

С. В. БЕЛЛЮСТИН

КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА 1971

Беллюстин С. В.

- Б43** Классическая электронная теория. Учебн. пособие. М., «Высшая школа», 1971.
352 стр. с илл.

В книге рассматриваются основы теории относительности, экспериментальные основания, принципы и уравнения классической электронной теории, поле движущегося электрона, электронная теория диэлектриков, магнетиков и проводников.

Книга в основном соответствует содержанию программы физических факультетов педагогических институтов по вопросам классической (неквантовой) электронной теории и предполагает знание основ электродинамики.

Первые две главы, не претендуя на полный анализ понятий пространства и времени, имеют целью оказать помощь читателю в рассмотрении ряда положений классической электронной теории на основе релятивистских закономерностей.

Книга предназначается в качестве учебного пособия для студентов физических специальностей педагогических институтов, а также может быть использована преподавателями и инженерами, прикасающимися с классической электронной теорией.

Рукопись отрецензирована профессором кафедры квантовой механики ЛГУ Г. Ф. Друкаревым. Рецензия утверждена зав. отделом теоретической физики академиком В. А. Фоком.

Электронная теория является составной частью науки об электромагнитных явлениях. Она дополняет и углубляет физическую картину этих явлений, известную из классической макроскопической¹ электродинамики.

Необходимость такого дополнения и углубления видна уже из того, что в макроскопической электродинамике свойства материальной среды характеризуются лишь значениями таких материальных констант, как относительная диэлектрическая проницаемость ϵ , относительная магнитная проницаемость μ и удельная электрическая проводимость σ . При этом, например, предполагается, что ϵ имеет одно и то же значение при любой длине λ электромагнитной волны. Такое предположение находится в резком противоречии с явлением дисперсии света. Опыт показывает, что в ряде случаев ϵ существенно зависит от λ . Макроскопическая электродинамика, как теория электромагнитного поля в непрерывных средах, может претендовать на справедливость лишь в тех случаях, когда длина волны достаточно велика по сравнению с размерами, характерными для микроскопических неоднородностей среды. Строго говоря, эта теория относится к предельному случаю, когда $\lambda = \infty$.

Электронная теория рассматривает движение и взаимодействие дискретных электрических зарядов в веществе; она вскрывает физическую сущность процессов, лежащих в основе электромагнитных явлений.

Макроскопическая электродинамика, описывающая внешнюю сторону явлений, по отношению к электронной теории является теорией феноменологической, подобно тому, как, например, термодинамика является феноменологической теорией по отношению к молекулярно-кинетической теории, которая принимает во внимание поведение отдельных частиц вещества. На основании ряда экспериментов в электронной теории предполагается, что структурными единицами вещества являются заряженные частицы —

¹ От греческих слов «макрос» — большой и «скопейн» — видеть.

электроны и ионы, взаимодействующие посредством электромагнитного поля, а материальные тела рассматриваются как совокупности заряженных частиц, расположенных в вакууме. Каждая частица считается центрально-симметричной и настолько малой, что действующее на нее электромагнитное поле можно с достаточной точностью считать однородным во всем объеме частицы. Вопросы о структуре частиц и причинах их устойчивого существования электронная теория не решает. Она рассматривает взаимосвязь зарядов и поля, существующего в вакууме, и стремится дать на этой основе объяснение электрических, магнитных и некоторых оптических свойств вещества. Еще в середине XIX в. в физике появилась гипотеза об атомистической структуре электричества, которую высказал Вебер. Однако он предполагал мгновенное действие зарядов на расстоянии, что противоречило электродинамике Максвелла. В такой форме эта гипотеза не могла быть согласована с опытом.

Классическая, т. е. некантовая, электронная теория, признающая неограниченную справедливость уравнений Максвелла для вакуума, получила развитие в конце XIX в. как естественное продолжение и углубление электродинамики Фарадея—Максвелла, которая привела к пониманию свойств электромагнитного поля. Однако электрические заряды рассматривались в этой электродинамике лишь как особые точки поля. Между тем к концу XIX в. были уже известны многочисленные явления, в которых существование электрических зарядов играло первостепенную, определяющую роль. Достаточно назвать электролиз, катодные лучи и фотоэлектрический эффект. К тому же электромагнитная теория света не могла обойтись без представления о существовании электрических зарядов в атомах вещества.

Благодаря работам голландского физика Г. А. Лоренца [1] и других ученых, классическая электронная теория достигла больших успехов уже к началу XX в., а затем получила широкие возможности для своего развития на основе теории относительности.

Специальная теория относительности, созданная А. Эйнштейном в 1905 г., означала пересмотр представлений о пространстве и времени, характерных для прежней (дорелятивистской¹) физики.

¹ Релятивистский — соответствующий теории относительности (от латинского слова «relatio» — отношение).

В отличие от возникшей позднее общей теории относительности, основным содержанием которой является современная теория тяготения, специальная теория относительности не учитывает влияния полей тяготения и обычно ограничивается рассмотрением инерциальных систем отсчета, что позволяет дать правильную современную трактовку классической электронной теории, справедливую при любых скоростях движения электронов.

Значительную роль в развитии электронной теории сыграли исследования ряда русских физиков. Так, В. Ф. Миткевич в 1903 г. раскрыл характер участия электронов в явлении электрической дуги. А. Алексеев и М. Маликов выполнили в 1909 г. наиболее точное по тому времени измерение заряда электрона (§ 3-1). Электронная теория дисперсии получила подтверждение в опытах Д. С. Рождественского в 1909 г. (§ 6-9).

Крупный вклад в классическую электронную теорию внесли советские физики. Так, Я. И. Френкель в 1925 г. развил классическую теорию вращающегося электрона; П. А. Черенков в 1934 г. открыл и экспериментально исследовал излучение электрона при движении его в веществе со скоростью, превышающей скорость света в том же веществе; И. Е. Тамм и И. М. Франк в 1937 г. построили теорию этого эффекта (§ 5-9), а Д. Д. Иваненко, И. Я. Померанчук, Л. А. Арцимович и А. А. Соколов в 1944—1948 гг. разработали релятивистскую теорию излучения электромагнитных волн электронами, движущимися по окружности (§ 5-4).

Ограниченность классической электронной теории проявляется более всего в предположении, что поведение мельчайших заряженных частиц вещества — электронов и ионов определяется теми же законами, которые справедливы для макроскопических заряженных тел. Считается, в частности, что такая частица подобно маленькому заряженному шарiku обладает в каждый момент времени определенным положением и определенной скоростью, движется по соответствующей траектории и сохраняет свою индивидуальность. Эти представления во многих отношениях далеки от действительности, особенно если речь идет о поведении электронов в атомах.

Классическая электронная теория сыграла важную роль в развитии физики. Затруднения, с которыми она встретилась, привели к возникновению квантовой теории, выражающей современные представления о строении вещества. Появление квантовой механики и квантовой электродинамики означало не отмену классической

электронной теории, а определение границ ее применимости, как наглядной и достаточно точной теории для обширного круга электромагнитных явлений.

Классическая электронная теория вместе с классической электродинамикой представляет основу современного учения об электричестве и находит широкое применение в области электронных и ионных приборов, ускорителей заряженных частиц, в теории диэлектрических и некоторых магнитных свойств вещества, в физике плазмы и в космической физике.

§ 1-1. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ И ОРИЕНТИРОВКИ

Положения материальных тел в пространстве определяются в некоторой системе отсчета, жестко связанной с каким-либо материальным телом или находящейся в известном состоянии движения относительно какого-либо тела.

Представляют особый интерес инерциальные системы отсчета, в которых выполняется закон инерции (I закон Ньютона). Роль системы отсчета играет обычно прямоугольная декартова система координат x, y, z .

Инерциальная система отсчета может быть реализована лишь с некоторой степенью точности, достаточной для определенных целей. Такова, например, солнечная система отсчета, где начало координат совпадает с центром масс солнечной системы, а координатные оси направлены к таким «неподвижным» далеким звездам, которые в течение достаточно большого промежутка времени (например, в течение нескольких десятков лет) можно считать неподвижными относительно начала координат.

Следуя Ньютону, допустим, что существует такая инерциальная система отсчета, в которой справедлив не только закон инерции, но и II закон динамики, выражаемый математически в виде

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

где m и \mathbf{r} — масса и радиус-вектор материальной точки, t — время и \mathbf{F} — результирующая сила, с которой материальные объекты действуют на массу m .

Запись II закона динамики в виде уравнения (1.1) соответствует словесной формулировке Ньютона, однако массу m в дорелятивистской механике считается возможным выносить из-под знака производной по времени как величину постоянную¹.

Воспользуемся прямоугольной декартовой системой координат с осями $x = x_1, y = x_2, z = x_3$. При этом компоненты вектора \mathbf{r} обозначим x_i ($i = 1, 2, 3$); компоненты вектора \mathbf{F} будут F_i . Урав-

¹ Материальная точка, обладающая массой m , изображает при этом материальное тело, не делящееся на части.

нение (1.1) равноценно системе трех скалярных уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx_i}{dt} \right) = F_i. \quad (1.2)$$

Сдвиг начала и поворот осей координатной системы позволяют получить вторую систему отсчета, неподвижную относительно первой. Воспользуемся геометрией Эвклида, которая не только в нерелятивистской физике, но и в специальной теории относительности рассматривается как правильное обобщение опытных фактов¹.

Величины, относящиеся к новой (второй) системе отсчета, будем обозначать буквами со штрихами. Новые координаты x'_k ($k = 1, 2, 3$) являются линейными функциями прежних координат и записываются в виде

$$x'_k = a_k + \sum_{i=1}^3 b_{ki} x_i, \quad (1.3)$$

где a_k — координаты начала старой системы в новой системе, а b_{ki} — косинусы углов между новыми и старыми осями.

Разности координат преобразуются по закону

$$\Delta x'_k = \sum_{i=1}^3 b_{ki} \Delta x_i. \quad (1.4)$$

Промежутки времени будем считать одинаковыми в обеих взаимно неподвижных системах координат, что представляется очевидным в нерелятивистской физике и подтверждается специальной теорией относительности² (см. § 1-7). Аналогичным образом масса одинакова в обеих системах отсчета. На основании равенства (1.4) запишем

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx'_k}{dt} \right) = \sum_{i=1}^3 b_{ki} \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx_i}{dt} \right). \quad (1.5)$$

Компонентами любого вектора в трехмерном пространстве называется совокупность трех величин N_i , которые преобразуются при переходе к новой системе координат так же, как разности координат, т.е.

$$N'_k = \sum_{i=1}^3 b_{ki} N_i. \quad (1.6)$$

¹ В общей теории относительности устанавливается зависимость геометрии от полей тяготения и рассматривается неевклидова геометрия.

² В общей теории относительности устанавливается, что в результате действия полей тяготения время может идти по-разному во взаимно неподвижных системах координат.

Известно как обобщение опытных фактов, что сила является вектором, т. е. компоненты силы преобразуются по закону

$$F'_k = \sum_{i=1}^3 b_{ki} F_i. \quad (1.7)$$

Из соотношений (1.2), (1.5) и (1.7) получаем

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx'_k}{dt} \right) = F'_k. \quad (1.8)$$

Таким образом, II закон Ньютона формулируется в новой системе координат так же, как в первоначальной системе.

Если уравнение сохраняет свой вид при переходе от одной системы координат к другой, то это *уравнение ковариантно* относительно преобразования координат. Итак, II закон Ньютона в форме (1.2) ковариантен относительно преобразования (1.3). Легко заметить, что все законы механики сохраняют свой вид при таком преобразовании, и новая система координат является инерциальной, как и первоначальная система.

Вместо системы скалярных уравнений (1.8) II закон Ньютона можно написать в новой координатной системе в векторном виде

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right) = \mathbf{F}'. \quad (1.9)$$

Вектор \mathbf{N} с компонентами, удовлетворяющими закону преобразования (1.6), остается тем же в обеих системах координат. В итоге каждый член уравнения (1.9) равен соответствующему члену уравнения (1.1).

Величина, не изменяющаяся при переходе от одной системы координат к другой, представляет собой *инвариант преобразования*. Если все члены уравнения — инварианты, то уравнение называется инвариантным относительно данного преобразования. Таким образом, II закон Ньютона в векторной форме (1.1) инвариантен относительно преобразования (1.3). Легко видеть, что этим свойством — инвариантностью по отношению к переносу начала координат и повороту осей — обладают все векторные уравнения физики. При этом все уравнения, содержащие компоненты векторов, ковариантны, подобно уравнению (1.2), а инвариантность уравнений, содержащих только скаляры, неизменные при повороте осей, очевидна.

Итак, соблюдается *принцип относительности положения и ориентировки*: уравнения физики, справедливые в некоторой инерциальной системе координат, сохраняют свой вид в других инерциальных системах, которые отличаются переносом начала координат и поворотом осей. Здесь находят свое отражение важные физические свойства пространства в инерциальных системах отсчета — *однородность пространства*, т. е. отсутствие выделенного поло-

жения (инвариантность уравнений по отношению к переносу начала координат), и *изотропность пространства*, т. е. отсутствие выделенного направления (инвариантность или ковариантность уравнений по отношению к повороту координатных осей).

§ 1-2. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

Ограничимся здесь некоторыми вопросами классической нерелятивистской физики.

Перейдем от неподвижной инерциальной декартовой системы координат, в которой справедлив II закон Ньютона, ко второй декартовой системе, которая движется относительно первой с постоянной скоростью v . На основании принципа относительности положения и ориентировки воспользуемся такой неподвижной системой, оси которой остаются параллельными осям движущейся системы и совпадают с ними в начальный момент времени. Величины, относящиеся ко второй (движущейся) системе, будем обозначать буквами со штрихами.

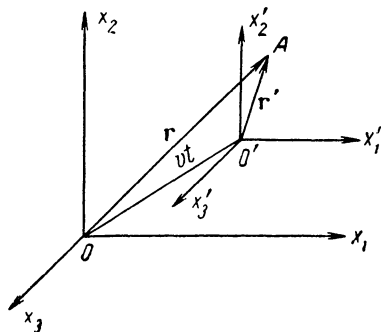


Рис. 1. К принципу относительности Галилея

По истечении некоторого промежутка времени, который в первой (неподвижной) системе обозначается как t , а во второй системе как t' , расстояние между началами систем O и O' выразится в первой системе как vt (рис. 1).

Нерелятивистская механика молчаливо принимает, что состояние относительного движения не влияет на размеры отрезков¹, т. е. *длина абсолютна*. При этом соотношение между радиусами-векторами r и r' , определяющими положения точки A относительно O и O' , таково же, как если бы обе системы координат были неподвижны. Следовательно, если воспользоваться первой системой, то из рис. 1 следует

$$r = r' + vt,$$

откуда в проекциях на координатные оси можно записать

$$x_i = x'_i + v_i t, \quad (1.10)$$

где $i = 1, 2, 3$. Если же воспользоваться второй системой, то вектор $\overline{OO'}$ выразится как vt' , следовательно,

$$r = r' + vt',$$

¹ В специальной теории относительности выясняется, что движение может влиять на размеры отрезков (см. § 1—7).

или в проекциях на оси

$$x_i = x'_i + v_i t'.$$

Из сравнения с формулой (1.10) следует, что

$$t' = t. \quad (1.11)$$

Таким образом, в нерелятивистской физике время абсолютно, независимо от состояния движения¹. Соотношения (1.10) и (1.11) представляют собой *преобразования Галилея*. Из них вытекает известная теорема сложения скоростей классической нерелятивистской механики:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx'_i}{dt'} + v_i,$$

или

$$u_i = u'_i + v_i, \quad (1.12)$$

т. е. абсолютная скорость u_i в направлении оси x_i ($i = 1, 2, 3$) равна сумме относительной скорости u'_i и переносной скорости v_i (по терминологии нерелятивистской механики).

Равенства (1.10) и (1.12) приводят к выводу, что разности координат и разности скоростей инвариантны относительно преобразований Галилея. Следовательно, инвариантны все механические силы, зависящие от расстояний (например, силы тяготения) или от относительных скоростей (силы внутреннего трения). Но именно с такими силами и имеет дело классическая механика. Ввиду параллельности осей x_i и x'_i справедливо равенство

$$F'_i = F_i.$$

В дорелятивистской механике, поскольку масса считается неизменной, II закон Ньютона (1.2) пишется в виде

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i. \quad (1.13)$$

Дифференцируя равенство (1.12) по времени, получим

$$\frac{d^2 x'_i}{dt'^2} = \frac{d^2 x_i}{dt^2},$$

т. е. ускорение инвариантно по отношению к преобразованиям Галилея.

Таким образом, II закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея. Следовательно, движение любой материальной точки в обеих рассмотренных системах координат происходит одинаково при одинаковых начальных условиях. Это

¹ Специальная теория относительности устанавливает зависимость хода времени от состояния движения (см. § 1-7).

значит, что справедлив следующий принцип относительности Галилея:

прямолинейное и равномерное движение системы отсчета не влияет на ход механических процессов в этой системе.

Отсюда видно, что любая система, движущаяся с постоянной скоростью относительно инерциальной системы, также инерциальна. Принцип относительности Галилея означает равноценность всех инерциальных систем отсчета в классической нерелятивистской механике.

В дальнейшем будет показано, что преобразования Галилея и II закон Ньютона в форме (1.13) верны лишь приближенно, в случае достаточно малых скоростей, а принцип относительности Галилея совершенно верен, но он относится лишь к механическим явлениям.

§ 1-3. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПРИНЦИПА ГАЛИЛЕЯ

Классическая дорелятивистская физика считала несомненным, что принцип относительности Галилея не может распространяться на электромагнитные явления, так как процессы, протекающие в соответствии с законами электродинамики, будут различными в разных

инерциальных системах отсчета. Следуя дорелятивистской физике, воспользуемся инерциальной системой, в которой справедливы законы электродинамики. В качестве примера рассмотрим в такой системе $Oxyz$ (рис. 2) круглый твердый бесконечно тонкий диск, равномерно заряженный положительно, движущийся вдоль оси x с постоянной скоростью v . Нормаль n к поверхности диска, перпендикулярная оси z , образует угол α с осью x .

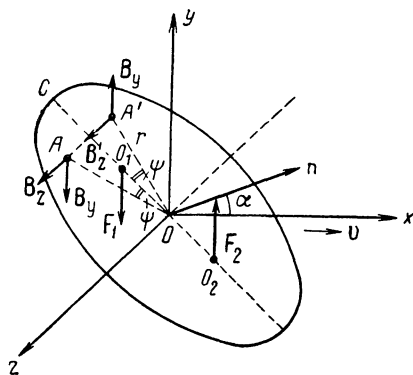


Рис. 2. Движущийся заряженный диск по дорелятивистской теории

Система координат, скрепленная с диском, также инерциальна. В такой системе существует радиальное электростатическое поле, созданное зарядами диска.

Оно действует на заряды с радиальными силами, которые приложены к твердому диску, образуют систему сил, симметричную относительно центра диска, и компенсируют друг друга.

В системе $Oxyz$, кроме взаимно компенсирующихся электростатических сил, на заряды диска действуют силы со стороны магнитного поля, созданного движением заряженного диска. Каждый заряд, движущийся вдоль оси x , создает ток в направ-

лении этой оси, магнитное поле которого перпендикулярно оси x . Поэтому результирующее магнитное поле, обусловленное движением всех зарядов диска, всюду перпендикулярно оси x , т. е. магнитная индукция имеет лишь составляющие \mathbf{B}_y и \mathbf{B}_z .

Рассмотрим при $y > 0$ точки диска A и A' , симметричные относительно радиуса OC , перпендикулярного оси z . Из соображений симметрии следует, что в этих точках одинаковы абсолютные значения компонент магнитной индукции по оси y ($|B'_y| = |B_y|$), а также по оси z ($|B'_z| = |B_z|$). Воспользуемся наглядным представлением о линиях магнитной индукции, образующих правый винт с направлением тока, т. е. с осью x .

Магнитная линия в виде окружности с центром на этой оси направлена в точке A' в сторону возрастания y и z , а в точке A в сторону убывания y и возрастания z , т. е. составляющие вектора магнитной индукции $\mathbf{B}_y, \mathbf{B}'_y, \mathbf{B}_z, \mathbf{B}'_z$ направлены так, как показано на рис. 2. Известно, что сила, действующая со стороны магнитного поля на ток, образует правовинтовую систему с направлениями тока и магнитной индукции. Рассмотрим силы, действующие на заряды диска, расположенные в геометрически одинаковых окрестностях точек A и A' . Такие силы, обусловленные противоположно направленными составляющими \mathbf{B}_y и \mathbf{B}'_y , взаимно компенсируются. В результате действия составляющих \mathbf{B}_z и \mathbf{B}'_z получаются силы, направленные противоположно оси y .

Подразделяя заряды диска при $y > 0$ на пары зарядов, расположенных симметрично относительно OC , легко видеть, что результирующая сила \mathbf{F}_1 , возникающая в результате действия магнитного поля на все такие заряды, приложена в некоторой точке O_1 на линии OC и направлена вниз. Также легко заметить, что вследствие действия магнитного поля на заряды, лежащие в области $y < 0$, получается результирующая сила $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$, приложенная в точке O_2 , симметричной точке O_1 относительно начала O .

Пара сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ стремится повернуть диск до совпадения с плоскостью xOz . При $\alpha = 0$ вращающий момент M_F равен нулю, но равновесие неустойчиво. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ магнитная индукция не имеет составляющей в плоскости диска (так как магнитные линии пересекают плоскость xOz перпендикулярно к ней), т. е. $B_z = 0$, следовательно, $F_1 = F_2 = 0$ и снова $M_F = 0$. Вычисления показывают, что момент M_F пропорционален $\sin 2\alpha$.

Диск, заряженный не положительно, а отрицательно и движущийся тоже вдоль оси x , испытывает такой же вращающий момент, так как по сравнению с рассмотренным случаем становятся противоположными направления и тока, и магнитной индукции.

Сочетание двух параллельных дисков с зарядами противоположных знаков легко осуществимо в виде обкладок плоского конденсатора. Как видно, на движущийся плоский конденсатор должен действовать (по дорелятивистским представлениям) вращающий

момент, который стремится ориентировать обкладки параллельно направлению движения. Ток и магнитная индукция растут пропорционально скорости движения v , а потому величины F_1 , F_2 и M_F пропорциональны v^2 . Заряды на обкладках конденсатора пропорциональны напряженности электрического поля E . Ток, обусловленный движением этих зарядов, и его магнитное поле также пропорциональны E . Поэтому величины F_1 , F_2 и M_F пропорциональны E^2 , т. е. пропорциональны энергии W электрического поля конденсатора.

Если поле между обкладками конденсатора однородно, то вычисление дает

$$M_F = \left(\frac{v}{c}\right)^2 W \sin 2\alpha, \quad (1.14)$$

где c — скорость света в вакууме.

Итак, процессы, обусловленные законами электродинамики, должны, казалось бы, протекать по-разному в двух инерциальных системах координат: в одной из них конденсатор неподвижен и не испытывает действия вращающего момента, а в другой движется со скоростью v и стремится повернуться под действием вращающего момента, определяемого формулой (1.14).

Не задерживаясь на рассмотрении других примеров, приводящих в дорелятивистской физике к тому же заключению о неравноценности различных инерциальных систем, заметим, что в ряде других случаев, как и в формуле (1.14), играют роль «эффекты второго порядка», зависящие от $(v/c)^2$, незначительные при $v \ll c$.

Таким образом, в дорелятивистской физике обнаруживается невозможность распространить принцип относительности Галилея на процессы, протекающие по законам электродинамики, однако эту невозможность практически нелегко заметить.

Как известно, в истории физики большую роль сыграло представление о мировом эфире, заполняющем все пространство. В дорелятивистской физике было принято считать, что все электромагнитные и оптические явления протекают в этом эфире, а уравнения электродинамики справедливы в системе координат, связанной с эфиром. В согласии с подавляющим большинством опытных фактов господствовало представление о неподвижном эфире, который не увлекается движущимися в нем телами. Предполагалось, что движение по отношению к системе отсчета, связанной с мировым эфиром, можно обнаружить на опыте, измеряя эффекты второго порядка. В предыдущем рассуждении имелось в виду в сущности движение диска или конденсатора со скоростью v в мировом эфире. Специальная теория относительности возникла в результате неудачи всех попыток обнаружить на опыте движение Земли относительно мирового эфира.

§ 1-4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Многочисленные и разнообразные эксперименты в конце XIX в. и в XX в. преследовали цель обнаружить движение системы отсчета, связанной с Землей, относительно системы, связанной с мировым эфиром.

Создатель электромагнитной теории света Максвелл установил в 1873 г., что скорость электромагнитной волны (в частности, скорость света в вакууме), выраженная в *см/сек*, равна отношению абсолютной электромагнитной единицы электрического заряда к абсолютной электростатической единице заряда. Этот вывод предполагался справедливым в той системе отсчета, связанной с «мировым эфиром», в которой считались справедливыми законы

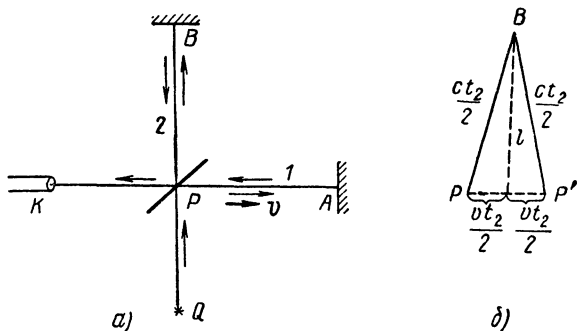


Рис. 3. Схема опыта Майкельсона

электродинамики. Иной должна быть, по Максвеллу, скорость света в системе отсчета, движущейся относительно мирового эфира. Поэтому в 1879 г. Максвелл высказал идею опыта, осуществленного в 1881 г. американским физиком Майкельсоном.

Опыт Майкельсона в принципе очень прост (рис. 3, а). Луч монохроматического света, выходящий из источника *Q*, расщепляется полупрозрачной пластинкой *P* на два луча, которые пробегают плечи $PA = PB = l$ во взаимно перпендикулярных направлениях и отражаются от зеркал *A* и *B*. Затем после прохождения луча *1* через пластинку *P* и отражения от нее луча *2* они попадают в зрительную трубу *K*, в которой обнаруживается интерференция лучей.

Будем пренебрегать несущественным отличием скорости света в воздухе от скорости его в вакууме, равной *c*. Если плечо $PA = l$ интерферометра Майкельсона совпадает с направлением скорости *v* движения Земли относительно эфира, то, согласно равенству (1.12), скорость света относительно Земли на участке *AP* будет $c + v$, а на участке *PA* она будет равна $c - v$. Луч

пройдет путь PAP за время

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v},$$

откуда

$$t_1 = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1-\beta^2},$$
$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (1.15)$$

За время t_2 , пока луч проходит путь от пластинки P к зеркалу B и обратно, пластинка смещается вместе с Землей на расстояние vt_2 и путь луча относительно эфира равен $PB + BP$ (рис. 3, б), причем

$$\frac{c^2 t_2^2}{4} = l^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4},$$

откуда

$$t_2 = \frac{2l}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Разность времен пробега лучей, интерферирующих в трубе K , при $\beta^2 \ll 1$ равна

$$t_1 - t_2 = \frac{l\beta^2}{c}. \quad (1.16)$$

При повороте прибора на 90° эта разность меняет свой алгебраический знак и полосы интерференции должны сместиться на расстояние, соответствующее числу полос N , где

$$N = \frac{2c(t_1 - t_2)}{\lambda} \quad (1.17)$$

(λ — длина световой волны). При осуществлении опыта с высокой точностью даже скорость относительно эфира, равная $v = 1,5$ км/сек, могла бы быть замечена. Смещение полос интерференции не обнаружилось, несмотря на повторения опыта при различном направлении скорости v относительно Солнца.

Использование квантовых генераторов и эффекта Мёссбауэра¹ в опытах сравнения скоростей распространения электромагнитных волн в разных направлениях позволило бы обнаружить скорость Земли относительно эфира, равную 30 м/сек и даже 5 м/сек. Однако результаты опытов были отрицательными².

В дорелятивистской физике отрицательный результат опыта Майкельсона не удалось согласовать с другими фактами. Так, например, для объяснения этого результата была предложена

¹ Эффект Мёссбауэра рассматривается в § 5-7.

² См.: Журнал «Успехи физических наук» (сокращенно УФН), т. 86, стр. 421 (1965) и 96, 519 (1968).

баллистическая гипотеза Ритца, по которой свет, подобно движению снаряда, обладает в эфире скоростью, равной векторной сумме скорости источника и скорости c света относительно неподвижного источника. Это значит, что по отношению к Земле свет распространяется во всех направлениях со скоростью c , и отрицательный результат опыта Майкельсона становится понятным. Однако баллистическая гипотеза несправедлива. Например, скорость света, идущего от правого и левого краев диска Солнца, определяемая в настоящее время с точностью до долей километра в секунду ($c = 299792,5 \pm 0,3$ км/сек), вовсе не различна, хотя вследствие вращения Солнца один из краев приближается к нам, а другой удаляется со скоростью около 2 км/сек.

Фицджеральд и, независимо от него, основоположник электронной теории Лоренц выдвинули гипотезу о сокращении линейных размеров всех тел вдоль направления скорости в виде умножения на $\sqrt{1 - \beta^2}$ при сохранении поперечных размеров. При этом в теории опыта Майкельсона получалось $t_2 = t_1$, и отрицательный результат опыта становился понятным.

Кеннеди и Торндайк видоизменили в 1932 г. опыт Майкельсона, применив интерферометр с неравными плечами. Изменение скорости такого интерферометра относительно эфира должно было бы приводить к смещению полос интерференции, если даже считать справедливой гипотезу Лоренца — Фицджеральда (это видно из решения задачи 2). В действительности смещение полос не наблюдалось, следовательно, гипотеза Лоренца — Фицджеральда (о сокращении длины вследствие абсолютного движения в неподвижном эфире) неверна.

Предположение о полном увлечении эфира материальными телами при их движении, сделанное Герцем, позволило объяснить результат опыта Майкельсона тем, что Земля всегда неподвижна относительно эфира. Но это предположение Герца противоречило, например, аберрации света, идущего от звезд (см. задачу 7). В итоге результат опыта Майкельсона оставался загадочным в дорелятивистской физике.

Не задерживаясь на обсуждении других разнообразных попыток обнаружить движение Земли относительно мирового эфира, рассмотрим еще опыт Траутона и Нобля, осуществленный впервые в 1903 г. Плоский конденсатор, укрепленный на коромысле крутильных весов, мог легко поворачиваться вокруг вертикальной оси. Конденсатор заряжался и, двигаясь вместе с Землей со скоростью v относительно эфира, должен был бы поворачиваться (см. § 1-3) так, чтобы его обкладки располагались параллельно вектору v , под действием вращающего момента, который по формуле (1.14) должен был бы достигать заметной величины при $\alpha = 45^\circ$. Благодаря высокой чувствительности подвеса ожидаемый эффект поворота конденсатора можно было бы обнаружить даже при $v = 0,5$ км/сек. Однако, несмотря на повторения опыта, не удалось заметить

какой-либо тенденции конденсатора к повороту, т. е. ожидаемый эффект отсутствовал, как и в опыте Майкельсона.

Обобщая результаты проведенных и возможных в будущем экспериментов, можно считать, как это принято в теории относительности, что мировой эфир лишен способности двигаться относительно какой-либо системы отсчета; тогда само представление о существовании эфира как носителя электромагнитного поля оказывается бессодержательным и исключается из теории. Современная физика считает, что электромагнитное поле является не состоянием эфира, а формой материи.

§ 1-5. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА

В 1905 г. была опубликована статья «К электродинамике движущихся тел» немецкого физика А. Эйнштейна, в которой излагались основные положения специальной теории относительности. Принцип относительности, предложенный Эйнштейном, представлял собой кардинальное расширение принципа относительности Галилея в соответствии с результатами экспериментов, о которых говорилось в предыдущем параграфе.

Принцип относительности Эйнштейна заключается в следующем: *все физические процессы протекают одинаково, при одинаковых условиях во всех инерциальных системах отсчета.*

Таким образом, уравнения электродинамики, как и уравнения механики, должны сохранять свой вид независимо от выбора инерциальной системы; прямолинейное и равномерное движение системы отсчета не влияет на электромагнитные процессы и не может быть обнаружено никакими опытами, происходящими внутри системы. При этом понятны отрицательные результаты экспериментов Майкельсона и других физиков, пытавшихся обнаружить движение Земли относительно мирового эфира.

Принцип относительности Эйнштейна носит характер постулата, означающего ковариантность всех правильных уравнений физики во всех инерциальных системах отсчета. При этом физическая равноценность инерциальных систем сохраняется в любой момент времени, т. е. вид уравнений физики не зависит от выбора начала отсчета времени. Подобно тому как перенос начала координат без изменения вида уравнений возможен вследствие однородности пространства (см. § 1-1), перенос начала отсчета времени соответствует однородности времени.

Если признать уравнения Максвелла правильным обобщением опытных данных, то с точки зрения принципа относительности Эйнштейна эти уравнения должны быть справедливыми в любой инерциальной системе.

Но из уравнений Максвелла вытекает, что скорость распространения электромагнитных волн в материальной среде, в частности

скорость света в вакууме, зависит от свойств этой среды и не зависит от скорости источника волн.

Согласно принципу относительности свойства вакуума следует считать одинаковыми во всех инерциальных системах¹. Следовательно, ввиду справедливости уравнений Максвелла *скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах.*

Баллистическая гипотеза Ритца, несостоятельность которой была уже отмечена (см. § 1-4), приводила бы к различным значениям скорости света в вакууме в зависимости от скорости источника света. Отрицание баллистической гипотезы в теории относительности часто называют принципом постоянства скорости света, который вытекает, как мы видим, из принципа относительности Эйнштейна и уравнений Максвелла².

Независимость скорости света от скорости источника излучения была подтверждена в 1963—1964 гг. при измерении скорости γ -излучения, испускаемого движущимися и неподвижными атомными ядрами, а также возникающего при соединении электрона с позитроном налету и при распаде быстрых мезонов³.

На первый взгляд принцип постоянства скорости света не может быть справедлив. Если свет распространяется со скоростью c в движущейся системе координат вдоль направления ее скорости v , то скорость света в неподвижной системе отсчета не может, казалось бы, равняться c , а должна быть равна $c + v$ по закону сложения скоростей (1.12). Теория относительности, следовательно, должна отрицать справедливость этого закона и потому не может согласиться с преобразованиями Галилея (1.10) и (1.11), из которых такой закон получается. Итак, принцип относительности Эйнштейна неразрывно связан с пересмотром классических дорелятивистских представлений о свойствах пространства и времени.

§ 1-6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Необходимость отказа от преобразований Галилея означает, что следует отвергнуть приводящее к этим преобразованиям представление о независимости длины отрезков от состояния движения (см. § 1-2). В отличие от гипотезы Лоренца—Фицджеральда (см. § 1-4), по которой длина меняется вследствие движения по отношению к абсолютной системе отсчета, связанной с мировым эфиром, будем исходить из принципа относительности Эйнштейна.

¹ В отличие от этого нет оснований считать свойства вещества и скорость света в нем одинаковыми во всех инерциальных системах, так как состояние движения частиц вещества различно в разных системах.

² Как указывает Эйнштейн, «принцип постоянства скорости света содержится, конечно, в уравнениях Максвелла» (Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1, «Наука», 1965, стр. 36).

³ См.: УФН, 83, 758 (1964), 86, 421 (1965) и 96, 519 (1968).

Система отсчета с началом O' (рис. 4), движущаяся прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы с началом O , также инерциальна. Пользуясь принципом относительности положения (см. § 1-1), совместим точку O' с точкой O в некоторый момент, который вследствие однородности времени (см. § 1-5) можно принять за начало отсчета времени в той и другой системах координат. Пользуясь принципом относительности ориентировки (см. § 1-1), направим оси x и x' вдоль вектора v , означающего скорость точки O' относительно точки O . Таким образом, мы ограничимся частным случаем (общий случай см. в задаче 3) преобразований при переходе от одной системы координат к другой, когда относительное движение систем происходит вдоль совпадающих осей x и x' . В некоторый момент

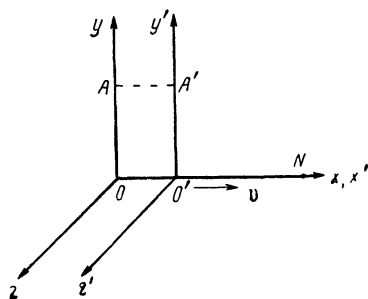


Рис. 4. К выводу преобразований Лоренца

времени, который в системе с началом O обозначается как t , а в другой (штрихованной) системе — как t' , расстояние OO' (см. рис. 4) можно выразить в виде vt в одной (нештрихованной) системе и vt' в другой системе.

Сравним перпендикулярные к оси x отрезки $OA = y$ и $O'A' = y'$, которые совпали в начальный момент времени. Точка A' движется относительно A параллельно оси x . Если не принимать во внимание влияние движения на

размеры отрезков, то по рис. 4 $y = y'$. Допустим, что в нештрихованной системе вследствие движения отрезка $O'A'$ со скоростью v его размер y равен произведению некоторого коэффициента α на размер того же отрезка в системе, относительно которой он покоится, т. е.

$$y = \alpha \cdot y'. \quad (1.18)$$

Коэффициент α подлежит определению. Он может зависеть от скорости, но при $v = 0$ $\alpha = 1$.

В штрихованной системе точка A движется антипараллельно оси $O'x'$ со скоростью v . По принципу относительности вторая система отсчета равноценна первой, а направление скорости, антипараллельное оси абсцисс, физически равноправно с параллельным оси направлением вследствие изотропности пространства. Поэтому в штрихованной системе длина y' движущегося отрезка OA должна выражаться как произведение длины y этого отрезка в системе, относительно которой он покоится, на такой же коэффициент α , какой входит в уравнение (1.18), т. е.

$$y' = \alpha \cdot y. \quad (1.19)$$

Из сравнения с равенством (1.18) находим, что

$$\alpha = 1,$$

т. е. длина отрезка, расположенного перпендикулярно направлению движения, не меняется при любой скорости движения, следовательно,

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (1.20)$$

Рассмотрим в момент времени t (или t' в другой системе) точку N на оси абсцисс (см. рис. 4). Расположенные вдоль оси x отрезки ON и $O'N$ принадлежат соответственно нештрихованной и штрихованной системам. Длина $O'N$ выражается в первой системе как

$$ON - OO' = x - vt,$$

а в другой системе как x' . Величина x' выражает длину этого отрезка в системе, относительно которой он покоится. Допустим, что вследствие движения вдоль оси x размер этого отрезка оказывается равным произведению некоторого коэффициента γ на длину того же отрезка в состоянии покоя. Тогда в нештрихованной системе длина этого отрезка равна $\gamma x'$. Две возможности выразить длину $O'N$ в первой системе приводят к равенству

$$x - vt = \gamma x'. \quad (1.21)$$

Коэффициент γ подлежит определению. Он может зависеть от величины скорости v , но при $v=0$ $\gamma=1$.

Пользуясь второй (штрихованной) системой координат, находим, что

$$OO' = vt', \quad ON = x' + vt'.$$

В первой системе скрепленный с ней отрезок ON равен x . Вследствие движения первой системы относительно второй со скоростью v (против оси x), размер того же отрезка во второй системе выразится как γx . Коэффициент γ здесь такой же, какой входит в уравнение (1.21), так как обратное направление скорости v не играет роли вследствие изотропности пространства. Благодаря двум возможностям выразить длину ON во второй (штрихованной) системе, справедливо равенство

$$x' + vt' = \gamma x. \quad (1.22)$$

Для определения коэффициента γ примем во внимание принцип постоянства скорости света. Вследствие однородности пространства и времени и изотропности пространства результат вычисления коэффициента γ не может зависеть от того, из какой точки выхо-

дит свет, каков при этом момент времени, в каком направлении свет распространяется и какое расстояние он проходит.

Для простоты вычислений допустим, что свет выходит в начальный момент времени из общего начала обеих систем и, распространяясь в вакууме вдоль оси абсцисс со скоростью c , достигает точки N в момент t (или t'). Тогда

$$x = ct, \quad x' = ct'.$$

Подставив эти выражения в уравнения (1.21) и (1.22) с почленным перемножением уравнений и учитывая равенство (1.15), получим

$$\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.23)$$

Итак, при продольном движении отрезка отношение γ его длины к длине того же отрезка в системе, относительно которой он покоится, выражается в виде равенства (1.23).

Этот результат в математическом отношении совпадает с тем, что дает гипотеза Лоренца—Фиддджеральда, но вместо характерного для этой гипотезы абсолютного сокращения длины при движении в мировом эфире результат (1.23) выражает эффект взаимного укорочения параллельных отрезков, каждый из которых движется относительно другого в направлении длины отрезка.

При скорости движения v , достаточно близкой к c , величина β близка к 1 и коэффициент γ близок к нулю, т. е. сокращение длины в направлении движения весьма существенно.

Пользуясь равенством (1.23), из уравнений (1.21) и (1.22) находим

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.24)$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.25)$$

Соотношения (1.24) и (1.25) вместе с равенствами (1.20) представляют собой *преобразования Лоренца*, получившие такое название потому, что Лоренц пришел к этим соотношениям иным путем за год до появления теории относительности, рассматривая, однако, штрихованные величины лишь как математические обозначения.

На основании уравнений (1.24) и (1.25) можно написать

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad (1.26)$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.27)$$

Эти выражения, в согласии с принципом относительности, отличаются от уравнений (1.24) и (1.25) лишь взаимной перестановкой равноправных штрихованных и нештрихованных величин с одновременной заменой относительной скорости v вдоль оси абсцисс на $-v$.

Заслуживает внимания линейность преобразований Лоренца. Если бы x' и t' были нелинейными функциями x и t , то разность координат в данной системе зависела бы не только от разности координат в другой системе, но и от того, какие именно координаты рассматриваются. Точно так же длительность процесса в одной системе зависела бы не только от длительности в другой системе, но и от того, какие моменты времени рассматриваются. Иначе говоря, длина зависела бы от выбора начала координат, в противоречии со свойством однородности пространства, а длительность зависела бы от выбора начала отсчета времени, в противоречии с однородностью времени. Таким образом, линейность преобразований Лоренца соответствует отмеченной в § 1-1 однородности пространства и времени¹.

При $\beta \rightarrow 0$ преобразования Лоренца, рассмотренные для случая относительного движения систем по оси x , совпадают в пределе, при $v=0$ с соответствующим частным случаем преобразований Галилея (1.10), причем справедливо и равенство промежутков времени в обеих системах в виде (1.11). Таким образом, преобразования Галилея содержатся, как частный случай, в более общих преобразованиях Лоренца.

Как видно из соотношения (1.25), равенство $t' = t$ справедливо не только при $v=0$, но и при $v \neq 0$, если $c = \infty$. Следовательно, абсолютный характер времени в нерелятивистской кинематике и динамике соответствует в сущности предположению о бесконечно большой скорости распространения электромагнитных волн, т. е. о мгновенном действии на расстоянии.

В теории относительности величина c играет важнейшую роль. Как видно из преобразований Лоренца, физический смысл имеют лишь случаи $\beta \leq 1$, т. е. $v \leq c$, следовательно, скорость материального объекта не может превышать скорости света в вакууме.

Легко видеть, что квадрат расстояния между двумя точками I и II, инвариантный относительно преобразований Галилея, не инвариантен относительно преобразований Лоренца, так как, в силу соотношений (1.24) и (1.20), справедливо неравенство

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \neq (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2,$$

где $\Delta x' = x'_{II} - x'_{I}$ и т. д.

¹ Строгое обоснование преобразований Лоренца с предварительным доказательством их линейности дано в монографии В. А. Фока «Теория пространства, времени и тяготения». М., Физматгиз, 1961.

Если свет выходит из первой точки и по истечении времени Δt (или $\Delta t'$) приходит во вторую точку, то

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = c^2 (\Delta t)^2$$

и

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = c^2 (\Delta t')^2,$$

откуда видно, что выражение

$$s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2 (\Delta t)^2 \quad (1.28)$$

остается в этом случае инвариантным.

Легко убедиться, что величина s^2 всегда инвариантна относительно преобразований Лоренца, т. е. из формул (1.24), (1.25) и (1.20) вытекает равенство

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2 (\Delta t')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2 (\Delta t)^2.$$

Как известно, в статистической физике с успехом используется математическое обобщение понятия пространства в виде фазового пространства. Подобно этому в теории относительности рассматривается *четырёхмерное пространство* как понятие, введенное математиком Минковским еще в 1908 г. Кроме трех координат

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad (1.29)$$

вводится четвертая координата

$$x_4 = ict, \quad (1.30)$$

где $i = \sqrt{-1}$. Равенство (1.28) принимает вид

$$s^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2. \quad (1.31)$$

Это соотношение позволяет понимать s как расстояние между двумя точками в четырехмерном пространстве, в котором, как математическое обобщение понятия реального трехмерного пространства, имеются в виду четыре взаимно перпендикулярные оси x_1, x_2, x_3, x_4 .

Величина s представляет собой интервал в четырехмерном пространстве. Инвариантность интервала играет важную роль в теории относительности. Незменность длины, характерная для нерелятивистских преобразований Галилея, означает постоянство суммы

$$(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2.$$

При этом вследствие инвариантности s^2 величина $(\Delta x_4)^2$, а потому и промежутки времени должны быть одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Итак, интервал в четырехмерном пространстве имеет абсолютное значение, и лишь при малых скоростях движения, обращаясь к преобразованию Галилея, можно «расщепить» абсолютность интервала на абсолютность длины и абсолютность времени (см. § 1-2).

Теория относительности вовсе не настаивает на относительном характере всех физических величин. Она устанавливает абсолют-

ность интервала и выявляет при этом неразрывную связь пространства и времени, взаимную обусловленность понятий длины и длительности.

Диалектический материализм рассматривает пространство и время как формы существования материи, которые не могут быть изолированы друг от друга. Теория относительности показывает, что взаимная изоляция этих понятий и связанное с этим представление об абсолютности длины и абсолютности времени являются лишь приближением к действительности, практически пригодным в случае медленных движений. Действительная взаимосвязь пространства и времени находит свое отражение в понятии четырехмерного пространства и в абсолютности интервала. Существенное физическое различие между свойствами реального трехмерного пространства и свойствами времени отображается тем, что по осям в четырехмерном пространстве откладываются *вещественные* величины x , y , z и *мнимая* величина ict .

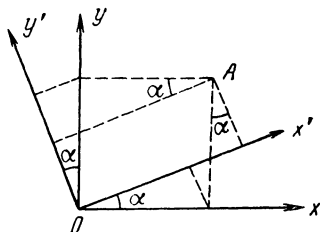


Рис. 5. Поворот осей координат

Пользуясь равенствами (1.29) и (1.30), запишем преобразования Лоренца (1.24), (1.25) и (1.20) в виде соотношений между координатами в четырехмерном пространстве

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 + i\beta x_4}{\gamma}, \\ x'_2 &= x_2; \quad x'_3 = x_3. \\ x'_4 &= \frac{x_4 - i\beta x_1}{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

В трехмерном пространстве, если осям x , y придается положение x' , y' путем поворота на угол α вокруг оси z (рис. 5), соотношения между координатами имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha, \\ z &= z. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Из сравнения с формулами (1.32) видно, что преобразования Лоренца соответствуют повороту осей x_1 , x_4 на некоторый угол ψ при неподвижных осях x_2 и x_3 , причем

$$\cos \psi = \frac{1}{\gamma}, \quad \sin \psi = \frac{i\beta}{\gamma}, \quad \operatorname{tg} \psi = i\beta.$$

Итак, переход от одной инерциальной системы к другой в реальном трехмерном пространстве отображается в четырехмерном

пространстве как поворот координатных осей x_1, x_4 на угол

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{iv}{c}, \quad (1.34)$$

где v — скорость движения второй системы относительно первой, направленная по оси x . При этом проекции неизменного интервала s на координатные оси x_1 и x_4 меняются, т. е. длина в направлении оси x и длительность зависят от выбора системы отсчета. Эта относительность длины и длительности становится практически заметной, если угол ψ существенно отличается от нуля, т. е. если скоростью v нельзя пренебречь по сравнению с c .

Физическое событие в трехмерном пространстве в определенный момент времени отображается точкой в четырехмерном мире. Такие точки, получившие название мировых точек, образуют мировую линию, соответствующую совокупности физических событий, т. е. физическому процессу. Интервал, как расстояние от одной мировой точки до другой, можно рассматривать как четырехмерный вектор с компонентами $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4$. Аналогично понятие трехмерного вектора (см. § 1 = 1), *четырёхмерный вектор*, или короче 4-вектор, представляет собой совокупность четырех величин (компонент вектора) N_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$), которые при отображающем преобразовании Лоренца повороте осей в четырехмерном пространстве преобразуются так же, как разности координат Δx_ν , т. е. согласно соотношениям (1.32):

$$\left. \begin{aligned} N'_1 &= \frac{N_1 + i\beta N_4}{\gamma}, \\ N'_2 &= N_2, \quad N'_3 = N_3, \\ N'_4 &= \frac{N_4 - i\beta N_1}{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Как легко убедиться,

$$\sum_{\nu=1}^4 N_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^4 (N'_\nu)^2, \quad (1.36)$$

а если K_ν — компоненты другого 4-вектора, то

$$\sum_{\nu=1}^4 N_\nu K_\nu = \sum_{\nu=1}^4 N'_\nu K'_\nu. \quad (1.37)$$

Инвариантная величина $\sum_{\nu=1}^4 N_\nu^2$ называется квадратом 4-вектора, компоненты которого равны N_ν .

Инвариантная величина $\sum_{\nu=1}^4 N_\nu K_\nu$ называется скалярным произведением 4-векторов с компонентами N_ν и K_ν .

Рассмотрим выражение $\sum_{\nu=1}^4 N_{\nu} G_{\nu}$, где N_{ν} являются компонентами 4-вектора, а величины G_{ν} — не компоненты 4-вектора, т. е. отклоняются от закона преобразования (1.35). Это отклонение приведет, хотя бы в некоторой системе отсчета, к нарушению инвариантности величины $\sum_{\nu=1}^4 N_{\nu} G_{\nu}$. Таким образом, выполнение во всех системах координат равенства (1.37), где N_{ν} — компоненты 4-вектора, является необходимым и достаточным условием того, что K_{ν} — также компоненты 4-вектора.

Преобразования (1.35) можно представить в форме

$$N'_{\nu} = \sum_{\alpha=1}^4 a_{\nu\alpha} N_{\alpha}, \quad (1.38)$$

причем матрица коэффициентов $a_{\nu\alpha}$ имеет вид

$$\|a_{\nu\alpha}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & i\beta \\ \gamma & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i\beta}{\gamma} & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} \quad (1.39)$$

Индекс ν совпадает с номером строки этой матрицы, а индекс α — с номером столбца.

Преобразования Лоренца при обратном переходе от штрихованной системы к нештрихованной, как мы видели, отличаются лишь противоположным знаком скорости v и величины β , что равноценно взаимной перестановке строк и столбцов в матрице коэффициентов преобразования. Таким образом,

$$N_{\nu} = \sum_{\alpha=1}^4 a_{\alpha\nu} N'_{\alpha},$$

или, если взаимно поменять равноправные индексы ν и α ,

$$N_{\alpha} = \sum_{\nu=1}^4 a_{\nu\alpha} N'_{\nu}. \quad (1.40)$$

§ 1-7. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

Исходные для кинематики понятия пространства и времени подвергаются глубокому физическому анализу в теории относительности.

Если физические события происходят в разных точках пространства (с координатами x и $x + \Delta x$) в разные моменты времени (t

и $t + \Delta t$ или t' и $t' + \Delta t'$, то из уравнения (1.25) имеем

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.41)$$

Это значит, что события, одновременные в одной системе ($\Delta t = 0$), неодновременны в другой системе ($\Delta t' \neq 0$), т. е. одновременность — понятие относительное. При $\Delta t > 0$ и

$$\Delta x > \frac{c^2 \Delta t}{v} \quad (1.42)$$

получается $\Delta t' < 0$. При этом понятие последовательности событий (второе позже первого или наоборот) также носит относительный характер. Это — признак отсутствия причинной связи между событиями.

Между мировыми точками, изображающими такие события в четырехмерном пространстве, существует *пространственноподобный интервал*, сводящийся в некоторой системе отсчета (при $v = c^2 \Delta t / \Delta x$) к расстоянию в реальном пространстве между точками, в которых события происходят одновременно. События являются при этом абсолютно удаленными в том смысле, что ни в какой системе отсчета расстояние между ними в реальном пространстве не сводится к нулю ($\Delta x' \neq 0$). Это видно, если написать на основании равенства (1.24), что

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.43)$$

и принять во внимание неравенство (1.42) при $v < c$. Если же первое событие является причиной второго, то при $\Delta t > 0$ в любой системе отсчета $\Delta t' \geq 0$, т. е. вследствие равенства (1.41) можно написать

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq \frac{c^2}{v}.$$

Это должно быть верно и в случае наибольшего возможного значения относительной скорости систем, т. е. при $v = c$. Таким образом,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq c. \quad (1.44)$$

Но $\Delta x / \Delta t$ — скорость распространения того взаимодействия, в результате которого первое событие является причиной второго события. Итак, распространение взаимодействий происходит со скоростью, не превышающей скорость в вакууме c . Никакое мгновенное действие на расстоянии невозможно в теории относительности. Скорость света в вакууме является предельной скоростью распространения каких-либо сигналов.

При выполнении условия (1.44) между мировыми точками существует *временеподобный интервал* в том смысле, что на основании соотношения (1.43) в некоторой системе отсчета (при $v = \Delta x / \Delta t$) получается $\Delta x' = 0$, т. е. координаты событий совпадают, а во времени события разделены так, что одно из них абсолютно прошедшее, а другое абсолютно будущее во всех системах отсчета. Этот вывод при условии (1.44) справедлив независимо от того, является ли одно событие причиной другого или нет.

Понятие длины является относительным. Вследствие взаимного движения двух инерциальных систем отсчета происходит, как было показано, относительное сокращение длины в направлении движения, так что отношение длины l в состоянии движения к длине того же отрезка l_0 в состоянии покоя равно величине γ , определяемой равенством (1.23), т. е.

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.45)$$

Справедливость этого соотношения в любой инерциальной системе отсчета видна и из преобразований Лоренца (1.24) или (1.26).

В самом деле, рассмотрим положение концов некоторого отрезка при $t = \text{const}$, т. е. пользуясь понятием одновременности, присущим нештрихованной системе. Тогда величина $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ имеет смысл длины l_0 некоторого отрезка, принадлежащего штрихованной системе, а $\Delta x = x_2 - x_1$ — длина l того же отрезка в нештрихованной системе, относительно которой отрезок, принадлежащий штрихованной системе, движется со скоростью v . Таким образом, верно соотношение (1.45).

Напротив, при $t' = \text{const}$, т. е. обращаясь к понятию одновременного положения концов отрезка, свойственному штрихованной системе, следует признать, что величина Δx имеет смысл длины l_0 , а $\Delta x' = l$, и тогда снова справедливо соотношение (1.45). Выраженный этим соотношением эффект сокращения длины в направлении движения является, таким образом, относительным, он связан с разным смыслом понятия одновременности в той и другой системах.

Вследствие сохранения поперечных размеров объем V тела меняется при движении так же, как длина в направлении движения, т. е. в согласии с равенством (1.45)

$$V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.46)$$

Соотношения между промежутками времени в той и другой системах отсчета легко находятся из преобразований Лоренца (1.25) и (1.27). При $x = \text{const}$ из равенства (1.25) находим

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.47)$$

а при $x' = \text{const}$ из равенства (1.27) получаем

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.48)$$

Таким образом, *длительность — понятие относительное*. Между соотношениями (1.47) и (1.48) нет противоречия потому, что они справедливы в разных системах отсчета. Соотношение (1.48) имеет тот смысл, что если *собственное время* $\Delta t'$ штрихованной системы отсчета, означающее длительность некоторого процесса в фиксированной точке этой системы, обозначить через τ , а время Δt , означающее длительность того же процесса в нештрихованной системе, обозначить через t , то

$$\tau = t \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (1.49)$$

где $\beta = v/c$, причем v — скорость системы, в которой протекает время τ , относительно системы, в которой длительность того же процесса равна t . То же самое выражает формула (1.47), где Δt имеет смысл собственного времени τ . При $v \neq 0$ всегда

$$\tau < t,$$

т. е. движение системы приводит к замедлению хода часов и соответствующему замедлению всех физических процессов, протекающих в фиксированных точках этой системы.

Этот *эффект замедления времени* носит относительный характер (как и рассмотренный ранее эффект сокращения длины в направлении движения). В каждой из двух инерциальных систем справедливо утверждение, что любой физический процесс проходит в фиксированных точках другой системы медленнее, чем в фиксированных точках данной системы.

Формула (1.49) подтверждается при измерении среднего времени t существования в космических лучах μ -мезонов (мюонов), π -мезонов и K -мезонов. Например, у медленных мюонов (при $\beta \ll 1$) $t \approx 2,2 \cdot 10^{-6}$ сек, а при больших скоростях мюонов $t \approx \frac{2,2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. При использовании эффекта Мёссбауэра соотношение (1.49) подтверждено с точностью до 1%¹.

На основании равенства (1.49) получим

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.50)$$

Но

$$v^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

где x, y, z — координаты некоторой точки той системы, в которой проходит собственное время τ .

¹ См.: УФН, 96, 519 (1968).

Таким образом,

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}}. \quad (1.51)$$

Согласно равенству (1.28) дифференциал интервала равен

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2}. \quad (1.52)$$

Поэтому

$$d\tau = \frac{ds}{ic}. \quad (1.53)$$

Дифференциал интервала ds , как и интервал s , инвариантен относительно преобразований Лоренца, следовательно, и $d\tau$ — инвариант.

Рассмотрим релятивистский закон сложения скоростей. Из уравнений (1.26) и (1.27) находим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'},$$

или, если ввести обозначение x -компоненты скорости в виде $u_x = dx/dt$, а в штрихованной системе $u'_x = dx'/dt'$, то

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}. \quad (1.54)$$

При достаточной малости $u'_x v$ по сравнению с c^2 отсюда получается, с удовлетворительной точностью, дорелятивистский закон сложения скоростей (1.12).

Пользуясь обозначениями других компонент скоростей

$$u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'},$$

из уравнений (1.20) и (1.27) находим

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}. \quad (1.55)$$

Вследствие инвариантности дифференциала собственного времени $d\tau$, величины

$$u_v = \frac{dx_v}{d\tau} \quad (v = 1, 2, 3, 4) \quad (1.56)$$

подчиняются, как и dx_v , закону преобразования (1.35), т. е. являются совокупностью компонент вектора. Для 4-вектора с компонентами u_1, u_2, u_3, u_4 принят термин *четырёхмерная скорость*.

На основании равенства (1.51), если $dx/dt = u_x$ и т. д., и с учетом того, что

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u^2, \quad (1.57)$$

где u — скорость материальной точки, имеем

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad (1.58)$$

причем τ — собственное время в системе, скрепленной с материальной точкой.

Выразим компоненты 4-скорости u_v , подставляя x_v и $d\tau$ из равенств (1.29), (1.30) и (1.58):

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ u_2 &= \frac{u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ u_3 &= \frac{u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ u_4 &= \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

Квадрат 4-скорости равен

$$\sum_{v=1}^4 u_v^2 = -c^2. \quad (1.60)$$

Дифференцируя 4-скорость по инвариантному собственному времени τ , получим *четырёхмерное ускорение*, равное

$$a_v = \frac{du_v}{d\tau}. \quad (1.61)$$

Пользуясь равенствами (1.57) ÷ (1.59) и обозначая через a_x , a_y , a_z компоненты трехмерного ускорения \mathbf{a} , находим

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{a_x}{1 - \frac{u^2}{c^2}} + \frac{(\mathbf{u}\mathbf{a}) u_x}{c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^2}, \\ a_2 &= \frac{a_y}{1 - \frac{u^2}{c^2}} + \frac{(\mathbf{u}\mathbf{a}) u_y}{c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^2}, \\ a_3 &= \frac{a_z}{1 - \frac{u^2}{c^2}} + \frac{(\mathbf{u}\mathbf{a}) u_z}{c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^2}, \\ a_4 &= \frac{i}{c} \cdot \frac{(\mathbf{u}\mathbf{a})}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^4 a_{\nu}^2 = \frac{a^2 - \left[\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c} \right]^2}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^3}. \quad (1.63)$$

Этот квадрат 4-ускорения, как и квадрат любого 4-вектора [см. (1.36)], инвариантен относительно преобразований Лоренца.

Дифференцируя равенство (1.60) по τ , получаем

$$\sum_{\nu=1}^4 u_{\nu} a_{\nu} = 0. \quad (1.64)$$

Если скалярное произведение векторов равно нулю, то они называются взаимно ортогональными. Из равенства (1.64) следует, что 4-векторы скорости и ускорения взаимно ортогональны.

§ 1-8. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА

В дорелятивистской теоретической механике известны следующие уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.65)$$

где n — число степеней свободы механической системы, а L — функция Лагранжа, зависящая от обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей \dot{q}_i ¹. Если в механической системе действуют силы, зависящие только от координат, то

$$L = T - U, \quad (1.66)$$

где T — кинетическая энергия системы, U — потенциальная энергия ее. Для материальной точки при $q_i = x_i$ ($i = 1, 2, 3$) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i.$$

При этом уравнения (1.65) совпадают со II законом Ньютона в форме (1.2).

Уравнения (1.65) математически эквивалентны утверждению, что вариация действия равна нулю, т. е. справедлив вариационный принцип

$$\delta S = 0, \quad (1.67)$$

где действие S является интегралом от функции Лагранжа по

¹ Точка над буквой здесь и далее — символ дифференцирования по времени.

времени:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (1.68)$$

причем t_1 и t_2 — начальный и конечный моменты времени, соответствующие заданным состояниям системы.

Вариация действия и связанная с этим вариация функции L понимаются как кинематически возможные бесконечно малые изменения, соответствующие виртуальным (возможным) бесконечно малым изменениям обобщенных координат δq_i в каждый момент времени t в интервале $t_1 < t < t_2$. Вариация координаты δq_i отличается от дифференциала координаты dq_i тем, что δq_i означает мысленное бесконечно малое изменение координаты q_i в данный момент времени, а dq_i — реальное изменение за время dt .

В эквивалентности уравнений (1.65) и вариационного принципа (1.67) легко убедиться, выражая вариацию функции Лагранжа в виде

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right).$$

Пользуясь затем, по правилу дифференцирования произведения, равенством

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \delta q_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

и замечая, что при $t=t_1$ и $t=t_2$ вариации координат $\delta q_i = 0$ (начальное и конечное состояния системы заданы), можем вариационный принцип (1.67), (1.68) записать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \delta q_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} dt = 0.$$

Ввиду произвольности δq_i это равенство означает справедливость уравнений (1.65).

Вариационный принцип, выраженный равенствами (1.67) и (1.68), называется принципом наименьшего действия Гамильтона—Остроградского. Этот принцип утверждает, что среди кинематически возможных перемещений системы действительным является то перемещение, для которого вариация действия равна нулю.

Вариационный принцип Гамильтона—Остроградского допускает некоторую неоднозначность в определении функции Лагранжа L . В частности, равенство нулю вариации действия не нарушается, если в выражении функции Лагранжа добавить любую постоянную величину.

Релятивистская функция Лагранжа должна быть выбрана с учетом следующих условий.

Во-первых, применение вариационного принципа (1.67), в согласии с принципом относительности Эйнштейна, будет приводить

к одинаковым соотношениям во всех инерциальных системах отсчета при инвариантности интеграла действия (1.68) относительно преобразований Лоренца.

Во-вторых, вследствие изотропности пространства функция Лагранжа свободной материальной точки не может зависеть от направления скорости \mathbf{u} этой точки.

В-третьих, если скорость u стремится к нулю, то в пределе, когда преобразования Лоренца сводятся к преобразованиям Галилея (см. § 1-6), выражение функции Лагранжа должно принимать вид, известный для этого случая из нерелятивистской механики:

$$L = \frac{mu^2}{2},$$

где m — предельное значение массы материальной точки при $u \rightarrow 0$, т. е. масса покоя.

Если же воспользоваться возможностью добавить любую постоянную величину к выражению L , то при $u \rightarrow 0$

$$L = \frac{mu^2}{2} + \text{const.} \quad (1.69)$$

Первому условию, наложенному на функцию L , удовлетворяет выражение действия S в виде

$$S = \int_1^2 \alpha d\tau, \quad (1.70)$$

где α — некоторая постоянная, $d\tau$ — инвариантный дифференциал собственного времени, а пределы интегрирования соответствуют начальному и конечному состояниям системы.

Благодаря равенству (1.58) выражение (1.70) приводится к виду

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \alpha \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt.$$

Из сравнения с равенством (1.68) находим

$$L = \alpha \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (1.71)$$

Второе условие, налагаемое на функцию L , удовлетворяется этим выражением.

При $u \rightarrow 0$ имеем

$$L \rightarrow \alpha \left(1 - \frac{u^2}{2c^2}\right) = \alpha - \frac{\alpha u^2}{2c^2}.$$

Сравним этот результат с формулой (1.69). Чтобы удовлетворить третьему условию, налагаемому на функцию L , необходимо и достаточно положить

$$\alpha = - mc^2.$$

Итак, равенство (1.71) приводится к виду

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (1.72)$$

Таково релятивистское выражение функции Лагранжа для свободной материальной точки, которая имеет массу покоя m и движется со скоростью u .

§ 1-9. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

Выражение функции Лагранжа L позволяет, как известно из теоретической механики, получить основные уравнения динамики. Величина

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

представляет собой обобщенный импульс, соответствующий координате q_i . Для свободной материальной точки заменим q_i на x_i ($i = 1, 2, 3$) и u^2 на $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2$. Тогда, пользуясь формулой (1.72), находим

$$p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (1.73)$$

Масса m' в состоянии движения равна отношению импульса к скорости. Поэтому из уравнения (1.73) имеем

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (1.74)$$

где m — инвариантная масса покоя.

Это соотношение между массой в состоянии движения m' и массой покоя m играет важную роль в теории относительности.

Представляет методический интерес другой, указанный Толменом, способ вывода этого соотношения.

Рассмотрим столкновение двух одинаковых материальных точек, которые в штрихованной системе координат, скрепленной с центром масс¹, движутся навстречу друг другу по оси x' с одинаковыми по величине скоростями: $(u'_x)_1 = u'$, $(u'_x)_2 = -u'$.

Совместим ось x нештрихованной системы координат с осью x' . Обозначим через u_1 , u_2 и v соответственно скорости первой и второй точек и скорость штрихованной системы относительно нештрихованной системы.

¹ В случае двух одинаковых масс центр масс лежит посередине между ними.

На основании закона сложения скоростей (1.54) справедливы соотношения:

$$u_1 = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}, \quad u_2 = \frac{-u' + v}{1 - \frac{u'v}{c^2}}. \quad (1.75)$$

Пусть m_1 и m_2 — массы материальных точек в нештрихованной системе. Воспользуемся законами сохранения массы и импульса:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= M, \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 &= Mv, \end{aligned}$$

где M — общая масса в момент столкновения. Исключая из этих уравнений величину M и подставляя значения u_1 и u_2 в виде (1.75), находим

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v - u_2}{u_1 - v} = \frac{1 + \frac{u'v}{c^2}}{1 - \frac{u'v}{c^2}} > 1.$$

Из равенств (1.75) легко получается

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{u'v}{c^2}}{1 - \frac{u'v}{c^2}}.$$

Из сравнения с предыдущим выражением для m_1/m_2 имеем

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}},$$

или

$$m_1 \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} = m_2 \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}.$$

Это верно и в том случае, когда $v = u'$, т. е. $u_2 = 0$. Таким образом,

$$m_1 \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} = m,$$

где m означает массу покоя. Полученный результат справедлив при любой скорости u_1 . Заменяя обозначения u_1 и m_1 на общие обозначения скорости u и массы m' , находим

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

т. е. убеждаемся в справедливости соотношения (1.74).

Если материальная точка не является свободной, выражение функции Лагранжа, справедливое для свободной точки, дополняется членом, зависящим от обобщенных координат q_i . При этом *обобщенные силы* Q_i , соответствующие обобщенным координатам q_i , выражаются через функцию Лагранжа L , а именно

$$Q_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (1.76)$$

Понятие силы в теории относительности подчиняется этому определению. Координате $q_i = x_i$ соответствует сила

$$Q_i = F_i = \frac{\partial L}{\partial x_i},$$

и уравнения Лагранжа (1.65) для материальной точки принимают вид

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

причем $p_1 = m' \dot{x}_1$, $p_2 = m' \dot{x}_2$, $p_3 = m' \dot{x}_3$, $F_1 = F_x$, $F_2 = F_y$, $F_3 = F_z$. Вместо трех скалярных уравнений можно написать векторное уравнение

$$\frac{d}{dt}(m' \mathbf{u}) = \mathbf{F}. \quad (1.77)$$

Это *уравнение движения материальной точки*. Оно отличается от II закона Ньютона в форме (1.1) лишь тем, что вместо m входит m' в виде (1.74).

Уравнение (1.77) характеризует динамическую причину невозможности движения материальной точки со скоростью c . С приближением скорости u к c масса m' в силу равенства (1.74) стремится к бесконечности, и по формуле (1.77) равенству $u = c$ соответствовала бы бесконечно большая сила F , что невозможно.

Из уравнения (1.77) в отсутствие действующей силы ($\mathbf{F} = 0$) имеем $m' \mathbf{u} = \text{const}$, т. е. справедлив закон сохранения импульса. При $u \ll c$ массу m' можно считать равной инвариантной массе покоя m . В таком случае справедливы уравнения (1.13).

Полная энергия системы W связана с функцией Лагранжа общим соотношением

$$W = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \quad (1.78)$$

Для свободной материальной точки

$$W = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L.$$

Пользуясь выражением (1.71) с заменой u^2 на основании равенств (1.59), где $u_x = \dot{x}$ и т. д., находим

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (1.79)$$

или

$$W = m'c^2. \quad (1.80)$$

Таково общее соотношение между энергией и массой. Оно является большим достижением теории относительности. Наличие массы — признак существования материи, а энергия свидетельствует о существовании некоторой физической формы движения. Поэтому соотношение (1.80) хорошо иллюстрирует общее философское утверждение о совместном существовании материи и движения.

Соотношение (1.80) прекрасно подтверждается на опыте и широко используется в ядерной энергетике.

Справедливость этого соотношения подтверждается следующими элементарными соображениями. Если материальная точка с массой m движется с очень малой скоростью u , то, как известно из нерелятивистской механики, она обладает кинетической энергией, равной $0,5 mu^2$. При $u^2 \ll c^2$ из равенства (1.74) имеем

$$\frac{m'}{m} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + 0,5 \frac{u^2}{c^2},$$

откуда легко видеть, что увеличение массы, причиной которого является движение, равно в этом случае $0,5 mu^2/c^2$. Таким образом, приобретенная масса равна приобретенной энергии, деленной на c^2 , в полном согласии с равенством (1.80).

В системе отсчета, где масса покоится, с ней связана энергия покоя

$$W_0 = mc^2. \quad (1.81)$$

Рассмотрим релятивистское соотношение между энергией и импульсом. Из формул (1.73), (1.58), (1.79) и (1.30) находим

$$p_i = \frac{m dx_i}{dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m dx_i}{d\tau} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$W = \frac{mc^2 dt}{d\tau} = \frac{mcdx_4}{id\tau}.$$

Следовательно, с учетом равенств (1.56) можно написать

$$p_i = mu_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad (1.82)$$

$$\frac{iW}{c} = mu_4. \quad (1.83)$$

Введем обозначение

$$p_4 = \frac{iW}{c}. \quad (1.84)$$

Тогда равенства (1.82) и (1.83) принимают вид

$$p_\nu = m u_\nu, \quad (\nu = 1, 2, 3, 4). \quad (1.85)$$

Величины p_ν , как и u_ν , вследствие инвариантности массы покоя m преобразуются при переходе от одной системы координат к другой по закону (1.35). Следовательно, величины p_ν являются компонентами четырехмерного вектора, который называется 4-вектором импульса или энергии-импульса, поскольку четвертая компонента p_4 связана с энергией посредством равенства (1.84). Из уравнений (1.60) и (1.85) следует, что

$$\sum_{\nu=1}^4 p_\nu^2 = -m^2 c^2,$$

или вследствие равенств (1.82) и (1.84)

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m^2 c^2,$$

откуда, заменяя $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ на p^2 , находим

$$W = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (1.86)$$

Релятивистская теория допускает существование частиц с массой покоя, равной нулю ($m=0$), но, как видно из формулы (1.74), такие частицы могут существовать, т. е. иметь массу $m' \neq 0$, лишь при движении со скоростью света в вакууме c . Для этих частиц из общей формулы (1.86) получается соотношение между энергией и импульсом в виде

$$W = pc. \quad (1.87)$$

Такое же соотношение справедливо приближенно при $p \gg mc$.

Кинетическая энергия W_k , как разность между энергией в состоянии движения W [см. (1.86)] и энергией в состоянии покоя W_0 [см. (1.81)], равна

$$W_k = c(\sqrt{p^2 + m^2 c^2} - mc). \quad (1.88)$$

При достаточно малой скорости движения u , когда $u^2 \ll c^2$, из уравнений (1.73) получается соотношение

$$p^2 \approx m^2 u^2 \ll m^2 c^2.$$

При этом из общей формулы (1.88) вытекает классическое нерелятивистское выражение кинетической энергии

$$W_k = c \left(mc + \frac{1}{2} \frac{p^2}{mc} - mc \right) = \frac{p^2}{2m},$$

т. е.

$$W_k = \frac{mu^2}{2}. \quad (1.89)$$

В связи с понятием 4-импульса представляет интерес *четырёхмерная формулировка уравнений движения*. Уравнение (1.77) с учетом соотношений (1.58) и (1.74) запишем в виде

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \text{ и т. д.,}$$

или, с учетом равенств (1.59),

$$\frac{d}{d\tau} (mu_1) = \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}};$$

$$\frac{d}{d\tau} (mu_2) = \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}};$$

$$\frac{d}{d\tau} (mu_3) = \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Вспользуемся обозначениями, предложенными Минковским при введении им понятия о четырёхмерном пространстве:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ K_2 &= \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ K_3 &= \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

и будем понимать K_1, K_2, K_3 как первые три проекции четырёхмерной силы Минковского. К трем уравнениям:

$$\frac{d}{d\tau} (mu_1) = K_1, \quad (1.91)$$

$$\frac{d}{d\tau} (mu_2) = K_2, \quad (1.92)$$

$$\frac{d}{d\tau} (mu_3) = K_3 \quad (1.93)$$

присоединим по аналогии четвертое

$$\frac{d}{d\tau} (mu_4) = K_4. \quad (1.94)$$

Последнее уравнение будем рассматривать как определение четвертой компоненты K_4 силы Минковского.

Тогда ввиду инвариантности собственного времени τ и массы покоя m величины K_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$) будут преобразовываться по тому же закону (1.35), как и компоненты 4-скорости u_ν , т. е. совокупность величин K_ν будет представлять собой компоненты 4-вектора.

Умножая уравнения (1.91) ÷ (1.94) соответственно на u_1, u_2, u_3 и u_4 и складывая, находим

$$\frac{m}{2} \frac{d}{d\tau} \sum_{\nu=1}^4 u_\nu^2 = K_1 u_1 + K_2 u_2 + K_3 u_3 + K_4 u_4.$$

Левая часть этого равенства вследствие соотношения (1.60) равна нулю, и потому

$$K_4 = - \frac{K_1 u_1 + K_2 u_2 + K_3 u_3}{u_4}. \quad (1.95)$$

Преобразуем правую часть этого равенства, пользуясь выражениями (1.90) и (1.59). Тогда

$$K_4 = \frac{i}{c} \frac{F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{i}{c} \frac{(\mathbf{F}\mathbf{u})}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (1.96)$$

Пользуясь таким выражением четвертой компоненты силы Минковского и значением u_4 из равенств (1.59), перепишем уравнение (1.94) в виде

$$c^2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \frac{(\mathbf{F}\mathbf{u})}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

или ввиду соотношения (1.58)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = (\mathbf{F}\mathbf{u}), \quad (1.97)$$

или, наконец, с учетом равенства (1.79),

$$\frac{dW}{dt} = (\mathbf{F}\mathbf{u}). \quad (1.98)$$

Это уравнение имеет тот смысл, что изменение энергии, отнесенное к единице времени, равно работе силы, отнесенной также к единице времени, в согласии с законом сохранения и превращения энергии.

Пользуясь равенством (1.61) и инвариантностью массы покоя m , можно переписать уравнения (1.91) ÷ (1.94) в форме

$$m a_\nu = K_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, 4). \quad (1.99)$$

Эта четырехмерная формулировка уравнений движения совершенно аналогична по форме II закону Ньютона в виде (1.13).

Ковариантность уравнений (1.91) ⇔ (1.94) или (1.99) видна из формы их записи: в уравнения входят инвариантные величины и компоненты 4-векторов. Следовательно, уравнение движения (1.77), означающее то же самое, что уравнения (1.91) ⇔ (1.93), ковариантно относительно преобразований Лоренца, т. е. приемлемо в релятивистской теории. Понятие четырехмерной силы позволяет выяснить на основании формул (1.35), как меняются компоненты трехмерной силы при переходе от одной системы отсчета к другой.

Задачи

1. В опыте Майкельсона эффективная длина плеча интерферометра l (см. рис. 3) многократными отражениями была доведена до 11 м , а длина волн света равнялась $\lambda = 5,9 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ (желтая линия натрия). Найти отношение ожидавшегося смещения полос интерференции (при повороте прибора на 90°) к ширине полосы в предположении, что скорость Земли относительно мирового эфира, как и относительно Солнца, составляет 30 км/сек .

2. Пусть в опыте Кеннеди — Торндайка с эффективными длинами плеч интерферометра a_0 и b_0 скорость интерферометра относительно предполагаемого эфира меняется (хотя бы вследствие наложения суточного вращения Земли на ее орбитальное движение) от v_1 до v_2 . Насколько меняется разность времен пробега интерферирующих лучей, если считать, что гипотеза Лоренца — Фицджеральда справедлива?

3. Каковы преобразования Лоренца для радиуса-вектора и времени при произвольном направлении скорости \mathbf{v} штрихованной системы отсчета относительно нештрихованной системы?

4. Вывести релятивистские законы сложения скоростей (1.54) и (1.55) путем применения преобразований Лоренца к 4-вектору скорости.

5. В опыте Физо (1951 г.) свет распространялся в потоке воды по течению и против течения. Вычислить скорость света в обоих случаях, если известна скорость воды v и скорость света c/n в неподвижной воде (n — показатель преломления воды).

6. Доказать, что из законов сложения скоростей (1.54) и (1.55) при $u' \leq c$ и $v \leq c$ всегда получается $u \leq c$.

7. Пусть наблюдатель движется относительно Солнца со скоростью v под углом ψ к направлению на звезду. Как выражается угол звездной аберрации, обусловленный движением наблюдателя относительно Солнца, и чему равен этот угол при $v = 30 \text{ км/сек}$ и $\psi = 90^\circ$?

8. Написать релятивистское уравнение движения (1.77) в развернутой форме, пользуясь равенством (1.74). Рассмотреть два частных случая: 1) сила \mathbf{F} параллельна скорости \mathbf{u} , 2) сила \mathbf{F} перпендикулярна скорости \mathbf{u} .

9. Найти закон преобразования трехмерной силы при переходе от системы, в которой тело покоится, к системе, движущейся относительно этого тела со скоростью v вдоль оси x .

§ 2-1. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

В электродинамике заслуживает внимания абсолютная гауссова система единиц (СГС), которая сыграла большую роль в истории физики и сохраняет известное значение в настоящее время. Система СГС в электродинамике включает сантиметр, грамм и секунду как основные единицы длины, массы и времени. Эта система совпадает с абсолютной электростатической системой единиц СГСЭ при измерениях электрических величин (причем диэлектрическая проницаемость вакуума ϵ_0 считается равной единице, не имеющей физической размерности) и совпадает с абсолютной электромагнитной системой единиц СГСМ в области магнитных величин (причем магнитная проницаемость вакуума μ_0 принимается за единицу, не имеющую размерности).

Однако в общих интересах науки и техники предпочтительной является Международная система единиц (СИ), где, помимо основных единиц длины — метр, массы — килограмм и времени — секунда, в число основных входит также единица силы тока — ампер. Применение единиц СИ сочетается с рационализацией формы уравнений электродинамики, а именно коэффициент 4π появляется там, где он оправдан геометрическими соотношениями (например, при вычислении поля точечного заряда), и исчезает там, где его существование не имеет геометрического смысла (например, в формуле емкости плоского конденсатора).

Пользуясь преимущественно единицами СИ и рационализованной формой записи уравнений, мы будем иногда обращаться к гауссовой системе СГС, употребляя в этих случаях индекс «Г» при буквенных обозначениях величин, например скорость света в вакууме в системе СГС

$$c_{\Gamma} \approx 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/сек} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.}$$

Отсутствие индекса «Г» будет признаком применения системы СИ. Совпадение единиц времени t в обеих системах позволяет не употреблять индекса «Г» при букве t .

Для перехода от любого уравнения в системе СГС к соответствующему уравнению в системе единиц СИ (или обратно) существенны соотношения между численными значениями физических

величин, обратные соотношениям между единицами¹. Известно, что $1 \text{ м} = 10^3 \text{ см}$, $1 \text{ кг} = 10^3 \text{ г}$ и 1 а равен 0,1 абсолютной электромагнитной единицы силы тока, которая в c_{Γ} раз больше абсолютной электростатической единицы (совпадающей с единицей тока в системе СГС). Поэтому численные значения расстояний l (или r), масс m и токов J связаны в системах СГС и СИ соотношениями:

$$l_{\Gamma} = 10^3 l \quad (r_{\Gamma} = 10^3 r); \quad (2.1a)$$

$$m_{\Gamma} = 10^3 m; \quad (2.1б)$$

$$J_{\Gamma} = \frac{c_{\Gamma}}{10} J. \quad (2.1в)$$

Так как время t одинаково в обеих системах, то из релятивистского уравнения движения (1.77), где $u_{\Gamma} = 10^3 u$, в силу равенства (2.1б) находим соотношение численных значений силы

$$F_{\Gamma} = 10^3 F, \quad (2.1г)$$

а из равенства тока производной от заряда по времени следует ввиду соотношения (2.1в), что

$$q_{\Gamma} = \frac{c_{\Gamma}}{10} q. \quad (2.2)$$

Рассмотрим взаимодействие двух зарядов, считая их для простоты точечными и положительными. В системе СГС сила взаимодействия зарядов q_{Γ} и q'_{Γ} выражается по закону Кулона в виде

$$F_{\Gamma} = \frac{q_{\Gamma} q'_{\Gamma}}{\epsilon_{\Gamma} r_{\Gamma}^2}, \quad (2.3)$$

где r_{Γ} — расстояние между зарядами, ϵ_{Γ} — диэлектрическая проницаемость среды². При этом напряженность электрического поля E_{Γ} как величина, равная силе, действующей на единицу заряда, записывается в виде

$$E_{\Gamma} = \frac{q_{\Gamma}}{\epsilon_{\Gamma} r_{\Gamma}^2}.$$

В системе единиц СИ формула напряженности электрического поля точечного заряда q в рационализованной форме имеет вид

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2}, \quad (2.4)$$

где ϵ_a — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды в системе единиц СИ.

¹ Физическая величина как мера физического явления выражается тем меньшим числом единиц, чем крупнее единицы.

² Предполагается, что среда однородна (свойства ее всюду одинаковы) и изотропна (свойства среды не зависят от направления в пространстве).

Коэффициент 4π оправдан здесь тем, что $4\pi r^2$ — поверхность сферы, через которую проходит поле заряда q . Величина силы F , действующей на заряд q' , равна Eq' , т. е.

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_a r^2}. \quad (2.5)$$

Формула (2.3) с учетом равенств (2.2) и (2.1а), (2.1г) приводит к соотношению

$$F = \frac{c_\Gamma^2 qq'}{10^{11} \epsilon_\Gamma r^2}.$$

Из сравнения с формулой (2.5) находим

$$\epsilon_a = \frac{10^{11}}{4\pi c_\Gamma^2} \epsilon_\Gamma. \quad (2.6)$$

Воспользуемся равенством

$$c_\Gamma = 10^3 c,$$

где c — численное значение скорости света в вакууме в системе единиц СИ, т. е. в *м/сек* ($c \approx 3 \cdot 10^8$ *м/сек*). Таким образом,

$$\epsilon_a = \frac{10^7}{4\pi c^2} \epsilon_\Gamma.$$

Для вакуума $\epsilon_\Gamma = 1$ и, следовательно, *диэлектрическая проницаемость вакуума* ϵ_0 , называемая электрической постоянной, равна

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \phi/m. \quad (2.7)$$

Единицей диэлектрической проницаемости в системе СИ является фарада на метр (ϕ/m), как это видно из уравнения (2.4), где E выражается в вольтах на метр (ϕ/m), а отношение кулона к вольту (κ/ϕ) равно фараде.

Относительная диэлектрическая проницаемость ϵ как отношение диэлектрической проницаемости ϵ_a к ϵ_0 равна

$$\epsilon = \frac{4\pi c^2}{10^7} \epsilon_a$$

и совпадает с ϵ_Γ ввиду равенства (2.6).

Выражение для E_Γ благодаря равенствам (2.2), (2.1а) и (2.6) приводится к виду

$$E_\Gamma = \frac{10^6}{4\pi c_\Gamma} \frac{q}{\epsilon_a r^2}.$$

Из сравнения с уравнением (2.4) получаем

$$E_\Gamma = \frac{10^6}{c_\Gamma} E. \quad (2.8)$$

Электрическая индукция \mathbf{D} связана с напряженностью поля \mathbf{E} соотношением¹

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E} \quad (2.9)$$

или в системе СГС

$$\mathbf{D}_\Gamma = \epsilon_\Gamma \mathbf{E}_\Gamma.$$

Из сравнения этих соотношений с учетом равенств (2.6) и (2.8) находим в скалярной форме

$$D_\Gamma = 4\pi c_\Gamma \cdot 10^{-9} D. \quad (2.10)$$

Закон Био—Савара в системе СГС имеет вид

$$d\mathbf{H}_\Gamma = \frac{J_\Gamma [d\mathbf{l}_\Gamma \mathbf{r}'_\Gamma]}{c_\Gamma r_\Gamma^2} = \frac{J_\Gamma [d\mathbf{l}_\Gamma \mathbf{r}_\Gamma]}{c_\Gamma r_\Gamma^3},$$

где $d\mathbf{l}_\Gamma$ — элемент линейного тока J_Γ , создающий напряженность магнитного поля $d\mathbf{H}_\Gamma$ на расстоянии r_Γ , а $\mathbf{r}'_\Gamma = \mathbf{r}_\Gamma / r_\Gamma$ — единичный вектор.

Единица напряженности магнитного поля в системе СИ выбирается так, что из формулировки закона Био—Савара исключается скорость света и в знаменателе добавляется 4π вследствие рационализации формы уравнения, как и в законе Кулона.

Итак,

$$d\mathbf{H} = \frac{J [d\mathbf{l}r']}{4\pi r^2} = \frac{J [d\mathbf{l}r]}{4\pi r^3}. \quad (2.11)$$

Выражение для $d\mathbf{H}_\Gamma$ в силу равенств (2.1 а, в) приводится к виду

$$d\mathbf{H}_\Gamma = \frac{J [d\mathbf{l}r]}{10^3 r^3}.$$

Из сравнения с уравнением (2.11) находим

$$H_\Gamma = 4\pi \cdot 10^{-3} H. \quad (2.12)$$

Напряженность магнитного поля в системе единиц СИ, согласно формуле (2.11), выражается в амперах на метр (a/m), а в системе СГС, как известно, — в эрстедах (э). В силу равенства (2.12)

$$1 a/m = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{э}.$$

По закону Ампера в системе СГС сила, действующая на элемент $d\mathbf{l}_\Gamma$ линейного тока J_Γ со стороны магнитного поля с индукцией

¹ Это соотношение справедливо только для изотропных сред, причем ϵ_a имеет определенное единственное значение лишь в случае, если среда однородна и поле не меняется со временем. Общая связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} будет рассмотрена в § 2-5. В системе отсчета, относительно которой тело движется, оно не является изотропной средой, а соотношение (2.9) справедливо (при изотропии в системе отсчета, скрепленной с телом) приближенно, если скорость тела достаточно мала (см. также § 2-5).

B_{Γ} , равна

$$dF_{\Gamma} = \frac{J_{\Gamma}}{c_{\Gamma}} [dl_{\Gamma} B_{\Gamma}].$$

В системе СИ единица магнитной индукции подбирается так, что скорость света не входит в выражение силы:

$$dF = J [dlB]. \quad (2.13)$$

Выражение для dF_{Γ} ввиду формул (2.1), (2.2) и (2.1г) приводит к равенству

$$dF = 10^{-4} J [dlB_{\Gamma}].$$

Из сравнения с выражением (2.13) находим

$$B_{\Gamma} = 10^4 B. \quad (2.14)$$

Отсюда видно, что единица магнитной индукции в системе СИ — тесла ($mл$) связана с единицей системы СГС — гауссом ($гс$) соотношением

$$1 mл = 10^4 гс.$$

Под абсолютной магнитной проницаемостью μ_a понимается (в случае изотропных сред) величина, равная отношению магнитной индукции к напряженности магнитного поля¹, т. е. $\mu_a = B/H$.

Таким образом,

$$B = \mu_a H, \quad (2.15)$$

а в системе СГС

$$B_{\Gamma} = \mu_{\Gamma} H_{\Gamma}.$$

С учетом равенств (2.14) и (2.12) справедливо соотношение

$$\mu_{\Gamma} = \frac{10^7}{4\pi} \mu_a.$$

Отсюда получается, что в системе СИ магнитная проницаемость вакуума μ_0 , называемая магнитной постоянной, равная значению μ_a при $\mu_{\Gamma} = 1$, имеет величину

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} гн/м. \quad (2.16)$$

Безразмерная величина $\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0} = \mu_{\Gamma}$ называется относительной магнитной проницаемостью.

Единица магнитной проницаемости в СИ вследствие равенства (2.15) выражается как отношение единицы магнитной индукции —

¹ Определенное единственное значение μ_a существует, если среда однородна и поле не меняется со временем. Общая связь между B и H будет рассмотрена в § 4-4. При движении тела изотропии нет, а соотношение (2.15) справедливо (при изотропии в системе отсчета, скрепленной с телом) приближенно, при $\beta \ll 1$ (см. также § 2-5).

тесла ($мл$) к единице напряженности магнитного поля — ампер на метр ($а/м$). Но в силу соотношения

$$L = \frac{\Phi}{J} = \int_S \frac{B_n dS}{J},$$

где L — индуктивность контура в генри ($гн$), S — площадь, через которую проходит магнитный поток Φ , получим $гн = мл \cdot м^2/а$, и потому $\frac{мл}{а/м} = гн/м$.

В системе единиц СИ диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума ϵ_0 и μ_0 не являются отвлеченными числами, и все четыре меры электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{V} и \mathbf{H} имеют различные размерности. В системе СГС размерности этих четырех величин одинаковы. Такая особенность системы СГС затрудняет выяснение различного физического смысла указанных величин и сужает возможности анализа размерностей. Однако при этом облегчается понимание электромагнитного поля как единой физической реальности, деление которой на электрическое поле и магнитное поле зависит от выбора системы отсчета (см. § 2-5). В этом смысле система СГС предпочтительнее¹, чем СИ.

Так как объемная плотность заряда ρ по определению выражается в виде

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

а для объема V вследствие равенства $1 м^3 = 10^6 см^3$ справедливо соотношение

$$V_{\Gamma} = 10^6 V,$$

то ввиду равенства (2.2) можно написать

$$\rho_{\Gamma} = \frac{dq_{\Gamma}}{dV_{\Gamma}} = 10^{-7} c_{\Gamma} \frac{dq}{dV},$$

или

$$\rho_{\Gamma} = 10^{-7} c_{\Gamma} \rho. \quad (2.17)$$

Плотность тока j по определению равна

$$j = \frac{dJ}{dS}$$

или в системе СГС

$$j_{\Gamma} = \frac{dJ_{\Gamma}}{dS_{\Gamma}}.$$

¹ М. А. Леонтович. Вестник АН СССР, № 6, 1964, стр 89.

Принимая во внимание соотношение (2.1в) и замечая, что вследствие равенства (2.1а) $S_{\Gamma} = 10^4 S$, находим

$$j_{\Gamma} = c_{\Gamma} \cdot 10^{-5} j. \quad (2.18)$$

Таблица соотношений между численными значениями некоторых величин в системах СГС и СИ дана в приложении I.

§ 2-2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Важнейшую роль в релятивистской электродинамике играют четыре уравнения Максвелла. Запишем их сначала в системе СГС:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{H}_{\Gamma} &= \frac{4\pi}{c_{\Gamma}} \mathbf{j}_{\Gamma} + \frac{1}{c_{\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{D}_{\Gamma}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{D}_{\Gamma} &= 4\pi \rho_{\Gamma}, \\ \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{E}_{\Gamma} &= -\frac{1}{c_{\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}_{\Gamma}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{B}_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Если \mathbf{a} — любой вектор, то выражения $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ (для простоты берем прямоугольную декартову систему координат) имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \\ \operatorname{rot}_x \mathbf{a} &= \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Из соотношения (2.1а) видно, что $dx_{\Gamma} = 10^2 dx$ и т. д. Поэтому значения $\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{a}$ в системе СГС связаны со значениями $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ в системе единиц СИ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{a} &= 10^{-2} \operatorname{div} \mathbf{a}, \\ \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{a} &= 10^{-2} \operatorname{rot} \mathbf{a}. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Например, в связи с равенством (2.12) имеем

$$\operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{H}_{\Gamma} = 10^{-2} \operatorname{rot} \mathbf{H}_{\Gamma} = 4\pi \cdot 10^{-5} \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

Поэтому с учетом равенств (2.18), (2.10), (2.17), (2.8) и (2.14) уравнения Максвелла (2.19) в СИ записываются в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (2.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad (2.22)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (2.23)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.24)$$

Признаком использования системы СИ служит отсутствие в этих уравнениях скорости света и рационализация формы уравнений, т. е. отсутствие коэффициента 4π . Таким образом, уравнения Максвелла записываются в СИ значительно проще, чем в системе СГС.

