

$$\zeta = Ae^{i(\omega_0 + \omega_L)t} + Be^{i(-\omega_0 + \omega_L)t}. \quad (16.5)$$

Если этот результат написать в виде

$$\zeta = x + iy = e^{i\omega_L t} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}),$$

то можно непосредственно убедиться в правильности высказанного выше положения: колебание вдоль магнитного поля вообще не меняется; в то же время колебания в плоскости, нормальной к направлению поля, отличаются от колебаний при  $H=0$  множителем  $e^{i\omega_L t}$ . Но этот множитель означает поворот координатной системы на угол  $\omega_L t$ . Таким образом на начальное движение налагается при включении поля равномерное вращение вокруг направления поля с частотой обращения  $\omega_L$ .

Поэтому мы ожидаем, что спектральное разложение света, испускаемого таким электроном, даст, как следствие влияния магнитного поля, расщепление простой первоначальной линии с частотой  $\omega_0$  на три линии, частоты которых будут

$$\omega_0 - \omega_L, \quad \omega_0, \quad \omega_0 + \omega_L.$$

Это расщепление линий

$$\Delta\omega = \pm\omega_L = \pm \frac{eH}{2mc}$$

было впервые наблюдеено Зееманом (вначале, впрочем, лишь качественно и без полного разделения отдельных компонент) и тотчас же объяснено описанным выше образом Г. А. Лорентцом.

На основании нашего анализа движений в магнитном поле мы можем сделать подробные выводы о поляризации трех зеемановских компонент. Несдвинутому колебанию соответствует определенная линейная поляризация (электрический вектор параллелен направлению магнитного поля), а каждой из двух сдвинутых компонент — волна, поляризованная по кругу, причем в одной из них вращение электрического вектора происходит вправо, а в другой — влево, в плоскости, нормальной к направлению поля. Поэтому, наблюдая свет, излучаемый атомом по направлению силовых линий

магнитного поля, мы увидим две линии, отстоящие на  $\frac{eH}{mc}$  друг от друга; из них одна поляризована по кругу направо, другая налево. Несдвинутая компонента при таком наблюдении (продольный эффект Зеемана) будет отсутствовать, так как колеблющийся диполь не испускает света в направлении собственных колебаний, Наблюдая же перпендикулярно к направлению поля (поперечный эффект Зеемана), мы получим несдвинутую линию, поляризованную так, что электрический вектор параллелен полю, а слева и справа от нее на расстоянии  $\frac{eH}{2mc}$  — две линии, поляризованные так, что электрический вектор перпендикулярен к полю. Заметим, однако, что рассмотренное расщепление в только что описанной форме (так называемый „нормальный эффект Зеемана“) имеет место только в исключительных случаях. Большинство линий дают значительно более сложную картину расщепления — аномальный эффект Зеемана, удовлетворительное объяснение которого удалось только при помощи квантовой теории, с привлечением гипотезы о собственном вращении электрона (гипотеза об электронном „спине“).

Дадим теперь теореме Лармора более общее выражение, а затем и докажем ее. Пусть дано электростатическое поле, для которого ось  $z$  является осью симметрии; в таком поле потенциал  $\varphi$  зависит от расстояния от оси  $z$  и от значения самой координаты  $z$ .

$$\varphi = \varphi(z, \sqrt{x^2 + y^2}).$$

В этом поле движется  $n$  электронов, так что каждый электрон находится под влиянием аксиального поля и поля, производимого всеми остальными электронами. Если  $r_{ik}$  — расстояние от  $i$ -того до  $k$ -того электрона, то уравнения движения получаются из потенциальной функции

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = \sum_i \varphi(z_i, \sqrt{x_i^2 + y_i^2}) + \sum_{ik} \frac{e^2}{r_{ik}}. \quad (16.6)$$

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_k &= -e \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \\ m\ddot{y}_k &= -e \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}, \\ m\ddot{z}_k &= -e \frac{\partial \Phi}{\partial z_k} \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, 3 \dots n). \quad (16.7)$$

Допустим, что мы решили эти уравнения, т. е. определили функции

$$x_k = x_k(t), y_k = y_k(t), z_k = z_k(t), \quad (16.7a)$$

которые, будучи подставлены в (16.7), превратят эти  $3n$  уравнений в тождества относительно  $t$ ;  $x$  и  $y$  мы можем и здесь соединить в одну комплексную функцию от времени:

$$\zeta_k = x_k + iy_k = \zeta_k(t), z_k = z_k(t). \quad (16.7b)$$

Теперь рассмотрим движение системы, которая получается из (16.7) при наложении постоянного магнитного поля, параллельного оси  $z$ . Новое движение мы будем описывать при помощи штрихованных величин, на-

пример  $x_1', y_1', z_1'$  для координат первого электрона и т. д. Потенциальную функцию  $\Phi' (x_1' \dots z_n')$  мы получим из  $\Phi (x_1 \dots z_n)$  путем простого проставления штрихов у всех переменных:  $\Phi' (x_1' \dots z_n') = \Phi (x_1 \dots z_n)$ . Магнитное поле вызывает дополнительную силу  $\frac{e}{c} (\mathbf{v}_k \times \mathbf{H})$ , так что мы получаем новые уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_k' &= -e \frac{\partial \Phi'}{\partial x_k'} + \frac{e}{c} \dot{y}_k' H, \\ m\ddot{y}_k' &= -e \frac{\partial \Phi'}{\partial y_k'} - \frac{e}{c} \dot{x}_k' H, \\ m\ddot{z}_k' &= -e \frac{\partial \Phi'}{\partial z_k'}. \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

Если снова обозначить  $\zeta_k' = x_k' + iy_k'$ , то теорема Лармора гласит, что решениями уравнения (16.8) будут:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_k' &= \zeta_k(t) e^{i\omega_L t}, \\ z_k' &= z_k(t), \end{aligned} \right\} \quad (16.8a)$$

где  $\zeta_k(t)$  и  $z_k(t)$  представляют, согласно (16.7b), решения уравнений (16.7), а  $\omega_L$  есть „частота ларморовой прецессии“:

$$\omega_L = -\frac{eH}{2mc}.$$

Можно сказать, что единственное влияние магнитного поля на движение заключается в том, что вся система электронов (без изменения собственного внутреннего движения) начинает вращаться вокруг направления поля с частотой  $\omega_L$ .

Итак, мы должны показать, что (16.8a) действительно удовлетворяет уравнению (16.8). Для этого составим из двух первых уравнений (16.8) уравнение для комплексной функции  $\zeta_k'$ :

$$m\ddot{\zeta}_k' = -e \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x_k'} + i \frac{\partial \Phi'}{\partial y_k'} \right) - i \frac{e}{c} H \dot{\zeta}_k'. \quad (16.9)$$

Легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} \dot{\zeta}_k' &= (\dot{\zeta}_k + i\omega_L \zeta_k) e^{i\omega_L t}, \\ \ddot{\zeta}_k' &= (\ddot{\zeta}_k + 2i\omega_L \dot{\zeta}_k - \omega_L^2 \zeta_k) e^{i\omega_L t}. \end{aligned} \right.$$

Принимая это во внимание и умножая (16.9) на  $e^{-i\omega_L t}$ , получим:

$$\begin{aligned} m\ddot{\zeta}_k &= -e \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x_k'} + i \frac{\partial \Phi'}{\partial y_k'} \right) e^{-i\omega_L t} - \dot{\zeta}_k \left( \frac{eH}{c} + 2m\omega_L \right) + \\ &+ \zeta_k \left( \omega_L \frac{eH}{c} + m\omega_L^2 \right). \end{aligned} \quad (16.10)$$

Решающим в нашем доказательстве является то, что потенциал  $\Phi$  не есть произвольная функция от  $x_1 \dots z_n$  а содержит переменные  $x_i$  и  $y_i$  только в комбинациях.

$$x_i^2 + y_i^2 \text{ и } (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2.$$

Как раз эти выражения при подстановке (16.8а) вообще не меняются. Вследствие особого характера функции  $\Phi$ , равенство  $\Phi'(x_1', \dots, z_n') = \Phi(x_1, \dots, z_n)$  является тождеством по отношению к  $x_1, \dots, z_n$ , если вместо  $x_1', \dots, z_n'$  подставить их значения, определяемые соотношениями (16.8а). Комплексная сила

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x_k'} + i \frac{\partial \Phi'}{\partial y_k'},$$

действующая на  $k$ -тый электрон штрихованной системы, отличается от соответствующей силы в нештрихованной системе только поворотом на угол  $\omega_L t$ . Следовательно,

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x_k'} + i \frac{\partial \Phi'}{\partial y_k'} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \right) e^{i\omega_L t}. \quad (16.11)$$

Положив теперь  $\omega_L = -\frac{eH}{2mc}$ , мы уничтожим коэффициент при  $\dot{\zeta}_k$  в (16.10). Следовательно, величины (16.8а) будут строгими решениями (16.8), если  $\zeta_k$  удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{\zeta}_k = -e \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \right) - m^r \zeta_k \omega_L^2. \quad (16.12)$$

Если  $H$  так мало, что мы можем пренебречь членом  $m^r \zeta_k \omega_L^2$  (центробежная сила вращения Лармора), квадратным относительно  $\omega_L$ , по сравнению с линейным членом  $i\dot{\zeta}_k 2m\omega_L$ , то (16.12) действительно переходит в (16.7). Тем самым теорема Лармора доказана.

Необходимо узнать, в пределах каких значений поля допустимо сделанное нами пренебрежение. Для этого, как было указано, член, квадратный относительно  $\omega_L$ , должен быть мал по сравнению с линейным членом, т. е. должно быть удовлетворено условие

$$\left| \frac{m^r \zeta_k \omega_L^2}{m \omega_L \dot{\zeta}_k} \right| \approx \frac{\omega_L}{\omega_0} \ll 1, \quad (16.13)$$

так как приближенно  $|\dot{\zeta}_k| \approx \omega_0 |\zeta_k|$ . Подставляя значение  $\omega_L$  из (16.2), вместо последнего условия получим

$$\left| \frac{e}{2mc\omega_0} H \right| \ll 1, \quad |H| \ll \frac{2mc\omega_0}{e}.$$

Следовательно, если положить

$$\omega_0 = 10^{15} \text{ сек}^{-1}, \quad \frac{e}{mc} = 1,76 \cdot 10^7 \text{ эл.-магн. ед.},$$

то теорема Лармора будет справедлива при  $H \ll 10^8$  эрстед. И так при частоте обращения электрона порядка частоты видимого света закон Лармора нарушается только в полях порядка ста миллионов эрстед!

Сообразим еще, действительно ли при включении магнитного поля  $H$  движение по формуле (16.7а) переходит в движение по формуле (16.8а). Это имеет место лишь при столь медленном нарастании поля, что и во время включения его справедливы уравнения типа (16.8а), причем, однако, во время включения поля  $\omega_L$  само является функцией времени,

так что к правой части уравнения (16.10) прибавляется еще член, учитывающий увеличение  $\omega_L$  со временем. Но одновременно в правых частях уравнений (16.8) и (16.10) появляется новая сила, — вихревое электрическое поле, связанное с изменением во времени магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

Для того чтобы учесть все это, предположим, что  $\mathbf{H}$  является произвольной функцией времени. Тогда мы должны дополнить наши уравнения (16.9) выражением вихревого электрического поля, приложенного к месту нахождения  $k$ -той частицы, т. е. должны решить уравнение

$$\ddot{\zeta}_k' = -\frac{e}{m} \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x_k'} + i \frac{\partial \Phi'}{\partial y_k'} \right) - \frac{ieH(t)}{mc} \dot{\zeta}_k' + \frac{e}{m} (E_x' + iE_y'). \quad (16.14)$$

Относительно дополнительного поля  $\mathbf{E}$  мы знаем, что

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \text{ и } \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (16.15)$$

Мы утверждаем, обобщая формулы (16.8а), что уравнение (16.14) удовлетворяется, если положить

$$\zeta_k'(t) = \zeta_k(t) e^{i\varphi(t)}, \quad (16.16)$$

где  $\zeta_k$  имеет прежнее значение, а фаза прецессионного движения удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{eH(t)}{2mc}. \quad (16.16a)$$

Если это значение  $\zeta_k'$  подставить в (16.14) и пренебречь всеми членами, квадратными относительно  $H$ , то получатся, по сравнению с уравнением для постоянного магнитного поля, следующие новые члены: в левой части — член, содержащий вторую производную от  $\varphi$ , а справа — член, содержащий выражение

$$E_x' + iE_y' = (E_x + iE_y) e^{i\varphi(t)}.$$

Таким образом, для того, чтобы (16.16) было решением (16.14), надо, чтобы существовало равенство

$$i\ddot{\varphi} \zeta_k = \frac{e}{m} (E_x + iE_y).$$

Но, согласно (16.16а) и (16.15), мы имеем

$$\ddot{\varphi} = \frac{e}{2m} (\operatorname{rot} \mathbf{E})_z,$$

таким образом, мы приходим к равенству

$$\frac{i}{2} \zeta_k (\operatorname{rot} \mathbf{E})_z = E_x + iE_y. \quad (16.17)$$

Очевидно, не может быть и речи о том, чтобы это уравнение выполнялось в любой момент времени. Это видно хотя бы из того, что  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  определяется только через  $\dot{\mathbf{H}}$ , а  $\mathbf{E}$  зависит от того, в какой точке создаваемого однородного поля находится атом. (Легко убедиться, что, например, для того частного случая, когда  $E_x = ay$  и  $E_y = -ax$ , уравне-



ние (16.17) было бы строго выполнено. Такое предположение было бы справедливо, если бы атом находился точно в центре магнитного поля с круговым сечением). Поэтому мы ограничимся доказательством того, что наше уравнение выполняется в среднем за время одного оборота. Для этого умножим (16.17) на  $d\zeta^* = dx - i dy$ . Заменяв  $\zeta_k$  попросту через  $\zeta$ , получим:

$$\frac{i}{2} (\text{rot } \mathbf{E})_z \left\{ \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) + i(y dx - x dy) \right\} = \\ = E_x dx + E_y dy + i(E_y dx - E_x dy).$$

Проинтегрируем это уравнение по замкнутой орбите рассматриваемого электрона. При этом, конечно, будем считать  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{H}}{dt}$  постоянным. Тогда мнимые выражения в обеих частях уравнения будут равны нулю, так как в левой части  $x^2 + y^2$  принимает снова первоначальное значение, в правой же — вследствие того, что  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ . Вещественные значения в обеих частях уравнения представляют произведение  $(\text{rot } \mathbf{E})_z$  на площадь проекции орбиты электрона на плоскость  $(x, y)$ . Следовательно, в среднем по всей орбите равенство (16.16) действительно оказывается решением уравнения (16.14).

**§ 17. Индуцированный магнитный момент.** По теореме Лармора, доказанной в предыдущем параграфе, электроны атома при медленном включении магнитного поля начинают вращаться вокруг направления поля. Так как заряды всех электронов обладают одинаковым знаком, то это вращательное движение можно в отношении его действия на окружающую среду сравнить с замкнутым круговым током, окружающим центр атома. Такой ток вызывает в окружающем пространстве магнитное поле, которое можно описать как производимое находящимся в атоме магнитным диполем. Таким образом, если даже атом до включения поля не обладает магнитным моментом, то в магнитном поле, вследствие ларморовой прецессии, он приобретает магнитный момент, направленный против поля. Этот индуцированный полем магнитный момент обуславливает собой так называемый диамагнетизм, который мы рассмотрим в этом параграфе подробнее.

Для этого вычислим сначала магнитный момент атома с заданным движением электронов. Прежде всего решим задачу для случая тока с плотностью  $\mathbf{j}$ , непрерывно распределенной во всем объеме атома, и затем перейдем от выведенной таким образом формулы к предельному случаю точечных электронов.

Если плотность тока  $\mathbf{j}$  задана во всех точках внутри атома, то магнитное поле, вызываемое этим током, описывается посредством векторного потенциала

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{c} \int \int \int \frac{\mathbf{j}(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (17.1)$$

С другой стороны, магнитное поле, вызываемое отдельным магнитным диполем с моментом  $\mathbf{m}$ , может быть описано при помощи векторного потенциала следующего вида:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{m} \times \text{grad}_a \frac{1}{r}. \quad (17.2)$$

В частности, если магнит находится в начале координат, и его магнитный момент  $m$  направлен по оси  $x$ -ов, то

$$A_x = 0, A_y = m \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}, A_z = -m \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}.$$

Отсюда получаются известные выражения для составляющих поля диполя:

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{3mx^2}{r^5} - \frac{m}{r^3},$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{3mxy}{r^5},$$

$$H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{3mxz}{r^5}.$$

Для того, чтобы вычислить магнитный момент атома на основании (17.1), мы должны показать, что это выражение на больших расстояниях от атома принимает вид (17.2). Тогда множитель, стоящий перед  $\text{grad}_a \frac{1}{r}$ , можно будет назвать магнитным моментом атома. Если  $s$  есть расстояния точки внутри атома ( $s$  координатами  $\xi, \eta, \zeta$ ) от начала координат, то для больших расстояний  $r$  можно написать:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \left( s, \text{grad}_a \frac{1}{r} \right),$$

где  $r_0$  — расстояние от начала координат до точки, в которой определяется поле. Тогда, на основании (17.1),

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cr_0} \int \int \int \mathbf{j} d\xi d\eta d\zeta - \frac{1}{c} \int \int \int \mathbf{j} \left( s, \text{grad}_a \frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta.$$

Мы предполагаем, что внутри атома токи стационарны. Тогда первый интеграл в среднем по времени будет равен нулю:

$$\int \int \int \mathbf{j} d\xi d\eta d\zeta = 0.$$

Второй интеграл мы предварительно преобразуем на основании тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \left( s \text{ grad}_a \frac{1}{r} \right) &\equiv \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{j} \left( s \text{ grad}_a \frac{1}{r} \right) + s \left( \mathbf{j} \text{ grad}_a \frac{1}{r} \right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{j} \left( s \text{ grad}_a \frac{1}{r} \right) - s \left( \mathbf{j} \text{ grad}_a \frac{1}{r} \right) \right\}. \end{aligned}$$

На основании формулы

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}),$$

второе слагаемое правой части равно

$$\frac{1}{2} (\mathbf{s} \times \mathbf{j}) \times \text{grad}_a \frac{1}{r}.$$

Покажем, что вследствие стационарности токов первое слагаемое при интегрировании уничтожается. Например,  $x$ -овую компоненту первого слагаемого можно написать, опуская множитель  $\frac{1}{2}$ , в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) (j_{\xi} \xi + \xi j_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) (j_{\xi} \eta + \xi j_{\eta}) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) (j_{\xi} \zeta + \xi j_{\zeta}).$$

Это выражение надо интегрировать по всему объему атома.

$\int \int j_{\xi} d\eta d\zeta$  представляет полный ток через плоскость, нормальную к оси  $\xi$ . Так как среднее (во времени) значение этого тока равно нулю, то

$$\int \xi j_{\xi} d\tau = 0, \quad (17.3)$$

где

$$d\xi d\eta d\zeta = d\tau.$$

Точно так же, определяя полный ток, проходящий через плоскость, которая делит пополам угол, образуемый осями  $\xi$  и  $\eta$ , мы получим:

$$\int (j_{\xi} \eta + \xi j_{\eta}) d\tau = 0. \quad (17.3a)$$

Следовательно, останется только выражение:

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2c} \int (\mathbf{s} \times \mathbf{j}) d\tau \times \text{grad}_a \frac{1}{r}. \quad (17.4)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (17.2), мы видим, что магнитный момент нашей системы квази-стационарных токов определяется как

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \int \int (\mathbf{s} \times \mathbf{j}) d\xi d\eta d\zeta. \quad (17.5)$$

Для иллюстрации применим это уравнение к случаю линейного кругового тока  $I$ , обтекающего площадь  $S$ . Если  $dq$  — поперечное сечение и  $\delta l$  — элемент длины проводника, то

$$\mathbf{j} d\tau = \mathbf{j} dq dl = I dl$$

и

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \oint (\mathbf{s} \times d\mathbf{l}) = \frac{1}{c} S.$$

Этот интеграл является вектором, абсолютное значение которого равно удвоенной площади  $S$ , а направление — нормально к  $S$  и соответствует ходу правого винта. Компонента  $\mathbf{m}$  в заданном направлении равна умноженной на  $I/c$  проекции  $S$  на плоскость, нормальную к этому направлению.

Если мы будем рассматривать не электрический ток с непрерывной плотностью  $\mathbf{j}$ , а квазиточечные заряды  $e_i$ , расположенные в точках  $\mathbf{s}_i$  и движущиеся со скоростями  $\mathbf{v}_i$ , то интеграл (17.5) распадется на сумму по отдельным точечным зарядам. Для одного электрона мы получим величину

$$\frac{e \mathbf{s} \times \mathbf{v}}{2c},$$

а для всей системы

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i \overline{\mathbf{s}_i \times \mathbf{v}_i}, \quad (17.6)$$

где горизонтальная черта обозначает усреднение во времени за период обращения электрона.

Последнее уравнение дает магнитный момент системы электронов, движущихся по квазистационарным орбитам. Посмотрим теперь, как меняется этот момент вследствие прецессии Лармора при включении магнитного поля. Пусть векторы  $\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0, \dots$  представляют скорости отдельных электронов до включения магнитного поля. При включении  $\mathbf{H}$  к каждому  $\mathbf{v}^0$  прибавляется вектор  $\mathbf{o}_L \times \mathbf{s}$ , причем по теореме Лармора,

$$\mathbf{o}_L = -\frac{e}{2mc} \mathbf{H}. \quad (17.7)$$

При этом через  $\mathbf{o}_L$  обозначен вектор ларморовой прецессии, а через  $\omega_L$ , как и в (16.2), скалярная проекция  $\mathbf{o}_L$  на  $\mathbf{H}$ . Следовательно, для скоростей отдельных электронов при наличии магнитного поля получаются формулы:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^0 + \mathbf{o}_L \times \mathbf{s}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^0 + \mathbf{o}_L \times \mathbf{s}_2, \dots$$

Подставляя эти значения в уравнение (17.6) для полного момента, мы получаем:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i \overline{\mathbf{s}_i \times (\mathbf{v}_i^0 + \mathbf{o}_L \times \mathbf{s}_i)} = \mathbf{m}^0 + \frac{1}{2c} \sum_i e_i \overline{[\mathbf{s}_i \times (\mathbf{o}_L \times \mathbf{s}_i)]},$$

где  $\mathbf{m}^0$  представляет первоначальный момент атома. Для составляющей, направленной вдоль поля, которое параллельно оси  $z$ -ов, получаем:

$$m_z = m_z^0 + \frac{1}{2c} \sum_i e_i \overline{(\omega_L (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \omega_L z_i^2)}.$$

Подставив сюда значение ларморовой прецессии из (16.2), мы получим (если все  $e_i = e$ ):

$$m_z = m_z^0 - \frac{e^2 H}{4mc^2} \sum_i \overline{(x_i^2 + y_i^2)}. \quad (17.8)$$

В случае сферически симметричного распределения электронов, в среднем по времени можно писать

$$\overline{x_i^2} = \overline{y_i^2} = \overline{z_i^2} = \frac{1}{3} \overline{r_i^2};$$

следовательно,

$$m_z = m_z^0 - \frac{e^2 H}{6rc} \sum_i \overline{r_i^2}. \quad (17.8a)$$

Составляющая момента, перпендикулярная к полю, остается без изменения. Например, для  $x$ -овой компоненты мы получаем:

$$m_x = m_x^0 - \frac{e\omega_L}{2c} \sum_i \overline{x_i z_i},$$

и в среднем

$$m_x = m_x^0.$$

Эти формулы для дипольного момента в магнитном поле справедливы и для атомов без сферической симметрии, если только атомы ориентированы беспорядочным образом.

Если атомы не обладают постоянным магнитным моментом  $m^0$ , то вещество, содержащее  $N^a$  атомов в  $1 \text{ см}^3$ , приобретает при включении поля магнитный момент на  $1 \text{ см}^3$ , равный

$$- \frac{N^a e^2}{6mc^2} \sum_i \overline{r_i^2} H.$$

Коэффициент при  $H$  называют отнесенной к единице объема диамагнитной восприимчивостью. Ее величина, как показывает эта формула, весьма просто связана со средним значением квадрата расстояния электрона от центра атома. Если  $Z$  означает число электронов в атоме, а  $a^2$  — среднее значение квадратов их расстояний от центра, то

$$\sum_i \overline{r_i^2} = Za^2.$$

Поэтому диамагнитная восприимчивость равна

$$x = - \frac{N^a e^2 Za^2}{6mc^2}. \quad (17.9)$$

**§ 18. Магнитно-механические эффекты. Момент количества движения и намагничение.** Мы рассмотрим здесь два явления, связанные с одной стороны, с именами Эйнштейна и де-Гааса (de Haas), а с другой — с именем Барнетта. Это — эффект вращения вследствие намагничивания и намагничивание вследствие вращения.

Исходной точкой этих опытов было представление Ампера о природе магнетизма, основанное на гипотезе о „молекулярных токах“. Под последними Ампер понимал не встречающие сопротивления круговые токи, оси которых до включения внешнего магнитного поля расположены совершенно беспорядочно, а после включения поля постепенно принимают направление поля. Природа этих круговых токов, о которых Ампер не имел более детальных представлений, становится понятной с точки зрения теории атома Бора, согласно которой вокруг положительно заряженного ядра обращаются отрицательно заряженные электроны. Таким образом эти электроны образуют круговые токи, сила которых определяется соотношением  $i = ev$ , где  $e$  — заряд электрона, а  $v$  — число оборотов в секунду. Из § 17 известно, что на большом расстоянии действие кругового тока силы  $i$ , обтекающего площадь  $S$ , равносильно действию постоянного магнита с магнитным моментом  $M = S \frac{i}{c}$ . Следовательно, орбитальному электрону соответствует магнитный момент

$$M = \frac{e}{c} v S. \quad (18.1)$$

Движущийся вокруг ядра электрон обладает массой  $m$ , а потому и (постоянным) моментом количества движения. Выражение для момента количества движения в полярных координатах будет  $J = mr^2 \dot{\varphi}$ . Но  $r^2 \dot{\varphi}$  представляет удвоенную площадь, описываемую при вращении радиусом-вектором в единицу времени. Согласно закону площадей, в случае движения под влиянием центральных сил эта величина остается постоянной. Если  $T$  означает время обращения, то

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S}{T} = \nu S$$

и, следовательно,

$$J = 2m \nu S. \quad (18.2)$$

Сопоставляя (18.1) с (18.2), мы видим, что отношение

$$\frac{J}{M} = \frac{2mc}{e} \quad (18.3)$$

зависит только от универсальных постоянных  $e$ ,  $m$ ,  $c$ , но не зависит от частот обращения и от площади орбит (Вследствие отрицательного знака заряда электрона момент количества движения и магнитный момент направлены в противоположные стороны). Отношение (18.3) применимо также к системе, состоящей из многих электронов, если  $M$  и  $J$  представляют векторные суммы отдельных моментов. В самом деле, согласно (17.6), для системы электронов имеет место равенство

$$M = \frac{1}{2c} \sum_i e_i (\mathbf{s}_i \times \mathbf{v}_i);$$

с другой стороны,

$$J = \sum_i m_i (\mathbf{s}_i \times \mathbf{v}_i).$$

Значит, если все  $e_i = e$  и все  $m_i = m$ , то мы снова получим (18.3).

Из этого соотношения между результирующим магнитным моментом и результирующим моментом количества движения вытекают важные физические следствия. Если изменить намагниченность  $M$  куска железа на величину  $\Delta M$ , то результирующий момент орбитальных электронов, который мы обозначим  $J_m$ , изменится на  $\Delta J_m = \frac{2mc}{e} \Delta M$ . Но полный момент количества движения куска железа должен остаться постоянным; следовательно, наш кусок приобретает в виде „отдачи“ механический момент количества движения  $J = -\Delta J_m$ . Другими словами, изменение намагниченности сказывается как мгновенное появление момента силы  $\mathfrak{D}$ , изменяющего механический момент количества движения согласно уравнению  $\frac{dJ}{dt} = \mathfrak{D}$ . При этом  $\mathfrak{D}$  связано с  $\Delta M$  соотношением

$$\Delta J_m = \frac{2mc}{e} \Delta M = - \int \mathfrak{D} dt.$$

При осуществлении этого опыта тонкий железный стержень (с возможно меньшим моментом инерции!) подвешивается одним концом на закручивающейся нити. Пусть, для примера, стержень вначале намагничен так, что его северный полюс расположен внизу. При перемагничивании стержень начинает вращаться. Наибольшая достигаемая угловая скорость определяется из уравнения

$$\theta \omega = - \Delta J_m = - \frac{2mc}{e} \Delta M$$

( $\theta$  — момент инерции). Наблюдаемое при этом максимальное отклонение  $\varphi_{\max}$  связано с начальной скоростью соотношением

$$\frac{D \varphi_{\max}^2}{2} = \frac{\theta \omega^2}{2},$$

где  $D$  — модуль кручения нити. Амплитуда колебаний, как в этом легко убедиться, подставляя практически возможные значения постоянных, в общем очень мала. Поэтому Эйнштейн и де-Гаас, которым впервые удалось доказать эффект вращения при намагничении, прибегли к методу резонанса.

Стержень помещался внутри индукционной катушки, через которую они пропускали переменный ток, вызывающий периодическое перемагничивание стержня. Если частота переменного тока приблизительно или точно совпадает с частотой собственных колебаний закручиваемой системы, то амплитуда колебаний, вследствие резонанса, сильно увеличивается и достигает значений, доступных наблюдению.

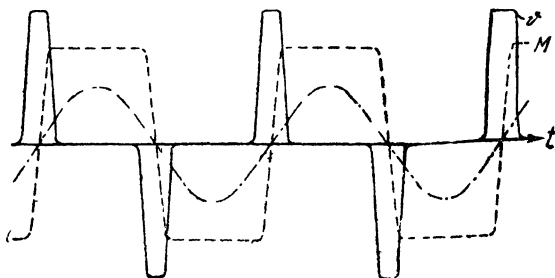


Рис. 24. К опыту Эйнштейна и де-Гааса. Зависимость тока  $i$  в катушке, магнитного момента  $M$  и момента силы  $\varphi$  (пропорционального  $\frac{dM}{dt}$ ) от времени.

Рассмотрим это явление подробнее. Магнитное поле  $H$ , вызывающее перемагничивание стержня, изменяется синхронно с переменным током частоты  $\omega$ , протекающим через катушку. Как известно, намагничение ферромагнитных тел не пропорционально внешнему полю; после крутого подъема оно скоро достигает насыщения. Поэтому при достаточно большой амплитуде тока в катушке намагничение  $M$  возрастает в течение весьма небольшой части периода от минимального о максимального значения. На рис. 24 представлено изменение тока в катушке со временем, а значит и изменение  $H$ ; далее, кривая намагничения и, наконец, вращательный момент, вычисленный по формуле  $\varphi = - \frac{2mc}{e} \frac{dM}{dt}$ . При этом не принят во внимание обусловленный гистерезисом сдвиг фаз между кривыми  $i$  и  $M$ .

Таким образом, вращательный момент представляет периодическую, а при соответствующем выборе начала счета времени также и четную функцию от времени, которую, следовательно, можно разложить в ряд Фурье по одним лишь косинусам, т. е.

$$\vartheta = \sum_{\lambda}^{\infty} a_{\lambda} \cos \omega_{\lambda} t,$$

где

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \vartheta \cos \omega n t dt.$$

При этом постоянный член отсутствует, так как интеграл вращательного момента по времени, распространенный на целый период, равен нулю. Так как  $\omega$  приблизительно совпадает с собственной частотой  $\omega_0$  колеблющейся системы, то резонансное действие первого члена разложения играет гораздо большую роль, чем действие остальных членов, которые по этому вообще могут быть опущены для упрощения расчета. Следовательно, все определяется коэффициентом  $a_1$ . Но  $\vartheta$  отлично от нуля только в узком интервале, в котором косинус близок к своему экстремальному значению  $\pm 1$  и поэтому может практически считаться постоянным. При интегрировании по целому периоду мы дважды интегрируем вдоль зубца кривой  $\vartheta$ . Каждый такой зубец дает:

$$\int_{\text{зубец}} \vartheta dt = -\frac{2mc}{e} \Delta M = -\frac{4mc}{e} M_{\max},$$

откуда

$$a_1 = \frac{4}{T} \int_{\text{зубец}} \vartheta dt = -\frac{16mc}{Te} M_{\max}.$$

Подставим вычисленное таким путем выражение  $\vartheta = a_1 \cos \omega t$  в уравнение движения колеблющейся системы

$$\theta \ddot{\varphi} + R \dot{\varphi} + D \varphi = \vartheta,$$

которое, после деления его на  $\theta$ , примет вид:

$$\ddot{\varphi} + \rho \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = b \cos \omega t,$$

где  $\rho = \frac{R}{\theta}$  — декремент затухания,  $\omega_0^2 = \frac{D}{\theta}$  — частота собственных колебаний системы, а  $b$ , согласно вышесказанному, равно  $-\frac{8mcM_{\max}}{\pi e \theta}$ .

Нетрудно убедиться, что решением этого уравнения будет:

$$\varphi = \frac{b \cos(\omega t - \chi)}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \rho^2 \omega^2}},$$

где сдвиг фаз  $\chi$  определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\rho \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$



Резонанс имеет место при  $\omega = \omega_0$ . В этом случае амплитуда колебаний равна  $\alpha_m = \frac{b}{\rho}$ , т. е. обратно пропорциональна декременту затухания.

Непосредственное определение этих постоянных довольно затруднительно и не дает большой точности. Эйнштейн и де-Гаас избежали этого прямого пути тем, что сняли полную резонансную кривую, т. е. зависимость амплитуды колебаний от разности частот  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ ; при этом получили кривые типа гауссовской кривой ошибок. По этим кривым можно для каждого значения  $\Delta\omega$  сравнительно точно определить соответствующее значение амплитуды колебаний  $\alpha$ . По значениям же последних легко вычислить  $\rho$  по формуле

$$\rho = \frac{2|\Delta\omega|}{\sqrt{\frac{\alpha_m^3}{\alpha^2} - 1}}.$$

Измерив амплитуды колебаний в высшей точке резонансной кривой и для определенного  $\Delta\omega$ , можно на основании вышеприведенных формул проверить правильность теоретически найденной зависимости (18.3) между механическим и магнитным моментом. Первые опыты Эйнштейна и де-Гааса прежде всего показали, что такой эффект действительно существует. Однако, точность измерений была недостаточна для каких-либо количественных заключений, хотя результаты говорили как будто в пользу приведенной теории. Эти первые опыты вскоре были повторены в более точной обстановке эксперимента Бекон и Арвидсоном, Клаасеном и др. При этом выяснилось, что измеренный механический момент примерно в два раза меньше, чем этого требовала теория, так что формулу (18.3) следовало бы приближенно заменить формулой

$$\frac{J}{M} \approx \frac{mc}{e}. \quad (18.4)$$

К этому расхождению между теорией и экспериментом мы еще вернемся позднее.

Рассмотрим здесь еще второй метод, которым с успехом воспользовался Барнетт для проверки уравнения (18.3), и который также приводит к (18.4). Задача опытов Барнетта заключалась в том, чтобы установить, что бывшее вначале немагнитным ферромагнитное тело намагничивается при вращении так, как оно намагничивалось бы при включении внешнего поля

$$H = \frac{2mc}{e} \omega, \quad (18.5)$$

направление которого совпадает с осью вращения. Опыты производятся таким образом, что кусок железа сначала приводят в быстрое вращение, а затем помещают в магнитное поле, напряжение которого определяется из (18.5), и при этом сравнивают каким-либо методом, — например, при помощи магнетометра, — возникающее в этих двух случаях намагничение.

Теория этого опыта состоит в следующем. Мы попрежнему исходим из представления об элементарных магнитах, которые мы считаем небольшими круговыми токами, происходящими вследствие быстрого

вращения электронов вокруг некоторых определенных центров в металле. При этом нам ничего не надо предполагать относительно силы, действующей на электроны, кроме того, что это электрическая сила, зависящая только от расстояния электронов до этих центров.

Задача, очевидно, состоит в решении уравнений движения электронов в обоих случаях, т. е. в присутствии однородного магнитного поля  $\mathbf{H}$  (направленного по оси  $z$ ) и при вращении металла (вокруг оси  $z$ ) с постоянной угловой скоростью. Из представлений, основанных на теореме Лармора (§ 16), вытекает следующее: если одновременно с включением поля привести металл во вращение вокруг направления  $\mathbf{H}$  с ларморовой частотой  $-\frac{e}{2mc} H$ , то электроны будут двигаться относительно вращающегося в поле металла так же, как они двигались в неподвижном металле при отсутствии поля. Отсюда следует, что вращение с частотой.

$$\omega = \frac{e}{2mc} H \quad (18.6)$$

влияет на движение электронов в металле так же, как магнитное поле  $H$ . Следовательно, и намагничение, вызываемое вращением, должно быть равно намагничению, производимому полем.

Не мешает, быть может, вкратце указать на то, каким образом в этот вывод эффекта Барнетта входит соотношение (18.3), связывающее магнитный и механический моменты отдельного кругового тока. Это соотношение, конечно, уже содержится в модельных представлениях о движущемся по орбите электроны, из которых и получено на основании законов электродинамики соотношение (18.3).

Уравнение (18.5) можно вывести еще другим способом, показывающим его непосредственную связь с соотношением (18.3). Рассмотрим некоторый элементарный магнит (круговой ток), который с точки зрения его механических свойств можно рассматривать как волчок с моментом количества движения  $\mathbf{J}$ , направленным по его оси. Если мы будем вращать металл, то, вследствие устойчивости направления гироскопической оси волчка,  $\mathbf{J}$  не будет принимать участия в этом движении, так как его положение неподвижно относительно окружающего пространства, а не относительно металла. Для пересчета изменения вектора во времени от неподвижной системы отсчета к движущейся существует уравнение

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{J}}{dt} + \mathbf{w} \times \mathbf{J},$$

где  $\frac{d}{dt}$  представляет изменение в неподвижной системе, а  $\frac{d^*}{dt}$  — изменение в системе, движущейся вместе с металлом;  $\mathbf{w}$  — вектор угловой скорости, направление которого совпадает с осью вращения, а величина равна угловой скорости  $\omega$ . Согласно закону моментов, изменение момента количества движения  $\frac{d\mathbf{J}}{dt}$  зависит, от момента сил  $\mathbf{D}$ , а именно  $\mathbf{D} = \frac{d\mathbf{J}}{dt}$ . В нашем случае, когда металл приобрел полную угловую скорость, внешнего момента сил уже нет. Следовательно,  $\mathbf{D} = 0$ . Поэтому

$$\frac{d^*\mathbf{J}}{dt} = -\mathbf{w} \times \mathbf{J} = \mathbf{J} \times \mathbf{w},$$

т. е. наблюдатель, движущийся вместе с металлом, замечает по отношению к своей системе отсчета такое изменение момента количества движения круговых токов, как если бы оно вызывалось влиянием момента сил  $D_1 = J \times w$ .

С другой стороны, в магнитном поле  $H$  на элементарный магнит с магнитным моментом  $M$  действует момент сил

$$D_2 = M \times H.$$

Если  $D_1 = D_2$ , то

$$J \times w = M \times H. \quad (18.7)$$

Это показывает, что магнитное поле сообщает элементарному магниту такой же момент количества движения, какой ему сообщает вращение, — с точки зрения наблюдателя, связанного с вращающейся системой. Поэтому должны быть одинаковы и результирующие магнитные моменты.

Приведенное выше уравнение можно без труда разрешить относительно  $H$ , если воспользоваться соотношением (18.3) между моментом количества движения  $J$  и магнитным моментом  $M$ . Уравнение удовлетворяется равенством

$$H = \frac{2mc}{e} w, \quad (18.5a)$$

которое полностью совпадает с уравнением (18.5). В этом выводе обнаруживается непосредственная связь между уравнениями (18.3) и (18.5).

Результаты опытов Эйнштейна — де-Гааса и Барнетта, как было указано выше, качественно согласуются с теорией; однако, численный коэффициент отличается от выведенного в уравнении (18.3) и принимает для различных веществ значения от 1 до 1,13. Теоретически найденное значение 2 лежит далеко за пределами ошибок опыта.

Как же объяснить этот неожиданный результат?

Ответ на этот вопрос дали в 1925 году Юленбек (Uhlenbeck) и Гаудсмит (Goudsmit). Они высказали гипотезу, согласно которой электрон, кроме обращения по орбите вокруг ядра, что приводит к выведенному выше значению для механического и магнитного момента, обладает еще собственным вращением вокруг оси, проходящей через его центр тяжести. Исследования спектров и эффекта Зеемана показали, что такая гипотеза приводит к полному согласию с опытом, если положить, что электрон обладает механическим моментом количества движения

$$J_s = \frac{h}{4\pi} \quad (18.8)$$

и связанным с ним магнитным моментом

$$M_s = \frac{eh}{4\pi mc}, \quad (18.9)$$

где  $h$  — „постоянная Планка“, численное значение которой равно  $6,61 \cdot 10^{-27}$  эрг. сек.

Свойства электронов, определяемые соотношениями (18.8) и (18.9), обозначаются обычно английским словом „spin“. Мы не будем подробно останавливаться на значительных успехах, достигнутых благодаря этой

гипотезе в спектроскопии, и особенно в объяснении аномального эффекта Зеемана; все это читатель найдет в соответствующей литературе.

Укажем здесь только на то, что из уравнений (18.8) и (18.9) следует соотношение

$$\frac{J_s}{M_s} = \frac{mc}{e}$$

между спиновым моментом количества движения и магнитным спиновым моментом. Приблизительное совпадение этого отношения с экспериментально найденным значением  $\frac{J}{M}$  показывает, что намагничение железа должно быть, главным образом, приписано ориентировке моментов собственного вращения электронов, а орбитальные моменты, обусловленные движением электронов вокруг ядра играют лишь второстепенную роль. Это представление соответствует современной точке зрения, согласно которой ферромагнетизм обусловлен исключительно электронным спином.

## В. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕПОДВИЖНЫХ СРЕДАХ

### 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ИЗ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ

§ 19. Усреднение полей. В § 6 мы установили в качестве вполне строгих основных уравнений электродинамики следующие:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{h} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{e}} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, & \operatorname{div} \mathbf{e} &= 4\pi \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{e} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{h}}, & \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.1)$$

Непосредственное применение этих уравнений к описанию явлений внутри материальной среды представляется почти безнадежным. Уже внутри отдельного атома все величины, входящие в эти уравнения, представляют настолько сложные и быстро меняющиеся функции координат и времени, что даже задав их детально, мы получили бы данные, совершенно непригодные для практически выполнимого описания явлений. Но теория электромагнитных явлений, созданная Максвеллом задолго до появления электронной теории, дает гораздо более простой способ описания электромагнитных свойств материи, а именно, так называемые уравнения Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho_w, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.2)$$

Очевидно, что векторы, входящие в уравнения (19.2), имеют принципиально другой смысл, чем соответствующие им величины в уравнениях (19.1). В практически однородных телах (например, в изодатоте

помещенном между пластинками конденсатора, или в прямолинейном проводе, по которому течет ток) векторы уравнений Максвелла (19.2) или вообще постоянны или же изменяются столь медленно, что их можно непосредственно измерить. В противоположность величинам  $\epsilon$  и  $h$  уравнений (19.1), векторы уравнений Максвелла заметно изменяются в пространстве только тогда, когда оно содержит очень большое число молекул, если только вообще речь идет о сплошных телах. Изменение во времени величин, входящих в (19.1), имеет в общем тот же характер, что и изменение в пространстве, например, когда мы имеем дело с быстрыми, а быть может и с беспорядочными движениями электронов. Напротив, быстрота изменения во времени величин входящих в уравнения (19.2) определяется, главным образом, быстротой изменения условий опыта.

Поэтому было бы бессмысленно искать непосредственную связь между величинами, входящими в уравнения (19.1) и (19.2). Связь между ними можно искать только после пространственно-временного „сглаживания“ уравнений (19.1). Это „сглаживание“ должно состоять в определении средних значений в таких интервалах пространства и времени, в которых исчезают нерегулярности, связанные с атомным строением материи и электричества, но все же сохраняются пространственно-временные изменения, определяемые условиями опыта.

Если  $f(x, y, z, t)$  представляет одну из весьма нерегулярно меняющихся функций пространства и времени, входящих в уравнения (19.1), то искомое среднее значение  $\bar{f}(x, y, z, t)$  может быть описано следующим образом: если среднее значение должно быть определено в момент времени  $t$  в точке  $x, y, z$ , то из этой точки, как из центра, мы описываем сферу радиуса  $a$  и выбираем, кроме того, определенный интервал времени  $\tau$ . Тогда пространственно-временное среднее значение  $f$  внутри сферы  $a$  в интервале от  $t-\tau$  до  $t+\tau$  определяется выражением

$$\bar{f}(x, y, z, t) = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} a^3 2\tau} \int_{\vartheta=-\tau}^{\vartheta=+\tau} \int_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq a^2} f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \tau) d\xi d\eta d\zeta d\vartheta. \quad (19.3)$$

Мы написали эту формулу в явном виде с той целью, чтобы показать, что при заданных  $a$  и  $\tau$  нахождение среднего и дифференцирование по любому из 4-х аргументов  $x, y, z, t$  являются переместимыми операциями, т. е. что имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{f} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{f} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}}, \quad (19.4)$$

причем эти формулы совершенно независимы от специального выбора величин  $a$  и  $\tau$  и являются математическими тождествами. Об этих величинах можно сказать следующее: для того, чтобы усреднение по формуле (19.3) имело физический смысл, очевидно, необходимо, чтобы

его результат в определенных пределах не зависел от специального выбора величин  $a$  и  $\tau$ . Для этого, например, необходимо, чтобы сфера радиуса  $a$ , с одной стороны, содержала весьма большое число атомов, а с другой стороны, — была все же настолько мала, чтобы при перемещении на расстояние  $a$  не происходило никакого существенного изменения макроскопических величин  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , входящих в уравнения (19.2). Возможность выбора таких значений  $a$  и соответственных значений  $\tau$  является особым допущением, которое мы здесь вводим в теорию.

После этих предварительных замечаний произведем усреднение в уравнениях (19.1). Вследствие доказанной в (19.4) возможности переставлять местами дифференцирование и усреднение, последнее выразится в том, что мы поставим черточки над всеми векторами:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{h}} &= \frac{1}{c} \dot{\bar{\mathbf{e}}} + \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \mathbf{v}}, & \operatorname{div} \bar{\mathbf{e}} &= 4\pi \bar{\rho}, \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{e}} &= -\frac{1}{c} \dot{\bar{\mathbf{h}}}, & \operatorname{div} \bar{\mathbf{h}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.5)$$

Согласно сделанному нами допущению относительно величин  $a$  и  $\tau$ , в усредненные уравнения (19.5) входят только „сглаженные“ функции, не зависящие от случайных неоднородностей атомной структуры, так что возможно непосредственное сравнение с уравнениями Максвелла (19.2). Задача следующих параграфов будет состоять в том, чтобы показать, что уравнения (19.5) для усредненных величин электронной теории идентичны с уравнениями Максвелла. Для обоих последних уравнений это доказательство может быть приведено сейчас же. Плотность заряда  $\rho$  и его скорость  $\mathbf{v}$  вообще не входят в оба эти уравнения, и поэтому последние переходят в соответствующие уравнения Максвелла, если положить

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B}. \quad (19.6)$$

Среднее значение вектора  $\bar{\mathbf{e}}$  равно вектору электрической напряженности  $\mathbf{E}$  в теории Максвелла, а среднее значение  $\bar{\mathbf{h}}$  равно вектору индукции  $\mathbf{B}$ .

Подставляя эти соотношения в первые два уравнения (19.5), мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \mathbf{v}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \bar{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

Эти уравнения сильно отличаются от соответствующих уравнений (19.2) теории Максвелла. Вводя в эти уравнения векторы электрической и магнитной поляризации  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  (электрический и магнитный моменты единицы объема), причем

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P},$$

мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \dot{\mathbf{P}} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}), \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho_w - \operatorname{div} \mathbf{P}). \end{aligned} \right\} \quad (19.7a)$$

Из сравнения формул (19.7) и (19.7a) мы видим, что можно говорить о выводе уравнений Максвелла из электронной теории только в том случае, если мы убедимся в том, что среднее значение  $\overline{\rho v}$  плотности тока в электронной теории, полученное по формуле (19.3), состоит из трех слагаемых:

$$\overline{\rho v} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{P}} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (19.8)$$

и что, кроме того,

$$\overline{\rho} = \rho_w - \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (19.9)$$

Доказательство правильности уравнений (19.8) и (19.9) составляет содержание двух следующих параграфов.

**§ 20. Токи проводимости и поляризации.** Для описания явлений в материальных телах представим себе, что материальное тело состоит из нейтральных атомов или молекул, заряженных атомов и молекул (ионов) и „свободных“ электронов. Простейший способ переноса электричества состоит в передвижении ионов или свободных электронов между прочими частицами вещества. Этот процесс только дает ток проводимости, когда электрическое поле (или градиент концентрации) создает некоторое преимущественное направление этого движения. Если в  $1 \text{ см}^3$  тела находится, например,

$$\begin{array}{ccccccc} n_1 & \text{ионов} & \text{с зарядом} & e_1 & \text{и со скоростью} & v_1, \\ n_2 & \text{„} & \text{„} & e_2 & \text{„} & v_2 \end{array}$$

и т. д., то мы можем тотчас же определить  $x$ -овую компоненту тока проводимости: очевидно через элемент поверхности  $dS$  за время от  $t$  до  $t + dt$  пройдут ионы первого сорта, находившиеся в момент времени  $t$  в косом цилиндре с основанием  $dS$  и высотой  $v_{1n} dt$ ; число таких ионов, следовательно, равно  $n_1 dS v_{1n} dt$ . Если  $dS$  нормально к оси  $x$ , то через  $dS$  за время  $dt$  пройдет в общей сложности количество электричества, равное

$$dS dt (e_1 n_1 v_{1x} + e_2 n_2 v_{2x} + \dots).$$

Полная плотность тока проводимости, следовательно, будет

$$\mathbf{j}_i = n_1 e_1 v_1 + n_2 e_2 v_2 + \dots$$

Если  $N = n_1 + n_2 + \dots$  есть полное число ионов и электронов в  $1 \text{ см}^3$ , то мы можем представить  $\mathbf{j}_i$  в виде суммы по всем  $N$  частицам:

$$\mathbf{j}_i = \sum_{i=1}^N e_i v_i. \quad (20.1)$$

В этом и заключается наглядный смысл первого из слагаемых величины  $\overline{\rho v}$  в уравнении (19.8). Те же ионы и электроны, если их заряды

взаимно не нейтрализуются, определяют входящую в уравнение (19.9) плотность заряда

$$\rho_{\text{ист.}} = n_1 e_1 + n_2 e_2 + \dots = \sum_{i=1}^N e_i. \quad (20.2)$$

Остальные два слагаемых в уравнении (19.8), именно  $\dot{\mathbf{P}}$  и  $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ , с первого взгляда могут показаться неожиданными, так как они вызывают конечную плотность тока  $\dot{e}v$  даже тогда, когда тело состоит только из электрически нейтральных, в целом не заряженных атомов.

Рассмотрим сначала вектор поляризации  $\mathbf{P}$ . В теории Максвелла вектор поляризации определяется как электрический дипольный момент единицы объема. Он составляется из векторной суммы дипольных моментов всех отдельных молекул. Если  $\mathbf{p}_i$  есть момент  $i$ -той молекулы и если в  $1 \text{ см}^3$  находятся  $N$  молекул, то

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N. \quad (20.3)$$

Таким образом для дальнейшего вывода мы должны определить момент  $\mathbf{p}_i$  отдельной молекулы. Этот момент определяется тем, что электрическое поле молекулы в точке, расстояние которой от молекулы велико по сравнению с размерами молекулы, вычисляется из потенциала

$$\varphi = -\mathbf{p} \operatorname{grad}_a \frac{1}{r}. \quad (20.4)$$

В частности, если диполь, абсолютная величина которого  $p$ , находится в начале координат, причем вектор  $\mathbf{p}$  направлен по оси  $x$ -ов, то

$$\varphi(x, y, z) = -p \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{p \cos \vartheta}{r^2},$$

где  $\vartheta$  — угол между направлениями векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$ .

Рис. 25.  
Через элемент поверхности  $Sd$  в течение времени  $dt$  проходят молекулы, сошедшие в цилиндре с высотой  $v_{\text{ин}} dt$ .

Фактическое распределение зарядов внутри молекулы мы можем описать двумя способами, которые для наших целей пока в достаточной степени равноценны. Мы можем построить молекулу или из непрерывно распределенных зарядов с плотностью  $\rho$ , или из отдельных точечных электронов и ядер. В последнем случае мы выбираем некоторую точку внутри молекулы и проводим из этой точки векторы  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots$  и т. д.,

на концах которых расположены точечные заряды  $e_1, e_2, \dots$ . В первом же случае мы просто задаем плотность заряда внутри молекулы, как функцию координат и времени  $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta, t)$ . Для того чтобы определить дипольный момент молекулы, вычислим потенциал  $\varphi$  в заданной точке  $x, y, z$ , вызываемый зарядом  $e$ , координаты которого  $\xi, \eta, \zeta$ , причем мы положим, что  $|\mathbf{s}| \ll |\mathbf{r}|$ . Как и в § 17, здесь можно написать:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{r} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r_0} + \left( \mathbf{s}, \operatorname{grad}_a \frac{1}{r} \right).$$



Но

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right),$$

а следовательно,

$$\text{grad}_q \frac{1}{r} = - \text{grad}_a \frac{1}{r}$$

(при этом значок  $q$  относится к точке, в которой находится источник, вызывающий поле, а значок  $a$  — к точке, в которой определяется исконая величина). Поэтому потенциал всех точечных зарядов  $e_1, e_2, \dots$  в первом приближении будет:

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \dots = \frac{1}{r_0} \sum_i e_i - \left( \sum_i e_i s_i \right) \cdot \text{grad}_a \frac{1}{r}.$$

Если молекула в целом нейтральна, т. е.  $\sum_i e_i = 0$ , то мы получаем, сравнивая с (20.4), для дипольного момента выражение:

$$\mathbf{p} = \sum_i e_i \mathbf{s}_i. \quad (20.5a)$$

Если же мы будем описывать молекулы при помощи непрерывно распределенного заряда, то из такого же рассуждения получим:

$$\mathbf{p} = \iiint \rho \mathbf{s} d\xi d\eta d\zeta. \quad (20.5b)$$

Изменение во времени дипольного момента  $\mathbf{p}$  отдельной молекулы, с точки зрения (20.5a), обуславливается соответствующим изменением векторов  $\mathbf{s}$ , т. е.

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_i e_i \mathbf{v}_i \quad (20.6a)$$

а с точки зрения (20.5b) — изменением во времени плотности заряда  $\rho$ :

$$\dot{\mathbf{p}} = \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{s} d\xi d\eta d\zeta.$$

Это выражение может быть, на основании закона сохранения заряда

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

приведено к виду, соответствующему формуле (20.6a). Для  $x$ -овой компоненты вектора  $\mathbf{p}$  мы получим:

$$\dot{p}_x = \iiint \xi \frac{\partial \rho}{\partial t} d\xi d\eta d\zeta = - \iiint \xi \left( \frac{\partial \rho v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial \zeta} \right) d\xi d\eta d\zeta.$$

Интегрируя по всей молекуле, получаем:

$$\dot{p}_x = \iiint \rho v_x d\xi d\eta d\zeta.$$

Следовательно,

$$\dot{\mathbf{p}} = \iiint \rho \mathbf{v} d\xi d\eta d\zeta. \quad (20.6b)$$

Пусть в  $1 \text{ см}^3$  находятся  $n$  одинаковых молекул. Изменим дипольный момент каждой молекулы, передвигая первый электрон на расстояние  $\delta s_1$ , второй на  $\delta s_2$  и т. д. Определим снова полный заряд, проходящий при этом через элемент площади  $dS$  нормальный к оси  $x$ . Очевидно, что из числа электронов, сдвинутых на  $\delta s_1$ , через  $dS$  пройдут  $dS\delta\xi_1 n$ , из следующих  $dS\delta\xi_2 n$  и т. д., так что полное количество электричества, прошедшего через  $dS$ , будет  $dSn \sum_i e\delta\xi_i$ , причем суммировать надо по электронам одной молекулы. Если  $i$ -ый электрон движется со скоростью  $v_i$ , то  $\delta\xi_i = v_{ix} dt$ . Следовательно, при изменении  $\rho$  мы получим ток

$$\mathbf{j} = n \sum e_i \mathbf{v}_i = n \dot{\mathbf{p}}.$$

Если мы имеем еще другого сорта молекулы, то, при обозначении  $\mathbf{P} = n_1 \mathbf{p}_1 + n_2 \mathbf{p}_2 + \dots$ , полный ток поляризации будет:

$$\mathbf{j}_p = n_1 \dot{\mathbf{p}}_1 + n_2 \dot{\mathbf{p}}_2 + \dots = \dot{\mathbf{P}}. \quad (20.7)$$

В этом выводе, особенно при определении величин  $dS\delta\xi_i n$  и т. д., мы допускали беспорядочное, чисто случайное расположение центров тяжести отдельных молекул. Это может вызвать некоторые сомнения при применении наших результатов к кристаллическим телам с их строго закономерным расположением атомов, так как здесь можно получить совершенно различные значения  $\mathbf{j}_p$  в зависимости от того, как проходит, например, площадка  $dS$ : между слоями атомов, или через центры атомов такого слоя. Но на самом деле здесь никаких затруднений не возникает; ведь согласно основной формуле (19.3) при усреднении мы, собственно говоря, должны усреднять плотность тока  $\rho \mathbf{v}$  по объему, а не по поверхности. Поэтому, если мы получаем совершенно разные значения для различных параллельных друг другу элементарных площадок  $dS$ , что может иметь место в кристалле, то мы должны произвести усреднение и по всем этим поверхностям. При этом мы снова получим формулу (20.7). Итак, мы показали в самом общем виде, что

$$\dot{\mathbf{P}} = \overline{(\rho \mathbf{v})}.$$

Отсюда непосредственно следует, что даже тогда, когда  $\rho_{\text{ист}}$ , определяемое из уравнения (20.2), равно нулю, расходимость  $\mathbf{P}$  должна быть связана с плотностью заряда  $\rho$ . Будем сперва исходить из неполяризованного состояния тела и выделим в нем некоторый объем. Если  $dS$  есть элемент его поверхности с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ , то при изменении  $\mathbf{P}$  из этого объема через площадку  $dS$  выйдет количество электричества  $dS dP_n$ . Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho dV = - \iint \frac{\partial P_n}{\partial t} dS.$$

или, если при  $\mathbf{P} = 0$  было  $\rho = 0$ ,

$$\iiint \rho dV = - \iint P_n dS.$$

По теореме Гаусса отсюда непосредственно следует:

$$\bar{\rho}_P = - \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (20.8)$$

Эта плотность заряда, связанная с  $\operatorname{div} \mathbf{P}$ , обнаруживается нагляднее всего при рассмотрении поляризованного однородного цилиндра, основания которого являются источниками и стоками вектора  $\mathbf{P}$  и поэтому оказывают такое внешнее действие, как будто на них сосредоточены поверхностные заряды с плотностью  $+\mathbf{P}$  и  $-\mathbf{P}$ .

Другой вывод уравнения (20.8) состоит в определении электростатического потенциала тела, поляризация  $\mathbf{P}$  которого задана как функция координат. Согласно уравнению (20.4), элемент объема  $d\xi d\eta d\zeta$  создает в точке  $x, y, z$  потенциал  $(\mathbf{P} \cdot \operatorname{grad}_q \frac{1}{r}) d\xi d\eta d\zeta$ . Следовательно, потенциал всего объема будет

$$\varphi = \iiint (\mathbf{P} \cdot \operatorname{grad}_q \frac{1}{r}) d\xi d\eta d\zeta.$$

Интегрируя по всему объему, на основании тождества

$$\operatorname{div}(\mathbf{P} \frac{1}{r}) = \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{r} + \mathbf{P} \cdot \operatorname{grad}_q \frac{1}{r}$$

получаем:

$$\varphi = \iiint - \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{r} d\xi d\eta d\zeta.$$

Следовательно, по своему электростатическому действию  $-\operatorname{div} \mathbf{P}$  действительно эквивалентен плотности заряда.

**§ 21. Намагничение.** С точки зрения электронной теории, движущиеся заряды являются единственной причиной возникновения магнитного поля. Для объяснения магнитного момента  $\mathbf{m}$  отдельного атома мы должны предположить, что внутри атома движутся заряды, которые мы можем, как при рассмотрении поляризации, считать точечными зарядами  $e_i$ , движущимися со скоростью  $\mathbf{v}_i$ , или же представлять их себе в виде замкнутых токов с плотностью  $\mathbf{j}$  (переменной в пространстве). Если в  $1 \text{ см}^3$  находятся  $n$  атомов с моментами  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \dots$  и т. д., то намагничение определяется как

$$\mathbf{M} = n_1 \mathbf{m}_1 + n_2 \mathbf{m}_2 + \dots$$

В § 17 мы уже определяли магнитный момент атома, описываемый при помощи плотности тока  $\mathbf{j}$  или же при помощи квазистационарно движущихся электронов. Мы нашли для этих двух способов описания два эквивалентных друг другу выражения:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \iiint (\mathbf{s} \times \mathbf{j}) d\xi d\eta d\zeta$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i (\overline{\mathbf{s}_i \times \mathbf{v}_i}). \quad (21.1)$$

Нам следует теперь разобрать, каким образом из входящей в эти формулы плотности замкнутых молекулярных токов можно, при помощи усреднения в смысле равенств (19.3), получить результирующий ток  $\bar{j}_x$ .

Для предварительной ориентировки в этом вопросе рассмотрим сначала весьма упрощенную модель атома. Пусть отдельные атомы состоят из одинаковых плоских кольцевых токов  $J$ , обтекающих площадки  $S$ , причем на  $1 \text{ см}^3$  приходится  $n$  таких токов. Определим полный ток, проходящий через нормальный к оси  $x$ -ов прямоугольник, стороны которого  $a$  и  $b$  направлены по осям  $y$  и  $z$ . Непосредственно ясно, что результирующий ток  $\bar{j}_x$  зависит только от тех атомов, чьи площадки ( $S$ ) пересекаются одной из четырех сторон рассматриваемого прямоугольника. В самом деле, только у этих атомов круговые токи

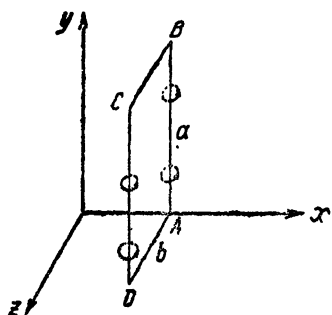


Рис. 26. Схема определения плотности тока  $\text{сгот } M$ , зависящей от намагничивания.

пересекают плоскость прямоугольника  $ab$  один раз; круговые токи всех остальных атомов или вообще не пересекают  $ab$ , или пересекают ее и в том и в другом направлении. Определим результирующий ток атомов, пронизываемых стороной  $AB$  нашего прямоугольника. (Каждый такой атом дает слагаемое  $+J$  или  $-J$ , в зависимости от того, какова составляющая  $m_y$  его момента по оси  $y$ : положительна или отрицательна). Предположим сперва, что составляющая  $m_y = \frac{J}{c} S_y$  одинакова у всех этих атомов. В этом случае достаточно определить число атомов, пересекаемых стороной  $AB$ . Для этого рассмотрим вырезанный из данного вещества цилиндр, высота которого  $a$  (в направлении оси  $y$ ), а площадь поперечного сечения —  $1 \text{ см}^2$ . В нем содержится всего  $na$  атомов. Если мы проведем через этот цилиндр некоторую прямую в направлении  $a$ , то вероятность того, что эта прямая пересечет какой-нибудь определенный атом, равна отношению площадей  $S_y:1$ . Число всех пересеченных атомов в среднем в  $na$  раз больше, т. е. равно  $naS_y$ . Если значения  $S_y$  различны, то очевидно нужно взять их среднее. Таким образом, результирующий ток, обусловленный всеми атомами, которые пронизываются прямой  $AB$ , определяется формулой

$$JnaS_y = na cm_y = acM_y,$$

где  $M_y$  обозначает  $y$ -овую компоненту намагничивания.

Применяя аналогичные рассуждения к остальным трем сторонам нашего прямоугольника, мы получаем для атомов, пронизываемых стороной  $CD$ , ток  $-acM_y$ , причем, однако, значение  $M_y$  должно быть определено в точке  $z = b$ . Точно так же мы находим результирующие значения  $-bc(M_z)_{y=0}$  для стороны  $AD$  и  $+bc(M_z)_{y=a}$  для стороны  $BC$ . Согласно определению среднего, значение  $\bar{j}_x ab$  представляет полный

ток, прошедший через  $ab$ . Складывая величины, полученные для каждой из четырех сторон, получаем:

$$\bar{j}_x ab = c[a(M_y)_{z=0} - a(M_y)_{z=b} - b(M_z)_{y=0} + b(M_z)_{y=a}].$$

Если изменения  $M$  непрерывны, а значения  $a$  и  $b$  малы, это выражение можно разложить в ряд Тейлора:

$$\bar{j}_x ab = c \left\{ -a \frac{\partial M_y}{\partial z} b + b \frac{\partial M_z}{\partial y} a \right\},$$

или в векторной форме:

$$\bar{j}_m = c \operatorname{rot} M. \tag{21.2}$$

Но это как раз тот результат, которого нам не хватало для полного доказательства уравнения (19.8).

Нетрудно обобщить этот вывод на случай атомов с любым распределением тока  $j$  и с моментом

$$m = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{s} \times \mathbf{j}) d\tau.$$

Пусть в единице объема находятся  $n$  таких одинаковых атомов. Найдем величину тока, который определяется атомами, пересекаемыми стороной прямоугольника  $AB$ . Рассмотрим со стороны положительной оси  $y$  отдельный атом, пронизываемый этой осью (рис. 27) Для каждого атома построим свою координатную систему  $\xi, \eta, \zeta$  оси которой параллельны осям  $x, y, z$ . Координаты точки  $A$  пересечения оси  $y$  с атомом будут в этой системе  $\xi = \xi_0$  и  $\zeta = \zeta_0$ . Этот атом, очевидно, подает через площадь нашего прямоугольника

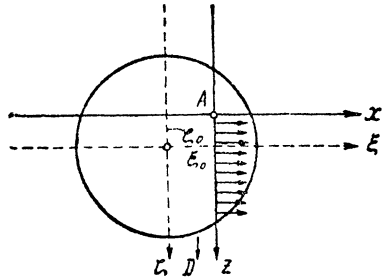


Рис. 27. Ток, зависящий от молекулы, пересекаемой стороной прямоугольника  $a$ .

ток  $\int_{\zeta_0}^g d\zeta \int_{-g}^{+g} j_{\xi}(\xi_0, \eta, \zeta) d\eta = f(\xi_0, \zeta_0)$ . (Пределы интегрирования  $-g$  и  $+g$  означают, что интегрирование в каждом случае следует производить до поверхности атома). Обозначим через  $q$  поперечное сечение атома плоскостью, перпендикулярной к оси  $y$ . Тогда, согласно сказанному выше, число атомов, пересекаемых стороной  $a$ , будет  $anq$ . При этом любое положение точки пересечения  $\xi_0, \zeta_0$  внутри  $q$  одинаково вероятно, так что средняя величина тока, определяемого атомом, будет

$$\bar{f} = \frac{1}{q} \int \int_{-g}^{+g} f(\xi_0, \zeta_0) d\xi_0 d\zeta_0.$$

Следовательно, полный искомый ток, соответствующий стороне  $a$ , равен

$$an \int_{-g}^{+g} d\xi_0 \int_{-g}^{+g} d\zeta_0 \int_{-\zeta_0}^{+g} d\zeta \int_{-g}^{+g} d\eta j_{\xi}(\xi_0, \eta, \zeta).$$

Меняя порядок интегрирования по  $\zeta$  и  $\zeta_0$ , получаем:

$$an \int_{-g}^{+g} d\xi_0 \int_{-g}^{+g} d\zeta \int_{-g}^{+g} j_{\xi}(\xi_0, \eta, \zeta) (\zeta + g) d\eta = an \int \zeta j_{\xi} d\tau + ang \int j_{\xi} d\tau,$$

где интегрирование теперь следует распространить по всему атому. Второе слагаемое этого выражения в случае квазистационарных токов равно нулю; кроме того, согласно (17.3а),

$$\int \zeta j_{\xi} d\tau = - \int \xi j_{\zeta} d\tau,$$

так что полученное выражение мы можем написать и в виде

$$an \int \zeta j_{\xi} d\tau \text{ или } -an \int \xi j_{\zeta} d\tau.$$

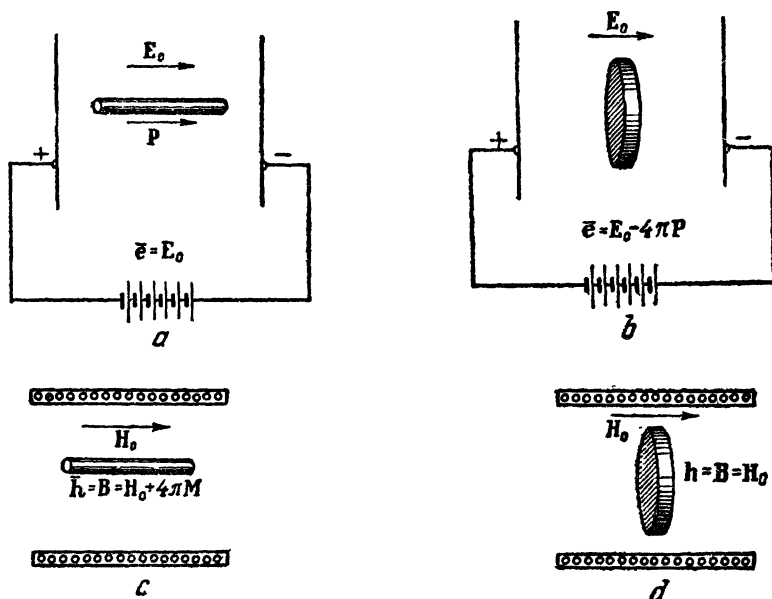


Рис. 28. а и б: стержень и пластинка из диэлектрика в однородном электрическом поле  $E_0$ ; с и d: стержень и пластинка из ферромагнитного вещества в однородном магнитном поле  $H_0$ ,

Поэтому ток, обусловленный стороной а, будет

$$\frac{1}{2} an \int (\zeta j_{\xi} - \xi j_{\zeta}) d\tau = \frac{an}{2} \int (\mathbf{s} \times \mathbf{j})_{\eta} d\tau,$$

или, согласно (17.5), он равен

$$acm_{\eta} = acM_{\eta},$$

что полностью совпадает с выражением, полученным для частного случая модели замкнутого кольцевого тока.

Таким образом переход от уравнений Максвелла (19.2) к основным уравнениям электронной теории (19.1) совершен.

К результату, полученному выше, добавим еще несколько замечаний. В следующих параграфах мы должны будем изучить, каким образом под действием внешнего поля и вызываемого им внутримолекулярного поля  $\bar{\mathbf{e}}$  или  $\bar{\mathbf{h}}$  возникает поляризация  $\mathbf{P}$  или намагничение  $\mathbf{M}$ . Но и не касаясь этих подробных исследований, мы можем ожидать, что для получения возможно больших значений

поляризации или намагничения необходимо будет стремиться к созданию возможно более сильных полей  $\vec{e}$  или  $\vec{h}$ . При заданных внешних полях (например, электрического поля между пластинками конденсатора с определенной разностью потенциалов или магнитного поля внутри катушки, по которой проходит ток) величины  $\vec{e}$  и  $\vec{h}$  сильно зависят еще и от геометрической формы данного тела. Известно, что наиболее выгодные значения обеих величин получаются тогда, когда тело имеет форму, по возможности удлиненную в направлении внешних силовых линий (например, когда оно имеет вид провода); наоборот, плоская, перпендикулярная подю пластинка находится в наименее выгодных условиях.

Поясним это при помощи схематических рисунков 28а, б, с, d. Пусть в случае электрического поля (28а и 28б)  $P$  есть вектор поляризации вещества. Этот вектор, имея источник в левом основании стержня (а) или пластинки (б) и сток в правом основании, вызывает соответствующие поверхностные заряды  $P$ . При достаточно длинном и тонком стержне эти заряды не влияют на внутреннюю часть стержня, так что можно предполагать, что внутри стержня  $\vec{e}$  равно  $E_0$ . В случае же пластинки внешнее поле ослаблено на величину  $4\pi P$ , так что внутри пластинки (схема б)  $\vec{e} = E_0 - 4\pi P$ . Условия электрической поляризации круглой пластинки потому менее благоприятны, что при этом внешнее поле ослабляется ее возникающей поляризацией.

Совершенно иначе обстоит дело в явлениях намагничения (рис. 28 с и d). Вихри вектора  $M$ , которые одни только и влияют на поле  $\vec{h}$ , находятся на боковых поверхностях круглой пластинки или стержня. В случае пластинки вихри вектора  $M$  не могут оказать заметного влияния на среднюю часть пластинки, если она достаточно тонка, так что в схеме d внешнее поле  $H_0$  не изменяется сколько-нибудь заметно, т. е.  $\vec{h} = H_0$ . В случае же металлического стержня (рис. 28с) влияние электрического тока в катушке усиливается поверхностным током, соответствующим с  $\text{rot } M$ , на величину  $4\pi M$ , т. е. теперь  $\vec{h} = H_0 + 4\pi M$ . Таким образом мы видим, что форма стержня при намагничении более выгодна из-за того, что в этом случае внешнее поле вследствие намагничения усиливается. Введя вектор  $N$ , определяемый обычным соотношением  $\vec{h} = B = H + 4\pi M$ , мы можем формально выразить полученный результат равенствами:  $N = H_0$  (для схемы 28с) и  $N = H_0 - 4\pi M$  (для схемы 28d). Но мы видим, что на самом деле внешнее поле проникает без изменений в исследуемую среду именно в схемах а и d. Исходя отсюда, мы получаем в случае электрического поля ослабление поля внутри данного вещества, если перейти к пластинке, а в случае намагничения — усиление поля при переходе к стержню.

## II. СТАТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

§ 22. Эффективное поле. Поляризация какого-либо тела в электрическом поле определяется как дипольный момент единицы объема. Мы требуем от теории, чтобы она предсказывала, как будет зависеть поляризация от поля  $E$ , полученного на опыте. Исходной точкой теории является представление о том, как ведет себя отдельная изолированная молекула вещества в заданном поле  $E$ . В следующих параграфах мы познакомимся с некоторыми математическими предложениями, служащими для рассмотрения этой проблемы. Для того чтобы вывести из них общее заключение о поведении всего тела, надо определить электрическую напряженность  $E'$ , действующую на отдельную молекулу внутри тела. Эта напряженность, вообще говоря, отличается от напряженности  $E$ , рассчитанной на основе условий опыта, так как необходимо принять еще во внимание влияние на рассматриваемую

мую молекулу всех прочих молекул, которые также поляризованы. На первый взгляд, можно было бы считать  $E'$  равным среднему полю  $\bar{e}$ , определенному в § 19; это дало бы в точности  $E' = E$ . Однако, при этом мы допустили бы две ошибки.

Во-первых, нас совершенно не интересует среднее значение  $\bar{e}$  в пространстве, а значение напряженности в точке расположения рассматриваемой молекулы. Кроме того,  $E'$  означает то поле, которое оказалось бы в месте расположения рассматриваемой молекулы, если представить, что эта последняя оттуда удалена, причем, однако, состояние окружающих молекул не изменилось. Из-за этих соображений представляется более целесообразным при определении  $E'$  непосредственно вычислить результирующее влияние всех присутствующих зарядов (не прибегая к прежнему методу усреднения).

Пусть некоторое вещество заполняет пространство между пластинами конденсатора, заряженного до разности потенциалов  $V$ . Обозначим поляризацию этого вещества через  $P$ . Тогда поверхностная плотность  $\sigma$  заряда на обкладках конденсатора (заряд на  $1 \text{ см}^2$ ) определяется равенством  $4\pi\sigma = \frac{V}{a} + 4\pi P$  или  $4\pi\sigma = E + 4\pi P$ . Построим теперь вокруг рассматриваемой молекулы сферу, радиус которой велик по сравнению с расстоянием между молекулами, и разложим искомую величину поля на три слагаемых:

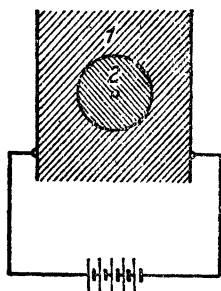


Рис. 29. Вычисление эффективного поля  $E'$ .

$$E' = E_0 + E_1 + E_2. \quad (22.1)$$

$E_0$  пусть представляет собой поле, вызываемое обкладками конденсатора:

$$E_0 = E + 4\pi P, \quad (22.2)$$

$E_1$  — поле, вызываемое молекулами, находящимися вне упомянутой сферы, и  $E_2$  — поле от всех молекул внутри сферы. Мы подчеркиваем, что эта сфера не должна пересекать ни одной молекулы, так что каждая отдельная молекула участвует как целое в создании полей  $E_1$  или  $E_2$ , в зависимости от того, где лежит ее центр: вне сферы или внутри ее. В этом заключается существенное различие между только что рассмотренной сферой и использованной в § 19 для определения средних значений  $\bar{e}$  и  $\bar{n}$ , так как последняя на самом деле строго геометрически пересекла все встречаемые ею молекулы. При вычислении  $E_1$  мы можем не считаться с молекулярной структурой вещества. Так как вещество мы считаем однородно поляризованным, то вся часть вещества, находящаяся вне сферы, действует на нашу молекулу как распространенный по поверхности всей этой части заряд с плотностью  $\sigma' = -P_n$  ( $n$  — внешняя нормаль). Такой поверхностью является, во-первых, поверхность, примыкающая к обкладкам конденсатора, которая дает составляющую поля  $-4\pi P$ ; к этому прибавляется действие нашей сферической поверхности с плотностью заряда  $\sigma' = P \cos \vartheta$ , где  $\vartheta$  — угол между положительным направлением поля и нормалью в рассматриваемой точке сферы. Такое



распределение зарядов вызывает внутри сферы однородное поле  $\frac{4\pi}{3}P$ . Тогда

$$E_1 = -4\pi P + \frac{4\pi}{3}P, \quad (22.3)$$

и, следовательно,

$$E_0 + E_1 = E + \frac{4\pi}{3}P.$$

Потенциал шара с радиусом  $R$ , заполненного зарядом с постоянной объемной плотностью  $\rho$ , в точках  $r < R$  равен  $\varphi_+ = \frac{2\pi}{3}\rho r^2 = \frac{2\pi}{3}\rho(x^2 + y^2 + z^2)$ . Этот результат можно легко получить на основании формулы для поля внутри однородно заряженного шара, приведенной выше при разборе томсоновой модели. Потенциал второго такого шара с плотностью заряда  $-\rho$  и с центром в точке  $x = y = 0, z = -\zeta$  будет:

$$\varphi_- = -\frac{2\pi}{3}\rho(x^2 + y^2 + (z + \zeta)^2).$$

Если представить себе, что оба шара существуют одновременно, то их заряды  $+\rho$  и  $-\rho$  компенсируются везде, где шары взаимно перекрываются. Только на поверхности (при малом  $\zeta$ ) остается заряд с поверхностной плотностью  $\sigma = \rho\zeta \cos \vartheta$ . Потенциал этих двух зарядов составляет вместе:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{4\pi}{3}\rho\zeta z \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\zeta}{z}\right).$$

В пределе, когда  $\rho \rightarrow \infty$  и  $\zeta \rightarrow 0$ , причем  $\rho\zeta \rightarrow \sigma_0$ , мы получаем:

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{4\pi}{3}\sigma_0.$$

Наконец, мы должны рассмотреть еще  $E_2$ , т. е. влияние молекул, расположенных внутри сферы.

В то время как значение суммы  $E_0 + E_1$  было нами вычислено совершенно строго, мы не можем определить  $E_2$  иначе, как сделав некоторые, в значительной мере ограничивающие предположения. Предположим сначала, что поле, вызываемое каждой молекулой в точке нахождения рассматриваемой нами молекулы, определяется вполне строго, как поле диполя. Расположенный в точке  $x, y, z$  диполь с моментом  $p$  вызывает в точке  $\xi, \eta, \zeta$  потенциал

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{p \cdot r}{r^3} = \frac{p_x(\xi - x) + p_y(\eta - y) + p_z(\zeta - z)}{r^3}.$$

Следовательно, в начале координат это поле равно

$$e_\xi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{\xi=\eta=\zeta=0} = -\frac{p_x}{r^3} + \frac{3}{r^5}(p_x x^2 + p_y xy + p_z xz).$$

Далее допустим, что все молекулы, находящиеся внутри рассматриваемой нами сферы, обладают одинаковым дипольным моментом. Представим себе, что молекулы перенумерованы посредством значков  $1, 2 \dots k \dots, n$ ,

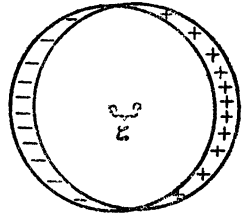


Рис. 30. Схематическое представление поверхностного заряда однородно-поляризованного шара при помощи двух разноименно заряженных и сдвинутых друг относительно друга сфер.

и обозначим координаты  $k$ -ой молекулы через  $x_k, y_k, z_k$ . Тогда  $x$ -овая компонента  $E_2$  равна сумме соответствующих значений  $e_z$ , т. е.

$$(E_2)_x = p_x \left( - \sum_k \frac{1}{r_k^3} + \sum_k \frac{3x_k^2}{r_k^5} \right) + 3p_y \sum_k \frac{x_k y_k}{r_k^5} + 3p_z \sum_k \frac{x_k z_k}{r_k^5}. \quad (22.4)$$

Входящие в это выражение суммы зависят только от пространственного расположения отдельных молекул.

Прежде всего покажем, что  $E_2$  точно равно нулю, если это расположение соответствует кристаллической решетке кубической системы. Если мы направим координатные оси по осям симметрии кристалла, то вследствие правильной симметрии совокупность точек  $x_k, y_k, z_k$ , заполняющих нашу сферу, перейдет в себя самое при повороте сферы на  $90^\circ$  вокруг любой из трех осей. Обозначив одним и двумя штрихами два положения, переходящие друг в друга при повороте сферы на  $90^\circ$  вокруг оси  $z$ , мы имеем до поворота

$$x'_k = x_k, \quad y'_k = y_k, \quad z'_k = z_k,$$

а после поворота

$$x''_k = y_k, \quad y''_k = -x_k, \quad z''_k = z_k. \quad (22.5)$$

Расстояния  $r_k$  молекул от начала координат не меняются при повороте. Кроме того, вследствие правильной симметрии, совокупность точек  $x'_k, \dots$  тождественна совокупности  $x''_k, \dots$ , так что, например,

$$\sum \frac{x_k'^2}{r_k^5} = \sum \frac{x_k''^2}{r_k^5} \quad \text{и} \quad \sum \frac{x_k' y_k'}{r_k^5} = \sum \frac{x_k'' y_k''}{r_k^5}. \quad (22.5a)$$

Пользуясь соотношениями (22.5) и учитывая еще вращение вокруг осей  $x$  и  $y$ , мы получаем:

$$\sum \frac{x_k^2}{r_k^5} = \sum \frac{y_k^2}{r_k^5} = \sum \frac{z_k^2}{r_k^5};$$

следовательно, после сложения всех трех выражений окажется, что

$$\sum \frac{x_k^2}{r_k^5} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{r_k^3}.$$

Кроме того,

$$\sum \frac{x_k y_k}{r_k^5} = 0,$$

так как эта сумма меняет при повороте свой знак на основании (22.5) и вместе с тем, на основании (22.5a), остается постоянной. Поэтому  $E_2$ , согласно уравнения (22.4), действительно равно нулю.

Определим теперь  $E_2$  в случае аморфного вещества с совершенно беспорядочным распределением отдельных диполей. Мы, конечно, не можем ничего сказать о значении  $E_2$  для каждой определенной молекулы, но среднее значение  $E_2$ , как легко можно понять, равно нулю. Ведь в изотропном теле несомненно должно быть в среднем

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{1}{3} \overline{r^2} \quad \text{и} \quad \overline{xy} = 0.$$

Для отдельных же молекул компоненты вектора  $E_2$  могут иметь то положительные, то отрицательные значения.

Итак, мы получили следующий результат: если взаимодействие молекул имеет характер взаимодействия точечных диполей, то эффективное поляризующее поле  $E'$ , действующее на отдельную молекулу, определяется равенством

$$E' = E + \frac{4\pi}{3} P, \quad (22.6)$$

где  $P$  — поляризация самого вещества. Это равенство вполне строго в случае правильных кристаллических решеток и в среднем справедливо для аморфных тел (газов, жидкостей). Но оно совершенно неприменимо к кристаллам с более низкой степенью симметрии, где, вообще говоря, даже и направление  $E'$  не будет совпадать с направлением  $E$ .

§ 23. Индуцированный дипольный момент. Диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  какого-либо вещества может быть легко определена в пределах справедливости формулы (22.6),

$$E' = E + \frac{4\pi}{3} P,$$

выведенной в предыдущем параграфе, если известна поляризуемость отдельных молекул. Ограничимся в этом параграфе рассмотрением молекул, не обладающих постоянным дипольным моментом. Будем определять поляризуемость при помощи характерной для соответствующих молекул постоянной  $\alpha$ , значение которой следует из формулы:

$$p = \alpha E' \quad (23.1)$$

( $p$  — дипольный момент молекулы). Если  $N$  — число молекул в  $1 \text{ см}^3$ , то для  $P = Np$  получаем уравнение:

$$P = N\alpha \left( E + \frac{4\pi}{3} P \right). \quad (23.2)$$

С другой стороны, восприимчивость  $\chi$  и диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  определяются равенствами:

$$P = \chi E \quad (22.3)$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi. \quad (23.4)$$

Следовательно, для вычисления поляризуемости отдельных молекул по измеренным значениям  $\chi$  или  $\epsilon$ , мы получаем, в силу уравнения (23.2), следующие два равенства:

$$N\alpha = \frac{\chi}{1 + \frac{4\pi}{3}\chi}; \quad \frac{4\pi}{3} N\alpha = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}. \quad (23.5)$$

Если  $d$  — плотность вещества,  $M$  — его молекулярный вес и  $N$  — число Авогадро, то  $\frac{M}{N}$  есть масса отдельной молекулы, а  $N' \frac{M}{N} = d$

— масса 1 см<sup>3</sup> вещества. Отсюда следует, что мы можем написать последнюю формулу в виде

$$\frac{M}{d} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha = P, \quad (23.6)$$

в каком она обычно и находит себе практическое применение в физической химии. Впрочем, вместо диэлектрической постоянной чаще всего измеряется показатель преломления  $n$  и отсюда определяется молярная рефракция:

$$\frac{M}{d} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = P. \quad (23.7)$$

Согласно уравнению (23.6), величина  $\frac{M}{d} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$  не должна зависеть от плотности  $d$  и, если не считать множителя  $\frac{4\pi}{3}$ , должна быть равна молярной поляризуемости. Многочисленные опыты, проведенные над газами, показали, что величина  $\frac{1}{d} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$  действительно остается постоянной вплоть до давлений в несколько сот атмосфер.

Значения молярной поляризуемости, полученные на основании таких опытов, позволяют непосредственно определить поляризуемость  $\alpha$  отдельных атомов. Последнюю тогда можно сравнить с величиной поляризуемости, вычисленной на основании какой-нибудь модели атома. Рассматривая значения  $\alpha$ , теоретически вычисленные в различное время на основании различных представлений об атоме, мы приходим к замечательному результату: если  $\alpha$  означает радиус молекулы, представляемой в виде шара, то все теоретические значения  $\alpha$  дают

$$\alpha \approx a^3, \quad (23.8)$$

т. е. поляризуемость, с точностью до некоторого постоянного множителя, близкого к 1, равна третьей степени радиуса молекулы. Следовательно, принимая во внимание, что  $\frac{4\pi}{3} a^3$  есть объем отдельной молекулы, мы можем приближенно написать:

$$P = N \frac{4\pi}{3} \alpha = \Omega, \quad (23.9)$$

где  $\Omega$  — полный объем всех молекул, заключающихся в 1 грамм-молекуле.

Перечислим в хронологической последовательности ряд моделей атома, приводящих к соотношению (23.8) для поляризуемости.

а) Еще задолго до возникновения электронной теории, Мосотти (Mosotti) предложил описывать диэлектрические свойства атомов в том предположении, что каждый отдельный атом ведет себя как идеально проводящий шар. Дипольный момент, возникающий в таком шаре под действием внешнего поля, составляет  $p = Ea^3$  (см. том I, § 29, стр. 69).

Следовательно, соотношение (23.8) в этом случае выполняется в точности.

б) В модели Томсона (точечный электрон в однородном положительно заряженном шаре) квазиупругая сила при элонгации  $r$ , согласно § 13, равна  $-\frac{e^2 r}{a^3}$ . Следовательно, при наличии внешнего поля  $E$  равновесие наступает, когда

$$\frac{e^2 r}{a^3} = eE.$$

При этом дипольный момент равен

$$p = er = Ea^3,$$

так что соотношение (23.8) соблюдается и в этом случае точно.

в) Подобным же образом ведет себя также модель атома Бора (в своей простейшей форме). Пусть, например, электрон вращается вокруг ядра по круговой орбите радиуса  $r$  с угловой скоростью  $\omega$ . Под действием внешнего поля, направленного нормально к плоскости орбиты электрона, ядро несколько выступит из этой плоскости. Если мы обозначим величину смещения ядра через  $s$ , то индуцированный дипольный момент, очевидно, будет равен  $es$ . Величину этого момента мы легко определим, рассматривая действующие на электрон силы. До включения поля притяжение ядра просто равно центробежной силе, т. е.

$$\frac{e^2}{r^2} = m r \omega^2. \quad (23.10a)$$

После включения  $E$  действует еще сила  $eE$ , нормальная к плоскости орбиты. Теперь результирующая центробежной силы и силы  $eE$  должна пройти через ядро; это дает, согласно рис. 31,

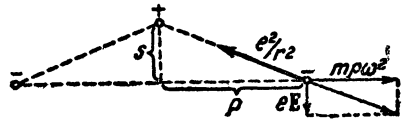


Рис. 31. Поляризация боровской модели атома водорода.

$$\frac{eE}{m r \omega^2} = \frac{s}{r} \quad \text{или} \quad es = E \frac{e^2}{m \omega^2}. \quad (23.10b)$$

Однако, согласно (23.10a),  $\frac{e^2}{m \omega^2} = r^3$ , т. е. снова получаем:

$$p = es = Er^3.$$

(Необходимо заметить, что этот вывод верен лишь в том случае, когда внешнее поле нормально к плоскости орбиты электрона).

г) Квантовая механика, выводов которой мы не можем здесь рассматривать, также приводит, с точностью до коэффициента порядка 1, к соотношению (23.8).

Определяемая равенствами (23.8) и (23.9) связь между поляризуемостью и молекулярным объемом позволяет опытным путем проверить связь поляризуемости с другими величинами, которые также зависят от объема молекул. Напомним только о двух величинах, встречающихся в теории теплоты. Первая из них — постоянная  $b$  в уравнении ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT;$$

согласно кинетической теории газов,

$$b = 4 \Omega,$$

где  $\Omega$ , как и раньше, — объем, действительно занимаемый молекулами одной грамм-молекулы газа. Вторая такая величина — длина свободного пути  $l$  в газе, содержащем в  $1 \text{ см}^3$   $N'$  молекул радиуса  $a$ , — дается равенством:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} N' \pi a^2}.$$

Постоянная ван-дер-Ваальса  $b$  определяется экспериментально из критической температуры и критического давления, а длина свободного пробега  $l$  — из теплопроводности и внутреннего трения. На основании измерений  $b$  и  $l$  можно получить величину молярного собственного объема

$$\Omega = N' \frac{4\pi}{3} a^3.$$

Для очень многих газов все три метода (электрическая поляризация, внутреннее трение, уравнение ван-дер-Ваальса) дают очень близкие друг к другу значения  $\Omega$ .

Однако, существуют некоторые вещества, для которых совершенно не соблюдается соотношение (23.9) между  $P$  и  $\Omega$ , причем поляризуемость этих веществ, как правило, значительно больше, чем следует ожидать на основании термических измерений молярного объема. Так, например, для  $\text{NH}_3$  и  $\text{H}_2\text{S}$  имеем:

	$\Omega$	$P$
$\text{NH}_3$	8,8	57
$\text{H}_2\text{S}$	7,9	30

Кроме того, наблюдается, что поляризуемость таких газов сильно зависит от температуры, а именно, что при увеличении температуры поляризуемость всегда уменьшается. Мы покажем в следующем параграфе, что здесь поляризуемость имеет совершенно иной характер: здесь мы имеем молекулы, которые обладают постоянным дипольным моментом (типа молекулы  $\text{HCl}$ ); поляризация таких веществ заключается не в индуцировании дипольного момента молекул, а в том, что приложенное поле должно лишь ориентировать уже существующие диполи, перевешивая дезориентирующее действие теплового движения. Уже отсюда можно заключить, что поляризуемость таких газов, во-первых, не может иметь ничего общего с объемом  $\Omega$  и, во-вторых, должна уменьшаться при повышении температуры.

§ 24. Молекулы с постоянным дипольным моментом. Молекулы с постоянным дипольным моментом  $p$  при полном отсутствии теплового движения могли бы быть полностью ориентированы сколь угодно малым внешним полем; это приводило бы к чрезвычайно большим значениям диэлектрической постоянной. Конечная величина этой постоянной опреде-

дается в первую очередь тем, что ориентирующее действие поля частично компенсируется влиянием теплового движения. (Типичным примером таких молекул являются ионные соединения типа  $\text{HCl}$ , в которых связь осуществляется электростатическим притяжением положительного иона  $\text{H}^+$  и отрицательного иона  $\text{Cl}^-$ .) В предыдущем параграфе при вычислении поляризуемости можно было ограничиться, главным образом, рассмотрением отдельных молекул. В данном же случае нам придется иметь дело с статистической задачей.

Поляризация отдельной молекулы, дипольный момент которой образуется с направлением поля угол  $\vartheta$ , очевидно равна  $p \cos \vartheta$ . Если в  $1 \text{ см}^3$  находится  $N$  молекул, то компонента вектора поляризации в направлении поля будет

$$p(\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 + \dots + \cos \vartheta_N) = Np \overline{\cos \vartheta}.$$

Очевидно, при отсутствии внешнего поля  $\overline{\cos \vartheta} = 0$ . Для описания действия поля  $E'$  рассмотрим в данном поле потенциальную энергию  $V(\vartheta)$  нашего диполя, определяемую соотношением

$$V(\vartheta) = -E'p \cos \vartheta. \quad (24.1)$$

Проще всего можно убедиться в правильности этой формулы, если представить  $p$  в виде  $p = le$  ( $l$  — расстояние между зарядами  $+e$  и  $-e$ ). Потенциал поля  $E'$ , которое направлено по оси  $z$ , есть  $-E'z$ , откуда потенциальная энергия нашего диполя будет

$$V(\vartheta) = eE'(-z_1 + z_2) = -eE'l \cos \vartheta,$$

что совпадает с выражением, приведенным выше. Далее, для обусловленного полем  $E'$  момента сил, действующих на диполь, получается выражение

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = E'p \sin \vartheta.$$

Статистическая механика дает следующее правило для вычисления вероятностей: вероятности двух состояний (1) и (2), равновероятных при  $E' = 0$ , а следовательно и при  $V = 0$ , при включении поля принимают неравные между собой значения  $W_1$  и  $W_2$ , а именно, отношение этих вероятностей составляет:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{e^{-\frac{V_1}{kT}}}{e^{-\frac{V_2}{kT}}}, \quad (24.2)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  представляют потенциальные энергии двух указанных состояний в поле  $E'$ . В этой формуле  $k$  — постоянная Больцмана ( $k = 1,378 \cdot 10^{-16}$  эрг·град $^{-1}$ ), а  $T$  — абсолютная температура.

Простейшее применение этого соотношения представляет барометрическая формула: в этом случае  $V = mgh$  ( $m$  — масса,  $g$  — ускорение силы тяжести

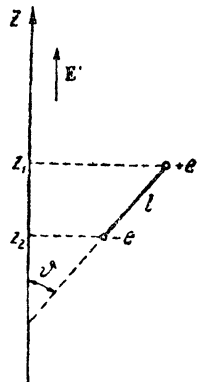


Рис. 32. Диполь  $el$  в поле  $E'$ .

$h$  — высота над нулевым уровнем); все значения  $h$  здесь а priori равновероятны. Для высот  $h_1$  и  $h_2$  отношение числа частиц в единице объема равно

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{mg(h_1 - h_2)}{kT}}$$

В нашем случае вращающегося диполя все направления  $p$  (т. е. все точки сферы единичного радиуса, с помощью которой мы изображаем направления  $p$  при  $E' = 0$ ) а priori равновероятны. Введем полярные координаты  $\vartheta$  и  $\varphi$  и обозначим элемент поверхности нашей сферы через  $d\Omega = \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$ , а потенциальную энергию, соответствующую этому направлению, через  $V$ ; тогда равенство

$$W d\Omega = \text{const} \cdot e^{-\frac{V(\vartheta)}{kT}} d\Omega$$

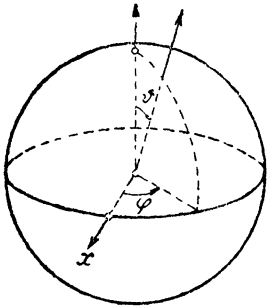


Рис. 33. Ориентировка вращающегося диполя.