Уравнения (2.24) и (2.23) тождественно удовлетворяются выражениями

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad (2.25)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.26)$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал, φ — скалярный потенциал. В системе СГС соответствующие уравнения (2.19) удовлетворяются выражениями

$$\mathbf{B}_\Gamma = \text{rot}_\Gamma \mathbf{A}_\Gamma;$$

$$\mathbf{E}_\Gamma = -\text{grad}_\Gamma \varphi_\Gamma - \frac{1}{c_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{A}_\Gamma}{\partial t}.$$

Аналогично соотношениям (2.20) запишем

$$\text{rot}_\Gamma \mathbf{A}_\Gamma = 10^{-9} \text{rot } \mathbf{A}_\Gamma;$$

$$\text{grad}_\Gamma \varphi_\Gamma = 10^{-9} \text{grad } \varphi_\Gamma.$$

Из сравнения последних формул для \mathbf{B} и \mathbf{B}_Γ , \mathbf{E} и \mathbf{E}_Γ , пользуясь равенствами (2.14) и (2.8), находим

$$\mathbf{A}_\Gamma = 10^6 \mathbf{A}, \quad \varphi_\Gamma = \frac{10^8}{c_\Gamma} \varphi.$$

§ 2-3. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Применив операцию дивергенции к уравнению Максвелла (2.21), в левой части этого уравнения получим нуль; переставив затем в правой части уравнения независимые операции $\partial/\partial t$ и div и заменив $\text{div } \mathbf{D}$ из уравнения (2.22), находим *уравнение непрерывности*

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.27)$$

откуда

$$\int_V \text{div } \mathbf{j} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV,$$

или в связи с формулой Остроградского

$$\oint j_n dS = - \frac{\partial q}{\partial t},$$

где j_n — проекция вектора \mathbf{j} на внешнюю нормаль к поверхности S . Смысл этого соотношения заключается в том, что уменьшение

заряда q в объеме V за единицу времени равно количеству электричества, выходящего через поверхность S также за единицу времени. Таким образом, заряд внутри объема V меняется путем протекания электричества через замкнутую поверхность S , ограничивающую этот объем.

По смыслу уравнения непрерывности (2.27) электричество может лишь непрерывно перемещаться, но не возникает и не уничтожается. Отсюда понятно название этого уравнения, появившееся по аналогии с гидродинамикой, где рассматривается непрерывное течение жидкости. Закон *сохранения электрического заряда*, выраженный уравнением непрерывности (2.27), — важный закон природы. Он выполняется в согласии с принципом относительности во всех инерциальных системах отсчета.

Выясним, какова соответствующая этому утверждению *четырёхмерная формулировка уравнения непрерывности*, ковариантная относительно преобразований Лоренца.

Пользуясь обозначениями (1.29) и (1.30), перепишем уравнение непрерывности (2.27) в виде

$$\frac{\partial j_x}{\partial x_1} + \frac{\partial j_y}{\partial x_2} + \frac{\partial j_z}{\partial x_3} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial x_4} = 0. \quad (2.28)$$

Посмотрим, как преобразуется оператор $\partial/\partial x_\alpha$, при переходе от одной системы отсчета к другой (штрихованной) системе. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}.$$

Но x_α и x'_ν — компоненты 4-вектора, связанные преобразованиями Лоренца в виде (1.40) с заменой N_α на x_α и N'_ν на x'_ν . Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \sum_{\alpha=1}^4 a_{\nu\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \quad (2.29)$$

Из сравнения с формулой (1.38) видно, что символы $\partial/\partial x_\alpha$ подчиняются тому же закону преобразования, как и величины N_α , т. е. являются компонентами 4-вектора, имеющего символический характер аналогично трехмерному оператору ∇ с компонентами $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$. Совокупность операторов $\partial/\partial x_1$, $\partial/\partial x_2$, $\partial/\partial x_3$ и $\partial/\partial x_4$ представляет собой *четырёхмерный оператор производных*. Произведение такого оператора на скаляр φ , т. е. 4-вектор с компонентами $\partial\varphi/\partial x_\alpha$ выражает *четырёхмерный градиент функции φ* .

Как было выяснено в § 1-6, инвариантность выражения $\sum_\nu N_\nu K_\nu$, где N_ν — компоненты 4-вектора, является необходимым и достаточным условием того, что K_ν — также компоненты 4-вектора. Поэтому, понимая под N_ν величины $\partial/\partial x_\nu$, и основываясь на

уравнении (2.28), следует ввести термин *четырёхмерная плотность тока*, причем компоненты этого 4-вектора таковы:

$$j_1 = j_x, \quad j_2 = j_y, \quad j_3 = j_z, \quad j_4 = ic\rho. \quad (2.30)$$

Такие частные аспекты четырехмерной плотности тока, как плотность тока \mathbf{j} и плотность заряда ρ , носят относительный характер. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой компоненты четырехмерной плотности тока преобразуются по формулам (1.35).

Если в некоторой системе заряды неподвижны ($j_1 = j_2 = j_3 = 0$), то в системах, движущихся относительно данной, $\mathbf{j} \neq 0$ и $\rho' = \rho/\gamma = \rho/\sqrt{1-\beta^2}$. В связи с равенством (1.46) заряд $q = \int \rho dV$ инвариантен относительно преобразований Лоренца.

Возможно также, что в некоторой системе $\rho = 0$, но $\mathbf{j} \neq 0$, т. е. положительные и отрицательные заряды компенсируют друг друга, но ток есть, например, при движении электронов в твердом теле. Тогда в другой системе, движущейся относительно данной в направлении тока, плотность положительного заряда изменяется благодаря тому, что объем тела уменьшается по формуле (1.46), а плотность отрицательного заряда изменяется иным образом в согласии с изменением скорости электронов по формуле (1.54). В итоге во второй системе $\rho' \neq 0$ потому, что в первой системе, где $\rho = 0$, электроны движутся.

Запишем уравнение (2.28) в виде

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0, \quad (2.31)$$

т. е. четырехмерная дивергенция плотности тока равна нулю.

§ 2-4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Основываясь на уравнениях Максвелла, найдем, каким уравнениям удовлетворяют в релятивистской электродинамике скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля в вакууме.

Потенциалы φ и \mathbf{A} в соотношениях (2.26) и (2.25) являются вспомогательными величинами, позволяющими установить, каковы векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{B} . Непосредственно потенциалы не измеряются, но они способны играть в теории важную роль обобщенных координат электромагнитного поля, как будет видно в § 2-6.

Без изменения \mathbf{E} и \mathbf{B} можно заменить \mathbf{A} и φ в уравнениях (2.25) и (2.26) на \mathbf{A}' и φ' , если

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f; \quad (2.32)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (2.33)$$

где f — произвольная скалярная функция координат и времени.

Эти соотношения представляют собой градиентные преобразования.

Физический смысл имеют лишь величины, не меняющиеся при градиентных преобразованиях, т. е. удовлетворяющие требованию градиентной инвариантности.

Произвольное определение потенциалов \mathbf{A} и φ позволяет ввести дополнительное условие Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\epsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (2.34)$$

которое ограничивает (калибрует) вид функции в градиентных преобразованиях¹ (см. задачу 11), называемых при этом калибровочными преобразованиями.

Благодаря этому условию Лоренца, из уравнений Максвелла (2.21) и (2.22), соотношений (2.25), (2.15), (2.26), (2.9) и равенства $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ легко получаются уравнения Даламбера:

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \mathbf{j}, \quad (2.35)$$

$$\Delta \varphi - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (2.36)$$

Однако с точки зрения электронной теории представляют интерес свойства электромагнитного поля в вакууме, так как взаимодействие заряженных частиц осуществляется посредством именно такого поля (см. «Введение»).

Заменим ϵ_a и μ_a соответственно на ϵ_0 и μ_0 и примем во внимание, что, в согласии с равенствами (2.7) и (2.16),

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (2.37)$$

Тогда уравнения (2.34) ÷ (2.36) с учетом равенств (1.29) и (1.30) приводятся к виду

$$\frac{\partial A_x}{\partial x_1} + \frac{\partial A_y}{\partial x_2} + \frac{\partial A_z}{\partial x_3} + \frac{i}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = 0, \quad (2.38)$$

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (2.39)$$

$$\square \varphi = -\mu_0 c^2 \rho, \quad (2.40)$$

где

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

— оператор Даламбера, представляющий собой четырехмерный аналог трехмерного оператора Лапласа Δ .

¹ Кроме наиболее распространенной калибровки по Лоренцу, возможны другие калибровки (см. [2]).

Совершенно так же, как из уравнения непрерывности (2.28) был сделан вывод о существовании 4-вектора плотности тока, из уравнения (2.38) следует, что существует *четырёхмерный потенциал* с компонентами

$$A_1 = A_x, \quad A_2 = A_y, \quad A_3 = A_z, \quad A_4 = \frac{i\varphi}{c}. \quad (2.41)$$

Таким образом, уравнение (2.38) принимает вид

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (2.42)$$

Воспользуемся равенством проекций обеих частей уравнения (2.39) на каждую координатную ось и умножим на i/c . Получаем систему четырех уравнений для компонент векторов A_ν и j_j :

$$\square A_\nu = -\mu_0 j_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, 4). \quad (2.43)$$

Ковариантность уравнений (2.42) и (2.43) по отношению к преобразованиям Лоренца видна из четырехмерной формы их записи. В самом деле, левая часть уравнения (2.42) представляет собой скалярное произведение двух 4-векторов, инвариантность которого выражена равенством (1.37). Итак, уравнение (2.42) сохраняет свой вид во всех системах отсчета. Уравнение (2.43) также ковариантно вследствие того, что 4-векторы потенциала и плотности тока преобразуются по одинаковому закону (1.35).

§ 2-5. КОВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Ковариантность уравнений Максвелла для вакуума, т. е. сохранение их вида во всех инерциальных системах отсчета, не вызывает сомнений, если рассматривать принцип постоянства скорости света в вакууме во всех системах как следствие принципа относительности (см. § 1-5) и уравнений Максвелла. Однако логически возможно рассматривать принцип постоянства скорости света в вакууме как постулат, конкретизирующий общую идею о существовании предельной, одинаковой во всех системах отсчета, скорости движения тел и распространения взаимодействий (см. § 1-6, 1-7). С этой точки зрения надо непосредственно выяснить ковариантность уравнений Максвелла для вакуума относительно преобразований Лоренца.

Такое выяснение представляет большой физический интерес потому, что оно связано с ковариантной четырехмерной формулировкой законов электродинамики вакуума.

Для среды, отличной от вакуума, уравнения Максвелла (2.9) и (2.15) отнюдь не являются релятивистски ковариантными. Как показал еще Минковский в 1908 г., если в системе отсчета, жестко связанной с изотропной средой, известны диэлектрическая прони-

цаемость ϵ_a и магнитная проницаемость μ_a , то в другой системе отсчета, относительно которой среда движется со скоростью \mathbf{v} , справедливы следующие релятивистски ковариантные соотношения¹ (в системе единиц СИ):

$$\mathbf{D} + \frac{1}{c^2} [\mathbf{vH}] = \epsilon_a (\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]),$$

$$\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{vE}] = \mu_a (\mathbf{H} - [\mathbf{vD}]).$$

Поскольку $\epsilon_a \neq \epsilon_0$ и $\mu_a \neq \mu_0$, эти соотношения Минковского сводятся к уравнениям (2.9) и (2.15) лишь при $\mathbf{v} = 0$. Напротив, в вакууме благодаря равенству $\epsilon_a \mu_a = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ уравнения (2.9) и (2.15) согласуются с соотношениями Минковского при любой скорости \mathbf{v} .

Система уравнений Максвелла для вакуума эквивалентна ковариантным уравнениям (2.42) и (2.43) вместе с соотношениями (2.25) и (2.26). Поэтому для доказательства ковариантности уравнений Максвелла достаточно установить ковариантность выражений поля через потенциалы в виде (2.25) и (2.26). Рассмотрим проекции этих векторных равенств на координатные оси с учетом (2.41):

$$E_x = -\frac{c}{i} \frac{\partial A_4}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial t} \quad \text{и т. д.}$$

$$B_x = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \quad \text{и т. д.}$$

Пользуясь обозначениями (1.29) и (1.30), запишем

$$\left. \begin{aligned} \frac{iE_x}{c} &= \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1}; & B_x &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \\ \frac{iE_y}{c} &= \frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2}; & B_y &= \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \\ \frac{iE_z}{c} &= \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3}; & B_z &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Выражения типа $\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\eta}$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$; $\eta = 1, 2, 3, 4$) являются произведениями компонент четырехмерного оператора производных $\partial/\partial x_\eta$ на A_ν . При переходе от одной системы координат к другой выражения $\partial/\partial x_\eta$ преобразуются на основании равенства (2.29) по закону

$$\frac{\partial}{\partial x'_\eta} = \sum_{\sigma=1}^4 a_{\eta\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\sigma},$$

¹ См: А. Зоммерфельд. Электродинамика. М., ИЛ, 1958.

а компоненты потенциала A_ν преобразуются по закону (1.38) с матрицей коэффициентов преобразования (1.39). Таким образом,

$$A'_\nu = \sum_{\alpha=1}^4 a_{\nu\alpha} A_\alpha,$$

следовательно,

$$\frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\eta} = \sum_{\sigma=1}^4 \sum_{\alpha=1}^4 a_{\eta\sigma} a_{\nu\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\sigma}. \quad (2.45)$$

Четырехмерным тензором второго ранга называется совокупность 16 величин¹, характеризующихся двумя индексами, например α и σ (или ν и η), если любой индекс может принимать значения 1, 2, 3 или 4 и величины $T_{\sigma\alpha}$ — компоненты тензора преобразуются при переходе от одной системы координат к другой как произведение компонент двух 4-векторов, т. е. по закону

$$T'_{\eta\nu} = \sum_{\sigma=1}^4 \sum_{\alpha=1}^4 a_{\eta\sigma} a_{\nu\alpha} T_{\sigma\alpha}, \quad (2.46)$$

где $a_{\eta\sigma}$ (или $a_{\nu\alpha}$) — коэффициенты преобразования, которые можно представить как элементы матрицы, причем первый индекс у коэффициента указывает номер строки, а второй — номер столбца матрицы. Из сравнения соотношений (2.46) и (2.45) видно, что выражения типа $\partial A_\alpha / \partial x_\sigma$ являются компонентами четырехмерного тензора второго ранга, причем матрица коэффициентов преобразования $a_{\nu\alpha}$ имеет вид (1.39). Разности выражений такого типа удовлетворяют тому же закону преобразования, т. е. также являются компонентами тензора. Таким образом, на основании равенств (2.44) величины

$$\frac{iE_x}{c}, \quad \frac{iE_y}{c}, \quad \frac{iE_z}{c}, \quad B_x, \quad B_y, \quad B_z$$

представляют собой компоненты $F_{\eta\nu}$ 4-тензора второго ранга; это тензор электромагнитного поля. Компоненты $F_{\eta\nu}$ удовлетворяют равенствам:

$$F_{\eta\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\eta} - \frac{\partial A_\eta}{\partial x_\nu} \quad (\eta, \nu = 1, 2, 3, 4). \quad (2.47)$$

Из этого выражения следует, что

$$F_{\nu\eta} = -F_{\eta\nu}. \quad (2.48)$$

Совокупность компонент тензора можно представить в виде матрицы, понимая первый индекс как номер строки и второй как

¹ Здесь число компонент тензора равно 16 потому, что число компонент n -мерного тензора k -го ранга равно n^k . Вектор является тензором первого ранга, а скаляр — тензором нулевого ранга.

номер столбца. Равенство (2.48) означает, что тензор электромагнитного поля антисимметричен. Поэтому компоненты тензора при $\nu = \eta$ (расположенные по главной диагонали матрицы) равны нулю. На основании равенств (2.44) и (2.47) тензор электромагнитного поля можно представить в виде

$$\|F_{\eta\nu}\| = \begin{vmatrix} 0 & B_z & -B_y & \frac{-iE_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & \frac{-iE_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & \frac{-iE_z}{c} \\ \frac{iE_x}{c} & \frac{iE_y}{c} & \frac{iE_z}{c} & 0 \end{vmatrix} \quad (2.49)$$

Этот тензор имеет шесть независимых компонент в соответствии с шестью компонентами векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} в трехмерном пространстве.

Ковариантность соотношений (2.25) и (2.26) видна из того, что их можно представить в виде тензорного равенства (2.47). Действительно, если тензорное равенство написать в виде

$$T_{\sigma\alpha} = 0,$$

то после умножения на коэффициенты $a_{\eta\sigma}$ и $a_{\nu\alpha}$ и суммирования по индексам σ и α получается, с учетом формулы (2.46), равенство

$$T'_{\eta\nu} = 0,$$

т. е. тензорное равенство удовлетворяет требованию ковариантности.

Итак, уравнения Максвелла в случае вакуума ковариантны относительно преобразований Лоренца, т. е. являются релятивистскими уравнениями электромагнитного поля. Благодаря существованию тензора электромагнитного поля (2.49) можно легко выразить компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} в некоторой системе координат через компоненты их в другой системе на основании формулы (2.46) с заменой $T_{\sigma\alpha}$ на $F_{\sigma\alpha}$ и с учетом матрицы преобразования (1.39). Например,

$$B'_x = \frac{1}{c} F'_{23} = \frac{1}{c} a_{22} a_{33} F_{23};$$

$$B'_y = \frac{1}{c} F'_{31} = \frac{1}{c} (a_{33} a_{11} F_{31} + a_{33} a_{14} F_{34}) \text{ и т. д.}$$

Таким образом, находим

$$\left. \begin{aligned} B'_x &= B_x; \quad B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ B'_z &= \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad E'_x = E_x, \\ E'_y &= \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad E'_z = \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

Итак, электромагнитное поле выглядит по-разному в различных системах отсчета. Возможны такие случаи, когда оно сводится к одному лишь электрическому или к одному лишь магнитному полю. Деление единой объективной реальности — электромагнитного поля на электрическое и магнитное поля зависит от выбора системы отсчета, т. е. имеет относительный характер.

Из соотношений (2.50) следует

$$c^2 B'^2 - E'^2 = c^2 B^2 - E^2 = \text{inv}; \quad (2.51)$$

$$(\mathbf{B}'\mathbf{E}') = (\mathbf{B}\mathbf{E}) = \text{inv}. \quad (2.52)$$

Таковы *инварианты электромагнитного поля* в вакууме. Других независимых инвариантов такого поля, как можно убедиться, не существует [2].

Физический смысл инвариантов (2.51) и (2.52) легко понять на примере распространения плоской электромагнитной волны в вакууме. Ковариантность уравнений Максвелла означает, что определенные свойства такой волны должны сохраняться во всех инерциальных системах отсчета. Таковы взаимная перпендикулярность электрического и магнитного полей, означающая равенство нулю инварианта (2.52), а также выполнение соотношения $\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$, что ввиду формул (2.15) и (2.37) означает равенство нулю инварианта (2.51).

Как видно из равенства (2.52), отсутствие в некоторой (штрихованной) системе магнитного поля ($\mathbf{B}' = 0$) или электрического поля ($\mathbf{E}' = 0$) возможно лишь при условии взаимной перпендикулярности векторов \mathbf{B} и \mathbf{E} . Если при этом $E^2 > c^2 B^2$, то, согласно равенству (2.51), возможно $\mathbf{B}' = 0$, но $\mathbf{E}' \neq 0$, т. е. электромагнитное поле с векторами \mathbf{E} и \mathbf{B} может сводиться к электрическому полю. Если же $E^2 < c^2 B^2$, то вследствие равенства (2.51) возможно $\mathbf{E} = 0$, причем электромагнитное поле сводится к магнитному полю.

Пользуясь соотношением (2.37), заменим в равенстве (2.51) c^2 на выражение $(\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$ и, согласно формулам (2.15) и (2.9), примем во внимание (для вакуума) уравнения

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{H}', \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{D}' = \epsilon_0 \mathbf{E}'.$$

Умножая равенство (2.51) на $\varepsilon_0/2$, находим, что

$$\frac{(\mathbf{B}\mathbf{H}') - (\mathbf{E}'\mathbf{D}')}{2} = \frac{(\mathbf{B}\mathbf{H}) - (\mathbf{E}\mathbf{D})}{2} = \text{inv.} \quad (2.53)$$

Как известно, плотности энергии электрического поля $\omega_э$ и магнитного поля $\omega_м$ выражаются в системе СГС в виде

$$(\omega_э)_Г = \frac{(\mathbf{D}_Г\mathbf{E}_Г)}{8\pi}, \quad (\omega_м)_Г = \frac{(\mathbf{B}_Г\mathbf{H}_Г)}{8\pi},$$

а в системе единиц СИ¹

$$\omega_э = \frac{(\mathbf{D}\mathbf{E})}{2}, \quad \omega_м = \frac{(\mathbf{B}\mathbf{H})}{2}. \quad (2.54)$$

Равенство (2.53) означает, что разность плотностей энергии магнитного и электрического поля, выраженных формулами (2.54), инвариантна относительно преобразований Лоренца.

§ 2-6. ЛАГРАНЖИАН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Подобно тому, как уравнения релятивистской динамики получаются из вариационного принципа Гамильтона — Остроградского (1.67), основой релятивистской электродинамики можно считать тот же *вариационный принцип*, выраженный равенством

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (2.55)$$

при подходящем выборе функции Лагранжа L . Определяя функцию Лагранжа в случае механической консервативной системы как разность между кинетической и потенциальной энергиями системы, следует при вычислении этой функции провести суммирование по всем материальным точкам, входящим в систему. Электромагнитное поле определяется заданием его во всех точках пространства, образующих несчетное множество. Поэтому вместо суммирования в выражении функции Лагранжа для электромагнитного поля должно иметь место интегрирование по всему объему, занятому полем. Это означает, что функцию Лагранжа L можно представить в виде

$$L = \int_V \mathcal{L} dV. \quad (2.56)$$

Величина \mathcal{L} , играющая роль объемной плотности функции Лагранжа, представляет собой *лагранжиан*.

В силу принципа относительности Эйнштейна верными могут быть только те законы природы, которые не меняются при пере-

¹ Пользуясь соотношениями, приведенными в приложении I, легко перейти от $(\omega_э)_Г$, $(\omega_м)_Г$ к $\omega_э$, $\omega_м$ (или обратно).

ходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Независимость закономерностей, вытекающих из вариационного принципа, от выбора системы координат будет иметь место, если интеграл действия, стоящий под знаком вариации в уравнении (2.55), инвариантен относительно преобразований Лоренца, т. е.

$$\int_{t'_1}^{t'_2} L' dt' = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

или, с заменой L выражением (2.56),

$$\int_{t'_1}^{t'_2} \int_{V'} \mathcal{L}' dV' dt' = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L} dV dt. \quad (2.57)$$

Соотношения (1.46) и (1.48) позволяют написать

$$dV = dV' \sqrt{1 - \beta^2}; \quad dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Таким образом,

$$dV dt = dV' dt',$$

т. е. произведение $dV dt$ инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Поэтому из равенства (2.57), справедливого в любой области интегрирования, видна релятивистская инвариантность лагранжиана \mathcal{L} . Благодаря этому свойству лагранжиан является фундаментальной физической величиной в современной теории поля; вид лагранжиана определяет характер теории поля. Это относится, в частности, к классической теории электромагнитного поля. Вид функции Лагранжа (2.56) должен быть выяснен, если принять во внимание инвариантность лагранжиана и следующие дополнительные соображения.

Как было видно в § 1-9, правильный выбор функции Лагранжа в динамике приводит к тому, что из вариационного принципа получается основное релятивистское уравнение движения (1.77). Подобно этому при правильном выборе лагранжиана электромагнитного поля из вариационного принципа должны получаться основные релятивистские уравнения поля, т. е. уравнения Максвелла. Эти уравнения линейны, а варьирование, подобно дифференцированию, понижает на единицу степень выражения, стоящего под знаком вариации. Таким образом, лагранжиан должен быть квадратичной функцией относительно напряженностей поля. Известно существование инварианта поля (2.53), квадратичного относительно напряженностей поля. Этот инвариант представляет особый интерес в отличие от инварианта (2.52), потому что в механике функция Лагранжа определяется в случае консервативной системы как разность кинетической и потенциальной энергий,

а энергия магнитного поля, обусловленная движением зарядов, аналогична кинетической энергии, тогда как энергия электрического поля, связанная с существованием и взаимодействием зарядов, аналогична потенциальной энергии¹. Если под лагранжианом \mathcal{L} понимать (2.53), то из равенства (2.56) можно получить, что функция Лагранжа L равна разности энергий магнитного и электрического полей.

Однако, поскольку из вариационного принципа (2.55) должны вытекать уравнения Максвелла (2.21) ÷ (2.24), в которые входят не только векторы поля, но и плотность тока \mathbf{j} , и плотность заряда ρ , то в выражение функции L следует ввести не только величины \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{E} и \mathbf{D} , но и величины \mathbf{j} и ρ .

Обратимся к простому случаю, когда электромагнитное поле представляет собой совокупность электростатического и стационарного магнитного полей. При этом уравнения (2.21) и (2.26) принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}; \quad (2.58)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (2.59)$$

На основании уравнений (2.25) и (2.58), пользуясь известным из векторного анализа соотношением

$$\operatorname{div} [\mathbf{A}\mathbf{H}] = (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H})$$

и применяя формулу Остроградского, находим

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{B}\mathbf{H}) dV &= \int_V (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A}) dV = \int_V (\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV + \int_V \operatorname{div} [\mathbf{A}\mathbf{H}] dV = \\ &= \int_V (\mathbf{A}\mathbf{j}) dV + \oint_S [\mathbf{A}\mathbf{H}]_n dS, \end{aligned}$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V .

На основании уравнений (2.59) и (2.22), пользуясь соотношением

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}) = \mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{D}, \quad (2.60)$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{D}\mathbf{E}) dV &= - \int_V \mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi dV = \int_V \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} dV - \\ &- \int_V \operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}) dV = \int_V \varphi \rho dV - \oint_S (\varphi \mathbf{D})_n dS. \end{aligned}$$

¹ Аналогия между магнитной и электрической энергиями поля и кинетической и потенциальной энергиями консервативной механической системы не может быть полной, и оправданием выбора лагранжиана служит, в конечном счете, вывод уравнений Максвелла из вариационного принципа. Легко убедиться, что на основе инварианта (2.52) нельзя построить такой вывод.

В случае полного поля ¹, когда на поверхности S , ограничивающей поле,

$$\oint_S [\mathbf{AH}]_n dS = 0, \quad \oint_S (\varphi \mathbf{D})_n dS = 0,$$

справедливы равенства

$$\int_V (\mathbf{BH}) dV = \int_V (\mathbf{Aj}) dV;$$

$$\int_V (\mathbf{DE}) dV = \int_V \rho \varphi dV.$$

Это значит, что если функция Лагранжа L равна разности энергий магнитного и электрического полей, то ее можно представить не только в виде

$$L = \int_V \frac{(\mathbf{BH}) - (\mathbf{ED})}{2} dV,$$

но и в форме

$$L = \int_V \left[(\mathbf{Aj}) - \rho \varphi + \frac{(\mathbf{ED}) - (\mathbf{BH})}{2} \right] dV, \quad (2.61)$$

приписывая, таким образом, лагранжиану \mathcal{L} выражение

$$\mathcal{L} = (\mathbf{Aj}) - \rho \varphi + \frac{(\mathbf{ED}) - (\mathbf{BH})}{2}. \quad (2.62)$$

В силу равенств (2.41) и (2.30) можно записать

$$(\mathbf{Aj}) - \rho \varphi = \sum_{\nu=1}^4 A_{\nu} j_{\nu} = \text{inv.}$$

Таким образом, в связи с (2.53) выражение (2.62) удовлетворяет налагаемому на лагранжиан требованию инвариантности не только в частном случае электростатического и стационарного магнитного полей, но и в общем случае любого электромагнитного поля.

Докажем, что выражение лагранжиана в виде (2.62) приводит к уравнениям Максвелла для случая однородной и изотропной среды.

Заменим в формуле (2.61) произведение (\mathbf{ED}) на $\epsilon_a E^2$ и (\mathbf{BH}) на B^2/μ_a и подставим выражения \mathbf{E} из (2.26) и \mathbf{B} из (2.25). Тогда

$$L = \int_V \left\{ (\mathbf{Aj}) - \rho \varphi + \frac{\epsilon_a}{2} \left(\text{grad } \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{2\mu_a} \right\} dV. \quad (2.63)$$

¹ По определению понятия полного поля на его границах $\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{D} = 0$ и интегралы, указанные в тексте, равны нулю.

Обобщенными координатами электромагнитного поля, от которых зависит функция Лагранжа, следует считать компоненты векторного потенциала и скалярный потенциал поля. Из вариационного принципа (2.55) следует, в частности, что если \mathbf{A} не варьируется, то вариация интеграла действия по φ должна равняться нулю, или, если поменять местами независимые операции варьирования и интегрирования, то

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta_\varphi L \cdot dt = 0.$$

Подставляя L из формулы (2.63), получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left\{ \epsilon_a \left(\text{grad } \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \delta \text{grad } \varphi - \rho \delta \varphi \right\} dV = 0.$$

В силу равенства (2.26) заменим $\text{grad } \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ на $-\mathbf{E}$ и поменяем местами независимые операции варьирования и вычисления градиента. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left\{ \epsilon_a \mathbf{E} \text{grad } (\delta \varphi) + \rho \delta \varphi \right\} dV = 0,$$

или, заменяя $\epsilon_a \mathbf{E}$ на \mathbf{D} и используя формулу (2.60) с заменой φ на $\delta \varphi$, имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left\{ \text{div } (\delta \varphi \cdot \mathbf{D}) + (\rho - \text{div } \mathbf{D}) \delta \varphi \right\} dV = 0. \quad (2.64)$$

По формуле Остроградского

$$\int_V \text{div } (\delta \varphi \cdot \mathbf{D}) dV = \oint_S \delta \varphi \cdot \mathbf{D}_n dS.$$

Этот интеграл обращается в нуль, так как на поверхности S , ограничивающей поле (например, в бесконечности), потенциал фиксирован и $\delta \varphi = 0$. Следовательно, уравнение (2.64) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V (\rho - \text{div } \mathbf{D}) \delta \varphi dV = 0.$$

Выполнение этого равенства при произвольном $\delta \varphi$ возможно лишь, если

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho,$$

т. е. это уравнение Максвелла в виде (2.22) является следствием вариационного принципа (2.55), если функция Лагранжа имеет вид (2.61).

Используем теперь тот же принцип, полагая, что φ не варьируется. Тогда вариация интеграла действия по \mathbf{A} должна равняться нулю. Следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta_{\mathbf{A}} L \cdot dt = 0.$$

Подставляя L из выражения (2.61) с учетом равенств (2.25), (2.26), (2.9) и (2.15), имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left\{ j \delta \mathbf{A} + \epsilon_a \left(\text{grad } \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \delta \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\text{rot } \mathbf{A}}{\mu_a} \delta \text{rot } \mathbf{A} \right\} dV = 0,$$

или, в силу соотношений (2.25) и (2.26), после перестановки независимых операций варьирования и дифференцирования

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left(j \delta \mathbf{A} - \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{A} - \mathbf{H} \text{rot } \delta \mathbf{A} \right) dV = 0.$$

Отсюда, с учетом равенств

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \delta \mathbf{A}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \delta \mathbf{A} + \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{A},$$

$$\text{div} [\mathbf{H} \delta \mathbf{A}] = \delta \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{rot } \delta \mathbf{A},$$

получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left\{ j \delta \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \delta \mathbf{A}) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \delta \mathbf{A} + \text{div} [\mathbf{H} \delta \mathbf{A}] - \delta \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H} \right\} dV = 0. \quad (2.65)$$

Но

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \delta \mathbf{A}) dV = \int_V (\mathbf{D} \delta \mathbf{A}) dV \Big|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

так как при $t=t_1$ и $t=t_2$ состояние системы фиксировано, т. е. $\delta \mathbf{A} = 0$, и также

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \text{div} [\mathbf{H} \delta \mathbf{A}] dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_S [\mathbf{H} \delta \mathbf{A}]_n dS = 0,$$

так как на поверхности S , ограничивающей поле, потенциал фиксирован, т. е. $\delta \mathbf{A} = 0$. Таким образом, уравнение (2.65) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left(j + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} \right) \delta \mathbf{A} dV = 0.$$

Отсюда следует, ввиду произвольности $\delta \mathbf{A}$, что

$$\text{rot } \mathbf{H} = j + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

т. е. это уравнение Максвелла в виде (2.21) также является следствием вариационного принципа.

Уравнения Максвелла (2.23) и (2.24) можно рассматривать как следствие соотношений (2.25) и (2.26). Вариационный принцип (2.55) в сочетании с этими соотношениями приводит к системе уравнений Максвелла.

Таким образом, лагранжиан электромагнитного поля действительно следует брать в форме (2.62), а функция Лагранжа имеет вид (2.61).

§ 2-7. СИЛА ЛОРЕНЦА

Рассмотрим физическую систему, в которую входят материальная точка, обладающая электрическим зарядом q , и электромагнитное поле. Если принять во внимание только заряд и поле, то функция Лагранжа выражалась бы, как видно из формулы (2.61), в виде

$$L = L_1 + L_2,$$

где

$$L_1 = \int_V \frac{(\mathbf{E}\mathbf{D}) - (\mathbf{B}\mathbf{H})}{2} dV$$

характеризует свободное электромагнитное поле, а

$$L_2 = \int_V \{(\mathbf{A}\mathbf{j}) - \rho\varphi\} dV$$

соответствует взаимодействию зарядов и поля.

Если принять во внимание еще и массу m материальной точки, то функцию Лагранжа следует записать в виде

$$L = L_1 + L_2 + L_3.$$

Если поле отсутствует, то $L_1 = L_2 = 0$, причем материальная точка является свободной и функция Лагранжа для нее сводится к выражению (1.72).

Итак,

$$L_3 = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}},$$

и функция Лагранжа для системы из электромагнитного поля и заряженной материальной точки имеет вид

$$L = \int_V \frac{(\mathbf{E}\mathbf{D}) - (\mathbf{B}\mathbf{H})}{2} dV + \int_V \{(\mathbf{A}\mathbf{j}) - \rho\varphi\} dV - mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}},$$

или, после замены \mathbf{j} на $\rho\mathbf{u}$ и $\int_V \rho dV$ на q ,

$$L = \int_V \frac{(\mathbf{E}\mathbf{D}) - (\mathbf{B}\mathbf{H})}{2} dV + q \{(\mathbf{A}\mathbf{u}) - \varphi\} - mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad (2.66)$$

причем \mathbf{A} и φ — потенциалы в точке, где находится заряд q .

В качестве трех обобщенных координат, определяющих положение заряда, возьмем его декартовы координаты x , y и z . Уравнения Лагранжа (1.65) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial z}.\end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь выражением (2.66) и заменяя $(\mathbf{A}u)$ на $A_x \cdot \dot{x} + A_y \cdot \dot{y} + A_z \cdot \dot{z}$ и u^2 на $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, находим

$$q \frac{dA_x}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \cdot \dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \dot{z} \right) - q \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

и т. д. Пользуясь соотношением (2.26) и принимая во внимание равенство

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \cdot \dot{z},$$

получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = qE_x + q \left\{ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \dot{y} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \dot{z} \right\}$$

и т. д. На основании равенства (2.25) имеем

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z, \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = -B_y,$$

так что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = qE_x + q[\mathbf{uB}]_x,$$

и аналогично

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = qE_y + q[\mathbf{uB}]_y,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = qE_z + q[\mathbf{uB}]_z.$$

Итак,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = q \{ \mathbf{E} + [\mathbf{u}\mathbf{B}] \}.$$

Из сравнения с релятивистским уравнением движения (1.77) следует, что на заряд q , движущийся со скоростью \mathbf{u} , действует со стороны электромагнитного поля сила

$$\mathbf{F} = q \{ \mathbf{E} + [\mathbf{u}\mathbf{B}] \}. \quad (2.67)$$

Это и есть *сила Лоренца*. В частности, сила Лоренца, действующая со стороны одного лишь магнитного поля, равна

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{u}\mathbf{B}]. \quad (2.68)$$

Совокупность опытных фактов относительно движения заряженных частиц подтверждает справедливость формулы (2.67). Таким образом, сила, действующая на заряд со стороны электромагнитного поля, определяется напряженностью электрического поля \mathbf{E} и магнитной индукцией \mathbf{B} , каковы бы ни были свойства среды, в которой движется заряд.

Следовательно, магнитная индукция \mathbf{B} (а не напряженность магнитного поля) служит величиной, характеризующей магнитное поле, когда оно играет активную роль, а именно действует на движущиеся заряды.

Выражение силы Лоренца (2.67) весьма наглядно показывает, что \mathbf{E} и \mathbf{B} входят в одну группу векторов электромагнитного поля: они характеризуют действие поля на заряды. Аналогично электрическая индукция \mathbf{D} и напряженность магнитного поля \mathbf{H} характеризуют электромагнитное поле независимо от свойств среды, когда оно играет пассивную роль, т. е. создается зарядами, как видно из уравнений Максвелла (2.22) и (2.21). Таким образом, \mathbf{D} и \mathbf{H} образуют вторую группу родственных между собой векторов, они характеризуют независимо от свойств среды возникновения поля вследствие существования и движения зарядов¹.

Равенство (2.67) ковариантно относительно преобразований Лоренца, так как это равенство вытекает из формулы (2.66), справедливой во всех инерциальных системах отсчета.

Пользуясь формулой (2.67) и выражая компоненты четырехмерной силы Минковского на основании уравнений (1.90) и (1.96),

¹ Если в уравнении (2.22) заменить \mathbf{D} на $\epsilon_a \mathbf{E}$ или, обращаясь к равенству (4.51), написать $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}}{\epsilon_0}$, то видно, что \mathbf{E} не является независимой от свойств среды мерой поля, когда оно создается зарядами, так как ϵ_a и \mathbf{P} зависят от свойств среды.

запишем уравнения движения (1.91) ÷ (1.94) в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{q \{E_x + [\mathbf{uB}]_x\}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ m \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{q \{E_y + [\mathbf{uB}]_y\}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ m \frac{du_3}{d\tau} &= \frac{q \{E_z + [\mathbf{uB}]_z\}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ m \frac{du_4}{d\tau} &= \frac{iq (\mathbf{uE})}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

Последнее уравнение, с учетом выражения u_4 (1.59) и равенства (1.58), приводится к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = q (\mathbf{uE}). \quad (2.70)$$

Таким образом, согласно формуле (1.79) изменение энергии заряженной материальной точки под действием электромагнитного поля, отнесенное к единице времени, равно работе сил электрического поля за единицу времени. Это справедливо в связи с тем, что выполняется закон сохранения и превращения энергии и что магнитное поле не производит работы над заряженной частицей, действуя на нее, как видно из формулы (2.68), с силой, перпендикулярной скорости частицы.

§ 2-8. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В ОДНОРОДНЫХ ПОЛЯХ

Пусть на точечный заряд q (на заряженную частицу) действуют электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} и магнитное поле с индукцией \mathbf{B} . Ограничимся случаем, когда поля однородны и постоянны, т. е. векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} не зависят от координат и времени. Рассмотрим движение частицы с зарядом q , основываясь на уравнениях (2.69).

Направим ось x вдоль вектора магнитной индукции \mathbf{B} и, имея в виду любое направление электрического поля, расположим ось z перпендикулярно обоим векторам \mathbf{E} и \mathbf{B} . Введем обозначения¹:

$$\frac{q}{m} E_x = \epsilon_x, \quad \frac{q}{m} E_y = \epsilon_y, \quad \frac{q}{m} E_z = \epsilon_z, \quad (2.71)$$

$$\frac{q}{m} B = \Omega. \quad (2.72)$$

¹ В этом параграфе и в гл. 3, а также в решении задач № 14, 17 под величиной, обозначенной буквой ϵ , не следует понимать диэлектрическую проницаемость.

Уравнения (2.69) в силу равенств (1.56) и (1.58) приводятся к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \varepsilon_x \frac{dt}{d\tau}; \quad (2.73)$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \varepsilon_y \frac{dt}{d\tau} + \Omega \frac{dz}{d\tau}; \quad (2.74)$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = -\Omega \frac{dy}{d\tau}; \quad (2.75)$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{1}{c^2} \left(\varepsilon_x \frac{dx}{d\tau} + \varepsilon_y \frac{dy}{d\tau} \right). \quad (2.76)$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon_x t + C_1; \quad (2.77)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \varepsilon_y t + \Omega z + C_2; \quad (2.78)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -\Omega y + C_3; \quad (2.79)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c^2} (\varepsilon_x \cdot x + \varepsilon_y \cdot y) + C_4, \quad (2.80)$$

причем постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 определяются из значений координат и скорости частицы при $\tau=0$, когда согласно формуле (1.49) и $t=0$.

Совмещая начало координат с начальным положением частицы и принимая во внимание равенство (1.58), запишем начальные условия в виде

$$x_0 = y_0 = z_0 = t_0 = 0, \\ \left(\frac{dx}{d\tau} \right)_0 = \frac{\dot{x}_0}{\gamma_0}, \quad \left(\frac{dy}{d\tau} \right)_0 = \frac{\dot{y}_0}{\gamma_0}, \quad \left(\frac{dz}{d\tau} \right)_0 = \frac{\dot{z}_0}{\gamma_0}, \quad \left(\frac{dt}{d\tau} \right)_0 = \frac{1}{\gamma_0},$$

где $\dot{x}_0 = (dx/dt)_{t=0}$ и т. д., $\gamma_0 = \sqrt{1 - u_0^2/c^2}$ (u_0 — начальная скорость частицы). Пользуясь этими начальными условиями, из уравнений (2.77) ÷ (2.80) находим

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0}{\gamma_0}, \quad C_2 = \frac{\dot{y}_0}{\gamma_0}, \quad C_3 = \frac{\dot{z}_0}{\gamma_0}, \quad C_4 = \frac{1}{\gamma_0}. \quad (2.81)$$

В случае коллинеарных электрического и магнитного полей при $B_x = B$ и $|\varepsilon_x| = \varepsilon$ можно совместить плоскость xOy с вектором начальной скорости частицы. Тогда $\dot{z}_0 = 0, C_3 = 0$, и уравнение (2.79) приводится к виду

$$\frac{dz}{d\tau} = -\Omega y. \quad (2.82)$$

Подставим это значение $dz/d\tau$ в уравнение (2.74) и заметим, что $\varepsilon_y = 0$. Получаем уравнение

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \Omega^2 y = 0.$$

Отсюда при начальных условиях $y_0 = 0$ и $(dy/d\tau)_0 = \dot{y}_0/\gamma_0$ находим

$$y = \frac{\dot{y}_0}{\Omega\gamma_0} \sin \Omega\tau. \quad (2.83)$$

Подставим это значение y в уравнение (2.82) и возьмем интеграл при условии $z_0 = 0$. Тогда

$$z = \frac{\dot{y}_0}{\Omega\gamma_0} (\cos \Omega\tau - 1). \quad (2.84)$$

Из уравнений (2.77) и (2.80), где $\varepsilon_y = 0$, при начальных условиях $x_0 = t_0 = 0$ и $(dx/d\tau)_0 = \dot{x}_0/\gamma_0$ находим

$$x = \frac{c}{a\gamma_0} (\operatorname{ch} a\tau - 1) + \frac{\dot{x}_0}{a\gamma_0} \operatorname{sh} a\tau, \quad (2.85)$$

$$t = \frac{1}{a\gamma_0} \operatorname{sh} a\tau + \frac{\dot{x}_0}{ca\gamma_0} (\operatorname{ch} a\tau - 1), \quad (2.86)$$

где $a \equiv \frac{\varepsilon_x}{c}$.

Выражая из последнего уравнения τ через t и подставляя в уравнения (2.83) ÷ (2.85), получаем релятивистский закон движения заряженной частицы в коллинеарных полях (см. задачу 14).

В случае взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей при $B_x = B$ и $|\varepsilon_y| = \varepsilon$ следует принять во внимание все три компоненты начальной скорости частицы. Из уравнений (2.77), где теперь $\varepsilon_x = 0$, и (2.81) при начальном условии $x_0 = 0$ находим

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma_0} \tau. \quad (2.87)$$

Подставим в уравнение (2.74) выражения $dz/d\tau$ и $dt/d\tau$ на основании уравнений (2.79) ÷ (2.81) при $\varepsilon_x = 0$ и возьмем интеграл с учетом начальных условий $y_0 = 0$, $(dy/d\tau)_0 = \dot{y}_0/\gamma_0$. Тогда

$$y = \frac{\varepsilon_y + \Omega\dot{z}_0}{b^2\gamma_0} (\operatorname{ch} b\tau - 1) + \frac{\dot{y}_0}{b\gamma_0} \operatorname{sh} b\tau, \quad (2.88)$$

где $b = \sqrt{\frac{\varepsilon_y^2}{c^2} - \Omega^2}$.

Подставляя это выражение y в уравнения (2.79) и (2.80) и используя равенства (2.81) и $z_0 = 0$, $t_0 = 0$, получаем

$$z = \frac{\Omega(\varepsilon_y + \Omega\dot{z}_0)}{b^3\gamma_0} (b\tau - \operatorname{sh} b\tau) + \frac{\dot{y}_0\Omega}{b^2\gamma_0} (1 - \operatorname{ch} b\tau) + \frac{\dot{z}_0}{\gamma_0} \tau, \quad (2.89)$$

$$t = \frac{\varepsilon_y(\varepsilon_y + \Omega\dot{z}_0)}{c^2b^3\gamma_0} (\operatorname{sh} b\tau - b\tau) + \frac{\varepsilon_y \cdot \dot{y}_0}{c^2b^2\gamma_0} (\operatorname{ch} b\tau - 1) + \frac{\tau}{\gamma_0}. \quad (2.90)$$

Если, в частности, $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ и

$$\dot{z}_0 = -\frac{\varepsilon_y}{\Omega},$$

то $x = y = 0$ и $z = \dot{z}_0 t$. При этом вследствие равенств (2.71) и (2.72)

$$\dot{z}_0 = -\frac{E_y}{B}.$$

Это соотношение получено в предположении, что магнитная индукция \mathbf{B} направлена по оси x , напряженность электрического поля \mathbf{E} — по оси y или противоположно ей, а начальная скорость частицы и такая же скорость последующего ее движения \mathbf{u} соответственно антипараллельны или параллельны оси z , так что три взаимно перпендикулярных вектора \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{u} образуют праввинтовую систему и связаны соотношением

$$\mathbf{u} = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2}. \quad (2.91)$$

Ввиду отсутствия заряда и массы в этом выражении оно справедливо для всех заряженных частиц.

Если в некоторой области в вакууме существуют однородное постоянное электрическое поле с напряженностью $E = |E_y|$ и перпендикулярное ему однородное постоянное магнитное поле с индукцией $B = B_x$, то частица, вступающая в эту область со скоростью, перпендикулярной тому и другому полям и удовлетворяющей соотношению (2.91), продолжает двигаться равномерно и прямолинейно, тогда как иные заряженные частицы испытывают отклонения. Этот результат практически используется для выделения заряженных частиц, обладающих определенной скоростью.

Результаты, относящиеся к движению частицы в одном лишь электрическом поле, легко получаются как из уравнений (2.83) ÷ (2.86), так и из уравнений (2.87) ÷ (2.90) при $\Omega = 0$ (см. задачу 14).

§ 2-9. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Предполагая существование одного лишь магнитного поля, в силу уравнения Максвелла (2.23) следует считать это поле постоянным. Отсутствие электрического поля означает, что в уравнениях (2.85) и (2.86) следует положить $a = 0$. Таким образом,

$$x = \frac{\dot{x}_0 \tau}{\gamma_0}, \quad t = \frac{\tau}{\gamma_0},$$

откуда

$$x = \dot{x}_0 t. \quad (2.92)$$

Уравнения (2.83) и (2.84) после замены τ на $\gamma_0 t$ запишем в форме

$$\left. \begin{aligned} y &= A \sin \Omega \gamma_0 t, \\ z &= A (\cos \Omega \gamma_0 t - 1), \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

где

$$A = \frac{y_0}{\Omega \gamma_0}.$$

Уравнения (2.93) описывают равномерное движение частицы в плоскости y, z по окружности неизменного радиуса $R = |A|$, т. е.

$$R = \frac{|\dot{y}_0|}{|\Omega| \cdot \gamma_0}, \quad (2.94)$$

с угловой скоростью $\omega = |\Omega| \gamma_0$ или ввиду равенства (2.72)

$$\omega = \frac{|q| B \gamma_0}{m}. \quad (2.95)$$

Центр этой окружности, как видно из уравнения (2.92), перемещается (дрейфует) параллельно оси x с неизменной скоростью \dot{x}_0 . Линейная скорость частицы при движении на окружности, равная произведению ωR , неизменно совпадает по величине с $|\dot{y}_0|$. Полную скорость частицы $u = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ представим, заменяя \dot{x} на \dot{x}_0 и $\dot{y}^2 + \dot{z}^2$ на \dot{y}_0^2 , в виде

$$u = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}. \quad (2.96)$$

Постоянство величины скорости u согласуется с тем, что магнитное поле не совершает работы над заряженной частицей (см. § 2-7).

Продолжительность одного оборота частицы вокруг направления магнитной индукции связана с угловой скоростью ω соотношением $T = 2\pi/\omega$ или, в силу равенства (2.95),

$$T = \frac{2\pi m}{|q| B \gamma_0}. \quad (2.97)$$

Таким образом, период T обращения частицы вокруг направления магнитной индукции \mathbf{B} обратно пропорционален величине B . За время T частица продвигается вдоль оси x на расстояние $l = |\dot{x}_0| T$, т. е.

$$l = \frac{2\pi m |\dot{x}_0|}{|q| B \gamma_0}. \quad (2.98)$$

Траекторией частицы является цилиндрическая винтовая линия с осью, параллельной вектору \mathbf{B} , с радиусом R и шагом l , которые, как видно из формул (2.94) и (2.98), обратно пропорциональны магнитной индукции B . Если, например, магнитное поле возрастает в два раза, так что $B_2 = 2B_1$, то радиус и шаг винтовой линии уменьшаются вдвое (рис. 6).

Из формул (2.93) и (2.72) при $q > 0$ (т. е. $\Omega > 0$) следует, что y и z имеют взаимно противоположные знаки. Таким образом, положительно заряженная частица движется по часовой стрелке, если смотреть на плоскость y, z с конца оси x , т. е. навстречу направлению магнитной индукции. Отрицательно заряженная частица ($q < 0$), в частности электрон, движется вокруг вектора \mathbf{B}

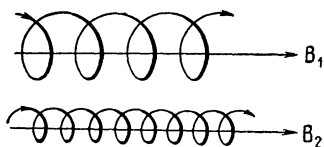


Рис. 6. Движение электрона в однородном магнитном поле

в противоположном направлении, т. е. направление движения электрона образует правый винт с магнитным полем. Направление движения электрона указано стрелками на рис. 6.

В частном случае, когда начальная скорость частицы перпендикулярна магнитному полю, частица не перемещается вдоль поля, как видно из уравнения (2.92) при $\dot{x}_0 = 0$. При этом траектория частицы (см. рис. 6) принимает вид окружности в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Радиус этой окружности R с учетом формул (2.94), (2.96) при $\dot{x}_0 = 0$ и (2.72) равен

$$R = \frac{mu}{|q|\gamma_0 B},$$

где u — скорость, с которой частица вступает в магнитное поле и продолжает двигаться в нем, а

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

В силу равенства (1.74) формулу для радиуса окружности R можно переписать в виде

$$R = \frac{m'u}{|q|B}, \quad (2.99)$$

где m' — масса частицы в состоянии движения со скоростью u .

Задачи

10. Найти соотношение между численными значениями магнитного момента в системах СГС и СИ.

11. Какое ограничение налагается условием Лоренца на функцию f в градиентных преобразованиях?

12. Плотность тока в исходной системе координат равна \mathbf{j} и плотность заряда равна ρ . Каковы плотности тока и заряда в другой (штрихованной) системе, движущейся относительно исходной системы со скоростью \mathbf{v} ?

13. Каковы формулы преобразований напряженности электрического поля \mathbf{E} и магнитной индукции \mathbf{B} при любой скорости \mathbf{v} штрихованной системы отсчета относительно нештрихованной системы? Какой вид принимают эти формулы при $v^2 \ll c^2$?

14. Найти релятивистский закон движения заряженной частицы в коллинеарных однородных постоянных электрическом и магнитном полях, если заданы напряженность электрического поля \mathbf{E} , магнитная индукция \mathbf{B} , начальное положение, начальная скорость, заряд и масса покоя частицы. Какой вид принимает закон движения при неограниченном возрастании времени движения? Каков закон движения в одном лишь электрическом поле?

§ 3-1. ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЗАРЯДА

Под элементарным зарядом e понимается абсолютная величина заряда электрона. Ряд фактов, например испускание электронов катодом, означает, что электроны существуют в нейтральном веществе и поэтому заряды ионизированных частиц вещества в результате удаления или присоединения одного или нескольких электронов должны быть по абсолютной величине равны или кратны e .

Как показывают *законы электролиза*, каждый грамм-атом одновалентного вещества переносит через электролит количество электричества, равное (по современным данным)

$$F_0 = (96.487 \pm 1,6) \kappa$$

и называемое числом Фарадея. Если его разделить на число N_A атомов в грамм-атоме, т. е. на число Авогадро

$$N_A = 6,023 \cdot 10^{23}, \quad (3.1)$$

то элементарный заряд e , как заряд одновалентного иона, оказывается равным

$$e = \frac{F_0}{N_A},$$

или

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \kappa. \quad (3.2)$$

Такова же, по современным представлениям, абсолютная величина заряда электрона.

Из равенств (2.2) и (3.2) следует, что величина элементарного заряда в гауссовой системе СГС или в абсолютной электростатической системе единиц СГСЭ равна

$$e_{\Gamma} = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС.} \quad (3.3)$$

Ирландский физик Стоней и, независимо, немецкий ученый Гельмгольц предложили еще в 1874—1881 гг. рассматривать отношение числа Фарадея к числу Авогадро как элементарное (неделимое) количество электричества. Однако, строго говоря, оставалась и возможность предполагать, что электричество подобно

непрерывной жидкости, т. е. наименьших количеств его не существует, но ион в условиях электролиза «вмещает» определенное количество электричества.

Английские физики Дж. Дж. Томсон и Резерфорд обнаружили в 1896 г., что проводимость, вызываемая в газах рентгеновскими лучами, исчезает после фильтрования газа через стеклянную вату или после пропускания струи газа между двумя пластинами, если разность потенциалов между ними достаточно велика.

Отсюда был сделан вывод, что причиной такой проводимости надо считать частицы, которые можно удалить фильтрованием, обладающие электрическим зарядом, т. е. *газовые ионы*. Для определения среднего заряда таких ионов было использовано то открытие Вильсона, что они являются центрами конденсации водяных паров, если ионизированный газ, насыщенный водяными парами, внезапно охлаждается. Дж. Дж. Томсон измерял полный заряд капелек и массу сконденсированного пара. Измерялась также скорость свободного падения сконденсированного пара и из закона Стокса, по которому сила трения

$$F = 6\pi\eta r v, \quad (3.4)$$

где η — коэффициент вязкости (внутреннего трения) среды, вычислялся средний радиус капельки r в случае равномерного падения капельки, когда сила трения равна разности силы тяжести и силы, действующей по закону Архимеда. Отношение массы пара к массе капельки равнялось числу капелек, которое считалось равным числу ионов. Определив отношение общего заряда капелек к числу ионов, Дж. Дж. Томсон нашел таким путем в 1898 г., что средний заряд иона

$$e_{\Gamma} = 6,5 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС},$$

а в 1903 г. получил существенно иной результат

$$e_{\Gamma} = 3,4 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС},$$

что указывало на необходимость улучшения методики эксперимента. В методе Вильсона отсутствовало предположение о равенстве чисел капелек и ионов. Вильсон наблюдал, насколько быстро происходит падение вершины облака пара между пластинами конденсатора, т. е. следил лишь за поведением наименее заряженных капелек, что позволяло более правильно оценить величину элементарного заряда.

Американские физики — Милликен и Бегеман выполнили более точные измерения методом Вильсона; они получили (в среднем по нескольким сериям измерений) следующее значение:

$$e_{\Gamma} = 4,06 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС}.$$

Студенты Петербургского университета А. Алексеев и М. Маликов в 1909 г. тем же методом нашли

$$e_{\Gamma} = 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС}.$$

Этот результат наиболее близок к истинному значению (3.3) из всех результатов, полученных к тому времени.

Затем в 1909 г. Милликен наблюдал отдельные водные капельки, заряженные благодаря конденсации пара на ионах, и отдельные капельки масла с радиусом порядка 10^{-6} м, которые заряжались положительно или отрицательно вследствие трения в процессе распыления масла, а также вследствие присоединения зарядов из воздуха. Попадая между пластинами конденсатора (рис. 7), капля опускалась вниз в отсутствие электрического поля, но поднималась вверх при наличии его, так как напряженность поля можно было соответственно подбирать по величине и направлению, пользуясь потенциометром Π и переключателем K . Капли освещались сильным пучком света и представлялись яркими звездочками на темном фоне. В опыте исследовалось установившееся движение капли с постоянной скоростью.

При равномерном падении капли сила трения, выраженная по закону Стокса (3.4), равнялась разности силы тяжести P и силы Q , действующей по закону Архимеда, т. е.

$$6\pi\eta r u_1 = P - Q, \quad (3.5)$$

где u_1 — скорость падения капли в отсутствие электрического поля, которая измерялась в опыте. При равномерном подъеме сила трения равнялась разности направленной вверх силы электрического поля и направленной вниз силы $P - Q$, т. е.

$$6\pi\eta r u_2 = |q| \cdot E - (P - Q), \quad (3.6)$$

где u_2 — измеряемая в опыте скорость подъема капли, q — заряд капли и E — напряженность электрического поля. Так как $P = \frac{4}{3} \pi r^3 \sigma g$ и $Q = \frac{4}{3} \pi r^3 \delta g$, где σ — плотность вещества капли, δ — плотность воздуха (или газа), в котором находится капля, то

$$P - Q = \frac{4}{3} \pi r^3 (\sigma - \delta) g. \quad (3.7)$$

Из уравнений (3.5) и (3.7) легко найти r ; затем определяется q путем исключения $P - Q$ из равенств (3.5) и (3.6).

Обнаруженные при облучении капли скачкообразные изменения $|q|$ оказались в среднем кратными величине

$$e_{\Gamma} = 4,65 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС.}$$

Однако Милликен заметил, что результаты вычислений величины e_{Γ} несколько зависят от размеров капельки, и пришел к заключению, что закон Стокса (3.4) несправедлив для очень ма-

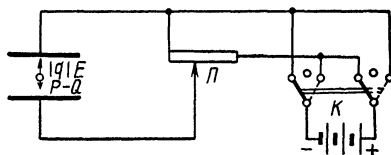


Рис. 7. Схема опыта Милликена

лых капелек. Действительно, при выводе этого закона среда считается непрерывной и однородной, а воздух не будет таким для мельчайших капелек, размеры которых сравнимы с длиной свободного пробега молекул воздуха.

Теоретическое рассмотрение такого случая привело к выводу, что вместо закона Стокса для определения силы трения F следует пользоваться формулой

$$F = \frac{6\pi\eta ru}{1 + f(\lambda/r)}, \quad (3.8)$$

где λ — средняя длина свободного пробега молекул, а вид функции $f(\lambda/r)$ остается неопределенным, но при $\lambda/r \rightarrow 0$ обязательно $f(\lambda/r) \rightarrow 0$, так как формула (3.8) должна в пределе сводиться к закону Стокса (3.4). В опытах Милликена λ/r равнялось обычно около 0,1 или менее. При этом, разлагая $f(\lambda/r)$ в ряд по степеням λ/r , можно ограничиться линейным членом, т. е.

$$F = \frac{6\pi\eta ru}{1 + A\lambda/r}, \quad (3.9)$$

где A — некоторая константа. Таким образом, формулы (3.5) и (3.6) следует уточнить путем деления левых частей на $1 + A\lambda/r$.

Тогда из равенств (3.5) ÷ (3.7) получается

$$q = 9\pi\eta^{3/2} \sqrt{\frac{2u_1}{g(\sigma - \delta)}} \cdot \frac{u_1 + u_2}{E} \left(1 + A\frac{\lambda}{r}\right)^{-3/2}. \quad (3.10)$$

Обозначим через u_0 то значение суммы $u_1 + u_2$, которому равны или кратны различные найденные из опыта значения $(u_1 + u_2)$; при этом $|q|$ в (3.10) заменяется элементарным зарядом e . Без поправки к закону Стокса, т. е. при $A=0$, в системе СГС вместо e_Γ получился бы заряд e_Γ^* , причем

$$\frac{e_\Gamma^*}{e_\Gamma} = \left(1 + A\frac{\lambda}{r}\right)^{3/2}. \quad (3.11)$$

Так как величина λ при постоянной температуре обратно пропорциональна давлению газа p , то

$$e_\Gamma^{*2/3} = e_\Gamma^{2/3} \left(1 + \frac{B}{rp}\right), \quad (3.12)$$

где $B = A\lambda p$ — новая постоянная. Если по оси ординат откладывать значения $e_\Gamma^{*2/3}$, найденные на основании опыта с использованием закона Стокса, а по оси абсцисс — $(rp)^{-1}$, то результаты опыта можно представить в виде прямой линии; точка пересечения ее с осью ординат указывает значение $e_\Gamma^{2/3}$.

Рассмотрим прямые (рис. 8), представляющие результаты измерений Милликена для трех случаев: I — капельки масла в

водороде, II — капельки масла в воздухе, III — капельки ртути в воздухе. Числа по оси абсцисс соответствуют r , выраженному в сантиметрах, и p — в сантиметрах ртутного столба.

Пересечение прямых I, II и III в одной точке на оси ординат означает, что измерения заряда электрона дают одинаковый результат независимо от природы частиц и окружающей среды.

Таким путем Милликен нашел в 1913 г., что по абсолютной величине заряд электрона равен

$$e_{\Gamma} = 4,774 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС.} \quad (3.13)$$

По современным данным, коэффициенты вязкости η для воздуха и водорода несколько превышают значения, использованные Милликеном, в результате чего вместо (3.13) получается значение (3.3).

В дальнейшем различные эксперименты подтвердили существование элементарных зарядов. Весьма убедительными были опыты А. Ф. Иоффе, выполненные в 1913 г. Пылинки цинка, расположенные между горизонтальными пластинами конденсатора, освещались ультрафиолетовым светом. Регулируя разность потенциалов между пластинами, можно было добиться неподвижного положения одной из пылинок при условии

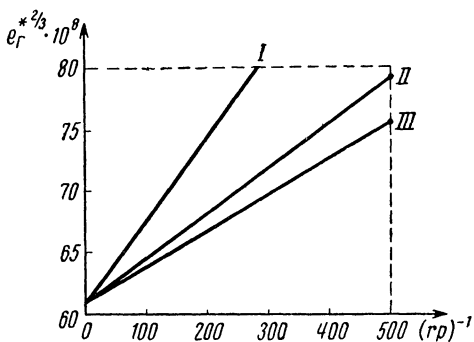


Рис. 8. Результаты измерений Милликена

$$Mg = |q| \cdot E,$$

где M — масса пылинки, g — ускорение свободного падения, q — заряд пылинки, E — напряженность электрического поля. Через некоторое время для поддержания неподвижного состояния пылинки требовалось новое значение напряженности поля E_1 вместо E , и из того же условия определялось новое значение заряда q_1 :

$$|q_1| = \frac{Mg}{E_1}.$$

Отношение скачкообразных изменений заряда в большинстве случаев было равно единице (в пределах ошибок опыта). Следовательно, под действием ультрафиолетового света заряд пылинки скачкообразно менялся на величину, равную элементарному заряду или кратную ему.

§ 3-2. ДРОБОВОЙ ЭФФЕКТ

Хорошим подтверждением атомистической природы электричества служит дробовой эффект. Это явление представляет собой флуктуации тока в электронной лампе вследствие статистического характера эмиссии заряженных частиц. При этом поток частиц подобен беспорядочному потоку дробинок. Дробовой эффект, обнаруженный немецким физиком Шоттки в 1918 г., открывает новый путь измерения заряда электрона. В теории дробового эффекта¹ средний квадрат $(\Delta i)^2$ отклонения тока эмиссии от среднего значения J этого тока выражается формулой

$$\overline{(\Delta i)^2} = \frac{eJ}{t}, \quad (3.14)$$

где e — абсолютная величина заряда электрона, t — время наблюдения.

Отсюда видно, что флуктуации тока существуют вследствие того, что $e \neq 0$. Их можно рассматривать как беспорядочный переменный ток, эффективное (среднеквадратичное) значение которого равно

$$V \overline{(\Delta i)^2} = \sqrt{\frac{eJ}{t}}. \quad (3.15)$$

В сопротивлении Z , присоединенном к лампе, возникают соответствующие *флуктуации напряжения*. Они подаются на вход усилителя, а на выходе его при помощи осциллографа определяется напряжение U . Среднеквадратичное значение напряжения, равное $\sqrt{\overline{U^2}}$, регистрируется гальванометром.

Переменный ток Δi не является периодическим и выражается в виде интеграла Фурье²

$$\Delta i = \int_0^{\infty} A(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu, \quad (3.16)$$

где $A(\nu)$ — амплитуда колебаний с частотой ν . В широкой области значений ν , если период колебаний больше времени пролета электрона в лампе (которое по порядку величины обычно составляет около 10^{-8} сек), величина $A(\nu)$ может считаться постоянной, а именно, как показал Шоттки,

$$A = 2 \sqrt{eJ}. \quad (3.17)$$

¹ См: В. Г. Левич. Введение в статистическую физику. М., ГИТТЛ, 1954.

² В выражениях типа e^{at} величина e — основание натуральных логарифмов.

Поскольку для меньших периодов колебаний, т. е. в области сверхвысоких частот, усилитель имеет близкий к нулю коэффициент усиления $\mu(\nu)$, средний квадрат напряжения на выходе, вдвое меньший квадрата амплитуды напряжения, оказывается равным

$$\overline{U^2} = 2eJ \int_0^{\infty} Z^2(\nu) \mu^2(\nu) d\nu, \quad (3.18)$$

где $Z(\nu)$ — сопротивление нагрузки.

Найденные из опыта значения $\overline{U^2}$ и J позволяют определить e . Таким путем еще в 1926 г. было найдено

$$e_{\Gamma} = 4,775 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС.}$$

Этот результат близок к истинному значению (3.3).

§ 3-3. НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ОДНОРОДНЫХ ПОЛЯХ

Будем называть частицу нерелятивистской, если ее скорость u ограничена неравенством

$$u^2 \ll c^2. \quad (3.19)$$

Рассмотрим движение нерелятивистской заряженной частицы в вакууме в однородных постоянных электрическом и магнитном

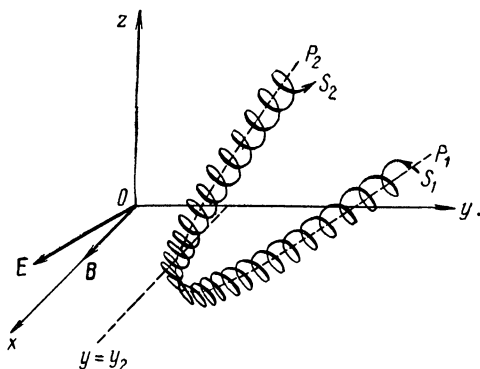


Рис. 9. Движение электрона в однородных постоянных электрическом и магнитном полях

полях как частный случай движения релятивистской частицы (см. § 2-8). Будем считать частицу точечной. Благодаря условию (3.19) соотношение (1.58) заменяется равенством $d\tau = dt$. Пусть, как и в § 2-3, ось x направлена вдоль вектора магнитной индукции \mathbf{B} , а ось z перпендикулярна векторам \mathbf{E} и \mathbf{B} (рис. 9). Сохраняя обозначения (2.71) и (2.72), из уравнений (2.74), (2.77) и

(2.79), с заменой $d\tau$ на dt , получаем

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon_y + \Omega \frac{dz}{dt}; \quad (3.20)$$

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x t + C_1; \quad (3.21)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\Omega y + C_3. \quad (3.22)$$

Такие же уравнения получаются, как легко видеть, из II закона Ньютона в виде (1.13) и выражения силы Лоренца (2.67).

Интегрирование уравнений (3.20) ÷ (3.22) легко проводится в общем случае при $\varepsilon_x \neq 0$ и $\varepsilon_y \neq 0$. Константы C_1 и C_3 определяются из начальных условий: при $t=0$ имеем

$$\left. \begin{aligned} x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \\ \frac{dx}{dt} = \dot{x}_0, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}_0, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z}_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Из уравнений (3.20) и (3.22) получаем

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \Omega^2 y = \varepsilon_y + \Omega C_3. \quad (3.24)$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$y = y_1 + y_2, \quad (3.25)$$

где y_1 — общее решение уравнения без правой части, y_2 — частное решение неоднородного уравнения. Как легко видеть,

$$y_1 = C_4 e^{i\Omega t} + C_5 e^{-i\Omega t}, \quad (3.26)$$

или

$$y_1 = R \sin(\Omega t + \psi), \quad (3.27)$$

тогда как

$$y_2 = \frac{\varepsilon_y}{\Omega^2} + \frac{C_3}{\Omega}. \quad (3.28)$$

Пользуясь равенствами (3.25) ÷ (3.28), подставим выражение y в уравнение (3.22) и проинтегрируем. Тогда

$$z = z_1 + z_2, \quad (3.29)$$

где

$$z_1 = R \cos(\Omega t + \psi), \quad (3.30)$$

$$z_2 = -\frac{\varepsilon_y}{\Omega} t + C_6. \quad (3.31)$$

Наконец, из уравнения (3.21) находим

$$x = \frac{\varepsilon x_0^2}{2} + C_1 t + C_7. \quad (3.32)$$

Постоянные $C_1 \div C_7$ определяются из начальных условий¹.

Формулы (3.27) и (3.30) описывают равномерное движение частицы по окружности радиуса R с угловой скоростью $|\Omega|$ вокруг оси, параллельной оси x , т. е. вокруг направления магнитного поля. При $y_1 > 0$ и $\Omega > 0$ (т. е. $q > 0$) получается $\dot{z}_1 < 0$. Это значит, что положительно заряженная частица движется по часовой стрелке, если смотреть навстречу направлению магнитной индукции \mathbf{B} . Напротив, при $q < 0$ направление движения частицы определяется направлением магнитной индукции по правилу винта с правой резьбой.

Решения (3.28), (3.31) и (3.32) выражают параболу $P_1 P_2$ в плоскости, перпендикулярной оси y (см. рис. 9). Если $R = 0$, то движение частицы сводится к перемещению по параболе $P_1 P_2$. В общем случае частица движется вокруг оси, параллельной магнитной индукции, по окружности, центр которой перемещается по параболе $P_1 P_2$. При этом траекторией $S_1 S_2$ частицы является пространственная спираль, окружающая параболу. На рис. 9 указано направление движения электрона (или другой отрицательно заряженной частицы). Движение положительно заряженной частицы вокруг направления магнитной индукции происходит в противоположном направлении.

В случае одного лишь электрического поля уравнение (3.32) характеризует равноускоренное движение по оси x , а уравнения (3.20) и (3.22) при $\Omega = 0$ описывают равноускоренное движение по оси y и равномерное перемещение по оси z . В итоге частица движется по параболе в плоскости, содержащей вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} и вектор начальной скорости частицы \mathbf{u}_0 , аналогично движению материальной точки в однородном поле тяжести.

В случае одного лишь магнитного поля параболы $P_1 P_2$ вырождаются в прямую линию, параллельную оси x , и траектория частицы становится цилиндрической винтовой линией с радиусом R , осью которой является направление магнитной индукции.

Из решений (3.25) \div (3.31) видно, что в отсутствие электрического поля радиус

$$R = \frac{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}}{|\Omega|}. \quad (3.33)$$

То же самое, по существу, вытекает из результатов, полученных в § 2-9.

¹ Шесть констант C_1 и $C_3 \div C_7$ находятся из шести равенств (3.23).

В выражении (2.94) для радиуса винтовой линии R следует теперь ввиду неравенства (3.19) положить $\gamma_0 = 1$, так что

$$R = \frac{u_1}{|\dot{\gamma}_0|}, \quad (3.34)$$

где u_1 означает, как и $|\dot{\gamma}_0|$ в уравнении (2.94), скорость частицы в плоскости, перпендикулярной магнитной индукции. С такой скоростью в этой плоскости частица начинает и продолжает свое движение в магнитном поле (см. § 2-9). Уравнения (2.95), (2.97) и (2.98) при $\gamma_0 = 1$ означают, что угловая скорость частицы при движении вокруг вектора магнитной индукции определяется равенством

$$\omega = \frac{|q| \cdot B}{m}; \quad (3.35)$$

продолжительность одного оборота частицы вокруг магнитной индукции выражается формулой

$$T = \frac{2\pi m}{|q| \cdot B}; \quad (3.36)$$

шаг l винтовой линии равен

$$l = \frac{2\pi m u_2}{|q| \cdot B}, \quad (3.37)$$

где u_2 — скорость частицы в направлении вдоль вектора магнитной индукции, обозначенная через $|\dot{x}_0|$ в § 2-9, неизменная при движении в однородном постоянном магнитном поле.

В частном случае, когда электрическое поле отсутствует и начальная скорость заряженной частицы направлена перпендикулярно магнитной индукции, частица не перемещается вдоль вектора \mathbf{B} . При этом винтовая линия (см. рис. 6) вырождается в окружность. Радиус R этой окружности, в силу формулы (3.34) с заменой u_1 на u и с учетом равенства (2.72), равен

$$R = \frac{mu}{|q| \cdot B}, \quad (3.38)$$

где u — скорость частицы, с которой она влетает в магнитное поле и продолжает двигаться в нем.

Величина R известна под названием *ларморовский радиус* (по имени английского физика Лармора, изучавшего движение заряженных частиц в магнитном поле).

Рассмотрим случай коллинеарных магнитного и электрического полей. При этом парабола P_1P_2 (см. рис. 9), как видно из выражений для z_2 и x при $E_y = 0$, снова сводится к прямой линии, параллельной направлению полей. В таком случае траекторией заряженной частицы будет винтовая линия радиуса R , причем для R остается справедливой формула (3.34), так как электрическое поле, перпендикулярное плоскости, в которой

происходит движение по окружности радиуса R , не может изменить движение нерелятивистской частицы (с неизменной массой) в этой плоскости. Для угловой скорости ω и периода T остаются в силе формулы (3.35) и (3.36).

Из уравнения (3.21) и начального условия $dx/dt = \dot{x}_0$ находим

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x t + \dot{x}_0. \quad (3.39)$$

Поэтому шаг винтовой линии $l = \left| \frac{dx}{dt} \right| T$ путем подстановки T из (3.36) выражается формулой

$$l = \frac{2\pi m}{|q| \cdot B} |\varepsilon_x t + \dot{x}_0|. \quad (3.40)$$

Если $q > 0$ и напряженность электрического поля параллельна магнитной индукции, то $\varepsilon_x > 0$ и шаг l растет со временем при $\dot{x}_0 > 0$, но при $\dot{x}_0 < 0$ величина l сначала убывает и лишь при $t > \frac{|\dot{x}_0|}{\varepsilon_x}$ шаг растет со временем.

Если при $q > 0$ напряженность электрического поля направлена против магнитной индукции, то $\varepsilon_x < 0$ и шаг l монотонно растет со временем при условии $\dot{x}_0 < 0$, но при $\dot{x}_0 > 0$ шаг l сперва убывает и затем растет, когда $t > \frac{|\dot{x}_0|}{\varepsilon_x}$.

Рассмотрим случай, когда электрическое поле перпендикулярно магнитному полю. Полагая, что ось x совпадает с направлением магнитной индукции, следует считать, что

$$\varepsilon_x = 0.$$

Тогда, как нетрудно видеть из формул (3.28), (3.31) и (3.32), парабола $P_1 P_2$ на рис. 9 вырождается в прямую линию, перпендикулярную оси y . В этом случае необходимо рассмотреть проекцию траектории частицы на плоскость, перпендикулярную оси x . С такой проекцией совпадает путь движения частицы в отсутствие начальной скорости по оси x , т. е. при $\dot{x}_0 = 0$. Если же $\dot{x}_0 \neq 0$, то к описанному движению добавляется равномерное перемещение частицы коллинеарно оси x со скоростью \dot{x}_0 .

Движение частицы в плоскости y, z определяется равенствами (3.27), (3.28), (3.30) и (3.31). Это будет движение по окружности с угловой скоростью $|\Omega|$, налагающееся на равномерное движение (дрейф) вдоль оси z , по линии $y = y_2$, со скоростью \dot{z}_2 . В силу уравнений (3.31), (2.71) и (2.72) эта скорость дрейфа выражается формулой

$$\dot{z}_2 = -\frac{E_y}{B}. \quad (3.41)$$

Траектория частицы совпадает с траекторией точки, удаленной на

расстояние R от центра круга радиуса

$$\rho = \frac{|\varepsilon_y|}{\Omega^2}, \quad (3.42)$$

если этот круг катится по прямой линии с угловой скоростью $|\Omega|$. Такая траектория называется трохойдой. При $R > \rho$ она имеет вид кривой I (рис. 10), при $R = \rho$ вырождается в циклоиду II, а при $R < \rho$ принимает вид кривой III. Направление движения ука-

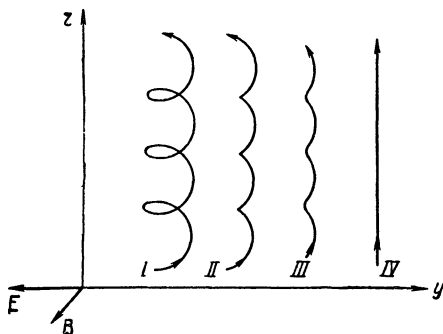


Рис. 10. Возможные траектории электрона во взаимно перпендикулярных полях

зано на рис. 10 для электрона (или другой отрицательно заряженной частицы), когда направление движения по окружности вокруг вектора магнитной индукции определяется направлением этого вектора \mathbf{B} по правилу винта с правой резьбой. Положительно заряженная частица будет двигаться вокруг вектора \mathbf{B} в обратном направлении, но перемещение центра такой окружности, т. е. дрейф, будет происходить вдоль оси z с той же скоростью $\dot{z}_2 = -E_y/B$. Движение электронов по траекториям трохойдального типа играет существенную роль во многих электронных приборах.

На основании решений (3.25) ÷ (3.31) радиус

$$R = \frac{\sqrt{y_0^2 + \left(z_0 + \frac{\varepsilon_y}{\Omega}\right)^2}}{|\Omega|}. \quad (3.43)$$

При $R = 0$ траектория вырождается в прямую линию IV. При этом $y = y_2$, $\dot{y} = 0$, $z = z_2$ и $\dot{z} = \dot{z}_2 = -E_y/B$, т. е. частица при $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ равномерно движется коллинеарно оси z . Этот результат служит иллюстрацией общего вывода (см. § 2-8), что любая частица со скоростью \mathbf{u} , удовлетворяющей соотношению (2.91), продолжает двигаться во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях с той же скоростью.

В заключение рассмотрим частный случай, когда частица движется во взаимно перпендикулярных полях \mathbf{E} и \mathbf{B} с начальной скоростью \mathbf{u}_0 , параллельной вектору \mathbf{E} .

Из уравнений (3.28), (3.31) и (3.32) при $\varepsilon_x = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$ видно, что прямая линия, как результат вырождения параболы $P_1 P_2$, будет в этом случае параллельна оси z , поскольку вектор \mathbf{B} направлен по оси x , а вектор \mathbf{E} коллинеарен оси y . Частица перемещается (дрейфует) вдоль оси z и движется по окружности ра-

диуса R вокруг оси x . Траектория частицы лежит в плоскости y, z . Из формулы (3.43) при $\dot{z}_0 = 0$ находим

$$R = \frac{\sqrt{\dot{y}_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_y}{\Omega}\right)^2}}{|\Omega|}.$$

Заменяя \dot{y}_0^2 на u_0^2 , имеем

$$R = \frac{\sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_y}{\Omega}\right)^2}}{|\Omega|}. \quad (3.44)$$

Из сравнения с формулой (3.42) находим, что $R > \rho$, так что траектория имеет вид кривой I (см. рис. 10); так как $\dot{z}_0 = 0$, начальная точка на кривой I удовлетворяет условию $dz/dy = 0$, т. е. частица в начальный момент движется коллинеарно электрическому полю. В нерелятивистской теории величина ε_y , удовлетворяющая равенству (2.71), совпадает по II закону Ньютона с ускорением частицы под действием сил электрического поля. При положительном ускорении в начале движения частицы ее скорость растет.

§ 3-4. ИЗМЕРЕНИЯ УДЕЛЬНОГО ЗАРЯДА

Удельным зарядом заряженной частицы называется отношение абсолютной величины заряда к массе частицы (e/m).

В 1897 г. английский физик Дж. Дж. Томсон впервые определил удельный заряд электрона, наблюдая отклонение пучка катодных лучей, т. е. потока электронов, на который действовали совместно электрическое и магнитное поля, созданные конденсатором и соленоидом. Эти поля, с известной точностью однородные, перпендикулярные друг другу и направлению начальной скорости электронов, подбирались так, что след пучка катодных лучей на флуоресцирующем экране не смещался под действием полей. Это было признаком справедливости формулы (2.91), откуда определялась скорость электронов

$$u = \frac{E}{B}. \quad (3.45)$$

Она оказалась много меньше скорости света в вакууме, а потому справедлива нерелятивистская теория опыта. Когда в опыте электрическое поле отсутствовало, под действием магнитного поля электроны двигались по окружности, при этом формула (3.38) с заменой $|q|$ на e позволяла найти удельный заряд электрона e/m , так как радиус окружности легко определялся из геометрических соображений, по смещению следа пучка на экране при появлении магнитного поля.

Из формул (3.38) и (3.45) при одной и той же магнитной индукции получается равенство

$$\frac{e}{m} = \frac{E}{RB^2}. \quad (3.46)$$

Томсон создавал разнообразные условия опыта. Менялись напряженности полей, род газа в разрядной трубке, материалы катодов и стенок трубки; вместо нагрева катода использовалось действие ультрафиолетовых или рентгеновских лучей. Во всех случаях получались одинаковые, в пределах точности опыта, значения e/m , в тысячи раз бóльшие, чем отношение заряда к массе для ионов в условиях электролиза. Таким образом, опыт показал, что в катодных лучах, в которых отсутствуют ионы или атомы, существуют универсальные «атомы электричества» — электроны с определенным удельным зарядом e/m .

Итак, в этих опытах Томсоном был открыт электрон — первая в истории физики элементарная частица.

Среднее значение удельного заряда электрона, полученное Томсоном, оказалось равным (в абсолютной электромагнитной системе единиц СГСМ)

$$e = 2,3 \cdot 10^7 \text{ ед. СГСМ},$$

что составляет $6,9 \cdot 10^{17}$ ед. СГС, или в единицах СИ

$$\frac{e}{m} = 2,3 \cdot 10^{11} \text{ к/кг}.$$

Однако этот результат нельзя признать точным.

Для повышения точности измерений удельного заряда электрона используется, например, *продольное магнитное поле*, фокусирующее электроны в вакууме.

Допустим, что два нерелятивистских электрона вылетают из одной точки O (из очень малого отверстия диафрагмы) со скоростями, равными по величине u и немного различными по направлению (рис. 11). Как видно из § 3-3, эти электроны будут двигаться в однородном магнитном поле по винтовым линиям, оси которых параллельны вектору магнитной индукции. Направим этот вектор так, чтобы начальные скорости обоих электронов образовали с ним малые углы α_1 и α_2 . Тогда отношение продольных компонент скорости $u \cos \alpha_1$ и $u \cos \alpha_2$ с высокой степенью точности равно единице, а отношение поперечных компонент $u \sin \alpha_1$ и $u \sin \alpha_2$ заметно отличается от единицы.

Линейные скорости движения электронов вокруг направления магнитного поля остаются неизменными (см. § 3-3) и равными $u \sin \alpha_1$ и $u \sin \alpha_2$.

Радиусы винтовых линий для электронов 1 и 2 (см. рис. 11) выражаются на основании формулы (3.34) с заменой u_1 соответственно на $u \sin \alpha_1$ или $u \sin \alpha_2$. Величина $|\Omega|$ для электронов, как

видно из формулы (2.72), с заменой q на $-e$, равна eB/m . Время T полного оборота вокруг магнитного поля, равное

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad \text{или} \quad T = \frac{2\pi m}{eB}, \quad (3.47)$$

одинаково для обоих электронов. За это время они продвигаются вдоль направления поля практически на одно и то же расстояние

$$l = u \cos \alpha_1 T = u \cos \alpha_2 T \quad (3.48)$$

и снова встречаются в точке O_1 (см. рис. 11).

При движении многих электронов с одинаковыми по величине и почти параллельными скоростями на флуоресцирующем экране \mathcal{E} видно яркое свечение почти в одной точке O_1 . В правой части на рис. 11 изображены проекции путей двух электронов на плоскость экрана.

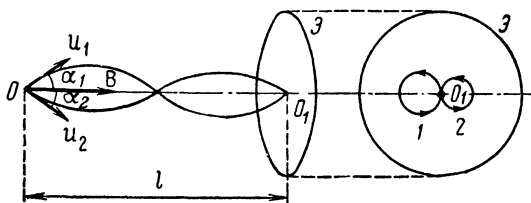


Рис. 11. Фокусировка электронов продольным магнитным полем

Итак, однородное магнитное поле фокусирует электроны в точке O_1 подобно тому, как лучи света фокусируются линзой. Соленоид, создающий такое поле, можно назвать магнитной линзой. Разнообразные магнитные линзы широко используются в электронной оптике. Если углы α для всех электронов достаточно малы, то вместо выражений (3.48) можно принять

$$l = uT.$$

Отсюда, пользуясь равенством (3.47), находим

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi u}{lB}. \quad (3.49)$$

Если электроны предварительно вступают в ускоряющее электростатическое поле с пренебрежимо малой скоростью и проходят настолько небольшую разность потенциалов $\Delta\phi$, что выполняется неравенство (3.19), то, переписывая уравнение (2.70) в виде

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot mu \frac{du}{dt} = q(uE),$$

можно пренебречь величиной u^2/c^2 по сравнению с единицей, откуда после интегрирования с использованием равенств $u = dl/dt$

и $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ получаем нерелятивистское выражение закона сохранения энергии

$$\frac{m}{2} \cdot \Delta (u^2) = -q \cdot \Delta \varphi. \quad (3.50)$$

Заменяя для электронов q на $-e$ и пренебрегая начальной скоростью, находим

$$\frac{mu^2}{2} = e \cdot \Delta \varphi. \quad (3.51)$$

Из соотношений (3.49) и (3.51), зная l , B и $\Delta \varphi$, можно определить удельный заряд электрона

$$\frac{e}{m} = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ к/кг}, \quad (3.52)$$

что вполне согласуется с принятым в настоящее время значением. Отсюда вследствие равенства (3.2) для m получается значение

$$m = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ кг}. \quad (3.53)$$

Для определения удельного заряда путем фокусировки заряженных частиц используют также *однородное поперечное магнитное поле*. Пусть частицы вылетают из точки S (рис. 12) с одинаковыми по величине скоростями u . Диафрагма D выделяет пучок частиц с небольшим углом расхождения α . При движении в магнитном поле, перпендикулярном плоскости чертежа, заряженная частица описывает в этой плоскости окружность радиуса R в согласии с равенством (3.38).

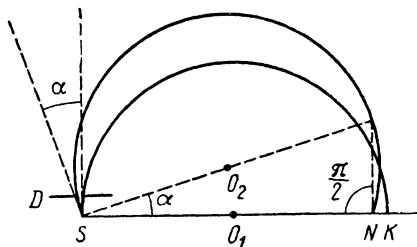


Рис. 12. Фокусировка заряженных частиц в однородном поперечном магнитном поле

Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, по которым движутся крайние частицы пучка. Частицы, летящие в пределах угла α , попадают на диаметр SO_1K первой окружности между точками N и K . Из рис. 12 находим

$$NK = 2R (1 - \cos \alpha) = 4R \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

или в случае достаточно малого угла α можно принять

$$NK = R\alpha^2.$$

При малом α получается удовлетворительная фокусировка всех частиц пучка в малой области NK . Длина L отрезка SK равна $2R$. Из уравнения (3.38) находим

$$\frac{|q|}{m} = \frac{2u}{LB}. \quad (3.54)$$

Отсюда, зная скорость u , например, из равенства (3.50) легко вычислить удельный заряд частицы $|q|/m$.

Если в пучок входят различные заряженные частицы, то они, как видно из формулы (3.54), фокусируются в разных точках: тем ближе к точке S , чем больше удельный заряд $|q|/m$. Такой метод разделения частиц используется в масс-спектрографах и при электромагнитном разделении изотопов.

Точность определения удельного заряда этим методом ограничена тем, что расстояние L измеряется с ощутимой погрешностью.

Для точного определения удельного заряда электрона пригоден метод двух конденсаторов с использованием переменного электрического поля. Внутри стеклянной трубки (рис. 13) создается

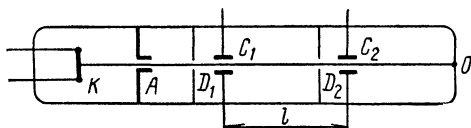


Рис. 13. Схема опыта по определению удельного заряда электрона методом двух конденсаторов

высокий вакуум. Катод K накаливается и служит источником электронов. На пути к аноду A они ускоряются полем, а затем узкий пучок электронов, выделенный диафрагмой D_1 , подвергается действию переменного электрического поля между пластинами конденсатора C_1 . При этом диафрагма D_2 пропускает лишь те электроны, которые не испытывают заметного отклонения в конденсаторе C_1 , т. е. проходят через него в то время, когда разность потенциалов между обкладками можно считать равной нулю. Конденсатор C_2 присоединяется к тому же высокочастотному генератору, как и C_1 , так что разность потенциалов между обкладками меняется синхронно в обоих конденсаторах с некоторым периодом T . Электроны, достигшие конденсатора C_2 , не будут отклоняться в нем, как и в конденсаторе C_1 , лишь в том случае, если они пролетают расстояние l между конденсаторами за время t , равное или кратное полупериоду $T/2$ генератора, так что

$$t = \frac{nT}{2}, \quad (3.55)$$

где n — целое число. При этом пучок электронов попадает на флуоресцирующий экран в той же точке O , как и в случае отключения конденсаторов от генератора. Но

$$t = \frac{l}{u}, \quad (3.56)$$

где u — скорость электрона на пути l , связанная соотношением

(3.51) с ускоряющей разностью потенциалов $\Delta\varphi$ между катодом K и анодом A .

Таким образом, из равенств (3.56) и (3.55) имеем

$$\frac{nT}{2} = \frac{l}{\sqrt{2e \cdot \Delta\varphi/m}}.$$

Так как $T = 1/\nu$, где ν — частота генератора, то

$$\frac{e}{m} = \frac{2\nu^2 l^2}{n^2 \cdot \Delta\varphi}. \quad (3.57)$$

В этом опыте частота ν монотонно растет. Пучок электронов попадает в центр экрана O впервые при $n=1$, затем при $n=2$ и т. д.

Такой метод с высокой точностью приводит к результату (3.52).

§ 3-5. ЦИКЛОТРОН

Существование у частицы определенного удельного заряда подтверждается при движении ее в вакууме в циклотроне, предназначенном для ускорения заряженных частиц. Такой ускоритель можно построить, если выполнить из листового ферромагнитного металла замкнутую поверхность в виде цилиндра небольшой длины, разрезать плоскостью, проходящей через ось, немного раздвинуть образовавшиеся половины — дуанты (рис. 14) и поместить их в постоянное магнитное поле, почти параллельное оси циклотрона. К дуантам подводится высокочастотное напряжение и между ними создается переменное электрическое поле. Внутри дуантов существует лишь магнитное поле.

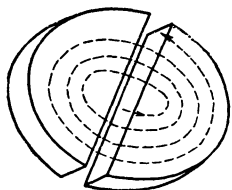


Рис. 14. Движение частицы в циклотроне

В упрощенной теории циклотрона предполагается, что магнитное поле однородно и параллельно оси, промежуток между дуантами ничтожно мал, а заряженная частица появляется в этом промежутке с пренебрежимо малой начальной скоростью в момент, когда напряженность переменного электрического поля достигает максимума. Частица получает в электрическом поле некоторое приращение скорости за короткое время, в течение которого поле можно считать постоянным, так что справедливо уравнение (3.50). Затем частица вступает в дуант со скоростью u , перпендикулярной вектору магнитной индукции и радиусу, проведенному от центра полуокружности дуанта. Движение частицы внутри дуанта под действием одного лишь магнитного поля происходит с постоянной скоростью u (см. § 3-3) в плоскости, параллельной крышкам дуантов (рис. 14). Время движения частицы внутри одного

дуанта на основании формулы (3.36) равно

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi m}{|q| \cdot B}.$$

Полупериод электрического поля берется таким же, и частица ускоряется всякий раз, когда она проходит щель между дуантами. Нарастание скорости u частицы приводит, в силу равенства (3.38), к увеличению радиуса R полуокружности, по которой движется частица внутри очередного дуанта (см. рис. 14, где траектория частицы изображена пунктиром). Чтобы синхронизм движения частицы и изменения электрического поля с определенной частотой не нарушался, угловая скорость частицы ω должна оставаться постоянной. Следовательно, ускорение частицы в циклотроне должно закончиться раньше, чем обнаружится существенное различие между нерелятивистским выражением ω как постоянной величины (3.35) и точным релятивистским значением ω по формуле (2.95), где $\gamma_0 = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$, причем u — скорость, с которой частица вступает в дуант. Таким образом, скорость u частицы в циклотроне ограничивается неравенством $u^2 \ll c^2$. Умножив обе части этого неравенства на массу покоя частицы m , заменим его равноценным неравенством

$$W_k \ll W_0, \quad (3.58)$$

где $W_k = mu^2/2$ — кинетическая энергия частицы в нерелятивистской теории, $W_0 = mc^2$ — энергия покоя частицы (1.81).

Если частица с зарядом q проходит n раз промежутков между дуантами циклотрона, когда разность потенциалов между ними равна φ , то, пренебрегая начальной кинетической энергией частицы, на основании закона сохранения энергии (3.50) получаем

$$W_k = n \cdot |q| \cdot \varphi.$$

Неравенство (3.58) приводится к виду

$$n \cdot |q| \cdot \varphi \ll mc^2.$$

Если масса m частицы мала, то ее движение в циклотроне ограничивается небольшим числом оборотов n , т. е. циклотрон не может быть эффективным средством ускорения легких частиц, например электронов. Циклотрон используется для ускорения протонов и атомных ядер. Поскольку заряд q частицы равен элементарному заряду e , угловая скорость частицы на основании формулы (3.35) выражается в виде

$$\omega = \frac{eB}{m}. \quad (3.59)$$

Такова же при этом угловая (циклическая) частота колебаний напряжения между дуантами циклотрона. Эта величина ω называется циклотронной частотой.

Важнейшую роль в теории циклотрона играет вопрос об устойчивости движения частицы внутри дуанта при малых возмущениях, т. е. при неизбежных случайных нарушениях движения внешними воздействиями. Для устойчивости необходимо существование физического фактора, восстанавливающего нарушенное состояние движения.

Поэтому в циклотроне применяют магнитное поле, которое не вполне однородно, а, обладая осевой симметрией, монотонно убывает по мере удаления от оси и является «бочкообразным», т. е. линии магнитной индукции в области, занятой циклотроном, имеют выпуклость в сторону от оси, тем более заметную, чем дальше от оси. При этом лоренцова сила (2.68), перпендикулярная магнитной индукции, мешает отклонению заряженных частиц от той средней плоскости, в которой линии магнитного поля параллельны оси циклотрона. Если частица случайно отклонится в этой плоскости в сторону от оси с сохранением скорости u , то необходимое для движения по окружности равенство центростремительной силы mu^2/r и силы Лоренца quB будет нарушено, если магнитная индукция B растет с приближением к оси медленнее, чем обратно пропорционально r . При этом сила Лоренца окажется недостаточной, чтобы удержать частицу на таком уменьшенном расстоянии от оси, и частица вернется на траекторию прежнего радиуса, где при скорости u частицы сила Лоренца снова станет равна центростремительной силе. Подобным образом после случайного удаления от оси частица вернется на прежнюю траекторию, если магнитная индукция B убывает с увеличением радиуса медленнее, чем обратно пропорционально r .

В действительности магнитная индукция B в циклотроне, как функция радиуса r , выражается приближенно в виде

$$B = \frac{A}{r^n},$$

где $A = \text{const}$ и величина n не только меньше 1, но и близка к нулю, так что магнитная индукция на периферии циклотрона лишь немного меньше, чем в центре. Таким образом, в циклотроне хорошо обеспечивается устойчивость движения частиц.

Уменьшение магнитной индукции B с увеличением радиуса ограничивает возможность ускорения частиц в циклотроне. Действительно, двигаясь с возрастанием скорости по траектории все большего радиуса, частица переходит в область меньших значений магнитной индукции B . При этом, как видно из формулы (2.95), уменьшение угловой скорости ω обусловлено не только релятивистским эффектом возрастания массы, но и уменьшением величины B . Таким образом, нарушение синхронизма между движением частицы и изменением электрического поля усугубляется вследствие неизбежной в циклотроне неоднородности магнитного поля, без которой невозможно устойчивое движение. При неизменной частоте

электрического поля частица подходит к промежутку между дуантами с отставанием по фазе, которое, постепенно нарастая, приводит к тому, что частица выходит из дуанта, когда ускоряющее поле равно нулю, т. е. ускорение прекращается. Циклотроны позволяют сообщать частицам энергии, не превышающие нескольких десятков мегаэлектронвольт¹.

Опыт работы циклотронов подтверждает изложенную теорию движения частиц, т. е. свидетельствует о существовании у заряженных частиц определенного удельного заряда $|q|/m$ или e/m .

§ 3-6. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

Поля, которые используются для определения удельного заряда частицы, обычно в заметной степени неоднородны.

Рассмотрим движение нерелятивистской заряженной частицы в неоднородном электростатическом поле плоского конденсатора, когда частица начинает свое движение в плоскости, расположенной симметрично относительно пластин конденсатора, с начальной скоростью u_0 , параллельной пластинам и достаточно большой по сравнению с изменением скорости под действием поля.

Совместим начало координат с начальной точкой движения частицы в поле и направим ось x перпендикулярно пластинам конденсатора, а ось y —вдоль вектора u_0 . Из уравнений (2.73) ÷ (2.75) при $d\tau = dt$ и $\Omega = 0$ имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon_x; \quad (3.60)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon_y; \quad (3.61)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Из последнего уравнения, пользуясь начальными условиями, находим: $z = 0$. Величины ε_x и ε_y , как видно из равенства (2.71), вследствие неоднородности электрического поля зависят от x и y , а потому уравнения (3.60) и (3.61) следует решать по методу последовательных приближений. В начальный момент, когда частица находится на равных расстояниях от пластин, имеем $\varepsilon_y = 0$. Поскольку изменение скорости частицы невелико, она продолжает двигаться вблизи плоскости y, z , в которой $\varepsilon_y = 0$. В исходном приближении положим $\varepsilon_y = 0$. Тогда из уравнения (3.61) находим

$$\frac{dy}{dt} = u_0, \quad (3.62)$$

¹ 1 мегаэлектронвольт ($Mэв$) = $10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ дж = $1,6 \cdot 10^{-13}$ дж.

где u_0 — начальная скорость, откуда получаем

$$y = u_0 t.$$

Так как в силу равенства (3.62) $dt = dy/u_0$, уравнение (3.60) перепишем в виде

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{\epsilon_x}{u_0^2}.$$

Отсюда находим отклонение частицы вдоль оси x в конце пробега отрезка l по оси y :

$$x = \frac{1}{u_0^2} \int_0^l dy \int_0^y \epsilon_x dy.$$

Пользуясь приемом интегрирования по частям, запишем

$$\int_0^l dy \int_0^y \epsilon_x dy = y \int_0^y \epsilon_x dy \Big|_0^l - \int_0^l y \epsilon_x dy = \int_0^l \epsilon_x (l - y) dy$$

и заменим ϵ_x на основании равенства (2.71). Тогда

$$x = \frac{q}{mu_0^2} \int_0^l E_x (l - y) dy, \quad (3.63)$$

где E_x рассматривается как заданная функция y при $x=0$. Изменяя x при определенном l и зная u_0 , легко найти из формулы (3.63) отношение q/m .

Вычисления можно закончить этим первым приближением, если x достаточно мало по сравнению с l . В противном случае следует вычислить из уравнений (3.60), (3.61) x и y как функции t во втором приближении, рассматривая ϵ_x и ϵ_y как функции координат, известные из первого приближения.

В качестве другого простого случая рассмотрим движение нерелятивистской заряженной частицы в неоднородном магнитном поле, когда существует плоскость, всюду перпендикулярная магнитной индукции¹, причем вектор начальной скорости частицы лежит в этой плоскости.

Совместим начало координат с начальной точкой движения частицы в поле и направим ось x вдоль вектора магнитной индукции \mathbf{B} , а ось y — вдоль вектора \mathbf{u} . Величина Ω по формуле (2.72) зависит теперь от y и z . Заменяя в уравнениях (2.73) ÷ (2.75) $d\tau$ на dt , полагая $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ и дважды интегрируя уравнение

¹ Например, существует плоскость, относительно которой разноименные магнитные полюсы одинаковой конструкции расположены симметрично.

(2.73) с учетом начальных условий, находим

$$x = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \Omega \frac{dz}{dt}, \quad (3.64)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\Omega \frac{dy}{dt}. \quad (3.65)$$

Воспользуемся соотношением

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \dot{y} \frac{d\dot{z}}{dy},$$

где точка над буквой — знак дифференцирования величины по времени. Тогда из уравнения (3.65) получим

$$\frac{d\dot{z}}{dy} = -\Omega,$$

откуда с учетом начальных условий ($y_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$) имеем

$$\dot{z} = -\int_0^y \Omega dy,$$

или вследствие равенства (2.72)

$$\dot{z} = -\frac{q}{m} \int_0^y B dy. \quad (3.66)$$

Вычисления осложняются тем, что B является функцией y и z в точках подлежащей определению траектории частицы, что заставляет, вообще говоря, пользоваться методом последовательных приближений. Ограничимся случаем, когда смещение частицы в направлении оси z настолько мало по сравнению с перемещением ее вдоль оси y , что при вычислении \dot{z} из уравнения (3.66) достаточно принять во внимание зависимость B от y при $z = 0$.

Как было отмечено в § 2-7, магнитное поле не может изменить скорость частицы, которая остается равной u_0 . Таким образом,

$$\dot{y} = \sqrt{u_0^2 - \dot{z}^2}.$$

Далее имеем

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\dot{z}}{\dot{y}} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{u_0^2 - \dot{z}^2}},$$

откуда

$$z = \int_0^y \frac{\dot{z}(y)}{\sqrt{u_0^2 - \dot{z}^2}} dy.$$

Пренебрегая малой величиной \dot{z}^2 по сравнению с u_0^2 , получим

$$z = \frac{1}{u_0} \int_0^y \dot{z}(y) dy.$$

Пользуясь равенством (3.66), находим, что частица, проходя отрезок l перпендикулярно вектору магнитной индукции \mathbf{B} в направлении начальной скорости \mathbf{u}_0 , отклоняется в направлении векторного произведения $[\mathbf{B}\mathbf{u}_0]$ на расстояние

$$z = -\frac{q}{mu_0} \int_0^l dy \int_0^y B dy.$$

Выполним интегрирование по частям аналогично выводу формулы (3.63). Тогда

$$z = -\frac{q}{mu_0} \int_0^l B(l-y) dy. \quad (3.67)$$

Отсюда, зная z и u_0 из опыта, а также величину B , как функцию y при $z=0$, можно найти q/m . Объединяя результаты (3.63) и (3.67), можно определить из опыта u_0 и q/m . Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l E_x(l-y) dy &= a, \\ \int_0^l B(l-y) dy &= b \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

и переписать результаты (3.63) и (3.67) в виде

$$x = \frac{qa}{mu_0^2}, \quad z = -\frac{qb}{mu_0},$$

то получим

$$\frac{q}{m} = \frac{a}{b^2} \cdot \frac{z^2}{x}, \quad (3.69)$$

причем

$$u_0 = -\frac{a}{b} \frac{z}{x}.$$

Если частица с начальной скоростью u_0 , направленной по оси y , проходит вдоль этой оси расстояние l в области, где действуют *коллинеарные электрическое и магнитное поля*, причем магнитное поле направлено по оси x , то в конце этого пути на флуоресцирующем экране или на фотопластинке в плоскости x, z следы частиц, обладающих одинаковым отношением заряда к массе, образуют, как видно из равенства (3.69), параболу, определяемую

уравнением

$$x = \frac{a}{b^2} \frac{m}{q} z^2,$$

где a/b^2 — постоянная прибора. Если, в частности, считать поля однородными и $E_x = -E$, то из формул (3.68) вытекают равенства

$$a = -\frac{Et^2}{2}, \quad b = \frac{Bt^2}{2},$$

и уравнение параболы принимает вид

$$x = -\frac{2E}{B^2 t^2} \cdot \frac{m}{q} \cdot z^2. \quad (3.70)$$

Описанный метод парабол, с помощью которого определяется удельный заряд частицы из равенства (3.69) или (3.70), был разработан в 1911 г. Дж. Дж. Томсоном.

§ 3-7. ОСНОВНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С РЕЛЯТИВИСТСКИМИ ЧАСТИЦАМИ

Если скорость электрона u близка к скорости света в вакууме c , то его движение не подчиняется законам классической механики (см. § 1-9). Доказательством справедливости этого утверждения послужил *опыт Кауфмана*, проведенный в 1901 г. за четыре года до появления теории относительности.

В опыте Кауфмана тонкий пучок электронов с различными начальными скоростями, превышавшими иногда $0,9c$, выделялся диафрагмой из β -лучей радия и подвергался одновременному воздействию поперечных к пучку коллинеарных однородных электрического и магнитного полей соответственно с напряженностью E и магнитной индукцией B .

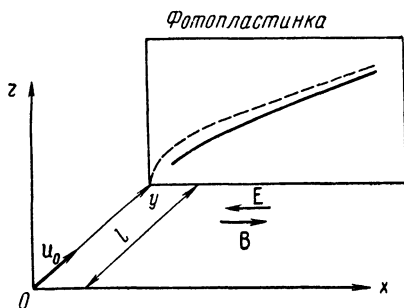


Рис. 15. К теории опыта Кауфмана

Если вектор B направлен по оси x , а вектор E — противоположно и вектор u_0 — по оси y (рис. 15), то решения (2.83) ÷ (2.86) при $\dot{x}_0 = 0$ и $\dot{y}_0 = u_0$, с заменой в выражениях Ω и ϵ_x заряда q на $-e$, принимают вид

$$x = \frac{c}{a\gamma_0} (\text{ch } a\tau - 1); \quad (3.71)$$

$$y = \frac{u_0}{\omega\gamma_0} \sin \omega\tau; \quad (3.72)$$

$$z = \frac{u_0}{\omega\gamma_0} (1 - \cos \omega\tau); \quad (3.73)$$

$$t = \frac{1}{a\gamma_0} \text{sh } a\tau; \quad (3.74)$$

где

$$a = \frac{eE}{mc}, \quad \gamma_0 = \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}, \quad \omega = \frac{eB}{m},$$

причем собственное время τ и время t отсчитываются от момента, когда электрон находится в начале координат O .

На расстоянии l в направлении оси y от точки O расположена перпендикулярно оси y фотопластинка, регистрирующая следы попаданий электронов. Собственное время τ_l , в течение которого электрон проходит от точки O до фотопластинки, определяется из уравнения (3.72) с заменой y на l

$$\tau_l = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{l\omega\gamma_0}{u_0}. \quad (3.75)$$

Координаты электрона в плоскости фотопластинки определяются из уравнений (3.71) и (3.73) с заменой τ на τ_l . В зависимости от начальной скорости u_0 электрон попадает в ту или иную точку на фотопластинке. При $u_0 \rightarrow c$ имеем $\gamma_0 \rightarrow 0$, $\tau_l \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$.

В опыте Кауфмана скорости электронов были настолько велики, а расстояние l и магнитная индукция B настолько малы, что

$$\frac{l\omega\gamma_0}{u_0} \ll 1. \quad (3.76)$$

При этом из уравнения (3.75) получается

$$\tau_l = \frac{l\gamma_0}{u_0}, \quad (3.77)$$

и неравенство (3.76) означает, что

$$\omega\tau_l \ll 1. \quad (3.78)$$

Большая скорость электронов и не слишком сильное электрическое поле привели в опыте к соотношению

$$a\tau_l \ll 1. \quad (3.79)$$

Уравнения (3.71), (3.73) и (3.74) с заменой τ на τ_l и t на t_l , в силу неравенств (3.78) и (3.79), принимают вид

$$x = \frac{acl^2\gamma_0}{2u_0^2}; \quad (3.80)$$

$$z = \frac{\omega l^2\gamma_0}{2u_0}; \quad (3.81)$$

$$t_l = \frac{\tau_l}{\gamma_0}. \quad (3.82)$$

Возводя уравнение (3.81) в квадрат, заменяя γ_0^2 на $1 - u_0^2/c^2$, выражая u_0 через z и подставляя в уравнение (3.80), после замены a и ω их значениями находим

$$x = \frac{Ez}{ceB^2l^2} \sqrt{4c^2z^2m^2 + e^2B^2l^4}, \quad (3.83)$$

т. е. получаем в первом приближении геометрическое место следов электронов на фотопластинке.

Рассматривая неравенство (3.19), легко заметить, что результаты нерелятивистской теории движения частиц можно получить как частный случай релятивистских результатов при $u/c \rightarrow 0$ или при $c \rightarrow \infty$. Тогда уравнение (3.83) приводится к виду

$$x = \frac{2E}{B^2 l^2} \cdot \frac{m}{e} z^2, \quad (3.84)$$

что совпадает с нерелятивистской формулой (3.70) при $q = -e$. Таким образом, опыт Кауфмана аналогичен методу парабол Томсона, но в этом опыте вместо параболы (3.84) (см. пунктир на рис. 15) получается кривая 4-го порядка (3.83). Из уравнений (3.80) и (3.81) находим

$$x = \frac{2E}{B^2 l^2} \cdot \frac{m}{\gamma_0 e} \cdot z^2.$$

Следовательно, формула (3.84) будет справедлива, если заменить массу покоя электрона m величиной $m' = m/\gamma_0$, т. е. если признать, что масса электрона в состоянии движения выражается формулой

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}}.$$

Но в рассмотренном приближении уравнения (3.77) и (3.82) соответствуют равномерному движению по оси y со скоростью u_0 , а скорость электрона в направлении, перпендикулярном оси y , пренебрежимо мала. При этом заменяя u_0 на u , можно записать

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

что совпадает с формулой (1.74).

Электрон был первым материальным объектом, для которого удалось обнаружить в опыте Кауфмана зависимость массы от скорости. Однако степень точности опыта Кауфмана была недостаточна для надежного количественного выражения этой зависимости. Последующие уточнения такого опыта подтвердили справедливость формулы (1.74). Например, в опыте Накена (1935 г.) расхождение результатов с этой формулой было около 1%, а в опыте Мейера и др. с быстрыми электронами (1963 г.) — лишь 0,05%¹.

Справедливость релятивистской зависимости массы от скорости (1.74) с хорошей степенью точности подтвердил *опыт Цана и Списса* (1938 г.). Рассмотрим схему этого опыта (рис. 16).

¹ См.: УФН, 96, 519, 1968.

Релятивистские электроны, испускаемые радиоактивным препаратом A со скоростью u , движутся в магнитном поле B , перпендикулярном плоскости чертежа, по окружности, радиус которой выражается формулой (2.99) с заменой $|q|$ на e :

$$R = \frac{m'u}{eB}. \quad (3.85)$$

Отверстия диафрагм D_1 , D_2 и плоский конденсатор C располагаются так, что только электроны, движущиеся с определенной скоростью u по окружности соответствующего радиуса R , пройдут от источника A через диафрагмы к конденсатору C и вступают в него со скоростью, направленной параллельно плоскостям пластин. Напряженность E электрического поля в конденсаторе, перпендикулярная магнитному полю и скорости частицы, с которой она вступает в конденсатор, подбирается так, чтобы выполнялось соотношение (2.91), благодаря чему электроны движутся в конденсаторе прямолинейно и равномерно. Критерием этого служит тот факт, что электроны, пройдя конденсатор с постоянной скоростью u и двигаясь далее по окружности радиуса R в соответствии с равенством

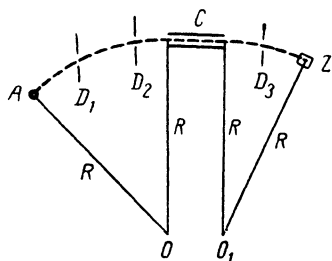


Рис. 16. Схема опыта Цана и Списа

(3.85), попадают через отверстие диафрагмы D_3 в счетчик Z , где они регистрируются. Из соотношения (2.91) находим

$$E = Bu.$$

Подставляя сюда значение u из равенства (3.85), получаем

$$m' = \frac{eB^2R}{E}.$$

Результаты, в пределах погрешности опыта, совпадают с формулой (1.74), а именно расхождение составляло в опытах Цана и Списа около 1%.

При экспериментах с релятивистскими элементарными заряженными частицами в космических лучах заряд частицы равен по абсолютной величине элементарному заряду e . Наблюдения проводятся, например, в камере Вильсона, где пересыщенный пар конденсируется на ионах, создаваемых заряженной частицей на своем пути.

Пусть камера Вильсона помещена в сильное магнитное поле (метод Д. В. Скобельцына). В камере фотографируется проекция следа частицы на плоскость, перпендикулярную магнитному полю. Обозначим радиус кривизны этой проекции через R . На основа-

нии формул (2.94) и (2.72), с заменой $|q|$ на e , имеем

$$\frac{m}{\gamma_0} |\dot{y}_0| = eBR,$$

где $\gamma_0 = \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}$. При движении частицы в однородном магнитном поле ее скорость по величине неизменна, т. е. $u = u_0$ (см. § 2-9), причем скорость в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, остается равной первоначальной скорости $|\dot{y}_0|$ в этой плоскости. Поэтому, с учетом соотношения (1.73), импульс частицы в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, оказывается равным

$$p = \frac{m}{\gamma_0} |\dot{y}_0|,$$

или, в силу предыдущего равенства,

$$p = eBR.$$

Наблюдаемое изменение радиуса кривизны R траектории частицы означает изменение импульса p и энергии W . В ультрарелятивистском случае, когда $p \gg mc$, из уравнения (1.86) получаем с достаточной точностью $W = pc$. Движение частицы в камере Вильсона вследствие столкновения с молекулами пара сопровождается уменьшением величин W , p и R . Зная направления скорости частицы \mathbf{u} , магнитной индукции \mathbf{B} и силы Лоренца \mathbf{F} (к центру кривизны траектории), из формулы (2.68) можно определить знак заряда q частицы, а оценка ее скорости по числу ионов, создаваемых частицей на протяжении единицы пути, позволяет по импульсу найти массу частицы. Таким путем, например, в космических лучах был открыт позитрон. Наблюдения быстрых космических частиц подтверждают справедливость уравнения (1.74) и других соотношений релятивистской динамики.

§ 3-8. ЦИКЛИЧЕСКОЕ РЕЗОНАНСНОЕ УСКОРЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Хорошим экспериментальным подтверждением релятивистских соотношений служит поведение быстрых заряженных частиц в циклических резонансных ускорителях, представляющих собой развитие идеи циклотрона. Пользуясь принципом циклотрона (см. рис. 14), допустим, что ускорение частицы приводит к нарушению неравенства (3.19); тогда от нерелятивистской теории циклотрона (см. § 3-5) следует перейти к релятивистской теории ускорения частиц.

Внутри каждого дуанта на частицу действует только магнитное поле. При этом справедлива формула (2.99) для радиуса траектории, а уравнение (2.95) для угловой скорости частицы ω , путем

замены m/γ_0 на m' , приводится к виду

$$\omega = \frac{|q| \cdot B}{m'}. \quad (3.86)$$

Находясь между дуантами, частица получает приращение энергии под действием электрического поля, почти постоянного за малое время пробега частицы между дуантами. Из уравнения (2.70), используя равенства $\mathbf{u} = d\mathbf{l}/dt$ и $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, и интегрируя по пробегу между дуантами, находим, что

$$\Delta \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = -q \cdot \Delta\varphi, \quad (3.87)$$

где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между дуантами; алгебраический знак величины $\Delta\varphi$ обратен знаку заряда q . Отсюда при достаточной малости $|q \cdot \Delta\varphi|$ по сравнению с $mc^2/\sqrt{1 - u^2/c^2}$, понимая символ Δ в левой части уравнения подобно символу дифференциала, имеем

$$\Delta \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \approx \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{u \cdot \Delta u}{c^2},$$

следовательно, в силу равенства (3.87),

$$\Delta u \approx \frac{|q \cdot \Delta\varphi|}{mu} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}. \quad (3.88)$$

Происходящее таким образом увеличение скорости частицы при каждом переходе из одного дуанта в другой приводит к увеличению массы m' . Чтобы частица ускорялась всякий раз, проходя между дуантами, следует, по принципу резонансного ускорения, поддерживать равенство угловой скорости ω , определяемой формулой (3.86), и угловой частоты ω_1 напряжения между дуантами. Если $\omega_1 = \text{const}$, то магнитная индукция B должна расти пропорционально массе m' . Это осуществляется в синхротроне, который является видоизменением циклотрона. Если же $B = \text{const}$, то частота напряжения ω_1 должна меняться обратно пропорционально массе m' . Таково условие работы резонансного ускорителя, называемого фазотроном.

Из равенства (3.85) видно, что радиус траектории R в синхротроне (при $m'/B = \text{const}$) растет пропорционально скорости частицы u , а в фазотроне — пропорционально импульсу частицы $m'u$. Это значит, что в области скоростей, близких к c , частица движется в синхротроне по траектории почти постоянного радиуса R , а в фазотроне радиус продолжает резко увеличиваться вследствие возрастания массы m' частицы.

Синхротронный режим применяется для ускорения электронов, которым предварительно сообщается энергия $W = 4 \div 5 \text{ Мэв}$, значительная по сравнению с энергией покоя W_0 электрона, равной в силу формул (1.81) и (3.53), около $0,5 \text{ Мэв}$. При этом кольце-

вой электромагнит, создающий в синхротроне магнитное поле в области мало меняющегося радиуса R , имеет умеренные размеры и его стоимость относительно невысока.

Фазотрон применяется для ускорения протонов и атомных ядер, но требует создания магнитного поля в большой области пространства, что является значительным технико-экономическим недостатком таких ускорителей.

В наиболее совершенных циклических ускорителях — синхрофазотронах сочетаются изменение магнитной индукции B и изменение частоты ω_1 подводимого напряжения при приблизительнотельном сохранении радиуса траектории частицы, т. е. B растет пропорционально $m'u$, а ω_1 — пропорционально u . В синхрофазотроне при довольно умеренной стоимости кольцевого электромагнита обеспечивается большой радиус траектории R , а потому и большая скорость u , как видно из равенства (3.85). Синхрофазотроны с большим успехом применяются для ускорения протонов и атомных ядер.

Опыт показывает, что при рассмотренном изменении магнитной индукции в синхротроне или частоты напряжения в фазотроне, или обеих величин в синхрофазотроне принцип резонансного ускорения действительно соблюдается и частицы приобретают громадные энергии, близкие в синхротронах и фазотронах к 1 Гэв^1 и достигающие 76 Гэв в величайшем в мире синхрофазотроне, сооруженном вблизи г. Серпухова. Опыт работы резонансных ускорителей подтверждает релятивистские законы движения быстрых заряженных частиц. В то время, когда проводился опыт Кауфмана, зависимость массы электрона от скорости в виде (1.74) понималась как доказательство того, что электрон обладает не механической массой (которая, как предполагалось, не может зависеть от скорости), а электромагнитной массой, обусловленной существованием электромагнитного поля электрона (см. § 4-2, 5-3). Но работа фазотронов и синхрофазотронов показывает, что атомные ядра движутся по тем же релятивистским законам, как и электроны; зависимость их массы от скорости выражается той же формулой (1.74).

Все эксперименты, как рассмотренные нами, так и многие другие, согласуются с общими утверждениями теории относительности о справедливости релятивистских закономерностей для всех частиц и материальных тел.

§ 3-9. ИНЕРЦИЯ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛАХ

При прохождении электрического тока в металлах отсутствует перенос вещества. Отсюда возникло представление о том, что причиной электропроводности металлов является лишь движение

¹ 1 гигаэлектронвольт (Гэв) = 10^9 эв = 10^3 Мэв = $1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}$.

свободных электронов, а ионы могут совершать только весьма ограниченные колебания вокруг неподвижных положений равновесия (узлов кристаллической решетки). Такое представление было подтверждено опытами по обнаружению инерции свободных электронов в металле при ускорении проводника.

Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси впервые обнаружили (еще в 1913 г.) возникновение электрического тока в ускоренном проводнике. Быстрые вращательные колебания катушки с обмоткой из медной проволоки вызывали звук в телефоне, присоединенном к ней. Причиной этого был электрический ток, вызванный движением электронов по инерции.

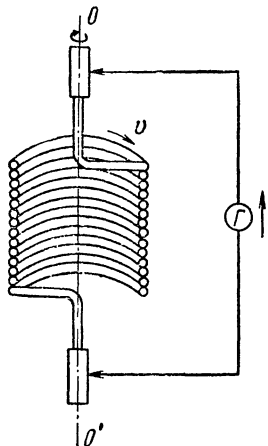


Рис. 17. Схема опыта Толмена и Стюарта с торможением катушки

Подтверждением подобного представления о движении электронов послужил *опыт Толмена и Стюарта*, осуществленный в 1916 г. Однослойная катушка из тонкой медной проволоки, показанная в разрезе на рис. 17, приводилась в быстрое равномерное вращение вокруг оси OO' . В начальный момент времени t_0 электроны были вполне увлечены этим вращением и ток равнялся нулю. Затем катушка очень быстро останавливалась, а электроны продолжали двигаться по инерции. Это движение прекращалось в некоторый момент времени t_1 , когда ток опять оказывался равным нулю. Баллистический

гальванометр Γ показывал, какой заряд Q перемещается в цепи, присоединенной к катушке:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} i dt. \quad (3.89)$$

Направление движения зарядов по инерции совпадало, очевидно, с направлением вращения катушки до ее торможения. Отброс гальванометра показывал, что ток имеет противоположное направление. Этим подтверждалось представление, что ток создается отрицательно заряженными электронами.

В условиях опыта линейная скорость катушки v была пренебрежимо мала по сравнению с c . Скорость u электронов относительно катушки, в соответствии с кинетической теорией вещества, много меньше c . При этом релятивистский закон сложения скоростей (1,54), (1,55) сводится к классическому закону (1,12), и можно написать II закон Ньютона для электрона в виде

$$m \frac{d(u + v)}{dt} = F, \quad (3.90)$$

где \mathbf{F} — результирующая сила, приложенная к электрону. Таким образом,

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Здесь второй член в правой части выражает силу инерции, действующую на электрон в системе координат, связанной с проводником, т. е. в неинерциальной системе отсчета.

Существование этой силы указывает на существование поля сторонних сил $E_{\text{ст}}$, направленного при торможении катушки по оси провода и удовлетворяющего условию

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -eE_{\text{ст}}. \quad (3.91)$$

Следовательно,

$$m \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| = eE_{\text{ст}}. \quad (3.92)$$

При торможении катушки имеем с достаточной точностью

$$\left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| = -\frac{dv}{dt}, \quad (3.93)$$

причем величину dv/dt можно считать одинаковой на протяжении всей длины провода l в обмотке катушки.

Подставим выражение (3.93) в равенство (3.92) и проинтегрируем по l . Тогда

$$-m \frac{dv}{dt} \cdot l = e \int_l E_{\text{ст}} dl = e\mathcal{E}, \quad (3.94)$$

где \mathcal{E} — сторонняя электродвижущая сила в катушке. Но в цепи, содержащей сопротивление R и индуктивность L , справедливо равенство

$$\mathcal{E} = Ri + L \frac{di}{dt}. \quad (3.95)$$

Из сравнения с (3.94) имеем

$$Ri + L \frac{di}{dt} = -\frac{ml}{e} \frac{dv}{dt}.$$

Интегрируя от t_0 ($i=0$) до t_1 ($i=0$), находим

$$R \int_{t_0}^{t_1} i dt = -\frac{ml}{e} \{v(t_1) - v(t_0)\}. \quad (3.96)$$

Но $v(t_0) = v_0$ — линейная скорость катушки при ее равномерном вращении до торможения, а $v(t_1) = 0$. Таким образом, с учетом равенства (3.89), можно записать

$$\frac{e}{m} = \frac{lv_0}{RQ}. \quad (3.97)$$

В опыте Толмена и Стюарта таким путем было найдено

$$\frac{e}{m} = 4,8 \cdot 10^{17} \text{ ед. СГС} = 1,6 \cdot 10^{11} \text{ к/кг}$$

в приблизительном согласии с равенством (3.52).

Одной из причин неточности опыта можно считать некоторую зависимость конфигурации катушки от скорости вращения (вследствие центробежной силы инерции) и связанное с этим индукционное влияние земного магнитного поля. Компенсация влияния этого поля осуществлялась особыми соленоидами, но не могла быть идеальной.

Для более точного определения e/m Толмен и его сотрудники осуществили в 1923 г. опыт, в котором совершались вращательные колебания полого цилиндра из тонкой меди вокруг оси с частотой около 20 *гц*. Чтобы земное магнитное поле не могло создать силы Лоренца, способной, в соответствии с формулой (2.68), смещать электроны вдоль поверхности цилиндра, ось его располагалась вдоль магнитного поля Земли. Цилиндр был окружен катушкой, связанной через усилитель с вибрационным гальванометром. Переменный ток в цилиндре, возникший вследствие движения электронов по инерции, после трансформирования и усиления приводил к значительному отбросу стрелки гальванометра.

Если u — скорость электронов относительно цилиндра и v — линейная скорость точки цилиндра, то от уравнения (3.90) можно опять перейти к соотношению (3.91), где $E_{ст}$ является теперь напряженностью стороннего электрического поля, направленного по касательной к поверхности цилиндра перпендикулярно его оси. В соотношении (3.95), справедливом для опыта с цилиндром, в отличие от опыта с быстрым торможением катушки, член, содержащий индуктивность, пренебрежимо мал по сравнению с Ri . Это означает, что при вычислении плотности тока достаточно теперь обратиться к закону Ома, принимая во внимание только выражение для $E_{ст}$ из равенства (3.91), так что в скалярной форме

$$j = \gamma E_{ст} = \gamma \frac{m}{e} \cdot \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad (3.98)$$

где γ — удельная проводимость меди, из которой выполнен цилиндр.

Если вращательные колебания цилиндра являются гармоническими с частотой ν и амплитудой K угловой скорости, то для линейной скорости v на периферии цилиндра справедлива формула

$$v = aK \sin 2\pi\nu t,$$

где a — радиус цилиндра. Тогда из уравнения (3.98) вытекает равенство

$$j = \gamma \frac{m}{e} \cdot 2\pi\nu aK \cos 2\pi\nu t, \quad (3.99)$$

что позволяет найти из опыта удельный заряд электрона e/m .

Таким путем было получено

$$\frac{e}{m} = 5,79 \cdot 10^{17} \text{ ед. СГС} = 1,93 \cdot 10^{11} \text{ кг/кг}$$

в приблизительном согласии с равенством (3.52).

Результаты рассмотренных в этом параграфе экспериментов позволяют считать, что представление о свободных электронах в металле является близким к действительности.

Задачи

15. Капля масла находится в воздухе при нормальном атмосферном давлении между горизонтальными обкладками плоского конденсатора. Плотность капли $\sigma = 0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, коэффициент вязкости воздуха $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м} \cdot \text{сек)}$. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. В отсутствие электрического поля капля падает со скоростью $u_1 = 9 \cdot 10^{-5} \text{ м/сек}$. Когда потенциал верхней обкладки относительно нижней равен $\varphi = 270 \text{ в}$, капля движется вверх со скоростью $u_2 = 10^{-5} \text{ м/сек}$. Каково отношение заряда капли к абсолютной величине заряда электрона?

16. Частица массы m с зарядом q начинает свое движение в вакууме между двумя электродами с нерелятивистской скоростью и движется в постоянных электрическом и магнитном полях в области между эмиттером и другим электродом — коллектором, где нет пространственного заряда.

При какой разности потенциалов между эмиттером и коллектором движение частицы всегда остается нерелятивистским? Каково численное значение этой разности потенциалов, если частицей является электрон?

17. Электрон движется в сплошном плоском магнетроне между неограниченными плоскими параллельными электродами (эмиттером и коллектором) под действием электрического поля, перпендикулярного плоскостям электродов, и магнитного поля, параллельного им. Расстояние между электродами равно d , потенциал коллектора относительно эмиттера имеет постоянное значение φ_a , а начальная скорость u_0 электрона, испускаемого эмиттером, ориентирована в отрицательном направлении оси z , причем ось x правой системы координат расположена вдоль вектора магнитной индукции \mathbf{B} , а ось y проведена от эмиттера к коллектору.

Считая движение электрона нерелятивистским и пренебрегая пространственным зарядом, найти, при каких значениях B электрон не может достигнуть коллектора. Объяснить физический смысл результатов.

18. В циклотроне, в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, движется протон, обладающий массой $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$. Вычислить его максимальную энергию, если магнитная индукция $B = 1 \text{ тл}$ и максимальный радиус полуокружности внутри дуанта $R = 0,5 \text{ м}$. Сколько времени протон должен двигаться в циклотроне, чтобы приобрести такую энергию? При этом начальной скоростью протона можно пренебречь, расстояние между дуантами $d = 1 \text{ см}$ и за время, когда протон проходит этот промежуток, разность потенциалов между дуантами (меняющаяся с циклотронной угловой частотой) равна постоянной величине $\Delta\varphi = 10 \text{ кв}$.

19. Электроны фокусируются в продольном магнитном поле с индукцией $B = 0,02 \text{ тл}$ на расстоянии $l = 0,715 \text{ м}$ от выхода из отверстия диафрагмы O (см. рис. 11). Подтверждается ли опытом формула (1.74), если в условиях опыта Триккера, осуществленного по идее П. Л. Капицы, под воздействием на электроны предварительного ускоряющего электрического поля с разностью потенциалов 5000 в точка фокусировки электронов сдвигается на расстояние $\Delta l = 2,4 \text{ мм}$?

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ

§ 4-1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ВЕЩЕСТВЕ И ПОЛЕ

Электронная теория основывается на представлениях, вытекающих из ряда экспериментов (см. гл. 3) о существовании электронов и положительно или отрицательно заряженных ионов. Более детальные представления о заряженных частицах отсутствуют в классической электронной теории. Опытные факты показывают, что электроны существуют в громадных количествах во всех материальных телах; атом любого химического элемента содержит в себе один или несколько электронов. Положительный ион представляет собой атом, лишенный одного или нескольких электронов; отрицательный ион образуется в результате присоединения электрона к нейтральному атому.

Для объяснения разнообразных явлений классическая электронная теория вводит гипотетические *представления о строении вещества*, оправданные тем, что следствия их в известной мере согласуются с опытом.

В металлах, в согласии с опытами по обнаружению инерции свободных электронов (см. § 3-9), предполагается существование электронов, способных неограниченно двигаться в пределах металла под действием электрического поля.

Полупроводники и реальные диэлектрики с электронной проводимостью содержат соответственно небольшое и незначительное (по сравнению с металлами) число свободных электронов, возрастающее при увеличении энергии тела вследствие подвода тепла, облучения и т. п.

В растворах электролитов проводимость обусловлена свободными положительными и отрицательными ионами. В газах, обладающих электрической проводимостью, свободными частицами являются электроны и ионы. Скорости свободных заряженных частиц в веществе малы по сравнению со скоростью света в вакууме (см. § 3-9).

Диэлектрические свойства вещества объясняются существованием связанных зарядов, каждый из которых образует диполь вместе с зарядом такой же величины и противоположного знака.

Когда электрон, входящий в состав молекулы, под действием внешнего электрического поля удаляется от остальной части моле-

кулы, т. е. положительного иона, то, согласно представлениям классической электронной теории, взаимодействие между электроном и ионом растет. Этот рост продолжается до тех пор, пока внутренняя сила, действующая на электрон со стороны остальной части молекулы, не уравнивает силу, действующую со стороны внешнего поля (нельзя допустить, что электрон неограниченно удаляется от иона, так как в этом случае объяснение диэлектрических свойств оказалось бы невозможным). Зависимость такой внутренней силы от смещения при достаточной малости последнего можно аппроксимировать линейной функцией. Но смещение отсчитывается от того положения, какое занимает электрон в отсутствие внешней силы. При этом и внутренняя сила в состоянии равновесия должна равняться нулю, так что ее следует признать пропорциональной смещению (при достаточной малости его).

Представление о существовании такой квазиупругой силы играет важную роль в электронной теории и приводит во многих случаях к ценным результатам; однако происхождение этой квазиупругой силы остается неясным в классической электронной теории и выясняется лишь на основе применения квантовой механики.

Вещество, в котором электроны смещаются внешним полем относительно ионов, обладает электронной поляризуемостью. Она присуща не только нейтральным молекулам или атомам, но и ионам. Существуют полярные молекулы, обладающие дипольными моментами и в отсутствие внешнего поля. В некоторых диэлектриках кристаллическая решетка содержит чередующиеся положительные и отрицательные ионы. При этом относительное смещение ионов под действием электрического поля создает ионную поляризацию диэлектрика.

Электронная теория рассматривает и стационарное движение электронов в молекулах. Происхождение такого движения можно понять, исходя из представления о квазиупругой силе. Она способна создавать гармонические колебания по каждому из двух взаимно перпендикулярных направлений. В результате сложения таких колебаний движение электрона происходит по эллипсу (или окружности). Поэтому теория вводит представление о замкнутых молекулярных токах и дает некоторое объяснение магнитных свойств вещества (см. гл. 7). Представление о движении электронов по орбитам позволяет рассматривать электронную поляризацию как результат смещения центров орбит под действием электрического поля.

Во всех случаях электронная теория считает вещество совокупностью заряженных частиц, размещенных в вакууме, и основывается на некоторых наглядных моделях распределения и движения этих частиц; при этом линейные размеры частиц незначительны по сравнению с расстояниями между ними.

Представления об электромагнитном поле в электронной теории в основных чертах таковы же, как и в классической макро-

скопической электродинамике. Электромагнитное поле рассматривается как особая форма материи, обладающая энергией и осуществляющая взаимодействие заряженных частиц по принципу близкого действия, т. е. путем передачи действия с конечной скоростью (см. § 1-7) от одной точки пространства к другой через промежуточные точки.

Однако электронная теория решительно отказывается от попыток макроскопической электродинамики рассматривать заряды лишь как особые точки поля, а считает их самостоятельными материальными объектами, которые являются первопричиной электромагнитного поля. Структура этого поля глубже вскрывается в электронной теории, чем в макроскопической электродинамике. Существование заряженных частиц — электронов и ионов означает, что напряженность электрического поля, в соответствии с законом Кулона, должна резко меняться в пространстве между частицами.

Движение частиц создает токи, магнитное поле которых весьма значительно в непосредственной близости к частицам и быстро убывает с удалением от них, в соответствии с законом Био — Савара.

Таким образом, существует микроскопическое электромагнитное поле, сильно меняющееся на протяжении расстояния между частицами. Неизбежное перемещение заряженных частиц, хотя бы в виде теплового движения, строго говоря, не допускает существования в микромире электростатического или постоянного магнитного поля. Микроскопическое поле (микрполе) всегда является переменным электромагнитным полем, которое, по представлениям классической электронной теории, описывается уравнениями Максвелла для вакуума с некоторым распределением зарядов и токов.

Однако в обычных условиях при достаточно большой плотности вещества детальное исследование движения отдельных частиц и структуры микрполя неосуществимо и было бы обычно лишено практического значения, так как на опыте в этих условиях получаются средние значения физических величин в элементах объема, содержащих значительные количества заряженных частиц.

Рассмотрим, например, объемную плотность заряда ρ . Отношение заряда Δq , заключенного в объеме ΔV , к этому объему представляет собой среднюю плотность заряда в данном объеме:

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta q}{\Delta V}.$$

Линейные размеры Δl объема ΔV должны быть достаточно велики по сравнению со средним расстоянием λ между частицами, которое является линейной мерой микроскопических неоднородностей распределения заряда. Достаточным условием выполнения нера-

венства $\Delta l \gg \lambda$ служит сохранение величины $\bar{\rho}$, если объем растет с сохранением порядка своей величины.

Вместе с тем размеры Δl объема ΔV должны быть малы по сравнению с расстоянием l , на протяжении которого начинает обнаруживаться заметное изменение $\bar{\rho}$. Достаточным условием выполнения неравенства $\Delta l \ll l$ служит неизменность величины $\bar{\rho}$ при увеличении Δl с сохранением порядка величины Δl . Если $\Delta l \ll l$, то, по представлениям макроскопической теории, предполагающей непрерывное распределение заряда, последующее неограниченное уменьшение Δl и ΔV не может заметно изменить величину $\bar{\rho}$; тогда макроскопическая плотность заряда в данной точке, равная по определению

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

совпадает практически с величиной $\bar{\rho}$.

Объем ΔV с линейными размерами Δl , достаточно малыми по сравнению с мерой макроскопических неоднородностей l и одновременно достаточно большими по сравнению с мерой микроскопических неоднородностей λ , представляет собой *физически бесконечно малый объем*. Это условное название позволяет подчеркнуть, что использование такого объема вместо бесконечно малого объема dV приводит в макроскопической теории к правильным результатам, как видно из сравнения $\bar{\rho}$ и ρ . С точки зрения микроскопической теории тот же объем ΔV , содержащий много частиц, не имеет ничего общего с бесконечно малым объемом dV . Таким образом, термин «физический бесконечно малый объем» означает макроскопически бесконечно малый объем в указанном основном смысле.

Физически бесконечно малый объем с линейными размерами Δl , подчиненными условию

$$\lambda \ll \Delta l \ll l, \quad (4.1)$$

существует лишь в том случае, если

$$\lambda \ll l.$$

В однородном веществе линейной мерой l макроскопических неоднородностей может служить длина электромагнитной волны.

Поскольку λ — среднее расстояние между частицами, неравенство $\lambda \ll l$ нарушается в случае достаточно высокого вакуума; в обычных же условиях оно справедливо, и тогда распределение электрического заряда характеризуется макроскопической объемной плотностью заряда. При рассмотрении ряда других физических величин также имеет смысл понятие физически бесконечно малого объема, существующего при выполнении условия (4.1). Однако возможны и более сложные случаи.

Пусть, например, заряженная частица движется в высоком вакууме и подвергается воздействию электромагнитного поля. Представляет практический интерес выражение силы, действующей на частицу, доступное проверке на опыте. При этом понятие физически бесконечно малого объема нельзя уже связывать с существованием в этом объеме большого числа частиц; тогда соотношение (4.1) должно быть заменено другим, более общим определением физически бесконечно малого объема.

Как уже было отмечено, для выполнения обоих неравенств (4.1) достаточна неизменность физической величины (например, $\bar{\rho}$) при увеличении объема ΔV с сохранением порядка его величины.

Будем называть физически бесконечно малым объемом ΔV возможно малый объем, удовлетворяющий тому условию, что физическая величина, относящаяся к этому объему в целом, остается почти неизменной при увеличении ΔV с сохранением порядка величины ¹.

Усреднение микрополя производится, вообще говоря, не только по пространственным областям, но и по промежуткам времени.

Будем называть физически бесконечно малым промежутком времени возможно малый временной интервал, удовлетворяющий тому условию, что физическая величина, относящаяся в целом ко всему этому интервалу, остается почти неизменной при увеличении последнего с сохранением порядка его величины. Такой промежуток времени достаточно мал с макроскопической точки зрения и одновременно достаточно велик с микроскопической точки зрения. Если, например, молекулярный ток создается движением электрона по замкнутой орбите, то физически бесконечно малый промежуток времени Δt должен быть достаточно велик по сравнению с периодом τ_1 обращения электрона и достаточно мал по сравнению с таким промежутком времени τ_2 , в течение которого происходят заметные изменения макроскопических величин.

Физически бесконечно малый промежуток времени существует для широкого класса явлений, когда соответствующий их природе микроскопический интервал времени τ_1 много меньше естественного макроскопического интервала τ_2 . В противном случае представления о физически бесконечно малом промежутке времени и операция усреднения по нему теряют смысл.

Если существуют физически бесконечно малые объем ΔV и промежуток времени Δt , то можно выразить *макроскопическое значение* величины G через микроскопические значения \bar{G}_m той же величины:

$$G(x, y, z, t) = \bar{G}_m,$$

¹ Понятие «физически бесконечно малый объем» имеет смысл или теряет смысл в зависимости от того, какая физическая величина рассматривается в данных условиях.

причем черта над символом величины здесь и далее означает усреднение по физически бесконечно малому объему, а также, когда это оговорено, и по физически бесконечно малому промежутку времени.

Полагая для простоты, что объем ΔV имеет форму куба с ребром $2h$, можно написать

$$G = \frac{1}{\Delta V \cdot \Delta t} \times$$

$$\times \int_{\xi=-h}^{\xi=h} \int_{\eta=-h}^{\eta=h} \int_{\zeta=-h}^{\zeta=h} \int_{\tau=-\Delta t/2}^{\tau=\Delta t/2} G_m(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau. \quad (4.2)$$

§ 4-2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРОНЕ

В первый период развития электронной теории электронами называли все крайне малые электрически заряженные частицы, присутствующие во всех материальных телах в громадных количествах. По знаку заряда различались положительные и отрицательные электроны. Именно такое широкое понимание термина «электрон» и привело к возникновению названия «электронная теория».

В настоящее время электроном называют наименее массивную из отрицательно заряженных частиц. Электрон обладает зарядом $-e$, где e — величина элементарного заряда.

Заряд и масса электрона, как видно из равенств (3.2) и (3.53), крайне малы. При этом заряд рассматривается в электронной теории как неотъемлемое первичное свойство электронов и ионов; величина элементарного заряда не выражается через другие физические константы. Масса электрона, согласно электронной теории, имеет, по крайней мере отчасти, электромагнитное происхождение. В самом деле, если электрон движется с постоянной скоростью, то, обладая зарядом, он окружен магнитным полем. Замедление движения приводит к ослаблению этого поля, причем в соответствии с законом электромагнитной индукции возникает электрическое поле. Оно, по правилу Ленца, противодействует процессу, вызывающему индукцию, т. е. стремится ускорить электрон. Возникающая, таким образом, сила инерции означает существование некоторой инертной массы электрона. Эта масса называется электромагнитной, так как она обусловлена существованием и свойствами электромагнитного поля, созданного электроном.

Отсюда видно, что электромагнитная масса зависит от размеров и формы электрона, а также от распределения заряда в нем.

Классическая электронная теория предполагает, что в микромире справедливы без изменений законы Кулона и Био — Савара, установленные в макроскопической электродинамике. Отсюда следует, что если бы размеры электрона были равны нулю, то поле

в точке, где находится электрон, оказалось бы бесконечно большим, и вычисление привело бы к бесконечной электромагнитной массе. Поэтому электрону приписываются конечные размеры; при этом предполагается, что внутри электрона плотность заряда и напряженность поля могут меняться от точки к точке. При достаточно малых скоростях движения электрона благодаря изотропности пространства нет физических оснований считать, что электрон лишен сферической симметрии; поэтому медленно движущиеся электроны (и ионы) рассматриваются как заряженные шарики.

Вопроса о характере распределения заряда электрона теория не решает, ограничиваясь представлением о существовании некоторой границы электрона, вне которой плотность заряда равна нулю. По гипотезе Лоренца, заряд электрона распределен во всем объеме электрона с плотностью ρ , которая является всюду непрерывной функцией координат, так что в некотором слое вблизи границы плотность непрерывно изменяется от того значения, какое она имеет внутри электрона, до нуля. Эта гипотеза непрерывности позволяет избежать усложнений математического аппарата, которые были бы связаны с разрывным характером ρ . Вместе с тем некоторые приближенные вычисления могут основываться, например, на представлении о распределении заряда электрона с постоянной плотностью по его объему. Допустимо и представление о равномерном распределении заряда по поверхности электрона.

При различных предположениях о распределении заряда *электромагнитная масса электрона* так или иначе выражается через его заряд и радиус.

Основываясь на релятивистском соотношении (1.80) между энергией и массой, можно найти электромагнитную массу, если вычислить энергию электромагнитного поля электрона. При достаточно медленном движении электрона можно считать, что величина энергии $W = W_0$ равна энергии электростатического поля.

Если предположить, что электрон — равномерно заряженный по поверхности шарик, то внутри него поле отсутствует, а вне электрона напряженность поля E такова же, как в случае точечного заряда. На основании формулы (2.4) в применении к вакууму, с заменой абсолютной величины заряда на e и ϵ_a на ϵ_0 , находим

$$E^2 = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}. \quad (4.3)$$

Плотность энергии электростатического поля в вакууме, в силу формул (2.54) и (2.9), равна $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$. Выбрав в качестве элемента объема шаровой слой радиуса r и толщины dr , находим

$$W_0 = \frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_R^\infty \frac{4\pi r^2 dr}{r^4} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}, \quad (4.4)$$

где R — радиус электрона. Из соотношения (1.81) находим электромагнитную массу электрона при достаточно медленном движении его:

$$m_e = K \cdot \frac{e^2}{R}, \quad (4.5)$$

где

$$K = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2},$$

или в виду равенства (2.7)

$$K = \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}. \quad (4.6)$$

Выражение (4.5) получается также, если заряд равномерно распределен по объему электрона (см. задачу 20), причем

$$K = 0,6 \cdot 10^{-7}, \quad (4.7)$$

и если плотность заряда убывает по линейному закону от центра к периферии (см. задачу 21), причем

$$K = \frac{26}{35} \cdot 10^{-7}. \quad (4.8)$$

Если допустить, что плотность заряда в электроне еще быстрее убывает от центра к периферии, то коэффициент K будет еще больше.

Оставляя открытым вопрос о распределении заряда электрона и ограничиваясь оценкой коэффициента K по порядку величины, можно принять, что

$$K = 10^{-7}. \quad (4.9)$$

Полагая, что масса электрона является целиком электромагнитной, т. е. $m_e = m$, из выражений (4.5) и (4.9) находим

$$R = 10^{-7} \cdot \frac{e^2}{m}, \quad (4.10)$$

или, если подставить значения e из (3.2) и m из (3.53), то

$$R \approx 2,8 \cdot 10^{-18} \text{ м}. \quad (4.11)$$

Это так называемый *классический радиус электрона*.

Сохраняя представление Лоренца о непрерывном распределении заряда электрона и полагая, что ρ достаточно мало при больших r , можно, как нетрудно сообразить, прийти к представлению о сколь угодно большом радиусе электрона.

Если бы только часть массы электрона, равная $1/n$, имела электромагнитную природу, то в рассмотренных классических расчетах пришлось бы заменить m на m/n . Это приводило бы к радиусу электрона, в n раз большему, чем в предположении целиком электромагнитной массы.

При движении электрона в некоторой инерциальной системе отсчета со скоростью u его продольные размеры изменяются, согласно формуле (1.45), в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз, где $\beta = \frac{u}{c}$, тогда как поперечные размеры сохраняются. Электрон становится в данной системе отсчета эллипсоидом вращения с сохранением величины заряда, причем для электромагнитной массы получается формула (1.74). Такой результат был получен Лоренцом, исходя из гипотезы об абсолютном сокращении размеров электрона в направлении движения (см. § 1-4).

Но опыт показывает (см. § 3-7 и 3-8), что в действительности вся масса электрона меняется со скоростью по формуле (1.74).

Если бы механическая масса (не электромагнитного происхождения), в соответствии с классической механикой, оставалась неизменной, то было бы ясно, что вся масса электрона является не механической, а электромагнитной. Поэтому, согласно электронной теории, в начале XX в. до появления теории относительности считали, что электрон обладает только электромагнитной массой. Возникло предположение, что любой ион также имеет целиком электромагнитную массу. Это вовсе не означало, что, в силу соотношения (4.10), радиус массивного иона должен быть много меньше, чем у электрона. В согласии с замечанием, сделанным после соотношения (4.11), соответствующее представление о распределении заряда в ионе приводит к большому радиусу его, например такому, как радиус атома.

Таким образом, сложилось представление о весьма вероятной справедливости электромагнитной картины мира. Правда, Г. А. Лоренц в 1906 г. писал: «Я полагаю, что этот вопрос остается открытым; мы поступим правильно, если будем говорить о нем с некоторой осторожностью»; но далее он добавлял: «... я лично охотно готов принять электромагнитную теорию материи».

Крупный французский ученый А. Пуанкаре в своей работе «О динамике электрона» в 1906 г. писал: «...инерция материи имеет исключительно электромагнитное происхождение, как это общепринято после опытов Кауфмана»¹.

Отсюда делались далеко идущие философские выводы идеалистического характера. Физики, не владевшие методом диалектического материализма, благодаря предполагавшемуся отсутствию у электрона механической массы приходили к заключению об исчезновении материальной массы, об «исчезновении материи» и «крахе материализма».

Глубокий анализ положения в физике в начале XX в. и критику подобных утверждений с позиций диалектического материализма дал в 1908 г. В. И. Ленин в своем произведении

¹ Опыт Кауфмана рассмотрен в § 3-7.

«Материализм и эмпириокритицизм». В. И. Ленин писал: «Естествознание ведет, следовательно, к единству материи» — вот действительное содержание той фразы об исчезновении материи, о замене материи электричеством и т. д., которая сбивает с толку столь многих. «Материя исчезает» — это значит исчезает тот предел, до которого мы знали материю до сих пор, наше знание идет глубже; исчезают такие свойства материи, которые казались раньше абсолютными, неизменными, первоначальными (непроницаемость, инерция, масса и т. п.) и которые теперь обнаруживаются, как относительные, присущие только некоторым состояниям материи. Ибо единственное «свойство» материи, с признанием которого связан философский материализм, есть свойство **быть объективной реальностью, существовать вне нашего сознания**¹.

Считая электрон телом, подчиненным законам классической механики, электронная теория рассматривает *вращение электрона вокруг оси*, проходящей через его центр. При вращении электрона элементы его заряда создают систему круговых токов.

Если считать, например, электрон равномерно заряженным по поверхности и разбить его заряд на пары элементов *A* и *B* (рис. 18), расположенных симметрично относительно вектора угловой скорости ω , то нетрудно, пользуясь сферической системой координат R, ϑ, ψ , получить путем интегрирования² выражение для магнитного момента электрона в виде

$$M = \frac{e\omega R^2}{3}. \quad (4.12)$$

Вектор M направлен противоположно ω , так как заряд электрона отрицателен.

Вращающийся электрон обладает и моментом импульса L , совпадающим по направлению с ω . Считая массу целиком электромагнитной, т. е. связанной с существованием поля, нельзя думать, что она локализована в объеме электрона. Как известно из механики, момент импульса L можно выразить через ω и

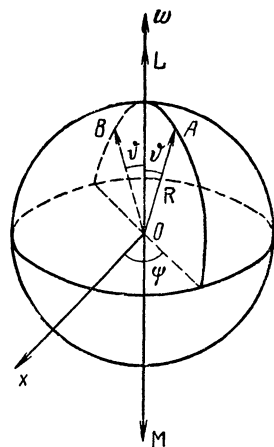


Рис. 18. Модель вращающегося электрона

¹ В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 18, стр. 275.

² Вычисления приведены в монографии Я. И. Френкеля [3]. Результат (4.12) понятен и потому, что если r — расстояние элемента заряда от оси вращения, то $M = J \cdot \pi r^2 = \frac{e\omega}{2\pi} \cdot \frac{2}{3} \pi R^2$, где J — сила тока, возникающего вследствие вращения электрона.

кинетическую энергию вращения W_k :

$$L = \frac{2W_k}{\omega}. \quad (4.13)$$

Работа, затраченная на вращение электрона, приводит к увеличению электромагнитной энергии, причем электрическое поле не меняется. Таким образом, приращение кинетической энергии вращения означает приращение энергии магнитного поля. Отсюда видно, что W_k совпадает с энергией магнитного поля, обусловленного вращением электрона.

Вычислив W_k и найдя L из формулы (4.13), нетрудно в связи с равенством (4.12) прийти к выводу [3], что по классической электронной теории, в предположении равномерного распределения заряда электрона по его поверхности, справедливо равенство

$$\frac{M}{L} = \frac{e}{m}. \quad (4.14)$$

С учетом противоположности направлений \mathbf{M} и \mathbf{L} имеем

$$\mathbf{M} = -\frac{e}{m} \mathbf{L}. \quad (4.15)$$

Это соотношение играет важную роль при рассмотрении магнитомеханических явлений (см. § 7-8) и приводит к частичным успехам теории в области ферромагнитных явлений (см. § 7-9).

Существование у электрона собственного магнитного момента \mathbf{M} заставляет, строго говоря, признать, что при наличии магнитного поля существует не только сила Лоренца \mathbf{F} в виде (2.68), но и сила, действующая на магнитный диполь с моментом \mathbf{M} , равная [6]

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{M} \nabla) \mathbf{B}. \quad (4.16)$$

Оценим по порядку величины модули сил \mathbf{F} и \mathbf{F}_1 . Из формулы (2.68) имеем

$$F \approx euB; \quad (4.17)$$

из выражения (4.16) запишем

$$F_1 \approx M \cdot |\text{grad } B|.$$

Следовательно, по порядку величины

$$\frac{F_1}{F} \approx \frac{M \cdot |\text{grad } B|}{euB}. \quad (4.18)$$

Из опытных данных известно, что магнитный момент электрона равен

$$M \approx 10^{-23} \text{ м}^2 \text{ а}.$$

Подставим в соотношение (4.18) это значение M и e из (3.2).

Тогда

$$\frac{F_1}{F} \approx \frac{10^{-4}}{u} \cdot \frac{|\text{grad } B|}{B}. \quad (4.19)$$

Из равенств (3.51) и (3.52) видно, что электрон приобретает скорость $u \approx 10^8$ м/сек, уже пройдя ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi = 0,03$ в. При $u \geq 10^8$ м/сек правая часть соотношения (4.19) равна относительному изменению магнитной индукции на протяжении отрезка не более 10^{-9} м. Отсюда видно, что, рассматривая движение свободных электронов в макроскопическом поле, можно пренебрегать силой F_1 по сравнению с силой Лоренца F . Таким образом, тот факт, что электрон имеет собственный магнитный момент, является в этих условиях несущественным.

Напротив, рассматривая движение связанных электронов в атомах, размеры которых порядка 10^{-10} м, нет оснований пренебрегать силой F_1 , т. е. игнорировать магнитный момент электрона.

§ 4.3. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ

Рассмотренные в предыдущих параграфах представления электронной теории о веществе, поле и свойствах электрона обладают весьма существенным недостатком в методологическом отношении. Они без какого-либо обоснования переносят физические законы и наглядные представления, справедливые в области макроскопических явлений, в область микромира и тем самым игнорируют закон диалектики о переходе количества в качество.

Между тем уже с 1900 г., когда в науку вошла постоянная Планка h , стало очевидно, что по крайней мере некоторые явления в микромире подчиняются особым квантовым законам.

Подобно тому, как квантование энергии, предложенное Планком, составляет органический элемент теории излучения, широко известные в настоящее время принципы квантования различных физических величин органически входят в современную теорию атома и пронизывают представления об элементарных частицах материи.

Таким образом, в микромире господствуют специфические квантовые закономерности, для понимания которых необходим отказ от классических наглядных представлений, заимствованных из области макромира.

В действительности свойства вещества вовсе не сводятся к сосуществованию, взаимодействию и движению заряженных частиц (электронов и ионов), обладающих очень малыми размерами, но ведущих себя подобно большим телам, как это предполагает классическая электронная теория.

В микромире отчетливо проявляется двойственная природа вещества в том смысле, что вещество имеет не только корпуску-

лярные, но и волновые свойства, т. е. не сводится к сочетанию частиц (корпускул), локализованных в крайне малых областях, которые разделены пустым пространством. К тому же корпускулярные свойства вещества гораздо сложнее и многообразнее, чем предполагает электронная теория. Достаточно сказать, что ионы (за исключением положительного иона водородного атома) состоят из других частиц, а кроме заряженных элементарных частиц существуют нейтральные.

В основе современной микроскопической теории электромагнитных свойств вещества лежит представление о возможных состояниях электрона в квантовой системе. Состояние характеризуется волновой функцией. В каждом состоянии может быть не более одного электрона (принцип Паули). Равномерное распределение электронов по состояниям подчиняется квантовой статистике Ферми—Дирака. Большой интерес представляют возможные значения энергии частиц (энергетические уровни). В теории атома выясняется дискретный ряд возможных значений энергии электрона. В теории твердого тела возможные энергетические уровни образуют энергетические зоны. Зонная теория твердых тел позволяет понять поведение валентных электронов в металлах и полупроводниках. Ограничиваясь классической (неквантовой) электронной теорией, нельзя всесторонне рассмотреть свойства вещества на современном научном уровне¹.

Таким образом, электронная теория — лишь предварительная промежуточная ступень на пути познания микромира. Ее представления о веществе пригодны лишь в той ограниченной области явлений, где волновые свойства вещества и структура атомов и ионов не играют существенной роли.

Как известно, волновые свойства света можно не принимать во внимание, если длина волны достаточно мала по сравнению с размерами неоднородностей на пути распространения света. Подобно этому волновые свойства вещества не играют роли, когда длина волны де Бройля, связанной с движением свободной частицы,

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (4.20)$$

мала по сравнению со средним расстоянием между частицами. Значительные по величине импульсы частиц p и большие расстояния между ними — признаки справедливости классической электронной теории. Она дает ценные результаты при рассмотрении токов в вакууме и газах, а также частично объясняет поведение заряженных частиц в жидкостях и твердых телах. В атомах расстояния между частицами сравнимы с их длиной волны де Бройля

¹ Электромагнитные свойства вещества на основе квантовой механики рассматриваются, например, в учебнике С. В. Измайлова [10].

λ , и следовательно, электронная теория, строго говоря, неприменима к атому.

Не претендуя на объяснение строения атома и его свойств¹, классическая электронная теория не рассматривает вопросы излучения и поглощения света атомами.

Представления классической электронной теории о закономерностях микроскопического электромагнитного поля заимствованы из области макромира без каких-либо качественных изменений.

Современная квантовая электродинамика, развивая идею Планка о световых квантах, принимает во внимание *дискретные свойства электромагнитного поля*. Существование фотонов — квантов электромагнитного поля означает, что энергия этого поля, как энергия целого числа фотонов, может меняться лишь скачкообразно. Но классическая электродинамика позволяет выразить эту энергию через напряженности поля. Скачки энергии означают, что напряженности электрического и магнитного полей меняются скачкообразно, т. е. квантуются. Строгое обоснование этого дается в квантовой электродинамике².

Однако квантовая электродинамика переходит в классическую в тех случаях, когда дискретность действия, т. е. существование постоянной Планка, не играет существенной роли. Поскольку с опытом сравниваются результаты, полученные путем усреднения микрополя по пространству и времени, открывается возможность того, что противоречащие классическим представлениям особенности структуры микрополя не скажутся на результатах усреднения. В этом смысле классическая картина микрополя действительно оказывается практически приемлемой, как будет установлено в § 4-5.

Представления классической электронной теории об электроне отнюдь нельзя признать удовлетворительными. Это видно уже из того, что такие представления игнорируют волновые свойства вещества.

К тому же заряд электрона рассматривается в классической теории как построенный определенным образом из непрерывно распределенного электричества. При этом существование элементарного электрического заряда не является органическим элементом теории, а носит характер инородного представления, хотя и необходимого в согласии с опытными фактами.

Классическая теория не только не отвечает на вопрос, почему электрические заряды состоят из всегда одинаковых порций $\pm e$ (на этот вопрос еще нет ответа в современной физике), но и не объясняет устойчивости модели электрона, которой эта теория пользуется.

¹ В истории развития электронной теории такие неосновательные претензии были.

² См.: А. А. Соколов. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958.

Понимая электрон как элементарную частицу, нелогично иметь в виду какие-либо его части. Но если рассматривать отдельные элементы его заряда и считать справедливым закон Кулона, то непонятно, почему электрон существует, несмотря на громадные силы взаимного отталкивания этих элементов заряда.

Приходится постулировать существование сдерживающих не-электромагнитных сил (или жестких связей); ссылка на них свидетельствует о крупной недостатке теории, которая стремилась показать, что в основе всех физических явлений лежат электромагнитные взаимодействия.

Таким образом, чисто электромагнитное обоснование динамики электрона не удалось, т. е. обнаружилось отсутствие фундамента, на котором в начале XX в. казалось возможным построить электромагнитную картину мира. Ограниченность такой картины мира подтвердилась начиная с 1932 г., после открытий нейтрона и других нейтральных элементарных частиц.

Неудача попыток на базе электронной теории построить последовательную электромагнитную теорию материи вполне понятна, так же как и неудача многих попыток крупнейших физиков XVIII и XIX вв. построить механическую картину мира, т. е. свести все физические процессы к механическим движениям. Как известно, Ф. Энгельс, выступая против механистического материализма, решительно критиковал «...яростное стремление свести все к механическому движению... , чем смазывается специфический характер прочих форм движения»¹. Подобно этому оказались несостоятельными и попытки свести все физические процессы к электромагнитной форме движения.

В. И. Ленин следующим образом подчеркнул, что электромагнитная картина мира вовсе не является обязательной: «Это, конечно, сплошной вздор, будто материализм утверждал «меньшую» реальность сознания или обязательно «механическую», а не электромагнитную, не какую-нибудь еще неизмеримо более сложную картину мира, как **движущейся материи**»².

Проблема устойчивости электрона (и других элементарных частиц) усиленно разрабатывается в современной физике, но от решения еще далека. Многие факты позволяют считать, что решение этой проблемы будет дано на основе дальнейшего развития квантовых представлений.

О недостаточности классических представлений свидетельствует, в частности, тот факт, что собственные *механический L и магнитный M моменты электрона* оказываются в действительности связанными с существованием планковской постоянной h . Как было отмечено в конце § 4-2, магнитный момент электрона должен приниматься во внимание в теории атома, где, как известно, господствуют кван-

¹ Ф. Энгельс. Диалектика природы. М., Политиздат, 1964, стр. 214.

² В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 18, стр. 296.

товые представления. Неудивительно поэтому, что хотя выражения (4.12) и (4.14) были указаны Абрагамом еще в 1903 г., представление о существовании механического момента L и магнитного момента M у электрона получило признание в связи с развитием квантовой теории атома, после того как Уленбек и Гаудсмит выдвинули в 1925 г. гипотезу о существовании спина электрона (английское слово «spin» означает верчение). При этом, в соответствии с экспериментальными данными о тонкой структуре спектральных линий и о магнитных моментах атомов, оказалось необходимым признать, что электрон имеет собственный механический момент

$$L = \frac{\hbar}{2} \quad (4.21)$$

и собственный магнитный момент, равный в системе СГС

$$M_{\Gamma} = \frac{e_{\Gamma} \hbar_{\Gamma}}{2m_{\Gamma} c_{\Gamma}},$$

или в системе единиц СИ

$$M = \frac{e\hbar}{2m}, \quad (4.22)$$

где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·сек — постоянная Планка, деленная на 2π . Истинное значение M совпадает с классическим выражением (4.12), если приписать линейной скорости электрона в точках, наиболее удаленных от оси вращения, значение

$$\omega R = \frac{3\hbar}{2mR}, \quad (4.22a)$$

что при классическом радиусе электрона (4.11) приблизительно в 300 раз превышает скорость света в вакууме c .

Как известно из теории относительности (см. § 1-6, 1-7), движение материальных частиц или распространение сигнала со скоростью, превышающей c , невозможно. Хотя масса электрона не локализована на его периферии и линейную скорость на экваторе электрона благодаря аксиальной симметрии нельзя использовать для передачи сигнала, результат (4.22a) все же противоречит теории относительности, поскольку размеры любого тела, движущегося со скоростью $v = \beta c$ относительно некоторой системы отсчета, уменьшаются в этой системе вдоль движения в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз. Но длина большого круга электрона при его вращении должна быть вещественной величиной, следовательно, линейная скорость, превышающая c , невозможна. К тому же представление об электроне как вращающемся абсолютно твердом шарике несовместимо с теорией относительности, которая не допускает существования абсолютно твердых тел. Действительно, конечная скорость рас-

пространения взаимодействий (см. § 1-7) приводит к тому, что если тело подвергается воздействию в какой-либо точке, то изменение движения этой точки не может привести к мгновенному изменению движения других точек того же тела. Следовательно, любое воздействие вызывает некоторую деформацию тела.

Современная физика еще не знает удовлетворительной теории электрона, которая была бы полностью свободна от указанных выше трудностей и противоречий. Однако примитивные классические представления о нем можно использовать в широкой области явлений в достаточном согласии с опытом. Построение удовлетворительной теории электрона (и других элементарных частиц) требует, по-видимому, значительного пересмотра и углубления существующей квантовой теории поля.

Для выяснения свойств элементарных частиц может оказаться необходимым пересмотр представлений теории относительности о свойствах пространства и времени в крайне малых областях и временных интервалах¹.

Создание более точных представлений об электроны — одна из важнейших задач физики.

§ 4-4. УРАВНЕНИЯ МИКРОПОЛЯ

Будем исходить из того, что материальные тела представляют собой скопления заряженных частиц, расположенных в вакууме. Между частицами и внутри них существует микроскопическое электромагнитное поле.

Предположим, что микрополе точно описывается уравнениями Максвелла для вакуума. Справедливость такого предположения должна быть проверена путем сравнения вытекающих из него следствий с опытом.

В случае вакуума величины ϵ_a и μ_a в уравнениях (2.9) и (2.15) заменяются соответственно на электрическую постоянную ϵ_0 и магнитную постоянную μ_0 , следовательно,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}; \quad (4.23)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (4.24)$$

Благодаря этому в уравнениях Максвелла (2.21) ÷ (2.24) вместо четырех векторов, характеризующих электромагнитное поле в материальной среде, достаточно ограничиться двумя векторами, один из которых будет служить мерой электрического поля, а другой — мерой магнитного поля.

¹ См.: Д. И. Блохинцев. УФН, 89, 2 (1966); А. А. Соколов. Элементарные частицы, М., изд-во МГУ, 1963; А. Богуш и М. Мороз. Элементарные частицы. Минск, «Наука и техника», 1966.

Исторически сложившаяся неудачная терминология наводит на мысль об аналогии между напряженностью электрического поля \mathbf{E} и напряженностью магнитного поля \mathbf{H} . В действительности существует аналогия между векторами \mathbf{E} и \mathbf{B} , а также между векторами \mathbf{D} и \mathbf{H} (см. § 2-7). Лоренц [1] вводил в уравнения для вакуума последнюю пару векторов. Однако выражение для силы Лоренца (2.67), действующей на заряд, в частности в вакууме, указывает на целесообразность ввести в уравнения Максвелла для вакуума векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} . Итак, пользуясь равенствами (4.23), (4.24) и замечая, что в вакууме ток проводимости отсутствует, т. е. в уравнении (2.21) $\mathbf{j} = 0$, ограничиваясь к тому же случаю отсутствия зарядов ($\rho = 0$), приведем уравнения Максвелла (2.21) \div (2.24) для вакуума к виду

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Совершенно аналогичные уравнения будем считать справедливыми для микрополя в тех областях пространства, где частиц нет. Условимся употреблять индекс «м» как указание на микроскопическое значение соответствующей величины. Таким образом, аналогично уравнениям (4.25), можно написать

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_m = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_m}{\partial t}; \quad (4.26)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_m = 0; \quad (4.27)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_m = -\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t}; \quad (4.28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_m = 0. \quad (4.29)$$

Плотность заряда ρ_m и обусловленная движением зарядов плотность тока, равная

$$\mathbf{j}_m = \rho_m \mathbf{u}_m, \quad (4.30)$$

отличны от нуля только в тех областях пространства, где находятся заряженные частицы. Существование токов и зарядов заставляет внести изменения в уравнения (4.26) и (4.27). Величина \mathbf{j}_m , обусловленная переносом зарядов со скоростью \mathbf{u}_m , означает *плотность конвекционного тока*.

В классической электродинамике считается, что магнитное поле создается конвекционным током, т. е. переносом зарядов следст-

вие перемещения заряженного тела, так же, как оно создается током проводимости. Прекрасным экспериментальным подтверждением этого служит классический *опыт А. А. Эйхенвальда* (1901 г.).

Два параллельных непроводящих диска I и II (рис. 19), установленных в плоскости магнитного меридиана, были оклеены фольгой по краям с небольшими прорезями в этих полосках фольги, как показано в правой части рисунка. Конденсатор, образованный такими полосками и обладающий емкостью C , заряжался до значительной разности потенциалов φ , так что на каждой обкладке был заряд $|q| = C\varphi$. Каждый из дисков мог вращаться вокруг своей оси O или O_1 в ту или другую сторону. При числе оборотов в секунду, равном n , вращение диска создавало кольцевой конвекционный ток, равный

$$i = C\varphi n. \quad (4.31)$$

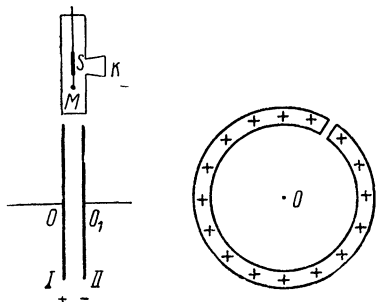


Рис. 19. Схема опыта А. А. Эйхенвальда с дисками

Вблизи дисков подвешивалась на тонкой нити небольшая аstaticкая магнитная стрелка M , окруженная проводящей оболочкой, чтобы исключить действие электрического поля дисков. При неподвижных дисках стрелка располагалась параллельно их плоскостям. Расположенное против отверстия K зеркальце S , скреп-

ленное со стрелкой, позволяло наблюдать малые отклонения ее по такому же принципу, как в зеркальных гальванометрах.

Если вращение одного диска приводило к отклонению стрелки на некоторый угол, то при неподвижных дисках и токе проводимости, величина которого соответствует формуле (4.31), получалось отклонение стрелки на тот же угол (в опыте — с точностью до 5%). При этом было установлено, что движение зарядов относительно зарядов обратного знака, типичное для тока проводимости, вовсе не обязательно для создания магнитного поля; существенно лишь движение электричества относительно точки, в которой наблюдается магнитное поле.

Способность тока проводимости с плотностью \mathbf{j} создавать магнитное поле характеризуется в электродинамике тем, что этот ток вносит вклад в выражение вихря напряженности магнитного поля, равный \mathbf{j} , как видно из уравнения (2.21). Установленная на опыте равноценная способность конвекционного тока создавать магнитное поле означает, что такой ток вносит в выражение $\text{rot } \mathbf{H}$ вклад, равный \mathbf{j} .

В электронной теории постулируется, что микроскопический конвекционный ток \mathbf{j}_m в виде (4.30) также вносит в выражение $\text{rot } \mathbf{H}_m$ вклад, равный $\rho_m \mathbf{u}_m$, что заставляет, в силу формулы (4.24),

добавить в выражении $\operatorname{rot} \mathbf{B}_m$ величину $\mu_0 \rho_m \mathbf{u}_m$. Поэтому в областях пространства, заполненных зарядами, вместо уравнения (4.26) считается справедливым более общее уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_m = \mu_0 \rho_m \mathbf{u}_m + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_m}{\partial t}. \quad (4.32)$$

В электронной теории предполагается, что в областях, занятых частицами, заряды находятся в вакууме. При этом вектор \mathbf{D} в уравнении (2.22), согласно соотношению (4.23), заменяется на $\epsilon_0 \mathbf{E}$ и постулируется справедливость аналогичного уравнения микрополя

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_m = \frac{\rho_m}{\epsilon_0}. \quad (4.33)$$

Уравнения (4.32) и (4.33) вместе с соотношениями (4.28) и (4.29) представляют собой *уравнения Лоренца* для электромагнитного микрополя.

Аналогично тому, как из уравнений Максвелла (2.21) и (2.22) было получено уравнение непрерывности (2.27), из уравнений микрополя (4.32) и (4.33) вытекает уравнение непрерывности в форме

$$\operatorname{div} (\rho_m \mathbf{u}_m) + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0. \quad (4.34)$$

Уравнения микрополя (4.28), (4.29), (4.32) и (4.33) не образуют полной системы уравнений, допуская широкий произвол в выражениях ρ_m и \mathbf{u}_m как функций координат и времени при заданных начальных условиях; этот произвол лишь несколько ограничен уравнением непрерывности (4.34).

Для определенного решения вопроса о зависимости ρ_m и \mathbf{u}_m от координат и времени необходимо дополнить уравнения микрополя формулой силы, с которой поле действует на заряды. Электронная теория постулирует, что выражение силы Лоренца (2.67), справедливое и для случая вакуума, такое же и в микрополе, т. е.

$$\mathbf{F}_m = q_m \{ \mathbf{E}_m + [\mathbf{u}_m \mathbf{B}_m] \}. \quad (4.35)$$

Но в уравнениях микрополя встречается не величина заряда, а его объемная плотность ρ_m . Чтобы построить полную систему уравнений, следует ввести ρ_m в формулу, выражающую действие поля на заряды.

Рассмотрим бесконечно малый элемент объема dV . Он содержит заряд $dq_m = \rho_m dV$ и подвергается действию силы

$$d\mathbf{F}_m = \rho_m \{ \mathbf{E}_m + [\mathbf{u}_m \mathbf{B}_m] \} dV.$$

Отсюда *объемная плотность силы* $\mathbf{f}_m = d\mathbf{F}_m/dV$ выражается формулой

$$\mathbf{f}_m = \rho_m \{ \mathbf{E}_m + [\mathbf{u}_m \mathbf{B}_m] \}. \quad (4.36)$$

Подобное выражение для объемной плотности силы, действующей со стороны микрополя, впервые было дано и использовано Лоренцом.

Система уравнений Лоренца (4.28), (4.29), (4.32), (4.33) и (4.36) является полной, т. е. способна однозначно определить электромагнитное поле, а также плотность заряда и скорость его движения в любой точке пространства и в любой момент времени t , если в начальный момент t_0 в любой точке известны величины \mathbf{E}_m , \mathbf{V}_m , ρ_m и \mathbf{u}_m . Мы не будем доказывать это утверждение и ограничимся следующими замечаниями, относящимися к случаю нерелятивистского движения. Зная из уравнений (4.28), (4.32) и (4.34) и начальных условий значения $\partial \mathbf{V}_m / \partial t$, $\partial \mathbf{E}_m / \partial t$ и $\partial \rho_m / \partial t$ в момент t_0 , можно найти \mathbf{V}_m , \mathbf{E}_m и ρ_m в момент времени $t_0 + dt$. Кроме того, зная из выражения (4.36) силу $\mathbf{f}_m \Delta V$, действующую в объеме ΔV любой заряженной частицы, и принимая во внимание массу этой частицы, можно найти ее ускорение в момент t_0 и скорость в момент $t_0 + dt$. Таким образом, зная \mathbf{E}_m , \mathbf{V}_m , ρ_m и \mathbf{u}_m в некоторый момент времени, можно однозначно определить значения этих величин в последующий момент.

§ 4-5. УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МИКРОПОЛЯ

Проверим справедливость системы уравнений Лоренца. Такая проверка путем сравнения с опытными данными становится возможной после усреднения уравнений Лоренца по физически бесконечно малым элементам объема и по физически бесконечно малым промежуткам времени¹.

Общий прием усреднения выражается формулой (4.2) или какой-либо аналогичной формулой, откуда видно, что среднее значение суммы равно сумме средних значений слагаемых, а также что постоянные множители можно выносить из-под знака усреднения и что усредненное значение производной по любой координате или по времени равно производной от усредненного значения

$$\overline{\frac{\partial \bar{G}_m}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{G}_m}{\partial x}, \dots, \overline{\frac{\partial \bar{G}_m}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{G}_m}{\partial t}.$$

Следовательно, для любого вектора \mathbf{a} имеем

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{a}} = \operatorname{div} \bar{\mathbf{a}}; \quad \overline{\operatorname{rot} \mathbf{a}} = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{a}}.$$

¹ Усреднение по времени (в дополнение к усреднению по объему) не всегда необходимо (см. § 4-1).

Таким образом, *усреднение уравнений Лоренца* (4.32), (4.33), (4.28), (4.29) и (4.36) приводит к результату

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{B}}_m = \mu_0 \overline{\rho_m \mathbf{u}_m} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_m}{\partial t}; \quad (4.37)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{E}}_m = \frac{\bar{\rho}_m}{\varepsilon_0}; \quad (4.38)$$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}_m = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_m}{\partial t}; \quad (4.39)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{B}}_m = 0; \quad (4.40)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_m = \overline{\rho_m \mathbf{E}_m} + \overline{\rho_m [\mathbf{u}_m \mathbf{B}_m]}. \quad (4.41)$$

Чтобы выяснить, что следует понимать под $\bar{\mathbf{E}}_m$, $\bar{\mathbf{B}}_m$ и т. д., нужно сравнить уравнения (4.37)–(4.41) с теми уравнениями, справедливость которых подтверждается опытом.

На основании последнего уравнения найдем, какова *сила, действующая на одну заряженную частицу*.

Будем различать две составляющие напряженности электрического микрополя \mathbf{E}_m : одна из них обусловлена самой частицей, а другая — внешними источниками поля. При центрально-симметричном распределении заряда частицы произведение напряженности ее электрического поля на ρ_m , очевидно, равно в среднем нулю.

Поэтому при вычислении силы, действующей на частицу в целом, под \mathbf{E}_m следует понимать поле внешнего происхождения; то же относится и к \mathbf{B}_m . При этом векторы \mathbf{E}_m и \mathbf{B}_m можно считать постоянными в объеме частицы, поскольку этот объем достаточно мал. Величина \mathbf{u}_m , по представлениям классической теории, складывается из скорости поступательного движения \mathbf{u} и линейной скорости вращения вокруг оси, проходящей через центр частицы. Для сферически симметричной частицы при вычислении по формуле (4.41) средней плотности силы, действующей на всю частицу, влияние скорости вращения сводится к нулю, так что достаточно принять во внимание общую для всех точек частицы скорость поступательного движения \mathbf{u} . С целью экспериментальной проверки наших выводов следует ограничиться случаем движения частицы в вакууме. Рассматривая силу, действующую в некотором объеме со стороны электромагнитного поля, надо признать, что в этом случае общему определению физически бесконечно малого объема (см. § 4-1) соответствует объем частицы. В самом деле, это — наименьший объем, удовлетворяющий условию, что сила, действующая на весь объем частицы и прилегающей области пространства, остается неизменной при увеличении такого объема (с сохранением порядка его величины).

Силу \mathbf{F} , действующую на весь объем частицы V , представим в виде

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{f}}_m \cdot V,$$

где $\bar{\mathbf{f}}_m$ — результат усреднения плотности силы \mathbf{f}_m по объему частицы. Это усреднение легко проводится, потому что можно заменить \mathbf{u}_m на \mathbf{u} и рассматривать множители при ρ_m как величины постоянные. Таким образом, справедливо равенство

$$\mathbf{F} = \bar{\rho}_m \{ \bar{\mathbf{E}}_m + [\mathbf{u} \bar{\mathbf{B}}_m] \} V.$$

Но произведение $\bar{\rho}_m V$ представляет собой заряд частицы q , так что

$$\mathbf{F} = q \{ \bar{\mathbf{E}}_m + [\mathbf{u} \bar{\mathbf{B}}_m] \}. \quad (4.42)$$

Если сила действует на частицу со стороны одного лишь электрического поля, то из формулы (4.42) следует

$$\mathbf{F} = q \bar{\mathbf{E}}_m,$$

а из выражения силы Лоренца (2.67), подтверждаемого фактами движения заряженных частиц, имеем в этом случае

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}.$$

Из сравнения с предыдущей формулой следует, что для согласия с опытными данными необходимо признать справедливым равенство

$$\bar{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}. \quad (4.43)$$

Подставляя в уравнение (4.42) \mathbf{E} вместо $\bar{\mathbf{E}}_m$ и сравнивая с формулой (2.67), приходим к выводу, что

$$\bar{\mathbf{B}}_m = \mathbf{B}. \quad (4.44)$$

Наше рассуждение было пока ограничено тем случаем, когда заряженная частица движется в вакууме, подвергаясь действию силы Лоренца (2.67). Рассмотрим теперь *силы, действующие на заряженные частицы в веществе*.

При этом объем частицы не является уже физически бесконечно малым. В самом деле, оценка силы, действующей на некоторый объем, резко изменится, если, кроме объема частицы, принять во внимание смежный объем такого же порядка величины; достаточно иметь в виду возможность сближения частиц почти вплотную. При этом усреднение по объему частицы еще не достаточно для перехода к макроскопическим закономерностям, и результат такого предварительного усреднения следует записать вместо выражения (4.42) в виде

$$\mathbf{F}_m = q \{ \mathbf{E}_m + [\mathbf{u}_m \mathbf{B}_m] \}, \quad (4.45)$$

где \mathbf{u}_m — скорость поступательного движения частицы, а \mathbf{E}_m и \mathbf{B}_m понимаются как величины, средние по объему частицы, не включая поля самой частицы.

Физически бесконечно малый объем при рассмотрении силы, действующей на один электрон, или объемной плотности силы должен в этом случае содержать большое число электронов. Усреднение по такому объему с помощью выражения (4.45) наталкивается на принципиальное затруднение: вектор \mathbf{u}_m вместе с \mathbf{F}_m зависит от \mathbf{B}_m , следовательно, в общем случае¹

$$\overline{[\mathbf{u}_m \mathbf{B}_m]} \neq [\overline{\mathbf{u}} \overline{\mathbf{B}}_m]. \quad (4.46)$$

Однако это затруднение в ряде случаев устраняется. Например, если тело неподвижно в данной системе отсчета и заряженные частицы можно считать неподвижными относительно тела, то формула (4.45) после усреднения принимает вид

$$\overline{\mathbf{F}}_m = q \overline{\mathbf{E}}_m,$$

или, в силу равенства (4.43),

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E},$$

что подтверждается опытом. Если же тело движется со скоростью \mathbf{u} , то на покоящийся по отношению к нему заряд действует макроскопическая сила (4.42), как это видно, если усреднить выражение (4.45) при $\mathbf{u}_m = \mathbf{u}$. В таком случае формула (4.42) при условии справедливости равенств (4.43) и (4.44) принимает вид

$$\mathbf{F} = q \{ \mathbf{E} + [\mathbf{u} \mathbf{B}] \},$$

что подтверждается опытом.

Рассматривая ток в проводнике как упорядоченное движение электронов со скоростью \mathbf{u} , также приходим к формуле (4.42). Если число движущихся свободных электронов, отнесенное к единице объема, обозначить через n и ионы считать неподвижными, то из формул (4.42) ÷ (4.44) с заменой q на $-ne$ при $\mathbf{E} = 0$ получим, что объемная плотность макроскопической силы, действующей на электроны, т. е. на проводник, со стороны магнитного поля равна

$$\mathbf{f} = -ne [\mathbf{u} \mathbf{B}].$$

Но $-ne = \rho$ означает плотность заряда движущихся электронов, а произведение $\rho \mathbf{u}$ можно заменить плотностью тока \mathbf{j} .

¹ Если одна величина зависит от другой, то среднее значение произведения не равно, вообще говоря, произведению средних значений сомножителей. Например, если ток и напряжение меняются по синусоидальному закону, то среднее значение каждого из них равно нулю, а среднее значение их произведения, т. е. мгновенной мощности, показывает ваттметр.

Таким образом, объемная плотность силы, которая действует на проводник со стороны магнитного поля, выражается в виде

$$\mathbf{f} = [\mathbf{j}\mathbf{B}]. \quad (4.47)$$

К такому же выражению можно прийти, считая, что ток создается движением не только электронов, но и ионов. Следовательно, сила, действующая на проводник в объеме V со стороны магнитного поля, равна

$$\mathbf{F} = \int_V [\mathbf{j}\mathbf{B}] dV. \quad (4.48)$$

Справедливость этой формулы подтверждается опытом.

Рассмотрим теперь *усредненные уравнения Лоренца* (4.39) и (4.40), которые в случае справедливости равенств (4.43) и (4.44) принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Таковы же уравнения Максвелла (2.23) и (2.24), справедливые, как показывает совокупность опытных фактов, для любой материальной среды. Таким образом, мы убеждаемся, что равенства (4.43) и (4.44) имеют место в любом веществе.

Но уравнения (4.23) и (4.24) для поля в вакууме должны быть справедливы, по представлениям электронной теории, и для микрополя, т. е.

$$\mathbf{D}_m = \epsilon_0 \mathbf{E}_m, \quad \mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m,$$

откуда после усреднения

$$\bar{\mathbf{D}}_m = \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}}_m, \quad \bar{\mathbf{B}}_m = \mu_0 \bar{\mathbf{H}}_m,$$

или, в силу равенств (4.43) и (4.44),

$$\bar{\mathbf{D}}_m = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{H}}_m = \mathbf{B}/\mu_0.$$

Из сравнения с уравнениями (2.9) и (2.15) видно, что

$$\bar{\mathbf{D}}_m = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_a} \mathbf{D}, \quad \bar{\mathbf{H}}_m = \frac{\mu_a}{\mu_0} \mathbf{H},$$

или, если заменить ϵ_a/ϵ_0 на ϵ и μ_a/μ_0 на μ , то

$$\bar{\mathbf{D}}_m = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon}, \quad \bar{\mathbf{H}}_m = \mu \mathbf{H}. \quad (4.49)$$

Важно заметить, что усредненная напряженность магнитного микрополя равна произведению относительной магнитной проницаемости на макроскопическую напряженность магнитного поля¹.

¹ В системе СГС, где $\epsilon_0 = 1$ и $\mu_0 = 1$, величины ϵ и μ имеют смысл абсолютных проницаемостей, и соотношения (4.49) означают, что $\bar{\mathbf{D}}_m = \mathbf{E}$ и $\bar{\mathbf{H}}_m = \mathbf{B}$.