будет выражать вероятность того, что некоторый произвольно выбранный диполь ориентирован в направлении  $d\Omega$ . Постоянный коэффициент (const) мы найдем из условия  $\int_{\text{сфера}} W d\Omega = 1$ , так как вероятность того, что диполь вообще примет какое-нибудь направление, несомненно равна 1. Итак,

$$W d\Omega = \frac{e^{-\frac{V(\vartheta)}{kT}} d\Omega}{\int_{\text{сфера}} e^{-\frac{V(\vartheta)}{kT}} d\Omega} \quad (24.3)$$

Если мы имеем  $N'$  диполей в  $1 \text{ см}^3$ , то  $N'W d\Omega$  представляет число диполей, направления которых заключены в телесном угле  $d\Omega$ . Искомое среднее значение  $\overline{\cos \vartheta}$  будет:

$$\overline{\cos \vartheta} = \int_{\text{сфера}} \cos \vartheta W d\Omega, \quad (24.4)$$

или, при подстановке сюда указанных выше значений  $W$  и  $d\Omega$ ,

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \cos \vartheta e^{-\frac{E'p \cos \vartheta}{kT}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} e^{-\frac{E'p \cos \vartheta}{kT}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi} \quad (24.4a)$$

Интегрирование по  $\varphi$  дает в числителе и знаменателе множители  $2\pi$ . Введя сокращенные обозначения

$$\frac{E'p}{kT} = a \text{ и } \cos \vartheta = z,$$



получаем:

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{\int_{-1}^{+1} z e^{az} dz}{\int_{-1}^{+1} e^{az} dz}.$$

Здесь можно не производить интегрирования в числителе, так как числитель может быть получен из знаменателя дифференцированием по  $a$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \overline{\cos \vartheta} &= \frac{d}{da} \log \int_{-1}^{+1} e^{az} dz = \frac{d}{da} \log \left( \frac{e^a - e^{-a}}{a} \right) = \\ &= -\frac{1}{a} + \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} = L(a); \quad \left( a = \frac{E'p}{kT} \right). \end{aligned} \quad (24.5)$$

Полученная здесь функция  $L(a)$  была впервые введена Ланжевром (Langevin) при аналогичном исследовании парамагнетизма (см. § 30); поэтому ее и называют функцией Ланжевена. График ее приведен на рис. 34. При  $a \gg 1$ , т. е. при  $E'p \gg kT$ , мы получаем насыщение:

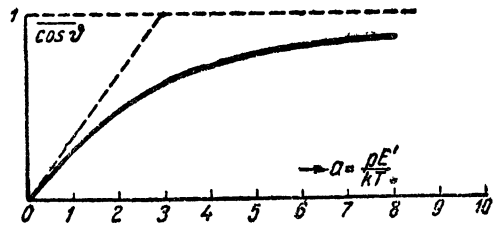


Рис. 34. График функции Ланжевена  $L(a)$ .

$$\overline{\cos \vartheta} \approx 1 - \frac{1}{a}. \quad (24.6)$$

Особенно интересующий нас случай малых значений  $a$  получается при непосредственном разложении формулы (24.5) в ряд:

$$\overline{(\cos \vartheta)}_{a \rightarrow 0} = -\frac{1}{a} + \frac{2 \left( 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} + \dots \right)}{2 \left( a + \frac{a^3}{6} + \frac{a^5}{120} + \dots \right)} = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \dots \quad (24.7)$$

Следовательно, поляризация будет пропорциональна полю только в области  $a \ll 1$ . В этом случае для среднего дипольного момента в направлении поля  $E'$  мы получаем:

$$\overline{p \cos \vartheta} = \frac{1}{3} \frac{p^2}{kT} E'. \quad (24.8)$$

Легко убедиться в том, что во всех практически встречающихся случаях условие  $a \ll 1$  действительно удовлетворяется. Порядок величины  $p$  (как мы сейчас еще подтвердим) всегда равен элементарному заряду  $e$ ,

умноженному на размеры атома, т. е.  $p \approx e \cdot 10^{-8}$ . Для того чтобы  $a$  равнялась 1, должно быть:

$$E' = \frac{kT}{p} \cdot 300 \text{ В/см},$$

т. е.

$$E' = \frac{kT}{e} \cdot 3 \cdot 10^{10} = T \cdot \frac{1,37 \cdot 10^{-16}}{4,77 \cdot 10^{-10}} \cdot 3 \cdot 10^{10} \approx T \cdot 10^4 \text{ В/см}.$$

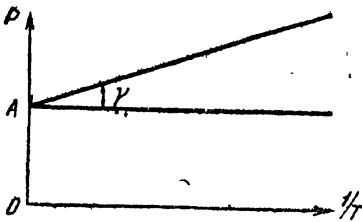


Рис. 35. Температурная зависимость поляризуемости дипольного газа.

При температуре  $T = 100^\circ$   $a$  принимает значение 1 в поле  $E' = 10^6 \text{ В/см}$ . Следовательно, на практике почти невозможно выйти за пределы пригодности формулы

$$\overline{\cos \theta} = \frac{a}{3} = \frac{1}{3} \frac{E' p}{kT}.$$

Необходимо особенно отметить, что полученный нами результат (24.8) полностью, включая и численный множитель  $\frac{1}{3}$ , остается справедливым и в

квантовой механике. В этом существенное отличие формулы (24.8) от выводов вполне аналогичной, в рамках классической физики, теории парамагнетизма (§ 30), для которой, по квантовой теории, коэффициент  $\frac{1}{3}$  заменяется выражением  $\frac{1+j}{3j}$ , зависящим от строения атома.

Если молекула помимо этого может быть поляризована еще и в том смысле, как было описано в предыдущем параграфе, то к эффекту ориентации (24.8) прибавляется еще момент  $\alpha_0 E'$ ; экспериментально будет наблюдаться общая поляризуемость  $\alpha_0 + \frac{1}{3} \frac{p^2}{kT}$ . Тогда для молярной поляризуемости  $P$  получим:

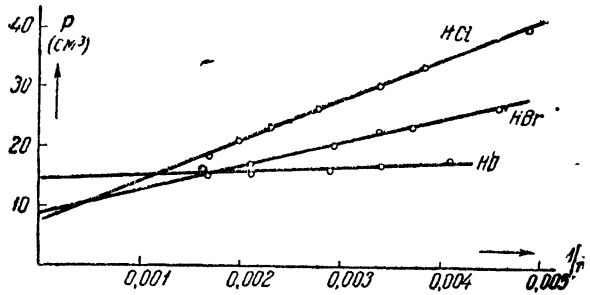


Рис. 36. Молярная поляризуемость галоидоводородных соединений. Постоянный дипольный момент больше всего у HCl. (Дебай и „Полярные молекулы“).

$$P = \frac{4\pi}{3} N \left( \alpha_0 + \frac{p^2}{3kT} \right). \quad (24.9)$$

Установив экспериментально зависимость  $P$  от температуры, мы можем на основании этой формулы определить как поляризацию  $\alpha_0$ , так и постоянный дипольный момент  $p$ . Если на графике изобразить  $P$  как

функцию величины  $\frac{1}{T}$ , то мы получим прямую, отсекающую от оси ординат отрезок  $OA = \frac{4\pi}{3} N\alpha_0$ . Угол наклона  $\gamma$  этой прямой к оси абсцисс определяется из соотношения

$$\text{tg } \gamma = \frac{4\pi}{3} N \frac{p^2}{3k}.$$

Для примера на рис. 36 приведены экспериментальные кривые для галоидоводородных кислот HCl, HBr и HI; на основании этих кривых можно непосредственно заключить следующее: поляризуемость  $\alpha_0$  иона  $J^-$  больше, чем  $\text{Br}^-$  и  $\text{Cl}^-$ , а дипольный момент у HI меньше, чем у HCl и HBr. Обе эти причины обуславливают характерное пересечение всех трех прямых. Дипольные моменты у всех трех веществ могут быть определены из наклона соответствующих кривых, причем получаются следующие значения:

HCl	HBr	HI
$p = 1,03 \cdot 10^{-18}$	$0,78 \cdot 10^{-18}$	$0,38 \cdot 10^{-18}$

Другой пример представлен на рис. 37, где приведены соответствующие кривые для хлорных производных метана  $\text{CH}_4$ ,  $\text{CH}_3\text{Cl}$ ,  $\text{CH}_2\text{Cl}_2$ ,  $\text{CHCl}_3$ ,  $\text{CCl}_4$ .

Мы видим, что  $\text{CH}_4$  и  $\text{CCl}_4$  не обладают дипольным моментом, что и следовало ожидать из соображений симметрии.

Второй метод определения дипольного момента  $p$  из уравнения (24.9) состоит в сравнении поляризуемости, измеренной статически, с поляризуемостью, найденной при помощи оптических методов (молярная рефракция). Вращательные движения молекул происходят очень медленно по сравнению с быстрыми колебаниями электрического поля световой волны, так что ориентация молекул не в состоянии следовать за этими колебаниями, и поэтому доступным наблюдению является только первый член  $P = \frac{4\pi}{3} N\alpha_0$ . Например, для аммиака из статических измерений получается значение  $P = 57,6 \text{ см}^3$ ; в то же время на основании коэффициента преломления аммиака для линии D ( $n = 1,000379$ ) следует:

$$P_0 = \frac{n^2 - 1}{3} \cdot \frac{M}{d} = \frac{0,00076}{3} \cdot 22400 = 5,7 \text{ см}^3.$$

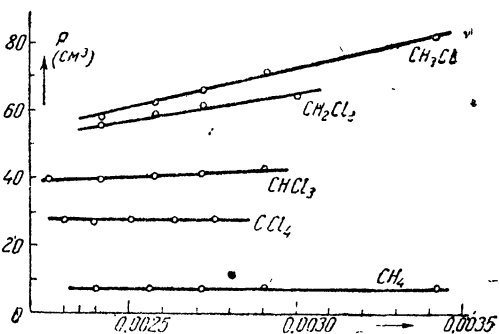


Рис. 37. Поляризуемость хлорных производных метана. Четыреххлористый углерод ( $\text{CCl}_4$ ) и метан ( $\text{CH}_4$ ) не имеют постоянного дипольного момента (Дебай „Полярные молекулы“).

Если разность значений  $P$  обуславливается исключительно эффектом ориентации, то мы можем написать:

$$\frac{4\pi}{9} N \frac{p^2}{kT} = P - P_0 = 51,9$$

или

$$p = 1,56 \cdot 10^{-18}.$$

Впрочем, этот способ определения  $p$  требует более точного изучения влияния колебаний, которые могут совершать друг относительно друга различные атомы внутри молекул: ведь надо учитывать возможность изменения расстояния между связанными в молекулу ионами под влиянием внешнего электрического поля. Но мы не будем здесь касаться этого вопроса подробнее.

### III. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ В БЫСТРОПЕРЕМЕННЫХ ПОЛЯХ. ДИСПЕРСИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ

§ 25. Дисперсия в прозрачной области. Для описания электромагнитных явлений в изоляторах теория Максвелла дает уравнения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0.$$

Из этих уравнений следует основной закон Максвелла для коэффициента преломления в случае плоской волны (см. том I, § 62):

$$n = \sqrt{\epsilon} \quad (25.1)$$

Известно, что этот закон удовлетворяется только в предельном случае очень больших длин волн, так как статическое и динамическое значение диэлектрической постоянной совпадают только при достаточно медленных колебаниях.

Для более точного рассмотрения процесса распространения волн мы должны разложить вектор электрического смещения  $\mathbf{D}$  на его составные части  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ , имеющие различное физическое значение, и найти связь между  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  на основании каких-либо представлений о свойствах отдельного атома. Связь между вектором  $\mathbf{P}$  и поляризацией отдельных молекул дается равенством

$$\mathbf{P} = N' \mathbf{p},$$

где  $N'$  — число молекул в  $1 \text{ см}^3$ , а  $\mathbf{p}$  — дипольный момент отдельной молекулы. Сделаем особое предположение, а именно, что поляризация возникает в результате смещения упруго-связанных электронов. Рассмотрим сперва электроны с определенной собственной частотой  $\omega_0$ , уравнения движения которых при действии внешнего поля мы уже подробно разобрали в § 15. Если  $\mathfrak{N}^1$ ) есть число этих элек-

1) В теорию дисперсии это обозначение ввел Д р у д е;  $\mathfrak{N}$  — не вектор.

тронов в  $1 \text{ см}^3$  и  $\mathbf{r}$  — вектор их смещения, то поляризация определяется равенством:

$$\mathbf{P} = \mathfrak{N} \mathbf{e} \mathbf{r}. \quad (25.2)$$

В § 15 мы уже нашли связь между смещением  $\mathbf{r}$  и напряженностью поля  $\mathbf{E}'$  в точке, в которой находится изучаемая молекула. Там мы имели:

$$\mathbf{r} = \frac{e}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \mathbf{E}'; \quad e \mathbf{r} = \alpha \mathbf{E}', \quad (25.3)$$

где для упрощения введен коэффициент пропорциональности

$$\alpha = \frac{e^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (25.4)$$

Если известно значение  $\alpha$ , то мы можем вычислить и диэлектрическую постоянную вещества. Для разреженного газа, в котором эффективное поле совпадает с  $\mathbf{E}$ , мы можем написать:

$$\mathbf{P} = \mathfrak{N} \alpha \mathbf{E},$$

и, следовательно,

$$\epsilon = 1 + 4\pi \mathfrak{N} \alpha = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{\mathfrak{N}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (25.5)$$

В плотных же средах, согласно § 22, эффективное поле  $\mathbf{E}'$  дается равенством

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P} = \mathfrak{N} \alpha \mathbf{E}' = \mathfrak{N} \alpha \left( \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right),$$

или

$$\mathbf{P} \left( 1 - \frac{4\pi}{3} \mathfrak{N} \alpha \right) = \mathfrak{N} \alpha \mathbf{E}.$$

С другой стороны, диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  удовлетворяет соотношению  $\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}$ , так что путем сравнения мы получаем:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \mathfrak{N} \alpha,$$

и, следовательно,

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{\mathfrak{N}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega - \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{m} \mathfrak{N}}. \quad (25.6)$$

Последняя формула отличается от (25.5) только дополнительным членом  $-\frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{m} \mathfrak{N}$  в знаменателе и переходит в (25.5) при  $\frac{e^2}{m} \mathfrak{N} \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$ , т. е. при  $\epsilon$  мало отличающемся от единицы. Впрочем, если мы напишем  $\omega_0^2 - \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{m} \mathfrak{N} = \omega_1^2$ , то получим, вместо (25.6), формулу, аналогич-

ную (25.5) и отличающуюся от нее только тем, что на месте  $\omega_0$  здесь стоит  $\omega_1$  (смещение линии). Мы будем вести в дальнейшем вычисления только по формуле (25.5), так как поправки, появляющиеся из-за большей плотности, можно учесть способом, который нами только что указан.

Если подставить найденное таким путем значение диэлектрической постоянной в уравнении поля, то последние примут вид, знакомый нам из теории Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\epsilon}{c} \dot{\mathbf{E}}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25.7)$$

Но следует иметь в виду, что это совпадение — чисто формального характера, так как наши уравнения (25.5) и (25.6) для  $\epsilon$  содержат частоту световой волны  $\omega$ , т. е. имеют смысл только для периодических процессов и именно этой определенной частоты. Кроме того, следует иметь в виду, что диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  теперь является комплексной величиной, так как мы предположили, что зависимость световой волны от времени выражается функцией  $e^{i\omega t}$ . Все же, учитывая все эти обстоятельства, мы можем с формальной стороны производить с уравнениями (25.7) такие же операции, какие производятся в теории Максвелла. Поэтому мы попробуем удовлетворить этим уравнениям при помощи линейно-поляризованной плоской волны, определяемой соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} E_y &= ae^{i\omega(t - \frac{n'x}{c})}, & E_x &= E_z = 0, \\ H_z &= be^{i\omega(t - \frac{n'x}{c})}, & H_x &= H_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (25.8)$$

Подставляя это в уравнения (25.7), мы получим:

$$\begin{aligned} n'b &= \epsilon a, \\ n'a &= b. \end{aligned}$$

Отсюда для комплексного показателя преломления  $n'$  и для отношения амплитуд  $a$  и  $b$  мы получаем:

$$\begin{aligned} n'^2 &= \epsilon = 1 + \frac{4\pi\mathfrak{R}e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}, & (25.9) \\ b &= n'a. \end{aligned}$$

Если мы еще положим, введя вещественные числа  $n$  и  $k$ ,

$$n' = n - ik \quad (25.10)$$

или

$$n' = \sqrt{n^2 + k^2} e^{-i\psi}, \quad (25.10a)$$

где  $\psi$  — фазовый угол и

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k}{n},$$

то вещественная часть нашего решения будет

$$E_y = ae^{-\frac{\omega k}{c}x} \cos \omega \left( t - \frac{nx}{c} \right),$$

$$H_z = a \sqrt{n^2 + k^2} e^{-\frac{\omega k x}{c}} \cos \left( \omega \left( t - \frac{nx}{c} \right) - \psi \right). \quad (25.11)$$

Это уравнение определяет смысл постоянных  $n$  и  $k$ ;  $n$  обозначает вещественный показатель преломления, так как, согласно уравнениям (25.11), наша волна распространяется с фазовой скоростью  $\frac{c}{n}$ . При этом из-за отсутствия числа  $k$ , называемого коэффициентом экстинкции, волна при распространении постепенно ослабляется. Численное значение коэффициента  $k$  определяется тем, что амплитуда колебаний уменьшается в  $e^{-2\pi k}$  раз на расстоянии одной длины волны  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ , отнесенной к вакууму. Амплитуда магнитного поля в  $\sqrt{n^2 + k^2}$  раз больше амплитуды электрического поля, и, кроме того, магнитное поле отстает от электрического по фазе на угол  $\psi$ .

Чтобы определить в отдельности обе важные постоянные  $n$  и  $k$  из комплексного уравнения (25.9), надо отделить в нем мнимую часть от вещественной. Принимая во внимание значение  $n'$  из (25.10), мы получаем:

$$n^2 - k^2 = 1 + \frac{4\pi \mathfrak{N} e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},$$

$$2nk = \frac{4\pi \mathfrak{N} e^2}{m} \frac{\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (25.12)$$

Из того, что, согласно (25.12), произведение  $nk$  всегда положительно, следует, что постоянные  $n$  и  $k$  имеют одинаковые знаки. Это имеет тот смысл, что ослабление интенсивности всегда имеет место в направлении распространения волны.

Определим прежде всего ход коэффициента преломления  $n$  в прозрачной области, т. е. в той области колебаний, для которой  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \gg \gamma^2 \omega^2$ . В этой области мы можем положить  $k \approx 0$ ; тогда получаем формулу дисперсии:

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi \mathfrak{N} e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (25.13)$$

Если имеется несколько сортов упруго связанных электронов, например

$$\left. \begin{array}{llll} \mathfrak{N}_1 & \text{электронов с частотой собственных колебаний } \omega_1, \\ \mathfrak{N}_2 & \text{'' '' '' '' } \omega_2, \\ \mathfrak{N}_3 & \text{'' '' '' '' } \omega_3 \end{array} \right\}$$

и т. д., то для дисперсии имеем формулу:

$$n^2 = 1 + \sum_r \frac{4\pi e^2}{m} \frac{\mathfrak{N}_r}{\omega_r^2 - \omega^2}. \quad (25.14)$$

Если, кроме того,  $n - 1 \ll 1$ , как это, например, имеет место в не слишком сильно сжатых газах, то

$$n = 1 + \sum_r \frac{2\pi e^2}{m} \frac{\mathfrak{N}_r}{\omega_r^2 - \omega^2}. \quad (25.15)$$

Рассмотрим на рис. 38 общий ход кривой дисперсии. Прежде всего мы замечаем, что во всей прозрачной области коэффициент преломления растет с увеличением частоты. Для очень малых частот, т. е. частот малых по сравнению с наименьшими собственными частотами атома, мы имеем статическое значение показателя преломления по Максвеллу:

$$n = 1 + \sum_r \frac{2\pi e^2 \mathfrak{N}_r}{m\omega_r^2}.$$

При приближении к первой линии поглощения значение показателя преломления быстро растет, а затем, непосредственно за линией поглощения, снова начинает расти от весьма малых значений.

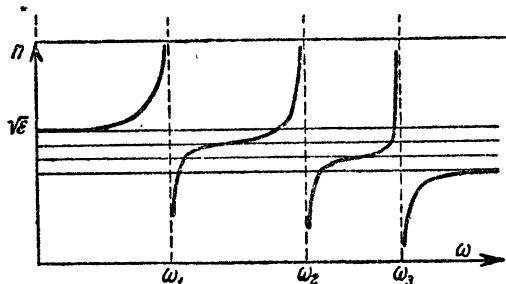


Рис. 38. Зависимость показателя преломления от частоты (дисперсионная кривая) для вещества с тремя линиями поглощения  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ .

Когда, наконец, частота падающего света делается больше максимальной собственной частоты атома, коэффициент преломления остается меньше 1, так как все слагаемые принимают отрицательные значения. Следовательно, для такого коротковолнового излучения наше вещество оптически менее плотно, чем вакуум, и при падении такого излучения на поверхность тела должно наблюдаться явление полного отражения. Это явление действительно наблюдается в случае рентгеновых лучей (В. П. Линник). Если перейти к предельному случаю весьма жестких рентгеновых лучей, таких, чтобы собственные частоты атомов были исчезающе малыми по сравнению с частотой падающей волны, то можно вообще отбросить  $\omega_r$  в формуле (25.15). Тогда мы получим для коэффициента преломления формулу:

$$n = 1 - \frac{2\pi e^2}{m\omega^2} \sum_r \mathfrak{N}_r. \quad (25.16)$$

Следовательно, для столь жестких рентгеновых лучей характер связи электрона в атоме не играет больше никакой роли. В этом случае имеет значение только общее число имеющихся электронов.

*Дисперсионная формула квантовой теории.* Выведенная выше дисперсионная формула (25.15) классической электронной теории с большой точностью описывает фактически наблюдаемый ход показателя преломления вблизи отдельных линий поглощения  $\omega_r$ , но лишь в том случае, если рассматривать числа  $\mathfrak{N}_r$  соответствующих этим линиям „дисперсионных электронов“, как



имеющиеся в нашем распоряжении константы, которые могут быть найдены из опыта. Для  $\mathfrak{N}_r$  при этом получаются числа, которые в общем меньше, чем число атомов  $N'$  в  $1 \text{ см}^3$ . С другой стороны, в пределах применимости формулы (25.15) разность  $n - 1$  всегда пропорциональна  $N'$ , так что имеется возможность характеризовать оптические свойства атомов некоторыми числами  $f_r$ , которые определяются из равенства

$$\mathfrak{N}_r = N f_r. \quad (25.17)$$

Тогда формула (25.15) принимает вид:

$$n - 1 = N \sum_r \frac{2 \pi e^2}{m} \frac{f_r}{\omega_r^2 - \omega^2}. \quad (25.18)$$

С момента открытия модели атома Бора мы знаем, что уже один электрон может вызывать чрезвычайно большое число линий поглощения. В качестве примера можно привести спектр поглощения атома водорода (ультрафиолетовая серия Лаймана) или же спектр поглощения атома лития, начинающийся с известной желтой линии  $D$  главной серии. Частота  $\nu_{r0}$  отдельной линии определяется боровским условием частот  $h\nu_{r0} = E_r - E_0$ . Общее число имеющихся в наличии дисперсионных электронов в обоих упомянутых случаях равно  $N'$ , т. е. по одному электрону на атом. Но этот единственный электрон может совершать различные переходы с уровня  $E_0$  на уровни  $E_1, E_2, E_3, \dots$ , поглощая при этом частоты

$$\omega_r = 2\pi \frac{E_r - E_0}{h}.$$

Очевидно, уже не имеет смысла говорить о различных сортах электронов  $N'_r$ . Скорее мы должны толковать уравнение (25.18) в том смысле, что  $N'$  представляет число атомов в  $1 \text{ см}^3$  вещества, а  $f_r$  дает „интенсивность“ одного из абсорбционных переходов  $E_0 \rightarrow E_r$ .

Точное определение чисел  $f_r$ , характеризующих отдельные переходы, составляет задачу квантовой механики, которой мы здесь не можем касаться. Впоследствии (к § 70) мы вкратце вернемся к связи величин  $f_r$  с коэффициентами  $A$  и  $B$  эйнштейновской теории равновесного излучения. Тем не менее мы можем уже сейчас в виде предположения указать на одно важное свойство величин  $f_r$ . Согласно (25.16), в области весьма малых длин волн специальный характер модели атома вообще не имеет значения, так как в формулу входит лишь общее число  $\sum_r \mathfrak{N}_r$  всех электронов. Если предположить, что в этом предельном случае формулы классической и квантовой теорий совпадают, то для случая только одного излучающего электрона мы приходим к равенству:

$$\sum_r \mathfrak{N}_r = N'$$

или, вследствие (25.17),

$$\sum_r f_r = 1. \quad (25.19)$$

Последнее равенство действительно подтверждается на опыте и сыграло важную роль в развитии квантовой теории.<sup>1)</sup>

Укажем еще, что дисперсионная формула (25.18) квантовой теории является не вполне строгой в двух отношениях. Во-первых, известно, что к области линейного спектра поглощения примыкает, с коротковолновой стороны, область непрерывного поглощения, что следовало бы учесть добавленным к сумме (25.18) еще некоторого интеграла по этой области. Однако обусловленная таким интегралом поправка к величине  $n - 1$  обычно весьма незначительна. Во-вторых, формула (25.18) справедлива только тогда, когда атомы, влияющие на дисперсию, находятся в невозбужденном состоянии, т. е.

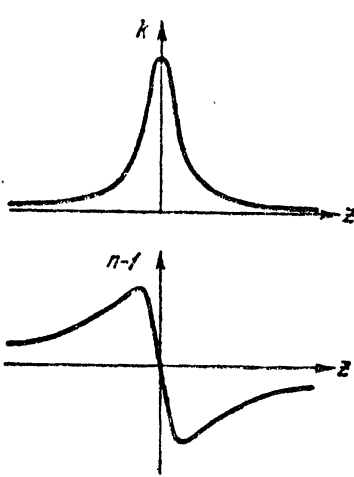
<sup>1)</sup> См. примечание в конце книги.

не способны к спонтанному излучению. Если же среди атомов имеются и возбужденные (как, например, в светящемся положительном столбе газового разряда), то в формуле дисперсии следует принимать во внимание также и такие частоты  $\omega_r$ , которые соответствуют переходам к более низким уровням энергии. Эти переходы, как впервые теоретически высчитал Крамерс и затем подтвердил на опыте Ладенбург, приводят к вычисляемому с отрицательными значениями  $f$  (отрицательная дисперсия).

§ 26. Аномальная дисперсия и поглощение. Для более детального исследования хода кривых поглощения и показателя преломления в непосредственной близости от собственной частоты мы должны вернуться к уравнениям (25.12) предыдущего параграфа. Мы ограничимся, впрочем, лишь тем случаем, когда диэлектрическая постоянная весьма мало отличается от единицы, как это наверняка имеет место в достаточно разреженных газах. В этом случае, на основании (25.9), имеем:

$$n - ik = \sqrt{\epsilon} = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega};$$

отсюда



$$\left. \begin{aligned} n &= 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \\ k &= \frac{2\pi N e^2}{m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \end{aligned} \right\} (26.1)$$

Так как нас теперь интересует только область, непосредственно примыкающая к отдельной линии поглощения, то обозначим расстояние от середины линии через

$$\eta = \omega - \omega_0$$

и будем считать, что  $\eta$  мало по сравнению с  $\omega$  и  $\omega_0$ . Тогда приближенно можем написать:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = -2\omega_0 \eta,$$

откуда получаем:

Рис. 39. Зависимость коэффициента экстинкции  $k$  и показателя преломления  $n$  от  $z = \frac{\gamma}{2}(\omega - \omega_0)$  вблизи линии поглощения.

$$\left. \begin{aligned} n - 1 &= \frac{\pi N e^2}{m \omega_0} \frac{-\eta}{\eta^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \\ k &= \frac{\pi N e^2}{2m \omega_0} \frac{\gamma}{\eta^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \end{aligned} \right\} (26.2)$$

Обозначив для удобства буквой  $z$  отношение расстояния от середины линии к полуширине этой линии, т. е. положив  $\eta = \frac{\gamma}{2} z$ , мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} n - 1 &= \frac{2\pi N e^2}{m \gamma \omega_0} \frac{-z}{z^2 + 1}, \\ k &= \frac{2\pi N e^2}{m \gamma \omega_0} \frac{1}{z^2 + 1}. \end{aligned} \right\} (26.3)$$

Это дает для коэффициента экстинкции  $k$  и для показателя преломления  $n$  кривые, изображенные на рис. 39. Максимум поглощения соответствует  $z=0$ ; при  $z=\pm 1$  поглощение достигает половины максимальной величины, а показатель преломления имеет экстремальные значения. Между этими точками показатель преломления уменьшается с увеличением длины волны, т. е. ведет себя как раз противоположно тому, что имеет место в прозрачной области спектра. Такое убывание показателя преломления при увеличении частоты называют аномальной дисперсией.

Рассмотрим подробнее процесс поглощения. Прежде всего убедимся в том, что энергия, отнятая у световой волны при прохождении через поглощающее вещество, равна работе, произведенной над отдельными атомами данного вещества. Согласно общим уравнениям теории Максвелла, со световой волной (25.11) связан поток энергии, определяемый вектором Пойнтинга  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . Рассмотрим слой нашего вещества толщины  $dx$ , расположенный нормально к оси  $x$ -ов. В этот слой через левую его поверхность входит ежесекундно энергия  $S$ , а через правую поверхность выходит уже несколько меньшая энергия  $S'$ . Поглощенная в нашем слое энергия  $dS = S - S'$  по закону сохранения энергии должна быть равна работе, произведенной световой волной над отдельными атомами. Убедимся, что на основании наших формул это действительно имеет место. Исходя из значений  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , выведенных в (25.11), мы получим, согласно (25.10a), для среднего во времени значения вектора Пойнтинга в точке  $x$  выражение

$$S = \frac{c}{4\pi} a^2 \sqrt{n^2 + k^2} e^{-\frac{2\omega k}{c}x} \frac{1}{2} \cos\psi = \frac{c}{8\pi} a^2 n e^{-\frac{2\omega k}{c}x}. \quad (26.4)$$

Его уменьшение на пути  $dx$  дается поэтому формулой:

$$-\frac{dS}{dx} dx = \frac{2\omega k}{c} S dx = \frac{2nk\omega}{8\pi} a^2 e^{-\frac{2\omega kx}{c}} dx. \quad (26.5)$$

Если подставить сюда значение  $2nk$  из (25.12), то окажется, что энергия, поглощаемая на пути  $dx$ , равна

$$-\frac{dS}{dx} dx = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{N}e^2}{m} \frac{\gamma\omega^2 a^2 e^{-\frac{2\omega kx}{c}}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} dx. \quad (26.6)$$

С другой стороны, на основании сказанного в § 15, работа, производимая электрическим полем с амплитудой  $a e^{-\frac{\omega k}{c}x}$  над отдельным упруго-связанным электроном, равна

$$\frac{1}{2} m \gamma \omega^2 \frac{e^2}{m^2} \frac{a^2 e^{-\frac{2\omega k}{c}x}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

Таким образом мы видим, что энергия, оставшаяся в поглощающем слое, действительно равна работе, произведенной над каждым электроном, умноженной на  $\mathfrak{N} dx$ .

О дальнейшей судьбе этой энергии можно сказать следующее: если затухание  $\gamma$  обуславливается исключительно излучением, поглощенная энергия будет тратиться на излучение рассеянного света. Это имеет место в достаточно разреженных газах. Однако, при больших плотностях затухание вследствие излучения начинает играть все меньшую роль по сравнению с эффектами взаимодействия, например, по сравнению с описанным в § 15 затуханием вследствие столкновений. Такого рода столкновения связаны с непосредственным превращением лучистой энергии в кинетическую энергию сталкивающихся атомов. Следовательно, поглощенное излучение превращается непосредственно в теплоту.

Мы только что вычислили поглощение энергии в том случае, когда на электрон действует строго монохроматическое излучение. Рассмотрим теперь случай, когда падающая волна содержит всевозможные частоты. Интенсивность этой волны можно написать в виде

$$S = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega, \quad (26.7)$$

где  $S(\omega) d\omega$  представляет часть интенсивности, приходящуюся на спектральную область между  $\omega$  и  $\omega + d\omega$ . Энергия излучения, поглощаемая в слое  $dx$ , на основании (26.5) определяется формулой

$$-dS = dx \int_0^{+\infty} \frac{2\omega k}{c} S(\omega) d\omega. \quad (26.8)$$

Вычислим этот интеграл в случае среды на столько разреженной, что для  $k$  можно пользоваться формулой (26.1). В этом случае

$$-dS = \frac{4\pi N e^2 \gamma}{mc} dx \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 S(\omega) d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

При не очень широкой линии подинтегральное выражение заметно отличается от нуля только в непосредственной близости к спектральной линии  $\omega = \omega_0$ . Поэтому введем в качестве переменной интегрирования расстояние от середины линии  $\eta = \omega - \omega_0$  и, кроме того, заменим везде  $\omega$  на  $\omega_0$ , за исключением разности  $\omega_0 - \omega$ . Заданная функция  $S(\omega)$  наперняка позволяет это сделать, если только ее можно считать практически постоянной в области линии поглощения. Тогда имеем:

$$-dS = dx \frac{4\pi N e^2}{mc} \gamma S(\omega_0) \int_{-\omega_0}^{\infty} \frac{d\eta}{4\eta^2 + \gamma^2},$$

причем в качестве нижнего предела интегрирования можно без особой ошибки взять не  $-\omega_0$ , а  $-\infty$ . Подставив  $\eta = \frac{z\gamma}{2}$ , мы получим:

$$-dS = dx \frac{4\pi N e^2}{mc} S(\omega_0) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = dx \frac{2\pi^2 N e^2}{mc} S(\omega_0). \quad (26.9)$$

Таким образом полная энергия, отнятая у непрерывного спектра, не зависит от ширины линии  $\gamma$ . Этот результат, в сущности, означает, что площадь кривой  $k$  (рис. 39) не зависит от ширины линии.

Так как на  $1 \text{ см}^2$  поглощающего слоя приходится ровно  $N dx$  дисперсионных электронов, то наш последний результат может быть сформулирован еще следующим образом: каждый дисперсионный электрон, находящийся под действием излучения, интенсивность которого для частоты, соответствующей собственной частоте электрона, равна  $S(\omega_0)$ , поглощает энергию  $\frac{2\pi^2 e^2}{mc} S(\omega_0)$ . Вместо интенсивности падающего излучения можно задать то поглощение энергии, которое имеет место, когда атом находится в поле излучения с определенной плотностью энергии  $u$ . Очевидно, что энергия  $u(\omega)$  в  $1 \text{ см}^2$  поля в случае нашей бегущей волны определяется выражением

$$u(\omega) = \frac{1}{c} S(\omega).$$

Если вместо  $\omega$  ввести частоту  $\nu$ , т. е. число колебаний в одну секунду, то для пересчета надо иметь в виду, что

$$S(\omega) d\omega = S(\nu) d\nu = S(\omega) 2\pi d\nu,$$

т. е.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(\nu) = \frac{cu(\nu)}{2\pi}.$$

Следовательно, если атом находится в поле излучения, в котором спектральное распределение объемной плотности энергии определяется выражением

$$u = \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu,$$

то за время  $dt$  он поглощает энергию

$$\frac{\pi e^2}{m} u(\nu) dt. \tag{26.10}$$

Этот результат поможет нам в дальнейшем (в § 68) получить особенно простой вывод формулы Рэлея-Джинса для распределения энергии в спектре черного излучения.

Эта формула описывает поглощение энергии упруго связанным электроном, имеющим три степени свободы. В теории равновесного излучения мы встретимся с атомной моделью в виде линейного осциллятора. Эта модель представляет заряд, совершающий упругие колебания только в одном направлении (например, по оси  $x$ -ов). Такой осциллятор реагирует только на те компоненты электрического поля, которые соответствуют этому направлению; поэтому в изотропном поле излучения он поглощает только треть энергии, определяемой выражением (26.10), а именно

$$\frac{\pi e^2}{3m} u(\nu) d\nu. \tag{26.11}$$

Другое важное применение выражения (26.10) состоит в том, что при его помощи можно привести классическую формулу дисперсии (25.15) к виду, соответствующему требованиям квантовой теории. Впоследствии (в § 70) мы вкратце вернемся и к этому вопросу.

§ 27. Магнитное вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея). В 1848 году Фарадей сделал следующее открытие. Если через вещество, помещенное в достаточно сильное магнитное поле, пропустить в направлении поля поляризованный пучок света, то плоскость поляризации повернется на некоторый угол, пропорциональный магнитной напряженности и толщине слоя вещества.

В этом параграфе мы увидим, что количественное объяснение этого эффекта может быть непосредственно дано на основании открытого 50 лет спустя эффекта Зеемана. Для этого мы прежде всего укажем на более удобный способ описания поляризованного света, плоскость поляризации которого непрерывно поворачивается при распространении. Если свет распространяется вдоль оси  $x$ -ов, то вектор электрического поля расположен всегда в плоскости  $yz$ . Вместо того чтобы отдельно задавать компоненты  $E_y$  и  $E_z$ , мы будем в дальнейшем описывать поле при помощи одной комплексной величины, вещественная часть которой равна компоненте по оси  $y$ , а мнимая — по оси  $z$ . Поэтому, если мы напишем

$$E_y + iE_z = Ae^{i\alpha},$$

то это будет означать, что  $E_z = A \sin \alpha$  и  $E_y = A \cos \alpha$ . Следовательно,  $A$  есть абсолютное значение напряженности, а  $\alpha$  — угол, образуемый направлением  $E$  с положительной осью  $y$ . Линейно поляризованная в определенном направлении волна с частотой  $\omega$ , в среде с показателем преломления  $n$ , может быть представлена в общем виде формулой

$$E_y + iE_z = a \cos \omega \left( t - \frac{nx}{c} \right),$$

где  $a$  — произвольное комплексное число, абсолютное значение которого определяет амплитуду, а фазовый угол — направление плоскости поляризации. Если при передвижении на 1 см по направлению оси  $x$ -ов фазовый угол поворачивается на угол  $\chi$ , то это можно выразить простым добавлением множителя  $e^{i\chi x}$  к комплексной амплитуде. Поэтому волна с вращающейся плоскостью поляризации должна быть задана в виде:

$$E_y + iE_z = ae^{i\chi x} \cos \omega \left( t - \frac{nx}{c} \right). \quad (27.1)$$

Заменив косинус соответствующими показательными функциями, получим для вектора электрического поля выражение, тождественное с (27.1):

$$E_y + iE_z = \frac{1}{2} a \left\{ e^{i\omega \left[ t - \frac{x}{c} \left( n - \frac{\chi c}{\omega} \right) \right]} + e^{-i\omega \left[ t - \frac{x}{c} \left( n + \frac{\chi c}{\omega} \right) \right]} \right\}. \quad (27.1a)$$

Последнюю формулу можно истолковать следующим образом. Рассматриваемое колебание состоит из двух волн, вращающихся одна налево, а другая направо, с одинаковыми амплитудами, но с разными показа-

телями преломления. Показатель преломления положительно вращающейся волны равен

$$n_+ = n - \frac{\chi c}{\omega},$$

а отрицательно вращающейся —

$$n_- = n + \frac{\chi c}{\omega}.$$

Таким образом это чисто формальное описание привело нас к следующему результату: вращение плоскости поляризации в каком-либо веществе будет иметь место тогда, когда это вещество обладает „двойным вращательным преломлением“, т. е. когда оно имеет различные показатели преломления для двух волн, поляризованных по кругу в противоположных направлениях. Если  $n_+$  и  $n_-$  — показатели преломления двух таких волн, то из нашего рассмотрения следует, что с прохождением расстояния  $l$  плоскость поляризации поворачивается на угол

$$\begin{aligned} \chi l &= & (27.2) \\ &= (n_- - n_+) \frac{\omega}{2c} l. \end{aligned}$$

Разность показателей преломления двух противоположно поляризованных волн можно определить на основании нашего рассмотрения эффекта Зеемана. Известно, что магнитное поле  $H$  налагает на невозмущенное движение электронов внутри атома равномерное вращение вокруг направления поля с угловой скоростью

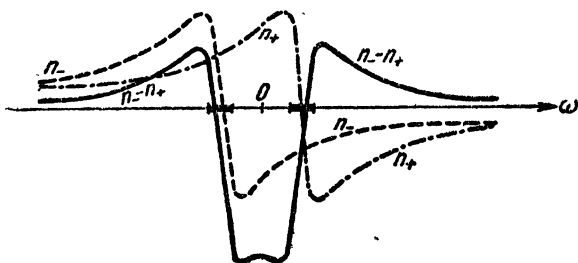


Рис. 40. Сведение эффекта Фарадея к продольному эффекту Зеемана.

равномерное вращение вокруг направления поля с угловой скоростью

$$\omega_L = - \frac{e}{2mc} H. \quad (27.3)$$

Если на эту атомную систему падает волна с частотой  $\omega$ , поляризованная по кругу в положительном направлении, то ее частота по отношению к вращающейся координатной системе будет, очевидно, на  $\omega_L$  меньше, т. е.  $\omega - \omega_L$ . Волна с той же частотой  $\omega$ , но лево-поляризованная по кругу, имеет во вращающейся координатной системе большую частоту, а именно  $\omega + \omega_L$ . Соответственно этому следует ожидать, что показатели преломления для двух рассматриваемых волн будут различны. Если  $n(\omega)$  означает показатель преломления данного сорта атомов в присутствии магнитного поля для волны с частотой  $\omega$ , то для право-поляризованной волны мы получим показатель преломления  $n_+(\omega) = n(\omega - \omega_L)$ , а для лево-поляризованной  $n_-(\omega) = n(\omega + \omega_L)$ . Это соотношение наглядно представлено на рис. 40: под влиянием магнитного поля вместо одной линии поглощения  $\omega_0$  появляются две

таких линии; первая из них (линия поглощения волны, право-поляризованной по кругу) расположена соответственно частоте  $\omega_0 + \omega_L$ , другая же (линия поглощения лево-поляризованной волны) — соответственно  $\omega_0 - \omega_L$ .

В соответствии с этим мы ожидаем, что ход показателя преломления для указанных двух волн будет с качественной стороны таков, как показанный пунктиром на рис. 40.

На основании рис. 40 может быть чисто качественно объяснен ход кривой магнитного вращения плоскости поляризации. В частности, видно, что вне спектральной линии вращение плоскости поляризации повсюду сохраняет неизменный знак. Кривая изменения разности  $n_- - n_+$  совершенно симметрична по отношению к середине линии. Только внутри самой линии поглощения можно ожидать найти вращение в противоположном направлении (с большим трудом наблюдаемое на опыте).

Так как ларморова частота очень мала по сравнению с частотами видимого света, то легко определить разность  $n_- - n_+$ , именно:

$$n_- - n_+ = n(\omega + \omega_L) - n(\omega - \omega_L) = \frac{dn}{d\omega} 2\omega_L. \quad (27.4)$$

Если сюда еще подставить известное значение частоты Лармора (27.3), то мы получим формулу вращения плоскости поляризации, выведенную впервые Беккерелем (Becquerel):

$$\chi l = - \frac{\omega}{2c} l \frac{dn}{d\omega} \frac{e}{mc} H,$$

или, так как

$$\begin{aligned} \omega \frac{dn}{d\omega} &= - \lambda \frac{dn}{d\lambda}, \\ \chi l &= \frac{e\lambda}{2mc^2} \frac{dn}{d\lambda} lH. \end{aligned} \quad (27.5)$$

Из этой формулы мы можем прежде всего вывести следующее заключение относительно знака вращения плоскости поляризации: значение  $\frac{dn}{d\lambda}$  в прозрачной области всегда отрицательно, точно так же отрицателен и заряд электрона  $e$ , так что в общем мы получаем всегда положительное вращение плоскости поляризации, т. е. вращение совпадает с направлением тока, вызывающего в соленоиде магнитную напряженность  $H$ .

Дальнейшая возможность проверки этой формулы состоит в том, что на основании ее, с помощью измеренной каким-либо образом кривой дисперсии, определяется отношение заряда электрона к массе  $\frac{e}{mc}$ . Исходя из указанного вывода формулы (27.5), можно ожидать, что она будет справедлива только в случае свободных атомов газа. В действительности же эта формула была применена с хорошим практическим успехом к молекулам и даже к кристаллам. На основании измеренных величин  $\chi$  и  $\frac{dn}{d\lambda}$  были получены для ряда веществ следующие значе-



ния  $\frac{e}{mc}$ : водород— $1,75 \cdot 10^7$ , углекислый газ— $1,00 \cdot 10^7$ , каменная соль— $1,51 \cdot 10^7$ , плавленный кварц— $1,37 \cdot 10^7$ , в то время как опыты с отклонением электронов (§ 3) дают значение  $1,759 \cdot 10^7$ . Мы видим, что наша формула (27.5) дает правильный порядок величины  $\frac{e}{mc}$ , однако, результат всегда оказывается меньше истинного значения. Причина такого отклонения, наверно, зависит отчасти от того, что мы при вычислениях исходили из нормального эффекта Зеемана в то время как в большинстве случаев он бывает аномальным. Затем другая причина расхождения состоит в том, что мы подставляли вместо  $\frac{dn}{d\lambda}$  экспериментально измеренную величину изменения показателя преломления с длиной волны. Это изменение, однако, только отчасти связано с движением электронов. Существенное влияние на показатель преломления оказывают, кроме того, и инфракрасные линии поглощения, обусловленные движением целых атомов. Эти инфракрасные собственные колебания, вследствие большой массы атомов, по крайней мере в 2.000 раз превышающей массу электрона, вызывают во столько же раз меньший эффект Зеемана, который поэтому лишь весьма незначительно влияет на вращение плоскости поляризации. Для более строгого рассмотрения эффекта Фарадея следовало бы разложить показатель преломления  $n$  на два слагаемых  $n_r$  и  $n_s$ , соответствующих вращению и колебанию молекул ( $n_r$ ) и движению электронов ( $n_s$ ). Только эту последнюю часть показателя преломления имеет смысл применять в формуле Беккереля (27.5).

Уточним приведенный выше наглядный вывод формулы вращения плоскости поляризации, принимая во внимание только что упомянутое обстоятельство. При этом учтем еще и тот факт, что напряженность  $E'$ , действующая на каждую отдельную молекулу, не равна вектору электрической напряженности  $E$ , а определяется, согласно § 22, формулой

$$E' = E + \frac{4\pi}{3} P. \quad (27.6)$$

Рассмотрим снова некоторый волновой процесс, распространяющийся в направлении положительной оси  $x$ -ов. Тогда на каждый упруго связанный электрон с собственной частотой  $\omega_s$  действует, во первых квази-упругая сила  $-\frac{\omega_s^2}{m} x$ , во-вторых, лорентцова сила  $\frac{e}{c} v \times H$ , обусловленная магнитным полем  $H$ , параллельным оси  $x$ -ов, и, в-третьих, сила  $eE'$  от падающей световой волны.

Уравнения движения нашего электрона будут:

$$\ddot{x}_s + \omega_s^2 x_s = \frac{e}{m} E'_x,$$

$$\ddot{y}_s + \omega_s^2 y_s = \frac{eH}{mc} \dot{z}_s + \frac{e}{m} E'_y,$$

$$\ddot{z}_s + \omega_s^2 z_s = -\frac{eH}{mc} \dot{y}_s + \frac{e}{m} E'_z.$$

Умножая третье уравнение на  $i$  и складывая его со вторым, мы получаем наиболее удобное для наших целей комплексное уравнение движения:

$$(\ddot{y}_s + i\ddot{z}_s) + \omega_s^2(y_s + iz_s) = 2\omega_L i(\dot{y}_s + i\dot{z}_s) + \frac{e}{m}(E_y' + iE_z').$$

Рассмотрим частный случай поляризованной по кругу волны с частотой  $\omega$ , т. е. положим  $E_y' + iE_z' = ae^{i\omega t}$ . Тогда все комплексные величины будут пропорциональны  $e^{i\omega t}$ , так что для амплитуды вынужденного движения нашего электрона по кругу мы получим:

$$y_s + iz_s = \frac{\frac{e}{m}}{\omega_s^2 - \omega^2 + 2\omega_L\omega} (E_y' + iE_z').$$

Так как ларморова частота  $\omega_L$  всегда очень мала по сравнению с частотой световой волны  $\omega$ , то можно, не меняя величины написанного выражения, добавить в знаменателе  $-\omega_L^2$ ; тогда для амплитуды мы получим:

$$y_s + iz_s = \frac{\frac{e}{m}}{\omega_s^2 - (\omega - \omega_L)^2} (E_y' + iE_z').$$

При положительной частоте  $\omega$  это соотношение справедливо для право-вращающейся волны. Лево-вращающуюся волну мы получим, считая частоту  $\omega$  по-прежнему положительной, но положив  $E_y' + iE_z' = ae^{-i\omega t}$ . Тогда для вынужденной амплитуды такой волны мы получим выражение:

$$y_s + iz_s = \frac{\frac{e}{m}}{\omega_s^2 - (\omega + \omega_L)^2} (E_y' + iE_z').$$

Общая результирующая диэлектрическая поляризация  $P$  определяется смещением всех электронов и всех ионов. Если мы имеем  $\mathfrak{N}_s$  электронов с собственной частотой  $\omega_s$  и кроме того,  $\mathfrak{N}_r$  ионов с зарядами  $e_r$  и частотами  $\omega_r$  (преимущественно в инфракрасной области), то общая диэлектрическая поляризация будет:

$$P_y + iP_z = \sum_s \mathfrak{N}_s e (y_s + iz_s) + \sum_r \mathfrak{N}_r e_r (y_r + iz_r).$$

Внешнее магнитное поле не будет оказывать заметного влияния на смещение положительных ионов (вследствие их большой массы), так что для смещения  $y_r + iz_r$  можно непосредственно написать:

$$y_r + iz_r = \frac{\frac{e_r}{m_r}}{\omega_r^2 - \omega^2} (E_y' + iE_z').$$

Таким образом, для право-вращающейся волны мы, в общем, имеем:

$$P_y + iP_z = \left( \sum_s \frac{\mathfrak{N}_s \frac{e^2}{m}}{\omega_s^2 - (\omega - \omega_L)^2} + \sum_r \frac{\mathfrak{N}_r \frac{e_r^2}{m_r}}{\omega_r^2 - \omega^2} \right) (E_y' + iE_z'). \quad (27.7)$$

С другой стороны, показатель преломления  $n$ , вообще, определяется из уравнения

$$P = \frac{n^2 - 1}{4\pi} E, \quad (27.8)$$

так что, исключая величины  $P$  и  $E^I$  из уравнений (27.6), (27.7) и (27.8), мы получаем:

$$\frac{n^2_+ - 1}{n^2_+ + 2} = \frac{4\pi}{3} \left\{ \sum_s \frac{\mathfrak{N}_s \frac{e^2}{m}}{\omega_s^2 - (\omega - \omega_L)^2} + \sum_r \frac{\mathfrak{N}_r \frac{e_r^2}{m_r}}{\omega_r^2 - \omega^2} \right\}, \quad (27.9)$$

$$\frac{n^2_- - 1}{n^2_- + 2} = \frac{4\pi}{3} \left\{ \sum_s \frac{\mathfrak{N}_s \frac{e^2}{m}}{\omega_s^2 - (\omega + \omega_L)^2} + \sum_r \frac{\mathfrak{N}_r \frac{e_r^2}{m_r}}{\omega_r^2 - \omega^2} \right\}.$$

Таким образом, если отвлечься от влияния инфракрасных собственных частот, можно подтвердить правильность приведенных на рис. 40 кривых для показателей преломления.

Для определения магнитного вращения плоскости поляризации мы должны знать разность показателей преломления  $n_- - n_+$ . Так как эта разность всегда очень мала по сравнению с показателем преломления  $n$ , то для ее вычисления можно поступить следующим образом. Вычислим непосредственно, на основании (27.9), разность

$$\Delta = \frac{n^2_- - 1}{n^2_- + 2} - \frac{n^2_+ - 1}{n^2_+ + 2}$$

и положим

$$n_- = n + \zeta \quad \text{и} \quad n_+ = n - \zeta,$$

где

$$\zeta = \frac{n_- - n_+}{2}.$$

мы можем считать величиной весьма малой по сравнению с  $n$ . Разлагая выражение для  $\Delta$  в ряд по степеням  $\zeta$ , мы получим:

$$\Delta = \frac{6n}{(n^2 + 2)^2} 2\zeta = \frac{6n}{(n^2 + 2)^2} (n_- - n_+).$$

Поэтому из нашего уравнения (27.2) для угла поворота следует выражение

$$\chi l = \frac{\omega l}{2c} \frac{(n^2 + 2)^2}{6n} \Delta$$

или, согласно (27.9),

$$\chi l = \frac{\omega l}{2c} \frac{(n^2 + 2)^2}{6n} \frac{4\pi}{3} \sum_s \mathfrak{N}_s \frac{e^2}{m} \left\{ \frac{1}{\omega_s^2 - (\omega + \omega_L)^2} - \frac{1}{\omega_s^2 - (\omega - \omega_L)^2} \right\}. \quad (27.10)$$

Для того чтобы отсюда прийти к формуле Беккереля (27.5), обозначим через  $\bar{n}$  показатель преломления, обусловленный одними лишь электронами. Очевидно, для этого показателя преломления мы можем написать:

$$\frac{\bar{n}^2 - 1}{\bar{n}^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \sum_s \mathfrak{N}_s \frac{e^2}{m},$$

или, дифференцируя по  $\omega$ ,

$$\frac{6\bar{n}}{(\bar{n}^2 + 2)^2} \frac{d\bar{n}}{d\omega} = \frac{8\pi\omega}{3} \sum_s \frac{\mathfrak{N}_s \frac{e^2}{m}}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2}. \quad (27.11)$$

Разлагая наше уравнение (27.10) в ряд по степеням малой величины  $\omega_L$ , получаем:

$$\chi^l = \frac{\omega l}{2c} \frac{(n^2 + 2)^2}{6\pi} \frac{8\pi\omega}{3} \sum_s \frac{\eta_s \frac{e^2}{m}}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2} 2\omega_L,$$

или, приняв во внимание (27.11) и (27.3),

$$\chi^l = -\frac{\omega l}{2c} \frac{(n^2 + 2)^2}{6\pi} \frac{6\bar{n}}{(\bar{n}^2 + 2)^2} \frac{d\bar{n}}{d\omega} \frac{e}{mc} H.$$

Воспользовавшись еще соотношением

$$\omega \frac{d\bar{n}}{d\omega} = -\lambda \frac{d\bar{n}}{d\lambda},$$

получаем исправленную формулу Беккереля

$$\chi^l = \frac{e\lambda}{2mc^2} \left( \frac{n^2 + 2}{\bar{n}^2 + 2} \right)^2 \frac{\bar{n}}{n} \frac{d\bar{n}}{d\lambda} l H \quad (27.12)$$

для вращения плоскости поляризации на участке пути  $l$  в присутствии магнитного поля  $H$ . В этом выражении  $n$  представляет истинный показатель преломления, а  $\bar{n}$  есть часть показателя преломления, обусловленная только движением электронов.

Для экспериментальной проверки этой формулы нужно прежде всего проанализировать ход показателя преломления, принимая во внимание и инфракрасные и ультрафиолетовые собственные частоты. Для  $\bar{n}$  нужно подставить в эту формулу лишь последнюю часть показателя преломления. Формула (27.12) много раз проверялась на различных кристаллах (каменная соль, сильвин и плавиковый шпат), причем практически получалось почти полное совпадение с измеренными значениями вращения плоскости поляризации. Дальнейшие подробности см. обзор Ладенбурга, „Lehrbuch der Physik“ Müller Pouillet, Optik II, 2, 1929.

**§ 28. Влияние внешнего ориентирующего поля.** Если молекулы, обладающие постоянным магнитным или электрическим моментом, поместить в магнитное или электрическое поле, то они частично ориентируются, так как поле старается направить их моменты параллельно силовым линиям. Этот эффект может быть обнаружен различными способами в оптических явлениях, причем магнитная или электрическая ориентировка может быть исследована при поперечном или продольном наблюдении. Мы ограничимся здесь двумя типичными случаями, а именно магнитной ориентировкой при продольном наблюдении (парамагнитное вращение плоскости поляризации) и электрической ориентировкой при поперечном наблюдении (эффект Керра).

а) *Парамагнитное вращение плоскости поляризации.* Мы рассмотрим это чрезвычайно интересное с экспериментальной точки зрения явление только с качественной стороны. В предыдущем параграфе, при разборе эффекта Фарадея, мы сделали молчаливое допущение, что у различных молекул все направления вращения в среднем равновероятны.

Если же отдельная молекула заранее обладает преимущественным направлением вращения электронов, то это обстоятельство эквивалентно тому, что данный атом имеет магнитный момент, ось которого совпадает с этим преимущественным направлением оси вращения. При отсутствии внешнего поля все направления осей отдельных молекул в пространстве равновероятны. При включении магнитного поля, параллельного направлению светового луча, произойдет частичная ориентировка молекул — в том смысле, что число молекул, в которых электроны вращаются направо по отношению к направлению поля, увеличится, а число молекул, в которых вращение происходит влево — уменьшится. Это приведет по сравнению с рис. 40 к увеличению показателя преломления право-вращающейся волны и к уменьшению показателя преломления волны, вращающейся влево, так что при очень сильных полях ход показателей преломления будет иметь вид, изображенный на рис. 41. Отсюда следует, что в этом случае величина  $n_- - n_+$ , определяющая эффект Фарадея, может стать совершенно несимметричной по отношению к середине линии. В частности, вполне возможно, что вращение плоскости поляризации с одной стороны линии станет положительным, а с другой — отрицательным, что действительно и наблюдалось. На основании дальнейшего исследования этого явления как с теоретической, так и с экспериментальной стороны удалось получить относительно парамагнитной ориентации молекул.

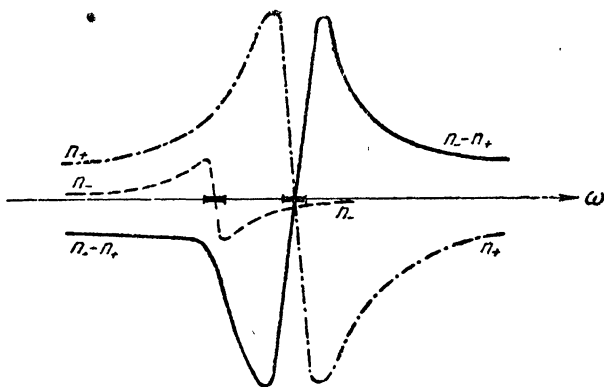


Рис. 41. Парамагнитное вращение плоскости поляризации.

б) *Электрическое двойное лучепреломление (эффект Керра).* Обычная аппаратура для наблюдения и технического применения эффекта Керра (рис. 42) состоит из двух пластин конденсатора, между которыми налита подходящая жидкость (бензол или нитробензол). Через поляризатор (николь) эта жидкость освещается светом, плоскость поляризации которого составляет угол  $45^\circ$  с направлением поля в конденсаторе. Пройдя через жидкость, свет попадает в анализатор, повернутый на  $90^\circ$  относительно поляризатора. При не-

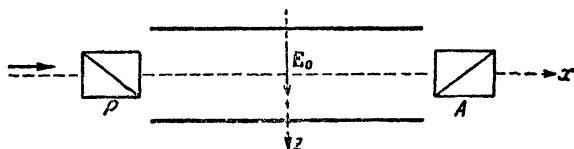


Рис. 42. Схема установки для изучения эффекта Керра.

считываясь, что в этом случае величина  $n_- - n_+$ , определяющая эффект Фарадея, может стать совершенно несимметричной по отношению к середине линии. В частности, вполне возможно, что вращение плоскости поляризации с одной стороны линии станет положительным, а с другой — отрицательным, что действительно и наблюдалось. На основании дальнейшего исследования этого явления как с теоретической, так и с экспериментальной стороны удалось получить относительно парамагнитной ориентации молекул.

включенном конденсаторе эта установка не пропускает света; наоборот, при включении электрического поля в поле зрения анализатора наблюдается свет.

Это явление происходит следующим образом. Под действием электрического поля конденсатора (например, параллельного оси  $z$ ) жидкость становится анизотропной, т. е. электрическая поляризуемость ее делается различной в зависимости от того, как колеблется электрический вектор световой волны: в направлении поля  $E_0$  или же в перпендикулярном направлении. Следовательно, мы можем говорить о различных диэлектрических постоянных  $\epsilon_y$  и  $\epsilon_z$ , т. е. о различных показателях преломления  $n_y$  и  $n_z$  в зависимости от того, как колеблется электрический вектор: по направлению оси  $y$  или оси  $z$ . В соответствии с этим компоненты диэлектрической поляризации будут:

$$\begin{aligned} P_y &= \frac{n_y^2 - 1}{4\pi} E_y, \\ P_z &= \frac{n_z^2 - 1}{4\pi} E_z. \end{aligned} \quad (28.1)$$

Отсюда мы получим решения волнового уравнения для плоских линейно-поляризованных волн в виде:

$$\begin{aligned} E_y &= a \cos \omega \left( t - \frac{n_y x}{c} \right), \\ E_z &= b \cos \omega \left( t - \frac{n_z x}{c} \right). \end{aligned} \quad (28.2)$$

Из этих уравнений видно, что не следует ожидать никаких особенных явлений, если падающий свет линейно поляризован в направлении поля  $E_0$  ( $a=0$ ) или в перпендикулярном ему направлении ( $b=0$ ). В обоих случаях в жидкости распространяется линейно-поляризованная волна; только ее скорость в двух случаях будет не совсем одинакова. Но мы получим нечто новое, когда падающий свет поляризован под каким-нибудь углом к направлению поля, например под углом в  $45^\circ$  ( $b=a$ ). Разберем вкратце, какой вид будут иметь в этом случае выражения (28.2) для поля световой волны в какой-либо точке  $x$ . Для этого введем пока сокращенные обозначения

$$\frac{\omega n_y x}{c} = r - s, \quad \frac{\omega n_z x}{c} = r + s,$$

где

$$s = \frac{\omega x}{2c} (n_z - n_y). \quad (28.3)$$

Тогда уравнения для поля световой волны примут вид:

$$\begin{aligned} E_y &= a \cos(\omega t - r + s) = a \{ \cos(\omega t - r) \cos s - \sin(\omega t - r) \sin s \}, \\ E_z &= a \cos(\omega t - r - s) = a \{ \cos(\omega t - r) \cos s + \sin(\omega t - r) \sin s \}, \end{aligned}$$

Из этих уравнений легко исключить  $t$ . Складывая и вычитывая эти два уравнения, мы получим для компонент поля равенство:

$$\left(\frac{E_y + E_z}{2a \cos s}\right)^2 + \left(\frac{E_y - E_z}{2a \sin s}\right)^2 = 1. \quad (28.4)$$

Из этого равенства мы можем заключить, что в заданной точке  $x$  конец вектора  $E$  описывает эллипс, главные оси которого всегда наклонены под углом  $45^\circ$  к осям  $y$  и  $z$ . Следовательно, в установке, изображенной на рис. 42, одна из осей эллипса всегда совпадает с направлением поляризатора, а другая — с направлением анализатора. Если  $s$  последовательно принимает значения

$$0, \eta, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \eta, \frac{\pi}{2}$$

(где  $0 < \eta < \frac{\pi}{4}$ ), то мы получим колебания, схематически изображенные на рис. 43. Из значений  $s$  мы можем заключить: луч

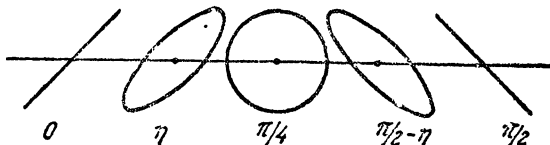


Рис. 43. Колебания электрического вектора на различных расстояниях от поляризатора.

линейно-поляризованный параллельно анализатору, становится поляризованным по кругу, пройдя расстояние  $x = \frac{\pi}{4} \frac{2c}{\omega(n_z - n_y)}$ . Пройдя удвоенное расстояние, т. е.  $\frac{\pi}{2} \frac{2c}{\omega(n_z - n_y)}$ , исследуемый свет становится линейно-поляризованным перпендикулярно к анализатору. Следовательно, в этом случае свет без ослабления проходит через анализатор. Если ввести длины волн

$$\lambda_y = \frac{2\pi c}{\omega n_y} \text{ и } \lambda_z = \frac{2\pi c}{\omega n_z},$$

то наше условие для круговой поляризации примет вид:

$$\frac{x}{\lambda_z} - \frac{x}{\lambda_y} = \frac{1}{4}.$$

Мы получаем свет, поляризованный по кругу, если число укладывающихся на отрезке  $x$  волн одного направления поляризации отличается от числа волн другого направления поляризации ровно на  $\frac{1}{4}$ .

Опыт показал, что разность  $n_z - n_y$ , определяющая величину наблюдаемого эффекта, пропорциональна квадрату напряженности  $E_0$  между пластинами конденсатора. Коэффициент пропорциональности  $B$ , фигурирующий в равенстве

$$n_z - n_y = B \lambda_0 E_0^2, \quad (28.5)$$

называют постоянной Керра для данного вещества. В это равенство входит еще длина волны в пустоте  $\lambda_0$ , так как длина пути, необходимая для получения максимума освещения в анализаторе, определяется отношением этой длины волны к разности показателей преломления.

$\frac{1}{B}$  есть та длина пути, на которой при  $E_0 = 1$  происходил бы поворот плоскости поляризации на угол  $360^\circ$ .

Теперь мы покажем, каков тот атомный механизм, при помощи которого объясняется появление электрического двойного лучепреломления, и как можно простым способом составить себе понятие о порядке величины постоянной Керра. Основное предположение, которое надо сделать для объяснения этого явления, состоит в том, что отдельным молекулам приписывается поляризуемость, зависящая от направления поля. Рассмотрим лишь простейшую модель молекулы, обладающую этим свойством. Простейшее предположение — это то, что отдельная молекула вообще может быть поляризована лишь в одном определенном для нее направлении. Грубую механическую модель такой молекулы представляет заряд, который вынужден скользить по прямому стержню и может совершать вдоль этого стержня упругие колебания относительно середины. Если такую модель поместить в электрическое поле, то на движение электрона оказывает влияние только та компонента напряженности, которая совпадает с направлением стержня. Следовательно, если обозначить через  $\alpha$  поляризуемость, т. е. дипольный момент, производимый напряженностью, равной единице и направленной параллельно стержню, то при заданном направлении стержня его дипольный момент будет равен  $\alpha E \cos \vartheta$ . Следовательно, компонента дипольного момента, совпадающая с направлением действующего поля, будет

$$\alpha E \cos^2 \vartheta.$$

Если снова обозначить через  $N'$  число молекул в  $1 \text{ см}^3$ , то мы получим для поляризации, производимой полем световой волны  $E$ , выражение

$$P = N' \alpha E \overline{\cos^2 \vartheta}.$$

Здесь  $\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{N'} (\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2 + \dots + \cos^2 \vartheta_{N'})$  представляет сред-

нее значение, взятое по всем молекулам, причем в эту формулу подставляется для каждой молекулы угол  $\vartheta$  между направлением ее поляризуемости и направлением электрического поля. До тех пор, пока внешнее поле не создает ориентацию молекул в некотором преимущественном направлении, все направления поляризации равновероятны. В этом случае  $\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{3}$ . Поэтому для диэлектрической постоянной нашей среды мы получаем выражение:

$$\epsilon_0 - 1 = 4\pi N' \alpha \overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{4\pi N' \alpha}{3}. \quad (28.6)$$

Следовательно, при не слишком больших значениях  $N'$ ,

$$n_0 - 1 = \frac{2\pi N' \alpha}{3}. \quad (28.6a)$$

Если создать преимущественное направление при помощи какой-либо внешней силы, — например электрического поля в конденсаторе, — то может случиться, что направления осей отдельных молекул уже



не будут распределены в пространстве изотропно, а будут ориентированы, например, преимущественно в направлении электрического поля  $E_0$ . В этом случае среднее значение  $\overline{\cos^2 \vartheta}$  для электрического вектора световой волны будет неодинаково для различных направлений поляризации. Для более подробного разбора этого явления рассмотрим октант единичной сферы (рис. 44). Пусть  $Z$  — направление постоянного поля  $E_0$ ,  $X$  — направление распространения света, а  $P$  — направление оси отдельной молекулы. Последнее направление образует с осями  $Y$  и  $Z$  углы  $\psi$ ,  $\varphi$  и  $\vartheta$ . Согласно уравнению (28.6), для волны, электрический вектор которой колеблется в направлении оси  $Z$ , мы можем написать:

$$\epsilon_z = 1 + 4\pi N' \alpha \overline{\cos^2 \vartheta},$$

а для волны, поляризованной в перпендикулярном направлении, —

$$\epsilon_y = 1 + 4\pi N' \alpha \overline{\cos^2 \psi}.$$

Введем еще угол  $\varphi = \sphericalangle(YZP)$ , для которого всегда имеет место соотношение

$$\cos \psi = \sin \vartheta \cos \varphi,$$

а, следовательно, также

$$\overline{\cos^2 \psi} = \overline{\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}.$$

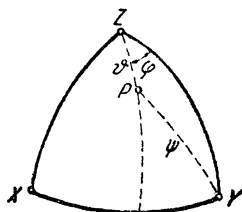


Рис. 44. Ориентировка оси молекулы  $P$  в эффекте Керра.

Из соображений симметрии мы не должны ожидать какого-либо преимущественного значения угла  $\varphi$ . Напротив, все направления диполей, образующие данный угол  $\vartheta$  с направлением  $Z$ , будут равновероятны. Поэтому в последнем уравнении мы можем произвести усреднение по  $\varphi$  при заданном  $\vartheta$ , причем получим:

$$\overline{\cos^2 \psi} = \frac{1}{2} \overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{2} (1 - \overline{\cos^2 \vartheta})$$

или

$$\overline{\cos^2 \vartheta} - \overline{\cos^2 \psi} = \frac{3}{2} \left( \overline{\cos^2 \vartheta} - \frac{1}{3} \right).$$

Таким образом, для разности диэлектрических постоянных и, следовательно, для разности квадратов показателей преломления, мы получаем выражение

$$\epsilon_z - \epsilon_y = n_z^2 - n_y^2 = 4\pi N' \alpha \frac{3}{2} \left( \overline{\cos^2 \vartheta} - \frac{1}{3} \right).$$

Так как на практике всегда

$$n_z - n_y \ll n_0$$

то можно положить с достаточной степенью точности:

$$n_z^2 - n_y^2 = 2n_0 (n_z - n_y).$$

Введя еще определяемый выражением (28.6а) показатель преломления  $n_0$  для вещества при отсутствии поля, получим для интересующей

нас разности показателей преломления, а тем самым и для двойного лучепреломления, выражение:

$$n_z - n_y = \frac{n_0 - 1}{n_0} \frac{9}{2} \left( \overline{\cos^2 \vartheta} - \frac{1}{3} \right). \quad (28.7)$$

Таким образом, в нашей модели теоретическое вычисление эффекта Керра сводится к вычислению  $\overline{\cos^2 \vartheta}$ .

В общем случае можно указать две причины, определяющие преимущественную ориентацию молекул. Прежде всего, молекула может обладать постоянным электрическим моментом  $p_0$ , на который может действовать ориентирующее поле  $E_0$ . Но и при отсутствии такого постоянного момента внешнее поле будет стремиться вызывать параллельную ему ориентацию молекул, так как это поле само индуцирует дипольный момент, на который оно затем может действовать. Заметим, что эта в некотором смысле наиболее общая модель молекулы может быть описана следующим образом: каждая молекула поляризуется в различной степени в трех взаимно перпендикулярных направлениях, связанных с молекулой (главные оси поляризуемости молекулы). Кроме того, молекула имеет еще постоянный дипольный момент, расположенный под некоторым углом к главным осям поляризуемости. Так как здесь мы должны рассмотреть лишь наиболее существенные черты этого явления, то мы ограничимся предельным случаем этой модели, а именно, предположим, что поляризуемость по двум из трех главных осей молекулы равна нулю. Кроме того, примем, что постоянный момент или направлен по оси поляризуемости молекулы или вовсе отсутствует. Рассмотрим оба эти случая.

Молекулы с постоянным моментом. Обозначив снова величину момента через  $p_0$  и угол, образованный им с направлением поля  $E_0$ , через  $\vartheta$ , мы получим для потенциальной энергии молекулы в поле  $E_0$  величину  $U = -p_0 E_0 \cos \vartheta$ . Вероятность того, что ось некоторой молекулы образует с направлением поля угол, заключенный между  $\vartheta$  и  $\vartheta + d\vartheta$ , согласно § 24 равна

$$W(\vartheta) d\vartheta = \text{const} \cdot e^{-\frac{p_0 E_0 \cos \vartheta}{kT}} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Положив

$$\cos \vartheta = x \text{ и } \frac{p_0 E_0}{kT} = \beta,$$

мы получим искомое среднее:

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{\int_{-1}^{+1} x^2 e^{\beta x} dx}{\int_{-1}^{+1} e^{\beta x} dx}.$$

Так как число  $\beta$  можно считать всегда малой величиной, то последнее выражение можно разложить в ряд Тэйлора, что дает:

$$\frac{1}{\cos^2 \vartheta} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \beta^2 \cdot \frac{2}{5} + \dots = \frac{1}{3} + \frac{2}{45} \beta^2 + \dots \quad (28.8)$$

Молекулы без постоянного момента. Применяя статистическую формулу Больцмана, мы должны принять во внимание, что теперь потенциальная энергия рассматриваемой молекулы определяется двумя переменными, а именно: направлением ее оси относительно поля и величиной ее дипольного момента в данном поле. Легко сообразить, что работа, затрачиваемая на преодоление квазиупругих внутренних сил при индуцировании дипольного момента, равна  $\frac{1}{2} \frac{p^2}{\alpha}$ . Сюда следует добавить потенциальную энергию по отношению к внешнему полю  $E_0$ , равную  $-pE_0 \cos \vartheta$ , так что полная потенциальная энергия составляет:

$$U = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\alpha} - pE_0 \cos \vartheta.$$

С помощью этой формулы мы можем снова вычислить выражение

$$\frac{1}{\cos^2 \vartheta} = \frac{\int \int \cos^2 \vartheta e^{-\frac{U}{kT}} dp d(\cos \vartheta)}{\int \int e^{-\frac{U}{kT}} dp d(\cos \vartheta)}. \quad (28.9)$$

Вместо  $U$  сюда надо подставить приведенную выше функцию. Интегрирование производится: по  $p$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а по  $\vartheta$  — от 0 до  $\pi$ . При заданном  $\vartheta$  интегрирование по  $p$  может быть непосредственно выполнено. Положим

$$A = \frac{1}{2\alpha kT}, \quad B = \frac{E_0 \cos \vartheta}{2kT}$$

и принимая во внимание тождество

$$Ap^2 - 2Bp = \left( \sqrt{A}p - \frac{B}{\sqrt{A}} \right)^2 - \frac{B^2}{A},$$

мы получим интеграл по  $p$  в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{U}{kT}} dp = e^{\frac{B^2}{A}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left( \sqrt{A}p - \frac{B}{\sqrt{A}} \right)^2} dp.$$

Оставшийся здесь невычисленным интеграл не зависит от  $\vartheta$  и поэтому может быть сокращен в числителе и в знаменателе формулы (28.9). Положим затем

$$\cos \vartheta = x$$

и

$$\frac{B^2}{A} = \frac{E_0^2 \alpha}{2kT} \cos^2 \vartheta = b x^2.$$

Тогда из (28.9) мы получаем:

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{\int_{-1}^{+1} x^2 e^{bx^2} dx}{\int_{-1}^{+1} e^{bx^2} dx}.$$

Для единственно встречаемого на практике случая, когда величина  $b = \frac{\alpha E_0^2}{2kT}$  мала по сравнению с единицей, окончательный результат будет:

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{3} + \frac{4}{45} b + \dots \quad (28.10)$$

Подставляя найденные в (28.8) и в (28.10) значения в уравнение (28.7), мы получаем для вычисления постоянной Керра: для молекул с постоянным дипольным моментом выражение

$$n_z - n_y = \frac{1}{5} \frac{n_0 - 1}{n_0} \left( \frac{p_0}{kT} \right)^2 E_0^2.$$

а для молекул без постоянного дипольного момента —

$$n_z - n_y = \frac{1}{5} \frac{n_0 - 1}{n_0} \frac{\alpha}{kT} E_0^2.$$

В последнюю формулу можно еще подставить значение  $\alpha$ , выраженное через показатель преломления по формуле (28.6а).

В качестве численного примера найдем величину постоянной Керра нашей модели для показателя преломления  $n_0 = 1,5$ . Возьмем число молекул  $N'$  в  $1 \text{ см}^3$ , соответствующее бензолу. Так как молекулярный вес равен 78, а плотность 0,9, то мы получим

$$N' = N \frac{0,9}{78},$$

следовательно, по формуле (28.6а), для  $T = 300^\circ$

$$\frac{\alpha}{kT} = \frac{n_0 - 1}{\frac{2\pi}{3} N kT} = 8,3 \cdot 10^{-10},$$

Для того, чтобы найти приближенное значение влияния постоянного дипольного момента, предположим, что диполь состоит из двух элементарных зарядов на расстоянии  $10^{-8} \text{ см}$ .

Тогда

$$p_0 = 4,77 \cdot 10^{-18}$$

и

$$\left( \frac{p_0}{kT} \right)^2 = 135 \cdot 10^{-10}$$

Если мы примем, что длина волны  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-4}$  см, то для постоянной Керра  $B = \frac{n_z - n_y}{\lambda_0 E_0^2}$  в случае изшей модели мы получим: при наличии дипольного момента

$$B \approx 18 \cdot 10^{-6},$$

а при отсутствии дипольного момента

$$B \approx 1,1 \cdot 10^{-6}.$$

Сопоставим эти числа, полученные путем весьма грубого подсчета, с наблюдаемыми значениями  $B$ . Опыт дает

для бензола . . . . .	$0,6 \cdot 10^{-7}$ ,
для сероуглерода . . . . .	$3,2 \cdot 10^{-7}$ ,
для нитробензола . . . . .	$22,0 \cdot 10^{-6}$ ,

Эти результаты склоняют нас к тому, что в случае бензола и сероуглерода следует исходить при объяснении явления Керра главным образом из индуцированного дипольного момента, а в случае нитробензола — объяснить значительно большую величину постоянной Керра наличием большого постоянного дипольного момента.

#### IV. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

**§ 29. Диамагнетизм.** Магнитность какого-либо вещества всегда состоит в том, что под действием магнитного поля оно приобретает магнитный момент. В диамагнитных телах этот момент направлен против вектора поля, в парамагнитных же он расположен по направлению индуцирующего поля. Однако, это вполне верно только в тех случаях, когда мы имеем дело с аморфными или с поликристаллическими телами. В монокристаллах же магнитный момент может составлять любой угол с направлением поля.

При теоретическом вычислении намагничивания следует существенно различать, обладают ли отдельные молекулы вещества собственным магнитным моментом или нет. В последнем случае наблюдаемое намагничение обуславливается только тем, что внешнее магнитное поле индуцирует в атомах магнитный момент, как нами уже было показано в § 17. Момент, который вызывает эта индукция, всегда направлен против поля, это — диамагнетизм. Такое индуцирующее действие поля не зависит от того, существует ли помимо этого и постоянный магнитный момент, так что принципиально индукция имеет место во всех без исключения веществх. Если же отдельные молекулы обладают постоянным магнитным моментом, то происходящий отсюда парамагнетизм, как правило, значительно сильнее, так что в этих случаях можно практически не принимать во внимание существующего одновременно диамагнетизма.

Теоретические соображения о вычислении диамагнитной восприимчивости были в общих чертах уже приведены в § 16. По теореме Лармора, при включении магнитного поля  $H$  движение электронов в атоме меняется таким образом, что на невозмущенное движение налагается равномерное вращение вокруг направления поля с угловой скоростью

$$\omega_L = -\frac{e}{2mc} H.$$

Это дополнительное вращение всей электронной системы эквивалентно конвекционному току, магнитный момент которого проявляется как намагничение вещества. Согласно § 17, диамагнитная восприимчивость, отнесенная к отдельному атому, равна

$$-\frac{e^2 Z}{6mc^2} a^2.$$

Здесь  $Z$  означает число электронов в атоме;  $a$  — средний радиус орбиты, описываемый этими электронами ( $a$  определяется из соотношения  $Za^2 = \sum_{i=1}^Z r_i^2$ );  $e$ ,  $m$  и  $c$  имеют обычный смысл. Вычислим отсюда диамагнитную восприимчивость  $\chi_g$ , отнесенную к единице массы. Если  $A$  — атомный вес, а  $N$  — число Авогадро, то в 1 грамме вещества находятся  $\frac{N}{A}$  атомов, так что восприимчивость 1 грамма будет

$$\chi_g = -\frac{Z N e^2 a^2}{A 6mc^2}. \quad (29.1)$$

Подставив известные значения входящих сюда универсальных постоянных, получим:

$$\chi_g = -\frac{Z}{A} a^2 \cdot 2,85 \cdot 10^{10}. \quad (29.1a)$$

Для всей периодической системы элементов дробь  $\frac{Z}{A}$  довольно близка к  $\frac{1}{2}$ . Средний радиус электронной орбиты есть величина порядка  $10^{-8}$  см, следовательно  $a^2$  примерно равно  $10^{-16}$  см. У тяжелых элементов  $a^2$  заметно меньше, так как ядро обладает большим положительным зарядом и ближе притягивает к себе электроны.

	$A$	$Z$	$\chi_g \cdot 10^6$	$a^2 = \frac{\chi_g \cdot 10^{-10}}{2,85} \frac{A}{Z}$
He	4	2	-0,45	$31 \cdot 10^{-18}$
C (алмаз)	12	6	-0,50	$35 \cdot 10^{-18}$
Cl	35,5	17	-0,59	$43 \cdot 10^{-18}$
Br	80	35	-0,40	$32 \cdot 10^{-18}$
Hg	200	80	-0,19	$17 \cdot 10^{-18}$
Bi	209	83	-1,0	$(88 \cdot 10^{-18})$

Сравним это теоретическое предсказание с приведенными в таблице измеренными значениями диамагнитной восприимчивости. В последнем столбце приведены значения  $a^2$ , вычисленные из измеренных диамагнитных восприимчивостей по формуле (29.1a). Мы видим, что наши ожидания полностью подтверждаются. Существенное исключение представляет, собственно говоря, только висмут, обладающий

ненормально большой восприимчивостью. Это аномальное поведение висмута до сих пор еще не объяснено. Оно, вероятно, обусловлено особенностями движения электронов в висмуте; эти особенности приводят к тому, что этот металл является аномальным в отношении и других свойств.

*Примечание.* В этом параграфе мы изложили классическую теорию диамагнетизма в ее обычной форме; дальше мы рассмотрим такую же теорию парамагнетизма. В действительности мы, однако, молчаливо ввели во все предыдущие рассуждения некоторое допущение существенно квантового характера, а именно мы предположили, что в атомах существуют электронные орбиты или замкнутые токи <sup>1)</sup>. В последовательной классической теории следовало бы заменить это предположение общей теоремой статистической механики, согласно которой вероятность  $dW$  некоторого состояния, характеризуемого элементом фазового пространства от  $x_1$  до  $x_1 + dx_1 \dots$  и от  $p_n$  до  $p_n + dp_n$ , определяется из равенства

$$dW = \text{const} \cdot e^{-\frac{\mathcal{H}(x_i, p_i)}{kT}} dx_1 \dots dp_n$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтонова функция для данной системы. Если провести эту теорию последовательно, то мы пришли бы к пугающему результату, а именно, что в рамках классической электронной теории вообще не существует намагничивания.

Это может быть очень легко доказано в общем виде на основании рассмотренных в § 12 общих свойств гамильтоновой функции. Для этого мы должны только подробнее рассмотреть фазовый интеграл (12.14):

$$Z = \int \dots \int e^{-\frac{\mathcal{H}(H, x_1 \dots p_n)}{kT}} dx_1 \dots dp_n$$

производная логарифма которого по напряженности магнитного поля  $H$ , согласно (12.15), дает средний магнитный момент. При этом гамильтонова функция  $\mathcal{H}$  дается равенством (12.7). Эта функция содержит импульс  $p_1$  только в комбинации  $p_1 - \frac{e}{c} A_1$ , где  $A_1$ , представляет соответствующую координате  $x_1$  компоненту вектора-потенциала  $A$ , вихрь которого равен магнитному полю, и который зависит только от координат, но не от импульсов. Покажем, что значение  $Z$  совершенно не зависит от величин  $A_i$ , а следовательно, и от магнитного поля  $H$ . Для этого, вместо переменных интегрирования  $x_1 \dots p_n$ , введем новые переменные  $\xi_1, \dots, \pi_n$ , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1, \dots, \xi_n = x_n, \\ \pi_1 &= p_1 - \frac{e}{c} A_1, \dots, \pi_n = p_n - \frac{e}{c} A_n. \end{aligned}$$

Теперь мы должны только принять во внимание, что функциональный определитель

$$\frac{\partial(\xi_1 \dots \pi_n)}{\partial(x_1 \dots p_n)} = 1,$$

и что все  $A_i$  после этого преобразования совершенно исчезнут из выражения для  $Z$ . Следовательно,  $Z$  не зависит от  $H$ , и поэтому, согласно (12.15), средний магнитный момент (в классической теории) всегда равен нулю.

1) См. примечание после текста.

§ 30. Парамагнетизм. Если отдельные атомы обладают магнитным моментом, то магнитность может происходить оттого, что отдельные атомы под действием внешнего магнитного поля отчасти ориентируются. Результирующее намагничение при этом определяется статистическим равновесием между ориентирующим действием магнитного поля и дезориентирующим действием теплового движения. Если  $\mu$  — магнитный момент отдельной молекулы, а  $\vartheta$  — угол, который этот момент образует с направлением поля, то  $\mu \cos \vartheta$  представляет ту часть результирующего магнитного момента, которая создается этой молекулой. Для вычисления парамагнитной восприимчивости мы должны определить, какова вероятность различных углов при статистическом равновесии. Результаты этого вычисления будут различны в зависимости от того, будем ли мы принимать во внимание, согласно представлениям классической статистики, все геометрически возможные ориентации, или же будем допускать, в духе квантовой механики, только дискретные значения компоненты магнитного момента в направлении поля (пространственное квантование). Решение этой задачи методами классической статистической механики, данное впервые Ланжевеном, вполне аналогично тому, с которым мы познакомились в § 24 при рассмотрении электрических диполей в электрическом поле. Потенциальная энергия диполя, расположенного под углом  $\vartheta$  к направлению поля, равна  $-\mu H \cos \vartheta$ . Отсюда следует, что вероятность ориентации в направлении, заключенном между углами  $\vartheta$  и  $\vartheta + d\vartheta$ , согласно основной теореме Больцмана, равна

$$dW = \text{const} \cdot e^{-\frac{\mu H \cos \vartheta}{kT}} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Отсюда для среднего магнитного момента в направлении поля мы получим:

$$\bar{\mu} = \frac{\int_0^\pi \mu \cos \vartheta e^{-\frac{\mu H \cos \vartheta}{kT}} \sin \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi e^{-\frac{\mu H \cos \vartheta}{kT}} \sin \vartheta d\vartheta}.$$

Вводя сокращенные обозначения

$$\frac{\mu H}{kT} = \alpha \text{ и } \cos \vartheta = x, \quad (30,1)$$

мы получаем отсюда:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{\int_{-1}^{+1} x e^{\alpha x} dx}{\int_{-1}^{+1} e^{\alpha x} dx} = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha}. \quad (30,2)$$



Найденная здесь функция числа  $\alpha$  называется функцией Ланжевена:

$$L_{\infty}(\alpha) = \operatorname{ctgh} \alpha = \frac{1}{\alpha}. \quad (30.3)$$

Мы снабдили ее значком  $\infty$ , чтобы показать, что при ее вычислении было учтено бесконечно большое число возможностей ориентации. Ниже мы подробно обсудим ход этой функции. Формула (30.2), вытекающая из классической теории, не согласуется с современными представлениями. Именно, по квантовой теории существует только конечное число дискретных возможных ориентаций. Обозначив через  $2j+1$  число этих различных возможных ориентаций, мы будем иметь всего  $2j+1$  дискретных значений компоненты магнитного момента в направлении поля:

$$-\mu, -\mu \frac{j-1}{j}, -\mu \frac{j-2}{j}, \dots, +\mu \frac{j-1}{j}, +\mu,$$

причем для вычисления  $\bar{\mu}$  снова должен быть применен закон Больцмана. Тогда мы получим более общую формулу:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{\sum_{s=-j}^{+j} s \frac{e^{\alpha s}}{j}}{\sum_{s=-j}^{+j} e^{\alpha s}} = L_j(\alpha). \quad (30.4)$$

В формуле (30.4) мы имеем обобщенную функцию Ланжевена  $L_j(\alpha)$ , где значок  $j$  указывает на число  $2j+1$  возможных ориентаций, для которого определена эта функция. Наименьшее значение, которое может принимать  $j$ , согласно квантовой механике, равно  $\frac{1}{2}$ . В этом случае возможны только два направления момента: одно — параллельное полю и другое — антипараллельное. Этот случай имеет место, когда магнитный момент атома обусловлен исключительно электронным спином (орбитальный момент равен нулю). Тогда мы получаем функцию Ланжевена

$$L_{\frac{1}{2}}(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \operatorname{tgh} \alpha. \quad (30.5)$$

В другом предельном случае, при  $j = \infty$ , выражение (30.4) переходит в (30.3). Все остальные функции, определяемые соотношением (30.4), заключены между предельными значениями  $L_{\frac{1}{2}}$  и  $L_{\infty}$ . Приведем здесь выражения обеих наиболее важных функций Ланжевена  $L_{\frac{1}{2}}$  и  $L_{\infty}$  при больших и при малых значениях  $\alpha$ ; эти выражения нам понадобятся в дальнейшем.

Обозначения	Формула	для $\alpha \ll 1$	для $\alpha \gg 1$
$L_{\frac{1}{2}}(\alpha)$	$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$	$\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} \dots$	$1 - 2e^{-2\alpha}$
$L_{\infty}(\alpha)$	$\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha}$	$\frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{45} + \frac{2\alpha^5}{945} \dots$	$1 - \frac{1}{\alpha} \dots$

Мы не будем подробно вычислять функцию  $L_j(\alpha)$  по формуле (30.4), а ограничимся рассмотрением характера ее изменения при малых значениях  $\alpha$ , т. е. тогда, когда магнитная энергия  $\mu H$  мала по сравнению с тепловой энергией  $kT$ . Согласно (30.4), для малых значений  $\alpha$  имеем:

$$L_j(\alpha) = \frac{\alpha}{2j+1} \sum_{-j}^{+j} \frac{s^2}{j^2}.$$

Входящая сюда сумма

$$\sum_{-j}^{+j} s^2 = j^2 + (j-1)^2 + (j-2)^2 + \dots + (j-2j)^2$$

может быть вычислена элементарным путем и равна  $\frac{1}{3}j(j+1)(2j+1)$ .

Отсюда для  $\alpha \ll 1$  имеем:

$$L_j(\alpha) = \alpha \frac{j+1}{3j}. \tag{30.6}$$

Таким образом, согласно (30.4) и (30.1), среднее значение намагниченности, производимого одной молекулой, составляет

$$\bar{\mu} = \frac{\mu^2 H}{kT} \frac{j+1}{3j}. \tag{30.7}$$

Эта формула дает теоретическое объяснение явления, открытого Кюри (Curie), который нашел, что восприимчивость парамагнитных веществ обратно пропорциональна абсолютной температуре. Таким образом, для восприимчивости, отнесенной к одной грамм-молекуле, мы можем написать:

$$\chi_M = \frac{N\bar{\mu}}{H} = \frac{C}{T}.$$

Входящая сюда величина  $C$  называется постоянной Кюри.

Значение измерений парамагнитной восприимчивости атомов и ионов состоит в том, что таким путем могут быть определены магнитные моменты атомов. На основании только что приведенных соображений, постоянная Кюри, отнесенная к отдельному атому, определяется из формулы

$$\frac{C}{N} = \frac{\mu^2}{k} \frac{(j+1)}{3j}. \tag{30.8}$$

Эту формулу можно еще улучшить, если определить значение  $\mu$  из спектроскопических данных о состоянии атома. Состояние атома характеризуется, во-первых, квантовым числом  $j$ , которым мы уже пользовались, и кроме того, еще так называемым фактором Ландэ  $g$ , который показывает, во сколько раз магнитный момент атома больше результирующего момента количества движения. Пока мы не учитываем электронного спина, фактор Ландэ равен 1, т. е. магнитный момент  $\mu$  связан с механическим моментом количества движения  $J$  отношением

$$\mu = \frac{e}{2mc} J. \quad (30.9)$$

Вследствие наличия электронного спина, это соотношение должно быть в общем случае заменено формулой

$$\mu = g \frac{e}{2mc} J. \quad (30.9a)$$

Согласно квантовой теории, механический момент количества движения равен

$$J = \frac{h}{2\pi} j.$$

На основании (30.9a), этому соответствует магнитный момент, равный

$$\mu = \mu_B g j, \quad (30.10)$$

где введено сокращенное обозначение

$$\mu_B = \frac{he}{4\pi mc}. \quad (30.11)$$

Величина  $\mu_B$  — так называемый магнетон Бора, является естественной единицей магнитного момента в атомной физике. Значение магнетона Бора, отнесенное к одной грамм-молекуле, мы получим, умножив (30.11) на число Авогадро  $N$ . Подставляя соответствующие константы, получаем

$$M_B = \frac{Nhe}{4\pi mc} = 5593. \quad (30.11a)$$

Отнесенную к одной грамм-молекуле постоянную Кюри  $C$  для атома, характеризуемого спектроскопическими величинами  $g$  и  $j$ , можно выразить через  $M_B$  следующим образом (это выражение было впервые дано Хундом):

$$C = \frac{M^2 j + 1}{R} = \frac{M_B^2 g^2 j(j+1)}{3R}. \quad (30.12)$$

Обратное определение магнитного момента атома по измеренной постоянной Кюри возможно только тогда, когда известно „внутреннее квантовое число“ атома  $j$ .

В старых работах, в которых считалась правильной классическая теория, магнитный момент обычно вычислялся из постоянной  $C$  с помощью формулы

$$M = \sqrt{3RC}. \quad (30.13)$$

Этот метод особенно часто применялся в многочисленных работах Вейсса и его сотрудников. На основании своих исследований Вейсс считал, что магнитный момент многих элементов, найденный на основании его измерений по формуле (30.13), равен целому кратному некоторой величины

$$M_w = 1123,5. \quad (30.14)$$

Этой величиной, называемой магнетон Вейсса, пользуются даже и теперь во многих экспериментальных работах для характеристики результатов измерения, т. е. магнитный момент атома определяется числом  $p$  содержащихся в нем магнетонов Вейсса. Согласно (30.13) и (30.14),

$$p = \frac{\sqrt{3RC}}{1123,5}.$$

Магнетон Вейсса несомненно лишен теоретического значения. То обстоятельство, что магнитный момент, вычисленный на основании формулы (30.13), вообще говоря неверной, часто оказывается целым кратным магнетона Вейсса  $M_w$ , может объясняться отчасти случайным совпадением, а главным образом — особенно при больших значениях  $p$  — оно должно быть отнесено за счет преувеличенной оценки точности измерений.

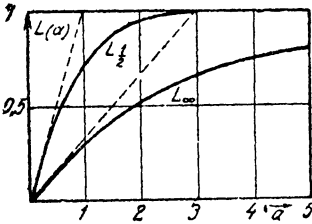


Рис. 45. Графики функций Ланжевена  $L_{1/2}(\alpha)$  и  $L_{\infty}(\alpha)$ .

При работе с парамагнитными веществами мы обыкновенно находимся на прямолинейном начальном участке кривой Ланжевена (рис. 45). Искривление кривой становится заметным только тогда, когда дробь  $\frac{\mu H}{kT}$  уже перестает быть малой по сравнению с единицей.

Это условие может быть осуществлено на опыте как путем увеличения магнитного поля, так и понижением температуры. Последний способ был избран Камерлинг Оннесом (Kamerlingh Onnes) и его сотрудниками, которые измеряли восприимчивость ряда веществ вплоть до температуры жидкого гелия. Особенно подходящим оказался сернокислый гадолиний, для которого при понижении температуры до  $1,3^\circ \text{K}$  и увеличении магнитного поля до 22 000 эрстед оказалось возможным получить значительный отрезок кривой Ланжевена.

Приведение результатов к шкале чисел  $\alpha = \frac{\mu H}{kT}$  производилось таким образом, что значение момента  $\mu$  определялось на основании классической теории (т. е. помощью  $L_{\infty}$ ) из постоянной Кюри, измеренной при обычных температурах. Полученная величина была  $\mu = 7,2 \cdot 10^{-20}$ , что дает для  $\alpha$ , при  $H = 20\,000$  эрстед и  $T = 1,3^\circ$ , значение, приблизительно равное 7.

Аналогичные опыты были позже произведены Беккерелем (J. Becquerel) и де-Гаасом (Z. f. Phys. 52, 678, 1928). Эти авторы измеряли не намагничение непосредственно, а парамагнитное вращение плоскости поляризации — эффект, о котором мы вкратце упомянули

в начале § 28. При этих опытах, производившихся главным образом с тизонитом, тоже удалось экспериментально получить значительную часть кривой Ланжевена.