Рассмотрим *усредненное уравнение Лоренца* (4.38). Благодаря равенству (4.43) это уравнение принимает вид

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \overline{\rho_m}. \quad (4.50)$$

Основные представления электронной теории заставляют различать свободные заряды, плотность которых обозначим через ρ_{mI} , и связанные заряды с плотностью ρ_{mII} . Таким образом,

$$\rho_m = \rho_{mI} + \rho_{mII}.$$

Усредненную плотность свободных зарядов обозначим через ρ , т. е.

$$\overline{\rho_{mI}} = \rho.$$

Как известно из макроскопической электродинамики, плотность связанных зарядов в диэлектрике равна взятой с обратным знаком дивергенции его поляризации \mathbf{P} :

$$\rho_{mII} = -\operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Следовательно, уравнение (4.50) приводится к виду

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho,$$

откуда, в силу соотношения

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (4.51)$$

получается уравнение Максвелла в виде (2.22).

Рассматривая *усредненное уравнение Лоренца* (4.37), необходимо заметить, что выражение $\rho_m \mathbf{u}_m$, в силу формулы (4.30), имеет смысл плотности тока в микроскопической теории. В дальнейшем ограничимся случаем, когда тело покоится относительно системы координат, в которой скорость заряженных частиц тела равна \mathbf{u}_m .

В свете основных представлений электронной теории о структуре вещества (см. § 4-1) следует считать, что существуют три причины возникновения тока: 1) свободное движение электронов и ионов; 2) молекулярные токи в виде стационарного движения электронов внутри молекул; 3) токи поляризации в виде смещения связанных зарядов под действием электрического поля.

Условимся в дальнейшем применять индекс I как указание на ток, обусловленный движением свободных зарядов, индекс II — при обозначении молекулярного тока и индекс III — как указание на ток поляризации. Тогда

$$\overline{\rho_m \mathbf{u}_m} = \overline{(\rho_m \mathbf{u}_m)_I} + \overline{(\rho_m \mathbf{u}_m)_{II}} + \overline{(\rho_m \mathbf{u}_m)_{III}}. \quad (4.52)$$

Первое слагаемое в правой части, т. е. результат усреднения микроскопической плотности тока свободных зарядов в веществе, означает, очевидно, макроскопическую плотность тока проводи-

мости ¹:

$$\overline{(\rho_m \mathbf{u}_m)_I} = \mathbf{j}. \quad (4.53)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (4.52) имеет смысл средней плотности молекулярных токов, которые в покоящемся теле замкнуты. При этом, как известно из макроскопической электродинамики, справедливо подтвержденное далее в § 7-1 соотношение

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \mathbf{I}.$$

Итак,

$$\overline{(\rho_m \mathbf{u}_m)_{II}} = \text{rot } \mathbf{I}, \quad (4.54)$$

где \mathbf{I} — намагниченность.

Перейдем к расчету средней плотности тока поляризации $\overline{(\rho_m \mathbf{u}_m)_{III}}$. Область, занятую связанными зарядами, подразделим на бесконечно малые элементы объема dV . В каждом из них на расстоянии \mathbf{r} от начала координат расположен заряд $\rho_m dV$. Электрический момент этого заряда относительно начала координат равен

$$d\mathbf{p} = \mathbf{r} \cdot \rho_m dV.$$

Перемещение заряда, создающее молекулярный ток, приводит после усреднения по времени к некоторому усредненному значению \mathbf{r} для этого заряда, которое обозначим через \mathbf{r}_0 , а соответствующее $d\mathbf{p}$ — через $d\mathbf{p}_0$. Таким образом,

$$d\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 \rho_m dV.$$

Смещение заряда, связанное с поляризацией, происходит со скоростью

$$\mathbf{u}_m = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt},$$

так что

$$(\rho_m \mathbf{u}_m)_{III} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{p}_0}{dV} \right).$$

Проведем усреднение по физически бесконечно малому объему. Этот объем будем считать фиксированным в системе координат, относительно которой рассматривается скорость \mathbf{u}_m . При этом дифференцирование по времени можно вынести из-под знака усреднения по объему и представить в виде частной производной

$$\overline{(\rho_m \mathbf{u}_m)_{III}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\frac{d\mathbf{p}_0}{dV}} \right), \quad (4.55)$$

¹ Макроскопический конвекционный ток исключается из рассмотрения, поскольку тело покоится.

где под знаком производной стоит плотность макроскопического электрического момента, т. е. поляризация \mathbf{P} .

По представлениям электронной теории (см. § 4-1), каждый связанный заряд $dq = \rho_m dV$, обладающий электрическим моментом

$$d\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 dq,$$

существует вместе с таким же зарядом противоположного знака, электрический момент которого

$$d\mathbf{p}_{01} = -\mathbf{r}_{01} dq.$$

Следовательно,

$$d\mathbf{p}_0 + d\mathbf{p}_{01} = \mathbf{l} dq,$$

где $\mathbf{l} = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{01})$ — длина диполя, образованного этими двумя зарядами, и $\mathbf{l} dq$ — соответствующий дипольный момент.

Таким образом, макроскопический электрический дипольный момент, отнесенный к единице объема

$$\overline{\frac{d\mathbf{p}_0}{dV}} = \mathbf{P},$$

можно рассматривать как сумму дипольных моментов в единице объема. Из соотношения (4.55) имеем

$$\overline{(\rho_m \mathbf{u}_m)_{\text{III}}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (4.56)$$

Уравнение (4.37) на основании соотношений (4.43), (4.44), (4.52) — (4.54) и (4.56) приводится к виду

$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{l} \right) = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}). \quad (4.57)$$

Но

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{l}), \quad (4.58)$$

так что благодаря равенству (4.51) уравнение (4.57) совпадает с первым уравнением Максвелла (2.21).

Итак, справедливость постулированных электронной теорией четырех уравнений микрополя (4.28), (4.29), (4.32) и (4.33) подтверждается тем, что из них после усреднения получаются четыре основных уравнения Максвелла, которые находятся в согласии с опытом. В самом деле, если следствия системы уравнений Максвелла во многих случаях не согласуются с опытом, как уже было отмечено во «Введении» к данной книге, то ответственными за это следует считать три релятивистски нековариантные «материальные» уравнения этой системы, в которые входят «материальные константы» ϵ_a , μ_a и удельная электрическая проводимость σ , а именно уравнения (2.9), (2.15) и соотношение

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}), \quad (4.59)$$

где $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ — напряженность поля сторонних сил.

Теория Максвелла, не углубляясь в рассмотрение процессов, происходящих внутри вещества, вынуждена трактовать диэлектрическую проницаемость ϵ_a , магнитную проницаемость μ_a и удельную проводимость σ как заданные постоянные величины. Это приводит в ряде случаев к значительному расхождению с опытом.

В электронной теории ϵ_a , μ_a и σ уже не являются заданными константами, а физический смысл уравнений Максвелла уточняется и значительно углубляется. При этом отсутствуют общие основания считать электрическую и магнитную индукции пропорциональными напряженностям полей.

Напротив, соотношения (4.51) и (4.58) открывают широкие возможности для выяснения связи между \mathbf{D} и \mathbf{E} , а также между \mathbf{B} и \mathbf{H} . Как будет показано в гл. 6 и 7, конкретные модельные представления электронной теории о веществе приводят к важным выводам о зависимости \mathbf{P} от \mathbf{E} , а также \mathbf{I} от \mathbf{B} . Это позволяет для изотропных сред, рассмотрением которых мы ограничимся, проанализировать смысл величин ϵ_a и μ_a и установить их зависимость от определенных физических факторов.

В электронной теории, вопреки уравнению (4.59), нет общих оснований считать плотность тока проводимости пропорциональной сумме напряженностей поля зарядов \mathbf{E} и стороннего поля $\mathbf{E}_{\text{ст}}$. Как будет выяснено в гл. 8, такая пропорциональность, т. е. справедливость закона Ома, может нарушаться. Вместе с тем представления электронной теории о веществе позволяют выяснить физический смысл удельной проводимости σ для тех случаев, когда это понятие имеет смысл.

§ 4-6. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО МИКРОПОЛЯ

Чтобы судить об изменениях энергии микрополя, рассмотрим работу, которую совершает это поле, действуя на заряды. Объемная плотность силы Лоренца в микроскопической теории выражается формулой (4.36), а *работа лоренцевой силы* в объеме V , отнесенная к единице времени, т. е. мощность P , равна

$$P = \int_V (\mathbf{f}\mathbf{u}) dV = \int_V \rho(\mathbf{E}\mathbf{u}) dV$$

(здесь и в дальнейшем для простоты опустим индекс «м», как обозначение микроскопических величин).

В силу уравнения микрополя (4.32), с заменой \mathbf{B}_m/μ_0 на \mathbf{H} , имеем

$$\rho(\mathbf{E}\mathbf{u}) = (\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}) - \epsilon_0 \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Выразим $(\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H})$ на основании равенства, известного из векторного анализа,

$$\text{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}).$$

Подставляя также выражение для $\operatorname{rot} \mathbf{E}$, согласно уравнению (4.28), получаем

$$\rho(\mathbf{E}\mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} \right) - \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad (4.60)$$

так что выражение для мощности P приводится к виду

$$P = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} \right) dV - \int_V \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] dV.$$

Имея в виду фиксированный объем V , можно поменять местами операции интегрирования по этому объему и частной производной по времени; при этом по отношению ко всему объему символ $\partial/\partial t$ заменится на d/dt .

Воспользуемся также формулой Остроградского, согласно которой

$$\int_V \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] dV = \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}]_n dS,$$

где $[\mathbf{E}\mathbf{H}]_n$ — проекция вектора $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ на направление внешней нормали к поверхности S , ограничивающей объем V . Заменяя при этом P на dA/dt , где dA — работа сил поля за время dt , получим

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} dV - \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}]_n dS. \quad (4.61)$$

Рассмотрим тот случай, когда поле в объеме V является полным, т. е. на ограничивающей поверхности S поле отсутствует, а если объем неограниченно велик, то напряженности поля убывают в бесконечности настолько быстро, что

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}]_n dS = 0.$$

Тогда по формуле (4.61) работа сил поля равна уменьшению величины

$$W = \int_V \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} dV. \quad (4.62)$$

Отсюда видно, что величина W есть не что иное, как *электромагнитная энергия микрополя*, а величина

$$\omega = \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} \quad (4.63)$$

представляет плотность электромагнитной энергии микрополя.

Несмотря на полное внешнее сходство полученных выражений с известными из макроскопической электродинамики выражениями для энергии электромагнитного поля и ее плотности, следует иметь в виду, что плотность энергии макроскопического

поля обычно очень далека от усредненной плотности энергии микрополя. Дело в том, что квадрат среднего значения напряженности микрополя при резких изменениях этой величины (см., например, результат решения задачи 27) оказывается гораздо меньше, чем среднее значение квадрата напряженности [см. примечание к формуле (4.46)]. Поэтому энергия макроскопического поля в некотором объеме во много раз меньше, чем энергия микрополя в том же объеме (см. § 5-3).

Заметим, что в рассмотренном нами случае полного поля система, заключенная внутри поверхности S , является замкнутой физической системой.

Если при этом над зарядами совершается работа dA , так что их механическая энергия возрастает на величину dA , то электромагнитная энергия поля убывает на такую же величину. Следовательно, для замкнутой физической системы сумма механической энергии заряженных частиц и электромагнитной энергии микрополя при всех процессах остается величиной постоянной. В такой форме выражается здесь закон сохранения и превращения энергии.

Перейдем к случаю, когда поле в объеме V не является полным. Введем аналогичную известному в макроскопической электродинамике вектору Пойнтинга величину

$$\mathbf{N} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (4.64)$$

и рассмотрим сначала простой случай, когда зарядов в объеме V нет. При $\rho = 0$ из равенств (4.60), (4.63) и (4.64) находим

$$\frac{dw}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{N} = 0. \quad (4.65)$$

Это уравнение совершенно аналогично уравнению непрерывности для электрического заряда (4.34), которое означает, что количество электричества внутри некоторого объема может меняться только за счет перемещения электричества через поверхность, ограничивающую этот объем. Точно так же уравнение (4.65) означает, что энергия электромагнитного поля в объеме V , где нет зарядов, может меняться только благодаря потоку этой энергии через ограничивающую поверхность S . Если под знаком дивергенции в уравнении (4.34) стоит, в согласии с (4.30), плотность тока, то вектор \mathbf{N} в уравнении (4.65) имеет смысл плотности потока энергии.

По виду выражения (4.64) для \mathbf{N} и по его физическому смыслу этот вектор есть не что иное, как вектор Пойнтинга в микроскопической теории.

Допуская теперь существование зарядов в объеме V и обращаясь к уравнению (4.61), мы видим, что оно выражает теорему Умова — Пойнтинга для электромагнитного микрополя: убыль энер-

гии в объеме V , отнесенная к единице времени, равна сумме (также отнесенной к единице времени) работы сил поля и энергии, выходящей из объема V .

§ 4-7. ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО МИКРОПОЛЯ

При рассмотрении вопроса об импульсе электромагнитного поля следует исходить из выражения (4.36) для объемной плотности лоренцевой силы и принять во внимание четыре уравнения микрополя (4.28), (4.29), (4.32) и (4.33), образующие полную систему вместе с выражением (4.36).

Уравнения (4.33) и (4.32) с заменой \mathbf{V}_m на $\mu_0 \mathbf{H}$ позволяют выразить величины, характеризующие свойства зарядов, через напряженности поля:

$$\begin{aligned} \rho &= \epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}, \\ \rho \mathbf{u} &= \operatorname{rot} \mathbf{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

так что выражение (4.36) приводится к виду

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{V}] - \epsilon_0 \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathbf{V} \right]. \quad (4.66)$$

Чтобы использовать уравнение (4.28), заметим, что

$$\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathbf{V} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \mathbf{V}] - \left[\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right],$$

или, в силу уравнения (4.28),

$$\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathbf{V} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \mathbf{V}] + [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}]. \quad (4.67)$$

Придадим выражению для \mathbf{f} более симметричный вид, добавив член $\mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{V}$, т. е. $\mu_0 \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H}$, равный нулю на основании (4.29). Таким образом, *объемная плотность силы* (4.66) вследствие равенства (4.67) с заменой \mathbf{V} на $\mu_0 \mathbf{H}$ равна

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - \epsilon_0 [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] + \mu_0 \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} - \mu_0 [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \mathbf{H}]. \quad (4.68)$$

Найдем компоненты этого вектора f_x , f_y и f_z . Рассмотрим вектор \mathbf{a} , задаваемый формулой

$$\mathbf{a} = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}].$$

Его компонента a_x может быть записана в виде

$$a_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{E^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z).$$

Аналогичным образом проектируется на ось x вектор $\mathbf{H} \operatorname{div} - \mathbf{H} - [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}]$. Таким образом, из уравнения (4.68) с учетом фор-

мулы (4.64) получаем

$$\begin{aligned} f_x = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_x^2 - \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_0 E_x E_y + \mu_0 H_x H_y) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_0 E_x E_z + \mu_0 H_x H_z) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial N_x}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Аналогичные выражения для f_y и f_z могут быть написаны по принципу циклического чередования координатных осей, т. е. путем замены индексов x, y, z соответственно на y, z, x и на z, x, y .

Подобно компонентам четырехмерного тензора второго ранга $T_{\alpha\alpha}$, которые преобразуются по формуле (2.46) как произведения компонент четырехмерных векторов, величины T_{ij} являются компонентами трехмерного тензора второго ранга, если они преобразуются при переходе от одной системы координат к другой как произведения компонент трехмерных векторов. Выражение, стоящее под знаком $\partial/\partial x$ в уравнении (4.69), содержащее произведение $E_x E_x$ и $H_x H_x$, обозначим T_{xx} , т. е.

$$T_{xx} = \epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_x^2 - \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2}.$$

Далее

$$T_{xy} = \epsilon_0 E_x E_y + \mu_0 H_x H_y,$$

$$T_{xz} = \epsilon_0 E_x E_z + \mu_0 H_x H_z.$$

Перепишем уравнение (4.69), пользуясь этими обозначениями и заменяя, в силу равенства (2.37), $\epsilon_0 \mu_0$ на $1/c^2$.

Таким образом, запишем

$$f_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial N_x}{\partial t}. \quad (4.70)$$

Аналогичным путем получают выражения f_y и f_z , которые соответствуют перестановке x, y и z в формуле (4.70) в порядке циклического чередования, а именно

$$f_y = \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial N_y}{\partial t}; \quad (4.71)$$

$$f_z = \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial N_z}{\partial t}. \quad (4.72)$$

В уравнения (4.70) ÷ (4.72) входят девять компонент T_{ij} трехмерного тензора второго ранга, которые можно представить в виде матрицы

$$\|T_{ij}\| = \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix}$$

Это — введенный Максвеллом *тензор натяжений*¹, компоненты которого (в системе единиц СИ) имеют вид

$$T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \mu_0 H_i H_j - \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} \delta_{ij}, \quad (4.73)$$

где как i , так и j , принимают значения x, y, z , а $\delta_{ij} = 0$ при $j \neq i$ и $\delta_{ij} = 1$ при $j = i$.

Полная сила, действующая на объем V ,

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV$$

на основании уравнений (4.70) ÷ (4.72) имеет компоненты

$$F_x = \int_V \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) dV - \frac{1}{c^2} \int_V \frac{\partial N_x}{\partial t} dV \quad (4.74)$$

и т. д.

Обозначим через \mathbf{n} единичный вектор внешней нормали к поверхности S , ограничивающей объем V . Скалярным произведением $(T\mathbf{n})$ тензора T на вектор \mathbf{n} называется выражение, удовлетворяющее соотношениям

$$(T\mathbf{n})_x = T_{xx}n_x + T_{xy}n_y + T_{xz}n_z \quad (4.75)$$

и т. п., причем $n_x = n \cos(\mathbf{n}, x)$ и т. д.

Преобразуем первый интеграл в выражении (4.74). Согласно формуле Остроградского для любых непрерывных функций точки a_x, a_y, a_z справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \\ & = \oint_S \{ a_x \cos(\mathbf{n}, x) + a_y \cos(\mathbf{n}, y) + a_z \cos(\mathbf{n}, z) \} dS. \end{aligned}$$

Полагая $a_x = T_{xx}$, $a_y = T_{xy}$ и $a_z = T_{xz}$, приводим выражение для F_x к виду

$$F_x = \oint_S (T\mathbf{n})_x dS - \frac{1}{c^2} \int_V \frac{\partial N_x}{\partial t} dV.$$

Аналогичные выражения можно получить для компонент силы F_y и F_z . Следовательно,

$$\mathbf{F} = \oint_S (T\mathbf{n}) dS - \frac{1}{c^2} \int_V \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} dV. \quad (4.76)$$

Здесь символ частной производной по времени имеет место потому, что \mathbf{N} является функцией не только времени, но и координат

¹ Название объясняется тем, что Максвелл имел в виду натяжения в упругом эфире. Теперь известно, что такого эфира и натяжений в нем нет, но название тензора сохранилось.

точки. Эту частную производную можно поменять местами с независимой операцией интегрирования по фиксированному объему V , а затем по отношению ко всему объему заменить ее обыкновенной производной по времени. Таким образом,

$$\mathbf{F} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{N} dV = \oint_S (T\mathbf{n}) dS. \quad (4.77)$$

Согласно второму закону динамики

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \quad (4.78)$$

где \mathbf{Q} — импульс материальных частиц в объеме V . Уравнение (4.77), в силу равенства (4.78), принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{Q} + \frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{N} dV \right) = \oint_S (T\mathbf{n}) dS. \quad (4.79)$$

В случае полного поля, т. е. для замкнутой физической системы, правая часть последнего равенства будет равна нулю, как видно из выражений для компонент тензора T . Тогда из соотношения (4.79) следует, что

$$\mathbf{Q} + \mathbf{G} = \mathbf{C}, \quad (4.80)$$

где \mathbf{C} — постоянный вектор, а

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{N} dV. \quad (4.81)$$

Таким образом, в любой замкнутой физической системе при отсутствии внешних воздействий остается справедливым не только закон сохранения энергии, но и закон сохранения импульса. Для этого необходимо и достаточно считать, что наша система, содержащая как заряженные частицы, так и электромагнитное поле, обладает не только механическим импульсом \mathbf{Q} , но и импульсом \mathbf{G} , определяемым формулой (4.81), который зависит от свойств электромагнитного поля и представляет собой *электромагнитный импульс*.

Следовательно, соотношение (4.80) выражает обобщенный закон сохранения импульса: в замкнутой физической системе, содержащей заряженные частицы и электромагнитное поле, сумма механического импульса \mathbf{Q} и электромагнитного импульса \mathbf{G} остается величиной постоянной, т. е. сохраняется.

Итак, электромагнитное поле, как и вещество, обладает импульсом.

Введем в рассмотрение *плотность импульса электромагнитного поля* $\mathbf{g} = d\mathbf{G}/dV$, которая из формулы (4.81) оказывается равной

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{N}}{c^2}. \quad (4.82)$$

Учитывая, что вектор Пойнтинга \mathbf{N} выражается формулой (4.64), получаем

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (4.83)$$

§ 4-8. ДАВЛЕНИЕ И МАССА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

На основании обобщенного закона сохранения импульса (4.80) можно доказать, что существует *давление электромагнитных волн*.

В качестве замкнутой системы рассмотрим, например, сферическую полую камеру, заполненную равновесным излучением. Твердую стенку полости будем считать идеально отражающей. Воспользуемся системой координат, в которой камера покоится, т. е. механический импульс отсутствует, и в соотношении (4.80) $\mathbf{Q} = 0$. Из соображений симметрии следует, что $\mathbf{G} = 0$, поэтому $\mathbf{Q} + \mathbf{G} = 0$.

Если в стенке полости появится отверстие (рис. 20), то из него, очевидно, будет выходить излучение. Возникающий электромагнитный импульс \mathbf{G} будет, согласно формуле (4.81), параллелен вектору Пойнтинга, т. е. будет совпадать по направлению с излучением. Но сумма $\mathbf{Q} + \mathbf{G}$, согласно обобщенному закону сохранения импульса (4.80), должна оставаться равной нулю; следовательно, камера приобретает механический импульс $\mathbf{Q} = -\mathbf{G}$ и, таким образом, будет двигаться в направлении, противоположном \mathbf{G} ¹.

Вследствие отсутствия внешних воздействий подобная «отдача» при излучении может быть объяснена только давлением волнового поля на стенки полости (см. рис. 20). Следует, очевидно, признать, что давление электромагнитных волн на стенки замкнутой полости также существует, но результирующая действующих в этом случае сил равна нулю. Перейдем к определению величины давления электромагнитного поля.

Пусть плоская электромагнитная волна падает на абсолютно поглощающую плоскую поверхность S_0 некоторого тела (рис. 21)² в направлении, противоположном направлению \mathbf{n} внешней нор-

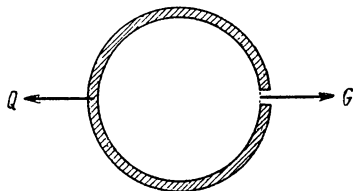


Рис. 20. «Отдача» при излучении

¹ Подобная «отдача» при излучении будет, возможно, использована в будущем в фотонных реактивных двигателях космических кораблей, предназначенных для очень далеких полетов. Излучение света со скоростью c позволит кораблю приобрести скорость, близкую к c .

² Достаточно малые участки фронта волны и поверхности тела можно считать плоскими. Скорость волны на рис. 21 обозначена через c , поскольку рассматривается микрополе, распространяющееся в вакууме.

мали к поверхности. В результате поглощения волновое поле на этой поверхности равно нулю; при этом электромагнитная энергия затрачивается на выделение теплоты. Во всем объеме тела вектор Пойнтинга равен нулю, и уравнение (4.79) принимает вид

$$\frac{dQ}{dt} = \oint_S (Tn) dS,$$

где S — полная поверхность тела, которое для простоты будем считать прямоугольным параллелепипедом.

Интеграл в правой части последнего уравнения по боковым граням обращается в нуль, поскольку поле зависит только от одной координаты

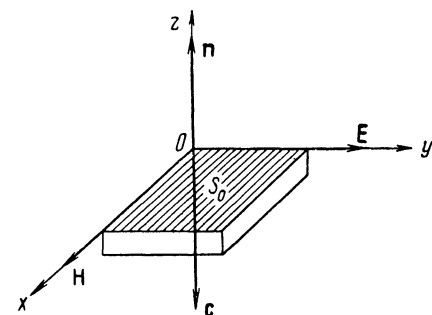


Рис. 21. Падение волны на поглощающую поверхность

(по оси, совпадающей с направлением распространения волны), а направления внешней нормали \mathbf{n} на противоположных гранях взаимно противоположны. На нижнюю грань параллелепипеда волна не попадает. Таким образом,

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{S_0} (Tn) dS.$$

Воспользуемся выражениями типа (4.75) и (4.73). Для нашего случая (см. рис. 21) напомним

$$(Tn)_x = (Tn)_y = 0, \quad (Tn)_z = -\frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2},$$

так что

$$(Tn) = -\frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} \cdot \mathbf{n} = -\omega \mathbf{n},$$

где ω — плотность энергии поля. Таким образом,

$$\frac{dQ}{dt} = -\omega n S_0.$$

Но dQ/dt равняется силе F , действующей на тело, а давление $p = F/S_0$. Следовательно,

$$p = -\omega n. \quad (4.84)$$

Так как \mathbf{n} — единичный вектор, то давление электромагнитной волны при нормальном падении ее на абсолютно поглощающую поверхность равно по модулю плотности энергии ω в падающей волне.

К этому результату можно прийти иным путем. Как известно, микрополе распространяется в вакууме, а для плоской электромагнитной волны в вакууме справедливо известное из макроскопической электродинамики равенство¹

$$\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H \quad (4.85)$$

(в системе СГС соответственно $E_{\Gamma} = H_{\Gamma}$), причем вектор \mathbf{H} перпендикулярен \mathbf{E} . При этом вследствие формул (4.83) и (2.37) модуль плотности электромагнитного импульса равен

$$g = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c}. \quad (4.86)$$

Но с помощью равенств (4.63) и (4.85) плотность энергии поля можно представить в виде

$$\omega = \varepsilon_0 E^2. \quad (4.87)$$

За время dt , когда волна проходит расстояние cdt , на поверхность S_0 падает и поглощается ею электромагнитный импульс, равный

$$g S_0 c dt = \varepsilon_0 E^2 S_0 dt = \omega S_0 dt.$$

Рассмотрим замкнутую физическую систему, в состав которой входят тело и воздействующее на него волновое электромагнитное поле. Применим к этой системе обобщенный закон сохранения импульса (4.80). Поглощение электромагнитного импульса означает появление такого же по модулю механического импульса dQ . Следовательно,

$$dQ = \omega S_0 dt,$$

откуда модуль силы равен $dQ/dt = \omega S_0$, а для давления p , равного отношению модуля силы к площади S_0 , получается простая формула

$$p = \omega. \quad (4.88)$$

Этот результат, полученный на основании макроскопической электродинамики вакуума, является правильным, как видно из сравнения с равенством (4.84).

Повторим подобное рассуждение для случая идеально отражающей поверхности, когда вследствие отражения изменение электромагнитного импульса как векторной величины вдвое больше, чем в рассмотренном случае абсолютно поглощающей поверхности, а именно

$$d\mathbf{G} = 2\omega S_0 \mathbf{n} dt,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S_0 .

¹ В § 5-4 будет установлено, что такое равенство справедливо в волновой зоне точечного заряда и, следовательно, при любом сочетании зарядов.

Тогда, пользуясь соотношением (4.80), находим

$$dQ = -2\omega S_0 n dt,$$

так что давление электромагнитной волны на абсолютно отражающую поверхность при нормальном падении оказывается равным

$$p = -2\omega n. \quad (4.89)$$

В общем случае непрозрачного тела введем в рассмотрение коэффициент отражения R — величину, равную отношению плотности электромагнитной энергии в отраженной волне к плотности ее в падающей волне. Тогда $dG = (1 + R)\omega S_0 n dt$ и на основании соотношения (4.80) вместо (4.89) получается общее выражение для давления p электромагнитной волны при нормальном падении

$$p = -(1 + R)\omega n. \quad (4.90)$$

Справедливость соотношений (4.90) и (4.89) подтверждается путем строгого расчета, основанного на использовании формулы (4.79).

Рассмотрим случай, когда волна распространяется в вакууме. Из сравнения соотношений (4.87) и (4.86) имеем

$$\omega = gc, \quad (4.91)$$

и в связи с выражением (4.82)

$$\omega = N/c, \quad (4.92)$$

где N — модуль вектора Пойнтинга, направление которого в падающей волне в нашем случае противоположно направлению вектора n . Поэтому из соотношения (4.90) имеем

$$p = \frac{1+R}{c} \cdot N. \quad (4.93)$$

При распространении волны в вакууме макроскопическая плотность потока электромагнитной энергии, коэффициент отражения и давление электромагнитной волны, доступные измерению, ничем не отличаются от таких же микроскопических величин N , R и p .

Справедливость формулы (4.93) подтверждена блестящими *опытами П. Н. Лебедева* (1899—1900) по измерению светового давления. Свет от электрической дуги направлялся на одно из легких крылышек, сделанных из различных металлов или слюды с разными коэффициентами отражения и подвешенных в вакууме на нити A (рис. 22), причем плотность потока энергии N измерялась термоэлементом. Давление p , вычисленное по закручиванию нити, отличалось в опытах Лебедева от вычисленного по формуле (4.93) не более чем на 2%.

Опыты Лебедева показали, что электромагнитное поле, в согласии с теорией, обладает не только энергией, но и импульсом, который может приводить к появлению механического импульса.

Но если поле обладает инертными свойствами, то следует ввести термин *масса поля*, понимая под этим меру инертности его.

Представление о сохранении и непрерывном перемещении массы вещества позволяет считать уравнение непрерывности (4.34) справедливым и в том случае, когда под ρ_m понимается не плотность заряда, а плотность массы вещества; при этом под \mathbf{u}_m понимается скорость массы, а произведение $\rho_m \mathbf{u}_m$ представляет собой плотность импульса вещества. Однако в области, где нет электрических зарядов, справедливо уравнение (4.65), откуда после деления на c^2 , пользуясь формулой (4.82), находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w}{c^2} \right) + \operatorname{div} \mathbf{g} = 0.$$

Этот результат полностью соответствует указанному смыслу уравнения непрерывности (4.34), но плотность импульса вещества заменяется плотностью импульса электромагнитного поля, а вместо плотности массы вещества фигурирует величина w/c^2 , которую, таким образом, следует считать

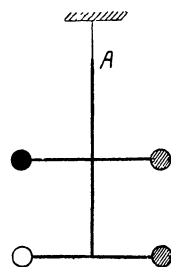


Рис. 22. Схема опыта П. Н. Лебедева

плотностью d

$$d = \frac{w}{c^2}. \quad (4.94)$$

Вследствие соотношения (4.91) плотность электромагнитного импульса при распространении плоской волны в вакууме равна

$$g = cd,$$

откуда после интегрирования по объему V имеем

$$G = \int_V g dV = m_n c,$$

где m_n — масса электромагнитного поля в объеме V .

Таким образом, электромагнитный импульс G равен произведению массы электромагнитного поля m_n на скорость его движения c , что совершенно аналогично соотношению, известному для вещества.

Интегрируя уравнение (4.94) по объему V , получим соотношение между массой электромагнитного поля m_n и энергией поля $W = \int_V w dV$ в том же объеме:

$$m_n = \frac{W}{c^2}. \quad (4.95)$$

Это совпадает с общим соотношением (1.80) между энергией и массой, известным из теории относительности.

§ 4-9. ЛОРЕНЦОВА СИЛА И ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Из предыдущих параграфов видно, насколько большую роль в электронной теории играет выражение объемной плотности силы, действующей на заряды со стороны электромагнитного поля. Вытекающие из него важные следствия подтверждаются опытом. Между тем существование силы Лоренца заставляет

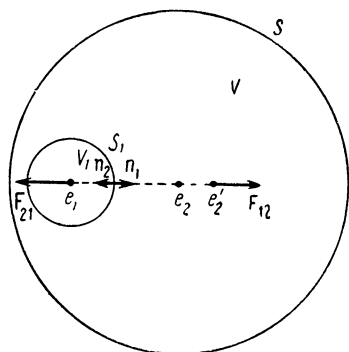


Рис. 23. К доказательству нарушения третьего закона Ньютона

критически пересмотреть вопрос о справедливости III закона Ньютона.

Рассмотрим взаимодействие двух частиц с зарядами e_1 и e_2 (рис. 23) в вакууме. Допустим, что заряд e_1 покоится, а заряд e_2 сначала покоится, далее совершает небольшое перемещение в направлении от e_1 по закону колебаний линейного гармонического осциллятора и затем, начиная с момента t_1 , занимает положение e_2' .

Проведем вокруг e_1 , как центра, сферическую поверхность S_1 и обозначим через t_2 момент времени, когда электромагнитная волна, созданная перемещением заряда e_2 , достигает поверхности S_1 . Рассмотрим взаимодействие зарядов e_1 и e_2 в проме-

жутке времени от t_1 до t_2 . В объеме V_1 , ограниченном поверхностью S_1 , поле остается электростатическим и вектор Пойнтинга равен нулю. Обратимся к формуле (4.76), органически связанной с выражением лоренцовой силы. При $\mathbf{N}=0$ сила в объеме V_1 , действующая на заряд e_1 со стороны заряда e_2 , равна

$$\mathbf{F}_{21} = \oint_{S_1} (T\mathbf{n}_1) dS, \quad (4.96)$$

где \mathbf{n}_1 — единичный вектор нормали к поверхности S_1 , проведенный из объема V_1 .

Систему зарядов e_1 и e_2 в промежутке времени от t_1 до t_2 будем считать замкнутой. Тогда вокруг обоих зарядов существует такая достаточно удаленная поверхность S , что

$$\oint_S (T\mathbf{n}) dS = 0. \quad (4.97)$$

Ввиду выражения (4.76) в объеме V между поверхностями S_1 и S на заряд e_2 со стороны e_1 действует сила, равная

$$\mathbf{F}_{12} = \oint_{S+S_1} (T\mathbf{n}) dS - \frac{1}{c^2} \int_V \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} dV,$$

или, принимая во внимание соотношение (4.97),

$$\mathbf{F}_{12} = \oint_{S_1} (T\mathbf{n}_2) dS - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{N} dV, \quad (4.98)$$

где в последнем члене, как обычно, вместо $\partial/\partial t$ под знаком интеграла по объему V записано d/dt перед интегралом; \mathbf{n}_2 означает единичный вектор нормали к S_1 , проведенный из объема V .

Но в любой точке поверхности S_1 имеем

$$\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1.$$

Поэтому из сравнения равенств (4.96) и (4.98) получаем

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{N} dV. \quad (4.99)$$

При перемещении заряда e_2 по указанному ранее закону поле вектора \mathbf{N} не обладает центральной симметрией, так что интеграл в уравнении (4.99) отличен от нуля и меняется со временем. Таким образом,

$$\mathbf{F}_{12} \neq -\mathbf{F}_{21},$$

т. е. *третий закон Ньютона не выполняется*¹.

Как видно из соотношения (4.99), для справедливости третьего закона Ньютона достаточно, чтобы вектор Пойнтинга \mathbf{N} в любой точке не менялся со временем; это условие выполняется в случае неподвижных зарядов.

В макроскопической электродинамике Максвелл и Герц признавали общую справедливость III закона Ньютона и толковали соотношения типа (4.99) следующим образом. В достаточно малом объеме V_1 существует только заряженное тело e_1 , а в объеме V , кроме тела e_2 , находится подобный диэлектрику мировой эфир, на который действует механическая сила, равная

$$\mathbf{F}_3 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{N} dV.$$

При этом силы взаимодействия физических объектов, заключенных в объемах V_1 и V , в соответствии с формулой (4.99) равны по величине и противоположны по направлению, т. е.

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_{21}.$$

Электронная теория Лоренца отвергла предшествовавшие ей представления о механических свойствах эфира. Отрицая существование сил, действующих на эфир, она считала его абсолютно неподвижным².

¹ Как электромагнитное поле, так и поле вектора \mathbf{N} симметричны в данном примере относительно линии, соединяющей заряды, так что обе силы \mathbf{F}_{12} и \mathbf{F}_{21} лежат на этой линии, что, конечно, может не иметь места в других случаях.

² Как было отмечено в § 1-4, эксперименты показывают, что мирового эфира, как носителя электромагнитного поля, не существует.

Эта теория принимает во внимание только лоренцову силу, действующую на заряды, и отрицает в общем случае справедливость III закона Ньютона.

При этом электронная теория приводит к своеобразным следствиям. В классической механике вследствие III закона Ньютона внутренние силы не влияют на движение центра масс. В электронной теории сумма внутренних сил (и моментов сил) в замкнутой системе в общем случае отлична от нуля, так что обнаруживаются явления, чуждые механике: например, электрон при ускоренном движении, излучая электромагнитные волны, действует с некоторой силой на самого себя. Такая сила, называемая реакцией излучения, или силой лучистого трения, рассматривается в следующей главе (§ 5-4).

Задачи

20. Вычислить радиус покоящегося электрона, пользуясь соотношением между массой электрона и энергией его электростатического поля, если заряд электрона равномерно распределен по объему.

21. Вычислить радиус покоящегося электрона, пользуясь соотношением между массой электрона и энергией его электростатического поля, если объемная плотность заряда

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

где r — расстояние от центра электрона, R — его радиус.

22. Найти среднюю объемную плотность силы, действующей на электрон в верхних слоях земной атмосферы благодаря солнечной радиации, если вследствие этой радиации через 1 м^2 поверхности, перпендикулярной направлению излучения, проходит за 1 сек энергия, равная $1,4 \text{ кдж}$, а электрон имеет классический радиус и движется в направлении солнечного луча, обладая энергией 1 эв .

23. Найти среднюю силу светового давления на зачерненное крылышко в опыте П. Н. Лебедева при нормальном падении света, если напряженность электрического поля в падающей волне меняется по синусоиде с амплитудой $E_m = 2 \text{ кв/м}$, а диаметр крылышка равен 5 мм .

24. Определить среднюю силу давления плоской электромагнитной волны на плоскую поверхность, равную S , если известны средняя плотность энергии в падающей волне ω , угол падения α и коэффициент отражения поверхности R .

§ 5-1. ПОТЕНЦИАЛЫ ЛИЕНАРА — ВИХЕРТА

Рассмотрим потенциалы микрополя, созданного движением в вакууме частицы с зарядом q . Не будем налагать ограничений на скорость частицы \mathbf{u} и ее ускорение $\dot{\mathbf{u}}$. Как из уравнений Максвелла (2.21) ÷ (2.24) получаются уравнения Даламбера (2.35), (2.36), так из уравнений Лоренца (4.32), (4.33), (4.28) и (4.29) получаются совершенно аналогичные по отношению (2.35) и (2.36) уравнения с заменой ϵ_a , μ_a и \mathbf{j} соответственно на ϵ_0 , μ_0 и $\rho\mathbf{u}$.

Скалярный потенциал φ и векторный потенциал \mathbf{A} выражаются из таких уравнений подобно известным из макроскопической электродинамики решениям уравнений (2.35), (2.36), а именно

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\rho \mathbf{u} dV}{r}, \quad (5.2)$$

где ρ и \mathbf{u} — плотность заряда и его скорость в момент времени $t_1 = t - \frac{r}{c}$, если φ и \mathbf{A} определяются в момент t ; r — расстояние от точки, где существуют ρ и \mathbf{u} в момент t_1 , до точки, для которой вычисляются φ и \mathbf{A} ; V — объем, занятый зарядом.

В формулах (5.1) и (5.2) отсутствует ускорение заряда $\dot{\mathbf{u}}$; следовательно, выражения потенциалов будут справедливы при любом ускорении $\dot{\mathbf{u}}$, если в наших вычислениях не принимать во внимание существования ускорения.

Потенциалы φ и \mathbf{A} при движении заряда с любой скоростью \mathbf{u} легко найти, считая, для простоты, заряд точечным, если выразить в релятивистски ковариантном виде потенциалы в системе координат, начало которой совпадает с зарядом q , и затем перейти к системе, относительно которой заряд движется со скоростью \mathbf{u} . Поскольку заряд точечный, можно вынести r в уравнении (5.1) из-под знака интеграла и заменить $\int_V \rho dV$ на q . Если употреблять штрихи как указание на систему, в которой заряд неподвижен, то, следовательно, справедлива формула, соответствующая закону

Кулона,

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'},$$

где r' — расстояние от заряда до точки, где определяется потенциал, а q и ϵ_0 не снабжены штрихами как величины, одинаковые во всех системах отсчета, т. е. релятивистски инвариантные (см. § 2-3; 1-5). В штрихованной системе, где скорость заряда равна нулю, из уравнения (5.2) получается $A' = 0$, т. е. $A'_x = A'_y = A'_z = 0$.

В таком случае, как видно из равенств (2.41), *компоненты четырехмерного потенциала* в штрихованной системе выражаются в виде

$$A'_1 = A'_2 = A'_3 = 0, \quad A'_4 = \frac{i\varphi'}{c} = \frac{iq}{4\pi\epsilon_0 cr'}.$$

На основании формул (1.59) компоненты четырехмерной скорости в той же системе равны

$$u'_1 = u'_2 = u'_3 = 0, \quad u'_4 = ic. \quad (5.3)$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$A'_\nu = \frac{qu'_\nu}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} \quad (\nu = 1, 2, 3, 4). \quad (5.4)$$

Как видно из общих уравнений (5.1) и (5.2), в любой системе, где заряд движется, потенциалы в момент времени t зависят от положения заряда в предшествующий момент времени $t - \frac{r}{c}$. Конечно, и в штрихованной системе, где заряд покоится, причиной существования потенциалов в момент времени t следует считать существование заряда в предшествующий момент времени $t - \frac{r'}{c}$ с учетом того, что электромагнитное воздействие, перемещаясь в вакууме со скоростью c , распространяется на расстояние r' за время, равное r'/c ¹.

Рассмотрим две мировые точки в четырехмерном пространстве, одна из которых изображает сочетание трехмерных координат и времени, соответствующее причине — состоянию заряда, создающего электромагнитное воздействие, а другая мировая точка соответствует следствию — появлению потенциалов электромагнитного поля. В штрихованной системе координат вторая мировая

¹ Теория относительности отрицает возможность распространения взаимодействий со скоростью, превышающей c (см. § 1-7), а потому не может согласиться с тем, что закон Кулона (или какой-либо другой закон природы) соответствует мгновенному действию на расстоянии, хотя математическая формулировка закона и могла бы привести к такому представлению о мгновенном дальнем действии.

точка характеризуется координатами x', y', z' при расстоянии r' от начала координат и моментом времени t' , а первой мировой точке соответствуют координаты, равные нулю, и момент времени $t'_1 = t' - \frac{r'}{c}$. Четырехмерный вектор, соединяющий первую мировую точку со второй, имеет в штрихованной системе отсчета компоненты R'_i , равные

$$R'_1 = x', R'_2 = y', R'_3 = z', R'_4 = ic(t' - t'_1) = ir'.$$

Таким образом, в силу равенств (5.3),

$$\sum_{\alpha=1}^4 R'_\alpha u'_\alpha = -cr'. \quad (5.5)$$

Но скалярное произведение двух четырехмерных векторов инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца, о чем свидетельствует равенство (1.37). Заменяя r' на основании соотношения (5.5), придадим выражениям (5.4) *релятивистски ковариантный вид*, а именно в любой системе координат (опуская штрихи) будем иметь

$$A_\nu = - \frac{qu_\nu}{4\pi\epsilon_0 c \sum_{\alpha=1}^4 R_\alpha u_\alpha}, \quad (5.6)$$

где u_ν — компонента четырехмерной скорости в момент времени $t_1 = t - \frac{r}{c}$, если компонента потенциала A_ν вычисляется в момент t .

В той системе координат, где заряд движется со скоростью u , четырехмерный вектор R_α , в силу трех своих компонент R_1, R_2, R_3 , отображается как вектор \mathbf{r} , соединяющий положение заряда в момент времени t_1 с положением точки, в которой определяются потенциалы в момент t . Четвертая компонента того же четырехмерного вектора $R_4 = ic(t - t_1) = ir$. Для четырехмерной скорости u_ν справедливы выражения (1.59), а потому

$$\sum_{\alpha=1}^4 R_\alpha u_\alpha = \frac{(\mathbf{r}\mathbf{u}) - rc}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где $\beta = v/c$.

Итак, формула (5.6), с учетом равенств (2.41) и (1.59), позволяет выразить *компоненты векторного потенциала* A_x, A_y, A_z и *скалярный потенциал* φ :

$$\frac{A_x}{u_x} = \frac{A_y}{u_y} = \frac{A_z}{u_z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{u})}{c}};$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{u})}{c}}. \quad (5.7)$$

Пользуясь обозначениями \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} для единичных векторов по осям x , y , z , найдем векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{\mathbf{u}}{r - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{u})}{c}},$$

или благодаря равенству (2.37)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{u}}{r - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{u})}{c}}. \quad (5.8)$$

Выражения потенциалов электромагнитного поля точечного заряда q в форме (5.7) и (5.8) были найдены путем громоздких вычислений в дорелятивистской физике и известны как потенциалы Лиенара — Вихерта.

§ 5-2. НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА В ВАКУУМЕ

Так же как уравнениям Максвелла (2.23) и (2.24) соответствуют выражения напряженности электрического поля и магнитной индукции (2.25) и (2.26), уравнениям Лоренца (4.28) и (4.29) соответствуют такие же выражения (индекс «м» для простоты опускаем):

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t};$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

откуда на основании формул (5.7) и (5.8), заменяя \mathbf{B}/μ_0 на \mathbf{H} и вводя обозначение

$$s = r - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{u})}{c}, \quad (5.9)$$

находим в связи с равенством (2.37)

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\nabla s}{s^2} - \frac{1}{c^2 s} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}}{c^2 s^2} \frac{\partial s}{\partial t} \right); \quad (5.10)$$

$$\mathbf{H} = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{[\nabla \mathbf{u}]}{s} - \frac{[\nabla s, \mathbf{u}]}{s^2} \right). \quad (5.11)$$

Для определения напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} вычислим четыре величины

$$\nabla s, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \frac{\partial s}{\partial t}, \quad [\nabla \mathbf{u}],$$

где \mathbf{u} означает, как и в § 5-1, скорость точечного заряда в момент времени

$$t_1 = t - \frac{r}{c}, \quad (5.12)$$

если напряженности поля вычисляются в момент t , а r — расстояние от точки, где находится заряд в момент t_1 , до точки наблюдения, в которой определяются \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Для вычисления ∇s применим оператор

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

где x, y, z — координаты точки наблюдения. При этом следует считать, что $t = \text{const}$, но $r \neq \text{const}$ и потому $t_1 \neq \text{const}$, т. е. в трехмерном пространстве существует поле скаляра t_1 . При $t = \text{const}$ величина s зависит от x, y, z и t_1 , так как каждому t_1 соответствует определенная скорость \mathbf{u} . Поэтому

$$\nabla s = \nabla_1 s + \frac{\partial s}{\partial t_1} \cdot \nabla t_1, \quad (5.13)$$

где ∇_1 — оператор ∇ при постоянном t_1 , следовательно, при постоянном значении \mathbf{u} .

Обозначая координаты точки, в которой находится заряд в момент t_1 , через x_1, y_1, z_1 , имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i}(x - x_1) + \mathbf{j}(y - y_1) + \mathbf{k}(z - z_1); \\ r &= \{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь выражением (5.9), находим

$$\nabla_1 s = \nabla_1 r - \frac{1}{c} \nabla_1 \{(x - x_1) u_x + (y - y_1) u_y + (z - z_1) u_z\} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{u}}{c}.$$

Далее воспользуемся равенством

$$\frac{\partial s}{\partial t_1} = \frac{\partial r}{\partial t_1} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_1} (\mathbf{r}\mathbf{u}).$$

Но

$$\frac{\partial r}{\partial t_1} = -\frac{x - x_1}{r} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} - \frac{y - y_1}{r} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} - \frac{z - z_1}{r} \frac{\partial z_1}{\partial t_1},$$

или

$$\frac{\partial r}{\partial t_1} = -\frac{(\mathbf{r}\mathbf{u})}{r}, \quad (5.14)$$

а потому

$$\frac{\partial s}{\partial t_1} = -\frac{(\mathbf{r}\mathbf{u})}{r} - \frac{(\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}}) - u^2}{c}. \quad (5.15)$$

Далее, в силу равенства (5.12), пользуясь соотношением (5.13) с заменой s на r и принимая во внимание формулу (5.14), находим

$$\nabla t_1 = -\frac{1}{c} \nabla r = -\frac{1}{c} \left(\nabla_1 r + \frac{\partial r}{\partial t_1} \cdot \nabla t_1 \right) = \frac{(\mathbf{r}\mathbf{u}) \nabla t_1 - \mathbf{r}}{cr},$$

откуда

$$\nabla t_1 = -\frac{\mathbf{r}}{cs}. \quad (5.16)$$

Подставим в формулу (5.13) вычисленное значение $\nabla_1 s$, а также результаты (5.15) и (5.16). Тогда, в силу равенства (5.9),

$$\nabla s = \frac{\mathbf{r}}{s} - \frac{\mathbf{u}}{c} + \frac{\mathbf{r}}{c^2 s} \{(\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}}) - u^2\}.$$

Перейдем к вычислению $\partial \mathbf{u} / \partial t$, где символ частного дифференцирования указывает на постоянство координат точки наблюдения. Так как символ $\partial / \partial t_1$ имеет тот же смысл, то

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u} / \partial t_1}{\partial t / \partial t_1}.$$

Выражая t из равенства (5.12) и пользуясь результатом (5.14), находим, что $\partial t / \partial t_1 = s/r$. Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{r \dot{\mathbf{u}}}{s},$$

Далее запишем

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s / \partial t_1}{\partial t / \partial t_1}.$$

Подставляя в числитель этого выражения результат (5.15) и в знаменатель s/r , находим

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{(\mathbf{r}\mathbf{u})}{s} - \frac{r}{cs} \{(\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}}) - u^2\}.$$

Наконец, аналогично соотношению (5.13), справедливо векторное равенство

$$[\nabla \mathbf{u}] = [\nabla_1 \mathbf{u}] + \left[\nabla t_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_1} \right],$$

но по смыслу символа ∇_1 имеем $[\nabla_1 \mathbf{u}] = 0$ и вследствие результата (5.16)

$$[\nabla \mathbf{u}] = -\frac{[\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}}]}{cs}.$$

Формулы для напряженностей поля (5.10) и (5.11) после подстановки найденных выражений ∇s , $\partial \mathbf{u} / \partial t$, $\partial s / \partial t$ и $[\nabla \mathbf{u}]$ принимают вид

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{r}{c^2 s^3} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{u}}{c} \right) (\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}} + c^2 - u^2) - \frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}}}{c^2 s^2} \right\}; \quad (5.17)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{[\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}}]}{c^2 s^3} (\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}} + c^2 - u^2) + \frac{[\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}}]}{cs^2} \right\}.$$

Как видно из сравнения этих формул,

$$\mathbf{H} = c\epsilon_0 \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \mathbf{E} \right], \quad (5.18)$$

т. е. магнитное поле всегда перпендикулярно электрическому полю и радиусу-вектору \mathbf{r} , проведенному из точки, где находился заряд в момент времени $t_1 = t - r/c$, в точку, где опре-

деляются напряженности поля в момент t . Формула (5.18) позволяет считать \mathbf{H} известным, если известно \mathbf{E} .

При движении заряда с той же скоростью \mathbf{u} , но без ускорения ($\dot{\mathbf{u}}=0$) из формулы (5.17) получается напряженность поля $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0$, причем

$$\mathbf{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{s^3} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{u}}{c} \right) (1 - \beta^2), \quad (5.19)$$

где $\beta = u/c$.

Формула (5.17), в силу равенств (5.19) и (5.9), приводится к виду

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \left\{ \left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c} \right) \mathbf{r}\dot{\mathbf{u}} - r\dot{\mathbf{u}} \left(r - \frac{r\mathbf{u}}{c} \right) \right\},$$

или

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \left[\mathbf{r} \left[\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c}, \dot{\mathbf{u}} \right] \right]. \quad (5.20)$$

Таким образом, поле, обусловленное ускорением заряда, с напряженностью $\mathbf{E} - \mathbf{E}_0$ перпендикулярно радиусу-вектору \mathbf{r} , тогда как векторы \mathbf{E}_0 и \mathbf{E} вследствие равенств (5.19) и (5.9) имеют радиальную составляющую

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^2} (1 - \beta^2).$$

Как видно из выражения (5.9), величина s пропорциональна r , а потому напряженности \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 поля, существующего в отсутствие ускорения заряда, по формулам (5.19) и (5.18) обратно пропорциональны квадрату расстояния от заряда. Напряженность электрического поля $\mathbf{E} - \mathbf{E}_0$, обусловленная ускорением заряда, как видно из формулы (5.20), обратно пропорциональна расстоянию от заряда; то же справедливо, в силу соотношения (5.18), для напряженности соответствующего магнитного поля. Поэтому, если заряд движется с ускорением, то на достаточно большом расстоянии от него можно пренебречь полем с напряженностями \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 по сравнению с полем, обусловленным ускорением заряда. В таком случае формула (5.20) принимает вид

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \left[\mathbf{r} \left[\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c}, \dot{\mathbf{u}} \right] \right], \quad (5.21)$$

и ввиду соотношения (5.18) взаимно перпендикулярные векторы \mathbf{r} , \mathbf{E} , \mathbf{H} образуют (в этой последовательности) правовинтовую систему. При этом вектор Пойнтинга \mathbf{N} , определяемый формулой (4.64), параллелен \mathbf{r} , т. е. электромагнитная волна распространяется вдоль \mathbf{r} , а векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} лежат в плоскости, перпендикулярной \mathbf{r} .

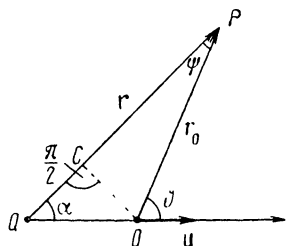
Итак, ускоренно движущийся заряд создает на достаточно большом расстоянии сферическую электромагнитную волну, в кото-

рой колебания напряженностей электрического и магнитного полей являются поперечными по отношению к направлению распространения волны. Область, в которой существует такая волна, называется волновой зоной (см. задачу 25). Если движение заряда характеризуется периодом колебаний, то по формулам (5.21) и (5.18) величины \mathbf{E} и \mathbf{H} в фиксированной точке пространства меняются с тем же периодом. Поле колеблющегося точечного заряда в волновой зоне подобно полю макроскопического осциллятора в соответствующей зоне.

При движении заряда с постоянной скоростью напряженности поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ определяются формулой (5.19) и соотношением (5.18).

В неподвижной системе отсчета, относительно которой заряд движется со скоростью \mathbf{u} , его положение в момент времени t изображается точкой O (рис. 24).

Рис. 24. К расчету поля точечного заряда



Поле в точке P в момент t обусловлено этим зарядом, находящимся в положении Q в момент $t_1 = t - r/c$, причем радиус-вектор \mathbf{r} соединяет точки Q и P , и справедливо равенство

$$\overline{QO} = \mathbf{u} (t - t_1) = \frac{u\mathbf{r}}{c}.$$

Пусть начало O неподвижной системы координат совпадает с положением заряда в момент t , а положение точки P определяется радиусом-вектором \mathbf{r}_0 . Как видно из рис. 24,

$$\mathbf{r}_0 = \overline{QP} - \overline{QO},$$

или

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{u} \frac{r}{c}, \quad (5.22)$$

а величины отрезков QC и CP (см. рис. 24) выражаются в виде

$$QC = QO \cdot \cos \alpha = \frac{ur \cos \alpha}{c} = \frac{(\mathbf{ru})}{c};$$

$$CP = r - \frac{(\mathbf{ru})}{c} = s.$$

Из рис. 24 находим

$$s = r_0 \sqrt{1 - \sin^2 \psi};$$

$$\frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} = \frac{QO}{QP} = \frac{u}{c} = \beta; \quad \sin \psi = \beta \sin \vartheta.$$

Следовательно,

$$s = r_0 \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Подставляя это выражение в формулу (5.19) и пользуясь соотношением (5.22), получаем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \frac{q\mathbf{r}_0(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0 r_0^3(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}. \quad (5.23)$$

Из формулы (5.18), выражая \mathbf{r} на основании равенства (5.22) и замечая, что, в силу равенства (5.23), вектор \mathbf{E} коллинеарен \mathbf{r}_0 , находим

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = \epsilon_0[\mathbf{u}\mathbf{E}]. \quad (5.24)$$

Те же результаты (5.23) и (5.24) нетрудно получить, зная поле заряда в системе отсчета, относительно которой заряд неподвижен, и пользуясь релятивистскими преобразованиями поля (см. задачу 26). Эти результаты означают, что при движении заряда с постоянной скоростью \mathbf{u} его поле всегда выражается одинаково по отношению к заряду, т. е. поле движется вместе с зарядом.

В системе отсчета, относительно которой заряд движется со скоростью \mathbf{u} , как видно из формулы (5.23), линии электрического поля направлены радиально, но сферическая симметрия поля не имеет места. Абсолютная величина напряженности поля E при β^2 , близком к единице, существенно зависит от угла ϑ между направлениями скорости \mathbf{u} и радиуса-вектора \mathbf{r}_0 . Наименьшая напряженность получается при $\vartheta=0$, т. е. в направлении движения, и равна

$$E_{\parallel} = \frac{|q| \cdot (1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}.$$

Наибольшая напряженность получается при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, т. е. в направлении, перпендикулярном движению, и равна

$$E_{\perp} = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r_0^2 \sqrt{1-\beta^2}}.$$

При $u \rightarrow c$, т. е. при $\beta \rightarrow 1$, $E_{\parallel} \rightarrow 0$ и $E_{\perp} \rightarrow \infty$, следовательно, с приближением скорости движения заряда к скорости света в вакууме электрическое поле в направлении движения ослабевает, стремясь к нулю, а в поперечном направлении растет до бесконечности, с монотонным изменением напряженности поля от E_{\parallel} до E_{\perp} при изменении угла ϑ от 0 до $\pi/2$.

Линии напряженности магнитного поля \mathbf{H} , как видно из формулы (5.24), лежат в плоскости, перпендикулярной скорости \mathbf{u} , и располагаются на сферической поверхности, перпендикулярной вектору \mathbf{r}_0 , т. е. изображаются окружностями с центрами, лежащими на линии движения заряда. Направление этих кольцевых линий, как видно из формул (5.24) и (5.23), образует с вектором скорости \mathbf{u} правый винт, если заряд положителен ($q > 0$), или левый винт, если $q < 0$.

Абсолютная величина напряженности магнитного поля вследствие соотношения (5.24) выражается в виде

$$H_0 = \epsilon_0 u E_0 \sin \vartheta.$$

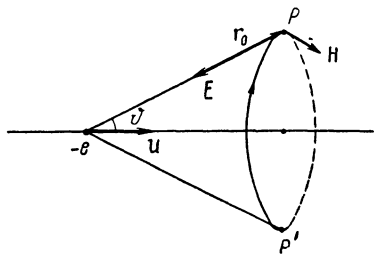
При фиксированной величине r_0 напряженность магнитного поля монотонно меняется от $H_{\parallel} = 0$ при $\vartheta = 0$ до наибольшего значения H_{\perp} при $\vartheta = \pi/2$, причем

$$H_{\perp} = \frac{|q| \cdot u}{4\pi r_0^2 \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Линии напряженностей электрического и магнитного полей изображены на рис. 25 для случая движения электрона с постоянной скоростью u .

Формулы (5.23) и (5.24) связывают напряженности поля в момент t с положением и скоростью заряда в тот же момент времени. Это может создать неправильное представление о мгновенном действии на расстоянии. Однако формулы (5.23) и (5.24) получаются путем математического преобразования из выражений (5.19) и (5.18), правильно отражающих распространение электромагнитного воздействия от заряда до точки наблюдения со скоростью c . Таким образом, имеет место не мгновенное дальное действие, а распространение воздействия через промежуточные точки пространства по принципу близкодействия.

Рис. 25. Поле электрона при его движении с постоянной скоростью



В заключение рассмотрим простейший частный случай нерелятивистского движения заряда с постоянной скоростью u . При этом $\beta^2 = u^2/c^2 \ll 1$, и формулы (5.23), (5.24) в пределе принимают вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \frac{q\mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = \frac{q[\mathbf{u}\mathbf{r}_0]}{4\pi r_0^3}.$$

В этом случае электрическое поле, совпадающее с кулоновским полем, сферически симметрично, а для модуля H напряженности магнитного поля электрона (при $|q| = e$) получаем

$$H = \frac{eu \sin \vartheta}{4\pi r_0^2},$$

где ϑ — угол между направлениями скорости электрона и радиуса-вектора. Изображение поля электрона на рис. 25 справедливо и для нерелятивистского случая.

§ 5-3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ МАССА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ

В тех случаях, когда нельзя упрощенно рассматривать частицу как точечный заряд, можно считать ее сочетанием точечных зарядов. Каждый из них создает электромагнитное поле, напряженности которого связаны соотношением (5.18). При движении частицы с постоянной скоростью связь между напряженностями поля выражается формулой (5.24). Благодаря принципу суперпозиции (наложения) электромагнитных полей между напряженностями результирующего электромагнитного поля частицы будут выполняться такие же соотношения. При этом плотность импульса микроскопического электромагнитного поля частицы с помощью формул (4.83) и (5.24) можно представить в виде

$$\mathbf{g} = \frac{\varepsilon_0}{c^2} [\mathbf{E} [\mathbf{u}\mathbf{E}]] = \frac{\varepsilon_0}{c^2} \{uE^2 - \mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{u})\}.$$

Импульс электромагнитного поля заряженной частицы равен

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} dV,$$

следовательно,

$$\mathbf{G} = \frac{\varepsilon_0}{c^2} \left\{ \mathbf{u} \int_V E^2 dV - \int_V \mathbf{E} \cdot E\mathbf{u} \cos \vartheta dV \right\}, \quad (5.25)$$

где интегралы берутся по всему пространству, занятому полем частицы, а ϑ — угол между направлениями скорости частицы и радиуса-вектора. При вычислении последнего интеграла в условиях осевой симметрии поля частицы¹ относительно вектора \mathbf{u} вклады составляющих вектора \mathbf{E} , перпендикулярных \mathbf{u} , взаимно компенсируются для любой пары элементов dV , расположенных диаметрально противоположно на магнитной силовой линии (например, P и P' на рис. 25). Поэтому в уравнении (5.25) вместо вектора \mathbf{E} можно взять его составляющую, коллинеарную \mathbf{u} и равную

$$\frac{E \cos \vartheta \cdot \mathbf{u}}{u}.$$

Следовательно, выражение (5.25) для \mathbf{G} приводится к виду

$$\mathbf{G} = \frac{\varepsilon_0 \mathbf{u}}{c^2} \int_V E^2 \sin^2 \vartheta dV.$$

Электромагнитная масса частицы, как отношение электромагнитного импульса к скорости, оказывается равной

$$m = \frac{\varepsilon_0}{c^2} \int_V E^2 \sin^2 \vartheta dV, \quad (5.26)$$

¹ В данном случае отсутствуют физические причины для нарушения осевой симметрии в изотропном пространстве.

откуда, с учетом формул (5.24) и (2.37), находим

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{\mu_0}{2} \int_V H^2 dV. \quad (5.27)$$

Таким образом, кинетическая энергия электромагнитной массы нерелятивистской частицы совпадает с энергией ее магнитного поля.

Преобразуем формулу (5.26), выразив элемент объема dV в сферических координатах r , ϑ , ψ :

$$m = \frac{\epsilon_0}{c^2} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} E^2 r^2 \sin^3 \vartheta dr d\vartheta d\psi.$$

Выполняя интегрирование по ϑ и ψ , находим

$$m = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_0}{c^2} \int_{r=0}^{\infty} E^2 \cdot 4\pi r^2 dr, \quad (5.28)$$

где $4\pi r^2 dr$ представляет собой элемент объема в виде шарового слоя.

При $u \ll c$ вследствие соотношений (5.24) и (2.37) имеем $\mu_0 H^2 \ll \epsilon_0 E^2$, и энергия W электромагнитного поля частицы, определяемая формулой (4.62), с пренебрежимо малой погрешностью сводится к энергии электростатического поля, т. е.

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV.$$

Отсюда, сравнивая с формулой (5.28), получаем соотношение

$$m = \frac{4}{3} \frac{W}{c^2}, \quad (5.29)$$

что отличается коэффициентом $\frac{4}{3}$ от общего релятивистского соотношения между энергией и массой (1.80), справедливого в электронной теории в форме равенства (4.94) для «чистого» электромагнитного поля, т. е. в отсутствие частиц. Происхождение коэффициента $\frac{4}{3}$ связано с тем, что в классической электронной теории учитывается только электромагнитное поле частицы (например, электрона), которого недостаточно для обеспечения устойчивости частицы. Здесь проявляется ограниченность излагаемой теории, о чем уже говорилось в § 4-3.

Соотношение (5.29) получается также путем вычисления силы, с которой заряженная частица, движущаяся с постоянным ускорением, действует на себя. Эта сила «самодействия» представляет собой суммарный результат действия поля каждого элемента частицы на каждый другой элемент. Для упрощения вычислений

целесообразно ограничиться случаем, когда при рассмотрении взаимодействия двух элементов частицы можно пренебречь запаздыванием, т. е. за время, в течение которого электромагнитное взаимодействие распространяется внутри частицы, скорость ее не испытывает заметных изменений. В таком случае при $u \ll c$ сила самодействия (см. задачу 28) оказывается равной

$$F = -tu,$$

где t выражается в виде (5.29).

Здесь сила инерции F имеет смысл результирующей силы, которая действует на заряд частицы со стороны электрического поля, возникающего по закону электромагнитной индукции при изменении магнитного поля, созданного частицей.

До сих пор рассматривалась электромагнитная масса одной частицы. Возникает вопрос, будет ли *электромагнитная масса системы частиц* равна сумме их электромагнитных масс. Согласно формуле (5.27) кинетическая энергия одной нерелятивистской частицы, обусловленная ее электромагнитной массой, равна энергии ее магнитного поля. Эта формула имеет простой физический смысл и распространяется на систему заряженных частиц.

Допустим, что частицы сначала покоятся и затем начинают медленно двигаться под действием внешних сил. Электрическое поле частиц при их медленном движении остается практически неизменным, но появляется магнитное поле. Таким образом, кинетическая энергия электромагнитной массы частиц, обусловленная работой внешних сил, проявляется в виде энергии магнитного поля. Но напряженность магнитного поля связана с напряженностью электрического поля простым соотношением (5.18). Поэтому, когда расстояния между частицами настолько велики, что их электрические поля сводятся практически к нулю в некоторых зонах между частицами, их магнитные поля также с достаточной точностью не будут накладываться друг на друга, причем общая электромагнитная масса, вычисленная согласно формуле (5.27), окажется равной сумме электромагнитных масс всех частиц.

Иначе обстоит дело при сближении частиц. Ведь если бы центры двух одинаковых частиц слились, то благодаря удвоению заряда напряженность поля увеличилась бы в два раза, а электромагнитная масса, в соответствии с формулой (5.27), — в четыре раза. Отсюда видно, что общая электромагнитная масса у двух одинаковых частиц не превышает $4m$, а у N частиц — не более N^2m , где m — электромагнитная масса одной частицы.

Обычно расстояния между заряженными частицами настолько велики по сравнению с их размерами, что преобладающая часть электромагнитной массы частицы обусловлена полем в области, где поля других частиц не играют заметной роли. В этих условиях можно считать, что электромагнитная масса частиц равна

сумме их электромагнитных масс, т. е. выражается как Nm , если N — число частиц в системе, m — масса каждой из них.

Слабые поля отдельных электронов на большом расстоянии от них способны взаимно усиливать друг друга, и если число электронов велико, то таким путем возникает сильное суммарное поле, пропорциональное примерно числу электронов N .

Макроскопическая энергия этого поля, приблизительно пропорциональная N^2 , может оказаться очень существенной. Подобной энергией магнитного поля объясняются явления самоиндукции и взаимной индукции. Эти явления макроскопического характера связаны с кинетической энергией движения электронов. Однако макроскопическая энергия магнитного поля оказывается меньше, чем магнитная энергия микрополя, которая включает и энергию магнитного поля поблизости от электронов и внутри них.

§ 5-4. ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯДА В ВАКУУМЕ

Заряд, движущийся в вакууме с ускорением, создает в волновой зоне (см. § 5-2) поле, при рассмотрении которого можно считать заряд точечным, поскольку размеры области, занятой зарядом, малы по сравнению со значительным расстоянием до волновой зоны и скорость заряда не испытывает заметных изменений за время распространения электромагнитных взаимодействий (со скоростью c) внутри заряда.

Электромагнитное поле точечного заряда в волновой зоне определяется формулами (5.21) и (5.18), откуда

$$H = c\epsilon_0 E,$$

так что плотность энергии поля w на основании равенств (4.63) и (2.37) выражается в виде

$$w = \epsilon_0 E^2. \quad (5.30)$$

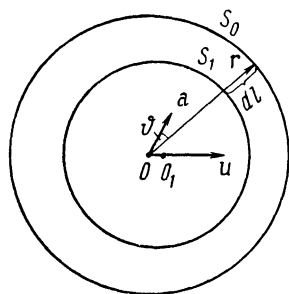


Рис. 26. Распространение волнового поля, создаваемого точечным зарядом

Найдем, какова энергия, излучаемая точечным зарядом при ускоренном движении за промежуток времени от момента t_0 , когда скорость заряда равна u , до бесконечно близкого момента $t_1 = t_0 + dt$.

В момент t поле, созданное зарядом за время от t_0 до t_1 , будет находиться между сферой S_0 радиуса $c(t - t_0)$ и сферой S_1 радиуса $c(t - t_1)$, причем центры этих сфер O и O_1 совпадают с положениями заряда в моменты времени t_0 и t_1 , а $OO_1 = u dt$ (рис. 26). Если $t - t_0$ достаточно велико, то это поле окажется в волновой зоне и для вычисления его энергии можно воспользоваться выражениями (5.30) и (5.21).

Ограничимся сначала случаем, когда $u \ll c$. Ввиду равенства (5.9) из формулы (5.21), обозначая ускорение $\dot{\mathbf{u}}$ через \mathbf{a} , с достаточной точностью находим

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} [\mathbf{r} [\mathbf{ra}]],$$

поэтому с помощью соотношений (5.30) и (2.37) получаем плотность излучаемой энергии

$$\omega = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c^2 r^6} \{\mathbf{r} (\mathbf{ra}) - \mathbf{ar}^2\}^2 = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \sin^2 \vartheta}{16\pi^2 c^2 r^2},$$

где ϑ — угол между \mathbf{r} и \mathbf{a} .

Строго говоря, при вычислении ω для каждой точки слоя между поверхностями S_1 и S_0 нужно принять во внимание положение и ускорение заряда в тот момент времени, когда он создает волну, доходящую в момент t до данной точки. Поскольку толщина слоя бесконечно мала, положение и ускорение заряда можно взять в момент времени t_0 .

Излучаемая энергия $dW_{\text{и}}$ в объеме δV , заключенном между поверхностями S_1 и S_0 , равна

$$dW_{\text{и}} = \int_{\delta V} \omega dV = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c^2} \int_{\delta V} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} dV.$$

При $u \ll c$ пренебрегаем длиной отрезка $OO_1 = u dt$ по сравнению с dl (см. рис. 26), т. е. рассматриваем поверхности S_0 и S_1 как концентрические и считаем, что всюду расстояние между ними

$$dl = c dt.$$

Элемент объема dV представим как $dl \cdot dS$, где $dS = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\psi$ — элемент сферической поверхности. Таким образом, *мощность излучения* выразится в виде

$$\frac{dW_{\text{и}}}{dt} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta d\psi, \quad (5.31)$$

т. е.

$$\frac{dW_{\text{и}}}{dt} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}. \quad (5.32)$$

Эта формула, полученная в предположении, что скорость заряда u пренебрежимо мала по сравнению с c , строго справедлива для мощности излучения точечного заряда, если $u = 0$. Воспользуемся инерциальной системой отсчета, в которой в данный момент скорость заряда равна нулю. Обозначим энергию заряда в этой системе через W . Ввиду равенства (5.32) на основании закона сохранения и превращения энергии запишем

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{dW_{\text{и}}}{dt} = - \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}.$$

В той системе отсчета, относительно которой скорость заряда равна нулю, как видно из соотношения (1.58), $dt = d\tau$. Итак, имеем

$$\frac{dW}{d\tau} = -\frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}. \quad (5.33)$$

Чтобы придать этому равенству *релятивистски ковариантный вид*, заметим, что четвертая компонента 4-вектора энергии-импульса связана с энергией соотношением (1.84), а компоненты 4-ускорения в системе, где $u = 0$, как видно из равенств (1.62), таковы

$$a_1 = a_x, \quad a_2 = a_y, \quad a_3 = a_z, \quad a_4 = 0.$$

Отсюда находим квадрат трехмерного ускорения a^2 в данной системе отсчета

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \sum_{\nu=1}^4 a_\nu^2.$$

Подставляя в формулу (5.33) это значение a^2 и выражение W из равенства (1.84), получаем

$$\frac{dp_A}{d\tau} = -\frac{i\mu_0 q^2 \sum_{\nu=1}^4 a_\nu^2}{6\pi c^2}.$$

Из выражения (1.59) при $u = 0$ имеем $u_4 = ic$, следовательно,

$$\frac{dp_A}{d\tau} = -\frac{\mu_0 q^2 \sum_{\nu=1}^4 a_\nu^2}{6\pi c^2} \cdot u_4. \quad (5.34)$$

На основании равенства (1.36) напомним

$$\sum_{\nu=1}^4 a_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^4 a_\nu'^2,$$

а величины $d\tau$, μ_0 , q и c инвариантны. Из релятивистски ковариантного уравнения (5.34), обращаясь к системе, относительно которой заряд движется со скоростью \mathbf{u} , и пользуясь равенствами (1.84), (1.59), (1.63) и (1.58), находим

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \cdot \frac{a^2 - \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{a}\right]^2}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^3}.$$

По закону сохранения и превращения энергии в такой системе мощность излучения dW_u/dt равна $-dW/dt$, т. е.

$$\frac{dW_u}{dt} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \cdot \frac{a^2 - \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{a}\right]^2}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^3}. \quad (5.35)$$

Формула (5.32) является частным случаем этого выражения при $u = 0$.

Рассмотрим *излучение при движении заряда в однородном магнитном поле*. Примем во внимание, что заряд одновременно участвует в двух движениях — вдоль магнитного поля и в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Первое движение происходит без ускорения (см. § 2-9), и соответствующая мощность излучения по формуле (5.35) равна нулю. Движение заряда в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, происходит по окружности радиуса R (2.99) с постоянной скоростью u и центростремительным ускорением $a = u^2/R$. При этом

$$\left[\frac{\mathbf{u}}{c} \mathbf{a} \right]^2 = \frac{u^2 a^2}{c^2} = \frac{u^6}{c^2 R^2},$$

и из формулы (5.35) получим

$$\frac{dW_{\text{и}}}{dt} = \frac{\mu_0 q^2 u^4}{6\pi c R^2 (1 - u^2/c^2)^2}. \quad (5.36)$$

В ультрарелятивистском случае при скорости u , близкой к c , с небольшой относительной погрешностью можно заменить u^4 на c^4 . Вместо $(1 - u^2/c^2)^2$ на основании равенства (1.74) напомним $(m/m')^4$. Пользуясь также соотношениями (1.80), (1.81) и (2.37), находим, что в ультрарелятивистском случае формула (5.36) для мощности излучения принимает вид

$$\frac{dW_{\text{и}}}{dt} = \frac{cq^2}{6\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{W}{W_0} \right)^4, \quad (5.37)$$

где W и W_0 — значения энергии частицы в состоянии движения и в покое.

Как видно из формул (5.36) и (5.37), мощность излучения при медленном движении растет пропорционально квадрату энергии частицы, а с увеличением скорости нарастает быстрее, приближаясь к пропорциональности четвертой степени энергии.

Рассмотрим, например, *излучение при движении электрона в бетатроне*. Принцип действия индукционного ускорителя заряженных частиц — бетатрона подобен принципу трансформатора с той разницей, что роль вторичной обмотки трансформатора играет кольцевая траектория ускоряемого электрона, инжестируемого (впускаемого) в магнитное поле бетатрона перпендикулярно вектору магнитной индукции \mathbf{B} . Во всех точках окружности радиуса R , по которой движется электрон, $B = \text{const}$, но магнитное поле убывает с увеличением R , обладая осевой симметрией. Закон электромагнитной индукции в интегральной форме, в соответствии с уравнением Максвелла (2.23) и формулой Стокса, имеет вид

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}_i \, d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

где L — длина контура, охватывающего магнитный поток Φ , а направление обхода контура связано с направлением магнитного поля по правилу правого винта. Возьмем в качестве контура L окружность, по которой движется электрон. Благодаря аксиальной симметрии магнитного поля вихревое электрическое поле всюду направлено по касательной к такой окружности и величина E_t одинакова во всех точках этой окружности радиуса R . В таком случае из закона электромагнитной индукции получим

$$E_t = -\frac{1}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

В релятивистском уравнении движения электрона (1.77) заменим $m'u$ импульсом p и допустим, что на электрон действует только сила Лоренца (2.67) с заменой q на $-e$, следовательно,

$$\frac{dp}{dt} = -e \{ \mathbf{E} + [\mathbf{u}\mathbf{B}] \}.$$

Спроектируем векторы, входящие в уравнение, на направление скорости электрона, которое образует правый винт с вектором магнитной индукции (см. § 2-9), т. е. совпадает с направлением обхода контура в законе электромагнитной индукции. Тогда

$$\frac{dp}{dt} = -eE_t,$$

или, если подставить значение E_t ,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{2\pi R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.38)$$

Возрастание магнитного потока Φ в бетатроне приводит к увеличению импульса электрона p . В случае движения электрона по орбите постоянного радиуса R при интегрировании уравнения (5.38) находим

$$p = \frac{e}{2\pi R} \cdot \Phi + C.$$

Константа интегрирования C находится из начальных условий. Если магнитный поток в процессе ускорения электрона возрастает от нуля и начальным импульсом электрона можно пренебречь по сравнению с импульсом, какой получается в результате ускорения электрона, то при $\Phi=0$ имеем $p=0$ и $C=0$, так что

$$p = \frac{e}{2\pi R} \Phi = \frac{e}{2\pi R} \pi R^2 \bar{B},$$

т. е.

$$p = \frac{eR}{2} \cdot \bar{B}, \quad (5.39)$$

где \bar{B} — среднее значение магнитной индукции в бетатроне в области внутри орбиты электрона.

Если, например, $R=2$ м и $\bar{B}=1$ тл, то p в системе единиц СИ численно равно e . В таком случае, если бы масса электрона оставалась равной массе покоя m , то его скорость, как p/m , была бы равна числу e/m в виде (3.52), что много больше c . Следовательно, в бетатроне осуществимо ультрарелятивистское движение электрона, так что $W/W_0 \gg 1$ и мощность излучения по формуле (5.37) становится очень большой (см. задачу 30).

Ускорение электрона прекращается, когда увеличение импульса, обусловленное нарастанием магнитного потока по формуле (5.38), компенсируется уменьшением импульса вследствие излучения энергии. При практически достижимой скорости нарастания магнитного потока энергия электрона в бетатроне не может поэтому превышать нескольких сотен мегаэлектронвольт. Более значительные результаты достигаются в синхротроне, где потери энергии на излучение компенсируются путем подвода энергии от высокочастотного генератора (см. § 3-8). Бетатронным режимом пользуются в синхротроне для предварительного ускорения электронов до нескольких мегаэлектронвольт.

При движении электрона в бетатроне или синхротроне с угловой скоростью ω возникает излучение, в котором, кроме основной угловой частоты ω , встречаются гармоники с частотами $n\omega$, где n — целое число. При этом максимум энергии излучения ультрарелятивистского электрона приходится на критическую угловую частоту [4], выраженную формулой

$$\omega_k \approx \frac{3\omega}{2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2}, \quad (5.40)$$

благодаря чему может возникать интенсивное излучение в оптической области спектра (см. задачу 30). Этот вывод теории подтверждается тем, что в опытах обнаруживаются «светящиеся» электроны.

Формулы (5.32) и (5.35) получены в предположении, что заряд движется в вакууме. При этом существование ускорения оказывается необходимым и достаточным условием для излучения энергии зарядом. По представлениям классической электронной теории, заряженные частицы, составляющие атомы, находятся в вакууме. С этой точки зрения формула (5.35) распространяется и на *случай движения связанного электрона* в атоме. Однако движение в ограниченной области пространства (внутри атома) не может происходить без изменения вектора скорости u , т. е. без ускорения. Электрон, двигаясь в атоме с ускорением, должен, согласно формуле (5.35), излучать энергию. Поэтому энергия электрона должна уменьшаться и стационарное движение его в атоме невозможно. Таким образом, какое-либо представление о стационарной орбите электрона в атоме несовместимо с классической электронной теорией и может быть принято лишь, если отрицать применимость этой теории к объяснению строения атома.

Следовательно, планетарная модель атома (Резерфорд, 1912 г.) не может быть стационарной в рамках классической теории. Посмотрим, насколько существенно это обстоятельство, т. е. насколько быстро должно меняться состояние атома. В простейшей планетарной модели электрон равномерно движется по окружности вокруг атомного ядра.

Равномерное движение по окружности можно разложить на два взаимно перпендикулярных гармонических колебания электрона с угловой частотой ω . На основании формул (5.17) и (5.18) такой же должна быть угловая частота электромагнитных волн, излучаемых электроном. Для оптической области спектра будем считать ω величиной порядка 10^{15} сек $^{-1}$.

Классические соображения, основанные, например, на уравнении Ван-дер-Ваальса или оценке объема, приходящегося на один атом в твердых телах, показывают, что радиус атома равен по порядку величины 10^{-10} м.

Считая, что радиус орбиты электрона $R = 10^{-10}$ м и $\omega = 10^{15}$ сек $^{-1}$, находим его линейную скорость: $u = \omega R \approx 10^5$ м/сек, что значительно меньше c . Если даже повысить оценку величины ω , рассматривая ультрафиолетовую область спектра, то можно все же считать движение электрона в атоме нерелятивистским. В таком случае справедлива формула (5.32) с заменой q на $-e$, причем $a = \omega^2 R$. Таким образом, из формулы (5.32) находим мощность излучения электрона в атоме в виде

$$\frac{dW_{\text{н}}}{dt} = \frac{\mu_0 e^2 \omega^4 R^2}{6\pi c}.$$

Подставляя сюда приведенные выше численные значения ω и R и сравнивая $dW_{\text{н}}$ и $/dt$ с нерелятивистским значением кинетической энергии электрона, равным

$$\frac{m\omega^2 R^2}{2},$$

легко заметить, что состояние движения электрона должно заметно меняться за очень малую долю секунды (см. также задачу 31). Таким образом, неустойчивость классической планетарной модели атома весьма ощутима и убедительно показывает, что классическая электронная теория не может рассчитывать на согласие с опытом в области физики атома.

Потерю энергии зарядом вследствие излучения можно понимать как работу некоторой силы F_p , которая влияет на движение заряда подобно силе трения. Эта сила обусловлена воздействием излучения, созданного зарядом, на сам заряд. Это — *реакция излучения*, или *сила лучистого трения*. Работа ее, отнесенная к единице времени, т. е. $(F_p u)$, должна равняться изменению энергии заряда dW вследствие излучения, отнесенному к единице времени. В нерелятивистском случае, согласно формуле (5.32), с уче-

том того, что $dW = -dW_{\text{и}}$, имеем

$$(\mathbf{F}_p \mathbf{u}) = -\frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c},$$

или

$$(\mathbf{F}_p \mathbf{u}) = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{a}\mathbf{u}) - \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{u} \right) \right\}. \quad (5.41)$$

Чтобы сравнить с опытом это соотношение, относящееся к микроскопической теории, усредним его по промежутку времени Δt , который должен быть достаточно большим по сравнению, например, с периодом колебаний заряженной частицы (см. § 4-1). Тогда, если индексы 1 и 2 относятся к началу и концу промежутка Δt , то

$$\overline{\frac{d}{dt} (\mathbf{a}\mathbf{u})} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ (\mathbf{a}\mathbf{u})_2 - (\mathbf{a}\mathbf{u})_1 \right\}.$$

Если заряженная частица совершает периодическое движение и Δt равно целому числу периодов, это выражение обращается в нуль. Если движение является близким к периодическому, хотя бы в том смысле, что при неограниченном увеличении Δt частица не выходит за пределы ограниченной области пространства, то при достаточно большом Δt имеем

$$\overline{\frac{d}{dt} (\mathbf{a}\mathbf{u})} \ll \overline{(\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u})},$$

где $\dot{\mathbf{a}} = d\mathbf{a}/dt$.

Таким образом, из уравнения (5.41) с некоторой степенью точности, тем большей, чем ближе движение к периодическому, получаем равенство

$$\overline{(\mathbf{F}_p \mathbf{u})} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \overline{(\dot{\mathbf{a}}\mathbf{u})}.$$

Чтобы выполнялось это равенство, достаточно принять, что

$$\mathbf{F}_p = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}}. \quad (5.42)$$

Такая же формула для реакции излучения \mathbf{F}_p получается и более строгим путем, если рассчитать силу, с которой заряд действует на самого себя (см. задачу 28), не считая ускорение заряженной частицы постоянным и принимая во внимание время распространения электромагнитного воздействия внутри частицы. Тогда при $u \ll c$ в первом приближении получается следующее выражение для силы, с которой электрон действует на себя:

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{a} + \mathbf{F}_p,$$

где \mathbf{F}_p выражается в виде (5.42).

Таким образом, реакция излучения F_p пропорциональна производной от ускорения по времени. Здесь встречается своеобразная сила, неизвестная в механике.

Если не ограничиваться первым приближением, то реакция излучения зависит не только от \dot{a} , но и от производных ускорения по времени более высокого порядка, которые играют заметную роль, если радиусом частицы нельзя пренебречь по сравнению с длиной волны.

При отказе от предположения, что $u \ll c$, т. е. в релятивистском случае, следует обратиться к четырехмерной формулировке уравнений движения заряда. Если не принимать во внимание воздействия на заряд, обусловленного его излучением, то, пользуясь понятием тензора электромагнитного поля (2.49) и соотношениями (1.59), (1.61), можно переписать уравнения движения (2.69) в релятивистски ковариантной форме

$$ma_\eta = q \sum_{\nu=1}^4 F_{\eta\nu} u_\nu, \quad (\eta = 1, 2, 3, 4).$$

Принимая во внимание потерю энергии зарядом вследствие излучения, добавим в правой части такого уравнения некоторую компоненту f_η четырехмерной реакции излучения. Тогда

$$ma_\eta = q \sum_{\nu=1}^4 F_{\eta\nu} u_\nu + f_\eta. \quad (5.43)$$

Для определения компонент f_η заметим, что при $u \ll c$, когда можно принять $u_1 = u_x$, $u_2 = u_y$, $u_3 = u_z$ и $dt = d\tau$, величины f_1 , f_2 , f_3 должны перейти в компоненты трехмерной реакции излучения (5.42). Второе требование к f_η заключается в том, что

$$\sum_{\eta=1}^4 f_\eta u_\eta = 0.$$

Это видно из уравнения (5.43), если умножить его на u_η , просуммировать по η и принять во внимание результат (1.64) и равенство $\sum_{\nu=1}^4 \sum_{\eta=1}^4 F_{\eta\nu} u_\eta u_\nu = 0$, что обусловлено антисимметрией тензора $F_{\eta\nu}$. Как легко заметить, в силу равенства (1.60), обоим выдвинутым требованиям удовлетворяет выражение

$$f_\eta = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left(\frac{da_\eta}{d\tau} + \frac{u_\eta}{c^2} \sum_{\alpha=1}^4 u_\alpha \frac{da_\alpha}{d\tau} \right) \quad (\eta = 1, 2, 3, 4). \quad (5.44)$$

Отсюда в частном случае нерелятивистского движения получается формула (5.42). При движении точечного заряда с любой скоро-

стью u компоненты трехмерной силы лучистого трения по осям x , y и z получаются, в согласии с равенствами (1.90), соответственно путем умножения компонент f_1 , f_2 и f_3 на $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$.

Уравнения (5.43) и (5.44) при заданных начальных условиях полностью определяют движение заряженной материальной точки с учетом силы лучистого трения.

§ 5-5. ЕСТЕСТВЕННАЯ ШИРИНА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Не настаивая на какой-либо определенной модели атома, электронная теория принимает во внимание несомненное существование связанных электронов в молекулах и допускает, что на каждый из них действует сила, направленная к положению равновесия и пропорциональная смещению r от этого положения.

Кроме такой квазиупругой силы, равной $-kr$, где k — константа (квазиупругий коэффициент), на электрон действует сила лучистого трения F_p . Предполагая $u \ll c$ для электрона в атоме (см. § 5-4), будем считать справедливым выражение для F_p в виде (5.42) с заменой q на $-e$.

Тогда уравнение движения связанного электрона принимает вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} + \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \ddot{\mathbf{r}}. \quad (5.45)$$

Решение этого уравнения будем искать в форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot e^{i\Omega t}, \quad (5.46)$$

где $i = \sqrt{-1}$, e — основание натуральных логарифмов.

Подставляя это выражение в уравнение (5.45), получаем

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} \frac{1}{1 - i\delta}, \quad (5.47)$$

где

$$\delta = \frac{\mu_0 e^2 \Omega}{6\pi m c}. \quad (5.48)$$

Ограничимся случаем настолько малых значений δ , что величина Ω с достаточной точностью имеет смысл вещественной угловой частоты колебаний электрона и электромагнитных колебаний в волне, излучаемой электроном. Так, для оптической части спектра ($\Omega \approx 10^{15} \text{ сек}^{-1}$) и для широкой области частот за ее пределами (при $\Omega < 10^{20} \text{ сек}^{-1}$) будем иметь

$$\delta < 10^{-3} \ll 1. \quad (5.49)$$

Ввиду того, что δ мало, будем искать величину Ω методом последовательных приближений, полагая в нулевом приближении, что $\delta = 0$. При этом

$$\Omega = \omega_0,$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.50)$$

Для отыскания первого приближения подставим в выражение для δ вместо Ω значение ω_0 и заметим, что ввиду малости δ с высокой степенью точности

$$(1 - i\delta)^{-1/2} = 1 + \frac{i\delta}{2}.$$

Таким образом, в силу равенства (5.47), в первом приближении имеем

$$\Omega = \omega_0 + i\gamma,$$

где

$$\gamma = \frac{\mu_0 e^2 \omega_0^2}{12\pi mc}. \quad (5.51)$$

Следовательно, приближенное решение уравнения (5.45) в форме (5.46) будет

$$r = Ce^{(-\gamma + i\omega_0)t}. \quad (5.52)$$

Отсюда видно, что γ представляет собой *коэффициент затухания колебаний*, а ω_0 — угловая частота гармонических колебаний в отсутствие затухания.

Выясним, насколько существенно нарушение гармонического характера колебаний электрона вследствие затухания. Обозначая через

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

условный период затухающего осцилляторного процесса, можно определить *логарифмический декремент затухания* Θ :

$$\Theta = \gamma\tau = \frac{2\pi\gamma}{\omega_0}.$$

Подставим значение γ из равенства (5.51). Тогда

$$\Theta = \frac{\mu_0 e^2 \omega_0}{6mc}. \quad (5.53)$$

Это выражение, как видно из сравнения с формулой (5.48), отличается от значения δ только множителем π при $\Omega = \omega_0$. Согласно неравенству (5.49)

$$\Theta \ll 1,$$

причем это неравенство, как и (5.49), выполняется даже при $\omega_0 = 10^{20} \text{ сек}^{-1}$, и Θ становится чрезвычайно мало по сравнению с единицей в области видимого света при $\omega_0 \approx 10^{15} \text{ сек}^{-1}$.

Следовательно, за время условного периода затухание колебаний очень мало заметно¹. Поэтому колебания электрона близки к гармоническим и, как видно из выражения (5.53), тем ближе, чем меньше частота колебаний.

Однако затухание колебаний электрона не позволяет считать, что они существуют, начиная с $t = -\infty$, так как тогда при любом конечном t колебаний не было бы.

Ограниченность процесса колебаний во времени означает, что они не являются периодическими.

Гармонические колебания (без начала и конца во времени) дали бы гармоническую периодическую волну (см. § 5-4) и в спектральном аппарате, при помощи которого происходит разложение колебаний на гармонические составляющие, получилась бы одна спектральная линия с шириной, равной нулю. Конечно, если на реальный спектральный аппарат, например дифракционную решетку, падает монохроматический свет, то линия в спектре обладает некоторой шириной. Это обусловлено природой спектральных аппаратов; однако такая «инструментальная» ширина спектральных линий с достаточной точностью может быть исключена целесообразным подбором конструкции спектрального прибора. Рассмотрим здесь только истинную ширину спектральных линий.

При нарушении гармоничности периодическое колебание можно было бы разложить в ряд Фурье; если же движение не является периодическим, можно воспользоваться представлением функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в виде интеграла Фурье

$$\mathbf{r}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (5.54)$$

где коэффициенты разложения $\mathbf{q}(\omega)$ выражаются через обращенный интеграл в виде

$$\mathbf{q}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (5.55)$$

Выражение (5.54) имеет тот смысл, что радиус-вектор \mathbf{r} , определяющий положение электрона, испытывает колебания, представляющие набор бесконечного множества гармонических колебаний со всевозможными значениями угловой частоты ω . Следовательно, в этом случае спектр будет сплошным.

Примем за начало отсчета времени тот момент, когда в результате какого-то внешнего воздействия электрон начинает совер-

¹ Это не противоречит тому, что осциллирующий электрон заметно теряет свою энергию за крайне малые доли секунды (см. § 5-4), ведь продолжительность периода чрезвычайно мала.