§ 31. Теория ферромагнетизма Вейсса. Ферромагнитные вещества, каковы в особенности железо, кобальт, никель и гейслеровы сплавы, отличаются от прочих веществ ненормально большим значением магнитной восприимчивости, а также и тем, что их магнитный момент достигает почти полного насыщения в сравнительно слабых полях — порядка нескольких сот эрстед. Впрочем, в чрезвычайно сильных полях (порядка 10—30 тысяч эрстед) этот характерный для данного вещества предел намагничения, соответствующий насыщению в не очень сильных полях, может быть немного превышен. Как показано на рис. 47 (см. ниже стр. 171), при понижении температуры этот предел характерным образом уменьшается — сперва медленно, а потом очень быстро. Вблизи так называемой температуры Кюри  $\Theta$  наблюдается более сложное явление, которое можно рассматривать как переход от ферромагнетизма к парамагнетизму. Эта температура равна для железа  $1047^\circ \text{K}$ , для никеля  $645^\circ \text{K}$ , для кобальта  $1422^\circ \text{K}$ . Выше точки Кюри ферромагнитные вещества обладают парамагнитным намагничением, которое при достаточном удалении от этой точки следует закону Кюри, но с той лишь разницей, что вместо абсолютной температуры в знаменателе стоит температура, отсчитанная от точки Кюри, т. е.

$$\chi = \frac{C}{T - \Theta}. \quad (31.1)$$

На основании аномально большой магнитной восприимчивости ферромагнитных веществ приходится заключить о наличии в них особой силы, помогающей приложенному внешнему полю. Пьер Вейсс высказал гипотезу, согласно которой поле, действующее на элементарные магниты, может быть выражено формулой:

$$H' = H + \alpha M. \quad (31.2)$$

Здесь  $H$  — напряженность магнитного поля,  $M$  — намагничение, отнесенное к единице объема, и  $\alpha$  — „вейссова постоянная внутреннего молекулярного поля“. Выражение (31.2) показывает, что к внешнему приложенному полю прибавляется величина, пропорциональная намагничению тела. С аналогичным соотношением мы уже познакомились раньше в § 22. Оно относилось к эффективному электрическому полю и описывалось такой же формулой, где, согласно электронной теории, число  $\alpha$  имеет приближенное значение  $\frac{4\pi}{3}$ . Естественно ожидать коэффициент такого же порядка и в явлениях намагничения. Строго говоря, такой коэффициент мы должны были ввести также во все выкладки предыдущих параграфов. Однако, намагничение  $M$  во всех диамагнитных и парамагнитных телах столь незначительно, что поправка такого рода не имела бы на практике никакого значения. Но если мы хотим объяснить свойства ферромагнетиков, то оказывается, что коэффициенту  $\alpha$  необходимо приписать значение порядка от 1000 до 10 000. В действительности, пользуясь методами классической физики,

нельзя объяснить возникновение такого сильного внутреннего поля. Только квантовая механика, как показал Гейзенберг, позволяет свести внутреннее поле к электростатическим силам и удовлетворительно вычислить порядок величины этого поля. Но мы здесь не будем заниматься происхождением внутреннего поля, а примем вместе с Вейссом соотношение (31.2) в качестве гипотезы и рассмотрим все вытекающие из этой гипотезы следствия.

Для этого мы воспользуемся рассуждениями предыдущего параграфа, с той лишь разницей, что в выражении для аргумента функции Ланжевена будет фигурировать не поле  $H$ , а результирующее поле  $H'$ . Следовательно, для вычисления намагничивания мы получим, вместо уравнений (30.1)—(30.5), два уравнения:

$$\frac{M}{M_\infty} = L(a); \quad a = \frac{\mu H'}{kT} = \frac{\mu H}{kT} + \frac{\mu \alpha M}{kT}. \quad (31.3)$$

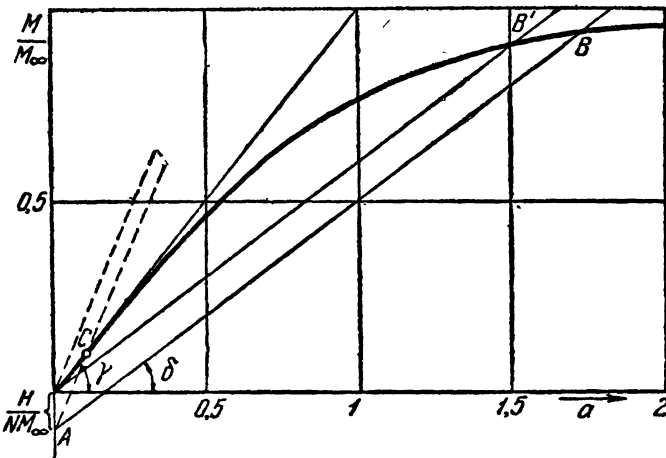


Рис. 46. Графическое определение намагничивания  $M$  по заданным  $H$  и  $T$  [формула Вейсса (31.4)].

Таким образом, отношение намагничивания к абсолютному насыщению  $M_\infty$  определяется в параметрической форме соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_\infty} &= L(a), \\ \frac{M}{M_\infty} &= a \frac{kT}{\mu \alpha M_\infty} - \frac{H}{\alpha M_\infty}, \end{aligned} \quad (31.4)$$

которые весьма удобны для качественного истолкования явлений. Если отложить  $\frac{M}{M_\infty}$  по оси ординат, а  $a$  по оси абсцисс (рис. 46), то точка  $B$ , абсцисса и ордината которой удовлетворяют уравнению (31.4), во-первых, лежит на кривой Ланжевена, а во-вторых, на некоторой прямой.

Эта прямая отсекает на отрицательной оси  $\frac{M}{M_\infty}$  отрезок  $\frac{H}{aM_\infty}$ . Ее угол наклона  $\delta$  к оси абсцисс дается равенством

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{kT}{\mu \alpha M_\infty}. \quad (31.5)$$

Следовательно, наклон этой прямой зависит только от температуры, а отсекаемый ею отрезок оси ординат  $OA$  — только от магнитного поля. Точка ее пересечения с кривой Ланжевена дает величину намагничивания, соответствующего данным значениям  $T$  и  $H$ . Изменению поля при постоянной температуре, следовательно, соответствует перемещение прямой  $AB$  параллельно самой себе. Если  $\gamma$  — угол наклона касательной в начале кривой  $L(a)$ , т. е.

$$\operatorname{tg} \gamma = L'(0), \quad (31.5a)$$

то, в зависимости от температуры, возможны два различных случая:

1) Угол  $\delta$ , как показано на рисунке, меньше угла  $\gamma$ . Тогда точка пересечения  $B$  при уменьшении поля  $H$  перемещается в направлении к точке  $B'$ , которой она достигает при  $H=0$ . Намагничение, соответствующее точке  $B'$ , которое должно иметь место при  $H=0$ , мы назовем спонтанным намагничением  $M_s$ , соответствующим данной температуре.

2) Пусть угол  $\delta$  больше угла  $\gamma$ . Тогда при уменьшении поля намагничение также стремится к нулю, причем при достаточно слабых полях оно убывает пропорционально  $H$ ; вещество будет обладать магнитной восприимчивостью в обычном смысле этого слова. Назовем температурой Кюри ту температуру  $\Theta$ , которая разграничивает только что указанные области ферромагнитного и парамагнитного поведения вещества. Она определяется тем условием, что углы  $\gamma$  и  $\delta$  равны друг другу. Таким образом из (31.5) и (31.5a) мы получаем для температуры Кюри формулу:

$$L'(0) = \frac{k\Theta}{\mu \alpha M_\infty} \quad \text{или} \quad \Theta = \frac{\mu \alpha M_\infty L'(0)}{k}. \quad (31.6)$$

Введя эту величину, мы можем написать второе уравнение (31.4) в виде

$$\frac{M}{M_\infty} = aL'(0) \frac{T}{\Theta} - \frac{H\mu L'(0)}{k\Theta}. \quad (31.7)$$

Воспользуемся этими соображениями для описания явлений в парамагнитной области ( $T > \Theta$ ). Пусть характеристической прямой будет, например, прямая  $AC$  (рис. 46). Предположим, что температура так высока или поле так мало, что точка  $C$  расположена еще в прямолинейной начальной части кривой Ланжевена, т. е. что мы можем заменить первое уравнение (31.4) равенством

$$\frac{M}{M_\infty} = aL'(0).$$

Это дает возможность исключить  $\alpha$  из уравнения (31,7), и мы получаем:

$$\frac{M}{M_{\infty}} \left( \frac{T}{\theta} - 1 \right) = \frac{H \mu L'(0)}{k \theta}.$$

Отсюда получаются для парамагнитного намагничивания две равносильные друг другу формулы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{M_{\infty}} &= \frac{\mu L'(0)}{k(T-\theta)} H \\ M &= \frac{\theta}{\alpha(T-\theta)} H. \end{aligned} \right\} \quad (31.8)$$

Тем самым мы вывели закон Кюри-Вейсса. Для восприимчивости  $\chi_g$ , отнесенной к грамму вещества, мы получим, разделив (31.8) на плотность  $\rho$ , два выражения:

$$\chi_g = \frac{\theta}{\rho \alpha (T - \theta)} = \frac{M_{\infty} \mu L'(0)}{\rho k (T - \theta)}, \quad (31.9)$$

которое мы сравним с результатами измерений в случае железа и никеля. Измеренные восприимчивости этих веществ приведены во втором столбце нижеследующей таблицы. Отсюда точно так же, как и из первого равенства (31.9), можно непосредственно определить температуру Кюри и постоянную  $\alpha$  внутреннего поля Вейсса.

	$\chi_g$	$\theta$	$\alpha$	$z$	$M_s$ при 18°C	$z' = \frac{M_s}{M_B} \cdot \frac{\text{атомн. вес}}{\text{плотность}}$
Железо . . .	$\frac{0,0395}{T-1047}$	1047°K	3500	3,4	1700	2,2
Никель . . .	$\frac{0,0055}{T-645}$	645°K	14000	0,87	500	0,64

Магнитный момент элементарного магнита можно определить из второго соотношения (31.9) только на основании несколько более сложных рассуждений. Можно, например, как это сделал Вейсс, отождествить число элементарных магнитов с числом атомов и ввести для величины  $L'(0)$ , согласно § 30, классическое значение  $\frac{1}{3}$ .

С другой стороны, можно считать носителями ферромагнетизма свободные электроны, т. е. заранее предположить, что  $M_B$  равно магнетону Бора  $\mu_B$  (30.11), и затем определить число  $z$  магнетонов Бора, соответствующих в среднем одному атому. Так как в 1 см<sup>3</sup> вещества с атомным весом  $A$  и с плотностью  $\rho$  находится  $\frac{N}{A} \rho$  атомов, то при параллельной ориентации всех магнетонов.

$$M_{\infty} = z \mu_B \frac{N}{A} \rho. \quad (31.10)$$



Если положить  $M_B = N\mu_B$  и  $L(a) = L_{\frac{1}{2}}(a)$ , что безусловно верно для свободных электронов, то для определения числа  $z$  в случае никеля мы имеем уравнение:

$$0,0055 = \frac{1}{\rho k} \mu_B^2 \frac{N}{A} \rho z = \frac{M_B^2}{RA} z.$$

Здесь  $M_B = N\mu_B$  есть молярное значение магнетона Бора (30.11а) и  $R = Nk$  — газовая постоянная. Подстановка значений  $M_B = 5593$ ,  $R = 8,3 \cdot 10^7$  и  $A = 59$  (никель) дает  $z = 0,87$ . Такой же расчет для железа дает  $z = 3,4$ . Позже мы увидим, что вычисленное другим способом значение  $z$  для железа значительно меньше. По этому поводу обратим внимание на то, что определение парамагнитной восприимчивости железа выше точки Кюри связано с особой экспериментальной трудностью, а именно: при температуре  $1179^\circ\text{K}$  решетка железа с центрированными кубами превращается в решетку с центрированными гранями, так что измерение восприимчивости возможно только в сравнительно узком интервале — от точки Кюри до этой температуры, при которой происходит изменение решетки.

В ферромагнитной области ( $T < \Theta$ ) мы связывали описание явлений намагничения с прямой  $AB$  на рис. 46. Теперь мы можем подробнее установить положение этой прямой, так как на основании измерений в парамагнитной области мы уже знаем значение коэффициента Вейсса  $\alpha$ . Предельное намагничение железа  $M_\infty$  лишь немного больше, чем измеренное при комнатной температуре технически достижимое насыщение в 1700 гауссов. Следовательно, при  $\alpha = 3500$  значение  $\alpha M_\infty$  приблизительно равно  $5 \cdot 10^6$  гауссов. Отсюда можно заключить, что даже при полях в несколько тысяч эрстед точка  $A$  на нашем рисунке 46 практически всегда будет совпадать с началом координат. Заметного перемещения точки  $B'$  по направлению от точки  $B$  вообще можно достигнуть только в исключительно сильных полях; поля, обычно встречающиеся в технике, практически не оказывают влияния на величину намагничения.

Изменение намагничения  $\delta M$ , вызываемое изменением  $H$  на  $\delta H$ , можно без труда определить по формуле (31.3).

Имеем:

$$\frac{\delta M}{M_\infty} = L'(a) \left( \frac{\mu}{kT} \delta H + \frac{\mu N}{kT} \delta M \right),$$

откуда, принимая во внимание (31.6), мы получим после простых преобразований:

$$\frac{\delta M}{\delta H} = \frac{1}{\alpha} \frac{L'(a)\Theta}{L'(0)T - L'(a)\Theta}.$$

При

$$L(a) = L_{1/2}(a) = \operatorname{tgh} a$$

$$L'(0) = 1 \text{ и } L'(a) = 1 - L^2(a) = 1 - \frac{M^2}{M_\infty^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{s}{1-s}, \quad (31.11)$$

где

$$s = \left(1 - \frac{M^2}{M_\infty^2}\right) \frac{\theta}{T}.$$

Если вместо  $M$  подставить сюда значение спонтанного намагничивания  $M_s$ , соответствующего точке  $B'$  на рис. 46, то мы этим определим приращение магнитного поля  $\delta H$ , необходимое для увеличения  $M$  от  $M_s$  до  $M_s + \delta M$ .

В области, лежащей значительно ниже точки Кюри, вещество, согласно указанным выше представлениям, обладает спонтанным намагничиванием  $M_s$ , зависящим только от температуры. Это спонтанное намагничивание совпадает с тем намагничиванием, которое в технике обычно называют намагничиванием насыщения, и которого можно достигнуть полями в несколько сот эрстед. В таблице на стр. 168 приведено намагничивание насыщения для никеля и железа, а также вычисленные отсюда числа  $z$  магнетонов Бора в атоме.

В рамках теории Вейсса нельзя дать сразу ответ на вопрос, особенно важный для техников: почему вообще надо брать поле конечной силы для того, чтобы вызвать насыщение? — Ниже мы увидим, что характер технической кривой намагничивания в основном обуславливается другими факторами, а именно кристаллической структурой вещества, а также и упругими напряжениями. С точки зрения излагавшейся до сих пор теории, техническое намагничивание есть вторичный процесс, обсуждение которого мы откладываем до § 34. Таким образом, мы будем считать, что ниже точки Кюри намагничивание отдельных малых объемов вещества равно спонтанному намагничиванию  $M_s$ . Области, в которых намагничивание  $M_s$  имеет постоянное направление, мы назовем областями Вейсса, причем выставляем требование, чтобы они содержали очень много атомов; впрочем, о размерах этих областей мы не даем более определенных указаний. Тогда кажущееся немагнитное состояние всего вещества будет объясняться тем, что отдельные области Вейсса намагничены в различных направлениях, и поэтому их магнитные поля вне тела взаимно уравниваются. Задача процесса технического намагничивания состоит лишь в том, чтобы ориентировать эти области в направлении внешнего поля, не меняя при этом заметно величину намагничивания отдельных областей.

Зависимость спонтанного намагничивания от температуры легче всего исследовать графически с помощью представленной на рис. 46 параметрической зависимости при  $H = 0$ . Получаемая отсюда кривая для отношения  $\frac{M_s}{M_\infty}$  изображена на рис. 47. Сплошная кривая относится к классическому значению  $L_\infty$  функции Ланжевена, пунктирная кривая — к значению  $L_{1/2}$  (случай свободных электронов). Мы видим, что в последнем случае спонтанное намагничивание очень быстро увеличивается при падении температуры, достигая, например, для половины температуры Кюри 95% абсолютного насыщения.

Воспользуемся еще нашими уравнениями для того, чтобы определить ход спонтанного намагничивания вблизи температуры Кюри. Здесь отношение  $\frac{M_s}{M_\infty} = \eta$  мало по сравнению с 1. Поэтому мы можем в (31.4) разложить функцию Ланжевена в ряд по возрастающим степеням ее аргумента. Принимая во внимание (31.6), мы получим для  $\eta$  уравнения:

$$\eta = aL'(0) + \frac{a^3}{3!}L'''(0) + \dots; \quad a = \eta \frac{\Theta}{TL'(0)}$$

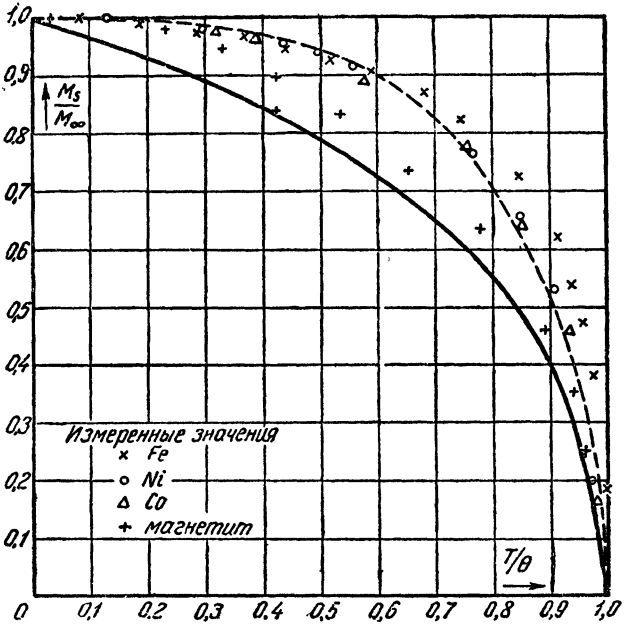


Рис. 47. Зависимость спонтанного намагничивания от температуры. Кривые вычислены по (31.4) при  $H=0$ , причем сплошная кривая соответствует функции  $L_\infty(a)$ , а пунктирная —  $L_{1/2}(a)$ .

или

$$\eta^2 = - \left( 1 - \frac{T}{\Theta} \right) \frac{T^2 6L''^3(0)}{\Theta^2 L'''(0)}. \quad (31.12)$$

( $L'''(0)$  отрицательно). Следовательно, вблизи точки Кюри

$$\eta^2 = - \left( 1 - \frac{T}{\Theta} \right) \frac{6L''^3(0)}{L'''(0)} \quad \text{и} \quad \frac{d\eta^2}{dT} = \frac{6L''^3(0)}{\Theta L'''(0)}.$$

Если теперь подставить вместо функции Ланжевена найденные выше значения (см. таблицу на стр. 162), то при  $T \approx \Theta$  мы получим

$$\begin{aligned} \text{для } L_\infty(a): \quad \eta^2 &= \frac{5}{3} \left( 1 - \frac{T}{\Theta} \right), \\ \text{для } L_{1/2}(a): \quad \eta^2 &= 3 \left( 1 - \frac{T}{\Theta} \right). \end{aligned} \quad (31.13)$$

Экспериментально найденный ход кривой спонтанного намагничивания различных веществ приведен на рис. 47. Мы видим, что экспериментальные значения гораздо лучше совпадают с кривой  $L_{1/2}$ , чем с классической кривой  $L_{\infty}$ .

§ 32. Термические эффекты при намагничении. Веским аргументом в пользу теории Вейсса и особенно в пользу ее утверждения, что ниже температуры Кюри ферромагнетик всегда намагничен до насыщения, является экспериментальное подтверждение двух термодинамических следствий, которые мы сейчас выведем из основных уравнений этой теории. Для этой цели рассмотрим  $1 \text{ см}^3$  ферромагнетика и обозначим через  $U$  его энергию, через  $S$  — энтропию и через  $M$  — его магнитный момент. Изменение энергии может произойти или вследствие притока тепла или вследствие электромагнитной работы. (Мы оставляем в стороне возможные изменения объема и связанную с этим механическую работу). Тогда основное уравнение термодинамики гласит:

$$dU = TdS + HdM. \quad (32.1)$$

Если считать в вытекающем отсюда уравнении для изменения энтропии

$$dS = \frac{1}{T} dU - \frac{H}{T} dM \quad (32.2)$$

температуру  $T$  и намагничение  $M$  за независимые переменные, то получим:

$$dS = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_M dT + \frac{1}{T} \left( \left( \frac{\partial U}{\partial M} \right)_T - H \right) dM. \quad (32.3)$$

Так как  $dS$  должно быть полным дифференциалом, то из этого уравнения вытекает условие:

$$\frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial S}{\partial M} \right)$$

или

$$\left( \frac{\partial U}{\partial M} \right)_T = H - T \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_M. \quad (32.4)$$

Зависимость энергии от намагничения определяется соотношением (32.4), если известна кривая намагничения, т. е. зависимость магнитного момента от поля и от температуры. Далее, согласно формуле (32.3)  $\left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_M$  представляет количество тепла, необходимое для нагревания  $1 \text{ см}^3$  вещества, при постоянном намагничении, на  $1^\circ$ . Обозначим эту удельную теплоемкость, отнесенную к единице объема, через  $\gamma_M$ ; тогда из формулы (32.3) мы получим для изменения энтропии выражение

$$TdS = \gamma_M dT - T \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_M dM. \quad (32.5)$$

С другой стороны, если мы будем рассматривать как независимые переменные температуру  $T$  и магнитное поле  $H$ , то уравнение (32.2) примет вид:

$$TdS = \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_H - H \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H \right\} dT + \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial H} \right)_T - H \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_T \right\} dH.$$

Коэффициент при  $dT$  обозначает здесь, очевидно, измеренную при постоянном поле удельную теплоемкость, которую мы обозначим через  $\gamma_H$ . Если мы представим энергию  $U$  как функцию от  $M$  и  $T$ , то получим:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M + \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H.$$

Поэтому

$$\gamma_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M + \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H - H \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H,$$

или, если воспользоваться соотношением (32.4),

$$\gamma_H = \gamma_M - T \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H. \quad (32.6)$$

В уравнениях (32.5) и (32.6) содержатся два важных следствия, которые можно проверить экспериментально: 1) если намагничивать термически изолированное вещество ( $dS = 0$ ), то, согласно формуле (32.5), изменение намагничения сопровождается изменением температуры. Это явление называется магнето-калорическим эффектом; 2) из уравнения (32.6) вытекает аномалия удельной теплоемкости в областях, где намагничение сильно меняется в зависимости от температуры; следовательно, аномалия должна особенно резко сказываться в области, лежащей непосредственно ниже температуры Кюри.

Для количественной оценки этих двух эффектов нам необходимо точно знать величину  $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M$ , т. е. мы должны ответить на вопрос, как следует изменить напряжение поля, чтобы при повышении температуры намагничения оставалось постоянным. Мы определим эту величину из основного уравнения нашей теории:

$$\frac{M}{M_\infty} = N \left( \frac{\mu(H + \alpha M)}{kT} \right). \quad (32.7)$$

Обозначим производную от функции Ланжевена по ее аргументу через  $L'$ ; тогда в случае одновременного изменения намагничения поля, и температуры мы получим:

$$\frac{dM}{M_\infty} = L' \left( \frac{\mu}{kT} dH - \frac{\mu(H + \alpha M)}{kT^2} dT + \frac{\mu \alpha}{kT} dM \right).$$

Отсюда находим связь между такими изменениями  $H$  и  $T$ , при которых  $dM$  равно нулю:

$$T \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M = H + \alpha M. \quad (32.8)$$

Подставив это в (32.6), мы получим выражение для удельной теплоемкости при постоянном поле:

$$\gamma_H = \gamma_M - (H + \alpha M) \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H. \quad (32.9)$$

В частности, если мы нагреем вещество, не внося его в магнитное поле то удельная теплоемкость будет:

$$\gamma_H = \gamma_M - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial M_s^2}{\partial T}. \quad (32.10)$$

Ход удельной теплоемкости ферромагнетика, вытекающий из представленной на рис. 47 зависимости спонтанного намагничивания  $M_s$  от температуры, качественно изображен на рис. 48. На большом расстоянии от точки Кюри удельная теплоемкость имеет нормальное значение  $\gamma_H = \gamma_M$ , при приближении же к точке Кюри со стороны низких температур теплоемкость заметно возрастает и сразу снова падает до своего нормального значения после перехода через точку Кюри. Произведенные до сих пор измерения относятся в большинстве случаев

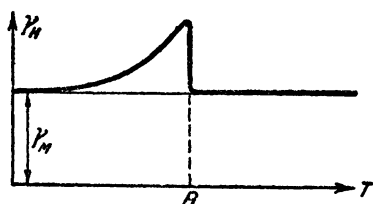


Рис. 48. Аномалия удельной теплоемкости вблизи точки Кюри.

как раз к этому скачкообразному падению удельной теплоемкости при переходе через точку Кюри. Мы можем вычислить скачок в точке Кюри, рассматривая характер изменения величины  $\frac{M_s}{M_\infty} = \eta$ , определяемой уравнениями (31.12) и (31.13). С помощью выражения (31.12) мы получаем:

$$\gamma_H - \gamma_M = - \frac{M_\infty^2 \alpha \cdot 3L'^3(0)}{\theta \cdot L''(0)}. \quad (32.11)$$

Если еще принять во внимание, что температура Кюри определяется формулой (31.6):

$$\theta = \frac{\alpha M_\infty L'(0) \mu}{k},$$

то оказывается, что

$$\gamma_H - \gamma_M = - \frac{k M_\infty}{\mu} \frac{3L'^2(0)}{L''(0)}.$$

Если теперь вместо функции Ланжевена, о которой до сих пор мы не делали еще никаких предположений, подставить сначала классическое выражение  $L_\infty$ , а потом выражение  $L_{1/2}$ , требуемое квантовой механикой, то для разности двух удельных теплоемкостей получатся выражения:

$$\gamma_H - \gamma_M = \begin{cases} \frac{5}{2} k \frac{M_\infty}{\mu} & \text{для } L = L_\infty(a) \\ \frac{3}{2} k \frac{M_\infty}{\mu} & \text{для } L = L_{1/2}(a). \end{cases} \quad (32.12)$$

Дробь  $\frac{M_\infty}{\mu}$  дает как раз число элементарных магнитов, находящихся в  $1 \text{ см}^3$  вещества. Таким образом, наши уравнения (32.12) позволяют сделать следующие простые выводы: при переходе через точку Кюри удельная теплоемкость одного элементарного

магнита претерпевает скачок  $\frac{3}{2}k$  по квантовой теории и  $\frac{5}{2}k$  по классической теории. Сравним этот результат с экспериментальными значениями для никеля и железа, приведенными в следующей таблице:

	$\Delta C_A$	$\Delta C_M$	$z = \Delta C_A : \Delta C_M$
Ni . . .	2,2	3	0,73
Fe . . .	6,3 до 8,5	3	2,1 до 2,7

В этой таблице  $\Delta C_A$  представляет скачок удельной теплоемкости, отнесенной к грамм-молекуле вещества. Это число не может быть непосредственно сопоставлено с нашей теорией, так как заранее неизвестно, сколько элементарных магнитов приходится на один атом. Согласно квантовой теории скачок  $\Delta C_M$  молярной удельной теплоемкости должен быть равен  $\frac{3}{2}R = 3$  грамм-калориям, если на каждый атом в среднем приходится один ферромагнитный электрон. Легко понять, что измеренными значениями  $\Delta C_A$  можно воспользоваться для того, чтобы на основании их вычислить число ферромагнитных электронов, приходящихся на один атом. Это число должно быть равно отношению  $\Delta C_A : \Delta C_M$ . Для этого числа получаются значения, приведенные в последнем столбце. Мы видим, что это число как для никеля, так и для железа довольно близко совпадает с числом магнетонов Бора, которое, согласно таблице на стр. 168, необходимо для объяснения величины абсолютного насыщения.

Теперь рассмотрим магнито-калорический эффект, определяемый уравнением (32.5) при  $dS = 0$ . Если мы снова подставим сюда из (32.8) значение производной  $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M$ , то для адиабатического повышения температуры, связанного с изменением намагничения, мы получим:

$$dT = \frac{1}{\gamma_M} (H + \alpha M) dM.$$

Это уравнение можно применять к измерениям как ниже, так и выше точки Кюри. Ниже точки Кюри поле всегда исчезающе мало по сравнению с  $\alpha M$ . Поэтому здесь можно вообще пренебречь полем. В этом случае мы получаем:

$$dT = \frac{\alpha}{2\gamma_M} d(M^2). \tag{32.13}$$

Выше точки Кюри, т. е. в парамагнитной области, согласно закону Кюри-Вейсса (31.8), намагничение равно

$$M = \frac{\theta}{\alpha(T - \theta)} H.$$

Отсюда следует:

$$H + \alpha M = \frac{\alpha M T}{\theta}.$$

Следовательно, для магнито-калорического эффекта выше точки Кюри получается:

$$dT = \frac{\alpha}{2\gamma_M} \frac{T}{\theta} d(M^2). \quad (32.14)$$

Для сравнения с опытом здесь можно еще выразить коэффициент  $\alpha$  Вейссова поля, на основании (31.9), через постоянную Кюри  $C_g = \frac{\theta}{\rho\chi}$ , отнесенную к грамму вещества.

Тогда получаем:

$$dT = \frac{T}{2\gamma_M \rho C_g} d(M^2). \quad (32.15)$$

Результаты измерений, произведенных Вейссом, изображены графически на рис. 49. На этом рисунке адиабатическое повышение температуры представлено как функция квадрата намагничения при различных температурах.

Рис. 49. Магнетокалорический эффект в никеле по Вейссу ( $\sigma$  — намагничение на один грамм).

Этот рисунок весьма убедительно доказывает реальность спонтанного намагничения. Мы видим, что ниже точки Кюри ( $372^\circ\text{C}$ ) возрастание наблюдаемого намагничения вначале не вызывает повышения температуры. Это и есть та область значений поля, в которой поле только ориентирует вейссовы области спонтанного намагничения. Лишь при применении очень больших полей, заставляющих намагничение возрасти выше  $M_s$ , появляется повышение температуры, зависящее линейно от  $M^2$ , как и требует наше уравнение (32.15). Экстраполяция этих прямых до пересечения с осью абсцисс представляет, по Вейссу, наиболее точный способ экспериментального определения спонтанного намагничения. При измерениях выше точки Кюри повышение температуры начинается тотчас же вместе с появлением намагничения. В этом случае измеренное  $M$  тождественно с истинным намагничением. Можно еще сличить с теоретической формулой (32.15) подъем прямой, изображенной на рис. 49. Вейсс, например, наблюдал в никеле при температуре  $697^\circ\text{K}$  для значения  $\Delta M^2 = 470$  повышение температуры на  $0,06^\circ$ . Удельная теплоемкость никеля равна  $0,11$  грамм-калорий на градус. Следовательно, при плотности  $\rho = 8,8$ , получается в абсолютных единицах:

$$\gamma_M = 0,11 \cdot 8,8 \cdot 4,2 \cdot 10^7 = 4,1 \cdot 10^7.$$

Этими данными, отнесенными к  $1 \text{ см}^3$ , мы можем воспользоваться для того, чтобы вычислить из (32.15) постоянную Кюри. Мы находим:

$$C_g = \frac{T}{2\rho\gamma_M} \frac{d(M^2)}{dT} = \frac{697 \cdot 470}{2 \cdot 8,8 \cdot 4,1 \cdot 10^7 \cdot 0,06} = 0,0076,$$



в то время как упомянутые выше (стр. 168) непосредственные измерения дали значение этой постоянной, равное 0,0055.

§ 33. **Намагничение монокристаллов.** а) *Зависимость свободной энергии от направления.* Согласно теории Вейсса, техническое намагничение (т. е. намагничение при температуре много ниже точки Кюри и при напряженностях поля до нескольких сот эрстед) состоит исключительно в том, что находящиеся в веществе области, уже обладающие спонтанным намагничением  $M_s$ , ориентируются в направлении поля. Для описания этого процесса необходимо поэтому указать природу тех сил, против которых должна быть произведена работа при ориентировке областей Вейсса. Экспериментально обнаруженный факт конечного зна-

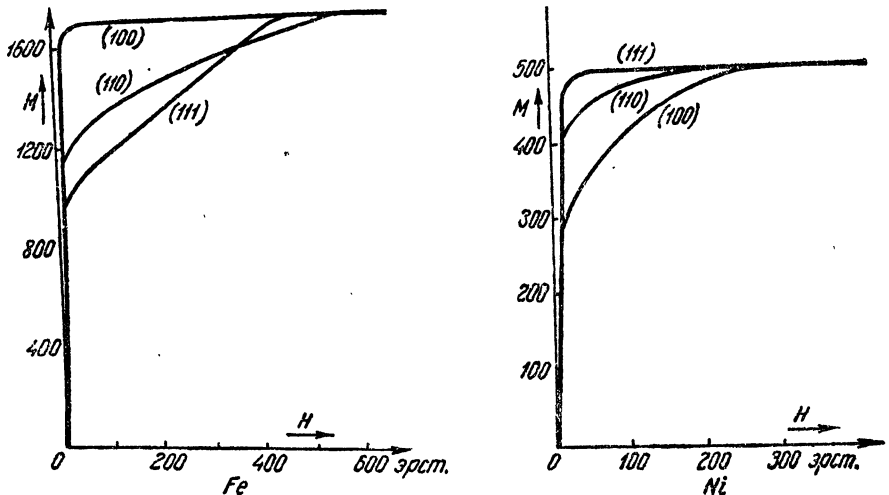


Рис. 50. Кривые намагничения монокристаллов железа и никеля в различных кристаллографических направлениях.

чения работы намагничения указывает на то, что вектор спонтанного намагничения имеет определенные преимущественные направления, из которых он может быть выведен только за счет некоторой конечной работы.

Рассмотрим это сначала на примере ферромагнитных монокристаллов. Эти кристаллы дают совершенно различные кривые намагничения, в зависимости от кристаллографического направления, в котором их намагничивают. На рис. 50 представлена зависимость намагничения от поля у железа и никеля для трех кристаллографических направлений: ребра куба (100), диагонали грани (110) и диагонали куба (111). Мы видим, что во всех случаях намагничение в самом начале чрезвычайно быстро растет с увеличением поля. (Правда, при очень малых полях наблюдается значительно меньшая начальная магнитная восприимчивость, которая, однако, вследствие малости масштаба на рис. 50 незаметна). Крутой подъем кривой намагничения для определенного кристаллографического направления, (100) у железа и (111) у никеля, при-

водит почти сразу к насыщению, которое достигается довольно быстро, при резком изгибе кривой. Для других направлений кривые намагничивания еще раньше, более или менее резко загибаясь, отходят от оси ординат и только в более сильных полях достигают насыщения. Когда поле снова начинают уменьшать, намагничивание пробегает по этим кривым почти без гистерезиса. Правда, и здесь существует конечная коэрцитивная сила, однако, она так мала, что мы можем ею пока пренебречь. Интеграл

$$W = \int_0^{M_s} H dM, \quad (33.1)$$

взятый по определенной кривой намагничивания, дает нам накопленную в кристалле свободную энергию, полученную при намагничивании в данном направлении. Если мы примем, что кристаллы до намагничивания находятся всегда в одинаковом начальном состоянии, то разность двух величин  $W$  для двух разных направлений даст работу, которую надо затратить для того, чтобы перевести вектор намагничивания из одного направления в другое. Следовательно, направлениями наименьшей энергии у железа являются, очевидно, ребра куба, у никеля же — диагонали куба. В дальнейшем мы не будем вычислять ту небольшую работу, которую нужно затрачивать на намагничивание по этим направлениям, а ограничимся лишь тем, что будем теоретически вычислять отступления остальных кривых намагничивания от кривой, соответствующей направлению „наиболее легкого“ намагничивания.

Для этого мы предположим, что зависимость энергии намагничивания от направления определяется главным образом образом магнитными силами. Мы убедимся в том, что такая зависимость от направления действительно может установиться благодаря энергии магнитного взаимодействия отдельных элементарных магнитов.

Предварительно рассмотрим энергию взаимодействия двух параллельных друг другу элементарных магнитов, расположенных на расстоянии  $r$  один от

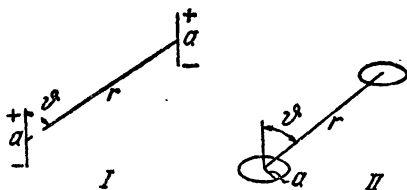


Рис. 51. Изображение элементарных магнитов в виде магнитных стрелок (I) и круговых токов (II).

другого, и притом так, что соединяющая их прямая составляет угол  $\vartheta$  с направлением магнитного момента. В дальнейшем мы убедимся в том, что недостаточно рассматривать магниты как элементарные диполи. Поэтому припишем им с самого начала некоторую конечную протяженность. Можно схематически представить каждый такой магнит или в виде двух равных зарядов противоположного знака, расположенных на конечном расстоянии  $a$  друг от друга (рис. 51, I), или же в виде круговых токов конечного радиуса  $a$  (рис. 51, II). Обозначив магнитный момент каждого такого маг-

нита через  $\mu$  и их энергию взаимодействия через  $2\omega$ , мы найдем, разлагая по возрастающим степеням  $\frac{a}{r}$ , в случае I:

$$\omega_1 = -\frac{\mu^2}{r^3} P_2(\cos \vartheta) - \frac{\mu^2 a^2}{r^5} P_4(\cos \vartheta) + \dots,$$

а в случае II:

$$\epsilon_2 = -\frac{\mu^2}{r^8} P_2(\cos \vartheta) + 3 \frac{\mu^2 a^2}{r^6} P_4(\cos \vartheta) + \dots \quad (33.2)$$

Здесь  $P_2(\cos \vartheta)$  и  $P_4(\cos \vartheta)$  — обычные обозначения 2-й и 4-й шаровых функций:

$$P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1),$$

$$P_4(\cos \vartheta) = \frac{1}{8} (35 \cos^4 \vartheta - 30 \cos^2 \vartheta + 3). \quad (33.3)$$

В разложении для  $\omega$  первое слагаемое, пропорциональное  $r^{-3}$ , называется дипольным членом, следующее слагаемое — квадрупольным членом и т. д.

Теперь мы должны вычислить энергию взаимодействия всех элементарных магнитов, находящихся в рассматриваемом теле, после чего, разделив на объем тела  $V$ , мы получим искомую плотность энергии в виде:

$$W = \frac{1}{V} \sum_i \sum_k \omega(r_{ik}, \vartheta_{ik}). \quad (33.4)$$

При суммировании значки  $i$  и  $k$  пробегают значения, соответствующие всем находящимся в теле магнитам. При вычислении этой суммы для всех дипольных членов мы найдем, что результат суммирования сильно зависит от формы тела. Это происходит вследствие влияния размагничивающего поля, создаваемого фиктивными поверхностными зарядами. Наличие такого поля может иметь следствием, например, то, что эллипсоид вращения будет обладать минимумом магнитной энергии, когда вектор  $M_x$  направлен по большой оси. Для того, чтобы исключить эту тривиальную зависимость от направления, определяемую формой тела, допустим в дальнейшем, что рассматриваемое тело имеет форму шара.

Для суммирования сначала дадим одному значку (напр.  $k$ ) постоянное значение и вычислим половину энергии  $k$ -го магнита по отношению ко всем остальным. Мы получим однократную сумму

$$w_k = \sum_i \omega(r_{ik}, \vartheta_{ik}). \quad (33.4a)$$

Для ее вычисления опишем из  $k$ -го магнита, как из центра, сферу радиуса  $g$ , которая вся должна лежать внутри большой сферы радиуса  $G$ . Очевидно,  $g$  должно быть очень велико по сравнению с постоянной решетки  $b$ . Разложим сумму (33.4a) на две составные части:

$$w_k = \sum_i^{(g)} \omega(r_{ik}, \vartheta_{ik}) + \sum_i^{(G-g)} \omega(r_{ik}, \vartheta_{ik}),$$

где первая сумма распространена на все магниты, лежащие внутри малой сферы  $(g)$ , а вторая — на остальной объем, который мы обозначим  $(G-g)$ . Мы покажем, что последней суммой можно пренебречь по сравнению с первой. Так как все  $r_{ik}$  последней суммы очень велики по сравнению с постоянной решетки, то мы можем заменить эту сумму интегралом. Если выполнить это интегрирование по  $r$  для квадрупольных членов от нижнего предела  $r=g$ , то мы получим выражение, которое по порядку величины в  $\frac{b^2}{g^2}$  раз меньше суммы, распространенной на объем малой сферы. Поэтому мы можем в интеграле опустить квадрупольный член, так как согласно нашему условию радиус  $g$  гораздо больше постоянной решетки  $b$ . В сумме, распространенной на объем  $(G-g)$ , существенны поэтому только дипольные члены. Мы можем учесть их влияние

тем, что припишем этому объему постоянное намагничение  $M_s$  и вычислим магнитную напряженность, создаваемую им в точке  $k$ -го магнита. Это поле может быть описано как происходящее от плотности заряда  $-\text{div } M_s$ . Источники вектора  $M_s$  в объеме  $(G - g)$  расположены в виде поверхностных зарядов на внутренней и внешней шаровых поверхностях. На основании § 22 легко вывести, что поле, создаваемое такими шаровыми слоями, строго однородно внутри этих слоев. В частности, поверхностный заряд большой сферы  $(G)$  создает внутреннее поле напряженности  $-\frac{4\pi}{3} M_s$ , а заряд малой сферы  $(g)$  — напряженности  $+\frac{4\pi}{3} M_s$ .

Следовательно, внутри сферы  $(g)$  поле, обусловленное диполями остального объема  $(G - g)$ , равно нулю, так что мы действительно можем вычеркнуть вторую сумму в выражении для  $w_k$ .

Особое значение этих соображений состоит в том, что  $w_k$  не зависит от того, в каком месте находится отдельный магнит, обозначенный значком  $k$ . Поэтому в выражении (33.4) для  $W$  мы можем заменить суммирование по  $k$  умножением на число магнитов  $nV$ , заключенных в сфере  $(G)$ . В качестве  $k$ -го магнита мы можем специально выбрать магнит, расположенный в центре сферы  $(G)$ . Наконец, мы можем заставить совпасть радиусы  $g$  и  $G$ . Тогда, опуская индекс  $k$ , мы получим:

$$W = n \sum^{(G)} \omega(r_i, \vartheta_i), \tag{33.5}$$

где  $r_i$  есть расстояние  $i$ -го магнита от центра, а  $\vartheta_i$  — угол между  $r_i$  и магнитным моментом.

В решетке правильной системы все дипольные члены в сумме (33.5) взаимно компенсируются вследствие симметрии, в чем легко убедиться на основании соображений, указанных в § 22. Следовательно, при вычислении  $W$  мы можем ограничиться квадрупольными членами. На основании (33.2), мы находим:

$$W = nC\mu^2 a^2 \sum \frac{P_4(\cos \vartheta_i)}{r_i^5}, \tag{33.6}$$

где

$$C = \begin{cases} -1 & \text{в I-м случае,} \\ +3 & \text{во II-м случае.} \end{cases}$$

Если  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$  — направляющие косинусы вектора намагничения, то

$$\cos \vartheta_i = \frac{\alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \alpha_3 z_i}{r_i},$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — компоненты вектора  $r_i$ . Чтобы найти значение суммы (33.6), введем сокращенные обозначения.

$$A = \sum_i \frac{1}{r_i^5}, \quad B = \sum_i \frac{x_i^4}{r_i^9} = \sum_i \frac{y_i^4}{r_i^9} = \sum_i \frac{z_i^4}{r_i^9}. \tag{33.7}$$

Тогда из соображений симметрии, вследствие того, что  $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = r_i^2$ , вытекает:

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{x_i^2}{r_i^7} &= \sum_i \frac{y_i^2}{r_i^7} = \sum_i \frac{z_i^2}{r_i^7} = \frac{A}{3}, \\ \sum_i \frac{x_i^2 y_i^2}{r_i^9} &= \sum_i \frac{y_i^2 z_i^2}{r_i^9} = \sum_i \frac{z_i^2 x_i^2}{r_i^9} = \frac{A}{6} - \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Далее, исчезают все суммы, содержащие нечетные степени  $x_i, y_i$  или  $z_i$  — на том же основании, что и сумма  $\sum_i \frac{x_i y_i}{r_i^5}$  в § 22. Если подставить эти зна-

чения в (33.5), воспользовавшись (33.3), то вследствие того, что  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ , после коротких выкладок мы получим для плотности энергии выражение:

$$W = nC\mu^2 a^2 \frac{35}{8} (A - 5B) \left\{ (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) - \frac{1}{5} \right\}. \quad (33.8)$$

Следовательно, магнитное взаимодействие элементарных магнитов приводит к тому, что плотность энергии зависит от направления (член  $\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2$ ). Впрочем, этот результат, как показывают выводы § 33 б (см. ниже), можно было заранее ожидать из соображений симметрии. Преимущество приведенного здесь вывода состоит в том, что он позволяет указать порядок величины постоянного множителя.

Для специальных кристаллических систем (кубическая решетка с центрированными гранями или с центрированными диагоналями и т. д.) могут быть найдены численные значения сумм, определяемых формулами (33.7); впрочем, мы можем заранее ожидать, что порядок их величины будет  $\frac{1}{b^5}$ , где  $b$  — постоянная решетки. Если мы еще примем во внимание, что  $nb^3$  как раз представляет число магнитов, находящихся в элементарной ячейке решетки, т. е. по порядку величины близко к 1, то, опуская дополнительный член, не зависящий от направления намагничения, мы находим:

$$W = C' M_s^2 \frac{a^2}{b^2} (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2). \quad (33.8a)$$

Порядок величины численного множителя  $C'$  близок к 1. В частности, он зависит от специального вида элементарного магнита (ср. рис. 51) и от типа рассматриваемой решетки правильной системы.

Для зависимости магнитной энергии от кристаллографического направления намагничения мы, следовательно, получаем выражение:

$$F = K (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2). \quad (33.9)$$

Постоянную  $K$  мы можем с одной стороны, получить из нашей приближенной формулы (33.8), а с другой стороны — вывести ее из упомянутых выше измерений фактической кривой намагничения монокристаллов. Согласно (33.9), для кристаллографических направлений (100), (110), (111) мы получаем:

$$\begin{aligned} F_{100} &= 0, \\ F_{110} &= \frac{1}{4} K, \\ F_{111} &= \frac{1}{3} K. \end{aligned}$$

Измерив разность энергий  $F_{111} - F_{100}$  (т. е. площадь, заключенную между двумя кривыми намагничения (100) и (111) на рис. 50), мы получим величину постоянной  $K$ :

$$\frac{1}{3} K = \int_{(111)} H dM - \int_{(100)} H dM.$$

С другой стороны, согласно (33.8) и (33.9), имеем:

$$K \approx M_s^2 \left( \frac{a}{b} \right)^2. \quad (33.10)$$

Следовательно, мы можем воспользоваться этими измерениями для того, чтобы дать порядок величины отношения размеров элементарного

магнита  $a$  к постоянной решетки  $b$  и посмотреть, получим ли мы при этом правдоподобную величину. В следующей таблице даны значения энергии для кристаллических решеток железа и никеля:

	$K$ измеренное	$M_s$	$\frac{a}{b} \approx \sqrt{\frac{ K }{M_s^3}}$
Fe	$4,3 \cdot 10^5$ эрг/см <sup>3</sup> . . . . .	1700	0,36
Ni	$-3,7 \cdot 10^4$ эрг/см <sup>3</sup> . . . . .	500	0,38

В этой таблице приведены значения спонтанного намагничения и вычисленного на основании (33.10) отношения  $a:b$ ; в обоих случаях оно равно приблизительно 1:3. Хотя весь этот расчет не может претендовать на большую строгость и должен быть заменен квантово-теоретическим исследованием <sup>1)</sup>, все же на основании его можно показать, что зависимость энергии намагничения от кристаллографического направления по порядку величины можно свести к чисто магнитным силам. Правда, причина различия знаков для Fe и Ni еще совершенно не выяснена.

Для интерпретации кривых намагничения, приведенных на рис. 50, заметим в частности следующее: очень крутой подъем в начале всех кривых мы должны объяснить тем, что при слабом внешнем магнитном поле намагничение почти беспрепятственно принимает наиболее благоприятное направление — направление самого легкого намагничения. Если, например, поле направлено по диагонали грани, то в случае железа все векторы намагничения сперва принимают направление ребер куба, расположенных ближе всего к данной диагонали. Намагничение, очевидно, при этом составляет с внешним полем угол в 45°. Поэтому мы ожидаем, что первый излом кривой для направления (110) будет при

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} M_s = 0,71 M_s. \quad (33.11)$$

Для намагничения же в направлении диагонали куба мы, в соответствии с вышесказанным, предполагаем первый излом кривой при

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} M_s = 0,58 M_s.$$

Оба эти числа хорошо подтверждаются на опыте.

Е ли мы теперь захотим вычислить весь ход кривой намагничения, то для этого следует определить минимум общей свободной энергии при заданной напряженности  $H$  внешнего магнитного поля. Если  $\vartheta$  — угол между направлением поля и направлением спонтанного

<sup>1)</sup> Попытку такого исследования сделали Bloch и Gentile, Z. f. Physik 70, 395, 1931.

намагничивания  $M_s$ , то угол  $\vartheta$ , относящийся к заданному полю  $H$ , следует определить так, чтобы свободная энергия

$$K(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) - HM_s \cos \vartheta \quad (33.12)$$

имела наименьшее значение. Это вычисление оказывается очень простым для намагничивания в поле, приложенном в направлении (110). В этом случае вектор намагничивания поворачивается в плоскости грани куба, а именно от направления ребра к диагонали грани. Обозначив через  $\varphi$  угол между вектором и ребром куба, мы получаем в этом случае:

$$\alpha_1 = \cos \varphi, \alpha_2 = \sin \varphi, \alpha_3 = 0.$$

Кроме того, угол  $\vartheta$  связан с углом  $\varphi$  соотношением  $\vartheta + \varphi = 45^\circ$ ; следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta + \sin \vartheta), \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta - \sin \vartheta).$$

Отсюда следует:

$$\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2 = \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{1}{4}(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)^2.$$

Если еще положить  $\cos \vartheta = x$ , то свободная энергия (33.12), как функция от  $x$ , оказывается равной

$$\frac{1}{4}K(2x^2 - 1)^2 - HM_s x.$$

Она будет наименьшей при тех значениях  $x = \cos \vartheta$ , для которых

$$4Kx\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = HM_s.$$

Так как  $M = xM_s$ , то это уравнение непосредственно определяет кривую намагничивания ( $M$  как функцию  $H$ ). В частности, мы находим, что насыщение ( $x = 1$ ) достигается при

$$H = 2\frac{K}{M_s},$$

Для железа, при указанной выше энергии  $K$ , насыщение в направлении (110) достигается при  $H = 2 \cdot 4,3 \cdot 10^5 : 1700 = 500$  эрстед.

Дальнейшие подробности относительно теоретических кривых для других направлений намагничивания приведены в исследованиях Акулова, *Z. f. Phys.* 67, 794, 1931 и 69, 78, 1931, а также Р. Ганса, *Ann. d. Physik* 15, 28, 1932.

*б) Зависимость энергии от направления в случае ферромагнитных монокристаллов.* В теории часто встречаются следующие вопросы: кубический кристалл намагничен в направлении  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  до насыщения  $M_s$ . Требуется определить:

1. Как зависит его энергия от направления  $\alpha_i$ ?
2. Как меняются при намагничении размеры кристалла в направлениях  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  (магнетострикция)?
3. Как велико сопротивление электрическому току в направлении  $\beta_i$ ?

4. Пусть кристалл подвергнут однородной деформации  $A_{ik}$  ( $A_{11}$  — растяжение в направлении  $x$  и т. д.;  $A_{ik}$  есть симметричный тензор:  $A_{ik} = A_{ki}$ ). Как зависит энергия от  $\alpha_i$  и  $A_{ik}$ ?

5. Как зависит энергия от  $A_{ik}$ , когда  $M_s = 0$ ?

Пусть все направления отнесены к трем ребрам кристалла кубической системы, выбранным в качестве осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Искомые функции должны удовлетворять требованиям симметрии кубического кристалла. Это означает следующее: представим себе, что заданные векторы и тензоры неподвижны в пространстве, а кристалл повернут, например так, что точка кристалла с координатами  $x_1, x_2, x_3$  после вращения имеет координаты  $x'_1, x'_2, x'_3$  (по отношению к первоначальной системе координат). Пусть старое и новое положения связаны друг с другом ортогональным преобразованием

$$x'_i = \sum_k c_{ki} x_k, \quad (33.13)$$

где, например,  $c_{11}, c_{12}, c_{13}$  — направляющие косинусы первого ребра куба (после вращения) относительно первоначального положения ребер куба и т. д. Компоненты неподвижного в пространстве вектора  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  по отношению к повернутому кристаллу равны

$$\alpha'_r = \sum_p c_{rp} \alpha_p. \quad (33.14)$$

Компоненты тензора  $A_{ik}$  после поворота будут:

$$A'_{rs} = \sum_{p,\sigma} c_{rp} c_{s\sigma} A_{p\sigma}. \quad (33.15)$$

Допустим, что мы нашли одну из искоемых функций. В этом случае мы можем сразу определить ее значение после поворота (33.13), если заменим  $\alpha_i$  и  $A_{ik}$  через  $\alpha'_i$  и  $A'_{ik}$  на основании (33.14) и (33.15). Если же (33.13) представляет „тождественное преобразование“ кристалла, т. е. такое, которое переводит совокупность узловых точек решетки в самое себя, то наши функции не могут при этом измениться. Такими „тождественными преобразованиями“ для правильной кристаллографической системы являются, например, поворот на  $90^\circ$  вокруг одного из ребер и зеркальное отражение в одной из граней куба. В дальнейшем мы воспользуемся, в частности, зеркальным отражением в плоскости  $x_1, x_2$ , а также и в плоскости, содержащей ось  $x_3$  и делящей пополам угол между осями  $x_1$  и  $x_2$ . Для этих „тождественных преобразований“ имеем:

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad c_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (33.16a, b)$$

Требование инвариантности всех физических величин относительно тождественных преобразований до некоторой степени уже позволяет ответить на поставленные выше вопросы, правда — с существенным ограничением: мы должны знать заранее, с каким показателем степени данные векторы и тензоры входят в искомые функции. Определенное заключение об этом мы можем сделать только для вектора  $\beta_i$ ,



о котором речь идет в вопросах 2 и 3. Компоненты этого вектора могут входить в искомые функции только в виде квадратов и произведений по два. Для отрезка  $l$ , имеющего направление  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и меняющего свою длину на  $\delta l$  при деформации кристалла, это непосредственно вытекает из уравнения, справедливого для любой однородной деформации:

$$\delta l = \sum_{i,k} A_{ik} \beta_i \beta_k.$$

Для электрического сопротивления квадратичная зависимость получается из линейного характера закона Ома для анизотропных веществ:  $E_i = \sum_k r_{ik} j_k$  ( $E_i$  и  $j_i = j \beta_i$  — слагающие электрической напряженности и плотности тока, а  $r_{ik}$  — тензор омического сопротивления). Следовательно, для слагающей напряженности по направлению  $\beta_i$  мы можем написать:

$$\sum_i E_i \beta_i = j \sum_{i,k} r_{ik} \beta_i \beta_k.$$

Коэффициент при  $j$  представляет омическое сопротивление  $R_{\beta_i}$  току, идущему в направлении  $\beta_i$ . Следовательно,  $R_{\beta_i}$  тоже всегда зависит от  $\beta$  квадратично.

Теперь ответим на 1-й вопрос. Тожественное преобразование (33.16а) дает перемену знака перед одной из компонент вектора. Следовательно, энергия может содержать величины  $\alpha_i$  только в четной степени. Далее, (33.16б) означает перестановку двух  $\alpha_i$ . Поэтому энергия может содержать квадратичные члены только в комбинации  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ . Эта сумма равна 1, т. е. не дает никакой зависимости от направления. Из четвертых степеней можно составить две комбинации, инвариантные по отношению к (33.16а) и (33.16б):

$$A = \alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 \text{ и } B = \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2.$$

Но так как всегда  $A + 2B = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2 = 1$ , то в действительности мы получаем только одну функцию четвертой степени, например  $B$ . В шестой степени имеются три подходящих выражения, а именно:

$$\alpha_1^6 + \alpha_2^6 + \alpha_3^6; \alpha_1^4 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^4 + \dots \text{ и } \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2.$$

Однако, первое из них, вследствие соотношения  $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^3 = 1$ , может быть выражено через два последние. Кроме того, во втором выражении

$$\alpha_1^4 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^4 = \alpha_1^2 \alpha_2^2 (1 - \alpha_3^2),$$

так что оно может быть заменено через  $B$  и через третье выражение. Следовательно, если энергия содержит  $\alpha_i$  в степени не больше шестой, то она выразится формулой вида:

$$F_K = F_0 + K(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) + K' \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2. \quad (33.17)$$

Таким образом зависимость от направления исчерпывающим образом описывается при помощи двух констант  $K$  и  $K'$ . В приложениях до сих пор пробовали ограничиваться

членами четвертой степени, т. е. одной постоянной  $K$ . По Гансу, однако, результаты опытов могут иногда потребовать введения членов и шестой степени. Впрочем, в дальнейшем мы не будем принимать их во внимание.

Ответ на вопросы 2 и 3. Согласно (33.16а),  $l$  не должно измениться, если одновременно переменить знаки  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  на обратные. Кроме того, согласно (33.16б),  $l$  не должно измениться, если одновременно переставить местами  $\alpha_i$  с  $\alpha_k$  и  $\beta_i$  с  $\beta_k$ . В-третьих, оно должно быть второй степени относительно  $\beta_i$ . Если ограничиться членами, квадратичными по отношению к  $\alpha_i$ , то всем этим требованиям удовлетворяют только два выражения:  $(\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_3^2)$  и  $(\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_2\alpha_3\beta_2\beta_3 + \alpha_3\alpha_1\beta_3\beta_1)$  или их линейные комбинации. Такой комбинацией является, между прочим,

$$\cos^2(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2.$$

Следовательно, длина определяется следующей функцией:

$$l_{\alpha_i, \beta_i} = l_0 [1 + A(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 + B(\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_3^2)] \quad (33.18)$$

с двумя постоянными  $A$  и  $B$ . Аналогичная формула должна иметь место для сопротивления  $R_{\alpha_i, \beta_i}$ , о котором идет речь в вопросе 3, т. е.

$$R_{\alpha_i, \beta_i} = R_0 + R_1(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 + R_2(\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_3^2). \quad (38.19)$$

Ответ на вопрос 4 вытекает из того, что тензор  $A_{ik}$  преобразуется так же, как тензор  $\beta_i\beta_k$ , построенный из единичных векторов  $\beta_i$ . Следует лишь иметь в виду, что „след“ (диагональная сумма) этого тензора ( $\sum \beta_i^2$ ) всегда равна единице, в то время как для  $\sum A_{ii}$  это

условие не имеет места;  $\sum A_{ii}$  есть увеличение объема вследствие однородной деформации. Следовательно, если мы потребуем, чтобы в энергию, о которой идет речь в вопросе 4,  $\alpha_i$  входили в степени не выше второй, а  $A_{ik}$  — линейно, то она может содержать только три величины:

$A_{11} + A_{22} + A_{33}$ ,  $A_{11}\alpha_1^2 + A_{22}\alpha_2^2 + A_{33}\alpha_3^2$  и  $A_{12}\alpha_1\alpha_2 + A_{23}\alpha_2\alpha_3 + A_{31}\alpha_3\alpha_1$ , из которых только последние две зависят от направления  $\alpha_i$ . Невычисленные пока множители при этих величинах мы назовем  $s$  и  $2p$ ; коэффициент при  $A_{11} + A_{22} + A_{33}$ , конечно, также еще совершенно не определен; однако, на основании соображений, которые будут приведены ниже, мы произвольно положим его равным  $-\frac{s}{3}$ .

Тогда мы получаем ответ на вопрос 4 в таком виде:

$$F_A = s \left\{ A_{11} \left( \alpha_1^2 - \frac{1}{3} \right) + A_{22} \left( \alpha_2^2 - \frac{1}{3} \right) + A_{33} \left( \alpha_3^2 - \frac{1}{3} \right) \right\} + \\ + 2p \{ A_{12}\alpha_1\alpha_2 + A_{23}\alpha_2\alpha_3 + A_{31}\alpha_3\alpha_1 \}. \quad (33.20)$$

5-й вопрос относится к упругим свойствам монокристаллов. В границах применимости закона Гука энергия квадратично зависит от  $A_{ik}$ . Из тождественных преобразований (33.16а) вытекает, что в слагаемом виде  $A_{ik}A_{lm}$  каждый значок должен входить только четное число раз. Согласно (33.16б), перестановка местами двух каких-либо

значков не должна изменять значение функции. Существуют только три линейно независимые выражения, которые удовлетворяют этому требованию. Из них мы получаем:

$$F_{\text{упр.}} = \frac{1}{2} C_1 (A_{11} + A_{22} + A_{33})^2 + C_2 (A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{33}^2) + 2C_3 (A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2), \quad (33.21)$$

куда входят три константы упругости  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . В изотропных телах

$$C_2 = C_3 = G, \quad (33.22)$$

где  $G$  — модуль сдвига вещества (англ. rigidity).

*с) Магнетострикция.* До тех пор, пока не действуют внешние силы, равновесное состояние определяется минимумом свободной энергии. В немагнитном веществе, согласно (33.21), энергия есть однородная квадратичная функция от  $A_{ik}$ . Следовательно (так как упругие постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  положительны), ее минимум соответствует деформации, равной нулю ( $A_{ik} = 0$ ). Совершенно иначе обстоит дело в намагниченном кристалле. Здесь, согласно (33.20), энергия содержит также члены, линейные относительно  $A_{ik}$ . При заданных значениях  $\alpha_i$  (которые, например, могут быть обусловлены внешним полем) должна установиться такая деформация, что сумма  $F_A + F_{\text{упр.}}$  будет минимум. Этот минимум соответствует уже не деформации  $A_{ik} = 0$ , а той деформации, для которой имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial A_{ik}} (F_A + F_{\text{упр.}}) = 0. \quad (33.23)$$

Эту деформацию называют магнетострикцией. Практическое значение ее состоит главным образом в том, что она позволяет нам определить введенные выше постоянные  $s$  и  $p$ . Согласно (33.20) и (33.21), первое из уравнений (33.23) ( $i = k = 1$ ) гласит:

$$s \left( \alpha_1^2 - \frac{1}{3} \right) + C_1 (A_{11} A_{22} + A_{33}) + 2C_2 A_{11} = 0.$$

Если записать под ним соответствующие уравнения для  $(i, k) = (2, 2)$  и  $(3, 3)$ , то сложением всех трех уравнений мы получим:

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0.$$

Это означает, что объем тела не изменяется при повороте вектора намагничения. Если бы мы заменили выше в уравнении (33.20) число  $-\frac{s}{3}$  каким-нибудь другим, то пришли бы к результату, что  $A_{11} + A_{22} + A_{33}$  не зависит от  $\alpha_i$ . Таким образом объем зависит разве только от величины, но не от направления вектора  $M_s$ . Положив в (33.20) зависящую от нас постоянную равной  $-\frac{s}{3}$ , мы вводим в качестве недеформированного объема тот объем, который кристалл действительно имеет при данном значении  $M_s$ .

(зависящем только от температуры). Таким образом мы можем сейчас же решить уравнения (33.23) относительно  $A_{ik}$ , и получаем:

$$A_{11} = -\frac{s}{2C_2} \left( \alpha_1^2 - \frac{1}{3} \right), \text{ и т. д.} \quad (33.24)$$

$$A_{12} = -\frac{p}{2C_3} \alpha_1 \alpha_2, \text{ и т. д.}$$

В магнетострикционных опытах всегда измеряется изменение длины, которое испытывает отрезок  $l$ , расположенный в направлении  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Это изменение длины при любых значениях  $A_{ik}$  определяется формулой

$$\delta l = l \sum_{i,k} A_{ik} \beta_i \beta_k.$$

Подставляя значения (33.24), мы получаем:

$$\left( \frac{\delta l}{l} \right)_{\beta_i, \alpha_j} = \frac{s}{6C_2} - \frac{s}{2C_2} (\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2) - \frac{p}{C_3} (\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3 + \alpha_3 \alpha_1 \beta_3 \beta_1), \quad (33.25)$$

что вполне согласуется с приведенными выше соображениями симметрии. Легче всего доступна измерениям так называемая „продольная магнетострикция“, при которой направления  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  совпадают. Обозначив ее через  $\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ , мы получаем (воспользовавшись тождеством  $\sum \alpha_i^2 = 1$ ):

$$\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = -\frac{s}{3C_2} + \left( \frac{s}{C_2} - \frac{p}{C_3} \right) (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2). \quad (33.25a)$$

Отсюда следует для двух наиболее важных кристаллографических направлений:

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0: \quad \lambda_{100} = -\frac{s}{3C_2}. \quad (33.25b)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}: \quad \lambda_{111} = -\frac{p}{3C_3}.$$

	$\lambda_{100}$	$\lambda_{111}$
Fe	$+1,8 \cdot 10^{-5}$	$-1,3 \cdot 10^{-5}$
Ni	$-5,2 \cdot 10^{-5}$	$-2,8 \cdot 10^{-5}$

Если кристалл изотропен в отношении своих упругих свойств, то обе постоянные  $C_2$  и  $C_3$  равны модулю сдвига  $G$ . В этом случае числа  $\lambda_{100}$  и  $\lambda_{111}$  вполне определяют функцию  $F_s$  в (33.20). Для этих направлений измерением были найдены следующие значения:

Пользуясь этими стандартными значениями, мы можем, согласно (33.25a), написать для любого направления:

$$\lambda_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = \lambda_{100} + 3(\lambda_{111} - \lambda_{100})(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2). \quad (33.26)$$

Для того, чтобы выражения (33.25 b) действительно представляли наблюдаемое при насыщении изменение длины, разумеется, необходимо, чтобы  $\delta l$  в совершенно размагниченном состоянии было равно нулю

для любого направления  $\beta_1$ . В размагниченом состоянии кристалл состоит из одних только областей Вейсса, причем каждая область намагничена в одном из наиболее легких направлений (т. е. по ребру куба у железа, по диагонали куба у никеля), и эти возможные направления встречаются одинаково часто. Следовательно, в железе по каждому из шести направлений ребер куба намагничена одна шестая часть всех областей, у никеля же по каждому из 8 направлений диагоналей куба — восьмая часть всех областей. Если подставить соответствующие значения  $\alpha_i$  в (33.25), то окажется, что в обоих случаях среднее значение  $\frac{\delta l}{l}$ , взятое по всем областям, действительно, равно нулю, и притом для любого направления  $\beta_1$ .

Если производить наблюдения не над монокристаллами, а над поликристаллическими агрегатами, то при этом, конечно, будет измеряться среднее значение, взятое по всем кристалликам. При изотропном расположении отдельных кристалликов, мы можем, например, написать:

$$\overline{\alpha_1^2 \alpha_2^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{15}.$$

Поэтому для поликристалла продольная магнетострикция в случае насыщения, согласно (33.26), равна

$$\overline{\lambda} = \frac{3\lambda_{111} + 2\lambda_{100}}{5}. \quad (33.27)$$

В поликристаллическом железе  $\overline{\lambda}$  имеет небольшое отрицательное значение, что полностью согласуется с измерениями. В начале же кривой намагничения наблюдается увеличение длины кристалла, которое только непосредственно перед насыщением переходит в требуемое формулой (33.26) уменьшение длины (эффект Виллари). Это обстоятельство совершенно понятно: в малых полях намагничение состоит ведь только в том, что направление  $M_s$  переходит в наиболее благоприятно расположенные ребра куба. Этот переход, однако, связан с положительной магнетострикцией. И только в более сильных полях  $M_s$  принимает такие направления, которые связаны с отрицательной магнетострикцией

§ 34. Техническая кривая намагничения. Мы видели, каким образом можно объяснить верхнюю часть кривой намагничения монокристаллов (рис. 50) с помощью представления о повороте вектора спонтанного намагничения от направления с наименьшей энергией (ребро куба у железа, диагональ куба у никеля) к направлению поля. Для понимания процесса технического намагничения очень важно то, что преимущественные направления намагничения, согласно (33.20), могут быть обусловлены не только симметрией кристаллов, но также и упругими напряжениями. На основании (33.25), роль таких напряжений тесно связана с магнетострикцией. В упруго деформированном теле направление наиболее легкого намагничения определяется теми значениями  $\alpha_i$ , при которых сумма  $F_K + F_A$  функций (33.17) и (33.20) имеет минимальное значение. При этом, конечно,

от величины деформации зависит, какое из двух слагаемых,  $F_K$  или  $F_A$ , имеет наиболее существенное значение для магнитной структуры. Из приведенных выше цифр вытекает, что при растягивающих усилиях свыше  $10 \text{ кг/мм}^2$  (никель) или  $40 \text{ кг/мм}^2$  (железо) слагаемое, зависящее от деформации, играет преобладающую роль.

Рассмотрим несколько подробнее это влияние напряжений в случае никеля; впрочем мы откажемся от строгого вычисления, а будем вести подсчет так, как будто никель изотропен как в отношении своих упругих, так и в отношении магнетострикционных постоянных. Итак, мы положим  $\lambda_{100} = \lambda_{111} = \bar{\lambda} = -3,7 \cdot 10^{-5}$ . Тогда, согласно (34.20), (33.22) и (33.25b), слагаемое  $F_A$ , зависящее от деформаций в той своей части, которая содержит  $\alpha_i$ , просто равно

$$F_A = -3 G \bar{\lambda} \sum_{i, k} \alpha_i \alpha_k A_{ik}. \quad (34.1)$$

Пусть деформация состоит в том, что проволока, расположенная в направлении  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , подвергается растягивающему усилию. В координатной системе, ось  $x'$  которой расположена в направлении  $\gamma_1$ , мы имели бы в этом случае деформацию

$$A_{11}' = \frac{\sigma}{E}, \quad A_{22}' = A_{33}' = -\frac{\sigma}{E} \mu, \quad A_{ik}' = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Здесь  $E$  — известный из теории упругости модуль Юнга, а  $\mu$  — коэффициент поперечного сжатия. По отношению к первоначальным осям мы тогда получим деформацию

$$A_{ik} = \frac{\sigma}{E} \{(1 + \mu) \gamma_i \gamma_k - \mu \delta_{ik}\}$$

[ср. (33.15)], где  $\delta_{ik} = 1$  при  $i = k$  и  $\delta_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ . Поэтому из (34.1) вытекает:

$$F_A = -\bar{\lambda} \frac{3 G (1 + \mu)}{E} \sigma \left\{ \sum_{i, k} \alpha_i \alpha_k \gamma_i \gamma_k - \frac{\mu}{\mu + 1} \right\}.$$

Воспользовавшись формулой теории упругости  $G(1 + \mu) = \frac{1}{2} E$  и опустив несущественную здесь аддитивную постоянную  $\frac{\mu}{\mu + 1}$ , мы получим:

$$F_A = -\bar{\lambda} \sigma \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta, \quad (34.2)$$

где  $\vartheta$  — угол между направлениями намагничивания ( $\alpha_i$ ) и растягивающего усилия ( $\gamma_i$ ). В случае отрицательной магнетострикции  $\bar{\lambda}$  величина  $F_A$  имеет минимум при  $\vartheta = 90^\circ$ , в случае положительной — при  $\vartheta = 0$ . Следовательно, под действием растяжения предпочтительными направлениями спонтанного намагничивания будут направления, перпендикулярные или параллельные направлению, в зависимости от того, какой знак имеет магнетострикция: отрицательный или положительный. Так как при выводе формулы (34.2) мы рассматривали никель как изотроп-

ное вещество, то эта формула с той же степенью точности будет иметь место и для поликристаллической никелевой проволоки. Следовательно, мы можем ожидать, что достаточно сильное растяжение никелевой проволоки будет ориентировать все области перпендикулярно к ее оси. Наоборот, в случае проволоки, у которой  $\lambda$  везде положительно, что действительно имеет место у некоторых сплавов Ni и Fe, при растяжении должна произойти ориентация параллельно оси проволоки. Уравнение (34.2) позволяет также определить всю кривую намагничения сильно натянутой никелевой проволоки. Если в направлении оси такой проволоки действует еще и магнитное поле  $H$ , то к  $F_k$  надо еще прибавить величину потенциальной энергии —  $M_s H \cos \vartheta$ . Угол  $\vartheta$  должен теперь соответствовать минимуму выражения —  $\frac{3}{2} \bar{\lambda} \sigma \cos^2 \vartheta - M_s H \cos \vartheta$ . Это имеет место в случае отрицательного  $\bar{\lambda}$ , когда

$$\cos \vartheta = \frac{M_s H}{3(-\bar{\lambda})\sigma}.$$

$M = M_s \cos \vartheta$  — компонента намагничения, взятая в направлении проволоки; следовательно,

$$M = \frac{M_s^2 H}{3\sigma(-\bar{\lambda})}.$$

Поэтому теоретическое значение восприимчивости будет

$$\chi = \frac{M_s^2}{3\sigma(-\bar{\lambda})} \quad (34.3)$$

или, на основании приведенных выше численных значений, если  $\sigma$  измерено в  $кг/мм^2$ :

$$\chi = \frac{24}{\sigma}. \quad (34.3a)$$

Измерения Керстена показали, что при большом напряжении  $\sigma$  кривые намагничения действительно вырождаются в прямые линии, почти проходящие через начало координат. Наклоны этих прямых количественно удовлетворяют уравнению (34.3). Правда, полное осуществление условий, нужных для (34.3), практически невыполнимо. Согласно всему нашему выводу,  $\sigma$  должно быть так велико, чтобы можно было пренебречь энергией кристаллической решетки  $F_k$ . Однако, при столь больших напряжениях всегда появляются пластические деформации, а следовательно, и такие перемены в веществе, которые обязательно вызывают нерегулярные внутренние напряжения  $\sigma_i$  по всевозможным направлениям. Эти внутренние напряжения накладываются на приложенное извне напряжение  $\sigma$  и мешают, конечно, одинаковой ориентации областей.

Таким образом мы видим, что во многих случаях увеличение намагничения при возрастании поля действительно может быть описано как постепенный поворот вектора  $M_s$  по направлению поля. Это имеет место в верхней части кривой для монокристаллов при намагничении в „трудном“ направлении, а также для сильно растягиваемого никеля.

В обоих случаях мы имеем сравнительно весьма малые магнитные проницаемости.

Посмотрим теперь, как обстоит дело с гораздо большими проницаемостями, которые имеют место в

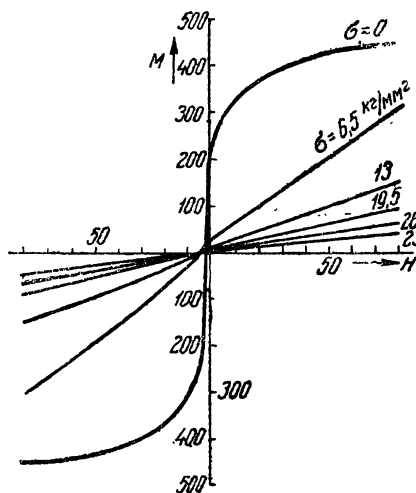


Рис. 52. Кривые намагничивания никелевой проволоки при различных растягивающих усилиях  $\sigma$  (представлена только верхняя часть симметричной петли гистерезиса.)

начале кривых для монокристаллов, а также, в первую очередь, для хорошо прокаленных и технически чистых материалов. Если вычертить кривые для монокристаллов в увеличенном масштабе, то видно, что кривые вовсе не поднимаются в начале вертикально кверху; напротив, всегда наблюдается некоторая конечная начальная проницаемость, не зависящая заметно от кристаллографического направления. Зависимость от направления становится заметной лишь в конце крутого подъема. С точки зрения теории начальной магнитной проницаемости, монокристаллы не являются каким-либо исключением. Исключение они представляют только с точки зрения техники измерений, так как до сих пор точное измерение очень больших проницаемостей было выполнено только для поликристаллических материалов.

Это обстоятельство связано с той важной ролью, которую при всех таких измерениях играет так называемый фактор размагничивания. Если внутрь катушки с током, в которой магнитное поле равно  $H_0$ , поместить вытянутый эллипсоид вращения из исследуемого вещества, то внутри эллипсоида, намагниченного до значения  $M$ , устанавливается меньшее поле, а именно  $H = H_0 - NM$ , причем фактор размагничивания  $N$  обуславливается „магнитными полюсами“ на концах эллипсоида (это  $N$  не имеет никакого отношения к числу Авогадро).

По Кольраушу, для различных значений отношения  $\frac{l}{d}$  (длины к толщине) можно написать:

Из приведенного выше уравнения следует:

$l/d$	10	50	100
$N$	0,25	0,018	0,0054

$$\frac{H_0}{M} = \frac{H}{M} + N$$

или

$$\frac{1}{\kappa_0} = \frac{1}{\kappa} + N.$$

Здесь  $\kappa_0$  — непосредственно измеренная восприимчивость, а  $\kappa$  — та восприимчивость, которая нас интересует с физической точки зрения. Если  $\frac{1}{\kappa}$  значительно



меньше, чем  $N$ , то наблюдаемая восприимчивость определяется только величиной  $N$ . Получаемые до сих пор монокристаллы очень невелики (т. е. имеют большие значения  $N$ ), в то время как в поликристаллах можно сделать  $N$  сколь угодно малым, если применить длинные проволоки или замкнутые кольца. Кроме того, монокристаллы обычно имеют форму цилиндрических стержней, у которых, в противоположность эллипсоиду, размагничивающее действие вообще не может быть описано при помощи одного только числа  $N$ .

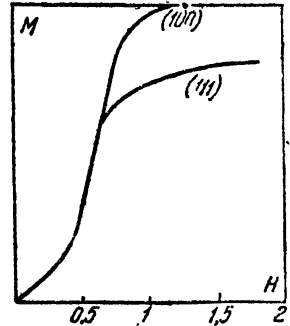


Рис. 53. Начальная часть кривых намагничения для монокристаллов.

Приблизительный расчет показывает, что с помощью представления о вращении могут быть объяснены только малые значения восприимчивости. Ведь уже энергия кристаллической решетки (33.9) или (33.17) так сильно связывает направление намагничения с направлением ребра куба (в железе), что заметное отклонение от этого направления может иметь место только в значительных полях. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, процесс в плоскости (001) (рис. 54). Пусть сначала  $M_s$  направлено по ребру куба (100); попробуем повернуть этот вектор на угол  $\vartheta$  при помощи напряженности  $H$ , направленной под углом  $\eta$  к (100). Положение  $\vartheta$  определяется из условия минимума функции

$$K(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) - HM_s \cos(\vartheta - \eta)$$

$$(\alpha_1 = \cos \vartheta, \alpha_2 = \sin \vartheta, \alpha_3 = 0).$$

Ограничиваясь малыми значениями  $\vartheta$ , мы получаем отсюда выражение

$$K\vartheta^2 - HM_s(\cos \eta + \vartheta \sin \eta),$$

имеющее минимум при

$$\vartheta = \frac{HM_s \sin \eta}{2K}.$$

Поворот вызывает изменение компоненты намагничения, взятой в направлении  $H$ , на  $M_s \vartheta \sin \eta$ . Зависимость от кристаллографического направления, определяемая числом  $K$ , позволяет в лучшем случае (при  $\sin^2 \eta = \frac{1}{2}$ ) довести восприимчивость до величины порядка

$$\chi_K \approx \frac{M_s^2}{4K},$$

откуда, принимая во внимание численные значения на стр. 182, мы получим примерно  $\frac{1700^2}{17 \cdot 10^5} = 1,7$  для железа и  $\frac{500^2}{15 \cdot 10^4} =$

Рис. 54. Зависимость энергии намагничения от направления в плоскости (001) (железо); сплошная кривая — без растяжения, пунктирная — при горизонтальном растяжении.

$= 1,7$  для никеля. В действительности же в чистом железе наблюдается обратимая начальная восприимчивость, доходящая до 400, а у никеля —

до 20. Следовательно, представление о процессе поворота может объяснить в случае железа не более, чем 1% наблюдаемой величины. Поэтому при описании начальной проницаемости мягких в магнитном отношении веществ мы можем вообще не принимать во внимание поворот вектора  $M_s$  относительно ребра куба.

Однако, можно принципиально понять наблюдаемые большие значения восприимчивости, рассматривая поверхность соприкосновения двух соседних областей Вейсса в веществе с малыми внутренними напряжениями. На рис. 54 схематически представлена векторная диаграмма зависимости энергии кристалла железа от направления вектора намагничивания. Под действием, например, небольшого горизонтально направленного растягивающего усилия энергия изменяется таким образом, что горизонтальное направление вектора  $M_s$  становится энергетически несколько выгоднее, чем вертикальное направление. Пусть с такой областью, подвергнутой растягивающему усилию, граничит другая область, которая сжата с боков, в которой вектор  $M_s$ , следовательно, имеет преимущественное направление сверху вниз. Из рис. 55 мы видим, что под действием направленного направо внешнего поля „область растяжения“ будет иметь тенденцию увеличиваться за счет „области сжатия“ [переход „стенки“ из положения (1) в положение (2)]. Если растяжение и сжатие непрерывно переходят друг в друга, то мы фактически получаем модель в виде стенки, квази-упруго привязанной к положению равновесия. Ее способность к смещению будет тем больше,

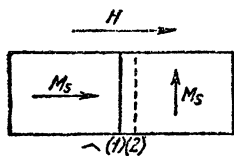


Рис. 55. К объяснению обратной проницаемости.

чем меньше градиент внутренних упругих напряжений  $\sigma_1$ .

Если разобрать это представление подробнее, то можно для случая малых упругих напряжений получить для восприимчивости формулу, которая похожа на формулу (34.3), подробно выведенную выше для растягиваемого никеля; только теперь внешнее растяжение  $\sigma$  должно быть заменено напряжением  $\sigma_1$ , которое можно рассматривать как амплитуду нерегулярных внутренних напряжений, а  $(-\bar{\lambda})$  должно быть заменено надлежаще выбранным средним значением магнетострикции, зависящей от направления. Мы ограничимся здесь этими указаниями, дальнейшие же подробности читатель может найти в специальной литературе.

## Г. ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ МЕТАЛЛОВ

§ 35. Теория свободных электронов по Друде. Прохождение тока через металлы характеризуется тем, что оно не связано с переносом весомого вещества, в противоположность электролитической проводимости, которая всегда приводит к выделению ионов на электродах. Поэтому проводимость металлов должна производиться движением электронов. Необычайно большую проводимость металла по сравнению с другими телами обычно объясняют существованием внутри металла весьма подвижных или „свободных“ электронов проводимости. Эта гипотеза непосредственно подтверждается прекрасными опытами Толмэна, которые были рассмотрены в § 5.

Таким образом, мы приходим к представлению, что металл состоит из положительно заряженных ионов, которые неподвижно стоят на определенных местах, определяемых строением решетки, и из электронов в проводимости, которые с небольшим сопротивлением могут двигаться между этими ионами. При включении электрического поля на беспорядочное (тепловое) движение электронов накладывается направленное движение, которое мы воспринимаем как электрический ток. Заметному увеличению кинетической энергии электронов, соответствующему работе, производимой внешним полем, препятствует взаимодействие с атомами решетки; работа, произведенная полем, проявляется в металле в виде беспорядочного теплового движения (джоулево тепло).

Для того, чтобы из этих представлений вывести количественные заключения об электрических свойствах металлов, мы вынуждены, прежде всего, значительно схематизовать нашу модель. Такая схематизованная модель, которую мы рассмотрим подробно, была впервые предложена Друде и затем усовершенствована Лорентцом, а впоследствии Зоммерфельд подчинил ее требованиям квантовой теории. Эта модель отличается тем, что мы считаем электроны проводимости совершенно свободными, на подобие атомов идеального газа. Мы предполагаем, что в первом приближении влияния остальных электронов и положительных ионов на рассматриваемый электрон проводимости взаимно уравниваются. Это несомненно существующее взаимодействие электрона с другими составными частями металла мы грубо учтем тем, что будем приписывать электрону некоторую среднюю длину свободного пробега  $l$ , в духе кинетической теории газов. Хотя траектории отдельных электронов проводимости в действительности должны быть кривыми линиями, в наших вычислениях мы будем заменять их зигзагообразными траекториями, на отдельных отрезках которых электроны движутся с постоянной скоростью, причем скорость на данном отрезке в среднем совершенно не зависит от скорости на предыдущем отрезке. Длина  $l$  есть средняя длина такого отрезка. При этом положим, как принято и в теории газов, что  $l$ , по крайней мере в первом приближении, не зависит от скорости  $v$ .

Для описания состояния электронов проводимости нужно знать следующие величины:

$n$  — число электронов проводимости в  $1 \text{ см}^3$  металла,

$l$  — длину свободного пробега электрона.

(35.1)

Кроме того, необходимо знать и распределение скоростей. Если обозначить через  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  слагающие скорости  $v$ , то через

$$f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (35.2)$$

мы можем обозначить число электронов проводимости в  $1 \text{ см}^3$ , слагающие скорости которых находятся в интервале от  $\xi$  до  $\xi + d\xi$ , от  $\eta$  до  $\eta + d\eta$ , от  $\zeta$  до  $\zeta + d\zeta$ . Если состояние металла не одинаково во всех его точках, как например при наличии температурного градиента вдоль оси  $x$ -ов или при неоднородности химического состава (место сгоя),

то  $f$  зависит также и от координат; тогда следует пользоваться обобщенной функцией распределения

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) dx dy dz d\xi d\eta d\zeta. \quad (35.2a)$$

Функция распределения (35.2) должна удовлетворять равенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int \int f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = n. \quad (35.3)$$

Если пользоваться обобщенной функцией распределения (35.2a), формула (35.3) дает концентрацию  $n$ , как функцию координат.

Если известна функция  $f(\xi, \eta, \zeta)$ , то можно непосредственно вычислить перенос заряда и энергии, связанные с движением электронов. Вычислим  $x$ -овую компоненту того и другого переноса. Для этого рассмотрим элемент поверхности  $dS$ , расположенный нормально к оси  $x$ -ов, и найдем число электронов  $dZ$  в интервале скоростей от  $\xi$  до  $\xi + d\xi$  и т. д., которые проходят через поверхность слева направо за время от  $t$  до  $t + dt$ . Очевидно, это будут те электроны, которые в момент  $t$  находятся в косом цилиндре с основанием  $dS$  и с высотой  $\xi dt$ . Таким образом мы получаем:

$$dZ = dS \xi dt f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (35.4)$$

Для электронов с отрицательным  $\xi$  мы получим отрицательное значение  $dZ$ . Но такие электроны проходят через поверхность справа налево, так что при суммировании по всем  $\xi, \eta, \zeta$  мы получим разность между числом электронов, прошедших слева направо и прошедших справа налево.

Каждый отдельный электрон переносит через  $dS$  заряд  $e$  и энергию  $\frac{1}{2} m v^2$ . Следовательно, количество электричества, переносимое в секунду через  $1 \text{ см}^2$ , равно

$$j = e \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad (35.5a)$$

а соответствующее количество энергии

$$W = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (35.5)$$

Фактически  $j$  означает плотность тока, а  $W$  — поток тепла. Непосредственно видно, что обе величины равны нулю, если функция  $f$  симметрична по отношению к  $\xi$  [т. е. если  $f(\xi) = f(-\xi)$ ]. Только в том случае, когда симметричность  $f$  нарушается благодаря приложенному электрическому полю или градиенту температуры, появляются потоки, отличные от нуля.

Для вычисления  $j$  и  $W$  прежде всего необходимо составить функцию распределения для случая равновесия (однородный металл при отсутствии поля и градиента температуры) и затем сообразить, как будет

изменяться эта функция в результате внешних возмущений. Прежде чем приводить точные вычисления Лоренца, которые мы рассмотрим в следующих параграфах, сперва составим себе представление об электрической и тепловой проводимости более простым и наглядным способом. Согласно Друде, для такого ориентировочного подсчета можно поступить следующим образом.

Выражение для электрического тока (35.5а) можно переписать в виде

$$j = en\bar{\xi}. \tag{35.6}$$

Для вычисления  $\bar{\xi}$  в присутствии приложенного извне электрического поля  $E$  проинтегрируем уравнение движения

$$m \frac{d\xi}{dt} = eE_x$$

в промежутке времени от 0 до  $t$ :

$$m\xi(t) = m\xi_0 + eE_x t.$$

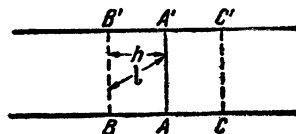


Рис. 56. К вычислению теплопроводности.

Пусть при  $t=0$  электрон претерпевает столкновение. В этот момент не существует никакого преимущественного направления скорости, так что при усреднении для большого числа электронов  $\xi_0$  должно равняться нулю. Возрастание  $\xi$  под влиянием поля  $E$  продолжается до следующего столкновения, т. е. приблизительно до момента  $\tau = \frac{l}{v}$ , где  $l$  означает длину пробега, а  $v$  — скорость электрона. Во всех практически встречающихся случаях прирост скорости  $\frac{e}{m} E_x \tau$  под влиянием поля очень мал по сравнению со скоростью теплового движения, так что при вычислении  $\tau$  мы можем пользоваться независимой от поля скоростью  $v$ . При усреднении величины  $\xi$  по времени мы получаем для отдельного электрона:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \xi(t) dt = \xi_0 + \frac{1}{2} \frac{e}{m} E_x \tau.$$

Следовательно, при усреднении по большому числу электронов плотность тока будет:

$$j = ne\bar{\xi} = \frac{ne^2 l}{2m} \left( \frac{1}{v} \right) E_x.$$

Этому соответствует электрическая проводимость

$$\lambda_{эл} = \frac{ne^2 l}{2m} \left( \frac{1}{v} \right). \tag{35.7}$$

Вводя в эту формулу среднее значение  $\frac{1}{v}$ , мы учитываем то обстоятельство, что скорости различных электронов различны.

Для вычисления теплопроводности мы рассмотрим число электронов  $Z$ , проходящих в течение одной секунды слева направо через  $1 \text{ см}^2$ . Согласно (35.4), оно равно

$$Z = \int_{\xi=0}^{\infty} \xi d\xi \int_{\eta, \zeta=-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta) d\eta d\zeta$$

или короче,

$$Z = \frac{n}{2} |\bar{\xi}|,$$

где  $|\bar{\xi}|$  означает среднее значение абсолютной величины  $x$ -овой компоненты скорости.

Вычислим количество тепла, переносимого через заданную поверхность при отсутствии электрического тока. В этом случае число электронов, проходящих через поверхность с обеих сторон, одинаково. Но мы должны принять во внимание, что электроны, проходящие через сечение  $AA'$  слева направо, испытали последнее столкновение, в среднем, в сечении  $BB'$ , которое находится от  $AA'$  на расстоянии  $h$ . Это расстояние определяется, конечно, длиной свободного пробега, но оно не равно последнему, а несколько меньше, так как при движении электронов все направления равновероятны, и поэтому те электроны, которые проходят через определенное место сечения  $AA'$ , испытали свое последнее столкновение, в среднем, на сфере радиуса  $l$ . Если принять во внимание это обстоятельство, то легко можно показать, что

$$h = \frac{2}{3} l.$$

Итак электроны, пролетающие через сечение  $AA'$  слева направо, в среднем имеют такую кинетическую энергию, какая соответствует сечению  $BB'$ . Таким же образом электроны, проходящие в противоположном направлении, исходят из слоя  $CC'$  с координатой  $x+h$ . Следовательно, для полного потока тепла мы получим:

$$W = \left\{ \left( \frac{m}{2} \bar{v}^2 \right)_{x-h} - \left( \frac{m}{2} \bar{v}^2 \right)_{x+h} \right\} \frac{n}{2} |\bar{\xi}|. \quad (35.8)$$

Наконец, для определения зависимости  $W$  от градиента температуры  $\frac{\partial T}{\partial x}$  мы должны задать функцию распределения  $f$  в явном виде. Согласно классической статистической механике, здесь должно иметь место распределение Максвелла-Больцмана:

$$f_0(\xi, \eta, \zeta) = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2} \frac{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{kT}}, \quad (35.9)$$

из которого, как известно, легко можно вывести соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{m}{2} \bar{v}^2 &= \frac{3}{2} kT, \\ |\bar{\xi}| &= \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}, \\ \bar{v} &= 2 |\bar{\xi}|.\end{aligned}$$

Тогда формула (35.8) принимает вид:

$$W = \frac{n}{4} \bar{v} \frac{3}{2} k \frac{\partial T}{\partial x} 2l,$$

или, так как

$$h = \frac{2}{3} l,$$

то

$$W = \frac{n}{2} \bar{v} k l \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (35.8a)$$

Отсюда видно, что теплопроводность, зависящая от движения электронов, равна

$$\lambda_{\text{тепл}} = \frac{\bar{n} \bar{v}}{2} k l. \quad (35.10)$$

Истинная теплопроводность металла вообще больше, чем только что вычисленная, так как опыт показывает, что даже изолятор, который не имеет свободных электронов, обладает конечной теплопроводностью. Лишь в том случае, когда теплопроводность (35.10) гораздо больше, чем теплопроводность изоляторов, можно думать, что перенос тепла производится главным образом движением свободных электронов.

Мы получим весьма важный результат, хорошо подтверждаемый опытом, если составим отношение двух проводимостей (35.7) и (35.10). Тогда величины  $n$  и  $l$ , характерные для данного металла, сокращаются, и мы имеем:

$$\frac{\lambda_{\text{тепл}}}{\lambda_{\text{эл}}} = m \frac{k}{e^2} \frac{\bar{v}}{\left(\frac{l}{v}\right)}. \quad (35.11)$$

С той же степенью приближения мы можем заменить

$$\frac{\bar{v}}{\left(\frac{l}{v}\right)} \text{ через } \bar{v}^2 = \frac{3kT}{m}.$$

Тогда для искомого отношения (35.11) мы получим значение  $\frac{3k^2}{e^2} T$ . Отсюда, умножив числитель и знаменатель на квадрат числа Авогадро, получаем:

$$\frac{\lambda_{\text{тепл}}}{\lambda_{\text{эл}}} \approx 3 \left(\frac{R}{F}\right)^2 T, \quad (35.12)$$

где  $R$  — обычная газовая постоянная ( $8,31 \cdot 10^7$  эрг/моль-град.), а  $F$  — постоянная Фарадея ( $9650$  эл.-магн. CGS-ед.). Таким образом, в этих единицах имеем:

$$\frac{\lambda_{\text{тепл}}}{\lambda_{\text{эл}}} \approx 2,23 \cdot 10^8 T.$$

Если измерять  $\lambda_{\text{тепл}}$  в м. кал./град. см·сек, а  $\lambda_{\text{эл}}$  в ом<sup>-1</sup> см<sup>-1</sup>, то получается формула, удобная для сравнения с экспериментом:

$$\frac{\lambda_{\text{тепл}} \left\{ \frac{\text{м. кал.}}{\text{град. см·сек}} \right\}}{\lambda_{\text{эл}} \left\{ \frac{1}{\text{ом·см}} \right\}} = 2,23 \cdot 10^8 \cdot \frac{10^{-9}}{4,2 \cdot 10^7} T = 5,3 \cdot 10^{-9} T.$$

Например, при  $T = 300^\circ$  получаем для рассматриваемого отношения значение  $1,6 \cdot 10^{-6}$ , которое мы сравним с соответствующими опытными данными для трех различных металлов.

	$\lambda_{\text{тепл}}$	$\lambda_{\text{эл}}$	$\frac{\lambda_{\text{тепл}}}{\lambda_{\text{эл}}}$
Al	0,48	$1:0,029 \cdot 10^{-4} = 34,5 \cdot 10^4$	$1,39 \cdot 10^{-6}$
Cu	0,90	$1:0,017 \cdot 10^{-4} = 59,0 \cdot 10^4$	$1,53 \cdot 10^{-6}$
Pb	0,08	$1:0,21 \cdot 10^{-4} = 4,8 \cdot 10^4$	$1,68 \cdot 10^{-6}$
		Теоретическое значение по Друде . . . . .	$1,6 \cdot 10^{-6}$

Тот факт, что отношение  $\frac{\lambda_{\text{тепл}}}{\lambda_{\text{эл}}}$  почти одинаково для всех металлов, был впервые отмечен Видеманом и Францем как закон, вытекающий из опыта. Теория Друде дает не только простое объяснение этого факта, но также и численное значение отношения, изумительно хорошо совпадающее с опытом. Поэтому вполне понятно, почему именно этот результат когда-то считали решающим доказательством существования внутри металла электронного газа, описанного Друде. Теперь же можно сказать, что при нашем рассмотрении лишь чисто случайно получилось „правильное“ значение (35.12) для отношения  $\frac{\lambda_{\text{тепл}}}{\lambda_{\text{эл}}}$  в законе Видемана-Франца.

С экспериментальной точки зрения против рассуждения Друде можно сделать очень веское возражение: согласно бoльцмановской функции распределения (35.9), которая лежит в основе всех рассуждений, для электронов должен иметь место „закон равномерного распределения энергии“.

$$\frac{m}{2} \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT.$$



Если число электронов, находящихся в металле, приблизительно равно числу атомов, что можно считать вполне правдоподобным, то наличие этих электронов должно увеличивать удельную теплоемкость металла. Молярная теплоемкость должна была бы равняться не величине

$$3R \approx 6 \frac{\text{м. кал.}}{\text{град. моль}},$$

которой она на самом деле равняется согласно закону Дюлонга и Пти, а величине

$$9 \frac{\text{м. кал.}}{\text{град. моль}}.$$

Кроме того, из формул (35.7) и (35.10) нельзя вывести температурную зависимость для  $\lambda_{\text{эл}}$  и  $\lambda_{\text{тепл}}$ , находимую на опыте. Опыт показывает, что  $\lambda_{\text{эл}}$  пропорционально  $\frac{1}{T}$ , а  $\lambda_{\text{тепл}}$  в первом приближении не зависит от температуры. Таким образом, содержащееся в формуле (35.12) утверждение  $\frac{\lambda_{\text{тепл}}}{\lambda_{\text{эл}}} \approx \text{const} \cdot T$  верно. С другой стороны, в формуле (35.7)  $\bar{v}$  пропорционально  $\sqrt{T}$ , значит, для того, чтобы  $\lambda_{\text{эл}}$  было пропорционально  $\frac{1}{T}$ , стоящее в числителе произведение  $nl$  должно быть пропорционально  $\frac{1}{\sqrt{T}}$ ; но такой зависимости никак нельзя обосновать теоретически.

**§ 36. Метод Лорентца.** Дополним данное в предыдущем параграфе наглядное изложение классической электронной теории, принадлежащее Друде, и покажем, как та же задача более строгим методом решается по Лорентцу; при этом мы встретимся с формулами, которые являются исходными и для более современной теории Зоммерфельда.

Для этого исследуем, как меняется со временем некоторая заданная функция распределения

$$f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)$$

и попытаемся найти такое распределение, при котором эта функция стационарна. Предположим, что на отдельные электроны, вследствие приложенного извне поля  $E_x$  в направлении оси  $x$ -ов действует ускорение

$$X = \frac{e}{m} E_x.$$

Выберем определенный элемент объема  $dx dy dz = d\tau$  и интервал скоростей  $d\xi d\eta d\zeta = dS$  и рассмотрим те причины, по которым может изменяться со временем число электронов

$$Z = f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z) dS d\tau,$$

находящихся в этих пределах. Полное изменение  $\Delta Z$  разложим на два слагаемых:

$$\Delta Z = \Delta_I Z + \Delta_{II} Z,$$

где  $\Delta_I Z$  — изменение, вызываемое поступательным движением электронов и ускорением  $X$ , а  $\Delta_{II} Z$  — изменение, вызываемое столкновениями.

Вычисление  $\Delta_I Z$ . За время  $dt$  координаты каждого электрона меняются, а именно  $x$  переходит в  $x + \xi dt$ ,

$$\begin{array}{l} y \quad \text{„} \quad \text{„} \quad y + \eta dt, \\ z \quad \text{„} \quad \text{„} \quad z + \zeta dt. \end{array}$$

Кроме того, благодаря ускорению  $X$ ,  $\xi$  изменяется на величину  $X dt$ ; что же касается  $\eta$  и  $\zeta$ , то они не меняются. Благодаря этим изменениям, в момент времени  $t + dt$  в заданной области  $dS d\tau$  будут находиться все те электроны, которые в момент времени  $t$  имели координаты  $x - \xi dt$ ,  $y - \eta dt$ ,  $z - \zeta dt$  и скорости  $\xi - X dt$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Таким образом для искомого изменения мы получаем выражение:

$$\Delta_I Z = [f(x - \xi dt, y - \eta dt, z - \zeta dt, \xi - X dt, \eta, \zeta) - f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)] dS d\tau$$

или

$$\Delta_I Z = - \left( \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) dt dS d\tau.$$

Ход вычисления  $\Delta_{II} Z$  мы укажем лишь кратко. Лорентц при вычислении ограничивался одними лишь столкновениями с положительными ионами; последние он рассматривал как идеально твердые, неподвижные шарики. Число  $Z$  каждый раз уменьшается на единицу, когда один из электронов, соответствующих интервалу  $dS d\tau$ , сталкивается с таким шариком. Наоборот,  $Z$  увеличивается на единицу, если электрон, не принадлежащий области  $dS d\tau$ , испытывает такое столкновение, благодаря которому он попадает в эту область. Поэтому  $\Delta_{II} Z$  вновь может быть разложено на два слагаемых:

$$\Delta_{II} Z = -A + B,$$

где  $A$  и  $B$  — числа столкновений описанного только что типа, происходящих за время  $dt$ . При этом Лорентц принимал во внимание только такие столкновения, при которых не менялась абсолютная величина скорости электронов. В этом, конечно, заключается большой недостаток всего этого вычисления; он приводит к тому, что при отсутствии внешнего поля любая функция распределения  $f(\vartheta)$ , зависящая только от абсолютной величины скорости, должна была бы соответствовать равновесию.

Мы ищем то стационарное распределение  $f$ , которое установится при заданных внешних условиях, так что

$$\Delta_I Z + \Delta_{II} Z = 0.$$

Согласно Лорентцу<sup>1)</sup> положим, что функция  $f$  удовлетворяет уравнению:

$$f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z) = f_0(x, \vartheta) + \xi \chi(x, \vartheta), \quad (36.1)$$

<sup>1)</sup> Теория электронов, ОНТИ, Л.-М. 1934, прим. 29, стр. 349 и дальше.

где функции  $f_0$  и  $\chi$  содержат только абсолютную величину скорости. При этом часть  $f_0$ , изотропная по отношению к  $v$ , должна быть велика по сравнению с анизотропным добавочным членом  $\xi\chi$ , рассматриваемым как малое возмущение. Мы приводим без вывода вычисленную Лорентцом с помощью (36.1) величину  $\Delta_{II}Z$ : если  $l$  есть длина свободного пути, то

$$\Delta_{II}Z = -\frac{v}{l} \xi\chi dt dS d\tau.$$

Уже после получения можно наглядно истолковать этот результат следующим образом:  $\frac{v}{l}$  есть число столкновений, которые испытывает отдельная частица в одну секунду. Следовательно,  $v$  частиц за время  $dt$  испытывают  $v \frac{v}{l} dt$  столкновений. Итак,  $\Delta_{II}Z$  учитывает как раз те столкновения, которые испытывает за время  $dt$  количество электронов  $\xi\chi dS d\tau$ , соответствующее несимметричной части функции  $f$ . Если бы не существовало никаких других причин для изменения  $Z$ , то  $\Delta_{II}Z$  имело бы тенденцию уничтожить неизотропную часть распределения  $\xi\chi$ , т. е. вновь восстановить изотропное распределение  $f_0(x, v)$ , при котором столкновения, соответствующие числам  $A$  и  $B$ , компенсируются.

Итак, вследствие (36.1), условие  $\Delta_I Z + \Delta_{II} Z = 0$  для стационарного распределения принимает вид:

$$\frac{v}{l} \xi\chi = -\left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + X \frac{\partial f}{\partial \xi}\right), \quad (36.2)$$

Так как, согласно предположению,  $\xi\chi \ll f_0$ , (33.6), то мы можем в правой части уравнения (36.2) заменить  $f$  через  $f_0$ . Но  $f_0$  зависит от  $\xi$  неявным образом через скорость  $v = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ ; поэтому

$$\frac{\partial f_0}{\partial \xi} = \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{\xi}{v}. \quad (36.3)$$

Тогда в уравнении (36.2)  $\xi$  сокращается. Уравнение принимает вид:

$$\chi(x, v) = -\frac{l}{v} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{X}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v}\right). \quad (36.4)$$

Подставив это значение  $\chi$  в уравнения (35.5a) и (35.5b), мы получим для переноса заряда и тепла следующие выражения:

$$j = e \int \int \int \xi^2 \chi d\xi d\eta d\zeta$$

и

$$W = \frac{m}{2} \int \int \int v^2 \xi^2 \chi d\xi d\eta d\zeta,$$

так как часть интеграла, куда входит  $f_0$ , исчезает вследствие симметрии. Если заменить здесь элемент объема  $d\xi d\eta d\zeta$  пространства скоростей через  $v^2 dv d\omega$ , то этим будет охвачена область  $dS$  всех тех скоростей, величина которых заключена в пределах от  $v$  до  $v + dv$ , а на-

правление— в телесном угле  $d\omega$ ; тогда мы сможем непосредственно взять интеграл

$$\int \int \xi^2 d\omega$$

по единичной сфере в пространстве скоростей. Очевидно, что

$$\int \int \xi^2 d\omega = \int \int \eta^2 d\omega = \int \int \zeta^2 d\omega,$$

а следовательно, при заданной скорости  $v$ ,

$$\int \int \xi^2 d\omega = \frac{v^2}{3} \int \int d\omega = \frac{4\pi}{3} v^2.$$

Значит, для вычисления  $j$  и  $W$  достаточно найти интегралы

$$j = \frac{4\pi e}{3} \int_0^{\infty} v^4 \chi dv \quad (36.5a)$$

и

$$W = \frac{2\pi m}{3} \int_0^{\infty} v^6 \chi dv. \quad (36.5b)$$

Мы вычислим сначала электрический ток в химически и термически однородном веществе. В этом случае  $\frac{\partial f_0}{\partial x} = 0$ ; из уравнения (36.4) для  $\chi$  получается выражение

$$\chi = -\frac{IX}{v^2} \frac{\partial f_0}{\partial v}; \quad (36.6)$$

поэтому, согласно (36.5a),

$$j = -\frac{4\pi e}{3} IX \int_0^{\infty} v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv.$$

Интегрирование по частям дает:

$$j = \frac{8\pi e}{3} IX \int_0^{\infty} v f_0 dv,$$

так как  $v^2 f_0$  исчезает при  $v = 0$  и при  $v = \infty$ . Если мы заменим уско-  
рение  $X$  его значением  $\frac{e}{m} E_x$  и примем во внимание, что, по определению среднего значения, должно иметь место равенство

$$\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{n} \int \frac{1}{v} f_0(v) 4\pi v^2 dv = \frac{4\pi}{n} \int f_0(v) v dv, \quad (36.7)$$

то для плотности тока мы получим:

$$j = \frac{2}{3} \frac{e^2 I n}{m} \left(\frac{1}{v}\right) E_x. \quad (36.8)$$

Таким образом, мы опять получили, не считая числового коэффициента  $4/3$ , выражение (35.7), найденное раньше более простым путем. Подставив

в (36.7) распределение Максвелла-Больцмана (35.9), мы найдем среднее значение (36.7):

$$\left(\frac{1}{v}\right) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v dv = 2 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}.$$

Следовательно, для электропроводности мы получим, согласно (36.8):

$$\lambda_{эл} = \frac{4}{3} \frac{e^2 l n}{\sqrt{2\pi m k T}}. \quad (36.8a)$$

Теплопроводность вычисляется по методу Лоренца следующим образом. В присутствии градиента температуры в направлении оси  $x$ -ов функция распределения  $f_0$  тоже будет зависеть от  $x$ . Это обстоятельство, согласно (36.4) и (36.5), всегда приводит к возникновению электрического тока, если ему не препятствует приложенное поле  $E_x = \frac{m}{e} X$ . Теперь следует решить, измерять ли теплопроводность при токе, равном нулю, или при разности потенциалов, равной нулю. На самом деле измерения обычно производятся при токе, равном нулю, так как при создании градиента температуры в рассматриваемом металле автоматически возникает такое падение электрического потенциала, благодаря которому не может появиться электрический ток. Отсюда вытекает следующий прием для вычисления переноса тепла по формуле (36.5b). Пусть задана изотропная часть функции распределения  $f_0(x, v)$ ; эта часть в общем случае зависит от  $x$ , благодаря тому, что концентрация  $n$  и температура являются функциями от  $x$ . Мы ищем сначала такое поле  $E_x = \frac{m}{e} X$ , которое должно установиться, чтобы, согласно (36.4) и (36.5a), получился ток, равный нулю. Условием для этого будет:

$$0 = \int_0^{\infty} v^4 \chi dv = -l \left\{ \int_0^{\infty} v^3 \frac{\partial f_0}{\partial x} dv + X \int_0^{\infty} v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv \right\}. \quad (36.9)$$

Значение  $X$ , определяемое условием (36.9), следует подставить в (36.4), после чего и вычисляется по (36.5b) поток тепла.

Если мы представим  $f_0$ , согласно классической теории, в виде:

$$f_0(x, v) = A(x) e^{-\beta(x)v^2},$$

то из (36.9) получится уравнение для  $X$ :

$$0 = \frac{dA}{dx} - \frac{2A}{\beta} \frac{d\beta}{dx} - 2A\beta X. \quad (36.9a)$$

С другой стороны, из (36.4) следует:

$$\chi = -\frac{e}{v} \left( \frac{dA}{dx} - A v^2 \frac{d\beta}{dx} - 2A\beta X \right) e^{-\beta v^2};$$

следовательно, принимая во внимание (36.9а), получаем:

$$\chi = -\frac{e}{v} A \frac{d\beta}{dx} \left\{ \frac{2}{\beta} - v^2 \right\} e^{-\beta v^2}.$$

При этом значении  $\chi$  формула (36.5b) дает следующее выражение для потока тепла:

$$W = \frac{2\pi m l A}{3} \frac{d\beta}{\beta^4 dx}.$$

Заменим теперь, по формуле (35.9),  $A$  через  $n \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2}$  и  $\beta$  через  $\frac{m}{2kT}$ ; тогда мы получим для потока тепла:

$$W = -\frac{8}{3} \frac{\ln k^2 T}{\sqrt{2\pi m k T}} \frac{dT}{dx},$$

и для теплопроводности:

$$\lambda_{\text{тепла}} = \frac{8}{3} \frac{\ln k^2 T}{\sqrt{2\pi m k T}}, \quad (36.10)$$

откуда при помощи (36.8а) получается отношение Видемана-Франца:

$$\frac{\lambda_{\text{тепл}}}{\lambda_{\text{эл}}} = 2 \frac{k^2}{e^2} T. \quad (36.10a)$$

Выведенная примитивным путем формула Друде (35.11) имеет коэффициент 3, вместо коэффициента 2, полученного в этом параграфе путем более строгих вычислений. Числа, приведенные на стр. 200, показывают, что коэффициент 3 дает значительно лучшее совпадение с опытом; мы уже указывали, что такое совпадение следует считать случайным, так как в действительности распределение электронов в металле не подчиняется закону Максвелла-Больцмана.

Если нет градиента температуры, т. е. от  $x$  зависит только  $n$ , а не  $T$ , то поток тепла равен нулю. Но зато устанавливается, согласно формуле (36.9а), некоторое падение потенциала  $\varphi(x)$ , которое вызывает ускорение  $X = \frac{e}{m} E_x = -\frac{e}{m} \frac{d\varphi}{dx}$ . При постоянной температуре ( $\frac{d\beta}{dx} = 0$ ) условие отсутствия тока (36.9) имеет вид:

$$\frac{d}{dx} \left( \ln A + \frac{e\varphi}{kT} \right) = 0$$

или

$$\frac{A(x)}{A(0)} = \frac{n(x)}{n(0)} = e^{-\frac{e[\varphi(x) - \varphi(0)]}{kT}}. \quad (36.11)$$

Эта формула дает для разности потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1$  между двумя точками с различной концентрацией электронов  $n_1$  и  $n_2$  следующее выражение:

$$e(\varphi_2 - \varphi_1) = kT \ln \left( \frac{n_1}{n_2} \right). \quad (36.12)$$

Уравнение (36.11) аналогично барометрической формуле; только вместо электрической энергии  $e\varphi$  в барометрическую формулу входит энергия тяготения  $mgh$ . Если применить формулу (36.12) к двум соприкасающимся металлам с различными концентрациями электронов, то она дает существующий на поверхности раздела этих металлов скачок потенциала в случае равновесия. Если же сравнить внутренность металла при заданной концентрации электронов  $n_1$  с окружающим металл пустым пространством, то, при заданном скачке потенциала („работе выхода“), формула (36.12) дает концентрацию электронов  $n_2$  в этом пространстве (давление электронного пара).

Вычислим еще по формуле (36.9а) падение потенциала, связанное с градиентом температуры в однородном веществе ( $n = \text{const}$ ).

Так как  $A = n \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2}$ ,

то

$$- \frac{d\beta}{4\beta^2 dx} + \frac{e}{m} \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{m}{4\beta} + e\varphi = \frac{kT}{2} + e\varphi = \text{const}.$$

Отсюда для падения потенциала внутри неравномерно нагретого металла при отсутствии тока получается равенство:

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} k(T_2 - T_1). \quad (36.13)$$

Если спаян проволочного кольца, составленного из двух металлов, имеют различную температуру  $T$  и  $T'$ , то (36.12) дает значение термоэлектродвижущей силы  $\Phi$ , возникающей благодаря разности двух скачков потенциала:

$$e\Phi = k(T - T') \ln \left( \frac{n_1}{n_2} \right),$$

в то время как падение потенциала (36.13) ничего к результирующей э. д. с. не прибавляет, так как в обоих металлах оно имеет одинаковое значение. Однако, эти формулы не сравнимы с экспериментальными данными, так как положенное в их основу максвелловское распределение скоростей здесь оказывается совершенно непригодным.

**§ 37. Эффект Холла.** Весьма важное для электронной теории металлов явление представляет эффект Холла. Представление о свободных электронах дает как в классической, так, и в квантовой теории чрезвычайно простое выражение коэффициента Холла.

Пусть через металлический стержень толщины  $d$  и ширины  $b$  протекает ток  $I$  в продольном направлении ( $x$ ). Если теперь в направлении оси  $z$  (параллельно ребру  $d$ ) включить магнитное поле  $H$ , то вдоль оси  $y$  возникает разность потенциалов, которая при заданных значениях  $I$  и  $H$  обратно пропорциональна толщине пластинки  $d$ . Гальва

метр, присоединенный к точкам  $A$  и  $B$ , покажет разность потенциалов

$$\Phi = E_y b = R \frac{HI}{d}. \quad (37.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $R$  называется константой Холла для соответствующего металла.

Объяснение этого эффекта весьма просто. Заряды, которые создают идущий направо ток  $I$ , при своем движении через магнитное поле, направленное, как показано на рисунке, все время отклоняются вверх, так как положительные заряды должны двигаться направо, отрицательные же — налево. Следовательно, эти заряды накапливаются в верхней части пластинки до тех пор, пока вызванное ими электрическое поле не уравновесит отклоняющего действия магнитного поля  $H_z$ . Тогда опять наступает стационарное состояние, и ток может течь снова как раз в направлении оси  $x$ -ов. Из предположения, что свободные электроны являются единственными носителями тока, следует, что определенный выше коэффициент Холла  $R$  должен иметь отрицательное значение. Могло бы казаться, что для вывода теоретического значения  $R$  нужно потребовать, чтобы в стационарном состоянии  $u$ -овая компонента силы, действующей на заряды, в среднем равнялась нулю:

$$E_y - \frac{\bar{v}_x}{c} H_z = 0.$$

Однако, на самом деле нам нужно уравнение для среднего смещения в направлении оси  $y$ . Для этого, как будет доказано ниже, получается несколько иное выражение:

$$E_y - \frac{2}{3} \frac{\bar{v}_x}{c} H_z = 0. \quad (37.2)$$

Если  $n$  — число электронов в  $1 \text{ см}^3$  и  $e$  — заряд электрона, то в схеме опыта, изображенной на рис. 57,

$$I = b dne \bar{v}_x.$$

Значит, согласно (37.2), разность потенциалов  $\Phi = E_y b$  между точками  $A$  и  $B$  равна

$$\Phi = \frac{2}{3c} \frac{1}{ne} \frac{HI}{d}.$$

Следовательно, постоянная Холла

$$R = \frac{2}{3c} \frac{1}{ne} \quad (37.3)$$

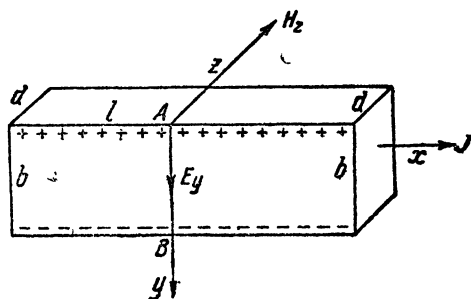


Рис. 57. Схема наблюдения эффекта Холла. Движущиеся в направлении  $x$  заряды отклоняются вверх магнитным полем  $H_z$ .



т. е., если не считать коэффициента  $\frac{2}{3c}$ , просто равна единице, деленной на заряд всех электронов проводимости в  $1 \text{ см}^3$ . В экспериментальной литературе постоянная Холла большей частью указывается в электромагнитных единицах. Измеренное в этих единицах значение  $R_{\text{эл.-м}}$  получается из (37.3) умножением на  $c^2$ . Заряд электрона, измеренный в электромагнитных единицах, равен  $\frac{e}{c}$ . Если считать, что один свободный электрон приходится на каждый атом металла, то заряд свободных электронов в одной грамм-молекуле металла равен — 9650 эл.-магн. ед. Следовательно, если молярный объем ( $= \frac{\text{атомн. вес}}{\text{плотность}}$ ), составляет  $10 \text{ см}^3$ , то  $\frac{ne}{c} = -1000$  и  $R_{\text{эл.-м}} \approx 10^{-3}$ . Если  $Z$  есть число электронов на один атом металла, то, согласно (37.3), следовало бы ожидать, что

$$R = - \frac{1}{9650} \frac{2}{3} \frac{\text{атомный вес}}{Z \cdot \text{плотность}}. \quad (37.3a)$$

Для ряда металлов равенства (37.3) или (37.3a) довольно хорошо дают порядок величины наблюдаемого эффекта Холла. Однако, для некоторых металлов эта простая теория совершенно не оправдывается; например, ненормально большой эффект Холла наблюдается у висмута. Особенно интересно то, что некоторые вещества (Fe, Co, Zn, Cd, Pb) обладают положительной константой Холла, что совершенно не совместимо с представлением о свободных электронах и с принципиальной стороны было объяснено только при помощи квантовой теории.

В нижеследующей таблице мы сравним выводы теории с опытными данными, вычислив для некоторых металлов, на основании наблюдаемых значений  $R_{\text{эл.-м}}$ , число свободных электронов на один атом, т. е. число  $Z$ , необходимое для объяснения выражения (37.3a).

	$R_{\text{эл.-м}} \cdot 10$	Атомный вес	Плотность	$Z$ по (37.3a)
Ag	—0,944	108	10,5	0,75
Cu	—0,609	63,6	8,9	0,8
Al	—0,343	27	2,7	2,0
Au	—0,736	197	19,3	0,9
Pt	—0,230	195	21,4	2,7
Li	—1,70	7	0,53	0,53
Na	—2,50	23	0,97	0,65

Таким образом у этих металлов с „нормальным“ эффектом Холла мы получаем значения  $Z$ , которые в общем изменяются от одного металла к другому примерно так, как можно ожидать на основании химической валентности этих металлов.

Для обоснования уравнения (37.2), объясняющего нормальный эффект Холла, вернемся непосредственно к уравнению движения отдельного свобод-

ного электрона. При постоянных во времени и в пространстве полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  оно имеет вид:

$$m\dot{\mathbf{v}} = e \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \right].$$

Если  $\mathbf{H}$  совпадает с осью  $z$  ( $H_z = H$ ), то

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v}_x &= e \left[ E_x + \frac{v_y}{c} H \right], \\ m\dot{v}_y &= e \left[ E_y + \frac{v_x}{c} H \right], \\ m\dot{v}_z &= eE_z. \end{aligned} \right\} \quad (37.4)$$

Эти уравнения без труда интегрируются. Вводя комплексную переменную  $\zeta = v_x + iv_y$ , мы находим из первых двух уравнений:

$$m\dot{\zeta} = e(E_x + iE_y) - \frac{ieH}{c} \zeta.$$

Вводя еще комплексное электрическое поле

$$E_x + iE_y = E,$$

получаем:

$$\dot{\zeta} = \frac{cE}{iH} + \left( \zeta_0 - \frac{cE}{iH} \right) e^{-\frac{ieH}{cm} t},$$

причем мы распорядились (комплексной) постоянной интегрирования так, что  $\zeta = \zeta_0$  при  $t=0$ . Дальнейшее интегрирование дает  $\xi = x + iy$  как функцию времени; пусть

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \zeta dt,$$

тогда

$$\xi(t) = \xi(0) + \frac{cE}{iH} t + \left( \zeta_0 - \frac{cE}{iH} \right) \frac{cm}{ieH} \left( 1 - e^{-\frac{ieH}{cm} t} \right). \quad (37.5)$$

Это и есть строгое решение для любых значений  $H$  и  $E$ .

Нормальный эффект Холла мы получим, если предположим, что период Лармора, порядок величины которого равен  $\frac{cm}{eH}$ , велик по сравнению с временем  $\tau$  между двумя столкновениями электрона с ионами решетки. В этом случае электроны будут проходить лишь небольшую часть кругового пути, соответствующего данному магнитному полю. Поэтому мы можем считать  $\frac{eH}{cm} t$  малой величиной и заменить экспоненциальную функцию в формуле (37.5) степенным рядом. Для получения всех членов, линейных относительно  $H$ , разложение в ряд следует производить до члена 3-й степени. Для смещения электрона за время  $\tau$  между столкновениями мы найдем (положив  $\eta = \frac{eH}{cm}$ ):

$$\xi(\tau) - \xi(0) = \frac{e}{im} \frac{E}{\eta} \tau + \left( \zeta_0 - \frac{eE}{im\eta} \right) \left( \tau - \frac{1}{2} i\eta\tau^2 - \frac{1}{6} \eta^2\tau^3 + \dots \right).$$

При усреднении по очень большому числу частиц получится  $\bar{\zeta}_0 = 0$ . Следовательно, средняя скорость за время  $\tau$  равна

$$\frac{\overline{\xi(\tau) - \xi(0)}}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} E\tau + \frac{1}{6} \frac{eE}{im} \eta\tau^2 + \dots$$

Вещественная часть уравнения дает:

$$\bar{v}_x = \frac{e}{2m} E_x \tau + \frac{1}{6} \frac{e\eta}{m} E_y \tau^2 + \dots,$$

а мнимая —

$$\bar{v}_y = \frac{e}{2m} E_y \tau - \frac{1}{6} \frac{e\eta}{m} E_x \tau^2 + \dots$$

Подставив в последнее слагаемое значение  $\bar{v}_x$ , мы найдем, ограничиваясь членами первой степени относительно  $\eta$ :

$$\bar{v}_y = \frac{e}{2m} E_y \tau - \frac{1}{3} \eta \tau \bar{v}_x.$$

Условие для эффекта Холла есть

$$\bar{v}_y = 0,$$

или, если подставить значение  $\eta$ ,

$$E_y = \frac{2}{3} \frac{v_x}{c} H,$$

что совпадает с формулой (37.2). Причина того, что при замене среднего приращения скорости средней скоростью появляется коэффициент  $\frac{2}{3}$ , может быть проще всего объяснена следующим образом: так как  $v_x$  возрастает со временем линейно, то, согласно формуле (37.4),  $v_y$  имеет вид

$$\dot{v}_y = a + bt,$$

следовательно,

$$v_y = at + \frac{1}{2} bt^2.$$

При усреднении за время от 0 до  $\tau$  будет  $\bar{v}_y = 0$ , если  $a + \frac{1}{2} b\tau = 0$ ; напротив из выражения  $\bar{v}_y = 0$  следует условие

$$a + \frac{1}{3} b\tau = 0.$$

**§ 38. Тепловая эмиссия электронов. Ток насыщения.** Если металл, находящийся в вакууме, достаточно сильно нагреть, то, приложив соответствующую разность потенциалов, можно наблюдать электронный ток, выходящий из металла. Экспериментальная зависимость тока от приложенной разности потенциалов качественно изображена на рис. 58. При отрицательной разности потенциалов наблюдается сравнительно очень небольшой „начальный ток“, который объясняется тем, что самые быстрые электроны, выходящие из металла, все же проникают через замедляющее поле. Если для выходящих электронов принять максвелловское распределение скоростей, то окажется, что в области больших отрицательных напряжений изменение тока происходит пропорционально

$e^{-\frac{eV}{kT}}$ . В области же положительных разностей потенциалов сначала наблюдается быстрое возрастание тока, а именно, ток возрастает приблизительно пропорционально  $V^{\frac{3}{2}}$ . Эту часть кривой называют областью объемных зарядов. Она находится примерно в интервале напряжений от 0 до  $A$ . С дальнейшим возрастанием напряжения  $V$  начинается пере-

ходная область и, наконец, при напряжениях, больших чем  $B$ , мы достигаем насыщения. Теперь ток при дальнейшем возрастании напряжения остается почти постоянным. Однако, при тщательном наблюдении и при максимальном сильных полях оказывается, что даже и в этой области ток продолжает медленно возрастать с напряжением. Но здесь мы будем этим обстоятельством пренебрегать.

Описанный ход кривой тока в области положительных напряжений, может быть объяснен следующим образом. Как показывает опыт, практически свободные электроны, движущиеся внутри металла, вообще говоря, не могут из него вырваться. Это объяснимо только при одном условии, а именно, если электроны, двигающиеся к поверхности металла, отражаются на его границе существующим там электрическим полем. Следовательно, между внутренностью металла и окружающим его вакуумом должна существовать разность потенциалов  $b$ , которая и отбрасывает большую часть электронов обратно в металл.

До сих пор еще не удалось теоретически вычислить этот потенциальный скачок (а, следовательно, и ту работу  $b$ , которую необходимо затратить, чтобы перевести электрон из металла в вакуум). Часть этой работы, несомненно, совершается силами „электрического изображения“; если электрон  $e$  находится, скажем, на расстоянии  $a$  от плоской поверхности металла, то он испытывает притяжение к индуцированному им самим положительному заряду. Это притяжение равно тому, которое создал бы заряд  $-e$ , находящийся в точке, симметричной

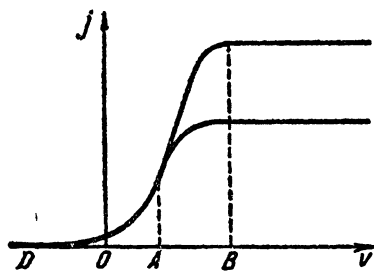


Рис. 58. Ток термоэлектронной эмиссии  $j$  в зависимости от разности потенциалов  $V$  при двух различных температурах. Начальная область —  $DO$ , область объемных зарядов —  $OA$ , насыщение — за  $B$ .

с зарядом  $+e$  относительно поверхности металла, т. е. равно  $\frac{e^2}{4a^2}$ . Для того, чтобы перевести в бесконечность электрон, находящийся уже вне металла, на расстоянии  $a$  от него, необходимо затратить работу  $\frac{e^2}{4a}$ . Это рассуждение, конечно, применимо только к расстояниям, которые велики по сравнению с атомными расстояниями внутри данного металла, т. е. примерно для  $a \geq 10^{-7}$  см. При меньших расстояниях следовало бы пользоваться более детальными представлениями об атоме. При  $a = 10^{-7}$  см та часть работы выхода, которая обусловлена силой электрического изображения, равна

$$b_1 = \frac{e}{4a} = \frac{4,8 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot 10^{-7}} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ эл.-ст. ед.} = 0,36 \text{ вольт;} \quad (38.1)$$

в то же время наблюдаемые значения величины  $b$ , как мы увидим ниже, составляют, примерно, от 2 до 4 вольт.

Наиболее просто можно объяснить ток насыщения. Электрон, который внутри металла движется к его поверхности, может выйти наружу только в том случае, если его кинетическая энергия достаточно велика. Ток насыщения наступает тогда, когда, благодаря достаточно сильному полю, все вылетающие электроны убираются настолько быстро, что не может возникнуть объемный заряд. Этот ток состоит, следовательно, из всех тех электронов, которые попадают на поверхность металла, имея достаточно большую кинетическую энергию.

Если мы направим ось  $x$ -ов нашей координатной системы по нормали к поверхности, то мы должны предположить, что вблизи поверхности существует потенциал, зависящий от  $x$ . Уравнение движения для  $x$ -овой компоненты в этом случае имеет вид:

$$m\dot{\xi} = -e \frac{d\varphi}{dx},$$

или, взяв интеграл для двух точек по обе стороны от поверхности,

$$\frac{m}{2} \xi_2^2 = \frac{m}{2} \xi_1^2 - e(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{m}{2} \xi_1^2 - eb.$$

Поэтому через поверхность будут проникать только те электроны, скорость которых в направлении оси  $x$ -ов превышает определенное значение  $\xi_0$ , где  $\xi_0$  задается условием

$$\frac{m}{2} \xi_0^2 = eb. \quad (38.2)$$

Мы знаем, что  $\xi f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$  есть число тех электронов со скоростями от  $\xi, \eta, \zeta$  до  $\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta$ , которые в одну секунду падают на  $1 \text{ см}^2$  поверхности металла. Эти электроны могут проникнуть через поверхность только в том случае, если  $\xi > \xi_0$ . Следовательно, мы ожидаем, что ток насыщения должен равняться

$$j_s = e \int_{\xi=\xi_0}^{\infty} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \int_{\zeta=-\infty}^{+\infty} \xi f d\xi d\eta d\zeta. \quad (38.3)$$

При распределении Максвелла,

$$f = n \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}, \quad \beta = \frac{m}{2kT},$$

мы получаем интегрированием выражения (38.3) и подстановкой значения  $\xi_0$  из (38.2),

$$j_s = en \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{eb}{kT}} \quad (38.4)$$

или

$$j_s = C \sqrt{T} e^{-\frac{eb}{kT}}, \quad (38.4a)$$

куда входят две характерные для металла постоянные  $C$  и  $b$ . Эта формула для тока насыщения была впервые выведена Ричардсоном.

Если ток  $j_s$  измерен при различных температурах, то формулу (38.4) проще всего проверить, откладывая на графике  $\lg\left(\frac{j_s}{\sqrt{T}}\right)$  как функцию от  $\frac{1}{T}$ :

$$\lg\left(\frac{j_s}{\sqrt{T}}\right) = \lg C - \frac{eb}{k} \frac{1}{T}.$$

Тогда должна получаться прямая линия (рис. 59), которая отсекает на оси ординат отрезок, равный  $\lg C$ , и угол наклона которой определяется формулой  $\operatorname{tg} \psi = \frac{eb}{k}$ . Таким образом наклон  $\psi$  этой кривой дает экспериментальное значение работы выхода.

Объяснение этого же явления с точки зрения квантовой теории, которое будет изложено в § 42, дает, вместо формулы Ричардсона (38.4а), следующее выражение:

$$j_s = BT^2 e^{-\frac{eb}{kT}},$$

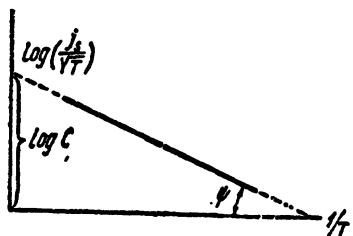


Рис. 59. Температурная зависимость тока насыщения.

куда входит новая постоянная  $B$ , определяемая из теории, и множитель  $T^2$  вместо  $\sqrt{T}$ . С первого взгляда кажется удивительным, что наибольшую трудность представляла задача экспериментально определить, какой множитель стоит перед экспоненциальной функцией —  $T^2$  или  $\sqrt{T}$ . Это можно понять, если в обобщенной формуле

$$j_s = \text{const} \cdot T e^{-\frac{eb}{kT}}$$

попытаться по относительному изменению  $j_s$  при возрастании  $T$  определить неизвестный показатель степени  $\alpha$ . Мы имеем:

$$\frac{d \ln j_s}{dT} = \frac{1}{T} \left( \alpha + \frac{eb}{kT} \right).$$

Если выразить работу выхода  $b$  через „эквивалентную“ ей температуру  $\vartheta$  по формуле  $eb = k\vartheta$ , то рядом с  $\alpha$  стоит отношение  $\frac{\vartheta}{T}$ . При  $b = 4 \text{ В}$  мы, примерно, получаем  $\vartheta = 44000^\circ$ , так что даже при  $T = 2000^\circ$  это отношение еще равно 22. Отсюда видно, что  $j_s$  при всех температурах должно быть измерено очень точно, если мы хотим, чтобы  $\alpha$  было заметно по сравнению с  $\frac{\vartheta}{T}$ . Поэтому для большинства практических задач безразлично, стоит ли в законе электронной эмиссии  $T^2$  или  $\sqrt{T}$ .

Теперь рассмотрим еще другой вывод формулы Ричардсона (38.4а), введя понятие о давлении электронного пара. Если потенциал в вакууме, окружающем металл, больше, чем потенциал внутри металла, на величину  $b$ , то, как мы отметили в (36.11), условие теплового равновесия приводит к обобщенной барометрической формуле для

отношения концентрации электронов  $n_1$  в металле к концентрации  $n_2$  в пустоте:

$$n_2 = n_1 e^{-\frac{eb}{kT}}. \quad (38.5)$$

Итак, пусть при температуре  $T$  в пустоте в состоянии равновесия находится электронный газ с числом электронов  $n_2$  в  $1 \text{ см}^3$ . (При строгом проведении термодинамического расчета, на который здесь мы только намекнули, следует принять во внимание, что пар, находящийся в равновесии на большом расстоянии от металла, электрически нейтрален. Следовательно, он содержит, кроме нейтральных атомов металла и  $n_2$  электронов, еще ровно  $n_2$  положительных ионов. Однако, это обстоятельство не окажет существенного влияния на результат). По простым формулам кинетической теории газов мы можем вычислить, сколько электронов в случае равновесия попадают со стороны вакуума на  $1 \text{ см}^2$  поверхности металла в одну секунду. Число этих электронов равно

$$Z = n_2 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.$$

Из этих  $Z$  электронов часть  $A$  будет поглощаться металлом, а оставшаяся часть  $(1 - A)$  будет отражаться. Так как существует равновесие, то такое же число электронов, т. е.  $Z$ , должно двигаться в направлении от металла в пустоту. При этом оно должно состоять из только что упомянутых отраженных  $1 - A$  электронов и испущенных металлом новых  $A$  электронов. Теперь представим себе быстро действующий „насос“, непрерывно откачивающий все электроны из пустого пространства. Тогда на поверхность металла из пустоты больше уже не попадает ни один электрон, но из металла в вакуум ежесекундно испускается  $AZ$  электронов, в виде „тока электронной эмиссии“. Таким образом, из формулы (38.5) мы получаем термоэлектронный ток насыщения:

$$j_s = Aen\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{eb}{kT}}, \quad (38.6)$$

отличающийся от (38.4) коэффициентом  $A$ , который всегда оказывается лежащим в пределах от 0 до 1. Выше мы обозначили буквой  $A$  вероятность того, что электрон, падающий на металл, проникнет внутрь. Возвращаясь к кинетическому выводу уравнения (38.4), мы можем ту же самую величину  $A$  интерпретировать, как вероятность того, что электрон, летящий изнутри металла к его поверхности и обладающий достаточно большой кинетической энергией для того, чтобы проскочить через эту поверхность, действительно пройдет через эту поверхность. На самом деле в квантовой механике доказывается, что даже и такие электроны обладают некоторой конечной вероятностью отражения от этой поверхности.

**§ 39. Область объемных зарядов.** Теперь мы должны обсудить вопрос, почему на кривой  $(j, V)$  (рис. 58) только-что рассмотренный ток насыщения наблюдается лишь в том случае, когда приложенное напряжение превышает некоторую конечную величину (примерно, вели-

чину  $V$  на рис. 58). Чтобы это понять, заметим, что средняя кинетическая энергия электронов, покидающих катод, имеет порядок величины  $kT$ . (Она равна в точности  $2kT$ , а не  $3/2kT$ , так как на поверхность металла, в среднем, чаще падают быстрые электроны, чем медленные). Температуре  $1000^\circ$  соответствует напряжение порядка 0,1 вольт. Если бы электроны, обладающие столь малыми сравнительно скоростями, должны были переносить весь ток насыщения, то их концентрация  $n$  в пустоте вблизи металла должна была бы стать сравнительно весьма большой. Но с такой концентрацией электронов был бы связан соответственно большой объемный заряд  $\rho = ne$ , который задерживал бы вылетающие из металла электроны. Если не удалять вылетающие электроны при помощи внешнего поля, то образующееся у поверх-

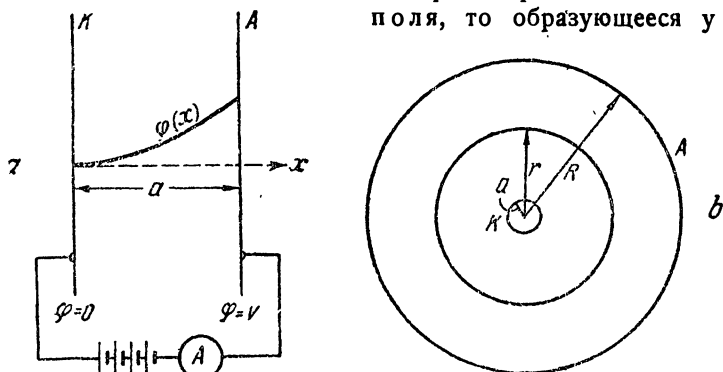


Рис. 60. Вычисление влияния объемных зарядов в плоской (а) и в цилиндрической (б) установках.

ности металла облако объемных зарядов практически вообще не даст возникнуть термоэлектронному току.

Для количественного описания этого явления рассмотрим, согласно Шоттки и Лангмюру, схему на рис. 60а, где между двумя бесконечно длинными пластинками (катод  $K$  и анод  $A$ ) включена определенная разность потенциалов  $V$ . На рис. 60б представлена аналогичная схема, обладающая осевой симметрией (нить накала  $K$  и цилиндрический анод  $A$ ). Обозначим через  $\varphi$  потенциал в какой-нибудь точке между двумя электродами;  $n$  — число электронов в  $1 \text{ см}^3$ ,  $j$  — плотность тока. Для простоты мы с самого начала вообще будем пренебрегать малыми тепловыми скоростями электронов и будем им приписывать на самой поверхности  $K$  скорость, равную нулю. Тогда скорость электрона в какой-нибудь точке пространства определится только пройденной им разностью потенциалов; следовательно, в каждой точке будет иметь место равенство

$$\frac{1}{2} m v^2 = - e \varphi. \quad (39.1)$$

Для самого же потенциала всегда справедливо уравнение

$$\Delta \varphi = - 4 \pi \rho. \quad (39.2)$$



Так как здесь  $\rho$  и  $e$  имеют отрицательные значения, то плотность тока равна

$$j = -\rho v. \quad (39.3)$$

Исключив из этих трех уравнений  $v$  и  $\rho$ , мы получим искомую связь между  $\varphi$  и  $j$ . Из (39.3) и (39.1) следует:

$$-\rho = \frac{j}{v} = \frac{j}{\sqrt{\frac{m}{-2e\varphi}}}$$

и, следовательно, на основании (39.2),

$$\Delta\varphi = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{-e}} \frac{j}{\sqrt{\varphi}}. \quad (39.4)$$

Проинтегрируем это уравнение при следующих пограничных условиях. Пусть катод заземлен; тогда

$$\varphi_K = 0. \quad (39.5a)$$

Кроме того, пусть приложенное напряжение равно

$$\varphi_A = V. \quad (39.5b)$$

В стационарном состоянии должно также выполняться следующее условие:

в случае плоской схемы (рис. 60a)

$$j = J = \text{const},$$

в случае цилиндрической схемы (рис. 60b)

$$2\pi r j = J = \text{const}. \quad (39.5c)$$

В этих формулах  $J$  в случае а означает ток, приходящийся на 1 см<sup>2</sup> плоского катода, а в цилиндрической установке б — это ток на 1 см длины нити. Наконец, последнее и физически наиболее важное условие гласит, что поле на самом катоде должно равняться нулю, т. е.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_K = 0. \quad (39.5d)$$

Для обоснования этого условия заметим следующее. Электроны, покидающие катод, имеют в действительности среднюю кинетическую энергию  $\frac{mv^2}{2} \approx kT$ . Если, несмотря на это, при напряжении  $V = 0$  удается наблюдать только исчезающе малый ток, то это происходит потому, что перед катодом находится отрицательный объемный заряд, который тормозит почти все выходящие электроны. Поэтому мы ожидаем, что на неизвестном пока расстоянии  $x_m$  от катода будет минимум потенциала, равный  $V_m \approx kT$ . Как уже было указано выше, слабый начальный ток может быть обнаружен также и при отрицательных значениях  $V$ , благодаря тому, что в максвелловском распределении скоростей существует некоторое количество электронов, обладающих достаточно большой кинетической энергией. Строго говоря, мы должны бы потребовать, вместо условия (39.5d),

условие минимума энергии на расстоянии  $x_m$  от катода (рис. 61), а вместо условия (39.5d) — наличие разности потенциалов  $V + V_m$  между этим минимумом и анодом  $A$ . Но так как  $x_m$  и  $V_m$  зависят от условий опыта, то мы приближенно удовлетворимся тем, что будем пренебрегать величиной  $x_m$  по сравнению с расстоянием между пластинами и величиной  $V_m$  по сравнению с  $V$ . В дальнейшем мы отчасти устраним эти неточности тем, что в окончательной формуле заменим  $V$  на  $V + V_m$  и расстояние между пластинами  $a$  на  $a - x_m$ .

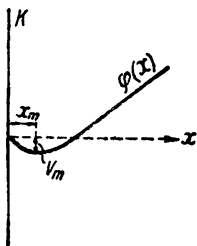


Рис. 61. Распределение потенциала вблизи накаливаемого катода  $K$ .

Выведем сначала общее следствие из уравнений (39.4) — (39.5 d). Прежде всего ясно, что условия (39.5) могут выполняться только при вполне определенном значении  $J$ , так что формулы (39.4) и (39.5) действительно определяют  $J$  как функцию от  $V$ . Предположим теперь, что мы имеем решение  $\varphi_1$  и  $j_1$ , соответствующее приложенному напряжению  $V_1$  и силе тока  $J_1$ . Если  $s$  — произвольное число, то формулы

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= s\varphi_1, \\ j_2 &= s^{3/2}j_1\end{aligned}$$

также дают решение уравнения (39.4) (в этом легко убедиться, сделав соответствующую подстановку), которое удовлетворяет условиям (39.5a) и (39.5d) и приводит к значениям:

$$V_2 = sV_1 \text{ и } J_2 = s^{3/2}j_1.$$

Но из этого следует, что

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{V_2^{3/2}}{V_1^{3/2}} \text{ или } J = \text{const} \cdot V^{3/2}. \quad (39.6)$$

В области объемных зарядов ток растет пропорционально напряжению в степени  $3/2$ . Но этот закон имеет место только до тех пор, пока можно пренебрегать величинами  $x_m$  и  $V_m$ .

Интегрирование уравнения (39.4) в случае плоской схемы выполняется без труда. Из выражения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{-e}} \frac{j}{\sqrt{\varphi}} \quad (39.7)$$

по умножении на  $2 \frac{d\varphi}{dx}$  получается

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 8\pi \sqrt{\frac{2m}{-e}} j \frac{d}{dx} \sqrt{\varphi}$$

или, так как, согласно (39.5a) и (39.5d), на катоде (т. е. при  $x=0$ )  $\varphi$  и  $\frac{d\varphi}{dx}$  исчезают,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left( 8\pi \sqrt{\frac{2m}{-e}} j \right)^{1/2} \varphi^{1/4}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi^{3/4} = \frac{3}{4} \left( 8\pi \sqrt{\frac{2m}{-e}} j \right)^{1/2} x.$$

(Это решение можно получить и непосредственно, если попытаться удовлетворить уравнению (39.7) подстановкой  $\varphi = Cx^y$ ). Следовательно при расстоянии между пластинами  $x = a$  из уравнений (39.4) и (39.5) получаем:

$$J = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{-e}{m}} \frac{V^{3/2}}{a^2}, \quad (39.8)$$

что полностью подтверждает уравнение (39.6). Замечательно в этом уравнении (39.8) то, что коэффициент, стоящий перед  $V^{3/2}$ , зависит только от универсальных постоянных, если не считать расстояния между пластинками. В частности, в формулу не входит ни температура, ни свойства металла, испускающего электроны. Условием правильности этой формулы является то, что вычисленный по уравнению (39.8) ток, соответствующий области объемных зарядов, должен быть малым по сравнению с током насыщения. В самом деле, мы производили вычисления так, как будто ток насыщения бесконечно велик, и, следовательно, фактическая величина тока ограничена только наличием объемных зарядов.

Измерение тока в области объемных зарядов дает возможность произвести по формуле (39.8) совершенно новое определение отношения заряда электрона к массе  $\frac{e}{m}$ . Но такие измерения едва ли возможно осуществить практически с помощью плоской схемы; они осуществимы на цилиндрической установке, схематически изображенной на рис. 60b. По этой причине с практической точки зрения интересно повторить для случая цилиндрической схемы только что приведенное вычисление.

В цилиндрической схеме  $\varphi$  зависит только от радиуса  $r$  наше уравнение (39.4), если принять во внимание (39.5), примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = \sqrt{\frac{2m}{-e}} \frac{J}{r\sqrt{\varphi}},$$

так как

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right).$$

Пограничные условия были приведены уже раньше; они заключаются в следующем: если  $a$  — радиус внутренней нити, а  $R$  — радиус цилиндрического анода, то

$$\varphi_{r=a} = 0, \quad \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=a} = 0.$$

Кроме того,  $\varphi_R - \varphi_a = V$  представляет приложенное напряжение.

Интеграл дифференциального уравнения найти не трудно. Если подставить  $\varphi = Cr^\nu$ , то получается:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = Cv^2 r^{\nu-2}.$$

Для того чтобы это равнялось правой части дифференциального уравнения, необходимо, чтобы

$$r^{\nu-2} = \frac{1}{r^{\frac{\nu}{2}+1}},$$

и, следовательно,  $\nu = \frac{2}{3}$ ; определив отсюда значение постоянной  $C$ , мы находим:

$$\varphi = \left( \frac{9}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{-e}} J \right)^{2/3} r^{2/3}. \quad (39.9)$$

Это уравнение, будучи применено к точкам  $r=R$ , в которых  $\varphi=V$ , дает следующую зависимость между  $J$  и  $V$ :

$$J = \frac{2\sqrt{2}}{9} \sqrt{\frac{-e}{m}} \frac{V^{3/2}}{R}. \quad (39.10)$$

Но хотя функция  $\varphi$ , заданная формулой (39.9), есть решение дифференциального уравнения, она не удовлетворяет пограничному условию на катоде:  $\varphi$  исчезает не при  $r=a$ , а при  $r=0$ ; кроме того, не выполняется условие, что касательная к кривой  $\varphi(r)$  горизонтальна при  $r=a$ ; вместо этого  $\frac{d\varphi}{dr}$  обращается в бесконечность при  $r=0$ . Но не трудно показать, что, несмотря на это, в предельном случае бесконечно тонкой нити накала наше уравнение (39.9) должно быть решением поставленной задачи. В самом деле, в случае конечного тока  $J$  плотность тока и плотность заряда на поверхности такой нити должны быть бесконечно велики. Поэтому кривая потенциала, даже если она у поверхности катода имеет горизонтальную касательную, должна вслед за тем очень быстро подниматься вверх. Итак, при переходе к предельному случаю, когда радиус нити  $a=0$ , мы получаем потенциальную кривую, которая у поверхности проволоки имеет вертикальную касательную.

Если нужно учесть конечный радиус нити накала, то интегрирование можно произвести только с помощью приближенного метода, который мы укажем вкратце. Полезно исходить из решения дифференциального уравнения (39.9) и постараться исправить это решение так, чтобы выполнялись пограничные условия при  $r=a$ , т. е.  $\varphi(a)=0$  и  $\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_a=0$ . Для этого мы напомним  $\varphi$  в виде

$$\varphi = \left( \frac{9}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{-e}} J \right)^{2/3} r^{2/3} \chi,$$

где  $\chi$ , как легко убедиться, должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{7}{3r} \frac{d\chi}{dr} + \frac{4}{9r^2} \left( \chi - \frac{1}{\sqrt{\chi}} \right) = 0.$$

Следует, конечно, ожидать, что при  $r \gg a$  величина  $\chi$  будет очень мало отличаться от 1; с другой же стороны, при  $r = a$  как  $\chi$ , так и  $\frac{d\chi}{dr}$  должны обращаться в нуль.

Метод, которым пользовался Лангмюр<sup>1)</sup> для определения  $\chi$ , состоит в том, что  $\chi$  разлагают в ряд по возрастающим степеням величины  $\gamma = \lg \frac{r}{a}$ . Мы не будем здесь приводить самых вычислений, а укажем лишь их результат: для  $\chi^{3/4}$  получается сравнительно быстро сходящийся ряд

$$\chi^{3/4} = \gamma - \frac{2}{5} \gamma^2 + \frac{11}{120} \gamma^3 - \frac{47}{3300} \gamma^4 + \dots$$

из которого видно, что  $\chi(a) = 0$  и  $\left(\frac{d\chi}{dr}\right)_a = 0$ ; с другой стороны, численные выкладки показывают, что  $\chi(\gamma)$  при  $\frac{r}{a} \approx 20$  отличается от 1 меньше, чем на 1%. Это означает, что практически всегда можно пользоваться приближенным решением (39.10).

**§ 40. Статистика Ферми для электронов в металле.** Изложенная выше классическая теория электронов во многих случаях позволяла нам качественно объяснять экспериментальные факты, в то же время в других случаях она терпела полную неудачу: например, в величине общей теплоемкости металла не наблюдается того увеличения за счет электронов, которого требует теория. Причина этой частичной неудачи классической теории, как мы теперь знаем, заключается в том, что для электронов в металле бoльцмановское распределение скоростей

$$f_0(\xi, \eta, \zeta) = C e^{-\frac{\epsilon}{kT}}, \quad \epsilon = \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

не имеет места. Эту функцию распределения следует заменить распределением Ферми-Дирака; интересующихся строгим выводом мы отсылаем к специальной литературе. Тем не менее, мы попытаемся здесь обосновать введение этой новой функции распределения.

Экспериментальным исходным пунктом является в атомной физике существование заполненных электронных оболочек. Оно объясняется „запретом Паули“, согласно которому на „эквивалентных“ орбитах никак не может находиться два электрона. При этом под „эквивалентными орбитами“ следует понимать такие два состояния отдельных электронов, в которых все их квантовые числа совпадают. Поскольку мы не принимаем во внимание энергию взаимодействия отдельных частиц, мы можем приписать каждой отдельной орбите, дозволенной с квантовой точки зрения, определенную энергию  $\epsilon_k$ . Теперь представим себе, что значения энергий различных орбит даны в виде ряда чисел

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \quad (40.1)$$

причем каждое последующее значение  $\epsilon$  не меньше предыдущего значения. Например, в нормальном атоме значения  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  соответствуют энергии электрона в  $K$ -слое,  $\epsilon_3, \dots, \epsilon_{10}$  — энергии в  $L$ -слое и т. д. Со-

1) J. Langmuir и K. B. Blodgett, Phys. Rev. 24, 49, 1924.

гласно принципу Паули, в рассматриваемой системе может обладать энергией  $\epsilon_n$ , или, как говорят, находиться в  $n$ -ом состоянии, не более чем один электрон. Следовательно, если система должна содержать  $N$  частиц, то состояние с минимальной энергией определяется тем, что первые  $N$  уровней (40.1) заняты, а все последующие — свободны. Общая энергия в этом состоянии должна равняться:

$$E = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_N.$$

Попавшая в систему  $N+1$ -я частица должна обладать, по крайней мере, энергией  $\epsilon_{N+1}$ . Это рассуждение, конечно, очень схематично, поскольку при таком последовательном построении реального атома нужно было бы учесть взаимодействие между электронами. Однако, это рассуждение непосредственно применимо к нашему электронному газу, если только можно пренебречь взаимодействием между электронами.

При переходе к системе с огромным числом уровней и электронов, вместо ряда чисел (40.1), задается функция

$$z(\epsilon) d\epsilon, \quad (40.2)$$

которая указывает, сколько дозволённых значений энергии (или сколько состояний) находится между значениями  $\epsilon$  и  $\epsilon + d\epsilon$ . Состояние всей такой системы частиц может быть достаточно хорошо описано заданием среднего заполнения  $w(\epsilon)$  состояния с энергией  $\epsilon$ , где  $w(\epsilon)$  — число электронов, которое в среднем (т. е. в среднем за большой промежуток времени) находится в состоянии с энергией  $\epsilon$ . Смысл функции  $w$  можно точнее охарактеризовать также и тем, что  $w(\epsilon)z(\epsilon)d\epsilon$  есть число частиц, энергия которых заключена в пределах от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$ . Очевидно, что, согласно принципу Паули, всегда

$$w(\epsilon) \leq 1. \quad (40.3)$$

Если обе функции  $w(\epsilon)$  и  $z(\epsilon)$  известны, то общее число частиц равно

$$N = \int_0^{\infty} w(\epsilon) z(\epsilon) d\epsilon, \quad (40.4)$$

а их общая энергия

$$E = \int_0^{\infty} \epsilon w(\epsilon) z(\epsilon) d\epsilon. \quad (40.5)$$

В состоянии с наименьшей энергией, т. е. при абсолютном нуле температуры,  $w = 1$  для всех тех значений  $\epsilon$ , которые меньше определенной предельной энергии  $\eta$ ; напротив,  $w = 0$  при  $\epsilon > \eta$ . При этом предельная энергия, согласно (40.4), определяется полным числом частиц

$$N = \int_0^{\eta} z(\epsilon) d\epsilon.$$

Для вычисления числа частиц с энергией, заключенной между  $\epsilon$  и  $\epsilon + d\epsilon$ , т. е.

$$F(\epsilon) d\epsilon = w(\epsilon) z(\epsilon) d\epsilon, \quad (40.6)$$

сначала следует определить не зависящее от числа частиц  $N$  и от температуры  $T$  число мест  $z(\epsilon) d\epsilon$ , которыми мы располагаем в интервале от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$ , а затем вероятность заполнения  $w(\epsilon)$ , определяемую главным образом числом частиц  $N$  и температурой  $T$ .

Формально наиболее простой метод вычисления  $z(\epsilon)$  для газа, заключенного в объеме  $V$ , основан на понятии фазового объема. „Фаза“ частицы в смысле статистической механики определяется совокупностью шести чисел  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ , где  $x, y, z$  — координаты частицы, а  $p_x, p_y, p_z$  — три компоненты ее импульса. Фазовым объемом называют участок шестимерного пространства

$$\int dx dy dz dp_x dp_y dp_z.$$

Мы особо рассмотрим фазовый объем  $\Phi$ , который ограничен имеющимся в нашем распоряжении трехмерным объемом  $V = \int dx dy dz$  и, кроме того, тем условием, что абсолютная величина импульса должна быть меньше заданного значения  $p$ . Очевидно,

$$\Phi = V \frac{4\pi}{3} p^3.$$

В этом случае принцип Паули эквивалентен следующему правилу, которого мы здесь не будем обосновывать подробнее: если разделить фазовый объем на отдельные весьма малые ячейки размером  $h^3$ , где  $h = 6,610 \cdot 10^{-27}$  эрг. сек. (постоянная Планка), то каждая такая ячейка может быть занята не более чем двумя частицами. Возможность нахождения в ячейке двух частиц основывается на существовании электронного спина, так как два электрона, эквивалентные в других отношениях, могут отличаться друг от друга тем, что их спин ориентируется параллельно или антипараллельно некоторому приложенному магнитному полю. Таким образом, для числа ячеек  $Z$  в указанном выше объеме получаем:

$$Z = \frac{8\pi}{3} \frac{p^3}{h^3} V, \quad (40.7)$$

или, если мы ограничиваем фазовый объем не импульсом  $p$ , а кинетической энергией  $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ , то

$$Z = \frac{8\pi}{3} \frac{V}{h^3} (2m\epsilon)^{3/2}. \quad (40.7a)$$

Следовательно, число клеток, соответствующих импульсу в пределах от  $p$  до  $p + dp$  или энергии от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$ , определяется формулой

$$z(p) dp = \frac{8\pi V}{h^3} p^2 dp \quad (40.8)$$

или

$$z(\epsilon) d\epsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon. \quad (40.8a)$$

Наконец, формулу (40.8) можно переписать так, чтобы она определяла число ячеек в заданном интервале скоростей  $d\xi d\eta d\zeta$ ; так как  $p^2 = m^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ , то из (40.7) следует, что

$$z(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \frac{2Vm^3}{h^3} d\xi d\eta d\zeta. \quad (40.8b)$$

Следовательно,  $z(\xi, \eta, \zeta)$  есть постоянная, зависящая только от объема и от массы.

Более удовлетворительный в некоторых отношениях вывод формулы (40.7) можно получить с помощью де-бройлевской длины волны  $\lambda = \frac{h}{p}$ , которую приписывают электрону с импульсом  $p$ . При этом рассматривают объем  $V$  кубической формы и считают дозволёнными стационарными состояниями стоячие колебания в этом объеме. Стоит только вычислить из чисто геометрических соображений число собственных колебаний в интервале волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ , как получится (не считая спинового коэффициента 2) выведенное выше выражение (40.7). Заметим, что этот расчет аналогичен тому, который употребляется, согласно Дебаю, для вычисления удельной теплоемкости твердого тела, и которым мы будем пользоваться позднее (см. 68.14) при рассмотрении равновесного излучения.

Для вывода функции  $w(\epsilon)$  мы воспользуемся наглядным, хотя и нестрогим методом (более строгое рассмотрение того же вопроса можно найти в специальной литературе). В классической кинетической теории газов функцию распределения Максвелла можно вывести из рассмотрения столкновений типа

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 \rightleftharpoons \epsilon_1' + \epsilon_2'. \quad (40.9)$$

Это уравнение означает, что две частички с энергиями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  сталкиваются так, что после удара они обладают энергиями  $\epsilon_1'$  и  $\epsilon_2'$ . В равновесном состоянии число столкновений  $S$ , соответствующих чтению формулы слева направо, должно быть равно числу обратных столкновений  $S'$ . Но  $S$  пропорционально числу частиц с энергией  $\epsilon_1$ , а также числу частиц с энергией  $\epsilon_2$ . Поэтому можно ожидать, что

$$S = Cw(\epsilon_1)w(\epsilon_2), \quad (40.10)$$

где  $C$  коэффициент, который может быть вычислен при помощи более строгой теории и, конечно, может зависеть как от  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , так и от  $\epsilon_1'$  и  $\epsilon_2'$ . Таким же образом получаем для столкновений противоположного типа число

$$S' = C'w(\epsilon_1')w(\epsilon_2'). \quad (40.10a)$$

Из более подробных рассуждений в кинетической теории газов получается, что  $C$  всегда равно  $C'$ ; следовательно, из условия равновесия вытекает, что всегда

$$w(\epsilon_1)w(\epsilon_2) = w(\epsilon_1')w(\epsilon_2'),$$

если

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon_1' + \epsilon_2'.$$



Из этого следует, что равенство

$$\omega(\epsilon_1) \omega(\epsilon_2) = \omega(\epsilon_1 - x) \omega(\epsilon_2 + x)$$

должно иметь место при любых  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $x$ . Если продифференцировать последнее уравнение по  $x$  и потом подставить  $x=0$ , то уравнение

$$\left(\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\epsilon}\right)_1 = \left(\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\epsilon}\right)_2$$

выполняется при любых значениях  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Поэтому величина

$$\frac{d \ln \omega}{d\epsilon} = -\beta$$

не должна зависеть от  $\epsilon$ . Следовательно, мы получаем для числа частиц в ячейке выражение

$$\omega(\epsilon) = A e^{-\beta\epsilon}, \tag{40.11}$$

в которое входят две постоянные  $A$  и  $\beta$ . А это вместе с (40.6) и 40.8а) дает как раз распределение Максвелла-Больцмана (если ввести обозначение  $\beta = \frac{1}{kT}$ ).

Как изменить это рассуждение для того, чтобы оно не противоречило принципу Паули? Очевидно, мы должны учесть то обстоятельство, что число  $S$  должно равняться нулю, если  $\omega(\epsilon_1')$  или  $\omega(\epsilon_2')$  равно 1. В этом случае в уравнении (40.9) не может иметь места переход слева направо, так как он привел бы к запрещенному переполнению одной из двух ячеек. Эту зависимость числа  $S$  от заполнения конечного состояния мы проще выразим с помощью следующего соотношения:

$$S = C \omega(\epsilon_1) \omega(\epsilon_2) (1 - \omega(\epsilon_1')) (1 - \omega(\epsilon_2')).$$

Ведь  $1 - \omega(\epsilon_1')$  есть та часть общего числа ячеек с энергией  $(\epsilon_1')$ , которая действительно может быть заполнена в результате рассматриваемого столкновения. Соответственно этому, число обратных столкновений равно

$$S' = C' \omega(\epsilon_1') \omega(\epsilon_2') (1 - \omega(\epsilon_1)) (1 - \omega(\epsilon_2)).$$

Если мы положим также и здесь  $C = C'$ , то теперь условием равновесия будет следующее уравнение (которое мы получим, разделив на произведение всех четырех  $\omega$ ):

$$\left(\frac{1}{\omega(\epsilon_1)} - 1\right) \left(\frac{1}{\omega(\epsilon_2)} - 1\right) = \left(\frac{1}{\omega(\epsilon_1')} - 1\right) \left(\frac{1}{\omega(\epsilon_2')} - 1\right).$$

Таким образом, функция

$$\frac{1}{\omega(\epsilon)} - 1$$

теперь удовлетворяет тому же функциональному уравнению, которому раньше (в случае столкновений, происходящих в согласии с распреде-

лением Больцмана) удовлетворяла функция  $\omega(\varepsilon)$ . Таким же образом, как и раньше, мы получаем:

$$\frac{1}{\omega(\varepsilon)} - 1 = Ae^{\beta\varepsilon}$$

или

$$\omega(\varepsilon) = \frac{1}{Ae^{\beta\varepsilon} + 1},$$

куда входят тоже две постоянные  $A$  и  $\beta$ . Одну из них, а именно  $\beta$ , мы определим, потребовав, чтобы в области  $\omega(\varepsilon) \ll 1$ , т. е. при весьма больших значениях  $\varepsilon$  наше новое распределение переходило в распределение Больцмана: в самом деле, из наших рассуждений, очевидно, следует, что при таких значениях  $\omega$  принцип Паули перестает иметь практическое значение. Следовательно, и здесь мы можем положить  $\beta = \frac{1}{kT}$ . Кроме того, вместо

постоянной  $A$  мы введем другую постоянную  $e^{-\frac{w_i}{kT}}$ . Таким образом, мы получаем формулу распределения Ферми:

$$\omega(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - w_i}{kT}} + 1}, \quad (40.12)$$

которую положим в основу наших дальнейших рассуждений. Сопоставляя результаты (40.8) и (40.12), мы можем теперь написать функцию распределения (40.6) в двух видах:

$$F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{\frac{\varepsilon - w_i}{kT}} + 1} d\varepsilon \quad (40.13)$$

или

$$f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \frac{2Vm^3}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - w_i}{kT}} + 1} d\xi d\eta d\zeta. \quad (40.13a)$$

В обеих формулах еще не вычисленная постоянная  $w_i$  получит определенное значение, если будет задано общее число частиц  $N$ :

$$N = \int_0^{\infty} F(\varepsilon) d\varepsilon = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (40.14)$$

Качественный ход функции  $\omega(\varepsilon)$ , данной уравнением (40.12), можно легко себе представить; очевидно мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \omega(\varepsilon) &= \frac{1}{2} && \text{при } \varepsilon = w_i, \\ \omega(\varepsilon) &\approx 1 - e^{-\frac{w_i - \varepsilon}{kT}} && \text{при } \varepsilon < w_i \text{ и } w_i - \varepsilon \gg kT, \\ \omega(\varepsilon) &\approx e^{-\frac{\varepsilon - w_i}{kT}} && \text{при } \varepsilon > w_i \text{ и } \varepsilon - w_i \gg kT. \end{aligned} \right\} (40.15)$$

При  $T$ , равном нулю, эта кривая переходит в изображенную на рис. 62 ломаную линию  $ABCD$ , углы которой  $B$  и  $C$  при повышении температуры постепенно закругляются. При этом следует заметить, что величина  $w_i$ , определяемая равенством (40.14), тоже меняется с повышением температуры. Уравнение кривой на рис. 62, кроме температуры, содержит только разность  $\epsilon - w_i$ . Так как наименьшее значение кинетической энергии равно нулю, то часть кривой, имеющая физический смысл, начинается при  $\epsilon = 0$ . Поэтому, если число  $w_i$  отрицательно и  $|w_i| \gg kT$ , то кривая  $w(\epsilon)$  начинается лишь в некоторой точке  $D$ , лежащей направо от  $w_i$  и, согласно (40.15), выражается по-

всюду максвелловской формулой  $\text{const} \cdot e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$ . Напротив, для больших положительных значений  $w_i$  мы действительно имеем кривую, похожую на ломаную линию  $ABCD$ ; это означает, что почти все ячейки до значения  $\epsilon = w_i$  заняты, а при  $\epsilon = w_i$  они почти все свободны. Такое отличие от распределения Максвелла называют вырождением.

При абсолютном нуле значение  $w_i$  вытекает непосредственно из формулы (40.7а), если положить  $Z(w_i) = N$ . Если мы опять обозначим число частиц в  $1 \text{ см}^3$  через  $n$  и положим

$$(w_i)_{T=0} = \eta,$$

то

$$\frac{N}{V} = n = \frac{8\pi}{3h^3} (2m\eta)^{3/2}$$

или

$$\eta = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (40.16)$$

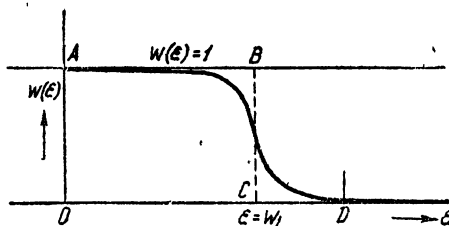


Рис. 62. Распределение Ферми по (40.12).

Для средней энергии при  $T = 0$  получается:

$$\bar{\epsilon}_{T=0} = \frac{\int_0^\eta \epsilon^{3/2} d\epsilon}{\int_0^\eta \epsilon^{1/2} d\epsilon} = \frac{3}{5} \eta. \quad (40.17)$$

Значение  $\eta$ , определяемое соотношением (40.16), т. е. предельная энергия при  $T = 0$ , является фундаментальной константой, в значительной мере характеризующей свойства данного металла. Для электронов в металле формула (40.16) дает довольно большие значения  $\eta$  как вследствие большой концентрации  $n$ , так и вследствие малой величины массы электрона  $m$ ; вычисленные значения  $\eta$ , приведенные в таблице (стр. 228), для большей наглядности сопоставлены с указанной в последнем столбце температурой  $\Theta = \frac{\eta}{k}$ , которая эквивалентна энергии  $\eta$ . В предпоследнем столбце стоит, кроме того, еще число вольт  $V = \frac{\eta}{e}$ , соответствующее вычисленной энергии  $\eta$ .

	Плотность	Атомный вес	Число своб. электр. на 1 атом	$\eta$ (эрг)	$\frac{\eta}{e}$ (вольт)	$\theta = \frac{\eta}{k}$
Na	0,97	23,0	1	$5,0 \cdot 10^{-12}$	3,4	35 500
Au	19,3	197,2	1	$8,8 \cdot 10^{-12}$	5,54	64 000
Cu	8,9	63,6	1	$11,1 \cdot 10^{-12}$	7,00	81 000
Al	2,7	27,0	3	$18,6 \cdot 10^{-12}$	11,6	135 000
			2	$14,2 \cdot 10^{-12}$	8,8	103 000

Смысл формулы (40.16) для максимальной энергии при  $T=0$  можно нагляднее уяснить себе и другим способом, если вычислить соответствующий импульс  $p_0 = \sqrt{2m\eta}$ , или еще лучше, связанную с этим импульсом длину волны де-Бройля  $\lambda_0 = \frac{h}{p_0}$ . Из (40.16) следует:

$$\lambda_0 = \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}. \quad (40.18)$$

Если представить себе  $n$  частиц, расположенных в виде простой кубической решетки, то  $n^{-1/3}$  как раз равно постоянной  $a$  этой решетки. Множитель  $\left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/3}$  приблизительно равен 2, так что приближенно можно писать

$$\lambda_0 \approx 2a. \quad (40.18a)$$

Самая короткая длина волны де-Бройля, существующая еще при абсолютном нуле, приблизительно равна удвоенному среднему расстоянию между двумя соседними частицами. Этот результат полезно иметь в виду при объяснении электрического сопротивления рассеянием волн де-Бройля ионами решетки.

Интегралы, встречающиеся в статистике Ферми, всегда оказываются вида

$$B(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(u) du}{e^{u-\alpha} + 1}, \quad (40.19)$$

где  $\varphi$  — какая-либо функция от  $u$ , о которой мы сделаем специальное предположение, что вблизи точки  $u = \alpha$  она может быть разложена в ряд по возрастающим степеням  $u - \alpha$ . Пусть число  $\alpha$  положительно и велико по сравнению с единицей. Тогда подынтегральное выражение в (40.19) при  $u < \alpha$  в первом приближении равно  $\varphi(u)$ , а при  $u > \alpha$

равно 0. Поэтому мы сначала выделим из  $B(\alpha)$  часть  $\int_0^{\alpha} \varphi(u) du$ ; тогда мы можем написать:

$$B(\alpha) = \int_0^{\alpha} \varphi(u) du - \int_0^{\alpha} \varphi(u) \left\{ 1 - \frac{1}{e^{u-\alpha} + 1} \right\} du + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\varphi(u)}{e^{u-\alpha} + 1} du.$$

Если мы заменим во втором интеграле  $\alpha - u$ , а в третьем  $u - \alpha$  буквой  $z$ , то получим выражение (пока еще совершенно точное):

$$B(\alpha) = \int_0^\alpha \varphi(u) du - \int_0^\alpha \frac{\varphi(\alpha - z)}{e^z + 1} dz + \int_0^\infty \frac{\varphi(\alpha + z)}{e^z + 1} dz.$$

Так как мы предположили, что  $\alpha$  велико по сравнению с единицей, то мы можем во втором интеграле (благодаря знаменателю  $e^z + 1$ ) заменить верхний предел  $\alpha$  на  $\infty$ . Если затем развернуть функцию  $\varphi$  в ряд

$$\varphi(\alpha + z) = \varphi(\alpha) + z\varphi'(\alpha) + \frac{z^2}{2}\varphi''(\alpha) + \dots,$$

то получится:

$$B(\alpha) = \int_0^\alpha \varphi(u) du + 2\varphi'(\alpha) \int_0^\infty \frac{z}{e^z + 1} dz + \frac{1}{3}\varphi'''(\alpha) \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z + 1} + \dots$$

Оставшиеся еще невычисленными определенные интегралы по  $z$  могут быть определены вполне точно. Разлагая  $\frac{1}{e^z + 1}$  в ряд по степеням  $e^{-z}$ , находим:

$$\int_0^\infty \frac{z^\nu dz}{e^z + 1} = \nu! \left( 1 - \frac{1}{2^{\nu+1}} + \frac{1}{3^{\nu+1}} - \dots \right).$$

Такие ряды можно просуммировать с помощью формул, которые выводятся в теории рядов Фурье. Имеем:

$$\int_0^\infty \frac{z dz}{e^z + 1} = \frac{\pi^2}{12} = 0,82, \quad \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z + 1} = \frac{7\pi^4}{120} = 5,71,$$

и, следовательно, для интеграла (40.19) при  $\alpha \gg 1$  получается выражение:

$$B(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\varphi(u) du}{e^{\alpha-u} + 1} = \int_0^\alpha \varphi(u) du + \frac{\pi^2}{6}\varphi'(\alpha) + \frac{7\pi^4}{360}\varphi'''(\alpha) \dots \quad (40.20)$$

Если в частности  $\varphi(u)$  равно, например,  $u^r$ , где  $r$  есть любое положительное число, то из (40.20) вытекает:

$$B_r(\alpha) \equiv \int_0^\alpha \frac{u^r du}{e^{\alpha-u} + 1} = \frac{\alpha^{r+1}}{r+1} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{r(r+1)}{\alpha^2} + \frac{7\pi^4}{360} \frac{(r-2)(r-1)r(r+1)}{\alpha^4} + \dots \right\} \quad (40.20a)$$

Воспользуемся этой формулой для того, чтобы найти явную зависимость величины  $\omega_i$  от  $N$  и  $T$ , неявно даваемую формулами (40.13) и (40.14),

и чтобы определить энергию как функцию от температуры. Если ввести концентрацию электронов  $n = \frac{N}{V}$ , то (40.14) принимает вид:

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{V \epsilon d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon - w_i}{kT}} + 1}.$$

Средняя энергия электрона будет

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon - w_i}{kT}} + 1}}{\int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon - w_i}{kT}} + 1}}.$$

Отсюда, пользуясь функцией  $B_r(x)$  (40.20a), мы получим:

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2mkT)^{3/2} B_{3/2}\left(\frac{w_i}{kT}\right); \quad \bar{\epsilon} = kT \frac{B_{5/2}\left(\frac{w_i}{kT}\right)}{B_{3/2}\left(\frac{w_i}{kT}\right)}.$$

Если подставить сюда (40.20a), развернуть все выражение в ряд по возрастающим степеням малого числа  $\frac{kT}{w_i}$  и ввести вместо  $n$  характерную предельную энергию  $\eta$  по формуле (40.16), то получится:

$$\eta = w_i \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{w_i}\right)^2 + \dots \right\} \quad (40.21)$$

и

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{5} w_i \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{w_i}\right)^2 + \dots \right\}. \quad (40.22)$$

Решение уравнения (40.21) относительно  $w_i$  в нашем приближении гласит:

$$w_i = \eta \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\eta}\right)^2 \right\}. \quad (40.23)$$

Значит, согласно (40.22),

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{5} \eta \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\eta}\right)^2 \right\}. \quad (40.24)$$

Формула (40.23) показывает, как зависит в случае сильного вырождения параметр  $w_i$ , входящий в распределение Ферми (40.13), от постоянной  $\eta$ , характеризующей данное вещество, и от температуры.

Применим еще выражение (40.24) для определения удельной теплоемкости газа Ферми. Из (40.24) следует, что удельная теплоемкость, отнесенная к одному электрону, равна

$$\frac{\bar{\epsilon}}{dT} = \frac{\pi^2 k^2 T}{2 \eta} = \frac{3}{2} k \left( \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{\Theta} \right), \quad (40.25)$$

где  $\Theta$  есть соответствующая энергии  $\eta$  температура, приведенная в таблице на стр. 228. Удельная теплоемкость газа Ферми при

температуре  $T$  отличается от теплоемкости идеального газа в классической теории множителем  $\frac{\pi^2}{3} \frac{T}{\Theta}$ .

Таким образом, благодаря введению статистики Ферми отпадает наиболее веское возражение, которое можно было сделать против классической электронной теории металлов. В самом деле, согласно (40.25), доля общей удельной теплоемкости металла, приносимая движением электронов, примерно в 100 раз меньше чем по классической теории. Поэтому при сравнительно небольшой точности, с которой вообще выполняется для металлов закон Дюлонга-Пти, эту поправку к удельной теплоемкости обнаружить невозможно. Иначе будет обстоять дело, если перейти к весьма низким температурам. В этом случае согласно (40.25), удельная теплоемкость свободных электронов зависит от температуры линейно, в то время как удельная теплоемкость твердых тел, зависящая от колебаний решетки, как известно, изменяется пропорционально третьей степени  $T$ . Таким образом, всегда можно найти такую температуру, при которой теплоемкость, обусловленная электронным газом металла, будет велика по сравнению с теплоемкостью, создаваемой колебаниями решетки. Следовательно, в такой области температур формула (40.25) может быть экспериментально проверена. Подобные измерения были произведены Ф. Зимоном (F. Simon). При этом было установлено, что даже и та теплоемкость электронов, которая определяется формулой (40.25), в действительности не существует. Это обстоятельство можно объяснить только тем, что спектр энергии вполне свободных электронов, указанный нами в формуле (40.8), не существует в действительности, а искажается вследствие взаимодействия с ионами решетки. См. подробные исследования Блоха, Пайерльса и др.

**§ 41. Теория электропроводности и теплопроводности по Зоммерфельду.** Попробуем теперь, следуя идеям Зоммерфельда, применить законы, изложенные в предыдущих параграфах, к свободным электронам, движущимся внутри металла. Для этого мы просто заменим во всех рассуждениях §§ 35—39 функцию распределения Максвелла (35.9) функцией распределения Ферми (40.13). В остальном мы не будем менять наших рассуждений и, в частности, примем без всякого изменения понятие средней длины пути  $l$ . При этом мы всегда будем считать  $l$  независимым от  $v$ .

В действительности такая зависимость несомненно существует; кроме того, предположение о совершенно свободных электронах в металле является лишь очень грубым приближением к действительности. Поэтому самое большое, чего мы можем ожидать от дальнейшего вычисления, это—качественное описание процессов, происходящих в металле, но отнюдь не количественное совпадение результатов теории с опытом.

Для начала мы будем исходить из более грубого метода Друде, чтобы выяснить с качественной стороны, что должно измениться при вычислении электропроводности и теплопроводности. Прежде всего заметим, что при выводе формулы (35.7) мы вообще не пользовались функцией распределения. Поэтому соотношение

$$\lambda_{\text{эл}} = \frac{ne^2 l}{2m} \left( \frac{1}{v} \right)$$

остается без изменений. Формула (35.8) для переноса тепла в основном тоже остается верной. Если мы заменим входящее туда выражение  $\frac{m}{2} v^2$  через  $\bar{\epsilon}$ , то получим, как и прежде, формулу:

$$\lambda_{\text{тепл.}} \approx \frac{1}{3} n \bar{v} l \frac{d\bar{\epsilon}}{dT},$$

которая при классическом значении  $\frac{d\bar{\epsilon}}{dT} = \frac{3}{2} k$  совпадает с формулой (35.10). Теперь же сюда следует подставить, согласно (40.25), значение атомной теплоемкости по Ферми, которое гораздо меньше. Пусть будут заданы значения  $n$  и  $l$ ; тогда замена классического распределения распределением Ферми вызовет следующие изменения: кинетическая энергия увеличится приблизительно в  $\frac{\Theta}{T}$  раз, где  $\Theta = \frac{w_i}{k}$  означает температуру, приведенную в таблице на стр. 228; следовательно,  $\bar{v}$  увеличится в  $\sqrt{\frac{\Theta}{T}}$  раз. Наоборот,  $\frac{d\bar{\epsilon}}{dT}$  уменьшится в  $\frac{\Theta}{T}$  раз. Таким образом, в окончательном результате и  $\lambda_{\text{эл}}$  и  $\lambda_{\text{тепл.}}$  уменьшатся в  $\sqrt{\frac{\Theta}{T}}$  раз по сравнению с классической теорией, так что порядок величин коэффициентов в законе Видемана-Франца в обеих теориях должен быть одинаковым.

Для более точного вычисления воспользуемся снова методом Лоренца, который мы ввели в § 36. Мы можем даже непосредственно применить полученные формулы, если только вместо функции  $f_0(\xi, \eta, \zeta)$  подставим не (35.9), а функцию Ферми

$$f_0 = \frac{2m^3}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}mv^2 - w_i} + 1}. \quad (41.1)$$

Тогда выражение (36.1) для функции распределения при наличии электрических или тепловых возмущений, а также условие (36.4) стационарности этой функции и выражения (36.5) переноса заряда и тепла останутся в силе. Формула (36.8)

$$\lambda_{\text{эл}} = \frac{2}{3} \frac{e^2 l n}{m} \left( \frac{1}{v} \right)$$

тоже останется верной, если мы только будем вычислять  $\left( \frac{1}{v} \right)$ , исходя из нового распределения. До тех пор, пока мы не имеем дела с очень высокими температурами ( $T \ll \Theta$ ), мы можем пользоваться значением  $\left( \frac{1}{v} \right)$  при абсолютном нуле. Из формулы  $\frac{1}{2} m v^2 = \epsilon$  следует:

$$\left( \frac{1}{v} \right) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right).$$



Но при  $T = 0$  имеем:

$$\frac{1}{\varepsilon^{-1/2}} = \frac{\int_0^{\eta} e^{-\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^{\eta} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon} = \frac{3}{2} \eta^{-1/2},$$

так что получается формула

$$\lambda_{эл} = \frac{e^2 l n}{\sqrt{2m\eta}}, \quad (41.2)$$

которая, как и следовало ожидать, по сути отличается от классической формулы (36.8а) лишь тем, что вместо  $kT$  стоит  $\eta$ . Для вычисления теплопроводности мы должны снова, пользуясь уравнением (36.4), определить функцию

$$\chi(x, v) = -\frac{l}{v} \left( \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{X}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right), \quad (41.3)$$

исходя из того, что  $f_0$  заданным образом зависит от координат, и что поле  $E_x = \frac{m}{e} X$  как раз таково, что плотность тока, вычисленная по формуле (36.5а), равна нулю. Специальный вид (41.1) функции  $f_0$  позволяет легко преобразовать выражение (41.3). Функция

$$f_0 = \frac{2m^3}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - w_i}{kT}} + 1} \quad (41.4)$$

содержит  $x$  лишь постольку, поскольку  $w_i$  и  $T$  зависят от  $x$ . Кроме того, имеет место равенство

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} m v, \quad (41.5)$$

так как

$$\frac{1}{2} m v^2 = \varepsilon.$$

Заметим также, что  $f_0$  содержит  $\varepsilon$ ,  $w_i$  и  $T$  только в комбинации  $\frac{\varepsilon - w_i}{kT}$ .

Поэтому

$$\frac{\partial f_0}{\partial w_i} = -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f_0}{\partial T} = -\frac{\varepsilon - w_i}{T} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (41.5а)$$

Таким образом, на основании (41.3), мы получаем для  $\chi$ , пока еще в самом общем виде, следующее выражение:

$$\chi(x, v) = \frac{l}{v} \left( \frac{dw_i}{dx} - eE_x + \frac{\varepsilon - w_i}{T} \frac{dT}{dx} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$

Отсюда можно будет вычислить  $j$  и  $W$ , согласно (36.5). Если мы преобразуем встречающиеся там интегралы по  $v$  в интегралы по  $\varepsilon$ , то следует положить

$$v^3 dv = \frac{2}{m^2} \varepsilon d\varepsilon \quad \text{и} \quad v^5 dv = \frac{4}{m^3} \varepsilon^2 d\varepsilon.$$

Тогда мы получим плотность тока

$$i = e \frac{8\pi l}{3m^2} \left[ \left( \frac{dw_i}{dx} - eE_x - \frac{w_i}{T} \frac{dT}{dx} \right) \int_0^\infty \varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \int_0^\infty \varepsilon^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \right] \quad (41.6)$$

и поток тепла

$$W = \frac{8\pi l}{3m^2} \left[ \left( \frac{dw_i}{dx} - eE_x - \frac{w_i}{T} \frac{dT}{dx} \right) \int_0^\infty \varepsilon^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \int_0^\infty \varepsilon^3 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \right]. \quad (41.7)$$

Интегрирование по частям дает:

$$\int_0^\infty \varepsilon^r \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = -r \int_0^\infty \varepsilon^{r-1} f_0 d\varepsilon.$$

Отсюда, принимая во внимание формулы (40.20а) и (41.4), получаем:

$$\int_0^\infty \varepsilon^r \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = -\frac{2m^3}{\hbar^3} w_i r \left( 1 + \frac{r(r-1)\pi^2}{6} \left( \frac{kT}{w_i} \right)^2 \right).$$

Если ввести еще концентрацию  $n$  свободных электронов по формуле (40.16):

$$n = \frac{8\pi}{3} \frac{(2m\eta)^{3/2}}{\hbar^3},$$

то после простых выкладок мы получим плотность электрического тока

$$j = \frac{eln}{\sqrt{2m\eta}} \frac{w_i}{\eta} \left\{ eE_x - \frac{dw_i}{dx} - \frac{\pi^2}{3} \frac{kT}{w_i} \frac{d(kT)}{dx} \right\} \quad (41.6a)$$

и поток тепла

$$W = \frac{w_i ln}{\sqrt{2m\eta}} \frac{w_i}{\eta} \left\{ \left( eE_x - \frac{dw_i}{dx} \right) \left( 1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{kT}{w_i} \right)^2 \right) - \frac{2\pi^2}{3} \frac{kT}{w_i} \frac{d(kT)}{dx} \right\}. \quad (41.7a)$$

Следовательно, при отсутствии тока ( $j=0$ ) должно иметь место равенство

$$eE_x - \frac{dw_i}{dx} - \frac{\pi^2}{3} \frac{kT}{w_i} \frac{d(kT)}{dx} = 0. \quad (41.8)$$

В этом случае поток тепла в первом приближении будет

$$W = -\frac{\pi^2}{3} \frac{lnk^2T}{\sqrt{2m\eta}} \frac{dT}{dx}, \quad (41.9)$$

а теплопроводность

$$\lambda_{\text{тепл}} = \frac{\pi^2 \ln k^2 T}{3 \sqrt{2m\eta}}. \quad (41.10)$$

Сопоставляя (41.2) и (41.10), получаем закон Видемана-Франца в теории Зоммерфельда:

$$\frac{\lambda_{\text{тепл}}}{\lambda_{\text{эл}}} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e}\right)^2 T = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{R}{F}\right)^2 T.$$

Множитель  $\frac{\pi^2}{3}$  очень близок к старому значению 3 по Друде в (33.12), которое, как мы уже указывали раньше, удивительно хорошо подтверждается опытом.

Однако, несмотря на это хорошее численное совпадение, следует подчеркнуть, что непосредственное применение метода Лорентца, основанного на классической механике, к сильно вырожденному в смысле квантовой механики электронному газу вызывает серьезные сомнения. Мы вынуждены здесь ограничиться указанием на новейшие исследования Блоха, Пайерльса, Нордхейма и др.

§ 42. Свойства металла, не зависящие от средней длины пробега. а) *Термоэлектронный ток насыщения.* В § 38 мы вычислили ток насыщения, исходя из того представления, что при насыщении покидают металл все те электроны, которые подходят к его поверхности с кинетической энергией, достаточной, чтобы пройти наружу  $\left(\frac{m}{2} \xi^2 \geq e\psi\right)$ . Такое же рассуждение мы применим теперь к газу Ферми с функцией распределения

$$f_0(\xi, \eta, \zeta) = \frac{2m^3}{h^3} \frac{1}{e^{-\frac{e-\psi_i}{kT}} + 1}. \quad (42.1)$$

Если мы теперь обозначим энергию, необходимую для преодоления поверхностных сил, через  $\omega_a$  и положим  $\frac{m}{2} \xi_0^2 = \omega_a$ , то получим, как и прежде,

$$i_s = e \int_{\xi_0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int f_0 d\xi d\eta d\zeta. \quad (42.2)$$

Очевидно,  $\omega_a$  значительно больше, чем  $\psi_i$ , так как преобладающее большинство электронов всегда должно оставаться в металле. Поэтому мы требуем, чтобы было  $\frac{\omega_a - \psi_i}{kT} \gg 1$ , и замечаем, что тогда во всей области интегрирования мы можем пренебречь единицей, стоящей в знаменателе подинтегрального выражения, по сравнению с экспоненциальной функцией. Тогда интегрирование (42.2) может быть выполнено до конца; оно дает:

$$j_s = \frac{4\pi e m k^2}{h^3} T^2 e^{-\frac{\omega_a - \psi_i}{kT}}. \quad (42.3)$$

Это выражение тока насыщения — только без спинового множителя 2 — было впервые получено Дэшманом (Dushman). Если обозначить здесь разность  $\omega_a - \omega_i$  через  $eb$  (работа выхода), то новая формула будет отличаться от старой формулы Ричардсона (38.4) уже упомянутым выше множителем  $T^2$  вместо  $\sqrt{T}$ . В остальном же численный множитель содержит только универсальные постоянные, что следует считать большим успехом. Если подставить значения этих постоянных, то окажется, что

$$j_s = 120,4 T^2 e^{-\frac{eb}{kT}} \left[ \frac{\text{амп}}{\text{см}^2} \right]. \quad (42.3a)$$

Таким образом, при заданном значении работы выхода ток насыщения не зависит от числа электронов в металле. Этот на первый взгляд удивительный результат становится понятным, если взглянуть на кривую функции распределения  $f_0(\epsilon)$  на рис. 62. Эта кривая изменяется при увеличении плотности электронов только в том отношении, что нулевая точка оси  $\epsilon$  передвигается влево. Таким образом ход кривой при  $\epsilon > \omega_i$  не меняется при изменении  $n$ .

Экспериментальная проверка формулы (42.3a) имеет свою историю. Дэшман при выводе своей формулы еще не мог учитывать электронного спина. В нашем выводе формулы (40.7) спин вызывает удвоение числа ячеек. Поэтому Дэшман нашел в (42.3a) вместо 120,4, коэффициент 60,2. Этот коэффициент с точностью до нескольких процентов был подтвержден при проверке формулы Дэшмана на особенно подходящих к этой цели тугоплавких металлах — вольфраме и молибдене. Введение же множителя 2 всегда значительно ухудшает совпадение. Но уже в § 38 мы упоминали, что согласно квантовой механике даже те электроны, которые обладают достаточной энергией для прохождения через поверхность, все-таки имеют заметно меньшую, чем 1, вероятность вылета  $A$ ; таким образом формулу (42.3a) следует заменить формулой

$$j_s = A \cdot 120,4 T^2 e^{-\frac{eb}{kT}} \left[ \frac{\text{амп}}{\text{см}^2} \right], \quad (42.3b)$$

где  $A$  можно назвать коэффициентом трансмиссии. Согласно вычислениям Нордгейма и Фаулера (Fowler), весьма правдоподобно, что  $A$  близко к  $1/2$ , и, следовательно, благодаря тому, что  $2A \approx 1$ , опять восстанавливается старая формула Дэшмана. Впрочем, более точное исследование формулы (42.3b) требует еще одной предосторожности, так как величина  $\omega_i$ , входящая в разность  $eb = \omega_a - \omega_i$ , согласно (40.23), несколько зависит от температуры. Также и величина  $\omega_a$ , которая до сих пор еще не получила теоретического истолкования, может оказаться зависящей от  $T$ .

б) *Ход потенциала при электрическом и тепловом равновесии.* Из формул (41.6) и (41.7) получаются условия для  $j = 0$  и  $W = 0$ ;

$$\frac{d\omega_i}{dx} - eE_x = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dT}{dx} = 0. \quad (42.4)$$

Таким образом при статистическом равновесии  $E_x$  имеет потенциал  $\varphi(x)$ , для которого справедливо равенство

$$\omega_i + e\varphi = \text{const.} \quad (42.5)$$

Это соотношение должно быть верным как для места соприкосновения двух различных металлов, так и для перехода из металла в вакуум. Обсудим смысл формулы (42.5), рассматривая распределение в незамкнутом кольце, состоящем из двух металлов I и II (рис. 63). Если мы будем отсчитывать координату  $x$  вдоль кольца от точки  $A$ , находящейся внутри металла I, то получим потенциальную кривую, изображенную на рис. 64. Постоянная величина  $\omega_i + e\varphi$  (42.5) обозначена на рисунке пунктирной прямой. На месте спая  $B$  между двумя металлами имеется разность потенциалов

$$e(\varphi_2 - \varphi_1) = \omega_{i1} - \omega_{i2}. \quad (42.6)$$

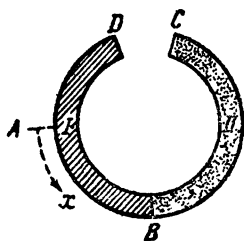


Рис. 63.

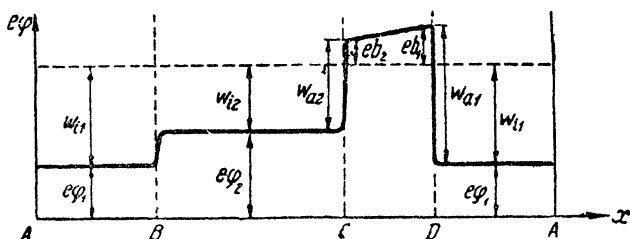


Рис. 64. Распределение потенциала в цепи из двух металлов, изображенной на рис. 63.

Последняя необходима для того, чтобы (в случае  $\omega_{i1} > \omega_{i2}$ ) самые быстрые электроны не могли переходить из I в II. Согласно (40.23), для каждого из двух металлов мы имеем (в области сильного вырождения):

$$\omega_i = \eta \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\eta} \right)^2 \right\}, \quad (42.7)$$

где характеристическая энергия  $\eta$  определяется, согласно (40.16), только числом электронов в  $1 \text{ см}^3$ :

$$\eta = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (42.7a)$$

Таким образом, для контактного потенциала (42.6) мы получаем:

$$e(\varphi_2 - \varphi_1) = \eta_1 - \eta_2 + \frac{\pi^2}{12} (kT)^2 \left\{ \frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1} \right\}. \quad (42.8)$$

Эта температурная зависимость играет, конечно, огромную роль при вычислении термоэлектродвижущей силы в цепи из двух металлов с различной температурой спаев.

При переходе из металла II в вакуум,  $e\varphi$  увеличивается на  $\omega_{a1} = \omega_{i2} + eb_2$  (см. обозначения предыдущего параграфа) и, следовательно, находится выше пунктирной линии на величину, равную работе выхода  $eb_2$ .

Таким образом мы можем приписать вакууму вблизи металла II значение  $w_i = -eb$  и вычислить с помощью общей формулы Ферми

$$f_0 = \frac{2m^3}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{e+eb}{kT}} + 1}$$

плотность  $n$  „электронного пара“ в этой точке. Так как  $eb \gg kT$ , то единица в знаменателе не играет роли, и, следовательно, мы имеем вне металла газ с распределением Максвелла

$$f_0 = \frac{2m^3}{h^3} e^{-\frac{eb}{kT}} e^{-\frac{m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{2kT}},$$

концентрация которого

$$n_{\text{пар}} = \frac{2}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} e^{-\frac{eb}{kT}}. \quad (42.9)$$

Отсюда, конечно, опять получится формула Дэшмана (42.3) для тока насыщения  $j_s$ , если рассматривать число электронов, которые в случае равновесия падают на поверхность металла из пространства, заполненного паром.

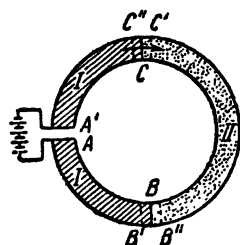


Рис. 65. Термоэлектродвижущая сила и эффект Пельтье.

При переходе от  $C$  к  $D$  (рис. 64) потенциал возрастает на величину  $b_1 - b_2$ . Это возрастание, очевидно, необходимо для равновесия, так как иначе, вследствие различной величины токов насыщения  $j_s$ , выходящих из двух металлов, должен был бы иметь место непрерывный ток, идущий из одного металла в другой. Таким образом в пространстве между двумя металлами существует электрическое поле, величину которого можно получить из контактной разности потенциалов между металлами:

$$V = b_1 - b_2, \quad (42.10)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  означают работу выхода, которая может быть определена по термоэлектронной эмиссии. Мы видим, что в формулу (42.10) не входят величины  $w_i$ , так что наша теория не может сказать о них ничего нового.