шать свободные затухающие колебания. При этом выражение (5.52) для \mathbf{r} справедливо, если $t \geq 0$, а при $t < 0$ будем считать электрон покоящимся, т. е. $\mathbf{r} = 0$. Из формулы (5.55) получаем

$$\mathbf{q}(\omega) = \frac{C}{2\pi} \frac{1}{\gamma + i(\omega - \omega_0)}. \quad (5.56)$$

Как видно из формулы (5.54), вектор $\mathbf{q}(\omega)$ — это *амплитуда периодических колебаний* электрона, происходящих с угловой частотой ω . Абсолютная величина ускорения электрона a при таких колебаниях пропорциональна $|q(\omega)|$.

В силу формул (5.21) и (5.18) как E , так и H пропорциональны ускорению $|\dot{\mathbf{u}}|$, т. е. a ; следовательно, модуль вектора Пойнтинга на основании выражения (4.64) пропорционален a^2 , а потому пропорционален $|q(\omega)|^2$. Это относится к любому моменту времени, поэтому доступная наблюдению средняя по времени *интенсивность излучения* $I d\omega$ в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ выражается в виде

$$I d\omega = \alpha |q(\omega)|^2 d\omega, \quad (5.57)$$

где α — коэффициент пропорциональности. Воспользуемся выражением (5.56) для $q(\omega)$. Конечно, $|q(\omega)|^2 = \mathbf{q}(\omega) \cdot \mathbf{q}^*(\omega)$, где $\mathbf{q}^*(\omega)$ — комплексная величина, сопряженная с \mathbf{q} . Интенсивность излучения I , отнесенная к единичному интервалу угловых частот, оказывается равной

$$I = \frac{\alpha |C|^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \quad (5.58)$$

Отсюда при $\omega = \omega_0$ получается максимальное значение I , а именно

$$I_{\text{макс}} = \frac{\alpha |C|^2}{4\pi^2 \gamma^2}.$$

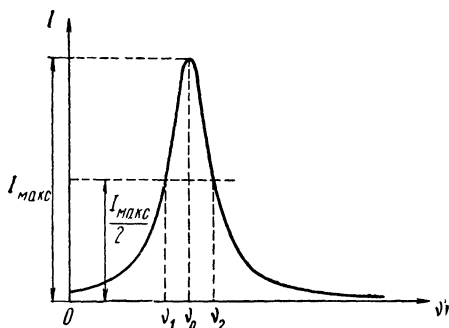


Рис. 27. Контур спектральной линии, обусловленный излучением

$\omega = 2\pi\nu$; соответственно $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. С возрастанием величины $|\omega - \omega_0|$ интенсивность убывает, по формуле (5.58), симметрично относительно точки $\omega = \omega_0$ или $\nu = \nu_0$ (рис. 27). Убывание происходит очень быстро, если γ мало по сравнению с ω_0 , а из соотношений (5.53) при $\theta \ll 1$ и (5.51) следует, что

$$\gamma \ll \omega_0;$$

причем γ чрезвычайно мало по сравнению с ω_0 в оптической области спектра.

Таким образом, зависимость $I(\nu)$ имеет вид резонансной кривой с резко выраженным максимумом. Кривая, изображающая распределение интенсивности в спектре в зависимости от частоты (см. рис. 27) представляет собой *контур спектральной линии*.

Значение I , равное половине максимального, получается, как видно из формулы (5.58), при частоте

$$\omega = \omega_0 \pm \gamma,$$

или

$$\nu_1 = \nu_0 - \frac{\gamma}{2\pi} \text{ и } \nu_2 = \nu_0 + \frac{\gamma}{2\pi}.$$

Термин *ширина спектральной линии* означает разность $\Delta\nu$ между значениями ν_2 и ν_1 , при которых интенсивность вдвое меньше максимальной¹.

Ширина спектральной линии называется естественной в том случае, когда она обусловлена лишь внутренними свойствами излучающей системы. С точки зрения классической электронной теории *естественная ширина* $\Delta\nu$ спектральной линии обусловлена реакцией излучения и по определению равна

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1,$$

следовательно,

$$\Delta\nu = \frac{\gamma}{\pi}. \quad (5.59)$$

Если воспользоваться выражением для γ в виде (5.51), то

$$\Delta\nu = \frac{\mu_0 e^2 \nu_0^2}{3\pi c}. \quad (5.60)$$

Отсюда для оптической области спектра при $\nu_0 = 5 \cdot 10^{14}$ гц находим $\Delta\nu \approx 10^7$ гц, что крайне мало по сравнению с шириной видимого участка спектра (около $3 \cdot 10^{14}$ гц). С помощью соотношения между длиной волны λ и частотой:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

естественная ширина, выраженная в длинах волн, может быть представлена в виде

$$|\Delta\lambda| = \frac{c}{\nu^2} |\Delta\nu|,$$

что составляет в оптической области около 10^{-4} Å.

Полученные выражения для естественной ширины спектральных линий удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов.

¹ Эту величину $\Delta\nu$ иногда называют полушириной спектральной линии.

Этот результат выражает значительный успех классической электронной теории в вопросах излучения атомов, где такая теория не имеет оснований рассчитывать на согласие с опытом (см. § 4-3). Этим успехом в известной мере оправдывается примитивное классическое представление об электроде, совершающем колебания около положения равновесия под действием квазиупругой силы. Истинная причина такого успеха выясняется в квантовой механике, где устанавливается, что некоторые величины, характеризующие поведение электрона в атоме, изменяются так, как если бы движение электрона происходило под действием квазиупругой силы.

Интересно отметить, что квантовая теория атома, предложенная Бором в 1913 г., не дает объяснения ширины спектральных линий.

§ 5-6. УШИРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Наблюдаемая обычно в спектральных аппаратах ширина спектральных линий гораздо больше, чем естественная ширина. Причиной этого служат прежде всего *соударения молекул*, изменяющие характер колебаний связанных электронов.

В самом деле, если пренебречь затуханием, то, в силу выражения (5.52), при $\gamma = 0$ колебания можно считать гармоническими на протяжении неограниченного промежутка времени от $t = -\infty$ до $t = \infty$. Каждое соударение молекулы, в которой колеблется электрон, с другой молекулой означает прекращение прежнего колебания и возникновение нового, т. е. если соударения происходят в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots$, то

$$\mathbf{r} = \sum_k \mathbf{r}_k(t), \quad (5.61)$$

где $\mathbf{r}_k = 0$ при $t < t_k$ и $t > t_{k+1}$, а в интервале $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ для \mathbf{r}_k справедливо выражение, аналогичное (5.52) при $\gamma = 0$, т. е.

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{C}_k e^{i\omega_0 t}. \quad (5.62)$$

Условимся отсчитывать время от середины интервала, равного

$$t_{k+1} - t_k = \tau_k.$$

Тогда функцию $\mathbf{r}_k(t)$, определенную указанным образом, можно представить в виде интеграла Фурье аналогично формуле (5.54)

$$\mathbf{r}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}_k(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где

$$\mathbf{q}_k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}_k(t) e^{-i\omega t} dt,$$

или с учетом выражения (5.62)

$$q_k(\omega) = \frac{C_k}{2\pi} \int_{-\tau_k/2}^{\tau_k/2} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt,$$

откуда

$$q_k(\omega) = \frac{C_k}{\pi} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\tau_k/2]}{\omega_0 - \omega}.$$

Введем обозначения

$$A = \frac{C_k \tau_k}{2\pi}, \quad \xi = (\omega - \omega_0) \frac{\tau_k}{2} = \pi(\nu - \nu_0) \tau_k.$$

Тогда последнее равенство запишется в виде

$$q_k(\omega) = A \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Согласно формуле (5.57) интенсивность излучения оказывается пропорциональной функции

$$f(\xi) = \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}.$$

Вид этой функции (рис. 28) дает представление о контуре спектральной линии. При $\xi = 0$, очевидно, $f(\xi) = 1$; если $|\xi| = 1,39$, то $f(\xi) = \frac{1}{2}$, а при $|\xi| > \pi$ имеем

$$f(\xi) < \frac{1}{\pi^2} < \frac{1}{2}.$$

Понимая ширину спектральной линии $\delta\nu$ как разность двух значений частоты ν , при которых интенсивность равна половине максимальной интенсивности, находим

$$\delta\nu = 2 \cdot \frac{1,39}{\pi\tau_k} \approx \frac{1}{\tau_k},$$

т. е. ширина спектральной линии представляет собой величину, приблизительно обратную продолжительности свободных колебаний электрона в промежутке между столкновениями молекул.

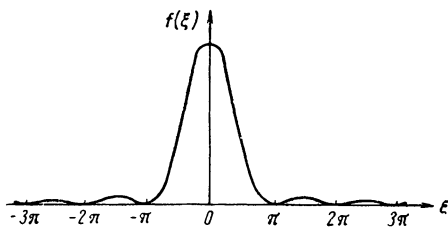


Рис. 28. Форма спектральной линии, обусловленная соударениями молекул

В целях сравнения с опытом уширением спектральных линий вследствие столкновений молекул следует назвать значение $\delta\nu$ после усреднения по физически бесконечно малому промежутку времени Δt , значительно превышающему τ_k . При усреднении принимается во внимание уже не одна функция $r_k(t)$, а выражение $r(t)$ в виде (5.61) за время Δt .

Таким образом,

$$\bar{\delta v} \approx \frac{\bar{1}}{\tau_k}. \quad (5.63)$$

Из кинетической теории газов известно среднее число столкновений молекулы с такими же молекулами, отнесенное к единице времени. Пользуясь тем, что оно совпадает в наших обозначениях с величиной $\frac{\bar{1}}{\tau_k}$, можно написать

$$\bar{\delta v} \approx \sqrt{2} \pi D^2 N \bar{u},$$

где D — эффективный диаметр молекулы, N — число молекул в единице объема, \bar{u} — средняя скорость молекулы.

При атмосферном давлении и температуре газа, равной 0°C , вычисленная из последней формулы величина $\bar{\delta v}$ оказывается во много раз больше естественной ширины линии $\Delta\nu$, определяемой формулой (5.60). Например, для азота имеем: $D \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $N = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, $\bar{u} \approx 500 \text{ м/сек}$, и потому $\bar{\delta v} = 10^{10} \text{ гц}$, что в оптической области спектра приблизительно в 1000 раз больше, чем $\Delta\nu$.

Однако уменьшение давления приводит при постоянной температуре к пропорциональному уменьшению величин N и $\bar{\delta v}$.

Из сравнения соотношений (5.63) и (5.59) видно, что влияние соударений на ширину спектральной линии эквивалентно влиянию затухания с коэффициентом затухания, равным

$$\gamma_c = \pi \cdot \frac{\bar{1}}{\tau_k}.$$

Этот эквивалентный коэффициент затухания γ_c , обусловленный соударениями, введем в соотношение (5.63). Тогда аналогично (5.59) имеем

$$\bar{\delta v} = \frac{\gamma_c}{\pi}. \quad (5.64)$$

Следовательно, выражение (5.61) для \mathbf{r} можно представить в виде (5.52) с заменой γ на γ_c , т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} e^{-(\gamma_c + i\omega_0)t}. \quad (5.65)$$

Чтобы получить соответствующее дифференциальное уравнение для \mathbf{r} , у нас нет теперь физических оснований обращаться к уравнению (5.45), в которое входит реакция излучения, вызывающая затухание колебаний. Как известно из механики материальной точки, решение в виде (5.65), соответствующее затухающим колебаниям линейного осциллятора, получается, если принять во внимание упругую силу и силу трения, пропорциональную первой степени скорости, т. е. если исходить из следующего дифференциального уравнения для \mathbf{r} :

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} - 2m\gamma_c \dot{\mathbf{r}}, \quad (5.66)$$

где роль коэффициента трения играет величина $2m\gamma_c$. Строго говоря, уравнению (5.66) удовлетворяет не решение (5.65), а выражение

$$\mathbf{r} = C e^{(-\gamma_c \pm i\omega)t}. \quad (5.67)$$

Здесь ω — угловая частота собственных колебаний осциллятора, равная

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_c^2},$$

причем ω_0 выражается в виде (5.50).

В формуле (5.67) вместо двойного знака \pm без изменения физического смысла можно взять знак плюс, а вследствие обычного соотношения $\gamma_c \ll \omega_0$ можно заменить ω на ω_0 ; тогда формула (5.67) совпадает с (5.65).

Это совпадение означает, что реакция излучения в известном смысле эквивалентна силе трения. Этот вывод справедлив, очевидно, и в том случае, если вместо эквивалентного коэффициента затухания γ_c , обусловленного столкновениями молекул, принять во внимание коэффициент затухания γ , вызванный излучением. Смысл такой эквивалентности двух сил легко понять, если заметить, что она имеет место при слабом затухании, когда колебания близки к гармоническим. Но если пренебречь затуханием, то вместо формулы (5.52) будем иметь

$$\mathbf{r} = C e^{i\omega_0 t},$$

откуда путем дифференцирования по времени получаем равенства

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \omega_0 |\mathbf{r}|, \quad |\dot{\mathbf{a}}| = |\ddot{\mathbf{r}}| = \omega_0^2 |\mathbf{r}|.$$

При этом абсолютная величина реакции излучения на основании уравнения (5.42) выражается в виде

$$F_p = \frac{\mu_0 e^2 \omega_0^3}{6\pi c} |\mathbf{r}|,$$

тогда как абсолютная величина силы трения, входящей в уравнение типа (5.66), будет

$$2m\gamma |\dot{\mathbf{r}}| = 2m\gamma\omega_0 |\mathbf{r}|,$$

что, в силу равенства (5.51), совпадает с F_p .

При этом реакция излучения и сила трения равны при любом значении r , т. е. в любой момент времени, следовательно, эти силы равноценны по своему действию.

Итак, поскольку коэффициент затухания γ_c или γ достаточно мал, для движения электрона справедливо уравнение типа (5.66).

Если одновременно с влиянием соударений принять во внимание реакцию излучения, вследствие которой возникает естественная ширина спектральных линий, то в правой части уравнения (5.66) необходимо добавить равноценную силу трения, равную

— $2m\gamma r$. Итак, при совместном влиянии реакции излучения и соударений молекул вместо (5.66) справедливо уравнение

$$m\ddot{r} = -kr - 2m\dot{\gamma}r, \quad (5.68)$$

где

$$\dot{\gamma} = \gamma + \gamma_c.$$

Но если уравнение (5.66) описывает такое колебание электрона, то ширина спектральной линии выражается формулой (5.64), то уравнение (5.68) означает существование ширины линии, равной

$$\overline{\delta\nu} = \frac{\dot{\gamma}}{\pi},$$

или вследствие соотношений (5.59) и (5.64)

$$\overline{\delta\nu} = \Delta\nu + \delta\nu.$$

Обычно, как было уже замечено,

$$\overline{\delta\nu} \gg \Delta\nu,$$

следовательно, уширение спектральной линии вследствие соударений весьма существенно, особенно при значительных давлениях газа. В жидкостях и твердых телах подобное уширение спектральных линий приводит к возникновению сплошного спектра.

Мы рассмотрели уширение спектральных линий, предполагая, что непрерывного внешнего воздействия нет, т. е. вынужденные колебания электрона отсутствуют. Полученные результаты относятся, таким образом, к ширине спектральных линий испускания.

То же получается для ширины спектральных линий поглощения¹. Это совпадение результатов легко понять, принимая во внимание общую связь между испусканием и поглощением света. Физическая система (молекула), в которой электрон может колебаться без внешних воздействий с определенными частотами, обладает способностью поглощать свет, излучаемый с теми же самыми частотами.

В заключение заметим, что уширение спектральных линий вызывается не только соударениями молекул. Весьма заметную роль играет обычно и эффект Доплера, в силу которого молекула, свободно движущаяся по оси x с нерелятивистской скоростью u_x , создает в направлении этой оси излучение с частотой

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{u_x}{c} \right), \quad (5.69)$$

где ν_0 — частота излучения при $u_x = 0$.

¹ См.: УФН, 66, 391 (1958).

Если принять во внимание максвелловское распределение скоростей молекул, то доплеровское уширение линии $\nu - \nu_0$ при абсолютной температуре T пропорционально \sqrt{T} и при обычных температурах значительно больше естественной ширины.

§ 5-7. ЭФФЕКТ МЁССБАУЭРА

Наряду с излучением, для которого характерно рассмотренное уширение спектральной линии, может обнаруживаться с заметной в определенных условиях интенсивностью другая компонента излучения, дающая естественную ширину спектральной линии. Существование такой компоненты было установлено на опыте немецким ученым Мёссбауэром в 1958 г. при исследовании γ -лучей, испускаемых атомными ядрами твердого тела. Компонента излучения с естественной шириной спектральной линии называется линией Мёссбауэра.

Чтобы выяснить, при каких обстоятельствах линия Мёссбауэра будет доступна наблюдению, перейдем к оценке интенсивности этой линии¹.

Рассмотрим движение излучателя по оси x с нерелятивистской скоростью u_x . Частота ν излучения в направлении оси x определяется по формуле (5.69). Фаза α напряженности поля излучаемой волны меняется за время dt на величину

$$d\alpha = 2\pi\nu dt = \omega_0 \left(1 + \frac{u_x}{c}\right) dt,$$

где $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ — угловая частота излучения в случае неподвижного излучателя.

Отсюда фаза в момент t выражается в виде

$$\alpha = \omega_0 \int_0^t \left(1 + \frac{u_x}{c}\right) dt + \alpha_0,$$

где α_0 — начальная фаза. Таким образом,

$$\alpha = \omega_0 t + kx + \alpha_0,$$

где $k = \omega_0/c$ — волновое число, $x = x(t)$ — смещение излучателя за время t .

Напряженность E электрического поля волны в момент t можно представить в виде

$$E = Ae^{i\alpha},$$

или

$$E = Ce^{i(\omega_0 t + kx)}, \quad (5.70)$$

где C — постоянный множитель.

¹ См.: Ф. Л. Шапиро. Элементарная теория эффекта Мёссбауэра. Изд. ФИАН СССР, 1960.

Кристаллическая решетка твердого тела в результате взаимодействия узлов этой решетки обладает множеством собственных колебаний, порядка числа атомов, с угловыми частотами Ω_i и начальными фазами ψ_i . Представим отклонение $x = x(t)$ атома от положения равновесия в виде разложения в ряд по таким колебаниям

$$x = \sum_i x_i \sin(\Omega_i t + \psi_i). \quad (5.71)$$

Ввиду громадного числа слагаемых будем считать малыми амплитуды x_i таких колебаний. Подставим это выражение x в формулу (5.70). Тогда

$$E = C e^{i\omega_0 t} \prod_i e^{ikx_i \sin(\Omega_i t + \psi_i)}.$$

Величину типа $e^{iz \sin \varphi}$ можно разложить в ряд по функциям Бесселя $J_n(z)$ с целым индексом n ¹:

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\varphi}.$$

Следовательно,

$$E = C e^{i\omega_0 t} \prod_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kx_i) e^{in(\Omega_i t + \psi_i)}.$$

Колебание с несмещенной частотой ω_0 определяется членом, соответствующим $n=0$, так что

$$E_0 = C e^{i\omega_0 t} \prod_i J_0(kx_i).$$

На основании определения функции Бесселя, ввиду малости x_i , при $kx_i \ll 1$ с достаточной точностью имеем

$$J_0(kx_i) = 1 - \left(\frac{kx_i}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$E_0 = C e^{i\omega_0 t} \prod_i \left(1 - \frac{k^2 x_i^2}{4}\right). \quad (5.72)$$

Вектор Пойнтинга в волновой зоне пропорционален $|E|^2$, как видно из равенств (5.30) и (4.92), а потому интенсивность линии

¹ См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. III, ч. 2, М., ГИТТЛ, 1956.

По определению функции Бесселя с целым индексом, при $n \geq 0$ имеем

$$J_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2j}; \quad J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

Мёссбауэра пропорциональна $|E_0|^2$. Из формулы (5.72) при $kx_i \ll 1$ находим

$$|E_0|^2 = |C|^2 \prod_i \left(1 - \frac{k^2 x_i^2}{2}\right),$$

откуда, пользуясь тем, что при $\delta \ll 1$ с достаточной точностью $\ln(1 + \delta) = \delta$, получаем

$$2 \ln |E_0| = 2 \ln |C| - \frac{k^2}{2} \sum_i x_i^2. \quad (5.73)$$

Используем равенство (5.71) для вычисления x^2 и проведем усреднение по времени, замечая, что

$$\overline{\sin^2(\Omega_i t + \psi_i)} = \frac{1}{2};$$

$$\overline{\sin(\Omega_i t + \psi_i) \sin(\Omega_j t + \psi_j)} = 0 \quad \text{при } j \neq i.$$

Тогда

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2} \sum_i x_i^2.$$

Следовательно, равенство (5.73) можно представить в виде

$$\ln \left| \frac{E_0}{C} \right| = -\frac{k^2 \overline{x^2}}{2} = -\frac{2\pi^2 \overline{x^2}}{\lambda^2},$$

где λ — длина волны излучения.

Эффект Мёссбауэра отчетливо выражен, если $\ln \left| \frac{E_0}{C} \right|$ достаточно далек от $-\infty$, т. е. если максимальная величина (амплитуда) колебаний источника излучения не слишком велика по сравнению с длиной волны λ .

Это условие выполняется, если атом принадлежит кристаллической решетке твердого тела, находящегося при низкой температуре, и излучение создается атомным ядром, так что внешние поля слабо влияют на излучатель. Отсюда понятно, почему эффект Мёссбауэра был обнаружен при исследовании γ -лучей, испускаемых атомными ядрами ряда твердых тел. Этот эффект позволяет судить о колебаниях узлов кристаллической решетки. Он соответствует, в сущности, упругому испусканию или поглощению γ -лучей атомными ядрами без изменения внутренней энергии тела.

Незначительная ширина линий Мёссбауэра позволяет, регистрируя резонансное поглощение γ -лучей атомными ядрами, обнаруживать на опыте с очень высокой степенью точности влияние различных факторов на частоту излучения (например, влияние поля тяготения, предсказанное общей теорией относительности).

§ 5.8. РАССЕЯНИЕ СВЕТА ЭЛЕКТРОНАМИ

Если на электрон падает электромагнитная волна, то он движется с переменной скоростью и излучает в различных направлениях. Волны, которые излучаются электронами в таких условиях, называются рассеянными.

Скорость электрона, на который действует падающая волна, обычно мала по сравнению со скоростью света. Поэтому в выражении (2.67) для силы Лоренца, понимая под \mathbf{E} напряженность электрического поля в волне и имея в виду равенства (4.85), (2.15) и (2.37), можно пренебречь влиянием магнитного поля, а для реакции излучения будет справедливо выражение (5.42).

Тогда уравнение движения свободного электрона будет иметь вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} + \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \dddot{\mathbf{r}}. \quad (5.74)$$

Зависимость \mathbf{E} от времени для любой несинусоидальной падающей волны можно представить в виде ряда Фурье или же интеграла Фурье, что означает совокупность гармонических колебаний. Любую синусоидальную волну можно разложить на две линейно поляризованные волны с взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации. Рассмотрим действие на электрон синусоидальной линейно поляризованной волны, причем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t},$$

где \mathbf{E}_0 — функция координат, которую, однако, при подстановке в уравнение (5.74) можно считать постоянной, поскольку электрон движется достаточно медленно по сравнению со скоростью распространения волны.

Вводя для $\ddot{\mathbf{r}}$ обозначение \mathbf{a} , приводим уравнение (5.74) к виду

$$\frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} - m\mathbf{a} = e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (5.75)$$

При этом общее решение однородного уравнения для \mathbf{a} можно представить в виде

$$\mathbf{C} e^{\frac{\omega t}{\delta}},$$

где

$$\delta = \frac{\mu_0 e^2 \omega}{6\pi m c} \quad (5.76)$$

— обычно малая величина, как видно из неравенства (5.49).

Учитывая также очевидное частное решение неоднородного уравнения (5.75), получаем общее решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{C} e^{\frac{\omega t}{\delta}} - \frac{e\mathbf{E}_0}{m(1 - i\delta)} \cdot e^{i\omega t}.$$

Если бы величина C отличалась от нуля, то при сколь угодно слабом воздействии, когда E_0 как угодно близко к нулю, ускорение электрона неограниченно росло бы с течением времени. Это означает, что необходимо принять $C=0$.

Итак, можно записать

$$a = -\frac{eE_0}{m(1-i\delta)} e^{i\omega t},$$

или

$$a = a_0 e^{i(\omega t + \varphi)},$$

где

$$a_0 = -\frac{eE_0}{m\sqrt{1+\delta^2}}; \quad \varphi = \text{arctg } \delta.$$

Заменяя в последнем уравнении a на \ddot{r} и дважды интегрируя его по времени, получаем

$$r = Ae^{i(\omega t + \varphi)} + C_1 t + C_2, \quad (5.77)$$

где

$$A = -\frac{a_0}{\omega^2} = \frac{eE_0}{m\omega^2\sqrt{1+\delta^2}},$$

а константы C_1 и C_2 определяются из начальных условий. Таким образом, на равномерное движение электрона со скоростью C_1 налагаются благодаря действию волны колебания с амплитудой A .

Ввиду малости величины δ эта амплитуда очень близка к $\frac{eE_0}{m\omega^2}$, а фаза колебания больше фазы падающей волны на малый угол φ .

Вследствие гармонических колебаний электрона, описываемых членом $Ae^{i(\omega t + \varphi)}$, возникает *рассеянная волна*. Ее угловая частота ω равна угловой частоте падающей волны, и на достаточно большом расстоянии от электрона рассеянная волна является сферической (см. § 5-4).

Средняя по времени мощность излучения на основании формулы (5.32), с заменой q на $-e$, равна

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \bar{a}^2. \quad (5.78)$$

Среднее за период значение квадрата синусоидальной функции равно половине квадрата амплитуды. Поскольку время, за которое проводится усреднение, велико по сравнению с периодом, равным $2\pi\omega$, с достаточной точностью имеем

$$\bar{a}^2 = \frac{a_0^2}{2},$$

следовательно, равенство (5.78) приводится к виду

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{\mu_0 e^4 E_0^2}{12\pi m^2 c (1 + \delta^2)}. \quad (5.79)$$

Средняя мощность, которую затрачивает падающая волна на изменение энергии электрона при гармонических колебаниях его, равна нулю. Значит, при воздействии волны на электрон, согласно закону сохранения энергии, затрачивается мощность, определяемая формулой (5.79).

Но мощность излучения в падающей плоской волне¹, приходящаяся на единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, т. е. модуль вектора Пойнтинга, как видно из равенств (4.64) и (4.85), имеет среднее значение (в вакууме), равное

$$\bar{N} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \bar{E}^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{E_0^2}{2}.$$

Сравнивая это равенство с выражением (5.79) и пользуясь соотношением (2.37), находим *эффективное сечение* σ рассеяния света электроном как площадь, на которую приходится энергия волны, сообщаемая электрону:

$$\sigma = \frac{1}{\bar{N}} \cdot \frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m^2 (1 + \delta^2)}. \quad (5.80)$$

Рассмотрим обычный случай, когда $\delta \ll 1$. При этом, в силу равенства (5.76), можем записать

$$\frac{\mu_0 e^2}{4\pi m} \ll \frac{3}{4\pi} \lambda, \quad (5.81)$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина падающей волны. Тогда с высокой степенью точности имеем

$$\sigma = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m^2}. \quad (5.82)$$

Это выражение отличается только коэффициентом $8/3$ от «геометрического» поперечного сечения электрона πR^2 , где R — классический радиус электрона, выраженный левой частью неравенства (5.81), как видно из формул (4.10) и (2.16).

Заметим, что при вычислении эффективного поперечного сечения не были использованы какие-либо модельные представления об электроне. Совпадение полученного результата по порядку величины с классическим поперечным сечением электрона говорит в пользу того, что классические представления о размерах электрона имеют определенный физический смысл, как приближенные представления.

Однако такой вывод справедлив, когда, как обычно, выполняется неравенство (5.81), т. е. если длина падающей волны достаточно велика по сравнению с классическим радиусом электрона ($\lambda \gg 10^{-15}$ м). Если же, наоборот, нельзя пренебречь вели-

¹ Волну можно считать плоской, поскольку площадь фронта волны в области действия на электрон достаточно мала.

чиной δ^2 по сравнению с единицей, то эффективное поперечное сечение σ , в силу формул (5.80) и (5.76), оказывается тем меньше, чем короче длина волны λ .

Рассмотрим теперь *рассеяние света связанным электроном*, считая, что на него действует квазиупругая сила, равная $-k\mathbf{r}$. Добавим в правой части уравнения (5.74) член $-k\mathbf{r}$ и воспользуемся обнаруженной ранее возможностью (см. § 5-6) представить силу лучистого трения как произведение «коэффициента трения» $2m\gamma$ на скорость со знаком минус, причем γ определяется формулой (5.51). Тогда уравнение движения связанного электрона примет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} - 2m\gamma\dot{\mathbf{r}} - k\mathbf{r}. \quad (5.83)$$

В случае гармонической линейно поляризованной волны, как известно,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Пользуясь этим выражением и соотношением (5.50), перепишем уравнение (5.83) в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (5.84)$$

Приближенное решение подобного уравнения без правой части при $\gamma \ll \omega_0$ совпадает, как было показано в § 5-6, с выражением (5.52). Для оптической области спектра из формулы (5.51) при $\omega_0 = 10^{15} \text{ сек}^{-1}$ имеем $\gamma \approx 10^7 \text{ сек}^{-1}$. По истечении достаточно большого промежутка времени, который может быть весьма невелик с макроскопической точки зрения, с высокой степенью точности получим $e^{-\gamma t} = 0$, т. е. свободными колебаниями можно пренебречь по сравнению с вынужденными колебаниями, которые выражаются частным решением неоднородного уравнения (5.84).

Это решение будем искать в форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{i\omega t}.$$

Подставляя такое выражение в уравнение (5.84), получаем

$$\mathbf{r}_0 = \frac{e\mathbf{E}_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\omega\gamma)},$$

или

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{A} e^{i\varphi},$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}, \quad (5.85)$$

$$\varphi = \arctg \frac{2\omega\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \sin \varphi = \frac{2\omega\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}.$$

Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (5.86)$$

Таким образом, вынужденные гармонические колебания электрона происходят с амплитудой A и опережают по фазе колебания в падающей волне на угол φ .

Зависимость A и φ от ω/ω_0 представляет особый интерес вблизи резонансного значения угловой частоты ω , равного ω_0 .

Амплитуда при резонансе достигает максимального значения, равного

$$A_0 = \frac{eE_0}{2m\omega_0\gamma}.$$

Опережение по фазе φ составляет при резонансе $\pi/2$. Изображая на рис. 29 и 30 резонансные кривые, для наглядности возьмем случай

$\gamma = 0,1\omega_0$. В реальных случаях γ обычно гораздо меньше [см. замечание к уравнению (5.84)], а потому амплитуда и фаза очень резко меняются вблизи резонансного значения частоты. Ширина области, в пределах которой

$$A^2 > \frac{1}{2} A_0^2,$$

при малом γ приближенно, но достаточно точно может быть выражена в виде

$$\Delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{2\gamma}{\omega_0}. \quad (5.87)$$

В этой области φ меняется приблизительно от $3\pi/4$ до $\pi/4$. В области очень низких частот при $\omega \rightarrow 0$ имеем

$$A \rightarrow \frac{eE_0}{m\omega_0^2}, \quad \varphi \rightarrow \pi.$$

Это означает, в согласии с уравнением (5.86), что при $\omega \rightarrow 0$ получается в пределе статическое состояние электрона с отклонением от положения равновесия на расстояние, равное

$$\frac{eE_0}{m\omega_0^2},$$

в сторону, противоположную направлению вектора E_0 .

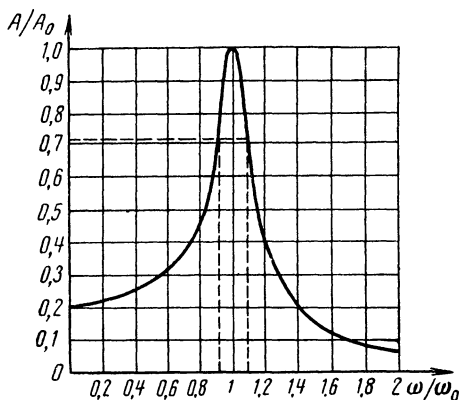


Рис. 29. График амплитуды вынужденных колебаний электрона

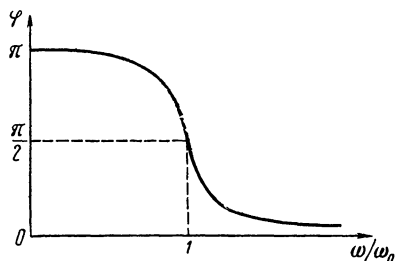


Рис. 30. График фазы в вынужденных колебаниях электрона

В области очень высоких частот, при $\omega \rightarrow \infty$, амплитуда и опережение по фазе φ стремятся к нулю. Близость значения амплитуды к нулю имеет тот смысл, что поле успевает изменить свое направление прежде, чем электрон заметно переместится.

Сравнение выражений (5.86) и (5.77) показывает, что характер волны, рассеянной связанным электроном, таков же, как в случае свободного электрона. Вычисляя среднюю мощность излучения связанного электрона на основании равенств (5.78), (5.86) и (5.85) получим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0 e^4 E_0^2 \omega^4}{12\pi m^2 c \{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2\}}. \quad (5.88)$$

По закону сохранения энергии такую же энергию в единицу времени падающая волна передает электрону. Это поглощение энергии волны связанным электроном достигает максимума при $\omega = \omega_0$, т. е. при резонансе.

Если падающий на связанные электроны свет не является монохроматическим, то он поглощается преимущественно вблизи резонанса, т. е. при частотах ω , близких к ω_0 . Так возникает спектр поглощения. Условно для оценки ширины спектральной линии поглощения принимается во внимание область, в пределах которой мощность поглощаемого излучения составляет не менее половины своего максимального значения.

При достаточно малом γ эта область ограничивается вследствие формулы (5.88) с высокой степенью точности значениями

$$\omega = \omega_0 - \gamma \quad \text{и} \quad \omega = \omega_0 + \gamma,$$

что согласуется с выражением (5.87) и характеризует центральную часть резонансной кривой (см. рис. 29).

Таким образом, *ширина спектральной линии поглощения* определяется формулой

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\gamma}{\pi}$$

и совпадает с шириной спектральной линии испускания (5.59), как и следовало ожидать (см. § 5-6).

§ 5-9. ЭФФЕКТ ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА

В предыдущих параграфах этой главы было рассмотрено поле электрона, движущегося в вакууме, и установлено, в частности, что при неизменной скорости заряда, в силу формул (5.32) и (5.35), излучения нет. При этом, как видно из формул (5.23) и (5.24), поле движется вместе с зарядом подобно твердому телу. Но если при движении заряда без ускорения поле должно перемещаться вместе с ним в веществе, где скорость распространения электромагнитного поля v меньше c , то в случае, когда скорость заряда u

больше v (но, конечно, меньше c), поле не в состоянии двигаться вместе с зарядом и будет отставать, отрываться от него, т. е. заряд будет при $v < u < c$ излучать электромагнитные волны.

Таким образом, ускорение заряда, которое, в силу формулы (5.35), является необходимым и достаточным условием для излучения при движении заряда в вакууме, не необходимо для излучения при движении в веществе. Это было доказано сравнительно недавно.

В 1934 г. П. А. Черенков, работая под руководством С. И. Вавилова, обнаружил своеобразное свечение жидкостей. Вавилов высказал правильное предположение, что источником этого излучения служили быстрые электроны.

Излучение электромагнитных волн заряженной частицей при движении ее в веществе с постоянной скоростью, превышающей фазовую скорость света, принято называть эффектом Вавилова — Черенкова. Теорию этого эффекта на основе классических представлений построили в 1937 г. И. Е. Тамм и И. М. Франк. Эффект Вавилова—Черенкова играет большую роль в современной физике¹.

При изложении теории эффекта будем говорить об электро-не, помня, что все наши утверждения относятся к любому точечному заряду q , если заменить e на $-q$.

Сделаем элементарные, преимущественно качественные, замечания по теории эффекта.

Будем рассматривать электрон как точечный заряд. Его положение относительно начальной точки, в которой он находился в начальный момент времени $t=0$, определяется радиусом-вектором \mathbf{r} . Обозначая постоянную скорость движения электрона через \mathbf{u} , имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}t.$$

Плотность заряда равна нулю всюду, кроме точки, определяемой таким соотношением между \mathbf{r} и t ; в этой же точке она бесконечно велика, поскольку электрон для простоты считается точечным.

Общее выражение плотности заряда можно построить, пользуясь так называемой δ -функцией, которая равна нулю всюду, кроме особой точки, где она обращается в бесконечность так, что интеграл от этой функции по всему объему равен 1 (см. приложение II). В нашем случае плотность заряда, как функция координат и времени, выражается в виде

$$\rho = -e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}t). \quad (5.89)$$

¹ За открытие и объяснение эффекта П. А. Черенкову, И. Е. Тамму и И. М. Франку в 1958 г. была присуждена Нобелевская премия.

Согласно уравнению (4.30) плотность тока, созданного движением электрона, равна

$$\mathbf{j} = -e\mathbf{u}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}t). \quad (5.90)$$

Эффект Вавилова — Черенкова, отсутствующий в вакууме, обусловлен взаимодействием электрона с частицами среды, в которой он движется. Свойства однородной изотропной среды отобразим без рассмотрения ее структуры, вводя в уравнения ее диэлектрическую проницаемость ϵ_a и магнитную проницаемость μ_a . Через \mathbf{E} и \mathbf{H} будем обозначать напряженности макроскопического поля, созданного электроном в среде. Они связаны со скалярным потенциалом φ и векторным потенциалом \mathbf{A} посредством соотношений (2.25), (2.26) и (2.15), т. е.

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (5.91)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}. \quad (5.92)$$

Для потенциалов справедливы уравнения (2.35) и (2.36), которые путем подстановки выражений (5.89) и (5.90) приводятся к виду

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{e}{\epsilon_a} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}t); \quad (5.93)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_a e \mathbf{u} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}t). \quad (5.94)$$

Поле, созданное электроном, легко найти, если будет решено уравнение (5.93), поскольку решение уравнения (5.94) можно представить в форме

$$\mathbf{A} = \epsilon_a \mu_a \mathbf{u} \varphi, \quad (5.95)$$

а \mathbf{E} и \mathbf{H} находятся из соотношений (5.91) и (5.92).

Уравнение (5.93) решается путем представления δ -функции в виде интеграла Фурье, как бесконечного множества волн со всевозможными волновыми числами.

В результате вычисления \mathbf{E} и \mathbf{H} с использованием выражения вектора Пойнтинга была найдена энергия, излучаемая электроном, отнесенная к единице длины его пути, а именно¹ (в системе единиц СИ)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_a e^2}{4\pi} \int_{nu > c} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 u^2}\right) \omega d\omega, \quad (5.96)$$

где $n = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\epsilon_0}}$ — показатель преломления, ω — угловая частота излучаемых колебаний. Здесь интеграл берется по всем значе-

¹ См.: УФН, 93, 388 (1967).

ниям частот, для которых

$$n(\omega) > \frac{c}{u}, \text{ т. е. } u > v;$$

физический смысл такого неравенства был установлен в начале этого параграфа.

Если $u \leq \frac{c}{n}$, т. е. если скорость электрона u меньше фазовой скорости света v или равна ей, излучения нет. С увеличением u область интегрирования расширяется и dW/dl растет.

Некоторые важные свойства излучения Вавилова — Черенкова выясняются без громоздких выкладок.

При движении электрона в неограниченной однородной и изотропной среде его поле, очевидно, симметрично относительно линии, совпадающей с направлением скорости. Всюду, кроме точки, занятой электроном, уравнение (5.93) сводится к однородному уравнению

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

решение которого можно искать в виде

$$\varphi = \varphi_0 e^{ik(r - ut)}, \quad (5.97)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор. Тогда

$$k^2 - \varepsilon_a \mu_a (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 = 0,$$

и если ϑ означает угол между \mathbf{k} и \mathbf{u} , то

$$\cos \vartheta = \frac{1}{u \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}},$$

или

$$\cos \vartheta = \frac{c}{nu}, \quad (5.98)$$

где $n = \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\varepsilon \mu}$ — показатель преломления.

Итак, решение в виде (5.97) существует при

$$u > \frac{c}{n}. \quad (5.99)$$

Но выражение (5.97) означает, что скалярный потенциал φ меняется во времени и в пространстве по закону гармонических колебаний. Согласно соотношению (5.95) то же самое справедливо для векторного потенциала \mathbf{A} . Тогда, как видно из формул (5.91) и (5.92), возникает синусоидальная электромагнитная волна. Итак, электрон излучает волну при равномерном и прямолинейном движении со скоростью, превышающей фазовую скорость света, причем направление распространения волны в любой точке M (рис. 31) определяется формулой (5.98).

Если электрон выходит в начальный момент времени из точки O и в момент t достигает точки O_1 , то при этом фронтом волны служит боковая поверхность прямого кругового конуса с полным углом раствора $\pi - 2\vartheta$, пересекающая плоскость чертежа (см. рис. 31) по линии $A_1O_1B_1$ в момент t и по линии $A_2O_2B_2$ в момент $t + dt$.

К тому же выводу относительно распространения конической волны под углом ϑ можно прийти проще, исходя из того, что за время dt , когда электрон проходит путь $O_1O_2 = udt$, фронт волны, перемещаясь в направлении волнового вектора \mathbf{k} , двигается на расстояние $O_1P = \frac{c}{n} dt$.

Следовательно, для угла ϑ между направлениями \mathbf{u} и \mathbf{k} справедлива формула

$$\cos \vartheta = \frac{O_1P}{O_1O_2} = \frac{c}{nu}.$$

Таким образом, подтверждается формула (5.98) и наглядно обнаруживается существование конической волны, излучаемой электроном при движении с постоянной сверхсветовой скоростью в среде, где $n > 1$.

Условие (5.99), необходимое и достаточное для существования излучения Вавилова — Черенкова, сравнительно легко выполняется на опыте в твердых и жидких телах, где показатель преломления n достаточно велик. Наиболее быстрые частицы космических лучей способны создавать такое излучение и в газах. Теоретическая зависимость (5.98) между величинами ϑ , n и u была проверена экспериментально; получилось прекрасное согласие с теорией. Энергия излучения, создаваемого одной частицей, согласно уравнению (5.96) крайне мала. Однако ее удается измерить путем применения фотоумножителей с многократным усилением. Такие измерения свидетельствуют о справедливости теории. Принцип регистрации излучения Вавилова — Черенкова, обусловленного движением одной частицы, используется в счетчиках заряженных частиц. Такие счетчики называются черенковскими; в последние годы они находят все более широкое применение. Черенковские счетчики позволяют на основании неравенства (5.99) легко судить о нижнем пределе скорости регистрируемых частиц, а измерение угла излучения ϑ дает возможность благодаря соотношению (5.98) весьма точно определить их скорость.

Поскольку излучение Вавилова — Черенкова можно рассматривать как результат того, что электрон при соблюдении условия

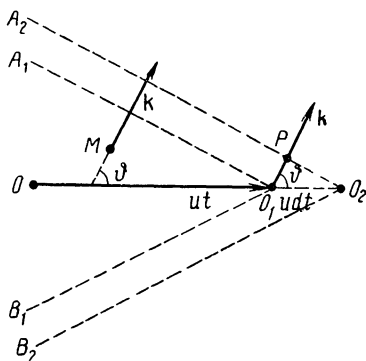


Рис. 31. К эффекту Вавилова — Черенкова

(5.99) обгоняет распространение электромагнитного поля, которое как бы отрывается от него, т. е. излучается, естественно ожидать несколько аналогичного отрыва поля и в тех случаях, когда электрон, двигаясь с постоянной скоростью, пусть недостаточной для выполнения неравенства (5.99), переходит из одной среды в другую. Причиной некоторого отрыва поля от электрона следует считать в этом случае резкое изменение фазовой скорости света при сохранении скорости электрона. Существование такого переходного излучения, родственного эффекту Вавилова — Черенкова, подтверждено экспериментально.

В заключение отметим, что явления, аналогичные эффекту Вавилова — Черенкова, обнаруживаются и вне области электромагнитных явлений. При скорости тела, превышающей скорость распространения волнового процесса в среде (например, при сверхзвуковой скорости самолета, при обычном движении судна в воде и т. д.), получается аналогичная картина движения фронта волны (см. рис. 31) и возникают потери энергии на образование волн.

Задачи

25. Электрон равномерно движется в вакууме по окружности радиуса R со скоростью u , пренебрежимо малой по сравнению со скоростью света. Каково расстояние (по порядку величины) от электрона до границы волновой зоны?

26. Вычислить напряженность поля E точечного заряда q в вакууме и индукцию B при движении заряда с постоянной скоростью u , исходя из системы отсчета, в которой заряд покоится.

27. Электрон движется прямолинейно и равномерно со скоростью $u = 10^8$ м/сек. Считая его шариком с зарядом, равномерно распределенным по объему, найти максимальную напряженность магнитного поля, созданного движением электрона.

28. Найти силу действия электрона на самого себя при поступательном движении с ускорением \dot{u} и скоростью, пренебрежимо малой по сравнению со скоростью света.

29. Электрон движется со скоростью $u \ll c$ и ускорением a . Какова интенсивность излучения (мощность излучения, отнесенная к единице телесного угла) в волновой зоне под углом ϑ к вектору a ?

30. Электрон движется в бетатроне по окружности радиуса $R = 1$ м с пренебрежимо малой начальной скоростью. Магнитная индукция на орбите электрона возрастает от нуля до $0,5$ тл. Каковы будут при этом средняя магнитная индукция внутри орбиты, скорость электрона, мощность его излучения и длина волны, при которой получается максимум излучения?

31. По какому закону менялась бы со временем энергия электрона в резерфордовской модели атома водорода с начальным радиусом орбиты $R = 0,5 \text{ \AA}$, если бы электрон двигался и излучал по законам классической электронной теории? Какова была бы при этом продолжительность существования атома?

32. Найти величину и направление силы лучистого трения, которая действует на электрон, равномерно движущийся по окружности радиуса R со скоростью $u \ll c$.

§ 6-1. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Рассмотрим идеальные диэлектрики, не обладающие электропроводностью. Все заряды таких диэлектриков являются связанными. Внешнее электрическое поле предполагается не настолько сильным, чтобы оно могло разорвать связь между зарядами, т. е. вызвать электрический пробой диэлектрика.

На основе модельных представлений электронной теории о веществе можно различать три класса диэлектриков¹.

К первому классу относятся *диэлектрики с квазиупругими диполями*. Вследствие соответствующего (например, сферически симметричного) распределения электрических зарядов в молекуле дипольный момент таких диэлектриков в отсутствие внешнего электрического поля можно считать равным нулю. Чтобы выяснить влияние внешнего электрического поля на поведение заряженных частиц в такой молекуле, будем рассматривать ее как систему, состоящую из положительного иона и связанного с ним квазиупругой силой электрона. Равновесное положение электрона, находящегося в электростатическом поле, определяется согласно уравнению (5.83) соотношением

$$eE_d = -kr, \quad (6.1)$$

где E_d — напряженность электрического поля, действующего на электрон, r — радиус-вектор, проведенный в точку, где находится электрон, из начала координат, совпадающего с центром положительного иона.

Длиной диполя l называют вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному, т. е. от электрона к центру иона. Таким образом, $l = -r$, или, с учетом равенства (6.1),

$$l = \frac{e}{k} E_d. \quad (6.2)$$

Следовательно, *электрический момент квазиупругого диполя* p , равный $e l$, пропорционален действующему полю, т. е.

$$p = \alpha E_d, \quad (6.3)$$

¹ Более детальная классификация в данном пособии не требуется.

где

$$\alpha = \frac{e^2}{k}. \quad (6.4)$$

Коэффициент пропорциональности α представляет собой *поляризуемость молекулы*.

Однако представление о квазиупругой силе и связанное с этим представление о пропорциональности p и E_d могут быть справедливы лишь при достаточной малости длины диполя l (см. § 4-1). Это значит, что напряженность действующего поля E_d должна быть незначительна. Современные представления о структуре атомов и молекул подтверждают, что дипольный момент, обусловленный достаточно слабым полем E_d , действительно можно считать пропорциональным E_d .

Ориентация каждого диполя в диэлектрике первого класса согласно соотношению (6.2) зависит только от направления поля. Теоретические выводы, вытекающие из рассмотренных представлений о свойствах диполей в диэлектрике, в ряде случаев подтверждаются экспериментально (см. § 6-5). На этом основании к классу диэлектриков с квазиупругими диполями относятся различные газы (водород, кислород, азот, инертные газы, углекислый газ, метан и др.), некоторые жидкости (бензол, хлороформ и др.), полимеры (полиэтилен, полистирол и др.) и кристаллы (нафталин, сера и др.).

Ко второму классу принадлежат *полярные диэлектрики*, молекулы которых обладают дипольным моментом в отсутствие внешнего поля. Эти молекулы состоят из ионов, например молекула HCl состоит из ионов H^+ и Cl^- . Величина электрического дипольного момента такой молекулы всегда в некоторой мере зависит от электрического поля, которое обязательно вызывает относительное смещение заряженных частиц молекулы. Поэтому полярную молекулу можно рассматривать как сочетание двух диполей: один из них *жесткий диполь* с постоянным по величине моментом

$$p_0 = \text{const}, \quad (6.5)$$

а другой — квазиупругий диполь, для него справедливо соотношение (6.3). Ориентация электрического момента каждого жесткого диполя существенно зависит, в частности, от ориентации смежных диполей.

Теоретические следствия таких представлений во многих случаях подтверждаются экспериментально (см. § 6-5), причем выясняется, что к классу диэлектриков с полярными молекулами относятся некоторые газы (хлористый водород, аммиак, окись азота и др.), жидкости (вода, спирты, эфиры и др.), полярные полимеры и т. п.

Для диэлектриков второго класса типичны в обычных условиях более высокие значения диэлектрической проницаемости, чем для диэлектриков первого класса.

К третьему классу можно отнести *ионные диэлектрики*, в которых важную роль играют квазиупругие диполи, образованные

смежными разноименными ионами, входящими в состав кристаллической решетки твердого тела.

Теория этих твердых диэлектриков отличается значительным своеобразием [10], и она здесь рассматриваться не будет. Заметим лишь, что к ионным диэлектрикам относятся, например, каменная соль, сернистый цинк и многие другие ионные кристаллы, обладающие значительной относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_a/\epsilon_0$, порядка нескольких единиц и более.

Среди них есть такие, у которых структура особенно благоприятствует большим дипольным моментам. В некоторых кристаллах этого типа благодаря очень сильному взаимодействию смежных диполей и без воздействия внешнего поля существует сильное внутреннее поле, возникающее в процессе кристаллизации.

Такие диэлектрики носят название *сегнетоэлектрики*. Их характерное свойство — спонтанная¹ поляризация, существующая в отсутствие внешнего поля (аналогично тому, как у ферромагнетиков существует спонтанная намагниченность). Такое свойство было впервые открыто у сегнетовой соли², по которой сегнетоэлектрики и получили свое название. При некоторых температурах они обладают большой относительной диэлектрической проницаемостью, достигающей в слабых полях порядка десятков тысяч, и во многом подобны ферромагнетикам. Сегнетоэлектрики представляют большой практический интерес, в частности как материал для конденсаторов. В СССР и за рубежом открыты и исследованы многие сегнетоэлектрики: титанат бария, титанат свинца и др. Выдающиеся исследования сегнетоэлектриков принадлежат И. В. Курчатову и Б. М. Вулу.

§ 6-2. ПОЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЕ НА ДИПОЛЬ

Сначала рассмотрим диэлектрик с квазиупругими диполями. Положение одного заряда диполя (электрона) по отношению к другому заряду (положительному иону) зависит, согласно соотношению (6.1), от напряженности E_d действующего поля. При этом собственное поле диполя не включается в E_d ; оно участвует в создании квазиупругой силы. Таким образом, поле E_d обусловлено зарядами, лежащими вне диполя.

Как показывают измерения дипольных моментов молекул (см. § 6-5), длина диполя, изображающего молекулу, обычно несколько меньше размеров молекулы. При этом длиной диполя можно упрощенно пренебрегать по сравнению с расстоянием до источников поля; следовательно, поле можно считать однородным на протяжении длины диполя.

¹ «Спонтанная» означает самопроизвольная, существующая без внешних воздействий.

² Это — двойная калиево-натриевая соль винной кислоты.

Будем рассматривать центр O диполя AB (рис. 32) как точку наблюдения, в которой существует поле E_d . Это *действующее (локальное) поле* не совпадает с усредненным, макроскопическим, полем E в диэлектрике по двум причинам. Во-первых, действующее поле E_d отличается от микроскопического поля E_0 в центре молекулы, так как собственное поле E_c диполя не входит в E_d , но включается в E_0 . Во-вторых, микрополе E_0 отличается от макроскопического поля E .

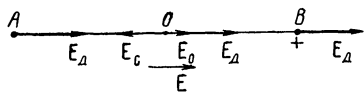


Рис. 32. Сравнение действующего на диполь поля с усредненным полем

Найдем *соотношение между действующим (локальным) полем E_d и усредненным полем E* .

Выделим мысленно из диэлектрика физически бесконечно малый объем V_1 вокруг центра диполя и обозначим остальной объем диэлектрика через V_2 . Форма мысленно выделяемого объема V_1 не должна, очевидно, сказаться на соотношении между E_d и E , а достаточная малость этого объема позволяет считать вектор поляризации P в объеме V_1 неизменным.

Рассмотрим кубический объем V_1 , центр которого совпадает с центром одного из диполей и две грани перпендикулярны E и P .

Если удалить диэлектрик из объема V_1 , то на двух гранях, перпендикулярных P , будут связанные заряды (рис. 33). Как известно из макроскопической электродинамики, вследствие уравнения Максвелла (2.22) усредненная плотность связанных зарядов σ и нормальная составляющая вектора поляризации равны по абсолютной величине, т. е. в нашем случае $|\sigma| = P$. Элемент заряженной поверхности dS обладает зарядом σdS и создает в точке O напряженность электрического поля, по абсолютной величине равную согласно формуле (2.4)

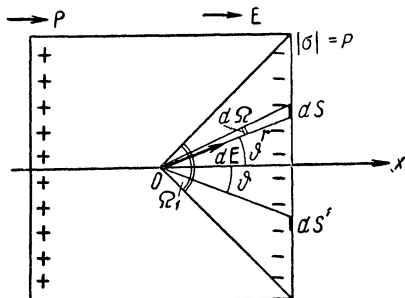


Рис. 33. К вычислению действующего поля в диэлектрике

$$dE = \frac{PdS}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (6.6)$$

Пусть ось x проходит через точку O параллельно вектору E . Для любого элемента dS найдется симметрично расположенный относительно оси x элемент dS' . Перпендикулярные оси x составляющие напряженности поля, созданного элементами dS и dS' , взаимно компенсируются. Вместо dE следует рассматривать

проекцию

$$dE_1 = dE \cdot \cos \vartheta = \frac{Pd\Omega}{4\pi\epsilon_0}, \quad (6.7)$$

где $d\Omega$ — телесный угол, под которым из точки O виден элемент dS . Если Ω_1 — телесный угол, под которым из точки O видна грань куба, то две противоположные заряженные грани (см. рис. 33) создают в точке O напряженность поля, равную

$$E_1 = 2 \int_{\Omega_1} \frac{Pd\Omega}{4\pi\epsilon_0} = \frac{P\Omega_1}{2\pi\epsilon_0}. \quad (6.8)$$

Но куб имеет шесть одинаковых граней и каждая из них видна из точки O под тем же углом Ω_1 . Следовательно, $\Omega_1 = \frac{4\pi}{6}$, и в итоге получаем (в единицах СИ)

$$E_1 = \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (6.9)$$

Вектор E означает напряженность макроскопического поля в точке O , обусловленного внешними зарядами и диэлектриком, занимающим объем $V_1 + V_2$. Мысленное удаление диэлектрика из объема V_1 означает, что макроскопическое поле в точке O выразится уже в виде

$$E + E_1 = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (6.10)$$

Это поле обусловлено зарядами, находящимися как вне диэлектрика, так и в его объеме V_2 . Микроструктура таких зарядов не играет заметной роли, поскольку расстояния между ними малы по сравнению с расстояниями от них до точки O . Поэтому созданное ими микрополе в точке O с высокой степенью точности совпадает с макроскопическим полем (6.10).

Чтобы найти действующее поле E_d в точке O , остается добавить к выражению (6.10) напряженность E_2 микрополя, созданного диполями, фактически расположенными в объеме V_1 , исключая диполь, центр которого совпадает с точкой O .

Таким образом, напомним

$$E_d = E + \frac{P}{3\epsilon_0} + E_2. \quad (6.11)$$

Как известно, потенциал поля диполя на расстоянии r , большом по сравнению с длиной диполя, выражается в виде

$$\varphi = \frac{(\mathbf{p}\mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (6.12)$$

что справедливо для вакуума. Но электронная теория предполагает именно вакуум в пространстве между зарядами диполей.

Компоненты напряженности электростатического поля диполя удовлетворяют соотношениям $E_x = -\text{grad}_x \varphi$ и т. д., следова-

тельно

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{pr})x}{r^5} - \frac{p_x}{r^3} \right\} \quad \text{и т. д.,}$$

или

$$E_x = \frac{p_x(2x^2 - y^2 - z^2) + 3(p_y \cdot y + p_z \cdot z)x}{4\pi\epsilon_0 r^5} \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда компоненты поля E_2 получаются путем суммирования по всем диполям в объеме V_1 , за исключением диполя, центр которого совпадает с точкой O .

Ограничимся случаем одинаковых диполей; так как они являются квазиупругими, с одинаковой ориентировкой вдоль поля (см. § 6-1), то и компоненты дипольных моментов одинаковы. Тогда

$$4\pi\epsilon_0 E_{2x} = p_x \left\{ \sum_i \frac{x_i^2 - y_i^2}{r^5} + \sum_i \frac{x_i^2 - z_i^2}{r^5} \right\} + 3p_y \sum_i \frac{x_i y_i}{r^5} + 3p_z \sum_i \frac{x_i z_i}{r^5}, \quad (6.13)$$

аналогично выражаются компоненты E_{2y} , E_{2z} .

Допустим, что существует *кубическая решетка твердого тела*. Совместим начало координат с точкой O , в которой определяется действующее поле, и направим оси x , y , z по главным осям кристаллической решетки.

Для любого диполя в объеме V_1 с координатами его центра x_1 , y_1 , z_1 , найдется другой диполь в том же объеме с координатами $x_2 = y_1$, $y_2 = x_1$, $z_2 = z_1$, а также диполь с координатами $x_3 = -x_1$, $y_3 = y_1$, $z_3 = z_1$, так что

$$\sum_i \frac{x_i^2 - y_i^2}{r^5} = 0; \quad \sum_i \frac{x_i y_i}{r^5} = 0.$$

Аналогичным образом все другие суммы в выражениях E_{2x} , E_{2y} и E_{2z} оказываются равными нулю. Итак, в этом случае $E_2 = 0$ и

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \quad (6.14)$$

В связи с использованием формулы (6.12) результат (6.14) получен, строго говоря, лишь для случая, когда расстояния между диполями велики по сравнению с размерами диполей.

Рассмотрим теперь совершенно *беспорядочное расположение диполей* (молекул), характерное для газов и неполярных жидкостей.

Если при беспорядочном движении молекула с некоторой вероятностью может пройти через точку x_1 , y_1 , z_1 , то с такой же вероятностью она может оказаться в точке $x_2 = y_1$, $y_2 = x_1$, $z_2 = z_1$ или в точке $x_3 = -x_1$, $y_3 = y_1$, $z_3 = z_1$. В результате среднее по времени значение \mathbf{E}_2 , обусловленное каждым диполем и всеми молекулами, вместе взятыми, будет равно нулю.

При этом опять справедливо соотношение (6.14), однако E_d имеет теперь смысл усредненной по времени напряженности действующего поля.

Как видно, нет оснований утверждать, что в диэлектриках с квазиупругими диполями всегда справедливо соотношение (6.14).

Однако потенциал и поле каждой молекулы пропорциональны ее дипольному моменту, а потому суммарное поле E_2 независимых (невзаимодействующих) молекул, расположенных в объеме V_1 , можно считать пропорциональным P . При этом вследствие соотношения (6.11)

$$E_d = E + aP, \quad (6.15)$$

где a — коэффициент пропорциональности, определяемый на основе экспериментальных данных (см. § 6-3). Соотношение (6.14) справедливо при $a = \frac{1}{3\epsilon_0}$.

Рассматривая поведение диэлектриков с полярными молекулами в электростатическом поле, нетрудно снова прийти к соотношению (6.11). Однако вычисление поля E_2 осложняется тем, что моменты жестких диполей по-разному ориентированы в пространстве и направление каждого из них зависит вследствие взаимодействия от ориентации других, преимущественно смежных, диполей.

Эта корреляция между направлениями близких друг к другу жестких диполей не позволяет прийти к заключению, что $E_2 = 0$ или что поле E_2 пропорционально P .

Однако в случае дипольных газов и паров межмолекулярные расстояния значительны и потому корреляция между направлениями дипольных моментов является слабой. При этом, как и в случае квазиупругих диполей, есть основания считать справедливым соотношение (6.15) с коэффициентом a , определяемым из опыта (см. § 6-4).

Вектор поляризации P , как сумма дипольных моментов, отнесенная к единице объема, очевидно, приближается к нулю при неограниченном уменьшении числа молекул в единице объема. В случае достаточно разреженного газа в соотношении (6.15) можно пренебречь членом, содержащим P , т. е. можно считать, что напряженность действующего (локального) поля равна напряженности макроскопического поля E .

§ 6-3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКА С КВАЗИУПРУГИМИ ДИПОЛЯМИ

Процесс поляризации диэлектрика с квазиупругими диполями в электрическом поле можно рассмотреть, исходя из уравнения (5.83). Перепишем его в следующем виде:

$$m\ddot{r} + 2m\dot{\gamma}\dot{r} + k\gamma r = -eE_d. \quad (6.16)$$

Общее решение этого уравнения является суммой общего решения уравнения без правой части и частного решения неоднородного уравнения; при этом первое слагаемое соответствует свободным колебаниям, которые обычно быстро затухают (см. § 5-8). Поэтому практический интерес представляет только *вынужденный режим*.

Начнем с простого случая, когда действующее поле \mathbf{E}_d не меняется со временем. Тогда частным решением уравнения (6.16) будет выражение

$$\mathbf{r} = -\frac{e}{k} \mathbf{E}_d,$$

эквивалентное соотношению (6.1). При этом каждый квазиупругий диполь обладает постоянным моментом (6.3), и поляризация \mathbf{P} , как сумма дипольных моментов, отнесенная к единице объема, не меняется со временем.

Этому режиму соответствует, как видно из соотношения (6.15), отсутствие изменений \mathbf{E} со временем, т. е. макроскопическое поле является электростатическим.

Будем предполагать, что все молекулы диэлектрика обладают одинаковой поляризуемостью α и в диэлектрике существует такой малый объем, что на несколько диполей, находящихся в нем, действует одинаковое поле \mathbf{E}_d . Тогда электрические моменты всех этих диполей, определяемые формулой (6.3), одинаковы.

Число диполей, отнесенное к единице объема, обозначим через N . Поляризация \mathbf{P} , т. е. отнесенная к единице объема сумма дипольных моментов, выражается в виде

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p},$$

или благодаря равенству (6.3)

$$\mathbf{P} = N\alpha\mathbf{E}_d. \quad (6.17)$$

Подставим выражение для \mathbf{E}_d (6.15). Тогда

$$\mathbf{P} = N\alpha(\mathbf{E} + a\mathbf{P}),$$

откуда

$$\mathbf{P} = \frac{N\alpha}{1 - aN\alpha} \mathbf{E}. \quad (6.18)$$

В макроскопической электродинамике, как известно,

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}, \quad (6.19)$$

где χ — *диэлектрическая восприимчивость*.

Из сравнения равенств (6.18) и (6.19) имеем

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - aN\alpha}. \quad (6.20)$$

По этой формуле χ монотонно растет от 0 до ∞ с увеличением N от 0 до $\frac{1}{a\alpha}$.

Однако при $N \rightarrow \frac{1}{a\alpha}$ получаем

$$\frac{\chi}{N} \rightarrow \infty, \quad \rho = \frac{\chi}{N} E \rightarrow \infty,$$

т. е. момент и длина каждого диполя неограниченно растут, тогда как в основе теории квазиупругих диполей лежит предположение о достаточной малости длины диполя (см. § 6-1).

Следовательно, формула (6.20) справедлива лишь при ограниченной плотности вещества, когда достаточно сильно выполняется неравенство

$$N < \frac{1}{a\alpha}. \quad (6.21)$$

Если воспользоваться соотношением (6.14), т. е. принять $a = \frac{1}{3\epsilon_0}$ и заменить α на основании выражений (6.4) и (5.50) то неравенство (6.21) можно переписать в виде

$$N < \frac{3\epsilon_0 m \omega_0^3}{e^2}, \quad (6.22)$$

где ω_0 — резонансная частота колебаний связанного электрона, т. е. угловая частота спектральной линии (см. § 5-8). Например, при $\omega_0 \approx 10^{15} \text{ сек}^{-1}$ условие (6.22) означает, что число частиц, приходящееся на 1 м^3 , должно быть существенно меньше 10^{27} .

Если заметить, что в твердых и жидких телах число частиц в 1 м^3 составляет по порядку величины $10^{28} \div 10^{29}$, то формулу (6.20) следует считать справедливой, строго говоря, лишь для газов. По этой формуле диэлектрическая восприимчивость χ растет с увеличением давления газа (благодаря возрастанию N), что подтверждается опытом.

Из сравнения соотношений (6.19) и (4.51) с уравнением (2.9) следует, что

$$\epsilon_a = \epsilon_0 + \chi. \quad (6.23)$$

Таким образом, диэлектрическая проницаемость ϵ_a при условии справедливости формулы (6.20) может быть представлена в виде

$$\epsilon_a = \epsilon_0 + \frac{N\alpha}{1 - aN\alpha}. \quad (6.24)$$

Отсюда видно, чем объясняются различные значения ϵ_a у диэлектриков первого класса. Большую роль играет число молекул N в единице объема. Весьма существенны также те свойства молекул, которые отображаются значениями поляризуемости α или квазиупругого коэффициента k , через который выражается α в виде (6.4). Слабее сказываются различия в значениях коэффициента a , поскольку содержащий его член мал по сравнению с единицей.

Рассмотрим относительную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}.$$

Воспользуемся соотношением (в системе единиц СИ)

$$N = \frac{N'_A \cdot d}{M}, \quad (6.25)$$

где N'_A — число частиц в 1 килограмм-молекуле ($N'_A = 10^3 N_A$, если N_A — число Авогадро), d — плотность вещества, M — молекулярный вес. Тогда на основании равенства (6.24) находим

$$\frac{1}{\varepsilon - 1} = \frac{\varepsilon_0 M}{N'_A \cdot \alpha d} - \varepsilon_0 \alpha. \quad (6.26)$$

Эта линейная зависимость $\frac{1}{\varepsilon - 1}$ от $\frac{1}{d}$ дает возможность определять величины α и α путем измерений ε при разных d .

В случае справедливости соотношения (6.14) коэффициент α заменяется на $\frac{1}{3\varepsilon_0}$, и тогда равенство (6.26) принимает вид

$$\frac{M}{d} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{N'_A \cdot \alpha}{3\varepsilon_0}. \quad (6.27)$$

Это соотношение носит название формулы Клаузиуса — Моссотти. При $N \rightarrow 0$ относительная диэлектрическая проницаемость ε стремится к 1. Поэтому для достаточно разреженных газов $\varepsilon + 2$ заменяется на 3, и уравнение (6.27) переписывается в виде

$$\varepsilon - 1 = \frac{N'_A \alpha d}{\varepsilon_0 M}. \quad (6.28)$$

Такое упрощение означает в сущности, что мы пренебрегаем отличием действующего поля E_d от макроскопического поля E (см. § 6-2).

Вытекающее из соотношения (6.27) постоянство величины

$$\frac{1}{d} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$$

действительно обнаруживается экспериментально для многих газов, помещенных в электростатическое поле при давлениях до нескольких сотен атмосфер. При этом поляризуемость молекулы легко вычисляется из опытных данных с помощью соотношения (6.27).

Зная величину α , можно грубо оценить размеры молекулы. В самом деле, в твердых и жидких телах, когда ε существенно больше единицы и $\alpha \approx \frac{1}{3\varepsilon_0}$, если считать приближенно справедливой формулу (6.24), выражение $N\alpha/\varepsilon_0$, согласно неравенству

(6.21), будет близко к единице. Поэтому объем $\frac{1}{N}$, приходящийся на долю одной молекулы, не очень сильно отличается от α/ϵ_0 .

Как известно, в твердых и жидких телах объем, приходящийся в среднем на долю одной молекулы, почти равен собственному объему молекулы. Таким образом, по порядку величины поляризуемость молекулы совпадает с ее объемом, умноженным на ϵ_0 .

К такому же выводу можно прийти, рассматривая простейшую планетарную модель атома водорода, где электрон движется вокруг ядра по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью ω . Ограничимся случаем, когда действующее поле E_d направлено перпендикулярно плоскости орбиты электрона. Оно создает смещение среднего по времени положения электрона, т. е. центра орбиты, на расстояние l относительно ядра (рис. 34). Сила кулоновского притяжения электрона к ядру

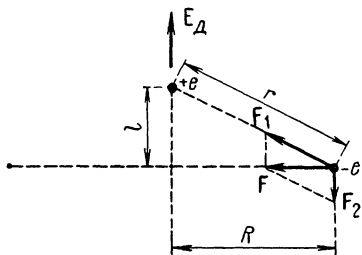


Рис. 34. К теории поляризации атома водорода

$$F_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Действующее поле создает силу

$$F_2 = -eE_d.$$

Равнодействующая сила F представляет собой центростремительную силу и лежит в плоскости орбиты. Из подобия треугольников (см. рис. 34) следует, что

$$\frac{l}{r} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{4\pi\epsilon_0 r^2 E_d}{e}.$$

Отсюда находим дипольный момент

$$p = el = 4\pi\epsilon_0 r^3 E_d.$$

При малом смещении с достаточной точностью имеем $r = R$, и тогда из сравнения с равенством (6.3) получаем

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3. \quad (6.29)$$

Если для диэлектрика с квазиупругими диполями найти α из опыта, основываясь на формуле (6.27), то из соотношения (6.29) получается

$$R \approx 10^{-10} \text{ м.}$$

Как известно, другие физические методы приводят к такой же оценке размеров молекул по порядку величины.

Из формул (6.28) и (6.27) вытекает представление о постоянстве относительной диэлектрической проницаемости ϵ при фиксированной плотности вещества d . Этот результат относится к рассмотренному нами случаю поляризации диэлектрика в электростатическом поле.

Диэлектрическая проницаемость в быстропеременных полях должна существенно зависеть от угловой частоты ω электрического поля, как видно из следующих соображений.

Амплитуда A вынужденных колебаний электрона в квазиупругом диполе растет с приближением ω к резонансному значению ω_0 (см. § 5-8, рис. 29). Но максимальный дипольный момент равен произведению этой амплитуды на абсолютную величину заряда электрона. Если растет амплитуда, то увеличивается средний по времени дипольный момент каждой молекулы и растет поляризация P . Это означает, в согласии с соотношениями (6.19) и (6.23), возрастание диэлектрической восприимчивости χ и диэлектрической проницаемости ϵ_a .

В связи с формулой (5.85) можно считать A , ϵ_a и ϵ приблизительно постоянными, если $\omega \ll \omega_0$, т. е. когда частота внешнего поля гораздо меньше резонансной частоты колебаний связанного электрона. Здесь обнаруживается ограниченность присущего теории Максвелла допущения, что диэлектрическая проницаемость постоянна ($\epsilon_a = \text{const}$) независимо от длины волны. В действительности же ϵ_a и ϵ можно считать постоянными только в области достаточно малых частот.

§ 6-4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКА С ПОЛЯРНЫМИ МОЛЕКУЛАМИ

Полярную молекулу можно рассматривать как сочетание жесткого и квазиупругого диполей (см. § 6-1). Зная из предыдущего параграфа, как ведут себя квазиупругие диполи в электрическом поле, рассмотрим теперь *поведение жестких диполей* с постоянным по величине дипольным моментом

$$p_0 = el. \quad (6.30)$$

В отсутствие внешнего поля беспорядочное тепловое движение молекул и соударения их между собой приводят к хаотическому распределению ориентаций жестких диполей в пространстве. При этом все направления дипольного момента равновероятны, поскольку речь идет об изотропных диэлектриках.

Воспользуемся сферической системой координат r, ϑ, ψ . Число диполей в единице объема обозначим через N . Из них dN ориентированы так, что для их дипольных моментов p_0 значения угла ϑ лежат в интервале от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$ и значения угла ψ — от ψ до $\psi + d\psi$; этим интервалам углов соответствует элемент сферической поверхности с площадью $dS = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\psi$.

Вследствие равновероятности всех направлений векторов p_0 можно написать

$$\frac{dN}{N} = \frac{dS}{4\pi r^2} = \frac{\sin \vartheta d\vartheta d\psi}{4\pi}. \quad (6.31)$$

Число диполей dN_ϑ , которые ориентированы в интервале от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$ при всевозможных значениях угла ψ , равно $dN_\vartheta = \int_{\psi=0}^{2\pi} dN$, т. е.

$$dN_\vartheta = \frac{N}{2} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (6.32)$$

Допустим теперь, что на диполь действует электрическое поле E_d , направленное вдоль полярной оси z , от которой отсчитывается угол ϑ (рис. 35). Пара сил, равных

$$F_1 = eE_d, \quad F_2 = -eE_d,$$

стремится ориентировать диполь по направлению поля.

Однако диполь участвует в беспорядочном тепловом движении молекулы, поэтому угол ϑ меняется. По законам классической статистики, средняя кинетическая энергия, приходящаяся на эту степень свободы, равна $\frac{kT}{2}$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Если E_d — электростатическое, т. е. консервативное поле, то поведение диполя будет аналогично колебаниям маятника в консервативном поле тяжести. Маятник способен пройти через все кинематически возможные положения, если его кинетическая энергия в положении с наибольшей потенциальной энергией положительна или равна нулю. Это означает, что средняя кинетическая энергия не менее полуразности наибольшего и наименьшего значений потенциальной энергии. Тогда маятник делает один оборот за другим вокруг точки закрепления, и поле не сообщает ему преимущественной ориентации.

Посмотрим, какова потенциальная энергия диполя в поле E_d . Будем считать это поле однородным на протяжении длины диполя (см. § 6-2). Тогда разность потенциалов между точками, где находятся положительный и отрицательный заряды диполя (см. рис. 35), равна

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -E_d(z_2 - z_1),$$

и потенциальная энергия диполя

$$W = e\varphi_2 - e\varphi_1 = -eE_d l \cos \vartheta,$$

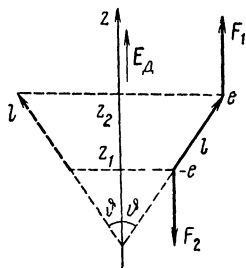


Рис. 35. Жесткие диполи под действием электрического поля

или, в силу равенства (6.30),

$$W = -p_0 E_d \cos \vartheta. \quad (6.33)$$

Полуразность наибольшего и наименьшего значений потенциальной энергии равна $p_0 E_d$. Эту величину следует сравнить со средней кинетической энергией, которая приходится на одну степень свободы и равна $\frac{kT}{2}$.

При условии

$$p_0 E_d \ll kT$$

поле почти не влияет на поведение диполей; только незначительная часть из них подвергается преимущественной ориентации в направлении поля, а именно те, у каждого из которых средняя энергия движения в направлении оси ϑ меньше $p_0 E_d$, т. е. гораздо меньше kT .

Напротив, при условии

$$p_0 E_d \gg kT$$

ориентация диполей вдоль поля будет решительно преобладать над противоположной ориентацией, которая остается возможной только для диполей с большой энергией беспорядочного движения. Таким образом, диэлектрик приобретает поляризацию в направлении поля, которая зависит от отношения

$$\eta = \frac{p_0 E_d}{kT}. \quad (6.34)$$

В отличие от случая квазиупругих диполей здесь отчетливо выступает на первый план *статистический механизм поляризации*.

Известное из классической статистики распределение Максвелла—Больцмана означает, что если известна функция распределения в отсутствие внешнего поля, то при наличии консервативного поля она отличается множителем

$$e^{-\frac{W}{kT}}, \quad (6.35)$$

где W — потенциальная энергия микрообъекта во внешнем поле.

Следовательно, если действует поле E_d , то вместо соотношения (6.32), с учетом равенств (6.33) и (6.34), имеем

$$dN_\vartheta = C e^{\eta \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (6.36)$$

где постоянный множитель C определяется из условия, что общее число молекул в единице объема равно N , т. е.

$$\int_0^\pi dN_\vartheta = C \cdot \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{\eta} = N,$$

так что

$$C = \frac{N\eta}{e^\eta - e^{-\eta}}. \quad (6.37)$$

Для каждого положения диполя можно указать равновероятное в изотропной среде положение, симметричное относительно направления поля (рис. 35). При этом составляющие векторов \mathbf{p}_0 , перпендикулярные полю, взаимно компенсируются; поляризация, как сумма моментов диполей, отнесенная к единице объема, оказывается направленной вдоль поля.

Поэтому при вычислении поляризации следует принимать во внимание только компоненты векторов \mathbf{p}_0 в направлении поля, равные $p_0 \cos \vartheta$. Таким образом,

$$P = \int_{\vartheta=0}^{\pi} p_0 \cos \vartheta \cdot dN_{\vartheta} = Cp_0 \int_{\vartheta=0}^{\pi} e^{\eta \cos \vartheta} \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta.$$

Введем новую переменную

$$\xi = \eta \cos \vartheta.$$

Тогда

$$P = \frac{Cp_0}{\eta^2} \int_{-\eta}^{\eta} e^{\xi} \cdot \xi d\xi = \frac{Cp_0}{\eta^2} [e^{\xi} \cdot \xi - e^{\xi}]_{-\eta}^{\eta}.$$

Подставляя значение C из формулы (6.37), находим

$$P = Np_0 Z(\eta), \quad (6.38)$$

причем

$$Z(\eta) = \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{e^\eta - e^{-\eta}} - \frac{1}{\eta} = \operatorname{cth} \eta - \frac{1}{\eta}. \quad (6.39)$$

Здесь $Z(\eta)$ — функция Ланжевена, названная так в честь французского физика Ланжевена, который ввел эту функцию в своей теории парамагнетизма (см. § 7-6).

Как видно,

$$\frac{dZ(\eta)}{d\eta} = -\frac{4}{(e^\eta - e^{-\eta})^2} + \frac{1}{\eta^2}. \quad (6.40)$$

Но

$$e^\eta = 1 + \eta + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^3}{3!} + \dots,$$

так что

$$e^\eta - e^{-\eta} = 2\eta + \frac{\eta^3}{3} + \dots > 2\eta,$$

следовательно, при $0 < \eta < \infty$ всюду $\frac{dZ}{d\eta} > 0$.

Если, исходя из равенства (6.40), найти $d^2Z/d\eta^2$ и воспользоваться выражениями для e^η и $e^{-\eta}$ в виде рядов по степеням η ,

то при $0 < \eta < \infty$ всюду обнаруживается справедливость неравенства¹

$$\frac{d^2 Z(\eta)}{d\eta^2} < 0. \quad (6.41)$$

Таким образом, с увеличением η поляризация P монотонно растет по формуле (6.38) (с постоянным замедлением этого роста) от $P=0$ при $\eta=0$ до $P=N\rho_0=P_n$ при $\eta=\infty$, где P_n — поляризация насыщения, к которой асимптотически приближается величина P при $\eta \rightarrow \infty$ (рис. 36).

Если $\eta \rightarrow 0$, то на основании равенств (6.38) и (6.40) имеем

$$\frac{dP}{d\eta} - \left(\frac{dP}{d\eta}\right)_0 = \frac{P_n}{3}.$$

Практически наиболее интересны значения величины η , много меньшие единицы, как

легко заметить, если принять численные значения $\rho_0 \approx 10^{-29}$ к·м, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град, $E \ll 10^9$ в/м и $T > 100^\circ$ К. При этом зависимость $P(\eta)$ приближенно можно считать линейной, т. е. с высокой степенью точности

$$\frac{P}{\eta} = \left(\frac{dP}{d\eta}\right)_0 = \frac{N\rho_0}{3},$$

откуда

$$P = \frac{N\rho_0^3 E_n}{3kT}. \quad (6.42)$$

¹ Задача сводится к доказательству неравенства

$$\left(1 + \frac{\eta^2}{3!} + \frac{\eta^4}{5!} + \dots\right)^3 > 1 + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} + \frac{\eta^6}{6!} + \dots$$

Но $(a+b)^3 > a^3 + 3a^2b + 3ab^2$ при $a > 0$ и $b > 0$. Полагая $a = 1$ и $b = \frac{\eta^2}{3!} + \frac{\eta^4}{5!} + \dots$, находим

$$a^3 + 3a^2b > 1 + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!}; \quad 3ab^2 > b^3.$$

Далее,

$$b^3 = \left\{ \frac{\eta^2}{3!} + \left(\frac{\eta^4}{5!} + \frac{\eta^6}{7!} + \dots \right) \right\}^3 > \frac{\eta^4}{36} + 2 \frac{\eta^2}{3!} \left(\frac{\eta^4}{5!} + \frac{\eta^6}{7!} + \dots \right) > \frac{\eta^4}{36} + \frac{\eta^6}{6!} + \frac{\eta^8}{8!} + \dots,$$

и в результате справедливо неравенство, которое требовалось доказать, так что $\frac{d^2 Z}{d\eta^2} < 0$ при $\eta > 0$.

Обратно пропорциональная зависимость поляризации от температуры обусловлена тем, что тепловое движение молекул препятствует упорядочивающему действию электрического поля.

Приближение к поляризации насыщения осуществляется только при $\eta \gg 1$. Для выполнения этого условия абсолютная температура диэлектрика T практически должна быть близка к нулю. При этом тепловое движение незначительно мешает поляризации и почти все диполи ориентируются вдоль поля.

К поляризации, обусловленной ориентацией жестких диполей, присоединяется в диэлектриках с полярными молекулами поляризация вследствие деформаций квазиупругих диполей, исследованная в § 6-3. Для нее справедлива формула (6.17). Суммарная поляризация, с учетом соотношения (6.42), равна

$$\mathbf{P} = \left(\frac{p_0^2}{3kT} + \alpha \right) N \mathbf{E}_d. \quad (6.43)$$

В случае дипольных газов и паров подставим сюда выражение (6.15) для напряженности действующего поля. Тогда поляризация \mathbf{P} оказывается пропорциональной \mathbf{E} , причем коэффициент пропорциональности, т. е. диэлектрическая восприимчивость, равняется

$$\kappa = \frac{(p_0^2 + 3\alpha kT) N}{3kT - (p_0^2 + 3\alpha kT) Na}. \quad (6.44)$$

Отсюда на основании соотношения (6.23) определяется ϵ_a . Измерения ϵ_a при разных температурах T дают возможность найти p_0 , α и a .

Если

$$p_0^2 \gg 3\alpha kT, \quad (6.45)$$

то роль квазиупругих диполей пренебрежимо мала и с достаточной точностью

$$\epsilon_a = \epsilon_0 + \frac{p_0^2 N}{3kT - p_0^2 Na}, \quad (6.46)$$

откуда при $N \ll \frac{3kT}{p_0^2 a}$ относительная диэлектрическая проницаемость приближенно равна

$$\epsilon = 1 + \frac{p_0^2 N}{3\epsilon_0 kT}. \quad (6.47)$$

При $a = \frac{1}{3\epsilon_0}$ из соотношений (6.44) и (6.23) находим

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{1}{3\epsilon_0} \left(\frac{p_0^2}{3kT} + \alpha \right) N,$$

или, в силу соотношения (6.25),

$$\frac{M(\epsilon - 1)}{d(\epsilon + 2)} = \frac{N_A}{3\epsilon_0} \left(\frac{p_0^2}{3kT} + \alpha \right). \quad (6.48)$$

Этот результат можно рассматривать как обобщение формулы (6.27) на случай существования постоянного дипольного момента молекул.

Полученные результаты, относящиеся к электростатическому полю, приближенно можно считать справедливыми и в достаточно медленно меняющихся полях.

Быстропеременное поле своеобразно влияет на поведение жестких диполей, сообщая им колебания, аналогичные колебаниям маятника, какие получались бы под действием поля тяжести, если бы это поле быстро менялось со временем. Угловое ускорение тела определяется как отношение действующего на него вращающего момента к его моменту инерции. В случае гармонических колебаний внешнего поля возникают гармонические вынужденные колебания углового ускорения маятника или диполя. При очень высокой частоте колебаний поля направление углового ускорения меняется так быстро, что ориентирующее воздействие поля на диполи почти исчезает. Отсюда, если угловая частота ω колебаний поля неограниченно растет, то поляризация диэлектрика, обусловленная жесткими диполями, стремится к нулю, тогда как поляризация, обусловленная квазиупругими диполями, носит резонансный характер (см. § 6-3).

Поэтому для реального диэлектрика с полярными молекулами при достаточно большой угловой частоте ω колебаний поля оканчивается возможным пренебречь в соотношении (6.48) членом, содержащим p_0 , т. е. можно считать справедливым равенство (6.27).

§ 6-5. ОСНОВНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Если исключить из рассмотрения твердые ионные диэлектрики, принадлежащие к третьему классу (см. § 6-1), то опытным путем нетрудно выяснить, к первому или второму классу относится диэлектрик.

Характерное для диэлектриков второго класса существование постоянного дипольного момента молекулы указывает на некоторое отступление от симметрии в пространственном распределении положительных и отрицательных зарядов молекулы в отсутствие внешних воздействий. Такое свойство молекулы, присущее ей в силу ее структуры, очевидно, сохраняется при изменении агрегатного состояния вещества. Для того чтобы судить о том, являются ли молекулы полярными, достаточно исследовать диэлектрик в газообразном состоянии. Сравним соответствующие результаты из предыдущих параграфов (§ 6-3, 6-4).

Так как правая часть равенства (6.27) выражает величину, называемую *молярной поляризацией* (обозначим ее через $P_{\text{мол}}$), то, в силу этого равенства, имеем

$$P_{\text{мол}} = \frac{M}{d} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}, \quad (6.49)$$

т. е. молярная поляризация в случае полярных молекул на основании соотношения (6.48) является линейной функцией от $1/T$, тогда как в случае квазиупругих диполей, по определению, $P_{\text{мол}}$ не зависит от T .

Таким образом, теоретическая зависимость $P_{\text{мол}} \left(\frac{1}{T} \right)$ для диэлектриков первого класса имеет вид горизонтальной прямой I (рис. 37), а для диэлектриков второго класса изображается прямой II, проходящей под углом β к горизонтали, причем из формулы (6.48) находим

$$\text{tg } \beta = \frac{N'_A p_0^2}{9\epsilon_0 k}. \quad (6.50)$$

Прямые I и II отсекают на оси ординат отрезки P_{∞} , изображающие теоретические значения молярной поляризации при бесконечно большой температуре. Из соотношений (6.27) и (6.48) получаем

$$P_{\infty} = \frac{N'_A \alpha}{3\epsilon_0}. \quad (6.51)$$

Рассмотрим, например, результаты опытов Зенгера [5] по измерению диэлектрической проницаемости метана CH_4 и его хлорных производных (рис. 38). Плотность каждого газа в условиях опытов сохранялась неизменной. В опытах отчетливо обнаруживается почти линейный характер зависимости $(\epsilon - 1)$ от $1/T$. Результаты измерений позволяют построить зависимость $P_{\text{мол}} \left(\frac{1}{T} \right)$, если принять во внимание соотношение (6.49). Эта зависимость получается также почти линейной ввиду близости ϵ к единице и $(\epsilon + 2)$ к 3.

Молярная поляризация метана и паров хлороформа CCl_4 в пределах точности опыта оказывается не зависящей от температуры, в согласии с результатами теории для диэлектриков первого класса (см. рис. 37, прямая I). Из формулы (6.51) поляризуемость молекулы хлороформа получается приблизительно втрое больше, чем у метана.

Для SNCl_3 , CH_2Cl_2 и CH_3Cl в определенной области температур (см. рис. 38) опыт подтверждает линейную зависимость $P_{\text{мол}} \left(\frac{1}{T} \right)$ типа II на рис. 37. Наклон прямых определяет, в соответствии с формулой (6.50), дипольный момент p_0 для этих полярных

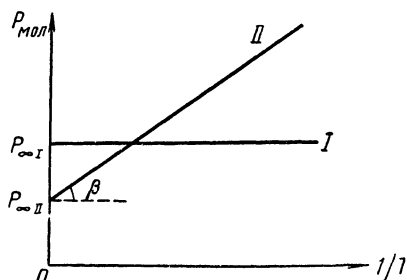


Рис. 37. Зависимость молярной поляризации от абсолютной температуры

молекул, а экстраполяция до $\frac{1}{T} = 0$ дает, в силу соотношения (6.51), значения поляризуемости α молекул.

Подобные опыты проводились с разнообразными диэлектриками первого и второго классов. Поляризуемость α молекул для обоих классов оказывается обычно порядка $10^{-40} \div 10^{-39} \text{ к} \cdot \text{м}^2/\text{в}$. Дипольные моменты полярных молекул p_0 разнообразны, как

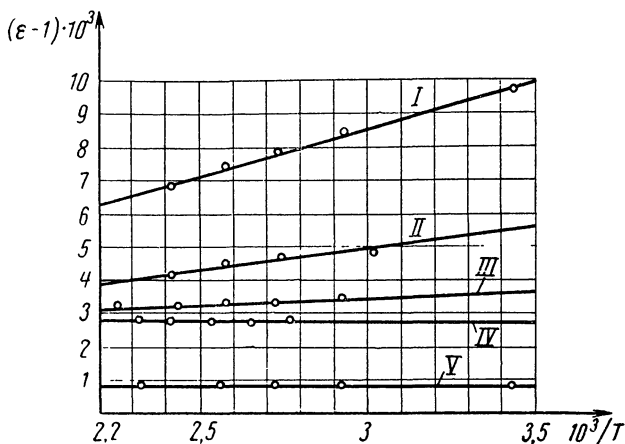


Рис. 38. Экспериментальная зависимость диэлектрической проницаемости от абсолютной температуры для веществ:

I— CH_3Cl ; II— CH_2Cl_2 ; III— CHCl_3 ; IV— CCl_4 ; V— CH_4

видно из сравнения наклона прямых для CHCl_3 и CH_3Cl , но преимущественно порядка $10^{-30} \div 10^{-29} \text{ к} \cdot \text{м}$, что соответствует диполю с зарядом e и длиной около $10^{-11} \div 10^{-10} \text{ м}$. При этом длина диполя меньше линейных размеров молекулы, несколько превышающих 10^{-10} м .

При обычных для полярных молекул значениях p_0 и α неравенство (6.45) оказывается в большинстве случаев справедливым только в области температур ниже 0°C .

§ 6-6. ПРИРОДА ДИСПЕРСИИ СВЕТА

Как известно, дисперсия света означает зависимость показателя преломления n вещества от длины волны, иначе говоря, фазовая скорость электромагнитной волны в веществе зависит от частоты колебаний.

В классической макроскопической электродинамике, считая относительную магнитную проницаемость вещества равной единице, пользуются известным соотношением

$$n = \sqrt{\epsilon}, \quad (6.52)$$

где относительная диэлектрическая проницаемость ϵ рассматривается как константа для данного вещества, т. е. величина, не зависящая от длины волны. Эта теория не в состоянии объяснить зависимость показателя преломления от частоты. Напротив, классическая электронная теория, рассматривая поведение электронов в квазиупругих диполях, позволяет понять происхождение дисперсии.

Для простоты будем пренебрегать отличием поля, действующего на диполь, от усредненного поля. При рассеянии света связанным электроном (см. § 5-8) гармонические колебания напряженности поля в падающей волне, происходящие по закону

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \quad (6.53)$$

создают колебания электрона с той же угловой частотой ω , опережающие колебания в волне на угол φ . Этот угол (см. рис. 30) убывает с увеличением ω/ω_0 , где ω_0 — угловая частота собственных колебаний электрона в отсутствие затухания, т. е. резонансная угловая частота. При резонансе ($\omega = \omega_0$) получается сдвиг фаз $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Колебания электронов с частотой ω создают вторичные (рассеянные) волны той же частоты. В результате взаимного наложения таких волн, исходящих от отдельных квазиупругих диполей, возникает вторичная волна, обусловленная данной группой диполей.

Рассмотрим для простоты случай нормального падения плоской волны на плоскую границу однородного диэлектрика. Под действием напряженности электрического поля, перпендикулярной направлению распространения волны, диполи располагаются параллельно граничной поверхности. В достаточно тонком слое, примыкающем к этой поверхности, диполи колеблются с одинаковыми амплитудами и фазами. Можно считать, что они расположены в одной плоскости и создают общую вторичную волну, которая также является плоской.

Расчет волнового поля, созданного такой плоской решеткой из диполей, позволяет судить о фазе вторичной волны¹. В непосредственной близости к решетке вторичная волна отстает по фазе от колебаний дипольного момента p на $\pi/2$ или в силу того, что $p = -eg$, опережает по фазе колебания электронов на угол $\pi/2$. Это означает, что фаза вторичной волны совпадает с фазой колебаний скорости электронов; в самом деле, взяв производную от выражения (5.86)

$$r = Ae^{i(\omega t + \varphi)},$$

¹ См.: Г. С. Горелик. Колебания и волны. М., Физматгиз, 1959.

получим

$$\dot{\mathbf{r}} = A i \omega e^{i(\omega t + \varphi)} = \omega A e^{i(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}.$$

Вторичная волна, созданная диполями плоской решетки, налагается на первичную волну. При этом необходимо учитывать взаимодействие первичной волны с диполями плоской решетки. В результате этого взаимодействия, связанного с передачей диполям некоторой энергии, уменьшается амплитуда колебаний напряженности электрического поля в падающей волне от первоначального значения E_0 до некоторой величины A_I . Амплитуду напряженности поля вторичной волны обозначим через A_{II} . В достаточно тонком слое число диполей настолько невелико, что $A_{II} < A_I$.

Воспользуемся известными правилами суммирования колебаний с одинаковой частотой.

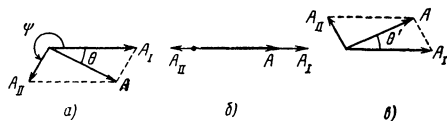
Амплитуда результирующего колебания находится как геометрическая сумма A_I и A_{II} с учетом угла ψ между ними, причем

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}. \quad (6.54)$$

Из рис. 30 легко видеть, что этот угол монотонно убывает от $\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ при изменении ω от 0 до ∞ . В частности, при резонансе ($\omega = \omega_0$) имеем $\psi = \pi$.

Посмотрим, каковы амплитуда и фаза результирующей волны (рис. 39). Если частота ω ниже резонансной частоты ω_0 , то результирующая волна отстает по фазе от первичной волны на угол θ (рис. 39, а).

Рис. 39. Влияние квазиупругих диполей на амплитуду и фазу световой волны



При резонансе ($\omega = \omega_0$) влияние диполей не приводит к изменению фазы волны (рис. 39, б). Если частота выше резонансной ($\omega > \omega_0$), то результирующая волна опережает первичную волну по фазе на некоторый угол θ' (рис. 39, в).

Подобные изменения фазы будут повторяться в каждом из тонких слоев, на которые можно мысленно разбить диэлектрик. В однородном диэлектрике ряд слоев сдвигает фазу в направлении опережения на некоторый угол α , прямо пропорциональный расстоянию x , пройденному волной, т. е.

$$\alpha = bx,$$

где b — коэффициент пропорциональности. При $\omega < \omega_0$ опережение α отрицательно, т. е. $b < 0$, а при $\omega > \omega_0$ имеем $\alpha > 0$ и $b > 0$.

Будем отсчитывать координату x от поверхности диэлектрика в направлении распространения волны. Перейдем от комплексной

формы уравнения волны к тригонометрической форме, т. е. вместо формулы (6.53) напишем

$$E = E_0 \cos \omega t.$$

Уравнение плоской гармонической волны при свободном распространении вдоль оси x будет иметь вид

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

где k — волновое число. При этом фазовая скорость волны равна ω/k .

По представлениям электронной теории, волна распространяется от одного диполя к другому в вакууме. Таким образом,

$$\frac{\omega}{k} = c, \quad (6.55)$$

где c — скорость света в вакууме.

Вследствие взаимодействия волны с диполями фаза возрастает на $b x$, т. е. становится равной $\omega t - kx + b x$, и фазовая скорость волны v_ϕ из условия постоянства фазы выражается в виде

$$v_\phi = \frac{\omega}{k - b}. \quad (6.56)$$

Отсюда, учитывая соотношение (6.55), находим показатель преломления n

$$n = \frac{c}{v_\phi} = 1 - \frac{b}{k}. \quad (6.57)$$

При $\omega < \omega_0$, когда $b < 0$, получается $n > 1$.

В случае резонанса ($\omega = \omega_0$) обусловленный диэлектриком сдвиг фаз α равен нулю, т. е. $b = 0$ и $n = 1$.

При $\omega > \omega_0$ фаза волны возрастает вследствие взаимодействия с диполями, так что $b > 0$ и $n < 1$, т. е. фазовая скорость волны v_ϕ превышает скорость света в вакууме¹.

Как видно из резонансных кривых (см. рис. 29, 30), с увеличением ω от 0 до ω_0 амплитуда колебаний электрона растёт, а сдвиг фаз φ убывает от величины π .

Это означает, что амплитуда вторичной волны A_{II} , созданной колебаниями электронов, растёт, а угол ψ , определяемый равенством (6.54), убывает.

Нетрудно видеть (см. рис. 39), что оба эти фактора сначала, при убывании ψ от величины $\frac{3\pi}{2}$, приводят к увеличению угла θ . Это значит, что a и b , сохраняя отрицательный знак, растут по абсолютной величине, и показатель преломления n , в силу фор-

¹ Здесь нет противоречия с теорией относительности, которая утверждает, что скорость материальных тел и скорость передачи сигнала не могут превышать c (см. § 1-6 и 1-7); дело в том, что распространение фазы не связано с переносом энергии и не может служить для передачи сигнала.

мулы (6.57), увеличивается. Однако с приближением ψ к значению π уменьшение углов φ и ψ , наиболее быстрое вблизи резонанса (см. рис. 30), начинает влиять на величину θ в направлении ее уменьшения, а так как увеличение амплитуды A_{II} почти прекращается в непосредственной близости к резонансу (см. рис. 29), то возрастание n должно замениться быстрым убыванием с тем, чтобы при резонансе было $n=1$, как выяснено выше. Эти соображения позволяют качественно изобразить зависимость $n(\omega)$ в области $\omega < \omega_0$ (рис. 40). Путем аналогичных рассуждений изображение зависимости $n(\omega)$ можно распространить на область $\omega > \omega_0$, где, как было замечено, $n < 1$.

Если $\frac{dn}{d\omega} > 0$, т. е. показатель преломления растет с увеличением частоты, то наблюдается нормальная дисперсия; в случае

же $\frac{dn}{d\omega} < 0$ получается аномальная дисперсия. Область аномальной дисперсии невелика; она включает частоты, близкие к резонансной.

Полученный характер зависимости показателя преломления n от частоты ω падающего света подтверждается экспериментально.

Если рассматривать не колебания электронов, а колебания положительных ионов под действием квазиупругой силы, направленной к положению равновесия, то в наши рассужде-

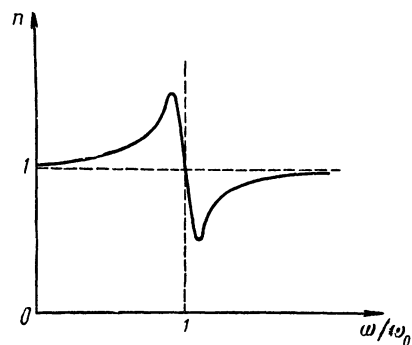


Рис. 40. Качественный вид дисперсионной кривой

ния следовало бы внести некоторые изменения. Сдвиг фазы колебаний положительных ионов по отношению к фазе падающей волны отличается на π от сдвига фазы в случае отрицательно заряженных электронов, изображенного на рис. 30. Иначе говоря, для положительных ионов отставание по фазе равно 0 при $\omega=0$, составляет $\pi/2$ при резонансе и, наконец, π при $\omega=\infty$. Фаза вторичной волны меньше фазы колебаний ионов на $\pi/2$. При этом вторичная волна отстает по фазе от первичной волны на $\pi/2$ при $\omega=0$, на π при резонансе и на $3\pi/2$ при $\omega=\infty$. Таким образом, снова получается рассмотренное (см. рис. 39) относительное расположение векторов A_I и A_{II} ; вытекающие из этого выводы находятся в качественном согласии с опытом.

Следовательно, в основе дисперсии света лежат изменения фазы электромагнитной волны, распространяющейся в веществе, при взаимодействии ее с электронами (или ионами), входящими в состав молекул вещества.

§ 6-7. НОРМАЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

При рассмотрении вынужденных колебаний связанного электрона, входящего в квазиупругий диполь, было получено и решено уравнение (5.84) для радиуса-вектора \mathbf{r} , проведенного к электрону от положительного заряда. Запишем решение в форме

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_d}{m(\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\omega\gamma)}, \quad (6.58)$$

где \mathbf{E}_d — напряженность поля, действующего на электрон, ω — угловая частота колебаний этого поля. В соответствии с формулой (6.3) такими же будут угловые частоты момента диполя и поляризации \mathbf{P} , и согласно соотношению (6.15) ту же частоту будет иметь усредненное (макроскопическое) поле \mathbf{E} . Поэтому в дальнейшем под ω будем понимать угловую частоту гармонических колебаний в волне, падающей на диэлектрик и проходящей через него.

Так как заряд электрона равен $-e$, то электрический момент диполя

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r},$$

и сумма таких моментов, отнесенная к единице объема, т. е. *поляризация диэлектрика* с квазиупругими диполями, равна

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = \frac{e^2 N \mathbf{E}_d}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma)}, \quad (6.59)$$

где N — число диполей в единице объема.

Подставим сюда выражение (6.15) для \mathbf{E}_d . Тогда

$$\mathbf{P}(\xi + i\eta) = \mathbf{E}, \quad (6.60)$$

где

$$\xi = \frac{m}{Ne^2}(\omega_0^2 - \omega^2) - a; \quad (6.61)$$

$$\eta = \frac{2m\omega\gamma}{Ne^2}. \quad (6.62)$$

Из уравнений (4.51) и (6.60) находим электрическую индукцию

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}[\epsilon_0(\xi + i\eta) + 1]. \quad (6.63)$$

Заменяя здесь \mathbf{P} на основании равенства (6.60) и сравнивая результат с соотношением $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$, можно представить относительную диэлектрическую проницаемость $\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0$ в виде

$$\epsilon = 1 + \frac{\xi - i\eta}{\epsilon_0(\xi^2 + \eta^2)}. \quad (6.64)$$

Из классической электромагнитной теории света известно, что для диэлектрика с относительной магнитной проницаемостью,

равной 1, справедливо соотношение (6.52), которое запишем в виде

$$n^2 = \epsilon, \quad (6.65)$$

где n — показатель преломления.

Правда, здесь ϵ — вещественная константа, а в уравнении (6.64) ϵ — комплексная величина, зависящая от ω , ω_0 , N и γ . Однако в однородном диэлектрике с неизменными свойствами эти величины не зависят от координат и времени.

Если воспользоваться соотношением $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$, понимая под ϵ комплексное выражение (6.64), то, обращаясь к уравнениям Максвелла и повторяя классические рассуждения электромагнитной теории света, нетрудно видеть, что этим уравнениям удовлетворяет волна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (6.66)$$

где комплексное волновое число k связано с комплексной относительной диэлектрической проницаемостью ϵ соотношением

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}. \quad (6.67)$$

Сравнивая это равенство с обычным выражением вещественного волнового числа k в виде

$$k = \frac{\omega n}{c}, \quad (6.68)$$

приходим к комплексному показателю преломления n_0 :

$$n_0 = \sqrt{\epsilon}. \quad (6.69)$$

Представим n_0 в форме

$$n_0 = n - i\delta. \quad (6.70)$$

В силу равенств (6.69) и (6.64) величины n и δ удовлетворяют соотношениям

$$n^2 - \delta^2 = 1 + \frac{\xi}{\epsilon_0(\xi^2 + \eta^2)}; \quad (6.71)$$

$$n\delta = \frac{\eta}{2\epsilon_0(\xi^2 + \eta^2)}. \quad (6.72)$$

Равенства (6.67), (6.69) и (6.70) позволяют привести уравнение волны (6.66) к виду

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega\delta}{c}x} \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{nx}{c}\right)}. \quad (6.73)$$

Эта волна распространяется в направлении оси x с фазовой скоростью, равной c/n .

Таким образом, вещественная часть n комплексного показателя преломления n_0 означает показатель преломления среды

в обычном смысле (как отношение фазовых скоростей света в вакууме и среде). Из соотношений (6.72) и (6.62) следует, что

$$n\delta > 0.$$

Так как $n > 0$, то $\delta > 0$. Волна, описываемая уравнением (6.73), обладает амплитудой

$$A = E_0 e^{-\frac{\omega\delta}{c} x}, \quad (6.74)$$

убывающей в направлении распространения. С увеличением x на длину волны

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

амплитуда A уменьшается по формуле (6.74) в $e^{2\pi\delta}$ раз. Величина δ известна под названием *показатель поглощения*.

Рассмотрим показатель преломления в области частот, при которых вещество является прозрачным для электромагнитной волны. В такой области спектра можно для простоты пренебречь затуханием волны. Это означает, что в соотношении (6.71) величина δ^2 пренебрежимо мала по сравнению с n^2 . Кроме того, ввиду равенства (6.72), принимая δ за нуль, следует положить равным нулю η в том смысле, что в соотношении (6.71) можно пренебречь величиной η^2 по сравнению с ξ^2 . Такое упрощение имеет, очевидно, смысл только в области не очень малых значений ξ , т. е. вдали от резонанса, поскольку обычно $\xi \approx 0$ при ω , близком к ω_0 .

Тогда из равенств (6.71) и (6.61) находим

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 \{m(\omega_0^2 - \omega^2) - Ne^2 a\}}}. \quad (6.75)$$

Когда n мало отличается от единицы, т. е. если

$$Ne^2 \ll \frac{\epsilon_0 m |\omega_0^2 - \omega^2|}{1 + \epsilon_0 a}, \quad (6.76)$$

при $a = \frac{1}{3\epsilon_0}$ (см. § 6-2) в формуле (6.75) можно пренебречь членом $Ne^2 a$. Пользуясь разложением типа

$$(1 + \Delta)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \Delta + \dots \quad (6.77)$$

и пренебрегая при малом Δ последующими членами, находим

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (6.78)$$

Если же n недостаточно близко к единице, то из формулы (6.75) при $a = \frac{1}{3\epsilon_0}$ находим

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (6.79)$$

Таким образом, для данного вещества, обладающего определенным значением резонансной угловой частоты ω_0 , при фиксированной частоте ω электромагнитной волны отношение $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ пропорционально числу молекул в единице объема и, следовательно, пропорционально плотности вещества. Этот результат получили, независимо друг от друга, датский физик Л. Лоренц и основоположник электронной теории голландский ученый Г. А. Лоренц.

В частности, при $\omega \rightarrow 0$, с учетом равенств (5.50) и (6.4), формула (6.79) приводится к виду

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}. \quad (6.80)$$

Это формула Лоренц—Лоренца, полученная в 1880 г. Как и формула (6.79), она справедлива при $a = \frac{1}{3\epsilon_0}$, т. е. когда соотношение между действующим и усредненным полями имеет вид (6.14).

С помощью равенства (6.25) формулу (6.79) можно представить в виде

$$\frac{M}{d} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N_A' e^2}{3\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (6.81)$$

Величина

$$R = \frac{M}{d} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}, \quad (6.82)$$

так называемая *молярная (молекулярная) рефракция*, характерна для вещества в согласии с правой частью равенства (6.81).

Возьмем 1 моль раствора или соединения s различных веществ.

Поскольку при растворении или соединении поляризуемость каждой молекулы не меняется, в силу равенств (6.4) и (5.50), резонансные частоты ω_0 сохраняются. Тогда, в согласии с формулой (6.81), каждое вещество с молярной долей ξ_k и молярной рефракцией R_k вносит в молярную рефракцию R раствора или соединения вклад, равный $\xi_k R_k$, так что

$$R = \sum_{k=1}^{k=s} \xi_k R_k. \quad (6.83)$$

Это закон аддитивности молярной рефракции.

Из формулы (6.75) видно, что показатель преломления n монотонно растет с увеличением ω как при $n > 1$, так и при $n < 1$. Таким образом, в прозрачной области

$$\frac{dn}{d\omega} > 0,$$

т. е. в этой области спектра обнаруживается *нормальная дисперсия*.

Изложенная теория учитывает для каждой молекулы единственное значение присущей электронам резонансной частоты ω_0 . В действительности разные квазиупругие связи должны обуславливать благодаря равенству (5.50) различные значения ω_0 .

Кроме колебаний электронов, следует также иметь в виду возможные колебания ионов (относительно их положений равновесия). Изложенные рассуждения остаются, по существу, справедливыми и для ионов с заменой заряда электрона $-e$ на заряд иона и массы электрона m на массу иона.

Если вследствие колебаний электронов и ионов в единице объема содержится N_1 осцилляторов с резонансной частотой ω_1 , N_2 — с резонансной частотой ω_2 и т. д., то относительная диэлектрическая проницаемость ϵ и показатель преломления n отличаются от единицы вследствие суммарного действия таких осцилляторов.

Тогда вместо формулы (6.78) напомним

$$n = 1 + \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_i \frac{N_i e_i^2}{m_i (\omega_i^2 - \omega^2)}. \quad (6.84)$$

Здесь N_i , вообще говоря, не совпадает с числом молекул или атомов в единице объема. Измерения показателя преломления n при разных значениях ω позволяют определить отношение числа N_i к числу частиц в единице объема N для каждого типа осцилляторов с индексом i , т. е.

$$\frac{N_i}{N} = f_i.$$

Такова *сила осциллятора*. Этот условный термин указывает на степень участия в преломлении света осцилляторов с резонансной частотой ω_i . Значения сил осцилляторов f_i могут быть теоретически вычислены лишь на основе квантовой механики.

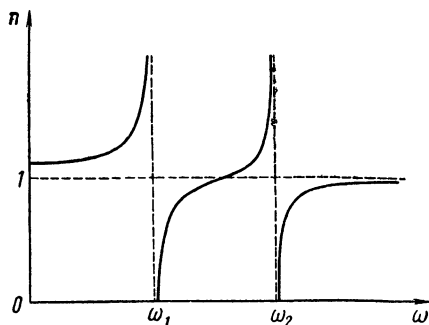


Рис. 41. Идеализированная дисперсионная кривая для вещества, обладающего двумя резонансными частотами

Зависимость показателя преломления n от угловой частоты ω в формуле (6.84) носит идеализированный характер, так как эта формула получается, если показатель поглощения δ равен нулю, т. е. если нет затухания волны. Поэтому идеализированная дисперсионная кривая, изображенная на рис. 41 в соответствии с формулой (6.84), может быть справедлива только в прозрачной области спектра, вдали от резонансных частот.

Опыт показывает, что дисперсионная кривая в прозрачной области подобна изображенной на рис. 41. Существование вне

этой области особых значений ω_i объясняется преимущественно колебаниями электронов, но происхождение малых значений ω_i хорошо объясняется колебаниями массивных ионов, в согласии с выражением (5.50) для резонансной частоты.

При частотах падающего света, превышающих все резонансные частоты ω_i , присущие молекулам вещества, показатель преломления по формуле (6.84) меньше единицы в согласии с результатом качественного исследования (см. § 6-6). Опыт подтверждает, что в этой области $n < 1$; в частности, обнаруживается полное внутреннее отражение лучей, падающих на тело из вакуума.

Для весьма жестких лучей, например рентгеновских, если

$$\omega^2 \gg \omega_i^2$$

при любом значении индекса i , то в формуле (6.84) можно пренебречь ω_i^2 ; тогда

$$n = 1 - \frac{1}{2\epsilon_0\omega^2} \sum_i \frac{N_i e_i^2}{m_i}.$$

Отсутствие в этой формуле резонансных частот ω_i означает, что при взаимодействии таких жестких лучей с веществом характер внутримолекулярных связей электронов и ионов не играет роли.

Перейдем к случаю, когда молекулы вещества анизотропны, т. е. квазиупругий коэффициент k зависит от направления смещения электрона относительно положительного иона. Каждому значению k соответствует своя резонансная частота колебаний ω_0 .

При беспорядочном расположении молекул вещества оно макроскопически изотропно, но под действием постоянного электрического поля \mathbf{E} дипольные моменты молекул ориентируются преимущественно вдоль поля и вещество приобретает свойства одноосного кристалла с оптической осью, параллельной вектору \mathbf{E} . Если свет распространяется в веществе вдоль оси x в таком поле конденсатора \mathbf{E} , что $E_x = E_z = 0$, $E_y = E$, то при колебаниях напряженности электрического поля волны по оси y обнаруживается резонансная частота, равная ω'_0 , а при колебаниях этого поля по оси z резонансная частота имеет иное значение ω''_0 . Показатель преломления n по формуле (6.75) приобретает два значения: $n = n'$, если $\omega_0 = \omega'_0$; $n = n''$, если $\omega_0 = \omega''_0$. При $E = 0$, конечно, $n'' = n'$.

Представляя разность ($n' - n''$) как аналитическую функцию E_y в виде степенного ряда, ограничимся при достаточно малом E_y двумя членами:

$$n' - n'' = aE_y + bE_y^2,$$

где a и b — некоторые константы.

Если направление поля \mathbf{E} меняется на противоположное, то значения ω'_0 и ω''_0 , очевидно, не меняются, а потому разность

$(n' - n'')$ неизменна, хотя E_y меняет свой знак. Следовательно, $a=0$ и

$$n' - n'' = bE_y^2 = bE^2.$$

Отношение коэффициента пропорциональности b к длине волны света λ_0 в вакууме называется постоянной Керра B для данного вещества. Величина B обычно убывает с увеличением λ_0 и сильно уменьшается при повышении температуры, когда упорядоченная ориентация молекул нарушается. Итак,

$$n' - n'' = B\lambda_0 E^2. \quad (6.85)$$

Рассмотренное двойное лучепреломление известно как *электрооптический эффект Керра*.

Постоянная Керра относительно велика для нитробензола ($B \approx 10^{-12}$ м/в²).

§ 6-8. АНОМАЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА

Определим *показатель преломления вблизи резонанса*, т. е. в случае близости частоты падающей волны к резонансной частоте диполей вещества. Амплитуда колебаний электронов должна быть здесь велика (см. рис. 29) и потому естественно ожидать, что соударения диполей друг с другом будут играть значительную роль. При рассмотрении уширения спектральных линий (см. § 5-6) было выяснено, что влияние таких соударений эквивалентно увеличению коэффициента затухания γ . При этом, как видно из формулы (6.62), величина η становится больше и вследствие равенства (6.72) показатель поглощения δ нельзя считать пренебрежимо малым. Итак, исследуем участки спектра вблизи резонансных частот, не пренебрегая показателем поглощения, т. е. учитывая затухание волны.

Сначала будем считать, что у всех осцилляторов одинаковая резонансная частота ω_0 . Для простоты рассмотрим случай, когда в единице объема имеется достаточно малое число N диполей, так что относительная диэлектрическая проницаемость ϵ близка к единице. Поэтому при вычислении n_0 из формулы (6.69) ограничимся двумя членами разложения типа (6.77). Тогда на основании формул (6.64) и (6.70) находим

$$\left. \begin{aligned} n &= 1 + \frac{\xi}{2\epsilon_0 (\xi^2 + \eta^2)}, \\ \delta &= \frac{\eta}{2\epsilon_0 (\xi^2 + \eta^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.86)$$

Отсюда следует, что $n > 1$ при $\xi > 0$, $n = 1$ при $\xi = 0$ и $n < 1$ при $\xi < 0$.

Как видно из равенства (6.61), вблизи резонанса нет оснований пренебречь величиной a , т. е. нужно различать действующее

и усредненное поля. Физический смысл этого понятен: вблизи резонанса амплитуды колебаний электронов велики и поведение каждого диполя в значительной мере определяется другими диполями, что и приводит к существенному отличию действующего поля от усредненного (см. § 6-2).

Ввиду того что вблизи резонанса можно считать ω почти равным ω_0 , с незначительной относительной погрешностью справедливы равенства

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\omega_0(\omega - \omega_0); \quad \omega\gamma = \omega_0\gamma.$$

Введем обозначения

$$z = \omega - \omega_0, \quad s = \frac{2m}{Ne^2}. \quad (6.87)$$

Тогда из формул (6.86), пользуясь равенствами (6.61) и (6.62), получаем

$$\left. \begin{aligned} n - 1 &= -\frac{s\omega_0 z + a}{2\varepsilon_0 \{(s\omega_0 z + a)^2 + s^2\omega_0^2\gamma^2\}}; \\ \delta &= \frac{s\omega_0\gamma}{2\varepsilon_0 \{(s\omega_0 z + a)^2 + s^2\omega_0^2\gamma^2\}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.88)$$

В этих выражениях при достаточно ограниченном числе N диполей в единице объема, т. е. при достаточно большом значении s , с небольшой относительной погрешностью можно пренебречь величиной a в знаменателе. Тогда

$$n - 1 = -\frac{b(z + ab)}{2\varepsilon_0(z^2 + \gamma^2)}; \quad (6.89)$$

$$\delta = \frac{b\gamma}{2\varepsilon_0(z^2 + \gamma^2)}, \quad (6.90)$$

где

$$b = \frac{Ne^2}{2m\omega_0}.$$

Из условия

$$\frac{dn}{dz} = 0$$

находим

$$z_1 = -ab - \sqrt{a^2b^2 + \gamma^2}, \quad z_2 = -ab + \sqrt{a^2b^2 + \gamma^2}. \quad (6.91)$$

Между этими значениями лежит область, где $\frac{dn}{dz} < 0$, следовательно

$$\frac{dn}{d\omega} < 0,$$

т. е. показатель преломления здесь убывает с увеличением частоты колебаний.

Это область аномальной дисперсии, ширина которой $\Delta\omega = z_2 - z_1$, т. е.

$$\Delta\omega = 2\sqrt{\gamma^2 + a^2 b^2}. \quad (6.92)$$

При $a = \frac{1}{3\epsilon_0}$ получим

$$\Delta\omega = 2\sqrt{\gamma^2 + \frac{N^2 e^4}{36\epsilon_0^2 m^2 \omega_0^2}}. \quad (6.93)$$

Если $N \rightarrow 0$, то в пределе

$$\Delta\omega = 2\gamma, \quad (6.94)$$

в точном согласии с выражением (5.59) для ширины спектральной линии.

Формула (6.93), как и вся рассмотренная теория аномальной дисперсии, относится к случаю достаточно малых значений N , так что член, содержащий N^2 , вносит относительно малый вклад в $\Delta\omega$. Однако отличие действующего поля от усредненного ($a \neq 0$) приводит, согласно формуле (6.92), к некоторому увеличению ширины полосы аномальной дисперсии. Для центра полосы

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

и, если $a = \frac{1}{3\epsilon_0}$, то

$$\omega = \omega_0 - \frac{Ne^2}{6\epsilon_0 m \omega_0}.$$

Максимальное и минимальное значения показателя преломления легко определяются из равенств (6.89) и (6.91). Пренебрегая величиной ab по сравнению с γ , находим

$$n_{\max} - 1 = \frac{Ne^2}{8\epsilon_0 \gamma m \omega_0}; \quad n_{\min} - 1 = -\frac{Ne^2}{8\epsilon_0 \gamma m \omega_0}. \quad (6.95)$$

Вблизи резонанса можно пренебречь величиной z^2 по сравнению с γ^2 , тогда зависимость n от $z = \omega - \omega_0$ по формуле (6.89) оказывается линейной.

Изложенная теория аномальной дисперсии легко распространяется на случай существования нескольких групп осцилляторов с разными резонансными частотами ω_i ; нужно только при вычислении величины $n - 1$ суммировать выражения типа (6.89), получающиеся за счет отдельных групп осцилляторов.

Перейдем к уточнению дисперсионной кривой, которая была построена на основании уравнений, справедливых только в прозрачной области (см. рис. 41). Вблизи резонансных частот существуют области аномальной дисперсии, где с возрастанием ω показатель преломления n убывает от n_{\max} до n_{\min} . При достаточно малом N центры этих областей почти совпадают с резонансными частотами, а ширина их приблизительно равна ширине спектраль-

ных линий. В случае двух резонансных частот результаты для аномальной дисперсии вместе с указанными ранее результатами для прозрачной области дают кривую дисперсии $n = n(\omega)$, изображенную¹ на рис. 42, которая подтверждает результаты качественного исследования, проведенного для случая одной резонансной частоты (см. рис. 40).

Рассмотрим теперь зависимость показателя поглощения от частоты. Ограничимся случаем настолько малой плотности диэлектрика, что справедливо равенство (6.90).

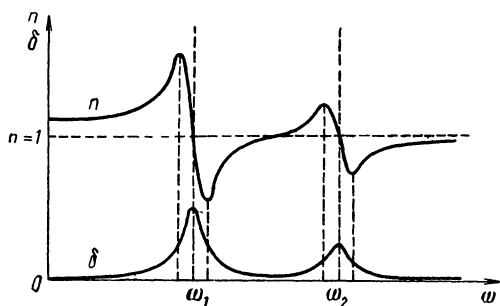


Рис. 42. Кривые дисперсии и поглощения для вещества, обладающего двумя резонансными частотами

Максимальное значение δ достигается при $z = 0$, т. е. при $\omega = \omega_0$, и равно

$$\delta_{\text{макс}} = \frac{Ne^2}{4\epsilon_0 m \omega_0 \gamma}. \quad (6.96)$$

На первый взгляд кажется странным, что это максимальное значение показателя поглощения тем меньше, чем больше коэффициент затухания свободных колебаний электрона γ . Однако такой результат становится понятным, если заметить, что энергия колебаний электрона вследствие значительных взаимодействий (соударений) молекул переходит в энергию беспорядочного теплового движения.

Сильное затухание свободных колебаний приводит к быстрому уменьшению их амплитуды. Этим ограничивается возможность заметных взаимодействий молекул при резонансе, когда в случае отсутствия существенного затухания колебания были бы весьма зна-

¹ При этом для наглядности сделано отступление от изображения истинной кривой дисперсии, для которой характерна весьма малая ширина областей аномальной дисперсии.

чительны. Таким образом, снижается возникающий при резонансе максимум показателя поглощения. Однако увеличение γ одновременно расширяет область значений ω , при которых происходит заметное поглощение, так что общее количество поглощенной энергии, как показывают подсчеты, растет с увеличением γ .

Зависимость показателя поглощения δ от частоты, в силу формулы (6.90), симметрична относительно точки резонанса ($\omega = \omega_0$). Показатель поглощения δ монотонно убывает по мере удаления от резонанса. При этом вблизи краев полосы аномальной дисперсии, а именно при $z = \pm \gamma$, величина δ вдвое меньше максимального значения. Но формула (6.90) справедлива лишь в том случае, когда все осцилляторы одинаковы, т. е. когда существует единственное значение резонансной частоты. В случае нескольких групп осцилляторов с разными резонансными частотами ω_i показатель поглощения δ вычисляется путем суммирования выражений типа (6.90), обусловленных всеми группами осцилляторов. В итоге получается усложненная кривая поглощения $\delta = \delta(\omega)$, с высокой степенью точности симметричная относительно точки резонанса в каждой области аномальной дисперсии. Один из вариантов такой кривой можно построить, например, для вещества с двумя резонансными частотами (см. рис. 42).

Электронная теория дисперсии и поглощения света в диэлектриках особенно ярко показывает ограниченность классической электродинамики Максвелла. Представление о существовании и колебаниях элементарных зарядов оказывается совершенно необходимым для понимания этого круга явлений.

§ 6.9. ПОДТВЕРЖДЕНИЯ ТЕОРИИ ДИСПЕРСИИ ОПЫТАМИ Д. С. РОЖДЕСТВЕНСКОГО

Основные результаты электронной теории дисперсии хорошо согласуются с опытными данными. Наибольшего внимания заслуживают опыты Д. С. Рождественского. Он исследовал форму дисперсионной кривой вблизи линий поглощения. В опытах Д. С. Рождественского в качестве диэлектриков применялись пары металлов. Особенно интересные результаты были получены с парами натрия. Рассмотрим *опыт Д. С. Рождественского*. Схема опыта изображена на рис. 43. Свет от источника S проходит двумя путями через интерферометр

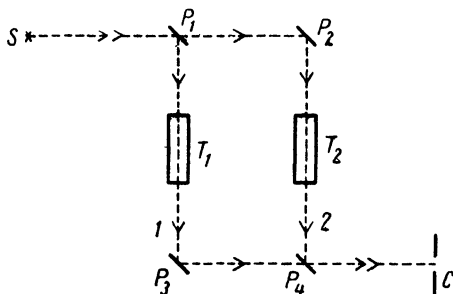


Рис. 43. Схема опыта Д. С. Рождественского

Рождественского. Один пучок света отражается от полупрозрачной пластинки P_1 , а другой проходит через нее и отражается от зеркала P_2 . На пути первого пучка расположена трубка T_1 , из которой откачан воздух. Второй пучок проходит через такую же трубку T_2 . Первый пучок отражается от зеркала P_3 и проходит через полупрозрачную пластинку P_4 , от которой отражается второй пучок. За пластинкой P_4 свет после наложения пучков 1 и 2 поступает в спектрограф S . Плоскости P_1 и P_2 параллельны друг другу, а P_3 и P_4 параллельны между собой.

При освещении пластинки P_1 расходящимся пучком белого света в результате интерференции двух описанных пучков света 1 и 2 за пластинкой P_4 возникают параллельные друг другу интерференционные полосы, расположенные в условиях описываемого опыта горизонтально. Вблизи интерференционного максимума, соответствующего отсутствию разности хода лучей двух пучков, обнаруживаются интерференционные минимумы, возникающие вследствие разности хода лучей, равной половине длины волны. Чем больше

длина волны, т. е. чем меньше частота света ν , тем дальше от центрального максимума отстоит такой минимум. Далее размещаются интерференционные минимумы, соответствующие разности хода в полторы, две с половиной длины волны и т. д. За интерферометром расположен скрещенный с ним призменный спектрограф S . Если интерференционные полосы горизонтальны, то щель спектрографа распола-

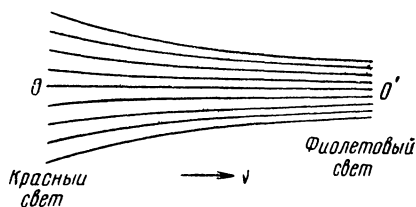


Рис. 44. Спектр, полученный при скрещении интерферометра Рождественского и спектрографа

гается вертикально, чтобы получить в спектре желательные изображения различных полос. Если бы щель освещалась во всех точках белым светом, получился бы сплошной спектр; но интерференционные минимумы приводят к тому, что сплошной спектр прочерчивается веерообразно системой темных полос, которые, как и минимумы интерференционной картины, располагаются тем ближе друг к другу, чем больше частота света ν (рис. 44). Приборы регулируются так, чтобы центральная темная полоса OO' была прямолинейна и перпендикулярна направлению щели спектрографа.

Пронумеруем темные полосы по порядку, начиная от нулевой прямолинейной полосы. Ординаты m -й полосы пропорциональны разности хода $m\lambda$, т. е.

$$y = \eta m \lambda,$$

где η — константа прибора.

Допустим теперь, что на пути света в трубке T_2 находятся пары натрия. В условиях опыта это достигалось путем испарения электрической печкой твердого натрия, помещенного в трубке. Обозначим через l длину трубки и через n показатель преломления паров натрия. Дополнительная оптическая длина пути, возникающая благодаря парам натрия, равна $l(n - 1)$. При этом интерференционные полосы смещаются вдоль щели спектрографа на расстояние

$$y = \eta(n - 1)l. \quad (6.97)$$

Это — уравнение полосы, для которой в отсутствие паров натрия было $y = 0$.

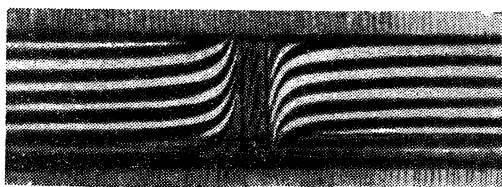


Рис. 45. Аномальная дисперсия в парах натрия (снимок Д. С. Рождественского)

Следовательно, вид нулевой полосы после вызванного парами натрия смещения непосредственно дает зависимость $n - 1$ от частоты света, т. е. дает изображение дисперсионной кривой.

При исследовании паров натрия вблизи двух спектральных линий поглощения, образующих дублет натрия, возникает картина спектра, изображенная на рис. 45. Здесь подтверждаются выводы теории относительно вида кривой дисперсии для вещества, обладающего двумя резонансными частотами (см. рис. 42).

Д. С. Рождественскому принадлежит ценный *метод крюков*, позволивший повысить точность определения наклона дисперсионной кривой в непосредственной близости от полосы поглощения.

В плечо интерферометра, содержащее трубку T_1 , вводилась дополнительно

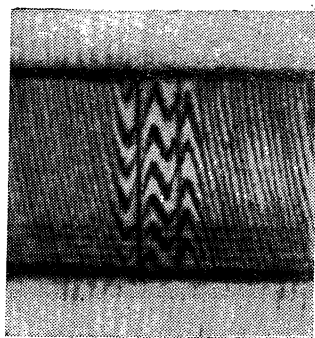


Рис. 46. Аномальная дисперсия в парах натрия («метод крюков» Д. С. Рождественского)

стеклянная пластинка толщиной h с хорошо известной зависимостью показателя преломления от частоты света:

$$n' = n'(\omega).$$

Тогда для смещения нулевой полосы вместо уравнения (6.97) получалось

$$y = \eta(n - 1)l - \eta(n' - 1)h. \quad (6.98)$$

Из сравнения с формулой (6.97) видно, что таким путем полосы интерференции получали добавочный наклон вниз (рис. 46), который можно было сделать весьма значительным, применяя достаточно толстую пластинку.

Однако быстрое изменение показателя преломления n вблизи полосы поглощения приводило к тому, что при некотором ω получалось

$$\frac{dy}{d\omega} = 0,$$

или, в силу уравнения (6.98),

$$\eta\left(\frac{dn}{d\omega}l - \frac{dn'}{d\omega}h\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{h}{l} \frac{dn'}{d\omega}. \quad (6.99)$$

Соответствующее этому равенству значение ω с высокой степенью точности определялось из опыта как положение вершины «крюка», по обе стороны которой знаки $dn/d\omega$ противоположны.

Меняя толщину h стеклянной пластинки, можно в той или иной мере приближать вершину крюка к полосе поглощения. Таким путем на основании уравнения (6.99) выясняется зависимость $dn/d\omega$ от ω вблизи линии поглощения и достигается высокая точность определения вида дисперсионной кривой на основании эксперимента.

Сравнивая значения показателей преломления по обе стороны от линии поглощения, легко убедиться опытным путем в существовании аномальной дисперсии внутри полосы поглощения.

Метод крюков Рождественского широко используется в точных исследованиях дисперсии.

Задачи

33. Полагая, что на электрон в атоме действует квазиупругая сила, вычислить напряженность действующего поля, пользуясь классическим соотношением между поляризуемостью α и радиусом атома R , если $R = 0,5\text{Å}$. Чем обусловлена напряженность действующего поля?

34. Согласно представлениям классической электронной теории вычислить резонансную частоту колебаний электрона в атоме водорода с диаметром $d = 1\text{Å}$. Определить, при каких давлениях газа и частотах падающего света для атомарного водорода при температуре $T = 5000^\circ\text{K}$ справедливо в прозрачной области выражение (6.78) для показателя преломления.

35. Полагая, что в атоме радиуса R на электрон действует квазиупругая сила, найти поляризуемость атома α в поле электромагнитной волны с угловой частотой ω , учитывая силу лучистого трения.

36. Найти приближенно число оптических электронов N в единице объема вещества, если для рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 3\text{Å}$ показатель преломления $n = 0,99999$.

§ 7-1. МОЛЕКУЛЯРНЫЕ ТОКИ

Еще в 1820 г. Ампер высказал гипотезу о существовании круговых токов в частицах вещества — молекулах. Представление о молекулярных токах сыграло большую роль в объяснении магнитных свойств вещества.

В классической электронной теории предполагается существование квазиупругой силы, действующей на связанный электрон; происхождение же молекулярных токов объясняется тем, что квазиупругая сила, как видно из уравнений (5.45) и (5.52), способна вызывать колебания электрона, которые можно считать гармоническими, если пренебречь затуханием вследствие лучистого трения. Электрон может участвовать одновременно в двух таких взаимно перпендикулярных колебаниях с одинаковой угловой частотой ω_0 [см. равенство (5.50)], что приводит к движению электрона по эллипсу (в частном случае по окружности) с периодом обращения

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (7.1)$$

Центр этого эллипса совпадает с положением равновесия электрона, совершающего колебания под действием квазиупругой силы.

Если *орбитальное движение электрона* с зарядом $-e$ усреднить по физически бесконечно малому промежутку времени, большому по сравнению с τ , то отношение заряда, проходящего по орбите электрона за некоторый промежуток времени, к величине этого промежутка будет равно с достаточной точностью e/τ .

Таким образом, внутри молекулы, где движется связанный электрон, циркулирует ток, равный

$$J = \frac{e}{\tau} \quad (7.2)$$

и направленный противоположно движению электрона.

Как известно из электродинамики, магнитный момент M линейного тока J , охватывающего площадь S , равен (в системе единиц СИ)

$$M = JS. \quad (7.3)$$

Установим связь между средней плотностью молекулярных токов и намагниченностью. Для простоты будем считать токи одинаковыми и круговыми.

Выберем некоторое направление оси x в веществе, где циркулируют различные молекулярные токи (рис. 47). Проведем нормаль \mathbf{n} к плоскости каждого тока, образуя правую винтовую систему с направлением тока. Магнитный момент каждого тока \mathbf{M}_k совпадает по направлению с такой нормалью.

Рассмотрим группу токов, для которых угол между нормалью \mathbf{n} и осью x можно считать одинаковым и равным α_k .

Обозначим через N_k число таких токов, отнесенное к единице объема. Ось x окружена теми токами, центры которых лежат в объеме круглого цилиндра с поперечным сечением $S |\cos \alpha_k|$ и осью, совпадающей с осью x . Объем такого цилиндра длиной Δx равен

$$\Delta V = S |\cos \alpha_k| \Delta x,$$

а число указанных токов в этом объеме будет

$$N_k \Delta V = N_k S |\cos \alpha_k| \Delta x.$$

Образованный ими суммарный ток J_k вокруг оси x , если считать J_k положительным при $0 < \alpha_k < \pi/2$ и отрицательным¹ при $\pi/2 < \alpha_k < \pi$, можно выразить через молекулярный ток J в виде

$$J_k = J N_k S \cos \alpha_k \Delta x. \quad (7.4)$$

Суммируя выражения вида (7.4) по всем электронам, находим полный ток ΔJ вокруг оси x на отрезке Δx

$$\Delta J = J S \Delta x \sum_k N_k \cos \alpha_k.$$

Воспользуемся для каждого молекулярного тока равенством (7.4) с заменой M на M_k . Тогда

$$\Delta J = \Delta x \sum_k N_k (M_k \mathbf{i}),$$

где \mathbf{i} — единичный вектор по оси x .

¹ Это значит, что ток J_k является положительным, если его направление образует правый винт с направлением оси x , и отрицательным в случае обратного направления тока.

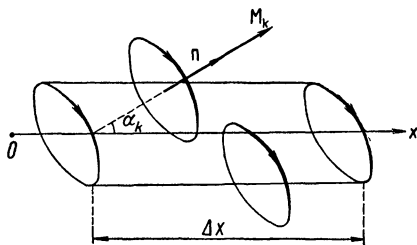


Рис. 47. Молекулярные токи вокруг оси x

Заменяя Δx_i на Δl и переходя от Δl к $d l$, находим, что ток, окружающий отрезок $d l$ и образующий с направлением $d l$ правый винт, равен

$$dJ = \left(d l \sum_k N_k \mathbf{M}_k \right).$$

Но $\sum_k N_k \mathbf{M}_k$ представляет собой суммарный магнитный момент молекулярных токов, отнесенный к единице объема, т. е. *вектор намагниченности* \mathbf{I} . Итак,

$$dJ = (I d l). \quad (7.5)$$

Рассмотрим площадку внутри магнетика (рис. 48). Молекулярный ток, не охватывающий контур площадки (типа 1), не влияет на общий ток через площадку. Напротив, молекулярные токи, охватывающие контур площадки (типа 2), создают суммарный ток, проходящий через площадку. Выбирая направление обхода контура, например, против часовой стрелки и применяя соотношение (7.5) к каждому участку $d l$, находим суммарный ток через площадку, образующий правовинтовую систему с направлением обхода контура:

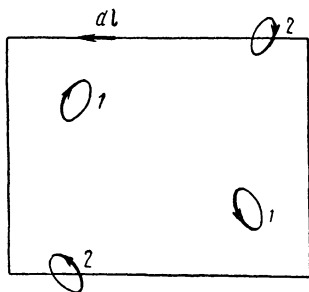


Рис. 48. К вычислению усредненной плотности молекулярных токов

$$J = \oint_l (I d l), \quad (7.6)$$

где интеграл берется по всему замкнутому контуру.

Обозначим через $\mathbf{j}_{\text{мол}}$ макроскопическую, т. е. усредненную по физически бесконечно малому объему, плотность молекулярных токов. Тогда

$$J = \int_S (j_{\text{мол}})_n dS, \quad (7.7)$$

где S — элемент площадки, $(j_{\text{мол}})_n$ — нормальная к площадке компонента вектора $\mathbf{j}_{\text{мол}}$. Используя формулу Стокса

$$\oint_l (I d l) = \int_S \text{rot}_n I dS,$$

из соотношений (7.6) и (7.7) находим

$$\int_S (j_{\text{мол}})_n dS = \int_S \text{rot}_n I dS.$$

Это равенство справедливо независимо от выбора площадки S , следовательно,

$$(j_{\text{мол}})_n = \text{rot}_n I. \quad (7.8)$$

Направление нормали \mathbf{n} может быть каким угодно, например может совпадать с любой из координатных осей. Поэтому из равенства (7.8) следует справедливость векторного соотношения

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \mathbf{l}. \quad (7.9)$$

Такой же результат получается и в случае эллиптических молекулярных токов с различными эксцентриситетами, периодами и площадями S .

Орбитальное движение связанных электронов означает, что существует не только магнитный момент \mathbf{M} молекулярного тока, но и *орбитальный механический момент*, т. е. момент импульса электрона, который выражается в виде

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, m \mathbf{u}] = m [\mathbf{r}\mathbf{u}].$$

При движении под действием квазиупругой силы, направленной к положению равновесия, как и вообще в случае центрального поля сил, $\mathbf{L} = \overline{\text{const}}$.

Согласно определению секториальной скорости напомним

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{r}d\mathbf{l}]}{dt} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}\mathbf{u}],$$

где $d\mathbf{l}$ — элемент длины пути электрона (рис. 49). Тогда

$$\mathbf{L} = 2m \frac{dS}{dt} = \overline{\text{const}}.$$

При нерелятивистском движении масса m постоянна и ввиду постоянства dS/dt справедливо равенство

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S}{\tau}.$$

Итак

$$\mathbf{L} = 2m \frac{S}{\tau}, \quad (7.10)$$

где вектор площади S , как и dS , образует правовинтовую систему с радиусом-вектором \mathbf{r} и направлением скорости движения электрона.

Так как направление магнитного момента \mathbf{M} образует с направлением тока правый винт, то векторы \mathbf{L} и \mathbf{M} антипараллельны (см. рис. 49). В силу равенств (7.2), (7.3) и (7.10) напишем

$$\frac{M}{L} = \frac{e}{2m}, \quad (7.11)$$

так что

$$\mathbf{M} = - \frac{e}{2m} \mathbf{L}. \quad (7.12)$$

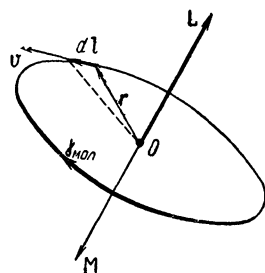


Рис. 49. К определению магнитного и механического моментов молекулярного тока

§ 7-2. ТЕОРЕМА ЛАРМОРА

Будем исходить из того, что в отсутствие внешнего поля связанный электрон движется по эллипсу (см. § 7-1), создавая ток (7.2), магнитный момент которого выражается в виде (7.3). Ввиду существования этого магнитного момента необходимо учитывать действующее магнитное поле, подобно тому как в теории диэлектриков рассматривалось действующее электрическое поле, обусловленное существованием электрического диполя. В теории диэлектриков различают напряженность действующего поля E_d и напряженность усредненного поля E (см. § 6-2). Аналогично в электронной теории магнетизма следует, строго говоря, отличать магнитную индукцию поля, действующего на электрон, от усредненной магнитной индукции поля в веществе.

Однако для простоты вместо магнитной индукции поля, действующего на связанный электрон, будем иметь в виду в дальнейшем усредненную магнитную индукцию \bar{B}_m , равную макроскопическому значению B . Такое упрощение оправдывается тем, что в ряде случаев отличие магнитной индукции действующего поля от усредненной индукции \bar{B}_m несущественно (см. § 7-5, 7-6).

Допустим, что поле с магнитной индукцией B настолько слабо, что не оказывает заметного влияния на абсолютную величину магнитного момента M , обусловленного движением электрона.

Подобно тому как в электрическом поле с напряженностью E на жесткий диполь с моментом $p = e\ell$ действует момент M_F пары сил (см. рис. 35), равный

$$M_F = [pE],$$

в магнитном поле с индукцией¹ B на ток, обладающий магнитным моментом M , действует момент сил

$$M_F = [MB]. \quad (7.13)$$

Пользуясь соотношением (7.12) и вводя обозначение

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}, \quad (7.14)$$

в случае молекулярного тока можно привести уравнение (7.13) к виду

$$M_F = [\omega_L L]. \quad (7.15)$$

Вектор ω_L параллелен магнитному полю, а его абсолютное значение ω_L обладает размерностью частоты. Для величины

$$\omega_L = \frac{eB}{2m} \quad (7.16)$$

принято название *ларморова частота*.

¹ Понятие магнитной индукции аналогично понятию напряженности электрического поля (см. § 2-7). В системе СГС можно заменить B на H , если речь идет о магнитном поле в вакууме.

Воспользуемся тем, что момент сил \mathbf{M}_F равен производной от момента импульса по времени, т. е.

$$\mathbf{M}_F = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Отсюда ввиду равенства (7.15) получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}_L \mathbf{L}].$$

Таким образом, вектор $d\mathbf{L}$ образует праввинтовую систему с векторами $\boldsymbol{\omega}_L$ и \mathbf{L} (рис. 50). Перпендикулярность $d\mathbf{L}$ к $\boldsymbol{\omega}_L$ и \mathbf{L} означает постоянство угла ϑ между $\boldsymbol{\omega}_L$ и \mathbf{L} . Скорость перемещения конца вектора \mathbf{L} , равная

$$\left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right| = \omega_L L \sin \vartheta,$$

постоянна ввиду того, что ω_L , L и ϑ постоянны. Таким образом, конец вектора \mathbf{L} вращается по окружности вокруг направления магнитной индукции \mathbf{B} с угловой скоростью ω_L , пропорциональной \mathbf{B} . Если направить ось z вдоль вектора \mathbf{B} и спроектировать вектор \mathbf{L} на плоскость xOy , то угол между этой проекцией и осью x будет меняться по закону

$$\psi = \psi_0 + \omega_L \cdot t,$$

тогда как

$$\vartheta = \vartheta_0,$$

где ψ_0 и ϑ_0 — значения ψ и ϑ при $t=0$.

Следовательно, орбитальный механический момент \mathbf{L} электрона совершает прецессию вокруг направления магнитной индукции аналогично прецессии оси волчка вокруг вертикали под действием силы тяжести. Движение электрона по орбите происходит вокруг точки O перпендикулярно \mathbf{L} .

Таким образом, в случае достаточно слабого магнитного поля справедлива следующая *теорема Лармора*: изменение движения электрона, обусловленное магнитным полем с индукцией \mathbf{B} , сводится к вращению электрона вокруг направления \mathbf{B} с угловой скоростью ω_L , определяемой соотношением (7.14).

Если подвижная система координат с началом в центре орбиты электрона O вращается с угловой скоростью ω_L вокруг оси z , совпадающей с направлением магнитной индукции \mathbf{B} , то в такой системе электрон движется так же, как в неподвижной системе координат в отсутствие магнитного поля.

Нетрудно заметить, в каком смысле магнитное поле должно быть слабым, чтобы справедливость теоремы Лармора не нару-

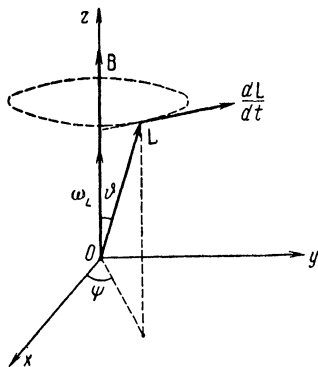


Рис. 50. Прецессия механического момента электрона в магнитном поле

шалась. Допустим для простоты, что в отсутствие магнитного поля электрон движется вокруг точки O по круговой орбите радиуса r с угловой скоростью ω_0 . Действующая на него центростремительная сила равна

$$F_0 = m\omega_0^2 r. \quad (7.17)$$

Во вращающейся системе координат необходимо учитывать дополнительную центробежную силу инерции¹

$$F_{ц} = m\omega_L^2 r. \quad (7.18)$$

При доказательстве теоремы Лармора предполагалось, что магнитное поле не вызывает заметного изменения величин M и L , т. е. заметного изменения орбиты электрона относительно подвижной системы координат, которая вращается с угловой скоростью ω_L . Это означает, что в излагаемой теории предполагается настолько малая ларморова частота ω_L по сравнению с угловой скоростью электрона ω_0 , что влияние центробежной силы инерции $F_{ц}$ на радиус орбиты электрона пренебрежимо мало по сравнению с влиянием силы F_0 .

Таким образом, ввиду формул (7.17) и (7.18) магнитное поле должно быть настолько слабым, чтобы выполнялось неравенство

$$\omega_L \ll \omega_0,$$

или, с учетом равенства (7.16),

$$B \ll \frac{2m}{e} \omega_0. \quad (7.19)$$

По представлениям классической электронной теории, угловая скорость электрона ω_0 должна совпадать с угловой частотой излучения (см. § 5-2). Тогда, например, в оптической области при $\omega_0 \approx 10^{15} \text{ сек}^{-1}$ неравенство (7.19) принимает вид

$$B \ll 10^4 \text{ тл.}$$

Таким образом, изложенная теория и теорема Лармора справедливы в весьма широкой области значений магнитной индукции.

В частном случае, когда движение электрона по окружности происходит в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, теорема Лармора сводится к следующему утверждению: если в отсутствие магнитного поля угловая скорость электрона равна ω_0 , то в магнитном поле в той же неподвижной системе координат она будет равна

$$\omega = \omega_0 \pm \omega_L, \quad (7.20)$$

где знак плюс относится к случаю, когда векторы ω_0 и ω_L параллельны, а знак минус — если они антипараллельны.

¹ Сила Кориолиса, действующая на электрон, как легко видеть, уравновешивается силой Лоренца.

Посмотрим, как под действием возникающего магнитного поля может осуществляться *переход к движению, определяемому теоремой Лармора*.

Согласно теореме Лармора кинетическая энергия электрона в присутствии магнитного поля, вообще говоря, иная, чем в отсутствие его. Это особенно ясно в простом случае, когда вектор ω_L параллелен ω_0 и электрон движется по окружности. Тогда, в соответствии с равенством (7.20),

$$\omega = \omega_0 + \omega_L, \quad (7.21)$$

и кинетическая энергия электрона в присутствии магнитного поля больше, чем без него, на величину

$$\Delta W = \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 r^2}{2},$$

или, если подставить выражение (7.21) для ω , то при $\omega_L \ll \omega_0$

$$\Delta W = m\omega_0\omega_L r^2. \quad (7.22)$$

Чтобы понять происхождение этого приращения энергии, обратимся к закону электромагнитной индукции в дифференциальной форме, т. е. воспользуемся уравнением Максвелла (2.23)

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (7.23)$$

Появление и возрастание магнитной индукции \mathbf{B} создают электрическое поле \mathbf{E} , способное производить работу над электроном. За время одного оборота электрона по орбите приращение его энергии вследствие работы поля \mathbf{E} равно

$$\Delta W_1 = - e \oint_l (\mathbf{E} d\mathbf{l}),$$

где l — длина орбиты. Здесь \mathbf{E} надо брать в каждой точке орбиты в тот момент, когда электрон проходит через эту точку.

Чтобы вместо этого брать значения \mathbf{E} во всех точках орбиты электрона в один и тот же момент, необходимо ограничиться случаем весьма медленного изменения \mathbf{B} .

Тогда, пользуясь формулой Стокса, получаем

$$\Delta W_1 = - e \int_S \text{rot}_n \mathbf{E} dS,$$

где S — площадь, охватываемая орбитой, n — нормаль к этой площади, образующая с направлением движения электрона правинтовую систему. Ввиду уравнения (7.23) напомним

$$\Delta W_1 = e \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS.$$

Параллельность векторов ω_0 и ω_L означает, что нормаль \mathbf{n} параллельна магнитному полю, т. е. $B_n = B$. Учитывая, что значения B одинаковы во всех точках внутри орбиты электрона, находим

$$\Delta W_1 = \pi r^2 e \frac{dB}{dt},$$

или благодаря постоянству dB/dt за период обращения электрона τ

$$\Delta W_1 = \pi r^2 e \frac{\Delta B}{\tau},$$

где ΔB — изменение магнитной индукции за время τ .

Отсюда, заменяя ΔB полным изменением магнитной индукции, равным B , а также τ на $2\pi/\omega_0$, находим полное изменение энергии электрона

$$\Delta W = \frac{er^2 B \omega_0}{2},$$

что совпадает с равенством (7.22), если принять во внимание формулу (7.16).

Следовательно, переход от движения электрона в отсутствие магнитного поля к движению, определяемому теоремой Лармора, действительно согласуется с законом сохранения энергии, если магнитное поле меняется достаточно медленно. При очень быстром изменении магнитного поля такой переход не осуществляется.

Чтобы установилось ларморовское движение, электрон должен совершить большое число оборотов за время возрастания магнитного поля от 0 до B . Согласно классическим представлениям это действительно происходит при обычных скоростях изменения магнитного поля.

§ 7-3. ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА

Движение электрона по орбите, центр которой O совпадает с началом координат, можно рассматривать как сочетание гармонических колебаний по координатным осям x , y и z . При этом колебания по осям x и y приводят в простейшем случае, которым можно здесь ограничиться, к движению по окружности в плоскости xOy . К этому добавляется колебание вдоль оси z .

Рассмотрим поведение связанных электронов в однородном магнитном поле, например между полюсами электромагнита (рис. 51). Пусть ось z совпадает с направлением поля.

Если в отсутствие магнитного поля угловые частоты колебаний по осям x , y и z одинаковы и равны ω_0 , то такова же и угловая скорость электрона в плоскости xOy . При наличии маг-

нитного поля, как видно из теоремы Лармора, движения электронов параллельно плоскости xOy происходят с измененными угловыми скоростями, удовлетворяющими равенству (7.20), т. е. электроны совершают гармонические колебания вдоль осей x и y с угловыми частотами $\omega_0 + \omega_L$ и $\omega_0 - \omega_L$.

Вдоль оси z магнитное поле не может изменить колебания электрона, так как это поле не оказывает влияния на электрон, движущийся коллинеарно вектору магнитной индукции \mathbf{B} . Угловая частота колебаний вдоль оси z остается равной ω_0 .

Если колебания электрона происходят по прямой линии, то по формуле (5.21) вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} в волне, которая распространяется перпендикулярно этой линии, коллинеарен ей.

Таким образом, в направлении оси y должно обнаружиться излучение с тремя частотами, равными $\omega_0 + \omega_L$, $\omega_0 - \omega_L$ и ω_0 . В первых двух случаях колебания напряженности электрического поля \mathbf{E} коллинеарны оси x , а в последнем случае эти колебания параллельны оси z .

Если же смотреть вдоль поля через отверстие в электромагните, то колебания электронов по оси z не внесут никакого вклада в излучение и оно будет создаваться только вследствие колебаний электронов по осям x и y . При этом будет излучаться свет с частотами $\omega_0 + \omega_L$ и $\omega_0 - \omega_L$.

В первом случае вектор ω_0 параллелен ω_L или \mathbf{B} , во втором случае антипараллелен. Следовательно, вращение электрического вектора \mathbf{E} с частотой $\omega_0 + \omega_L$ образует правовинтовую систему с направлением \mathbf{B} , а частота $\omega_0 - \omega_L$ соответствует обратному вращению вектора \mathbf{E} .

Такой *нормальный эффект Зеемана* действительно обнаруживается в некоторых случаях.

Вскоре после открытия описанного эффекта и объяснения его Лоренцом на основе классической электронной теории выяснилось, что такое явление наблюдается на опыте сравнительно редко: обычно расщепление спектральных линий в магнитном поле носит более сложный характер и известно как *«аномальный эффект Зеемана»*.

Объяснение последнего явления дает только квантовая механика.

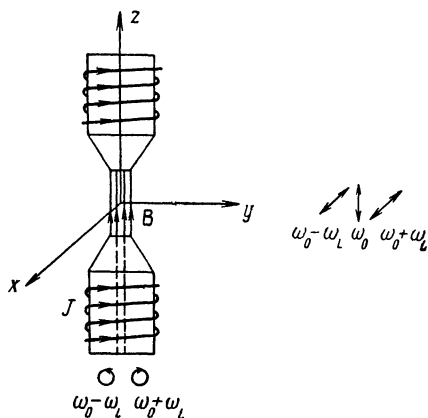


Рис. 51. Схема наблюдения нормального эффекта Зеемана

7.4. ЭФФЕКТ ФАРАДЕЯ

Макроскопическая электромагнитная теория света не учитывает влияния магнитного поля на распространение света в веществе, магнитная проницаемость которого не зависит от этого поля.

Но еще в 1846 г. впервые в истории физики Фарадеем было обнаружено, что связь оптических и электромагнитных процессов выражается в виде вращения плоскости поляризации света в стекле и других телах под действием магнитного поля, направленного по линии распространения света. Такое магнитное вращение плоскости поляризации известно под названием эффекта Фарадея.

В отсутствие магнитного поля, если монохроматический плоскополяризованный свет распространяется по оси z и ось x коллинеарна вектору \mathbf{E} световой волны, при соответствующем выборе начала координат имеем

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz). \quad (7.24)$$

Волновое число k удовлетворяет равенству

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c},$$

где n — показатель преломления.

Представляя напряженность электрического поля волны в комплексной форме — с вещественной частью E_x и мнимой частью iE_y и пользуясь формулой Эйлера, перепишем равенство (7.24) в виде

$$E_x = \frac{E_0}{2} \left\{ e^{i\omega \left(t - \frac{nz}{c} \right)} + e^{-i\omega \left(t - \frac{nz}{c} \right)} \right\}. \quad (7.25)$$

Плоскополяризованная волна (7.24) равнозначна по формуле (7.25) двум волнам с одинаковыми амплитудами $E_0/2$ и угловыми частотами ω . Для первой волны характерно возрастание мнимой части при небольшом увеличении t от $t_0 = \frac{nz}{c}$. Электрический вектор этой волны поворачивается по оси x к оси y , т. е. эта волна поляризована по левому кругу. Вторая волна поляризована по правому кругу.

Рассмотрим влияние магнитного поля, направленного против оси z , т. е. противоположно распространению света (наблюдатель смотрит вдоль магнитного поля, как и в § 7-3). По теореме Лармора это поле вызывает дополнительное движение электронов по окружности в плоскости x, y с угловой скоростью ω_L в виде (7.14), т. е. движение по правому кругу, вследствие чего угловая скорость вращения электрического вектора волны относительно электронов изменяется на ω_L для первой (левополяризованной) волны и на $-\omega_L$ для второй волны. Согласно зависимости показателя преломления n от ω (см. рис.40) такова же

будет зависимость n_1 от $\omega + \omega_L$ для первой волны и n_{11} от $\omega - \omega_L$ для второй волны (рис. 52).

Существование сдвинутых линий поглощения с частотами $\omega_0 - \omega_L$ и $\omega_0 + \omega_L$ и указанной только что круговой поляризацией является обратным эффектом по отношению к нормальному эффекту Зеемана, который обнаруживается при наблюдении излучения вдоль магнитного поля (см. 7-3).

Два разных показателя преломления n_1 и n_{11} (см. рис. 52) означают, что в формуле (7.25) следует n заменить на n_1 для первой волны и на n_{11} для второй волны. При этом правая часть формулы (7.25) становится комплексной, следовательно, в левой части надо писать не E_x , а $E_x + iE_y$. Если l — путь, пройден-

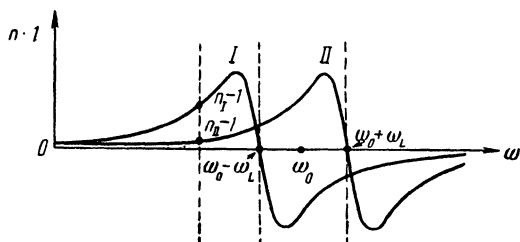


Рис. 52. К теории эффекта Фарадея

ной волной в области действия магнитного поля, то, заменяя z на l , вместо формулы (7.25) имеем

$$E_x + iE_y = \frac{E_0}{2} \left\{ e^{i\omega \left(t - \frac{n_1 l}{c} \right)} + e^{-i\omega \left(t - \frac{n_{11} l}{c} \right)} \right\}. \quad (7.26)$$

Полагая

$$n_1 = n_0 + \frac{\Delta n}{2}, \quad n_{11} = n_0 - \frac{\Delta n}{2},$$

перепишем формулу (7.26) в виде

$$E_x + iE_y = E_0 \cdot e^{-\frac{i\omega l \Delta n}{2c}} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{n_0 l}{c} \right). \quad (7.27)$$

Электрический вектор волны в плоскости x , y расположен по линии, которая благодаря множителю $e^{-\frac{i\omega l \Delta n}{2c}}$ образует с осью x угол, равный

$$\varphi = -\frac{\omega l \Delta n}{2c}. \quad (7.28)$$

Приращение показателя преломления $\Delta n = n_1 - n_{11}$ при переходе от частоты $\omega_0 - \omega_L$ к частоте $\omega_0 + \omega_L$ выразим, пользуясь малостью ларморовой частоты ω_L ,

$$\Delta n \approx \frac{dn}{d\omega} \cdot 2\omega_L,$$

или, в силу равенства (7.16),

$$\Delta n = \frac{dn}{d\omega} \cdot \frac{eB}{m}.$$

Следовательно, выражение (7.28) для φ можно записать в виде

$$\varphi = -\frac{\omega l}{2c} \cdot \frac{dn}{d\omega} \cdot \frac{eB}{m}. \quad (7.29)$$

Это формула Беккереля. По этой формуле при $\frac{dn}{d\omega} > 0$, т. е. в прозрачной области, плоскость поляризации вращается с увеличением l по часовой стрелке (вправо).

Возьмем отношение

$$V = \frac{|\varphi|}{lB}.$$

Это *постоянная Верде*, или удельное магнитное вращение плоскости поляризации. Как видно из равенства (7.29),

$$V = \frac{\omega}{2c} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{dn}{d\omega}.$$

При более точном расчете постоянной Верде принимается во внимание движение не только электронов, но и атомных ядер¹.

Особенно велики значения V для ферромагнитных веществ (для кристаллического железа $V = 2,3 \cdot 10^7$ рад/мл·м).

В оптически активных веществах магнитное вращение плоскости поляризации накладывается на естественное вращение, обусловленное структурой вещества.

§ 7-5. ДИАМАГНЕТИЗМ

У диамагнитных тел магнитная проницаемость μ_a меньше μ_0 . При этом вектор намагниченности, как видно из уравнений (2.15) и (4.58), антипараллелен векторам \mathbf{H} и \mathbf{B} . Если рассматривать вещество как сочетание элементарных магнитов, которые располагаются упорядоченно под действием внешнего магнитного поля, то диамагнитные свойства были бы непонятны. Однако электронная теория легко объясняет происхождение диамагнетизма.

По теореме Лармора (см. § 7-3), в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} движение связанных электронов изменяется так, что возникает дополнительное равномерное вращение их вокруг направления вектора \mathbf{B} с угловой скоростью ω_L , определяемой выражением (7.14). Обусловленный этим момент импульса направлен параллельно ω_L , т. е. параллельно \mathbf{B} , а магнитный момент, в соответствии с соотношением (7.12), антипараллелен вектору \mathbf{B} .

¹ См.: М. В. Волькенштейн. Молекулярная оптика. М., Гостехиздат, 1951.

При этом магнитный момент, отнесенный к единице объема, т. е. намагниченность \mathbf{I} , имеет направление, противоположное \mathbf{B} ; вследствие уравнения (4.58) $\mu_0 H > B$, и для абсолютной магнитной проницаемости μ_a получается соотношение

$$\mu_a = \frac{B}{H} < \mu_0.$$

Из этого объяснения диамагнетизма следует, что он должен существовать в любом веществе, состоящем из молекул, так как все молекулы содержат связанные электроны. Однако, как будет показано в дальнейшем, другие магнитные свойства вещества могут маскировать этот эффект.

Представляет интерес количественная теория диамагнетизма.

Прецессия механического момента электрона \mathbf{L} (рис. 53) означает, что орбита, по которой электрон двигался бы в отсутствие магнитного поля, испытывает прецессионное движение с угловой скоростью ω_L вокруг оси z , которая проходит через центр орбиты O .

Период прецессии равен

$$\tau_L = \frac{2\pi}{\omega_L},$$

или, если заменить ω_L по формуле (7.16), то

$$\tau_L = \frac{4\pi m}{eB}. \quad (7.30)$$

Ток J_L , созданный прецессией орбиты электрона, определяется аналогично соотношению (7.2), т. е.

$$J_L = \frac{e}{\tau_L},$$

или, с учетом выражения (7.30),

$$J_L = \frac{e^2 B}{4\pi m}. \quad (7.31)$$

Если бы электрон не перемещался по орбите и оставался на неизменном расстоянии r от оси z , то возникающий вследствие прецессии магнитный момент, согласно формуле (7.3), был равен

$$M'_L = J_L \cdot \pi r^2.$$

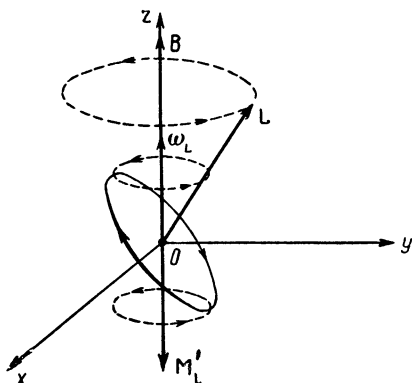


Рис. 53. К теории диамагнетизма

Перемещение электрона по орбите приводит к изменению r . Среднее за период обращения по орбите значение магнитного момента, обусловленного прецессией, имеет вид

$$\widetilde{M}_L = \pi J_L \overline{r^2}$$

(волнистая черта означает усреднение за период обращения).

Для каждого из электронов в физически бесконечно малом объеме величина J_L , как видно из равенства (7.31), будет одна и та же, а среднее по электронам значение \widetilde{M}_L выразится в виде

$$\overline{\widetilde{M}_L} = \pi J_L \cdot \overline{r^2} \quad (7.32)$$

(прямая черта — знак усреднения по физически бесконечно малому объему).

Таким образом, благодаря прецессионному движению электронов вокруг направления магнитной индукции возникает суммарный магнитный момент, отнесенный к единице объема, т. е. появляется намагниченность I . Ее абсолютная величина

$$I = NZ \overline{\widetilde{M}_L}, \quad (7.33)$$

где N — число молекул, отнесенное к единице объема; Z — число электронов в молекуле.

Из соотношений (7.33) и (7.32) находим

$$I = \pi NZ J_L \overline{r^2}. \quad (7.34)$$

Заметим, что

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

тогда как для расстояния R электрона от центра O орбиты имеем

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Следовательно,

$$\overline{r^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2}, \quad (7.35)$$

$$\overline{R^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2}. \quad (7.36)$$

В отсутствие магнитного поля благодаря предполагаемой изотропности магнетика нет физических причин для нарушения (в среднем) сферической симметрии распределения электронов относительно центров их орбит. Это значит, что при $\mathbf{V} = 0$

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2},$$

или

$$\overline{x^2} + \overline{y^2} = 2\overline{z^2}. \quad (7.37)$$

Магнитное поле, вызывая прецессию электронных орбит вокруг оси z , не изменяет соотношения между $x^2 + y^2$ и z^2 для

каждого электрона в любой момент времени, так что связь между средними значениями в виде (7.37) сохраняется. Но из равенств (7.35), (7.36) и (7.37) вытекает соотношение

$$\overline{r^2} = \frac{2}{3} \overline{R^2}.$$

Поэтому формула (7.34) с учетом равенства (7.31) принимает вид

$$I = \frac{e^2 BNZ}{6m} \overline{R^2}.$$

В начале параграфа было отмечено, что вектор намагниченности \mathbf{I} направлен противоположно вектору \mathbf{B} . Таким образом,

$$\mathbf{I} = -\frac{e^2 NZ \overline{R^2}}{6m} \cdot \mathbf{B}. \quad (7.38)$$

В простейшем случае движения электронов по одинаковым круговым орбитам величина $\overline{R^2}$, как и R^2 , представляет собой квадрат радиуса орбиты.

Из формул (2.15), (4.58) и (7.38) находим соотношение, которому удовлетворяет *относительная магнитная проницаемость* $\mu = \mu_a / \mu_0$:

$$\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{\mu_0 e^2 NZ \overline{R^2}}{6m}. \quad (7.39)$$

Если принять линейные размеры атома порядка 10^{-10} м, $\overline{R^2} = 10^{-20}$ м², $N = 2,7 \cdot 10^{25}$ м⁻³ (число молекул газа в 1 м³ при 0°С и атмосферном давлении) и $Z \approx 1$, то из соотношения (7.39) имеем

$$\frac{1}{\mu} - 1 \approx 10^{-9} \ll 1.$$

Но при $\delta \ll 1$ справедливо с достаточной точностью равенство $(1 + \delta)^{-1} = 1 - \delta$, и из соотношения (7.39) с ничтожной погрешностью получим

$$\mu = 1 - \frac{\mu_0 e^2 NZ \overline{R^2}}{6m}. \quad (7.40)$$

Близость μ к 1 показывает, что в теории диамагнетизма магнитную индукцию поля, действующего на электрон, можно считать равной $\overline{\mathbf{B}}_m$, как и было сделано при рассмотрении поведения связанного электрона в магнитном поле (см. § 7-2). В самом деле, если принять, аналогично соотношению (6.15), что индукция действующего магнитного поля \mathbf{B}_d связана с усредненным значением микроскопической магнитной индукции $\overline{\mathbf{B}}_m$ соотношением

$$\mathbf{B}_d = \overline{\mathbf{B}}_m + a_1 \mathbf{I},$$

то, заменяя \overline{B}_m на B , можно получить на основе уравнений (2.15) и (4.58)

$$B_d = B \left[1 + \frac{a_1}{\mu_0} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \right].$$

Отсюда при достаточной близости μ к единице можно принять

$$B_d = B.$$

Магнитная восприимчивость χ единицы объема, как отношение намагниченности I к напряженности магнитного поля H , в соответствии с уравнениями (2.15) и (4.58), связана с относительной магнитной проницаемостью μ соотношением

$$\chi = \mu - 1. \quad (7.41)$$

Таким образом, магнитная восприимчивость единицы объема диамагнетика на основании формулы (7.40) равна

$$\chi = - \frac{\mu_0 e^2 N Z \overline{R^2}}{6m}. \quad (7.42)$$

Квантовая механика позволяет вычислять средний квадрат расстояния электрона от ядра атома. При подстановке квантовомеханического значения $\overline{R^2}$ в формулу (7.42) получаются значения магнитной восприимчивости, обычно находящиеся в хорошем согласии с опытом. В случае многоатомных молекул согласие с опытом может быть достигнуто путем более сложных квантовомеханических расчетов.

§ 7-6. ПАРАМАГНЕТИЗМ

В предыдущем параграфе не принималось во внимание, что угол между магнитным моментом M , обусловленным орбитальным движением электрона, и направлением магнитной индукции B может зависеть от B . В случае изолированной молекулы такая зависимость отсутствует и поле B приводит лишь к диамагнитному эффекту вследствие прецессионного движения электронов вокруг B .

Теперь примем в расчет взаимодействия между молекулами, а именно столкновения вследствие беспорядочного теплового движения. Будем считать, что каждая молекула обладает некоторым результирующим магнитным моментом M в отсутствие поля B . Абсолютная величина этого магнитного момента будет, очевидно, зависеть от внутренних свойств молекулы, но ориентация вектора M относительно направления магнитной индукции B должна изменяться вследствие столкновений при наличии поля B . Это становится особенно ясным, если заметить, что молекула, обладающая магнитным моментом, ведет себя как магнитный диполь,

аналогично поведению жестких электрических диполей во внешнем электрическом поле (см. § 6-4).

Механической аналогией могут служить колебания маятников в поле тяжести. Если маятники сталкиваются между собой, то часть их механической энергии затрачивается на выделение теплоты, и их отклонения от равновесного положения, т. е. от направления, обусловленного действием поля, уменьшаются.

Влияние столкновений молекул на ориентацию их магнитных моментов можно выяснить в рамках статистической физики, подобно тому, как это делалось в случае жестких диполей в электрическом поле (см. § 6-4).

Однако существенная разница заключается в том, что электрические диполи подвержены воздействию консервативного электрического поля, а магнитное поле не является консервативным. Вместо потенциальной энергии электрических диполей следует теперь учитывать кинетическую энергию электронов при движении их в магнитном поле.

Известное из статистической физики распределение Максвелла—Больцмана остается также справедливым и в случае неконсервативного магнитного поля, если вместо потенциальной энергии, которая принимается во внимание в случае консервативного поля, ввести в закон распределения полную энергию микроробъекта. Это значит, что в условиях термодинамического равновесия *функция распределения молекул* в присутствии магнитного поля отличается от функции распределения в отсутствие поля множителем, аналогичным выражению (6.35), а именно

$$e^{-\frac{\Delta W}{kT}}, \quad (7.43)$$

где ΔW — изменение энергии молекулы за счет магнитного поля, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Поскольку магнитное поле \mathbf{B} не меняет размеров и формы орбиты электрона (см. § 7-2), внутренняя потенциальная энергия молекулы не зависит от \mathbf{B} и ΔW представляет собой приращение кинетической энергии электронов молекулы вследствие прецессионного движения их вокруг направления \mathbf{B} .

Дополнительная скорость i -го электрона, обусловленная таким движением, равна

$$\Delta \mathbf{u}_i = [\omega_L \mathbf{R}_i], \quad (7.44)$$

где \mathbf{R}_i — радиус-вектор, определяющий положение этого электрона относительно центра орбиты. Если \mathbf{u}_i — скорость электрона в отсутствие магнитного поля, то приращение ΔW кинетической энергии всех n электронов молекулы равно

$$\Delta W = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \{(\mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i)^2 - \mathbf{u}_i^2\}. \quad (7.45)$$

На основании неравенства (7.19) будем считать значения B и ω_L малыми в том смысле, что Δu_i в виде (7.44) весьма мало по сравнению с u_i . Тогда, пренебрегая $(\Delta u_i)^2$ по сравнению с $2(\mathbf{u}_i \Delta \mathbf{u}_i)$, из формулы (7.45) получаем

$$\Delta W = m \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}_i \Delta \mathbf{u}_i),$$

или ввиду соотношения (7.44)

$$\Delta W = m \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i [\omega_L \mathbf{R}_i] = \omega_L \sum_{i=1}^n m [\mathbf{R}_i \mathbf{u}_i].$$

Но выражение

$$\sum_{i=1}^n m [\mathbf{R}_i \mathbf{u}_i] = \mathbf{L}$$

представляет собой результирующий момент импульса всех электронов молекулы в отсутствие поля. Таким образом,

$$\Delta W = (\omega_L \cdot \mathbf{L}).$$

Пользуясь выражением (7.14) для ω_L и заменяя \mathbf{L} из соотношения (7.12), находим

$$\Delta W = -(\mathbf{M}\mathbf{B}), \quad (7.46)$$

или

$$\Delta W = -MB \cos \vartheta, \quad (7.47)$$

где ϑ — угол между векторами \mathbf{B} и \mathbf{M} .

Выражение (7.47) совершенно аналогично формуле (6.33) для энергии жесткого диполя в электрическом поле, причем вместо электрического дипольного момента p_0 теперь стоит магнитный момент M , а вместо напряженности действующего электрического поля E_d — магнитная индукция B .

При рассмотрении жестких диполей множитель (6.35) в распределении Максвелла—Больцмана, зависящий от поля, был представлен в форме

$$e^{\eta \cos \vartheta} \quad (7.48)$$

(было принято обозначение $\eta = \frac{p_0 E_d}{kT}$).

Теперь добавочный множитель, зависящий от поля, в силу выражения (7.43) и формулы (7.47) оказывается равным

$$e^{\frac{MB \cos \vartheta}{kT}}. \quad (7.49)$$

Это можно представить в форме (7.48), если ввести обозначение

$$\eta = \frac{MB}{kT}. \quad (7.50)$$

Нет необходимости повторять на основании выражения вида (7.49) рассуждения, приведенные в теории диэлектриков (см. § 6-4), начиная с соотношения (6.34). Результатами этих рассуждений можно прямо воспользоваться с заменой ρ_0 на M и E_d на B . При этом поляризацию диэлектрика P , как сумму электрических дипольных моментов, отнесенную к единице объема, заменяет намагниченность I , как аналогичная сумма магнитных моментов.

Следовательно, вместо формулы (6.38) справедливо равенство

$$I = NMZ(\eta), \quad (7.51)$$

где N — число молекул в единице объема; η — величина, определяемая формулой (7.50); $Z(\eta)$ — функция Ланжевена (6.39), монотонно растущая от 0 до 1 с увеличением η от 0 до ∞ .

Как видно из формул (7.51) и (7.50), намагниченность I растет с увеличением B (рис. 54) совершенно аналогично тому, как растет поляризация диэлектрика с жесткими диполями при увеличении E_d (см. рис. 36). При $B \rightarrow \infty$ парамагнетик приближается к состоянию магнитного насыщения, когда I становится равным намагниченности при насыщении I_n , а именно

$$I_n = NM. \quad (7.52)$$

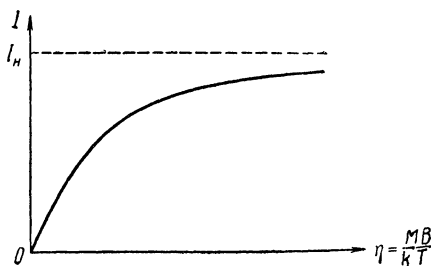


Рис. 54. Намагниченность парамагнетика

Численные значения магнитных моментов M молекул невелики. Если, следуя классической электронной теории, длину волны видимого света, например $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м, рассматривать как признак того, что частота колебаний электрона по каждой из двух взаимно перпендикулярных осей равна

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 5 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1},$$

то период обращения электрона по орбите будет

$$\tau = \frac{1}{\nu} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ сек},$$

и при диаметре орбиты порядка 10^{-10} м, на основании равенств (7.2) и (7.3), магнитный момент, обусловленный движением одного электрона, будет порядка 10^{-24} м²·а или 10^{-21} СГС¹.

Вследствие того, что величина M мала, в обычных условиях по формуле (7.50) получается

$$\eta \ll 1.$$

¹ В квантовой теории атома магнетон Бора как элементарный магнитный момент, обусловленный движением одного электрона, равен $9,27 \cdot 10^{-21}$ СГС.

Но в области таких малых значений величины η с высокой степенью точности $\frac{dZ}{d\eta} = \frac{Z}{\eta} = \frac{1}{3}$ (см. § 6-4), благодаря чему формула (7.51) приводится к виду

$$I = \frac{NM^2}{3kT} \cdot B. \quad (7.53)$$

Направление вектора намагниченности \mathbf{I} в изотропной среде параллельно \mathbf{B} по тем же причинам, какие приводят к параллельности векторов поляризации \mathbf{P} и действующего электрического поля \mathbf{E}_d (см. § 6-4), так что справедливо векторное соотношение

$$\mathbf{I} = \frac{NM^2}{3kT} \cdot \mathbf{B}. \quad (7.54)$$

При этом, в силу равенств (2.15) и (4.58), *относительная магнитная проницаемость* μ определяется соотношением

$$\frac{1}{\mu} = 1 - \frac{\mu_0 NM^2}{3kT}. \quad (7.55)$$

Например, даже при $M = 10^{-23} \text{ м}^2 \cdot a$, $N = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ и $T = 273^\circ \text{ К}$ получаем $1 - \frac{1}{\mu} = 3 \cdot 10^{-7}$; вообще же для всех парамагнетиков

$$1 - \frac{1}{\mu} \ll 1.$$

Поэтому с высокой степенью точности вместо соотношения (7.55) можно написать

$$\mu = 1 + \frac{\mu_0 NM^2}{3kT}. \quad (7.56)$$

В изложенной теории парамагнетизма не проводилось различия между действующим и усредненным магнитными полями. Обнаруженная близость относительной магнитной проницаемости μ парамагнетика к единице, как и в случае диамагнетизма (см. § 7-5), оправдывает такое упрощение теории.

Из соотношений (7.41) и (7.56) определяется *магнитная восприимчивость* парамагнетика

$$\chi = \frac{\mu_0 NM^2}{3kT}, \quad (7.57)$$

или

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (7.58)$$

где величина

$$C = \frac{\mu_0 NM^2}{3k} \quad (7.59)$$

называется *постоянной Кюри*. Соотношение (7.58) выражает *закон Кюри*: магнитная восприимчивость парамагнетика обратно пропорциональна абсолютной температуре. Этот закон был уста-

новлен эмпирическим путем французским физиком П. Кюри еще в 1895 г.

Опыт подтверждает справедливость закона Кюри для нормальных парамагнетиков, к которым относятся, например, кислород, окись азота, ряд солей и т. д. Однако у таких парамагнетиков, как щелочные или щелочно-земельные металлы, магнитная восприимчивость, в противоречии с соотношением (7.58), почти не зависит от температуры и ее величина значительно меньше, чем по формуле (7.57). Это признак ограниченности классической электронной теории, не способной успешно объяснить поведение электронов в металле. Парамагнитные свойства металлов хорошо объясняются на основе квантовых представлений, если применить к электронам принцип Паули, а также квантовую статистику Ферми—Дирака и воспользоваться зонной теорией твердого тела [10].

Магнитная восприимчивость, обусловленная парамагнетизмом, хотя и невелика, но по абсолютной величине значительно больше, чем диамагнитная восприимчивость. Это заключение, вытекающее из сравнения формул (7.57) и (7.42), подтверждается опытом для всех веществ, молекулы которых обладают магнитным моментом в отсутствие внешнего поля. При этом неизбежный диамагнитный эффект перекрывается парамагнитным эффектом и магнитная восприимчивость, равная алгебраической сумме выражений (7.57) и (7.42), т. е.

$$\chi = \frac{\mu_0 N}{3} \left(\frac{M^2}{kT} - \frac{e^2 \bar{Z} R^2}{2m} \right), \quad (7.60)$$

оказывается величиной положительной. Такие вещества относятся к парамагнетикам.

Диамагнетиками являются лишь те вещества, у которых магнитный момент молекулы в отсутствие внешнего поля равен нулю.

В парамагнетиках под влиянием внешнего магнитного поля обнаруживается парамагнитное вращение плоскости поляризации. Оно налагается на эффект Фарадея, рассмотренный в § 7-4, где неявно предполагалось, что магнитное поле не создает какой-либо преимущественной ориентации молекул. В парамагнетиках благодаря множителю (7.49), входящему в функцию распределения, магнитные моменты молекул \mathbf{M} ориентируются преимущественно вдоль вектора \mathbf{B} . При этом, как видно из формулы (7.12), вращение электронов в молекуле образует преимущественно левовинтовую систему с вектором \mathbf{B} .

Отклонение показателя преломления n от 1 обусловлено взаимодействием электромагнитной волны со всеми частицами вещества (см. § 6-6). Рассматривая вместо плоскополяризованной волны две волны с левой и правой поляризацией по кругу (см. § 7-4), нетрудно видеть, что взаимодействие первой из них с левовращающимся электроном будет в среднем значительно

(приведет к большему отклонению ε и n от 1), чем взаимодействие той же волны с правовращающимся электроном. Для правополяризованной волны значительнее будет взаимодействие с правовращающимся электроном.

Обусловленное парамагнетизмом преобладание молекул с левым вращением будет означать большее отклонение n_I от 1 для левополяризованной волны и меньшее отклонение n_{II} от 1 для правополяризованной волны по сравнению с тем, что представлено в теории эффекта Фарадея в виде кривых I и II (см. рис. 52). Это внесет изменение в величину $\Delta n = n_I - n_{II}$. В силу формулы (7.28) на эффект Фарадея наложится добавочное парамагнитное вращение плоскости поляризации.

Экспериментальные исследования этого эффекта позволяют судить о парамагнитной ориентации молекул вещества.

§ 7-7. МАГНИТОМЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКТОР

При рассмотрении в § 7-1 молекулярного тока выяснилась справедливость равенства (7.11), следовательно, *магнитомеханическое, или гиромагнитное, отношение*, как отношение абсолютных величин магнитного и механического моментов, равно отношению элементарного заряда e к удвоенной массе электрона. Векторы магнитного и механического моментов каждого молекулярного тока связаны соотношением (7.12). Поэтому результирующий магнитный момент $M_{\text{рез}}$ всех молекулярных токов в материальном теле связан с результирующим механическим моментом $L_{\text{рез}}$ таким же соотношением

$$M_{\text{рез}} = -\frac{e}{2m} L_{\text{рез}}. \quad (7.61)$$

Однако существует связь (4.15) между собственными магнитным и механическим моментами электрона, которая является следствием существования спина электрона. Если бы результирующие магнитный и механический моменты тела были обусловлены только спинами электронов, то на основании равенства (4.15) получилось бы вместо (7.61) соотношение

$$M_{\text{рез}} = -\frac{e}{m} L_{\text{рез}}. \quad (7.62)$$

Обобщая соотношения (7.61) и (7.62), можно написать

$$M_{\text{рез}} = -\frac{ge}{2m} L_{\text{рез}}. \quad (7.63)$$

Отсюда магнитомеханическое отношение выражается в виде

$$\frac{M_{\text{рез}}}{L_{\text{рез}}} = \frac{ge}{2m}.$$

Здесь коэффициент g — так называемый *магнитомеханический (гиромагнитный) фактор*, выражающий магнитомеханическое отношение $M_{\text{рез}}/L_{\text{рез}}$ в единицах

$$\frac{e}{2m}.$$

Вследствие одного лишь орбитального движения электронов имеем

$$g = 1, \quad (7.64)$$

тогда как влияние одних лишь спинов электронов приводит к значению

$$g = 2. \quad (7.65)$$

При рассмотрении диамагнитного эффекта и парамагнетизма не учитывался спин электронов. Совпадение, в известной мере, теории с опытом показывает, что существование спина электрона не оказывает значительного влияния на результаты рассмотрения этих явлений. Это подтверждается квантово-механическими расчетами.

Однако магнитомеханические явления, в которых обнаруживается связь между механическим и магнитным моментами тела, проявляются наиболее ярко и представляют наибольший интерес в случае ферромагнетиков, для которых нет оснований не учитывать спина электронов.

Действительно, спиновый магнитный момент электрона, как видно из формулы (4.22) с учетом выражения (3.52) для удельного заряда электрона, равен с округлением $9 \cdot 10^{-24} \text{ м}^2/\text{а}$, а орбитальный магнитный момент, если разумно оценить диаметр орбиты и период обращения электрона, оказывается по порядку величины таким же (см. § 7-6).

В зависимости от структуры вещества взаимная ориентация орбитальных магнитных моментов и взаимная ориентация спиновых магнитных моментов могут привести к тому, что результирующий магнитный момент всего тела будет обусловлен преимущественно орбитальным движением электронов или же преимущественно спинами. В первом случае будет приблизительно справедливо равенство (7.64), а во втором случае фактор g окажется близким к 2, в приблизительном согласии с равенством (7.65).

Поэтому целесообразно, имея в виду общее соотношение (7.63), опытным путем найти магнитомеханический фактор g .

Определение этого фактора для атомов и других частиц возможно с высокой степенью точности по методу магнитного резонанса. Идея метода такова.

На движущуюся частицу, обладающую магнитным моментом, действует весьма неоднородное поперечное постоянное магнитное

поле и в некоторой промежуточной области однородное переменное магнитное поле. При определенной резонансной частоте переменного поля оно резко изменяет ориентацию магнитного момента частицы. Тогда при последующем движении частицы в неоднородном поле она отклоняется от траектории, приводящей к регистрирующему устройству, а потому отмечается резкий резонансный минимум числа регистрируемых частиц.

Магнитомеханический фактор оказывается равным отношению резонансной частоты переменного магнитного поля к ларморовой частоте, как показывает теория метода (на основе квантовой механики¹).

Более грубое определение магнитомеханического фактора, представляющее, однако, большой принципиальный интерес, возможно на основе рассмотрения таких важнейших магнитомеханических явлений, как эффект Барнетта и эффект Эйнштейна — де Хааса.

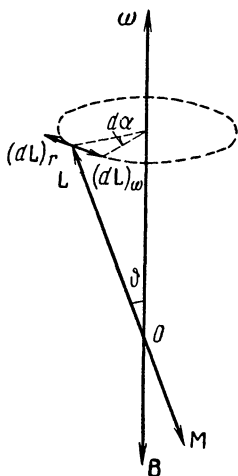


Рис. 55. К теории эффекта Барнетта

§ 7-8. МАГНИТОМЕХАНИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Магнитомеханическое явление, обнаруженное Барнеттом в 1909 г., заключается в том, что ферромагнитное тело при вращении намагничивается вдоль оси вращения. Электронная теория легко объясняет эффект Барнетта.

Обозначим через ω угловую скорость вращения тела в неподвижной системе координат. Воспользуемся подвижной системой координат, вращающейся относительно неподвижной системы с той же угловой скоростью ω . Начала координат этих систем O совместим с началом вектора L , изображающего в неподвижной системе момент импульса электрона, обусловленный его орбитальным движением или спином (рис. 55).

Изменение L со временем зависит от двух причин. Во-первых, если вектор L неподвижен относительно вращающейся системы координат, то он вращается в неподвижной системе с угловой скоростью ω и за время dt испытывает изменение $(dL)_\omega$. Как легко видеть (см. рис. 55),

$$\left| \frac{(dL)_\omega}{dt} \right| = \frac{L \sin \vartheta d\alpha}{dt} = L\omega \sin \vartheta,$$

¹ См.: Д. И. Блохинцев. Основы квантовой механики. М., «Высшая школа», 1963.

причем

$$\frac{(d\mathbf{L})_{\omega}}{dt} = [\omega\mathbf{L}]. \quad (7.66)$$

Во-вторых, если изменение момента импульса электрона в подвижной системе координат за время dt равно $(d\mathbf{L})_r$, то по этой причине изменение \mathbf{L} в неподвижной системе возрастет на $(d\mathbf{L})_r$.

Вследствие обеих причин изменения \mathbf{L} можно написать

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\omega\mathbf{L}] + \frac{(d\mathbf{L})_r}{dt}. \quad (7.67)$$

Но при постоянстве угловой скорости и момента инерции момент импульса не меняется, т. е. $d\mathbf{L} = 0$, следовательно

$$\frac{(d\mathbf{L})_r}{dt} = -[\omega\mathbf{L}]. \quad (7.68)$$

Производная $(d\mathbf{L})_r/dt$ равна моменту \mathbf{M}_F сил, действующих в подвижной системе координат. Итак,

$$\mathbf{M}_F = -[\omega\mathbf{L}]. \quad (7.69)$$

Силы, вызывающие изменение механического момента $(d\mathbf{L})_r$, приводят, как видно из соотношения (7.63), к пропорциональному изменению магнитного момента в той же системе координат, связанной с телом. Следовательно, *намагниченность тела меняется вследствие его вращения*.

В опыте Барнетта намагниченность измерялась и сравнивалась с той намагниченностью, какую создает внешнее магнитное поле. Одинаковая намагниченность получается, если моменты сил, действующие на электрон, одинаковы.

Как известно из электродинамики, момент пары сил, действующих на диполь со стороны электрического поля с напряженностью \mathbf{E} , равен $[\mathbf{p}\mathbf{E}]$, где \mathbf{p} — электрический момент диполя. Аналогично при замене \mathbf{p} на \mathbf{M} и \mathbf{E} на \mathbf{B} (см. § 7-6) момент сил, действующих со стороны магнитного поля на электрон с магнитным моментом \mathbf{M} , равен

$$\mathbf{M}'_F = [\mathbf{M}\mathbf{B}]. \quad (7.70)$$

Если в условиях эксперимента осуществляется одинаковая намагниченность вследствие вращения тела и вследствие внешнего поля \mathbf{B} , то

$$\mathbf{M}'_F = \mathbf{M}_F,$$

или, в силу равенств (7.69) и (7.70),

$$[\mathbf{M}\mathbf{B}] = [\mathbf{L}\omega]. \quad (7.71)$$

Аналогично равенству (7.63) напишем

$$\mathbf{M} = -\frac{ge}{2m} \mathbf{L}. \quad (7.72)$$

Из соотношений (7.71) и (7.72) получим

$$\mathbf{B} = -\frac{2m}{ge} \boldsymbol{\omega}. \quad (7.73)$$

Опыт показывает, что векторы \mathbf{B} и $\boldsymbol{\omega}$ действительно направлены противоположно друг другу. Этим подтверждаются теоретические представления о движении отрицательно заряженных электронов как причине эффекта Барнетта. Зная из опыта значение магнитной индукции B , при котором намагниченность ферромагнетика такая же, как и при вращении его с угловой скоростью ω , из равенства (7.73) находим магнитомеханический фактор

$$g = \frac{2m\omega}{eB}. \quad (7.74)$$

В опытах с железом, никелем, кобальтом и гадолинием было установлено, что для этих ферромагнетиков

$$g = 2$$

с отклонениями на несколько процентов. Сравнивая это значение с равенством (7.65), можно заключить, что магнитный момент таких ферромагнетиков обусловлен спинами электронов.

Второе фундаментальное магнитомеханическое явление было открыто в опытах Эйнштейна и де Хааса в 1915 г. Оно заключается

в том, что ферромагнитное или парамагнитное тело вследствие намагничивания вдоль некоторой оси приобретает момент импульса, направленный вдоль этой оси и пропорциональный намагниченности.

Эффект Эйнштейна — де Хааса обнаруживается при намагничивании металлического стерженька, вертикально подвешенного на нити внутри соленоида, по которому пропускается ток (рис. 56). Магнитное поле намагничивает стерженек в вертикальном направлении.

Обозначим намагниченность через \mathbf{I} и будем считать ее однородной (вектор \mathbf{I} во всех точках стерженька одинаков). Если объем стерженька равен V , то сумма магнитных моментов электронов в этом объеме будет

$$\sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{I} \cdot V. \quad (7.75)$$

На основании уравнения (7.72) сумма механических моментов электронов в том же объеме равна

$$\sum_i \mathbf{L}_i = -\frac{2m}{ge} V \mathbf{I}. \quad (7.76)$$

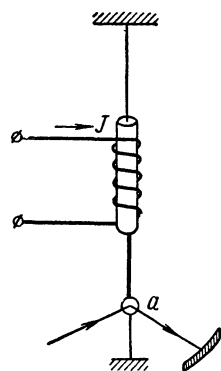


Рис. 56. Схема опыта Эйнштейна — де Хааса

При этом механические моменты электронов рассматриваются относительно таких точек, как центр орбиты при орбитальном движении или центр электрона при учете спина. Сами эти точки могут перемещаться в пространстве; такое перемещение означает дополнительное движение электронов (и ионов). Момент импульса, соответствующий этому дополнительному движению, можно назвать механическим моментом тела в целом; обозначим его через L .

Простейшая теория эффекта Эйнштейна — де Хааса строится в предположении, что стерженек является изолированной физической системой. Тогда справедлив закон сохранения момента импульса

$$\sum_i L_i + L = \text{const.} \quad (7.77)$$

Если до намагничивания, когда

$$\sum_i M_i = 0, \quad \sum_i L_i = 0,$$

стержень покоится, т. е. $L = 0$, то в соотношении (7.77) константа равна нулю и потому

$$L = - \sum_i L_i,$$

или, в силу соотношения (7.76),

$$L = \frac{2mV}{ge} I. \quad (7.78)$$

Отсюда видно, что вектор момента импульса, который приобретает стерженек, параллелен и пропорционален вектору намагниченности I . Заменим по правилам механики вектор L произведением момента инерции C (относительно оси, совпадающей с осью цилиндрического стерженька) на угловую скорость ω . Тогда на основании соотношения (7.78) получим

$$\omega = \frac{2mV}{geC} I. \quad (7.79)$$

Для ферромагнетика или парамагнетика вектор намагниченности I параллелен магнитной индукции B . Следовательно, стерженек, намагничиваясь, приобретает вращение с угловой скоростью ω , параллельной внешнему полю B . Эта параллельность векторов ω и B подтверждается опытом. Таким образом, подтверждается представление о движении отрицательно заряженных электронов как причине эффекта Эйнштейна — де Хааса и открывается возможность найти из опыта величину g .

Однако в действительности стерженек не является изолированной системой, а подвешен на нити (см. рис. 56). Вращение стерженька создает закручивание нити; при этом возникает момент сил, действующих на стерженек. В реальных условиях

опыта Эйнштейна — де Хааса по соленоиду проходил переменный ток J , так что стерженек подвергался периодическому перемагничиванию и совершал крутильные колебания. Доступная наблюдению амплитуда колебаний возникала вблизи резонанса, когда частота переменного тока приблизительно совпадала с резонансной частотой колебаний закручиваемой системы. Амплитуда измерялась по отклонению светового луча, отраженного от зеркала a , которое было скреплено со стержнем (см. рис. 56). Зная момент инерции C (очень малый в условиях опыта), намагниченность I , объем стерженька V и упругость нити, можно определить из опыта фактор g [5].

После повторения рядом экспериментаторов опытов Эйнштейна и де Хааса оказалось, что для ферромагнетиков $g=2$ с отклонениями, не превышающими обычно нескольких процентов, т. е. в согласии с равенством (7.65) и опытом Барнетта, магнитный момент ферромагнетиков обусловлен, по крайней мере почти полностью, спинами электронов.

Для парамагнетиков $1 < g < 2$, что свидетельствует о вкладе как орбитальных, так и спиновых магнитных моментов в намагниченность вещества.

§ 7-9. ФЕРРОМАГНЕТИЗМ

К ферромагнетикам относятся железо, никель, кобальт, некоторые редкоземельные металлы, например гадолиний, а также некоторые сплавы и соединения, например ряд сплавов, в составе которых встречается алюминий. Они обладают спонтанной (самопроизвольной) намагниченностью, существующей в отсутствие внешнего поля, и отличаются обычно высокой магнитной проницаемостью.

Как показывает рассмотрение магнитомеханических явлений (см. § 7-8), причиной намагниченности ферромагнетика являются собственные (спиновые) магнитные моменты электронов. Это значит, что простейшей моделью ферромагнетика может служить система элементарных магнитов, соответствующих спинам электронов. Получается некоторая аналогия с диэлектриком, состоящим из жестких диполей, где, как было замечено в § 6-2, существенную роль играет зависимость ориентации диполя от расположения в пространстве других диполей.

В ферромагнетиках корреляция между ориентациями спиновых магнитных моментов не только существует, но и оказывается настолько сильной, что классическая теория не в состоянии объяснить ее происхождение. Эта корреляция носит такой характер, что в каждой из областей спонтанной намагниченности ферромагнетика элементарные магнитные моменты располагаются параллельно друг другу и создают сильную намагниченность.

В отсутствие внешнего магнитного поля эти *малые области спонтанной намагниченности (домены)* отличаются различными ориентациями векторов намагниченности, обычно взаимно противоположными в соседних областях. При этом в естественном состоянии ферромагнетика его намагниченность в среднем равна нулю.

Начиная с 1931 г., Биттеру, Н. С. Акулову, а затем и другим экспериментаторам [16] удалось обнаружить домены при непосредственном наблюдении. На хорошо отполированную поверхность ферромагнетика наносился тончайший порошок окисла железа (обычно применялся гематит Fe_2O_3). Магнитные поля у границ между доменами приводят к образованию узоров из частиц порошка правильной формы. Пользуясь микроскопом,

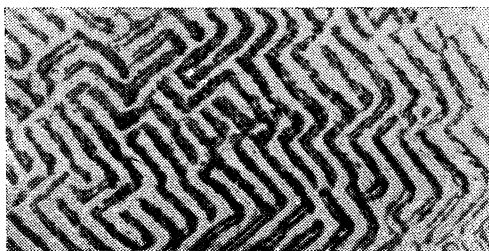


Рис. 57. Порошковые фигуры на поверхности монокристалла кремнистого железа

можно наблюдать эти *фигуры Биттера — Акулова*, которые называют также порошковыми фигурами (рис. 57). Ширина доменов оказывается преимущественно порядка $10^{-6} \div 10^{-7}$ м.

Природа сил взаимодействия между спиновыми магнитными моментами электронов в ферромагнетике, т. е. происхождение областей спонтанной намагниченности, выясняется в квантовой механике; в рамках же классической электронной теории приходится ограничиваться схематическим описанием ферромагнетизма.

В этом смысле представляет интерес *теория Вейсса*, в которой считается в сущности, что магнитная индукция поля, действующего на элементарный магнит в ферромагнетике, равняется сумме усредненной индукции \mathbf{B}_m и добавочной индукции, которая соответствует действию на данный элементарный магнит со стороны других частиц ферромагнетика. В теории диэлектриков связь между действующим и усредненным электрическим полем дается соотношением (6.15), в которое входит поляризация \mathbf{P} . Аналогичной величиной в области магнетизма является намагниченность \mathbf{I} .

В теории Вейсса считается справедливым подобное уравнению (6.15) соотношение

$$B_d = \bar{B}_m + \beta I, \quad (7.80)$$

где $\bar{B}_m = B$, β — некоторый коэффициент.

Та часть энергии элементарного магнита, которая зависит от его ориентации в магнитном поле, т. е. от направления его магнитного момента, выражается, аналогично равенству (7.47), соотношением

$$\Delta W = - (MB_d), \quad (7.81)$$

или

$$\Delta W = - (MB) - \beta (MI). \quad (7.82)$$

При достаточно большом β роль члена, содержащего его как множитель, очень велика, т. е. ΔW очень сильно уменьшается с приближением направления магнитного момента M к направлению вектора намагниченности I .

Но из термодинамики известно, что неравновесные изотермические процессы приводят к уменьшению свободной энергии, так что ферромагнетик стремится к состоянию с наименьшим значением ΔW . Предположение о большом β приводит к тому, что в системе резко выражено стремление к состоянию с параллельной ориентацией всех элементарных магнитных моментов M .

Это схематическое рассуждение позволяет понять, почему очень сильное взаимодействие элементарных магнитных моментов ферромагнетика заставляет ввести в теорию представление о большом значении коэффициента β . Итак, классическая теория ферромагнетизма вынуждена во избежание противоречия с опытом предполагать, что, кроме макроскопического поля $\bar{B}_m = B$, существует очень сильное молекулярное поле Вейсса¹ с магнитной индукцией, равной βI .

Перейдем к уравнениям, способным охарактеризовать магнитное состояние внутри каждой из областей спонтанной намагниченности. Допустим, что внешнее магнитное поле отсутствует или достаточно мало, т. е.

$$B \ll \beta I, \quad (7.83)$$

что осуществляется в обычных условиях благодаря большому значению произведения βI . Тогда, с высокой степенью точности, вследствие соотношения (7.80) имеем

$$B_d = \beta I. \quad (7.84)$$

Другое соотношение между B_d и I легко получается на основании формулы (7.81), совершенно так же как в теории

¹ Это понятие введено в теорию французским физиком П. Вейссом в 1907 г.

диэлектриков с жесткими диполями на основании формулы (6.33) было получено соотношение (6.38). Таким образом, при замене ρ_0 на M , E_d на B_d и, наконец, P на I , аналогично соотношению (6.38), оказывается справедливой формула

$$I = NMZ(\eta), \quad (7.85)$$

где N — число элементарных магнитов в единице объема, $Z(\eta)$ — функция Ланжевена (6.39); причем теперь, аналогично выражению (6.34),

$$\eta = \frac{MB_d}{kT}. \quad (7.86)$$

Формулы (7.85), (7.86) связывают те же величины — намагниченность I и магнитную индукцию действующего поля B_d , что и уравнение (7.84).

Определим I и B_d из уравнений (7.84) и (7.85). Изобразим обе эти зависимости в декартовых координатах, откладывая по оси абсцисс величину η , а по оси ординат — отношение I/I_H , где

$$I_H = NM \quad (7.87)$$

представляет собой намагниченность при насыщении.

На основании формулы (7.85) получается кривая Ланжевена OL (рис. 58), уже изображенная на рис. 36 (см. § 6-4), а уравнение (7.84) дает прямую линию OP .

Если обозначить через α угол наклона этой прямой к оси абсцисс, то из равенств (7.84) и (7.86) получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kT}{\beta MI_H}. \quad (7.88)$$

Так как функция Ланжевена $Z(\eta)$ подчиняется неравенству (6.41), а ее производная (см. § 6-4)

$$\left(\frac{dZ}{d\eta}\right)_{\eta=0} = \frac{1}{3}, \quad (7.89)$$

то всюду при $0 < \eta < \infty$ справедливо неравенство

$$\frac{dZ(\eta)}{d\eta} < \frac{1}{3}. \quad (7.90)$$

Но из формул (7.85) и (7.87) имеем

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{I}{I_H}\right) = \frac{dZ(\eta)}{d\eta}. \quad (7.91)$$

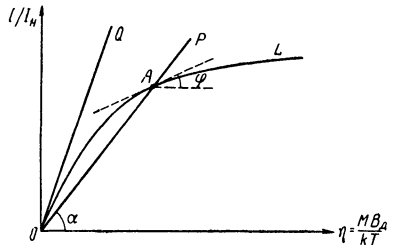


Рис. 58. К теории спонтанной намагниченности ферромагнетизма

Поэтому, в силу неравенства (7.90), угол φ наклона касательной к кривой OL (см. рис. 58) подчинен условию

$$\operatorname{tg} \varphi \leq \frac{1}{3}, \quad (7.92)$$

причем знак равенства справедлив только в начальной точке O , а неравенство становится тем сильнее, чем больше величина η ; при $\eta \rightarrow \infty$ имеем $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow 0$.

Таким образом, если прямая OP образует с осью абсцисс угол α , удовлетворяющий условию

$$\operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{3}, \quad (7.93)$$

то эта прямая обязательно пересечет кривую OL в некоторой точке A (см. рис. 58), где

$$\operatorname{tg} \varphi < \operatorname{tg} \alpha. \quad (7.94)$$

Если же неравенство (7.93) не выполняется, то прямая OP не имеет общих точек с кривой OL , за исключением начальной точки O , соответствующей отсутствию намагниченности.

Следовательно, выполнение условия (7.93) означает *существование спонтанной намагниченности* ферромагнетика. Пользуясь формулой (7.88), перепишем это необходимое и достаточное условие в виде

$$T < \frac{\beta MI_H}{3k}. \quad (7.95)$$

Чем сильнее неравенства (7.95) и (7.93), тем дальше от точки O располагается точка A . Спонтанная намагниченность, соответствующая этой точке A , растет с понижением температуры T . Именно точка A соответствует в данной теории совместному решению уравнений (7.84) и (7.85). Точку O в случае существования внешнего поля B нельзя рассматривать как второе решение в излагаемой теории, поскольку в этой точке при $I=0$ не выполняется неравенство (7.83), которое предполагалось справедливым при построении теории.

Правда, решение, соответствующее точке O , становится формально возможным в рассмотренной теории, если $B=0$, так как тогда нет необходимости обращаться к неравенству (7.83). Но такое решение ($I=0$), невозможное при сколь угодно малой магнитной индукции и возникающее, когда она в точности равна нулю, не может представлять физического интереса, так как в реальных условиях внешнее магнитное поле, пусть очень малое, всегда существует.

Состояния ферромагнетика, представленные точкой O , когда отсутствуют области спонтанной намагниченности, экспериментально не обнаруживаются.

Существование доменов вместо сплошной спонтанной намагниченности ферромагнетика в одном направлении легко понять, снова принимая во внимание, что ферромагнетик (при постоянной температуре) стремится к состоянию с наименьшей свободной энергией. В самом деле, большие силы взаимодействия между элементарными магнитами в ферромагнетике, соответствующие очень сильному молекулярному полю βI , действуют между соседними частицами вещества. Эти силы стремятся установить элементарные магнитные моменты параллельно друг другу, поэтому их взаимно противоположное направление в соседних доменах означает увеличение потенциальной энергии элементарных магнитов. Но такое увеличение касается лишь соседних частиц вещества, расположенных по ту и другую сторону от границы доменов. С другой стороны, существование доменов с различным направлением вектора намагниченности приводит к частичной компенсации их магнитных полей, что означает уменьшение энергии магнитного поля ферромагнетика.

Таким образом, реализуется устойчивое состояние ферромагнетика с минимумом свободной энергии. Этому состоянию и соответствуют фактические размеры доменов, а также их форма, связанная с кристаллической структурой ферромагнетиков. Если размеры ферромагнитного вещества меньше некоторой критической величины, то образование нескольких областей спонтанной намагниченности энергетически невыгодно и частица (например, в порошке) является однодоменной.

Большие значения магнитной проницаемости ферромагнетиков, характеризующие способность их легко намагничиваться под действием внешнего поля, нетрудно понять с той точки зрения, что внешнее поле стремится упорядочить направление векторов намагниченности во всех доменах так же, как электрическое поле стремится упорядочить ориентацию всех жестких диполей (см. § 6-4). Противоположающим фактором является беспорядочное тепловое движение частиц вещества. Роль этого фактора велика по отношению к легкоподвижным диполям диэлектрика и незначительна по отношению к связанным между собой в доменах магнитным моментам. Под действием внешнего поля легко происходят изменения направления векторов намагниченности в отдельных областях и увеличение объема тех областей, в которых вектор намагниченности имеет направление, энергетически более выгодное, за счет уменьшения объема соседних доменов, намагниченных в направлении, энергетически менее выгодном. В итоге растет средняя макроскопическая намагниченность в направлении внешнего поля. Однако в теории технической кривой намагничивания ферромагнетиков необходимо принимать во внимание их кристаллографическую структуру.

Если внешнее магнитное поле меняется с достаточно высокой частотой, то направление векторов намагниченности в доменах,

связанное с ориентацией спиновых магнитных моментов электронов, не успевает меняться под действием поля. Допустим, что ферромагнетик находится первоначально в размагниченном состоянии, т. е. вследствие взаимно противоположных направлений векторов намагниченности в соседних доменах макроскопическая намагниченность равна нулю. Тогда во внешнем поле с достаточно высокой частотой макроскопическая намагниченность остается очень близкой к нулю, т. е. относительная магнитная проницаемость стремится к единице при неограниченном увеличении частоты поля.

Опыты В. К. Аркадьева и других физиков [16] по изучению

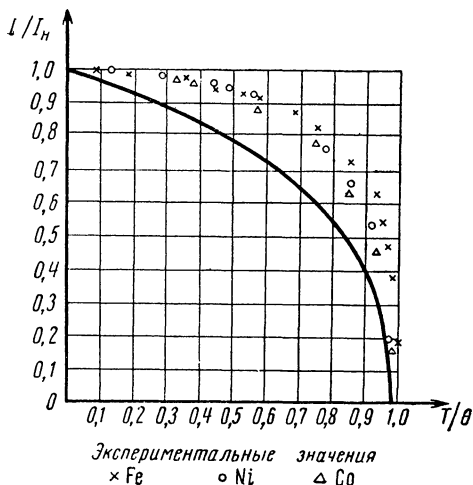


Рис. 59. Зависимость спонтанной намагниченности от температуры в сравнении с экспериментальными значениями

M на I_n/N , то температура (точка) Кюри будет выражаться в виде

$$\theta = \frac{\beta I_n^2}{3Nk}. \quad (7.97)$$

При $T = \theta$ из соотношений (7.88) и (7.96) находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}. \quad (7.98)$$

В этом случае прямолинейная зависимость I/I_n от η , соответствующая равенству (7.84), изображается линией OQ (см. рис. 58), которая в точке O касается кривой Ланжевена OL , в согласии с соотношением (7.89). Это значит, что спонтанная намагниченность I равна нулю при $T = \theta$.

зависимости магнитной проницаемости от частоты действительно показали, что в области частот около 10^{10} гц и выше относительная магнитная проницаемость с практически достаточной точностью не зависит от частоты и равна единице.

Обратимся теперь к тому случаю, когда неравенство (7.95) заменяется равенством

$$T = \frac{\beta M I_n}{3k}. \quad (7.96)$$

Эта температура, которую обозначим символом θ , называется температурой Кюри, или точкой Кюри.

Если, пользуясь формулой (7.87), заменить элементарный магнитный момент

Если вычислить I при разных температурах T путем совместного решения уравнений (7.84) и (7.85) и построить зависимость I/I_n от T/θ , то полученная кривая (рис. 59) заметно расходится с результатами измерений для всех трех основных ферромагнетиков — железа, никеля и кобальта. Это расхождение теории с опытом еще раз свидетельствует об ограниченности классической теории ферромагнетизма. Квантовая теория ферромагнетизма приводит к удовлетворительному согласию с опытом.

При температуре выше точки Кюри спонтанная намагниченность отсутствует вследствие нарушения условия (7.95). Таким образом, в точке Кюри исчезает такая специфическая особенность ферромагнетика, отличающая его от парамагнетиков, как существование областей спонтанной намагниченности; ферромагнетик превращается в парамагнетик и остается им при $T > \theta$.

Величина β и намагниченность при насыщении $I_n = NM$ зависят, очевидно, от строения вещества, так что температура Кюри должна иметь разные значения для различных ферромагнетиков. Опыт подтверждает существование температуры, выше которой ферромагнитные свойства отсутствуют, и дает значения этой температуры Кюри (около 770°C для чистого железа, 360°C для никеля и т. д.). Находя из опытных данных намагниченность при насыщении I_n , можно из формулы (7.97) определить величину β . Таким путем обнаруживаются большие значения βI .

Потеря ферромагнитных свойств в точке Кюри имеет простой физический смысл: при более высокой температуре беспорядочное тепловое движение частиц вещества, стремящееся нарушить упорядоченную ориентацию элементарных магнитов, играет большую роль, чем внутреннее «молекулярное поле», стремящееся создать такую ориентацию. Точка Кюри для парамагнитного состояния ферромагнетика аналогична, таким образом, нулевой абсолютной температуре для обычного парамагнетика.

Поэтому, аналогично закону Кюри, известному для парамагнетиков (см. § 7-6), теоретически устанавливается, что если температура ферромагнетика выше точки Кюри ($T > \Theta$), то справедлив закон Кюри — Вейсса

$$\chi = \frac{C_1}{T - \Theta}, \quad (7.99)$$

где χ — магнитная восприимчивость, C_1 — константа.

Однако опыт показывает, что $1/\chi$ становится линейной функцией температуры T лишь в области температур, значительно превышающих точку Кюри. При этом в формуле (7.99) для согласия с опытом под Θ следует понимать не точку Кюри в указанном ранее смысле, а несколько более высокую температуру, которой присвоено название *парамагнитная точка Кюри*. Теоретическое объяснение такого положения дается в квантовой ме-

ханике. Квантовую природу молекулярного поля Вейсса установили в 1928 г. Я. И. Френкель и независимо В. Гейзенберг.

Вообще, классическая электронная теория ферромагнетизма оказывается явно недостаточной и в вопросе о причинах очень сильного взаимодействия элементарных магнитных моментов, и при объяснении заметного отклонения результатов теории от данных эксперимента.

Задачи

37. На атом действует магнитное поле с индукцией $B = 4 \text{ тл}$. Найти обусловленное этим полем добавочное движение электронов и вычислить соответствующую длину электромагнитной волны.

38. Между полюсами электромагнита в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2 \text{ тл}$ находятся пары кадмия. Охарактеризовать качественно и количественно нормальное зеемановское расщепление спектральной линии с длиной волны $\lambda = 6438,7 \text{ \AA}$.

39. Диамагнитная восприимчивость ионизированного лития (с двумя электронами в каждом ионе), отнесенная к 1 кмолью , равна $-8,5 \cdot 10^{-9}$. Найти среднее расстояние электронов от ядра, считая разброс значений расстояния незначительным.

40. Достаточно разреженный (подчиняющийся классической статистике) парамагнитный газ, содержащий $N = 10^{10}$ молекул, находится в магнитном поле с индукцией $B = 50 \text{ тл}$ при температуре $T = 5^\circ \text{ К}$. Магнитный момент каждой молекулы равен магнетону Бора ($M_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ м}^2 \cdot \text{а}$).

Найти число молекул N' , магнитные моменты которых образуют с направлением поля угол, не превышающий 30° . Как влияет на число N' повышение температуры и уменьшение магнитной индукции?

41. При каких значениях индукции внешнего магнитного поля в железе действующее поле совпадает (с относительной погрешностью не более 1%) с молекулярным полем Вейсса, если температура Кюри равна 770° С и намагниченность при насыщении $I_H = 2 \cdot 10^8 \text{ а/м}$.

§ 8-1. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ

По представлениям теории, в металлах существуют свободные электроны (см. § 4-1). Такие представления подтверждаются опытами по обнаружению инерции электронов в металлах (см. § 3-9).

Будем рассматривать свободные электроны как частицы идеального газа, движущиеся среди узлов кристаллической решетки металла. В этих узлах находятся ионы или атомы.

Электрическое поле действует на электрон с силой $F = -eE$. Благодаря этому возникает упорядоченное движение электронов в направлении, противоположном вектору E , с некоторой средней скоростью \bar{u} и создается плотность тока, равная, согласно равенству (4.30), $j = \rho\bar{u}$, или

$$j = -ne\bar{u}, \quad (8.1)$$

где n — концентрация свободных электронов, равная по порядку величины числу атомов в единице объема металла. При $n \approx 10^{28} \text{ м}^{-3}$ и $j \approx 10 \text{ а/мм}^2$ (т. е. 10^7 а/м^2) имеем $\bar{u} \approx 10^{-2} \text{ м/сек}$. Для сравнения оценим скорость v беспорядочного теплового движения электронов. По статистике Максвелла, среднеквадратичная скорость электронов

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (8.2)$$

Отсюда при $T \approx 300^\circ \text{ К}$ имеем $v \approx 10^5 \text{ м/сек}$, следовательно,

$$\bar{u} \ll v. \quad (8.3)$$

В действительности электроны в металле подчиняются не статистике Максвелла, а квантовой статистике Ферми — Дирака, что, однако, не вносит изменений в соотношение (8.3).

Это соотношение играет важную роль в теории. Благодаря ему распределение электронов в пространстве можно считать равномерным независимо от неоднородности электрического поля, подобно равномерному распределению частиц идеального газа в состоянии статистического равновесия.

Рассмотрим *упорядоченное движение равномерно распределенных электронов*, которые сближаются с ионом (или атомом), входящим в состав кристаллической решетки металла (рис. 60).

Для простоты будем пренебрегать отклонением от равномерного распределения электронов этого потока, которое имеет место в непосредственной близости к иону вследствие электрического поля иона. Это упрощение несколько оправдывается тем, что если с положительно заряженным ионом сближается группа электронов, то происходит временная нейтрализация иона одним электроном (или нейтрализация многозарядного иона несколькими электронами), а взаимодействие других электронов с нейтральным атомом можно рассмотреть, пренебрегая поляризацией атома, поскольку электроны равномерно распределены в пространстве вокруг узла кристаллической решетки.

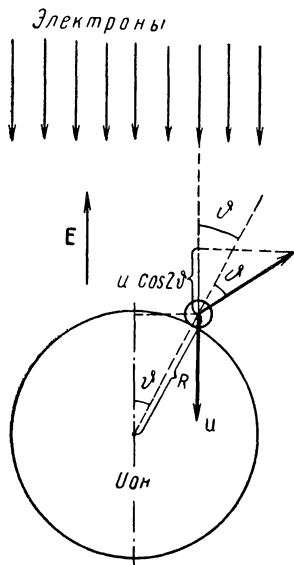


Рис. 60. Изменение упорядоченного движения электронов при столкновении с ионом

Средняя скорость электронов благодаря их малой массе гораздо больше скорости массивных ионов. Для простоты будем рассматривать ион (или атом) как неподвижный шар, а электрон как движущийся шарик; столкновение между ними будем считать упругим, происходящим без обмена энергией между ними.

Если угол падения электрона (острый угол между направлением его скорости и нормалью, проходящей через центр иона) равен ϑ , то электрон отражается под тем же углом с сохранением величины скорости u (см. рис. 60). Тогда компонента его скорости в направлении упорядоченного движения равна

$$u_0 = -u \cos 2\vartheta. \quad (8.4)$$

Рассмотрим электроны, сталкивающиеся с ионом так, что угол падения лежит между 0 и ϑ . Они проходят через площадку $S = \pi R^2 \sin^2 \vartheta$, где R — эффективный радиус иона (в нашей модели сумма радиусов иона и электрона).

Электроны, для которых угол падения лежит в границах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, проходят через площадку

$$dS = 2\pi R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta.$$

Вероятность dP такого падения для электронов, встречающихся с ионом, равна отношению $dS/\pi R^2$, т. е.

$$dP = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta. \quad (8.5)$$

Пользуясь этим выражением, вычислим среднюю скорость упорядоченного движения электронов, испытавших столкновение с

ионом (или атомом), равную $\bar{u}_0 = \int u_0 dP$. В силу равенств (8.4) и (8.5) имеем

$$\bar{u}_0 = -u \int_0^{\pi/2} \sin 2\vartheta \cos 2\vartheta d\vartheta,$$

откуда

$$\bar{u}_0 = 0. \quad (8.6)$$

Столкновения электронов между собой, по законам упругого удара одинаковых шаров, не влияют на среднюю скорость упорядоченного движения электронов и в дальнейшем не будут приниматься во внимание.

За время τ свободного пробега электрона от столкновения с ионом (или атомом) до другого ближайшего столкновения электрон движется под действием силы

$$F = -eE.$$

На протяжении небольшой длины свободного пробега напряженность электрического поля E и силу F можно считать неизменными. Ускорение электрона равно

$$a = \frac{F}{m},$$

или

$$a = -\frac{eE}{m}. \quad (8.7)$$

Итак, упорядоченное движение электрона за время τ происходит с ускорением a и начальной скоростью u_0 .

Скорость упорядоченного движения в конце свободного пробега

$$u_k = u_0 + a\tau,$$

а средняя скорость на протяжении свободного пробега

$$u = \frac{u_0 + u_k}{2} = u_0 + \frac{a\tau}{2}.$$

Усредним это выражение по всем электронам в физически бесконечно малом объеме. В силу равенства (8.6) имеем $\bar{u} = \frac{a\bar{\tau}}{2}$, или ввиду равенства (8.7)

$$\bar{u} = -\frac{eE\bar{\tau}}{2m}. \quad (8.8)$$

В силу соотношений (8.1) и (8.8) находим

$$j = \frac{ne^2\bar{\tau}}{2m} E. \quad (8.9)$$

Среднее время свободного пробега $\bar{\tau}$ зависит от расположения узлов кристаллической решетки металла и от скоростей элек-

тронов. При вычислении \bar{v} играет роль полная скорость электрона, как сумма скоростей теплового и упорядоченного движения. Обычно благодаря неравенству (8.3) можно пренебречь отличием полной скорости электрона от скорости теплового движения. Тогда величина \bar{v} не зависит от напряженности поля \mathbf{E} . Обычное, достаточно слабое поле \mathbf{E} , не приводящее к нарушению свойств вещества, не в состоянии повлиять на концентрацию свободных электронов, т. е. n не зависит от \mathbf{E} . При постоянстве \bar{v} и n плотность тока по формуле (8.9) пропорциональна напряженности электрического поля. При этом формула (8.9) совпадает с выражением закона Ома в дифференциальной форме (в отсутствие поля сторонних сил), т. е.

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (8.10)$$

откуда удельная проводимость γ выражается в виде

$$\gamma = \frac{ne^2\bar{v}}{2m}. \quad (8.11)$$

Опыт подтверждает справедливость закона Ома для металлов при практически употребительных напряженностях поля.

В очень сильных полях большая скорость упорядоченного движения электронов приводит к нарушению неравенства (8.3). При этом \bar{v} зависит от \mathbf{E} , а \mathbf{j} является нелинейной функцией напряженности поля \mathbf{E} . Опыт подтверждает, что в очень сильных полях закон Ома для металлов не выполняется.

Для справедливости изложенного вывода закона Ома существенно также соотношение (8.6), т. е. потеря (в среднем) скорости упорядоченного движения электронов при столкновениях с узлами кристаллической решетки и переход энергии упорядоченного движения электронов в энергию беспорядочного теплового движения. В связи с отсутствием подобных потерь скорости электронов закон Ома несправедлив для тока в вакууме и сверхпроводниках.

Однако классическая электронная теория электропроводности металлов встречается с большими затруднениями. Возьмем для любого металла известное из опыта значение удельной электрической проводимости и сделаем естественное предположение, что число свободных электронов n по порядку величины равно числу атомов. Тогда из соотношения (8.11) при обычных температурах оказывается, что среднее время свободного пробега \bar{v} в сотни и более раз превышает отношение расстояния между соседними узлами кристаллической решетки металла к скорости движения электронов, если ее взять в виде (8.2). Этот результат противоречит наглядным классическим представлениям о движении электронов.

Далее опыт показывает, что сопротивление металлов приблизительно пропорционально абсолютной температуре T . При этом

по формуле (8.11) произведение концентрации электронов на среднее время свободного пробега $\bar{\tau}$ должно быть обратно пропорционально T . Классическая электронная теория не может этого объяснить. Известная из опыта температурная зависимость сопротивления металлов находит объяснение лишь на основе квантовых представлений с учетом статистики Ферми — Дирака [10].

§ 8-2. ЭФФЕКТ ХОЛЛА

Как указывает опыт, существуют *гальваномагнитные явления*, связанные с воздействием магнитного поля на электрические свойства металлов и полупроводников, по которым проходит ток.

Важнейшим гальваномагнитным явлением можно считать эффект Холла, обнаруженный американским физиком Холлом в 1879 г.

Пусть по пластинке из металла или полупроводника проходит ток J , плотность которого j (рис. 61) не зависит от координат и времени. Магнитное поле B , перпендикулярное плоскости пластинки, создает разность потенциалов $\Delta\varphi$ между точками M и K , которые лежат на линии, перпендикулярной направлению векторов j и B , и в отсутствие магнитного поля обладают одинаковым потенциалом.

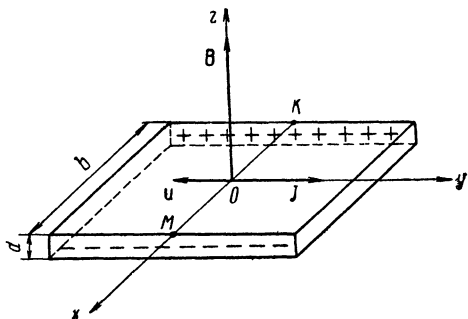


Рис. 61. К объяснению эффекта Холла

Если магнитное поле является не слишком сильным и однородным, то эта разность потенциалов пропорциональна магнитной индукции и току и обратно пропорциональна толщине d пластинки, т. е. ¹

$$\Delta\varphi = R \cdot \frac{BJ}{d}. \quad (8.12)$$

Коэффициент пропорциональности R , зависящий от вещества пластинки, называется постоянной Холла.

Электронная теория дает простое качественное объяснение эффекта Холла.

¹ В системе СГС (или в абсолютной электромагнитной системе СГСМ) для неферромагнитного вещества магнитную индукцию в формуле (8.12) можно заменить напряженностью магнитного поля. Так как эффект Холла обусловлен действием магнитного поля на ток, целесообразно, как и в выражении силы Лоренца, иметь в виду B , а не H . Значение R в системе СИ, как нетрудно видеть из формулы (8.12), в 10^7 раз меньше, чем в системе СГСМ.

Если ток вдоль оси y (см. рис. 61) обусловлен движением электронов, то скорость их упорядоченного движения \mathbf{u} направлена противоположно оси y . Лоренцова сила, действующая на электрон со стороны магнитного поля, параллельного оси z , согласно формуле (2.68), с заменой q на $-e$, направлена в нашем случае вдоль оси x .

На передней грани пластинки накапливаются электроны, а на задней грани обнаруживается их недостаток, т. е. появляются положительные заряды. Напряженность поля таких зарядов направлена по оси x . Благодаря этому возникает отрицательная разность потенциалов между точками M и K . Электрическое поле, направленное вдоль оси x , стремится отклонить электроны в направлении, противоположном оси x . Следовательно, такое поле противодействует влиянию магнитного поля. Накопление электронов на передней грани пластинки прекращается, когда электрическое поле возрастает настолько, что благодаря его противодействию возникает стационарное состояние, а именно движение электронов происходит в среднем антипараллельно оси y .

Чтобы построить количественную теорию эффекта Холла, воспользуемся выражением (2.67) силы Лоренца, действующей на электрон, с заменой q на $-e$ и напомним второй закон Ньютона в форме

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -e \{ \mathbf{E} + [\mathbf{u}\mathbf{B}] \}. \quad (8.13)$$

Начнем с упрощающего предположения, что все электроны обладают постоянной и одинаковой скоростью \mathbf{u} упорядоченного движения.

Тогда на основании уравнения (8.13) получим равенство

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{u}\mathbf{B}].$$

Следовательно, в нашем случае (см. рис. 61)

$$E_x = uB. \quad (8.14)$$

Если число электронов в единице объема равно n , то, согласно соотношению (8.1), где теперь $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$, плотность тока будет равна

$$j = neu.$$

Подставляя сюда значение u из равенства (8.14), находим

$$j = ne \frac{E_x}{B}.$$

Если b и d — соответственно ширина и толщина пластинки, то ток $J = jbd$, следовательно,

$$J = \frac{neE_xbd}{B}. \quad (8.15)$$

Поскольку магнитное поле однородно, величина E_x не зависит от координат, и разность потенциалов $\Delta\varphi$ между точками M и K определяется равенством

$$\Delta\varphi = -bE_x,$$

или, после подстановки E_x из формулы (8.15),

$$\Delta\varphi = -\frac{BJ}{ne d}. \quad (8.16)$$

Сравнивая этот результат с равенством (8.12), находим постоянную Холла (в системе единиц СИ)

$$R = -\frac{1}{ne}. \quad (8.17)$$

Более строгая теория эффекта Холла должна учитывать изменение скорости упорядоченного движения электрона за время свободного пробега и при столкновениях с ионами (или атомами).

Воспользуемся уравнением (8.13) с заменой \mathbf{u} на $\dot{\mathbf{r}}$ (где \mathbf{r} — радиус-вектор, определяющий положение электрона относительно начала координат) и запишем его в проекциях на оси x , y , z :

$$\frac{m\ddot{x}}{e} = -E_x - \dot{y}B; \quad (8.18)$$

$$\frac{m\ddot{y}}{e} = -E_y + \dot{x}B; \quad (8.19)$$

$$\ddot{z} = 0. \quad (8.20)$$

Напряженность электрического поля в направлении оси y играет основную роль в движении электронов. Магнитное поле будем считать настолько слабым, что член $\dot{x}B$ пренебрежимо мал по сравнению с E_y . В обычных условиях эксперимента это справедливо, так как скорость упорядоченного движения электронов остается небольшой (см. § 8-1). Поэтому вместо уравнения (8.19) можно считать справедливым равенство

$$\ddot{y} = a, \quad (8.21)$$

где $a = -\frac{eE_y}{m}$. Постоянство плотности тока j означает вследствие закона Ома (8.10) постоянство E_y и a .

В уравнении (8.18) нельзя пренебречь величиной $\dot{y}B$ по сравнению с E_x , так как при стационарном токе средняя скорость движения электронов в направлении оси x (см. рис. 61) должна равняться нулю, т. е.

$$\dot{\bar{x}} = 0. \quad (8.22)$$

Но этого не будет, если в правой части уравнения (8.18) сохранить только постоянный член, равный $-E_x$.

Из уравнения (8.21) получаем

$$\dot{y} = at + \dot{y}_0. \quad (8.23)$$

Подставим это значение \dot{y} в уравнение (8.18) и проинтегрируем. Тогда

$$\dot{x} = -\frac{\omega a t^2}{2} + \beta t + \dot{x}_0, \quad (8.24)$$

где

$$\omega = \frac{eB}{m} \quad (8.25)$$

— циклотронная частота (см. § 3-5), а

$$\beta = -\frac{eE_x}{m} - \omega \dot{y}_0, \quad (8.26)$$

причем \dot{x}_0 и \dot{y}_0 — компоненты начальной скорости электрона.

Рассматривая движение электрона за время свободного пробега τ , из выражения (8.24) находим среднее за время τ значение \dot{x} :

$$\bar{\dot{x}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \dot{x} dt = -\frac{\omega a \tau^2}{6} + \frac{\beta \tau}{2} + \dot{x}_0$$

(волнистая черта означает усреднение по одному пробегу электрона).

Понимая под $\bar{\dot{x}}$ среднее значение \dot{x} по всем пробегам для всех электронов в физически бесконечно малом объеме за физически бесконечно малое время, имеем

$$\bar{\dot{x}} = -\frac{\omega a \bar{\tau}^2}{6} + \frac{\bar{\beta} \bar{\tau}}{2} + \dot{x}_0, \quad (8.27)$$

где введено произведение средних значений $\bar{\beta} \bar{\tau}$ вместо среднего значения произведения $\bar{\beta} \tau$ ввиду взаимной независимости величин β и τ .

Согласно равенству (8.6) напомним

$$\bar{\dot{x}}_0 = 0, \quad (8.28)$$

$$\bar{\dot{y}}_0 = 0. \quad (8.29)$$

Из уравнений (8.22), (8.27) и (8.28) находим

$$\omega a \bar{\tau}^2 = 3 \bar{\beta} \bar{\tau}. \quad (8.30)$$

В силу равенств (8.26) и (8.29) имеем

$$\bar{\beta} = -\frac{e}{m} E_x. \quad (8.31)$$

Проводя в уравнении (8.23) усреднение по каждому свободному пробегу и по всем значениям τ , получаем благодаря равенству (8.29)

$$\bar{\dot{y}} = \frac{a \bar{\tau}}{2}.$$

Вектор плотности тока \mathbf{j} направлен вдоль оси y . Поэтому из соотношения (8.1) находим

$$j = -ne\bar{y} = -\frac{ne\bar{a}\tau}{2}.$$

Выразим отсюда величину a и подставим в равенство (8.30). Тогда

$$2\omega\bar{j}\tau^2 = -3ne\bar{\beta}\tau^2.$$

Отсюда после подстановки значений ω (8.25) и $\bar{\beta}$ (8.31) получаем

$$E_x = \frac{2}{3} \frac{Bj}{ne} \cdot \frac{\tau^2}{\tau^2}. \quad (8.32)$$

Заменим j на $\frac{J}{b\bar{a}}$ и найдем разность потенциалов между точками M и K (см. рис. 61). Имеем $\Delta\varphi = -bE_x = -\frac{2}{3ne} \frac{\tau^2}{\tau^2} \frac{BJ}{\bar{a}}$, что можно представить в форме соотношения (8.12), понимая под постоянной Холла R величину

$$R = -\frac{2}{3ne} \frac{\tau^2}{\tau^2}. \quad (8.33)$$

Рассмотрим *вероятность продолжительности свободного пробега* τ как некоторую функцию $P = P(\tau)$. Если для простоты принять, что вероятность соударения электрона с неподвижным ионом за время $d\tau$ пропорциональна лишь $d\tau$, т. е. равна $\alpha d\tau$, где $\alpha = \text{const}$ ¹, то вероятность свободного пробега в течение времени $d\tau$ равна $1 - \alpha d\tau$.

Вероятность того, что электрон не испытывает соударений за время $\tau + d\tau$, можно выразить как $P(\tau + d\tau)$ и, с другой стороны, как вероятность сложного события, представляющего собой сочетание двух независимых событий в виде движения электрона без соударений за время τ и за время $d\tau$. Итак,

$$P(\tau + d\tau) = P(\tau)(1 - \alpha d\tau),$$

или

$$\frac{P(\tau + d\tau) - P(\tau)}{d\tau} = -\alpha P(\tau),$$

т. е.

$$\frac{dP}{d\tau} = -\alpha P(\tau).$$

Отсюда

$$P(\tau) = P_0 e^{-\alpha\tau}.$$

¹ Некоторое увеличение вероятности столкновения с увеличением τ от 0 обусловлено пространственным разграничением ионов (или молекул) и нарастанием скорости упорядоченного движения, т. е. в действительности $\alpha = \alpha(\tau)$.

Константа P_0 находится из условия, что вероятность для электрона двигаться без соударений за время $\tau=0$ равна, очевидно, единице, т. е. $P_0=1$. Итак,

$$P(\tau) = e^{-\alpha\tau}. \quad (8.34)$$

Вероятность того, что электрон испытывает соударение за время от τ до $\tau + d\tau$, равна произведению $P(\tau)$ на вероятность столкновения за время $d\tau$, т. е.

$$P(\tau) \alpha d\tau.$$

Таким образом, среднее время свободного пробега равно

$$\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \tau \cdot P(\tau) \alpha d\tau.$$

Заменим $P(\tau)$ на $e^{-\alpha\tau}$ и проинтегрируем по частям. Тогда

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\alpha}.$$

С другой стороны,

$$\bar{\tau}^2 = \int_0^{\infty} \tau^2 P(\tau) \alpha d\tau,$$

откуда

$$\bar{\tau}^2 = \frac{2}{\alpha^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\tau}^2} = 2,$$

и потому из равенства (8.33) постоянная Холла

$$R = -\frac{4}{3ne}. \quad (8.35)$$

На основании квантовой статистики вместо (8.35) справедливо с известной степенью точности выражение

$$R = -\frac{1}{ne}. \quad (8.36)$$

Отрицательный знак постоянной Холла обусловлен в изложенной теории тем, что ток создается отрицательно заряженными электронами. Если же ток обусловлен движением положительных зарядов, равных q , то заряд электрона $-e$ следует заменить на заряд q ; тогда

$$R > 0.$$

Иначе говоря, при том же направлении тока и магнитного поля (см. рис. 61) положительные заряды отклонялись бы также к передней грани и разность потенциалов между точками M и K оказалась бы положительной.

Как показывает опыт, лишь около половины металлов и большая часть полупроводников обладают нормальной по знаку, т. е. отрицательной постоянной Холла. Для других металлов и полупроводников постоянная Холла положительна или меняет знак при некоторой температуре.

Аномальный положительный знак постоянной Холла R находит объяснение в рамках квантовой механики, где необходимо в ряде случаев вместо движения электронов рассматривать перемещение так называемых дырок, соответствующих отсутствию электронов в некоторых возможных для них состояниях. Эти дырки в определенных отношениях равноценны положительным зарядам [10].

Эффект Холла позволяет определить из опыта концентрацию n носителей тока (электронов или дырок).

В полупроводниках, где n мало, постоянная Холла сравнительно велика по абсолютной величине. Это дает возможность широко использовать эффект Холла в полупроводниках для измерений магнитной индукции. Таким образом можно регистрировать разнообразные факторы, приводящие к появлению магнитного поля. Датчики Холла широко используются в современной технике.

§ 8-3. ЭЛЕКТРОННЫЙ ТОК В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

Рассмотрим электронный ток в газе, пренебрегая существованием ионов, что возможно при слабой ионизации газа. Движение свободных электронов среди нейтральных частиц газа происходит под действием электрического поля, отчасти аналогично падению шарика в вязкой среде. Как шарик под действием силы тяжести движется первоначально ускоренно, пока, наконец, не приобретает такую скорость, что сила тяжести уравновешивается силой внутреннего трения, так и электрон под действием электрического поля наращивает скорость упорядоченного движения, антипараллельного напряженности поля. Этот процесс увеличения скорости упорядоченного движения продолжается до тех пор, когда, наконец, приращение кинетической энергии электрона сравнивается с отдачей энергии тем частицам газа, с которыми электрон неизбежно сталкивается при своем движении.

Дальнейшее упорядоченное движение электрона будет происходить в среднем с постоянной скоростью. Очевидно, что эта скорость равна нулю в отсутствие электрического поля и растет с увеличением напряженности поля.

Отношение средней скорости установившегося упорядоченного движения заряженной частицы к напряженности электрического поля называется подвижностью частицы.

Такая подвижность должна зависеть, в частности, от неупругих столкновений электрона с частицами газа, приводящих

к изменению состояния этих частиц, например к ионизации их. Неупругие столкновения происходят при достаточно большой скорости электрона. Для простоты исключим их из рассмотрения и будем принимать во внимание только упругие соударения, при которых сумма кинетических энергий сталкивающихся частиц остается постоянной.

Для определения подвижности электронов рассмотрим два идеализированных случая.

Начнем с того случая, когда напряженность электрического поля настолько мала, что электроны находятся, можно считать, в состоянии статистического равновесия с частицами газа (молекулами или атомами и ионами).

При этом, имея в виду неравенство (8.3), получаем, как и раньше (см. § 8-1), результат (8.8). Отсюда видно, что *подвижность электрона* b , как отношение модулей средней скорости упорядоченного движения и напряженности поля, т. е. как величина, удовлетворяющая уравнению

$$\bar{u} = bE, \quad (8.37)$$

равна

$$b = \frac{e\bar{\tau}}{2m}, \quad (8.38)$$

где $\bar{\tau}$ — среднее время свободного пробега электрона.

При обычных температурах и умеренных давлениях разреженного газа справедлива с достаточной точностью статистика Максвелла, и среднеквадратичная скорость электрона v выражается в виде (8.2). Ограничиваясь грубой оценкой величины $\bar{\tau}$, можно принять, что

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{l}}{v}, \quad (8.39)$$

где \bar{l} — средняя длина свободного пробега электрона. Тогда, в силу равенства (8.38), имеем

$$b = \frac{e\bar{l}}{2mv}. \quad (8.40)$$

Из кинетической теории газов известно, что средняя длина свободного пробега частиц газа в состоянии статистического равновесия выражается в виде

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi D^2 n_1}, \quad (8.41)$$

где D — эффективный диаметр каждой частицы, т. е. сумма эффективных радиусов сталкивающихся частиц, n_1 — число частиц в единице объема. Коэффициент $\sqrt{2}$ обусловлен тем, что принимается во внимание в равной мере движение как ударяющих, так и ударяемых частиц.

Но из уравнения (8.2) видно, что скоростью частиц газа вследствие их значительной массы можно пренебречь по сравнению со скоростью теплового движения электронов, что позволяет исключить из формулы (8.41) коэффициент $\sqrt{2}$. Кроме того, радиусом электрона можно пренебречь по сравнению с радиусом частицы газа. Поэтому вместо формулы (8.41) для средней длины свободного пробега электронов в газе можно написать

$$\bar{l} = \frac{1}{\pi R^2 n_1}, \quad (8.42)$$

где R — эффективный радиус частицы газа, n_1 — концентрация таких частиц в газе.

Так как величина \bar{l} обратно пропорциональна числу частиц n_1 в единице объема или давлению газа p (при постоянной температуре), то

$$\bar{l} = \frac{\bar{l}_0}{p},$$

где \bar{l}_0 — средняя длина свободного пробега электрона при давлении, равном единице. Тогда соотношение (8.40), с учетом выражения v (8.2), приводится к виду

$$b = \frac{e\bar{l}_0}{2p\sqrt{3mkT}}. \quad (8.43)$$

Чтобы найти более точное выражение подвижности b , примем во внимание максвелловское распределение скоростей электронов.

В интересующем нас идеализированном случае, когда скоростью упорядоченного движения электрона можно пренебречь по сравнению со скоростью беспорядочного теплового движения, полная скорость электрона совпадает практически с тепловой скоростью v . На основании статистики Максвелла число электронов со скоростями от v до $v + dv$ выражается в виде

$$dn = n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv, \quad (8.44)$$

где n — общее число электронов в единице объема.

Время свободного пробега электрона при длине свободного пробега l равно l/v . С точки зрения классических представлений отсутствуют основания считать, что величина l зависит от скорости v . Вследствие этого среднее значение произведения $l \cdot \frac{1}{v}$ можно заменить произведением средних значений этих величин, т. е.

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{l}}{v} = \bar{l} \cdot \frac{1}{v}. \quad (8.45)$$

Поэтому выражение (8.40) для подвижности приводится к виду

$$b = \frac{e\bar{l}}{2m} \cdot \bar{\frac{1}{v}}. \quad (8.46)$$

Выражение (8.44) означает число электронов, у которых величина, обратная скорости, содержится в интервале от $\frac{1}{v}$ до $\frac{1}{v} + d\left(\frac{1}{v}\right)$. Имеем

$$\bar{\frac{1}{v}} = \frac{1}{n} \int_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v} dn,$$

откуда

$$\bar{\frac{1}{v}} = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}.$$

Подставив это выражение в формулу (8.46) и заменив \bar{l} на \bar{l}_0/ρ , получим

$$b = \frac{e\bar{l}_0}{\rho \sqrt{2\pi mkT}}. \quad (8.47)$$

Это выражение подвижности электронов отличается от приближенной формулы (8.43) добавочным множителем $\sqrt{\frac{6}{\pi}} = 1,38$.

Во втором идеализированном случае средняя кинетическая энергия электронов благодаря действию электрического поля значительно превышает среднюю кинетическую энергию частиц газа. В связи со сравнительно большой массой частицы газа скорость ее настолько мала по сравнению со скоростью электрона, что, рассматривая *столкновение электрона с частицей*, можно считать ее в начальный момент неподвижной. Будем считать, что это столкновение подчиняется законам упругого удара двух шаров.

Рассмотрим сначала случай центрального удара, когда при движении электрона со скоростью v_1 вдоль некоторой оси линия, соединяющая центры частицы и электрона, совпадает с этой осью. Пусть v_2 — скорость электрона в направлении, противоположном той же оси после удара, m — масса его, M — масса частицы и u — скорость, которую она получает после удара.

На основании законов сохранения энергии и импульса справедливы соотношения

$$Mu^2 = mv_1^2 - mv_2^2;$$

$$Mu = mv_1 + mv_2.$$

Выразим из последнего уравнения u , подставим в предыдущее уравнение и сократим на $m(v_1 + v_2)$. Вводя обозначение

$$\frac{m}{M} = \delta,$$

получаем

$$(v_1 + v_2) \delta = v_1 - v_2,$$

откуда

$$v_2 = \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \cdot v_1.$$

Но $\delta \ll 1$, и если ограничиться членом первого порядка малости, то

$$v_2^2 = v_1^2 (1 - 4\delta). \quad (8.48)$$

В случае нецентрального удара скорость v_1 электрона на поверхности частицы можно разложить на нормальную и тангенциальную составляющие v_n и v_t . Из них первая играет такую же роль, как скорость при центральном ударе, а вторая остается неизменной.

Если скорость электрона при соударении составляет угол ϑ с направлением к центру частицы (см. рис. 60), то $v_n = v_1 \cos \vartheta$ и, согласно уравнению (8.48), справедливо равенство

$$(v'_n)^2 = v_1^2 \cos^2 \vartheta (1 - 4\delta),$$

где v'_n — нормальная компонента скорости после удара. Далее напомним

$$v_2^2 = (v'_n)^2 + v_1^2 \sin^2 \vartheta,$$

следовательно,

$$v_2^2 = v_1^2 (1 - 4\delta \cos^2 \vartheta).$$

Если dP — вероятность того, что угол падения лежит в интервале от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, то среднее значение v_2^2 равно

$$\overline{v_2^2} = v_1^2 - 4\delta v_1^2 \int \cos^2 \vartheta dP,$$

или, в силу уравнения (8.5),

$$\overline{v_2^2} = v_1^2 - 8\delta v_1^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = v_1^2 (1 - 2\delta).$$

Энергия свободного электрона до столкновения равна

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2},$$

а после него в среднем

$$\overline{W_2} = \frac{mv_2^2}{2}.$$

При каждом столкновении электрон отдает энергию, равную в среднем

$$W_1 - \overline{W_2} = mv_1^2 \delta. \quad (8.49)$$

Потеря энергии электронами при столкновениях компенсируется в условиях установившегося режима приобретением кинетической энергии вследствие их движения в электрическом поле.

Для упрощения дальнейших расчетов условимся наделять каждый электрон свойствами «среднего» электрона, а именно будем считать, что скорость упорядоченного движения в начале свободного пробега, согласно уравнению (8.6), равна нулю; скорость беспорядочного движения v одинакова для всех электронов и значительно превышает скорость упорядоченного движения; наконец, длина каждого свободного пробега l равна среднему свободному пробегу \bar{l} .

Электрон движется между столкновениями с частицами газа в электрическом поле E , которое на протяжении ряда последовательных столкновений будем считать однородным. Под действием неизменной силы

$$F = -eE \quad (8.50)$$

движение электрона происходит от одного столкновения до другого по отрезку параболы (см. § 3-3). Такие отрезки PM , MN , NQ , ... (рис. 62) обращены, очевидно, выпуклостью в сторону направления поля E , аналогично движению материальной точки в поле тяжести.

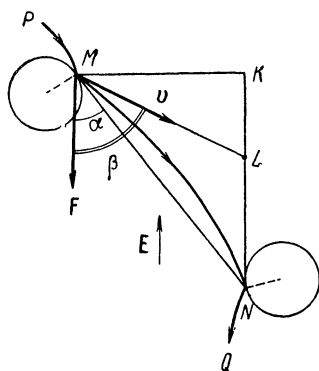


Рис. 62. Движение электрона в газе

Рассмотрим движение электрона от столкновения с одной частицей газа в точке M до ближайшего столкновения с другой частицей в точке N . Скорость v электрона в точке M считаем

большой по сравнению со скоростью упорядоченного движения. Это значит, что движение электрона от точки M к точке N происходит по отрезку параболы, очень близкому к прямой линии MN . Однако необходимо отличать угол β между векторами v и F в точке M от угла α между линией MN и направлением силы F .

При беспорядочных столкновениях электронов с частицами газа все направления скорости v равновероятны. Любое положительное значение $\cos \beta$ настолько же вероятно, как отрицательное значение, такое же по модулю. Поэтому среднее значение $\cos \beta$ равно нулю, т. е.

$$\overline{\cos \beta} = 0. \quad (8.51)$$

Перейдем к выяснению среднего значения величины $\cos \alpha$. Если принять во внимание ряд столкновений при различных значениях α , то в среднем работа ΔA электрического поля E над электроном на протяжении длины свободного пробега l выражается в виде

$$\overline{\Delta A} = eEl \overline{\cos \alpha}. \quad (8.52)$$

При установившемся движении электронов эта работа должна равняться энергии, отданной (в среднем) электроном при каждом столкновении. Поэтому из равенств (8.52) и (8.49) с заменой v_1 на v получаем

$$eEl \overline{\cos \alpha} = mv^2 \delta. \quad (8.53)$$

Для вычисления $\overline{\cos \alpha}$ используем соотношение (см. рис. 62)

$$\cos \alpha = \frac{KL + LN}{MN}.$$

Если время свободного пробега электрона равно τ , то

$$KL = \tau v \cos \beta.$$

Смещение электрона, равное отрезку LN , обусловлено действием силы F , вызывающей постоянное ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}.$$

Таким образом,

$$LN = \frac{eE}{m} \cdot \frac{\tau^2}{2}.$$

Отрезок MN представляет собой длину свободного пробега электрона l . Итак,

$$\cos \alpha = \frac{\tau v \cos \beta}{l} + \frac{eE\tau^2}{2ml}.$$

После усреднения, принимая во внимание равенство (8.51), получаем

$$\overline{\cos \alpha} = \frac{eE\tau^2}{2ml}.$$

Подставим это выражение в уравнение (8.53) и заменим τ по формуле

$$\tau = \frac{l}{v},$$

причем величину l , совпадающую со средней длиной свободного пробега, будем в дальнейшем обозначать как \bar{l} или \bar{l}_0/p .

Таким образом,

$$v = \sqrt{\frac{e\bar{l}_0 E}{mp \sqrt{2\delta}}}. \quad (8.54)$$

Отсюда в обычных условиях электрического тока в разреженном газе получаются очень большие значения v , по сравнению с которым скорость упорядоченного движения электронов очень мала, как и было принято при построении изложенной теории.

Путем сравнения формулы (8.54) с выражением скорости беспорядочного теплового движения в виде (8.2) легко найти температуру, при которой обе формулы дают одинаковую величину

скорости. Будем обозначать эту температуру через T_e и называть ее температурой электронов. Величина T_e является мерой интенсивности беспорядочного движения электронов, возникающего при наличии электрического поля E , и оказывается равной

$$T_e = \frac{e\bar{l}_0 E}{3kp\sqrt{2b}}, \quad (8.55)$$

что при достаточном E и умеренном давлении p сильно превышает температуру газа.

Это соотношение рассмотренной приближенной теории указывает, в согласии с опытом, что температура электронов в газе растет с увеличением напряженности электрического поля E , а также с уменьшением давления p и величины δ , равной отношению массы m электрона к массе M частицы газа. Последнее обстоятельство означает, что в более тяжелых газах электронная температура T_e при прочих равных условиях выше, чем в легких газах.

В тех предположениях, какие приняты в изложенной теории, справедлива формула (8.40), которая, в силу равенства (8.54), при замене \bar{l} на \bar{l}_0/p приводится к виду

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e\bar{l}_0 \sqrt{2b}}{mp}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}}. \quad (8.56)$$

Это выражение подвижности электронов можно уточнить, принимая во внимание максвелловское распределение скоростей электронов.

Вычисления становятся тогда более сложными и приводят к результату, который отличается от формулы (8.56) добавочным множителем

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{\frac{3}{2}} = 1,25.$$

Как и в первом идеализированном случае, когда были получены результаты (8.43) и (8.47), расчет, основанный на максвелловском распределении скоростей, дает несколько большую подвижность, чем упрощенный расчет, в котором скорости считаются одинаковыми.

Из выражения (8.56) следует, что подвижность электронов зависит от напряженности электрического поля.

Заметим, что, в силу уравнений (8.1) и (8.37), справедливо равенство

$$j = enbE. \quad (8.57)$$

Зависимость b от E означает нарушение пропорциональности между E и j , т. е. нарушение закона Ома. Подставляя в уравнение (8.57) значение b в виде (8.56), находим

$$j = a \sqrt{E}, \quad (8.58)$$

где

$$a = \frac{en}{2} \sqrt{\frac{e\bar{l}_0 V^{2\delta}}{mp}}.$$

Таким образом, в отличие от закона Ома, плотность j электронного тока в газе растет медленнее, чем напряженность E электрического поля. При возрастании величины E от нуля происходит постепенный переход от рассмотренного сначала предельного случая, когда по уравнению (8.43) или (8.47) подвижность электронов не зависит от напряженности E поля, к случаю, когда справедливо выражение (8.56).

Это значит, что отклонение от закона Ома в сторону более медленного возрастания электронного тока становится постепенно, с увеличением поля и тока, более заметным, с приближением к соотношению (8.58).

Изложенная теория подвижности электронов не распространяется на случай таких сильных полей, когда существенную роль играют процессы возбуждения и ионизации атомов.

§ 8-4. ИОННЫЕ ТОКИ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

Чистые однородные жидкости почти не содержат свободных заряженных частиц и обладают очень плохой электропроводностью. *Электролиты* — соли, кислоты и основания — состоят из молекул, которые диссоциируют в воде и некоторых других жидкостях, содержащих полярные молекулы (см. § 6-1). Возникающие при этом положительные и отрицательные ионы обуславливают хорошую электропроводность раствора электролита.

Диссоциация молекул в растворе электролита сопровождается обратным процессом соединения ионов в нейтральные молекулы. Эта молизация ионов растет с увеличением числа их в единице объема, т. е. их концентрации, пока процессы диссоциации не уравновесятся процессами молизации. Для характеристики равновесного состояния вводится *коэффициент диссоциации* α , равный отношению концентрации n диссоциированных молекул к концентрации n_0 молекул растворенного вещества, т. е.

$$\alpha = \frac{n}{n_0}. \quad (8.59)$$

Число n означает и концентрацию положительных ионов, и концентрацию отрицательных ионов. За единицу времени в единице объема раствора число $|\Delta n_0|$ диссоциирующих молекул, пропорциональное числу $n_0 - n$ недиссоциированных молекул, равно

$$|\Delta n_0| = k_1(n_0 - n) = k_1 n_0(1 - \alpha),$$

а число случаев молизации $|\Delta n|$, пропорциональное произведе-

нию концентраций положительных и отрицательных ионов, равно

$$|\Delta n| = k_2 n^2 = k_2 \alpha^2 n_0^2,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности, зависящие от природы раствора и его температуры.

В равновесном состоянии число случаев диссоциации равно числу случаев молизации, т. е. $|\Delta n_0| = |\Delta n|$, или

$$k_1 n_0 (1 - \alpha) = k_2 \alpha^2 n_0^2.$$

Отсюда, обозначая k_2/k_1 через K , находим

$$\alpha = \frac{1}{2Kn_0} (\sqrt{1 + 4Kn_0} - 1), \quad (8.60)$$

т. е. коэффициент диссоциации α монотонно убывает от 1 до 0, если n_0 меняется от 0 до ∞ . Обозначим средние скорости упорядоченного движения положительных и отрицательных ионов соответственно через \bar{u}_1 и \bar{u}_2 , а абсолютную величину заряда каждого иона через q . Обращаясь к формуле (8.1) и заменяя заряд электрона $-e$ на q или $-q$ и среднюю скорость \bar{u} на \bar{u}_1 или \bar{u}_2 , находим соответственно плотности тока положительных ионов

$$j_1 = qn\bar{u}_1$$

и отрицательных ионов

$$j_2 = -qn\bar{u}_2,$$

причем, в силу равенства (8.59), $n = \alpha n_0$. Положительные ионы движутся упорядоченно в направлении электрического поля и для них, согласно соотношению (8.37), имеем

$$\bar{u}_1 = b_1 E,$$

а упорядоченное движение отрицательных ионов происходит противоположно направлению вектора \mathbf{E} и для них

$$\bar{u}_2 = -b_2 E.$$

Таким образом, плотность ионного тока в растворе электролита, равная сумме плотностей тока ионов j_1 и j_2 , выражается в виде

$$j = \alpha n_0 q (b_1 + b_2) E. \quad (8.61)$$

Вопрос о подвижности ионов в растворе весьма сложен. Если бы повторить по отношению к ионам вывод, который привел для электронов к выражениям (8.38) и (8.39), то мы получили бы

$$b_1 = \frac{1}{2} \frac{q\bar{l}_1}{M_1 v_1}; \quad b_2 = \frac{1}{2} \frac{q\bar{l}_2}{M_2 v_2}; \quad (8.62)$$

где \bar{l}_1 , M_1 и v_1 (или \bar{l}_2 , M_2 и v_2) — средняя длина свободного

пробега, масса и тепловая скорость положительных (или соответственно отрицательных) ионов. Однако формулы (8.62) далеки от действительности по следующим причинам.

Во-первых, ион поляризует и притягивает окружающие нейтральные молекулы растворителя, образуя вместе с ними комплекс — сольват, обладающий значительной массой, которую следует принимать во внимание при вычислении подвижности вместо массы иона. Надежная теоретическая оценка массы сольвата затруднительна.

Во-вторых, массу иона (или, точнее, сольвата) вовсе нельзя считать малой по сравнению с массой частицы, с которой он сталкивается. Поэтому средняя скорость упорядоченного движения сольвата после столкновения, в отличие от уравнения (8.6), не равна нулю, что лишает основы вывод, приводящий к соотношениям (8.38) или (8.62).

В-третьих, если раствор не является очень слабым, необходимо принять во внимание электростатическое взаимодействие ионов, в результате чего ион окружается нестабильной атмосферой из ионов противоположного знака.

В-четвертых, теория электропроводности электролитов должна, строго говоря, принимать во внимание обменные силы, действующие между частицами, чуждые классической теории, но существенные, как показывает квантовая механика.

В итоге подвижность ионов в растворах электролитов оказывается весьма небольшой, особенно в концентрированных растворах. Ввиду отсутствия законченной теории величины b_1 и b_2 , входящие в формулу (8.61), берутся по данным экспериментов, как и константа K в выражении (8.60) для коэффициента диссоциации.

Ионные токи в газе обусловлены процессами ионизации вследствие внешних факторов (что существенно при несамостоятельном токе) и вследствие воздействий заряженных частиц, образующих ток в газе (что существенно, если ток является самостоятельным). В общем случае в газе существуют разнообразные ионы, у которых различны величина и знак заряда, масса и длина свободного пробега. Обозначая для каждой группы одинаковых ионов абсолютную величину заряда, концентрацию и подвижность соответственно через q_i , n_i и b_i , получаем, как обобщение формулы (8.57), следующее выражение плотности ионного тока в газе

$$j = E \sum_i q_i n_i b_i. \quad (8.63)$$

В газе происходят не только процессы ионизации, но и обратные процессы молизации или рекомбинации. Под этими названиями понимаются процессы образования нейтральных частиц газа в результате соединения противоположно заряженных частиц.

Рассмотрим простейший случай несамостоятельного тока, когда в нейтральном газе существуют лишь положительные и отрицательные ионы с одинаковыми по абсолютной величине зарядами q . Концентрации n положительных и отрицательных ионов одинаковы. При этом число рекомбинаций в единице объема за единицу времени пропорционально n^2 и равно rn^2 , где r — коэффициент рекомбинации. Обозначим через ν число как положительных, так и отрицательных ионов, возникающих в единице объема за единицу времени.

Если пренебречь появлением и исчезновением заряженных частиц на границах объема, занятого газом (что возможно при достаточном давлении газа), то в отсутствие тока изменение концентрации ионов со временем происходит по закону

$$\frac{dn}{dt} = \nu - rn^2,$$

откуда в стационарном состоянии при $\frac{dn}{dt} = 0$ имеем

$$n = \sqrt{\frac{\nu}{r}}. \quad (8.64)$$

При прохождении тока играет существенную роль *переход ионов на электроды*. Положим, что заряды, создающие ток в газе, проходят расстояние l между плоскими параллельными электродами. На единицу площади электродов, т. е. на объем l газа, приходится за единицу времени число передаваемых электродам ионов, равное j/q . Число ионов, отдаваемых электродам, отнесенное к единице объема газа за единицу времени, равно

$$\frac{j}{ql}.$$

При этом в стационарном режиме вместо равенства (8.64) справедливо уравнение

$$\nu = rn^2 + \frac{j}{ql}. \quad (8.65)$$

Если все ионы достигают электродов, не испытав рекомбинации, то плотность соответствующего тока насыщения $j = j_{\text{н}}$ определяется соотношением

$$j_{\text{н}} = ql\nu. \quad (8.66)$$

Исключая ql из уравнений (8.65) и (8.66), находим

$$1 - \frac{j}{j_{\text{н}}} = \frac{rn^2}{\nu}. \quad (8.67)$$

Согласно формуле (8.63) имеем

$$j = qn(b_1 + b_2)E,$$

где b_1 и b_2 — подвижности положительных и отрицательных ионов.

Выражая отсюда n и подставляя в уравнение (8.67), находим в связи с равенством (8.66)

$$j = \frac{E}{2A} (\sqrt{E^2 + 4A j_n} - E), \quad (8.68)$$

где

$$A = \frac{rl}{(b_1 + b_2)^2 q}.$$

Подвижности b_1 и b_2 газовых ионов в достаточно слабых полях можно считать не зависящими от E , так что при $E^2 \ll \ll 4A j_n$ плотность тока j с достаточной точностью пропорциональна E , а с ростом E этот закон Ома нарушается. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial E} (\sqrt{E^2 + 4A j_n} - E) < 0,$$

плотность тока j увеличивается медленнее, чем растет E . При $E^2 \gg 4A j_n$ из формулы (8.68) с достаточной точностью получается $j = j_n$.

Чтобы оценить подвижность газовых ионов b_i , зная их заряд и среднюю длину свободного пробега l_i , можно начать с соотношений, аналогичных формулам (8.62), выражая тепловую скорость v из равенства (8.2). Таким образом, получаем

$$b_i = \frac{1}{2} \frac{q_i \bar{l}_i}{\sqrt{3 M_i k T}}. \quad (8.69)$$

Однако эта формула далека от действительности. Поскольку масса M_i иона близка к массе M_0 частицы газа, с которой ион сталкивается, средняя скорость упорядоченного движения иона в результате столкновения не равна нулю, как предполагается при выводе формул типа (8.62) или (8.69). Это обстоятельство в теории движения газовых ионов впервые принял во внимание Ланжевэн, который ввел в вычисления приведенную массу

$$M_i = \frac{M_i M_0}{M_i + M_0}.$$

С учетом также максвелловского распределения скоростей ионов вычисления Ланжевэна привели вместо простой формулы (8.69) к следующему выражению подвижности газовых ионов

$$b_i = 0,815 \frac{q_i \bar{l}_i}{\sqrt{3 M_i k T}}. \quad (8.70)$$

По этой формуле подвижность иона не зависит от напряженности электрического поля E . Однако опыт показывает, что в сильных полях подвижность газовых ионов растет с увеличением E . К тому же численные значения подвижности газовых ионов из опыта оказываются обычно в несколько раз меньше, чем по формуле (8.70). Температурная зависимость подвижности

ионов также не согласуется с этой формулой. Существенное влияние на подвижность ионов оказывает в действительности диэлектрическая проницаемость газа. Уточненные теории Ланжевена и других авторов, в которых принимается во внимание поляризация ионами нейтральных молекул, приводят к лучшему согласию с опытом. Как показал Л. А. Сена¹, большое влияние на подвижность ионов оказывают процессы перезарядки, т. е. обмена зарядами между ионами и нейтральными частицами газа. Подвижность отрицательных ионов оказывается больше подвижности положительных ионов в значительной мере потому, что отрицательные газовые ионы зачастую легко распадаются на нейтральные частицы и электроны с последующим присоединением электрона к нейтральной частице. Повышенная подвижность электронов приводит при этом к завышенной оценке средней подвижности отрицательных ионов.

Законченной теории подвижности ионов в газах, как и в жидкостях, пока еще нет.

§ 8-5. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

При достаточно высокой температуре любое вещество находится в плазменном состоянии, т. е. в виде смеси электронов, ионов и умеренного числа нейтральных частиц; эта смесь всюду почти нейтральна (квазинейтральна) и почти изотропна². Плазмой является также в достаточной мере ионизированный газ и при невысокой температуре, при достаточно слабом направленном движении частиц.

Свойства высокотемпературной плазмы играют большую роль для осуществления управляемых термоядерных реакций и в вопросах физики космоса.

Для простоты предположим, что плазма полностью ионизирована. Вследствие относительно малой подвижности массивных ионов электропроводность плазмы создается движением электронов. Ограничимся случаем, когда магнитное поле в плазме отсутствует и движение электронов можно считать нерелятивистским.

В простейшем случае, когда электрическое поле постоянно, однородно и имеет достаточно малую напряженность E , можно повторить для плазмы соображения, изложенные в § 8-1, и представить *плотность тока* в виде (8.9). В этом случае справедлив закон Ома (8.10), причем удельную проводимость γ можно выразить в виде (8.11).

Этот результат легко подтверждается, если заметить, что электрон, сталкиваясь с ионом, передает ему вследствие потери

¹ Л. А. Сена. Столкновения электронов и ионов с атомами газа. М., Гостехиздат, 1948.

² Плазма, помещенная в магнитное поле, анизотропна.

скорости упорядоченного движения импульс $m\mathbf{u}_k$, где \mathbf{u}_k — направленная скорость электрона в конце свободного пробега, вдвое бóльшая при движении с постоянным ускорением (без начальной скорости), чем средняя скорость $\bar{\mathbf{u}}$ упорядоченного движения электрона за время свободного пробега. Импульс, передаваемый электроном иону за одно столкновение, равен в среднем $m\bar{\mathbf{u}}_k = 2m\bar{\mathbf{u}}$, а импульс, передаваемый электроном за единицу времени, равен $2m\bar{\mathbf{u}}/\tau$. Такова, следовательно, «сила трения», действующая на электрон со стороны ионов. При стационарном токе она равна силе, действующей на электрон со стороны электрического поля, т. е.

$$eE = \frac{2m\bar{\mathbf{u}}}{\tau}.$$

Поэтому выражение (8.1) для плотности тока приводит к закону Ома (8.10) с удельной проводимостью (8.11).

Если, как принято при более глубоком рассмотрении свойств плазмы, отказаться от упрощающего предположения, что взаимодействие электронов с ионами ограничивается «столкновениями» (подобно кинетике нейтральных частиц), то можно ввести в теорию эффективную частоту столкновений γ , равную отношению импульса, передаваемого электроном за единицу времени, к произведению массы электрона на среднюю скорость его упорядоченного движения. При этом величину, обратную γ , называют временем передачи импульса и обозначают τ , что равноценно в наших обозначениях $\tau/2$. Тогда вместо формулы (8.11) напомним

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

Для большей наглядности теории используем, как и прежде, представления о свободном пробеге электрона со средней продолжительностью $\bar{\tau}$.

Допустим, что напряженность электрического поля меняется со временем. Ограничимся для простоты одномерным случаем, когда вектор \mathbf{E} коллинеарен оси x . Будем считать, как и в § 8-1, что скорость упорядоченного движения электрона после столкновения с ионом в среднем равна нулю, а столкновения электронов между собой можно не принимать во внимание. Напишем на основании II закона Ньютона уравнение движения электрона в виде

$$m\ddot{x} = qE_x,$$

где $q = -e$ — заряд электрона.

¹ О смысле волнистой и прямой черточек при усреднении см. § 8-2 после формулы (8.26).

Отсюда находим скорость электрона в момент t

$$\dot{x} = \frac{q}{m} \int_{t_0}^t E_x dt + \dot{x}_0, \quad (8.71)$$

где t_0 — момент времени, когда произошло последнее перед моментом t столкновение электрона с ионом, \dot{x}_0 — скорость электрона, с которой он начал двигаться в результате столкновения с ионом в момент времени t_0 . Для вычисления плотности тока j по формуле (8.1) необходимо знать среднюю скорость \bar{u}^1 упорядоченного движения электронов в момент времени t , принимая во внимание всевозможные значения t_0 .

Обозначим через α вероятность столкновения электрона с ионами, отнесенную к единице времени. Из N_0 электронов испытывают столкновения с ионами за время от $t_0 - dt_0$ до t_0 электроны, число которых равно

$$\delta_0 = \alpha N_0 dt_0.$$

При усреднении выражения (8.71) представляют интерес электроны, не испытывавшие повторного столкновения до момента t . Если число таких электронов из первоначального количества δ_0 равно δ , то за время от t до $t + dt$ испытывают столкновения электроны в количестве

$$|d\delta| = \alpha \delta dt,$$

так что

$$d\delta = -\alpha \delta dt.$$

Интегрируя это выражение, с учетом условия $\delta = \delta_0$ при $t = t_0$, находим

$$\delta = \delta_0 e^{-\alpha(t-t_0)},$$

следовательно,

$$|d\delta| = \alpha \delta_0 e^{-\alpha(t-t_0)} dt. \quad (8.72)$$

Время свободного пробега этой группы $|d\delta|$ электронов заключено в интервале от $\tau = t - t_0$ до бесконечно близкого значения $\tau + d\tau$. Выражение (8.72), переписанное в форме $|d\delta| = \alpha \delta_0 e^{-\alpha\tau} d\tau$, справедливо независимо от того, обусловлена ли ширина временного интервала $d\tau$ тем, что $d\tau = dt$ (при $t_0 = \text{const}$) или что $d\tau = |dt_0|$ (при $t = \text{const}$). Среднее время свободного пробега

$$\bar{\tau} = \frac{\int \tau |d\delta|}{\int |d\delta|} = \frac{\int_0^{\infty} \tau \alpha \delta_0 e^{-\alpha\tau} d\tau}{\int_0^{\infty} \alpha \delta_0 e^{-\alpha\tau} d\tau},$$

¹ Здесь черта — знак усреднения по физически бесконечно малому объему (ср. примечание в начале § 4-5).

откуда

$$\tau = \frac{1}{\alpha}. \quad (8.73)$$

Вероятность dP того, что свободный пробег, начавшийся за время от $t_0 - dt_0$ до t_0 , заканчивается в момент t , равна

$$dP = \frac{|d\delta|}{\delta_0} = \alpha e^{-\alpha \tau} d\tau,$$

или

$$dP = \alpha e^{-\alpha(t-t_0)} dt_0.$$

Понимая под \hat{x}_k значение \hat{x} в конце свободного пробега, найдем среднее значение этой величины в момент t при всех возможных τ

$$\bar{\hat{x}}_k = \int \hat{x}_k dP = \alpha \int_{t_0=-\infty}^t \hat{x}_k e^{-\alpha(t-t_0)} dt_0.$$

Поскольку t — момент окончания свободного пробега, величина \hat{x}_k выражается так же, как \hat{x} в виде (8.71). Итак, с учетом равенств (8.28) и (8.73), напомним

$$\bar{\hat{x}}_k = \frac{q}{m\tau} \int_{t_0=-\infty}^t e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} dt_0 \int_{t_0}^t E_x(\xi) d\xi.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\bar{\hat{x}}_k = \frac{q}{m} \int_{t_0=-\infty}^t E_x(t_0) e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} dt_0. \quad (8.74)$$

В силу формулы (8.1) плотность тока j_x в направлении оси x равна

$$j_x = -ne\bar{\hat{x}}, \quad (8.75)$$

где n — концентрация электронов.

Установим соотношение между входящей в эту формулу средней скоростью $\bar{\hat{x}}$ по всем электронам в данный момент и средней скоростью в конце свободного пробега $\bar{\hat{x}}_k$. Необходимо различать два крайних случая.

Первый из них — движение в постоянном электрическом поле, когда скорость упорядоченного движения электрона растет пропорционально времени от нуля (в среднем) в начале свободного пробега до $\bar{\hat{x}}_k$ в конце его. При этом после усреднения по всем электронам получается простое соотношение

$$\bar{\hat{x}} = \frac{1}{2} \bar{\hat{x}}_k.$$

Тогда, пользуясь формулой (8.74) при $E_x = \text{const}$ с заменой q на $-e$, находим

$$\bar{\dot{x}} = -\frac{e}{2m} E_x \tau.$$

Таким образом, с учетом формул (8.75) и (8.10), подтверждается равенство (8.11).

Другим крайним случаем является движение электрона в высокочастотном электрическом поле, когда отношение периода T колебаний поля к средней продолжительности свободного пробега τ достаточно мало. На протяжении каждого периода электрон испытывает и увеличение, и уменьшение скорости упорядоченного движения. Вследствие большого числа периодов за время свободного пробега оценка средней скорости электронов в момент t почти не зависит от того, заканчивают они свой свободный пробег в этот момент или не заканчивают. В этом случае можно принять, что $\bar{\dot{x}}$, как и \dot{x}_k , выражается формулой (8.74). Подставляя в уравнение (8.75) вместо $\bar{\dot{x}}$ значение \dot{x}_k (8.74) с заменой q на $-e$, находим

$$j_x = \frac{ne^2}{m} \int_{t_0=-\infty}^t E_x(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} dt_0.$$

Отсюда при $E_x(t) = E_0 e^{i\omega t}$ имеем

$$j_x = \frac{ne^2\tau}{m} \cdot \frac{E_0 e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau},$$

или

$$j_x = \frac{ne^2\tau}{m} \cdot \frac{E_0 e^{i(\omega t - \varphi)}}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}, \quad (8.76)$$

где $\varphi = \text{arctg } \omega\tau$.

Средняя продолжительность τ свободного пробега электрона в плазме оценивается условно. Электрон, двигаясь среди заряженных частиц, подвергается многочисленным слабым воздействиям, которые в итоге приводят к существенному изменению направления скорости электрона, что условно можно считать признаком происшедшего «столкновения» электрона с ионом.

Как известно, получаемая с помощью закона Кулона формула Резерфорда относительно рассеяния α -частиц на тяжелых атомных ядрах показывает, что вероятность отклонения частицы (в пределах заданного телесного угла) от первоначального направления движения пропорциональна выражению

$$\left(\frac{q_1 q_2}{mv^2}\right)^2,$$

где q_1 и q_2 — взаимодействующие заряды, m и v — масса и скорость отклоняемой частицы. То же самое относится к рассеянию электронов на ионах в плазме, если заменить q_1 на $-e$ и q_2 на

заряд иона q_i . Соответствующее эффективное сечение σ иона пропорционально тому же выражению, т. е.

$$\sigma = A \left(\frac{eq_i}{mv^2} \right)^2,$$

где A — коэффициент пропорциональности, m и v — масса и скорость электрона.

Применяя к электронам в плазме статистику Максвелла и понимая при грубой оценке σ величину v как среднеквадратичную скорость, т. е. пользуясь формулой (8.2) с заменой величины T температурой электронов T_e , можно представить выражение для σ в виде $\sigma = \frac{Cq_i^2}{T_e^2}$, где $C = A \frac{e^2}{9k^2}$.

Средняя длина свободного пробега \bar{l} как величина, обратная по формуле (8.42) произведению эффективного сечения $\sigma = \pi R^2$ на концентрацию ионов n_i , выражается в виде

$$\bar{l} = \frac{T_e^2}{Cn_i q_i^2}.$$

С учетом этого выражения среднее время свободного пробега, равное

$$\tau = \frac{\bar{l}}{v} = \frac{\bar{l} \sqrt{m}}{\sqrt{3kT_e}},$$

можно представить в виде

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{3k}} \cdot \frac{T_e^{3/2}}{Cn_i q_i^2}.$$

В полностью ионизированной квазинейтральной плазме, состоящей только из электронов и однородных ионов, можно заменить $n_i q_i$ на ne и q_i на Ze , где Z — кратность заряда иона. Тогда

$$\tau = \frac{a T_e^{3/2}}{nZ}, \quad (8.77)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{m}{3k}} \cdot \frac{1}{e^2 C} = \frac{(3k)^{3/2} m^{1/2}}{e^4 A}.$$

При более строгом обосновании формулы (8.77)² выясняется, что в широком интервале характерных для высокотемпературной

¹ Температура электронов T_e отличается от температуры ионов T_i , когда плазма не находится в состоянии термодинамического равновесия, но если для электронов и ионов в отдельности такое состояние осуществляется достаточно точно.

² См.: Л. А. Арцимович. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1963.

плазмы температур и концентраций для коэффициента a справедливо значение

$$a \approx 10^8 \text{ м}^{-3} \cdot \text{сек}/\text{град}^{3/2}.$$

В случае постоянного тока удельная проводимость плазмы на основании формул (8.11) и (8.77) выражается в виде

$$\gamma = \frac{ae^3 T_e^{3/2}}{2mZ}. \quad (8.78)$$

Независимость удельной проводимости плазмы от концентрации n электронов объясняется тем, что увеличение n не только непосредственно содействует увеличению тока, но и приводит к компенсации этого эффекта вследствие увеличения числа ионов, что означает уменьшение среднего времени свободного пробега электронов. С возрастанием температуры T_e величина γ быстро растет потому, что в высокотемпературной плазме при очень быстром движении электронов они пролетают мимо ионов, почти не успевая отклониться от первоначального направления движения, т. е. помехи упорядоченному движению электронов со стороны ионов сильно уменьшаются с ростом температуры¹.

Чем больше кратность Z заряда иона, тем сильнее притяжение электронов к иону, что означает уменьшение удельной проводимости γ .

При $\omega\tau \gg 1$ формула (8.76) с достаточной точностью дает

$$j_x = \frac{ne^2}{m\omega} E_0 e^{i(\omega t - \varphi)},$$

причем

$$\varphi = \pi/2.$$

Отставание высокочастотного тока от напряжения по фазе на угол φ в плазме объясняется существованием инертной массы m у электронов; благодаря тому, что $m \neq 0$, получается $a \neq 0$, $\tau \neq 0$ и $\varphi \neq 0$. В этом смысле влияние инертности электронов аналогично влиянию индуктивности.

§ 8-6. ВОЗМОЖНОСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

Рассмотрим поляризацию плазмы \mathbf{P} , т. е. сумму дипольных моментов, отнесенную к единице объема. Смещение каждого электрона на расстояние x по отношению к неподвижному поло-

¹ Аналогичные классические соображения неприменимы к металлам, где благодаря большой плотности вещества и ограниченной температуре, при которой могут существовать твердые или жидкие металлы, длина волны де Бройля (см. § 4-3) отнюдь не пренебрежимо мала, т. е. справедливы положения квантовой механики.

жительному заряду создает дипольный момент, x -компонента которого равна $-ex$. Поляризация \mathbf{P} имеет компоненту

$$P_x = -ne\bar{x}.$$

Дифференцируя по времени и имея в виду поляризацию в фиксированной точке пространства, получаем

$$\frac{\partial P_x}{\partial t} = -ne\dot{\bar{x}}.$$

Из сравнения с равенством (8.75) имеем

$$\frac{\partial P_x}{\partial t} = j_x.$$

Отсюда, пользуясь формулой (8.76), находим

$$P_x = \frac{ne^{2\tau}}{m\omega} \cdot \frac{E_0 e^{i\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} + C.$$

Константа C определяется из того условия, что если $E_0 = 0$, то $P_x = 0$. Итак, $C = 0$. Заменяя $E_0 e^{i\omega t}$ на E_x , получаем

$$P_x = \frac{ne^{2\tau}}{m\omega} \cdot \frac{E_x e^{-i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}.$$

Относительная диэлектрическая проницаемость плазмы $\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0$ согласно уравнениям (2.9) и (4.51) равна¹

$$\epsilon = 1 + \frac{P_x}{\epsilon_0 E_x},$$

или, с учетом предыдущего равенства,

$$\epsilon = 1 + \frac{ne^{2\tau}}{\epsilon_0 m \omega} \cdot \frac{e^{-i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}.$$

При достаточной магнитной индукции (в замагниченной плазме) $\omega\tau \gg 1$ и, с достаточной точностью, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (см. § 8-5), так что

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (8.79)$$

где

$$\omega_0 = e \sqrt{\frac{n}{\epsilon_0 m}}. \quad (8.80)$$

¹ В отличие от выводов § 6-2 при вычислении диэлектрической проницаемости плазмы можно не различать напряженности действующего электрического поля и макроскопического поля. (См.: В. Л. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Физматгиз, 1960).

При $\omega < \omega_0$ величина ϵ отрицательна, и показатель преломления, равный $\sqrt{\epsilon}$ (см. § 6-7), становится мнимым числом. Это означает, что невозможна вещественная фазовая скорость обычной поперечной волны. Таким образом, в плазме могут существовать поперечные электромагнитные волны лишь с угловой частотой ω , удовлетворяющей неравенству

$$\omega > \omega_0.$$

Пользуясь численными значениями e (3.2), m (3.53) и ϵ_0 (2.7), находим

$$\omega_0 = 56,3 \sqrt{n};$$

соответствующая длина волны

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 3,3 \cdot 10^7 n^{-1/2}.$$

Например, при $n \approx 10^{19} \text{ м}^{-3}$ получается $\lambda_0 \approx 0,01 \text{ м}$. Электромагнитные волны с частотой, меньшей ω_0 , т. е. при $\lambda > \lambda_0$, падая на плазму, испытывают полное отражение от нее.

§ 8-7. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ПЛАЗМЕ

В плазме могут существовать волны различной физической природы. Рассмотрим случай, когда электрические колебания в плазме возникают в результате электростатического взаимодействия разделенных в некоторой области положительных и отрицательных зарядов.

Будем считать, что ионы как массивные частицы неподвижны, а электроны вследствие малого воздействия смещены на расстояние ξ от ионов в направлении оси x . В некоторой области при $x_1 < x < x_2$ величина ξ зависит от x , а вне этой области $\xi = 0$.

Простейшая теория колебаний электронов строится в предположении, что магнитное поле в плазме отсутствует и градиент давления в плазме (вследствие перераспределения электронов) пренебрежимо мал. При этом в области $x_1 < x < x_2$ на электроны действует лишь электрическое поле. Потенциал φ этого микрополя удовлетворяет уравнению Даламбера (2.35) с заменой ϵ_a на ϵ_0 .

В результате небольшого отклонения плазмы от исходного равновесного состояния скорость изменения состояния близка к нулю и потому членом, содержащим $\partial^2 \varphi / \partial t^2$ в уравнении (2.36), можно пренебречь по сравнению с $\Delta \varphi$.

Тогда вместо (2.36) справедливо уравнение Пуассона, т. е.

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

или в данном одномерном случае

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (8.81)$$

Рассмотрим перпендикулярный оси x тонкий слой с единичной площадью оснований и толщиной Δx . В момент t смещение электронов в направлении оси x равно ξ ($\xi < \Delta x$) у одного основания этого слоя (при $x = x_1$) и равно

$$\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x$$

у другого основания (при $x = x_1 + \Delta x$). Обозначим через n первоначальную концентрацию электронов. Вследствие указанного перемещения в объеме слоя появятся дополнительно электроны в количестве $\Delta N' = n\xi$ и покинут этот объем электроны в количестве

$$\Delta N'' = n \left(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \right),$$

т. е. число электронов в слое толщиной Δx будет меньше первоначального на величину

$$\Delta N'' - \Delta N' = n \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x,$$

а заряд в объеме слоя будет больше первоначального, равного нулю, на величину

$$\Delta q = e (\Delta N'' - \Delta N') = en \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x.$$

Так как объем слоя равен Δx , то объемная плотность заряда слоя будет

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta x} = en \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

и уравнение (8.81) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{en}{\epsilon_0} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

откуда после интегрирования получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{en}{\epsilon_0} \xi + C.$$

Константа C определяется из того условия, что если смещения электронов нет, т. е. $\xi = 0$, то градиент потенциала в нейтральной плазме отсутствует ($\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$), следовательно, $C = 0$.

Итак,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{en}{\epsilon_0} \xi. \quad (8.82)$$

Равенство (2.26) сводится в нашем случае к соотношению

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

или, в силу уравнения (8.82),

$$E_x = \frac{en}{\epsilon_0} \xi.$$

Поэтому сила, действующая на электрон в направлении оси x , равная $F_x = -eE_x$, выражается в виде

$$F_x = -\frac{e^2 n}{\epsilon_0} \xi.$$

Следовательно, на основании II закона Ньютона имеем

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{e^2 n}{\epsilon_0} \xi = 0.$$

Решение находим в форме

$$\xi = \xi_0 e^{i\omega_0 t},$$

причем угловая частота колебаний получается в виде

$$\omega_0 = e \sqrt{\frac{n}{\epsilon_0 m}},$$

что совпадает с формулой (8.80), т. е. $\omega_0 = 56,3 \sqrt{n}$ и соответствующая длина волны $\lambda_0 = 3,3 \cdot 10^{-7} n^{-1/2}$.

Опыт подтверждает, в приблизительном согласии с теорией, что в плазме образуются продольные волны, обусловленные колебаниями электронов, аналогичные продольным акустическим волнам. Такие электростатические колебания обнаружил впервые американский физик И. Ленгмюр. Угловая частота ω_0 в виде (8.80) известна как плазменная (или *ленгмюрова*) частота.

При построении более точной теории электростатических колебаний следует учитывать градиент давления электронного газа в плазме, обусловленный изменениями концентрации электронов.

При небольшом отклонении от равновесного состояния, соответствующего равномерному распределению электронов в пространстве, состояние электронного газа в плазме с достаточной точностью описывается уравнением адиабаты

$$pV^\kappa = \text{const},$$

или

$$\frac{p}{n^\kappa} = \text{const}, \quad (8.83)$$

где n — концентрация электронов и $\kappa = \frac{N+2}{N}$, причем N — число степеней свободы электрона. В одномерном случае $N=1$ и $\kappa=3$. При этом, дифференцируя уравнение (8.83) по x , находим

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{n^3} - \frac{3p}{n^4} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} = 0.$$

В согласии с кинетической теорией газов заменим p на nkT , где T — температура электронного газа. Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 3kT \frac{\partial n}{\partial x},$$

или, с учетом того, что плотность заряда $\rho = -ne$,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{3kT}{e} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (8.84)$$

Сила, обусловленная градиентом давления, отнесенная к единице объема, на который она действует, обладает компонентой f_x , равной

$$f_x = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Следовательно, на один электрон действует вследствие градиента давления сила

$$f'_x = \frac{f_x}{n} = -\frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x};$$

или, с учетом равенства (8.84),

$$f'_x = \frac{3kT}{en} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Из уравнений (8.81) и (8.82) находим

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = en \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Таким образом,

$$f'_x = 3kT \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Кроме этой силы, на электрон действует сила $F_x = -eE_x = -\frac{e^2 n}{\epsilon_0} \xi$ со стороны электрического поля. При этом уравнение движения электрона примет вид

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{e^2 n}{\epsilon_0} \xi - 3kT \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0,$$

или, пользуясь равенством (8.80) и вводя обозначение $\frac{3kT}{m} = \alpha$, имеем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \omega_0^2 \xi = 0. \quad (8.85)$$

Находим решение в виде

$$\xi = Ce^{i(kx - \omega t)},$$

где теперь k — волновое число и ω — угловая частота электростатических колебаний с учетом градиента давления. Из уравнения (8.85) получаем

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha}}.$$

Фазовая скорость плазменной электростатической волны, равная $v_\phi = \frac{\omega}{k}$, с учетом градиента давления, выражается в виде

$$v_\phi = \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \quad (8.86)$$

При $\omega < \omega_0$ эта величина является мнимой. Следовательно, продольные плазменные (электростатические) волны с угловой частотой ω , меньшей, чем плазменная частота (8.80), невозможны.

Распространение плазменных (электростатических) волн с меньшей частотой невозможно потому, что электрическое поле, обусловленное смещением электронов, вследствие последующего перераспределения их перестало бы существовать за время меньшее, чем период предполагаемых колебаний. Нижняя граница ω_0 для частоты продольных плазменных волн совпадает с такой же нижней границей частоты поперечных электромагнитных волн в плазме (см. § 8-6).

Формула (8.86) указывает на зависимость фазовой скорости v_ϕ от частоты ω . Следовательно, имеет место дисперсия продольных плазменных волн, особенно резко выраженная при ω , близком к ω_0 . Групповая скорость этих волн выражается формулой

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\alpha}{v_\phi}.$$

§ 8-8. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ ПЛАЗМЫ И МАГНИТНЫЕ ЛОВУШКИ

Вследствие квазинейтральности плазмы будем считать, что электрическое поле на частицу не действует.

Ограничимся практически интересным случаем нерелятивистского движения заряженных частиц в замагниченной плазме, т. е. в настолько сильном магнитном поле, что длина свободного пробега частицы много больше радиуса (3.43) (при $\epsilon_y = 0$) винтовой линии, по которой движется частица. При таких упрощениях задача сводится к вопросу о движении свободной заряженной частицы (электрона или иона) в магнитном поле.

Рассмотрим простой случай, когда магнитное поле почти однородно и существует *осевая симметрия магнитного поля*, т. е. будем считать, что пучок линий магнитной индукции расходится или сжимается на каком-то участке с достаточной точностью симметрично относительно осевой линии (рис. 63), которую примем за ось z цилиндрической системы координат r, ϑ, z , где r — расстояние от оси z , ϑ — угол в плоскости, перпендикулярной оси z . Благодаря осевой симметрии поля магнитная индукция имеет две компоненты B_r и B_z , а $B_\vartheta = 0$. Ограничимся при этом областью пространства, достаточно близкой к оси симметрии.

В соответствии с дифференциальным уравнением Максвелла (2.24) напомним интегральное уравнение

$$\oint_S B_n dS = 0, \quad (8.87)$$

где B_n — компонента магнитной индукции в направлении внешней нормали к поверхности S . Будем понимать под S поверхность цилиндра радиуса r , ось которого совпадает с осью симметрии магнитного поля, а координаты оснований равны $z_1 = z$ и $z_2 = z + \Delta z$ (см. рис. 63).

Тогда уравнение (8.87) принимает вид

$$-\bar{B}_z \pi r^2 + \left(\bar{B}_z + \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial z} \Delta z \right) \pi r^2 + \bar{B}_r \cdot 2\pi r \Delta z = 0, \quad (8.88)$$

где \bar{B}_z — среднее значение B_z на торцевой поверхности цилиндра при $z = z_1$, а \bar{B}_r — среднее значение B_r на боковой поверхности

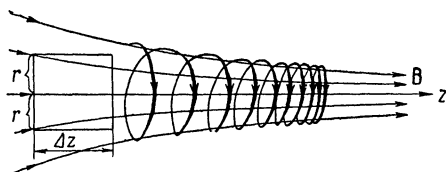


Рис. 63. Движение электрона в неоднородном магнитном поле

ности цилиндра. Ввиду слабой неоднородности магнитного поля при достаточно малом r можно пренебречь отличием \bar{B}_z от B_z и B_z от B . Тогда при $\Delta z \rightarrow 0$ из уравнения (8.88) в пределе получаем

$$B_r = -\frac{1}{2} r \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (8.89)$$

Разложим скорость частицы \mathbf{u} на составляющую \mathbf{u}_1 , перпендикулярную оси z , и продольную составляющую \mathbf{u}_2 . Чтобы выяснить характер движения частицы, воспользуемся выражением силы Лоренца (2.68)

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{u}\mathbf{B}].$$

Вычислим компоненту силы F_z . Составляющие скорости электрона и магнитной индукции, коллинеарные оси z , не вносят вклада в величину F_z . Нужно ввести в расчет только поперечную скорость \mathbf{u}_1 и радиальную составляющую магнитной индукции.

При рассмотрении движения электрона в однородном магнитном поле (см. § 3-3) было выяснено, что он движется вокруг направления поля так, что направление его движения образует правовинтовую систему с направлением индукции \mathbf{B} .

Этот результат справедлив и в неоднородном поле, поскольку можно принять, что $B_z = B$, причем B не зависит от r . Здесь движение происходит, в согласии с результатами для однородного поля, вокруг оси z . При этом в случае (см. рис. 63), когда вектор \mathbf{B} направлен слева направо, поперечная скорость \mathbf{u}_1 в точках выше оси z направлена к нам, а векторное произведение ее на радиальную составляющую магнитной индукции \mathbf{B}_r , ориентированную противоположно радиусу r , направлено вдоль оси z .

Для электрона $q = -e < 0$. Компонента F_z силы F будет при этом отрицательна и равна

$$F_z = |q| u_1 B_r, \quad (8.90)$$

где $B_r < 0$. Эта формула остается такой же и в случае, когда $B_r > 0$. То же самое справедливо, очевидно, для любой отрицательно заряженной частицы.

В случае положительно заряженной частицы следует учесть противоположное по сравнению с электроном направление движения вокруг вектора магнитной индукции и противоположный знак заряда. При этом снова $F_z < 0$ при $B_r < 0$ и $F_z > 0$ при $B_r > 0$, так что формула (8.90) остается справедливой.

Работа силы F_z на участке dz равна

$$dA = F_z dz.$$

Если подставить выражения F_z (8.90) и B_r (8.89), то

$$dA = -\frac{|q| u_1 r}{2} dB. \quad (8.91)$$

При этом на такую же величину изменяется энергия движения электрона в направлении оси z .

Так как сила \mathbf{F} перпендикулярна полной скорости \mathbf{u} , магнитное поле не может изменить полную энергию движения электрона. Изменение энергии продольного движения должно сопровождаться равным по величине и противоположным по знаку изменением dW энергии поперечного движения. Следовательно,

$$dW = \frac{|q| u_1 r}{2} dB. \quad (8.92)$$

Движение заряженной частицы вокруг направления однородного магнитного поля происходит с постоянной угловой скоростью ω , определяемой формулой (3.35). Это выражение ω можно считать приближенно справедливым и в данном случае:

$$\omega = \frac{|q| B}{m}. \quad (8.93)$$

Так как

$$r = \frac{u_1}{\omega},$$

то, пользуясь выражением (8.93), уравнение (8.92) можно переписать в виде

$$dW = \frac{mu_1^2}{2B} dB.$$

Величина $\frac{mu_1^2}{2}$ представляет собой энергию поперечного движения частицы W . Итак,

$$\frac{dW}{dB} = \frac{W}{B}, \quad (8.94)$$

что означает пропорциональность величин W и B . Вследствие этого в соотношении (8.92) $u_1 r = \text{const}$. Заменяя здесь u_1 на ωr и пользуясь формулой (8.93), находим

$$r^2 B = \text{const}. \quad (8.95)$$

Но

$$\pi r^2 B = \Phi,$$

где Φ — поток магнитной индукции, который частица окружает при своем движении. Поэтому соотношение (8.95) означает постоянство (с достаточной точностью) величины Φ , следовательно, заряженная частица движется почти по поверхности трубки магнитных линий (см. рис. 63).

Как видно из соотношений (8.91) и (8.93), с переходом частицы в область больших значений магнитной индукции (при $dB > 0$) уменьшается скорость продольного движения и растет угловая скорость ω движения частицы вокруг направления магнитного поля, так что шаг пространственной спирали, по которой движется заряженная частица, убывает с возрастанием магнитной индукции. Продольная скорость и шаг спирали обращаются в нуль при достаточно большой индукции.

При выводе соотношения (8.95) предполагались осевая симметрия магнитного поля и настолько малое значение $r = \frac{u_1}{\omega}$, что на расстояниях от оси, не превышающих r , поле почти однородно. Это значит, что рассмотренная теория относится к случаю ограниченной скорости частицы, достаточно большой магнитной индукции и не слишком большой кривизны линий магнитного поля.

В более общем случае траектория частицы в неоднородном магнитном поле сложнее. Нарушение осевой симметрии вызывает смещение частиц в направлении, перпендикулярном полю. Траектории заряженных космических частиц в магнитном поле Земли приходится находить путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения; вид таких траекторий

обычно весьма сложен. Однако некоторые свойства полученного нами решения имеют довольно общий характер. Так, из соотношения (8.95) можно сделать вывод, что радиус кривизны траектории заряженных частиц убывает с увеличением магнитной индукции.

При известных упрощающих предположениях частица движется почти по поверхности трубки магнитных линий. В более широком смысле линии магнитной индукции в ряде случаев указывают приблизительное направление постепенного смещения заряженных частиц. Это обстоятельство позволяет управлять движением заряженных частиц, например противодействовать уширению тонких электронных пучков, которое вызывается взаимным отталкиванием электронов.

Существенное значение имеет вывод, что скорость движения заряженной частицы в направлении магнитного поля становится равной нулю в области достаточно сильного поля. Это заключение остается справедливым и при значительной неоднородности магнитного поля. При этом в условиях стационарного режима исключена возможность накопления частиц в области, где продольная составляющая скорости частицы сводится к нулю. Следовательно, частица отражается от области сильного магнитного поля.

Если частица движется в пространстве, где магнитная индукция возрастает в разных направлениях от некоторой средней зоны (таково, например, магнитное поле между двумя близко расположенными одноименными полюсами), то будет происходить отражение частицы от всех участков поля, где магнитная индукция достаточно велика. Эти участки называют магнитными пробками, а для области, в которой может двигаться частица, принято название *магнитная ловушка*. Известны многочисленные разновидности магнитных ловушек.

Частица, скорость которой вследствие столкновения с другой частицей внезапно меняется, может выскочить из ловушки. Для лучшего удержания частиц в магнитных ловушках применяют не только постоянные магнитные поля сложной конфигурации, но и высокочастотные магнитные поля.

Примером природных магнитных ловушек могут служить околоземные радиационные пояса, в которых удерживаются преимущественно протоны и электроны космического происхождения. Постепенно перемещаясь в магнитном поле Земли по сложным траекториям, частицы дрейфуют приблизительно вдоль магнитных линий поля Земли, попадают при достаточной близости к магнитному полюсу Земли в область более сильного магнитного поля, наталкиваются здесь на магнитную пробку, поворачивают и движутся в радиационном поясе к другому магнитному полюсу и т. д., а иногда выскакивают из этой магнитной ловушки.

§ 8-9. ПРИМЕНЕНИЯ ПЛАЗМЫ

В основе бурного развития энергетики будут лежать *управляемые термоядерные реакции* в виде ядерных реакций синтеза изотопов водорода с образованием гелия. При этом суммарная масса m_1 частиц, вступающих в реакцию, больше, чем суммарная масса m_2 частиц — продуктов реакции. Вместе с массой $m_1 - m_2$ в окружающее пространство выделяется энергия, по формуле (1.81) равная $(m_1 - m_2)c^2$. Сближение ядер изотопов водорода, необходимое для их слияния, возможно, несмотря на их взаимное отталкивание, при достаточной кинетической энергии ядер, т. е. при достаточно высокой температуре водорода, находящегося при этом в плазменном состоянии.

Высокотемпературная водородная плазма создается в простейшем случае под действием сильного однородного электрического поля E . Электроны и ионы, существующие в водороде вследствие слабой естественной ионизации, приобретая значительные скорости под действием поля E , вызывают добавочную ионизацию атомов водорода. Возникающий сильный электрический ток не только создает плазму благодаря процессам ионизации, но и обеспечивает *самосжатие плазмы*.

Заряженная частица, движущаяся упорядоченно вдоль линии тока, подвергается действию лоренцевой силы (2.68) со стороны магнитного поля тока. Магнитные линии образуют правовинтовую систему с направлением тока. Поэтому сила (2.68) направлена к оси тока как для положительных ионов, движущихся в направлении тока, так и для электронов, движущихся противоположно. Под действием лоренцевых сил плазма сжимается (пинч-эффект). Получается тонкий плазменный шнур, ось которого совпадает с направлением тока. Этим обеспечивается термоизоляция плазмы. Идею термоизоляции плазмы под действием магнитного поля высказали в 1950 г. А. Д. Сахаров и И. Е. Тамм.

Расчет электродинамических сил, действующих на плазменный шнур, проведем, обращаясь к макроскопической теории.

Рассмотрим цилиндрический шнур радиуса R , обладающий осевой симметрией, полагая, что плотность тока j в шнуре не зависит от координат и времени. Воспользуемся уравнением Максвелла (2.21) для случая стационарного тока

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j},$$

или в интегральной форме, согласно формуле Стокса,

$$\oint_L \mathbf{H}_t dl = J_L,$$

где J_L — ток через площадку, ограниченную контуром L . Возьмем контур в виде окружности радиуса $r < R$ с центром на

оси шнура. Благодаря осевой симметрии $H_l = H = \text{const}$, причем $L = 2\pi r$, $J_L = \pi r^2 j$. Следовательно,

$$H = \frac{rj}{2}, \quad B = \frac{\mu_0 r j}{2}.$$

Лоренцова сила в единице объема шнура по формуле (4.47) направлена к оси шнура и равна

$$f = jB = \frac{\mu_0 r j^2}{2}.$$

В цилиндрическом слое радиуса r при толщине слоя dr и осевой длине l действует электродинамическая сила

$$dF = f \cdot 2\pi r l dr = \pi \mu_0 l j^2 r^2 dr.$$

Эту силу можно трактовать как результирующую двух противоположно направленных сил электродинамического давления, действующих на внешнюю и внутреннюю поверхности слоя, причем разность электродинамических давлений на ту и другую поверхности выражается в виде

$$dp_э = \frac{dF}{2\pi r l} = \frac{\mu_0 j^2 r dr}{2},$$

откуда после интегрирования получается

$$p_э = \frac{\mu_0 j^2 r^2}{4}.$$

Константа интегрирования принята за нуль потому, что при $r=0$ получается $B=0$. Это означает отсутствие электродинамического давления ($p_э=0$).

Среднее электродинамическое давление по поперечному сечению шнура равно

$$\overline{p_э} = \frac{\mu_0 j^2}{4} r^2 = \frac{\mu_0 j^2}{4} \frac{\int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr}{\int_0^R 2\pi r dr}.$$

Заменяя j на $\frac{J}{\pi R^2}$, где J — ток в шнуре, находим

$$\overline{p_э} = \frac{\mu_0 J^2}{8\pi^2 R^2}.$$

В равновесном состоянии электродинамическое давление равно сумме давлений электронного газа ($p_e = nkT_e$) и ионного газа ($p_i = nkT_i$), где n — концентрация как электронов, так и водородных ионов (ядер), k — постоянная Больцмана. При равенстве температур электронов и ионов ($T_e = T_i$) имеем

$$p = p_e + p_i = 2nkT.$$

Высокая температура T плазменного шнура обусловлена выделением теплоты при прохождении тока. В равновесном состоянии из условия $p_0 = p$ находим

$$T = \frac{\mu_0 J^2}{8\pi Nk}, \quad (8.96)$$

где $N = 2n \cdot \pi R^2$ — число частиц на единицу длины шнура. Если, например, $J = 10^6$ а и трубка диаметром 0,1 м заполнена первоначально водородом с давлением 0,1 мм рт. ст. при 15°C , то $N = 6 \cdot 10^{19}$ м⁻³ и $T = 3 \cdot 10^8$ °К. Температуры порядка 10^8 °К вполне достижимы по этому методу.

Однако равновесное состояние плазменного шнура неустойчиво при неизбежных малых возмущениях. Термоядерные реакции, представляющие практический интерес для энергетики, будут осуществимы, когда в сочетании с температурами порядка 10^8 °К удастся обеспечить достаточную продолжительность существования плазмы и достаточную концентрацию частиц.

Другая возможность применения плазмы — непосредственное получение электроэнергии за счет подвода теплоты к газу.

Рассмотрим источник тока, работающий по этому принципу, — *магнитогидродинамический генератор* (МГДГ) простейшего типа.

Газ, подогретый в резервуаре до температуры около 3000°K и потому в некоторой мере ионизированный, входит через сопло в область между двумя параллельными плоскостями со скоростью \mathbf{u} (рис. 64). Будем считать, что плазма заполняет всю область между пластинами. Индукция \mathbf{B} однородного постоянного магнитного поля параллельна пластинам и перпендикулярна скорости \mathbf{u} . Лоренцова сила (2.68) отклоняет положительные ионы газа вверх (см. рис. 64), а электроны вниз.

Магнитная гидродинамика рассматривает перемещение любой проводящей жидкости и движение плазмы в магнитном поле, с чем и связано название генератора (МГДГ).

Ограничимся простейшим расчетом МГДГ. Напряженность электрического поля между пластинами равна uB , как и в простейшем расчете эффекта Холла (см. § 8-2), а электродвижущая сила МГДГ

$$\mathcal{E} = uBl, \quad (8.97)$$

где l — расстояние между пластинами.

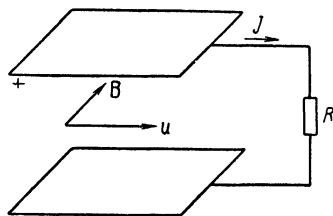


Рис. 64. К объяснению принципа действия магнитогидродинамического генератора

Во внешнем сопротивлении R (см. рис. 64) проходит ток, равный

$$J = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R}.$$

Здесь

$$R_0 = \frac{l}{\gamma S} \quad (8.98)$$

— сопротивление плазмы между пластинами, γ — удельная проводимость плазмы, S — площадь пластин.

Полезная мощность МГДГ равна $P = J^2 R$, или

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R_0 + R)^2}. \quad (8.99)$$

При достаточно больших значениях u , B , l и γ мощность МГДГ может достигать сотен тысяч киловатт. Большое значение γ получается при достаточно высокой температуре плазмы и при добавлении к ней легко ионизируемых примесей. Создание удачных в технико-экономическом отношении МГДГ затрудняется отсутствием здесь термоизоляции плазмы, причем техника еще не знает дешевых материалов, длительно выдерживающих достаточно высокие температуры.

Кроме рассмотренного МГДГ постоянного тока, возможны иные конструкции МГДГ как постоянного, так и переменного тока.

В качестве еще одной возможности применения плазмы назовем *реактивные плазменные двигатели*.

По принципу реактивного движения сила тяги пропорциональна скорости вещества, истекающего из двигателя. В реактивных двигателях на химическом топливе скорость истечения продуктов сгорания составляет лишь несколько километров в секунду. Скорость плазменной струи, выходящей через специальное сопло из резервуара, в котором создается плазма, может достигать сотен километров в секунду. При использовании достаточно мощных ядерных реакторов космические корабли, снабженные реактивными плазменными двигателями, смогут двигаться со скоростями порядка сотен и тысяч километров в секунду.

Низкотемпературная плазма применяется для освещения (люминесцентные лампы, рекламные газосветные лампы и т. п.), в ионных приборах (ртутные выпрямители и т. п.) и в электросварке.

В технике будущего могут найти различное применение разнообразные свойства плазмы.

Задачи

42. Пластика из серебра шириной $b = 2$ см и толщиной $d = 0,5$ мм помещена в постоянное однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ тл, перпендикулярное широкой грани. Вдоль пластинки течет ток $J = 50$ а.

Разность потенциалов, обусловленная эффектом Холла, равна 10 мкВ ; соответствующее электрическое поле образует правовинтовую систему с векторами \mathbf{j} и \mathbf{B} . Найти постоянную Холла i , полагая, что заряд каждого носителя тока равен по модулю e , определить концентрацию этих носителей и знак их заряда.

43. В равновесной, полностью ионизированной водородной плазме концентрация электронов равна 10^{19} м^{-3} и температура составляет 10^8 К . Найти удельную проводимость плазмы, если ток постоянный, и определить ее диэлектрическую проницаемость при длине волны $\lambda = 1 \text{ мм}$.

44. Заряженная частица влетает в почти однородное осесимметричное постоянное магнитное поле под углом $\alpha = 45^\circ$ к направлению магнитной индукции. Магнитная индукция возрастает на 10% при некотором перемещении частицы. Каково при этом относительное изменение радиуса и шага спирали, по которой движется частица?

45. Найти э. д. с. и максимальную полезную мощность магнитогидродинамического генератора, если скорость плазменного потока равна 1 км/сек , магнитная индукция 2 тл . Расстояние между пластинами генератора составляет 1 м , площадь пластин 1 м^2 , и удельная проводимость плазмы равна $100 \text{ ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$.

1. Из уравнений (1.17) и (1.16) находим

$$N = \frac{2l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} = 0,4.$$

2. При движении интерферометра со скоростью v_1 плечо его расположено вдоль вектора v_1 и по гипотезе Лоренца — Фицджеральда имеет длину $a = a_0 \sqrt{1 - \beta_1^2}$, где a_0 — длина плеча в состоянии покоя, $\beta_1 = \frac{v_1}{c}$. Другое плечо, перпендикулярное направлению движения, сохраняет свою длину b_0 . Аналогично теории опыта Майкельсона получаются формулы

$$t_1 = \frac{2a_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}; \quad t_2 = \frac{2b_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}},$$

следовательно,

$$t_2 - t_1 = \frac{2(b_0 - a_0)}{c \sqrt{1 - \beta_1^2}}.$$

При повороте интерферометра на 90° получается аналогичный результат, причем, заменяя скорость v_1 на v_2 , находим

$$t'_2 - t'_1 = \frac{2(b_0 - a_0)}{c \sqrt{1 - \beta_2^2}},$$

где $\beta_2 = \frac{v_2}{c}$. Поскольку $\beta_1^2 \ll 1$ и $\beta_2^2 \ll 1$, получаем

$$t'_2 - t'_1 - (t_2 - t_1) \approx \frac{(b_0 - a_0)(\beta_1^2 - \beta_2^2)}{c} = \frac{(b_0 - a_0)(v_1^2 - v_2^2)}{c^3}.$$

3. Разложим радиус-вектор r на составляющие r_1 и r_2 , из которых первая параллельна вектору v , а вторая перпендикулярна ему. Согласно формулам (1.24) и (1.20) имеем

$$r_1 = \frac{r_1 - vt}{\gamma} \quad \left(\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right), \quad r_2 = r_2.$$

Следовательно, радиус-вектор в штрихованной системе

$$r' = r'_1 + r'_2 = \frac{r_1 - vt}{\gamma} + r_2.$$

Заменим r'_2 на $r - r_1$ и представим r_1 в форме $\frac{(rv)v}{v^2}$. Тогда

$$r' = r + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{(rv)v}{v^2} - \frac{vt}{\gamma}.$$

Из формулы (1.25) находим

$$t' = \frac{t - \frac{rv}{c^2}}{\gamma}.$$

4. Пользуясь формулой (1.40) и матрицей (1.39), находим

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{u'_1 - i\beta u'_4}{\gamma}, \\ u_2 &= u'_2, \\ u_3 &= u'_3, \\ u_4 &= \frac{u'_4 + i\beta u'_1}{\gamma}; \end{aligned}$$

или вследствие выражений (1.59)

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \cdot \frac{u'_x + v}{\gamma}; & u_y &= \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \cdot u'_y; \\ u_z &= \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} u'_z; & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \cdot \frac{1 + \beta \frac{u'_x}{c}}{\gamma}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства находим

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{\gamma}{1 + \beta \frac{u'_x}{c}}.$$

Заменяя здесь β на v/c и подставляя в формулы для u_x , u_y , u_z , получаем законы сложения скоростей (1.54) и (1.55).

5. Направим ось x по течению воды. Из соотношения (1.54) при $u'_x = \frac{c}{n}$ находим, что свет распространяется по течению со скоростью

$$u_1 = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}},$$

а скорость света против течения равна

$$u_2 = \frac{\frac{c}{n} - v}{1 - \frac{v}{nc}}.$$

При $v \ll c$ имеем, с достаточной точностью,

$$u_1 = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$u_2 = \frac{c}{n} - v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

6. Начнем с простого случая, когда $u'_y = u'_z = 0$. Ввиду равенства (1.54) напишем

$$u = u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}.$$

Отсюда при $0 < v < c$ и $0 < u'_x < c$ имеем $\frac{\partial u}{\partial u'_x} > 0$, $\frac{\partial u}{\partial v} > 0$, т. е. с увеличением u'_x и v растет u . При $v = u'_x = c$ получаем наибольшее u , равное c .

В общем случае из формул (1.54) и (1.55) находим

$$\begin{aligned} u^2 &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \frac{(u'_x + v)^2 + (u'^2 - u'^2_x)(1 - \beta^2)}{\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^2} = \\ &= \frac{(u'_x \beta + c)^2 + v^2 + u'^2(1 - \beta^2) - c^2}{\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^2} = c^2 - \frac{(c^2 - u'^2)(1 - \beta^2)}{\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

При $u' = \text{const} < c$ и $v < c$ величина u^2 растет с увеличением u'_x и достигает наибольшего значения при $u'_x = u'$, т. е. при $u'_y = u'_z = 0$. Таким образом, следует вернуться к рассмотренному простому случаю, так что всегда $u \leq c$.

7. В прямоугольной декартовой системе координат, неподвижной относительно Солнца, направим ось y от Солнца к звезде и совместим плоскость x, y с вектором v . В системе координат, скрепленной с наблюдателем, направим оси x' и y' параллельно осям x и y .

Обращаясь к результатам решения задачи 3 и проектируя вектор r' на координатные оси, находим

$$x' = x + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{(xv_x + yv_y)v_x}{v^2} - \frac{v_x t}{\gamma};$$

$$y' = y + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{(xv_x + yv_y)v_y}{v^2} - \frac{v_y t}{\gamma};$$

$$t' = \frac{t}{\gamma} - \frac{xv_x + yv_y}{c^2 \gamma}.$$

Возьмем дифференциалы от обеих частей этих уравнений и вычислим dx'/dt' и dy'/dt' , принимая во внимание, что в системе

x, y свет распространяется против оси y со скоростью c , т. е. $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = -c$. Тогда

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{-(1-\gamma) \frac{cv_y v_x}{v^2} - v_x}{1 + \frac{v_y}{c}};$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{-\gamma c - (1-\gamma) c \frac{v_y^2}{v^2} - v_y}{1 + \frac{v_y}{c}}.$$

По условию задачи угол между вектором v и осью y равен ψ . Следовательно, $v_x = v \sin \psi$, $v_y = v \cos \psi$. Воспользуемся обозначением $\beta = \frac{v}{c}$.

Понимая под α угол абберации, на который отклоняется направление распространения света вследствие движения штрихованной системы относительно нештрихованной, находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dx'}{dy'} = \frac{\beta \sin \psi + (1-\gamma) \sin \psi \cos \psi}{\cos^2 \psi + \gamma \sin^2 \psi + \beta \cos \psi}.$$

При $\beta \ll 1$ имеем

$$\gamma = \sqrt{1 - \beta^2} = 1 - \frac{\beta^2}{2} + \dots$$

Ограничиваясь членами второго порядка относительно β , получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \beta \sin \psi - \frac{\beta^3}{4} \sin 2\psi.$$

При $v = 30$ км/сек и $\psi = 90^\circ$ имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = 10^{-4}, \quad \alpha = 20,5''.$$

8. Уравнение (1.77), в силу равенства (1.74), приводится к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \mathbf{F},$$

или

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{u\mathbf{u}}{c^2} \cdot \frac{du}{dt} = \mathbf{F}.$$

Это значит, что силу можно считать параллельной ускорению du/dt лишь в том случае, когда скорость u пренебрежимо мала по сравнению с c .

Если сила параллельна скорости, то

$$\mathbf{u} \frac{du}{dt} = u \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \frac{m}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{3/2}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Если сила перпендикулярна скорости, то $u = \text{const}$, $\frac{du}{dt} = 0$, и тогда

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{du}{dt} = F.$$

С точки зрения обычной для нерелятивистской механики формулировки второго закона динамики, когда масса рассматривается как отношение силы к ускорению, можно назвать величины $\frac{m}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}$ и $\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ соответственно продольной массой и поперечной массой.

9. По условию задачи $u_x = u_y = u_z = 0$, так что из закона сложения скоростей (1.54), (1.55) находим $u'_x = -v$, $u'_y = 0$, $u'_z = 0$. Итак, $u = 0$, $u' = v$.

Рассмотрим компоненты 4-вектора силы. Из формул (1.90) в данном случае получаем

$$K_1 = F_x; \quad K_2 = F_y; \quad K_3 = F_z;$$

$$K'_1 = \frac{F'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad K'_2 = \frac{F'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad K'_3 = \frac{F'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Из формулы (1.96), где $u = 0$, имеем $K_4 = 0$. Благодаря преобразованиям (1.35) с заменой N на K , находим

$$F'_x = F_x; \quad F'_y = F_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad F'_z = F_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

т. е. сила в направлении движения сохраняется, а в поперечном направлении изменяется путем умножения на $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$.

10. Магнитный диполь, как сочетание двух фиктивных «магнитных масс» $m' = -m$ и $m'' = m$ с длиной l (от m' до m''), создает на продолжении вектора l на расстоянии $r \gg l$ от центра диполя напряженность магнитного поля H , которая благодаря аналогии вектора H с вектором электрической индукции D (см. § 2-7) выражается, подобно электрической индукции, по закону Кулона, т. е. без учета проницаемости среды:

в системе СГС

$$H_{\Gamma} = \frac{m'_{\Gamma}}{\left(r_{\Gamma} + \frac{l_{\Gamma}}{2}\right)^2} + \frac{m''_{\Gamma}}{\left(r_{\Gamma} - \frac{l_{\Gamma}}{2}\right)^2} = \frac{l_{\Gamma} m_{\Gamma}}{r_{\Gamma}^3};$$

в системе СИ

$$H = \frac{m'}{4\pi \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} + \frac{m''}{4\pi \left(r - \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{lm}{4\pi r^3}.$$

Магнитный момент \mathbf{M} , по аналогии с электрическим дипольным моментом, выражается как произведение $m\mathbf{l}$. Итак,

$$H_{\Gamma} = \frac{M_{\Gamma}}{r_{\Gamma}^2}; \quad H = \frac{M}{4\pi r^2}.$$

Учитывая равенства (2.1a) и (2.12), находим

$$M_{\Gamma} = 10^3 M.$$

11. Из равенств (2.32), (2.33) и условия Лоренца (2.34) получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \Delta f - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

т. е. условие Лоренца для \mathbf{A}' и φ' выполняется лишь в тех случаях, когда функция f удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta f - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

12. Сравнивая равенства (2.30) с (1.29) и (1.30) и принимая во внимание общий для всех 4-векторов закон преобразования (1.35), замечаем, что данная задача решается так же, как и задача 3, но с заменой \mathbf{r} на \mathbf{j} и t на ρ . Таким образом, получаем

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{(\mathbf{j}\mathbf{v}) \mathbf{v}}{v^2} - \frac{\mathbf{v}\rho}{\gamma};$$

$$\rho' = \frac{\rho - \frac{\mathbf{j}\mathbf{v}}{c^2}}{\gamma}.$$

13. Разложим вектор \mathbf{E} на составляющие \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 , а вектор \mathbf{B} — на \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 , причем составляющие \mathbf{E}_1 и \mathbf{B}_1 параллельны вектору \mathbf{v} , а \mathbf{E}_2 и \mathbf{B}_2 перпендикулярны \mathbf{v} . Аналогичное разложение проведем в штрихованной системе.

Согласно формулам (2.50) напомним

$$\mathbf{B}'_1 = \mathbf{B}_1; \quad \mathbf{E}'_1 = \mathbf{E}_1;$$

$$\mathbf{B}'_2 = \frac{\mathbf{B}_2 - [\mathbf{v}\mathbf{E}_2] \cdot \frac{1}{c^2}}{\gamma};$$

$$\mathbf{E}'_2 = \frac{\mathbf{E}_2 + [\mathbf{v}\mathbf{B}_2]}{\gamma},$$

причем

$$\gamma = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Пользуясь выражениями

$$\mathbf{B}_1 = \frac{(\mathbf{B}\mathbf{v}) \mathbf{v}}{v^2}; \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B} - \mathbf{B}_1;$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{(\mathbf{E}\mathbf{v}) \mathbf{v}}{v^2}; \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_1,$$

находим

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \frac{(\mathbf{Bv})\mathbf{v}}{v^2} + \frac{1}{\gamma} \left\{ \mathbf{B} - \frac{(\mathbf{Bv})\mathbf{v}}{v^2} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{vE}] \right\} = \\ &= \frac{1}{\gamma} \left\{ \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{vE}] \right\} + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{(\mathbf{Bv})\mathbf{v}}{v^2}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}' = \frac{(\mathbf{Ev})\mathbf{v}}{v^2} + \frac{1}{\gamma} \left\{ \mathbf{E} - \frac{(\mathbf{Ev})\mathbf{v}}{v^2} + [\mathbf{vB}] \right\} = \frac{1}{\gamma} \{ \mathbf{E} + [\mathbf{vB}] \} + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{(\mathbf{Ev})\mathbf{v}}{v^2}.$$

При $v^2 \ll c^2$ можно принять $\gamma = 1$, следовательно,

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{vE}], \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{vB}].$$

14. Совместим начало прямоугольной декартовой системы координат с начальным положением частицы и плоскость xOy — с начальной скоростью, а ось x — с вектором \mathbf{B} . Тогда, согласно уравнению (2.86), напомним

$$\tau = \frac{c}{\epsilon_x} \ln \frac{\epsilon_x \gamma_0 t + \dot{x}_0 + \sqrt{(\epsilon_x \gamma_0 t + \dot{x}_0)^2 + c^2 - \dot{x}_0^2}}{c + \dot{x}_0},$$

где при любом знаке ϵ_x корень является величиной положительной. Подставляя это выражение в уравнения (2.83) ÷ (2.85), получим закон движения частицы в коллинеарных однородных постоянных электрическом и магнитном полях. Заметим, что частица будет двигаться по деформированной винтовой линии, ось которой параллельна полям, радиус убывает, а шаг растет с увеличением скорости частицы. При $t \rightarrow \infty$ и $\epsilon_x > 0$, заменяя ϵ_x на ϵ , имеем

$$\tau = \frac{c}{\epsilon} \ln \left(\frac{2\epsilon \gamma_0 t}{c + \dot{x}_0} \right).$$

Если же $\epsilon_x < 0$, то, заменяя ϵ_x на $-\epsilon$, при $t \rightarrow \infty$ находим

$$\tau = \frac{c}{\epsilon} \ln \left(\frac{2\epsilon \gamma_0 t}{c - \dot{x}_0} \right).$$

Поэтому при $t \rightarrow \infty$, согласно уравнениям (2.83) ÷ (2.85), получим следующий закон движения

$$\begin{aligned} x &= \pm ct; \\ y &= \frac{\dot{y}_0}{\Omega \gamma_0} \sin \left(\frac{\Omega c}{\epsilon} \ln \frac{2\epsilon \gamma_0 t}{c + \dot{x}_0} \right); \\ z &= \frac{\dot{y}_0}{\Omega \gamma_0} \left\{ \cos \left(\frac{\Omega c}{\epsilon} \ln \frac{2\epsilon \gamma_0 t}{c \pm \dot{x}_0} \right) - 1 \right\}, \end{aligned}$$

где знак \pm совпадает со знаком ϵ_x , причем $\epsilon = |\epsilon_x| = \frac{|q|}{m} E$ и $\Omega = \frac{qB}{m}$. Отсюда, поскольку $t \rightarrow \infty$, имеем $\dot{x} = \pm c$, $\dot{y} = z = 0$, т. е. частица движется вдоль оси x параллельно этой оси (при $\epsilon_x > 0$) или антипараллельно (при $\epsilon_x < 0$) со скоростью c .

Если частица движется в одном лишь электрическом поле, то, полагая в уравнениях (2.83) ÷ (2.86) $\Omega = 0$ и направляя

ось x вдоль электрического поля, т. е. заменяя ϵ_x на ϵ , получаем

$$x = \frac{c^2}{\epsilon\gamma_0} \left(\operatorname{ch} \frac{\epsilon\tau}{c} - 1 \right) + \frac{\dot{x}_0 c}{\epsilon\gamma_0} \operatorname{sh} \frac{\epsilon\tau}{c};$$

$$y = \frac{\dot{y}_0}{\gamma_0} \tau; \quad z = 0;$$

$$t = \frac{c}{\epsilon\gamma_0} \operatorname{sh} \frac{\epsilon\tau}{c} + \frac{\dot{x}_0}{\epsilon\gamma_0} \left(\operatorname{ch} \frac{\epsilon\tau}{c} - 1 \right).$$

(Из уравнений (2.87) ÷ (2.90) при $\Omega = 0$ получаются такие же соотношения, которым можно придать точно такую же форму путем поворота координатных осей).

Отсюда при $t \rightarrow \infty$ получим

$$x = ct; \quad y = \frac{c\dot{y}_0}{\epsilon y_0} \cdot \frac{2\epsilon\gamma_0 t}{c + \dot{x}_0}; \quad z = 0.$$

15. Вопрос, поставленный в задаче, позволяет (в предположении, что ответ будет выражаться небольшим целым числом) проводить вычисления с невысокой степенью точности.

Считая справедливым закон Стокса, на основании соотношений (3.5) и (3.7), пренебрегая δ по сравнению с σ , находим радиус капли

$$r = \sqrt{\frac{9\eta u_1}{2\sigma g}} = 9 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Как известно из кинетической теории газов, средняя длина свободного пробега молекул в воздухе при условиях, близких к нормальным, $\lambda \approx 10^{-7}$ м.

Сравнивая формулу (3.12) с прямой II на рис. 8, находим, что $B = 0,0006$, если r выражено в см, p — в см рт. ст. При тех же единицах длины и давления $A = \frac{B}{\lambda p} = 0,8$. Эта безразмерная величина такова же и в системе единиц СИ. Напряженность поля $E = \frac{\varphi}{d} = 5,4 \cdot 10^4$ в/м. Из формулы (3.10) находим $|q| = 5 \cdot 10^{-19}$ к. При этом $q < 0$, так как капля поднимается, когда поле направлено вниз. Итак, ввиду равенства (3.2) отношение заряда капли к заряду электрона равно 3 (капля несет 3 электрона).

16. Постоянное (хотя бы неоднородное) магнитное поле не может изменить величину скорости частицы, так как поле не совершает работы над частицей. Магнитное поле способно, однако, изменяя направление скорости частицы, помешать частице пройти от эмиттера до коллектора.

Каждый электрод считаем эквипотенциальной поверхностью (иначе понятие разности потенциалов φ_a между ними теряет смысл). Значения потенциала на других эквипотенциальных поверхностях образуют монотонную последовательность при переходе перпендикулярно таким поверхностям, от эмиттера к кол-

лектору (иначе вокруг поверхности с экстремумом потенциала существовала бы замкнутая поверхность, через которую проходил бы поток напряженности электрического поля, не равный нулю, в противоречии с электростатической теоремой Гаусса в отсутствие пространственного заряда). Обозначая через φ потенциал относительно эмиттера в некоторой точке, где скорость частицы равна u , на основании уравнения (3.87) имеем

$$mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \right) = -q\varphi.$$

При $q\varphi > 0$ получается $u < u_0$ (случай задерживающего поля). Следовательно, если $q\varphi_a > 0$, то движение частицы всюду нерелятивистское. Обратимся к случаю $q\varphi < 0$. Наибольшее u получается при наибольшем возможном $|\varphi|$, что имеет место у коллектора, когда $|\varphi| = |\varphi_a|$ и $u = u_0$. Поскольку начальная скорость нерелятивистская, т. е. в согласии с (3.19) $u_0^2 \ll c^2$, из предыдущего уравнения имеем

$$\frac{u_a^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{|q\varphi_a|}{mc^2}\right)^2}.$$

Отсюда $\frac{u_a^2}{c^2} \ll 1$ при необходимом и достаточном условии

$$\frac{2|q\varphi_a|}{mc^2} \ll 1.$$

Если частицей является электрон, то, заменяя q на $-e$ и пользуясь равенством (3.52), находим при $c = 3 \cdot 10^8$ м/сек

$$\varphi_a \ll 250\,000 \text{ в.}$$

17. Из II закона Ньютона (1.13) и выражения силы Лоренца (2.67) получаем, пользуясь обозначениями (2.71) и (2.72) с заменой q на $-e$, уравнения (3.20) ÷ (3.22), причем $\epsilon_x = \epsilon_z = 0$, так как $E_x = E_z = 0$. Поскольку пространственного заряда нет, напишем $E_y = -\frac{\varphi_a}{d}$ и $\epsilon_y = \frac{e\varphi_a}{md}$. Совместим начало координат с точкой вылета электрона из эмиттера. При этом начальные условия имеют вид

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0; \quad \dot{z}_0 = -u_0.$$

Поэтому в уравнениях (3.20) ÷ (3.22) $C_1 = 0$, $C_3 = -u_0$. Следовательно,

$$\dot{x} = 0; \quad \ddot{y} = \epsilon - \omega^2 \dot{z}; \quad \dot{z} = \omega y - u_0,$$

где $\epsilon = \epsilon_y = \frac{e\varphi_a}{md}$, $\omega = -\Omega = \frac{eB}{m}$ (циклотронная частота). Из последних двух уравнений получаем

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \epsilon + \omega u_0.$$

Отсюда путем интегрирования, в согласии с равенствами (3.25) ÷ (3.32), находим уравнение траектории в параметрическом виде

$$x = 0; \quad y = R \sin(\omega t + \psi) + \frac{\varepsilon + \omega u_0}{\omega^2};$$

$$z = R \cos(\omega t + \psi) - \frac{\varepsilon t}{\omega} - R \cos \psi.$$

При $t = 0$ имеем $y = y_0 = 0$ и $\ddot{y} = \varepsilon + \omega u_0$. Так как $\dot{y}_0 = 0$, электрон может вылететь из эмиттера лишь при $\varepsilon + \omega u_0 > 0$, т. е. при $\varphi_a > -Bu_0 d$. Из начальных условий ($y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$) находим

$$R = \frac{\varepsilon + \omega u_0}{\omega^2}.$$

Если бы электрическое поле неограниченно простиралось от эмиттера, то при условии $\dot{y} = 0$, $y \neq 0$ для наиболее удаленной от эмиттера точки траектории был бы получен результат

$$y = y_{\text{макс}} = \frac{2(\varepsilon + \omega u_0)}{\omega^2}.$$

Электрон не достигает коллектора при условии

$$y_{\text{макс}} < d,$$

откуда следует, что

$$\omega^2 - \frac{2\omega u_0}{d} - \frac{2\varepsilon}{d} > 0,$$

или

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) > 0,$$

где

$$\omega_{1,2} = \frac{u_0 \pm \sqrt{u_0^2 + 2\varepsilon d}}{d}.$$

Если $\varepsilon > 0$ (т. е. $\varphi_a > 0$), то $\omega_1 > \omega_2$ и электрон не достигает коллектора при необходимом и достаточном условии $\omega > \omega_1$ или $B > B_1$, где

$$B_1 = \frac{\sqrt{2em\varphi_a + m^2 u_0^2 + m u_0}}{ed}.$$

В частности, при $u_0 = 0$ получим $B_1 = B_{\text{кр}}$, где

$$B_{\text{кр}} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2m\varphi_a}{e}}$$

— критическая магнитная индукция в плоском магнетроне в случае нулевой начальной скорости электронов. Когда магнитная индукция больше критической, электроны не попадают на коллектор.

Если же $\varepsilon < 0$ (т. е. $\varphi_a < 0$) и $u_0^2 + 2\varepsilon d > 0$, то электрон не достигает коллектора в двух случаях: 1) при $\omega > \omega_1$, т. е.

$B > B_1$, причем B_1 указано выше; 2) при $\omega < \omega_2$, т. е. $B < B_2$, где

$$B_2 = \frac{mu_0 - \sqrt{2em\varphi_a + m^2u_0^2}}{ed}.$$

Существование в этом случае «критического снизу» значения магнитной индукции B_2 объясняется тем, что вблизи катода магнитное поле содействует продвижению электрона к коллектору, преодолевая противодействие электрического поля.

Существование «критического сверху» значения индукции B_1 (или $B_{кр}$ при $u_0 = 0$) обусловлено тем, что магнитное поле, искривляя траекторию электрона, приводит к повороту его от точки, где $y = y_{\max}$, обратно к эмиттеру.

18. Внутри дуантов циклотрона электрическое поле отсутствует и протон движется по окружности радиуса R в виде (3.38) (с заменой $|q|$ на e) с угловой скоростью $\omega = \frac{eB}{m} = 9,6 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$. Линейная скорость достигает максимальной величины $u = \omega R = 4,8 \cdot 10^7 \text{ м/сек}$, причем кинетическая энергия равна $W = \frac{mu^2}{2} = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ дж}$, или $W = 1,2 \cdot 10^7 \text{ эв}$ ($1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ дж}$). Проходя между дуантами, протон приобретает каждый раз энергию $e \cdot \Delta\varphi = 10^4 \text{ эв}$. Число пробегаемых полуокружностей равно $n = \frac{W}{e\Delta\varphi} = 1,2 \cdot 10^3$. Время пробега одной полуокружности будет $\tau = \frac{\pi}{\omega}$, а время пробега внутри дуантов

$$t_1 = n\tau = 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ сек}.$$

Время пробега протона между дуантами t_2 вычисляется как продолжительность движения его под действием электрического поля с напряженностью $E = \frac{\Delta\varphi}{d} = 10^6 \text{ в/м}$ на пути $l = nd = 12 \text{ м}$.

Это движение происходит с постоянным ускорением $a = \frac{eE}{m} = 9,6 \cdot 10^{13} \text{ м/сек}^2$ и занимает промежуток времени

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ сек}.$$

Таким образом, общая продолжительность движения протона в циклотроне равна

$$t = t_1 + t_2 \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ сек}.$$

19. Проведем вычисления с точностью порядка 1%. В предположении справедливости формулы (1.74), из соотношения (3.49)

с заменой m на $m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ находим

$$\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{e l B}{2 m \tau} = 4 \cdot 10^8 \text{ м/сек},$$

откуда $u = 2,4 \cdot 10^8$ м/сек. Изменение скорости u под действием ускоряющего поля найдем из формулы (3.87) при $q = -e$ и $\Delta\varphi = 5000$ в.

При этом величина $|q\Delta\varphi| \approx 10^{-18}$ дж весьма мала по сравнению с величиной $mc^2 \left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^{-1} \approx 10^{-13}$ дж. Поэтому справедлива формула (3.88), откуда $\Delta u = 8 \cdot 10^5$ м/сек, и на основании соотношения (3.49) с заменой m на m' находим

$$\Delta l = \frac{2\pi m \Delta u}{eB \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Итак, опыт подтверждает теорию с точностью приблизительно до 1%.
 20. Заряд электрона, заключенный внутри сферы радиуса $r < R$, где R — радиус его, равен $|q| = \frac{er^3}{R^3}$. В согласии с (4.38)

по электростатической теореме Гаусса напишем $\oint E_n dS = \frac{|q|}{\epsilon_0}$.
 Благодаря сферической симметрии электрона имеем внутри него

$$E_1 = |E_n| = \frac{er^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3};$$

вне электрона

$$E_2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Энергия поля электрона, согласно формуле (4.62), равна

$$W = W_0 = \frac{\epsilon_0}{2} \left\{ \int_0^R E_1^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty E_2^2 \cdot 4\pi r^2 dr \right\} = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R},$$

откуда, в силу равенств (1.81) и (2.7), находим

$$m = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} \cdot 10^{-7} \text{ кг}; \quad R = \frac{3}{5} \frac{e^2}{m} \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

21. Из условия

$$\int_0^R |\rho| \cdot 4\pi r^2 dr = e$$

получаем

$$|\rho_0| = \frac{3e}{\pi R}.$$

Напряженность электростатического поля внутри электрона, в соответствии с теоремой Гаусса (аналогично решению задачи 20), равна

$$E_1 = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r |\rho| r^2 dr = \frac{er}{\pi\epsilon_0 R^3} \left(1 - \frac{3r}{4R} \right),$$

а вне электрона

$$E_2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Энергия поля электрона ввиду (4.62) равна

$$W = W_0 = \frac{\epsilon_0}{2} \left\{ \int_0^R E_1^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty E_2^2 \cdot 4\pi r^2 dr \right\} = \frac{13e^2}{70\pi\epsilon_0 R}.$$

Пользуясь формулами (1.81) и (2.7), получаем

$$m = \frac{26}{35} \frac{e^2}{R} \cdot 10^{-7}; \quad R = \frac{26}{35} \frac{e^2}{m} \cdot 10^{-7}.$$

22. Воспользуемся формулой (4.36), понимая под ρ_m (индекс «м» в дальнейшем будем опускать) среднюю плотность заряда электрона и считая электрон шариком с радиусом, равным классическому значению (4.11):

$$|\rho| = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 1,7 \cdot 10^{24} \text{ } \kappa/\text{м}^3.$$

Для отыскания E и H заметим, что вектор Пойнтинга, определяемый формулой (4.64), направлен вдоль луча, а векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} , перпендикулярные друг другу, перпендикулярны лучу. Пользуясь тем, что величина вектора Пойнтинга известна из условия задачи, напишем

$$N = EH = 1,4 \cdot 10^3 \text{ } \text{вт}/\text{м}^2,$$

а из равенств (4.85), (2.7) и (2.16) имеем

$$E = 120\pi H,$$

так что

$$H = 1,9 \text{ } \text{а}/\text{м}; \quad E = 730 \text{ } \text{в}/\text{м}.$$

Кинетическая энергия электрона по условию равна

$$\frac{mu^2}{2} = 1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ } \text{дж},$$

откуда скорость электрона $u = 6 \cdot 10^8 \text{ } \text{м}/\text{сек}.$

Вектор \mathbf{u} совпадает с направлением распространения волны и потому образует правовинтовую систему с векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} . Следовательно, векторное произведение $[\mathbf{uH}]$ направлено противоположно \mathbf{E} , поэтому из уравнения (4.36) находим

$$f = |\rho| \cdot |E - uH| = 1,9 \cdot 10^{30} \text{ } \text{н}/\text{м}^3.$$

23. При $E_m = 2 \text{ } \text{кв}/\text{м}$ из равенств (4.85), (2.7) и (2.16) находим $H_m = 5,3 \text{ } \text{а}/\text{м}$, причем векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны и \mathbf{H} меняется по закону синусоиды, совпадая по фазе с \mathbf{E} . Так как среднее значение квадрата синуса равно $1/2$, то

усредненная абсолютная величина вектора Пойнтинга, как видно из формулы (4.64), равна

$$\bar{N} = \frac{E_m H_m}{2} = 5,3 \cdot 10^3 \text{ вт/м}^2;$$

усредненное световое давление на зачерненное крылышко, как видно из соотношения (4.93), при $R=0$ равно

$$\bar{p} = \frac{\bar{N}}{c} = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ н/м}^2,$$

а средняя сила светового давления на крылышко будет

$$\bar{F} = \bar{p}S = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ н} = 0,35 \text{ нн} = 3,5 \cdot 10^{-8} \text{ дин}.$$

24. Если электромагнитная волна падает под углом α к поверхности, то за время dt фронт волны перемещается в направлении, перпендикулярном поверхности, на расстояние $c \cdot \cos \alpha \cdot dt$. Следовательно, на поверхность S падает под углом α электромагнитный импульс, равный $gSc \cos \alpha dt$ или $\omega S \cos \alpha dt$, так как на основании формулы (4.91) можно заменить g на ω/c . При коэффициенте отражения R отраженный импульс равен по абсолютной величине $R\omega S \cos \alpha dt$, а угол отражения такой же, как и угол падения; поэтому увеличение электромагнитного импульса в направлении внешней нормали к поверхности равно $(1 + R) \times \omega S \cos^2 \alpha dt$.

Тогда, как видно из обобщенного закона сохранения импульса (4.80), возникает механический импульс такой же величины, направленный противоположно нормали к поверхности, т. е.

$$dQ = (1 + R) \omega S \cos^2 \alpha dt,$$

так что разделив абсолютную величину силы, равную dQ/dt , на площадь поверхности S , получим давление на эту поверхность

$$p = \frac{dQ}{Sdt} = (1 + R) \omega \cos^2 \alpha.$$

25. По условию задачи вычисления можно проводить приближенно, пренебрегая в формуле (5.20) членом $(\mathbf{ru})/c$. Тогда

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{q\mu_0}{4\pi r^3} \left[\mathbf{r} \left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right] \right].$$

Зависящий от ускорения в этом равенстве член, обратно пропорциональный первой степени r , преобладает в волновой зоне по сравнению с членом \mathbf{E}_0 , обратно пропорциональным r^2 .

Граница волновой зоны лежит на расстоянии r , удовлетворяющем условию

$$E_0 < \frac{q\mu_0}{4\pi r^3} \left| \left[\mathbf{r} \left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right] \right] \right|.$$

При равномерном движении по окружности $\left| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right| = \frac{u^2}{R}$ и справедливо (по порядку величины) равенство

$$\left| \left[\mathbf{r} \left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right] \right] \right| \approx \frac{r^2 u^2}{R}.$$

Из неравенства для E_0 , вследствие формул (5.19) и (5.9) при $\frac{u}{c} \ll 1$, получаем $r > r_1$, где $r_1 \approx \frac{R}{\varepsilon_0 \mu_0 u^2} = \frac{Rc^2}{u^2}$.

Итак, волновая зона начинается на расстоянии по порядку величины, равном r_1 , т. е. на расстоянии $r \approx \frac{Rc^2}{u^2}$. Этот результат подтверждается, если рассмотреть выражение напряженности магнитного поля.

26. Совместим начало штрихованной системы координат x', y', z' с зарядом и направим ось x' этой системы вдоль вектора \mathbf{u} . В этой системе, как видно из § 5-1, справедлив закон Кулона (2.5) с заменой ε_a на ε_0 и r на r' , следовательно, имеем

$$\mathbf{E}' = \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},$$

откуда

$$\frac{E'_x}{x'} = \frac{E'_y}{y'} = \frac{E'_z}{z'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}},$$

причем компоненты магнитной индукции $B'_x = B'_y = B'_z = 0$.

Совместим начало нештрихованной системы координат x, y, z с положением заряда в момент t и направим ось x вдоль вектора \mathbf{u} . Напишем формулы преобразования поля, аналогичные (2.50), но соответствующие обратному переходу от штрихованной системы к нештрихованной, отличающиеся от (2.50) взаимной перестановкой штрихованных и нештрихованных величин и заменой u на $-u$. Заметим также, что длина отрезка в направлении вектора \mathbf{u} изменяется под влиянием скорости u так, что она равна длине в состоянии покоя, умноженной на $\sqrt{1 - \beta^2}$ ($\beta = \frac{u}{c}$), а длина отрезка в поперечном направлении не меняется, т. е. $x = x' \sqrt{1 - \beta^2}$; $y = y'$; $z = z'$. В итоге получаем

$$E_x = \frac{qx(1 - \beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 \alpha^{3/2}}; \quad E_y = \frac{qy(1 - \beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 \alpha^{3/2}};$$

$$E_z = \frac{qz(1 - \beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 \alpha^{3/2}};$$

$$B_x = 0; \quad B_y = -\frac{quz(1 - \beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \alpha^{3/2}};$$

$$B_z = \frac{quy(1 - \beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \alpha^{3/2}};$$

где $\alpha = x^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)$. Полученные результаты совпадают с формулами (5.23) и (5.24), если заметить, что

$$\sin^2 \vartheta = \frac{y^2 + z^2}{r_0^2} = \frac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\epsilon_0 c^2 = \frac{1}{\mu_0}; \quad H = \frac{B}{\mu_0}.$$

27. Скорость электрона является нерелятивистской, следовательно, справедливо выражение, полученное в конце § 5-2,

$$H = \frac{eu \sin \vartheta}{4\pi r_0^2}.$$

Отсюда наибольшее значение H при фиксированном r_0 равно

$$H_m = \frac{eu}{4\pi r_0^2}.$$

В силу соотношения (5.24) максимальная напряженность магнитного поля существует при том же r_0 , при котором напряженность электрического поля, сферически симметричного в данном случае, достигает максимального значения.

Как легко видеть (см. задачу 20), в случае равномерного распределения заряда по объему электрона максимальное значение E получается на периферии электрона, т. е. при

$$r_0 = R = \frac{3}{5} \frac{e}{m} \cdot 10^{-7}.$$

При этом максимальное значение напряженности магнитного поля равно

$$H_{\text{макс}} = (H_m)_{r_0=R} = \frac{25m^2 u}{36\pi e^3} \cdot 10^{14} = 5 \cdot 10^{13} \text{ а/м}.$$

28. В согласии с формулами (2.67), (4.24), (2.37) и (5.18) при $u \ll c$ сила, действующая на заряженную частицу со стороны магнитного поля, пренебрежимо мала по сравнению с силой действия электрического поля.

Пользуясь условием $u \ll c$, получаем из равенства (5.9) $s = r$ и из формулы (5.20) находим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} [\mathbf{r} [\mathbf{r} \mathbf{u}]],$$

причем \mathbf{E}_0 — кулоновское поле. Эта формула определяет поле, создаваемое каждым элементом заряда частицы dq , если заменить q на dq .

Рассмотрим взаимодействие двух элементов заряда частицы dq_1 и dq_2 . Найдем сумму сил, с которыми первый элемент действует на второй и второй на первый. Составляющие этих сил, обусловленные кулоновским полем \mathbf{E}_0 , взаимно компенсируются, т. е. не приводят к проявлению силы действия частицы на себя.

Составляющая напряженности электрического поля, зависящая от ускорения, приводит к тому, что на элемент dq_2 действует со стороны элемента dq_1 сила

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 dq_1 dq_2}{4\pi r^3} \{ \mathbf{r} (\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}}) - \dot{\mathbf{u}} r^2 \}.$$

Полная сила самодействия получается отсюда путем интегрирования по всем элементам заряда. Вклады составляющих \mathbf{r} , перпендикулярных к $\dot{\mathbf{u}}$, в интеграл взаимно компенсируются, поскольку частица сферически симметрична. Поэтому при интегрировании вместо $d\mathbf{F}_{12}$ можно ввести в вычисления силу

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0 dq_1 dq_2}{4\pi r} (\cos^2 \vartheta - 1) \dot{\mathbf{u}},$$

где ϑ — угол между \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{u}}$.

С другой стороны, потенциал, созданный зарядом dq_1 на расстоянии r без учета запаздывания, выражается согласно закону Кулона в виде

$$d\varphi = \frac{dq_1}{4\pi\epsilon_0 r},$$

и энергия взаимодействия всех элементов заряда, т. е. энергия электростатического поля частицы, будет равна

$$W = \frac{1}{2} \int_V \frac{dq_1 dq_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

(здесь V — объем частицы).

Сила самодействия частицы будет $\mathbf{F} = \int_V d\mathbf{F} = 2\mu_0\epsilon_0 W (\overline{\cos^2 \vartheta} - 1) \dot{\mathbf{u}}$,

причем, пользуясь выражением элемента телесного угла в сферических координатах ($d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi$), легко найти среднее значение $\overline{\cos^2 \vartheta}$ по всем направлениям

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{\int \cos^2 \vartheta d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{1}{3}.$$

Вследствие равенства (2.37) выражение силы самодействия приводится к виду

$$\mathbf{F} = -\frac{4}{3} \frac{W}{c^2} \dot{\mathbf{u}},$$

или

$$\mathbf{F} = -m \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \text{где } m = \frac{4}{3} \frac{W}{c^2}.$$

29. Формула (5.31) выражает общую мощность излучения во всех направлениях. Выражение для элемента телесного угла $d\Omega$ в сферических координатах имеет вид $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi$. Поэтому интенсивность излучения, как мощность излучения в

пределах единицы телесного угла (энергетическая сила света), равняется

$$I = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{dW_n}{dt} \right) = \frac{v_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \vartheta.$$

30. Магнитная индукция B на орбите электрона в бетатроне связана с радиусом орбиты R соотношением (2.99) (с заменой $|q|$ на e). Так как импульс $p = m'u$, то $p = eBR$. Из сравнения с формулой (5.39) получаем характерное для бетатрона условие

$$\bar{B} = 2B.$$

При $B = 0,5$ тл находим $\bar{B} = 1$ тл. Пользуясь значением e (3.2), имеем $p = m'u = 8 \cdot 10^{-20}$ кгм/сек, откуда для произведения массы покоя m на скорость получается результат $mu = 8 \cdot 10^{-20} \times \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$. Подставляя m (3.53), находим $u = c(1 - 6 \cdot 10^{-6})$. В этом ультрарелятивистском случае, в силу формулы (1.87), имеем с достаточной точностью $W = pc = 2,4 \cdot 10^{-11}$ дж = $= 1,5 \cdot 10^2$ Мэв, тогда как энергия покоя электрона $W_0 = mc^2 = = 0,5$ Мэв. По формуле (5.37) с заменой q на e , подставляя ϵ_0 (2.7), получаем $\frac{dW_n}{dt} = 4 \cdot 10^{-9}$ вт.

Поскольку скорость электрона почти равна c , его угловая скорость $\omega \approx \frac{c}{R} = 3 \cdot 10^8$ сек $^{-1}$, а угловая частота, на которую приходится максимум излучения, по формуле (5.40) равна $\omega_k = 5 \cdot 10^{15}$ сек $^{-1}$. При этом длина волны

$$\lambda_k = \frac{2\pi c}{\omega_k} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,4 \text{ мкм},$$

что соответствует фиолетовой границе видимой части спектра.

31. Предположим для простоты, что относительное изменение энергии электрона за один оборот вокруг атомного ядра настолько мало, что при вычислении энергии излучения электрон можно считать равномерно движущимся по окружности¹. Электрон атома водорода и его ядро рассматриваются как точечные заряды $-e$ и $+e$.

Центростремительной силой, действующей на электрон, является сила кулоновского притяжения его к ядру. Если r — расстояние электрона от ядра, то

$$\frac{mu^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Поэтому потенциальная энергия электрона, равная $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, по абсолютной величине вдвое больше, чем нерелятивистское

¹ Если результаты вычислений будут противоречить этому предположению, то расчет должен быть уточнен.

значение кинетической энергии $\frac{mu^2}{2}$, а полная энергия в нерелятивистском случае

$$W = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}, \text{ или } W = -\frac{mu^2}{2}.$$

Излучение энергии электроном приводит к уменьшению W , следовательно, уменьшается r и растет u . Ограничимся при расчете областью нерелятивистского движения от начального радиуса орбиты электрона в атоме водорода $R = 5 \cdot 10^{-11}$ м до значения радиуса $r = r_1$, соответствующего скорости $u = u_1 = 0,1c = 3 \cdot 10^7$ м/сек. Когда движение остается нерелятивистским, имеем

$$r_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mu_1^2} = 2,8 \cdot 10^{-14} \text{ м},$$

что превышает радиус атомного ядра, равный, как показали уже опыты Резерфорда, около 10^{-15} м.

На основании формулы (5.32) при $a = \frac{u^2}{r}$, с заменой dW_u на $-dW$ и q на $-e$, имеем

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\mu_0 e^2 u^4}{6\pi cr^2} = -\frac{128\pi\mu_0 \epsilon_0^2 W^4}{3cm^2 e^2},$$

откуда, в силу равенства (2.37),

$$W^{-3} = W_0^{-3} + \frac{128\pi\epsilon_0}{c^3 m^2 e^2} t,$$

где $W_0 = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$.

Время τ , в течение которого расстояние электрона от центра атома уменьшается от R до r_1 , найдем из условия, что при $t = \tau$ получается $r = r_1$ и $W = W_1 = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1}$. Следовательно,

$$\tau = \frac{4\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m^2}{e^4} (R^3 - r_1^3) = \frac{m^2 (R^3 - r_1^3)}{4ce^4} \cdot 10^{-14} = 1,3 \cdot 10^{-11} \text{ сек.}$$

Это значит, что, по классической электронной теории, радиус атома должен был бы уменьшиться от R до r_1 , т. е. почти в 2000 раз, за время порядка 10^{-11} сек, в очевидном противоречии с действительностью. Сравним величину τ с временем одного оборота электрона вокруг ядра. Так как $T = \frac{2\pi r}{u}$, причем $u = \frac{e}{2\sqrt{\pi\epsilon_0 mr}}$, то $T = T_0 (r/R)^{3/2}$, где $T_0 = \frac{4\pi\sqrt{\pi\epsilon_0 m}}{e} R^{3/2} = 1,4 \cdot 10^{-16}$ сек. Но $r \leq R$, следовательно, $T \leq T_0$, и в итоге неравенство $T \ll \tau$ является весьма сильным, т. е. электрон, приближаясь к ядру, действительно совершает каждый оборот почти точно по окружности радиуса R с постоянной скоростью u .

32. Угловая скорость электрона $\omega = \frac{u}{R}$, вектор $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}}$ направ-

лен к центру и $a = u\omega$, вектор $\dot{\mathbf{a}}$ направлен противоположно \mathbf{u} и $|\dot{\mathbf{a}}| = a\omega = \frac{u^3}{R^2}$. Как видно из соотношения (5.42) с заменой q на $-e$, сила лучистого трения направлена противоположно \mathbf{u} и равна по абсолютной величине

$$F_p = \frac{\mu_0 e^2 u^3}{6\pi c R^2}.$$

33. Из формул (6.1), (6.4) и (6.29) имеем

$$F_d = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 5,8 \cdot 10^{11} \text{ в/м.}$$

Напряженность действующего поля обусловлена зарядами, расположенными вне поля (а не точечным зарядом e , расположенным на расстоянии R , как может показаться по виду полученной формулы).

34. Резонансная угловая частота колебаний на основании соотношений (5.50), (6.4) и (6.29) равна ¹

$$\omega_0 = \frac{e}{d \sqrt{\pi\epsilon_0 m d \cdot \frac{1}{2}}} = 4,5 \cdot 10^{16} \text{ сек}^{-1}.$$

Для справедливости упрощенного выражения (6.78) должно выполняться условие (6.76), откуда, заменяя N на $\frac{p}{kT}$, находим

$$p \ll 2 \cdot 10^{-23} \cdot |2 \cdot 10^{33} - \omega^2| \text{ н/м}^2,$$

или

$$p \ll 2 \cdot 10^{-28} |2 \cdot 10^{33} - \omega^2| \text{ атм.}$$

35. Из уравнений (6.3) и (6.58) и соотношения $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$ находим

$$\alpha = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma)}.$$

Как легко видеть из выражения ω_0 в предыдущей задаче, с заменой d на $2R$, имеем

$$\omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}.$$

Величина γ имеет вид (5.51). Таким образом, поляризуемость атома α выражается через угловую частоту ω и радиус R атома.

¹ Тот же результат получается, если считать, что электрон движется вокруг ядра (см. задачу 31, причем $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$).

Если, в частности, $\omega = 0$, то α сводится к статической поляризуемости. В этом случае

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3,$$

что находится в согласии с формулой (6.29).

36. Из формулы (6.84), считая $N_i \approx N$ и $\omega^2 \gg \omega_i^2$ и пренебрегая вкладом ионов, находим

$$N = \frac{2\epsilon_0 \omega^2 m (1-n)}{e^2} = \frac{2\pi \cdot 10^7 m (1-n)}{e^2 \lambda^2} = 2 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}.$$

37. Из формулы (7.16) для ларморовой частоты получаем $\omega_L = 4,2 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$. Условие (7.19), подтверждающее справедливость теоремы Лармора, выполняется, так как при обычных размерах атома величина ω_0 будет порядка 10^{16} сек^{-1} (см. решение задачи 34). Если же учитывать, что электроны могут быть и внутри атома, то для них величина ω_0 должна быть еще больше.

На основании теоремы Лармора дополнительное движение электронов, обусловленное магнитным полем, представляет собой прецессию электронных орбит вокруг \mathbf{B} с угловой частотой ω_L . Соответствующая длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9 \text{ мм}.$$

38. Кроме излучения с угловой частотой $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, будут существовать излучения с угловыми частотами $\omega - \omega_L = \frac{2\pi c}{\lambda_1}$ и $\omega + \omega_L = \frac{2\pi c}{\lambda_2}$, где $\omega_L = \frac{eB}{2m} = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$.

Поскольку $\omega_L \ll \omega$, можно считать, что благодаря равенству $d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega$ справедливы соотношения

$$\lambda_1 - \lambda = \lambda - \lambda_2 = \frac{2\pi c}{\omega^2} \omega_L = \frac{\lambda^2 \omega_L}{2\pi c} = 4,6 \cdot 10^{-11} \text{ м} \approx 0,5 \text{ \AA}.$$

Излучение с длиной волны $\lambda_1 = 6439,2 \text{ \AA}$ в направлении, перпендикулярном магнитному полю, будет линейно поляризованным, а в направлении вдоль магнитного поля — с левой круговой поляризацией.

Излучение с длиной волны $\lambda_2 = 6438,2 \text{ \AA}$ в направлении, перпендикулярном \mathbf{B} , является линейно поляризованным, а в направлении вдоль \mathbf{B} имеет правую круговую поляризацию.

Несмещенная линия $\lambda = 6438,7 \text{ \AA}$ обнаруживается только при наблюдении перпендикулярно магнитному полю и обладает линейной поляризацией.

Плоскость поляризации (перпендикулярная вектору напряженности электрического поля), если наблюдение производится в направлении, перпендикулярном магнитному полю, парал-

лельна магнитному полю и направлению наблюдения в случае смещенных линий (λ_1 и λ_2) и перпендикулярна магнитному полю для несмещенной линии (λ).

39. Из формулы (7.42) с заменой N числом $N'_A = 10^3 N_A$, где N_A выражено в виде (3.1), при $Z=2$ находим средний квадрат расстояния электронов от ядра

$$\tilde{R}^2 = \frac{6m \cdot 8,5 \cdot 10^{-9}}{\mu_0 e^2 N'_A Z} \approx 1,2 \cdot 10^{21} \text{ м}^2.$$

При незначительном разбросе значений R можно пренебрегать разницей между средним квадратом расстояния электронов от ядра и квадратом среднего расстояния. При этом

$$\tilde{R} = \sqrt{\tilde{R}^2} = 3,5 \cdot 10^{11} \text{ м}.$$

40. Магнитное поле нарушает равновероятность всех направлений магнитных моментов молекул так, что в функции распределения добавляется множитель (7.49). При этом

$$\frac{N'}{N} = \frac{\int_{\vartheta=0}^{\pi/6} \int_{\psi=0}^{2\pi} e^{\frac{MB \cos \vartheta}{kT}} \sin \vartheta d\vartheta d\psi}{\int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} e^{\frac{MB \cos \vartheta}{kT}} \sin \vartheta d\vartheta d\psi},$$

где использовано выражение элемента телесного угла в виде $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi$. После вычисления интегралов получаем

$$\frac{N'}{N} = \frac{e^{\frac{MB}{kT}} - e^{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{MB}{kT}}}{e^{\frac{MB}{kT}} - e^{-\frac{MB}{kT}}},$$

причем $\frac{MB}{kT} = 6,72$. Таким образом, $N' = 0,6 N = 6 \cdot 10^9$. Повышение температуры и уменьшение магнитной индукции приводят к снижению N' ; если $T \rightarrow \infty$ или $B \rightarrow 0$, то

$$\frac{N'}{N} \rightarrow \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = 0,07.$$

41. Магнитная индукция действующего поля B_d равна (с высокой степенью точности) индукции молекулярного поля βI при условии (7.83). Из формулы (7.97) при $\theta \approx 10^{30} \text{ К}$, принимая $N \approx 10^{29} \text{ м}^{-3}$ как число атомов в единице объема [см. (6.25)], находим $\beta \approx 10^{-3}$, и неравенство (7.83) принимает вид

$$B \ll 10^{-3} I.$$

Для выполнения этого неравенства необходимо условие

$$B \ll 10^{-3} I_H.$$

т. е.

$$B \ll 2 \cdot 10^3 \text{ тл.}$$

Равенство $B_d = \beta I$ по условию справедливо с погрешностью не более 1%, т. е. при $B < 0,01 \cdot 2 \cdot 10^3$, или $B < 20 \text{ тл.}$

42. Вектор напряженности электрического поля Холла, образуя правинтовую систему с векторами \mathbf{j} и \mathbf{B} (см. рис. 61), обуславливает отрицательный знак величины $\Delta\varphi$ в формуле (8.16), так что R из формулы (8.12) будет равно

$$R = \frac{\Delta\varphi \cdot d}{BJ} = - \frac{10^{-5} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 50} = - 10^{-10} \text{ м}^3/\kappa,$$

а из формулы (8.17) или (8.36) находим

$$n = 6,2 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Отрицательный знак постоянной Холла R означает, что носителями тока являются частицы с зарядом $-e$, т. е. электроны.

43. Из формулы (8.77) при $a \approx 10^9$ и $Z = 1$ находим $\tau = 10^{-2} \text{ сек.}$ Поэтому из формулы (8.11) получаем $\gamma \approx 10^9 \text{ м}^{-1} \text{ ом}^{-1}$ (что почти в 20 раз больше удельной проводимости меди при комнатной температуре). При $\lambda = 1 \text{ мм}$ имеем $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 2 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$. Таким образом, $\omega\tau \gg 1$, следовательно, справедлива формула (8.79), причем, в силу равенства (8.80), ленгмюрова частота $\omega_0 = 2 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$. Итак, $\varepsilon = 0,99$.

44. Если $B = 1,1 B_0$, то из соотношения (8.95) $r^2 = \frac{r_0^2}{1,1}$; следовательно, $r = 0,95 r_0$, т. е. радиус спирали уменьшается на 5%. Отношение угловых скоростей находим из формулы (8.93)

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{B}{B_0} = 1,1.$$

Обратное отношение периодов обращения равно

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1,1}.$$

Если u_0 и u — скорости частицы в направлении магнитного поля соответственно при магнитной индукции B_0 и B , то отношение шагов спирали будет равно

$$\frac{h}{h_0} = \frac{uT}{u_0T_0} = \left(1 + \frac{\Delta u}{u_0}\right) \frac{T}{T_0},$$

где $\Delta u = u - u_0$. Для определения Δu заменим в формуле (8.91) dA на $\Delta\left(\frac{mu^2}{2}\right) = mu\Delta u$ и dB на $\Delta B = B - B_0$. Тогда $\Delta u = -\frac{|q|}{2m} \cdot \frac{u_1}{u_0} r_0 (B - B_0)$, причем $r_0 = \frac{u_0}{\omega_0}$, а $\omega_0 = \frac{|q|Bv}{m}$. Следовательно,

$$\frac{\Delta u}{u_0} = -\frac{0,1u_1}{2u_0}.$$

Но $\frac{u_1}{u_0} = \operatorname{tg} \alpha = 1$, и значит

$$\frac{h}{h_0} = 0,86.$$

45. По формуле (8.97) $\mathcal{E} = 2000$ в.

Из формул (8.99) и (8.98) находим мощность и внутреннее сопротивление МГДГ

$$P = \frac{4 \cdot 10^8 R}{(R_0 + R)^2}, \quad R_0 = 0,01 \text{ ом}.$$

Если R меняется, то $P = P_{\text{макс}}$ при $R = R_0 = 0,01$ ом, т. е.
 $P_{\text{макс}} = 10^8$ вт = 10^5 квт.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Соотношения численных значений величин в системах СГС и СИ

Величины	Соотношения численных значений
Векторный потенциал	$A_{\Gamma} = 10^9 A$
Диэлектрическая проницаемость	$\epsilon_{\Gamma} = 4\pi c_{\Gamma}^2 \cdot 10^{-11} \epsilon$
Длина	$l_{\Gamma} = 10^3 l$
Количество электричества	$q_{\Gamma} = c_{\Gamma} \cdot 10^{-1} q$
Магнитная индукция	$B_{\Gamma} = 10^4 B$
Магнитная проницаемость	$\mu_{\Gamma} = (4\pi)^{-1} \cdot 10^7 \mu$
Магнитный момент	$M_{\Gamma} = 10^3 M$
Масса	$m_{\Gamma} = 10^3 m$
Намагниченность	$I_{\Gamma} = 10^{-3} I$
Напряженность магнитного поля	$H_{\Gamma} = 4\pi \cdot 10^{-3} H$
Напряженность электрического поля	$E_{\Gamma} = c_{\Gamma}^{-1} \cdot 10^6 E$
Объемная плотность заряда	$\rho_{\Gamma} = c_{\Gamma} \cdot 10^{-7} \rho$
Плотность потока энергии	$N_{\Gamma} = 10^8 N$
Плотность тока	$j_{\Gamma} = c_{\Gamma} \cdot 10^{-5} j$
Плотность энергии	$w_{\Gamma} = 10 w$
Поляризация	$P_{\Gamma} = c_{\Gamma} \cdot 10^{-5} P$
Скалярный потенциал	$\varphi_{\Gamma} = c^{-1} \cdot 10^8 \varphi$
Ток	$J_{\Gamma} = c_{\Gamma} \cdot 10^{-1} J$
Электрическая индукция	$D_{\Gamma} = 4\pi c_{\Gamma} \cdot 10^{-5} D$
Электрический дипольный момент	$p_{\Gamma} = c_{\Gamma} \cdot 10 p$

Примечания. 1. В системе СГС буквенные обозначения величин даны с индексом «Г».

2. Скорость света в вакууме в системе СГС имеет численное значение $c_{\Gamma} \approx 2,998 \times 10^{10}$ см/сек $\approx 3 \cdot 10^{10}$ см/сек.

Дельта-функция

Дельта-функция введена в математическую физику Дираком в 1926 г. В одномерном случае δ -функция определяется равенствами

$$\delta(x - x_0) = 0 \text{ при } x \neq x_0;$$

$$\delta(x - x_0) = \infty \text{ при } x = x_0;$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) dx = 1 \text{ при } x_1 < x_0 < x_2.$$

Это определение выходит за рамки обычных в математике понятий функции и интеграла.

Если $f(x)$ — непрерывная функция, то при $x_1 < x_0 < x_2$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Для трехмерной δ -функции справедливы аналогичные равенства

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \text{ при } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0;$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \infty \text{ при } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0.$$

Если объем V_0 содержит точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ и $f(\mathbf{r})$ — непрерывная функция, то

$$\int_{V_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = 1; \quad \int_{V_0} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = f(\mathbf{r}_0).$$

В частности, δ -функция описывает объемную плотность точечного заряда q и плотность тока \mathbf{j} , обусловленного движением такого заряда. Если заряд q находится в точке, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, и движется со скоростью \mathbf{u} , то

$$\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0);$$

$$\int_{V_0} \rho dV = q;$$

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{u} = q\mathbf{u}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Лоренц. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. М., Гостехиздат, 1956.
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т. 2 «Теория поля». М., Физматгиз, 1960.
3. Я. И. Френкель. Собрание избранных трудов. Т. I. М., Изд-во АН СССР, 1956.
4. Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов. Классическая теория поля. М., Гостехиздат, 1949.
5. Р. Беккер. Теория электричества. Т. II. «Электронная теория». М., Гостехиздат, 1941.
6. И. Е. Тамм. Основы теории электричества. М., «Наука», 1966.
7. А. С. Компанеев. Теоретическая физика. М., Гостехиздат, 1957.
8. Ю. Б. Румер, М. С. Рывкин. Теория относительности. М., Учпедгиз, 1960.
9. Д. Бом. Специальная теория относительности. М., «Мир», 1967.
10. С. В. Измайлов. Курс электродинамики. М., Учпедгиз, 1962.
11. В. Г. Левич. Курс теоретической физики. М., Физматгиз, 1962.
12. В. Новаку. Введение в электродинамику. М., ИЛ, 1963.
13. В. Пановский и М. Филипс. Классическая электродинамика. М., Физматгиз, 1963.
14. А. Н. Матвеев. Электродинамика и теория относительности. М., «Высшая школа», 1964.
15. Г. И. Сканава. Физика диэлектриков. М., Гостехиздат, 1949.
16. С. В. Вонсовский. Современное учение о магнетизме. М., Гостехиздат, 1953.
17. Л. Спитцер. Физика полностью ионизованного газа. М., ИЛ, 1957.
18. Д. А. Франк-Каменецкий. Лекции по физике плазмы. М., Атомиздат, 1968.
19. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. М., Физматгиз, 1962.
20. Н. И. Жирнов. Задачник-практикум по электродинамике. М., «Промсвещение», 1964.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Введение	3
Глава 1	
Основы специальной теории относительности	7
§ 1-1. Принцип относительности положения и ориентировки	7
§ 1-2. Принцип относительности Галилея	10
§ 1-3. Ограниченность принципа Галилея	12
§ 1-4. Экспериментальные основания теории относительности	15
§ 1-5. Принцип относительности Эйнштейна	18
§ 1-6. Преобразования Лоренца	19
§ 1-7. Релятивистская кинематика	27
§ 1-8. Релятивистская функция Лагранжа	33
§ 1-9. Релятивистская динамика	36
Задачи (№ 1 — 9)	43
Глава 2	
Элементы релятивистской электродинамики	44
§ 2-1. Системы единиц	44
§ 2-2. Уравнения Максвелла	50
§ 2-3. Уравнение непрерывности	51
§ 2-4. Уравнения для потенциалов электромагнитного поля	53
§ 2-5. Ковариантность уравнений Максвелла	55
§ 2-6. Лагранжиан электромагнитного поля	60
§ 2-7. Сила Лоренца	66
§ 2-8. Движение заряда в однородных полях	69
§ 2-9. Движение заряда в однородном магнитном поле	72
Задачи (№ 10 — 14)	74
Глава 3	
Экспериментальные основания электронной теории	75
§ 3-1. Измерения элементарного заряда	75
§ 3-2. Дробовой эффект	80

	<i>Стр.</i>
§ 3-3. Нерелятивистское движение заряженной частицы в однородных полях	81
§ 3-4. Измерения удельного заряда	87
§ 3-5. Циклотрон	92
§ 3-6. Простейшие случаи движения заряженных частиц в неоднородном поле	95
§ 3-7. Основные эксперименты с релятивистскими частицами	99
§ 3-8. Циклическое резонансное ускорение релятивистских частиц . .	103
§ 3-9. Инерция свободных электронов в металлах	105
Задачи (№ 15 — 19)	109

Глава 4

Основные принципы и уравнения классической электронной теории	110
§ 4-1. Представления о веществе и поле	110
§ 4-2. Представления об электроне	115
§ 4-3. Ограниченность представлений классической электронной теории	121
§ 4-4. Уравнения микрополя	126
§ 4-5. Усреднение уравнений микрополя	130
§ 4-6. Энергия электромагнитного микрополя	138
§ 4-7. Импульс электромагнитного микрополя	141
§ 4-8. Давление и масса электромагнитного поля	145
§ 4-9. Лоренцова сила и третий закон Ньютона	150
Задачи (№ 20 — 24)	152

Глава 5

Поле заряженной частицы	153
§ 5-1. Потенциалы Лиенара — Вихерта	153
§ 5-2. Напряженности поля точечного заряда в вакууме	156
§ 5-3. Электромагнитная масса заряженной частицы	163
§ 5-4. Излучение при движении заряда в вакууме	166
§ 5-5. Естественная ширина спектральных линий	175
§ 5-6. Уширение спектральных линий	180
§ 5-7. Эффект Мёссбауэра	185
§ 5-8. Рассеяние света электронами	188
§ 5-9. Эффект Вавилова — Черенкова	193
Задачи (№ 25 — 32)	198

Диэлектрические свойства вещества	199
§ 6-1. Классификация диэлектриков	199
§ 6-2. Поле, действующее на диполь	201
§ 6-3. Поляризация диэлектрика с квазиупругими диполями	205
§ 6-4. Поляризация диэлектрика с полярными молекулами	210
§ 6-5. Основные экспериментальные исследования диэлектриков	216
§ 6-6. Природа дисперсии света	218
§ 6-7. Нормальная дисперсия света	223
§ 6-8. Аномальная дисперсия и поглощение света	229
§ 6-9. Подтверждения теории дисперсии опытами Д. С. Рождественского	233
Задачи (№ 33 — 36)	237

Магнитные свойства вещества	238
§ 7-1. Молекулярные токи	238
§ 7-2. Теорема Лармора	242
§ 7-3. Эффект Зеемана	246
§ 7-4. Эффект Фарадея	248
§ 7-5. Диамагнетизм	250
§ 7-6. Парамагнетизм	254
§ 7-7. Магнитомеханический фактор	260
§ 7-8. Магнитомеханические явления	262
§ 7-9. Ферромагнетизм	266
Задачи (№ 37 — 41)	274

Проводники	275
§ 8-1. Электропроводность металлов	275
§ 8-2. Эффект Холла	279
§ 8-3. Электронный ток в разреженном газе	285
§ 8-4. Ионные токи в жидкостях и газах	293
§ 8-5. Электропроводность высокотемпературной плазмы	298
§ 8-6. Возможность существования электромагнитных волн в высокотемпературной плазме	304

	<i>Стр.</i>
§ 8-7. Электростатические колебания в плазме	306
§ 8-8. Движение частиц плазмы и магнитные ловушки	310
§ 8-9. Применения плазмы	315
Задачи (№ 42 — 45)	318
Решения задач	320
Приложение I	344
Приложение II	345
Литература	346

Сергей Всеволодович
Беллюстин

КЛАССИЧЕСКАЯ
ЭЛЕКТРОННАЯ
ТЕОРИЯ

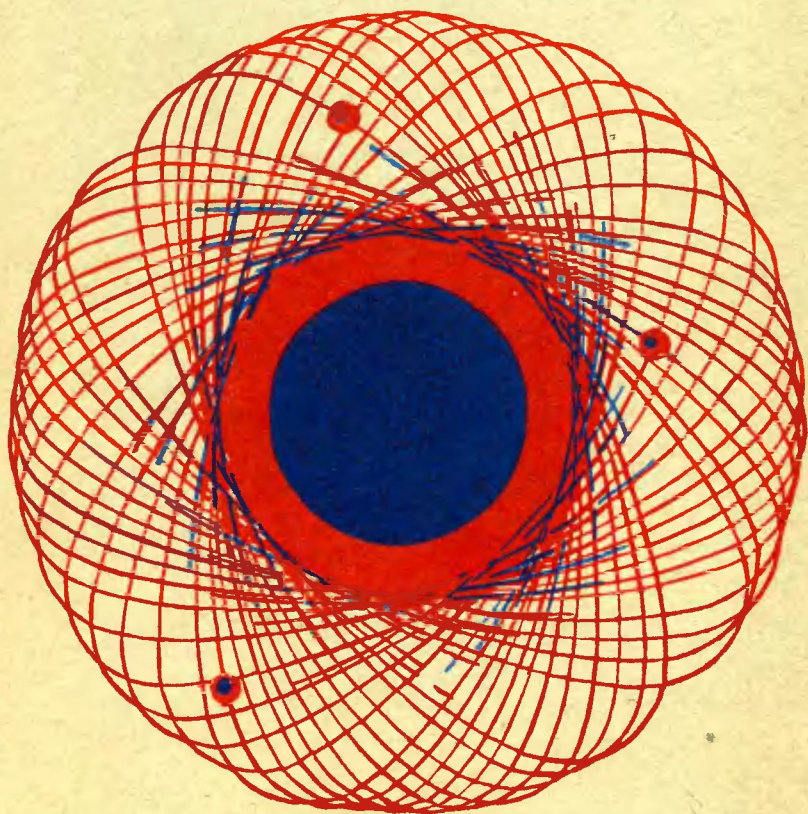
Редактор Е. С. Гридасова
Художник А. И. Демко
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор З. В. Нуждина
Корректор С. А. Пахомов

Т-17271. Сдано в набор 1/VI-70 г. Подписано к печати 17/XII-70 г.
Формат 60×90^{1/16}. Объем 22 печ. л. Уч.-изд. л. 20,26.
Изд. № ФМ-289. Тираж 20 000 экз. Цена 86 коп.
План выпуска литературы для вузов и техникумов
издательства «Высшая школа» на 1970 г. Позиция № 34
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография
№ 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград,
Гатчинская ул., 26.
Заказ № 1188

Классическая электронная теория

С.В.БЕЛЛЮСТИН



ИЗДАТЕЛЬСТВО
• ВЫСШАЯ
ШКОЛА •