в) *Термоэлектродвижущая сила.* Рассмотрим теперь условие отсутствия тока для того случая, когда температура не везде одинакова. Мы ограничимся распределением потенциала внутри замкнутого металлического проводника (рис. 65), так что мы можем пользоваться пригодной в случае сильного вырождения приближенной формулой (41.6а) которая дает следующее условие отсутствия тока:

$$eE_x - \frac{dw_i}{dx} - \frac{\pi^2}{3} \frac{kT}{w_i} \frac{d(kT)}{dx} = 0. \quad (42.11)$$

В замкнутой цепи условию отсутствия тока можно удовлетворить только введением добавочной э. д. с., например, между точками  $A$  и  $A'$  металла I. Мы предположим, что  $A$  и  $A'$  состоят из одного и того же

металла и находятся при одинаковой температуре. Будем опять отсчитывать координату  $x$  от  $A$  через  $B$  и  $C$  к  $A'$  и вычислим по формуле (42.11) разность потенциалов между  $A$  и  $A'$ . Имеем:

$$e(\varphi_A - \varphi_{A'}) = e \int_A^{A'} E_x dx = \frac{\pi^2}{3} \int_A^{A'} \frac{kT}{w_i} \frac{d(kT)}{dx} dx + w_i(A') - w_i(A). \quad (42.12)$$

Теперь воспользуемся предположением, что металл в точках  $A$  и  $A'$  находится в одном и том же состоянии. Тогда в правой части последнего уравнения остается только интеграл. Из (42.7) следует, что

$$\frac{1}{w_i} = \frac{1}{\eta} + \frac{\pi^2}{12} \frac{(kT)^2}{\eta^3},$$

причем внутри однородного металла  $\eta$  постоянно. Теперь предположим, что изменение  $\eta$  в месте спая (например, при переходе от  $B'$  к  $B''$ ) происходит на столь небольшом отрезке длины, что температуру этого отрезка можно считать везде постоянной. Тогда интегрирование, если ограничиться небольшими степенями  $\frac{kT}{\eta}$ , дает:

$$\frac{\pi^2}{3} \left\{ \frac{1}{\eta_1} \frac{1}{2} (kT)^2 \Big|_A^B + \frac{1}{\eta_2} \frac{1}{2} (kT)^2 \Big|_B^C + \frac{1}{\eta_1} \frac{1}{2} (kT)^2 \Big|_C^{A'} \right\}.$$

Таким образом мы получаем:

$$e(\varphi_A - \varphi_{A'}) = \frac{\pi^2}{6} k^2 (T_C^2 - T_B^2) \left( \frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1} \right). \quad (42.13)$$

Это есть э. д. с., даваемая термоэлементом, который схематически изображен на рис. 65. Бросается в глаза то обстоятельство, что эта э. д. с. ровно в два раза больше той, которую можно было бы ожидать на основании уравнения (42.8), выведенного для одного спая. Это происходит благодаря тому, что уже в однородном металле при наличии температурного градиента необходимо электрическое поле для того, чтобы удовлетворить условию  $j=0$ .

2) *Эффект Пельтье*. Если пропустить через спай двух металлов электрический ток, то в этом спаяе наблюдается выделение тепла, которое пропорционально силе тока и имеет тот или иной знак (нагревание или охлаждение спая), в зависимости от направления тока. Наряду с этим еще всегда выделяется положительное джоулево тепло. Но оно пропорционально квадрату силы тока; поэтому при достаточно малом токе можно пренебречь джоулевым теплом по сравнению с теплом Пельтье. В дальнейшем речь будет идти только о слабом токе. Мы рассмотрим спай  $C$  (рис. 65), через который движутся электроны в направлении, указанном стрелкой (от I к II), и вычислим количество тепла  $Q$ , которое передается каждым  $см^2$  спая окружающему его тепловому резервуару, если через спай протекает ток  $j$ .

Сначала рассмотрим отдельный электрон, который движется к спая, обладая кинетической энергией  $\epsilon_1$ . Так как у спая существует разность потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1$ , то в металле II электрон продолжал бы двигаться с кинетической энергией  $\epsilon_1 + e(\varphi_1 - \varphi_2)$ , если бы в дальней-

шем на него не действовали никакие силы. Если же его кинетическая энергия  $\varepsilon_2$  в металле II меньше, то мы должны заключить, что разность  $\varepsilon_1 + e(\varphi_1 - \varphi_2) - \varepsilon_2$  теряется при прохождении через спай, и что она, следовательно, передана тепловому резервуару или другим частям металла. Таким образом тепло Пельтье можно получить, суммируя это выражение по всем электронам, проходящим в секунду через  $1 \text{ см}^2$  спаия. Если  $z$  есть число электронов, а  $\bar{\varepsilon}_1$  и  $\bar{\varepsilon}_2$  — их средняя кинетическая энергия в первом и во втором металле, то

$$Q = z\bar{\varepsilon}_1 - z\bar{\varepsilon}_2 + ze(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Но  $z\bar{\varepsilon}$  есть не что иное, как поток тепла  $W$ , который мы вычислили в (47.7а). Комбинируя формулы (41.6а) и (47.7а), мы получаем для однородного металла с температурой, одинаковой во всех его точках, следующее выражение:

$$z\bar{\varepsilon}_1 = W_1 = \frac{w_{i1}}{e} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{kT}{w_{i1}} \right)^2 \right\} j.$$

Кроме того, согласно (41.6),

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = w_{i2} - w_{i1}.$$

Так как  $j = ez$ , то

$$Q = \frac{j}{e} \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 \left\{ \frac{1}{w_{i1}} - \frac{1}{w_{i2}} \right\}.$$

С достаточно хорошим приближением мы можем заменить здесь  $w_{i1}$  и  $w_{i2}$  на  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Тогда тепло Пельтье окажется равным

$$Q = \frac{j}{e} \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 \left\{ \frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right\}. \quad (42.14)$$

Между теплом Пельтье (42.14) и термоэлектродвижущей силой (42.13) существует важная связь, вытекающая из термодинамики. Для того, чтобы найти эту связь, рассмотрим термоземлет, изображенный на рис. 65, который мы хотим употребить для совершения электрической работы. Если  $T_C$  больше, чем  $T_B$ , и  $\eta_1 > \eta_2$ , то выражение (42.13) положительно. Следовательно, электроны движутся во внешней цепи от  $A$  к  $A'$ , в металле же от  $A'$  через  $C$  и  $B$  к  $A$ . Используемая мощность при токе  $j$  равна  $j(\varphi_A - \varphi_{A'})$ . Источниками энергии для этой мощности являются тепловые резервуары, которые поддерживают температуру  $T_B$  и  $T_C$ . Сначала мы ограничимся тем случаем, что  $T_C$  лишь немного выше, чем  $T_B$ , т. е. положим, что  $T_C = T$  и  $T_B = T - dT$ . В этом случае мы имеем дело с типичной обратимой тепловой машиной, у которой коэффициент полезного действия Карно должен равняться  $\frac{dT}{T}$ . Из количества тепла  $Q$ , полученного от нагревателя, часть, равная  $Q \frac{dT}{T}$ , превращается в работу, в то время как остаток отдается холодильнику. Но на основании (42.13) и вследствие того, что для близких друг к другу температур можно писать

$$T_C^2 - T_B^2 = 2TdT,$$



мы находим, что мощность будет

$$j(\varphi_A - \varphi_{A'}) = \frac{1}{e} \frac{\pi^2}{3} k^2 T dT \left( \frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1} \right).$$

Но это, согласно (42.14), равно  $-Q \frac{dT}{T}$ , как того и требует термодинамика.

При конечных разностях температур  $T_C - T_B$  дело обстоит сложнее, так как тогда наличие обоих тепловых резервуаров уже недостаточно для поддержания стационарного режима. Дело в том, что в однородном металле при наличии градиента температуры происходит выделение тепла, известное под названием эффекта Томсона. Для поддержания постоянного режима необходимо было бы представить, что весь металл окружен непрерывным рядом тепловых резервуаров. Термодинамический расчет, в подробности которого мы здесь входить не можем, дает в этом случае связь между тремя эффектами: термоэлектродвижущей силой, эффектом Томсона и эффектом Пельтье.

#### Д. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИХСЯ НЕМАГНИТНЫХ ТЕЛАХ

§ 43. Вывод уравнений поля в теории Максвелла. Мы уже видели в §§ 19—21, каким образом из основных уравнений электронной теории можно вывести уравнения Максвелла для неподвижной среды. Соответствующая задача для случая движущихся тел значительно труднее. С окончательным решением этого вопроса мы познакомимся позднее в отделе теории относительности. Уравнения, которые там будут получены, для случая, когда скорость тела мала по сравнению со скоростью света, переходят в уравнения, которые мы выведем из электронной теории в этом параграфе.

В теории Максвелла закон индукции может быть написан в такой форме, что он остается верным и для движущихся тел. А именно, если мы напишем

$$\oint \mathbf{E}^* ds = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int B_n dS, \quad (43.1)$$

то это уравнение дает возможность сделать вывод об эффективной электродвижущей силе, которая появляется в движущемся проводнике. Правая часть уравнения представляет изменение потока индукции, проходящего через поверхность, которая ограничена контуром интегрирования и движется вместе с проводником. Индукция  $\mathbf{B}$  вследствие отсутствия истинных магнитных зарядов всегда удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (43.2)$$

Если мы применим уравнение (43.1) для изменения потока индукции через движущуюся поверхность, то закон индукции можно будет написать еще в форме (см. том I § 19)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^* = - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = - \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \right). \quad (43.3)$$

Мы снабдили вектор  $\mathbf{E}$  звездочкой для того, чтобы указать на его особое значение. Последнее согласно элементарнейшим принципам электротехники, состоит в том, что  $\mathbf{E}^*$ , при данной электропроводности  $\lambda$ , определяет возникающую в проводнике плотность тока

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}^*.$$

Из этого уравнения следует, что  $\mathbf{E}^*$  следует рассматривать как электрическое поле, которое измерил бы движущийся вместе с проводником наблюдатель при помощи переносимого вместе с собой единичного заряда.

Однако, в дальнейшем мы станем на точку зрения неподвижного наблюдателя, мимо которого движется тело. Для этого наблюдателя заряд, неподвижный по отношению к движущемуся телу, имеет скорость  $\mathbf{v}$ . Согласно основным уравнениям электронной теории, на такую единицу заряда действует сила  $\mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$ , где  $\mathbf{E}$  обозначает электрическое поле, измеренное неподвижным наблюдателем. Следовательно, эффективное поле  $\mathbf{E}^*$  определяется формулой  $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$ . Если мы подставим это выражение в закон индукции (43.3), то последний примет простой вид:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (43.4)$$

что в точности совпадает с уравнением для неподвижного тела. Следует заметить, что теперь плотность тока определяется уже не одним вектором  $\mathbf{E}$ ; теперь

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}^* = \lambda \left[ \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \right]. \quad (43.5)$$

Соответственно с этим также и поляризация в движущейся среде определяется величиной  $\mathbf{E}^*$ , т. е. мы ожидаем, что для поляризации будет иметь место соотношение:

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}^* = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \left[ \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \right]. \quad (43.6)$$

Теперь нам остается так преобразовать второе уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j} \right), \quad (43.7)$$

чтобы оно было справедливо и для движущихся тел. Так как мы ограничиваемся здесь немагнитными телами, то вектор  $\mathbf{H}$  заменен вектором  $\mathbf{B}$ . В самом деле, из того, что было изложено в § 21, мы знаем, что вектор  $\mathbf{H}$  является величиной сложной, вектор же  $\mathbf{B}$  обладает непосредственным физическим смыслом, будучи усредненной величиной микроскопического поля  $\mathbf{h}$ . В правой части уравнения (43.7), рядом с производной от электрического поля по времени, стоит еще плотность тока. В случае неподвижного тела этот ток состоит из тока поляризации и тока проводимости. Если же тело движется, то к этому прибавляется еще ток, вызываемый всеми теми зарядами, которые проходят через

неподвижный в пространстве элемент поверхности благодаря движению тела. Соответственно с этим мы делим ток на две части, а именно, на ток относительно движущегося тела, который мог бы быть обнаружен также и наблюдателем, связанным с этим телом, и на конвекционный ток, производимый зарядами, движущимися вместе с телом. Мы можем сразу же написать выражение для этой второй части тока. Заряд, находящийся в элементе объема, состоит, во-первых, из истинного заряда  $\rho_{ист} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D}$ , и во-вторых, из заряда, возникающего благодаря неоднородности поляризации. Этот последний равен  $-\operatorname{div} \mathbf{P}$ . Таким образом полный конвекционный ток, переносимый движущимся телом, равен

$$(\rho_{ист} - \operatorname{div} \mathbf{P}) \mathbf{v}.$$

К этому прибавляется еще ток относительно движущегося тела. Он состоит из тока проводимости  $\mathbf{j}_l$  и тока поляризации. Ток, который проходит через движущуюся вместе с проводником поверхность вследствие изменения поляризации со временем, равен

$$\frac{d}{dt} \int P_n dS = \int \dot{P}_n dS.$$

Это выражение мы можем преобразовать по правилам векторного анализа. Рассматриваемый элемент поверхности движется вместе с телом, и обозначение  $\dot{\mathbf{P}}$  представляет производную от  $\mathbf{P}$  по времени с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с телом. Эта производная равна

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{P} + \operatorname{rot} (\mathbf{P} \times \mathbf{v}), \tag{43.8}$$

где вектор  $\mathbf{P}$  в правой части равенства следует рассматривать как функцию координат и времени с точки зрения неподвижного наблюдателя. Тогда общий ток, который наряду с  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  определяет  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ , состоит из:

- конвекционного тока  $\mathbf{v} (\rho_w - \operatorname{div} \mathbf{P})$ ,
  - тока проводимости  $\mathbf{j}_l$  и
  - тока поляризации  $\mathbf{P} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{P} + \operatorname{rot} (\mathbf{P} \times \mathbf{v})$ .
- Следовательно, для вихря вектора  $\mathbf{B}$  мы получаем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c} [\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{j}_l + \mathbf{v} \rho_{ист} + \operatorname{rot} (\mathbf{P} \times \mathbf{v})]. \tag{43.9}$$

Теперь мы имеем полную систему уравнений Максвелла в движущейся немагнитной среде для случая малых скоростей:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{P} + \mathbf{j}_l + \mathbf{v} \rho_{ист} + \operatorname{rot} (\mathbf{P} \times \mathbf{v})), \\ \operatorname{div} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) &= 4\pi \rho_{ист}. \end{aligned} \right\} \tag{43.10}$$

В § 45 мы разъясним наглядно, на основании некоторых опытов, смысл входящего в эти уравнения выражения для силы тока. Но перед этим мы выведем еще раз это выражение непосредственно из представлений электронной теории. Этот вывод несколько более громоздок, но зато и более удовлетворителен, так как мы сможем детально рассмотреть происхождение различных составных частей тока. Подчеркнем еще раз, что входящие в эти уравнения векторы  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{P}$ , согласно (43.5) и (43.6), связаны с вектором поля посредством материальных констант  $\lambda$  и  $\varepsilon$ . Магнитное поле  $\mathbf{H}$  вообще не входит в эти уравнения. Можно подумать, что оно в нашем случае всегда совпадает с  $\mathbf{B}$ . Однако, это не так: как мы увидим ниже, при движении электрически поляризованной, но не намагниченной среды появляется магнитный момент, который и приводит к различию между  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ .

§ 44. Вывод уравнений поля из электронной теории. Мы хотим еще раз убедиться в том, что основные уравнения электронной теории непосредственно приводят к соотношениям, уже полученным нами в предыдущем параграфе. При усреднении по способу, описанному в § 19, эти уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{h}} &= \frac{1}{c} \dot{\bar{\mathbf{e}}} + \frac{4\pi}{c} \bar{\rho} \mathbf{u}, & \operatorname{div} \bar{\mathbf{e}} &= 4\pi \bar{\rho} \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{e}} &= -\frac{1}{c} \dot{\bar{\mathbf{h}}}, & \operatorname{div} \bar{\mathbf{h}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (44.1)$$

В два последние уравнения вообще не входят константы, относящиеся к веществу. Поэтому мы положим, так же как и в случае неподвижных тел, что

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B}. \quad (44.2)$$

Тогда наши основные уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c} \bar{\rho} \mathbf{u}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \bar{\rho}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (44.3)$$

Оба последние уравнения совпадают с соответствующими уравнениями предыдущего параграфа. Роль векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  при вычислении силы, которая действует на электрон, движущийся вместе с телом, видна непосредственно из лорентцовского выражения силы

$$\mathbf{F} = e \left\{ \mathbf{e} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) \right\}, \quad (44.4)$$

которое при усреднении переходит в

$$\bar{\mathbf{F}} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right\}. \quad (44.4a)$$

Для дальнейшего исследования уравнений (44.2) необходимо рассмотреть средние значения  $\bar{\rho}$  и  $\bar{\rho} \mathbf{u}$ . Мы исследуем отдельно влияние электронов (или ионов проводимости) и влияние электронов поляризации. Атомов с магнитным моментом, как и раньше, мы здесь рассматривать не будем.

1. *Электроны проводимости.* Пусть в  $1 \text{ см}^3$  вещества имеется  $n_1$  ионов с зарядом  $e_1$ ,  $n_2$  ионов с зарядом  $e_2$  и т. д. Пусть скорости отдельных ионов относительно тела, в котором они движутся, заданы в виде векторов  $w_1, w_2$  и т. д. Кроме того, обозначим макроскопическую скорость всего тела в заданной точке через  $v$ . Тогда скорость первого рода ионов относительно неподвижного наблюдателя равна  $u_1 = v + w_1$ , и т. д. Плотность заряда в данной точке тела равна

$$\rho_{\text{ист}} = n_1 e_1 + n_2 e_2 + \dots \quad (44.5)$$

тогда как плотность тока, вызываемого ионами проводимости, равна

$$\begin{aligned} n_1 e_1 u_1 + n_2 e_2 u_2 + \dots &= v (n_1 e_1 + n_2 e_2 + \dots) + \\ &+ n_1 e_1 w_1 + n_2 e_2 w_2 + \dots = v \rho_{\text{ист}} + j. \end{aligned} \quad (44.6)$$

Найденный здесь ток проводимости есть количество электричества, переносимое относительно движущегося тела. Как мы уже указывали в предыдущем параграфе, он прибавляется к конвекционному току  $v \rho_{\text{ист}}$ .

2. *Электроны поляризации.* Поляризация  $P$  по определению равна сумме дипольных моментов всех молекул, находящихся в  $1 \text{ см}^3$ . Мы ограничимся случаем, когда в теле находятся молекулы только одного сорта, и когда дипольные моменты всех молекул, находящихся в достаточно малом элементе объема, одинаковы. Тогда в каждой точке пространства  $P = n p$ , причем  $n$  и  $p$  заданы как функции координат и времени. Состояние поляризации может измениться или вследствие изменения числа  $n$ , или вследствие изменения дипольного момента  $p$ . Так как мы здесь исследуем влияние движения среды, то предположим, что эти диполи движутся со скоростью  $v$ , причем  $v$  также произвольно зависит от координат и времени. Однако между функциями  $n$  и  $v$  должно существовать соотношение, выражающее то обстоятельство, что общее число молекул не меняется со временем. Легко убедиться в том, что это соотношение имеет вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(vn) = 0. \quad (44.7)$$

Долю общего заряда, обусловленную вектором  $P$ , мы подробно рассмотрели в § 20. Там мы нашли, что объемный заряд, связанный с поляризацией, составляет

$$\rho_p = - \text{div } P.$$

Прибавив это к плотности ионов проводимости (44.5), мы получим, что для  $\bar{\rho}$  следует подставить в (44.3) выражение

$$\bar{\rho} = \rho_{\text{ист}} - \text{div } P. \quad (44.8)$$

Теперь наша главная задача состоит в вычислении количества электричества, которое проходит через неподвижный в пространстве элемент поверхности  $S$  вследствие изменения поляризации. Для этого представим себе диполь, состоящий из двух равных, но противоположных по знаку зарядов  $-e'$  и  $+e'$ , которые соединены между собой вектором  $s$ , проведенным от  $-e'$  к  $+e'$ , так что  $p = e's$ . Рассмотрим сначала число

диполей, рассекаемых на части площадкой  $S$ . Это число может увеличиться на единицу лишь благодаря тому, что или положительный заряд пройдет через площадку  $S$  слева направо, или отрицательный заряд пройдет справа налево. Но оба эти перехода равносильны переносу количества электричества  $+e'$  через  $S$  направо. Общее число диполей, пересекаемых площадкой  $S$ , очевидно, равно числу всех тех диполей, отрицательные заряды которых находятся в плоском цилиндре с основанием  $S$  и высотой  $s_n$ , где  $s_n$  есть проекция вектора  $s$  на нормаль к площадке  $S$ . Это число, очевидно, равно  $ns_n S$ . Следовательно, за время  $dt$  через  $S$  проходит количество электричества

$$(e'ns_n S)_{t+dt} - (e'ns_n S)_t.$$

Таким образом вследствие изменения числа диполей, пересекаемых площадкой  $S$ , возникает плотность тока

$$\frac{\partial}{\partial t}(e'ns) = \frac{\partial P}{\partial t}.$$

К этому току прибавляются еще краевые эффекты, возникающие благодаря тому, что векторы отдельных диполей пересекаются контуром нашего элемента поверхности. У подобного диполя положительный заряд может, например, пройти через поверхность, в то время как отрицательный заряд пройдет мимо нее. Поэтому такие диполи дают некоторый ток, несмотря на то, что они не пересекаются поверхностью  $S$  ни в момент  $t$ , ни в момент  $t+dt$ . Для того чтобы вычислить эту составную часть тока, рассмотрим элемент длины  $da$ , который является частью контура нашего элемента поверхности. Найдем число диполей, у которых векторы  $s$  за время  $dt$  пересекаются этим элементом длины. Очевидно, это все те диполи, у которых отрицательные заряды в момент  $t$  находятся в косом параллелепипеде, образуемом тремя векторами  $s$ ,  $vdt$ ,  $da$ . (Легко убедиться, что у этих и только у этих диполей векторы  $s$  и  $da$  пересекутся друг с другом за время  $dt$ ). Объем рассматриваемого параллелепипеда равен  $(s \times vdt)da$ . Отсюда, умножая на  $ne'$ , получим ток, соответствующий элементу длины  $da$ :

$$(P \times v)da.$$

Теперь проинтегрируем по всему контуру площадки  $dS$ ; теорема Стокса дает нам выражение вызванного краевым эффектом тока, проходящего через наш элемент поверхности:

$$\oint (P \times v) da = \int (\text{rot}(P \times v))_n dS.$$

Таким образом полный ток, вызываемый поляризацией, равен

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{rot}(P \times v).$$

Принимая во внимание уравнение (44.6a), мы получаем, наконец, среднее значение величины  $\overline{\rho u}$ , которое надлежит подставить в уравнение (44.3):

$$\overline{\rho u} = \rho_{ист} \mathbf{v} + \mathbf{j}_e + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{P} \times \mathbf{v}). \quad (44.9)$$

Это в точности совпадает с (43.10).

Другой вывод уравнения (44.9), с помощью электромагнитных потенциалов.

Весьма поучительно вывести полученное здесь выражение для полного тока еще и другим путем, а именно описывая сперва поле отдельного движущегося диполя и переходя только потом, путем суммирования по всем диполям, к вычислению поля любых движущихся тел. Рассмотрим отдельный диполь, характеризуемый зарядами  $-e'$  и  $+e'$  и вектором  $\mathbf{s}$ , направленным от  $-e'$  к  $+e'$ . Мы хотим вычислить потенциал в начале координат. Обозначим через  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  векторы, проведенные из начала координат к этим зарядам. Тогда  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \mathbf{s}$ , и если  $\mathbf{v}$  есть скорость отрицательного заряда, а  $\mathbf{v}_1$  — скорость положительного, то  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \dot{\mathbf{s}}$ . Введя эти обозначения, мы можем непосредственно написать потенциалы в начале координат. Скалярный потенциал имеет вид:

$$\varphi = \frac{e'}{r_1} - \frac{e'}{r} = e' \left( \mathbf{s} \text{ grad } \frac{1}{r} \right) = \mathbf{p} \text{ grad } \frac{1}{r}. \quad (44.10)$$

Для векторного потенциала мы получаем:

$$\mathbf{A} = \frac{e'}{c} \left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{r_1} - \frac{\mathbf{v}}{r} \right\} = \frac{e'}{c} \left\{ (\mathbf{v} + \dot{\mathbf{s}}) \left( \frac{1}{r} + \mathbf{s} \text{ grad } \frac{1}{r} \right) - \frac{\mathbf{v}}{r} \right\},$$

или

$$\mathbf{A} = \frac{e' \mathbf{v}}{c} \left( \mathbf{s} \text{ grad } \frac{1}{r} \right) + \frac{e'}{cr} \dot{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{v}}{c} \left( \mathbf{p} \text{ grad } \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{rc} \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (44.11)$$

Заметим, что последнее выражение для векторного потенциала допускает интегральное преобразование, а именно: прибавив и отняв от него

$$\mathbf{p} \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \text{ grad } \frac{1}{r} \right)$$

и приняв во внимание правило

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

мы можем написать выражение для  $\mathbf{A}$  в следующем виде:

$$\mathbf{A} = \left( \mathbf{p} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \text{grad } \frac{1}{r} + \frac{1}{cr} \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{p} \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \text{ grad } \frac{1}{r} \right), \quad (44.11a)$$

где первый член формально обозначает векторный потенциал магнитного момента  $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \frac{\mathbf{v}}{c}$ . Появление этой величины становится ясным, если представить себе элементы тока, которые возникают в том случае, когда диполь движется в направлении, поперечном по отношению к своей оси. Третье слагаемое в (44.11a) выражает то обстоятельство, что два равных, но противоположно направленных элемента тока  $+e' \mathbf{v}$  и  $-e' \mathbf{v}$ , при помощи которых можно описать магнитное действие зарядов диполя, находятся в двух различных точках, которые соединяет вектор  $\mathbf{s}$ .

Наши дальнейшие рассуждения основываются на формулах (44.10) и (44.11). Пусть в  $1 \text{ см}^3$  вещества содержатся  $n$  диполей рассмотренного типа. Для вычисления поля, создаваемого ими в начале координат, нам нужно просуммировать по всем диполям. Это суммирование мы заменим интегрированием по всему объему тела. В элементе объема содержится  $n dV$  диполей, Умно-

жая на  $ndV$  и принимая во внимание соотношение  $\mathbf{P} = n\mathbf{p}$ , мы получим ту часть потенциала всего тела, которая создается поляризационными эффектами. Согласно (44.10), скалярный потенциал  $\varphi$ , интегрированием по частям приводится к виду:

$$\varphi = \int \left( \mathbf{P} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dV = - \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{r} dV. \quad (44.12)$$

В согласии с предыдущими нашими результатами, мы можем считать, что этот потенциал вызывается объемным зарядом с плотностью

$$\rho_p = - \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Для векторного потенциала мы получаем из формулу (44.11) сумму, состоящую из двух частей:

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{v}}{c} \left( \mathbf{P} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dV + \int \frac{1}{cr} n \frac{d\mathbf{p}}{dt} dV. \quad (44.13)$$

Первую из них мы можем преобразовать интегрированием по частям. Легко доказать, проверив векторное равенство для одной его компоненты, что

$$\int \frac{\mathbf{v}}{c} \left( \mathbf{P} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dV = \int \frac{1}{rc} \{ \operatorname{rot} (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{P} - \mathbf{P} \operatorname{div} \mathbf{v} \} dV.$$

Подинтегральное выражение во втором слагаемом суммы (44.13) содержит такое изменение выделенного диполя со временем, которое констатировалось бы наблюдателем, движущимся вместе с диполем. Но для наших формул нам нужно знать изменение со временем поляризации  $\mathbf{P}$  с точки зрения неподвижного наблюдателя. Для того, чтобы установить эту зависимость, рассмотрим сначала то изменение общей поляризации, которое констатировал бы наблюдатель, движущийся вместе с диполем. Этот наблюдатель, очевидно, сравнивает состояние поляризации в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  с состоянием в точке  $\mathbf{r} + \mathbf{v}dt$  в момент  $t + dt$ . Следовательно, для такого наблюдателя изменение  $\mathbf{P}$  равно

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{P}.$$

С другой стороны, если мы описываем поляризацию произведением  $n\mathbf{p}$ , то

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = n \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{p} \frac{dn}{dt}.$$

Согласно закону сохранения общего числа молекул,

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad} n) = - n \operatorname{div} \mathbf{v},$$

так что мы можем написать:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = n \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{P} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Комбинируя два полученные выражения для  $\frac{d\mathbf{P}}{dt}$ , мы получаем подинтегральное выражение второго слагаемого в (44.13); оно равно

$$n \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{P} + \mathbf{P} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Итак, для векторного потенциала мы имеем простое выражение

$$\mathbf{A} = \int \frac{1}{cr} \left\{ \operatorname{rot} (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right\} dV; \quad (44.14)$$



мы можем считать, что векторный потенциал вызывается плотностью тока

$$\text{rot}(\mathbf{P} \times \mathbf{v}) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Сравнивая это выражение с обычным выражением векторного потенциала, введенным нами в томе I, § 48, стр. 122, мы можем истолковать его также и следующим образом: если поляризованный диэлектрик движется, то производимое им магнитное поле определяется, во-первых, током поляризации  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ , который имеется и в случае покоя; во-вторых, движущийся диэлектрик обнаруживает еще и намагничение  $\mathbf{M} = \mathbf{P} \times \frac{\mathbf{v}}{c}$ . Для описания возникающего при этом поля вектора  $\mathbf{B}$ , конечно, совершенно безразлично, говорить ли о подобном магнитном моменте или о плотности тока, равной  $\text{rot}(\mathbf{P} \times \frac{\mathbf{v}}{c})$ .

**§ 45. Экспериментальное подтверждение основных уравнений.** Рассмотрим некоторые опыты, и в особенности — опыты Роулэнда, Рентгена и Эйхенвальда. Целью этих опытов было непосредственное экспериментальное доказательство существования различных видов тока, описанных в предыдущих параграфах и связанных с движением тел. Полный ток, которым вызывается магнитное поле, согласно (44.9), равен

$$\rho_w \mathbf{v} + \mathbf{j}_l + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{P} \times \mathbf{v}). \quad (45.1)$$

Однако, с экспериментальной точки зрения целесообразно это выражение преобразовать. Если принять во внимание уравнение (43.8), то нетрудно заметить, что выражение (45.1) эквивалентно следующему:

$$(\rho_w - \text{div} \mathbf{P}) \mathbf{v} + \mathbf{j}_l + \dot{\mathbf{P}}, \quad (45.2)$$

где отдельно появляется первое слагаемое, представляющее собой заряд, переносимый путем конвекции.

Первая группа опытов относится к тем процессам, в которых исчезают все производные по времени, т. е. с точки зрения как движущегося, так неподвижного наблюдателя имеют место только стационарные процессы. В этом случае для тока, вызывающего магнитное поле, остается только величина

$$(\rho_{\text{ист}} - \text{div} \mathbf{P}) \mathbf{v} + \mathbf{j}_l.$$

Это выражение можно толковать следующим образом: одно и то же магнитное поле может вызываться как током проводимости  $\mathbf{j}_l$ , так и движущимися заряженными или поляризованными телами.

Для доказательства рассмотрим установку, изображенную на рис. 66а. Круглый эбонитовый диск толщины  $d$  может вращаться вокруг вертикальной оси. Сверху и снизу от него находятся приложенные к нему вплотную металлические кольца; ширина каждого из них равна  $b$ . Каждое металлическое кольцо в одном месте имеет небольшой разрез. Кольца связаны с полюсами некоторого источника напряжения и по-

этому заряжены до разности потенциалов  $E$ . Установку можно привести во вращение, причем имеется возможность или вращать металлические кольца, или оставлять их неподвижными. В обоих случаях мы имеем дело со следующими зарядами:

истинный поверхностный заряд металлических пластинок

$$\omega_{\text{ист}} = \frac{E\epsilon}{4\pi d};$$

(фиктивный), поверхностный заряд на эбонитовом диске

$$\omega = -\frac{E(\epsilon - 1)}{4\pi d}.$$

Написанные знаки относятся к стороне диска, соединенной с положительным полюсом. Для другой стороны диска оба знака, конечно, следует переменить на обратные.

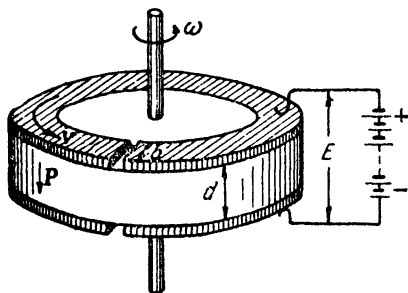


Рис. 66а. Схема опытов Рентгена и Эйхенвальда. Два металлических кольца, разделенные эбонитовой прокладкой, заряжаются до разности потенциалов  $E$ .

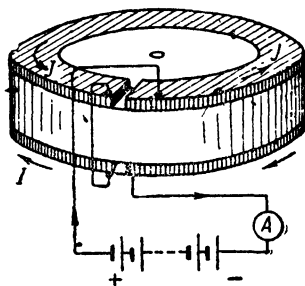


Рис. 66б. Измерение тока  $I$ , вызывающего такое же магнитное поле, как конвекционный ток в опыте на рис. 66а.

Если диск привести во вращение вместе с металлическими кольцами, то верхняя металлическая пластинка будет нести конвекционный ток, равный  $v b \omega_{\text{ист}}$ , а прилегающая к ней поверхность эбонитового диска — ток  $v b \omega$ . Таким образом, в целом мы получим силу тока

$$v b (\omega_{\text{ист}} + \omega) = v b \frac{E}{4\pi d}.$$

Этот ток можно наблюдать по отклонению маленькой магнитной стрелки, поднесенной к вращающемуся диску. Теорию можно проверить, если при неподвижном диске пропустить ток через оба разрезанных металлических кольца и при помощи включенного амперметра (рис. 66б) определить ту силу тока, которая вызовет такое же отклонение магнитной стрелки, какое мы наблюдали перед этим. Согласно теории, эта сила тока должна быть равна

$$I = v b \frac{E}{4\pi d}.$$

Особенно интересно здесь то, что эффект, при вращающихся вместе с диском металлических кольцах, совершенно не зависит от диэлектрической постоянной эбонитового диска, так что мы можем получить такое же отклонение магнитной стрелки и без диэлектрика между вращающимися кольцами. Этот результат, с большой точностью установленный Эйхенвальдом, в свое время обратил на себя большое внимание; с точки зрения электронной теории он разумеется сам собой. В особенности просто и прямо можно было бы его предсказать на основании той картины явлений поляризации, которая была дана в томе I, в §§ 30 и 31<sup>1)</sup>.

Если в описанном выше опыте вращать диск между неподвижными металлическими кольцами, то ток будет производиться только переносом поверхностных зарядов на диэлектрике конденсатора; таким образом, движение диэлектрика по своим магнитным действиям в этом случае эквивалентно току

$$I = -ab \frac{E(\epsilon - 1)}{4\pi d}.$$

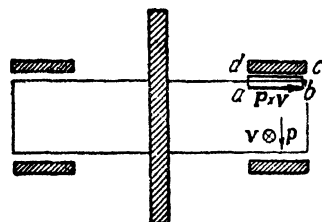


Рис. 67. Вычисление  $\text{rot}(\mathbf{P} \times \mathbf{v})$  в опыте на рис. 66а.

Это тоже было подтверждено Эйхенвальдом.

До сих пор мы объясняли опыты Эйхенвальда в духе уравнения (45.2). В последнем из рассмотренных случаев (движение диска без колец) для тока существенен только член  $-\mathbf{v} \text{ div } \mathbf{P}$ , который при интегрировании по очень плоскому цилиндру, одно основание которого находится в воздухе, а другое — внутри эбонита, и поперечное сечение которого равно 1, действительно дает поверхностную плотность тока, равную

$$v |\mathbf{P}| = v \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{E}{d}.$$

Точно такой же результат даст, конечно, и член  $\text{rot}(\mathbf{P} \times \mathbf{v})$  в формуле (45.1). В нашем диске вектор  $\mathbf{P} \times \mathbf{v}$  имеет радиальное направление, а именно, в схеме (рис. 66а) он направлен от оси вращения. Этот вектор в эбоните повсюду одинаков, а вне его он равен нулю. При интегрировании по узкому прямоугольнику  $abcd$ , с длиной 1, у которого сторона  $ab$  находится в эбоните, а сторона  $cd$  — в воздухе, теорема Стокса и формула (45.1) дают следующее выражение для тока, проходящего через прямоугольник:

$$I = \int \text{rot}(\mathbf{P} \times \mathbf{v}) dS = \oint (\mathbf{P} \times \mathbf{v})_s ds = v |\mathbf{P}|,$$

т. е. мы получаем прежнюю формулу.

Существует еще и третий способ описания результата опытов. Напишем общее уравнение (43.10) в виде:

$$\text{rot} \left( \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) \right) = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c} \dot{\mathbf{P}} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_l + \rho_w \mathbf{v}).$$

<sup>1)</sup> См. примечание после текста.

Это уравнение при отсутствии истинных зарядов ( $\rho_{\text{ист}} = 0$ ) отличается от уравнения для неподвижной среды только тем, что в нем вместо  $\mathbf{H}$  стоит выражение  $\mathbf{B} - \frac{4\pi}{c}(\mathbf{P} \times \mathbf{v})$ .

Но если положить  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ , то оказывается, что движущийся электрически-поляризованный эбонит обнаруживает намагничение  $\mathbf{M} = \frac{1}{c}(\mathbf{P} \times \mathbf{v})$ . Эбонит на рис. 66а кажется намагниченным в радиальном направлении: на внешней поверхности у него северный полюс, на внутренней — южный. Поэтому про магнитное поле, наблюдаемое в опыте Эйхенвальда, по желанию можно полагать, что оно образуется или поверхностным конвекционным током или радиальным намагничением диска.

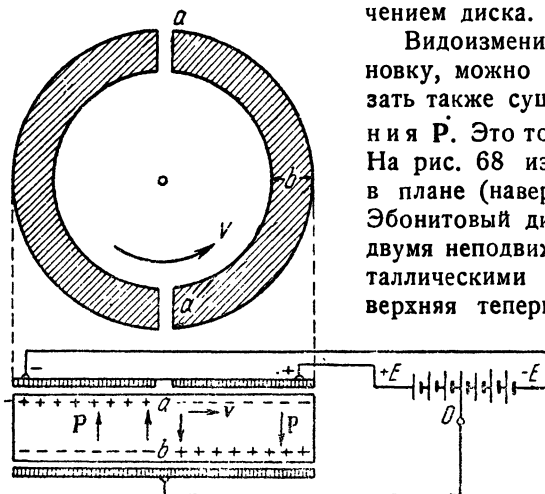


Рис. 68. Схема измерения магнитного поля, вызываемого поляризационным током  $\mathbf{P}$  в эбонитовом диске, вращающемся между неподвижными металлическими кольцами; в правой части поляризация направлена вниз, в левой направлена вверх.

Видоизменив описанную выше установку, можно интересным способом доказать также существование тока смещения  $\dot{\mathbf{P}}$ . Это тоже показано Эйхенвальдом. На рис. 68 изображена схема установки в плане (наверху) и в разрезе (внизу). Эбонитовый диск снова вращается между двумя неподвижными кольцеобразными металлическими обкладками, из которых верхняя теперь разделена на два полукольца. Нижнее металлическое кольцо заземлено; две половины верхнего кольца заряжены до равных, но противоположных по знаку потенциалов ( $+E$  и  $-E$ ). Непосредственно над диском, вблизи оси вращения, находится магнитная стрелка, которая может вращаться вокруг вертикальной оси.

В этой установке, как и в предыдущей, будет идти ток Рентгена, в виде конвекционного тока —  $\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{P}$ , связанного с движением индуцированных на эбонитовом диске поверхностных зарядов; но он будет отличаться от тока в предыдущей установке тем, что в правой и левой половинах диска он будет иметь одинаковую величину, но противоположные направления. Поэтому действия этих двух токов на магнитную стрелку взаимно уничтожаются. Но кроме этого тока пойдет еще ток поляризации в направлении, параллельном оси вращения; у точки диска  $a$  он будет направлен сверху вниз, у точки же  $a'$ , наоборот, снизу вверх. Найдем величину тока, текущего от  $a$  к  $b$ , исходя из уравнений (45.1) и (45.2). В уравнении (45.2) отличен от нуля только член  $\dot{\mathbf{P}}$ , так что при интегрировании по горизонтально расположенному прямоугольнику, окружающему место с током, мы получим полный ток в виде

$$I = b \int j dx = b \int \dot{P} dx = bv \int \frac{\partial P}{\partial x} dx = 2bvP = 2bv \frac{\epsilon - 1}{4\pi a} E$$

(координатная ось  $x$  направлена по  $v$ ,  $y$  — по  $P$ , и при  $v_x = v$ ,  $P_y = P$ ). Подобный же результат мы получим, исходя из (45.1). Вектор  $P \times v$  направлен опять радиально, но он меняет знак при переходе через место с током. При интегрировании по выше указанной площади мы получим опять  $2bvP$ . Впрочем, такой же результат получится непосредственно, если рассмотреть распределение тока на рис. 68. Во время вращения эбонитового диска в верхней его поверхности с обеих сторон приходит к точке  $a$  ток Рентгена  $bvP$ , в то время как в нижней поверхности такой же ток расходится в обе стороны. Эти токи составляют замкнутый контур, так как от  $a$  к  $b$  идет ток только что указанной силы в вертикальном направлении.

Опыты, произведенные Вильсоном, непосредственно указывают на то, что фактически на все заряды  $e$ , находящиеся внутри вещества, которое движется в магнитном поле, действует сила Лорентца  $e \frac{v}{c} \times B$ . Этот факт можно выразить также иначе: наблюдатель, движущийся вместе с телом, констатировал бы электрическое поле величины  $E = \frac{v}{c} \times B$ . Установка Вильсона состоит в том, что полый цилиндр, толщина стенок которого равна  $b$ , вращается вокруг своей оси, причем этот цилиндр подвергается действию магнитного поля, направленного параллельно оси. Тогда внутри цилиндра возникает радиально направленное электрическое поле напряженности  $\frac{v}{c} \times B$ . В металлическом цилиндре эта сила вызвала бы перемещение электронов проводимости к внешней стороне цилиндра до того момента, пока заряд на поверхности цилиндра не создаст противодействующего поля, которое как раз уравновесит силу Лорентца. При этом между внешней и внутренней поверхностью возникнет разность потенциалов  $b \frac{v}{c} \times B$ . Поэтому, если при помощи скользящих контактов соединить эти две поверхности проволокой с сопротивлением  $R$ , то в цепи пойдет электрический ток  $I = \frac{bv}{Rc} B$ .

Но если полый цилиндр является изолятором, то сила Лорентца вызовет в нем радиально направленную диэлектрическую поляризацию

$$P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \cdot \frac{v}{c} \times B.$$

Это можно доказать, например, следующим образом: вращающийся цилиндр окружается снаружи и изнутри плотно приложенными к нему металлическими полыми цилиндрами. Оба металлических цилиндра соединяются с клеммами электрометра. Если вращать изолятор в магнитном поле, то в электрометре получится заряд, соответствующий вычисленной поляризации.

§ 46. Опыт Физо. Кроме рассмотренных в предыдущем параграфе чисто электромагнитных опытов с движущимися телами, рассмотрим теперь один чисто оптический опыт, относящийся к распространению света в движущейся среде. Согласно теории, как мы увидим дальше, в направлении движения среды свет должен распространяться быстрее, чем в противоположном направлении, т. е. свет как бы увлекается движущейся средой. Пусть  $u_0$  есть скорость распространения света в неподвижной среде. Тогда скорость света в среде, движущейся со скоростью  $v$ , будет

$$u = u_0 + kv, \tag{46.1a}$$

если свет распространяется в направлении движения среды, или

$$u = u_0 - kv \tag{46.1b}$$

в случае распространения света в противоположном направлении. Число  $k$  называют коэффициентом увлечения. Ниже мы определим его величину теоретически. Если бы коэффициент  $k$  равнялся 1, то скорости света и среды складывались бы векториально. Но мы увидим, что в действительности  $k$  меньше единицы.

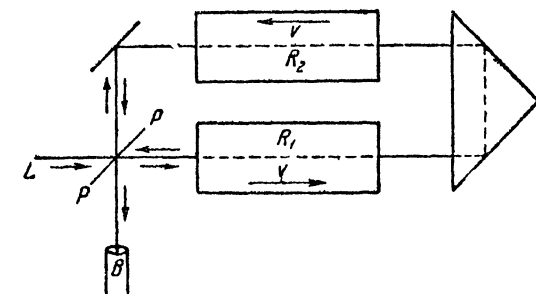


Рис. 69. Измерение коэффициента увлечения по Физо.

Первое экспериментальное исследование с целью измерения коэффициента увеличения было произведено Физо. Его установка изображена на рис. 69. Луч, выходящий из источника  $L$ , разлагается полупросеребрянной стеклянной пластинкой  $P$  на два луча, которые проходят путь, изображенный на рисунке, в двух противоположных направлениях. С помощью той же полупросеребрянной пластинки оба луча снова соединяются и могут быть наблюдаемы в интерференционном приборе  $B$ . Световые лучи на своем пути проходят через трубки  $R_1$  и  $R_2$ , наполненные водой, которая течет в противоположных направлениях (рис. 69). При этом один луч проходит через обе трубки в направлении течения воды, другой — в противоположном направлении. Это приводит к тому, что первый луч проходит свой путь (от стеклянной пластинки через систему трубок обратно к пластинке) за более короткий промежуток времени, чем второй луч. Если  $l$  есть длина трубок, то разность времен прохождения обоих лучей равна

$$\Delta t = \frac{2l}{u_0 - kv} - \frac{2l}{u_0 + kv} \approx \frac{4kv}{u_0^3}.$$

Следовательно, лучи приходят в интерференционный прибор, находясь в различных фазах. Из положения интерференционных полос, получающихся в приборе, можно определить  $\Delta t$ , а, следовательно, и величину коэффициента увлечения.

Результат опыта Физо гласит:

$$k = \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (46.2)$$

где  $n$  — показатель преломления воды. Попытаемся объяснить этот результат на основании формул, выведенных в § 43. Согласно (43.10), основные уравнения для электрического поля в незаряженном немагнитном изоляторе ( $j = 0$ ,  $\rho_w = 0$ ,  $\mu = 1$ ), движущемся со скоростью  $v$  имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} (\mathbf{P} \times \mathbf{v}), & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, & 4\pi \mathbf{P} &= (\epsilon - 1) \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (46.3)$$

Для сравнения напишем еще обыкновенные уравнения Максвелла для неподвижной среды:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0. \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, & 4\pi \mathbf{P} &= (\epsilon - 1) \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} (46.3a)$$

Между этими двумя системами имеются два существенных различия. Во-первых, член  $\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} (\mathbf{P} \times \mathbf{v})$  дает конвекционный перенос состояния поляризации (ток Рентгена). Это является причиной того, что, как уже было показано в § 44, магнитная индукция  $\mathbf{B}$  в движущейся среде, несмотря на предположение  $\mu = 1$ , не совпадает с магнитным полем  $\mathbf{H}$ , как это имеет место в случае неподвижной среды. Второе различие состоит в том, что поляризация  $\mathbf{P}$  определяется не только электрической напряженностью, но и магнитной индукцией, потому что, как было показано выше, на движущийся заряд действует сила Лорентца

$$\mathbf{F} = e \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \right].$$

Мы будем искать решение уравнений (46.3) для плоской волны. Для этой цели попытаемся подставить в эти уравнения следующие выражения для  $\mathbf{B}$  и для  $\mathbf{E}$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{i\omega \left( t - \frac{rn}{u} \right)}, & \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i\omega \left( t - \frac{rn}{u} \right)}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 e^{i\omega \left( t - \frac{rn}{u} \right)}, & \mathbf{D} &= \mathbf{D}_0 e^{i\omega \left( t - \frac{rn}{u} \right)}, \end{aligned} \right\} (46.4)$$

из которых следуют, что

Здесь  $\omega$  означает частоту,  $u$  — скорость распространения волны, а  $\mathbf{n}$  — направление распространения. Теперь нам следует определить постоянные векторы  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{P}_0$  и  $\mathbf{D}_0$  и скорость распространения волны  $u$  так, чтобы уравнения (46.3) были удовлетворены. В случае неподвижной среды подстановка выражений (46.4) в систему уравнений (46.3а) дает известные формулы:

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 &= \frac{u}{c} \mathbf{D}_0, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_0 &= \varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 &= \frac{u}{c} \mathbf{B}_0, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (46.5)$$

из которых следует, что в этом случае векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , а поэтому также  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{P}$ , перпендикулярны к направлению распространения  $\mathbf{n}$ , и что индукция  $\mathbf{B}$  перпендикулярна к электрическому вектору. Кроме того, из уравнений (46.5) следует, что скорость распространения волны и диэлектрическая постоянная  $\varepsilon$  связаны соотношением

$$u = u_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Другой результат получается в случае движущейся среды; здесь подстановка (46.4) в систему уравнений (46.3) дает:

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0 &= \frac{u \mathbf{D}_0}{c} - \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{n} \times (\mathbf{P}_0 \times \mathbf{v}), & \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_0 &= 0, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 &= \frac{u \mathbf{B}_0}{c}, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0, \\ 4\pi \mathbf{P}_0 &= (\varepsilon - 1) \left( \mathbf{E}_0 + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \right), \\ \mathbf{D}_0 &= \varepsilon \mathbf{E}_0 + (\varepsilon - 1) \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_0. \end{aligned} \right\} \quad (46.6)$$

Из этих соотношений следует, что  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  перпендикулярны к  $\mathbf{n}$ , но вообще говоря,  $\mathbf{n}$  не перпендикулярен к электрическому вектору  $\mathbf{E}$ , так как из уравнения

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_0 = \varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0 + (\varepsilon - 1) \left( \mathbf{n} \cdot \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_0 \right) \right) = 0$$

видно, что  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$  отлично от нуля тогда, когда три вектора  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  не лежат в одной плоскости. Аналогичное утверждение справедливо и для магнитного поля  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{P} \times \mathbf{v}$ . Это значит, что в общем случае, когда направление движения и направление распространения волны  $\mathbf{n}$  не совпадают, вектор Пойнтинга  $\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  направлен не по  $\mathbf{n}$ .



Для дальнейших выкладок полезно в уравнениях (46.6) выразить вектора  $E_0$  и  $P_0$  через  $D_0$  и  $B_0$ . Очевидно что

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{\epsilon} D_0 - \frac{\epsilon-1}{\epsilon} \frac{v}{c} \times B_0, \\ 4\pi P_0 &= \frac{\epsilon-1}{\epsilon} \left( D_0 + \left( \frac{v}{c} \times B_0 \right) \right). \end{aligned} \right\} \quad (46.7)$$

Если мы ограничимся малыми скоростями — такими, что можно пренебречь величинами порядка  $\beta^2$  по сравнению с единицей, то подставив выражения (46.7) в первые два уравнения (46.6) и принимая во внимание, что  $(nB_0) = (nD_0) = 0$ , мы получим:

$$\left. \begin{aligned} -n \times B_0 &= \left( \frac{u}{c} - \frac{\epsilon-1}{\epsilon} \frac{n \cdot v}{c} \right) D_0, \\ \frac{1}{\epsilon} n \times D_0 &= \left( \frac{u}{c} - \frac{\epsilon-1}{\epsilon} \frac{n \cdot v}{c} \right) B_0. \end{aligned} \right\} \quad (46.8)$$

При этом мы воспользовались известным векторным правилом

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B).$$

Из (46.8) видно, что при  $\beta^2 \ll 1$  вектор  $B_0$  также перпендикулярен к  $D_0$ . Исключая  $B_0$  или  $D_0$ , мы, ввиду того, что  $n \cdot B_0 = n \cdot D_0 = 0$ , получаем:

$$\left( \frac{u}{c} - \frac{\epsilon-1}{\epsilon} \frac{n \cdot v}{c} \right)^2 = \frac{1}{\epsilon}.$$

Отсюда

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} + \frac{\epsilon-1}{\epsilon} n \cdot v.$$

Так как  $n = \sqrt{\epsilon}$  и  $\frac{c}{n} = u_0$ , мы имеем:

$$u = u_0 + \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) n \cdot v, \quad (46.9)$$

что является общим законом распространения света в любом направлении. Этот результат можно для наглядности представить себе так, что свет при распространении в движущейся среде частично „увлекается“ в направлении движения среды, причем величина этого увлечения определяется коэффициентом Физо

$$k = 1 - \frac{1}{n^2}. \quad (46.10)$$

Ниже в главе о специальной теории относительности, мы выведем эту формулу еще раз, но с совершенно другой точки зрения.

§ 47. Опыт Майкельсона. В предыдущем параграфе мы видели, каким образом электронная теория вполне естественно объясняет найденное Физо частичное увлечение света в движущейся среде.

Распространение света в движущейся диспергирующей среде можно на основании этого описать еще следующим образом: все распространение света составляет из волны, падающей в среду из

пустоты, и из накладывающихся на нее сферических волн, испускаемых отдельными молекулами-диполями. Для объяснения опыта Физо следует предположить, что движение среды совершенно не влияет на волну, падающую из пустоты. Эффект Физо возникает лишь благодаря тому, что сферические волны теперь уже создаются движущимися диполями. Это сложение плоской волны в неподвижном эфире со сферическими волнами, рассеиваемыми движущимися диполями, в действительности дает наблюдаемый в опыте Физо коэффициент увлечения. Поэтому долгое время результат опыта Физо рассматривали как экспериментальное доказательство существования неподвижного светового эфира, который не принимает участия в движении материи.

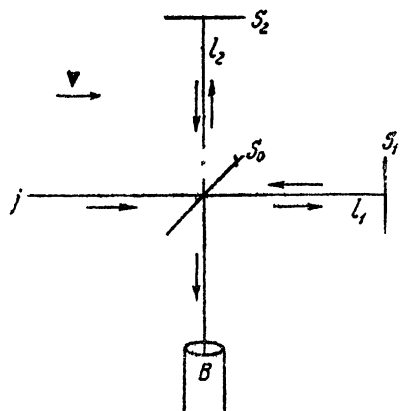


Рис. 70. Схема опыта Майкельсона.

Но из этого представления неминуемо должно следовать, что скорость света, измеряемая движущимся относительно эфира наблюдателем, должна зависеть от направления движения этого наблюдателя. Если  $c$  есть скорость света относительно неподвижного эфира, а  $v$  — скорость наблюдателя, то величина измеренной им скорости света должна равняться  $c - v$  или  $c + v$  в зависимости от того, по какому направлению он движется: по направлению распространения света или против этого направления. Если наблюдатель с самого начала ничего не знает о своем движении, то он мог бы экспериментально обнаружить его, если бы он послал из определенной точки световой сигнал, распространяющийся во все стороны, и измерил те промежутки времени, в которые свет достигнет различных мест сферы, описанной вокруг этой точки. Действительно, если наблюдатель движется относительно эфира, то „эфирный ветер“ повлияет на распространение светового сигнала так, что сигнал позже всего придет в точку поверхности сферы, которая движется в том же направлении, что и сигнал, и раньше всего — в точку, движущуюся в противоположном направлении.

Этот опыт и был произведен Майкельсоном, задавшись целью определить движение земли по отношению к эфиру, который предполагается неподвижным. Скорость движения земли по ее орбите приблизительно равна  $30 \text{ км/сек}$ . Так как мы с самого начала ничего не знаем о состоянии движения эфира, то можно было бы предположить, что в данном месте орбиты земли эфир движется как раз с этой же скоростью и, следовательно, земля неподвижна относительно эфира. Но тогда через полгода можно было бы наблюдать эфирный ветер, обладающий двойной скоростью.

Установка Майкельсона схематически изображена на рис. 70. Вся аппаратура установлена на массивной плите, плавающей в ртути, так что можно ее поворачивать на любой угол, не вызывая сотрясений.

Свет, выходящий из источника  $L$ , частью отражается от полупосеребрянной стеклянной пластинки  $S_0$ , расположенной под углом в  $45^\circ$  к лучу, а частью проходит насквозь. Отраженный луч еще раз отражается от зеркала  $S_2$ , проходит через пластинку  $S_0$  и попадает в  $B$ . Другой луч после отражения от  $S_1$  отражается пластинкой  $S_0$  и, попадая в  $B$ , интерферирует с первым лучом. При соответствующей установке прибора можно наблюдать в  $B$  интерференционные полосы. Всякое изменение оптических путей  $l_1$  или  $l_2$  вызывает смещение интерференционных полос.

Например, мы получим смещение интерференционных полос на ширину одной полосы, если сместим одно из зеркал  $S_1$  или  $S_2$  на половину длины световой волны. В этом заключается принцип, которым воспользовался Майкельсон для сравнения нормального метра с длиной волны красной линии кадмия. Другое применение интерферометра состоит в том, что в один из оптических путей помещают преломляющую среду. Тогда по наблюдаемому смещению полос можно очень точно измерить показатель преломления среды.

В нашем случае прибор был использован для того, чтобы наблюдать влияние движения земли на распространение света. На рис. 70 стрелка  $v$  показывает направление, в котором прибор движется по отношению к эфиру. Нужно вычислить для обоих лучей (отраженного от стеклянной пластинки  $S_0$  и прошедшего через нее) промежутки  $t_1$  и  $t_2$ , где  $t_1$  — время, которое нужно свету для того, чтобы пройти от  $S_0$  до зеркала  $S_1$  и обратно до  $S_0$ , и где аналогичный смысл имеет и  $t_2$  (зеркало  $S_2$  вместо  $S_1$ ). Вследствие движения прибора по отношению к эфиру свет распространяется относительно прибора в прямом направлении со скоростью  $c - v$ , а в обратном направлении — со скоростью  $c + v$ . Так как отрезок  $l_1$  параллелен скорости, то для  $t_1$  мы получаем выражение

$$t_1 = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = 2 \frac{l_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Чтобы вычислить время  $t_2$  для второго луча, мы должны рассмотреть действительный путь этого луча (рис. 71). Пусть  $A$  есть положение полупрозрачной стеклянной пластинки в момент времени  $t = 0$  и  $B$  — ее положение в момент времени  $t_2$ , когда луч, отраженный от  $S_2$ , опять попадает на стеклянную пластинку. Расстояние  $AB$  равно  $vt_2$ . Весь пройденный светом путь, очевидно, равен

$$= \sqrt{4l_2^2 + v^2t_2^2}$$

и должен равняться  $ct_2$ . Отсюда мы находим, что

$$t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

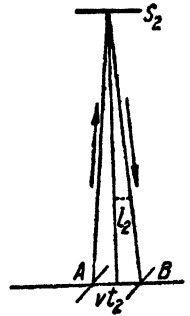


Рис. 71. Вычисление времени прохождения луча, отраженного от зеркала  $S_2$ .

Следовательно, разность времен, которой определяется и разность хода лучей в точке  $B$ , равна

$$t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left[ \frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right]. \quad (47.1)$$

Если повернуть весь прибор на  $90^\circ$ , то оба оптических пути  $l_1$  и  $l_2$  взаимно обменяются своими направлениями движения относительно эфира, так что после поворота мы получим разность

$$t_2' - t_1' = \frac{2}{c} \left[ \frac{l_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]. \quad (47.2)$$

Таким образом, при вращении можно было бы наблюдать смещение полос, которое соответствует разности  $\vartheta$  между двумя только что вычисленными разностями времен. Вычитая, мы находим:

$$\vartheta = \frac{2(l_2 + l_1)}{c} \left[ \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]. \quad (47.3)$$

или, при не слишком больших скоростях ( $v^2 \ll c^2$ ),

$$\vartheta = \frac{(l_1 + l_2)}{c} \frac{v^2}{c^2}. \quad (47.3a)$$

Подсчитаем теперь порядок величины смещения полос. Для этого сравним только что вычисленное время  $\vartheta$  с периодом светового колебания  $\tau = \frac{\lambda}{c}$ . Изменение разности хода на  $\tau$  должно вызвать смещение интерференционных полос на ширину одной полосы. Так как скорость земли  $v = 3 \cdot 10^8$  см/сек, то для того, чтобы при длине волны порядка  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см получить смещение на 1 полосу, нужно, чтобы  $l_1 + l_2 = 50$  м. Фактически этого значения  $l_1 + l_2$  можно достигнуть только тогда, когда световой луч проходит один и тот же путь не два раза, а большее число раз. т. е. при многократном отражении.

Чувствительность этой установки, при повторении опыта Йоосом (Joos), была повышена настолько, что эфирный ветер, обладающий скоростью 1,5 км/сек, был бы все еще доступен наблюдению. Однако, в пределах ошибок опыта, смещения полос при вращении установки на  $90^\circ$  не было обнаружено. Повторение опытов в различное время года также всегда приводило к этому же отрицательному результату.

Таким образом эти опыты показали, что скорость света не зависит от движения наблюдателя. Объяснение этого результата с точки зрения электронной теории наталкивается на серьезные трудности; с одной стороны, при объяснении предыдущих опытов едва ли можно избежать предположения о неподвижном эфире; с другой

стороны, всякая попытка экспериментально доказать существование неподвижного эфира приводит к отрицательному результату.

§ 48. Попытки объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона. Для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона был предложен целый ряд гипотез, которые впоследствии, однако, оказались несостоятельными. Мы вкратце разберем важнейшие из них. Первое объяснение заключается в том предположении, что световой эфир у поверхности земли движется вместе с нею, т. е. что эфир увлекается землей примерно так же, как атмосфера. Это объяснение становится весьма маловероятным, если принять во внимание опыт Физо с распространением света в движущихся средах; этот опыт требует как раз того, чтобы эфир не увлекался движущимся телом. Все же можно было бы подумать, что степень увлечения эфира зависит от массы движущегося тела, и что поэтому, например, обладающая большой массой земля может при своем движении увлечь за собой эфир, а движущаяся жидкость в опыте Физо не в состоянии этого сделать. Все подобные предположения уже на первый взгляд кажутся очень искусственными и мало удовлетворительными, но представление об увлекаемом эфире окончательно опровергается явлением аберрации. Это явление состоит в том, что неподвижная звезда, которую рассматривают в трубу, находящуюся на земле, видна не в том направлении, в котором она действительно находится; а именно, трубу нужно наклонять на весьма малый угол, зависящий от скорости земли относительно звезды. Рассмотрим, например, луч света, который падает на движущуюся поверхность земли нормально. Световые волны при попадании в движущиеся вместе с землей слои эфира всегда будут оставаться параллельными поверхности земли, а поэтому, если эфир увлекается движущейся землей, они будут наблюдаться как плоские волны, распространяющиеся перпендикулярно к поверхности земли. Поэтому, в противоположность ошибочным соображениям Стокса, если бы эфир двигался вместе с землей, то было бы невозможно наблюдать явление аберрации.

Другая попытка объяснения принадлежит Ритцу. Он пытался объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона, сделав предположение, что скорость света зависит от движения излучающего источника, и притом так, что скорость света в пустоте векториально складывается со скоростью источника. Действительно, легко убедиться, что эта гипотеза объяснила бы опыт Майкельсона. Но против этой гипотезы прежде всего можно возразить, что с точки зрения теории близкого действия, которая описывает оптические явления при помощи дифференциальных уравнений, она совершенно непонятна, так как нельзя себе представить, каким образом скорость распространения световой волны в какой-нибудь точке пространства может быть связана со скоростью источника света. Но и с чисто экспериментальной точки зрения эту гипотезу можно считать опровергнутой. Особенно разительным ее опровержением являются наблюдения над двойными звездами. Согласно гипотезе Ритца, у звезды, которая состоит из центрального тела и обращающегося вокруг него спутника, свет спутника должен достигать земли с различной скоростью, в зависи-

мости от его положения на орбите. Так как свету приходится проходить при этом очень большое расстояние, то уже небольшое различие в скорости вызывает такое большое различие во времени, необходимом, чтобы свет прошел это большое расстояние, что в некоторых случаях мы одновременно видели бы спутника во многих местах его орбиты. Однако, как указал де-Ситтер, не существует даже и намека на подобный эффект. Кроме того, гипотеза Ритца опровергается тем, что опыт Майкельсона, производимый не с земным источником света, а со светом неподвижной звезды, также приводит к отрицательным результатам. Такой опыт был действительно произведен Томашеком (Tomaschek).

Третьей попыткой объяснения является высказанная Лорентцом и, независимо от него, Фицджеральдом (Fitzgerald) гипотеза сжатия, которую можно считать непосредственной предшественницей теории относительности. Эта гипотеза утверждает, что линейные размеры тел, движущихся со скоростью  $v$ , сокращаются в направлении движения в  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  раз. Сначала мы вкратце рассмотрим, как возникла эта гипотеза, которая кажется с первого взгляда весьма произвольной, а затем покажем, что она действительно может объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона.

Для того, чтобы понять, как возникла гипотеза сокращения, вернемся к рассмотренному нами в § 9 электромагнитному полю движущегося заряда и, в частности, к конвекционному потенциалу (9.19), с помощью которого описывается сила, действующая на другой заряд, движущийся с той же скоростью.

В § 9 было показано, что эквипотенциальными поверхностями являются не сферы, а эллипсоиды, сплюснутые в направлении движения в отношении  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Из этого вытекает, что заряды на движущемся металлическом шаре передвигаются от экватора и концентрируются на полюсах. Этого неожиданного следствия можно избежать, если ввести гипотезу, что поверхность нашего шара во время движения остается эквипотенциальной поверхностью, благодаря тому, что ее диаметр тоже сокращается в направлении движения в отношении  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Гипотеза сжатия утверждает, что подобное сокращение всех линейных размеров, параллельных направлению движения (а следовательно и всех движущихся масштабов), происходит на самом деле. Такое укорочение масштабов приводит к тому, что наблюдатель, движущийся вместе с шаром, не заметил бы никакого укорочения, так как он, измеряя во всех направлениях длину радиуса шара при помощи движущегося вместе с ним масштаба, получал бы всегда одну и ту же величину.

Хотя приведенная здесь гипотеза сжатия масштабов может считаться непосредственной предшественницей теории относительности, тем не менее следует подчеркнуть, что она противоречит основному принципу этой теории; с точки зрения гипотезы сжатия, если бы движущийся наблюдатель сравнил свой масштаб с неподвижным масштабом, то он мог бы обнаружить, что его собственный масштаб действительно

стал несколько короче. Таким образом мы имели бы принципиальную возможность экспериментально обнаружить состояние абсолютного покоя, наблюдая за большим числом одинаковых масштабов, движущихся с различными скоростями, и отметив тот из них, который обладает наибольшей длиной.

Убедимся теперь в том, что гипотеза сжатия действительно объясняет отрицательный результат опыта Майкельсона. Для этого введем эту гипотезу в уравнения (47.1) и (47.2) предыдущего параграфа. В уравнении (47.1), определявшем разность времен, совпадала с направлением движения длина  $l_1$ , а в уравнении (47.2), наоборот,  $l_2$ . Если для этих двух длин ввести укорочение в отношении  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , то обе рассматриваемые разности времен будут равны друг другу, а именно, мы получим для них одно и то же значение:

$$t_2 - t_1 = t_2' - t_1' = \frac{2}{c} \frac{l_2 - l_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Отсюда видно, что при вращении прибора нельзя ожидать изменения разности хода.

## Е. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

**§ 49. Пересмотр понятий пространства и времени.** Сопоставим еще раз экспериментальные факты, изложенные в предыдущей главе. И опыт Физо с увлечением света и явление абберации могли быть объяснены проще и удобнее всего при помощи гипотезы о существовании абсолютно неподвижного светового эфира, т. е. при допущении, что можно указать такую привилегированную систему координат, в которой скорость света одинакова во всех направлениях. Но все попытки экспериментально установить существование такой привилегированной системы координат, в частности попытки Майкельсона и Траутона-Нобля, потерпели неудачу, и это заставило вводить специальные гипотезы, объясняющие, почему этот неподвижный эфир ускользает от наблюдения. Таким образом получилось неприятное нагромождение гипотез, из которых вторая придумана только для того, чтобы объяснить, почему нельзя наблюдать световой эфир, постулированный в первой гипотезе.

При таком положении дел открытие Эйнштейном теории относительности явилось большим шагом вперед. Эйнштейн исходил непосредственно из отрицательного результата опыта Майкельсона, из которого он заключил, что принципиально нельзя отличить, какая из двух систем, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью, находится в покое, и какая движется. Поэтому он задался вопросом: каковы законы природы, вызывающие невозможность установить принципиальное различие между двумя движущимися друг относительно друга системами?

Такой принцип относительности давно уже был известен в классической физике. Рассмотрим, например, уравнения движения материальных точек, взаимодействие между которыми определяется потенциалом, зависящим только от расстояний:

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}; \quad \Phi = \Phi(r_{12}, r_{13}, \dots).$$

Рассмотрим теперь движение этих точек в другой координатной системе, которая движется по отношению к первой со скоростью  $v$ ; тогда, очевидно, уравнения, связывающие координаты материальных точек в первой и второй координатных системах, будут следующие:

$$r_i' = r_i + vt, \quad (49.1)$$

и значит,

$$r_{12}' = r_{12}.$$

Теперь мы можем написать уравнения движения в новой координатной системе. Мы получаем закон движения в виде

$$m_1 \frac{d^2 x_1'}{dt'^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_1'}, \dots; \quad \Phi' = \Phi(r_{12}', r_{13}', \dots),$$

который полностью совпадает с первым законом движения, если не считать штрихов при координатах. Преобразование (49.1), связывающее координаты в этих двух системах, называется преобразованием Галилея. Полученный только что результат можно выразить следующим образом: классические уравнения движения Ньютона инвариантны по отношению к преобразованию Галилея. Следовательно, с точки зрения законов механики две координатные системы, связанные преобразованием (49.1), эквивалентны. Само собой разумеется, что этого уже не будет, если рассматривать электромагнитные процессы, так как световой сигнал, который распространялся бы в первой координатной системе по всем направлениям со скоростью  $c$ , в штрихованной системе имел бы скорость от  $c + v$  до  $c - v$ , в зависимости от направления, в котором наблюдают распространение света.

Согласно Эйнштейну, вся трудность заключается в том, что до сих пор физика принимала понятия пространства и времени совершенно некритически, как нечто абсолютно данное. В частности, мы представляли себе время, как нечто повсюду равномерно текущее, и считали, что имеет смысл говорить об абсолютной одновременности двух событий, происходящих в различных местах.

Утверждение о месте и времени какого-нибудь события получает для физика определенный смысл только тогда, когда даны численные координаты места и времени, как результат вполне определенного и принципиально выполнимого измерения. Для осуществления подобных измерений служат масштабы и часы, существование которых мы вводим в качестве особого допущения. Чтобы описать событие в выбранной нами системе координат, мы должны указать, в каком месте и в какое время оно происходит. Эта задача осуществлена, если мы в каждой точке пространства поместим метку, указывающую простран-



ственные координаты, и кроме того, если в этой точке будут находиться часы, по которым мы могли бы отметить момент времени, в который происходит событие в этом месте. Мы будем считать, что для задания места и времени события достаточно отметить отсчет по той метке и по тем часам, которые совпадают с данным событием.

Теперь подумаем, каким образом нам ввести в нашу координатную систему эти метки и как отрегулировать находящиеся в этих точках часы. Метки мы введем обычным способом, при помощи переключивания единичного масштаба, существование которого мы предположили заранее. Например, на оси  $x$  мы получим метку  $x = 6$ , если от начала координат отложим наш единичный масштаб шесть раз. Теперь в каждой отмеченной таким образом точке поставим часы. Относительно всех часов мы должны, конечно, предположить, что они идут одинаково, т. е. что их ход не зависит от той точки, в которой они находятся. Наша основная задача — отрегулировать часы так, чтобы все они показывали одно и то же время. При этом мы не можем поступить, например, следующим образом: сначала поместить все часы в начало координат, синхронизовать их и затем отрегулированные таким образом часы расставить по различным заранее отмеченным местам. Ведь мы не знаем, испытывает ли скорость хода часов какое-либо временное изменение при их переносе из одного места в другое. Поэтому мы должны, если не желаем вводить новых гипотез, сначала расставить часы по их местам и лишь после этого отрегулировать их так, чтобы они показывали то же время, какое показывают часы, находящиеся в начале координат.

Для этого мы будем поступать примерно следующим образом. Из начала координат мы пошлем в тот момент, когда находящиеся там часы покажут 0, световой сигнал по направлению к регулируемым часам, расположенным на расстоянии  $r$  от начала координат. Наблюдатель, находящийся у этих часов, имеет инструкцию поставить на них время  $t = \frac{r}{c}$  в тот момент, когда получит световой сигнал. Положим, что таким способом отрегулированы все часы, находящиеся в этой координатной системе. Лишь после этого мы можем дать определение понятия одновременности в нашей системе; два события, происходящие в разных точках системы, считаются одновременными в том случае, если часы, находящиеся в этих точках, показывают для этих событий одинаковое время. Это правило регулирования часов — как определение одновременности — является центральным пунктом специальной теории относительности.

Мы видим, что на основании такого определения результат опыта Майкельсона приобретает принципиальное значение, так как тот факт, что свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью, положен нами в основу представления о времени.

Теперь выясним, каким образом следует производить измерения в случае таких объектов, которые движутся относительно нашей системы с метками и часами. Например, для того чтобы определить длину движущегося масштаба, мы должны найти положение его начала и конца в один и тот же момент времени. Отсюда ясно, что не имеет смысла

говорить о длине движущегося масштаба, если предварительно не ввести отчетливое понятие об одновременности. Для такого измерения длины нужно, чтобы все наблюдатели, находящиеся в различных точках координатной системы, получили инструкцию отметить тот момент времени, в который мимо них проходит начало или конец движущегося масштаба. Из всех полученных таким образом показаний нужно использовать для определения длины показания двух наблюдателей, из которых один видел около себя начало, а другой — конец масштаба в один и тот же момент времени  $t$ . Подобным же образом следует измерять продолжительность процесса, происходящего в движущемся теле. Для этого, конечно, существенны показания тех часов, в непосредственной близости от которых началось и кончилось событие.

До сих пор мы говорили только об одной координатной системе и выяснили, каким образом возможно производить измерения принципиально безукоризненным способом. Точно такие же правила можно дать для любой другой координатной системы, движущейся по отношению к первой с постоянной скоростью. В следующих параграфах мы рассмотрим, каким образом должны быть связаны координаты и время этих двух систем. Никким образом нельзя заранее допускать как нечто само собой разумеющееся, что понятие одновременности для обеих систем одно и то же. Мы, напротив, увидим, что два события, одновременные в одной системе, не могут уже считаться одновременными в другой.

**§ 50. Преобразование Лорентца.** Рассмотрим две движущиеся друг относительно друга координатные системы и предположим, что масштабы и часы в каждой из них размещены и отрегулированы по правилам предыдущего параграфа. Тогда, очевидно, каждое реальное событие, как например появление вспышки на экране или прохождение стрелки через нуль какого-нибудь измерительного прибора, может быть измерено в обеих системах. Если мы будем штрихами отличать результаты измерений второго наблюдателя от результатов измерений первого, то первый наблюдатель припишет событию координаты  $x, y, z, t$ , а второй — координаты  $x', y', z', t'$ . Говоря о преобразовании одной координатной системы в другую, мы будем подразумевать под этим аналитическую связь, существующую между координатами  $x', y', z', t'$  и координатами  $x, y, z, t$ . Определенным событием можно считать показание  $t$  стрелки часов, расположенных в точке  $x, y, z$  первой координатной системы. В этом случае уравнения преобразования должны указать нам, в какой точке  $x', y', z'$  и в какое время  $t'$  это событие происходило с точки зрения второй координатной системы.

Для того чтобы найти эту зависимость между штрихованными и нештрихованными координатами, сделаем следующие предположения:

1. Зависимость должна быть линейной. Это необходимо для того, чтобы начало координат по своим физическим свойствам не отличалось от других точек.

2. Две системы движутся по отношению друг к другу с постоянной скоростью, т. е. каждая точка  $x', y', z'$  второй системы движется по отношению к первой системе со скоростью  $v$ , и наоборот, каждая точка  $x, y, z$  первой системы движется по отношению

ко второй со скоростью —  $v$ . Ограничение, связанное с этим предположением, характеризует точку зрения специальной теории относительности. (Только общая теория относительности, о которой в этой книге совсем не будет речи, рассматривает и ускоренно движущиеся координатные системы.)

3. Измерение скорости света в обеих системах дает во всех направлениях величину  $c$ . Это требование, собственно говоря, является исходной точкой всех наших рассуждений; в частности, оно уже содержится в определении времени  $t$  или  $t'$  и в эйнштейновском правиле регулирования часов.

4. Не существует такого физического метода измерения, при помощи которого принципиально можно было бы установить разницу между двумя системами. Это требование уже включает в себе все содержание теории относительности, поскольку оно далеко выходит за пределы измерения скорости света и претендует на применимость ко всем физическим явлениям. (В дальнейшем это условие нам понадобится только для специального случая, именно — для гипотезы сокращения Лорентца.)

Теперь выведем формулы преобразования для того случая, когда скорость  $v$  (см. пункт 2) имеет направление положительной оси  $x$ , и ось  $x$  все время совпадает с осью  $x'$ . Кроме того, пусть начало координат одной системы в момент времени  $t=0$  совпадает с началом координат другой в момент  $t'=0$ . Совпадение осей  $x$  и  $x'$  имеет место только в том случае, когда из условия  $y=0$  и  $z=0$  всегда следует, что  $y'=0$  и  $z'=0$ . Поэтому формулы преобразования для  $y$  и  $z$  должны иметь вид:

$$y' = \alpha y + \beta z, \quad z' = \gamma y + \delta z.$$

Мы исключаем чисто пространственное вращение, так как оно для нас несущественно; поэтому мы требуем, чтобы плоскость  $z=0$  переходила в плоскость  $z'=0$  и т. д. Так как направления  $y$  и  $z$  совершенно равноправны, то

$$y' = \epsilon y, \quad z' = \epsilon z.$$

Коэффициент  $\epsilon$  означает, что единичный масштаб, лежащий в направлении  $y$  первой системы, с точки зрения второй системы имеет длину  $\epsilon$ . Таким образом второй наблюдатель заметил бы удлинение масштаба в  $\epsilon$  раз, в то время как первый наблюдатель, измеряя длину единичного стержня, неподвижного во второй системе, получил бы в результате измерения  $\frac{1}{\epsilon}$ . Если бы это изменение длины при переходе от одной системы к другой отличалось от изменения длины при обратном переходе, то существовало бы объективное различие между двумя системами, что исключено пунктом 4. Следовательно, должно иметь место равенство  $\frac{1}{\epsilon} = \epsilon$ , т. е.  $\epsilon = 1$ . Поэтому

$$y' = y, \quad z' = z. \tag{50.1}$$

Теперь остается еще найти уравнения преобразований для  $x$  и  $t$ . Согласно предположению, точка  $x'=0$  должна двигаться вдоль оси  $x$

со скоростью  $v$ , т. е. задание  $x' = 0$  должно быть эквивалентно заданию  $x = vt$ . Соответственно этому,  $x = 0$  эквивалентно заданию  $x' = -vt'$ . Значит, искомое преобразование должно иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma'(x - vt), \\ x &= \gamma(x' + vt'), \end{aligned} \right\} \quad (50.2)$$

где числа  $\gamma'$  и  $\gamma$  следует еще определить. Сначала убедимся в том, что, согласно требованию 4, они должны быть равны друг другу. Для этого сперва измерим с точки зрения второй системы длину масштаба, который неподвижен в первой системе и имеет в ней длину  $l$ . Затем придадим этому же масштабу скорость второй системы и измерим его длину с точки зрения первой системы. Мы требуем, чтобы оба раза получился один и тот же результат. При первом измерении начало и конец стержня имеют координаты  $x = 0$  и  $x = l$ . Во второй системе в момент времени  $t' = 0$  обе эти точки имеют, согласно второму уравнению (50.2), координаты  $x' = 0$  и  $x' = \frac{l}{\gamma}$ . Следовательно, длина стержня, измеренная с точки зрения второй системы, равна  $\frac{l}{\gamma}$ . Стержень оказывается укороченным в  $\gamma$  раз. При втором измерении стержень неподвижен во второй системе. Следовательно, его начало и конец имеют координаты  $x' = 0$  и  $x' = l$ . С точки зрения первой системы, в момент времени  $t = 0$  эти точки, согласно первому уравнению (50.2), имеют координаты  $x = 0$  и  $x = \frac{l}{\gamma'}$ . Теперь стержень укорочен в  $\gamma'$  раз. Таким образом требование 4 приводит к равенству

$$\gamma = \gamma', \quad (50.3)$$

как мы и утверждали. Теперь для окончательного определения значения  $\gamma$  остается применить третье требование — требование постоянства скорости света. Пусть в момент времени  $t = t' = 0$  из начала координат испускается световой сигнал, который производит вспышку на экране, находящемся на каком-нибудь месте оси  $x$ . Это событие (вспышку) один наблюдатель будет описывать, пользуясь координатами  $x$  и  $t$ , а другой — координатами  $x'$  и  $t'$ , причем

$$x = ct \text{ и } x' = ct',$$

где  $c$  имеет одно и то же значение для обоих наблюдателей.

Если мы подставим это в (50.2), то получим:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma t(c - v), \\ ct &= \gamma t'(c + v). \end{aligned}$$

Перемножив эти уравнения друг на друга, мы найдем:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (50.4)$$

Для того чтобы найти искомую формулу преобразования, вычислим еще из (50.2)  $t'$  как функцию от  $x$  и  $t$ :

$$t' = \gamma \left\{ t + \frac{x}{v} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \right\}.$$

Итак, подставляя значение  $\gamma$ , мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (50.5)$$

Если решить эти уравнения по отношению к нештрихованным величинам, то получится следующая система уравнений, которая, как и следовало ожидать, отличается от (50.5) только знаками перед  $v$ :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (50.5a)$$

Зависимость между координатами двух указанных систем, описываемая уравнениями (50.5) или (50.5a), называется преобразованием Лорентца. Это преобразование должно заменить собою преобразование Галилея (49.1). Непосредственно видно, что в пределе, когда  $c \rightarrow \infty$ , оба преобразования становятся одинаковыми. В частности, в этом случае, согласно (50.5), будет  $t = t'$ , т. е. мы получим абсолютную одновременность. Традиционное понятие абсолютной одновременности, как выяснилось только благодаря анализу Эйнштейна, содержит в себе молчаливое предположение о том, что для определения одновременности двух событий, происходящих в разных местах пространства, в нашем распоряжении имеется сигнализация с бесконечно большой скоростью распространения.

Пользование скоростью света  $c$  для определения одновременности неявным образом содержит в себе утверждение, что большая скорость распространения сигналов принципиально невозможна. Ведь если бы существовало действие, которое распространяется со скоростью  $v > c$ , то можно было бы осуществить координатную систему, в которой это действие влияло бы на уже прошедшие события.

Наше преобразование обладает тем свойством, что законы распространения света не зависят от постоянной скорости относительного поступательного движения. Это можно показать также следующим образом. Сферическая волна, выходящая в момент времени  $t = 0$  из начала координат, в момент  $t$  достигает сферической поверхности, даваемой уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.$$

Попадание световой волны на эту сферическую поверхность, отмечаемое, например, вспышками на экранах, с точки зрения второй системы тоже должно описываться уравнением

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0.$$

Легко убедиться на самом деле в том, что при преобразовании Лорентца всегда имеет место равенство:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad (50.6)$$

В дальнейшем мы воспользуемся этим обстоятельством как исходной точкой для введения более глубоких понятий. В дифференциальной форме мы получаем следующий результат. Световые явления всегда удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Если это уравнение преобразовать к системе, движущейся со скоростью  $v$ , то в функции  $\varphi(x, y, z, t)$  следует сделать подстановку (50.5а). Тогда получится:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \frac{\frac{v}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Аналогично этому,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \frac{v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при преобразовании Лорентца действительно получается:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2}. \quad (50.7)$$

Дифференциальное уравнение распространения света инвариантно по отношению к преобразованию Лорентца.

§ 51. Следствия из преобразования Лорентца а) Масштабы и часы с точки зрения преобразования Лорентца. Уже в предыдущих параграфах мы видели, что масштаб, имеющий в состоянии покоя длину  $l$ , имеет с точки зрения движущегося относительно него наблюдателя меньшую длину, а именно  $l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Это явление называют

сокращением Лорентца, хотя, как мы видели в § 48, гипотеза сжатия, введенная самим Лорентцом, не удовлетворяла постулату относительности.

Подобным же образом мы можем рассмотреть с точки зрения первой системы ход часов, которые неподвижны во второй системе координат. Согласно уравнениям (50.5а), моменту времени  $t'$  в точке  $x'$  соответствует время

$$t_1 = \frac{x' \frac{v}{c^2} + t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а моменту  $t' + 1$  соответствует время

$$t_2 = \frac{x' \frac{v}{c^2} + t' + 1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Поэтому движение стрелки часов, находящихся во второй системе, от показания  $t'$  до  $t' + 1$  с точки зрения неподвижного наблюдателя первой системы ( $x = \text{const}$ ) происходит за время

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

т. е. движущиеся часы идут медленнее, чем неподвижные, в  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  раз.

В приложениях часто встречается одна важная величина — собственное время движущегося тела. Это время мы определим просто как то время  $\tau$ , которое показывают часы, движущиеся вместе с рассматриваемым телом. Связь этого собственного времени с тем временем, которое доступно наблюдению в координатной системе, принятой за неподвижную, можно весьма просто определить с помощью данных выше преобразований. Пусть тело в момент времени  $\tau$  движется со скоростью  $v$ . Рассмотрим теперь два события, происходящие в близкие друг к другу моменты времени, а именно пусть этими событиями будут показания  $\tau$  и  $\tau + d\tau$  движущихся вместе с телом часов. Неподвижный наблюдатель отметит по своим часам для этих событий даты  $t$  и  $t + dt$ . Так как за очень малые промежутки времени каждое движение можно приближенно заменить прямолинейным движением с постоянной скоростью, то мы можем применить к промежуткам времени  $dt$  и  $d\tau$  полученный выше результат:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (51.1)$$

Наблюдатель найдет при помощи неподвижных часов несколько большее значение интервала времени, чем то, которое соответствует собственному времени, измеренному при помощи часов, движущихся вместе с телом.

Напишем этот результат еще в несколько ином виде. Мы имеем:

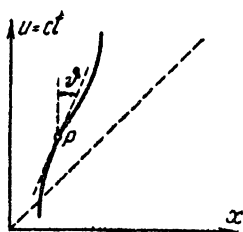


Рис. 72. Изображение движения точки посредством мировой линии в плоскости  $(x, u)$ . Скорость в точке  $P$  равна  $c \operatorname{tg} \vartheta$ .

$$d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2} (c^2 dt^2 - v^2 dt^2).$$

Мгновенная скорость тела  $v$  определяется из формулы

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

так что мы получаем:

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} (c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2).$$

Вследствие преобразования Лоренца, правая часть этого равенства всегда имеет одно и то же значение, независимо от того, в какой координатной системе ее измеряют. В частности, если измерять ее в системе, движущейся вместе с телом, т. е. в системе, по отношению к которой это тело неподвижно ( $dx = dy = dz = 0$ ), то в правой части останется только квадрат времени  $dt^2$ , которое показывают часы, неподвижные в этой системе, и которое, согласно определению, как раз является собственным временем движущегося тела.

б) *Геометрическое изображение преобразований Лоренца.* Последнее и подобные ему следствия уравнений (50.5) станут значительно нагляднее, если представить эти уравнения геометрически, что было впервые сделано Минковским. При этом мы будем игнорировать координаты  $y$  и  $z$ , которые не меняются при преобразовании (50.5), если относительное движение наших двух систем происходит вдоль оси  $x$ . Мы изобразим совокупность всех возможных событий в первой системе при помощи пространственно-временной диаграммы, в которой по оси абсцисс откладывается координата  $x$ , а по оси ординат — время, умноженное на  $c$  ( $u = ct$ ). На этой схеме (рис. 72) движение материальной точки изображается кривой (мировая линия точки), касательная к которой составляет с осью времен угол  $\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{dx}{du} = \operatorname{arctg} \frac{v}{c}$ , где  $v$  есть мгновенная скорость точки. Так как мы исключаем скорости, превышающие скорость света, то угол наклона этой кривой к оси времени всегда дол-

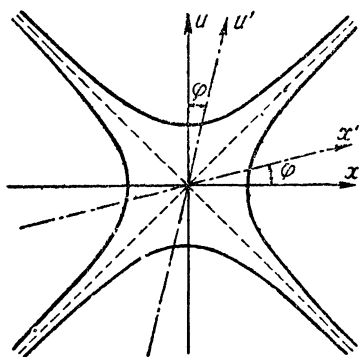


Рис. 73. Переход от координатной системы  $(x, u)$  к координатной системе  $(x', u')$ . Гиперболы отсекают на осях единичные отрезки в системах  $(x, u)$ ,  $(x', u')$ .



жен быть меньше  $45^\circ$ . Распространение света описывается прямой, наклоненной к оси под углом  $45^\circ$ .

На ряду с первой нештрихованной системой, рассмотрим вторую систему, движущуюся по отношению к первой со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$  (рис. 73). Введя обозначения  $u = ct$ ,  $u' = ct'$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ , мы можем переписать рассматриваемые уравнения (50.5) в виде:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - \beta u}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & x &= \frac{x' + \beta u'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ u' &= \frac{-\beta x + u}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & u &= \frac{\beta x' + u'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (51.2)$$

Системе II, движущейся по отношению к I, будет на нашей диаграмме соответствовать новая координатная система, оси которой мы найдем следующим образом: согласно определению, точки  $x = 0$ ,  $u = 0$  и  $x' = 0$ ,  $u' = 0$  совпадают. Точка  $x' = 0$  движется по отношению к I со скоростью  $v$ . Ее мировая линия поэтому есть прямая, проходящая через 0 и составляющая с осью времен угол  $\varphi = \text{arctg } \beta$ . Так как для этой прямой  $x' = 0$ , то она есть не что иное, как ось времен штрихованной системы. Что же касается *оси пространства*, то она получится из (51.2), если положить  $u' = 0$ . Уравнение этой прямой поэтому есть  $ct = u = \beta x$ , и она составляет с осью  $x$  угол  $\varphi = \text{arctg } \beta$ .

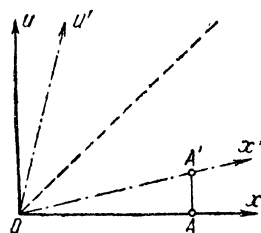


Рис. 74. Относительность одновременности.

С этой геометрической точки зрения мы особенно ясно видим относительный характер одновременности. Все события, лежащие на оси  $x'$ , второму наблюдателю кажутся одновременными, с точки же зрения первого наблюдателя они происходят в разное время. Для него событие  $A'$  (рис. 74) происходит позднее события 0 на время  $\frac{u}{c} = \frac{1}{c} AA'$ .

Для полноты геометрического изображения преобразований Лоренца необходимо еще задать единицы длины для соответствующих осей. Для этой цели проведем на рис. 73 равносторонние гиперболы

$$x^2 - u^2 = 1 \quad \text{и} \quad u^2 - x^2 = 1. \quad (51.3)$$

Они пересекают ось  $u$  и ось  $x$  нештрихованной системы как раз в точках  $u = 1$ ,  $x = 0$  и  $x = 1$ ,  $u = 0$ . Покажем, что точки пересечения гипербол (51.3) с новыми осями будут:

$$u' = 1, \quad x' = 0 \quad \text{и} \quad u' = 0, \quad x' = 1$$

и что, следовательно, гиперболы отсекают и от новых осей единицы длины и времени. Правильность этого утверждения можно доказать, исходя из уравнений (51.2). Точка  $u' = 1$ ,  $x' = 0$  имеет в первой системе координаты

$$x = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

которые удовлетворяют второму уравнению (51.3). Соответственно этому, точка  $x' = 1, u' = 0$  в первой системе имеет координаты

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

которые удовлетворяют первому уравнению (51.3). Значит, мы можем при помощи многократного переключивания единичного масштаба дополнить наш рисунок координатной сеткой системы  $x', u'$ .

Явление взаимного укорочения масштабов мы можем изобразить следующим образом (рис. 75). Пусть  $OA$  — единичный масштаб, неподвижный в первой системе. Мировые линии его концов суть  $ODC$  и  $AA'$ . Для наблюдателя, неподвижного во второй системе, одновременное положение ( $u' = 0$ ) начала и конца этого отрезка задается мировыми точками  $O$  и  $A'$ . Следовательно, для него этот отрезок кажется короче, чем его единичный масштаб  $OB'$ . Наоборот, начало и конец неподвижного во второй системе единичного масштаба  $OB'$ , с мировыми линиями  $OC'$  и  $BB'$ , находятся для первого наблюдателя в момент времени  $u = 0$  в точках  $O$  и  $B$ , т. е. отрезок опять кажется короче, чем единичный масштаб  $OA$  неподвижной системы.

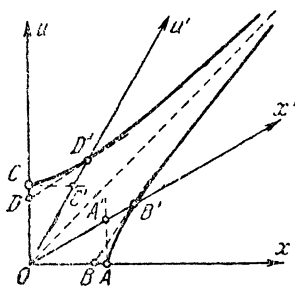


Рис. 75. Взаимное относительное укорочение движущихся друг относительно друга масштабов. Контроль хода часов.

Совершенно аналогично этому производится сравнение часов. Пусть, например, часы, неподвижные во второй системе, движутся по мировой линии  $OC'D'$ . В точке  $D'$  ( $u' = 1$ ) часы совершили один оборот, после того как его уже совершили (в точке на прямой  $CC'$ ) часы, находящиеся в том же месте пространства первой системы ( $u = 1$ ). Таким образом движущиеся часы идут медленнее, чем неподвижные. Часы, неподвижные в первой системе, совершили в точке  $C$  один оборот, между тем как часы, находящиеся в том же месте пространства второй системы, закончили оборот уже в точке на прямой  $D'D$ .

Таким образом можно совершенно наглядно убедиться в том, что утверждение о взаимном укорочении масштабов и о замедлении часов не приводит ни к каким парадоксам, если только с самого начала отказаться от понятия абсолютной одновременности.

в) *Теорема Эйнштейна о сложении скоростей.* С помощью преобразований Лоренца мы выведем теорему Эйнштейна о сложении скоростей. Согласно старой кинематике, это сложение скоростей заключается просто в векторном их сложении: если  $v$  есть скорость судна (координатной системы) по отношению к первой координатной системе, а  $u'$  — скорость материальной точки относительно судна, то скорость этой точки относительно неподвижного наблюдателя равна

$$u = v + u'.$$

В теории относительности эта связь значительно сложнее. Рассмотрим опять две координатные системы, связанные уравнениями (50.5), и предположим, что материальная точка движется относительно штрихованной системы в плоскости  $x'$ ,  $y'$  со скоростью  $u'$ , так что ее скорость составляет с осью  $x'$  угол  $\vartheta'$ . Уравнения движения этой точки в штрихованной системе имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x' &= u't' \cos \vartheta', \\ y' &= u't' \sin \vartheta', \\ z' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (51.4)$$

Теперь представим ту же самую мировую линию с точки зрения первой системы. Для этого нам надо определить величины  $u$  и  $\vartheta$ , и притом так, чтобы уравнения

$$\left. \begin{aligned} x &= ut \cos \vartheta, \\ y &= ut \sin \vartheta, \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51.5)$$

после преобразований (50.5а) превратились в уравнения (51.4). Для этого заменим в первом уравнении (51.5)  $x$  на  $\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , а  $x'$  на

его выражение из первого уравнения (51.4). Кроме того, последнее уравнение (50.5а) вместе с первым уравнением (51.4) дает нам зависимость между  $t$  и  $t'$ . Итак, мы получаем:

$$\begin{aligned} ut \cos \vartheta &= \frac{u' \cos \vartheta' + v}{\sqrt{1 - \beta^2}} t', \\ ut \sin \vartheta &= u't' \sin \vartheta', \\ t &= \frac{1 + \frac{u'v}{c^2} \cos \vartheta'}{\sqrt{1 - \beta^2}} t'. \end{aligned}$$

Деля первые два уравнения на третье, мы получим:

$$\left. \begin{aligned} u \cos \vartheta &= \frac{u' \cos \vartheta' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2} \cos \vartheta'}, \\ u \sin \vartheta &= \frac{u' \sin \vartheta' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{u'v}{c^2} \cos \vartheta'} \end{aligned} \right\} \quad (51.6)$$

Отсюда мы находим величину и направление искомой скорости:

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= \frac{u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \vartheta' - \frac{u'^2 v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta'}{\left(1 + \frac{u'v}{c^2} \cos \vartheta'\right)^2}, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{u' \sin \vartheta' \sqrt{1 - \beta^2}}{u' \cos \vartheta' + v}. \end{aligned} \right\} \quad (51.7)$$

Если, в частности,  $u'$  совпадает по направлению с  $v$ , то  $\vartheta' = 0$  и  $\vartheta = 0$ , и, следовательно,

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \quad (51.8)$$

Результирующая скорость всегда меньше, чем сумма  $u' + v$  двух складываемых скоростей. В частности, из (51.8) следует, что в результате сложения двух скоростей, меньших чем  $c$ , нельзя получить скорость, превышающую скорость света. Даже если  $u' = c$ , то  $u = c$ , как бы ни была велика скорость  $v$ . Этот результат сам собою понятен, так как формула преобразований (50.5) как раз построена на той гипотезе, что процесс, распространяющийся в одной системе со скоростью  $c$ , в другой системе распространяется с той же скоростью.

Особенно поучительное применение уравнения (51.8) состоит, как показал Лауэ, в следующем объяснении опыта Физо: световой сигнал движется в среде, имеющей показатель преломления  $n$ , со скоростью  $u' = \frac{c}{n}$  (если мы пренебрежем дисперсией и поэтому не будем различать групповую и волновую скорости). Если же эта среда сама движется со скоростью  $v$ , то, согласно (51.8), неподвижный наблюдатель найдет скорость

$$u = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}},$$

или в первом приближении (в случае малых  $\frac{v}{c}$ ),

$$u = \left( \frac{c}{n} + v \right) \left( 1 - \frac{v}{nc} \right) = \frac{c}{n} + v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (51.9)$$

что вполне совпадает с результатом электронной теории (§ 46) и с измерениями Физо.

**§ 52. Содержание специальной теории относительности.** В последних параграфах мы построили кинематику, т. е. главным образом описание поведения движущихся масштабов и часов, удовлетворяющее принципу относительности и принципу постоянства скорости света. Основные уравнения (50.5), характеризующие нашу кинематику, были выведены как раз из того утверждения, что путем измерений при помощи масштабов и часов невозможно установить принципиального различия между двумя координатными системами, равномерно движущимися друг относительно друга.

Утверждения теории относительности идут гораздо дальше: они требуют, чтобы такое различие было принципиально ненаблюдаемым, т. е. чтобы все законы природы, а не только законы распространения света, были инвариантны по отношению к преобразованию Лорентца. Выше мы показали, что уравнения движения классической механики инвариантны по отношению к преобразованию Галилея. Однако, из приведенного там вывода непосредственно

следует, что эти уравнения ни в коем случае не инвариантны по отношению к преобразованию Лорентца. Уже из этого замечания мы видим, что проведение принципа относительности Эйнштейна невозможно без одновременного радикального изменения классической механики. Для того чтобы установить, удовлетворяет ли какое-либо уравнение физики, например закон индукции  $\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} = 0$ , принципу относительности, нужно сперва найти законы преобразования для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , т. е. определить поля  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$ , которые измерил бы движущийся наблюдатель, а затем проверить, удовлетворяют ли эти величины уравнению

$$\text{rot } \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}' = 0.$$

По такому пути и пошел Эйнштейн. Он обнаружил при этом, что уравнения электродинамики Максвелла действительно удовлетворяют принципу относительности. Этот, во многих конкретных случаях очень трудный способ можно заменить математическим методом Минковского, который позволяет сформулировать всякий закон природы так, что его инвариантность по отношению к преобразованию Лорентца может быть проверена непосредственно. Мы познакомимся с этим методом в следующих двух параграфах. Прообразом этого метода в некотором смысле является простое векторное исчисление в трехмерном пространстве. Последнее возникло в результате стремления исключить из уравнений движения несущественное для нас положение координатной системы (как, например, в уравнении Ньютона  $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$ ). Однако, все же нельзя избежать введения координатной системы, если нам надо знать численное соотношение между  $\dot{\mathbf{v}}$  и  $\mathbf{F}$ ; оказывается, что последнее, в общем, может быть описано только при помощи трех уравнений  $m\dot{v}_i = F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в произвольно выбранной координатной системе. Эти три уравнения мы будем рассматривать, как уравнения между векторами  $\dot{\mathbf{v}}$  и  $\mathbf{F}$ , если при повороте координатной системы компоненты  $\dot{v}_i$  и  $F_i$  будут связаны такими же соотношениями  $m\dot{v}'_i = F'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), но отнесенными к новой координатной системе. В обеих частях уравнения, имеющего физический смысл, могут стоять только величины, преобразующиеся одинаковым образом, например вектор = вектору, тензор = тензору и т. д.

Кратко поясним на одном примере, как это простое требование может уже в случае трех измерений облегчать открытие законов природы. Будем искать компоненты напряжения  $p_{xx}, p_{xy} \dots$  произвольно движущейся вязкой сжимаемой жидкости. При этом мы заранее предположим, что напряжения линейно содержат первые производные от компонент скорости  $v_x, v_y, v_z$  по координатам  $\left( \frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial y} \dots \right)$ . Заменим индексы  $x, y, z$  на  $1, 2, 3$ . Известно, что  $p_{ik}$  образуют симметричный тензор. Симметричным тензором всегда является и величина  $\delta_{ik}$ , где  $\delta_{ik} = 1$  при  $i = k$  и  $\delta_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ . Из величин  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$  можно составить симметричный тензор  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ . Поэтому мы с самого начала пишем:

$$p_{ik} = R\delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Коэффициенты  $R$  и  $\mu$  должны быть скалярными инвариантами. Единственным инвариантом, который можно получить из тензора путем линейной операции, является его диагональная сумма

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Это выражение не может входить в  $\mu$ , так как  $p_{ik}$  должны зависеть от  $\frac{\partial v_j}{\partial x_k}$  линейно. Таким образом наиболее общим выражением искомого напряжения будет:

$$p_{ik} = \delta_{ik} \left\{ p + \lambda \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \right\} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right),$$

куда входят три скалярные величины:  $p$  (гидростатическое давление),  $\mu$  (вязкость) и  $\lambda$ .

Метод теории относительности, предложенный Минковским, состоит в целесообразном обобщении трехмерного векторного анализа, причем требование инвариантности по отношению к поворотам координатной системы в трехмерном пространстве должно быть заменено требованием инвариантности по отношению к преобразованию Лорентца. Это преобразование, как мы увидим в следующих параграфах, действительно можно представить как некоторый поворот в четырехмерном пространстве с координатами  $x, y, z, ct$ .

## II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

**§ 53. Преобразование Лорентца (в общем виде).** В рамках намеченного в предыдущем параграфе плана, мы начнем прежде всего со вспомогательных математических методов. Прежде всего, поставим перед собой задачу найти наиболее общее преобразование, соответствующее переходу от координат одной системы к координатам другой системы, которая равноправна с первой. Пусть даны две координатные системы

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \\ x_4 = ict \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{array}{l} x_1' = x' \\ x_2' = y' \\ x_3' = z' \\ x_4' = ict' \end{array} \right\}$$

причем нам известно, что законы распространения света в них одинаковы, т. е., что эти системы отсчета равноправны в смысле теории относительности. Мы хотим найти формулы преобразования для перехода от  $x_i$  к  $x_i'$ .

Прежде всего отметим, что мы не ограничим общности вывода, если выберем оба начала координат так, что они будут совпадать в четырехмерном пространстве, т. е. что точке  $x_i = 0$  ( $i = 1 \dots 4$ ) будет соответствовать точка  $x_i' = 0$ . Кроме того ясно, что формулы преобразования должны быть линейными; в противном случае, например, плоскости в одной системе будет соответствовать искривленная поверхность в другой и, следовательно, плоской волне в одной системе — искри-

вленная волна в другой. Таким образом мы можем представить обобщенное преобразование в виде

$$x_i' = \sum_{k=1}^4 a_{ik} x_k, \quad (53.1)$$

причем коэффициенты  $a_{ik}$  пока совершенно произвольны.

Так как обе системы должны быть „равноправными системами отсчета“ в смысле принципа относительности, то в обеих системах скорость света  $c$  должна быть одинаковой. Не ограничиваясь этим, потребуем, чтобы  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$  имело одинаковое значение для всех систем, т. е., чтобы было

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \sum_{i=1}^4 x_i'^2. \quad (53.2)$$

Это требование налагает существенное ограничение на свободный выбор 16 коэффициентов  $a_{ik}$ . Подставляя (53.1) в (53.2), получаем:

$$\sum_{i=1}^4 x_i'^2 = \sum_i \left( \sum_k a_{ik} x_k \right) \left( \sum_l a_{il} x_l \right) = \sum_k \sum_l x_k x_l \sum_i a_{ik} a_{il}.$$

Эта сумма только тогда равна  $\sum_i x_i^2$ , когда  $a_{ik}$  удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^4 a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}; \quad \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = l \\ 0, & \text{если } k \neq l. \end{cases} \quad (53.3)$$

Теперь можно легко получить формулы, обратные по отношению к (53.1): умножив (53.1) на  $a_{il}$  и просуммировав по  $i$  от 1 до 4, мы получим на основании (53.3):

$$\sum_{i=1}^4 a_{il} x_i' = \sum_i a_{il} \sum_k a_{ik} x_k = \sum_k x_k \sum_i a_{ik} a_{il} = x_l,$$

или (изменив значки)

$$x_i = \sum_{k=1}^4 a_{ki} x_k'. \quad (53.1a)$$

Если снова составить сумму  $\sum x_i^2$  и потребовать, чтобы это выражение было инвариантным, то получится соотношение, аналогичное соотношению (53.3):

$$\sum_{i=1}^4 a_{ki} a_{il} = \delta_{kl}. \quad (53.3a)$$

Однако подчеркнем, что соотношение (53.3a) не накладывает новых ограничений на коэффициенты  $a_{ik}$ , а удовлетворяется автоматически, если удовлетворены условия (53.3). Легче всего в этом можно убедиться, подставляя полученные на основании (53.3) соотношения (53.1a) в (53.1) и сравнивая коэффициенты при  $x_i'$  в обеих частях уравнения; при этом снова получаются уравнения (53.3a).

Вычислим значение определителя  $|a_{ik}|$ ; для этого образуем по правилам умножения определителей новый определитель, равный произведению  $A^2 = |a_{ik}| \cdot |a_{ik}|$ . На основании (53.3), элементы главной диагонали этого определителя равны 1, а остальные равны нулю, поэтому сам определитель равен 1. Следовательно,

$$A = |a_{ik}| = \pm 1. \quad (53.4)$$

Требую, чтобы было  $A = +1$ , мы вносим еще одно ограничение, выходящее за пределы условия (53.3). Это мы делаем потому, что среди всех преобразований (53.1) должно существовать также и тождественное преобразование, при котором  $x_i' \equiv x_i$  и, следовательно, все элементы матрицы  $(a_{ik})$  равны нулю, кроме элементов главной диагонали, которые равны единице. В этом случае, очевидно,  $A = +1$ . Исходя из соображений непрерывности, мы требуем, чтобы и при всех преобразованиях было  $A = +1$  (в противном случае мы допустили бы также преобразования, соответствующие зеркальному отражению координатной системы в одной из координатных плоскостей).

Докажем еще, что преобразование (53.1) представляет группу. Если произвести два таких преобразования одно за другим, т. е. перейти от системы  $x_i$  к системе  $x_i'$  посредством преобразования  $(a_{ik})$ , а потом от  $x_i'$  к  $x_i''$  посредством преобразования  $(b_{ik})$ , то  $x_i''$  будут связаны с  $x_i$  преобразованием  $(c_{ik})$ ; из

$$x_i'' = \sum_k b_{ik} x_k', \quad x_k' = \sum_l a_{kl} x_l$$

следует, что

$$x_i'' = \sum_l x_l \sum_k b_{ik} a_{kl} = \sum_l c_{il} x_l,$$

где

$$c_{il} = \sum_k b_{ik} a_{kl}. \quad (53.5)$$

Остается доказать, что  $c_{ik}$  удовлетворяют соотношению (53.3), если этому соотношению удовлетворяют  $a_{ik}$  и  $b_{ik}$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_i c_{il} c_{im} &= \sum_i \left( \sum_k b_{ik} a_{kl} \right) \left( \sum_n b_{in} a_{nm} \right) = \sum_k \sum_n a_{kl} a_{nm} \sum_i b_{ik} b_{in} = \\ &= \sum_k \sum_n a_{kl} a_{nm} \delta_{kn} = \sum_k a_{kl} a_{km} = \delta_{lm}. \end{aligned}$$

Следует указать на то, что существенное значение имеет порядок, в котором производятся преобразования. Если бы мы, например, выполнили сначала преобразование  $b_{ik}$ , а потом преобразование  $a_{ik}$ , то пришли бы к координатной системе  $x_i'''$ , которую можно получить непосредственно из  $x_i$  при помощи преобразования с коэффициентами

$$c_{il}' = \sum_k a_{ik} b_{kl}, \quad (53.5a)$$

отличными от  $c_{il}$ .



Преобразование, даваемое формулой (53.1) или (53.1а) с добавочными условиями (53.3) и (53.3а) (так называемыми „соотношениями ортогональности“) и определителем  $|a_{ik}| = +1$ , называется ортогональным преобразованием.

Такой же характер имеет преобразование, соответствующее обыкновенному вращению системы осей вокруг начала координат в трехмерном пространстве. Поэтому мы будем и в случае ортогонального преобразования (53.1) говорить о „вращении в четырехмерном пространстве“. Такое преобразование представляет наиболее общий переход между двумя релятивистскими эквивалентными координатными системами.

Предыдущие рассуждения должны быть дополнены рассмотрением вопроса о том, каковы коэффициенты преобразования  $a_{ik}$ , в смысле их вещественности или мнимости.

По определению,  $x_1, x_2, x_3$  вещественны, а  $x_4$  — чисто мнимое. Когда мы переходим при помощи преобразования  $a_{ik}$  к новой координатной системе  $x_k'$ , то все  $a_{ik}$  должны быть выбраны так, чтобы и в новой системе координат три пространственные координаты были чисто вещественными, а временная — чисто мнимой. Согласно (53.1), это, очевидно, возможно только тогда, когда все  $a_{ik}$  вещественны, кроме  $a_{14}, a_{24}, a_{34}$  и  $a_{41}, a_{42},$  и  $a_{43}$ , которые должны быть чисто мнимыми; но  $a_{44}$  должно быть вещественным. Можно легко удостовериться в том, что снова получаются правильные (в смысле вещественности и мнимости) коэффициенты, если по формуле (53.5) слить два преобразования  $a_{ik}$  и  $b_{ik}$  в одно преобразование  $c_{il}$ . Если  $i$  и  $l$  не равны 4, то в (53.5), входят при  $k \neq 4$  только вещественные величины, а при  $k = 4$  — произведение двух мнимых величин; следовательно, соответствующие им  $c_{il}$  вещественны; то же самое имеет место и для  $c_{44}$ ; напротив,  $c_{ik}$  будут чисто мнимыми, если один из двух индексов равен 4.

Мы знаем, что перемножение двух ортогональных преобразований дает тоже ортогональное преобразование. Поэтому напрашивается вопрос, не может ли наиболее общее ортогональное преобразование быть разложенным на более простые преобразования. В качестве таких преобразований мы рассмотрим:

1. Обыкновенные повороты. Это такие повороты, при которых отсчет времени не меняется. Их матрица поэтому имеет вид

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{53.6}$$

(Повернутые друг относительно друга координатные системы представляют тривиальный случай релятивистски эквивалентных систем).

2. Чистые преобразования Лорентца; при этих преобразованиях обычная (трехмерная) система координат движется относительно другой координатной системы с постоянной скоростью  $v$ . Выведем для этого преобразования матрицу ( $a_{ik}$ ). Найденное в § 40 частное преобразование Лорентца гласит, что для слагающей вектора, параллельной направлению движения, имеют место соотношения:

$$x_{\parallel}' = \frac{x_{\parallel} - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{(vx_{\parallel})}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{53.7a}$$

в то же время слагающая, перпендикулярная к направлению движения, остается без изменения:

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \tag{53.7b}$$

Для того чтобы вывести зависимость  $\mathbf{x}'$  от  $\mathbf{x}$ , сделаем дополнительное предположение, что  $\mathbf{x}'$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{v}$ ; таким образом мы, как и в § 50, исключим из рассмотрения пространственные повороты вокруг направления  $\mathbf{v}$ , как несущественные. Значит,  $\mathbf{x}'$  должно иметь вид

$$\mathbf{x}' = a\mathbf{x} + b\mathbf{v}. \tag{53.8}$$

Из формулы (53.7b) непосредственно следует, что  $a = 1$ , в то время как, согласно (53.7a),

$$b = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

и отсюда

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})}{v^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) - \frac{\mathbf{v}t}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{53.9}$$

Кроме того,

$$t' = \frac{t - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Если написать обе эти формулы в виде (53.1), то получится, как легко подсчитать, следующая матрица коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{v_x^2}{v^2} x, & \frac{v_x v_y}{v^2} x, & \frac{v_x v_z}{v^2} x, & \frac{i v_x}{c \sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{v_x v_y}{v^2} x, & 1 + \frac{v_y^2}{v^2} x, & \frac{v_y v_z}{v^2} x, & \frac{i v_y}{c \sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{v_x v_z}{v^2} x, & \frac{v_y v_z}{v^2} x, & 1 + \frac{v_z^2}{v^2} x, & \frac{i v_z}{c \sqrt{1-\beta^2}} \\ -\frac{i v_x}{c \sqrt{1-\beta^2}}, & -\frac{i v_y}{c \sqrt{1-\beta^2}}, & -\frac{i v_z}{c \sqrt{1-\beta^2}}, & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \tag{53.10}$$

где для сокращения положено

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1.$$

В частном случае, когда  $v_y = v_z = 0$ , эта схема превращается в знакомую нам схему частного преобразования Лоренца:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, & 0, & 0, & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0, & 1, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 1, & 0, \\ -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, & 0, & 0, & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \tag{53.10a}$$

Следует заметить, что преобразование (53.10) можно получить путем последовательного применения трех частных преобразований типа (53.10a) по направлениям трех координатных осей. Отметим, кроме того, что два частных

преобразования Лорентца, произведенные одно за другим, не могут быть заменены одним частным преобразованием Лорентца, а к нему следует еще добавить обыкновенный пространственный поворот.

Перейдем теперь к задаче, поставленной нами раньше. Пусть даны две эквивалентные системы отсчета, связанные преобразованием  $x_i' = \sum_k a_{ik} x_k$ .

Спрашивается, можно ли достаточно простым способом разложить это общее преобразование на несколько элементарных. Покажем, что такое преобразование может быть всегда однозначным образом представлено как произведение одного элементарного преобразования Лорентца, типа (53.10а), на последующий пространственный поворот.

Из значений  $a_{ik}$  мы можем сейчас же определить движение начала координат обычной трехмерной (штрихованной) системы, т. е. движение точки  $x' = y' = z' = 0$  относительно нештрихованной системы. Из уравнения (53.1а) следует:

$$x_i = a_{4i} x_4' \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Исключая  $x_4'$  на основании четвертого уравнения, мы получаем:

$$x_1 \equiv x = \frac{a_{41}}{a_{44}} x_4 = \frac{ica_{41}}{a_{44}} t, \quad x_2 \equiv y = \frac{ica_{42}}{a_{44}} t, \quad x_3 \equiv z = \frac{ica_{43}}{a_{44}} t,$$

и поэтому

$$v_x = \frac{ica_{41}}{a_{44}}, \quad v_y = \frac{ica_{42}}{a_{44}}, \quad v_z = \frac{ica_{43}}{a_{44}}. \quad (53.11)$$

Зная скорость штрихованной системы относительно нештрихованной, можно теперь при помощи одного элементарного преобразования Лорентца (53.10) перейти от  $x_i$  к новой системе  $x_i''$ , движущейся в направлении, определяемом равенством (53.11) и имеющей с системой  $x_i'$  общее начало координат  $x' = y' = z' = 0$ . Поэтому система  $x_i''$  может отличаться от системы  $x_i'$  лишь обычным трехмерным вращением вокруг общего начала координат. Мы легко можем определить матрицу коэффициентов этого вращения: обозначим ее через  $(b_{ik})$ , в то время как матрицу выведенного только что элементарного преобразования Лорентца обозначим через  $(c_{ik})$ . Эти два последовательно выполненные преобразования должны иметь результатом данную матрицу  $(a_{ik})$ . Следовательно, на основании (53.5) мы можем написать:

$$a_{il} = \sum_r b_{ir} c_{rl}.$$

Отсюда, умножая на  $c_{kl}$  и суммируя по  $l$ , мы получаем:

$$b_{ik} = \sum_l a_{il} c_{kl}. \quad (53.12)$$

Легко убедиться в том, что матрица коэффициентов (53.12) действительно представляет пространственное вращение, т. е. обладает таким же характером, как схема (53.6).

**§ 54. Четырехмерные векторы и тензоры.** В предыдущем параграфе мы подробно ознакомились с преобразованием координат, определяющим переход от одной координатной системы к другой, релятивистски ей эквивалентной.

Во всех этих координатных системах физические законы должны иметь одинаковый вид; они не должны изменяться, если мы перейдем от одной системы к другой при помощи общего преобразования типа (53.1). Мы хотим найти некоторый формальный метод, в рамках которого могут быть представлены наши уравнения, и который не зависел

бы от специального выбора системы отсчета. Вспомним об аналогичных соотношениях в трехмерном пространстве, где все координатные системы, получаемые друг из друга путем вращения вокруг начала координат, заранее признаются равноправными. В случае трехмерного пространства мы вводим трехмерные векторы и основанный на них метод вычисления, инвариантный относительно вращения координатной системы, причем с помощью этого метода все физические закономерности могут быть записаны в форме векторных или скалярных соотношений.

Попробуем построить такое векторное исчисление, которое обеспечивало бы инвариантность относительно четырехмерного вращения, а, следовательно, и относительно наиболее общих преобразований Лорентца. Начнем с частного случая, для чего рассмотрим две точки в четырехмерном пространстве:  $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и  $Q(y_1, y_2, y_3, y_4)$ . Назовем величины  $y_i - x_i$  слагающими  $A$ , четырехмерного вектора  $A$  по направлениям осей координат. Вектор  $A$  будем себе представлять как прямую в четырехмерном пространстве, связывающую точки  $P$  и  $Q$ ; положение последних определяет направление вектора. Все это следует представлять себе так же, как и в трехмерном пространстве, хотя четырехмерное пространство, конечно, трудно изобразить наглядно.

Покажем, что „четырёхмерное расстояние“

$$l = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + (y_4 - x_4)^2} \quad (54.1)$$

не зависит от выбора системы отсчета. На основании (54.1) имеем:

$$\begin{aligned} l^2 &= \sum_{i=1}^4 (y_i' - x_i')^2 = \sum_{i=1}^4 \left( \sum_{k=1}^4 a_{ik} (y_k - x_k) \right) \left( \sum_{l=1}^4 a_{il} (y_l - x_l) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (y_k - x_k)(y_l - x_l) \sum_{i=1}^4 a_{ik} a_{il} = \sum_{k=1}^4 (y_k - x_k)^2, \end{aligned}$$

как и следовало ожидать. Ведь относительное положение двух точек  $P$  и  $Q$  задано наперед и не может измениться вследствие четырехмерного вращения координатной системы.

Назовем четырехмерными векторами величины, которые преобразуются так же, как только что описанный вектор, соединяющий точки  $P$  и  $Q$ . Заметим еще, что у только что рассмотренного вектора четвертая слагающая

$$A_4 = y_4 - x_4 = ic(t_Q - t_P),$$

чисто мнимая, остальные же три слагающие вещественны. Этим свойством обладают все четырехмерные векторы: или три пространственные слагающие вещественны, а временная чисто мнимая, или пространственные слагающие чисто мнимы, а временная — вещественна. Это свойство вектора, благодаря характеру коэффициентов преобразования  $a_{ik}$ , сохраняется и после преобразования. Умножением на  $i$  можно всегда достичь того, что пространственные слагающие будут вещественны. Условимся, что все векторы, с которыми мы в дальнейшем

будем иметь дело, обладают именно этим характером. Благодаря этому мы всегда можем представить себе три первые слагающие в обыкновенном пространстве, в то время как четвертая слагающая должна откладываться по четвертой мнимой оси.

Правила сложения и вычитания векторов могут быть заимствованы из соотношений для трехмерного пространства. Равенство  $A + B = C$  эквивалентно равенству

$$A_i + B_i = C_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Выше мы уже имели пример абсолютного значения вектора. Аналогично этому, мы назовем и в общем случае абсолютным значением вектора инвариантную величину

$$|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^4 A_i^2}. \quad (54.2)$$

Мы получаем здесь тот парадоксальный результат, что квадрат величины  $A$  может быть нулем и даже отрицательным числом: ведь только пространственные слагающие вектора вещественны, а четвертая слагающая чисто мнимая, и поэтому  $A_4^2$  — отрицательное вещественное число; следовательно, если  $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \leq -A_4^2$ , то  $A^2$  или равно нулю, или отрицательно.

В случае  $A^2 > 0$  мы говорим о „пространственно-подобном“, а при  $A^2 < 0$  о „временно-подобном“ векторе. Эти названия объясняются следующим образом: в трехмерном пространстве с помощью надлежащего вращения системы координат всегда можно добиться того, чтобы любая из трех координатных осей была направлена по заданному заранее вектору. Однако, это невозможно в четырехмерном пространстве из-за особого поведения четвертой, мнимой оси. Правда, и здесь можно путем четырехмерного вращения координатной системы (общее преобразование Лорентца) добиться того, чтобы заданный вектор совпадал с направлением одной координатной оси, однако не каждая координатная ось может быть приведена к совпадению с данным вектором. Это очевидно. В самом деле, если у рассматриваемого вектора  $A^2 > 0$ , то это соотношение, вследствие его инвариантности, должно иметь место и тогда, когда  $A$  совпадает с одной из осей координат, т. е. когда  $A$  обладает только одной отличной от нуля слагающей; поэтому эта слагающая должна быть вещественной, т. е., вращая координатную систему, мы можем совместить такой вектор только с пространственной осью; в этом случае мы говорим „о пространственно-подобном“ векторе. Если же  $A^2 < 0$ , то мы сможем совместить с направлением такого вектора только мнимую ось времени; мы назовем в этом случае  $A$  „временно-подобным вектором“. Приведем здесь два примера:

1) Четырехмерная скорость. Мы можем описать движение материальной частицы, задав ее четыре слагающие  $x_i$  как функции от некоторого параметра; в качестве такого параметра мы изберем „собственное время“ точки, т. е., согласно § 51, то время, которое показывают часы, движущиеся вместе с рассматриваемой точкой:

$$x_i = x_i(\tau). \quad (54.3)$$

Возьмем производные от этих координат по собственному времени:

$$u_i = \frac{dx_i(\tau)}{d\tau}. \quad (54.4)$$

Эти производные имеют следующий смысл: если мы переходим от некоторой точки  $P$  на мировой линии нашей материальной частицы к какой-либо соседней точке, отстоящей от точки  $P$  на четырехмерный вектор  $\Delta s$  с компонентами  $\Delta x_i$ , то  $\frac{\Delta x_i}{\Delta \tau}$  представляет отношение приращения координаты частицы, происшедшее за время, показываемое движущимися часами, к этому времени. В обычной механике, в которой исчезает различие между обычным и собственным временем, предел отношения  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta \tau}$  называют скоростью частицы. Мы сохраним это определение и в четырехмерном пространстве и назовем вектор (54.4) «четыремерной скоростью». Из определения следует, что четырехмерная скорость действительно является четырехмерным вектором: в самом деле,  $\Delta x_i$  — слагающая вектора,  $\Delta \tau$  — инвариант, следовательно,  $\frac{\Delta x_i}{\Delta \tau}$  есть вектор, причем это утверждение не перестает быть верным при переходе к пределу. Кроме того, заметим, что четвертая компонента

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = ic \frac{dt}{d\tau},$$

если не считать множителя  $ic$ , представляет собой коэффициент перехода от обычного счета времени к времени наблюдателя, движущегося вместе с частицей.

Найдем связь между четырехмерной и обыкновенной скоростью частицы. Обыкновенная скорость может быть вычислена, если в качестве параметра, описывающего движение, избрать обычное время  $t$  и положить  $v_x = \frac{dx}{dt}$  и т. д. На основании соотношения  $x_4 = ict$  можно написать:

$$v_x = \frac{dx_1}{d\tau} : \frac{dt}{d\tau} = ic \frac{u_1}{u_4}.$$

Согласно § 51,

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (54.5)$$

откуда, следовательно,

$$u_4 = ic \frac{dt}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (54.6a)$$

и

$$u_1 = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u_2 = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u_3 = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (54.6)$$

Мы видим, что три пространственные слагающие четырехмерной скорости (с точностью до членов порядка  $\beta^2$ ) совпадают с слагающими обыкновенной скорости.

На основании (54.6) легко сообразить, что четырехмерная скорость есть временно-подобный вектор, так как в системе, в которой материальная частица неподвижна ( $v = 0$ ), мы имеем:

$$u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0, \quad u_4^0 = ic. \quad (54.6a)$$

При этом верхним значком  $^0$  мы обозначаем координаты, относящиеся к системе, в которой частица неподвижна. Так как абсолютная величина четырех-

мерной скорости инварианта, то ее значение может быть определено из этого частного случая:

$$\sum_i u_i^2 = \sum_i (u_i^0)^2 = -c^2. \quad (54.7)$$

Конечно, то же значение получается, если вычислить  $\sum u_i^2$  на основании (54.6).

2. В качестве второго примера рассмотрим четырехмерное ускорение, которое тоже является четырехмерным вектором и определяется уравнением

$$\dot{b}_i = \frac{du_i}{d\tau}. \quad (54.8)$$

Четырехмерное ускорение, точно таким же способом, как четырехмерную скорость, можно выразить через компоненты векторов  $\mathbf{v}$  и  $\dot{\mathbf{v}}$ ; например, мы можем написать:

$$b_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{v}_x}{1-\beta^2} + \frac{v_x (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2 (1-\beta^2)^2} \quad (54.9a)$$

и

$$b_4 = \frac{d}{dt} \left( \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \frac{dt}{d\tau} = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{(1-\beta^2)^2}. \quad (54.9)$$

На основании этих формул легко вычислить, что

$$\sum b_i^2 = \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \dot{\mathbf{v}} \right)^2}{(1-\beta^2)^3} > 0, \quad (54.10)$$

и поэтому  $\mathbf{b}$  есть пространственно-подобный вектор. Если перейти к системе, в которой частица неподвижна ( $\mathbf{v} = 0$ ), то это можно показать еще проще. В такой системе

$$b_1^0 = \dot{v}_x, \quad b_2^0 = \dot{v}_y, \quad b_3^0 = \dot{v}_z, \quad b_4^0 = 0, \quad (54.8a)$$

т. е. три пространственные слагающие совпадают с обыкновенными слагающими ускорения, — как и должно быть в системе координат, в которой частица неподвижна, — а временная слагающая исчезает.

Будем развивать дальше четырехмерное векторное исчисление. По аналогии со скалярным произведением в трех измерениях, введем и здесь скалярное произведение

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^4 A_i B_i, \quad (54.11)$$

которое, как легко показать, действительно является инвариантом, т. е. скаляром. По аналогии с трехмерным пространством, мы будем называть два четырехмерных вектора взаимно перпендикулярными, если их скалярное произведение равно нулю, хотя наглядно представить себе перпендикулярность в четырехмерном пространстве невозможно.

Примером может служить скалярное произведение четырехмерных скорости и ускорения:

$$\sum_{i=1}^4 u_i b_i = 0. \quad (54.12)$$

Это равенство легче всего можно доказать, дифференцируя уравнение (54.7). Иначе это доказывается еще и так: в координатной системе, по отношению

к которой частица неподвижна, только четвертая слагающая ее четырехмерной скорости отлична от нуля, четвертая же слагающая ускорения исчезает, а поэтому их скалярное произведение равно нулю.

Совершенно другим типом произведения является тензорное произведение двух векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , характеризуемое совокупностью 16 величин (слагающих). Расположим для удобства эти слагающие в схему, похожую на матрицу:

$$\begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 & A_1 B_4 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 & A_2 B_4 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 & A_3 B_4 \\ A_4 B_1 & A_4 B_2 & A_4 B_3 & A_4 B_4 \end{pmatrix}. \quad (54.13)$$

Мы назовем это образование „тензором“; рассмотрим обобщенный тензор  $T$ , слагающие которого даются схемой:

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}. \quad (54.14)$$

По определению мы будем называть тензором любую величину типа (54.14), преобразующуюся так же, как (54.13), т. е. по формулам:

$$T_{ik}' = \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 a_{il} a_{km} T_{lm}. \quad (54.15)$$

Будем различать два частных вида тензоров: симметричные и антисимметричные; первые удовлетворяют равенству  $T_{ik} = T_{ki}$ , вторые же — равенству  $T_{ik} = -T_{ki}$ . Любой тензор можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора:

$$T_{ik} = \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki})}_{\text{симметричная часть}} + \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki})}_{\text{антисимметричная часть}}. \quad (54.16)$$

Характер симметрии тензора не нарушается при преобразованиях (54.15). Если, например,  $S$  — симметричный тензор, т. е.  $S_{ik} = S_{ki}$ , то согласно (54.15),

$$S_{ik}' - S_{ki}' = \sum_l \sum_m a_{il} a_{km} (S_{lm} - S_{ml}) = 0,$$

так что тензор  $S'$  тоже симметричный.

Особую роль играют антисимметричные тензоры. Вследствие того, что  $T_{ik} = -T_{ki}$ , элементы главной диагонали антисимметричного тензора должны равняться нулю. 12 отстающих компонент попарно равны по величине и противоположны по знаку, так что антисимметричный тензор имеет только 6 существенно различных компонент:

$$T_{12}, T_{23}, T_{31}; T_{14}, T_{24}, T_{34}, \quad (54.17)$$



Прототипом антисимметричного тензора является выражение

$$T_{ik} = A_i B_k - A_k B_i, \quad (54.18)$$

соответствующее „векторному произведению“ в трехмерном пространстве. Но в то время как в трехмерном пространстве можно однозначно сопоставить три слагающие антисимметричного тензора с некоторым вектором, в четырехмерном пространстве, где имеется 6 величин (54.17), этого сделать нельзя; поэтому эти величины на самом деле приходится рассматривать как слагающие антисимметричного тензора.

Что касается вещественности или мнимости слагающих тензора, то, сравнивая (54.14) и (54.13), можно сказать, что все слагающие вещественны, за исключением тех, у которых один значок равен 4; эти последние — чисто мнимые. Поэтому из шести компонент (54.17) антисимметричного тензора три вещественны, а остальные три — мнимые.

Дальнейших подробностей векторной алгебры (произведение вектора и тензора, произведение двух тензоров, определитель из четырех векторов и т. д.) мы касаться не будем, так как эти понятия или очевидны на основании предыдущего, или же в дальнейшем не будут употребляться. Вместо этого мы перейдем к векторному анализу и начнем с определения градиента. Если  $\varphi = \varphi(x_i)$  представляет функцию, данную во всем четырехмерном пространстве, то мы можем вывести из нее векторное поле следующим образом: будем исходить из некоторой точки  $x_i$ , в которой функция имеет значение  $\varphi$ , и зададимся целью определить изменение этой функции при переходе вдоль четырехмерного вектора  $ds$  к некоторой другой точке  $x_i + dx_i$ . Это изменение равно

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} dx_4. \quad (54.19)$$

Приращение  $d\varphi$  является некоторой объективной величиной и поэтому не зависит от системы координат. Справа же стоит выражение, соответствующее скалярному произведению двух четырехмерных векторов — вектора  $dx_i$  и величины с четырьмя слагающими  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ . Так как это произведение должно быть инвариантно, то естественно считать  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$  слагающими четырехмерного вектора. В правильности этого предположения можно убедиться, рассматривая закон преобразования для  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ; на основании (53.1) и (53.1a) можно написать:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i'} = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} = \sum_k a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k};$$

это и есть закон преобразования четырехмерного вектора. Вектор со слагающими  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$  называют градиентом  $\varphi$ ; его можно формально представить как произведение векторного оператора  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  на скаляр  $\varphi$ .

Из этого замечания следует, что скалярное произведение этого векторного оператора и вектора  $A$

$$\sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \quad (54.20)$$

является инвариантом; его называют, по аналогии с трехмерным случаем, четырехмерной расходимостью вектора  $A$ . Если при этом вектор  $A$  сам является градиентом, т. е.

$$A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

то

$$\sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \quad (54.21)$$

представляет инвариантное дифференциальное выражение, которое мы обозначим символом  $\square \varphi$ , где  $\square$  есть четырехмерный оператор Лапласа:

$$\square \equiv \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (54.22)$$

Итак, четырехмерный оператор Лапласа является инвариантом, что само собой очевидно, поскольку именно инвариантность этого выражения была исходным пунктом при выводе формулы общего преобразования Лорентца.

С помощью дифференциального оператора  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  можно образовать из вектора  $A_i$  еще одно важное дифференциальное выражение, а именно антисимметричный тензор

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \quad (54.23)$$

Это дифференциальное выражение, также по аналогии с выражением для трехмерного пространства, называют четырехмерным вихрем вектора  $A$ .

На этом мы заканчиваем наше изложение векторного анализа. Мы выпишем лишь формулы, которые нам понадобятся в дальнейшем. Это — формулы, по которым преобразуются слагающие вектора или тензора в частном случае преобразования Лорентца, соответствующего движению по оси  $x$ . Схема коэффициентов такого преобразования дана выше (53.10а). В случае четырехмерного вектора формулы преобразования имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} A_1' &= \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ A_2' &= A_2, \quad A_3' = A_3, \\ A_4' &= \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (54.24)$$

Эти соотношения уже известны нам для того частного случая, когда  $A_i$  совпадает с координатой  $x_i$ . Для общего случая четырехмерного тензора они гласят:

$$\left. \begin{aligned}
 T_{11}' &= \frac{T_{11} + i\beta(T_{14} + T_{41}) - \beta^2 T_{44}}{1 - \beta^2}, & T_{44}' &= \frac{T_{44} - i\beta(T_{14} + T_{41}) - \beta^2 T_{11}}{1 - \beta^2}, \\
 T_{14}' &= \frac{T_{14} + i\beta(T_{44} - T_{11}) + \beta^2 T_{41}}{1 - \beta^2}, & T_{41}' &= \frac{T_{41} - i\beta(T_{11} - T_{44}) + \beta^2 T_{14}}{1 - \beta^2}, \\
 T_{12}' &= \frac{T_{12} + i\beta T_{42}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & T_{21}' &= \frac{T_{21} + i\beta T_{24}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\
 T_{13}' &= \frac{T_{13} + i\beta T_{43}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & T_{31}' &= \frac{T_{31} + i\beta T_{34}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\
 T_{24}' &= \frac{T_{24} - i\beta T_{21}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & T_{42}' &= \frac{T_{42} - i\beta T_{12}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\
 T_{34}' &= \frac{T_{34} - i\beta T_{31}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & T_{43}' &= \frac{T_{43} - i\beta T_{13}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\
 T_{22}' &= T_{22}, & T_{23}' &= T_{23}, \\
 T_{33}' &= T_{33}, & T_{32}' &= T_{32}.
 \end{aligned} \right\} (54.25)$$

В случае антисимметричного тензора эти соотношения упрощаются и сводятся к следующим 6 уравнениям:

$$\left. \begin{aligned}
 T_{12}' &= \frac{T_{12} - i\beta T_{24}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & T_{14}' &= T_{14}, \\
 T_{13}' &= \frac{T_{13} - i\beta T_{34}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & T_{24}' &= \frac{T_{24} + i\beta T_{12}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\
 T_{23}' &= T_{23}, & T_{24}' &= \frac{T_{34} + i\beta T_{13}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.
 \end{aligned} \right\} (54.26)$$

### III. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

§ 55. Уравнения поля. Согласно задачам, поставленным в § 52, мы займемся в этой главе приведением электродинамики к релятивистскому виду. С точки зрения математики, задача будет заключаться в том, чтобы переписать основные уравнения электродинамики в четырехмерной векторной форме, причем, как мы сейчас увидим, это легко выполнимо по той причине, что сами уравнения инвариантны по отношению к преобразованию Лорентца; доказательством этого как раз и является возможность четырехмерной формулировки законов электродинамики.

Такого рода преобразование основных уравнений имеет два преимущества: во-первых, они принимают с чисто формальной стороны очень простой по сравнению с трехмерными уравнениями и замечательный по своей симметричности вид. С другой стороны, что для нас особенно важно, мы получаем целый ряд физических зависимостей между отдельными величинами в теории Максвелла, как например, между электрическим и магнитным полем, между энергией, вектором

Пойнтинга и максвелловским тензором напряжений и т. д. Все эти зависимости очень важны для более глубокого понимания электромагнитных процессов.

Для простоты начнем с преобразования уравнений для потенциалов:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho \end{aligned} \right\} \quad (55.1)$$

и связанного с ними уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (55.2)$$

Комбинация уравнений (55.1) и (55.2) дает уравнение непрерывности электрического заряда:

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (55.3)$$

В левой части уравнений (55.1) стоят дифференциальные выражения, которые получаются в результате применения дифференциального оператора  $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  к слагающим вектора  $\mathbf{A}$  или к  $\varphi$ .

С этим оператором, который мы назвали оператором Лапласа и обозначили символом  $\square$ , мы познакомились уже в § 54. С векторной точки зрения он является скаляром, — точно так же, как трехмерный оператор Лапласа в трехмерном пространстве.

Из четырех совершенно одинаково построенных уравнений (55.1) три первых уже слиты в обыкновенное векторное уравнение. Поэтому естественно предположить, что при четырехмерном обобщении  $\varphi$  будет играть роль той четвертой слагающей, которую следует присоединить к пространственным слагающим вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ . К тому же предположению мы приходим благодаря уравнению (55.2), которое после введения координат  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , вместо  $(x, y, z, t)$ , принимает вид:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x_1} + \frac{\partial A_y}{\partial x_2} + \frac{\partial A_z}{\partial x_3} + \frac{\partial i\varphi}{\partial x_4} = 0.$$

Если в этом уравнении мы будем рассматривать  $A_x, A_y, A_z$  как три пространственные слагающие  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  четырехмерного потенциала, четвертая слагающая которого равна  $\Phi_4 = i\varphi$ , то уравнение (55.2) примет инвариантный вид:

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (55.4)$$

Аналогично этому мы можем также рассматривать вектор  $\rho \mathbf{v}$  и скаляр  $i\rho c$  как три пространственные и одну временную слагающую четырех-

мерного тока  $s_v = (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, ic\rho)$ , благодаря чему уравнение (55.3) переходит в

$$\sum_{v=1}^4 \frac{\partial s_v}{\partial x_v} = 0. \quad (55.5)$$

Тогда уравнения (55.1) примут четырехмерную векторную форму:

$$\square \Phi_v = -\frac{4\pi s_v}{c}. \quad (55.6)$$

Пользуясь этим четырехмерным толкованием потенциала и плотности тока, мы сразу видим, как меняются эти величины при переходе к другой координатной системе. В частности, исследуем, как изменится вектор тока  $s_v$  при переходе от системы, в которой заряд покоится, к другой системе, по отношению к которой заряд движется со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ -ов. В этом случае имеют место формулы преобразования:

$$s_1 = \frac{s_1^0 - i\beta s_4^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad s_2 = s_2^0, \quad s_3 = s_3^0, \quad s_4 = \frac{s_4^0 + i\beta s_1^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (55.7)$$

причем

$$s_1^0 = s_2^0 = s_3^0 = 0. \quad s_4^0 = i\rho_0 c.$$

Это дает:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \rho v_x = \frac{\rho_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ s_2 &= \rho v_y = 0, \quad s_3 = \rho v_z = 0, \\ s_4 &= i\rho c = \frac{i\rho_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (55.7a)$$

Эти уравнения показывают, что в новой системе заряд, как и предполагалось, движется в направлении оси  $x$  со скоростью  $v$ , и кроме того, что в этой системе плотность заряда имеет значение

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (55.8)$$

Таким образом плотность заряда увеличивается при переходе от системы, в которой заряд неподвижен, к системе, по отношению к которой он движется. Напротив количество электричества  $de$  в определенном заданном элементе объема одинаково для обеих систем, так как

$$de = \rho dV = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot dV^0 \sqrt{1-\beta^2} = \rho_0 dV^0 = de^0. \quad (55.9)$$

Поведение  $dV$  при переходе от второго к третьему члену в этой цепи равенств определяется лорентцовым сокращением линейных размеров в направлении движения. Таким образом можно сказать, что плотность движущегося заряда увеличивается вследствие того, что тот же самый заряд вынужден в силу сокращения Лорентца помещаться в меньшем

объеме. В частности, оказывается, что заряд электрона одинаков для всех систем отсчета.

Форма уравнений (55.7а) указывает на возможность обобщения их на случай произвольного направления скорости:

$$\left. \begin{aligned} s_1 = \rho v_x &= \frac{\rho_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & s_3 = \rho v_z &= \frac{\rho_0 v_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ s_2 = \rho v_y &= \frac{\rho_0 v_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & s_4 = i\rho c &= \frac{i\rho_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (55.7)$$

Множители, на которые помножается плотность в состоянии покоя  $\rho_0$ , оказываются слагающими четырехмерной скорости  $u_v$ , так что четырехмерный ток можно выразить также в виде

$$s_v = \rho_0 u_v. \quad (55.10)$$

(Это — правильное векторное уравнение, так как  $\rho_0$ , очевидно, есть скаляр, а  $s_v$  и  $u_v$  — четырехмерные векторы).

Перейдем теперь от потенциалов  $A$  и  $\varphi$  к векторам напряженностей  $E$  и  $H$ ; последние связаны с потенциалами посредством уравнений:

$$H = \text{rot } A, \quad E = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Преобразуем эти соотношения, введя слагающие четырехмерного потенциала  $\Phi_v$  и четыре координаты  $x_v$ :

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, & E_x &= i \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right), \\ H_y &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}, & E_y &= i \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_4} \right), \\ H_z &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}, & E_z &= i \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (55.11)$$

Единый принцип построения этих уравнений естественно приводит к мысли ввести антисимметричный четырехмерный тензор:

$$F_{\nu\mu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu}. \quad (55.12)$$

Слагающие этого тензора связаны со слагающими векторов  $E$  и  $H$  следующим образом:

$$F_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \quad (55.13)$$

Следовательно, электромагнитное поле в четырехмерном пространстве уже не может быть описано посредством двух векторов, а должно описываться посредством одного антисимметричного тензора второго ранга. Таким образом электрическая и магнитная напряженности  $E$  и  $H$  уже не независимы друг от друга, а сливаются в единый тен-

зор. При преобразовании Лорентца, слагающие  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  преобразуются не отдельно, а вместе. Напишем такие формулы преобразований для перехода от одной системы (нештрихованной) к другой системе (штрихованной), движущейся по отношению к первой в направлении оси  $x$ ; эти формулы получаются из рассуждений § 54:

$$\left. \begin{aligned} H_x' &= H_x, & E_x' &= E_x, \\ H_y' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(H_y + \beta E_z), & E_y' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_y - \beta H_z) \\ H_z' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(H_z - \beta E_y), & E_z' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_z + \beta H_y) \end{aligned} \right\} \quad (55.14)$$

Если электрон неподвижен в штрихованной системе, то на него в этой системе действует сила  $e\mathbf{E}'$ . Из (55.14) мы видим, что это как раз совпадает с выражением для силы Лорентца

$$e \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \right],$$

если пренебречь релятивистскими поправками, т. е. членами порядка  $\beta^2$ .

На основании формул преобразования (55.14) легко проверить, что оба выражения  $\mathbf{E}\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$  являются инвариантами, т. е. их значения не меняются при переходе к штрихованной системе. Позднее мы сумеем это обстоятельство использовать.

Теперь напишем в четырехмерной форме уравнения Максвелла и затем проверим, правильны ли они. Эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\mu} &= \frac{4\pi s_\nu}{c}, \\ \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (55.15)$$

Первая система содержит четыре уравнения ( $\nu = 1, 2, 3, 4$ ) и эквивалентна уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \rho \mathbf{v}}{c} & \text{для } \nu = 1, 2, 3, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi \rho & \text{для } \nu = 4, \end{aligned} \right\} \quad (55.16a)$$

в чем можно убедиться непосредственно, если подставить в (55.15) выражения (55.13) и (55.7). Во второй системе уравнений  $\nu, \mu$  и  $\lambda$  могут принимать, независимо друг от друга, все значения от 1 до 4; но мы видим, что, вследствие антисимметричности  $F_{\nu\mu}$ , левые части не исчезают тождественно только в тех уравнениях, в которых все значения  $\nu, \mu$  и  $\lambda$  различны. Но давая тройке чисел ( $\nu, \mu, \lambda$ ) значения (2, 3, 4), (3, 4, 1), (4, 1, 2) и (1, 2, 3), мы получаем всего четыре уравнения. С помощью

(55.13) мы находим из первых трех полученных таким образом уравнений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (55.16)$$

и из четвертого:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Уравнения Максвелла в четырехмерной формулировке имеют особенно простой вид, что обусловлено, с одной стороны, симметричной трактовкой пространственных и временных координат, с другой стороны — слиянием  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в один тензор. Впрочем, при определении поля по заданному распределению заряда можно и не пользоваться уравнениями (55.15), а сперва, как это делается и для трехмерного пространства, определить потенциалы и затем с помощью (55.12) и (55.13) вычислить векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Из нашего вывода само собой понятно, что четырехмерные уравнения Максвелла не противоречат уравнениям для потенциалов (55.6) и (55.4). Тем не менее, приведем здесь простое доказательство того, что уравнения для потенциалов действительно могут быть выведены из уравнений поля. Если тензор  $F_{\nu\mu}$  представлен, согласно (55.12), в виде

$$F_{\nu\mu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu},$$

т. е. в виде четырехмерного вектора, то вторая система уравнений (55.15) удовлетворяется тождественно. Подставляя (55.12) в первую систему, мы получаем:

$$\frac{4\pi s_\nu}{c} = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu} - \sum_\mu \frac{\partial^2 \Phi_\nu}{\partial x_\mu^2}.$$

Второе слагаемое в правой части равно  $-\square \Phi_\nu$ ; первое исчезает, если мы введем добавочное условие

$$\sum_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (55.4)$$

что возможно благодаря тому, что  $\Phi_\nu$  определяется формулой (55.12) неоднозначно, а только с точностью до градиента  $\frac{\partial \psi}{\partial x_\nu}$ , где  $\psi$  может быть совершенно произвольной функцией от  $x_\nu$ . Добавочное условие (55.4) является уравнением, определяющим  $\psi$ ; если потенциалы  $\Phi_\nu$  не удовлетворяют уравнению (55.4), то  $\psi$  следует подобрать так, чтобы было

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \Phi_\nu + \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \right) = 0,$$

откуда

$$\square \psi = - \sum_\nu \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\nu}$$



Тогда

$$\Phi_v^* = \Phi_v + \frac{\partial \psi}{\partial x_v}$$

удовлетворяет уравнению (55.4). Итак, мы получаем в результате:

$$\square \Phi_v = -\frac{4\pi s_v}{c},$$

что совпадает с (55.6).

§ 56. Плотность силы. Для силы, которая действует на заряд, находящийся в единице объема, электронная теория Лорентца дает выражение:

$$\mathbf{f} = \rho \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \right]. \quad (56.1)$$

$\mathbf{f}$  есть плотность силы и поэтому имеет размерность силы, деленной на объем. Если ввести вместо  $\rho$ ,  $\rho \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  соответствующие слагающие четырехмерного тока  $s_\nu$  и четырехмерного тензора поля  $F_{\nu\mu}$ , то (56.1) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= \frac{1}{c} (s_2 F_{12} + s_3 F_{13} + s_4 F_{14}), \\ k_y &= \frac{1}{c} (s_1 F_{21} + s_3 F_{23} + s_4 F_{24}), \\ k_z &= \frac{1}{c} (s_1 F_{31} + s_2 F_{32} + s_4 F_{34}) \end{aligned} \right\} \quad (56.1a)$$

в чем легко убедиться, принимая во внимание (55.13). Симметричная структура уравнений (56.1a) наводит на мысль ввести четырехмерный вектор

$$f_\nu = \frac{1}{c} \sum_{\mu=1}^4 F_{\nu\mu} s_\mu, \quad (56.2)$$

три первые слагающие которого совпадают с выражениями, стоящими в правых частях уравнений (56.1a) (так как  $F_{\nu\nu} = 0$ ). Таким же образом из векторного характера четырехмерного тока и тензорного характера поля  $F_{\nu\mu}$  следует, что слагающие вектора  $f$  можно рассматривать как пространственные слагающие четырехмерного вектора  $f_\nu$ . Поэтому мы имеем право отождествлять  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  с этими тремя слагающими  $f_\nu$ , а введя и четвертую слагающую  $f_4$ , дополнить  $f$  до четырехмерного вектора. Смысл  $f_4$  можно найти из (56.2):

$$f_4 = \frac{1}{c} (s_1 F_{41} + s_2 F_{42} + s_3 F_{43}) = \frac{ip}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}).$$

Поэтому с помощью (56.1) можно написать:

$$f_4 = i \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{f} \right). \quad (56.3)$$

Эта слагающая, как и следовало ожидать, является чисто мнимой величиной и, не считая множителя  $\frac{i}{c}$ , равна работе, которую производит сила  $\mathbf{f}$  в единицу времени и в единицу объема: в самом деле работа, производимая силой  $\mathbf{f}dV$ , которая действует на элемент заряда  $\rho dV$ , передвигающийся на расстояние  $d\mathbf{r}$ , равна  $dA = (\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}) dV$ . Работа, производимая в единицу времени, равна поэтому

$$\frac{dA}{dt} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dV,$$

а значит, отнесенная еще и к единице объема, равна  $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v})$ , как и было указано выше. Согласно (56.3), в системе, по отношению к которой заряд неподвижен, четвертая слагающая исчезает: над неподвижными зарядами не совершается никакой работы. Этот результат можно непосредственно вывести из (56.2), так как в неподвижной системе отсчета только четвертая слагающая четырехмерного тока  $s_4$  отлична от нуля. Следовательно, в этой системе

$$f_4^0 = \frac{1}{c} F_{44}^0 s_4^0$$

и, значит, четвертая слагающая исчезает из-за того, что  $F_{44} = 0$ . Заметим, что всегда имеет место тождество

$$\sum_{\nu=1}^4 f_\nu s_\nu = 0 \quad (56.4)$$

Левая часть этой формулы есть инвариант, величину которого мы можем вычислить в любой выбранной нами системе координат, а если мы выберем для этой цели систему, по отношению к которой заряд неподвижен, то в этой системе отличается от нуля только  $s_4$ , но зато  $f_4^0$  равно нулю. Соотношение (56.4) можно доказать и без специального выбора координатной системы, так как согласно (56.2) мы имеем:

$$\sum_{\nu=1}^4 f_\nu s_\nu = \frac{1}{c} \sum_{\nu} \sum_{\mu} F_{\nu\mu} s_\nu s_\mu.$$

В правой части равенства написано внутреннее произведение антисимметричного тензора  $F_{\nu\mu}$  и симметричного тензора  $s_\nu s_\mu$ . Следовательно, перестановка значков  $\nu$  и  $\mu$  изменила бы знак этого выражения; с другой стороны, его значение не меняется после такой перестановки. Поэтому это выражение должно равняться нулю.

До сих пор мы рассматривали только плотность силы и выяснили, что ее можно считать пространственной частью четырехмерного вектора. Теперь найдем полную силу, действующую на определенное количество заряда или на определенный объем. Согласно определению, ее можно вычислить, интегрируя плотность силы по упомянутому объему:

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} dV. \quad (56.5)$$

Так, например, полная сила (сила Лорентца), с которой поле действует на электроны (если это поле можно считать однородным в пределах объема электрона), равна

$$F = \int \rho \left[ E + \left( \frac{v}{c} \times H \right) \right] dV = e \left[ E + \left( \frac{v}{c} \times H \right) \right]. \quad (56.5a)$$

Здесь  $F$  нельзя дополнить до четырехмерного вектора, так как хотя  $f$  и является пространственной частью четырехмерного вектора, но элемент объема  $dV$  не инвариант, что было бы необходимо для этой цели, а меняется при переходе от одной системы координат к другой вследствие лорентцовского сокращения. Поэтому интересно ответить на вопрос, как меняется сила (56.5) при переходе от одной системы к другой. При решении этой задачи мы ограничимся тем частным случаем, когда в исходной системе заряд неподвижен. Для того, чтобы получить формулы преобразований для силы, будем исходить из известных формул преобразований для плотности силы, которые вследствие того, что  $f_4^0 = 0$ , имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} f_x &\equiv f_1 = \frac{f_1^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \frac{f_x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ f_y &\equiv f_2 = f_2^0 \equiv f_y^0, \\ f_z &\equiv f_3 = f_3^0 \equiv f_z^0. \end{aligned} \right\} \quad (56.6)$$

Проинтегрируем левые и правые части этих выражений по объему и примем во внимание, что

$$dV = dV^0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (56.7)$$

Тогда, согласно (56.5), мы получим связь между силой  $F^0$ , действующей в неподвижной системе, и силой  $F$ , измеренной в координатной системе, по отношению к которой заряд движется со скоростью  $v$ :

$$F_x = F_x^0, \quad F_y = F_y^0 \sqrt{1-\beta^2}, \quad F_z = F_z^0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (56.8)$$

С этими уравнениями мы встретимся снова при релятивистском обобщении механики.

Проверим уравнения (56.8) на примере силы Лорентца, действующей на движущийся электрон. Эта сила определяется формулой (56.5a). Но в системе, движущейся вместе с зарядом, действует только сила

$$F^0 = eE^0. \quad (56.9)$$

Из § 55 мы знаем, как меняется электрическое поле при переходе к другой системе координат; там мы нашли:

$$E_x^0 = E_x, \quad E_y^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( E_y - \frac{v}{c} H_z \right), \quad E_z^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( E_z + \frac{v}{c} H_y \right).$$

Умножая эти уравнения на  $e$  и вводя компоненты силы (56.5a) и (56.5), мы непосредственно получаем формулы (56.8).

**§ 57. Тензор энергии и импульса электромагнитного поля.** Вернемся снова к рассмотренному в § 7 вопросу о связи между плотностью энергии, плотностью импульса и пондеромоторными силами и представим эту связь в четырехмерной форме,

инвариантной по отношению к преобразованию Лорентца. Переписав эти величины в четырехмерной форме, мы тем самым решаем вопрос об их преобразовании при переходе от одной координатной системы к другой, движущейся относительно первой. Выведенные таким образом формулы преобразований окажутся полезными для построения релятивистского обобщения механики.

Мы начнем с того, что перепишем в ином виде выражение силы

$$f_\nu = \frac{1}{c} \sum_{\mu=1}^4 F_{\nu\mu} s_\mu, \quad (57.1)$$

а именно, покажем, что его можно представить как четырехмерную расходимость четырехмерного тензора второго ранга:

$$f_\nu = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu}}{\partial x_\mu}. \quad (57.2)$$

Введем в формулу (57.1) вместо  $s_\mu$  выражение, вытекающее из первого уравнения (55.15). Тогда мы получим:

$$f_\nu = \frac{1}{4\pi} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 F_{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda}.$$

Вместо этого можно написать:

$$f_\nu = \frac{1}{4\pi} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 \frac{\partial (F_{\nu\mu} F_{\mu\lambda})}{\partial x_\lambda} - \frac{1}{4\pi} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 F_{\mu\lambda} \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda}.$$

Второй член мы преобразуем, переставив значки  $\mu$  и  $\lambda$  и приняв во внимание антисимметричный характер тензора поля:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 F_{\mu\lambda} \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 \left( \dot{F}_{\mu\lambda} \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda} + F_{\lambda\mu} \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 F_{\mu\lambda} \left( \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} \right). \end{aligned}$$

Выражение в скобках, стоящее в правой части равенства, согласно второму уравнению (55.15), равно  $-\frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}$ , так что, продолжая нашу цепь равенств, мы можем написать:

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 F_{\mu\lambda} \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 (F_{\mu\lambda})^2.$$

Таким образом мы получаем:

$$f_\nu = \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left( \sum_{\mu=1}^4 F_{\nu\mu} F_{\mu\lambda} \right) + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 (F_{\mu\lambda})^2. \quad (57.3)$$

Это выражение совпадает с (57.2), если мы (изменив значки) напишем:

$$T_{\nu\mu} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^4 F_{\nu\alpha} F_{\alpha\mu} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\nu\mu} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 (F_{\alpha\lambda})^2. \quad (57.4)$$

где  $\delta_{\nu\mu}$  равно 0 или 1, в зависимости от того, будет ли  $\nu \neq \mu$  или  $\nu = \mu$ .

Тензор  $T_{\nu\mu}$ , который мы, как общепринято, назовем тензором энергии и импульса, является симметричным тензором, что видно из строения формулы (57.4). Для того чтобы определить его смысл, выразим его слагающие через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  с помощью таблицы (55.13). Для члена, входящего только в диагональные слагающие  $T_{\nu\nu}$ , мы получим:

$$\frac{1}{16\pi} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\lambda=1}^4 F_{\alpha\lambda}^2 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2).$$

Второй член  $\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^4 F_{\nu\alpha} F_{\alpha\mu}$  в случае диагональных слагающих будет состоять из трех слагаемых; например, он равен

$$\begin{aligned} \text{при } \nu = \mu = 1: & \quad \frac{1}{4\pi} (-H_y^2 - H_z^2 + E_x^2), \\ \text{при } \nu = \mu = 4: & \quad \frac{1}{4\pi} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}^2. \end{aligned}$$

Недиагональные слагающие состоят только из двух слагаемых, из них чисто пространственные, например  $\nu = 1, \mu = 2$ , имеют вид

$$\frac{1}{4\pi} (H_x H_y + E_x E_y),$$

а смешанные, как например,  $\nu = 1, \mu = 4$ , имеют вид

$$\frac{i}{4\pi} (E_z H_y - E_y H_z).$$

Если мы для сокращения положим

$$\left. \begin{aligned} T_{xx} &= \frac{1}{4\pi} \left( E_x^2 + H_x^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \right), \\ T_{xy} &= T_{yx} = \frac{1}{4\pi} (E_x E_y + H_x H_y), \\ T_{yy} &= \frac{1}{4\pi} \left( E_y^2 + H_y^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \right), \\ T_{yz} &= T_{zy} = \frac{1}{4\pi} (E_y E_z + H_y H_z), \\ T_{zz} &= \frac{1}{4\pi} \left( E_z^2 + H_z^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \right), \\ T_{zx} &= T_{xz} = \frac{1}{4\pi} (E_z E_x + H_z H_x), \end{aligned} \right\} \quad (57.5a)$$

а также

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (57.5b)$$

и

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \quad (57.5c)$$

то тензор энергии и импульса примет вид:

$$T_{\nu\mu} = \left\{ \begin{array}{cccc} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} & -icg_x \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} & -icg_y \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} & -icg_z \\ -\frac{i}{c}S_x & -\frac{i}{c}S_y & -\frac{1}{c}S_z & u \end{array} \right\} \quad (57.6)$$

Теперь попытаемся оправдать введенные обозначения (57.5) или (57.6) для различных слагающих тензора  $T_{\nu\mu}$ , а именно, выясним их смысл, заключенный в уравнении (57.2).

Для этой цели проинтегрируем (57.2) по трехмерному элементу объема  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ . Сперва мы получим для временной слагающей

$$\int f_4 dV = \int \left( \frac{\partial T_{41}}{\partial x} + \frac{\partial T_{42}}{\partial y} + \frac{\partial T_{43}}{\partial z} \right) dV + \frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int T_{44} dV.$$

Если это уравнение умножить на  $-ic$ , то его левая часть будет представлять работу, производимую силами, которые действуют на заряды, находящиеся в объеме  $V$ , так как, согласно (56.3),  $-icf_4 = \mathbf{f}\mathbf{v}$  есть работа в единицу времени на единицу объема. Таким образом, все уравнение должно быть тождественно с законом сохранения энергии (7.4). Итак, мы можем заключить, что должны выполняться соотношения

$$T_{44} = u, \quad icT_{41} = S_x, \quad icT_{42} = S_y, \quad icT_{43} = S_z, \quad (57.7)$$

где  $u$  есть плотность энергии, а  $\mathbf{S}$  — вектор потока энергии (энергия, проходящая через  $1 \text{ см}^2$  в секунду). Поэтому наше последнее уравнение действительно принимает известный вид:

$$-\int (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dV - \int S_n dS = \frac{d}{dt} \int u dV. \quad (57.8)$$

Этим мы оправдали обозначения в последней строке тензора (57.6).

Теперь рассмотрим первое из четырех уравнений (57.2). Интегрирование по трехмерному объему  $V$  дает:

$$\int f_1 dV = \int \left( \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z} \right) dV + \frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int T_{14} dV.$$

Так как  $f_1 = f_x$ , то в левой части стоит  $x$ -овая слагающая результирующей силы  $\mathbf{F}$ , действующей на все заряды в объеме  $V$ . Следовательно, все уравнение должно быть эквивалентно закону сохранения импульса (7.9). Так как по правилам классической механики сила обуславливает приращение импульса  $\mathbf{G}_{\text{мат}}$  всей связанной с зарядами

инертной массы, то мы можем переписать (при условии, что эта зависимость будет впоследствии доказана и в релятивистской механике) левую часть уравнения в виде

$$\mathbf{F} \equiv \frac{d\mathbf{G}_{\text{мат}}}{dt}. \quad (57.9)$$

Первый интеграл в правой части может быть преобразован в интеграл по поверхности:

$$\int \int (T_{11} \cos(nx) + T_{12} \cos(ny) + T_{13} \cos(nz)) dS.$$

Поэтому его можно истолковать, как  $x$ -овую слагающую всех поверхностных сил, действующих на поверхность объема  $V$ . Поэтому и последний интеграл должен быть истолкован как плотность импульса, связанная с электромагнитным полем:

$$g_x = -\frac{1}{ic} T_{14} = \frac{i}{c} T_{14}. \quad (57.10)$$

Итак, первые три уравнения (57.2) дают:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{G}_{\text{мат}} + \int \mathbf{g} dV \right\} = \int \int \mathbf{P}_n dS, \quad (57.11)$$

где вектор  $\mathbf{P}_n$  составлен из вектора нормали  $\mathbf{n}$  и слагающих тензора напряжений (57.5a) по формуле

$$(\mathbf{P}_n)_x = T_{xx} \cos(nx) + T_{xy} \cos(ny) + T_{xz} \cos(nz). \quad (57.12)$$

Доказывая таким образом целесообразность обозначений (57.6), мы нигде не пользовались специальной зависимостью (57.5) между слагающими  $T_{ik}$  и слагающими векторов электромагнитного поля. Наши рассуждения годились бы для любой плотности силы, которую можно представить в виде (57.2).

Принципиально весьма важным свойством нашего тензора (57.4) является его симметрия. Согласно (57.7) и (57.10), из одного только этого факта следует основное соотношение между потоком энергии и импульсом:

$$\mathbf{S} = \mathbf{g}c^2, \quad (57.13)$$

впрочем, пока только для случая электромагнитного поля в пустоте. Позднее, после того как мы включим в наши формулы все механические силы и импульсы, мы сможем придать этому уравнению более общий смысл.

До тех пор, пока нет никаких зарядов, плотность силы в уравнении (57.2) также равна нулю. Рассмотрим, например, распространяющееся в вакууме излучение, которое перед этим было испущено каким-нибудь источником света. Во всей области такого волнового пакета тензор энергии и импульса удовлетворяет уравнению

$$\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial T_{\nu\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0. \quad (57.14)$$

По этому поводу мы докажем следующую теорему: Пусть четырехмерный тензор  $T_{\nu\mu}$  отличен от нуля только в конечной области пространства, и пусть в этой области его расходимость везде равна нулю, согласно уравнению (57.14). Тогда интеграл

$$\int T_{4\mu} dV, \quad (57.15)$$

распространенный на все пространство, имеет характер четырехмерного вектора. В частном случае нашего четырехмерного тензора  $T_{\nu\mu}$ , который мы рассматривали до сих пор, это означает, что четыре величины, а именно три слагающие общего импульса и общая энергия конечного волнового пакета, т. е.

$$\left. \begin{aligned} G_x &= \frac{i}{c} \int T_{14} dV, & G_z &= \frac{i}{c} \int T_{34} dV, \\ G_y &= \frac{i}{c} \int T_{24} dV, & \frac{i}{c} U &= \frac{i}{c} \int T_{44} dV, \end{aligned} \right\} \quad (57.15a)$$

при переходе к движущейся координатной системе преобразуются как четыре слагающие вектора.

Для доказательства выведем сначала вспомогательную теорему. Пусть  $A_\nu$  есть четырехмерный вектор, расходимость которого везде равна нулю, и который также отличен от нуля лишь в конечной области пространства. В этом случае формула Гаусса дает:

$$\int \sum_{\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int A_n dS = 0, \quad (57.16)$$

где интегрирование нужно распространить по поверхности некоторой четырехмерной области. В качестве такой области мы выберем четырехмерную область, ограниченную двумя трехмерными пространствами

$$x_4 = \text{const. и } x_4' = \text{const.}$$

т. е. двумя совокупностями одновременных событий, причем одновременность следует понимать для одной совокупности с точки зрения одного наблюдателя, а для другой — с точки зрения другого наблюдателя. Для выделенной таким образом области четырехмерного пространства формула Гаусса дает:

$$\int A_4 dx_1 dx_2 dx_3 = \int A_4' dx_1' dx_2' dx_3'. \quad (57.17)$$

Следовательно, распространенный на все (трехмерное пространство интеграл четвертой (временной) слагающей четырехмерного вектора  $A_\nu$ , расходимость которого равна нулю, инвариантен по отношению к преобразованию Лоренца.

С помощью этой вспомогательной теоремы наш вопрос разрешается следующим образом. Пусть  $p_\nu$  — некоторый произвольный четырехмерный вектор, постоянный в пространстве и во времени. Построим с его помощью вектор

$$\sum_{\nu=1}^4 p_\nu T_{\nu\mu},$$



который удовлетворяет всем условиям нашей вспомогательной теоремы при условии, что  $T_{\nu 4}$  удовлетворяет уравнению (57.14); тогда следовательно, мы можем заключить, что величина

$$\sum_{\nu=1}^4 p_{\nu} \int T_{\nu 4} dV = \sum_{\nu=1}^4 p'_{\nu} \int T_{\nu 4}' dV'$$

есть инвариант. Но так как  $p_{\nu}$  есть некоторый четырехмерный вектор, то мы этим доказали, что величина  $\int T_{\nu 4} dV$  имеет характер четырехмерного вектора.

**§ 58. Плоская световая волна.** В этом параграфе мы применим результаты релятивистской электродинамики к случаю плоской световой волны. Тем самым мы ответим на целый ряд вопросов, связанных с оптикой (эффект Допплера, аберрация, отражение от движущегося зеркала). Эти вопросы, конечно, можно рассматривать и без теории относительности, пользуясь только уравнением Максвелла, так как эти последние, как мы видели, все равно удовлетворяют принципу относительности. Но применение методов теории относительности приводит к значительному упрощению, так как уже сами формулы преобразования величин, характеризующих световую волну, при переходе от одной координатной системы к другой, движущейся относительно первой, дают возможность непосредственно вывести эффект Допплера и т. д.

Мы начнем с рассмотрения линейно поляризованной волны, распространяющейся в направлении  $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$ , с частотой  $\nu$  и с длиной волны  $\lambda$  в нештрихованной системе; такая волна описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i\varphi}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{i\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (58.1)$$

где выражение

$$\varphi = 2\pi\nu \left( t - \frac{xn_x + yn_y + zn_z}{c} \right) \quad (58.2)$$

есть „фаза“ светового колебания.  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  — два постоянных вектора, равные по величине и перпендикулярные друг к другу и к вектору  $\mathbf{n}$ . С точки зрения штрихованной системы эта волна описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 e^{i\varphi'}, \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{H}'_0 e^{i\varphi'}, \end{aligned} \right\} \quad (58.3)$$

где  $\varphi'$  имеет вид, аналогичный (58.2):

$$\varphi' = 2\pi\nu' \left( t' - \frac{x'n_{x'} + y'n_{y'} + z'n_{z'}}{c} \right). \quad (58.4)$$

Рассмотрим сначала преобразование фазы. Фаза, очевидно, должна быть инвариантом преобразования Лорентца, так как утверждение, что электромагнитное поле в определенной точке четырехмерного пространства-времени равно нулю (т. е. фаза равна нулю или целому

кратному  $2\pi$ ), является объективным утверждением, независимым от координатной системы. Следовательно,

$$\varphi = \varphi', \quad (58.5)$$

или, если ввести сюда (58.2) и (58.4) и выразить штрихованные координаты через нештрихованные на основании формул преобразования Лорентца (50.5), то

$$\begin{aligned} \nu \left( t - \frac{xn_x + yn_y + zn_z}{c} \right) &= \\ &= \nu' \left( \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{1}{c} \left[ \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} n_{x'} + yn_{y'} + zn_{z'} \right] \right). \end{aligned}$$

Так как это уравнение должно выполняться тождественно при всех значениях  $x, y, z, t$ , то мы непосредственно получаем следующие формулы преобразования для частоты и направления плоской волны:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \nu' \frac{1 + \beta n_{x'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \nu n_y &= \nu' n_{y'}, \\ \nu n_x &= \nu' \frac{\beta + n_{x'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \nu n_z &= \nu' n_{z'}. \end{aligned} \right\} \quad (58.6)$$

В формулах (58.6) содержится эффект Доплера, заключающийся в изменении длины волны света, излучаемого движущимся источником. Пусть источник света, неподвижный в штрихованной системе, излучает по всем направлениям (т. е. по всевозможным  $n'$ ) свет частоты  $\nu'$ . Тогда частота света  $\nu$ , измеряемая наблюдателем, который движется по отношению к источнику света со скоростью  $v$  параллельно оси  $x$ , зависит от направления  $n$ , в котором производится наблюдение, или, точнее говоря, от косинуса угла  $n_x$  между этим направлением и направлением движения. Эту зависимость проще всего найти из первого уравнения (58.6), если в нем переставить местами штрихованные величины с нештрихованными и одновременно заменить  $\beta$  на  $-\beta$  (обе системы равноправны):

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta n_x}. \quad (58.7)$$

Это уравнение описывает эффект Доплера для любого направления движения. Если, в частности, источник света движется от наблюдателя или, наоборот, прямо к нему, то мы получаем продольный эффект Доплера, известный уже из элементарной физики: при  $n_x = n_{x'} = \pm 1$  формула (58.7) дает:

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 \mp \beta} \approx \nu' (1 \pm \beta + \dots)^1 \quad (58.7a)$$

<sup>1</sup> См. примечание после текста.

Нечто новое мы получаем в том случае, когда источник света движется перпендикулярно к направлению, в котором производится наблюдение (т. е. когда  $n_x = 0$ ):

$$v = v' \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (58.7b)$$

Так как это изменение длины волны в поперечном эффекте Доплера, в противоположность продольному эффекту, пропорционально  $\beta^2$ , то оно должно быть небольшим, и поэтому его до сих пор еще не удалось экспериментально наблюдать.

Содержащееся в трех последних уравнениях (58.6) утверждение об изменении направления луча света при переходе к другой координатной системе (абберация) удалось экспериментально проверить, наблюдая свет, излучаемый неподвижными звездами. Пусть звезда, находящаяся практически на бесконечно большом расстоянии, неподвижна в штрихованной системе и излучает в направлении  $n_x' = 0$ ,  $n_y' = 1$ ,  $n_z' = 0$ , и пусть в штрихованной системе луч света распространяется перпендикулярно к направлению скорости, т. е. в нашем случае по нормали к траектории земли. Для наблюдателя, движущегося вместе с землей со скоростью  $v$ , направление светового луча, согласно (58.6), будет определяться соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \frac{\beta + n_x'}{1 + \beta n_x'} = \beta, \\ n_y &= \frac{n_y' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta n_x'} = \sqrt{1 - \beta^2}, \\ n_z &= \frac{n_z' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta n_x'} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (58.8)$$

Следовательно, для такого наблюдателя фронт волны кажется наклонным на угол  $\alpha$ , где

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_x}{n_y} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ или } \sin \alpha = \beta. \quad (58.8a)$$

Такой наклон фронта волны является непосредственным следствием эйнштейновского определения одновременности. В штрихованной системе „фазовыми плоскостями“, т. е. плоскостями, в которых фаза  $\varphi'$  в определенный момент времени  $t'$  имеет определенную постоянную величину, являются плоскости, параллельные ( $x'z'$ ). Эти плоскости, рассматриваемые как нечто объективное, не зависящее от координатной системы, однако, уже не являются фазовыми плоскостями с точки зрения нештрихованной системы, так как в этих плоскостях фаза  $\varphi$  в различных точках имеет одинаковую величину уже не в одинаковые моменты времени; два события (в нашем случае событием является тот факт, что фаза в определенной точке пространства принимает заданную величину), которые в одной системе являются одновременными, в другой системе происходят в разные моменты времени.

Рассмотрим, наконец, еще одно очень важное физическое явление, а именно — отражение плоской волны от движущегося

зеркала; на этом явлении, между прочим, основан термодинамический вывод закона смещения Вина в теории излучения. Это явление можно вывести очень просто из формул преобразований (58.6), если принять для координатной системы, движущейся вместе с зеркалом, обычный закон отражения. Предположим, что зеркало расположено перпендикулярно к оси  $x$ ; пусть оно имеет в нештрихованной координатной системе скорость  $v$  в направлении положительной оси  $x$ . Пусть на это зеркало падает плоская световая волна частоты  $\nu_0$ , и пусть направление распространения волны составляет с осью  $x$  угол  $\vartheta_0$ . Эти данные относятся к нештрихованной системе. Теперь мы перейдем с помощью уравнений (58.6) к штрихованной системе, движущейся вместе с зеркалом. Для частоты и для направления распространения мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \nu' &= \nu_0 \frac{1 - \beta n_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu_0 \frac{1 - \beta \cos \vartheta_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ n_{x'} &= \frac{n_x - \beta}{1 - \beta n_x} = \frac{\cos \vartheta_0 - \beta}{1 - \beta \cos \vartheta_0}, \\ n_{y'} &= \frac{n_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta n_x} = \frac{\sin \vartheta_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \vartheta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (58.9a)$$

Так как в штрихованной системе зеркало неподвижно, то в ней имеют силу обычные законы отражения, которые в данном случае гласят, что частота и вектор распространения отраженной волны получатся из соответствующих величин для падающей волны путем одного только изменения знака перед  $n_{x'}$ . Поэтому отраженная волна в штрихованной системе определяется формулами:

$$\left. \begin{aligned} \nu' &= \nu_0 \frac{1 - \beta \cos \vartheta_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ n_{x'} &= - \frac{\cos \vartheta_0 - \beta}{1 - \beta \cos \vartheta_0}, \\ n_{y'} &= \frac{\sin \vartheta_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \vartheta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (58.9b)$$

Теперь вернемся при помощи уравнений (58.6) опять к нештрихованной системе. Для отраженной волны в этой системе мы получим соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \nu' \frac{1 + \beta n_{x'}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu_0 \frac{1 - 2\beta \cos \vartheta_0 + \beta^2}{1 - \beta^2} \\ \cos \vartheta &= n_x = \frac{n_{x'} + \beta}{1 + \beta n_{x'}} = - \frac{\cos \vartheta_0 - 2\beta + \beta^2 \cos \vartheta_0}{1 - 2\beta \cos \vartheta_0 + \beta^2} \\ \sin \vartheta &= n_y = \frac{n_{y'} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta n_{x'}} = \frac{\sin \vartheta_0 (1 - \beta^2)}{1 - 2\beta \cos \vartheta_0 + \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (58.10)$$

В нерелятивистском приближении, т. е. для случая  $\beta^2 \ll 1$ , который на практике имеет место всегда, мы получим, разлагая (58.10) в ряд:

$$\left. \begin{aligned} v &\approx v_0 (1 - 2\beta \cos \vartheta_0), \\ \cos \vartheta &\approx -\cos \vartheta_0 + 2\beta \sin^2 \vartheta_0, \\ \sin \vartheta &\approx \sin \vartheta_0 + 2\beta \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0. \end{aligned} \right\} \quad (58.10a)$$

В § 67 мы воспользуемся этими формулами при выводе закона смещения Вина.

Из законов преобразования световой волны мы до сих пор пользовались только свойством инвариантности фазы по отношению к преобразованию Лорентца. Теперь мы исследуем, как меняются при переходе от одной координатной системы к другой амплитуды световой волны.

Прежде всего мы устанавливаем, что вследствие инвариантности уравнений Максвелла, свойство света, заключающееся в том, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны друг к другу и имеют одинаковую величину, остается в силе для всех координатных систем. Это обстоятельство математически выражается в том, что выражения  $(\mathbf{E}\mathbf{H})$  и  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ , как мы показали в § 55, инварианты по отношению к преобразованию Лорентца; в случае плоской волны оба выражения равны нулю.

Теперь мы подробно произведем преобразование амплитуд плоской волны в том частном случае, когда вектор нормали к волне и электрический вектор лежат в плоскости  $(xy)$ . Если мы обозначим амплитуду буквой  $A$ , а направляющие косинусы нормалей волны — буквами  $n_x$  и  $n_y$ , то поле волны (58.1) будет:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= A e^{i\Phi}, \\ E_x &= -A n_y e^{i\Phi}, \\ E_y &= A n_x e^{i\Phi}. \end{aligned} \right\} \quad (58.11)$$

Соответствующие формулы имеют место и в штрихованной системе. При этом, согласно § 55, нештрихованные и штрихованные величины связаны формулами:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= \frac{H_{z'} + \beta E_{y'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E_y &= \frac{E_{y'} + \beta H_{z'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E_x &= E_{x'}, \end{aligned} \right\} \quad (58.12)$$

из которых мы получаем следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} A &= A' \frac{1 + \beta n_{x'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ n_x A &= A' \frac{n_{x'} + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ n_y A &= A' n_{y'}. \end{aligned} \right\} \quad (58.13)$$

Из этих уравнений, делением второго и третьего на первое, мы получаем формулы преобразования для направления нормалей волны, тождественные с формулами (58.6):

$$n_x = \frac{n_{x'} + \beta}{1 + \beta n_{x'}}, \quad n_y = \frac{n_{y'} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta n_{x'}}. \quad (58.14)$$

С другой стороны, сравнение первого уравнения (58.13) с первым уравнением (58.6) показывает, что амплитуда  $A$  преобразуется так же, как и частота, т. е.

$$\frac{A}{\nu} = \frac{A'}{\nu'}. \quad (58.15)$$

Теперь мы перейдем к рассмотрению полной энергии ограниченного ряда последовательных волн, заключенного в определенном конечном объеме, который движется вместе с волной

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) dV = \frac{1}{4\pi} \int E^2 dV. \quad (58.16)$$

Иследуем, каково значение энергии  $U'$  этого же ряда волн с точки зрения штрихованной координатной системы. С преобразованием амплитуды мы только что познакомились. Теперь выведем еще формулы преобразования для (движущегося) объема. Трудность, возникающая при этом, состоит в том, что рассматриваемый объем движется со скоростью света, так что мы не можем приписать ему никакого „собственного“ объема (объема в состоянии покоя). Для того, чтобы обойти эту трудность, рассмотрим сперва определенную область, обладающую „собственным“ объемом  $V_0$ , которая движется по отношению к штрихованной системе координат со скоростью  $u'$  в направлении, образующем угол  $\vartheta'$  с осью  $x'$ ; тогда, с точки зрения штрихованной системы координат, объем области равен

$$V' = V_0 \sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}. \quad (58.17a)$$

По отношению же к нештрихованной системе та же область движется со скоростью  $u$ , которую можно вычислить по теореме сложения скоростей, и для которой мы нашли в § 51 значение:

$$u^2 = \frac{u'^2 + 2u'v \cos \vartheta' + v^2 - \frac{u'^2 v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta'}{\left(1 + \frac{u'v}{c^2} \cos \vartheta'\right)^2}. \quad (58.18)$$

Поэтому в нештрихованной системе рассматриваемая область имеет объем

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = V_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'v}{c^2} \cos \vartheta'}. \quad (58.17b)$$

Сравнение с (58.17а) показывает, что  $V$  и  $V'$  связаны соотношением

$$V = V' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u'}{c} \beta \cos \vartheta'}.$$

В этом уравнении мы можем прямо перейти к пределу  $u' \rightarrow c$  и тогда получаем окончательную формулу преобразования для объема, движущегося со скоростью света:

$$V = V' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta \cos \vartheta'} = V' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta n_{x'}}. \quad (58.19)$$

Если мы сравним это выражение с формулой для частоты (58.6), то увидим, что  $V$  преобразуется как  $\frac{1}{v}$ , так что произведение  $V\nu$  является инвариантом. Поэтому из (58.16) мы выводим, что энергия  $U$  должна преобразовываться как  $\nu$ , так что мы получаем соотношение

$$\frac{U}{\nu} = \frac{U'}{\nu'}. \quad (58.20)$$

Итак, значения энергии ряда волн, измеренные различными наблюдателями, относятся друг к другу как частоты, измеренные теми же наблюдателями.

Этот результат приобретает особый интерес, если принять во внимание теорию световых квантов, согласно которой свет при взаимодействии с материей ведет себя так, как будто бы он состоит из отдельных световых квантов  $h\nu$ , где  $h$  — постоянная Планка. Предположим, например, что ряд волн состоит из  $Z$  таких световых квантов, и что, значит, его энергия  $U = Zh\nu$ . Инвариантность величины  $\frac{U}{\nu}$  означает, что произведение  $Zh$  также должно быть инвариантным.

Но так как  $Z$ , как некоторое дискретное число, естественно является инвариантным, то из (58.20) следует, что постоянная Планка  $h$  инвариантна по отношению к преобразованию Лорентца.

Наряду с полной энергией, рассмотрим полный импульс плоской световой волны, который по величине и направлению задан равенством:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi c} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \frac{\mathbf{n}}{4\pi c} \int E^2 dV. \quad (58.21)$$

Прежде всего мы видим, что абсолютная величина импульса составляет

$$G = \frac{U}{c}. \quad (58.22)$$

Далее, если мы обозначим инвариантную величину  $\frac{U}{c\nu}$  через  $C$ , т. е. напишем:

$$C = \frac{1}{4\pi\nu c} \int E^2 dV, \quad (58.23)$$

то слагающие импульса и энергии можно написать в виде:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= G_x = Cvn_x, \\ J_2 &= G_y = Cvn_y, \\ J_3 &= G_z = Cvn_z, \\ J_4 &= i\frac{u}{c} = Civ. \end{aligned} \right\} \quad (58.24)$$

Это значит, что полный импульс и полную энергию, в согласии с рассуждениями в конце последнего параграфа, можно объединить в четырехмерный вектор, так как четыре величины

$$(vn_x, vn_y, vn_z, iv) = (v_1, v_2, v_3, v_4) \quad (58.25)$$

можно рассматривать как слагающие четырехмерного вектора. Это следует не только из формул преобразований (58.6) для этих слагающих, мы могли бы прийти к тому же заключению уже раньше при рассмотрении фазы (58.2), которую, при пользовании четырехмерной символикой, можно представить в виде

$$\varphi = -\frac{2\pi}{c} \sum_{i=1}^4 v_i x_i. \quad (58.26)$$

Так как фаза является инвариантом, то четыре слагающие  $v_i$  должны представлять собою четырехмерный вектор. Между прочим, этот вектор имеет то особенное свойство, что его величина  $\sum_i v_i^2$  равна нулю. То же самое справедливо, конечно, и по отношению к вектору импульса и энергии (58.24), причем это утверждение приводит снова к соотношению (58.22).

§ 59. Излучение движущегося электрона. В этом параграфе мы вычислим поле электрона, движущегося с любой скоростью, а из поля вычислим и излучение. Хотя результаты этого параграфа будут в общем совпадать с результатами § 11, тем не менее приводимые здесь выводы представят некоторый интерес, как пример применения четырехмерной векторной символики.

Мы начнем, по аналогии с § 11, с вычисления потенциалов  $\Phi$ , определяющих поле электрона, движущегося произвольным образом. Координаты этого электрона  $y_i$  будем считать заданными функциями его собственного времени:

$$y_i = y_i(\tau). \quad (59.1)$$

Можно было бы попытаться проинтегрировать уравнение потенциала

$$\square \Phi = -\frac{4\pi}{c} s, \quad (59.2)$$

способом, аналогичным тому, который применяется в трехмерном случае. Однако, этот прием наталкивается на значительные математические трудности, и поэтому мы не пойдём этим путем.



Укажем кратко, в чем состоят эти трудности. Основным приемом решения уравнения потенциала в трехмерном случае является применение теоремы Грина, причем приходится пользоваться решением  $f = \frac{1}{r}$  дифференциального уравнения Лапласа  $\Delta f = 0$ . Четырехмерным аналогом функции  $f$  является функция  $F = \frac{1}{R^2}$ , которая представляет решение уравнения  $\square F = 0$ , причем  $R$  теперь означает четырехмерное расстояние. Однако, при применении теоремы Грина к четырехмерному пространству, в противоположность трехмерному случаю, интегралы по поверхности при  $R \rightarrow \infty$  не только не исчезают, но имеют, напротив, бесконечно большую величину: при  $t \rightarrow \infty$  потенциалы не исчезают, так как имеющаяся в пространстве постоянная сумма зарядов продолжает создавать поле и после того, как прошло бесконечно большое время. Другая трудность заключается в том, что в противоположность трехмерному случаю, в котором подынтегральное выражение в интеграле  $\varphi = \int \frac{\rho}{r} dv$  принимает бесконечно большое значение только в данной точке, где вычисляется потенциал, в четырехмерном случае знаменатель  $R^2$  исчезает в целой трехмерной области (на „конической сверхповерхности“), а именно повсюду, где  $R^2 \equiv r^2 - c^2(t - \tau)^2 = 0$  (здесь  $r$  означает трехмерное расстояние, а  $t - \tau$  — разность времен между двумя точками в четырехмерном пространстве).

Мы ограничимся выводом четырехмерного выражения потенциалов Вихерта (11.5). Пусть данная точка четырехмерного пространства имеет координаты  $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$ . Введем наряду с пространственным вектором  $\mathbf{r}$  четырехмерный радиус-вектор  $R_i$ :

$$R_i = x_i - y_i, \quad \mathbf{r} = (R_1, R_2, R_3). \tag{59.3}$$

При выводе потенциалов мы будем исходить из того известного факта, что всякое электромагнитное действие распространяется со скоростью света. Поэтому потенциалы в точке  $P$  в момент  $t$  определяются положением и скоростью электрона в пространственно-временной точке  $Q$ , трехмерное расстояние которой от  $P$  как раз равно  $c(t - t')$ , где  $t' = \frac{y_4}{ic}$ . Эту зависимость между координатами и временем точек  $P$  и  $Q$  мы можем представить в четырехмерной инвариантной форме; она определяется условием

$$R^2 \equiv \sum_i R_i^2 = 0. \tag{59.4}$$

В самом деле, это условие эквивалентно равенству

$$r^2 - c^2(t - t')^2 = 0.$$

Так как при вычислении потенциалов мы всегда имеем дело с последним добавочным условием, то мы можем в дальнейшем всегда писать слагающие четырехмерного радиуса-вектора в виде

$$R_1 = r_x, \quad R_2 = r_y, \quad R_3 = r_z, \quad R_4 = ir. \tag{59.5}$$

Мы знаем, что в той специальной системе, в которой электрон (источник) в данный момент времени неподвижен, потенциалы в данной точке определяются формулами

$$\Phi_1^0 = \Phi_2^0 = \Phi_3^0 = 0, \quad \Phi_4^0 = i\varphi^0 = i \frac{e}{r}. \tag{59.6}$$

При этом, конечно, координаты электрона и точки  $P$  связаны соотношением (59.5). Теперь мы должны переписать уравнения (59.6) в виде одного векторного уравнения, которое для системы, в которой электрон неподвижен, переходило бы в (59.6). О добавочном условии (59.4) нам при этом уже не надо будет заботиться, так как ему уже придана инвариантная форма. Система, в которой электрон неподвижен, характеризуется тем, что четырехмерная скорость  $U_i = \frac{dy_i}{dt}$  обладает в ней слагающими

$$u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0, \quad u_4^0 = ic. \quad (59.7)$$

Естественно предположить, что четыре уравнения (59.6) могут быть заменены уравнениями

$$\Phi_v = \frac{eu_v}{r_0 c}. \quad (59.8)$$

Это — правильное векторное уравнение, так как  $r_0$  (расстояние в системе неподвижного электрона) есть инвариант. Кроме того, формула (59.8) для этой системы переходит в (59.6). Заменяем теперь  $r_0$  инвариантным выражением, построенным из четырехмерных векторов  $R_i$  и  $u_i$ ; очевидно, можно писать

$$r_0 c = - \sum_i R_i u_i, \quad (59.9)$$

что можно доказать непосредственно, если написать выражение инварианта  $\sum_i R_i u_i$  для системы, в которой электрон неподвижен. Таким образом, окончательно мы получаем для потенциала Вихерта-Льенара в четырехмерной форме выражение

$$\Phi_v = \frac{eu_v}{-\sum_i R_i u_i} \quad (59.10)$$

при добавочном условии

$$\sum_i R_i^2 = 0. \quad (59.4)$$

Убедимся, что (59.10) совпадает с найденным ранее выражением (11.5) для потенциалов Льенара-Вихерта. [Заметим еще, что, предположив справедливость равенства (59.5), мы тем самым уничтожаем симметрию между прошедшим и будущим, о которой речь шла в § 11 и которая еще содержится в формуле (59.4)]. Если с помощью известных соотношений

$$(u_1, u_2, u_3) = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

мы введем, вместо четырехмерной скорости электрона, его обыкновенную скорость  $\mathbf{v}$ , то получим:

$$\sum_i R_i u_i = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{rc}{\sqrt{1-\beta^2}} = - \frac{sc}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где  $s$ , как и в (11.8), определяется равенством:

$$s = r - \frac{r \cdot v}{c}.$$

Таким образом, из (59.10) непосредственно получаются потенциалы Вихерта в виде (11.7).

Перейдем теперь к вычислению из потенциалов (59.10) поля посредством формул

$$F_{\nu\mu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu}. \quad (59.11)$$

При дифференцировании необходимо иметь в виду, что потенциалы зависят от координат точки  $x_i$  не только явно, но кроме того, еще и неявно, благодаря тому, что из-за добавочного условия (59.4) собственное время электрона  $\tau$  при заданных формулами (59.1) функциях  $y_i(\tau)$  становится функцией координат точки  $x_i$ . Так как положение электрона дается как функция собственного времени, то для подстановки в потенциалы нужно найти такое собственное время, для которого  $\sum R_i^2 = 0$ . Поэтому, если какую-нибудь функцию от координат  $x_i$  и  $y_i$  нужно продифференцировать по  $x_\nu$ , то мы сначала должны дифференцировать по координатам  $x_\nu$ , входящим в эту функцию явно, а потом составить производную по  $\tau$  и умножить ее на  $\frac{\partial \tau}{\partial x_\nu}$ . Вследствие того, что

$$-\frac{\partial R_i}{\partial \tau} = \frac{dy_i}{\partial \tau} = u_i, \quad \frac{du_i}{d\tau} = b_i,$$

мы можем легко найти  $\frac{\partial \tau}{\partial x_\nu}$ , если продифференцируем добавочное условие (59.4) по  $x_\nu$ :

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_i R_i^2 = 2 \left\{ R_\nu - \sum_i (R_i u_i) \frac{\partial \tau}{\partial x_\nu} \right\}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_\nu} = \frac{R_\nu}{\sum_i (R_i u_i)}. \quad (59.12)$$

Далее, воспользовавшись тем, что  $\sum_i u_i^2 = -c^2$ , мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \sum_i R_i u_i \right) = u_\nu + \frac{c^2 + \sum_i R_i b_i}{\sum_i R_i u_i} R_\nu.$$

С помощью этих формул легко показать, что

$$\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} = -\frac{e b_\mu R_\nu}{\left( \sum_i R_i u_i \right)^2} + \frac{e u_\nu u_\mu}{\left( \sum_i R_i u_i \right)^2} + \frac{e \left( c^2 + \sum_i R_i b_i \right) u_\mu R_\nu}{\left( \sum_i R_i u_i \right)^3}$$

и, следовательно,

$$F_{\nu\mu} = \frac{e}{\left(\sum_i R_i u_i\right)^2} \{R_\mu b_\nu - R_\nu b_\mu\} + \frac{e \left(c^2 + \sum_i R_i b_i\right)}{\left(\sum_i R_i u_i\right)^3} \{R_\nu u_\mu - R_\mu u_\nu\}. \quad (59.13)$$

Подобным же образом можно доказать, вычислив вторые производные от потенциалов, что везде, за исключением точки, в которой находится электрон, выполняются уравнения  $\square \Phi_\mu = 0$ . Далее, из рассмотренного выше уравнения для  $\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}$ , приравнявая  $\nu$  и  $\mu$  и затем суммируя по  $\nu$ ,

мы получаем уравнение  $\sum \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ . Таким образом, выражение (59.10)

действительно удовлетворяет всем условиям, которым должны удовлетворять потенциалы. Тот факт, что вычисленное здесь столь простым способом поле совпадает с выражением (11.10), может быть обнаружен, если мы введем обыкновенные величины вместо четырехмерной скорости и ускорения. Мы не будем здесь приводить общего доказательства, а ограничимся лишь тем, что вычислим, пользуясь формулой (59.13), поле в той системе отсчета, в которой электрон в данный момент времени неподвижен. Принимая во внимание (59.7) и (59.9), а также известные соотношения

$$(b_1^0, b_2^0, b_3^0) = \dot{v}_0, \quad b_4^0 = 0. \quad (59.7a)$$

мы получаем следующие выражения для векторов поля:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^0 &= \frac{e\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \frac{e}{r_0^3 c^2} [\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{v}}_0)], \\ \mathbf{H}^0 &= -\frac{e}{r_0^3 c^2} \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{v}}_0. \end{aligned} \right\} \quad (59.14)$$

причем в эти формулы следует подставить, по формуле (59.4), „запаздывающие“ значения векторов  $\mathbf{r}_0$  и  $\dot{\mathbf{v}}_0$ . Формулы (59.14) находятся в полном согласии с формулами, которые при  $\mathbf{v} = 0$  получаются из (11.10). Поле (59.14) представляет результат наложения электростатического поля  $\frac{e\mathbf{r}_0}{r_0^3}$  на поле излучения, появляющееся вследствие ускорения электрона.

Перейдем теперь к вопросу об излучении ускоренно движущегося электрона. В конце § 11 мы уже рассматривали излучение энергии таким электроном и пришли к следующему результату: если скорость электрона как раз в момент излучения равна нулю, то

изменение со временем его энергии и импульса, зависящего от излучения, дается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW}{d\tau} &= -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}}^2, \\ \frac{d\mathbf{G}}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (59.15)$$

Если электрон во время излучения движется со скоростью  $\mathbf{v}$ , то вычисление дает выражения (11.21) и (11.22):

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \dot{\mathbf{v}}\right)^2}{(1 - \beta^2)^3}, \quad (59.16a)$$

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2 \mathbf{v}}{c^5} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \dot{\mathbf{v}}\right)^2}{(1 - \beta^2)^3}. \quad (59.16b)$$

В § 11 вывод этих формул для краткости был опущен. Теперь мы выведем эти формулы с помощью математического аппарата теории относительности. (Мы будем писать  $dt$  вместо дифференциала  $d\tau$ , которым мы пользовались в § 11, так как формулы (11.21) и (11.22) относятся к координатной системе, по отношению к которой электрон движется).

Для того, чтобы облегчить переход к четырехмерным символам, перепишем (59.15) в виде

$$\frac{dW^0}{d\tau} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}}^2, \quad \frac{d\mathbf{G}^0}{d\tau} = 0, \quad (59.17)$$

где под  $-dW^0$  и  $-d\mathbf{G}^0$  мы будем понимать энергию и импульс той части волнового поля, которая излучается за время  $d\tau$ . Эта часть поля распространяется независимо от остального поля. Ее энергия не интерферирует с энергией, испущенной прежде или потом. Поэтому мы можем рассматривать излучение, испущенное за время  $d\tau$ , как законченный ряд волн. Но у такого ряда волн, согласно изложенному в § 58, энергия и импульс образуют четырехмерный вектор, который мы здесь обозначим  $-dJ_k$ . Поэтому мы можем следующим образом объединить оба уравнения (59.17) в одно четырехмерное векторное уравнение:

$$\frac{dJ_k}{d\tau} = -\frac{2e^2}{3c^5} \dot{\mathbf{v}}_0^2 u_k. \quad (59.18)$$

Это уравнение является правильным векторным уравнением, которое в системе координат (59.7) дает уравнение (59.17).

Теперь подставим в (59.18), вместо ускорения  $\dot{\mathbf{v}}_0$ , измеренного в той системе, в которой электрон имеет скорость нуль, ускорение  $\dot{\mathbf{v}}$  относительно любой системы координат. Для этого вспомним то, что было сказано в § 54. Там мы рассматривали четырехмерное ускорение  $b_i$ , у которого в той системе, где частица неподвижна, три пространственные

слагающие превращаются в слагающие обыкновенного ускорения, а четвертая слагающая исчезает; это означает, что

$$\dot{\mathbf{v}}_0^2 = \sum b_i^2. \quad (59.19)$$

Поэтому, пользуясь четырехмерной символикой, мы можем написать уменьшение в одну секунду энергии и импульса в виде

$$\frac{dJ_k}{d\tau} = -\frac{2e^2}{3c^5} \left( \sum_i b_i^2 \right) u_k. \quad (59.20)$$

С другой стороны, в § 54, исходя из значения  $b_i$  в любой координатной системе, мы нашли величину (54.10):

$$\sum b_i^2 = \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \dot{\mathbf{v}} \right)^2}{(1 - \beta^2)^3}. \quad (59.19a)$$

Переходя к обыкновенным обозначениям и вводя по формуле  $d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2}$  время  $t$ , вместо собственного времени, мы получаем два уравнения:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \dot{\mathbf{v}} \right)^2}{(1 - \beta^2)^3} \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{G}}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^5} \mathbf{v} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \dot{\mathbf{v}} \right)^2}{(1 - \beta^2)^3} \quad (59.21)$$

т. е. уравнения (59.16).

#### IV. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

**§ 60. Уравнения поля.** В отделе Д мы вывели уравнения поля для медленно движущихся тел, исходя из представлений электронной теории. Уже в разобранном там частном случае немагнитных тел нам понадобилось детальное рассмотрение движения электронов внутри вещества. Но теория относительности, как впервые показал Минковский, без каких-либо дополнительных гипотез об атомных явлениях, из одного лишь требования инвариантности уравнений поля по отношению к преобразованиям Лорентца, позволяет написать уравнения для движущихся тел, если они известны для неподвижных тел. В этом нельзя не усмотреть поразительного успеха теории.

Для неподвижных тел уравнения поля нам известны: это — обыкновенные уравнения Максвелла. В системе отсчета, по отношению к которой тело неподвижно, и которую мы будем обозначать значком  $^0$ , они гласят:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}^0 &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}^0 + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^0, & \operatorname{div} \mathbf{D}^0 &= 4\pi \rho^0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^0 &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}^0, & \operatorname{div} \mathbf{H}^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (60.1)$$

К ним присоединяются еще соотношения

$$\mathbf{D}^0 = \varepsilon \mathbf{E}^0, \quad \mathbf{B}^0 = \mu \mathbf{H}^0 \quad (60.2)$$

и

$$\mathbf{j}^0 = \lambda \mathbf{E}^0, \quad (60.3)$$

если мы ограничимся лишь такими телами, поведение которых определяется только тремя материальными константами:  $\lambda$  (электропроводность),  $\epsilon$  (диэлектрическая постоянная) и  $\mu$  (магнитная проницаемость).

При построении уравнений поля для любой координатной системы мы будем руководствоваться, согласно Минковскому, аналогией с соответствующими уравнениями для пустоты (§ 55), в которые должны превращаться искомые нами уравнения поля в отсутствии вещества, т. е. при  $\epsilon = \mu = 1, \lambda = 0$ . В § 55 мы видели, что уравнения поля для пустоты могут быть написаны в четырехмерной форме, если векторы поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  слиты определенным образом в один антисимметричный тензор. Однако, в нашем случае имеются не 2, а 4 вектора поля, всего с 12 компонентами, и поэтому естественно предположить, что здесь, вместо одного тензора поля, следует ввести два таких тензора. Так как в первых двух уравнениях системы (60.1), в которые входит заряд, стоят только  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$ , то мы их соединим в один тензор, а из величин  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , входящих в остальные два уравнения, образуем второй тензор. Итак, мы вводим два тензора  $F_{ik}$  и  $H_{ik}$  следующим образом:

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (60.4)$$

$$(H_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (60.5)$$

Легко видеть, что обе системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{4\pi}{c} s_i, \quad (i=1, 2, 3, 4), \\ \text{и} \quad \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} &= 0, \quad (i, k, l=1, 2, 3, 4) \end{aligned} \right\} \quad (60.6)$$

в случае неподвижного тела совпадают с уравнениями (60.1), если в этой системе отсчета вектор тока имеет слагающие

$$(s_i^0) = (j_x^0, j_y^0, j_z^0, ic\rho^0). \quad (60.7)$$

Таким образом, формулы (60.6) представляют в четырехмерном пространстве систему уравнений, которая благодаря соотношениям (60.4) и (60.5), совпадает в случае неподвижного тела с уравнениями Максвелла (60.1). Но согласно основным принципам теории относительности, уравнения (60.6) должны остаться верными для всех координатных систем, так что они и являются искомыми уравнениями для движущихся тел. В пустоте они совпадают с системой уравнений (55.15), так как в этом случае  $\mathbf{E} = \mathbf{D}$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ , что следует из теории Максвелла, и что мы позднее покажем еще более подробно, и поэтому оба тензора  $F_{ik}$  и  $H_{ik}$  в пустоте совершенно тождественны друг другу.

Итак, посредством формул (60.4) и (60.5) мы определили векторы поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  во всех координатных системах. Связь этих векторов с соответствующими векторами системы отсчета, в которой тело неподвижно, определяется тензорными свойствами величин  $F_{ik}$  и  $H_{ik}$ , а именно, здесь имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_x^0, & B_x &= B_x^0 \\ E_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_y^0 + \beta B_z^0), & B_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (B_y^0 - \beta E_z^0), \\ E_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_z^0 - \beta B_y^0), & B_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (B_z^0 + \beta E_y^0), \\ D_x &= D_x^0, & H_x &= H_x^0, \\ D_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (D_y^0 + \beta H_z^0), & H_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (H_y^0 - \beta D_z^0), \\ D_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (D_z^0 - \beta H_y^0), & H_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (H_z^0 + \beta D_y^0). \end{aligned} \right\} \quad (60.8)$$

Для определения электрической напряженности  $\mathbf{E}$  нужно знать не электрическую и магнитную напряженности системы, в которой тело неподвижно, а электрическую напряженность и магнитную индукцию; этот результат мы вывели совершенно другим путем в § 43.

Если пренебречь членами порядка  $\beta^2$ , то уравнения преобразования (60.8) принимают более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^0 - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}^0, & \mathbf{B} &= \mathbf{B}^0 + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}^0, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}^0 - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}^0, & \mathbf{H} &= \mathbf{H}^0 + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{D}^0. \end{aligned} \right\} \quad (60.8a)$$

Эти формулы мы отчасти уже вывели в отделе Д.

Плотность силы  $f_i$  для движущегося элементарного заряда получается из трехмерной плотности силы  $f^0 = \rho \mathbf{E}^0$ , действующей на неподвижные заряды. В инвариантной (четырёхмерной) форме это уравнение имеет вид:

$$f_i = \frac{1}{c} \sum_k H_{ik} s_k. \quad (60.9)$$

Поэтому, согласно (60.5) и (60.7), трехмерный вектор плотности силы равен

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (60.10)$$

в согласии с классической электродинамикой.

Особого рассмотрения требует четырехмерный ток  $s_i$ , три пространственные компоненты которого в системе, связанной с телом, представляют, согласно (60.7), ток проводимости  $\mathbf{j}^0$ , а временная компонента пропорциональна плотности заряда  $\rho^0$ . В любой координатной системе, по отношению к которой тело движется со скоростью  $\vartheta$  в направлении оси  $x$ -ов, мы ожидаем кроме тока проводимости



появление еще конвекционного тока, вызываемого движением плотности заряда  $\rho^0$ . Итак, мы различаем две части, из которых аддитивно складывается общий ток  $s_i$ : конвекционный ток  $(s_i)_к$  и ток проводимости  $(s_i)_{пров}$ . Если мы проследим изменение этих двух частей тока при переходе от неподвижной (по отношению к телу) системы к движущейся, то на основании преобразований Лорентца получим следующую схему:

	Конвекционный ток		Ток проводимости	
	неподвижная система	движущаяся система	неподвижная система	движущаяся система
$s_1$	0	$\frac{\rho^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = (j_x)_к$	$j_x^0$	$\frac{j_x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = (j_x)_{пров}$
$s_2$	0	0	$j_y^0$	$j_y^0 = (j_y)_{пров}$
$s_3$	0	0	$j_z^0$	$j_z^0 = (j_z)_{пров}$
$s_4$	$ic\rho^0$	$\frac{ic\rho^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = ic\rho_к$	0	$\frac{i\beta j_x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = ic\rho_{пров}$

О конвекционном токе нельзя сказать ничего нового; он совпадает с тем током, который был рассмотрен в § 55. Более удивительным оказывается появление временно-подобной слагающей тока проводимости. Оно означает, что всякий проводник с током, даже если движущемуся вместе с ним наблюдателю он кажется незаряженным ( $\rho^0 = 0$ ), обладает электрическим зарядом с плотностью

$$\rho_{пров} = \frac{\beta j_x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(v j_{пров})}{c}. \quad (60.11)$$

Этот результат является прямым следствием эйнштейновского определения одновременности, и с помощью этого определения он может быть истолкован наглядно. Рассмотрим, например, неподвижный металлический стержень, по которому идет ток в направлении его длины.

В таком стержне положительные ионы неподвижны, а электроны движутся в направлении, противоположном направлению тока. Таким образом, если в плоскости  $(x^0, ct^0)$  мы начертим мировые линии электронов и положительных ионов (рис. 76), то для последних получатся пунктирные прямые, параллельные оси  $ct^0$ , а для электронов — наклонные сплош-

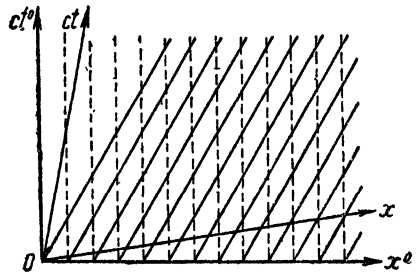


Рис. 76. Наглядное толкование  $\rho_{пров}$  по Лауэ. Мировые линии положительных ионов пунктирные, электронов — сплошные.

ные прямые. Вследствие электрической нейтральности стержня из каждого конечного отрезка его должно выходить в среднем одинаковое число мировых линий того и другого сорта. Рассмотрим теперь эту картину с точки зрения движущейся координатной системы с осями  $Ox$  и  $Ox'$ ; окажется, что на данном отрезке оси  $x$  число электронов и ионов уже не будет одинаковое. В случае, изображенном на рисунке, на 11 ионов приходится примерно 10 электронов, так что стержень оказывается заряженным положительно.

В § 55 мы вывели в рамках электронной теории теорему, что общий заряд  $\int \rho dV$  определенной области пространства инвариантен по отношению к преобразованиям Лорентца; эта теорема вытекает из того, что при переходе от неподвижной системы к движущейся плотность заряда увеличивается в отношении  $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$ , а объем, вследствие сжатия Лорентца, во столько же раз уменьшается. Эта теорема верна, конечно, также и для замкнутого тока, если рассматривать общий заряд всей замкнутой системы; напротив, она не верна для части проволоки, через которую идет ток, так как при движении зарядов различие в определении одновременности с точки зрения двух разных систем отсчета приводит также к различной величине суммы зарядов, одновременно находящихся в этой части проволоки. Самый факт, что общий заряд замкнутой системы инвариантен и, кроме того, постоянен во времени, непосредственно следует из электронной теории: в самом деле, заряд отдельных электронов или ионов во всех системах имеет одну и ту же величину  $\pm e$ , а с другой стороны, число ионов и электронов в замкнутой системе не меняется, и, следовательно, общий заряд с точки зрения всех систем должен быть одинаков и, кроме того, постоянен во времени. Последнее следует также из уравнения непрерывности для заряда:

$$\sum_i \frac{\partial s_i}{\partial x_i} = 0 \text{ или } \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (60.12)$$

которое можно получить из первого уравнения (60.6), производя операцию  $\operatorname{div}$ . Интегрирование уравнения (60.12) по всему объему замкнутой системы дает

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = 0. \quad (60.13)$$

Общий заряд системы, которая с точки зрения движущегося с ней наблюдателя является незаряженной ( $\rho^0 = 0$ ), равен нулю также и для всякого другого наблюдателя; в каждой замкнутой системе объемный интеграл той части плотности заряда, которая связана с проводимостью, равен нулю даже тогда, когда полный заряд этой системы в неподвижной по отношению к ней системе координат не равен нулю:

$$\int \rho_{\text{пров}} dV = 0. \quad (60.14)$$

Для иллюстрации рассмотрим металлическое кольцо, по которому течет ток  $j_0$  и которое лежит, например, в плоскости  $xy$  (рис. 77). Если это кольцо движется со скоростью  $\mathbf{v}$  в направлении положительной оси  $x$ -ов, то, согласно только что полученному резуль-

тату, оно несет с собой плотность заряда, которая в половине кольца  $ABC$  везде положительна, а в половине  $CDA$  повсюду отрицательна, причем общий заряд, обусловленный проводимостью, равен нулю. Следовательно, это кольцо обладает электрическим моментом, направление которого перпендикулярно к скорости и к оси кольца. Позднее мы вернемся к этому явлению, которое может быть сформулировано так, что с каждым движущимся магнитным диполем  $m$  (а наше кольцо может считаться таким диполем, в том смысле, что на большом расстоянии от него его магнитное поле имеет характер поля диполя) обязательно связан электрический диполь

$$p = \frac{v}{c} \times m. \quad (60.15)$$

Рассмотрим еще, как учитывается в четырехмерной форме разделение полного тока на ток проводимости и конвекционный ток. Пусть полный ток задан вектором  $S \equiv (s_i)$ ; кроме того, пусть рассматриваемый проводник движется со скоростью, которую мы представим в виде четырехмерного вектора  $u_i$ . Задача состоит в том, чтобы разложить  $s$  на сумму  $s_k + s_{\text{пров}}$ , так чтобы в неподвижной системе ( $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0, u_4^0 = ic$ ), конвекционный ток обладал только временной слагающей, а ток проводимости — только пространственными слагающими. Для этой цели составим инвариант  $\sum_k u_k s_k$ ; его

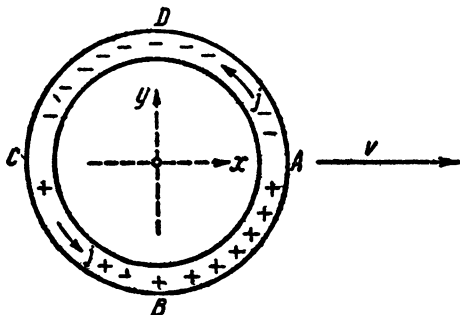


Рис. 77.  $\rho_{\text{пров}}$  в движущемся кольце с током.

величину проще всего мы получим в неподвижной системе: она равна  $-c^2 \rho^0$ , т. е., если не считать множителя  $-c^2$ , равна плотности в состоянии покоя ( $\rho^0$ ). Но мы знаем, что движение заряда с плотностью  $\rho^0$  обуславливает конвекционный ток  $(s_i)_k = u_i \rho^0$ ; следовательно, конвекционная часть тока  $s_i$  равна

$$(s_i)_k = -\frac{u_i \sum_k u_k s_k}{c^2}, \quad (60.16a)$$

так что для тока проводимости получается выражение

$$(s_i)_{\text{пров}} = s_i + \frac{u_i \sum_k u_k s_k}{c^2}. \quad (60.16b)$$

Легко убедиться в том, что в неподвижной системе координат четвертая слагающая тока (60.16b) действительно исчезает <sup>1)</sup>.

Результаты, полученные до сих пор, неполны: мы должны еще собразить, какую форму принимают уравнения связи (60.2) и (60.3) с точки зрения любой системы. Мы могли бы, конечно, преобразовать по формулам (60.8) уравнения, написанные для неподвижной системы. Однако, мы выберем здесь путь, к которому мы в этом параграфе обращались уже неоднократно, а именно напомним в четырехмерном виде уравнения, выведенные для неподвижной системы отсчета.

<sup>1)</sup> См. примечание в конце книги.

Мы начнем с закона Ома, т. е. будем искать инвариантное уравнение, связывающее поле с током проводимости  $(s_i)_{\text{пров}}$  и переходящее в неподвижной системе в уравнение (60.3). Мы утверждаем, что этому условию удовлетворяет уравнение

$$(s_i)_{\text{пров}} = \frac{\lambda}{c} \sum_k H_{ik} u_k, \quad (60.17)$$

так как оно является правильным четырехмерным векторным уравнением и, как легко показать, в неподвижной системе переходит в уравнение (60.3). В обыкновенной векторной форме первые три слагающие этого уравнения имеют вид:

$$\mathbf{j}_{\text{пров}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \right]. \quad (60.17a)$$

В этих уравнениях полем, вызывающим ток, опять оказывается комбинация  $\mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$ . Из четвертой слагающей следует уравнение

$$ic\rho_{\text{пров}} = \frac{i\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} = i \mathbf{j}_{\text{пров}} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (60.17b)$$

Это — найденное ранее уравнение (60.11) для плотности заряда, связанной с проводимостью.

Кроме того, подобным же образом легко проверить, что соотношения

$$\left. \begin{aligned} \sum_k F_{ik} u_k &= \epsilon \sum_k H_{ik} u_k, \\ H_{ik} u_l + H_{kl} u_i + H_{li} u_k &= \mu (F_{ik} u_l + F_{kl} u_i + F_{li} u_k) \end{aligned} \right\} \quad (60.18)$$

представляют правильные четырехмерные обобщения равенств (60.2). Благодаря уравнениям (60.18), векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  в произвольной системе отсчета связаны друг с другом довольно сложным образом. В обыкновенной векторной форме эти уравнения гласят:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) &= \epsilon \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \right], \\ \mathbf{B} - \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right) &= \mu \left[ \mathbf{H} - \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{D} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (60.19)$$

Решив их относительно векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ , мы получим отсюда однозначно:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{1-\epsilon\mu\beta^2} \left\{ \epsilon \mathbf{E} (1-\beta^2) + (\epsilon\mu-1) \left[ \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) - \epsilon \frac{\mathbf{v}}{c} \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E} \right) \right] \right\}, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{1-\epsilon\mu\beta^2} \left\{ \mu \mathbf{H} (1-\beta^2) + (\epsilon\mu-1) \left[ \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right) - \mu \frac{\mathbf{v}}{c} \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{H} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (60.20)$$

что легко можно проверить непосредственным вычислением или подстановкой (60.20) в (60.10). Из (60.20) видно, что в пустоте ( $\epsilon = \mu = 1$ ), как мы утверждали раньше,  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ , так что в этом случае оба тензора поля  $F_{ik}$  и  $H_{ik}$  совпадают.

§ 61. Тензор моментов. Мы вывели результаты предыдущего параграфа чисто формальным образом из уравнений Максвелла для непод-

вижной среды, исходя единственно из требования релятивистской инвариантности. При этом вообще не было и речи о таких необходимых для атомистической теории понятиях, как диэлектрическая поляризация  $\mathbf{P}$  и вектор намагничивания  $\mathbf{M}$ . Теперь мы рассмотрим и эти величины с точки зрения теории относительности и исследуем, можно ли наглядно истолковать полученные только-что результаты в рамках электронной теории. Для этой цели введем тензор моментов  $M_{ik}$  при помощи уравнений

$$H_{ik} = F_{ik} + 4\pi M_{ik}. \quad (61.1)$$

Если слагающие этого нового тензора расположить в виде схемы

$$(M_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & iP_x \\ -M_z & 0 & M_x & iP_y \\ M_y & -M_x & 0 & iP_z \\ -iP_x & -iP_y & -iP_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (61.2)$$

то непосредственно видно, что уравнение (61.1) тождественно уравнениям максвелловской теории

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{D} - 4\pi\mathbf{P}. \end{aligned} \quad (61.3)$$

Из четырехмерной формулировки сразу получаются для намагничивания и поляризации общие формулы преобразований. Если мы опять обозначим буквами  $\mathbf{P}^0$  и  $\mathbf{M}^0$  диэлектрическую поляризацию и намагничение, измеренные наблюдателем, движущимся вместе с рассматриваемой средой, то, согласно формулам (54.26), другой наблюдатель, который движется относительно этой среды со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ -ов, нашел бы для поляризации и намагничивания следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= P_x^0, & M_x &= M_x^0, \\ P_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (P_y^0 - \beta M_z^0), & M_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (M_y^0 + \beta P_z^0), \\ P_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (P_z^0 + \beta M_y^0), & M_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (M_z^0 - \beta P_y^0), \end{aligned} \right\} \quad (61.4)$$

Эти формулы представляют своеобразную связь между двумя рассматриваемыми трехмерными векторами. В частности, электрически поляризованное, но ненамагниченное тело представляется движущемуся относительно него наблюдателю еще и намагниченным. Наоборот, тело, которое в неподвижной относительно него системе отсчета только намагничено (например, намагниченный железный стержень), приобретает при своем движении электрический момент.

Рассмотрим сначала более подробно случай, когда тело, которое в неподвижной относительно него системе электрически поляризовано, но не намагничено. Из наших прежних рассуждений в § 43 следует, что при движении эта поляризация прибавляет к общему току величину  $\mathbf{P} + \text{rot} \left( \mathbf{P} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right)$ , так что первые три

уравнения Максвелла (для медленно движущихся тел) можно написать в виде

$$\operatorname{rot} \left[ \mathbf{B} - 4\pi \left( \mathbf{P} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right] = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{E}} + 4\pi \dot{\mathbf{P}}) + \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}. \quad (61.5)$$

Этот же результат мы получим теперь с помощью только что выведенных формул преобразований (61.4), если мы ограничимся в них малыми скоростями ( $\beta^2 \ll 1$ ). В том случае, когда тело в неподвижной системе не намагничено ( $M^0 = 0$ ), вообще говоря, имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= P_x^0, \\ P_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} P_y^0, \\ P_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} P_z^0, \\ M_x &= 0, \\ M_y &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} P_z^0, \\ M_z &= \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} P_y^0, \end{aligned} \right\} \quad (61.6)$$

Следовательно, в предельном случае малых скоростей получается:

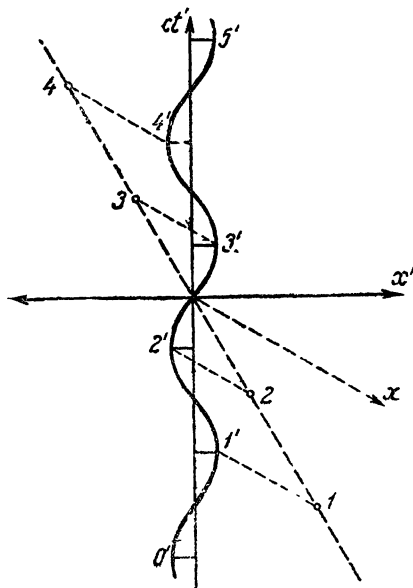
$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}^0 \times \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (61.6a)$$

Если мы подставим этот результат в уравнение Максвелла (61.5) и примем во внимание связь между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , даваемую уравнением (61.3), то получим простое соотношение

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, \quad (61.5a)$$

которое является первым уравнением поля для медленно движущихся немагнитных тел, в полном согласии с результатами электронной теории в § 43. Следует заметить, что даже и в немагнитных телах векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  уже не равны друг другу, а отличаются на вектор намагничения  $\mathbf{P} \times \frac{\mathbf{v}}{c}$ , который в этом случае не равен нулю. Это различие между

Рис. 78. Движение по кругу (61.8) с точки зрения двух систем отсчета.



$\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  в немагнитных телах не было учтено в первоначальной теории Лорентца, а поэтому уравнения этой теории нельзя считать правильными.

Теперь рассмотрим тело, которое в неподвижной системе отсчета не обладает электрическим моментом, а имеет только магнитный момент; например, рассмотрим движение постоянного маг-

нита. В этом случае формулы (61.4) дают новый результат, которого нельзя было ожидать в классической электронной теории:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= 0, & M_x &= M_x^0, \\ P_y &= \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} M_z^0, & M_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} M_y^0, \\ P_z &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} M_y^0, & M_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} M_z^0. \end{aligned} \right\} \quad (61.7)$$

Если мы и здесь ограничимся членами первого порядка относительно  $\beta$ , то найдем, что движущийся постоянный магнит несет с собой электрический момент

$$\mathbf{P} = - \left( \mathbf{M}^0 \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right). \quad (61.7a)$$

Уясним себе этот эффект, рассматривая отдельный атом, магнитный момент которого вызывается электроном, движущимся по круговой орбите. Пусть орбита этого электрона в системе отсчета, неподвижной по отношению к атому, дана уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x' &= r' \cos \omega' t', \\ y' &= r' \sin \omega' t'. \end{aligned} \right\} \quad (61.8)$$

Следовательно, электрон описывает круговую орбиту радиуса  $r'$ , лежащую в плоскости  $(x'y')$ , двигаясь с частотой  $\omega'$ . На рис. 78 изображена проекция мировой линии электрона на плоскость  $(x', ct')$ . Ось  $y'$  следует представлять себе направленной нормально к плоскости чертежа. Точки  $0', 1', 2', \dots$ , отмеченные на рис. 78, являются теми точками, в которых электрон проходит через плоскость  $x', ct'$ , т. е. точками с координатой  $y' = 0$ . Само  $y'$  от точки  $1'$  до точки  $2'$  положительно, а от  $0'$  до  $1'$  и от  $2'$  до  $3'$  — отрицательно, и т. д. Проекции этих точек на ось  $ct'$  находятся, конечно, на равных расстояниях, так как электрон находится в области положительных значений  $y'$  так же долго, как и в области отрицательных значений. Среднее значение  $y'$  за большой промежуток времени равно нулю.

Если теперь перейти к другой системе отсчета, относительно которой атом движется по оси  $x$ -ов со скоростью  $v$ , то, согласно Минковскому, это означает пересчет этого графика к другой системе координат, оси которой повернуты на угол  $\varphi = \text{arctg } \beta$  относительно старых. При этом координаты  $y$  не изменятся, и точки  $0', 1', 2'$  будут и в новой системе точками пересечения мировой линии с плоскостью  $x, ct$ . Изменяется, однако, моменты времени этих пересечений, что видно из проекций 1, 2... этих точек на новую ось  $t$ . Путь от точки 2 до 3 электрон проходит теперь гораздо дольше, чем путь от 1 до 2. Если он находится между точками 1 и 2 в области  $y > 0$ , то среднее значение  $y$  за весь период движения, равное  $\bar{y} = \frac{1}{T} \int y dt$ , будет отрицательным. Появление отличного от нуля среднего значения  $y$  означает существование электрического момента. В самом деле, ядро всегда лежит в плоскости  $x, ct (y = 0)$ , а электрон, в среднем, в плоскости  $y = \bar{y}$ . Величина электрического момента есть  $p = -e\bar{y}$ , а его направление в данном случае совпадает с осью  $y$ , т. е. перпендикулярно к направлению движения.

Появившийся электрический момент легко вычислить. Для этого применим формулы преобразований Лорентца к уравнениям движения (61.8); тогда получим следующие три уравнения движения в новой системе отсчета:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{vt' + r' \cos \omega' t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y &= y' = r' \sin \omega' t', \\ t &= \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t' + \frac{vr'}{c^2} \cos \omega' t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (61.9)$$

Среднее значение  $y$  в новой координатной системе определяется из равенства

$$\bar{y} = \frac{\int_0^T y dt}{\int_0^T dt}.$$

В последнем уравнении (61.9) время  $t$  дается как функция  $t'$ , так что мы получаем для искомого среднего значения формулу:

$$\bar{y} = \frac{\int_0^T y \frac{dt}{dt'} dt'}{\int_0^T \frac{dt}{dt'} dt'} = -\frac{vr'^2 \omega'}{2c^2}.$$

Умножение на заряд дает электрический момент движущегося атома:

$$p_y = -ey = \frac{evr'^2 \omega'}{2c^2}. \quad (61.10)$$

Магнитный момент, связанный с орбитальным движением (61.8), вычисляется по простой формуле  $m = S \frac{J}{c}$ , где  $S$  — площадь орбиты, а  $J$  — количество электричества, которое проходит в 1 секунду через какое-нибудь поперечное сечение пути тока. Поэтому магнитный момент нашего атома равен

$$m_z = -\frac{er'^2 \omega'}{2c}.$$

Таким образом, электрический и магнитный моменты действительно связаны соотношением

$$p_y = -m_z \frac{v}{c}, \quad \mathbf{p} = -m \times \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (61.11)$$

Если мы еще раз сравним два совершенно симметричных результата (61.6) и (61.7), полученных с помощью теории относительности, то увидим, что формула (61.6а) с точки зрения классической электронной теории непосредственно понятна, между тем как для формулы (61.7а) существенно необходимо эйнштейновское понятие времени. Из рисунка 78



сразу видно, что электрического момента никак нельзя было бы получить, как того требует формула (61.7а), если продолжать придерживаться понятия абсолютной одновременности.

§ 62. Униполярная машина. В § 45 мы познакомились с опытами Эйхенвальда. Эти опыты доказывают, что при движении поляризованного диэлектрика возникает такое же магнитное поле, как если бы диэлектрик обладал намагничением

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^0 \times \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (62.1)$$

Этот эффект совершенно понятен уже на основании примитивной электронной теории, но обратный эффект, а именно электрическая поляризация движущегося магнита, равная

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{M}^0, \quad (62.2)$$

получается только как следствие теории относительности. В литературе по теории относительности нет указаний на экспериментальное доказательство реального существования этого второго эффекта. Поэтому можно было бы думать, что вследствие своей незначительности он до сих пор не поддавался наблюдению. Но на самом деле эффект, описываемый формулой (62.2), уже давно известен в технике под названием „униполярной индукции“. Поляризация, определяемая формулой (62.2), не принадлежит к числу явлений, которые возможно обнаружить только посредством очень тонкой методики измерения: напротив того, она позволяет технически получать токи, измеряемые тысячами ампер. Обычные описания униполярной индукции, встречающиеся в технической литературе, не объясняют того, что при этом речь идет по существу о релятивистском эффекте (62.2).

Техническая схема униполярной машины состоит из цилиндрического железного тела, которое вращается вокруг своей оси и намагничено параллельно ей. При помощи скользящих контактов  $A$  (на оси) и  $B$  (на экваторе) можно снимать ток, э. д. с. которого обыкновенно вычисляется по следующему правилу: необходимо применить закон индукции

$$\oint (\mathbf{E} ds) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int B_n dS \quad (62.3)$$

к материальному контуру интегрирования  $ACBVA$ . Этот контур за время  $dt$  переходит в  $AC'B'VA$ , причем угол  $CAC'$  равен  $\omega dt$  ( $\omega$  — угловая скорость). Следовательно, приращение потока  $\int B_n dt$  за время  $dt$  равно тому потоку, который протекает через часть поверхности тела  $ACBB'C'A$ . Этот поток равен

$$\omega dt \int_A^B r |\mathbf{B} \times ds|,$$

а, значит, э. д. с. равна

$$-\frac{\omega}{c} \int_A^B r |\mathbf{B} \times ds|. \quad (62.4)$$

При этом путь интегрирования от  $A$  до  $B$  проходит по меридианной плоскости, содержащей обе эти точки;  $r$  есть расстояние элемента длины  $ds$  от оси вращения. Но на самой меридианной плоскости путь интегрирования можно выбрать произвольным образом. Это сразу вытекает из условия  $\text{div} \mathbf{V} = 0$  или же из того обстоятельства, что направление  $\mathbf{V}$  всегда лежит в меридианной плоскости.

Впрочем, ту же самую величину разности потенциалов между точками  $A$  и  $B$  можно вывести и иным путем, рассматривая свободные электроны в металле. Последние движутся вместе с металлом со скоростью  $v$ . Следовательно, на них действует сила Лорентца  $\frac{e}{c} v_0 \times \mathbf{V}$ .

Равновесие может существовать только тогда, когда внутри металла эта сила везде компенсируется электрическим полем  $\mathbf{E} = -\frac{v}{c} \times \mathbf{V}$ . Таким образом, между точками  $A$  и  $B$  должна существовать разность потенциалов

$$\begin{aligned} \varphi_A - \varphi_B &= \int_A^B (\mathbf{E} ds) = -\frac{1}{c} \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{V}) ds = \\ &= -\frac{1}{c} \int_A^B \mathbf{v} (\mathbf{V} \times ds), \end{aligned} \quad (62.4a)$$

что совпадает с полученным выше результатом, так как  $|\mathbf{V}|$  равно  $\omega r$ , и оба вектора  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{V} \times ds$  нормальны к плоскости меридиана. Заметим еще без доказательства, что вычисленный здесь потенциал внутри вращающегося железного тела, обладающего осевой симметрией, может быть представлен также в виде  $\varphi = \frac{v}{c} \cdot A$ , если  $A$  есть вектор-потенциал магнитной индукции  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B} = \text{rot } A$ ).

Этот несомненно правильный способ вычисления электрического поля мы для наглядности разберем подробно не в случае вращающегося магнита, а в случае поступательно движущегося железного стержня. При этом мы прежде всего попытаемся выяснить, каким образом возникает электрическое поле. Рассмотрим очень длинный железный брусок с прямоугольным сечением. Пусть его продольная ось будет осью  $x$ -ов и пусть стержень намагничен в направлении оси  $y$ , так что его верхняя поверхность представляет северный полюс магнита, а нижняя — южный. Если этот стержень движется в направлении оси  $x$  со скоростью  $v$ , он может служить нам в качестве униполярной машины. Между скользящими контактами, находящимися в точках  $A$  и  $B$ , получится э. д. с., равная

$$-\frac{v}{c} \int_A^B B_n ds.$$

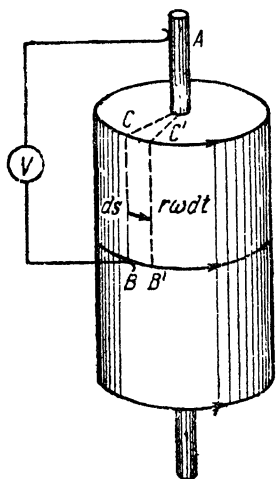


Рис. 79. Схема униполярной машины.

Вместо того чтобы говорить об этой э. д. с, можно задаваться вопросом об электрическом поле  $E$  вблизи поверхности движущегося бруска. Электротехника, используя упрощенную форму принципа относительности, дает на это следующий ответ: на неподвижный заряд со стороны движущегося бруска действует такая сила, которая возникла бы в том случае, если бы был неподвижен брусок, а заряд двигался со скоростью  $v$ . Но в этом случае сила равнялась бы  $e \frac{v}{c} \times B$ . Следовательно, движущийся брусок тоже вызывает электрическое поле, равное

$$E = - \frac{v}{c} \times B. \quad (62.5)$$

Иногда говорят также, что для силы должно быть безразлично, движется ли заряд относительно силовых линий или силовые линии движутся относительно заряда.

В последнем случае мы представляем себе, что силовые линии движущегося магнита движутся как прикрепленные к нему шипы. Но это несовместимо ни с какой теорией поля, потому что поле  $B$ , которое вызывает длинный движущийся брусок в месте нахождения электрона, постоянно во времени. Следовательно, производя измерения вблизи заряда, мы не можем решить, находится ли брусок в покое или движется. Таким образом причина возникновения поля (62.5) остается при этом совершенно непонятной. На самом же деле поле имеет чисто электростатическую природу: оно вызывается электрической поляризацией магнита, возникающей согласно уравнению (62.2). На рис. 80 эта поляризация направлена так, что передняя поверхность стержня заряжена положительно, а задняя — отрицательно.

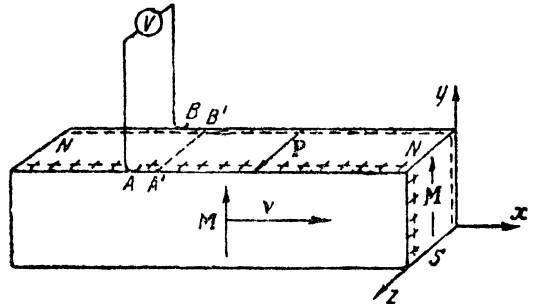


Рис. 80. Униполярная машина с поступательным движением. Электрическая поляризация  $P = \frac{1}{c} v \times M$  равномерно движущегося магнита.

Убедимся в том, что вызываемое этими зарядами поле как раз описывается уравнением (62.5). Для упрощения доказательства будем рассматривать  $M$  и  $P$  как непрерывные функции координат; поверхности разрыва, если они существуют, мы заменим непрерывным переходом. Так как каждое векторное поле однозначно определяется своей расходимостью и вихрем, то достаточно показать, что поле (62.5) удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} E = -4\pi \operatorname{div} P, \quad \operatorname{rot} E = 0. \quad (62.6)$$

Так как  $\mathbf{v}$  есть постоянный вектор, то, согласно известным правилам векторного исчисления, из (62.2) вытекает:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \operatorname{rot} \mathbf{M}.$$

С другой стороны,  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}$  (так как вихрь вектора  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$ , ввиду отсутствия токов проводимости, равен 0). Стало быть, согласно (62.5), имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M}.$$

Этим мы доказали первое уравнение (62.6). Для доказательства второго уравнения (62.6) воспользуемся векторным равенством, верным для любого постоянного вектора:

$$-\operatorname{rot} \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) = -\frac{\mathbf{v}}{c} \operatorname{div} \mathbf{B} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{B}.$$

Здесь  $\operatorname{div} \mathbf{B}$  всегда равно нулю. Второе слагаемое исчезает в случае бесконечно длинного бруска, потому что в этом случае  $\mathbf{B}$  не может зависеть от  $x$ . Следовательно, (62.5) в самом деле совпадает с электростатическим полем, описываемым формулами (62.6).

Впрочем, уравнение (62.5) остается верным также в том случае, когда, вместо длинного бруска, движется со скоростью  $\mathbf{v}$  постоянный магнит произвольной формы. Только в этом случае вихрь поля уже не равен нулю, а на основании только что написанного уравнения, равен

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{B}.$$

Но так как для наблюдателя, движущегося вместе с магнитом, полное изменение  $\mathbf{B}$ , т. е.  $\dot{\mathbf{B}} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{B}$ , равно нулю, то  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}$ , как того требует закон индукции. Разумеется, поле (62.5) существует и внутри железа. Действие этого поля на движущиеся вместе с магнитом электроны проводимости компенсируется силой Лорентца.

Явление, которое давно было известно технике и которое заключается в том, что движущийся магнит вызывает электрическое поле, фактически стало понятно только благодаря релятивистской формуле (62.2). Последнюю же, как мы видели в предыдущем параграфе, можно считать непосредственным следствием эйнштейновского определения одновременности.

## V. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 63. Механика материальной точки. В § 49 мы показали, что основные уравнения ньютоновской механики инварианты по отношению к преобразованию Галилея. Главное свойство этого преобразования заключается в том, что две скорости складываются просто по правилу сложения векторов: если наблюдатель приписывает какой-нибудь материальной точке скорость  $\mathbf{u}'$ , а сам при этом движется со скоростью  $\mathbf{v}$  по отношению к другому наблюдателю, то последний при-

пишет той же материальной точке скорость  $u = v + u'$ . В противоположность этому, принцип относительности Эйнштейна вместе с результатом опыта Майкельсона привел, как мы видели выше, к тому, что все законы природы должны быть инвариантны по отношению к преобразованию Лорентца, так что, в частности, эйнштейновская теорема сложения скоростей должна обладать универсальной применимостью. Поэтому мы и не можем больше считать старые ньютоновские уравнения точными законами природы, а должны попытаться их переделать таким образом, чтобы и они также удовлетворяли требованиям принципа относительности. При этой переделке следует руководствоваться тем, что новые уравнения должны переходить в предельном случае малых скоростей в старые уравнения Ньютона. В самом деле, все предсказываемые теорией относительности отступления от классической электронной теории действительно стремятся к нулю при уменьшении скоростей.

Мы начнем с рассмотрения движения материальной точки в заданном силовом поле. Ньютоновские уравнения движения гласят:

$$m \frac{dv}{dt} = F. \quad (63.1)$$

Из этих уравнений вытекает, как известно, закон сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = F \cdot v, \quad (63.2)$$

который утверждает, что изменение кинетической энергии материальной точки в единицу времени равно работе, произведенной силой в единицу времени. Теперь сообразим, каким образом можно придать этим уравнениям релятивистски инвариантную форму. Для этого можно исходить из двух различных точек зрения: можно или попытаться непосредственно придать уравнению (63.1), относящемуся к материальной точке, релятивистскую форму, или же исходить из основных уравнений электродинамики и воспользоваться ранее выведенным там понятием плотности силы. В § 45 мы уже подробно рассмотрели закон преобразования электродинамической плотности силы. Непосредственное перенесение этого закона преобразования на плотность силы в механике на первый взгляд может показаться рискованным. Но принцип относительности как раз требует, чтобы закон преобразования для всех сил, независимо от их происхождения, был одинаков, так как равновесие между различными силами, действующими на материальную точку, является объективным по своей природе фактом, независимым от какой бы то ни было координатной системы. Если бы закон преобразования был различен для разного рода сил, то могло бы случиться, что движущиеся друг относительно друга наблюдатели давали бы противоречивые показания о состоянии равновесия.

Сначала мы пойдем по первому пути, т. е. непосредственно перепишем уравнения движения (63.1) в релятивистской

форме. Для этой цели заменим скорость  $\mathbf{v}$  четырехмерной скоростью  $u_i$  с компонентами

$$(u_1, u_2, u_3) = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (63.3)$$

Кроме того, введем вместо элемента времени  $dt$ , зависящего от координатной системы, инвариантное собственное время  $d\tau$ . Инерцию материальной точки мы также охарактеризуем здесь связанной с нею инвариантной массой, которую обозначим буквой  $m_0$ . Тогда мы получим уравнения движения в четырехмерной форме, найденные впервые Минковским:

$$m_0 \frac{du_i}{d\tau} = F_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (63.4)$$

В правой части стоит четырехмерный вектор  $F_i$ , который обычно называют вектором силы Минковского. Для того чтобы найти физический смысл измененных таким образом уравнений движения и сделать возможным сравнение их с уравнениями (63.1), заменим собственное время  $d\tau$  на  $dt \sqrt{1-\beta^2}$ ; тогда производная от четырехмерной скорости по времени в рассматриваемой координатной системе будет удовлетворять уравнению:

$$m_0 \frac{du_i}{dt} = F_i \sqrt{1-\beta^2}. \quad (63.5)$$

Если подставить сюда, вместо слагающих  $u_i$ , их значения из (63.3), то получатся первые три уравнения движения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m_0 \frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} &= F_1 \sqrt{1-\beta^2}, \\ m_0 \frac{d}{dt} \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} &= F_2 \sqrt{1-\beta^2}, \\ m_0 \frac{d}{dt} \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} &= F_3 \sqrt{1-\beta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (63.6)$$

Связь между первыми тремя слагающими силы Минковского  $F_i$  и трехмерным вектором силы  $\mathbf{F}$  определяется равенством

$$(F_1, F_2, F_3) = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (63.7)$$

Для того чтобы найти смысл также и четвертой слагающей вектора  $F_i$ , помножим уравнение движения (63.4) на  $u_i$  и просуммируем по  $i$  от 1 до 4. Вследствие тождества  $\sum_i u_i^2 = -c^2$  левая сторона даст нуль, и, следовательно,

$$\sum_i F_i u_i = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{1-\beta^2} + \frac{F_4 ic}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0. \quad (63.8)$$

Таким образом четвертая слагающая силы Минковского имеет следующий смысл:

$$F_4 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{i}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (63.7a)$$

Стало быть, четвертое уравнение движения (63.4) имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (63.9)$$

Правая сторона этого уравнения совпадает с правой стороной уравнения энергии (63.2) в классической механике. Поэтому мы будем считать энергией нашей материальной точки выражение

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (63.10)$$

так как производная по времени от этого выражения равна работе внешней силы в единицу времени. Если мы развернем энергию  $E$  в ряд по возрастающим степеням отношения  $\frac{v}{c} = \beta$ , то получим:

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (63.10a)$$

Впоследствии мы назовем первый член этого ряда, т. е.  $m_0 c^2$ , энергией материальной точки в состоянии покоя. Энергия в состоянии покоя является величиной, не меняющейся во время движения; для динамики нашей точки она не имеет никакого значения. Второе же слагаемое совпадает с обыкновенной кинетической энергией в классической механике. Поэтому, если ограничиться малыми скоростями, то энергия  $E$ , если не считать аддитивной постоянной, действительно равна кинетической энергии в старом смысле. Позднее мы увидим, что и эта аддитивная постоянная имеет глубокий физический смысл. С формальной точки зрения это видно уже из того, что, умножая вектор четырехмерной скорости  $u_i$  на скалярную нулевую массу  $m_0$ , мы получаем новый четырехмерный вектор  $J_{\mu}$ , слагающие которого имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= G_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ J_2 &= G_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ J_3 &= G_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ J_4 &= \frac{i}{c} E = \frac{i m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (63.11)$$

Таким образом первые три слагающие вектора  $J_k$  дают вектор механического импульса  $\mathbf{G}$ , четвертая же слагающая — величину  $\frac{i}{c}E$ . Инвариант этого вектора равен

$$\sum_{k=1}^4 J_k^2 = -m_0^2 c^2. \quad (63.11a)$$

Если мы хотим связать динамику материальной точки с понятием плотности силы, то для этого необходимо сперва заменить материальную точку континуумом и задать скалярную функцию координат  $\mu_0$ , которую мы назовем плотностью нулевой массы этого континуума. Так как на основании результатов электродинамики плотность силы  $f_i$  есть четырехмерный вектор, то уравнения движения предполагаются в виде:

$$\mu_0 \frac{du_i}{d\tau} = f_i \quad (63.12)$$

(это уравнение относится к рассматриваемому элементу массы континуума). Если четырехмерная скорость  $u_i$  постоянна на всем трехмерном протяжении этого континуума, то, интегрируя уравнение (63.12) по всему трехмерному объему, можно получить уравнение движения всего тела. Для этой цели умножим уравнение (63.12) на элемент неподвижного объема  $dV_0 = \frac{dV}{\sqrt{1-\beta^2}}$ . Тогда, введя сокращенное обозначение  $m_0 = \int \mu_0 dV_0$ , мы получим уравнение движения всей материальной точки в виде:

$$m_0 \frac{du_i}{d\tau} = \int f_i dV. \quad (63.13)$$

Если ввести теперь результирующую трехмерную силу, а именно:

$$F_x = \int f_1 dV, \quad F_y = \int f_2 dV, \quad F_z = \int f_3 dV, \quad (63.13a)$$

то, принимая во внимание формулу (63.7), мы опять получим уравнение движения (63.4), выведенные Минковским.

Наиболее интересный результат релятивистской механики заключается в возрастании инертной массы со скоростью. А именно, новые уравнения (63.11) для импульса можно написать также в привычной форме  $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ , если считать, что сама масса  $m$  зависит от скорости:<sup>1</sup>

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (63.14)$$

При этом для малых скоростей она равна нулевой массе, а с приближением  $v$  к скорости света стремится к бесконечно большому значению. С таким поведением массы мы уже познакомились при рассмотрении электромагнитного поля, переносимого электроном. Подобное возрастание массы действительно наблюдалось на

<sup>1</sup> См. примечание в конце книги.



опыте у очень быстрых катодных лучей, а в особенности у  $\beta$ -лучей радиоактивного распада. (Вспомним, что говорилось в конце § 10 о влиянии эффекта изменения массы на опыты Кауфмана с отклонением электронов). До появления теории относительности считали, что такое поведение электрона является доказательством электромагнитного характера его массы. Теперь же мы видим, что эта зависимость от скорости является совершенно общим законом для любой инертной массы, независимо от того, какое она имеет происхождение: электромагнитное или нет.

**§ 64. Релятивистские уравнения движения в гамильтоновой форме.** Если учесть только что доказанную зависимость массы от скорости, то уравнения движения электрона в данном поле  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = e \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \right]. \quad (64.1)$$

В этом параграфе мы перепишем эти уравнения в форме Гамильтона не изменяя нисколько их физического содержания. С гамильтоновой формой в случае  $\beta^2 \ll 1$  мы познакомились ранее в § 12. Общий случай произвольно большой скорости, который мы рассмотрим здесь, имеет большое значение для некоторых приложений в квантовой механике.

Уравнение (64.1) в четырехмерной форме имеет вид:

$$\frac{d}{d\tau} (m_0 u_i) = \frac{e}{c} \sum_k \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \right) u_k. \quad (64.2)$$

Здесь  $\Phi_i$  есть вектор-потенциал, из которого выводится поле  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  по формуле (55.12). Движение можно описывать, задавая или четыре величины  $x_1, x_2, x_3, x_4$  как функции от собственного времени  $\tau$ , или же три координаты  $x, y, z$  как функции от обычного времени  $t$ ; соответственно этим двум возможностям, можно искать функцию Гамильтона в двух видах: или как функцию от восьми переменных  $x$ , а именно — от четырех координат и четырех импульсов:

$$\mathcal{H}'(x_1, \dots, x_4; p_1, \dots, p_4), \quad (64.3)$$

и выводить из нее уравнения движения

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{d\tau} = - \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (64.3a)$$

или же — соответственно трехмерной форме (64.1) — в виде функции только от семи переменных:

$$\mathcal{H}(x, y, z; p_x, p_y, p_z; t), \quad (64.4)$$

с уравнениями движения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}, \quad \frac{dp_x}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}. \quad (64.4a)$$

Мы сначала найдем функцию  $\mathcal{H}'$ , фигурирующую в (64.3) и (64.3a), а затем выведем из нее „настоящую“ функцию Гамильтона  $\mathcal{H}$  (64.4).

Промежуточным звеном между (64.2) и уравнениями Гамильтона (64.3а) является лагранжева форма уравнений, которую мы прежде всего и выведем. Потенциалы  $\Phi_i$  заданы как функции четырех координат  $x_k$ . Если мы предположим, что они измеряются всегда в точке, где находится электрон, то они окажутся функциями одного только собственного времени  $\tau$ , если четыре координаты электрона  $x_k$  заданы как функции от  $\tau$ . В этом случае

$$\frac{d\Phi_i}{d\tau} = \sum_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\tau} = \sum_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} u_k.$$

Уравнение (64.2) можно поэтому написать в виде:

$$\frac{d}{d\tau} \left( m_0 u_i + \frac{e}{c} \Phi_i \right) = \frac{e}{c} \sum_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} u_k. \quad (64.5)$$

(В виде упражнения выясните физический смысл четвертого из этих уравнений в случае поля, постоянного во времени!). Эти уравнения эквивалентны уравнениям

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad (64.6)$$

если мы введем функцию Лагранжа  $L$  от восьми переменных  $u_1 \dots u_4$ ;  $x_1 \dots x_4$ :

$$L(x_i, u_i) = \sum_k \left( \frac{1}{2} m_0 u_k^2 + \frac{e}{c} u_k \Phi_k \right). \quad (64.6a)$$

Теперь определим четыре импульса  $p_1, \dots, p_4$  при помощи соотношений

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial u_k} = m_0 u_k + \frac{e}{c} \Phi_k \quad (64.7)$$

и предположим, что эти четыре уравнения решены относительно  $u_k$ . Полученные таким образом функции  $u_k(x_1, \dots, x_4; p_1, \dots, p_4)$  подставим в функцию  $L$ . Тогда мы можем ввести функцию  $\mathcal{H}'$  от  $x_1, \dots, x_4$ ;  $p_1, \dots, p_4$  по формуле

$$\mathcal{H}'(x_i, p_i) = \sum_k p_k u_k - L. \quad (64.8)$$

Мы утверждаем, что уравнения (64.3а), построенные с помощью этой функции, фактически совпадают с уравнениями движения (64.2). Доказать это можно, если продифференцировать (64.8), принимая во внимание (64.6) и (64.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial x_i} &= \sum_k p_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = - \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{\partial p_i}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_i} &= u_i + \sum_k p_k \frac{\partial u_k}{\partial p_i} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial p_i} = u_i = \frac{dx_i}{d\tau}. \end{aligned}$$

Этим мы доказали эквивалентность уравнений Гамильтона, построенных с помощью функции (64.8), и уравнений Лагранжа (64.6).

Подставляя вместо  $p_k$  выражение (64.7), мы получим  $\mathcal{H}'$  в явном виде:

$$\mathcal{H}'(x_i, p_i) = \frac{1}{2m_0} \sum_k \left( p_k - \frac{e}{c} \Phi_k \right)^2. \quad (64.9)$$

Численное значение функции  $\mathcal{H}'$  всегда равно  $-\frac{m_0 c^2}{2}$ , так как, согласно (64.7),  $p - \frac{e}{c} \Phi_k = m_0 u_k$ , а четырехмерный вектор  $u_k$  удовлетворяет соотношению  $\sum_k u_k^2 = -c^2$ .

Соотношение

$$\sum_{k=1}^4 \left( p_k - \frac{e}{c} \Phi \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0, \quad (64.10)$$

связывающее восемь величин  $x_1, \dots, x_4; p_1, \dots, p_4$ , дает нам возможность найти функцию  $\mathcal{H}$ , т. е. (64.4). Если мы сначала составим из (64.9) два первых уравнения:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial x_1}$$

и разделим их почленно на уравнение

$$\frac{dx_4}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_4},$$

то получим:

$$\frac{dx_1}{dx_4} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dx_4} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_4}. \quad (64.11)$$

Предположим теперь, что уравнение (64.10) решено относительно  $p_4$ . Это дает функцию от семи переменных

$$p_4 = p_4(x_1, x_2, x_3, x_4; p_1, p_2, p_3), \quad (64.12)$$

которая, при подстановке в уравнение (64.10), превращает его в тождество. Но так как (64.10), вплоть до аддитивной постоянной  $m_0^2 c^2$  и множителя  $\frac{1}{2m_0}$ , совпадает с  $\mathcal{H}'$ , то, ввиду (64.12), мы получаем семь уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_4} \frac{\partial p_4}{\partial x_k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_r} + \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_4} \frac{\partial p_4}{\partial p_r} = 0, \quad (r = 1, 2, 3).$$

Таким образом наши уравнения (64.11) можно переписать в виде:

$$\frac{dx_1}{dx_4} = -\frac{\partial p_4}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dx_4} = \frac{\partial p_4}{\partial x_1}.$$

Если заменить еще  $x_4$  на  $ict$  и подбжить  $\mathcal{H}(x, y, z; p_x, p_y, p_z; t) = -icp_4(x_1, x_2, x_3, x_4; p_1, p_2, p_3)$ , то получатся уравнения движения в форме (64.4a). Если в (64.10) заменить четырехмерный потенциал величинами  $A_x, A_y, A_z, i\varphi$ , то мы найдем функцию Гамильтона (64.4), решив уравнение

$$\left(p_x - \frac{e}{c} A_x\right)^2 + \left(p_y - \frac{e}{c} A_y\right)^2 + \left(p_z - \frac{e}{c} A_z\right)^2 + \left(\frac{i\mathcal{H}}{c} - \frac{ie\varphi}{c}\right) + m_0^2 c^2 = 0.$$

Из него получается

$$\mathcal{H} = e\varphi + c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(p - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2}, \quad (64.13)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  следует считать данными функциями от  $x, y, z, t$ . Посредством вычисления можно убедиться в том, что уравнения (64.4a), если туда подставить функцию (64.13), в самом деле приводят к (64.1).

При малых скоростях член  $m_0^2 c^2$ , стоящий под корнем, значительно больше остальных. В этом случае, вместо выражения (64.13), можно применять приближенное выражение:

$$\mathcal{H} = m_0^2 c^2 + e\varphi + \frac{1}{2m_0} \left(p - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2. \quad (64.13a)$$

Уже в § 12 мы доказали, что из (64.13a) вытекают уравнения движения в нерелятивистской форме, т. е.

$$m_0 \dot{\mathbf{v}} = e \left( \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}\right) \right).$$

**§ 65. Эквивалентность энергии и массы.** В (63.11) мы имели четырехмерный вектор  $J_k$ , устанавливающий инвариантную связь между энергией и импульсом отдельной материальной точки. В координатной системе, в которой трехмерный импульс  $\mathbf{G}$  равен нулю, мы имеем:

$$J_1^0 = J_2^0 = J_3^0 = 0, \quad J_4^0 = \frac{iE_0}{c},$$

если через  $E_0$  обозначить энергию в состоянии покоя. Если же мы будем рассматривать материальную точку в координатной системе, по отношению к которой она движется со скоростью  $\mathbf{v}$  в направлении положительной оси  $x$ -ов, то из преобразований Лорентца, примененных к четырехмерному вектору  $J$ , следует:

$$J_1 = \frac{-i\beta J_4^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad J_4 = \frac{J_4^0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

или в трехмерной формулировке:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{E_0}{c^2}, \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (65.1)$$

Наши результаты, написанные в этой форме, допускают широкое и далеко идущее обобщение, с которым мы познакомимся в этом параграфе на нескольких простых примерах. Это обобщение заключается в

утверждении, что всякая замкнутая система, которой следует приписать „энергию в состоянии покоя“  $E_0$ , одновременно с этим обладает инертной массой

$$m_0 = \frac{E_0}{c^2}. \quad (65.2)$$

При этом под энергией в состоянии покоя понимают полную энергию в такой координатной системе, в которой результирующий импульс  $\mathbf{G}$  равен нулю. Применительно к частному случаю чисто электромагнитного поля (ограниченный ряд волн) правильность утверждения (65.2) уже была доказана в § 58. Теперь мы увидим на двух примерах из механики, что инертная масса в смысле уравнения (65.2) соответствует и тепловой энергии.

В качестве первого примера рассмотрим систему материальных точек, между которыми могут происходить упругие удары, т. е. рассмотрим модель, подобную той, которая изображает идеальный газ в кинетической теории газов. Если мы обозначим отдельные неподвижные массы буквами  $m_1^0, m_2^0, \dots$ , а их скорости буквами  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ , то в классической механике при наличии упругих ударов имеют место законы сохранения энергии и импульса:

$$\mathbf{G} = \sum_s m_s^0 \mathbf{v}_s = \text{const}, \quad E = \sum_s \frac{1}{2} m_s^0 v_s^2 = \text{const}.$$

Эти два закона в теории относительности сливаются в один закон, гласящий, что четырехмерный вектор полной энергии и полного импульса

$$J_i = \sum_s m_s^0 u_{s,i} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (65.3)$$

не меняется во времени. Отсюда следует, что в трехмерной формулировке закону сохранения энергии и импульса удовлетворяют величины:

$$\mathbf{G} = \sum_s \frac{m_s^0 \mathbf{v}_s}{\sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}}, \quad E = \sum_s \frac{m_s^0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}}. \quad (65.3a)$$

Рассмотрим наш газ в такой координатной системе, в которой он как целое неподвижен, т. е. в которой механический импульс  $\mathbf{G}^0 = 0$ . Если в этой координатной системе обозначить скорость  $s$ -ой газовой молекулы через  $\mathbf{v}_s^0$ , то энергия газа в этой системе равна

$$E_0 = \frac{c}{i} J_4^0 = \sum_s \frac{m_s^0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{(\mathbf{v}_s^0)^2}{c^2}}}. \quad (65.4)$$

Если мы теперь будем рассматривать этот газ с точки зрения системы отсчета, относительно которой он движется со скоростью  $\mathbf{V}$ , то, согласно

известным формулам преобразований, получатся следующие выражения для импульса и энергии в этой системе:

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{vE_0}{c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \sum_s \frac{m_s^0}{\sqrt{1-\frac{(v_s^0)^2}{c^2}}}, \\ E &= \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \sum_s \frac{m_s^0}{\sqrt{1-\frac{(v_s^0)^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (65.5)$$

Результирующий импульс имеет обычный вид  $G = \frac{vM_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ , если

всему газу приписать „нулевую“ массу, равную

$$M_0 = \sum_s \frac{m_s^0}{\sqrt{1-\frac{(v_s^0)^2}{c^2}}}. \quad (65.6)$$

Если рассматривать газ не как механическую систему, а с точки зрения макроскопической теории тепла, как сплошное тело с определенным количеством энергии, то в наших результатах, конечно, ничего не изменится. Но из уравнений (65.6) мы видим, что в нулевую массу всего газа входят не только нулевые массы отдельных молекул, но и их общая кинетическая энергия, которая с макроскопической точки зрения эквивалентна содержащейся в теле тепловой энергии.

Мы докажем этот важный результат еще и другим способом, а именно с помощью эйнштейновской теоремы сложения скоростей, при помощи которой мы получим тот же результат, не пользуясь, однако, понятием энергии. Мы будем употреблять те же обозначения, что и раньше, и только положим для простоты, что во второй системе газ движется со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ -ов. Теперь применим теорему сложения скоростей для вычисления, на основании скорости в неподвижной системе, скорости  $v_s$  в системе, движущейся по отношению к газу. В § 51 мы вывели для этого формулы:

$$v_{s,x} = \frac{v_{s,x}^0 + v}{1 + \frac{v_{s,x}^0 \cdot v}{c^2}}, \quad v_{s,y} = \frac{v_{s,y}^0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_{s,x}^0 \cdot v}{c^2}}. \quad (65.7)$$

Отсюда, как это легко показать, следует:

$$\sqrt{1-\frac{v_s^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{(v_s^0)^2}{c^2}} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_{s,x}^0 v}{c^2}} \quad (65.8)$$

Результирующий импульс любой системы точек определяется равенством

$$G = \sum_s \frac{m_s^0 v_s}{\sqrt{1-\frac{v_s^2}{c^2}}}. \quad (65.9)$$

Если сюда подставить значения (65.7) и (65.8), то, принимая во внимание (65.4), мы получим для импульса соотношения:

$$G_x = \sum_s m_s^0 \frac{v_{s,x}^0 + v}{\sqrt{1 - \frac{(v_s^0)^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( G_x^0 + \frac{v}{c} E^0 \right) =$$

$$= \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{E^0}{c^2}$$

$$G_y = \sum_s m_s^0 \frac{v_{s,y}^0}{\sqrt{1 - \frac{(v_s^0)^2}{c^2}}} = G_y^0 = 0, \tag{65.10}$$

в точности совпадающие с (65.5). В этом выводе вообще не было и речи об энергии; напротив, мы вывели здесь нулевую массу нашего газа из одной лишь релятивистской теоремы сложения скоростей.

Таким образом, мы проверили уравнение (65.2) в том частном случае, когда тепловая энергия состоит только из кинетической энергии свободных газовых молекул. Общая масса всегда увеличивается, если увеличивается средняя кинетическая энергия отдельных атомов.

Теперь убедимся на примере неупругих ударов, что эта связь тепловой энергии с инертной массой совершенно независима от каких бы то ни было специальных молекулярных представлений о механизме теплового движения. Мы рассмотрим частный случай неупругого удара, когда два материальных шара сталкиваются так, что после столкновения они начинают двигаться вместе. С точки зрения механики Ньютона этот процесс описывается законом сохранения импульсов. Пусть, например,  $m_1$  и  $m_2$  — массы сталкивающихся шаров,  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  — их скорости до столкновения, а  $\mathbf{v}$  — их общая скорость после столкновения; тогда можно применить закон импульсов:

$$(m_1 + m_2) \mathbf{v} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2. \tag{65.11}$$

Закон сохранения энергии классической механики здесь, конечно, уже не имеет места: при столкновении кинетическая энергия теряется, превращаясь в тепло. Количество энергии  $W$ , превратившееся в тепло, равно разности кинетических энергий до и после удара, а потому, согласно (65.11), мы имеем:

$$2W = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) v^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \tag{65.12}$$

Может появиться искушение придать закону сохранения импульсов (65.11) ньютоновской механики релятивистскую форму, введя четырехмерные скорости  $u_i^{(1)}$ ,  $u_i^{(2)}$  и  $u_i$  и нулевые массы покоя  $m_1^0$  и  $m_2^0$ , а именно, написать

$$m_1^0 u_i^{(1)} + m_2^0 u_i^{(2)} = (m_1^0 + m_2^0) u_i.$$

Хотя такое уравнение в самом деле релятивистски инвариантно, но оно бессмысленно, в чем легко убедиться, рассматривая его четвертую слагающую. Четырех уравнений для определения четырех слагающих скорости  $u_i$  слишком много, так как между слагающими всегда должно существовать соотношение  $\sum u_i^2 = -c^2$ .

Поэтому мы можем придать закону сохранения импульсов (65.11) лишенную противоречий четырехмерную форму только в том случае, если допустим, что нулевая масса  $M^0$  двух объединившихся после столкновения шаров отличается от суммы их нулевых масс до удара. Тогда в четырехмерной формулировке мы получим:

$$m_1^0 u_i^{(1)} + m_2^0 u_i^{(2)} = M^0 u_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (65.13)$$

По сравнению с уравнением (65.11), мы получили существенно новый результат. В то время как все три уравнения (65.11) следует рассматривать как уравнения для трех слагающих новой скорости  $\mathbf{v}$ , теперь в (65.13) появилось четвертое уравнение для двух сталкивающихся шаров после их слияния в одно тело. В трехмерной форме это четвертое уравнение имеет вид:

$$\frac{m_1^0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2^0}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{M^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (65.14)$$

Если рассматривать (65.14) с точки зрения координатной системы, в которой результирующая скорость  $\mathbf{v}$  равна нулю, то оно означает следующее: нулевая масса  $M^0$  двух слившихся при неупругом столкновении шаров содержит, кроме нулевых масс отдельных шаров  $m_1^0$  и  $m_2^0$ , еще массу  $m_3 = \frac{E_{\text{кин}}}{c^2}$ , где  $E_{\text{кин}}$  есть кинетическая энергия двух участников столкновения, превратившаяся при столкновении в теплоту. Впрочем, несущественно, превратилась ли эта кинетическая энергия именно в тепло. Она, например, могла бы превратиться после слияния обоих шаров в энергию их вращения вокруг общего центра тяжести. В этом случае такая энергия тоже должна сказаться как возрастание инертной массы.

На этом примере видно, что релятивистская механика в некотором смысле проще и изящнее, чем механика Ньютона. В то время как последняя всегда различает такие случаи, в которых закон сохранения механической энергии выполняется, и такие, в которых он не выполняется, — теории относительности это разделение чуждо. В этой теории закон сохранения энергии всегда выполняется в форме, подобной (65.14).

В качестве другого примера эквивалентности массы и энергии рассмотрим тело с нулевой массой  $M^0$ , которое в течение конечного отрезка времени испускает энергию  $E^0$  в виде электромагнитного излучения (световое или тепловое излучение). Пусть это излучение обладает такой симметрией по отношению к излучающему телу, что результирующий импульс излученной энергии равен нулю. Напри-



мер, излучение может иметь форму сферической волны, или — если тело плоское — форму двух плоских волн, распространяющихся в двух противоположных направлениях. Ясно, что если тело первоначально было неподвижно, то и после излучения оно останется в покое.

Рассмотрим этот процесс с точки зрения координатной системы, относительно которой это тело движется со скоростью  $v$ . В этой координатной системе, согласно формулам преобразования четырехмерных векторов, результирующий импульс излучения равен

$$G = \frac{E^0 v}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (65.15)$$

Следовательно, наше тело во время испускания лучистой энергии потеряло этот импульс, не изменив при этом своей скорости. Это возможно только благодаря тому, что изменилась нулевая масса. Если мы обозначим буквой  $M'^0$  нулевую массу нашего тела после испускания световой волны, то закон сохранения количества движения дает:

$$\frac{M^0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{M'^0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{E^0 v}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}},$$

или

$$M'^0 = M^0 - \frac{E^0}{c^2}. \quad (65.16)$$

Таким образом, масса тела действительно уменьшилась на величину  $\frac{E^0}{c^2}$ . С точки зрения нашего основного уравнения (65.2), для этого результата совершенно безразлично, в каком виде находилась в теле энергия  $E^0$  до излучения: в виде тепловой энергии или в виде энергии электрического поля, или наконец, в виде механической энергии. Этот пример особенно интересен потому, что именно на нем Эйнштейн впервые вывел закон эквивалентности энергии и массы как общий закон природы.

**§ 66. Механические напряжения.** *а) Баланс энергии и импульса электрона.* Перейдем теперь к дальнейшему построению релятивистской механики. При этом мы удовлетворимся тем, что разберем некоторые важные вопросы релятивистской динамики на примере двух конкретных задач. Первая из этих двух задач относится к вопросу, затронутому в §§ 8 и 10, а именно, к вопросу о балансе энергии и импульса электрона, вторая — к вопросу об отрицательном результате опыта Траутона и Нобля.

Мы будем исходить из полученного в § 10 результата, согласно которому полный импульс электромагнитного поля электрона, движущегося с постоянной скоростью  $v$ , равен

$$G^{(e)} = \frac{4}{3} \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{U_0}{c^2}. \quad (66.1)$$

При этом  $U_0$  есть полная энергия поля неподвижного электрона. В § 10 мы уже заметили, что формула (66.1) представляет большую трудность для попытки чисто электромагнитного толкования массы

электрона. Очевидно, теория дает для электромагнитного импульса величину, в  $\frac{4}{3}$  раз бóльшую, чем та, которую мы получили бы, приписывая электрону, согласно эйнштейновскому принципу эквивалентности энергии и массы, нулевую массу  $\frac{U_0}{c^2}$  и рассматривая затем электрон как материальную точку, обладающую такой нулевой массой.

Прежде чем перейти к объяснению этого замечательного коэффициента  $\frac{4}{3}$ , мы еще раз выведем формулу (66.1), применяя теперь уже математический аппарат теории относительности. Для этой цели вернемся к § 57, где мы вывели тензор энергии и импульса  $T_{ik}$  электромагнитного поля. Его девять чисто пространственных слагающих суть слагающие максвелловского тензора напряжений;  $T_{14}$ ,  $T_{24}$ ,  $T_{34}$ , не считая множителя  $-ic$ , являются слагающими импульса;  $T_{41}$ ,  $T_{42}$ ,  $T_{43}$  вплоть до множителя  $\frac{i}{c}$ , равны слагающим вектора Пойнтинга и, наконец,  $T_{44}$  есть плотность энергии электромагнитного поля. В частном случае, когда речь идет о поле одного электрона, в неподвижной системе исчезают все смешанные (пространственно-временные) слагающие тензора, вследствие того, что  $\mathbf{H} = 0$ ; это значит, что электромагнитное поле неподвижного электрона не обладает импульсом и не дает потока энергии.

Если же  $T_{ik}$  есть тензор энергии и импульса электрона в системе, относительно которой он движется со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ -ов, то слагающая  $G_x$  результирующего импульса поля и полная энергия поля  $U$  будут:

$$G_x = \frac{i}{c} \int T_{14} dV, \quad (66.2)$$

$$U = \int T_{44} dV. \quad (66.3)$$

Слагающие импульса  $G_y$  и  $G_z$ , как явствует из соображений симметрии, равны нулю.

Слагающие тензора напряжения  $T_{14}$  и  $T_{44}$  выражаются, согласно формулам преобразований (54.25), через тензор  $T_{ik}^0$  неподвижного электрона следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{14} &= \frac{T_{14}^0 - i\beta(T_{44}^0 - T_{11}^0) + \beta^2 T_{41}^0}{1 - \beta^2} = \frac{-i\beta(T_{44}^0 - T_{11}^0)}{1 - \beta^2}, \\ T_{44} &= \frac{T_{44}^0 + i\beta(T_{14}^0 + T_{41}^0) - \beta^2 T_{11}^0}{1 - \beta^2} = \frac{T_{44}^0 - \beta^2 T_{11}^0}{1 - \beta^2} \end{aligned} \quad (66.4)$$

так как в случае неподвижного электрона обе смешанные слагающие  $T_{14}^0$  и  $T_{41}^0$  исчезают. Интегрирование по трехмерному объему мы можем производить в неподвижной системе, пользуясь соотношением  $dV = dV_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ , и мы получаем таким образом:

$$G_x = \frac{v}{c_3 \sqrt{1 - \beta^2}} \int (T_{44}^0 - T_{11}^0) dV_0, \quad (66.2a)$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \int (T_{44}^0 - \beta^2 T_{11}^0) dV_0. \quad (66.3a)$$

Интеграл  $T_{44}^0$  по объему дает общую энергию  $U_0$  в неподвижной системе. С другой стороны, согласно § 57, имеем:

$$\int T_{11}^0 dV_0 = \frac{1}{4\pi} \int \left( E_x^{02} - \frac{1}{2} E^{02} \right) dV_0 = -\frac{1}{3} U_0,$$

так как на основании симметрии,

$$\int E_x^{02} dV_0 = \frac{1}{3} \int E^{02} dV_0.$$

Таким образом, из (66.2a) мы получаем формулу (66.1), в то время как (66.3a) приводит к соотношению:

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( 1 + \frac{\beta^2}{3} \right). \quad (66.4a)$$

Появление множителя  $\frac{4}{3}$  в формуле (66.1) показывает, что динамическое поведение электрона нельзя понять из рассмотрения одного только его поля. Этот множитель появляется в нашем выводе благодаря тому, что в выражении (66.2a) и (66.3a), наряду с членом, соответствующим энергии поля  $T_{44}^0$  в состоянии покоя, входит еще и добавочный член  $T_{11}^0$ , обусловленный максвелловскими напряжениями. Позднее, в другой связи, мы еще раз встретимся с этим добавочным членом. Таким образом ясно, что в динамике электрона, кроме сил электромагнитного поля, должны играть роль еще другие силы. К этому приводит также и всякая попытка построить в рамках классической физики модель электрона: так как одноименные элементы заряда отталкиваются, то такая модель может быть устойчивой только в том случае, если существуют и другие силы, которые уравновешивают силы отталкивания. Эти силы мы будем описывать так, как будто мы имели дело с механическими напряжениями; по отношению к преобразованию Лорентца они должны вести себя так же, как электромагнитные силы, т. е. в движущейся системе они находятся с ними в равновесии так же, как в неподвижной.

Итак, вычислим эти механические напряжения, которые мы будем описывать, как обычно, при помощи трехмерного тензора напряжений  $p_{ik}$ .

Выделим внутри тела прямоугольный параллелепипед с ребрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Со стороны окружающей среды на этот параллелепипед действуют какие-то силы, действие которых эквивалентно действию поверхностных сил, отчасти изображенных на рис. 81. Если, как это принято, растягивающие напряжения считать положительными, то для  $x$ -овой слагающей силы, действующей на параллелепипед, из рис. 81 следует выражение:

$$F_x = bc \left( a \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \right) + ca \left( b \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} \right) + ab \left( c \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right). \quad (66.5)$$

Следовательно, мы имеем плотность силы

$$f_x = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}. \quad (66.5a)$$

Кроме этой силы, на параллелепипед действует при любом заданном  $p_{ik}$  еще вращательный момент  $N$ ,  $z$ -овую слагающую которого также можно найти непосредственно из чертежа:

$$N_z = a(bc p_{yx}) - b(ca p_{xy}) = abc(p_{yx} - p_{xy}). \quad (66.6)$$

В классической теории упругости доказывается, что в случае равновесия этот вращательный момент должен быть равен нулю при любом состоянии напряжения, т. е. тензор напряжения должен быть симметричен:

$$p_{ik} = p_{ki}. \quad (66.7)$$

Для нашего неподвижного тела мы позаимствуем из классической теории упругости условие симметричности тензора  $p_{ik}$ .

Для того, чтобы придать этому тензору напряжения релятивистский характер, будем руководствоваться аналогией с максвелловским тензором напряжений. Слагающие этого тензора определяют плотность силы по формуле

$$f_x^{(s)} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}. \quad (66.8)$$

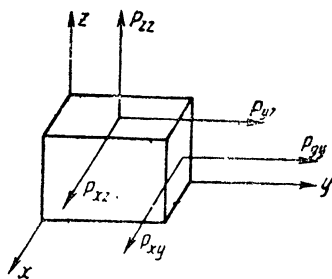


Рис. 81. Схема упругих напряжений.

Эта формула по виду вполне аналогична формуле (66.5a).

В § 57 мы видели, что максвелловские напряжения могут быть объединены с плотностью импульса  $g^{(s)}$ , с вектором Пойнтинга  $S$  и с плотностью энергии электромагнитного поля  $u$  в один четырехмерный тензор  $T_{ik}$ ; четырехмерная расходимость последнего представляет собою плотность силы  $f_i^{(s)}$ ,

соответствующую силе Лорентца. Поэтому мы должны рассматривать и механические напряжения как чисто пространственные слагающие некоторого четырехмерного тензора; эти механические напряжения мы должны, присоединив к ним новые слагающие, дополнить до четырехмерного тензора.

Мы ограничимся здесь такими системами, отдельные части которых неподвижны друг относительно друга, так что в неподвижной системе отсчета все элементы действительно неподвижны. Мы утверждаем, что в этой системе отсчета (значок  $^0$ ) механический тензор равен

$$(\Pi_{ik}^0) = \begin{pmatrix} p_{xx}^0 & p_{xy}^0 & p_{xz}^0 & 0 \\ p_{yx}^0 & p_{yy}^0 & p_{yz}^0 & 0 \\ p_{zx}^0 & p_{zy}^0 & p_{zz}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^0 \end{pmatrix}. \quad (66.9)$$

Его пространственные слагающие равны обычным напряжениям в неподвижной системе. В качестве плотности энергии  $\omega^0$  можно взять например величину  $\mu^0 c^2$ , которая, согласно Эйнштейну, соответствует материальной плотности массы  $\mu^0$ . Далее, так как в системе отсчета, неподвижной по отношению к телу, энергия не переносится, то ясно,

что в этой системе отсчета слагающие потока энергии  $\pi_{41}^0, \pi_{42}^0, \pi_{43}^0$  равны нулю. Остаются еще слагающие  $\Pi_{14}^0, \Pi_{24}^0, \Pi_{34}^0$  плотности импульса  $g$ , которые, как естественно допустить, тоже исчезают, так как результирующий импульс равен нулю. Для соответствующих электромагнитных величин в электронной теории имело место уравнение

$$g^{(e)} = \frac{1}{c^2} S^{(e)}. \quad (66.10)$$

Это уравнение идентично условию симметрии  $T_{\alpha 4} = T_{4\alpha}$ . Планк впервые ввел в теорию относительности гипотезу, что зависимость (66.10) между плотностью импульса и потоком энергии имеет универсальный характер. Это требование эквивалентно тому, что вся вообще механика должна быть построена на симметричном тензоре энергии и импульса. Очевидно, наш механический тензор (66.9), благодаря (66.7), тоже удовлетворяет этому условию. Плотность силы, вычисляемая из этого тензора равна

$$f_i^{(m)} = \sum_k \frac{\partial \Pi_{ik}^{(0)}}{\partial x_k} \quad (66.11)$$

Ее пространственные составляющие совпадают с (66.5а).

Для произвольной системы отсчета механический тензор энергии и импульса, на основании формулы (54.25), вычисляется из (66.9). При этом для плотности импульса и для потока энергии получаются значения, которые не могут быть сведены исключительно к движению плотности массы  $\mu_0$ , а отчасти обусловлены и существованием в теле механических напряжений. Аналогичное поведение электромагнитного тензора в разобранном выше случае движущегося электрона как раз и привело к появлению в импульсе (66.1) интересующего нас множителя  $4/3$ .

Вернемся теперь к нашей модели электрона и опишем ее динамическое поведение тензором  $P_{ik}$ , который равен сумме электромагнитного и механического тензоров энергии и импульса:

$$P_{ik} \equiv T_{ik} + \Pi_{ik}. \quad (66.12)$$

От тензора  $\Pi_{ik}$  мы требуем, чтобы он уравновешивал электромагнитные силы. Это значит, что общая плотность силы, обусловленная тензором  $P_{ik}$ , должна исчезать:

$$\sum_k \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \equiv \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + \sum_k \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = f_i^{(e)} + f_i^{(m)} = 0. \quad (66.13)$$

Из этого уравнения можно вывести для неподвижной системы отсчета важное соотношение:

$$\int P_{ik}^0 dV_0 = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (66.14)$$

Для доказательства заметим, что в неподвижной системе  $P_{14}^0 = P_{24}^0 = P_{34}^0 = 0$ . Поэтому, согласно (66.13),  $\text{div}$  от трехмерного вектора

с слагающими  $P_{11}^0$ ,  $P_{12}^0$ ,  $P_{13}^0$  равен нулю. С помощью теоремы Гаусса легко показать, что объемный интеграл каждой слагающей вектора, расходимость которого равна нулю, также равен нулю, если этот вектор стремится на бесконечности к нулю быстрее, чем  $\frac{1}{r^2}$ .

Теперь можно привести в порядок баланс энергии и импульса электрона. В неподвижной системе отсчета исчезают слагающие  $P_{ik}$ , которые соответствуют плотности импульса, в то время как

$$E_0 = \int P_{44}^0 dV_0 = U_0 + \int \omega_0 dV_0 \quad (66.15)$$

есть полная энергия электрона в состоянии покоя. Для того, чтобы вывести импульс и энергию электрона в случае движения, вернемся к формулам преобразований (66.4) и применим их теперь к тензору  $P_{ik}$ . Так же, как и выше, получим:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \int (P_{44}^0 - P_{11}^0) dV_0, \quad (66.2a)$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \int (P_{44}^0 - \beta^2 P_{11}^0) dV_0. \quad (66.3a)$$

Отличие этих формул от предыдущих заключается в том, что в этих формулах, благодаря равенству (66.14), интеграл от  $P_{11}^0$  исчезает, так что, пользуясь выражением (66.15), мы можем получить для результирующего импульса и полной энергии окончательные формулы:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{E_0}{c^2}, \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (66.16)$$

которые вполне согласуются с теоремой Эйнштейна об эквивалентности энергии и массы.

Обычно считают, что энергия электрона в состоянии покоя имеет чисто электромагнитную природу, т. е., что  $E_0 = U_0$  и, значит,  $\omega^0 = 0$ . Это обстоятельство, конечно, совершенно не меняет результата (66.16). В наших рассуждениях существенным было не введение плотности механической нулевой массы  $\mu^0$ , а введение напряжений, которые уравновешивают электрические силы.

Для появления множителя  $\frac{4}{3}$  в формуле (66.1) решающим является то обстоятельство, что в движущейся среде, в которой существуют какие-либо напряжения, появляется (именно вследствие этих напряжений) добавочный импульс и добавочная плотность энергии. Как легко показать с помощью формул преобразований (54.25), из (66.9) вытекает следующее выражение механического тензора энергии и импульса в коор-

динатной системе, относительно которой все тело движется со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ -ов:

$$(\Pi_{ik}) = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{p_{xx}^0 - \beta^2 \omega^0}{1 - \beta^2} & \frac{p_{xy}^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \frac{p_{xz}^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} & -i\beta \frac{\omega^0 - p_{xx}^0}{1 - \beta^2} \\ \frac{p_{yx}^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} & p_{yy}^0 & p_{yz}^0 & -i\beta \frac{p_{yx}^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \frac{p_{zx}^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} & p_{zy}^0 & p_{zz}^0 & -i\beta \frac{p_{zx}^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ -i\beta \frac{\omega^0 - p_{xx}^0}{1 - \beta^2} & \frac{-i\beta p_{xy}^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \frac{-i\beta p_{xz}^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \frac{\omega^0 - \beta^2 p_{xx}^0}{1 - \beta^2} \end{array} \right\}. \quad (66.9a)$$

Теперь попытаемся на простом примере из механики выяснить появление добавочных членов в плотности энергии и импульса, вызываемое существованием напряжений. Для этой цели рассмотрим неподвижный стержень длины  $l_0$  с поперечным сечением  $q_0$ . Ось этого стержня мы направим по оси  $x$ -ов координатной системы. Пусть на этот стержень с двух сторон в направлении его длины действуют растягивающие силы

$$F_1 = -F_0 \quad \text{и} \quad F_2 = +F_0.$$

Следовательно, в стержне существует напряжение, которое описывается тензорной слагающей

$$p_{xx}^0 = \frac{F_0}{q_0}.$$

Теперь рассмотрим ту же картину напряжений с точки зрения такой системы отсчета, относительно которой стержень движется со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ -ов. Наблюдатель, который движется вместе с этой системой, констатирует в стержне добавочную плотность импульса, что можно наглядно понять следующим образом: пусть  $A$  и  $B$  — концы стержня, которые оба движутся со скоростью  $v$  по положительной оси  $x$ -ов. На конец  $B$  действует сила  $F_2$ , которая тянет его вперед и таким образом отдает ему каждую секунду работу  $F_2 v$ . Такая же работа, но только против силы  $F_1$ , производится в точке  $A$ . Поэтому работа  $F_0 v$  должна каждую секунду передаваться от  $B$  к  $A$ . Это соответствует слагающей  $S_x$  плотности потока энергии  $S$ , причем

$$S_x = -\frac{F_0 v}{q_0} = -v p_{xx}^0.$$

Но, согласно гипотезе Планка, всякому потоку энергии  $S$  соответствует плотность импульса

$$g = \frac{S}{c^2}. \quad (66.17)$$

Поэтому в стержне должна существовать добавочная плотность импульса

$$g_x = -\frac{v}{c^2} p_{xx}^0.$$

Эта величина, с точностью до релятивистских поправок, согласуется с величиной, получающейся из (66.9а), так как  $T_{14} = -icg_x$ .

Эти же значения  $g$  и  $\omega$  мы можем получить и непосредственно, не прибегая к формулам преобразования. Для этого сообразим, какая энергия и какой импульс сообщаются стержню или отнимаются от него во время „включения“ растягивающих сил. Предположим, что стержень в неподвижной системе в момент времени  $t^0 = 0$  был свободен от напряжений. В момент  $t^0 = 0$  включаются растягивающие силы (это достигается, например, тем, что в этот момент к обоим концам стержня прикрепляются натянутые пружины). Разумеется, при включении этих сил стержень остается в покое. При этом мы предполагаем, что стержень является настолько трудно деформируемым, что можно пренебречь упругим расширением (или сжатием). Если рассматривать теперь этот процесс включения сил с точки зрения движущейся системы,

то мы получим совершенно иную картину. На рис. 82 изображены мировые линии концов стержня в новой координатной системе. При этом  $A_0$  и  $B_0$  являются теми мировыми точками, в которых начинают действовать растягивающие силы (эти растягивающие силы и в новой системе равны  $F_0$ , так как проекция силы на направление движения при преобразовании Лорентца не меняется). Как видно из рис. 82, в новой системе обе силы начинают действовать не в один и тот же момент времени: между их включениями проходит конечный промежуток времени

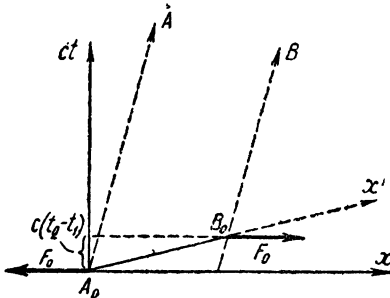


Рис. 82. Мировые линии концов движущегося стержня, на которой в момент времени  $t^0 = 0$  начали действовать растягивающие силы.

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} \frac{l_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (66.18)$$

(это следует из обыкновенных формул преобразования Лорентца), в продолжение которого действует только одна сила — на левый конец стержня. За это время  $t_2 - t_1$  эта односторонняя сила сообщает стержню (или отнимает от него) импульс

$$I_1(t_2 - t_1) = -\frac{F_0 l_0 v}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} = -\frac{v p_{xx}^0 V}{c^2 (1 - \beta^2)}, \quad (66.19)$$

не изменяя при этом его скорости. За это же время над стержнем производится работа

$$F_1 v(t_2 - t_1) = -\frac{F_0 l_0 \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\frac{\beta^2 p_{xx}^0 V}{1 - \beta^2}. \quad (66.20)$$

Работа (66.20) отрицательна, так как точка приложения силы  $A$  перемещается со скоростью  $v$  против направления силы. Поэтому для энергии и импульса стержня до момента  $t_1$  и после момента  $t_2$  получается следующая схема:



	плотность импульса	плотность энергии
до момента $t_1$	$\frac{v\omega_0}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$
после момента $t_2$	$\frac{v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} (\omega_0 - p_{xx}^0)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\omega_0 - \beta^2 p_{xx}^0)$

(66.21)

где  $\omega_0$  есть плотность энергии в неподвижной системе. Мы видим, что значения плотности импульса и энергии, после того как силы окончательно установились, действительно равны значениям (66.9а), выведенным из формул преобразования.

о) *Опыт Траутона и Нобля*. Перейдем теперь к рассмотрению опыта Траутона и Нобля. Как известно, этот опыт заключался в попытке обнаружить абсолютную скорость с помощью легкоподвижного заряженного конденсатора. По классической теории на поступательно движущийся заряженный конденсатор действует момент сил, который должен привести его во вращение. Однако, даже при очень тщательном производстве опыта такого вращения обнаружено не было. С точки зрения классической физики отрицательный результат этого опыта был столь же непонятен, как, например, и отрицательный результат опыта Майкельсона. Но в теории относительности такой результат является очевидным: если конденсатор не вращается с точки зрения неподвижного по отношению к нему наблюдателя, то он не может вращаться и с точки зрения движущегося наблюдателя. Однако, мы не ограничимся здесь этим общим утверждением, а попытаемся понять этот результат с помощью модели.

В качестве упрощенной модели конденсатора Траутона - Нобля рассмотрим два очень небольших заряженных тела, которые удерживаются на постоянном расстоянии  $l_0$  друг от друга при помощи жесткой связи (стержня). Если оба заряженных тела имеют одноименный заряд, то они отталкиваются друг от друга (в неподвижной системе) с силой  $\frac{e^2}{l_0^2}$ ; имея равные по величине, но противоположные по знаку заряды  $e$ , они притягиваются с той же силой. Для большей конкретности мы допустим, что имеет место первый случай — одноименные заряды. Если оба заряда движутся со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ -ов, то силы, действующие между этими зарядами, направлены уже не по прямой, их соединяющей, что мы вывели в § 9 из точных решений уравнений поля; существует момент, который, как мы там видели, в случае притягивающихся зарядов стремится ориентировать стержень перпендикулярно к направлению движения, в случае же отталкивания — ориентировать его по направлению движения.

Здесь мы еще раз выведем этот результат с точки зрения теории относительности, которая, разумеется, должна привести к тем же результатам, что и теория Максвелла, так как последняя удовлетворяет принципу относительности. Мы будем придерживаться рисунка 83, на котором изображены заряженные тела  $A$  и  $B$ , которые удерживаются на постоянном расстоянии  $l_0$  посредством соединяющего их стержня и

отталкиваются друг от друга с силой  $F_0$ , действующей в направлении стержня. Пусть сам стержень составляет с осью  $x$ -ов угол  $\alpha_0$ . Его проекции на оси координат будут:

$$l_x^0 = l_0 \cos \alpha_0, \quad l_y^0 = l_0 \sin \alpha_0. \quad (66.22)$$

На концы стержня действуют силы

$$F_x^0 = \mp F_0 \cos \alpha_0, \quad F_y^0 = \mp F_0 \sin \alpha_0, \quad F_0 = \frac{e^2}{l_0^2}, \quad (66.23)$$

где верхний знак относится к  $A$ , нижний к  $B$ . Пусть теперь вся установка движется со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ -ов. Тогда, вследствие сокращения Лорентца, новые проекции стержня будут:

$$l_x = l_x^0 \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \cos \alpha_0, \quad l_y = l_y^0 = l_0 \sin \alpha_0. \quad (66.22a)$$

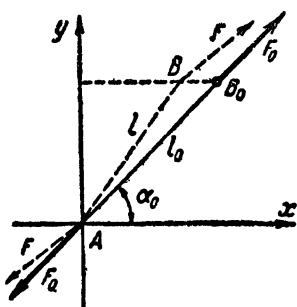


Рис. 83. К опыту Траутона и Нобля.

Закон же преобразования силы дает:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x^0 = \mp F_0 \cos \alpha_0, \\ F_y &= F_y^0 \sqrt{1 - \beta^2} = \\ &= \mp F_0 \sqrt{1 - \beta^2} \sin \alpha_0. \end{aligned} \quad (66.23a)$$

Следовательно, для движущегося по отношению к стержню наблюдателя силы уже не направлены по соединительной прямой; эти силы составляют с осью  $x$ -ов угол меньший, чем угол между осью  $x$ -ов и стержнем. Появляется момент сил, вращающий вокруг оси  $z$ , который определяется формулами

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} \times \mathbf{F}, \quad N_z = l_x F_y - l_y F_x = -F_0 l_0 \beta^2 \cos \alpha_0 \sin \alpha_0. \quad (66.24)$$

Можно убедиться в том, что этот момент сил совпадает с моментом сил, вычисленным в § 9 из выражения векторов поля движущегося заряда.

Итак, с точки зрения классической физики появляется вращающий момент электрических сил, который не компенсируется никаким другим моментом сил, но, тем не менее, как показывает опыт, не изменяет момента количества движения и поэтому не вызывает вращения. С точки зрения же теории относительности дело обстоит так: мы должны здесь включить в наши рассуждения и механические силы, которыми уравниваются электрические. Без этих механических сил система была бы неустойчивой. Но, если их учесть, то сразу же становится понятным отрицательный результат опыта Траутона-Нобля: так как в неподвижной системе электрические и механические силы уравниваются, а при переходе к новой системе эти силы преобразуются одинаковым образом, то они и там будут взаимно уравниваться. Другими словами: вращающий момент, образуемый электрическими силами, уравнивается равным и противоположным ему моментом механических сил. Как раз того именно обстоятельства, что меха-

нические силы тоже обладают в движущейся системе вращающим моментом, классическая механика не умела объяснить.

В связи с этим полезно разобрать следующую задачу. Пусть на стержень действуют извне, как и в только что рассмотренном примере, два растягивающих напряжения, которые в системе неподвижной относительно стержня, направлены по его оси, составляющей угол  $\alpha_0$  с осью  $x$ -ов. Если теперь вся система движется в направлении  $x$  со скоростью  $v$ , то внешние силы вызывают вращающий момент (66.24), который, однако, не может вызвать вращения стержня, так как в неподвижной системе стержень не вращается. Отличие этого примера от предыдущего заключается в том, что мы здесь имеем дело с незамкнутой системой, находящейся под влиянием внешних сил, между тем как конденсатор Траутона-Нобля представляет собой замкнутую систему, в которой внутренние силы взаимно уравниваются.

В классической механике имеет место закон моментов

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (66.25)$$

согласно которому всякий момент сил  $\mathbf{N}$  производит изменение момента количества движения. С точки зрения классической механики, на движущийся растягиваемый стержень никакого момента сил не действует, и поэтому момент количества движения стержня не меняется со временем, так что формула (66.25) для вращательного импульса на самом деле выполняется. Но в релятивистской механике, как мы только что видели, на стержень действует постоянный момент сил. Следовательно, поскольку и в теории относительности существует закон, аналогичный формуле (66.25), мы должны показать, во-первых, что в рассматриваемом случае движущегося стержня существует изменение момента количества движения  $\mathbf{L}$  со временем и, во-вторых, что это изменение соответствует моменту сил (66.24).

Если опять обозначить плотность импульса в стержне буквой  $\mathbf{g}$ , то момент количества движения равен

$$\mathbf{L} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) dV. \quad (66.26)$$

Изменение этой величины со временем легко вычислить: при поступательном движении стержня каждый элемент объема стержня передвигается на расстояние  $\mathbf{v} dt$ , причем импульс, заключенный в нем, не меняется; следовательно,  $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$  определяется формулой

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{g}) dV = \mathbf{v} \times \mathbf{G}. \quad (66.27)$$

В частном случае, когда  $\mathbf{v}$  совпадает с направлением оси  $x$ -ов, мы получаем:

$$\frac{dL_z}{dt} = vG_y. \quad (66.27a)$$

Таким образом,  $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$  будет отличаться от нуля в том случае, если существует слагающая импульса, перпендикулярная к направлению

движения. Так как в классической механике направление импульса всегда совпадает с направлением скорости, то (66.27) всегда дает нуль. Обыкновенное релятивистское выражение импульса  $\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$  тоже ничего сюда не прибавляет. Но теория относительности приводит к изменению момента количества движения со временем, если в стержне существуют напряжения. Если, например, на стержень действуют внешние силы, то в стержне имеет место перенос энергии. А этот перенос энергии, согласно (66.17), связан с импульсом, который не обязательно направлен по движению стержня. В нашем случае мы можем вычислить добавочный импульс таким же образом, как раньше, если представим себе, что растягивающие силы начинают действовать только с некоторого определенного момента, и притом в неподвижной системе, конечно, одновременно. Тогда с точки зрения системы, относительно которой стержень движется, силы начинают действовать не в один и тот же момент, а с промежутком

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} \frac{l_0 \cos \alpha_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (66.28a)$$

В течение этого промежутка действует только одна растягивающая сила (на точку  $A$ ), и поэтому она сообщает стержню импульс  $F_1(t_2 - t_1)$  слагающая  $G_y$  которого, согласно (66.23а), равна:

$$-F_0 \sin \alpha_0 \sqrt{1-\beta^2} \frac{v}{c^2} \frac{l_0 \cos \alpha_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = -F_0 l_0 \frac{v}{c^2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0. \quad (66.28)$$

Таким образом мы нашли изменение момента количества движения со временем:

$$\frac{dL_z}{dt} = -F_0 l_0 \beta^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0. \quad (66.29)$$

Эта величина совпадает с величиной момента сил (66.24), как и должно быть на основании уравнения (66.25). Таким образом, как видно из нашего примера, момент силы (66.24), вычисленный на основании теории относительности, уравновешивается тем, что в стержне из-за наличия потока энергии появляется слагающая импульса, перпендикулярная к скорости.

## Ж. ТЕОРИЯ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 67. Термодинамика излучения. а) *Существование универсальной функции  $u$ , ( $\nu$ ,  $T$ ) (Кирхгоф)*. Если стенку, окружающую какую-нибудь совершенно пустую полость, нагреть до определенной температуры  $T$ , то внутри полости возникает электромагнитное излучение, стационарное состояние которого наступает тогда, когда вещество стенки поглощает в единицу времени столько же энергии, сколько и излучает. Мы характеризуем это излучение плотностью энергии  $u$ , которая, в силу того, что здесь идет речь об электромагнитном излучении, равна

$$u = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2). \quad (67.1)$$

Спектральное распределение энергии этого излучения мы будем характеризовать функцией  $u_\nu$  от  $\nu$ : величина  $u_\nu d\nu$  означает ту часть плотности энергии  $u$ , которая соответствует интервалу частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ . Разумеется, имеет место соотношение:

$$u = \int_0^{\infty} u_\nu d\nu. \quad (67.2)$$

Кирхгоф открыл, что функция  $u_\nu$  при данной температуре вообще не зависит от свойств вещества стенок, окружающих полость. Точнее говоря,  $u_\nu$  определяется одной только температурой и совершенно не зависит от величин, характеризующих вещество стенок.

Доказательство этого положения, данное Кирхгофом, основывается на следующих рассуждениях. Предположим, что даны две полости  $A$  и  $B$ , стенки которых состоят из различных веществ; пусть в этих полостях, приведенных в соприкосновение с тепловым резервуаром температуры  $T$ , устанавливаются для одного и того же определенного участка спектра различные значения  $u_\nu$ . В таком случае мы могли бы использовать это обстоятельство для того, чтобы, не затрачивая работы, создать конечную разность температур между двумя тепловыми резервуарами, которые сначала находились при одной и той же температуре  $T$ . Для этого стоит только поместить полость  $A$  в один резервуар, полость  $B$  — в другой резервуар, и при помощи какого-либо оптического приспособления спроектировать небольшое отверстие, сделанное в  $A$ , на такое же отверстие, сделанное в стенках полости  $B$ . Затем нужно прикрыть оба отверстия цветными стеклами, подобрав эти стекла так, чтобы они пропускали свет только той частоты  $\nu$ , которой соответствуют различные значения  $u_\nu$ . Пусть, например,  $u_\nu$  в полости  $A$  больше чем в полости  $B$ ; тогда  $B$  получает от  $A$  больше энергии, чем излучает само в обратном направлении. Следствием этого явится то, что от  $A$  энергия будет отниматься; значит, температура резервуара, окружающего  $A$ , станет понижаться, а температура резервуара  $B$  увеличиваться — до тех пор, пока оба значения  $u_\nu$  не сделаются равными. Возникшую таким образом разность температур можно было бы использовать с помощью какой-либо тепловой машины для получения механической работы. Следовательно, различие значений  $u_\nu$  для полостей  $A$  и  $B$  дало бы возможность построить *perpetuum mobile* второго рода. Поэтому, согласно второму закону термодинамики, значения  $u_\nu$  для всех частот в обеих полостях должны быть одинаковы. Следовательно, так как  $u_\nu$ , кроме  $\nu$ , зависит еще только от температуры, то должна существовать универсальная функция  $u_\nu(\nu, T)$ , определяющая спектральное распределение энергии равновесного излучения при температуре  $T$ .

Кирхгоф поставил перед физикой задачу нахождения этой универсальной функции. Постепенное решение этой задачи связано с именами Л. Больцмана, В. Вина, М. Планка. Для вывода своего закона Кирхгофу не надо было делать никаких гипотез о физической природе равновесного излучения. Больцман и Вин существенным образом

использовали тот факт, что излучение имеет электромагнитный характер. Окончательное решение этой задачи удалось только Планку, введшему для этого квантовые воззрения.

Для дальнейшего нам понадобятся еще две величины, а именно удельная интенсивность излучения  $K$  и световое давление  $p$ . Удельная интенсивность  $K$  (яркость излучения) определяется следующим образом: рассмотрим ту лучистую энергию, которая за время  $dt$  проходит через элемент поверхности  $dq$  внутри малого телесного угла  $d\Omega$ . Если ось конуса  $d\Omega$  образует с нормалью к элементу поверхности  $dq$  угол  $\vartheta$ , то эта энергия равна

$$K dq \cos \vartheta d\Omega dt. \quad (67.3)$$

Введением множителя  $\cos \vartheta$  мы предположили, что излучение является изотропным в пространстве. Из определения  $K$  вытекает связь  $K$  с плотностью энергии  $u$ . Для того чтобы найти эту связь, рассмотрим очень малый объем  $V$ , находящийся внутри нашей полости, и вычислим энергию, которая должна в нем содержаться, если от стенок исходит излучение (67.3). Пусть пучок  $d\Omega$ , который расходится от элемента поверхности стенки  $dq$ , расположенной на расстоянии  $r$  от  $V$ , вырезывает из объема  $V$  конус с поперечным сечением  $q'$  и с высотой  $l$ . Тогда  $d\Omega = \frac{q'}{r^2}$ . Внутри

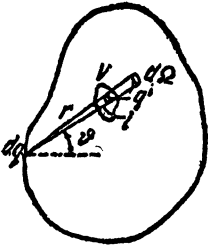


Рис. 84. Вычисление связи между удельной интенсивностью  $K$  и плотностью энергии  $u$ .

объема  $V$  находится часть  $\frac{l}{c}$  излучаемой в секунду в направлении  $d\Omega$  энергии  $K dq \cos \vartheta d\Omega$ .

Эта часть, следовательно, равна  $K dq \cos \vartheta \frac{q'l}{r^2c}$ .

При суммировании по всем пучкам, выходящим из  $dq$  и пересекающим объем  $V$ , получится  $\sum q'l = V$ . Таким образом мы нашли энергию, испускаемую элементом поверхности  $dq$  и находящуюся в объеме  $V$ . Суммирование по всем элементам стенки  $dq$  дает всю содержащуюся в объеме  $V$  энергию:

$$u V = K V \frac{1}{c} \int \frac{dq \cos \vartheta}{r^2}.$$

Но  $\frac{dq \cos \vartheta}{r^2}$  есть телесный угол, под которым из объема  $V$  виден элемент поверхности  $dq$ . Поэтому интеграл дает просто  $4\pi$ , так что

$$u = \frac{4\pi}{c} K. \quad (67.4)$$

При спектральном разложении получится, соответственно этому,

$$u_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} K_\nu d\nu. \quad (67.5)$$

С помощью соотношения (67.4) можно вычислить еще одну практически важную величину, а именно одностороннее излучение  $S$ , испу-

скаемое элементом поверхности стенки внутри телесного угла  $2\pi$ . Так как  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ , то согласно (67.3),

$$S = K \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \pi K. \quad (67.6)$$

Отсюда, на основании (67.4), имеем:

$$S = \frac{c}{4} u. \quad (67.6a)$$

Световое давление  $p$ , существование которого вытекает из электромагнитного характера излучения, как мы уже видели в § 7, равно

$$p = \frac{u}{3}. \quad (67.7)$$

С точки зрения гипотезы световых квантов, выражение (67.7) получается из скорости  $c$ , энергии  $h\nu$  и импульса  $\frac{h\nu}{c}$  отдельного светового кванта, если вычислить импульс, передаваемый при отражении таких квантов от стенки. Доказательство этого мы предлагаем проделать читателю.

*б) Законы Стефана-Больцмана и Вина.* Законы Стефана-Больцмана и Вина являются необходимыми следствиями второго начала термодинамики. Для их вывода воспользуемся тем фактом, что коэффициент полезного действия обратимой тепловой машины равен  $\frac{\delta T}{T}$ , если она работает между двумя тепловыми резервуарами с температурами  $T$  и  $T - \delta T$ . Для вычисления работы используем световое давление  $p$ , о котором мы, на основании соотношения (67.7) и закона Кирхгофа, знаем, что оно является функцией только температуры. Снабдим нашу полость движущимся без трения поршнем и приведем ее в соприкосновение с тепловым резервуаром температуры  $T$ . Если теперь объем, благодаря медленному вытаскиванию поршня, увеличится на величину  $V$ , то световое давление произведет работу  $pV$ . При этом от резервуара отнимется количество тепла  $Q$ , которое состоит из энергетического эквивалента произведенной работы  $pV$  и увеличения количества энергии в полости  $uV$ . Следовательно, в общем  $Q = (p + u) V$ . Теперь удалим нашу полость от теплового резервуара и понизим температуру полости на  $\delta T$  путем адиабатического расширения на  $\delta V$ . При этом мы получим работу  $p\delta V$ . Установим теперь тепловой контакт с резервуаром температуры  $T - \delta T$  и при этой температуре начнем опять вдвигать поршень. При этом световое давление имеет несколько меньшую величину, чем раньше, а именно  $p - \delta p$ , а следовательно, нам для этого придется затратить работу

$$(p - \delta p) (V + \delta V).$$

Таким образом, в результате мы получим внешнюю работу, равную  $V\delta p$ . (Произведение  $\delta p \delta V$  есть величина высшего порядка малости,

и поэтому им мы можем пренебречь). Выигрыш в работе, согласно второму началу, должен быть равен  $Q \frac{\delta T}{T}$ , следовательно,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{p+u}{T}.$$

Если подставить сюда  $p = \frac{u}{3}$  из (67.7), то интегрированием получится закон Стефана-Больцмана:

$$u = \text{const } T^4. \quad (67.8)$$

В основе доказательства закона Вина лежит следующее рассуждение. Представим себе полость (с подвижным поршнем), стенки которой состоят из идеально отражающего вещества. В такой полости может происходить только отражение, но не может происходить поглощения и испускания. Следовательно, в такой полости спектральное распределение любого попавшего туда излучения оставалось бы вечно неизменным. Но если мы поместим туда маленькую угольную пылинку, поглощающую свет, то она будет обмениваться энергией с излучением до тех пор, пока не установится равновесное излучение Кирхгофа  $u, (\nu T)$ , где  $T$  определяется первоначально существовавшей общей энергией излучения и угольной пылинки. Мы можем предположить, что теплоемкость пылинки исчезающе мала по сравнению с теплоемкостью полости, так что общая энергия излучения  $uV$  в этом процессе превращения его в равновесное излучение не изменяется. После того как в нашей полости установится распределение Кирхгофа  $u,$  мы опять удалим пылинку и начнем сжимать находящееся в полости излучение, вдвигая поршень с постоянной и очень небольшой скоростью  $v$ . Этим мы меняем, конечно, спектральное распределение, так как, согласно принципу Допплера, световая волна частоты  $\nu_1$ , падающая на поршень под углом  $\vartheta$ , на основании подробно изложенных в § 58 законов отражения света от движущегося зеркала, отражается от поршня с большей частотой

$$\nu = \nu_1 \left( 1 + \frac{2v}{c} \cos \vartheta \right). \quad (67.9)$$

Второе начало термодинамики требует, чтобы при этом сжатии излучение, заключающееся внутри отражающей полости, все время сохраняло характер равновесного кирхгофского излучения. Для доказательства предположим, что после сжатия нашей полости мы имели бы плотность излучения  $u'(\nu)$ . Тогда мы могли бы сравнить последнюю с плотностью равновесного излучения Кирхгофа  $u, (\nu, T)$ , для которого общая плотность энергии равна той же величине, т. е. для которого

$$\int_0^{\infty} u'(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} u, (\nu, T) d\nu.$$

Если  $u'(\nu)$  не везде равно  $u, (\nu, T)$ , то оно должно содержать по крайней мере одну частоту  $\nu_1$ , для которой  $u'(\nu_1) > u, (\nu_1, T)$  и одну частоту  $\nu_2$ ,



для которой  $u'(\nu_2) < u(\nu_2, T)$ . Пусть  $A$  и  $B$  будут две полости, наполненные равновесным излучением, и пусть каждая из них находится в резервуаре с температурой  $T$ . Тогда мы можем с помощью упомянутого выше оптического приспособления и соответствующих цветных стекол привести нашу рабочую полость в оптический контакт с полостью  $A$  при частоте  $\nu_1$  и с полостью  $B$  при частоте  $\nu_2$ . При этом к полости  $A$  будет подводиться энергия, а от полости  $B$  — отниматься. Соответствующим выбором времени освещения можно добиться того, чтобы общая содержащаяся в рабочей полости энергия не изменялась, а происходил только сдвиг в спектральном распределении. Тогда и давление в рабочей полости не испытает изменения, так что после прекращения оптического контакта опять можно будет при адиабатическом расширении получить ту же работу, которую мы перед этим затратили на сжатие. В конечном счете ничего не произойдет, помимо того, что между резервуарами  $A$  и  $B$  создается разность температур, что, однако, невозможно без затраты работы.

Теперь вычислим, как изменяется во время адиабатического сжатия начальное распределение энергии, т. е. попытаемся сказать что-либо определенное относительно функции  $u, dv$ , которая описывает спектральное распределение в момент времени  $t$ . Для этого рассмотрим определенный спектральный интервал  $dv$ . Энергия  $Vu, dv$ , приходящаяся на этот интервал, вследствие (67.9), за время  $dt$  уменьшается на то количество лучистой энергии интервала  $dv$ , которое за время  $dt$  падает на поршень (при этом мы предполагаем, что разность  $\nu - \nu_1$  в формуле (67.9) велика по сравнению с  $dv$ ). Увеличивается же  $Vu, dv$  на ту лучистую энергию, которая приходится на другие области частот, но падает на поршень так, что после отражения, согласно формуле (67.9), переходит в область от  $\nu$  до  $\nu + dv$ . Первая величина (уменьшение  $Vu, dv$ ) может быть сразу же вычислена на основании (67.6). Если  $Q$  есть поверхность поршня, то эта величина равна

$$Q\pi K, dv dt. \tag{67.10}$$

Чтобы получить вторую часть (увеличение  $Vu, dv$ ), нам надо рассмотреть отдельно различные углы падения  $\vartheta$ . В пределах телесного угла  $d\Omega$  с направлением  $\vartheta$  на поршень падает излучение с частотой в пределах от  $\nu_1$  до  $\nu_1 + dv_1$ , равное

$$QK, \nu_1 \cos \vartheta d\Omega dv_1 dt.$$

После отражения оно принадлежит к интервалу от  $\nu$  до  $\nu + dv$ , если между  $\nu$  и  $\nu_1$  существует соотношение (67.9). Но при отражении от движущегося зеркала энергия увеличится еще в  $(1 + \frac{2v}{c} \cos \vartheta)$  раз. Это следует, проще всего, из закона сохранения энергии, так как движущимся зеркалом производится работа, передаваемая излучению. С помощью теории относительности получается тот же результат, на основании того, что отношение  $\frac{E}{\nu}$  не меняется при переходе к движущейся системе координат. С точки зрения квантовой теории это утверждение означает лишь то, что число световых квантов не может

измениться при отражении. Всего в область  $d\nu$  заново поступает энергия

$$Q \int_{\Omega} K_{\nu_1} \cos \vartheta \, d\Omega \, d\nu_1 \left( 1 + \frac{2\nu}{c} \cos \vartheta \right) dt.$$

Если подставить сюда  $\nu_1$  из формулы (67.9) и, пренебрегая членами порядка  $\frac{v^2}{c^2}$ , написать:

$$K_{\nu_1} = K_{\nu} + \frac{\partial K_{\nu}}{\partial \nu} (\nu_1 - \nu) = K_{\nu} - \frac{\partial K_{\nu}}{\partial \nu} \frac{2\nu v}{c} \cos \vartheta,$$

то после интегрирования по полусфере получим:

$$Q \pi K_{\nu} \, d\nu \, dt - Q \frac{\partial K_{\nu}}{\partial \nu} \frac{2\nu v}{c} \frac{2\pi}{3} \, d\nu \, dt. \quad (67.10a)$$

Разность между (67.10a) и (67.10) дает приращение энергии  $Vu_{\nu} d\nu$  за время  $dt$ . Следовательно,

$$d(Vu_{\nu}) = -\frac{4\pi v}{3} \frac{Q\nu dt}{c} \frac{\partial K_{\nu}}{\partial \nu}.$$

Согласно (67.5),  $\frac{4\pi}{c} K_{\nu} = u_{\nu}$ , и, кроме того,  $Q\nu dt = -dV$ , т. е. равно уменьшению объема, так что наш результат можно переписать в виде:

$$d(Vu_{\nu}) = \frac{v}{3} \frac{\partial u_{\nu}}{\partial \nu} dV.$$

Таким образом мы видим, что  $u_{\nu}$  зависит от времени лишь постольку, поскольку при сжатии объем  $V$  является функцией времени. Поэтому наше уравнение мы можем рассматривать как дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, которому должна удовлетворять функция  $u_{\nu}(\nu, T)$ . Это уравнение имеет вид:

$$V \frac{\partial u_{\nu}}{\partial V} = \frac{v}{3} \frac{\partial u_{\nu}}{\partial \nu} - u_{\nu}. \quad (67.11)$$

Для того чтобы проинтегрировать это уравнение, временно введем независимые переменные

$$x = V \text{ и } y = \nu^3 V.$$

Тогда

$$\frac{\partial u_{\nu}}{\partial V} = \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x} + \nu^3 \frac{\partial u_{\nu}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_{\nu}}{\partial \nu} = 3\nu^2 V \frac{\partial u_{\nu}}{\partial y}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (67.11), мы получим:

$$x \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x} + u_{\nu} = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial x} (xu_{\nu}) = 0.$$

Следовательно,  $xu_{\nu}$  есть функция только от  $y$ . Общий интеграл уравнения (67.11) поэтому гласит:

$$u_{\nu}(\nu, V) = \frac{1}{V} \psi(\nu^3 V),$$

где  $\psi$  есть произвольная функция одной лишь переменной  $v^3 V$ . Вводя другое обозначение вместо  $\psi$ , мы можем также написать:

$$u, (v, V) = v^3 \varphi (v^3 V). \quad (67.12)$$

Из этого уравнения можно вывести заключение относительно вида интересующей нас функции  $u, (v, T)$ . Согласно первому началу термодинамики, мы можем написать для процесса адиабатного сжатия:

$$d(Vu) + p dV = 0.$$

Подставив сюда  $u = aT^k$  и  $p = \frac{a}{3} T^k$ , мы получим:

$$d(VT^k) + \frac{1}{3} T^k dV = 0,$$

или

$$VT^k = \text{const.}$$

Следовательно, уравнение (67.12) дает:

$$u, (v, T) = v^3 f\left(\frac{v}{T}\right). \quad (67.13)$$

Это есть уравнение Вина, которое сводит поставленную Кирхгофом задачу к нахождению функции  $f$  от одной переменной  $\frac{v}{T}$ .

Если обозначить лучистую энергию, приходящуюся на интервал длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$  через  $u_\lambda d\lambda$ , то из уравнения (67.13) получается следующее выражение:

$$u_\lambda (\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} g (\lambda T), \quad (67.13a)$$

так как  $|dv| = \frac{c}{\lambda^2} |d\lambda|$ . Отсюда вытекает в самой общей форме „закон смещения“ Вина, если задаться вопросом о той длине волны  $\lambda_m$ , для которой функция  $u_\lambda (\lambda, T)$  при данной температуре имеет максимум.

Из условия  $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$  для этой длины волны следует уравнение:

$$5g (\lambda_m T) = \lambda_m T g' (\lambda_m T), \quad (67.14)$$

согласно которому произведение  $\lambda_m T$  должно иметь совершенно определенное универсальное численное значение  $w$ , равное корню уравнения  $5g (w) = w g' (w)$ .

Закон Больцмана  $u = aT^k$  и уравнение Вина (67.13) — это два утверждения о равновесном излучении, вытекающие из электромагнитного характера излучения и из общих законов термодинамики. В следующих параграфах мы познакомимся с теми представлениями, которые необходимо сюда привлечь дополнительно для того, чтобы окончательно теоретически вычислить функцию  $u, (v, T)$ .

§ 68. Формула Рэля-Джинса. Согласно закону Кирхгофа, функция

$$u, = u, (v, T)$$

совершенно не зависит ни от физических свойств стенок полости, ни от тел, находящихся внутри полости. Поэтому в нашей власти выбрать любой материал стенок и вносить в полость любые тела; мы воспользуемся этим для того, чтобы сделать возможно более простым и наглядным рассмотрение энергетического взаимодействия между произвольным телом и полем лучистой энергии. В качестве такого тела, вносимого в нашу полость, мы выберем, по примеру Макса Планка, линейный осциллятор, например тот, который был нами подробно изучен в § 12, т. е. тело с зарядом  $e$  и массой  $m$ , которое может совершать упругие колебания в направлении оси  $x$ -ов около положения равновесия. Пусть этот осциллятор находится внутри полости с идеально отражающими стенками. Кроме того, для того чтобы задать температуру всей этой системы, впустим еще в полость электрически нейтральный идеальный газ с температурой  $T$ , который не обменивается энергией непосредственно с излучением, но благодаря столкновениям молекул газа с осциллятором поддерживает среднюю энергию осциллятора на уровне  $\overline{E(T)}$ , который соответствует температуре  $T$ . Согласно известному из классической статистической механики закону равномерного распределения энергии, средняя энергия осциллятора равна

$$\overline{E(T)} = kT. \quad (68.1)$$

Зная энергию  $\overline{E(T)}$ , мы можем вычислить плотность лучистой энергии в полости, находящейся в равновесии с осциллятором. Если, например, в полости сначала не было вообще никакого излучения, то осциллятор будет излучать энергию в полость, окруженную отражающими стенками, и таким образом постепенно наполнит эту полость излучением. С другой стороны, как только в полости появится излучение, осциллятор начнет функционировать и как приемник, т. е. будет поглощать энергию. Только при определенной плотности энергии  $u_\nu$  излучение в полости может притти в равновесие с осциллятором, обладающим данной энергией колебания.

Вычислим теперь эту энергию колебания. Для этого мы имеем условие, что энергия, поглощаемая осциллятором, равна излучаемой энергии. Мы давно уже вычислили обе эти величины. Из уравнения (24.6) видно, что в поле лучистой энергии с плотностью  $u_\nu$  осциллятор с собственной частотой  $\nu$ , с зарядом  $e$  и массой  $m$  за время  $dt$  поглощает энергию

$$\frac{\pi e^2}{3m} u_\nu dt.$$

С другой стороны, если он сам обладает энергией  $E$ , то, согласно (13.6), за время  $dt$  он излучает энергию

$$E \frac{2e^2 (2\pi\nu)^2}{3mc^3} dt.$$

Эти две величины в среднем во времени равны друг другу, если

$$u_\nu = \overline{E} \frac{8\pi\nu^2}{c^3}. \quad (68.2)$$

Эта зависимость между энергией осциллятора  $E$  и плотностью лучистой энергии в полости  $u$ , имеет столь большое значение, что мы выведем ее еще раз, причем мы будем исходить непосредственно из уравнения движения осциллятора. Такой способ имеет то преимущество, что нам не надо будет рассматривать излучение и поглощение, как независимые друг от друга явления.

Если  $E_x$  есть  $x$ -овая слагающая электрической напряженности равновесного излучения в точке нахождения осциллятора, то, согласно § 13, уравнение его движения гласит:

$$m(\ddot{x} + \omega_0^2 x) - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{x} = eE_x. \quad (68.3)$$

Из этого уравнения при заданной зависимости  $E_x$  от времени мы можем вычислить амплитуду  $x$  осциллятора как функцию времени. Самое поле есть, конечно, очень сложная функция от времени. Но на основании теоремы Фурье, мы всегда можем для конечного, хотя бы и очень большого промежутка времени  $\vartheta$ , представить его в виде ряда

$$E_x = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in \alpha t}. \quad (68.4)$$

При этом  $\alpha$  есть очень малая частота, равная  $\frac{2\pi}{\vartheta}$ . Далее,  $a_n$  есть амплитуда отдельного колебания с частотой

$$\omega_n = n\alpha.$$

В качестве условия вещественности мы требуем соблюдения равенства

$$a_{-n} = a_n^*. \quad (68.5)$$

Числа  $a_n$  могут зависеть от значка  $n$  сколь угодно нерегулярно, так что, например,  $a_n$  и  $a_{n+1}$  могут весьма сильно отличаться друг от друга. Несмотря на это, мы можем говорить о среднем поле  $E_x$  в области амплитуды  $a_n$ , определяя среднее значение квадрата амплитуды как

$$|\overline{a_n}|^2 = \frac{1}{2s+1} \sum_{z=-s}^{+s} |a_{n+z}|^2. \quad (68.6)$$

При соответствующем выборе числа  $s$ , которое должно быть мало по сравнению с  $n$ , эта величина дает среднюю напряженность  $E_x$  в области частоты  $\omega_n$ .

Из формулы (68.4), разумеется, вытекает и спектральное распределение энергии равновесного излучения, так как общая плотность энергии  $u$  задана формулой (67.1). Так как в изотропном излучении все шесть слагающих в формуле (67.1) в среднем равны, то, следовательно,

$$u = \frac{3}{4\pi} \overline{E_x^2}.$$

Но, согласно (68.4) и (68.5), мы имеем:

$$E_x^2 = \frac{1}{4} \sum_{n, n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{n, n'=-\infty}^{+\infty} a_n a_{-n'} e^{i(n-n') \alpha t}.$$

При усреднении по времени отпадают все слагаемые, у которых  $n \neq n'$ . Таким образом с помощью соотношения (68.5) получается:

$$\overline{E_x^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

и, следовательно,

$$u = \frac{3}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Для того, чтобы найти отсюда энергию  $u_\nu d\nu$ , приходящуюся на интервал частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , найдем число отдельных колебаний в этом интервале. Частоте  $\nu$  соответствует целое число  $n$ , которое определяется из формулы  $2\pi\nu = n\alpha$  или  $n = \frac{2\pi}{\alpha} \nu$ . Следовательно, на интервал  $d\nu$  приходится  $\frac{2\pi}{\alpha} d\nu$  отдельных колебаний, так что мы получаем:

$$u_\nu d\nu = \frac{3}{8\pi} |a_n|^2 \frac{2\pi}{\alpha} d\nu$$

или

$$u_\nu = \frac{3}{4\alpha} |a_n|^2, \quad n = \frac{2\pi}{\alpha} \nu. \quad (68.7)$$

Интегрирование уравнения (68.3), куда подставлено значение (68.4) для  $E_x$ , можно выполнить по известному способу, разложив искомую функцию  $x(t)$  в ряд Фурье:

$$x = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{in\alpha t}. \quad (68.8)$$

Если тогда подставить выражения (68.4) и (68.8) в уравнение (68.3), то для амплитуды  $\xi_n$  получится соотношение:

$$\xi_n \left( -(n\alpha)^2 + \omega_0^2 + i \frac{2}{3} \frac{e^2(n\alpha)^3}{mc^3} \right) = \frac{e}{m} a_n.$$

Отсюда

$$|\xi_n|^2 = \frac{\frac{e^2}{m^2} |a_n|^2}{\left\{ (n\alpha)^2 - \omega_0^2 \right\}^2 + \left\{ \frac{2}{3} \frac{e^2(n\alpha)^3}{mc^3} \right\}^2}. \quad (68.9)$$

В особенности нас интересует энергия осциллятора  $E$ . Эта энергия равна удвоенной средней кинетической энергии, следовательно,

$$\bar{E} = m\bar{x}^2 = \frac{m}{4} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} in \alpha \xi_n e^{in\alpha t} \right\}^2.$$

Аналогично тому, что имело место выше при вычислении  $E_x^2$ , при усреднении во времени мы получим:

$$\bar{E} = \frac{m}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n\alpha)^2 |\xi_n|^2.$$

Сюда нужно подставить, вместо  $|\xi_n|^2$ , его значение из формулы (68.9). Заменим суммирование интегрированием по  $\omega = n\alpha$ . На интервал  $d\omega$  приходится  $d\omega = \frac{d\omega}{\alpha}$  отдельных колебаний, так что мы получаем:

$$\bar{E} = \frac{m}{2} \frac{e^2}{m^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{\left\{ \omega^2 - \omega_0^2 \right\}^2 + \left\{ \frac{2e^2\omega^3}{3mc^3} \right\}^2} \frac{|a_n|^2}{\alpha} d\omega.$$

Заметим, что подынтегральное выражение имеет около точки  $\omega = \omega_0$  весьма резкий максимум; поэтому мы можем в подынтегральном выражении везде, за исключением разности  $\omega - \omega_0$ , заменить  $\omega$  на  $\omega_0$  и, кроме того, распространить интегрирование на весь промежуток от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Далее, введем в качестве переменной интегрирования разность  $\omega - \omega_0 = \mu$  и заменим  $(\omega^2 - \omega_0^2)^2$  на  $4\omega_0^2\mu^2$ . Кроме того, заменим  $|a_n|^2$  средней величиной  $|\overline{a_n}|^2$ , вычисленной по формуле (68.6) для точки  $n\lambda = \omega_0$ . Тогда получим:

$$\overline{E} = \frac{e^2}{2m} \frac{|\overline{a_n}|^2}{\alpha} \omega_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{4\omega_0^2\mu^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^3}{mc^3}\right)^2}. \quad (68.10)$$

Оставшийся здесь невычисленным интеграл при соответствующем выборе независимых переменных может быть сведен к известному интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = \pi$$

и дает в результате  $\frac{3mc^3\pi}{4e^2m_0^4}$ . Наконец, если мы заменим еще  $\frac{|\overline{a_n}|^2}{\alpha}$  по формуле (68.7) на  $\frac{4}{3} u_\nu$ , то из выражения (68.10) получится следующее выражение для средней энергии осциллятора:

$$\overline{E} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} u_\nu.$$

Наоборот, если нам задана энергия осциллятора, — как в первоначальной постановке вопроса — то мы найдем по формуле (68.2) ту плотность энергии равновесного излучения, при которой оно находится в равновесии с осциллятором.

Если в выражение (68.2) подставить значение энергии осциллятора, то получится формула излучения Рэля-Джинса:

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT. \quad (68.11)$$

Однако, эта формула совершенно непригодна, так как она резко противоречит самым простым опытным фактам. Согласно этой формуле, плотность энергии с возрастающим  $\nu$ , т. е. с приближением к ультрафиолетовому краю спектра, должна безгранично возрастать,

так что полная плотность энергии  $\int_0^\infty u_\nu d\nu$  при любой температуре должна быть бесконечно большой. Формула (68.11) ничего не говорит также и относительно наблюдаемого на опыте максимума плотности энергии в области спектра, зависящей только от  $T$ .

Тот факт, что классическая физика оказалась совершенно неспособной решить проблему равновесного излучения, явился исходным пунктом для построения всей новейшей физики. Фундаментальное значение явно бессмысленной формулы (68.11) состоит в том, что она впервые доказала недостаточность представлений классической физики, которые до этого считались безусловно правильными. Исследование вопроса

о том, какие из предпосылок, приводящих к формуле (68.11), должны быть отброшены, для того чтобы дать возможность прийти к согласной с опытом формуле излучения, характеризуют первую стадию развития квантовой теории. В следующем параграфе мы рассмотрим те предпосылки, из которых Планк вывел названную его именем формулу излучения. После этого мы приведем еще более последовательный в теоретическом отношении вывод этой же формулы, данный Эйнштейном.

Можно написать уравнение (68.2), описывающее равновесие между осциллятором и равновесным излучением, в весьма простой и теоретически важной форме, если привести его в связь с понятием стоячих волн в замкнутой полости. Для упрощения вычислений рассмотрим полость кубической формы с длиной ребра  $a$ , окруженную абсолютно проводящими стенками. Пусть в этой полости имеется стоячая электромагнитная волна частоты  $\nu$ . Условия на поверхности абсолютного проводника таковы, что тангенциальная слагающая  $E$  и нормальная слагающая  $H$  должны на поверхности равняться нулю. Этим требованиям удовлетворяют следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= e_x \cos \frac{\pi n_1 x}{a} \sin \frac{\pi n_2 y}{a} \sin \frac{\pi n_3 z}{a} \sin 2\pi \nu t, \\ E_y &= e_y \sin \frac{\pi n_1 x}{a} \cos \frac{\pi n_2 y}{a} \sin \frac{\pi n_3 z}{a} \sin 2\pi \nu t, \\ E_z &= e_z \sin \frac{\pi n_1 x}{a} \sin \frac{\pi n_2 y}{a} \cos \frac{\pi n_3 z}{a} \sin 2\pi \nu t, \\ H_x &= h_x \sin \frac{\pi n_1 x}{a} \cos \frac{\pi n_2 y}{a} \cos \frac{\pi n_3 z}{a} \cos 2\pi \nu t, \\ H_y &= h_y \cos \frac{\pi n_1 x}{a} \sin \frac{\pi n_2 y}{a} \cos \frac{\pi n_3 z}{a} \cos 2\pi \nu t, \\ H_z &= h_z \cos \frac{\pi n_1 x}{a} \cos \frac{\pi n_2 y}{a} \sin \frac{\pi n_3 z}{a} \cos 2\pi \nu t, \end{aligned} \right\} \quad (68.12)$$

где  $n_1, n_2, n_3$  — любые целые числа. Нужно определить три вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{e} & (e_x, e_y, e_z), \\ \mathbf{h} & (h_x, h_y, h_z), \\ \mathbf{k} & \left( \frac{n_1}{2a}, \frac{n_2}{2a}, \frac{n_3}{2a} \right) \end{aligned}$$

таким образом, чтобы совокупность формул (68.12) действительно являлась решением уравнений Максвелла. Из уравнений  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  следует, что

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{h} = 0, \quad (68.13a)$$

а из уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}}$$

получается:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e} = \mathbf{h} \frac{\nu}{c} \quad \text{и} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{h} = -\mathbf{e} \frac{\nu}{c}. \quad (68.13b)$$

Все четыре уравнения удовлетворяются, если  $|\mathbf{k}| = \frac{\nu}{c}$ , т. е. обратному значению длины волны, и если  $|\mathbf{h}| = |\mathbf{e}|$  и все три вектора  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  взаимно перпендикулярны. Таким образом, при заданных  $n_1, n_2, n_3$ , т. е. при заданном  $\mathbf{k}$ , мы



можем еще на плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{k}$ , произвольно выбрать вектор  $\mathbf{e}$ . Этим однозначно определяется вектор  $\mathbf{h}$ . Таким образом самое общее решение типа (68.12) мы получим в виде линейной комбинации из двух векторов  $\mathbf{e}$ , произвольно выбранных в этой плоскости.

В особенности нас интересует число  $Z(\nu) d\nu$  возможных собственных колебаний вида (68.12). Для этого напишем условие  $|\mathbf{k}| = \frac{\nu}{c}$ , найденное для волнового вектора  $\mathbf{k}$ , в следующем виде:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left(\frac{2a\nu}{c}\right)^2. \quad (68.14)$$

Каждая тройка положительных чисел  $n_1, n_2, n_3$ , удовлетворяющих условию (68.14), дает две стоячих волны в нашей полости. Каждой такой тройке целых чисел соответствует в пространстве „узел решетки“, т. е. точка с целочисленными координатами  $n_1, n_2, n_3$ . Отсюда мы видим, что все тройки целых чисел, для которых  $\nu$  меньше, чем некоторая определенная граница  $\nu_0$ , соответствуют, согласно формуле (68.14), всем узлам решетки внутри шара радиуса  $r = \frac{2a\nu_0}{c}$ , находящимся в положительном октанте. Следовательно, число узлов решетки, соответствующее области колебаний между частотами  $\nu$  и  $\nu + d\nu$ , равно

$$\frac{1}{8} 4\pi r^2 dr = \frac{\pi}{2} \frac{8a^3 \nu^2}{c^3} d\nu.$$

Так как каждой узловой точке соответствуют два колебания, то, следовательно, мы имеем:

$$Z(\nu) d\nu = \frac{8\pi a^3 \nu^2}{c^3} d\nu.$$

Если мы обозначим теперь через  $\bar{U}_\nu$  среднюю энергию отдельного собственного колебания с частотой  $\nu$ , то общая энергия излучения в полости, приходящаяся на интервал частот  $(\nu, \nu + d\nu)$ , будет равна

$$\bar{U}_\nu \frac{8\pi a^3 \nu^2}{c^3} d\nu.$$

Эта же энергия, выраженная через плотность лучистой энергии, равна

$$a^3 u_\nu d\nu.$$

Следовательно, имеет место равенство:

$$\bar{U}_\nu = u_\nu \frac{c^3}{8\pi \nu^2}.$$

Таким образом, наше уравнение (68.2) получает неожиданно простой вид:

$$\bar{E} = \bar{U}_\nu \quad (68.15)$$

Средняя энергия осциллятора численно равна средней энергии отдельного собственного колебания замкнутой полости, частота которого находится вблизи точки резонанса.

**§ 69. Формула Планка.** Вывод формулы излучения (68.11) пойдёт на двух столбах — на классической формуле

$$\bar{E} = kT \quad (69.1)$$

для средней энергии осциллятора при температуре  $T$  и, кроме того, на классической электродинамике, связывающей плотность равновесного излучения  $u_\nu$  с энергией осциллятора  $\bar{E}$ :

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E}. \quad (69.2)$$

Эти два утверждения, вместе взятые, приводят к бессмысленному результату (68.11). Поэтому надо отказаться по крайней мере от одного из них. Планк поступил так: он сохранил уравнение (69.2), но постарался заменить уравнение (69.1) другим уравнением. Метод, к которому прибег Планк, можно изложить очень кратко, если вспомнить вывод уравнения (69.1) в статистической механике. Энергия линейного осциллятора равна

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + (2\pi\nu)^2 x^2)$$

или же

$$E(p_x, x) = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{m}{2} (2\pi\nu)^2 x^2.$$

Согласно Больцману, вероятность того, что при температуре  $T$  импульс и координаты находятся в интервалах от  $p_x$  до  $p_x + dp_x$  и от  $x$  до  $x + dx$ , равна

$$dW = \text{const.} e^{-\frac{E(p_x, x)}{kT}} dp_x dx.$$

Отсюда далее следует вероятность  $W(E) dE$  того, что энергия находится в интервале от  $E$  до  $E + dE$ :

$$W(E) dE = \text{const.} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

Такая зависимость функции  $W(E)$  от  $E$  представлена на рис. 85. Вычисление средней энергии  $\bar{E}$  по формуле

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E e^{-\frac{E}{kT}} dE}{\int_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}} dE}$$

мы произведем следующим образом: заменим интеграл суммой, причем разделим ось энергий на равные отрезки (величина отрезка равна  $\epsilon$ ) и будем суммировать по отдельным отрезкам. В пределе при  $\epsilon \rightarrow 0$  должно, конечно, получиться  $\bar{E} = kT$ . В этом вычислении есть еще некоторый произвол, так как внутри каждого отрезка мы можем выбирать значение  $E$  произвольно. Предположим, что для энергии  $E$  внутри интервала от  $n\epsilon$  до  $(n+1)\epsilon$  следует выбрать значение  $(n+\alpha)\epsilon$ , где  $\alpha$

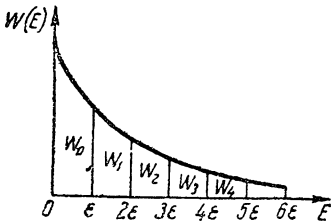


Рис. 85. Вероятность различных значений энергии в случае непрерывного и дискретного энергетического спектра.

есть какое-то число между нулем и единицей. Тогда, для  $\bar{E}$  мы получим:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) \epsilon e^{-\frac{(n+\alpha)\epsilon}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(n+\alpha)\epsilon}{kT}}}.$$

В числителе и знаменателе этого выражения можно вынести за знак суммы множитель  $e^{-\frac{\alpha\epsilon}{kT}}$ , что дает:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \epsilon e^{-\frac{n\epsilon}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\epsilon}{kT}}} + \alpha\epsilon.$$

При подстановке  $e^{-\frac{\epsilon}{kT}} = z$  первое слагаемое превращается в

$$\epsilon z \frac{1 + 2z + 3z^2 + \dots}{1 + z + z^2 + \dots} = \epsilon z \frac{d}{dz} \lg(1 + z + z^2 + \dots),$$

т. е. равно  $\frac{\epsilon z}{1 - z}$ . Итак, мы получаем:

$$\bar{E} = \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1} + \alpha\epsilon. \tag{69.3}$$

При  $\epsilon \rightarrow 0$  отсюда, как и должно быть, получается  $\bar{E} = kT$ .

Планк получил свою формулу излучения не переходя к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ , а непосредственно подставляя выражение (69.3), в котором он приравнял  $\alpha$  нулю, в формулу электродинамики (69.2). Относительно выбора величины  $\epsilon$  очень важное указание дает формула Вина (67.13), согласно которой функция  $u_\nu$  должна иметь вид:

$$u_\nu = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

Но это может иметь место только при условии, что количество энергии  $\epsilon$  пропорционально частоте  $\nu$ , т. е. при условии

$$\epsilon = h\nu.$$

Коэффициент пропорциональности — планковская постоянная  $h$  — должен быть универсальной константой, так как формула излучения не должна зависеть от специфических свойств осциллятора. Итак, если положить число  $\alpha$  равным нулю, то мы можем заменить классическую формулу (69.1) формулой

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{69.4}$$

Тогда для  $u_\nu$  получается формула Планка:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (69.5)$$

которая, по весьма тщательным измерениям Пашена и в особенности Рубенса, полностью согласуется с опытом.

Мы не будем входить в дальнейшие подробности по поводу формулы (69.4), которая играет большую роль также в теории удельной теплоемкости твердых тел. Но за то мы обсудим подробнее содержание формулы (69.5) и свяжем ее с некоторыми уже известными законами равновесного излучения—прежде всего с законом смещения Вина и законом Стефана-Больцмана.

**Закон смещения Вина.** Если спектральное разложение задано не в шкале частот, а в шкале длин волн, то из формулы (69.5) получаем:

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \quad (69.6)$$

Определим, для какой длины волны  $\lambda_m$  функция  $u_\lambda$  при заданной температуре  $T$  будет иметь максимум. Условие  $\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} = 0$  дает:

$$5(1 - e^{-y}) = y,$$

где для сокращения мы ввели обозначение  $y = \frac{hc}{\lambda_m kT}$ . Корень этого уравнения, которое не может быть решено в корнях, очевидно близок к 5. Если мы напишем поэтому  $y = 5 - \eta$ , то для  $\eta$  получится соотношение:

$$5e^{-5} e^\eta = \eta.$$

Так как  $\eta$ —малая величина, то можно заменить  $e^\eta$  на  $1 + \eta$ ; тогда получится приближенно:

$$\eta = \frac{1}{\frac{1}{5} e^5 - 1} = 0,035.$$

Итак, для постоянной в законе смещения Вина получается:

$$\lambda_m T = \frac{hc}{ky} = \frac{h}{k} \frac{c}{4,965}. \quad (69.7)$$

Таким образом одновременное измерение  $\lambda_m$  и  $T$  для черного тела дает нам отношение двух универсальных постоянных  $\frac{h}{k}$ —постоянных Планка и Больцмана. Уже тот факт, что максимум интенсивности солнечного излучения ( $T \approx 6000^\circ$ ) находится в зеленой части спектра, т. е. примерно при  $\lambda \approx 0,5 \cdot 10^{-4}$  см, дает нам приближенное значение отношения  $\frac{h}{k}$ .

Закон излучения Стефана-Больцмана. Общая энергия равновесного излучения  $u$ , содержащаяся в 1 см<sup>3</sup>, может быть вычислена, если проинтегрировать выражение (69.5):

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{v^3 dv}{e^{\frac{hv}{kT}} - 1}.$$

Введя новую переменную интегрирования  $x = \frac{hv}{kT}$ , мы получаем:

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Подынтегральное выражение может быть разложено в ряд по возрастающим степеням  $e^{-x}$ ; интегрируя почленно, мы получаем:

$$\frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x^3 (e^{-x} + e^{-2x} \dots), \quad \int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx = \frac{6}{n^4},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 6 \left[ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right].$$

Сумма ряда в квадратных скобках равна  $\frac{\pi^4}{90}$ , так что в результате мы имеем:

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\pi^4}{15} \left(\frac{kT}{h}\right)^4. \tag{69.8}$$

Этим мы определили также точное значение коэффициента в законе Стефана-Больцмана  $u = \text{const } T^4$ . Обычно измеряют не плотность энергии  $u$  непосредственно, а энергию  $S$ , излучаемую в секунду единицей поверхности черного тела в одну сторону (т. е. внутри телесного угла  $2\pi$ ). Согласно формуле (67.6а), эта величина связана с  $u$  соотношением

$$S = \frac{c}{4} u,$$

так что для лучистой энергии, испускаемой одним см<sup>2</sup> поверхности черного тела, мы получаем:

$$S = \sigma T^4, \text{ где } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}. \tag{69.9}$$

Следовательно, измерение  $S$  при определенной температуре  $T$  дает нам отношение  $\frac{k^4}{h^3}$ , так что всего из двух измерений (закон смещения Вина и закон Стефана-Больцмана) можно получить численные значения универсальных постоянных  $h$  и  $k$ .

Из лучших данных получаются значения:

$$h = 6,610 \cdot 10^{-27} \text{ эрг. сек.}$$

$$k = 1,378 \cdot 10^{-16} \text{ эрг. град.}^{-1}$$

Постоянная Больцмана  $k$  позволяет вычислить также число Авогадро  $N$  и элементарный заряд  $e$ :

$$N = \frac{R}{k} = \frac{8,31 \cdot 10^7}{k} = 6,031 \cdot 10^{23};$$

$$e = \frac{F}{N} = \frac{96\,500}{N} = 4,796 \cdot 10^{-10} \text{ эл.-стат. CGS-единиц.}$$

Этот метод Планка для определения элементарного заряда на основе измерений радиации заслуживает особого внимания. В то время (1900 г.), когда Планк ввел этот метод, он являлся самым точным. И только значительно позднее точность этого метода была превзойдена измерениями Милликэна, описанными в § 1. См., однако, стр. 12.

Формулу Планка (69.5) можно написать в более простой форме, если отношение  $\frac{h\nu}{kT}$  или велико, или мало по сравнению с единицей. В этих двух предельных случаях получается:

при  $h\nu \gg kT$  или  $\lambda T \ll 1,46 \text{ см} \cdot \text{град.}$

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}}; \quad (69.10)$$

при  $h\nu \ll kT$  или  $\lambda T \gg 1,46 \text{ см} \cdot \text{град.}$

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT. \quad (69.11)$$

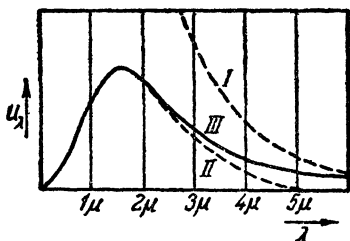


Рис. 86. Законы излучения Рэлей-Джинса (I), В. Вина (II) и М. Планка (III) при  $T = 2000^\circ\text{К.}$

В видимой области спектра и при экспериментально доступных температурах очень хорошо выполняется условие  $\lambda T \ll 1,46$ , приводящее к формуле (69.10). Фактически уже до открытия Планка формула излучения (69.10) была найдена Вином, правда с неопределенным коэффициентом пропорциональности. Эта формула, названная формулой Вина, еще и до сих пор служит основой всех численных выкладок, относящихся к излучению накаливаемых тел в видимой части спектра. Другая предельная формула, вытекающая из формулы Планка, — формула (69.11) — совпадает с законом излучения Рэлей-Джинса. Этого и следовало ожидать, потому что формулу Рэлей-Джинса можно получить также из формулы Планка при  $h \rightarrow 0$ . Но этот переход к пределу означает, что количество энергии  $\epsilon$  в формуле (69.3) становится бесконечно малым; тем самым мы попадаем в область применимости классической формулы  $\bar{E} = kT$ .

Таким образом появление в свое время формулы Планка означало объединение экспериментально проверенного уравнения (69.10) с вытекающим из классической теории, но непригодным уравнением (69.11).

§ 70. Вывод формулы Планка по Эйнштейну. Данный здесь в кратком виде вывод формулы Планка (69.5), несмотря на большой практический успех последней, является в теоретическом отношении весьма неудовлетворительным. Введение конечных количеств энергии  $\epsilon = h\nu$  можно понимать только в том смысле, что осциллятор может при-

нимать только дискретные значения энергии  $0, \epsilon, 2\epsilon, \dots$  и т. д. С другой стороны, мы оставили в силе уравнение (69.2), вывод которого основан на предположении, что между излучением и осциллятором происходит непрерывный обмен энергией. Очевидно, дискретные значения энергии осциллятора возможны только тогда, когда его взаимодействие с излучением состоит в обмене исключительно конечными порциями (квантами) энергии, равными  $h\nu$ . Дальнейшее развитие этой идеи привело Эйнштейна к созданию гипотезы о том, что в каждом акте взаимодействия с материей излучение ведет себя так, как будто бы вся его энергия состояла из целых световых квантов с энергией  $h\nu$ . Первые крупные успехи этой гипотезы состояли в знаменитом эйнштейновском толковании фотоэффекта и в объяснении коротковолновой границы непрерывного рентгеновского спектра. И то и другое объяснение основано на знаменитом уравнении

$$\frac{m}{2}v^2 + P \rightleftharpoons h\nu,$$

смысл которого, мы полагаем, читателю известен. Отсюда совершенно последовательно возникла теория атома Бора (1912 г.), которая следующим образом объясняет взаимодействие между излучением и атомами.

Для каждого атома существует дискретный ряд состояний, которым соответствуют вполне определенные значения энергии  $\epsilon_1, \epsilon_2$  и т. д. Эти „стационарные“ состояния являются единственными вообще существующими в природе. Единственно возможный способ обмена энергией с излучением заключается в том, что атом каким-то способом, неподдающимся подробному описанию, переходит из одного состояния ( $\epsilon_k$ ) в другое ( $\epsilon_i$ ), причем разность энергий  $\epsilon_k - \epsilon_i$  испускается или поглощается (смотря по тому, больше  $\epsilon_k$ , чем  $\epsilon_i$  или меньше) в виде светового кванта, который равен  $h\nu = |\epsilon_k - \epsilon_i|$ . Дальнейшее углубление этого представления, в частности вычисление значений энергии  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ , является одной из главных задач современной физики, но здесь мы не будем этим заниматься.

Мы ограничимся здесь рассмотрением следующего вопроса. Пусть дана такая же полость, как и раньше, но пусть теперь она содержит большое количество одинаковых атомов, находящихся в равновесии при определенной температуре  $T$ . В среднем  $N_1$  атомов обладают энергией  $\epsilon_1$  каждый,  $N_2$  атомов — энергией  $\epsilon_2$  и т. д., где числа  $N_1, N_2$  определяются на основании закона Больцмана. Если мы ограничимся рассмотрением только двух состояний 1 и 2 и происходящих между ними переходов, то обмен энергией с окружающим излучением может заключаться исключительно в том, что атомы, находившиеся в состоянии 1, поглощая световой квант, будут переходить в состояние 2, и, наоборот, атомы сорта 2, испуская такой же квант, будут переходить в состояние 1. Вместо классического вычисления взаимодействия между осциллятором и равновесным излучением, мы должны здесь определить, сколько таких процессов испускания и поглощения происходит за время  $dt$  при заданных числах  $N_1$  и  $N_2$  и при заданной плотности энергии равновесного излу-

чения. Тогда равновесие между излучением и атомами будет определяться тем, что оба процесса будут происходить одинаково часто.

Для выполнения этого плана укажем прежде всего отношение  $N_2:N_1$ , соответствующее температуре  $T$ . Статистическая механика дает следующее значение этого отношения:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2 e^{-\frac{\epsilon_2}{kT}}}{g_1 e^{-\frac{\epsilon_1}{kT}}}. \quad (70.1)$$

В этом равенстве числа  $g_1$  и  $g_2$  означают „статистические веса“ двух состояний. Они указывают, на сколько термов расщепилось бы рассматриваемое состояние при полном снятии вырождения (например, с помощью внешнего магнитного поля) или, выражаясь более строгим языком квантовой механики, — сколько линейно независимых „собственных состояний“ принадлежат рассматриваемому значению энергии.

Впрочем, можно вывести уравнение (70.1) в виде  $\frac{N_2}{N_1} = Ke^{-\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{kT}}$  и чисто термодинамическим путем, например, с помощью известного из физической химии рассуждения Вант-Гоффа, если рассматривать атомы в состояниях 1 и 2 как атомы двух химически различных газов, находящихся в равновесии по отношению к химической реакции

$$(2) = (1) + (\epsilon_2 - \epsilon_1),$$

где  $\epsilon_2 - \epsilon_1$  есть тепловой эффект реакции.

Относительно числа переходов, происходящих за время  $dt$ , сделаем вместе с Эйнштейном следующие предположения: число  $Z_1$  процессов поглощения ( $1 \rightarrow 2$ ), происходящих за время  $dt$ , пропорционально промежутку времени  $dt$ , числу атомов в состоянии 1 и плотности излучения  $u$ ; в общем, следовательно, мы получаем:

$$Z_1 = B_{12} N_1 u dt. \quad (70.2)$$

Коэффициент  $B_{12}$  определяется тем, что  $B_{12} u dt$  есть вероятность того, что атом сорта 1 за время  $dt$  перейдет в состояние 2. Следовательно,  $h\nu B_{12} u dt$  есть то количество энергии, которое в среднем поглощается таким атомом в поле излучения  $u$ .

Что касается числа испусканий  $Z_2$ , происходящих за время  $dt$ , то мы получим:

$$Z_2 = (A_{21} + B_{21} u) N_2 dt. \quad (70.3)$$

Здесь смысл величины  $A_{21}$  непосредственно ясен:  $A_{21} dt$  есть вероятность того, что атом, находящийся в состоянии 2, за время  $dt$  спонтанно испустит световой квант  $h\nu$ . Следовательно, если плотность излучения  $u$ , равна нулю, то за время  $dt$  из общего количества  $N_2$  атомов число

$$N_2 A_{21} dt = -dN_2$$

перейдет из состояния 2 в состояние 1. Таким образом, число  $N_2$  будет уменьшаться со временем по закону

$$N_2 = N_2^0 e^{-A_{21} t}$$



(закон радиоактивного распада). Поэтому величина  $\frac{1}{A_{21}} = \tau$  есть средняя продолжительность жизни „возбужденного“ атома 2, если предположить, что переходы из состояния 2 в состояние 1 происходят только путем радиации.

Второе слагаемое  $B_{21}u \cdot N_2 dt$  в уравнении (70.3) имеет тот смысл, что наряду со спонтанными актами испускания происходят еще такие акты испускания, которые индуцируются уже существующим излучением  $u$ . Классическим аналогом этого „отрицательного поглощения“ является тот факт, что колеблющийся осциллятор может и отдать энергию упавшей на него электромагнитной волне, и отнять у нее энергию, в зависимости от фазового угла между электрическим вектором волны и колебанием осциллятора. В среднем, при произвольных фазовых углах, оба случая будут равно вероятны. Соответственно этому, как мы далее увидим, величины  $B_{21}$  и  $B_{12}$  будут существенно совпадать друг с другом.

Условие равновесия, получающееся из (70.2) и (70.3), гласит:  $Z_1 = Z_2$ , или

$$\frac{N_1}{N_2} B_{12} u = A_{21} + B_{21} u.$$

Следовательно, принимая во внимание (70.1), мы получаем:

$$u = \frac{A_{21}}{B_{12} \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{kT}} - B_{21}}. \tag{70.4}$$

Это уравнение, после подстановки в него боровского условия частот  $\epsilon_2 - \epsilon_1 = h\nu$ , переходит в формулу Планка, если мы только потребуем еще выполнения следующих двух условий.

Во-первых, при  $T \rightarrow \infty$  плотность  $u$ , должна становиться бесконечной. Это значит, что

$$\frac{g_1}{g_2} B_{12} = B_{21}. \tag{70.5}$$

Смысл этой формулы ясен: при очень высоких температурах ( $kT \gg h\nu$ ) мы имеем  $N_2 : N_1 = g_2 : g_1$ , а по формуле (70.3) при достаточно больших значениях  $u$ , спонтанное испускание должно стать исчезающе малым по сравнению с индуцированным испусканием. Поэтому из условия равновесия и получается  $g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$ , как написано в уравнении (70.5).

Второе требование заключается в том, чтобы в предельном случае  $h\nu \ll kT$  оказались правильными выводы классической физики, т. е., чтобы в этом случае формула (70.4) асимптотически переходила в формулу Рэля-Джинса (68.11). Это требование дает:

$$\frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \tag{70.6}$$

т. е. приводит к универсальному соотношению между коэффициентом спонтанного испускания  $A_{21}$  и коэффициентом поглощения  $B_{12}$ .

Характерной чертой трактовки элементарных процессов, данной в формулах (70.2) и (70.3), является то, что согласно этой трактовке момент времени, когда происходит такой процесс и, как мы потом увидим, и самое направление процессов оказываются делом случая. Сначала большинство физиков склонны были рассматривать такую трактовку как несовершенную и предварительную. И только дальнейшее развитие квантовой механики показало, что атомные процессы нельзя описывать иначе, как только статистически.

Эйнштейновское соотношение (70.6) между испусканием и поглощением имеет очень важное применение в выводе квантовой дисперсионной формулы (25.18):

$$n - 1 = N \sum_r \frac{2\pi e^2}{m} \frac{f_r}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (70.7)$$

которую мы получили в § 25 просто путем переделки классической дисперсионной формулы. Последовательный квантовый вывод этой формулы был указан впервые Шредингером и Гейзенбергом в 1927 г. Если, опираясь на эксперимент и на аналогию с классической физикой, считать эту формулу правильной, то можно следующим способом, которым впервые воспользовался Р. Ладенбург, связать „силу осциллятора“  $f_r$  с эйнштейновским коэффициентом  $A_{ik}$ . Рассмотрим область спектра вблизи определенной линии  $\omega_r = 2\pi\nu$  и вычислим энергию, которую за время  $dt$  поглощает атом, подчиняющийся дисперсионной формуле (70.7), когда он находится в поле излучения с плотностью энергии  $u_\nu d\nu$ . Согласно вычислению, произведенному в § 26, значение этой энергии равно (ср. (26.10))

$$f_r \frac{\pi e^2}{m} u_\nu dt.$$

Если мы опять обозначим начальный и конечный уровни этой спектральной линии цифрами 1 и 2, то, согласно эйнштейновской трактовке (70.2) процесса поглощения, та же энергия будет равна

$$h\nu B_{12} u_\nu dt.$$

Если приравнять эти два выражения и, воспользовавшись формулой (70.6), ввести вероятность спонтанного поглощения  $A_{21}$ , то получится уравнение

$$f_r = \frac{g_2}{g_1} A_{21} \frac{c^3 m}{8\pi^4 \nu^2 e^2}.$$

Согласно формуле (13.7),  $\tau_{\text{класс}} = \frac{3c^3 m}{8\pi^4 \nu^2 e^2}$  есть время, в течение которого по классической теории энергия свободно излучающего осциллятора уменьшается в  $e$  раз, между тем как  $\frac{1}{A_{21}}$  есть время, в течение которого все  $N_2$  атомов, находящихся в состоянии 2, кроме их  $e$ -ой части, перейдут путем спонтанного испускания в состояние 1.

Следовательно, выражение

$$f = \frac{g_2}{g_1} \frac{A_{21} \tau_{\text{класс}}}{3} \quad (70.8)$$

равно (вплоть до множителя  $\frac{g_2}{3g_1}$ ) отношению этих времен (Заметим, что у свободного пространственного осциллятора каждое возбужденное состояние трехкратно вырождено, между тем как основное состояние не вырождено. Следовательно, для такого осциллятора  $g_2 = 3$ ,  $g_1 = 1$ , и поэтому  $f = A_{21} \tau_{\text{класс}}$ ).

Уравнение (70.8) указывает, каким путем при помощи измерения дисперсии можно получить точное численное значение для важной величины — вероятности спонтанного перехода  $A_{21}$ . Этот способ является более точным и надежным, чем другой, основанный на продолжительности свечения каналовых лучей в известных опытах Вина.

§ 71. **Баланс импульса атомов в поле излучения.** В формулах (70.2) и (70.3) мы ввели некоторые гипотезы о характере обмена энергией между атомами и полем лучистой энергии и вывели таким образом формулу излучения Планка. При этом мы предполагали только одно, что число атомов в отдельных энергетических состояниях подчиняется закону Больцмана, т. е., что внутренняя энергия атомов распределяется согласно законам статистической механики. Эти соображения были неполны в том отношении, что при этом мы пренебрегали поступательным движением атомов. Мы производили вычисления таким образом, как будто бы центры тяжести всех атомов находились в покое, и удовлетворялись констатированием того, что равновесное распределение внутренней энергии (70.1), вытекающее из статистической механики, не нарушается рассматриваемыми элементарными процессами. Но с одной стороны, статистическая механика учит, что атомы в тепловом равновесии, кроме внутренней энергии, обладают средней энергией поступательного движения, равной  $\frac{3}{2}kT$ . С другой стороны, из наблюдений над световым давлением или над электронами отдачи в эффекте Комптона мы должны заключить, что при взаимодействии между излучением и материей, вообще говоря, должен происходить обмен также импульсами. Следовательно, скорости молекул в поле излучения должны все время меняться, даже в том случае, если между ними не происходит столкновений. Но мы должны потребовать, чтобы в тепловом равновесии не нарушалось максвелловское распределение скоростей. Это возможно только тогда, когда передаваемые путем излучения импульсы влекут за собой такое же максвелловское распределение, какое устанавливается под влиянием взаимных столкновений атомов согласно кинетической теории газов.

Таким образом для того, чтобы распределение энергии излучения при температуре  $T$ , описываемое формулой Планка (69.5), было совместимо с тепловым равновесием, элементарные процессы (70.2) и (70.3) должны быть связаны с такими изменениями импульса, чтобы атомы в среднем имели соответствующее этой температуре максвелловское распределение скоростей. Это требование позволяет заключить и о характере того обмена импульсами, который должен быть связан с этими процессами. Рассмотрим эти указанные Эйнштейном соображения об обмене импульсом между излучением и атомами.

Классическая теория дает нам простой закон для случая падения плоской волны на линейный осциллятор. Из §§ 7 и 58 мы знаем, что плоская волна с энергией  $U$  несет с собой импульс, равный  $\frac{U}{c}$ . Следовательно, если от нее отнимается энергия  $E_m - E_n$ , то она теряет вместе с тем и импульс  $\frac{E_m - E_n}{c}$ , который, согласно закону сохранения импульса, передается осциллятору. Поэтому атом полу-

чае от плоской волны, вместе с энергией  $h\nu$ , также импульс  $\frac{h\nu}{c}$ . Этот импульс имеет направление распространения падающей волны.

Особенно простое и независимое от упомянутых параграфов обоснование этого утверждения получается из следующих соображений. Пусть линейно поляризованная плоская световая волна распространяется в направлении положительной оси  $z$ . Пусть  $\mathbf{E}$  параллельно оси  $x$ , а  $\mathbf{H}$  параллельно оси  $y$ . Для волны в пустоте имеем равенство  $E_x = H_y$ . Пусть эта волна падает на электрон, который под влиянием поля  $\mathbf{E}$  может двигаться в плоскости  $(x, y)$ . Если  $x$  и  $y$  суть координаты электрона, то работа, которую над ним производит поле за время  $dt$ , равна  $e\dot{x}E_x dt$ . С другой стороны,  $z$ -овая слагающая импульса, сообщаемого за это время электрону, равна

$$\frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H})_z dt = \frac{e}{c} \dot{x} H_y dt.$$

Следовательно, импульс, передаваемый волной в направлении ее распространения, равен переданной ею энергии, помноженной на  $\frac{1}{c}$ . Знак работы  $e\dot{x}E_x dt$  существенно зависит от соотношения между фазой волны  $E_x(t)$  и фазой движения электрона  $x(t)$ . Квантовым аналогом этих двух возможностей (+ или —) являются два коэффициента  $B$ , введенные в § 70.

В дальнейшем мы будем рассматривать только переходы между двумя энергетическими уровнями 1 и 2. Гипотеза Эйнштейна сводится к тому, что утверждение, высказанное выше о плоской волне, остается верным и в случае изотропного поля излучения. Это следует понимать так: при каждом отдельном акте поглощения, описываемом формулой (70.2), поглощающий атом получает энергию  $h\nu$  из пучка лучей вполне определенного направления, и при этом получает также приращение импульса  $\frac{h\nu}{c}$  в направлении этого пучка лучей. На языке гипотезы световых квантов это означает, что свет ведет себя при поглощении так, как будто бы он состоял из отдельных квантов с энергией  $h\nu$  и импульсом  $\frac{h\nu}{c}$ , которые при попадании на атом могут последним поглощаться.

Аналогичное толкование получают и процессы „отрицательного поглощения“  $N_2 B_{21} \nu$ , указанные в формуле (70.3). В этих процессах излучение заставляет возбужденный атом испустить квант  $h\nu$ . Эти процессы тоже следует представлять себе так, что атом взаимодействует каждый раз только с пучком лучей определенного направления, причем энергия этого пучка увеличивается на  $h\nu$ , а сам атом испытывает отдачу, получая импульс  $\frac{h\nu}{c}$  в направлении, противоположном пучку. Выразим это на языке теории световых квантов: квант  $h\nu$ , сталкиваясь с возбужденным атомом, заставляет его испустить такой же квант, который улетает от атома вместе с первым квантом. В виде отдачи атом получает импульс  $\frac{h\nu}{c}$ .

Отдельные акты спонтанного испускания, число которых в секунду, согласно (70.3), равно  $N_2 A_{21}$ , по классической теории должны происходить без изменения импульса, так как, согласно классическим представлениям, такое испускание происходит в виде сферической волны, в которой все направления равноправны. В противоположность этому, квантовая теория требует и для этих процессов, чтобы при отдельном акте испускания вся энергия была сконцентрирована в очень малом телесном угле, т. е. испускалась в определенном направлении. Получающееся при этом волновое образование иногда называют в немецкой терминологии „Nadelstrahlung“ (излучение в форме иглы). На языке квантовой теории говорят, что испускание заключается в выбрасывании светового кванта в определенном направлении. С этим также связано изменение импульса на  $\frac{h\nu}{c}$  в противоположном направлении. Назовем для краткости эти три процесса процессами  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  и  $A_{21}$ ; каждый из них связан с изменением импульса на  $\frac{h\nu}{c}$ . Направление этого изменения импульса о процессе  $B_{12}$  совпадает с направлением падающего излучения, в процессе  $B_{21}$  оно имеет противоположное направление. При очень большом числе подобных процессов вероятность того или другого направления передачи импульсов определяется интенсивностью излучения в этом направлении. Только при изотропном излучении все направления встречаются одинаково часто. В процессах же  $A_{21}$  нельзя ничего сказать заранее о направлении испускания. Мы считаем направление испускания чисто случайным в том смысле, что все направления встречаются с одинаковой вероятностью.

Теперь исследуем, какую величину средней кинетической энергии  $\frac{1}{2} M \bar{v}^2$  должен иметь атом, для того чтобы эта величина не менялась под действием описанных элементарных процессов. Ход рассуждений такой же, как в теории броуновского движения. Рассмотрим сперва изменение импульса, которое испытывал бы атом в среднем за время  $\tau$ , если игнорировать его движение по отношению к полю излучения. В равновесии число актов испускания (70.2) равно числу актов поглощения (70.3). Общее число порций импульса  $\frac{h\nu}{c}$ , полученных газом, состоящим из  $N_1 + N_2$  атомов, равно, следовательно,  $2N_1 B_{12} \nu \tau$ , и значит, отдельный атом испытывает  $n = \frac{2N_1}{N_1 + N_2} B_{12} \nu \tau$  толчков в чисто случайных направлениях. Если  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n$  суть направления этих  $n$  ударов, то приращение импульса атома равно

$$\Delta = \frac{h\nu}{c} \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k.$$

Среднее значение  $\bar{\Delta}$  для большого числа атомов равно нулю. Но среднее значение  $\bar{\Delta}^2$  равно

$$\bar{\Delta}^2 = \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2 \sum_{i, k=1}^n \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_k} = \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2 n,$$

так как вследствие статистической независимости отдельных ударов средние значения смешанных произведений  $a_i a_k$  равны нулю. Подставляя значение  $n$ , найденное выше, мы получаем:

$$\overline{\Delta^2} = \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2 \frac{2N_1}{N_1 + N_2} B_{12} u_{\nu\tau}. \quad (71.1)$$

Следовательно, при совершенно изотропном распределении направлений толчков последние имели бы тот результат, что средний квадрат импульса, а значит и кинетическая энергия, неограниченно возрастали бы со временем. Такому возрастанию препятствует то, что для движущегося атома равновесное излучение уже не изотропно в дальнейшем мы подсчитаем, что движущийся вместе с атомом наблюдатель воспринимает спереди больше лучистой энергии, чем сзади. В соответствии с этим, импульсы, связанные с процессами (70.2), в среднем уже не уничтожаются взаимно, а приводят к среднему импульсу, направленному против движения атома. Следовательно, процессы  $B_{12}$  в среднем будут тормозить атом. Правда, одновременно с этим процессы  $B_{21}$ , имеющие обратный знак, будут ускорять атом. Но число этих процессов будет меньше, чем число процессов  $B_{12}$ , на число процессов  $A_{21}$ , так что в результате всегда существует торможение. Спонтанные же процессы  $A$  даже и в случае движущегося атома в среднем не производят изменения импульса.

Таким образом движущийся атом со стороны равновесного излучения в общем будет испытывать торможение. В дальнейшем мы покажем, что оно пропорционально скорости  $v$  и поэтому эквивалентно некоторой силе трения —  $Rv$ . Следовательно, за время  $\tau$  атом испытывает систематическое изменение импульса —  $Rv\tau$ , не считая того рассмотренного выше изменения импульса  $\Delta$ , которое обусловлено статистическим характером отдельных толчков. Таким образом, спустя время  $\tau$ , импульс атома  $Mv$  превратится в импульс  $Mv - Rv\tau + \Delta$ . Но в среднем для всех атомов в состоянии равновесия кинетическая энергия, а, значит, и квадрат импульса не может измениться. Мы получаем условие равновесия в виде:

$$\overline{(Mv - Rv\tau + \Delta)^2} = \overline{(Mv)^2}.$$

Когда мы произведем возведение в квадрат, среднее значение  $\overline{\Delta^2}$  окажется равным нулю, так как систематическое влияние толчков мы уже учли, введя член, характеризующий трение. Кроме того мы будем пренебрегать квадратом члена  $Rv\tau$  по сравнению с его произведением на  $Mv$ . Поэтому условие равновесия примет вид:

$$\overline{\Delta^2} = 2RMv^2\tau.$$

С другой стороны, мы знаем, что при тепловом равновесии  $\frac{1}{2}M\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$ . Таким образом из нашего условия равновесия мы можем найти ту постоянную трения  $R$ , которая при этом значении средней кинетической энергии как раз компенсирует нерегулярные толчки. Мы получаем:

$$R = \frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} \frac{1}{6kT},$$

а, следовательно, подставив значение  $\overline{\Delta^2}$  из формулы (71.1), находим:

$$R = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \frac{N_1}{N_1+N_2} B_{12} \frac{u_\nu}{3kT}. \quad (71.2)$$

Теперь нам остается убедиться в том, что из наших предположений о характере передачи импульса на самом деле получается это значение  $R$ .

Если атом находится в покое, то средняя сила, действующая на него со стороны излучения, равна нулю, потому что для испускания, как мы видели выше, все направления равновероятны, а поле излучения в этом случае изотропно. Энергия излучения в интервале частот  $d\nu$ , которая находится в определенный момент времени в единице объема, и направление распространения которой заключено внутри телесного угла  $d\Omega$ , определяется, независимо от направления, выражением

$$u(\nu) d\nu \frac{d\Omega}{4\pi},$$

где  $u(\nu) = u_\nu$ , есть функция Планка, зависящая только от частоты (и от температуры). Следовательно, для атома, неподвижного относительно пространства, занятого равновесным излучением, при всех прочих процессах излучения все направления равновероятны, т. е. не существует преимущественного направления действующей на него силы. В координатной же системе  $K'$ , движущейся вместе с атомом, излучение уже не изотропно, как в системе  $K$ , которая неподвижна по отношению к пространству с равновесным излучением. Напротив, наблюдатель в системе  $K'$  будет воспринимать излучение, которое мы можем описать формулой

$$u'(\nu', \vartheta') d\nu' \frac{d\Omega'}{4\pi},$$

где  $u'$  зависит от угла  $\vartheta'$  между направлением луча и направлением движением молекулы. Эта зависимость от угла  $\vartheta'$  характеризует анизотропию. Кроме того, вследствие эффекта Доплера,  $\nu'$  отличается от  $\nu$ . Для наблюдателя в системе  $K$  движущийся атом поглощает при взаимодействии с лучами, имеющими направление его движения, более жесткую, а при взаимодействии с лучами противоположного направления — более мягкую частоту, чем неподвижный атом, а именно, в первом приближении поглощаемая частота равна

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h} \left(1 \pm \frac{v}{c}\right).$$

Теперь найдем систематическое приращение импульса движущегося атома с точки зрения системы  $K'$ , вызываемое обеими указанными выше причинами. Пусть  $N_1$  и  $N_2$ , как и выше, означают числа атомов в состоянии 1 и 2. Тогда, по определению, в единицу времени происходит

$$N_1 B_{12} u'(\nu', \vartheta') \frac{d\Omega'}{4\pi}$$

процессов поглощения в пучке лучей с направлением  $d\Omega'$ . При каждом таком процессе, атому передается в направлении его движения им-

пульс  $\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{c} \cos \vartheta'$ ; слагающих импульса, перпендикулярных к направлению движения, мы не будем принимать во внимание, так как из соображений симметрии передача по этим направлениям в среднем равна нулю. Если частоту, поглощаемую атомом, временно обозначить через  $\nu_0 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h}$ , то в целом, благодаря процессам поглощения, атом получает импульс

$$N_1 B_{12} \int u'(\nu', \vartheta') \frac{d\Omega'}{4\pi} \frac{h\nu_0}{c} \cos \vartheta'.$$

Аналогичную величину дадут процессы отрицательного поглощения:

$$-N_2 B_{21} \int u'(\nu', \vartheta') \frac{d\Omega'}{4\pi} \frac{h\nu_0}{c} \cos \vartheta'.$$

Такии образом мы вычислили тот импульс, который передавался бы всем атомам  $N_1 + N_2$ , если бы все они двигались с одинаковой скоростью  $v$ . Если еще принять во внимание, что

$$\frac{N_2 B_{21}}{N_1 B_{12}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}}}{e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}} = e^{-\frac{h\nu_0}{kT}},$$

то можно написать общий импульс, в среднем передаваемый в единицу времени отдельному атому в направлении его движения, в виде

$$\frac{N_1 B_{12}}{N_1 + N_2} \left(1 - e^{-\frac{h\nu_0}{kT}}\right) \frac{h\nu_0}{c} \int u'(\nu', \vartheta') \cos \vartheta' \frac{d\Omega'}{4\pi}. \quad (71.3)$$

При этом интегрирование распространяется на все значения телесного угла  $\Omega'$ .

Для интегрирования заметим сначала, что частота  $\nu'$  совпадает с поглощаемой частотой  $\nu_0$ , а  $\nu$  есть частота поглощаемого света, измеряемая в системе  $K$ ; она связана с  $\vartheta$  посредством уравнения

$$\nu = \nu_0 (1 + \beta \cos \vartheta) \quad (71.4)$$

(если ограничиться членами первого порядка относительно  $\frac{v}{c} = \beta$ ). Интегрировать мы будем не по пространству в системе  $K'$ , а по пространству в системе  $K$ , так как мы знаем в этой системе функцию  $u(\nu)$ . Для этого мы должны воспользоваться законом преобразования для световых волн, выведенным в § 58. Ясно, что плотность энергии должна преобразоваться как квадрат амплитуды плоской волны соответствующего направления, т. е. согласно § 58, как квадрат частоты

$$\frac{u'(\nu', \vartheta') d\nu' d\Omega'}{u(\nu) d\nu d\Omega} = \frac{|A'|^2}{|A|^2} = \frac{\nu'^2}{\nu^2}.$$

Благодаря этому, интеграл (71.3) превращается в следующий интеграл в пространстве  $K$ :

$$\int u(\nu) \frac{\nu'^2}{\nu^2} \frac{d\nu}{d\nu'} \cos \vartheta' \frac{d\Omega}{4\pi}.$$



С точностью до членов высшего порядка имеют место следующие соотношения (сравни § 58):

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{v'}{v} = 1 - \beta \cos \vartheta,$$

$$v' \cos \vartheta' = v (\cos \vartheta - \beta).$$

Если мы, согласно формуле (71.4), разберем  $u(v)$  в ряд

$$u(v) = u(v_0) + v_0 \beta \cos \vartheta \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_{v=v_0},$$

то для интеграла получится значение

$$\int \left\{ u(v_0) + v_0 \beta \cos \vartheta \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_{v_0} \right\} (\cos \vartheta - \beta) \frac{d\Omega}{4\pi} =$$

$$= -\beta \left\{ u(v_0) - \frac{1}{3} v_0 \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_{v_0} \right\}.$$

Поэтому из формулы (71.3) следует, что в среднем импульс, передаваемый атому в секунду, пропорционален скорости и направлен противоположно ей. Если этот импульс написать, как мы делали выше, в виде  $-Rv$ , то мы получим, опуская опять значок 0 у  $v$ ,

$$R = \frac{N_1}{N_1 + N_2} B_{12} \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) \frac{h\nu}{c^2} \left( u(v) - \frac{1}{3} v \frac{\partial u}{\partial v} \right).$$

При тепловом равновесии  $u(v)$  должно быть таким, чтобы это значение  $R$  совпадало с значением в формуле (71.2). Приравнивая эти два выражения, мы получаем для  $u(v)$  условие:

$$\frac{\partial \lg u}{\partial v} = \frac{3}{v} - \frac{h}{kT} \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \quad \text{или} \quad u(v) = \text{const} \frac{v^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Это и есть закон излучения Планка. Таким образом доказано существование равновесия при учете энергии теплового движения атомов в поле излучения. Из § 70 мы видели, что излучение при взаимодействии с материей ведет себя так, как будто бы оно состояло из дискретных квантов с энергией  $h\nu$ . А в этом параграфе мы показали, что при последовательном проведении этой гипотезы каждому световому кванту необходимо приписать также импульс  $\frac{h\nu}{c}$ .

#### ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

##### К § 11 (стр. 63).

Из слов Беккера можно было бы вывести заключение, что электродинамика содержит, помимо основных уравнений, еще и добавочный постулат, запрещающий осуществляться „опережающим“ потенциалам, как решениям уравнений поля. Такое заключение было бы неправильным. Если нам даны  $\rho$  и  $\rho v$ , как функции от  $x, y, z, t$  во всем пространстве и для времени  $t \geq 0$ , если также даны  $\varphi, A, \frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial A}{\partial t}$  для момента времени  $t=0$  во всем пространстве

и требуется отыскать  $\varphi$  и  $A$  в какой-то точке в какой-то момент времени  $t > 0$ , то уравнения (11.1) определяют искомое решение совершенно однозначно в виде запаздывающих потенциалов. Вывод этих формул, данный М. Абрагамом, см., например, в курсе Вебстера—Сеге: Дифференциальные уравнения в частных производных и т. д. ч. II, ГТТИ. 1934 г.

Асимметрия по отношению к двум направлениям времени (прошедшее -- будущее) не является существенным свойством электронной теории, а возникает вследствие тех или иных начальных условий задачи. (Если бы при описанной выше постановке задачи задавалось  $\rho$  и  $\rho v$  для  $t \leq 0$  и искались  $\varphi$  и  $A$  для  $t < 0$ , то таким же однозначным решением задачи были бы опережающие, а не запаздывающие потенциалы). А так как каждый протекающий в природе электромагнитный процесс мог бы рассматриваться как решение математической задачи с начальными условиями как первого, так и второго описанного типа, то опережающие потенциалы имеют столь же большой, или, лучше сказать, столь же малый физический смысл, как и запаздывающие потенциалы: характерная для этих выражений асимметрия по отношению к двум направлениям времени является не свойством самых законов электродинамики, но лишь особенностью обычной для нас постановки задачи, в которой дано прошлое, и ищется будущее, а не наоборот, хотя в некоторых довольно редких случаях например, когда астроном для решения какого-нибудь исторического вопроса вычисляет давно прошедшее затмение, встречается и иная постановка задачи. Отсюда следует также, что решение „проблемы времени“, т. е. объяснение наблюдаемого в природе принципиального отличия между прошедшим и будущим, не может быть дано в рамках классической электронной теории.

#### К § 25 (стр. 137)

Наблюдаются, однако, случаи весьма значительных отклонений от правила сумм (см., например, работу Г. С. Кватера о дисперсии в парах таллия, труды ГОИ). С классической точки зрения они легко выводятся из допущения, что колебания данных электронов связаны с колебаниями других зарядов в атоме. В квантовой теории соответственное значение имеет введение „энергии обмена“.

#### К § 29 (стр. 159)

Как мы видели в § 11 (см. 11.19), ускоренный электрон излучает энергию; при равномерном движении по окружности  $v = \omega^2 r$ , и формула (11.19) дает для этого случая конечную величину  $\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 r^2$ . Таким образом классическая теория отрицает самую возможность устойчивого обращения электрона по замкнутой орбите.

#### К § 45 (стр. 251)

Большое значение опыта А. А. Эйнвальда заключается в том, что он является решающим между Лорентцовой теорией неподвижного эфира, приводящей к вышеупомянутому соотношению

$$I = v \cdot b \cdot \frac{E}{4\pi d},$$

и Гертцовой теорией увлекаемого эфира, из которой для тех же условий опыта получилось бы

$$I = v \cdot b \cdot \frac{E(\epsilon - 1)}{4\pi d},$$

что равнялось бы почти нулю для воздуха ( $\epsilon \approx 1$ ),

К § 58 (стр. 306)

Неоднократно указывалось, что формулы для эффекта Допплера несколько различны в различных теориях, почему точные опытные данные могут быть решающими между этими теориями. В самом деле, пусть в штрихованной системе какое-нибудь световое явление изображается формулой

$$y = A \cos \frac{2\pi}{T'} \left( t' - \frac{x'}{c'} \right).$$

Разберем, как она изобразится в нештрихованной системе: а) с точки зрения неподвижного эфира и б) с точки зрения теории относительности. В а) мы должны применить формулы Галилеева преобразования и помнить, что  $c' = c - v$ . Мы получим тогда

$$y = A \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{c} \right); T = T' \left( 1 - \frac{v}{c} \right).$$

В случае б),  $c' = c$  и формулы преобразования суть (50.5) получим

$$T = T' \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отсюда видно, что в случае а) при изменении направления  $v$ ,  $\Delta T = \frac{v}{c} T'$  получает противоположное, но равное значение; в случае б) напротив у  $\Delta T$  является диссимметричный (весьма малый) член  $+\frac{T' v^2}{2c^2}$ . В 1938 г. Г. Айвс и у (Herbert Ives, J. Opt. Soc. № 7, 1938) удалось чрезвычайно тонкими опытами над каналовыми лучами доказать существование этой диссимметрии и измерить ее величину, оказавшуюся совпадающей с теоретической. Опыт Айвса приходится по его основному значению поставить рядом с опытом Майкельсона: последний непосредственно доказывает существование множителя  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  в первом из уравнений преобразований Лорентца; опыт Айвса играет ту же роль в отношении последнего из этих уравнений.

К § 60 (стр. 323)

Разделение полного тока на конвекционный ток и ток проводимости

$$s_i = (s_i)_k + (s_i)_{\text{пров}}$$

Беккер производит таким образом, что и конвекционный ток и ток проводимости оказываются четырехмерными векторами. Более целесообразным, однако, представляется другое разделение, тоже обладающее свойством инвариантности по отношению к преобразованию Лорентца, но требующее от обеих составных частей тока не того, чтобы они были четырехмерными векторами, а того, чтобы одна из них (конвекционный ток) при заданном поле совершенно не зависела от  $\sigma$ , а другая (ток проводимости) была пропорциональна  $\sigma$ . Это разделение производится следующим образом: согласно (60.16) и (60.17), имеем:

$$s_i + \frac{u_i \sum_k u_k s_k}{c^2} = \frac{\sigma}{c} \sum_k H_{ik} u_k.$$

В трехмерной формулировке это дает:

$$\mathbf{j} + \frac{\mathbf{v}}{1 - \beta^2} \left( \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}}{c^2} - \rho \right) = \frac{\sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

(Левая сторона — это и есть то, что Беккер называет током проводимости  $j_{\text{пров}}$ ). Помножая обе части скалярно на  $v$ , мы получаем, после элементарных преобразований:

$$\frac{jv}{c^2} = \rho\beta^2 + \frac{\sigma E v}{c^2} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Сравнивая два последние уравнения, мы находим:

$$j - \rho v = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left\{ E + \frac{v}{c} \times B - \frac{v}{c^2} (v \cdot E) \right\}.$$

Левую сторону этого уравнения целесообразно было бы называть током проводимости  $j_{\text{пров}}$ . Тогда для конвекционного тока получилась бы весьма простая формула

$$j_k = \rho v,$$

а для тока проводимости — формула более сложная, чем (60.17а), а именно:

$$j_{\text{пров}} = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left\{ E + \frac{v}{c} \times B - \frac{v}{c^2} (v \cdot E) \right\}.$$

#### К § 63 (стр. 336)

Г. Н. Льюис показал, что формула (63.14) следует из уравнения  $E = mc^2$  без каких-либо дополнительных гипотез. В самом деле, напишем упомянутое уравнение в виде  $dE = c^2 dm$  и присоединим сюда определения импульса:  $F dt = d(mv)$  и работы:  $F \cdot v dt = dE$ . Исключая из этих трех уравнений  $F$ ,  $E$  и  $dt$ , получим  $vd(m \cdot v) = c^2 dm$ , или, умножая на  $m$  и интегрируя:  $\left(\frac{m \cdot v}{2}\right)^2 + C = \frac{m^2 c^2}{2}$  что легко приводится к виду (63.14).

## УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

### Монографии:

Н. А. Lorentz, Theory of Electrons, Leipzig 1916 (русский перевод: Г. А. Лоренц, Теория электронов, Л.-М. 1934) и Enzykl. d. math. Wissensch. Bd. 5, Heft 14;

F. Zerner, Die Elektronentheorie (Handbuch der Physik, Bd. 12. S. 146, Berlin 1927).

**A.** § 1 и § 3: W. Gerlach, Elektronen, Handb. d. Phys. 22, I. Teil, 2. Aufl. Berlin 1933.

§ 1: R. A. Millikan, Phys. Rev. 2, 136, 1913; Phys. Z. 14, 796, 1913; E. Regener, Z. f. Phys 39, 247, 1926; R. Sanzenbacher, там же 39, 251, 1926; E. Regener, Berl. Ber. 1909, II. 948.

§ 2: W. Schottky, Ann. d. Phys. 57, 541, 1918; 68, 157, 1922; C. A. Hartmann, Ann. d. Phys. 65, 51, 1921; Hull & Williams, Phys. Rev. 25, 147, 1925; Williams и Vincent, Phys. Rev. 28, 1250, 1916; Schottky & Rothe, Physik der Glühelektronen (Handb. der Experimentalphysik, 13, 2. Teil, Leipzig 1928).

§ 3: J. J. Thomson, Phil. Mag. 44, 293, 1897; Nature, 90, 645, 663, 91, 333, 1913; H. Busch, Phys. Z. 23, 438, 1922; Ann. d. Phys. 81, 974, 1926; F. Wolf, Ann. d. Phys. 83, 849, 1927.

§ 4: F. W. Aston, Isotopes (есть русский перевод); F. W. Aston & R. H. Fowler, Phil. Mag. 43, 514, 1922.

§ 5: K. F. Nichols, Phys. Z. 7, 640, 1906; Tolman & Stewart, Phys. Rev. 8, 97, 1916; 9, 164, 1917; Tolman, Karrer & Guernsey, Phys. Rev. 21, 525, 1923; Tolman & Lewis M. Mott-Smith, Phys. Rev. 23, 794, 1926; S. J. Barnett, Phil. Mag. 12, 349, 1931.

§ 10: Kaufmann, Ann. d. Phys. 19, 487, 1906; A. H. Bucherer, там же 28, 513, 1909; G. Neumann, там же 45, 529, 1914; Cl. Schäfer, там же 49, 934, 1916.

**B.** § 18: A. Einstein & de Haas, Verh. D. phys. Ges. 17, 152, 1915; E. Beck, Ann. d. Phys. 60, 109, 1919; S. J. Barnett, Phys. Rev. 6, 239, 1915; Proc. Am. Acad. 66, 273, 1931.

**B. II.** § 22—24: P. Debye, Polare Molekeln (есть русский перевод).

**III:** M. Born, Optik, Berlin 1933 (есть русский перевод); R. Ladenburg, Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik, 11. Aufl. Braunschweig 1929, Band 2, 2. Hälfte, 2 Teil, Kap. 36—39; Korff & Breit, Rev. of mod. Physics 4, 471, 1932.

§ 28: R. Ladenburg, Z. f. Phys. 34, 898, 1925; 46, 168, 1928; J. Becquerel, там же 52, 342, 1932; J. Becquerel & de Haas, там же 52, 678, 1928.

**IV:** P. Weiss & G. Foëx, Le magnétisme, Paris, 1926; P. Debye (Marx Handbuch der Radiologie, Bd. 6, 1. Aufl. 1925); F. Bloch (там же, Bd. 6, 2 Teil, 2 Aufl. 1933; есть русский перевод: Ф. Блох, Молекулярная теория магнетизма, Харьков - Киев, 1934).

§ 31: P. Weiss, Phys. Z. 9, 358, 1908; W. Heisenberg, Z. f. Phys. 49, 619, 1928; F. Bloch, там же, 57, 545, 1929; 61, 206, 1930; 74, 295, 1932.

§ 32: Ch Lapp, C. R. 186, 1104, 1928; P. Weiss & R. Forrer, C. R. 178, 1347, 1446, 1670, 1924.

§ 33a: Mahajani, Phil. Trans. London (A) 228, 63, 1929; N. S. Akulov, Z. f. Phys. 52, 389, 1928; 54, 582, 1929; 57, 249, 1929; K. Honda, S. Kaya, Ma-

sumoto, Tohoku Sc. Rep. 17, 111, 1928; S. Кауа, там же, 17, 639, 1157, 1928; W. L. Webster, Proc. Roy. Soc. London A 109, 570, 1928.

§ 33b: K. Honda & V. Mashiyama, Tohoku Sc. Rep. 15, 755, 1926; V. Mashiyama, там же 17, 945, 1928; Nishiyama, там же 18, 341, 1929; F. Lichtemberger, Ann. d. Phys. 15, 45, 1932.

§ 34: R. Becker & M. Kersten, Z. f. Phys. 64, 660, 1930; M. Kersten, Z. f. techn. Phys. 12, 665, 1931; R. Becker, Phys. Z. 33, 905, 1932.

Г. Е. Grüneisen. Handb. d. Physik (Geiger-Scheel) Bd. 13, S. 1—76, Berlin 1928; F. Bloch, Marx, Handbuch der Radiologie, Bd. 6, Teil 1, S. 226, 2 Aufl. Leipzig 1933.

§ 35: P. Drude, Ann. d. Phys. 1, 566, 1900; 3, 369, 1900; 7, 687, 1902; E. Riecke, Phys. Z. 10, 508, 1909.

§ 36: H. A. Lorentz, Theory of Electrons, Leipzig 1916 и Proc. Amst. 7, 438, 585, 684, 1905; P. Debye, Ann. d. Phys. 33, 441, 1910.

§ 37: E. H. Hall, Phil. Mag. 9, 225, 1880; W. Gerlach, Handb. d. Physik. Bd. 13, S. 228, Berlin 1928.

§ 38 и 39: W. Schottky & H. Rothe, l. c. § 2; H. Stücklen, Handb. d. Physik, Bd. 14, S. 51, Berlin 1927.

§ 38: O. W. Richardson, Phil. Mag. 16, 353, 1908; 17, 813, 1909; 28, 633, 1911, S. Dushman, Phys. Rev. 21, 623, 1923.

§ 39: J. Langmuir, Phys. Z. 15, 348, 1914; J. Langmuir & K. B. Blodgett, Phys. Rev. 28, 347, 1923; W. Schottky, Phys. Z. 15, 526, 624, 1914.

§ 40 и 41: A. Sommerfeld, Z. f. Phys. 47, 1, 43, 1928; A. Sommerfeld & N. H. Frank, Rev. of mod. physics, 3, 1, 1931.

§ 42: W. V. Houston, Z. f. Phys. 47, 33, 1928; 48, 449, 1928; F. Bloch, Z. f. Phys. 52, 555, 1928; 59, 208, 1930; R. Peierls, Ann. d. Phys. 4, 121, 1930, 5, 244, 1930.

#### Монографии:

L. Nordheim, Ann. d. Phys. 7, 607, 1931;

R. Peierls, Erg. d. exakten Naturw. 11, 264, 1931;

L. Brillouin, Quantenstatistik, Berlin 1931 (есть русский перевод).

Д. § 45: W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 35, 268, 1888; 40, 93, 1890; A. Eichenwald, там же 11, 1, 421, 1903; H. A. Wilson, Phil. Trans. 204 121, 1904.

§ 46: H. Fizeau, C. R. 33, 349, 1851; Pogg. Ann. Erg. Bd. 3, 457, 1853; G. Sagnac, Journ. d. Phys. 4, 177, 1914; F. Harress, Ann. d. Phys. 62, 389, 1920.

§ 47: A. A. Michelson, Americ. Journ. 22, 120, 1881; A. A. Michelson & E. W. Morley, там же, 34, 333, 1887; R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 78 105, 1924; G. Joos, там же 7, 385, 1930.

§ 48: G. G. Stokes, Phil. Mag. 27, 9, 1845; Math. and Phys. Papers, Cambridge I, 141, 1883; H. A. Lorentz, Abh. über theor. Phys. I, 347, Leipzig 1907; W. Ritz, Ann. de chim. et de phys. 13, 145, 1908; W. de Sitter, Phys. Z. 14; 429, 1267, 1913; H. A. Lorentz, Versl. Akad. Amsterdam 1, 74, 1892; O. Lodge, London Trans. (A) 184, 826, 1909.

#### Е. Монографии:

M. v. Laue, Die Relativitätstheorie I, 4. Aufl. Braunschweig 1921;

W. Pauli jr. Enzykl. d. math. Wissensch. Bd. V, 2 Teil, S. 543;

M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins. Berlin 1920; H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Berlin 1923;

H. Thirring, Handb. d. Phys. Bd. 12, S. 245, 1927;

H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip, (сборник статей, есть русский перевод), 3. Aufl. Leipzig 1920.

I: A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 891, 1905; Jahrb. d. Rad. 4, 441, 1907; H. A. Lorentz, Proc. Amst. 1904, S. 809.

II: H. Minkowski, Phys. Z. 10, 104, 1909; Göttinger Nachr. 1907, I; Mathem. Ann. 68, 472, 1910.

- III: A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **32**, 749, 1910; **33**, 649, 1910.  
IV: A. Einstein & J. Laub, Ann. d. Phys. **26**, 532, 1908; J. Laub, там же, **46**, 705, 1915; H. Minkowski, Göttinger Nachr. 1908, 53.  
V: A. Einstein, Ann. d. Phys. **18**, 639, 1905; **20**, 627, 1906; **23**, 371, 1907;  
M. v. Laue, там же, **35**, 524, 1911; Phys. Z. **12**, 919, 1911; G. Herglotz, Ann. d. Phys. **31**, 393, 1910; **36**, 453, 1911.

**Ж. Монографии:**

- M. Planck, Einführung in die Theorie der Wärme, Leipzig 1930;  
M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung (есть русский перевод) Leipzig 1921;  
W. Pauli jr. Müller-Pouillet, Lehrb. d. Phys. 11 Aufl., 2 Bd., 2 Hälfte: 1. Teil, S. 1483—1553, Braunschweig 1929;  
M. Cerny & G. Hettner, там же, S. 1401—1427.  
§ 67a: G. Kirchhoff, Pogg. Ann. **109**, 275, 1860; Berl. Ber. 1861.  
§ 67b: Stefan, Wien. Ber. **79**, 1879; L. Boltzmann, Wied. Ann. **22**, 291, 1884; W. Wien, Berl. Ber. 1893; Wied. Ann. **52**, 132, 1894; **58**, 662, 1896.  
§ 68: Lord Rayleigh, Phil. Mag. **49**, 539, 1900; J. H. Jeans, там же, **10**, 91, 1905.  
§ 69: M. Planck, Ann. d. Phys. **1**, 69, 719, 1900; **4**, 553, 1901.  
§ 70—71: A. Einstein, Phys. Z. **18**, 121, 1917.

### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

<i>Стр.</i>	<i>Строка</i>	<i>Напечатано</i>	<i>Должно быть</i>
58	11 снизу	$\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_i = \mathbf{v}f(v^2) + \dots$	$\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{v}}f(v^2) + \dots$
207	15 сверху	$-\frac{d\beta}{4\beta^2} \frac{dx}{dt} + \dots$	$-\frac{m}{4\beta^2} \frac{d\beta}{dx} + \dots$
221	19 снизу	$= Ce^{-\frac{\epsilon}{kT}}$	$= Ce^{-\frac{\epsilon}{k\bar{T}}}$
349	8 сверху	$T_{\alpha 4} = T_{\alpha 4}$	$T_{\alpha 4} = T_{4\alpha}$

Б е к к е р — „Электронная теория“. Зак. 5810.



**Р. БЕКЕР**

**ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА**

**ТОМ II**

**ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ**