АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

В. Д. БЕЛОУСОВ

Основы теории квазигрупп и луп

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1967

УДК 519.4:512.8

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Ю. И. СОРКИН

2-2-3
449-66

ПРЕДИСЛОВИЕ

В различных разделах математики, например, в теории проективных плоскостей, неассоциативных тел, в ряде вопросов комбинаторного анализа и теории функциональных уравнений и т. п., возникает необходимость изучения одного естественного обобщения понятия группы, а именно квазигруппы.

Толчком к развитию теории квазигрупп послужили работы Р. Муфанг (1935 г.) по недезарговым проективным плоскостям, в которых выяснялась связь таких плоскостей с квазигруппами, точнее, лупами (т. е. квазигруппами с единицей), носящими теперь ее имя. За последние десятилетия теория квазигрупп и луп получила значительное развитие в работах различных математиков, причем в основном внимание акцентировалось на лупах. Р. Брак, ведущий специалист в этой области, подытожил исследования по теории луп в своей монографии «Обзор бинарных систем» (R. H. Bruck. A survey of binary systems. Springer Verlag, 1958).

В отличие от книги Брака, в предлагаемой читателю работе делается упор на квазигруппы. В этом смысле настоящую работу можно считать в некоторой мере дополнением к книге Брака. Однако здесь рассматриваются и наиболее известные классы луп: лупы со свойством обратимости (*IP*-лупы), лупы Муфанг, лупы Бола и др.

Автор старался сделать книгу доступной для широкого круга читателей, поэтому все результаты изложены элементарно. Для понимания книги достаточно владеть первоначальными элементами теории групп, которые входят в вузовский курс высшей алгебры.

Не желая увеличивать объем книги, автор не затрагивает такие разделы теории квазигрупп, как теория свободных квазигрупп, упорядоченных луп, систем квазигрупп и др. Ряд понятий приводится в книге, но не получает широкого развития, однако указывается литература, где эти понятия рассматриваются подробно. С другой стороны, некоторые результаты рассматриваются достаточно глубоко, например теоремы Муфанг и др.

В основу книги положены лекции специального курса, прочитанного автором в Кишиневском государственном университете в 1963—1965 гг. и в Московском государственном университете весной 1965 г.

Кишинев, 1965 г. *В. Белоусов*

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. *Определения квазигруппы и лупы.* Одним из важнейших понятий общей алгебры (и математики вообще) является понятие *алгебраической операции* или просто *операции*. Обычно операция определяется следующим образом [47].

Пусть дано непустое множество Q, конечное или бесконечное; элементы множества Q будем обозначать малыми латинскими буквами: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$ Под n-й степенью множества Q понимаем множество Q^n, состоящее из всевозможных упорядоченных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ элементов из Q. Тогда *n-арной операцией* A, определенной на множестве Q, назовем отображение множества Q^n в множество Q. Если последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ставится при этом в соответствие элемент b (принадлежащий тоже Q), то пишем $A\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$. Число n называется *арностью* операции A. Если $n = 2$, то операция A называется *бинарной*: $A\ (a_1, a_2) = b$. Если $n = 1$, то операция A называется *унарной*: $A\ (a_1) = b$. Можно рассмотреть и операции бесконечной, а также нулевой «арности» (нульарная операция); более подробно см. [47] стр. 109. Множество Q с множеством Ω операций, причем операции из Ω могут быть любой арности, называется *универсальной алгеброй* или просто *алгеброй*, она обозначается $Q\ (\Omega)$.

Нас будут интересовать только бинарные операции, поэтому в дальнейшем мы опустим слово «бинарная». Операции, определяемые на множестве Q, будем обозначать большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots$ Иногда мы будем обозначать операции как обычное умножение, т. е. не будем писать $A\ (a, b) = c$, а $ab = c$, или, если понадобится, будем применять и другие значки для операции: $\circ$, $*$, $\bullet$, Δ и т. д., например $a \circ b = c$, $a * b = c$ и т. д.

Множество Q, рассматриваемое вместе с некоторой бинарной операцией A, называется *группоидом* и обозначается $Q\ (A)$. Если операция обозначена значком, например $(\circ)$ или $(\cdot)$, то будем также писать $Q\ (\circ)$ или $Q\ (\cdot)$. Следовательно, на множестве Q имеется столько группоидов, сколько существует различных операций.

При этом мы считаем, что операции A и B совпадают, если $A(a, b) = B(a, b)$ для любых $a, b \in Q$.

Если Q — конечный группоид, то $Q(A)$ можно задать при помощи таблицы, например:

A	a	b	c	d
a	c	c	b	a
b	d	d	a	b
c	c	b	a	c
d	a	b	a	b

т. е. на пересечении строки, обозначенной элементом a, и столбца, обозначенного элементом b, находится элемент $A(a, b)$, в данном случае $A(a, b) = c$. Такую таблицу мы назовем *таблицей Кэли группоида* $Q(A)$.

Может оказаться, что в таблице Кэли группоида $Q(A)$ все элементы в каждой строке и в каждом столбце различны, например, в следующей таблице [1]

A	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	c	b	a	d
c	a	d	c	b
d	d	c	b	a

Если это свойство имеет место для $Q(A)$, мы говорим, что $Q(A)$ — квазигруппа. Таким образом, мы можем дать следующее

Определение 1. Группоид $Q(A)$ (т. е. множество Q с операцией A) называется *квазигруппой*, если для любых $a, b \in Q$ уравнения

$$A(a, x) = b, \ A(y, a) = b \tag{1.1}$$

всегда разрешимы, причем однозначно.

Это определение эквивалентно следующему: группоид $Q(A)$ называется квазигруппой, если каждыми двумя элементами из равенства $A(a, b) = c$ определяется однозначно третий. Можно также дать и следующее определение. Операцию A назовем *обратимой справа*, если уравнение $A(a, x) = b$ разрешимо однозначно для любых a, b, и назовем *обратимой слева*, если $A(y, a) = b$ разрешимо однозначно для любых a, b, и, наконец, операцию A назовем *обратимой*, если операция обратима справа и слева. Тогда под квазигруппой $Q(A)$ мы будем понимать множество Q с обратимой операцией A.

Существует еще одно определение, которое также часто применяется. Чтобы прийти к этому определению, заметим, что по существу уравнения (1.1) определяют две новые операции. Первое из уравнений (1.1) показывает, что каждой упорядоченной паре $a, b \in Q$ ставится однозначно в соответствие элемент x, т. е. в Q определена новая операция. Обозначим ее через B: $B(a, b) = x$. Аналогично второе из уравнений (1.1) определяет опять некоторую операцию. Обозначим ее через C, причем будем считать, что $C(b, a) = y$. Таким образом, в Q определены три операции, т. е. имеем алгебру $Q(\Omega)$, где $\Omega = \{A, B, C\}$. В этой алгебре должны выполняться тождества, вытекающие из (1.1) и из определения операций B и C:

$$A[a, B(a, b)] = b, \quad A[C(b, a), a] = b. \tag{1.2}$$

Естественно возникает вопрос: если в алгебре $Q(\Omega) = Q(A, B, C)$ имеют место тождества (1.2), то будет ли $Q(A)$ квазигруппой? Легко убедиться, что $Q(A)$ не обязательно будет квазигруппой, более точно, в $Q(A)$ уравнения (1.2) разрешимы, но, вообще говоря, не однозначны. Поэтому мы дадим следующее

Определение 2. Группоид $Q(A)$ называется *квазигруппой*, если существуют две другие операции B и C на том же множестве Q такие, что в алгебре $Q(A, B, C)$ выполняются тождества [2]

$$\left.\begin{aligned} A[x, B(x, y)] = y, \quad B[x, A(x, y)] = y, \\ A[C(y, x), x] = y, \quad C[A(y, x), x] = y. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Покажем эквивалентность определений 1 и 2. Мы уже видели, что уравнения (1.1) разрешимы, это следует из первой группы тождеств (1.3): например, решением уравнения $A(a, x) = b$ будет $B(a, b)$. Покажем однозначность решения: пусть $A(a, c) = A(a, d) = b$. Тогда

$$B[a, A(a, c)] = B[a, A(a, d)].$$

Отсюда на основании (1.3) следует $c = d$. Таким же путем получаем однозначную разрешимость второго уравнения. Следовательно, из определения 2 следует определение 1. Чтобы показать, что из определения 1 следует определение 2, надо доказать, что имеет место вторая группа равенств из (1.3). Для этого предположим, что $B[a, A(a, b)] = c$, тогда $A\{a, B[a, A(a, b)]\} = A(a, c)$. Отсюда на основании (1.2) имеем $A(a, b) = A(a, c)$. Так как уравнение $A(a, x) = d$ должно иметь одно решение, заключаем, что $b = c$, т. е. $B[a, A(a, b)] = b$.

Определение 3. Операцию B из определения 2 назовем *правой обратной для* A и обозначим ее через A^{-1}, а операцию C — *левой обратной операцией для* A и обозначим ее через ${}^{-1}A$.

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} A[x, A^{-1}(x, y)] = A^{-1}[x, A(x, y)] = y, \\ A[{}^{-1}A(y, x), x] = {}^{-1}A[A(y, x), x] = y. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Следовательно, решение уравнения $A(a, x) = b$ будет $x = A^{-1}(a, b)$, а уравнения $A(y, a) = b$ будет $y = {}^{-1}A(b, a)$.

Замечание 1. Из определения операций A^{-1} и ${}^{-1}A$ следует, что равенства $A(a, b) = c$, $A^{-1}(a, c) = b$, ${}^{-1}A(c, b) = a$ эквивалентны.

Замечание 2. Если операции в квазигруппе будем обозначать как обычное умножение $(\cdot)$, то вместо $(\cdot)^{-1}$ и ${}^{-1}(\cdot)$ будем часто писать $(\backslash)$ и $(/)$ соответственно

$$(\cdot)^{-1} = (\backslash), \quad {}^{-1}(\cdot) = (/).$$

Замечание 3. *Если $Q(A)$ — квазигруппа*, то $Q(A^{-1})$ и $Q({}^{-1}A)$ *также являются квазигруппами*. В самом деле, покажем, что уравнение

$$A^{-1}(a, x) = b \tag{1.5}$$

имеет единственное решение. Если c какое-нибудь решение этого уравнения, из равенства $A^{-1}(a, c) = b$ следует, что $A(a, b) = c$, а из равенств (1.3) следует, что $A(a, b)$ является решением уравнения (1.5). Таким образом, уравнение (1.5) разрешимо однозначно.

Пусть c будет решением уравнения

$$A^{-1}(y, a) = b, \tag{1.6}$$

т. е. $A^{-1}(c, a) = b$. Тогда $A(c, b) = a$, т. е. $c = {}^{-1}A(a, b)$. Проверим, что ${}^{-1}A(a, b)$ является решением уравнения (1.6). Пусть

$$A^{-1}({}^{-1}A(a, b), a) = b'.$$

Последнее равенство эквивалентно равенству $A({}^{-1}A(a, b), b') = a$. Но в силу (1.3) имеем еще $A({}^{-1}A(a, b), b) = a$. Сравнивая последние два равенства, находим, что $b' = b$. Итак, $Q(A^{-1})$ — квазигруппа. Аналогично доказывается, что $Q({}^{-1}A)$ также квазигруппа.

Пусть $Q(\cdot)$ — квазигруппа. Если подмножество $Q' \subseteq Q$ является квазигруппой относительно той же операции $(\cdot)$, то $Q'(\cdot)$ называется *подквазигруппой* квазигруппы $Q(\cdot)$.

Другим важным понятием, на котором мы остановимся, является понятие лупы. Пусть имеется квазигруппа $Q(\cdot)$ и пусть существует элемент e в Q такой, что $ae = ea = a$ для любого $a \in Q$. Такой элемент e называется *единицей* квазигруппы $Q(\cdot)$.

Определение 4. Квазигруппа $Q(\cdot)$ с единицей называется *лупой* [3].

Наиболее изученным классом луп являются группы, которые определяются как ассоциативные квазигруппы, т. е. квазигруппа называется группой, если в $Q(\cdot)$ выполняется тождество ассоциативности: $xy \cdot z = x \cdot yz$* (см. [46], [85]). Легко показать (см.,

* Часто вместо $(xy)z$ будем писать $xy \cdot z$. Так, $x(yz \cdot x)$ означает $x[(yz)x]$ и т. д.

например, [85]), что из ассоциативности квазигруппы $Q(\cdot)$ следует наличие единицы в $Q(\cdot)$.

Пример неассоциативной лупы:

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	5	3	4
3	3	4	1	5	2
4	4	5	2	1	3
5	5	3	4	2	1

$Q(\cdot)$ — лупа, но не группа, так как $Q(\cdot)$ не ассоциативна; например, $(2\cdot 2)\cdot 5=1\cdot 5=5$, а $2\cdot(2\cdot 5)=2\cdot 4=3$, т. е. $(2\cdot 2)\cdot 5 \neq 2\cdot(2\cdot 5)$.

Если $Q(\cdot)$ — квазигруппа, но не лупа, то тем не менее для каждого элемента a существует своя *правая локальная единица* e_a, т. е. $ae_a = a$; это следует из того, что уравнение $ax = a$ должно иметь решение. Аналогично определяется *левая локальная единица* $f_a : f_a a = a$. Если все правые единицы совпадают ($e_a = e$), то e называется *правой единицей*. Аналогично определяется левая единица f. Существуют квазигруппы с правой единицей (они называются *правыми лупами*), но без левой единицы и наоборот. Если в $Q(\cdot)$ существуют правая и левая единицы, то они совпадают и, следовательно, $Q(\cdot)$ — лупа.

Естественным образом вводится понятие *подлупы*: $Q'(\cdot)$ — подлупа лупы $Q(\cdot)$, если $Q'(\cdot)$ — лупа и $Q' \subseteq Q$.

2°. *Регулярные подстановки квазигрупп и ядра луп.* Пусть $Q(\cdot)$ — квазигруппа. Отображение $x \to ax$ называется *левой трансляцией с помощью элемента* a и обозначается через L_a : : $L_a x = ax$. Очевидно, L_a — взаимно однозначное отображение множества Q на себя, т. е. L_a — подстановка* множества Q. Это следует из определения квазигруппы. *Правая трансляция* R_a *с помощью элемента* a определяется равенством $R_a x = xa$ и, следовательно, тоже является подстановкой. Все трансляции квазигруппы $Q(\cdot)$ порождают группу G, которую называют *группой, ассоциированной с квазигруппой* $Q(\cdot)$ [1]. Если $Q(\cdot)$ — группа, то имеют место очевидные равенства, каждое из которых эквивалентно ассоциативному закону

$$\left.\begin{aligned} L_a(xy) &= L_a x\cdot y,\\ R_a(xy) &= x\cdot R_a y.\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Равенства (1.7) верны для любых $a, x, y \in Q$. Эти равенства подсказывают следующее.

---

* Взаимное однозначное отображение множества Q на себя будем называть *подстановкой* множества Q.

О п р е д е л е н и е 5. Подстановка λ множества Q называется *левой регулярной подстановкой квазигруппы* $Q(\cdot)$, если

$$\lambda(xy) = \lambda x \cdot y \tag{1.8}$$

для любых x, $y \in Q$. Аналогично определяется *правая регулярная подстановка* ρ:

$$\rho(xy) = x \cdot \rho y.$$

Таким образом, в группе любая левая (правая) трансляция является левой (правой) регулярной подстановкой.

Левые и правые регулярные подстановки всегда существуют для любой квазигруппы; единичная подстановка ε ($\varepsilon x = x$)* всегда регулярна слева и справа. Легко видеть, что совокупность $\mathscr{L}$ всех регулярных слева подстановок квазигруппы $Q(\cdot)$ будет группой, точнее, $\mathscr{L}$ будет подгруппой группы G. Действительно, пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathscr{L}$, тогда

$$(\lambda_1 \lambda_2)(xy) = \lambda_1 [\lambda_2(xy)] = \lambda_1(\lambda_2 x \cdot y) = \lambda_1(\lambda_2 x) \cdot y = (\lambda_1 \lambda_2) x \cdot y,$$

т.е. $\lambda_1\lambda_2 \in \mathscr{L}$. Покажем, что из $\lambda \in \mathscr{L}$ следует $\lambda^{-1} \in \mathscr{L}$. Действительно, из (1.8) следует $xy = \lambda^{-1}(\lambda x \cdot y)$. После замены x на $\lambda^{-1}x$ получаем $\lambda^{-1} x \cdot y = \lambda^{-1}(xy)$, т. е. $\lambda^{-1} \in \mathscr{L}$.

Остается показать, что $\mathscr{L} \subseteq G$. Для этого заметим, что равенство (1.8) можно переписать в виде $\lambda L_x y = L_{\lambda x} y$, откуда следует $\lambda L_x = L_{\lambda x}$, поэтому $\lambda = L_{\lambda x} L_x^{-1} \in G$. Аналогично доказывается, что совокупность $\mathscr{R}$ всех правых регулярных подстановок квазигруппы $Q(\cdot)$ образует подгруппу группы G.

Найдем левые регулярные подстановки для случая, когда $Q(\cdot)$ — лупа. Пусть $\lambda \in \mathscr{L}$ и пусть $\lambda e = a$, e — единица лупы $Q(\cdot)$. Тогда

$$\lambda x = \lambda(ex) = \lambda e \cdot x = ax,$$

т. е. $\lambda = L_a$. С другой стороны, мы заметим, что элемент $a = \lambda e$ обладает следующим свойством:

$$ax \cdot y = a \cdot xy \tag{1.9}$$

для любых x и y. Действительно, $ax \cdot y = \lambda x \cdot y = \lambda(xy) = a \cdot xy$.

Если элемент a удовлетворяет равенству (1.9), то он называется *ассоциативным слева*. Совокупность всех ассоциативных слева элементов лупы $Q(\cdot)$ называется *левым ядром лупы* $Q(\cdot)$ и обозначается через N_l.

Аналогично определяется *правое ядро* N_r как совокупность всех ассоциативных справа элементов, т. е. таких элементов b, что

$$xy \cdot b = x \cdot yb \tag{1.10}$$

для любых x и $y \in Q$.

Если $\rho \in \mathscr{R}$, то, как и выше, можно показать $\rho = R_b$, где $b \in N_r$.

---

* Единичную подстановку часто будем обозначать через 1, т. е. $1x = x$.

Единица лупы всегда принадлежит левому и правому ядрам лупы $Q(\cdot)$. Наконец, можно определить *среднее ядро* N_m как совокупность всех элементов c среднеассоциативных

$$xc\cdot y = x\cdot cy. \tag{1.11}$$

Определения левого, правого и среднего ядер сформулированы для квазигрупп: в равенствах (1.9) — (1.11) единица непосредственно не участвует. Однако имеют место следующие утверждения [39]:

а) *квазигруппа* $Q(\cdot)$ *тогда и только тогда обладает левым* (*правым*) *ядром, если она обладает левой* (*правой*) *единицей*;

б) *квазигруппа* $Q(\cdot)$ *тогда и только тогда обладает средним ядром, если она лупа.*

Действительно, если $Q(\cdot)$ обладает левой единицей f, то она ассоциативна слева. Предположим теперь, что $Q(\cdot)$ обладает левым ядром N_l, и пусть $a\in N_l$. Покажем, что правая локальная единица e_a элемента a будет левой единицей квазигруппы $Q(\cdot)$. Пусть $e_a x = x'$. Тогда $ax' = a\cdot e_a x = ae_a\cdot x = ax$, откуда $x' = x$, следовательно $e_a x = x$. Чтобы доказать б), заметим, что единица лупы всегда принадлежит всем трем ядрам. Предположим теперь, что $Q(\cdot)$ обладает средним ядром N_m, и пусть $a\in N_m$, f_a и e_a соответственно левая и правая локальные единицы элемента a. Если x — любой элемент из Q, то существуют такие элементы y и z, что $x = ay = za$. Имеем

$$f_a x = f_a(ay) = (f_a a)y = ay = x,$$

$$xe_a = (za)e_a = z(ae_a) = za = x.$$

Отсюда следует, что f_a и e_a соответственно левая и правая единицы квазигруппы $Q(\cdot)$, поэтому они совпадают, т. е. $Q(\cdot)$ — лупа.

В случае, когда $Q(\cdot)$ — группа, то $N_l = N_m = N_r = Q$, т. е. все три ядра — подгруппы $Q(\cdot)$ и даже совпадают с Q. В общем случае имеет место

Теорема 1.1. *Любое из ядер квазигруппы* $Q(\cdot)$ *является ее ассоциативной подквазигруппой* (т. е. группой).

Доказательство. а) Пусть $Q(\cdot)$ обладает левым ядром N_l. Тогда по доказанному выше в $Q(\cdot)$ есть левая единица e. Очевидно, $e\in N_l$. Покажем теперь, что из $a, b\in N_l$ следует $ab\in N_l$:

$$(ab)(xy) = a(b\cdot xy) = a(bx\cdot y) = (a\cdot bx)y = (ab\cdot x)y.$$

Таким образом, N_l замкнута относительно операции умножения в $Q(\cdot)$. Далее имеем

$$ae\cdot x = a\cdot ex = ax,$$

откуда $ae = a$, т. е. e будет единицей в N_l.

Заметим теперь следующее. Если $Q(\cdot)$ — лупа с единицей e, то каждый элемент $x \in Q$ имеет обратные элементы, которые определяются равенствами

$$xx^{-1} = e, \quad {}^{-1}xx = e.$$

Элемент x^{-1} называется *правым обратным*, ${}^{-1}x$ — *левым обратным элементом* для x.

Покажем, что если $a \in N_l$, то и $a^{-1} \in N$. Действительно, должен существовать такой элемент y', что имеет место равенство

$$a^{-1} \cdot xy = a^{-1}x \cdot y'. \tag{1.12}$$

Умножаем слева на a:

$$a(a^{-1} \cdot xy) = a(a^{-1}x \cdot y'),$$

откуда следует, ввиду того что $a \in N_l$,

$$aa^{-1} \cdot xy = (a \cdot a^{-1}x)\, y',$$
$$e \cdot xy = (aa^{-1} \cdot x)\, y',$$
$$xy = xy'.$$

Таким образом, $y = y'$ и из (1.12) следует $a^{-1} \in N_l$. Вспомним теперь, что группу можно определить как группоид, в котором выполняется ассоциативный закон, существуют правая единица $xe = x$ и правый обратный элемент x^{-1}, $xx^{-1} = e$ для любого $x \in Q$ (см. например, [46]). Итак, из всего сказанного вытекает, что N_l — группа относительно операции $(\cdot)$ в квазигруппе $Q(\cdot)$. Аналогично доказывается, что N_r — группа относительно операции $(\cdot)$ в квазигруппе $Q(\cdot)$.

б) Пусть $a, b \in N_m$, тогда и $ab \in N_m$, так как

$$(x \cdot ab)\, y = (xa \cdot b)\, y = xa \cdot by = x(a \cdot by) = x(ab \cdot y).$$

Ранее мы видели, что квазигруппа $Q(\cdot)$ должна быть лупой с единицей e.

Если $a \in N_m$, то ${}^{-1}a = a^{-1}$, так как из равенства $({}^{-1}aa)\, a^{-1} = a^{-1}$ и из того, что $a \in N_m$, следует ${}^{-1}a\,(aa^{-1}) = ({}^{-1}aa)\, a^{-1} = a^{-1}$ или ${}^{-1}a = a^{-1}$. Более того, $a^{-1} \in N_m$, а это уже означает, что N_m — группа (ассоциативная подлупа). Чтобы убедиться в этом, мы рассуждаем, как и выше: должен существовать такой элемент y', что

$$xa^{-1} \cdot y = x \cdot a^{-1}y'.$$

Заменим x на za (когда x пробегает все множество Q, то и z пробегает Q)

$$(za \cdot a^{-1})\, y = za \cdot a^{-1}y', \quad zy = za \cdot a^{-1}y' = z(a \cdot a^{-1}y'),$$

откуда $y = a \cdot a^{-1}y'$. Умножаем слева на a^{-1}

$$a^{-1}y = a^{-1}(a \cdot a^{-1}y') = a^{-1}a \cdot a^{-1}y' = a^{-1}y', \quad y = y'.$$

Таким образом, $xa^{-1} \cdot y = x \cdot a^{-1}y$, что и требовалось доказать.

Часто рассматривается и понятие *ядра лупы*: пересечение* трех ядер N_l, N_m, N_r лупы $Q(\cdot)$ называется ядром лупы $Q(\cdot)$.

3°. *Изотопия.* Другим важным понятием теории квазигрупп и луп является понятие изотопии, обобщающее теоретико-групповое понятие изоморфизма.

Рассмотрим две операции A и B, определенные на одном и том же множестве Q.

Определение 6. Операция B называется *изотопной* операции A, или *изотопом* A, если существует тройка подстановок α, β, γ множества Q таких, что

$$B(x, y) = \gamma^{-1} A(\alpha x, \beta y)$$

для любых x, $y \in Q$.

Упорядоченную тройку $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ назовем *изотопией*, подстановки α, β, γ — соответственно *левой*, *правой и главной компонентами изотопии* T. Тот факт, что B и A изотопны, иногда будем записывать так: $B = A^T$ или $B = A^{(\alpha, \beta, \gamma)}$**. Если все три подстановки совпадают: $\alpha = \beta = \gamma$, то изотопия превращается в *изоморфизм*

$$B(x, y) = \alpha^{-1} A(\alpha x, \alpha y).$$

В этом случае будем писать $(\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha$ и, следовательно,

$$B = A^{(\alpha, \alpha, \alpha)} = A^{\alpha}.$$

Изотопия вида $T = (\alpha, \beta, 1)$, т. е. если главная компонента равна 1, называется *главной*.

Пример. Пусть $Q(\cdot)$ — квазигруппа, определенная следующей таблицей Кэли:

	1	2	3	4	5
1	3	1	4	2	5
2	5	2	3	1	4
3	1	4	2	5	3
4	4	5	1	3	2
5	2	3	5	4	1

Сделаем в этой таблице перемещение строк, потом столбцов и, наконец, перемещение элементов внутри самой таблицы:

---

* Т. е. совокупность общих элементов ядер N_l, N_m, N_r.

** Если операции B и A записаны значками, например в виде $(\circ)$ и $(\cdot)$, то мы будем писать $(\circ) = (\cdot)^T$.

	1	2	3	4	5
1	3	1	4	2	5
2	5	2	3	1	4
3	1	4	2	5	3
4	4	5	1	3	2
5	2	3	5	4	1

$\rightarrow$

	1	2	3	4	5
1	5	2	3	1	4
2	1	4	2	5	3
3	4	5	1	3	2
4	3	1	4	2	5
5	2	3	5	4	1

$\rightarrow$

	1	2	3	4	5
1	2	3	5	1	4
2	4	2	1	5	3
3	5	1	4	3	2
4	1	4	3	2	5
5	3	5	2	4	1

$\rightarrow$

	1	2	3	4	5
1	1	2	5	3	4
2	4	1	3	5	2
3	5	3	4	2	1
4	3	4	2	1	5
5	2	5	1	4	3

Перемещение строк осуществим с помощью подстановки $\alpha = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,4\,1\,5 \end{pmatrix}$, перемещение столбцов — с помощью подстановки $\beta = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,1\,4\,5 \end{pmatrix}$, а внутри таблицы сделаем перемещение $\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,1\,2\,4\,5 \end{pmatrix}$, т. е. всюду, где было 1, поставили 3, где было 2, поставили 1 и т. д. Таким образом, получили другую квазигруппу $Q\ (\circ)$ с помощью изотопии $T = (\alpha, \beta, \gamma)$, или более подробно имеем $x \circ y = \gamma^{-1}\,(\alpha x \cdot \beta y)$.

Найдем например, $3 \circ 4$:

$$3 \circ 4 = \gamma^{-1}\,(\alpha 3 \cdot \beta 4) = \gamma^{-1}\,(4 \cdot 4) = \gamma^{-1}\,3 = 2.$$

Из этого примера видим, что *изотоп* $Q\ (\circ)$ *квазигруппы* $Q\ (\cdot)$ *также будет квазигруппой.* Этот факт вытекает и из определения изотопии. Докажем сначала единственность решения. Предположим, что уравнение $a \circ x = b$ имеет два решения c_1 и c_2: $a \circ c_1 = b$, $a \circ c_2 = b$. Но тогда $\gamma^{-1}\,(\alpha a \cdot \beta c_1) = b$ и $\gamma^{-1}\,(\alpha a \times \beta c_2) = b$, откуда $\alpha a \cdot \beta c_1 = \gamma b$ и $\alpha a \cdot \beta c_2 = \gamma b$. Так как $Q(\cdot)$ — квазигруппа, заключаем, что $\beta c_1 = \beta c_2$, откуда $c_1 = c_2$. Существование решения уравнения $a \circ x = b$ докажем следующим образом. В $Q\ (\cdot)$ должен быть такой элемент c, что $\alpha a \cdot c = \gamma b$. Тогда $\beta^{-1} c$ будет искомым решением. Действительно,

$$a \circ \beta^{-1} c = \gamma^{-1}\,[\alpha a \cdot \beta\ (\beta^{-1} c)] = \gamma^{-1}\,(\alpha a \cdot c) = \gamma^{-1}\,(\gamma b) = b.$$

Аналогично доказывается, что уравнение $y \circ a = b$ однозначно разрешимо.

Введем *произведение изотопий* $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ и $T_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, а именно положим $TT_1 = (\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1)$. Легко видеть, что все изотопии, определяемые на множестве Q, образуют группу относительно только что введенного умножения. Единицей этой группы будет $(1, 1, 1) = 1$, где 1 — единичная подстановка множества Q. Обратной изотопией для $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ будет, очевидно, $T^{-1} = (\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1})$.

Для любых операций A *и* B *справедливы следующие соотношения*:

$$\text{а) если } B = A^{T}, \text{ тогда } A = B^{T^{-1}}, \tag{1.13}$$

$$б)\ (A^T)^{T_1} = A^{TT_1}. \qquad (1.14)$$

Действительно, если $T = (\alpha, \beta, \gamma)$, то $B(x, y) = \gamma^{-1}A(\alpha x, \beta y)$, откуда после замены x и y соответственно на $\alpha^{-1}x$ и $\beta^{-1}y$ получаем $B(\alpha^{-1}x, \beta^{-1}y) = \gamma^{-1}A(x, y)$, $\gamma B(\alpha^{-1}x, \beta^{-1}y) = A(x, y)$, т. е. $A = B^{T^{-1}}$.

Для доказательства б) введем обозначение $B = A^T$ и вычислим $C = B^{T_1}$. Имеем $C(x, y) = \gamma_1^{-1}B(\alpha_1 x, \beta_1 y)$, но $B(x, y) = \gamma^{-1}A(\alpha x, \beta y)$, следовательно,

$$C(x, y) = \gamma_1^{-1}[\gamma^{-1}A(\alpha(\alpha_1 x), \beta(\beta_1 y))] = \gamma_1^{-1}\gamma^{-1}A(\alpha\alpha_1 x, \beta\beta_1 y),$$

т. е. $$C = A^{(\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1)} = A^{TT_1}.$$

Но $C = B^{T_1} = (A^T)^{T_1}$, следовательно, соотношение б) доказано.

Учитывая, что $A^1 = A$, мы заключаем, что изотопии определяют отношения эквивалентности на множестве всех операций и, в частности, на множестве всех квазигрупп. Поэтому, например, мы можем говорить: A и B изотопны.

Пользуясь соотношением б), очень просто доказывается следующая

Т е о р е м а 1.2. *Если операция B изотопна операции A, то B изоморфна некоторому главному изотопу A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B = A^T = A^{(\alpha, \beta, \gamma)}$. Но $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha\gamma^{-1}, \beta\gamma^{-1}, 1)\gamma = S\gamma$, где, как мы знаем, $\gamma = (\gamma, \gamma, \gamma)$. Следовательно, $B = A^{S\gamma} = [A^S]^\gamma$. Если положим $A^S = C$, то C — главный изотоп операции A, а B изоморфна C, так как $B = C^\gamma$.

Эта теорема позволяет доказать ряд свойств квазигрупп с помощью главных изотопов, а не изотопов.

Значение изотопии для квазигруппы следует из следующей простой теоремы:

Т е о р е м а 1.3. *Каждая квазигруппа изотопна некоторой лупе.*

Действительно, пусть a, b — два фиксированных произвольных элемента квазигруппы $Q(\cdot)$ и пусть $e = ba$. Рассмотрим следующую изотопию $(R_a^{-1}, L_b^{-1}, 1)$, где 1 — единичная подстановка множества Q:

$$x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y. \qquad (1.15)$$

$Q(\circ)$ будет квазигруппой, как мы только что видели. Кроме того, $Q(\circ)$ обладает единицей, именно элемент e будет единицей, т. е. $Q(\circ)$ — лупа. В самом деле, из $e = ba$ следует $e = L_b a$, откуда

$$x \circ e = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}e = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}(L_b a) = R_a^{-1}x \cdot a = R_a\left(R_a^{-1}x\right) = x.$$

Аналогично показывается, что $e \circ x = x$. Таким образом, квазигруппа $Q(\cdot)$ изотопна, даже главноизотопна лупе $Q(\circ)$.

Пример. Возьмем квазигруппу $Q(A)$, заданную таблицей на стр. 6. Перемещаем строки и столбцы так, чтобы первая строка и первый столбец были a, b, c, d:

$$\begin{array}{c|cccc} A & a & b & c & d \\ \hline a & b & a & d & c \\ b & c & b & a & d \\ c & a & d & c & b \\ d & d & c & b & a \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & a & d & c & b \\ b & b & a & d & c \\ c & c & b & a & d \\ d & d & c & b & a \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} \circ & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & c & d & a \\ c & c & d & a & b \\ d & d & a & b & c \end{array}$$

Таким образом, получили главный изотоп $Q(\circ)$ квазигруппы $Q(A)$. Очевидно, $Q(\circ)$ — лупа с единицей a (и даже группа). Здесь имеем такую изотопию: $T = (\alpha, \beta, 1)$, $(\circ) = A^T$, где

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \end{pmatrix}, \text{ т. е. } x \circ y = A(\alpha x, \beta y).$$

Легко видеть, однако, что α и β тоже принадлежат группе G. Действительно, имеет место следующая

Лемма 1.1. *Если лупа $Q(\circ)$ главноизотопна квазигруппе $Q(A)$, то изотопия должна иметь вид*

$$T = \left(R_a^{-1}, L_b^{-1}, 1\right).$$

Действительно, пусть $T = (\alpha, \beta, 1)$ и пусть e — единица лупы $Q(\circ)$. Тогда $x = x \circ e = A(\alpha x, \beta e) = R_{\beta e}\alpha x$, следовательно, $R_{\beta e}\alpha = 1$ или $\alpha = R_{\beta e}^{-1}$. Аналогично имеем $\beta = L_{\alpha e}^{-1}$, следовательно, $T = (R_{\beta e}^{-1}, L_{\alpha e}^{-1}, 1)$. Для рассматриваемого выше при мера мы имеем, вспоминая, что единицей лупы $Q(\circ)$ является a, $\beta a = a$, $\alpha a = c$, следовательно, $T = (R_a^{-1}, L_c^{-1}, 1)$.

Введем обозначение

$$A(R_a^{-1}, L_b^{-1}, 1) = A_{a,b},$$

тогда из леммы 1.1 и теоремы 1.3 получаем следующее утверждение:

Лемма 1.2. *Если лупа B изотопна квазигруппе A, то изотопия имеет вид* *

$$B = (A_{a,b})^{\gamma},$$

или в сокращенной записи

$$B = A_{a,b}^{\gamma}. \tag{1.16}$$

---

* Часто вместо «квазигруппы $Q(A)$» будем говорить «квазигруппа A», т. е. саму операцию A будем называть квазигруппой. Однако будем говорить «элемент x принадлежит квазигруппе $Q(A)$», а не «элемент x принадлежит квазигруппе A».

Очевидно также и обратное утверждение: *любой изотоп вида* (1.16) *квазигруппы* A *является лупой*. Единицей лупы $Q(A_{a,b})$ будет $A(b, a)$.

Если $Q(A)$ — лупа с единицей 1, то, $Q(A^{\gamma})$ — лупа с единицей $\gamma^{-1}1$. Таким образом, единицей лупы $Q(A^{\gamma}_{a,b})$ будет $\gamma^{-1}A(b,a)$.

Для групп понятие изотопии не играет значительной роли. Это вытекает из следующей теоремы:

Теорема 1.4. (Алберт [1]). *Если две группы изотопны, то они изоморфны.*

Эта теорема вытекает из более общего предложения, которое принято сейчас называть *теоремой Алберта*: *если лупа* $Q(\circ)$ *изотопна группе* $Q(\cdot)$, *то она сама группа, изоморфная группе* $Q(\cdot)$. Именно это предложение мы и докажем. Для этого используем замечание, которое сделали после доказательства теоремы 1.2: достаточно теорему доказать для главного изотопа. Итак, пусть лупа $Q(\circ)$ главноизотопна группе $Q(\cdot)$. Следовательно, по доказанной лемме 1.1 изотопия должна иметь вид $(R_a^{-1}, L_b^{-1}, 1)$

$$x \circ y = R_a^{-1} x \cdot L_b^{-1} y.$$

Но в группе $R_a^{-1} = R_{a^{-1}}$ для любого a. Действительно,

$$R_a^{-1} x \cdot a = R_a (R_a^{-1} x) = x,$$

откуда $R_a^{-1} x = xa^{-1} = R_{a^{-1}} x$. Аналогично получаем $L_b^{-1} = L_{b^{-1}}$. Поэтому

$$x \circ y = R_{a^{-1}} x \cdot L_{b^{-1}} y = xa^{-1} \cdot b^{-1} y = x (ba)^{-1} y = xcy.$$

Так как

$$R_c (x \circ y) = (x \circ y) c = (xcy) c = xc \cdot yc = R_c x \cdot R_c y,$$

то мы заключаем, что $(\circ) = (\cdot)^{R_c}$. Следовательно, $Q(\circ)$ — группа, притом изоморфная группе $Q(\cdot)$.

4°. *Взаимно обратные квазигруппы и лупы.* Изотопия дает возможность получить из квазигруппы A новые квазигруппы. Другой способ получения новых квазигрупп состоит в следующем.

С каждой квазигруппой A связываются две обратные операции: левая обратная операция ${}^{-1}A$, которая определяется уравнением $A(y, a) = b$, именно $y = {}^{-1}A(b, a)$, и правая обратная операция A^{-1}, которая определяется уравнением $A(a, x) = b$, именно $x = A^{-1}(a, b)$. Выше было показано, что A^{-1} и ${}^{-1}A$ тоже квазигруппы, поэтому для каждой из них существуют обратные операции. Так, A^{-1} имеет две обратные операции ${}^{-1}A(A^{-1})$ и $(A^{-1})^{-1}$. Однако $(A^{-1})^{-1} = A$.

Действительно, согласно определению $(A^{-1})^{-1}$ мы должны иметь $A^{-1}(x, (A^{-1})^{-1}(x, y)) = y$.

Одновременно, имея ввиду (1.4), находим

$$A^{-1}(x, A(x, y)) = y,$$

откуда

$$(A^{-1})^{-1}(x, y) = A(x, y).$$

Следовательно, из A^{-1} получаем одну новую операцию: ${}^{-1}(A^{-1})$. Вообще говоря, можно получить пять обратных операций: A^{-1}, ${}^{-1}A$, ${}^{-1}(A^{-1})$, $({}^{-1}A)^{-1}$, $[{}^{-1}(A^{-1})]^{-1}$. Следуя Стейну [74] [4], обозначим через σ некоторую перестановку трех элементов a, b, c: $\sigma(a, b, c) = (\sigma a, \sigma b, \sigma c)$. Тогда $A(a, b) = c$ будет эквивалентно равенству ${}^{\sigma}A(\sigma a, \sigma b) = \sigma c$. Например, если $\sigma(a, b, c) = (b, c, a)$, то ${}^{\sigma}A = {}^{-1}(A^{-1})$, так как ${}^{-1}(A^{-1})(b, c) = a \Leftrightarrow A(a, b) = c$ [4]. Если мы рассмотрим все возможные перестановки трех элементов a, b, c, то получим пять обратных операций, перечисленных выше, и еще операцию A. Заметим, что $[{}^{-1}(A^{-1})]^{-1} = {}^{-1}[({}^{-1}A)^{-1}] = A^*$, где A^* — операция, которая получается из операции A коммутированием: $A^*(x, y) = A(y, x)$. Действительно, имеем

$$[{}^{-1}(A^{-1})]^{-1}(a, b) = c \leftrightarrow {}^{-1}(A^{-1})(a, c) = b \leftrightarrow A^{-1}(b, c) = \\ = a \leftrightarrow A(b, a) = c,$$

т. е. $[{}^{-1}(A^{-1})]^{-1} = A^*$. Аналогично показывается, что ${}^{-1}[({}^{-1}A)^{-1}] = A^*$.

Итак, с каждой квазигруппой A связана система Σ_A [5] шести квазигрупп $\Sigma_A = \{A^{-1}, A, A^{-1}, {}^{-1}(A^{-1}), ({}^{-1}A)^{-1}, A^*\}$, которую мы назовем *системой обратных квазигрупп для* A. Легко видеть, что если B одна из квазигрупп системы Σ_A, то $\Sigma_B = \Sigma_A$. Например, если $B = {}^{-1}(A^{-1})$, то $B^{-1} = A^*$, ${}^{-1}B = A^{-1}$ и т. д. Точнее, имеют место следующие утверждения:

$$1) \text{ из } B = {}^{\sigma}A \text{ следует } A = {}^{\sigma^{-1}}B;$$

$$2) \ {}^{\tau}({}^{\sigma}A) = {}^{\tau\sigma}A, \tag{1.17}$$

где σ, τ — любые подстановки из $\mathfrak{S}_3$ — симметрическая группа третьей степени. Докажем, например, второе утверждение. Согласно определению следующие три равенства эквивалентны:

$$A(a, b) = c \leftrightarrow {}^{\sigma}A(\sigma a, \sigma b) = \sigma c \leftrightarrow {}^{\tau}({}^{\sigma}A)(\tau(\sigma a), \tau(\sigma b)) = \tau(\sigma c),$$

т. е. $A(a, b) = c$ эквивалентно равенству ${}^{\tau}({}^{\sigma}A)(\tau\sigma a, \tau\sigma b) = \tau\sigma c$. С другой стороны, имеем $A(a, b) = c \leftrightarrow {}^{\tau\sigma}A(\tau\sigma a, \tau\sigma b) = \tau\sigma c$, следовательно, ${}^{\tau}({}^{\sigma}A)(\tau\sigma a, \tau\sigma b) = {}^{\tau\sigma}A(\tau\sigma a, \tau\sigma b)$, откуда получаем (1.17).

Если A — лупа, то Σ_A не состоит из одних луп. Так, если $A(x, y) = xy$ — группа, то $A^{-1}(x, y) = x^{-1}y$ и A^{-1} в общем случае не имеют правой единицы. Поэтому целесообразно рассмотреть такие изотопы обратных операций для A, чтобы они были также лупами. Сделаем мы это следующим образом. Если A — лупа с единицей 1, то рассмотрим подстановку I, определяемую равенством $A(x, Ix) = 1$, т. е. Ix — правый обратный элемент для x.

Введем следующие две операции:

$$A^{\rho}(x, y) = A^{-1}(I^{-1}x, y), \quad A^{\lambda}(x, y) = {}^{-1}A(x, Iy). \tag{1.18}$$

Покажем, что A^{ρ} *и* A^{λ} *— лупы с той же единицей* 1. Из определения I следует, что $I1 = 1$. *Если A — лупа, то A^{-1} обладает левой единицей.*

Действительно, пусть $A^{-1}(1, x) = x'$, тогда $A(1, x') = x$, откуда получаем $x' = x$. Поэтому $A^{\rho}(1, x) = A^{-1}(I^{-1}1, x) = A^{-1}(1, x) = x$. Пусть теперь $A^{\rho}(x, 1) = x'$. В силу определения операции A^{ρ} мы заключаем, что $A(I^{-1}x, x') = 1$. Но из $A(x, Ix) = 1$ следует $A(I^{-1}x, x) = 1$, откуда $x' = x$. Таким образом, с каждой лупой можно ассоциировать две лупы A^{ρ} и A^{λ}, которые можно назвать соответственно *правой и левой обратной лупами для* A. Их рассмотрение подсказывается обратными операциями для группы или, более общее, IP-лупы (см. гл. V).

Определения для A^{ρ} и A^{λ} можно переписать и таким образом:

$$A^{\rho} = (A^{-1})^{P_A}, \quad A^{\lambda} = ({}^{-1}A)^{S_A},$$

где $P_A = (I_A^{-1}, 1, 1)$, $S_A = (1, I_A, 1)$ и $I_A = I$ определена равенством $A(x, I_A x) = 1$. Легко показать, что $I_{A^{\rho}} = I_{A^{\lambda}} = I^{-1}$. Действительно, из $A^{\rho}(x, I_{A^{\rho}}x) = 1$ следует $A^{-1}(I^{-1}x, I_{A^{\rho}}^{-1}x) = 1$, откуда $A(I^{-1}x, 1) = I_{A^{\rho}}x$, т. е. $I_{A^{\rho}} = I^{-1}$. Аналогично доказывается равенство $I_{A^{\lambda}} = I^{-1}$. Отсюда как следствие получаем соотношения

$$P_{A^{\rho}} = P_{A^{\lambda}} = P_A^{-1}, \quad S_{A^{\rho}} = S_{A^{\lambda}} = S_A^{-1}.$$

Как и для обратных квазигрупп, можно рассмотреть обратные лупы для луп A^{ρ} и A^{λ} и т. д., причем мы определяем $(A^{\rho})^{\rho} = A^{\rho^2}$, $(A^{\rho})^{\lambda} = A^{\rho\lambda}$ и т. д.

Для квазигрупп мы видели, что существуют всего шесть обратных квазигрупп (включая и самую квазигруппу). Для того чтобы выяснить аналогичный вопрос для обратных луп, сначала докажем следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&A^{\rho^2} = A, \quad A^{\lambda^2} = A,\\
&A^{\rho\lambda} = [{}^{-1}(A^{-1})]^{(1, I^{-1}, I^{-1})}, \quad A^{\lambda\rho} = [({}^{-1}A)^{-1}]^{(I, 1, I)},\\
&A^{\rho\lambda\rho} = (A^{*})^{I^{-1}}, \quad A^{\lambda\rho\lambda} = (A^{*})^{I}
\end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

и

$$A^{\rho\alpha} = A^{\alpha\rho},\ A^{\lambda\alpha} = A^{\alpha\lambda},$$

где α — любая подстановка множества Q.

Докажем, например, равенство $A^{\rho\lambda\rho} = (A^*)^{-I^{-1}}$. Пусть

$$A^{\rho\lambda\rho}(x, y) = z. \tag{1.20}$$

Тогда, применяя несколько раз определения A^ρ и A^λ, получаем

$$(A^{\rho\lambda})^\rho(x, y) = z,\ (A^{\rho\lambda})^{-1}(I^{-1}_{A^{\rho\lambda}}x, y) = z,\ A^{\rho\lambda}(I^{-1}_{A^{\rho\lambda}}x, z) = y,$$

$${}^{-1}(A^\rho)(I^{-1}_{A^{\rho\lambda}}x, I_{A^\rho}z) = y,\ A^\rho(y, I_{A^\rho}z) = I^{-1}_{A^{\rho\lambda}}x$$

и, наконец,

$$A^{-1}(I^{-1}_A y, I_{A^\rho}z) = I^{-1}_{A^{\rho\lambda}}x,$$

откуда следует

$$A(I^{-1}_A y,\ I^{-1}_{A^{\rho\lambda}}x) = I_{A^\rho}z. \tag{1.21}$$

Однако

$$I_A = I,\ I_{A^\rho} = I^{-1},\ I_{A^{\rho\lambda}} = I_{(A^\rho)^\lambda} = I^{-1}_{A^\rho} = I_A = I.$$

Поэтому из (1.21) имеем

$$A(I^{-1}x,\ I^{-1}y) = I^{-1}z, A^*(I^{-1}x, I^{-1}y) = I^{-1}z,$$

откуда

$$z = (A^*)^{I^{-1}}(x, y). \tag{1.22}$$

Сравнивая (1.2) и (1.22), мы доказываем равенство $A^{\rho\lambda\rho} = (A^*)^{I^{-1}}$. Итак, из данной лупы A можно получить лупы

$$A, A^\rho, A^\lambda, A^{\rho\lambda}, A^{\lambda\rho}, A^{\rho\lambda\rho}, A^{\lambda\rho\lambda}, A^{\rho\lambda\rho\lambda}, A^{\lambda\rho\lambda\rho}, \ldots \tag{1.23}$$

Но *с точностью до изоморфизма их только шесть*, так как $A^{\rho\lambda\rho}$ и $A^{\lambda\rho\lambda}$ изоморфны ввиду равенства $A^{\lambda\rho\lambda} = (A^{\rho\lambda\rho})^{I^2}$, и, применяя равенства (1.19), все лупы из (1.23) приведем к первым шести. Например

$$A^{\lambda\rho\lambda\rho} = (A^{\lambda\rho\lambda})^\rho = [(A^{\rho\lambda\rho})^{I^2}]^\rho = [(A^{\rho\lambda\rho})^\rho]^{I^2} = [(A^{\rho\lambda})^{\rho^2}]^{I^2} = (A^{\rho\lambda})^{I^2}.$$

Рассмотрим связь, которая существует между обратными операциями и изотопией. Пусть ${}^\sigma A$ — какая-нибудь обратная квазигруппа и пусть $T = (\alpha, \beta, \gamma)$. Через σT обозначим такое же перемещение в тройке (α, β, γ), которое производится σ в тройке (a, b, c), т. е. мы можем записать

$$T = (\alpha, \beta, \gamma) \leftrightarrow \sigma T = \sigma(\alpha, \beta, \gamma) = (\sigma\alpha, \sigma\beta, \sigma\gamma).$$

Лемма 1.3 ${}^\sigma(A^T) = ({}^\sigma A)^{\sigma T}$.

Пусть

$$^{\sigma}(A^{T})(x, y) = z. \tag{1.24}$$

В силу определения $^{\sigma}A$ равенство (1.24) эквивалентно равенству

$$A^{T}(x', y') = z', \tag{1.25}$$

где $\sigma(x', y', z') = (x, y, z)$. Но из (1.25) следует равенство

$$A(\alpha x', \beta y') = \gamma z',$$

которое эквивалентно равенству

$$^{\sigma}A(\alpha' x, \beta' y) = \gamma' z, \tag{1.26}$$

где $(\alpha', \beta', \gamma') = \sigma(\alpha, \beta, \gamma) = \sigma T$. Следовательно, из (1.26) вытекает

$$(^{\sigma}A)^{\sigma T}(x, y) = z. \tag{1.27}$$

Сравнивая (1.24) и (1.27), мы убеждаемся в справедливости леммы.

Следствие 1. $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T^{r}}$, $^{-1}(A^{T}) = (^{-1}A)^{T^{l}}$, *где* $T^{r} = (\alpha, \beta, \gamma)^{r} = (\alpha, \gamma, \beta)$, $T^{l} = (\gamma, \beta, \alpha)$.

Следствие 2. *Если B и A изотопны, то и $^{\sigma}B$ и $^{\sigma}A$ изотопны.*

Действительно, из $B = A^{T}$ следует $^{\sigma}B = {}^{\sigma}(A^{T}) = (^{\sigma}A)^{\sigma T}$.

Примечания

[1] Такую таблицу принято также называть *латинским квадратом*. Преимущественно этим термином пользуются в комбинаторном анализе (см. Холл [85, 86]).

[2] Определение 2 утверждает, что $Q(A)$ — квазигруппа, если в алгебре $Q(A, B, C)$ выполняются тождества (1.3). Все алгебры $Q(A, B, C)$ с тождеством (1.3) образуют так называемый примитивный класс (см. А. Г. Курош [47, стр. 155]), поэтому иногда $Q(A, B, C)$ называется *примитивной квазигруппой.*

[3] Термин «квазигруппа» введен Муфанг [54], а термин «лупа» — Албертом [1, 2]. Слово «лупа» происходит от английского слова loop (петля).

[4] Преобразование $A \to {}^{\sigma}A$ называется *парастрофией* (Сад [66], Арци [8]). Стейн [74], а также Чулик [88] изучают изменение тождеств при парастрофии квазигрупп — см. также гл. VIII (инвариантность дистрибутивности при парастрофии). Все изотопии и парастрофии квазигруппы порождают некоторую группу — *группу изострофий.* Эта группа изучается Садом [70], Арци [7, 8], а также автором [18], Арци [6] вводит немного отличные от нашего изложения понятия обратных луп и изучает их ядра. В [18] изучаются группы регулярных подстановок обратных квазигрупп.

[5] Стейн [74] называет операции из Σ_A сопряженными. Сад [66, 69] для каждой из операций из Σ_A (кроме A) вводит специальное название.

Глава II

ГРУППЫ РЕГУЛЯРНЫХ ПОДСТАНОВОК. АВТОТОПИИ КВАЗИГРУПП

1°. *Группы левых и правых регулярных подстановок.* Мы уже видели, что левые и правые регулярные подстановки тесно связаны с понятием ядра, а именно мы доказали следующие два предложения:

1) все левые (правые) регулярные подстановки квазигруппы $Q(\cdot)$ образуют группу $\mathscr{L}$ ($\mathscr{R}$);

2) если $Q(\cdot)$ обладает левой (правой) единицей e, то для любых $\lambda \in \mathscr{L}$ ($\rho \in \mathscr{R}$) имеем $\lambda e \in N_l$ ($\rho e \in N_r$) и, следовательно,

$$N_l = \{\lambda e\} = L_e (N_r = Re).$$

Более того, имеет место следующая

Теорема 2.1. *Группа левых регулярных подстановок квазигруппы $Q(\cdot)$ с левой единицей e изоморфна левому ядру N_l.*

Действительно, мы только что видели, что $N_l = Le = \{\lambda e\}$. Рассмотрим соответствие $\lambda \to \lambda e$. Это отображение $\mathscr{L}$ на N_l: если $a \in N_l$, то $\lambda = L_a$ и $\lambda \to \lambda e = L_a e = a$. Кроме того, соответствие $\lambda \to \lambda e$ взаимно однозначное, так как из $\lambda e = \mu e$ следует $\lambda = \mu$. В самом деле, если x — любой элемент из Q, то $\lambda x = \lambda(ex) = \lambda e \cdot x = \mu e \cdot x = \mu(ex) = \mu x$, т. е. $\lambda = \mu$. Пусть $\lambda, \mu \in \mathscr{L}$, тогда $\lambda\mu \to (\lambda\mu) e = \lambda(\mu e) = \lambda(e \cdot \mu e)$, откуда $\lambda\mu \to \lambda e \cdot \mu e$, а это означает, что $\mathscr{L}$ и N_l изоморфны.

Замечание. Аналогично доказывается, что $\mathscr{R} \cong N_r$, если N_r существует. Заметим здесь, что соответствие $\rho \to \rho e$, где $\rho \in R$ и e — правая единица квазигруппы $Q(\cdot)$, приводит к антиизоморфизму групп $\mathscr{R}$ и N_r: из $\rho_1 \to \rho_1 e$, $\rho_2 \to \rho_2 e$ ($\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{R}$) следует $\rho_1\rho_2 \to \rho_2 e \cdot \rho_1 e$. Однако если две группы антиизоморфны, то они изоморфны, поэтому $\mathscr{R} \cong N_r$.

Из доказательства теоремы 2.1 следует одновременно и такое свойство левых (и правых) регулярных подстановок: *если $\lambda, \mu \in \mathscr{L}$ и $\lambda a = \mu a$ для некоторого фиксированного a, то $\lambda = \mu$.*

Группа $\mathscr{L}$ левых регулярных подстановок определяет в квазигруппе $Q(\cdot)$ некоторую эквивалентность, а именно: будем считать

b и a эквивалентными и писать $b \sim a\ (\mathcal{L})$, если существует такая левая регулярная подстановка $\lambda \in \mathcal{L}$, что $b = \lambda a$. Каждый класс эквивалентности, следовательно, имеет вид $K = \mathcal{L}k = \{\lambda k\}$, где $\lambda \in \mathcal{L}$ и k — произвольный элемент из K.

Определение 1. Класс эквивалентности $K = \mathcal{L}k$, где k — любой элемент квазигруппы $Q(\cdot)$, а L — группа левых регулярных подстановок, назовем *левым ядром* (*относительно элемента* k) квазигруппы $Q(\cdot)$. Левое ядро (относительно элемента k) будем обозначать через $N_l(k)$.

Аналогично определяется *правое ядро* (*относительно элемента* k) квазигруппы $Q(\cdot)$.

В случае, когда $Q(\cdot)$ обладает левой единицей e, то одним из классов эквивалентности будет левое ядро N_l: $N_l = \mathcal{L}e\ (e \in N_l)$, причем, как мы уже видели, N_l — подквазигруппа.

Вообще говоря, один из классов эквивалентности квазигруппы $Q(A)$ может быть подквазигруппой и в том случае, когда $Q(A)$ не обладает единицей. Имеет место

Теорема 2.2. *Пусть K — некоторое левое ядро квазигруппы $Q(\cdot)$. Если K — подквазигруппа, то она изотопна группе $\mathcal{L}$ всех левых регулярных подстановок.*

Действительно, левое ядро K должно иметь вид $\mathcal{L}k$, где k — некоторый фиксированный элемент множества K, и если K — квазигруппа, то произведение $\lambda k \cdot \mu k$, где $\lambda, \mu \in \mathcal{L}$, также должно принадлежать K. Следовательно, существует такая левая регулярная подстановка γ, зависящая от λ и μ (при фиксированном k), что $\lambda k \cdot \mu k = \gamma k$. Таким образом, в множестве L мы ввели новую операцию. Обозначим ее через $(\circ)$, тогда $\gamma = \lambda \circ \mu$, т. е. $\gamma k \cdot \mu k = (\lambda \circ \mu) k$. Из определения этой операции следует, что $\mathcal{L}(\circ)$ — квазигруппа, изоморфная подквазигруппе $K\ (\cdot)$; изоморфизм осуществляется соответствием $k \to \lambda k$. Пусть $\alpha \in \mathcal{L}$. Тогда

$$\alpha(\lambda \circ \mu) = \alpha\lambda \circ \mu. \tag{2.1}$$

Действительно, $\alpha\ (\lambda \circ \mu)\ k = \alpha\ [(\lambda \circ \mu)\ k] = \alpha\ (\lambda k \circ \mu k) = \alpha\ (\lambda k)\mu k = (\alpha\lambda \circ \mu)k$ и на основании вышеприведенных свойств левых регулярных подстановок заключаем справедливость равенства (2.1).

Если ε — единичная подстановка (очевидно, ε — единица группы $\mathcal{L}$), то тогда $\varepsilon \circ \lambda = \lambda'$. Соответствие $\lambda \to \lambda'$ является взаимно однозначным отображением множества $\mathcal{L}$ на себя. Это следует из того, что в квазигруппе $\mathcal{L}(\circ)$ уравнение $\varepsilon \circ \xi = \lambda$ всегда однозначно разрешимо. Если мы в (2.1) положим $\lambda = \varepsilon$, то получим

$$\alpha\varepsilon \circ \mu = \alpha(\varepsilon \circ \mu),$$

откуда

$$\alpha \circ \mu = \alpha\mu'.$$

Последнее равенство означает, что $\mathcal{L}(\circ)$ и $\mathcal{L}(\cdot)$ главноизотопны, а так как $\mathcal{L}(\circ)$ и $K\ (\cdot)$ изоморфны, то теорема доказана.

Легко убедиться, что теорема 2.1 является частным случаем теоремы 2.2; для этого надо положить $K = N_l$, $k = e$. Тогда $\mu' = \mu$, так как $\mu' e = (\varepsilon \circ \mu) e = e \cdot \mu e = \mu e$, и, следовательно, $\alpha \circ \mu = \alpha\mu$.

Если K — левое ядро, то и $Kl = \{kl, k \in K\}$, где l — любой фиксированный элемент из Q, тоже будет левым ядром. Действительно, если зафиксируем k в K и возьмем $k_1 \sim k\,(\mathscr{L})$, то и $k, l \sim \sim kl\,(\mathscr{L})$. В самом деле, должна существовать такая подстановка $\lambda \in \mathscr{L}$, что $k_1 = \lambda k$, и тогда $k_1 l = \lambda k \cdot l = \lambda(kl)$, т. е. $k_1 l \sim kl(\mathscr{L})$. Обратно, пусть $p \sim kl\,(\mathscr{L})$. Рассмотрим уравнение $p = xl$. Существует $\mu \in L$ такое, что $p = \mu\,(kl)$, следовательно, $p = \mu k \cdot l = xl$, откуда $x = \mu k$, т. е. $x \in K$. Соответствие $k \to kl$ будет взаимно однозначным соответствием между элементами класса K и Kl. Отсюда в случае, когда Q конечно, следует

Теорема 2.3. *Пусть $Q(\cdot)$ — конечная квазигруппа. Тогда порядок ее группы $\mathscr{L}$ левых регулярных подстановок является делителем порядка квазигруппы.*

Теорема следует из равенства $K = \mathscr{L}k$, т. е. порядок группы $\mathscr{L}$ совпадает с числом элементов любого левого ядра, определяемого $\mathscr{L}$.

Заметим, что все сказанное выше для группы левых регулярных подстановок, очевидно, имеет место и для группы правых регулярных подстановок.

2°. *Средние регулярные подстановки.* Группы левых и правых регулярных подстановок тесно связаны соответственно с понятием левого и правого ядер. Эти группы играют для квазигруппы такую же роль, как левое, соответственно правое ядро для лупы. Сейчас мы введем группу подстановок, которая для квазигрупп будет играть ту же роль, которую играет среднее ядро для луп.

Определение 2. Подстановка φ множества Q называется *средней регулярной подстановкой* квазигруппы $Q(\cdot)$, если существует такая подстановка φ^*, что

$$\varphi x \cdot y = x \cdot \varphi^* y \tag{2.2}$$

для любых $x, y \in Q$.

Единичная подстановка является средней регулярной подстановкой, поэтому средние регулярные подстановки всегда существуют; легко видеть, что все они образуют группу (обозначим ее через Φ). В самом деле, если $\varphi, \psi \in \Phi$, то

$$\varphi\psi x \cdot y = \psi x \cdot \varphi^* y = x \cdot \psi^* \varphi^* y. \tag{2.3}$$

Согласно определению средних регулярных подстановок заключаем, что $\varphi\psi \in \Phi$. Из очевидного равенства $\varphi^{-1}x \cdot y = x \cdot (\varphi^*)^{-1} y$ получаем, что и $\varphi^{-1} \in \Phi$.

Как и группы $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$, группа Φ средних регулярных подстановок квазигруппы $Q(\cdot)$ также является подгруппой ассоциированной группы G квазигруппы $Q(\cdot)$. Действительно, равенство (2.2) можно переписать с помощью трансляций в виде $R_y\varphi x = R_{\varphi^* y} x$, т. е. $R_y \varphi = R_{\varphi^* y}$, откуда $\varphi = R_y^{-1} R_{\varphi^* y}$, следовательно, $\varphi \in G$ и $\Phi \subseteq G$.

Назовем подстановку φ^* *сопряженной подстановке* φ. Как следует из (2.3), все сопряженные подстановки к средним регулярным подстановкам образуют группу (обозначим ее через Φ^*), причем ввиду равенства (2.3) она будет антиизоморфной к группе Φ, а следовательно, Φ^* будет изоморфной группе Φ(см. замечание 1).

Предположим, что $Q(\cdot)$ — лупа с единицей e. Положим $x = e$ в равенстве (2.2)

$$\varphi^* y = \varphi e \cdot y.$$

Следовательно,

$$\varphi x \cdot y = x(\varphi e \cdot y).$$

Полагая теперь $y = e$, получаем

$$\varphi x = x \cdot \varphi e.$$

Таким образом, $(x \cdot \varphi e)\, y = x\,(\varphi e \cdot y)$. Последнее равенство показывает, что φe принадлежит среднему ядру N_m. Таким образом, $\varphi = R_a$, где $a = \varphi e \in N_m$. Обратное очевидно: если $\varphi = R_a$, $a \in N_m$, то $\varphi \in \Phi$: $\varphi x \cdot y = xa \cdot y = x \cdot ay = x \cdot \varphi^* y$, следовательно, $\varphi^* = L_a$. Как и для групп $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$, имеет место

Теорема 2.4. *Группа Φ средних регулярных подстановок лупы $Q(\cdot)$ изоморфна среднему ядру N_m. Следовательно, группа Φ^* сопряженных подстановок к средним регулярным подстановкам будет также изоморфна среднему ядру N_m.*

Доказательство теоремы 2.4 аналогично доказательству теоремы 2.1. Относительно группы Φ также можно рассмотреть классы эквивалентности $K = \Phi k$, где k—некоторый фиксированный элемент из K, причем два элемента b и a эквивалентны относительно Φ, если существует такая средняя регулярная подстановка φ, что $b = \varphi a$. Класс эквивалентности относительно Φ, содержащий элемент k, будем называть *средним ядром* (*относительно* k). *Средние ядра равномощны*, так как между элементами ядер $K_1 = \Phi k_1$, и $K_2 = \Phi k_2$ можно установить следующее взаимно однозначное соответствие $\varphi k_1 \leftrightarrow \varphi k_2$. Взаимная однозначность соответствия вытекает из следующего предложения: если для некоторого a имеем $\varphi a = \psi a$, где $\varphi, \psi \in \Phi$, то $\varphi = \psi$. Действительно, пусть $\varphi a \cdot x = \psi a \cdot x$ для любых x. Отсюда $a \cdot \varphi^* x = a \cdot \psi^* x$, следовательно, $\varphi^* x = \psi^* x$, т. е. $\varphi^* = \psi^*$. Но отсюда, опять пользуясь определением средней регулярной подстановки, заключаем, что $\varphi = \psi$. Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 2.5. *Пусть $Q(\cdot)$ — конечная квазигруппа. Тогда порядок группы Φ средних регулярных подстановок является делителем порядка квазигруппы* [1].

Из теорем 2.3 и 2.5 следует, между прочим, что порядки ядер конечной лупы являются делителями порядка лупы [39] [2].

3°. *Автотопии квазигрупп. Квазиавтоморфизмы.* В теории квазигрупп значительную роль играет и понятие автотопии:

Определение 3. Упорядоченная тройка $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ подстановок множества Q называется *автотопией*[3] квазигруппы $Q(\cdot)$, если

$$\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y) = x \cdot y$$

для любых $x, y \in Q$.

Следовательно, понятие автотопии является частным случаем изотопии (см. стр. 13). Достаточно положить $B = A$. Если $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ — автотопия квазигруппы $Q(A)$, то мы можем записать

$$A^T = A.$$

В частности, автотопия вида $(\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha$ будет автоморфизмом.

Нетрудно заметить (см. равенства (1.13) и (1.14)), что все автотопии квазигруппы $Q(A)$ образуют группу относительно умножения автотопий. Обозначим эту группу через $\mathfrak{A}_A$.

Легко видеть, что одноименные компоненты всех автотопий квазигруппы $Q(\cdot)$ тоже образуют группу. Действительно, пусть например, γ_1 и γ_2 — главные компоненты некоторых автотопий T_1 и T_2, т. е. $T_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $T_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Тогда $T_1T_2 = (\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \gamma_1\gamma_2) \in \mathfrak{A}_A$ и, следовательно, $\gamma_1\gamma_2$ тоже главная компонента некоторой автотопии.

Заметим здесь, что если T — автотопия, то любые две компоненты однозначно определяют третью. Например, пусть $T = (\alpha, \beta, \gamma)$, $T' = (\alpha, \beta', \gamma)$ и $T, T' \in \mathfrak{A}_A$, тогда $\beta = \beta'$. Действительно, $T'T^{-1} \in \mathfrak{A}_A$ и $T'T^{-1} = (1, \beta'\beta^{-1}, 1)$, т. е. $A(x, \beta'\beta^{-1}y) = A(x, y)$, откуда следует $\beta'\beta^{-1} = 1$ или $\beta' = \beta$.

Если подстановка φ является одной из компонент некоторой автотопии T, то ее назовем *автотопной. Все регулярные подстановки квазигруппы* $Q(\cdot)$ будут *автотопными*, так как $U_\lambda = (\lambda, 1, \lambda)$, $V_\rho = (1, \rho, \rho)$, $W_\varphi = (\varphi, \varphi^{*-1}, 1)$ являются автотопиями для $Q(\cdot)$*. Докажем теперь следующие леммы:

Лемма 2.1. *Если квазигруппы $Q(B)$ и $Q(A)$ изотопны, то их группы автотопии изоморфны.*

Лемма 2.1 более точно формулируется таким образом:

$$\mathfrak{A}_{A^T} = T^{-1}\mathfrak{A}_A T.$$

Действительно, пусть

$$B = A^T \tag{2.4}$$

---

* Здесь $\lambda \in \mathscr{L}$, $\rho \in \mathscr{R}$, $\varphi \in \Phi$.

и пусть $S \in \mathfrak{A}_B$: $B^S = B$. Следовательно, $(A^T)^S = A^T$, откуда $A^{TST^{-1}} = A$, а это означает, что

$$T\,\mathfrak{A}_B\,T^{-1} \subseteq \mathfrak{A}_A. \qquad (2.5)$$

Но из (2.4) следует $A = B^{T^{-1}}$ и, применяя к этому равенству соотношение (2.5), получаем $T^{-1}\mathfrak{A}_A T \subseteq \mathfrak{A}_B$, откуда

$$\mathfrak{A}_A \subseteq T\,\mathfrak{A}_B\,T^{-1}. \qquad (2.6)$$

Сравнивая включения (2.5) и (2.6), получаем равенство $\mathfrak{A}_A = T\mathfrak{A}_B T^{-1}$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.2. *Пусть* $S_1 = (1, \beta, \gamma)$, $S_2 = (\lambda, 1, \mu)$, $S_3 = (\pi, \rho, 1)$. *Тогда*

а) *если* S_3 — *автотопия квазигруппы* $Q(\cdot)$, *то* π — *средняя регулярная подстановка и* ρ^{-1} — *сопряженная к ней*;

б) *если* $Q(\cdot)$ — *лупа и* S_1, S_2 — *автотопии этой лупы, то* $\beta = \gamma$, $\lambda = \mu$ *и, следовательно,* β — *правая, а* λ — *левая регулярные подстановки.*

Действительно, пусть $(\cdot)^{S_3} = (\cdot)$, т. е. $\pi x \cdot \rho y = xy$. Тогда $\pi x \cdot y = x \cdot \rho^{-1} y$, откуда, ввиду определения средней регулярной подстановки, следует справедливость утверждения а).

Пусть теперь $Q(\cdot)$ — лупа и пусть $(\cdot)^{S_1} = (\cdot)$ или $\gamma^{-1}(x \cdot \beta y) = xy$. Положим $x = 1$ (1 — единица лупы), тогда $\gamma^{-1}\beta y = y$, т. е. $\gamma = \beta$. Следовательно, $S_1 = (1, \beta, \beta)$, откуда вытекает, что β — правая регулярная подстановка.

Введем следующее понятие.

Определение 4. Главная компонента автотопии T квазигруппы $Q(\cdot)$ называется *квазиавтоморфизмом* квазигруппы $Q(\cdot)$. Иными словами, подстановка γ множества Q называется квазиавтоморфизмом квазигруппы $Q(\cdot)$, если существуют другие две подстановки α и β множества Q, такие, что

$$\gamma(xy) = \alpha x \cdot \beta y, \qquad (2.6')$$

т. е. $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ — автотопия квазигруппы $Q(\cdot)$.

Из определения 4 и из того факта, что одноименные компоненты всех автотопий образуют группы, непосредственно следует

Лемма 2.3. *Все квазиавтоморфизмы квазигруппы* $Q(\cdot)$ *образуют группу*. Очевидно, группа автоморфизмов является подгруппой группы всех квазиавтоморфизмов.

Пусть $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ — автотопия лупы $Q(\cdot)$, тогда γ — квазиавтоморфизм лупы $Q(\cdot)$. Иными словами,

$$\gamma(xy) = \alpha x \cdot \beta y.$$

Пусть $x = 1$, тогда

$$\gamma y = \alpha 1 \cdot \beta y = l \cdot \beta y,$$

т. е. $\gamma = L_l\,\beta$, откуда

$$\beta = L_l^{-1}\gamma \ (l = \alpha 1). \tag{2.7}$$

Аналогично получаем

$$\alpha = R_k^{-1}\gamma \,(k = \beta\, 1), \tag{2.8}$$

т. е.

$$T = (R_k^{-1}, L_l^{-1}, 1)\,\gamma. \tag{2.9}$$

Таким образом, *любая автотопия T лупы $Q(\cdot)$ должна иметь вид* (2.8), где k, l — некоторые элементы множества Q. Из (2.9), следует

Лемма 2.4. *Все компоненты автотопии $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ будут квазиавтоморфизмами, если R_k и L_l, где $k = \beta 1$, $l = \alpha 1$, будут квазиавтоморфизмами лупы $Q(\cdot)$.*

Утверждение леммы 2.4 следует из равенств (2.7), (2.8) и леммы 2.3.

Следствие. *Если $Q(\cdot)$ — группа, то компоненты любой автотопии будут квазиавтоморфизмами этой группы.*

В самом деле, в этом случае R_k и L_l всегда являются квазиавтоморфизмами:

$$R_k(x\cdot y) = x\cdot R_k y, \quad L_l(x\cdot y) = L_l x\cdot y,$$

т. е. $(1, R_k, R_k)$, $(L_l, 1, L_l)$ — автотопии группы $Q(\cdot)$ (иными словами, R_k и L_l являются в этом случае правой, соответственно левой регулярными подстановками группы $Q(\cdot)$). В случае, когда $Q(\cdot)$ — группа, квазиавтоморфизмы имеют простое строение.

Лемма 2.5. *Любой квазиавтоморфизм γ группы $Q(\cdot)$ имеет вид*

$$\gamma = R_s\gamma_0, \tag{2.10}$$

где γ_0 — некоторый автоморфизм группы $Q(\cdot)$, а s — некоторый элемент из Q, и, обратно, подстановка γ, определяемая равенством (2.10), *будет квазиавтоморфизмом группы $Q(\cdot)$.*

Действительно, пусть γ — квазиавтоморфизм группы $Q(\cdot)$, т. е. существует автотопия вида (α, β, γ). В силу равенств (2.7) и (2.8) имеем $\alpha = R_k^{-1}\gamma$, $\beta = L_l^{-1}\gamma$. Но в группе выполняется $R_a^{-1} = R_{a^{-1}}$, $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ для любого a. Следовательно, равенство (2.6′) принимает вид

$$\gamma(xy) = (\gamma x\cdot k^{-1})(l^{-1}\gamma y)$$

или

$$\gamma(xy) = \gamma x\,(\gamma 1)^{-1}\gamma y, \tag{2.11}$$

так как

$$k^{-1}l^{-1} = (lk)^{-1} = (\alpha 1\cdot \beta 1)^{-1} = (\gamma 1)^{-1}.$$

Пусть

$$\gamma x \cdot (\gamma 1)^{-1} = \gamma_0 x. \tag{2.12}$$

Умножая справа обе части равенства (2.11) на $(\gamma 1)^{-1}$, получаем

$$\gamma_0 (xy) = \gamma_0 x \cdot \gamma_0 y,$$

т. е. γ_0—автоморфизм группы $Q(\cdot)$. Из равенства (2.12) следует равенство (2.10). Обратное утверждение очевидно: любой автоморфизм и любая трансляция в группе являются квазиавтоморфизмами, поэтому произведение $R_s\gamma_0$ должно быть квазиавтоморфизмом.

З а м е ч а н и е. Квазиавтоморфизм γ можно представить и в виде

$$\gamma = L_s\gamma_0',$$

где γ_0' — некоторый автоморфизм. В самом деле, из (2.10) следует

$$\gamma x = R_s\gamma_0 x = \gamma_0 x \cdot s = s(s^{-1}\cdot\gamma_0 x\cdot s) = s\cdot\theta_s\gamma_0 x = s\cdot\gamma_0' x = L_s\gamma_0' x,$$

где $\gamma_0' = \theta_s\gamma_0$ и θ_s — внутренний автоморфизм:

$$\theta_s x = s^{-1}xs.$$

С л е д с т в и е. *Квазиавтоморфизм γ группы $Q(\cdot)$ тогда и только тогда автоморфизм, когда $\gamma 1 = 1$.* Действительно, $\gamma 1 = R_s\gamma_0 1 = R_s 1 = s$, т. е. $s = 1$, и, следовательно, $\gamma = \gamma_0$.

Т е о р е м а 2. 6. *Любая автотопия T группы $Q(\cdot)$ имеет вид*

$$T = (L_c, R_d, L_cR_d)\theta,$$

где θ — автоморфизм группы $Q(\cdot)$, c, d — фиксированные элементы из Q.

Действительно, заметим, что в группе Q имеет место равенство

$$R_kL_l = L_lR_k \tag{2.13}$$

для любых k и $l \in Q$, так как равенство (2.13) эквивалентно ассоциативному закону.

Пусть $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ — автотопия группы $Q(\cdot)$, тогда T имеет вид (2.9)

$$T = (R_k^{-1}, L_l^{-1}, 1)\gamma,$$

откуда в силу (2.13) получаем

$$T = (L_l, R_k, L_lR_k)R_k^{-1}L_l^{-1}\gamma.$$

Подстановки L_l, R_k, γ являются квазиавтоморфизмами группы $Q(\cdot)$, поэтому и $\theta = R_k^{-1}L_l^{-1}\gamma$ тоже квазиавтоморфизм группы $Q(\cdot)$.

Но $\theta 1 = 1$:

$$R_k^{-1} L_l^{-1} \gamma 1 = R_k^{-1} L_l^{-1} (\alpha 1 \cdot \beta 1) = R_k^{-1} L_l^{-1} (lk) = 1,$$

поэтому в силу следствия леммы 2.5 θ является автоморфизмом группы $Q(\cdot)$.

4°. *Тип квазигруппы*. Дадим следующее

Определение 5. Упорядоченную тройку $(\mathscr{L}, \Phi, \mathscr{R})$ регулярных подстановок квазигруппы $Q(\cdot)$ или изоморфных им групп назовем *типом квазигруппы* $Q(\cdot)$. Тип (F, G, H) назовем *подтипом* типа (F', G', H'), если F, G, H являются подгруппами или изоморфны соответственно подгруппам из F', G', H' [14].

На основании теоремы 2.1, замечания 1 и теоремы 2.4 следует, что для лупы $Q(\cdot)$ типом может служить тройка ядер: (N_l, N_m, N_r). В частности, если $Q(\cdot)$ — группа, то ее типом будет (Q, Q, Q).

Возникает следующий естественный вопрос: как меняется тип квазигруппы при изотопии? Частичный ответ для квазигрупп на этот вопрос дает

Теорема 2.7. *Тип квазигруппы $Q(A)$ является подтипом типа любой изотопной ей лупы.*

Доказательство. Пусть квазигруппа $Q(A)$ изотопна лупе $Q(\cdot)$: $A = (\cdot)^T$, где $T = (\alpha, \beta, \gamma)$.

1. Найдем $\mathscr{L}_A$. Для этого найдем автотопии квазигруппы $Q(A)$ вида $U_\lambda = (\lambda, 1, \lambda)$. Согласно лемме 2.1 $\mathfrak{A}_{(\cdot)} = T\mathfrak{A}_A T^{-1}$, следовательно, $TU_\lambda T^{-1} \in \mathfrak{A}_{(\cdot)}$. Но

$$TU_\lambda T^{-1} = (\alpha, \beta, \gamma)(\lambda, 1, \lambda)(\alpha, \beta, \gamma)^{-1} =$$
$$= (\alpha, \beta, \gamma)(\lambda, 1, \lambda)(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}) = (\alpha\lambda\alpha^{-1}, 1, \gamma\lambda\gamma^{-1}).$$

Применяя лемму 2.2, находим

$$\alpha\lambda\alpha^{-1} = \gamma\lambda\gamma^{-1} \tag{2.14}$$

и

$$\gamma\lambda\gamma^{-1} \in \mathscr{L}. \tag{2.15}$$

Из (2.14) следует $(\gamma^{-1}\alpha)\lambda = \lambda(\gamma^{-1}\alpha)$, т. е. λ принадлежит централизатору* $\mathfrak{N}_{\gamma^{-1}\alpha}$ подстановки $\gamma^{-1}\alpha$ в симметрической группе $\mathfrak{S}_Q$. Кроме того, из соотношения (2.15) следует $\lambda \in \gamma^{-1}\mathscr{L}\gamma$. Таким образом

$$\mathscr{L}_A \subseteq \gamma^{-1}\mathscr{L}\gamma \cap \mathfrak{N}_{\gamma^{-1}\alpha}. \tag{2.16}$$

Обратно, пусть $\lambda \in \gamma^{-1}\mathscr{L}\gamma \cap \mathfrak{N}_{\gamma^{-1}\alpha}$. Тогда $\lambda = \gamma^{-1}\lambda'\gamma$, где $\lambda' \in \mathscr{L}$). Покажем, что $\lambda \in \mathscr{L}_A$:

$$\lambda A(x, y) = \lambda\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y) = \gamma^{-1}\lambda'\gamma\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y) = \gamma^{-1}\lambda'(\alpha x \cdot \beta y) =$$
$$= \gamma^{-1}(\lambda'\alpha x \cdot \beta y) = \gamma^{-1}(\gamma\lambda\gamma^{-1}\alpha x \cdot \beta y) = \gamma^{-1}(\gamma\lambda(\gamma^{-1}\alpha)x \cdot \beta y) =$$
$$= \gamma^{-1}(\gamma\gamma^{-1}\alpha\lambda x \cdot \beta y) = \gamma^{-1}(\alpha\lambda x \cdot \beta y) = A(\lambda x, y).$$

---

* *Централизатором* $\mathfrak{N}_a$ элемента a группы $Q(\cdot)$ называется совокупность всех элементов x, коммутирующих с a: $xa = ax$. Централизатор $\mathfrak{N}_a$ является подгруппой группы $Q(\cdot)$.

Следовательно,

$$\gamma^{-1}\mathscr{L}\gamma \cap \mathfrak{N}_{\gamma^{-1}\alpha} \subseteq \mathscr{L}_A. \tag{2.17}$$

Сравнивая соотношения (2.16) и (2.17), получаем равенство

$$\mathscr{L}_A = \gamma^{-1}\mathscr{L}\gamma \cap \mathfrak{N}_{\gamma^{-1}\alpha}. \tag{2.18}$$

Аналогично имеем

$$\mathscr{R}_A = \gamma^{-1}\mathscr{R}\gamma \cap \mathfrak{N}_{\gamma^{-1}\beta}. \tag{2.19}$$

Таким образом, $\mathscr{L}_A$ является подгруппой группы $\gamma^{-1}\mathscr{L}\gamma$, т. е. $\mathscr{L}_A$ изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathscr{L}$ и соответственно из (2.19) следует, что $\mathscr{R}_A$ — изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathscr{R}$.

Замечание. Если $Q(A)$ главно изотопна лупе, то формулы (2.18) и (2.19) упрощаются: пусть $A = (\cdot)^T$ и $T = (\alpha, \beta, 1)$, тогда

$$\mathscr{L}_A = \mathscr{L} \cap \mathfrak{N}_\alpha, \quad \mathscr{R}_A = \mathscr{R} \cap \mathfrak{N}_\beta.$$

2. Докажем теперь следующее предложение: *если квазигруппы $Q(A)$ и $Q(B)$ изотопны, то Φ_A и Φ_B изоморфны.*

Пусть $A = B^T = B^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ и $\varphi \in \Phi_A$, тогда существует такая подстановка $\varphi^* \in \Phi_A^*$, что

$$A(\varphi a, b) = A(a, \varphi^* b),$$

откуда, переходя к операции B, получаем

$$\gamma^{-1}B(\alpha\varphi a, \beta b) = \gamma^{-1}B(\alpha a, \beta\varphi^* b),$$

$$B(\alpha\varphi\alpha^{-1}a, b) = B(a, \beta\varphi^*\beta^{-1}b).$$

Следовательно, $\alpha\varphi\alpha^{-1} \in \Phi_B$, откуда $\varphi \in \alpha^{-1}\Phi_B\alpha$, поэтому

$$\Phi_A \subseteq \alpha^{-1}\Phi_B\alpha. \tag{2.20}$$

Но если $A = B^T$, то $B = A^{T^{-1}}$, и, применяя к этому равенству соотношение (2.20), получаем:

$$\Phi_B \subseteq \alpha\Phi_A\alpha^{-1},$$

откуда

$$\alpha^{-1}\Phi_B\alpha \subseteq \Phi_A. \tag{2.21}$$

Сравнивая соотношения (2.20) и (2.21), находим

$$\Phi_A = \alpha^{-1}\Phi_B\alpha. \tag{2.22}$$

В случае нашей теоремы, когда $B = (\cdot)$, имеем

$$\Phi_A = \alpha^{-1}\Phi\alpha.$$

Соотношения (2.20), (2.21) и (2.24) доказывают теорему. Непосредственным следствием теоремы 2.7 является

Т е о р е м а 2.8. *Изотопные лупы имеют одинаковый тип.* Действительно, пусть $Q(A)$ и $Q(\cdot)$ — лупы и пусть $A = (\cdot)^T = (\cdot)^{(\alpha,\beta,\gamma)}$. Из (2.24) сразу следует, что $\Phi_A = \alpha^{-1}\Phi\alpha$. Из равенства (2.16) имеем

$$\mathscr{L}_A \subseteq \gamma^{-1}\mathscr{L}\gamma. \tag{2.23}$$

Но $(\cdot) = A^{T^{-1}}$, следовательно, применяя соотношение (2.23), получаем $\mathscr{L} \subseteq \gamma\mathscr{L}_A\gamma^{-1}$, откуда $\gamma^{-1}\mathscr{L}\gamma \subseteq \mathscr{L}_A$.

Таким образом

$$\mathscr{L}_A = \gamma^{-1}\mathscr{L}\gamma.$$

Аналогично находим

$$\mathscr{R}_A = \gamma^{-1}\mathscr{R}\gamma.$$

С л е д с т в и е. *Ядра изотопных луп соответственно изоморфны.* Другим следствием теоремы 2.7 является теорема Алберта. Если лупа $Q(A)$ изотопна группе $Q(\cdot)$, то ее тип совпадает с типом группы $Q(\cdot)$, т. е. с (Q, Q, Q). Таким образом, левое ядро, например, лупы $Q(A)$ совпадает с Q, т. е. A — ассоциативная операция.

5°. *Транзитивные квазигруппы. Медиальная квазигруппа.* Если левое ядро (относительно некоторого элемента k) совпадает со всей квазигруппой $Q(\cdot)$, то группа левых регулярных подстановок транзитивна на множестве Q. В связи с этим целесообразно ввести следующее понятие:

О п р е д е л е н и е 6. Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется *$\mathscr{L}$-транзитивной*, если группа $\mathscr{L}$ всех регулярных подстановок транзитивна на множестве Q.

Аналогично определяется $\mathscr{R}$- и Φ-транзитивность. Простым примером транзитивных (т. е. $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- или Φ-транзитивных) квазигрупп может служить группа (другие примеры приводятся). С другой стороны, если лупа $Q(\cdot)$ $\mathscr{L}$-транзитивна ($\mathscr{R}$-транзитивна, Φ-транзитивна), то она группа. Действительно, в этом случае например, $N_l = \mathscr{L}1 = \{\lambda 1\} = Q$ в силу транзитивности $\mathscr{L}$. Транзитивные квазигруппы очень тесно связаны с группами, а именно имеет место

Т е о р е м а 2.9. *Любая лупа $Q(\cdot)$, изотопная транзитивной квазигруппе $Q(A)$, является группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\mathscr{L}$- и $\mathscr{R}$-транзитивности утверждение теоремы следует из теоремы 2.2.

Действительно, если квазигруппа $Q(A)$ $\mathscr{L}$-транзитивна, то это означает, что $Q = Lk$, где k — некоторый элемент из Q. Так как в этом случае Q является левым ядром, то ввиду теоремы 2.2 $Q(A)$ должна быть изотопна группе $\mathscr{L}$ всех левых регулярных подстановок.

Пусть $Q(A)$ — Φ-транзитивна, т. е. Φ_A — транзитивна на Q. Пусть далее $Q(\cdot)$ — любая лупа, изотопная $Q(A)$: $A = (\cdot)^T$, где $T = (\alpha, \beta, \gamma)$. Ввиду равенства (2.22) имеем $\Phi_A = \alpha^{-1}\Phi\alpha$, где Φ —

группа средних регулярных подстановок для лупы $Q(\cdot)$. Следовательно, $\Phi = \alpha\Phi_A\alpha^{-1}$. Так как Φ_A транзитивна на Q, то и Φ тоже транзитивна на Q, и, следовательно, $Q(\cdot)$ Φ — транзитивная лупа. Но тогда $Q(\cdot)$ является группой, так как в этом случае $N_m = Q$. Обратно, если квазигруппа $Q(A)$ изотопна группе $Q(\cdot)$, то она Φ-транзитивна; это утверждение следует из равенства (2.23). Заметим, что для $\mathcal{L}$- и $\mathcal{R}$-транзитивности обратное утверждение, вообще говоря, неверно: квазигруппа, изотопная группе, может и не быть $\mathcal{L}$-или $\mathcal{R}$- транзитивной (см. гл. VIII, п 3°).

Итак, существуют транзитивные квазигруппы, отличные от группы. Наиболее важной из транзитивных квазигрупп является медиальная квазигруппа. Дадим следующее

Определение 7. Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется *медиальной* [4], если в ней выполняется тождество

$$(xy)(uv) = (xu)(yv). \tag{2.24}$$

Пример. Пусть Q — поле всех рациональных чисел. Определим операцию $A(x, y) = ax + by + c$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Легко видеть, что $Q(A)$ — медиальная квазигруппа.

Лемма 2.6. *Медиальная квазигруппа Φ-транзитивна.*

Действительно, тождество (2.24) с помощью трансляций можно переписать в следующем виде:

$$R_y x \cdot L_u v = R_u x \cdot L_y v,$$

откуда

$$R_y R_u^{-1} x \cdot v = x \cdot L_y L_u^{-1} v.$$

Таким образом, подстановка $\alpha = R_y R_u^{-1}$ — средняя регулярная подстановка для $Q(\cdot)$. Если a и b — какие-нибудь элементы, то существует такая средняя регулярная подстановка β, что $\beta a = b$. В качестве β можно взять $R_c R_d^{-1}$, где d — некоторый фиксированный элемент, а c — решение уравнения $R_d^{-1} a \cdot x = b$.

Предыдущая лемма и теорема 2.8. дают возможность доказать следующую теорему Тойода [79] [5]:

Теорема 2.10. *Пусть $Q(A)$ — медиальная квазигруппа. Тогда существует такая абелева группа $Q(+)$, что операция A имеет вид*

$$A(x, y) = \varphi x + \psi y + c,$$

где φ, ψ — автоморфизмы группы $Q(+)$, причем $\varphi\psi = \psi\varphi$, и c — некоторый фиксированный элемент из Q.

Доказательство. Так как медиальная квазигруппа $Q(A)$ Φ-транзитивна, то по теореме 2.10 любая лупа $Q(+)$, изотопная $Q(A)$, будет группой. Рассмотрим главный изотоп $(+) = A_{a,b}$

$$x + y = A(R_a^{-1}x, L_b^{-1}y). \tag{2.25}$$

Таким образом, $Q(+)$ будет группой с единицей $A(b, a)$. Обозначим $A(b, a)$ через 0. Из (2.25) следует

$$A(x, y) = R_a x + L_b y. \tag{2.26}$$

Переходим в тождестве медиальности (2.24) к операции (+)

$$R_a(R_a x + L_b y) + L_b(R_a u + L_b v) = R_a(R_a x + L_b u) + L_b(R_a y + L_b v),$$

откуда

$$R_a(x + y) + L_b(u + v) = R_a(x + L_b R_a^{-1} u) + L_b(R_a L_b^{-1} y + v).$$

Пусть $u = 0$, $v = L_b^{-1} 0$, тогда

$$R_a(x + y) = \alpha x + \beta y,$$

где $\alpha x = R_a(x + L_b R_b^{-1} 0)$, $\beta y = L_b(R_a L_b^{-1} y + L_b^{-1} 0)$. Следовательно, R_a — квазиавтоморфизм группы $Q(+)$. Аналогично доказывается, что L_b — квазиавтоморфизм группы $Q(+)$. В силу леммы 2.5 R_a и L_b имеют вид

$$R_a x = \varphi x + k,\ L_b x = l + \psi x, \tag{2.27}$$

где φ, ψ — автоморфизмы группы $Q(+)$.

Следовательно, из (2.26) и (2.27) находим

$$A(x, y) = \varphi x + c + \psi y, \tag{2.28}$$

где $c = k + l$. Переходим в (2.24) снова к операции (+), на этот раз пользуясь равенством (2.28):

$$\varphi(\varphi x + c + \psi y) + c + \psi(\varphi u + c + \psi v) = \varphi(\varphi x + c + \psi u) + c + \psi(\varphi y + c + \psi v),$$ откуда

$$\varphi^2 x + \varphi c + \varphi\psi y + c + \psi\varphi u + \psi c + \psi^2 c = \varphi^2 x + \varphi c + \varphi\psi u + c + \psi\varphi y + \psi c + \psi^2 v,$$ или после сокращений

$$\varphi\psi y + c + \psi\varphi u = \varphi\psi u + c + \psi\varphi y. \tag{2.29}$$

Если $u = 0$, то из (2.29) получаем

$$\varphi\psi y + c = c + \psi\varphi y. \tag{2.30}$$

Применим (2.30) к обеим частям равенства (2.29), тогда

$$\varphi\psi y + \varphi\psi u + c = \varphi\psi u + \varphi\psi y + c,$$

откуда, заменяя y и u соответственно на $\varphi^{-1}\psi^{-1} y$ и $\varphi^{-1}\psi^{-1} u$, получаем

$$y + u = u + y,$$

т. е. $Q(+)$ — абелева группа. Из равенства (2.30) следует $\varphi\psi y = \psi\varphi y$, т. е. $\varphi\psi = \psi\varphi$. Теорема доказана.

Примечания

[1] Другие свойства групп регулярных подстановок рассмотрены в [12, 14, 18]. В последней статье изучены типы луп. Доказано, что существуют лупы с наперед заданным типом и, в частности, лупы с типом (1, 1, 1). Регулярные подстановки квазигрупп изучены также Маттене [50].

[2] Другие свойства ядер луп рассмотрены в работах Гаррисона [39], Брака [31] и др.

[3] Наряду с понятием автотопии можно рассматривать понятие антиавтотопии: $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ называется *антиавтотопией* квазигруппы $Q(\cdot)$, если $\gamma(xy) = \alpha y \cdot \beta x$. Автотопии и антиавтотопии изучались различными авторами, отметим здесь последние работы Сàда [69, 73].

[4] В литературе по квазигруппам встречается разнобой относительно названия квазигрупп с тождеством (2.24). Так, они названы *абелевыми* Браком [24], Гриффином [43], Мёдочем [52]. Эттерингтон [91], Сад [64, 67] называют тождество (2.24) *энтропией*. В теории функциональных уравнений тождество (2.24) принято называть *бисимметрией* (см. Ацель [9], а также [11]). Следуя Стейну [74], мы придерживаемся термина «медиальная» квазигруппа.

[5] Доказательство теоремы Тойода имеется также у Брака [24] и у Мёдоча [52].

Глава III

ПРОИЗВОДНЫЕ ОПЕРАЦИИ. F-КВАЗИГРУППЫ

1°. *Постулаты Сушкевича и Мёдоча.* Самым важным и наиболее часто встречающимся в алгебре тождеством следует считать, пожалуй, тождество ассоциативности. Операция A, заданная на множестве Q, ассоциативна, если

$$A\,[A\,(x,\,y),\,z] = A\,[x,\,A\,(y,\,z)]$$

для любых $x,\,y,\,z \in Q$. Как известно, в этом случае группоид $Q\,(A)$ называется *полугруппой*. Изучая квазигруппы и лупы, естественно поставить вопрос: насколько они близки к группам, т. е. «насколько» в них выполняется ассоциативный закон. Отсюда, между прочим, естественно возникло рассматриваемое в гл. I понятие ядра. В теории квазигрупп поэтому часто рассматривались тождества, более или менее связанные с ассоциативным законом. Мёдоч [51] подсказал следующий подход к изучению квазигрупп и луп.

Пусть $Q\,(A)$ — квазигруппа. Рассмотрим в $Q\,(A)$ уравнение $A\,[A\,(a,\,b),\,c] = A\,[a,\,A\,(b,\,x)]$. Это уравнение имеет единственное решение, зависящее от $a,\,b,\,c$. Поэтому мы вправе записать $x = S_{a,\,b}c$, где $S_{a,\,b}$ — некоторая подстановка множества Q. Ее даже можно выразить через трансляции: $S_{a,\,b} = L_b^{-1}L_a^{-1}L_{A\,(a,\,b)}$, но это для нас сейчас не важно. Чем «ближе» $S_{a,\,b}$ к единичной подстановке, тем квазигруппа $Q\,(A)$ «ближе» к группам. Равенство

$$A\,[A\,(a,\,b),\,c] = A\,[a,\,A\,(b,\,S_{a,\,b}\,c)], \tag{3.1}$$

имеющее вид ассоциативного закона, выполняется в любой квазигруппе, но, разумеется, оно, пока что далеко от ассоциативного закона.

Итак, если $S_{a,\,b}$ зависит от a и b, то мы ничего нового по существу не получаем. Однако могут представиться следующие частные случаи:

1. $S_{a,b}$ зависит только от b: $S_{a,\,b}=S_b$. Тогда мы можем обозначить выражение $A\,(b,\,S_b\,c)$ через $B\,(b,\,c)$, и (3.1) принимает вид

$$A\,[A\,(a,\,b),\,c]=A\,[a,\,B\,(b,\,c)]. \tag{3.2}$$

Это нечто иное, как постулат «A» Сушкевича [78]. Им доказана

Т е о р е м а 3.1. *Если в квазигруппе $Q\,(A)$ выполняется постулат «A», то $Q\,(B)$ — группа и A является изотопом B вида $B^{(\varphi,\,1,\,\varphi)}$.*

Действительно, легко видеть, что операция B обратима, это следует из равенства (3.2). Надо доказать, что B ассоциативна. Имеем, пользуясь несколько раз постулатом «A»:

$$A\,\{a,\,B\,[B\,(b,\,c),\,d]\}=A\,\{A\,[a,\,B\,(b,\,c)],\,d\}=A\,\{A\,[A\,(a,\,b),\,c],\,d\}=$$
$$=A\,[A\,(a,\,b),\,B\,(c,\,d)]=A\,\{a,\,B\,[b,\,B\,(c,\,d)]\},$$
$$B\,[B\,(b,\,c),\,d]=B\,[b,\,B\,(c,\,d)].$$

Пусть $\varphi^{-1}=L_a$, тогда из (3.2) получаем $A\,(\varphi^{-1}b,\,c)=\varphi^{-1}B\,(b,\,c)$, откуда $A\,(b,c)=\varphi^{-1}B\,(\varphi b,\,c)$, т. е. $A=B^{(\varphi,\,1,\,\varphi)}$. Обратно, если $Q\,(B)$ — группа и φ — любая подстановка множества Q, то в квазигруппе $Q\,(A)$, где $A=B^{(\varphi,\,1,\,\varphi)}$, выполняется постулат «$A$». В справедливости этого факта легко убедиться простой проверкой равенства (3.2).

2. $S_{a,\,b}$ зависит только от a: $S_{a,\,b}=S_a$. Тогда равенство (3.1) принимает вид

$$A\,[A\,(a,\,b),\,c]=A\,[a,\,A\,(b,\,S_a c)]. \tag{3.3}$$

В отличие от первого случая, строение квазигруппы с тождеством (3.3) гораздо сложнее. Назовем эти квазигруппы для краткости F-квазигруппами [1]. Как увидим дальше, существует F-квазигруппы, не изотопные группам. Они были изучены частично в [51, 15].

3. $S_{a,\,b}$ не зависит от a и b, т. е. $S_{a,\,b}=S$:

$$A\,[A\,(a,\,b),\,c]=A\,[a,\,A\,(b,\,Sc)]. \tag{3.4}$$

Это не что иное, как постулат «B» Сушкевича [78]. Рассмотрим изотоп B операции A

$$B=A^{(1,\,S,\,1)}. \tag{3.5}$$

Следовательно, равенство (3.4) превращается в (3.2) и по теореме Сушкевича $Q\,(B)$ — группа. Более того, имеет место

Т е о р е м а 3.2. *Если в квазигруппе $Q\,(A)$ выполняется постулат «B» Сушкевича, то $Q\,(A)$ изотопна некоторой группе $Q\,(B)$, притом $A=B^{(1,\,\theta,\,1)}$, где θ — автоморфизм группы $Q\,(B)$.*

Действительно, из первой теоремы Сушкевича следует, что A имеет вид $A=B^{(\varphi,\,1,\,\varphi)}$. С другой стороны, из (3.5) имеем $A=B^{(1,\,S^{-1},\,1)}$. Таким образом, $B^{(\varphi,\,1,\,\varphi)}=B^{(1,\,S^{-1},\,1)}$, откуда

$B^{(\varphi, 1, \varphi)(1, S^{-1}, 1)^{-1}} = B$ или $B^{(\varphi, S, \varphi)} = B$. Следовательно, $T = (\varphi, S, \varphi)$ является автотопией группы $Q(B)$. Тогда в силу теоремы 2.6 существуют два элемента $c, d \in Q$ и автоморфизм θ группы $Q(B)$ такие, что

$$T = (L_c, R_d, L_cR_d)\,\theta = (L_c\theta, R_d\theta, L_cR_d\,\theta).$$

Следовательно, $\varphi = L_c\theta = L_cR_d\theta$, откуда следует $R_d = 1$, $d = 1$ и $S = R_d\theta = \theta$, т. е. S — автоморфизм группы $Q(B)$. Заметим здесь, что S — автоморфизм и квазигруппы $Q(A)$, так как

$$A^S = [B^{(1, S^{-1}, 1)}]^S = B^{(1, S^{-1}, 1)S} = B^{(S, 1, S)} = \\ = B^{S(1, S^{-1}, 1)} = B^{(1, S^{-1}, 1)} = A.$$

Мы пришли к новому классу квазигрупп: квазигруппу $Q(A)$ назовем *специальной*, если $S_{a, b}$ является ее автоморфизмом. Многие известные лупы являются специальными.

Таким образом, исходя из уравнения $A[A(a, b), c] = A(a. A(b, x))]$, мы пришли к двум новым классам квазигрупп: F-квазигруппам и специальным квазигруппам. Однако равенство (3.1), имеющее место в любой квазигруппе, можно рассматривать и в аспекте, который подсказывается пунктом 1°. Выражение $A(b, S_{a, b}c)$ можно считать результатом применения к элементам b и c некоторой операции, зависящей от a. Если эту операцию обозначим через A_a, то имеем $A(b, S_{a, b}c) = A_a(b, c)$ и

$$A[A(a, b), c] = A[a, A_a(b, c)]. \tag{3.6}$$

К этому равенству приходим, рассматривая уравнение $A[A(a,b),c]=A(a,x)$. Решение этого уравнения при фиксированном a зависит от b и c, т. е. это уравнение определяет некоторую бинарную операцию, зависящую от a, которую мы обозначим через A_a. Операцию A_a назовем *правой производной операцией*[2] *операции A, определяемой элементом a*: Аналогично уравнение $A[b, A(c, a)] = A(y, a)$ определяет *левую производную операцию* ${}_aA$

$$A[b, A(c, a)] = A[{}_aA(b, c), a].$$

Таким образом, с каждой обратимой операцией можно ассоциировать правые и левые производные операции.

2°. *Элементарные свойства производных операций.* Рассмотрим некоторые простые свойства производных операций. Мы их объединим в одну общую теорему.

Т е о р е м а 3.3. *Если $Q(A)$ — квазигруппа и A_a — правая производная операция, определяемая элементом a, тогда:*

1) *A_a — обратимая операция, т. е. $Q(A_a)$ — квазигруппа. Квазигруппа $Q(A_a)$ обладает левой единицей e_a. Правая локальная*

единица для a, т. е. e_a, является левой единицей квазигруппы $Q(A_a)$;

2) $(A_a)_b = A_{A(a,\,b)}$; (3.7)

3) *если* $A_a = A$, *то* a — *левый ассоциативный элемент*;

4) $Q({}_b(A_a))$ — *лупа, для любых* a, b *с единицей* e_a;

5) *квазигруппы* $Q(A_a)$, $Q({}_bA)$ *изотопны квазигруппе* $Q(A)$.

Для левых производных операций имеют место аналогичные свойства:

Доказательство: 1. Докажем, что уравнение $A_a(x, b) = c$ имеет единственное решение для любых b, c. Для этого рассмотрим уравнение $A[A(a, x), b] = A(a, c)$. Решение этого уравнения существует, так как $A[A(a, x_0), b] = A[a, A_a(x_0, b)] = A(a, c)$, мы находим $A_a(x_0, b) = c$. Таким образом, уравнение $A_a(x, b) = c$ имеет решение x_0. Единственность очевидна. Аналогично решается уравнение $A_a(b, y) = c$.

Далее, пусть e_a — правая локальная единица для a: $A(a, e_a) = a$. Подставляем в равенство (3.6) e_a вместо b

$$A[A(a, e_a), c] = A[a, A_a(e_a, c)],$$

$$A(a, c) = A[a, A_a(e_a, c)],$$

$$C = A_a(e_a, c),$$

т. е. e_a — левая единица квазигруппы $Q(A_a)$.

2. Для того чтобы найти $(A_a)_b$ надо найти правую производную операции A_a по b, используя определение

$$A_a[A_a(b, c), d] = A_a[b, (A_a)_b(c, d)],$$

из которого следует

$$A\{a, A_a[A_a(b, c), d]\} = A\{a, A_a[b, (A_a)_b(c, d)]\},$$

$$A\{A[a, A_a(b, c)], d\} = A\{A(a, b), (A_a)_b(c, d)\},$$

$$A\{A[A(a, b), c], d\} = A\{A(a, b), (A_a)_b(c, d)\},$$

$$A\{A(a, b), A_{A(a,\,b)}(c, d)\} = A\{A(a, b), (A_a)_b(c, d)\},$$

откуда

$$(A_a)_b = A_{A(a,\,b)}.$$

Таким образом, правая производная правой производной опять правая производная.

3. Пусть $A_a = A$. Это означает, что $A[A(a, x), y] = A[a, A_a(x, y)] = A[a, A(x, y)]$, т. е. $a \in N_l$. Обратное очевидно.

4. Докажем следующее утверждение: *если* $Q(A)$ *обладает правой единицей, то* $Q(A_a)$ — *лупа*. Действительно, пусть $A(a, e) = a$. Тогда, подставляя в (3.6) $c = e$, мы находим $A[A(a, b), e] = A[a, A_a(b, e)]$, откуда $A(a, b) = A[a, A_a(b, e)]$, $b = A_a(b, e)$, т. е. $Q(A_a)$ обладает правой единицей. С другой стороны, мы видели в п. 1, что $Q(A_a)$ обладает левой единицей e_a, поэтому

$e_a = e$ и $Q(A_a)$ — лупа. Аналогично показываем, что если $Q(A)$ обладает левой единицей, то $Q({}_bA)$ — лупа. Из этих утверждений следует справедливость утверждения 4. Производные вида ${}_b(A_a)$ или A назовем *смешанными*. Так как $Q(A_a)$ обладает левой единицей, то из доказанного выше утверждения следует, что смешанная производная квазигруппы есть лупа.

5. Пользуясь трансляциями, равенство (3.6) можно переписать в следующем виде:

$$A(L_a b, c) = L_a A_a(b, c),$$

откуда

$$A_a = A^{(L_a,\ 1,\ L_a)}. \tag{3.8}$$

Аналогично находим

$${}_bA = A^{(1,\ R_b,\ R_b)}. \tag{3.9}$$

Доказательство теоремы 3.3 закончено.

Два элемента a и b назовем *эквивалентными* $a \sim b$, если $A_a = A_b$. Очевидно, отношение обладает всеми свойствами эквивалентности. Таким образом, множество Q разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности $Q = K_a \cup K_b \cup \ldots$, где K_a состоит из всех элементов, эквивалентных элементу a. Если само множество Q является классом эквивалентности, то $A_a = A_b$ для любых a и b, т. е. A_a не зависит от a, и поэтому можно записать $A_a = B$. Тогда равенство (3.6) превращается в (3.2), т. е. в $Q(A)$ выполняется постулат «A» Сушкевича. Этот случай уже был рассмотрен выше.

Заметим, что если $Q(A)$ обладает левым ядром N_l, то N_l является классом эквивалентности.

Сформулируем теперь несколько утверждений относительно эквивалентности в квазигруппе $Q(A)$ и объединим их в следующей теореме:

Теорема 3.4: *Пусть $Q(A)$ — квазигруппа и пусть $a \sim b$ означает $A_a = A_b$. Тогда*

1) *отношение $a \sim b$ является отношением эквивалентности; более того, из $a \sim b$ вытекает $A(a, x) \sim A(b, x)$ для любых $x \in Q$;*

2) *если $a \sim b$, то $e_a = e_b$;*

3) *классы K_a равномощны. Если Q конечно, то число эквивалентных между собой элементов является делителем порядка Q;*

4) *если $\lambda \in \mathcal{L}$ — группа левых регулярных подстановок квазигруппы $Q(A)$, то $\lambda a \sim a$ для любых a;*

5) *если $a \sim b$, то существует $\lambda \in \mathcal{L}$ такая, что $\lambda a = b$.*

Доказательство: 1. Пусть $a \sim b$, т. е. $A_a = A_b$. Тогда $A_{A(a,x)} = (A_a)_x = (A_b)_x = A_{A(b,x)}$, т. е. $A(a, x) \sim A(b, x)$. Как известно, отношение эквивалентности $a \sim b$ называется *конгруэнцией* в группоиде $Q(\cdot)$, если из $a \sim b$ следует $ac \sim bc$ и $ca \sim cb$ для любых $c \in Q$. Отношение эквивалентности, определенное выше, будет конгруэнцией, если потребовать дополнительно

$A(x, a) \sim A(x, b)$, но это обстоятельство имеет место не в любой квазигруппе, как показывает следующий пример. Пусть $Q(\cdot)$ — симметрическая группа третьей степени, $Q = \{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}$, $a^3 = 1$, $b^2 = 1$, $ba = a^2b$. Рассмотрим квазигруппу $Q(A)$, где $A(x, y) = bxby$. Тогда $a^2b \sim a$, но $A(a, a^2b)$ и $A(a, a)$ не эквивалентны.

Если $Q(A)$ коммутативна, то отношение эквивалентности $a \sim b$, определяемое равенством $A_a = A_b$, будет конгруэнцией.

2. Квазигруппа $Q(A_a)$ имеет левую единицу e_a, так же как $Q(A_b)$ имеет левую единицу e_b. Если $A_a = A_b$, то левые единицы квазигрупп $Q(A_a)$ и $Q(A_b)$ должны совпадать, поэтому $e_a = e_b$. Обратное утверждение неверно. Так, в лупе для любых a и b выполняется $e_a = e_b$, но из этого тем не менее не следует $a \sim b$, как это имеет, например, место в лупе с $N_l \neq Q$.

3. Пусть F и H — два класса эквивалентности. Пусть $a \in F$ и $b \in H$, тогда существует такой элемент p, что $b = A(a, p)$. Пусть $F' = \{A(x, p)\}$, где $x \sim a$. Покажем, что $F' \subseteq H$. Действительно, пусть $x \sim a$, следовательно, $A(x, p) \in F'$. Тогда $A_{A(x,p)} = (A_x)_p = (A_a)_p = A_{A(a,p)} = A_b$, т. е. $A(x, p) \sim b$, откуда $A(x, p) \in H$. Итак, F равномощно некоторой части H. Аналогично показывается, что H равномощно некоторой части F. Отсюда следует, что множества F и H имеют одинаковую мощность. Вторая часть утверждения 3 очевидна.

4. Из определения левой регулярной подстановки λ следует

$$L_{\lambda a} = \lambda L_a.$$

Используем теперь равенство (3.8)

$$A_{\lambda a} = A^{(L_{\lambda a}, 1, L_{\lambda a})} = A^{(\lambda L_a, 1, \lambda L_a)} = A^{(\lambda, 1, \lambda)(L_a, 1, L_a)}.$$

Так как $\lambda \in L$, то $A^{(\lambda, 1, \lambda)} = A$, следовательно, $A_{\lambda a} = A^{(L_a, 1, L_a)} = A_a$, т. е. $\lambda a \sim a$.

5. Пусть $b \sim a$. Применим к $A_a = A^{(L_a, 1, L_a)}$ соотношение (2.17) из гл. II

$$\gamma^{-1}\mathcal{L}\gamma \cap \mathfrak{N}_{\gamma^{-1}\alpha} \subseteq \mathcal{L}_A.$$

Это соотношение было доказано без предположения, что $(\cdot)$ — лупа, поэтому мы можем применить его в нашем случае

$$L_a^{-1}\mathcal{L}_A L_a \cap \mathfrak{N}_{L_a^{-1}L_a} \subseteq \mathcal{L}_{A_a},$$

откуда

$$L_a^{-1}\mathcal{L}_A L_a \subseteq \mathcal{L}_{A_a}$$

или

$$\mathcal{L}_A \subseteq L_a \mathcal{L}_{A_a} L_a^{-1}. \tag{3.10}$$

Так как в $Q(A_a)$ существует левая единица, то любая левая регулярная подстановка этой квазигруппы имеет вид $\lambda_a x = A_a(z_a, x)$, где z_a принадлежит левому ядру квазигруппы $Q(A_a)$*. Итак, любая левая регулярная подстановка λ квазигруппы $Q(A)$ в силу (3.10) имеет вид $\lambda = L_a\lambda_a L_a^{-1}$. Следовательно,

$$\lambda x = L_a\lambda_a L_a^{-1}x = A\,[a,\ A_a(z_a,\ L_a^{-1}x)],$$

т. е.

$$\lambda x = A\,[A\,(a,\ z_a),\ L_a^{-1}x].$$

Элемент $b = A\,(a,\ z_a)$ эквивалентен элементу a

$$A_b = A_{A(a,\,z_a)} = (A_a)_{z_a}A_a,$$

так как z_a — элемент левого ядра квазигруппы $Q(A_a)$. Следовательно, $b \sim a$. Итак,

$$\lambda x = A\,(b,\ L_a^{-1}x)$$

или

$$\lambda = L_bL_a^{-1}.$$

Покажем, что $\lambda a = b$. Имеем

$$\lambda a = L_bL_a^{-1}a = L_be_a,$$

так как $L_ae_a = A\,(a,\ e_a) = a$, т. е. $e_a = L_a^{-1}a$. Но $b \sim a$, следовательно, $e_b = e_a$, поэтому $\lambda a = L_be_a = L_be_b = b$.

Попутно мы получили следующий результат: *любая левая регулярная подстановка квазигруппы $Q(A)$ имеет вид $L_bL_a^{-1}$, где $b \sim a$.*

З а м е ч а н и е. Пункты 4 и 5 настоящей теоремы, таким образом, утверждают, что эквивалентность $a \sim b$, определяемая равенством $A_a = A_b$, совпадает с эквивалентностью $a \sim b\ (L)$, определенной в гл. II, п. 1°. Каждый из классов K_a является левым ядром: $K_a = \mathcal{L}a$. Теорема 2.3 является следствием теоремы 3.4 (см. п. 3 теоремы 3.4).

Аналогичная теорема имеет место, если вместо правых производных операций рассмотреть левые производные операции.

3°. *Смешанные производные.* Рассмотрим связь, которая существует между лупами, являющимися главными изотопами квазигруппы и смешанными производными этой квазигруппы.

Лемма 1.1 утверждает, что любая лупа B, главноизотопная квазигруппе A, имеет вид $A_{a,\,b}$, где согласно (1.16) $A_{a,\,b}$ означает изотоп $A^{\left(R_a^{-1},\ L_b^{-1},\ 1\right)}$. Если e — единица лупы $Q(B)$, то должно иметь место равенство $e = A\,(b,\ a)$ (см. гл. I, п. 3°).

Выражение $A_{a,\,b}(x,\ y)$ можно переписать и таким образом**:

$$A_{a,\,b}(x,\ y) = A\,[{}^{-1}A(x,\ a),\ A^{-1}(b,\ y)]. \tag{3.11}$$

---

* См. гл. II, п. 1°.

** Определение левой и правой обратных операций ${}^{-1}A$ и A^{-1} см. гл. I, п. 1°.

Исходя из определения трансляций L_b, R_a, нетрудно показать, что
$$R_a^{-1}x = {}^{-1}A(x, a),\ \ L_b^{-1}y = A^{-1}(b, y).$$

Докажем следующее соотношение для луп $A_{a,b}$:
$$(A_{a,b})_{c,d} = A_{A^{-1}(b,c),\ {}^{-1}A(d,a)}.$$
Согласно определению имеем
$$(A_{a,b})_{c,d}(x, y) = A_{a,b}[{}^{-1}A_{a,b}(x, c)\,A_{a,b}^{-1}(d, y)].$$
Введем обозначение: $t = {}^{-1}A_{a,b}(x, c)$. Имеем
$$A_{a,b}(t, c) = x,\ A\ [{}^{-1}A\ (t, a),\ A^{-1}\ (b, c)] = x,$$
$${}^{-1}A\ (t, a) = {}^{-1}A\ [x,\ A^{-1}(b, c)].$$

Если обозначим $A_{a,b}^{-1}(d, y)$ через w, то аналогичным способом получим
$$A^{-1}\ (b, w) = A^{-1}\ [{}^{-1}A\ (d, a), y].$$

Теперь легко найти $(A_{a,b})_{c,d}$:
$$(A_{a,b})_{c,d}(x, y) = A_{a,b}(t, w) = A\ [{}^{-1}A\ (t, a),\ A^{-1}(b, w)] =$$
$$= A\ \{{}^{-1}A\ [x,\ A^{-1}(b, c)],\ A^{-1}[{}^{-1}A\,(d, a), y]\} = A_{A^{-1}(b,c),\ {}^{-1}A(d,a)}(x, y).$$

Как мы видели выше (см. теорему 3.3), левая производная левой производной есть тоже левая производная, а правая производная правой производной — тоже правая производная. Поэтому новые квазигруппы можем получить, рассматривая смешанные производные. Они могут быть двух типов: правая производная левой производной $({}_bA)_a$ и левая производная правой производной ${}_b(A_a)$. Для луп эти производные изоморфны, т. е. имеет место

Теорема 3.5: *Если A — лупа, то смешанные производные $({}_bA)_a$ и ${}_b(A_a)$ изоморфны.*

Доказательство. 1. *Имеют место соотношения*
$$A_a = A_{e,a}^{L_a},\ {}_aA = A_{a,e}^{R_a}\quad (e \text{ — единица лупы } A). \tag{3.12}$$
Действительно,
$$A_{e,a}^{L_a} = \left(A^{(R_e^{-1},\ L_a^{-1},\ 1)}\right)^{L_a} = A^{(1,\ L_a^{-1},\ 1)\,L_a} = A^{(L_a,\ 1,\ L_a)} = A_a$$
ввиду равенства (3.8). Аналогично доказываем и второе из равенств (3.12).

2. *Смешанная производная ${}_b(A_a)$ изоморфна лупе $A_{b,a}$.* Пусть $A_a = B$. Так как A — лупа, то и B — лупа, причем с той же единицей (это утверждение следует из $e_a = e$ и п. 1 теоремы 3.3). Тогда
$$C = {}_b(A_a) = {}_bB = B_{b,e}^{R_b'},$$

где $R'_b x = A_a(x, b)$. Далее имеем

$$C = (A_a)_{b,e}^{R'_b} = (A_{e,a}^{L_a})_{b,e}^{R'_b}. \qquad (3.13)$$

Легко видеть, что для любой подстановки θ множества Q верно равенство

$$(A^\theta)_{u,v} = A^\theta_{\theta u, \theta v}. \qquad (3.14)$$

Действительно, учитывая равенство (3.11), находим

$$(A^\theta)_{u,v}(x, y) = A^\theta[{}^{-1}(A^\theta)(x, u), (A^\theta)^{-1}(v, y)].$$

Но $(A^\theta)^{-1} = (A^{-1})^\theta$ и ${}^{-1}(A^\theta) = ({}^{-1}A)^\theta$, поэтому

$$(A^\theta)_{u,v}(x, y) = A^\theta[({}^{-1}A)^\theta(x, u),\ (A^{-1})^\theta(v, y)] =$$
$$= \theta^{-1}A[\theta\theta^{-1}({}^{-1}A)(\theta x, \theta u),\ \theta\theta^{-1}(A^{-1})(\theta v, \theta y)] =$$
$$= \theta^{-1}A[{}^{-1}A(\theta x, \theta u), A^{-1}(\theta v, \theta y)] = \theta^{-1}A_{\theta u, \theta v}(\theta x, \theta y) = (A_{\theta u, \theta v})^\theta(x, y),$$

откуда следует равенство (3.14) (через $A^\theta_{u,v}$ мы обозначаем операцию $(A_{u,v})^\theta$). Преобразуем равенство (3.13), пользуясь соотношением (3.14):

$$C = (A_{e,a})^{L_aR'_b}_{L_ab, L_ae} = (A_{e,a})^{L_aR'_b}_{A(a,b), a} = A^{L_aR'_b}_{A^{-1}[a, A(a,b)], {}^{-1}A(a,e)}.$$

Однако

$$L_aR'_bx = L_aA_a(x, b) = A[a, A_a(x, b)] = A[A(a, x), b] = R_bL_ax,$$
$$A^{-1}[a, A(a, b)] = b,\ {}^{-1}A(a, e) = a.$$

Поэтому

$$_b(A_a) = A^{R_bL_a}_{b,a}. \qquad (3.15)$$

Аналогично доказывается, что

$$(_bA)_a = A^{L_aR_b}_{b,a}. \qquad (3.16)$$

Справедливость теоремы 3.5 следует из равенств (3.15) и (3.16).

Можно образовать производные «высших порядков», например $_d\{[_b(A_a)]_c\}$, но они, будучи лупами, все будут изотопны лупе A. Но любая лупа B, изотопная квазигруппе C, имеет вид $C^\gamma_{u,v}$, где u, v — некоторые элементы из θ, γ — подстановка множества Q (см. лемму 1.2).

Таким образом, любая производная высшего порядка имеет вид $A^\gamma_{u,v}$ и, следовательно, изоморфна, например, смешанной производной $_u(A_v)$. Одновременно мы доказали и следующее утверждение.

Теорема 3.6. *Любая лупа B, изотопная лупе A, изоморфна некоторой смешанной производной лупы A.*

4°. *Псевдоавтоморфизмы.* Другие важные автотопные* подстановки, так же как и левые и правые регулярные подстановки, тесно связанные с понятием производной операции, являются псевдоавтоморфизмами квазигруппы [31].

Определение 1. Подстановка φ множества Q называется *правым псевдоавтоморфизмом квазигруппы* $Q(A)$, если существует такой элемент $c \in Q$, что

$$A_c = A^{\varphi^{-1}}. \tag{3.17}$$

Элемент c называется *компаньоном* правого псевдоавтоморфизма φ.

Аналогично определяется левый псевдоавтоморфизм. Если φ одновременно левый и правый псевдоавтоморфизмы, то φ называется *псевдоавтоморфизмом.*

Из определения (3.17) правого псевдоавтоморфизма φ следует, что A и A_c изоморфны. Но правая производная A_c обладает левой единицей (см. теорему 3.3, утверждение 1)). Следовательно, и A обладает левой единицей. Таким образом, существование правых псевдоавтоморфизмов в квазигруппе $Q(A)$ влечет за собою существование левой единицы, а следовательно, из существования псевдоавтоморфизмов в $Q(A)$ вытекает существование единицы, т. е. $Q(A)$ — лупа.

Из только что сделанного замечания следует, что автоморфизм квазигруппы $Q(A)$ с левой единицей является частным случаем правого псевдоавтоморфизма. Действительно, в этом случае имеем $A_f = A = A^\theta$ для любого автоморфизма θ.

Используя определение правой производной операции, мы можем переписать, определение правого псевдоавтоморфизма следующим образом:

$$A^{\varphi^{-1}} = A^{(L_c,\, 1,\, L_c)},$$

откуда

$$A^{(L_c,\, 1,\, L_c)\,\varphi} = A^{(L_c\varphi,\, 1,\, L_c\varphi)} = A, \tag{3.18}$$

т. е.

$$A\,[A\,(c, \varphi x), \varphi y] = A\,[c, \varphi A\,(x, y)]. \tag{3.19}$$

Если φ — левый псевдоавтоморфизм, т. е.

$${}_cA = A^{\varphi^{-1}},$$

то получаем

$$A\,[\varphi x, A\,(\varphi y, c)] = A\,[\varphi A\,(x, y), c]. \tag{3.20}$$

Последнее равенство эквивалентно определению левого псевдоавтоморфизма (см. Брак [31, стр. 113]).

---

* Определение автотопных подстановок см. гл. II, п. 3°.

Равенство (3.18) показывает, что правый псевдоавтоморфизм φ является автотопной подстановкой.

Замечание. Из равенства (3.18) следует, что если $(L_a\varphi, \varphi, L_a\varphi)$ — автотопия квазигруппы $Q(A)$, то φ — правый псевдоавтоморфизм квазигруппы $Q(A)$ с компаньоном a. Аналогично, если $(\varphi, R_b\varphi, R_b\varphi)$ — автотопия, то φ — левый псевдоавтоморфизм с компаньоном b.

Лемма 3.1. *Пусть $Q(A)$ — квазигруппа с левой единицей f. Если φ — правый псевдоавтоморфизм с компаньоном c, то*

$$\varphi^{-1}e_c = f,$$

где e_c — правая локальная единица для c. Действительно,

$$A(\varphi^{-1}e_c, x) = \varphi^{-1}\varphi A\ (\varphi^{-1}e_c, \varphi^{-1}\varphi x) = \varphi^{-1} A^{\varphi^{-1}}(e_c, \varphi x) =$$
$$= \varphi^{-1} A_c(e_c, \varphi x) = \varphi^{-1}(\varphi x) = x,$$

т. е.

$$\varphi^{-1}e_c = f.$$

Теорема 3.7. *Все правые псевдоавтоморфизмы квазигруппы $Q(A)$ образуют группу Π_A.*

Доказательство. Пусть $\varphi, \psi \in \Pi_A$ и пусть их компаньоны будут соответственно a и b. Докажем, что и произведение $\psi\varphi$ принадлежит совокупности Π_A. Для доказательства воспользуемся соотношением (3.7)

$$A_{A(b,\,\psi a)} = (A_b)_{\psi a} = (A^{\psi^{-1}})_{\psi a}. \tag{3.21}$$

Кроме того, применим легко доказываемую формулу

$$(A^\theta)_a = A^{\theta}_{\theta a}{}^{*}, \tag{3.22}$$

где θ — любая подстановка множества Q. Тогда из равенства (3.21) получаем

$$A_{A(b,\,\psi a)} = A^{\psi^{-1}}_{\psi^{-1}(\psi a)} = A^{\psi^{-1}}_a = (A_a)^{\psi^{-1}} = (A^{\varphi^{-1}})^{\psi^{-1}} = A^{(\psi\varphi)^{-1}}, \tag{3.23}$$

отсюда следует, что $\psi\varphi \in \Pi_A$.

Рассмотрим теперь уравнение $A(a, x) = f$, где f — левая единица квазигруппы $Q(A)$. Как мы видели выше, $Q(A)$ должна обладать левой единицей.

Пользуясь снова равенствами (3.7) и (3.22), получаем

$$A = A_f = A_{A(a,\,x)} = (A_a)_x = (A^{\varphi^{-1}})_x = A^{\varphi^{-1}}_{\varphi^{-1}x},$$

откуда

$$A_{\varphi^{-1}x} = A^{\varphi} = A^{(\varphi^{-1})^{-1}},$$

т. е. $\varphi^{-1} \in \Pi_A$. Таким образом, Π_A — группа.

---

* Запись A^{α}_{a} — сокращенная запись для $(A_a)^{\alpha}$.

Как мы уже заметили выше, группа Γ_A всех автоморфизмов квазигруппы $Q(A)$ (обладающей левой или правой единицей) является подгруппой группы Π_A.

Из определения правого псевдоавтоморфизма следует, что одному правому псевдоавтоморфизму может соответствовать несколько компаньонов. В самом деле, если правый псевдоавтоморфизм φ имеет своим компаньоном элемент c, т. е. $A^{\varphi^{-1}} = A_c$, то и $A^{\varphi^{-1}} = A_{\lambda c}$, где λ — любая левая регулярная подстановка квазигруппы $Q(A)$.

Действительно, в силу утверждения 4 теоремы 3.4 и замечания к этой теореме мы имеем $\lambda c \sim c\ (\mathscr{L})$, т. е. $A_{\lambda c} = A_c = A^{\varphi-1}$.

Таким образом, совокупность всех компонентов, соответствующих одному правому псевдоавтоморфизму, является левым ядром (относительно некоторого элемента c) квазигруппы $Q(A)$.

С другой стороны, один компаньон может соответствовать нескольким правым псевдоавтоморфизмам. Действительно, пусть φ — правый псевдоавтоморфизм квазигруппы $Q(A)$ (с левой единицей f) и пусть θ — автоморфизм квазигруппы. Как мы видели выше, θ также является правым псевдоавтоморфизмом с компаньоном f. Таким образом, по теореме 3.7 $\varphi\theta$ тоже псевдоавтоморфизм. Итак,

$$A^{(\varphi\theta)^{-1}} = A^{\theta^{-1}\varphi^{-1}} = (A^{\theta^{-1}})^{\varphi^{-1}} = (A_f)^{\varphi-1} = A^{\varphi^{-1}} = A_c,$$

т. е. $\varphi\theta$ тоже имеет своим компаньоном элемент c.

Из всего сказанного вытекает следующее утверждение: существует взаимно однозначное соответствие между всеми левыми смежными классами группы Π_A всех правых псевдоавтоморфизмов по подгруппе Γ_A всех автоморфизмов квазигруппы $Q(A)$ и некоторыми левыми ядрами этой квазигруппы.

В случае, если Q конечно, мы можем сделать следующий вывод: индекс группы Γ_A в группе Π_A не превосходит индекса группы $\mathscr{L}$ левых регулярных подстановок квазигруппы $Q(A)$ *.

Интересен случай, когда взаимно однозначное соответствие, о котором идет речь выше, распространяется на все левые ядра квазигруппы $Q(A)$, иначе говоря, когда любой элемент из Q является компаньоном некоторого псевдоавтоморфизма. Такая ситуация имеет место, например, в группе, так как если $Q(\cdot)$ — группа, то $(\cdot)_x = (\cdot)^\varphi$ для любых $x \in Q$ и некоторого автоморфизма $\varphi \in \Gamma_{(\cdot)}$. Все это приводит нас к следующему определению:

Определение 2. Квазигруппа $Q(A)$ называется *правой G — квазигруппой*, если любой ее элемент является компаньоном некоторого правого псевдоавтоморфизма.

---

* Под индексом группы $\mathscr{L}$ левых регулярных подстановок квазигруппы $Q(A)$ понимается частное пор. Q: пор. $\mathscr{L}$.

Легко усмотреть, что это определение эквивалентно следующему:

Определение 2. Квазигруппа $Q(A)$ называется *правой G-квазигруппой*, если все ее правые производные A_x изоморфны самой A. Аналогично определяется и левая G-квазигруппа.

Наконец, дадим еще

Определение 3. Квазигруппа $Q(A)$, которая одновременно является правой и левой G-квазигруппой, называется *G-квазигруппой*, если все правые и левые производные операции A изоморфны самой A.

Из определения правой (левой) G-квазигруппы $Q(A)$ следует, что она всегда обладает левой (правой) единицей, следовательно, G-квазигруппа всегда обладает единицей, т. е. *G-квазигруппа всегда лупа*. Поэтому в дальнейшем будем говорить о *G-лупах*.

Следующая теорема дает одну важную характеристику G-луп. Именно имеет место

Теорема 3.8. *Лупа $Q(A)$ тогда и только тогда является G-лупой, если любая лупа $Q(B)$, изотопная лупе $Q(A)$, будет изоморфной лупе $Q(A)$.*

Действительно, пусть $Q(A)$ — G-лупа и пусть лупа $Q(B)$ изотопна лупе $Q(A)$. Тогда в силу теоремы 3.6 лупа $Q(B)$ изоморфна некоторой смешанной производной лупы $Q(A)$

$$B = [{}_b(A_a)]^{\varphi}.$$

Но $A_a = A^{\alpha}$, следовательно,

$$B = [{}_b(A^{\alpha})]^{\varphi} = [({}_{\alpha b}A)^{\alpha}]^{\varphi} = {}_{\alpha b}A^{\alpha\varphi}.$$

Здесь мы использовали равенство

$${}_b(A^{\alpha}) = ({}_{\alpha b}A)^{\alpha},$$

аналогичное равенству (3.22), которое, как и (3.22), также легко доказать. Но ${}_{\alpha b}A$ тоже изоморфна A: ${}_{\alpha b}A = A^{\gamma}$, поэтому

$$B = (A^{\gamma})^{\alpha\varphi} = A^{\gamma\alpha\varphi},$$

т. е. B изоморфна A. Обратно, пусть лупа A обладает свойством, что любая лупа B, изотопная A, будет изоморфна A. В частности, A_a и ${}_bA$ также являются лупами (с той же единицей), изотопными лупе A (см. (3.8) и (3.9)): $A_a = A^{(L_a, 1, L_a)}$, ${}_bA = A^{(1, R_b, R_b)}$. Следовательно, A является G-лупой. К G-лупам мы вернемся в гл. X.

5°. *F-квазигруппы.* Понятие F-квазигруппы мы ввели в п.1° этой главы, здесь мы уточним это понятие.

Определение 4. Квазигруппа $Q(A)$ называется *левой F-квазигруппой*, если для любых $x, y, z \in Q$ выполняется равенство

$$A[A(x, y), z] = A[x, A(y, S_x z)], \qquad (3.24)$$

где S_x — некоторая, зависящая от x, подстановка множества Q.

Аналогично определяется *правая F-квазигруппа*.

Пример. *Любая медиальная квазигруппа $Q(A)$ является левой F-квазигруппой.*

Действительно, согласно теореме Тойода, $Q(A)$ изотопна некоторой абелевой группе $Q(+)$, причем изотопия имеет вид (2.30)

$$A(x, y) = \varphi x + \psi y + c.$$

Легко проверить, что $Q(A)$ будет левой F-квазигруппой, причем

$$S_x y = \psi^{-2}(\varphi^2 - \varphi)x + \psi^{-1}y + \psi^{-2}(\varphi - \psi)c.$$

В дальнейшем мы рассмотрим только левые F—квазигруппы, поэтому слово «левая» опустим.

В этом пункте мы рассмотрим некоторые простые свойства F-квазигрупп, которые нам понадобятся в дальнейшем. К изучению F-квазигрупп мы вернемся в гл. IV.

Пусть дана некоторая F-операция A, т. е. $Q(A)$ — F-квазигруппа. Имеет место следующая

Лемма 3.2. *Для любых $x, y \in Q$ верно следующее соотношение:*

$$A_{A(x,y)} = A_y^{S_x}. \tag{3.25}$$

Доказательство. Согласно определению производных операций имеем

$$A_x[A_x(y, z), t] = A_x[y, (A_x)_y(z, t)],$$

или ввиду равенства (3.7)

$$A_x[A_x(y, z), t] = A_x[y, A_{A(x, y)}(z, t)]. \tag{3.26}$$

Из основного равенства (3.24) для F-квазигрупп и определения правой производной операции мы получаем соотношение

$$A_x(y, z) = A(y, S_x z). \tag{3.27}$$

Таким образом, из (3.26) находим

$$A[A(y, S_x z), S_x t] = A[y, S_x A_{A(x, y)}(z, t)],$$

$$A[y, A_y(S_x z, S_x t)] = A[y, S_x A_{A(x, y)}(z, t)],$$

$$S_x^{-1} A_y(S_x z, S_x t) = A_{A(x, y)}(z, t),$$

т. е.

$$A_{A(x, y)} = A_y^{S_x}.$$

Лемма 3.3. *Правая производная операция F-операции также F-операция.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(A_x)_y(p, q) = A_x(p, t). \tag{3.28}$$

Согласно равенству (3.27) достаточно показать, что элемент t

не зависит только от p. Пользуясь (3.27), преобразуем равенство (3.28):

$$A_{A(x, y)}(p, q) = A(p, S_x t), \quad A(p, S_{A(x, y)} q) = A(p, S_x t),$$

откуда

$$S_{A(x, y)}q = S_x t, \quad t = S_x^{-1} S_{A(x, y)} q.$$

З а м е ч а н и е. A_x является F-операцией с левой единицей: Легко показать, что если F-квазигруппа $Q(A)$ обладает двусторонней единицей e, т. е. $Q(A)$ — F-лупа, то она будет группой.

В самом деле, подставляя в основное соотношение (3.3) $y = e$, получаем

$$A[A(x, e), z] = A[x, A(e, S_x z)],$$

или

$$A(x, z) = A(x, S_x z),$$

откуда

$$S_x z = z,$$

т. е. $S_x = 1$. Следовательно, равенство (3.24) превращается в ассоциативный закон

$$A[A(x, y), z] = A[x, A(y, z)],$$

откуда вытекает, что $Q(A)$ — группа.

Т е о р е м а 3.9. *Каждая F-квазигруппа с левой единицей f является одновременно и правой G-квазигруппой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим подстановку R, определяемую равенством

$$Rx = A(x, f).$$

Тогда из равенства (3.23) следует

$$A_{Rx} = A_{A(x, f)} = A_f^{S_x} = A^{S_x}, \tag{3.29}$$

откуда

$$A_x = A^{S_{R^{-1}x}}.$$

Последнее равенство показывает, что $Q(A)$ является правой G-квазигруппой.

С л е д с т в и е. *Каждая F-квазигруппа изотопна некоторой правой G-квазигруппе.*

Рассмотрим некоторые свойства подстановок S_x.

Мы видели, что для любых x, y имеет место

$$A_{A(x, y)} = A_y^{S_x},$$

или, более подробно,

$$A_{A(x, y)}(p, q) = S_x^{-1} A_y(S_x p, S_x q), \tag{3.30}$$

где x, y, p, q — любые элементы множества Q.

Преобразуем равенство (3.30) с помощью (3.27)

$$A(p, S_{A(x, y)} q) = S_x^{-1} A(S_x p, S_y S_x q),$$

или

$$A(S_x p, S_y S_x S_{A(x, y)}^{-1} q) = S_x A(p, q).$$

Таким образом, $T_1 = (S_x, S_y S_x S_{A(x,y)}^{-1}, S_x)$ является автотопией F-операции для любых $x, y \in Q$. В частности, при $y = e_x$ следует, что $T_2 = (S_x, S_{e_x}, S_x)$ также является автотопией операции A.

Следовательно, $T_2 T_1^{-1}$ (см. гл. II, п. 3°) тоже автотопия квазигруппы $Q(A)$. Находим

$$T_2 T_1^{-1} = (S_x, S_{e_x}, S_x)(S_x, S_y S_x S_{A(x, y)}^{-1}, S_x)^{-1} =$$

$$= (1, S_{e_x} S_{A(x, y)} S_x^{-1} S_y^{-1}, 1).$$

В силу замечания, сделанного в гл. II, п. 3°, мы заключаем, что $S_{e_x} S_{A(x, y)} S_x^{-1} S_y^{-1} = 1$, откуда следует

$$S_{A(x, y)} = S_{e_x}^{-1} S_y S_x. \tag{3.31}$$

Можно найти явный вид для подстановки S_x. Для этого полагаем в равенстве (3.24) $y = e_x$:

$$A[A(x, e_x), z] = A[x, A(e_x, S_x z)],$$
$$A(x, z) = A[x, A(e_x, S_x z)],$$
$$z = A(e_x, S_x z),$$

откуда

$$S_x z = A^{-1}(e_x, z). \tag{3.32}$$

Лемма 3.4. *В F-квазигруппе $Q(A)$ следующие соотношения эквивалентны:*

$$x \sim y\ (L), \tag{3.33}$$

$$e_x = e_y, \tag{3.34}$$

$$S_x = S_y. \tag{3.35}$$

Доказательство. Соотношение (3.33) влечет за собой соотношение (3.33): если $x \sim y\ (L)$, то $A_x = A_y$ (по определению эквивалентности элементов), но в таком случае левые единицы операций A_x и A_y должны совпадать, т. е. $e_x = e_y$. Далее, из равенства (3.32) следует, что соотношение (3.33) влечет за собой соотношение (3.33). Наконец, покажем, что соотношение (3.35) влечет за собой соотношение (3.33).

В самом деле, имеем

$$A_x(p, q) = A(p, S_x q) = A(p, S_y q) = A_y(p, q),$$

т. е. $x \sim y\,(L)$.

Следствия. 1. Если Q конечно, то число элементов из Q, имеющих ту же правую единицу e_x, является делителем порядка множества Q.

2. Число правых единиц F-*квазигруппы* $Q\,(A)$ является делителем порядка Q.

3. Число различных подстановок S_x, соответствующих элементам из Q, также является делителем порядка Q.

Лемма 3.5. *Если* $Q\,(A)$ — F-*квазигруппа с левой единицей* f *и если* $S_x = \theta S_y$, *где* θ — *некоторый автоморфизм* F-*квазигруппы* $Q\,(A)$, *то* $\theta = 1$ *и* $x \sim y\,(\mathscr{L})$.

Доказательство. Действительно, пусть $x_0 = Rx, y_0 = R_y$, где $Rx = A\,(x, f)$. Тогда в силу равенства (3.29) будем иметь

$$A_{x_0} = A_{Rx} = A^{S_x}, \quad A_{y_0} = A_{Ry} = A^{S_y}.$$

Пусть $S_x = \theta S_y$, где θ — автоморфизм квазигруппы $Q\,(A)$, т. е. $A^\theta = A$. Тогда

$$A_{x_0} = A^{S_x} = A^{\theta S_y} = (A^\theta)^{S_y} = A^{S_y} = A_{y_0},$$

откуда $x_0 \sim y_0\,(\mathscr{L})$ или $A\,(x, f) \sim A\,(y, f)$.

Как следует из теоремы 3.4 (утверждение 5), существует такая левая регулярная подстановка λ, что

$$A\,(y, f) = \lambda A\,(x, f),$$

откуда $A\,(y, f) = A\,(\lambda x, f)$. Следовательно, $y = \lambda x$ или $y \sim x\,(L)$.

Примечания

[1] F-квазигруппы (левые) впервые рассмотрены Мёдочом в [51], тождество (3.3) им названо «ассоциативным законом A_1». В этой работе развивается теория нормальных подквазигрупп для F-квазигрупп.

[2] Понятие производных операций введено в [12, 14]. Там же можно найти другие результаты, относящиеся к производным операциям.

Глава IV

ГОМОМОРФИЗМ. НОРМАЛЬНЫЕ ПОДКВАЗИГРУППЫ

1°. *Гомоморфные отображения квазигрупп.* До сих пор мы рассматривали квазигруппы на одном и том же фиксированном множестве Q. Разумеется, мы можем рассматривать квазигруппы и на различных множествах. Пусть нам даны две квазигруппы $Q(\cdot)$ и $Q'(\circ)$. Однозначное соответствие φ: $Q \to Q'$ называется *гомоморфным отображением* (или гомоморфизмом) квазигруппы $Q(\cdot)$ в квазигруппу $Q'(\circ)$, если выполняется равенство

$$\varphi(xy) = \varphi x \circ \varphi y$$

для любых $x, y \in Q$ (если $x \in Q$, то $\varphi x \in Q'$).

Совокупность всех элементов вида φx, где x пробегает все множество Q, называется гомоморфным образом квазигруппы $Q(\cdot)$; обозначим его через φQ. Если гомоморфный образ квазигруппы $Q(\cdot)$ совпадает с Q', то φ называется *гомоморфизмом квазигруппы $Q(\cdot)$ на квазигруппу $Q'(\circ)$. Гомоморфный образ квазигруппы не всегда квазигруппа*, однако выполняется следующее свойство: для любых $a', b' \in \varphi Q$ существуют такие x' и y', что $a'x' = b'$ и $y'a' = b'$, т. е. имеет место разрешимость уравнений, но не однозначность [1]. Группоид $Q(*)$, в котором имеет место разрешимость уравнений $a * x = b$, $y * a = b$, не обязательно однозначная, можно назвать *группоидом с делением*. Нас, однако, интересует тот случай, когда $\varphi Q(\circ)$ — квазигруппа, т. е. рассмотрим гомоморфизм φ квазигруппы $Q(\cdot)$ на квазигруппу $Q'(\circ)$.

Легко доказать следующие свойства *гомоморфного отображения квазигруппы $Q(\cdot)$ на квазигруппу $Q'(\circ)$*:

1) *если $Q(\cdot)$ — лупа с единицей e, то и $Q'(\circ)$ — лупа с единицей $e' = \varphi e$;*

2) *если $Q'(\circ)$ — лупа, то $Q(\cdot)$ не обязательно лупа*, как показывает следующий пример:

$\cdot$	1	2	3	4
1	2	1	3	4
2	1	2	4	3
3	4	3	1	2
4	3	4	2	1

$\circ$	$1'$	$2'$
$1'$	$1'$	$2'$
$2'$	$2'$	$1'$

Здесь $Q = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q(\cdot)$ — квазигруппа, $Q' = \{1', 2'\}$, $Q'(\circ)$—лупа, даже группа. Легко видеть, что следующее отображение $\varphi 1 = \varphi 2 = 1'$, $\varphi 3 = \varphi 4 = 2'$ будет гомоморфизмом квазигруппы $Q(\cdot)$ на лупу $Q'(\circ)$.

С понятием гомоморфизма тесно связано понятие *конгруэнции*, которое было определено в предыдущей главе. Для выяснения этой связи рассмотрим гомоморфизм φ: $Q(\cdot) \to Q'(\circ)$ ($Q'(\circ)$ не обязательно квазигруппа). Тогда в квазигруппе $Q(\cdot)$ можно определить следующую конгруэнцию θ. Будем считать $a\theta b$, если $\varphi a = \varphi b$. Очевидно, это отношение является эквивалентностью. Кроме того, имеем

$$\varphi(ac) = \varphi a \circ \varphi c, \quad \varphi(bc) = \varphi b \circ \varphi c.$$

Если $a\theta b$, тогда $\varphi a = \varphi b$, следовательно,

$$\varphi(ac) = \varphi a \circ \varphi c = \varphi b \circ \varphi c = \varphi(bc),$$

т. е. $ac\theta bc$. Аналогично получаем $ca\theta cb$.

Предположим теперь, что φ — гомоморфизм квазигруппы $Q(\cdot)$ *на* квазигруппу $Q'(\circ)$. Покажем, что для конгруэнции θ выполняются еще и следующие свойства:

1) из $ac\theta bc$ следует $a\theta b$;
2) из $ca\theta cb$ следует $a\theta b$.

Действительно, пусть $ac\theta bc$, тогда $\varphi(ac) = \varphi(bc)$, откуда $\varphi a \circ \varphi c = \varphi b \circ \varphi c$. Но $Q'(\circ)$ — квазигруппа, следовательно, $\varphi a = \varphi b$, или $a\theta b$. Аналогично доказывается и 2). Если для конгруэнции выполняются первое и второе условия, то назовем ее *нормальной конгруэнцией*. Таким образом, *каждому гомоморфизму квазигруппы $Q(\cdot)$ на некоторую квазигруппу соответствует нормальная конгруэнция в $Q(\cdot)$.*

В группе каждая конгруэнция нормальна. Действительно, пусть θ — конгруэнция в группе $Q(\cdot)$. Если $ac\theta ad$, тогда $a^{-1}(ac)\,\theta a^{-1}(ad)$ или $c\theta d$. Таким же образом, из $ca\theta da$ следует $c\theta d$, т. е. θ — нормальная конгруэнция.

Другой пример. Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется *TS-квазигруппой* [24], если из равенства $ab = c$ следует равенство $xy = z$, где x, y, z — любое перемещение элементов a, b, c, т. е. из $ab = c$ следует $ba = c$, $bc = a$ и т. д. Легко видеть, что $Q(\cdot)$ является TS-

квазигруппой, если в $Q(\cdot)$ выполняются тождества (см. гл. VII)

$$ab = ba, \quad a(ab) = b. \tag{4.1}$$

Как и для группы, пользуясь вторым из равенств (4.1), сразу выводим, что любая конгруэнция нормальна.

Как известно [47], понятия гомоморфизма и конгруэнции распространяются на любую алгебру $Q(\Omega)$. Напомним эти определения здесь, причем будем предполагать, как мы условились раньше, что все операции из Ω бинарны.

1. Алгебра $Q(\Omega)$ *гомоморфно отображается* на алгебру $Q'(\Omega')$, если между операциями множеств Ω и Ω' существует взаимно однозначное соответствие * $A \leftrightarrow A'$ $(A \in \Omega,\ A' \in \Omega')$ и такое однозначное отображение φ: $Q \to Q'$, что

$$\varphi A(x, y) = A'(\varphi x, \varphi y)$$

для всех $A \in \Omega$ и $x, y \in Q$.

2. Отношение эквивалентности θ множества Q называется конгруэнцией в алгебре $Q(\Omega)$, если из $a\theta b$ следует $A(a, c)\ \theta A(b, c)$ и $A(c, a)\ \theta A(c, b)$ для любых $A \in \Omega$ и $c \in Q$.

В гл. I, п. 1° мы видели, что квазигруппу $Q(A)$ можно рассматривать как алгебру $Q(A, A^{-1}, {}^{-1}A)$, где $A, A^{-1}, {}^{-1}A$ удовлетворяют тождествам (1.3) **. Рассмотрим гомоморфизм алгебры $Q(A, A^{-1}, {}^{-1}A)$ в однотипной алгебре $Q'(A', B', C')$. Легко видеть, что в гомоморфном образе алгебры $\varphi Q(A, B, C)$ тоже выполняются тождества (1.3). Следовательно, $\varphi Q(A)$ — квазигруппа.

Покажем, что *любая конгруэнция* θ *в примитивной квазигруппе* $Q(A, A^{-1}, {}^{-1}A)$ *является нормальной конгруэнцией* в $Q(A)$ *и обратно.*

Действительно, пусть θ — конгруэнция в примитивной квазигруппе $Q(A, A^{-1}, {}^{-1}A)$, в которой выполняются тождества (1.3), и пусть в $Q(A)$ справедливо соотношение $A(a, c)\ \theta A(b, c)$. Тогда ${}^{-1}A[A(a, c), c]\ \theta\, {}^{-1}A[A(b, c), c]$, так как θ — конгруэнция в $Q(A, A^{-1}, {}^{-1}A)$. Следовательно, ввиду (1.4) $a\theta b$. Аналогично показывается, что из $A(c, a)\ \theta\ A(c, b)$ следует $a\theta b$. Обратно, пусть θ — нормальная конгруэнция в $Q(A)$ и пусть $a\theta b$. Покажем, что $A^{-1}(c, a)\theta A^{-1}(c, b)$. Согласно тождествам (1.4) мы имеем $a = A[c, A^{-1}(c, a)]$ и $b = A[c, A^{-1}(c, b)]$, следовательно, $A[c, A^{-1}(c, a)]\ \theta A[c, A^{-1}(c, b)]$, откуда ввиду нормальности θ получаем $A^{-1}(c, a) = \theta A^{-1}(c, b)$. Аналогично показываются остальные соотношения для конгруэнции θ в $Q(A, A^{-1}, {}^{-1}A)$.

В начале настоящего пункта мы показали, что каждому гомоморфному отображению φ квазигруппы $Q(\cdot)$ на квазигруппу $Q'(\circ)$ соответствует нормальная конгруэнция. Докажем теперь

---

* В этом случае алгебры $Q(\Omega)$ и $Q'(\Omega')$ называют *однотипными*.

** Такая алгебра называется *примитивной квазигруппой* (см. примечание 2 к гл. I).

обратное утверждение: *каждая нормальная конгруэнция* θ *в квазигруппе* $Q(\cdot)$ *определяет гомоморфизм* φ *квазигруппы* $Q(\cdot)$ *на некоторую квазигруппу.*

Пусть θ — нормальная конгруэнция в квазигруппе $Q(\cdot)$ и пусть K_a — класс конгруэнции элемента a, т. е. совокупность всех элементов из Q, конгруэнтных с a. Любой элемент из K_a назовем представителем класса K_a. Легко убедиться в справедливости следующих предложений, вытекающих из определения конгруэнции θ:

1) *если* $b \in K_a$, *тогда* $K_b = K_a$ *и обратно*;

2) K_a *и* K_b *либо совпадают, либо не содержат общих элементов.*
Кроме того, отметим еще следующее свойство:

3) aK_b *, *где* K_b — *некоторый класс конгруэнции, также является классом конгруэнции, а именно* $aK_b = K_{ab}$.

Действительно, если $x \in aK_b$, то $x = ab_1$, где $b_1 \in K_b$, следовательно, $b_1\theta b$. Поэтому $x\theta ab$, откуда $x \in K_{ab}$, $aK_b \subseteq K_{ab}$. Обратно, если $y \in K_{ab}$, тогда $y\theta ab$. Пусть $y = az$, тогда $az\theta ab$, откуда $z\theta b$ и $y = az \in aK_b$, поэтому $K_{ab} \subseteq aK_b$. Итак, $K_{ab} = aK_b$. Аналогично доказывается, что $K_b a = K_{ba}$ для любых $a, b \in Q$.

Введем на множестве $\overline{Q}$ всех классов конгруэнции K_a следующую операцию:

$$K_a \circ K_b = K_{ab}.$$

Покажем, что эта операция не зависит от представителей классов K_a и K_b, т. е. если $K_a = K_c$ и $K_b = K_d$, то $K_{ab} = K_{cd}$. Действительно, если $K_a = K_c$, то $c \in K_a$ и $c\theta a$; таким же образом получаем $d\theta b$. Отсюда заключаем, что $cd\theta ab$ или $K_{cd} = K_{ab}$. Покажем, что $\overline{Q}(\circ)$ — квазигруппа. Рассмотрим уравнение $\bar{a} \circ \bar{x} = \bar{b}$, где $\bar{a} = K_a$, $\bar{b} = K_b$. В квазигруппе $Q(\cdot)$ уравнение $ax = b$ имеет решение, пусть оно будет x_0, следовательно, $ax_0 = b$, откуда $\bar{a} \circ \bar{x}_0 = K_a \circ K_{x_0} = K_{ax_0} = K_b = \bar{b}$. Предположим, что существует еще одно решение $\bar{y}_0$ для уравнения $\bar{a} \circ \bar{x} = \bar{b}$. Тогда должна выполняться $\bar{a}_0 \circ \bar{y}_0 = \bar{b}$, т. е. $K_{ay_0} = K_b$. Ввиду свойства 1 конгруэнций выводим $b \in K_{ay_0}$, т. е. $b\theta ay_0$. Но $b = ax_0$, откуда $ax_0\theta ay_0$, следовательно, $x_0\theta y_0$, $\bar{x}_0 = \bar{y}_0$. Итак, в $\overline{Q}(\circ)$ уравнение $\bar{a} \circ \bar{x} = \bar{b}$ разрешимо (притом однозначно) для любых $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{Q}$. Таким же способом доказывается, что уравнение $\bar{y} \circ \bar{a} = \bar{b}$ имеет единственное решение.

Теперь нетрудно убедиться, что соответствие φ: $a \to \bar{a}$ является гомоморфизмом $Q(\cdot)$ на $\overline{Q}(\circ)$

$$\varphi(ab) = \varphi a \circ \varphi b.$$

Действительно,

$$\alpha(ab) = \overline{ab} = K_{ab} = K_a \circ K_b = \bar{a} \circ \bar{b} = \varphi a \circ \varphi b.$$

---

* aM состоит из всех элементов вида ax, $x \in M \subset Q$.

Как известно [47], такой гомоморфизм называется *естественным*.

Квазигруппа $\overline{Q}\,(\circ)$ называется *фактор-квазигруппой* квазигруппы $Q(\cdot)$ по конгруэнции θ и обозначается $Q/\theta\,(\circ)$, т. е. $\overline{Q} = Q/\theta$, и в $\overline{Q}$ определена операция $(\circ)$. Из всего сказанного вытекает

Теорема 4.1 (*о гомоморфизмах*). *Если φ — гомоморфное отображение квазигруппы $Q(\cdot)$ на квазигруппу $Q'(\cdot)$, то существует нормальная конгруэнция θ такая, что $Q'(\cdot) \cong Q/\theta\,(\circ)$ и обратно.*

2°. *Нормальные подквазигруппы.* Пусть в квазигруппе $Q(\cdot)$ дана нормальная конгруэнция θ. Как известно, если $Q(\cdot)$ — группа, то совокупность всех элементов, конгруэнтных с единицей, будет нормальным делителем группы $Q(\cdot)$. Аналогом понятия нормального делителя в квазигруппе будет нормальная подквазигруппа.

Определение 1. Подквазигруппа $H(\cdot)$ квазигруппы $Q(\cdot)$ называется *нормальной*, если существует такая нормальная конгруэнция θ в $Q(\cdot)$, что H совпадает с одним из классов конгруэнции по θ. Другими словами, H должна иметь вид $H = K_h$, где h — некоторый элемент из H.

Лемма 4.1. *Необходимым и достаточным условием, чтобы класс K_h конгруэнции θ был подквазигруппой, является условие: $h^2\theta h$.*

Действительно, пусть $H = K_h$ — подквазигруппа.

Если $a, b \in H$, то и $ab \in H$, следовательно, если $a\theta h$, $b\theta h$, то и $ab\theta h$. Но $ab\theta hh = h^2$, таким образом, $h^2\theta h$. Обратно, пусть $h^2\theta h$. Покажем, что $H = K_h$ — подквазигруппа. Доказательство замкнутости в $H(\cdot)$ очевидно. Рассмотрим уравнение $ax = b$, где $a, b \in H$. Имеем $b = ax\theta hx$, но $b\theta h\theta h^2$, следовательно, $h^2\theta hx$, откуда ввиду нормальности θ заключаем, что $x\theta h$, т. е. $x \in H$. Решение уравнения $ya = b$ принадлежит H по тем же причинам.

Следствие 1. *K_h — нормальная подквазигруппа тогда и только тогда, когда* 1) $h\theta e_h$, 2) $h\theta f_h$ (e_h, f_h — правая, соответственно левая локальная единицы элемента h). Действительно, из $h\theta e_h$ имеем $h^2\theta he_h = h$.

Следствие 2. *Если K_h содержит идемпотентный* элемент, то K_h — подквазигруппа.* Если $a^2 = a$ и $a \in K_h$, то $K_h = K_a$ и применяем лемму.

Следствие. 3. *Если K_h — нормальная подквазигруппа, то для любого $a \in K_h$ имеем $a^2\theta a$.*

Следствие 4. *Если $Q(\cdot)$ — лупа, то класс конгруэнции K_e, где e — единица лупы, будет нормальной подлупой.*

Множество aH называется *левым смежным классом по подквазигруппе H*. Ввиду свойства 3 нормальных конгруэнций имеем $aH = K_{ah}$, где h — некоторый элемент из H. Ввиду свойства 2 нормальных конгруэнций два левых смежных клас-

* Элемент a квазигруппы $Q(\cdot)$ называется *идемпотентным*, если $a^2 = a$.

са по подквазигруппе H либо совпадают, либо не имеют общих элементов. Можно определить и правые смежные классы Ha, но легко показать, что каждый правый смежный класс является левым смежным классом и наоборот. Действительно, пусть h — фиксированный элемент из H. Равенство $ah = ha'$ определяет взаимное однозначное соответствие $a \leftrightarrow a'$ для всех $a \in Q$. Тогда $aH = Ha'$. В самом деле,

$$aH = aK_h = K_{ah} = K_{ha'} = K_h a' = Ha'.$$

Две нормальные подквазигруппы назовем *смежными*, если они являются классами одной и той же нормальной конгруэнции. Существуют квазигруппы, в которых все классы конгруэнции являются нормальными подквазигруппами (дистрибутивные квазигруппы — см. гл. VIII). В лупах не существуют смежные нормальные подквазигруппы: если класс K_h — подквазигруппа, то $h\theta e$. В самом деле, если K_h — подквазигруппа, то по доказанной лемме 4.1 $h^2\theta h$ или $h^2\theta he$. Ввиду нормальности θ получаем $h\theta e$. Таким образом, $K_h = K_e$.

Замечание. Пусть $Q(\cdot)$ — лупа и пусть $H(\cdot)$ — нормальная подлупа лупы $Q(\cdot)$, определенная конгруэнцией θ. Как мы только что видели, $H(\cdot)$ — единственная нормальная подлупа, определенная конгруэнцией θ. В этом случае обычно фактор-лупа Q/θ обозначается через Q/H и H называется *ядром гомоморфизма* $Q \simeq Q/H$.

Подстановку σ множества Q назовем *допустимой в квазигруппе* $Q(\cdot)$ *относительно бинарного отношения* θ, если из $a\theta b$ следует $\sigma a\theta\sigma b$, и обратно: из $\sigma a\theta\sigma b$ следует $a\theta b$. Легко видеть, что *любая подстановка из группы* G, *ассоциированной квазигруппе* $Q(\cdot)$, *будет допустимой относительно любой нормальной конгруэнции.*

Действительно, если $\sigma = L_a$ или $\sigma = R_a$, то допустимость σ следует из определения конгруэнции θ.

Справедливость сформулированного выше предложения следует из утверждения:

Совокупность P_θ *всех подстановок, допустимых относительно конгруэнции* θ *квазигруппы* $Q(\cdot)$, *образует группу.*

Пусть α, $\beta \in P_\theta$. Тогда $a\theta b \to \beta a\theta\beta b \to \alpha(\beta a)\,\theta\alpha(\beta b)$, т. е. $\alpha\beta a\theta\alpha\beta b$.

Обратно, из $\alpha\beta a\,\theta\alpha\beta b$ в силу определения допустимой подстановки α получаем $\beta a\theta\beta b$, откуда имеем $a\theta b$. Очевидно, далее, что $1 \in P_\theta$ (1 — единичная подстановка). Наконец, пусть $\alpha \in P_\theta$ и пусть $a\theta b$, следовательно, $\alpha(\alpha^{-1}a)\,\theta\alpha(\alpha^{-1}b)$, отсюда получаем $\alpha^{-1}a\theta\alpha^{-1}b$.

Обратно, пусть $\alpha^{-1}a\theta\alpha^{-1}b$. Тогда $\alpha(\alpha^{-1}a)\,\theta\alpha(\alpha^{-1}b)$ или $a\theta b$. Следовательно, $\alpha^{-1} \in P_\theta$.

Очевидно, *нормальность конгруэнции* θ *равносильна соотношению* $G \subseteq P_\theta$.

Изотопию $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ назовем *допустимой относительно конгруэнции* θ, если все три подстановки α, β, γ допустимы относительно θ.

Лемма 4.2. *Пусть θ — нормальная конгруэнция в квазигруппе $Q(\cdot)$. Если $Q(\circ)$ изотопна $Q(\cdot)$, причем изотопия допустима относительно θ, то θ — нормальная конгруэнция и в $Q(\circ)$.*

Пусть изотопия, о которой идет речь в лемме 4.2, будет $T = (\alpha, \beta, \gamma)$. Если $\alpha\theta b$, то $\beta a\theta\beta b$ в силу допустимости β. Далее $\alpha c\cdot\beta a\theta\alpha c\cdot\beta b$, $\gamma^{-1}(\alpha c\cdot\beta a)\,\theta\gamma^{-1}(\alpha c\cdot\beta b)$ вследствие допустимости γ. Итак, $c\circ a\theta c\circ b$. Таким же способом доказываются остальные соотношения из определения нормальной конгруэнции.

Замечание. Очевидно, лемма остается верной, если вместо нормальной конгруэнции взять просто конгруэнцию.

Следствие 1. *Если один из классов нормальной конгруэнции H по θ является подквазигруппой (а следовательно, нормальной квазигруппой) и если H инвариантна относительно допустимых подстановок α, β, γ множества Q, то H будет нормальной подквазигруппой и в $Q(\circ)$.*

Это утверждение следует из леммы: θ будет нормальной конгруэнцией и в $Q(\circ)$ и H будет подквазигруппой в $Q(\circ)$.

Следствие 2. *Если H — нормальная подквазигруппа в $Q(A)$, то она нормальная подлупа в $Q(A_{a,b})$, где $a, b \in H$.*

Действительно, по определению мы имеем

$$A_{a,b} = A^{(R_a^{-1},\, L_b^{-1},\, 1)},$$

и, следовательно, изотопия $T = (R_a^{-1}, L_b^{-1}, 1)$ допустима относительно любой конгруэнции θ. По лемме 4.2 θ будет конгруэнцией и в $Q(A_{a,b})$. Но $Q(A_{a,b})$ — лупа с единицей $e = A(b, a) \in H$, поэтому ввиду следствия 4 леммы 4.1 H будет нормальной подлупой в $Q(A_{a,b})$.

Теорема 4.2. *Если H — нормальная подквазигруппа в $Q(A)$, то H — нормальная подквазигруппа в $Q(A_h)$, где A_h — правая производная операция по некоторому элементу $h \in H$.*

Мы знаем, что $A_h = A^{(L_h, 1, L_h)}$, следовательно, изотопия $(L_h, 1, L_h)$ допустима относительно любой нормальной конгруэнции θ. Согласно лемме 4.2 конгруэнция θ будет нормальной и в $Q(A_h)$ и, следовательно, H будет классом конгруэнции и в $Q(A_h)$. Поэтому достаточно показать, что H — подквазигруппа в $Q(A_h)$.

Правая локальная единица e_h для h содержится в H в силу того, что H — нормальная подквазигруппа в $Q(A)$. Таким образом, класс H конгруэнции в $Q(A_h)$ содержит идемпотентный элемент e_h. В самом деле, e_h — левая единица в квазигруппе $Q(A_h)$ (см. теорему 3.3., утверждение 1). Применяя следствие 2 леммы 4.1 к классу конгруэнции H, мы заканчиваем доказательство теоремы.

Теорема 4.3. *Пусть для квазигрупп* $Q(\circ)$ *и* $Q(\cdot)$ *выполняются условия леммы 4.2. Тогда фактор-квазигруппы* $Q/\theta(\circ)$ *и* $Q/\theta(\cdot)$ *изотопны.*

Доказательство. Пусть $(\circ) = (\cdot)^T$, где $T = (\alpha, \beta, \gamma)$, и пусть T допустима относительно конгруэнции θ. Согласно лемме 4.2 классы конгруэнции θ в квазигруппах $Q(\cdot)$ и $Q(\circ)$ совпадают. Пусть a — некоторый элемент из Q. Определим следующие отображения в Q/θ:

$$\bar{\alpha}\bar{a} = \overline{\alpha a}, \quad \bar{\beta}\bar{a} = \overline{\beta a}, \quad \bar{\gamma}\bar{a} = \overline{\gamma a}. \tag{4.2}$$

Покажем, что определения (4.2) не зависят от представителя a смежного класса $\bar{a}$. Так, если возьмем $b \in \bar{a}$, то $\overline{\alpha b} = \overline{\alpha a}$. Действительно, из $b \in \bar{a}$ следует $b\theta a$, а отсюда $\alpha b\theta\alpha a$ в силу допустимости α. Следовательно, $\overline{\alpha b} = \overline{\alpha a}$. Снова в силу допустимости α мы находим, что $\bar{\alpha}$ — подстановка множества $\bar{Q} = Q/\theta$.

Теперь изотопия $Q/\theta(\circ)$ и $Q/\theta(\cdot)$ легко доказывается

$$\bar{a} \circ \bar{b} = \overline{a \circ b} = \overline{\alpha^{-1}(\beta a \cdot \gamma b)} = \bar{\alpha}^{-1}\,\overline{(\beta a \cdot \gamma b)} = \bar{\alpha}^{-1}\,(\overline{\beta a} \cdot \overline{\gamma b}) =$$
$$= \bar{\alpha}^{-1}(\bar{\beta}\bar{a} \cdot \bar{\gamma}\bar{b}).$$

3°. *Внутренние подстановки в квазигруппах.* Мы дали определение нормальной подквазигруппы H с помощью понятия нормальной конгруэнции. Однако можно определить нормальную подквазигруппу H и иначе — с помощью некоторых соотношений, которые имеют место в квазигруппе для подквазигруппы H. Мы будем следовать идеям Алберта и Брака [2, 31], которые рассмотрели аналогичный вопрос для луп, а именно введем понятие внутренней подстановки.

Определение 2. Подстановка $\alpha \in G$, где G — ассоциированная группа квазигруппы $Q(\cdot)$, называется *внутренней относительно элемента* h, если $\alpha h = h$.

Все внутренние подстановки образуют группу, обозначим ее через I_h *.

В группе I_h выделим следующие подстановки. Рассмотрим правую и левую производные операции по элементу h в квазигруппе $Q(\cdot)$ и введем для краткости записи $(\cdot)_h = (\bullet)$, ${}_h(\cdot) = (\circ)$. Имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned}(ha)\,b &= h\,(a \bullet b),\\ a\,(bh) &= (a \circ b)\,h,\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

которые с помощью трансляций можно переписать следующим образом:

$$R_b R_a h = R_{a \bullet b} h, \quad L_a L_b h = L_{a \circ b} h.$$

---

* Если $Q(\cdot)$ — лупа и $h = 1$ — единица лупы $Q(\cdot)$, то подстановка α в этом случае называется *внутренней*, а группа $I = I_1$ — *группой внутренних подстановок лупы* $Q(\cdot)$ [31].

Отсюда следует, что *подстановки*

$$\left.\begin{aligned} R_{a,b} &= R_{a\cdot b}^{-1}\, R_b R_a, \\ L_{a,b} &= L_{a\circ b}^{-1}\, L_a L_b \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

являются внутренними относительно h.

Рассмотрим еще одну подстановку из I_h. Уравнение $ha = xh$ имеет единственное решение, которое при фиксированном h зависит только от a, поэтому мы можем записать

$$ha = \sigma a \cdot h. \tag{4.5}$$

Отсюда $\sigma = R_h^{-1} L_h$. С другой стороны, из (4.5) следует, что $R_a h = L_{\sigma a} h$, откуда $L_{\sigma a}^{-1} R_a h = h$. Таким образом, *подстановка*

$$T_a = L_{\sigma a}^{-1} R_a, \tag{4.6}$$

где $\sigma = R_h^{-1} L_h$, *также принадлежит группе* I_h.

Подстановки (4.4) и (4.6) играют важную роль в теории квазигрупп и луп. В частности, имеет место следующая

Теорема 4.4. *Группа внутренних подстановок* I_h *относительно элемента* h *порождается подстановками* T_a, $R_{a,b}$, $L_{a,b}$ (a, b — любые элементы из Q) [2].

Доказательство. Пусть F — группа подстановок, порожденная T_a, $R_{a,b}$, $L_{a,b}$, где a, b — любые элементы из Q. Так как все они принадлежат ввиду их определения группе I_h, то и группа, ими порожденная, также принадлежит группе I_h: $F \subseteq I_h$.

Обратное включение доказывается сложнее. Доказательство включения $I_h \subseteq F$ проведем по индукции. Именно ясно, что каждая подстановка α из I_h, как и всякая подстановка из ассоциированной группы G, имеет вид

$$\alpha = S_{a_1}^{\varepsilon_1} S_{a_2}^{\varepsilon_2} \ldots S_{a_n}^{\varepsilon_n}, \tag{4.7}$$

где $S_{a_i} = R_{a_i}$ или L_{a_i}, $\varepsilon_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Число n назовем *длиной* подстановки α в представлении (4.7). Заметим, здесь, что мы имеем право считать $S_{a_n} = R_{a_n}$ и $\varepsilon_n = 1$, т. е. $S_{a_n}^{\varepsilon_n} = R_{a_n}$, так как иначе мы могли бы добавить к α в (4.7) произведение $R_x^{-1} R_x$. Доказательство включения $I_h \subseteq F$ проведем индукцией по длине n подстановки α в некотором ее представлении вида (4.7).

Пусть $n = 1$ и пусть $\alpha h = h$. Подстановка $\alpha \in I_h$ должна быть вида R_x, т. е. $R_x h = h$ или $hx = h$, откуда $x = e_h$. Но e_h — левая единица правой производной квазигруппы $Q(\bullet)$: $e_h \bullet y = y$ или $x \bullet y = y$. Следовательно, $R_{x,y} = R_{x\cdot y}^{-1} R_y R_x = R_y^{-1} R_y R_x = R_x$, т. е. $R_x = R_{x,y} \in F$.

Предположим, теперь, что теорема верна для любых внутренних подстановок $\varphi \in I_h$, длина которых в представлении (4.7) меньше, чем n. Пусть $\alpha \in I_h$ имеет длину n. Покажем, что α можно представить в виде

$$\alpha = \alpha'\tau, \tag{4.8}$$

где α' — некоторая внутренняя подстановка длины $n-1$, а подстановка τ принадлежит F. В силу предположения индукции заключаем, что $\alpha' \in F$. Из $\alpha' \in F$ и $\tau \in F$ следует $\alpha \in F$. Итак, для доказательства теоремы 4.4 мы должны доказать соотношение (4.8).

Рассмотрим следующие четыре возможных случая.

Случай 1. $\alpha = \alpha'' R_y R_x$. Длина подстановки α'' будет $n-2$. Из равенства (4.4) следует $R_y R_x = R_{x\cdot y} R_{x,y}$, следовательно,

$$\alpha = \alpha'' R_{x\cdot y} R_{x,y} = \alpha'\tau,$$

где $\alpha' = \alpha'' R_{x\cdot y}$, $\tau = R_{x,y}$, т. е. α имеет вид (4.8).

Случай 2. $\alpha = \alpha'' L_y R_x$. Из (4.6) следует $R_x = L_{\sigma x} T_x$ и из (4.4) $L_u L_v = L_{u\circ v} L_{u,v}$. Поэтому мы получаем

$$\alpha = \alpha'' L_y L_{\sigma x} T_x = \alpha'' L_{y\circ\sigma x} L_{y,\sigma x} T_x =$$
$$= \alpha'' R_{\sigma^{-1}(y\circ\sigma x)} T^{-1}_{\sigma^{-1}(y\circ\sigma x)} L_{y,\sigma x} T_x = \alpha'\tau,$$

где $\alpha' = \alpha'' R_{\sigma^{-1}(y\circ\sigma x)}$ (α' имеет длину $n-1$) и $\tau = T^{-1}_{\sigma^{-1}y\circ\sigma x} L_{y,\sigma x} T_x$.

Случай 3. $\alpha = \alpha'' R_y^{-1} R_x$. Сделаем следующие преобразования:

$$\alpha = \alpha'' R_y^{-1} R_x = \alpha'' (R_x^{-1} R_y)^{-1} = \alpha'' R_z (R_x^{-1} R_y R_z)^{-1}.$$

Выберем z так, чтобы $x = z \bullet y$ (это можно сделать, так как $Q(\bullet)$ — квазигруппа), следовательно,

$$\alpha = \alpha'' R_z (R^{-1}_{z\cdot y} R_y R_z)^{-1} = \alpha'' R_z R^{-1}_{z,y} = \alpha'\tau.$$

Здесь $\alpha' = \alpha'' R_z$, $\tau = R^{-1}_{z,y}$.

Случай 4. $\alpha = \alpha'' L_y^{-1} R_x$. Имеем

$$\alpha = \alpha'' L_y^{-1} L_{\sigma x} T_x = \alpha'' (L^{-1}_{\sigma x} L_y)^{-1} T_x = \alpha'' L_z (L^{-1}_{\sigma x} L_y L_z)^{-1} T_x.$$

Выбираем z так, чтобы $\sigma x = y \circ z$:

$$\alpha = \alpha'' L_z (L^{-1}_{y\circ z} L_y L_z)^{-1} T_x = \alpha'' L_z L^{-1}_{y,z} T_x = \alpha'' R_{\sigma^{-1}z} T^{-1}_{\sigma^{-1}z} L^{-1}_{y,z} T_x = \alpha'\tau.$$

Здесь $\alpha' = \alpha'' R_{\sigma^{-1}z}$, $\tau = T^{-1}_{\sigma^{-1}z} L^{-1}_{y,z} T_x$. Доказательство теоремы окончено.

Замечание 1. Если $Q(\cdot)$ — лупа, то любая подлупа H содержит единицу 1. Если возьмем $I_1 = I$, то I порождается всеми подстановками вида $T_a = L_a^{-1} R_a, R_{a,b} = R^{-1}_{ab} R_b R_a$, $L_{a,b} = L^{-1}_{ab} L_a L_b$, так как в этом случае $(\bullet) = (\circ) = (\cdot)$. Если $Q(\cdot)$, кроме того, группа, то I порождается одними T_a, так как $R_{a,b} = L_{a,b} = 1$ (ввиду равенств $R_a R_b = R_{ba}$, $L_a L_b = L_{ab}$, эквивалентных ассоциативному закону в $Q(\cdot)$). Но $T_a x = a^{-1}xa$, так как в группе $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$. Следовательно, *если $Q(\cdot)$ — группа, то I является группой внутренних автоморфизмов.*

Замечание 2. *Пусть I_{h_1} и I_{h_2} — группы внутренних подстановок относительно элементов h_1 и h_2 соответственно. Тогда I_{h_1} и I_{h_2} изоморфны.* Действительно, пусть $\alpha \in I_{h_2}$ и пусть $h_2 = h_1 h$. Последнее равенство означает, что $h_2 = R_h h_1$. Тогда $R_h^{-1}\alpha R_h \in I_{h_1}$. В самом деле, $R_h^{-1}\alpha R_h h_1 = R_h^{-1}\alpha h_2 = R_h^{-1} h_2 = h_1$. Следовательно, $R_h^{-1} I_{h_2} R_h \subseteq I_{h_1}$. Нетрудно показать и обратное включение, поэтому $I_{h_1} = R_h^{-1} I_{h_2} R_h$. Из последнего равенства видно, что I_{h_1} и I_{h_2} изоморфны.

Пусть $H(\cdot)$ — некоторая подквазигруппа квазигруппы $Q(\cdot)$ и пусть h — некоторый произвольный фиксированный элемент из H. Допустим, что H инвариантна относительно I_h:

$$I_h H \subseteq H, \tag{4.9}$$

т. е. для любого $\alpha \in I_h$ и любого $h_1 \in H$ имеем $\alpha h_1 \in H$. Заметим, что включение (4.9) можно заменить равенством $I_h H = H$, так как если $\alpha H \subseteq H$, то $H \subseteq \alpha^{-1} H$, откуда $H \subseteq I_h H$.

Замечание 3. *Если подквазигруппа H инвариантна относительно I_h ($h \in H$), то она инвариантна и относительно любой группы I_{h_1} ($h_1 \in H$).* Действительно, по предыдущему замечанию $I_{h_1} = R_{h_2}^{-1} I_h R_{h_2}$, где $h_1 h_2 = h$, следовательно, $I_{h_1} H = H$, так как H инвариантна относительно R_{h_2} и I_h.

Лемма 4.3. *Пусть H инвариантна относительно I_h, где h — некоторый фиксированный элемент из H. Тогда для любых a, $b \in Q$ выполняются равенства*

$$\left.\begin{aligned} \sigma a H &= Ha, \\ a(bH) &= (a \circ b) H, \\ (Ha) b &= H(a \bullet b). \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Действительно, пользуясь равенством (4.6), получаем $Ha = R_a H = L_{\sigma a} T_a H = L_{\sigma a}(T_a H) = L_{\sigma a} H$, так как $T_a \in I_h$, и, следовательно, $T_a H = H$. Таким образом, доказано первое из равенств (4.10).

Далее

$$a(bH) = L_a L_b H = L_{a\circ b} L_{a,b} H = L_{a \circ b} H = (a \circ b) H.$$

Так же доказывается и третье из равенств (4.10).

Очевидно и обратное утверждение, если выполняются равенства (4.10), то подквазигруппа H инвариантна относительно T_a, $L_{a,b}$, $R_{a,b}$ и, следовательно, инвариантна относительно I_h.

Следствие 1.

$$(xH)y = R_h x (HL_h^{-1} y). \tag{4.11}$$

Действительно, используя равенства (4.10), находим

$$(xH)\,y = (H\sigma^{-1}x)\,y = H\,(\sigma^{-1}x \bullet y) = \sigma\,(\sigma^{-1}x \bullet y)\,H.$$

Вычислим изотоп $(\bullet)^{(\sigma^{-1},1,\sigma^{-1})}$. Имеем $(\bullet) = (\cdot)_h$ и $(\circ) = {}_h(\cdot)$, следовательно, $(\bullet) = (\cdot)^{(L_h,1,L_h)}$, $(\circ) = (\cdot)^{(1,R_h,R_h)}$ (см. (3.8) и (3.9)). Итак, имеем

$$(\bullet)^{(\sigma^{-1},1,\sigma^{-1})} = (\cdot)^{(L_h,1,L_h)(\sigma^{-1},1,\sigma^{-1})} = (\cdot)^{(L_h\sigma^{-1},1,L_h\sigma^{-1})} =$$
$$(\cdot)^{(1,R_h R_h)(L_h\sigma^{-1},R_h^{-1},R_h^{-1}L_h\sigma^{-1})} = (\circ)^{(R_h,R_h^{-1},1)}$$

Таким образом, $\sigma\,(\sigma^{-1}x\cdot y) = R_hx \circ R_h^{-1}y$, поэтому

$$(xH)\,y = (R_hx \circ R_h^{-1}y)\,H = R_hx\,(R_h^{-1}yH) =$$
$$= R_hx\,(H\sigma^{-1}R_h^{-1}y) = R_hx\,(HL_h^{-1}y).$$

Следствие 2.

$$aH = (a \circ H)\,H,\ Ha = H\,(H \bullet a). \tag{4.12}$$

Действительно, $(a \circ H)\,H$ состоит из всех элементов вида $(a\circ h_1)\,h_2$, где $h_1, h_2 \in H$. Но в силу равенства $a\,(bH) = (a \circ b)\,H$ мы заключаем, что $(a \circ h_1)\,h_2 \in a\,(h_1H) = aH$. Итак, $(a \circ H)\,H \subseteq aH$. Обратно, пусть $x \in aH$, т. е. имеет вид ah_3, $h_3 \in H$. Но h_3 можно представить в виде $h_3 = h_4h$; таким образом, $x = a\,(h_4h) = (a \circ h_4)\,h$ и поэтому $x \in (a \circ h_4)\,H \subseteq (a \circ H)\,H$. Аналогично доказывается и второе из равенств (4.12).

Следствие 3.

$$R_ha\cdot H = (aH)\,H,\quad H\cdot L_ha = H\,(Ha). \tag{4.13}$$

Доказательство равенств (4.13) основывается на равенстве (4.10) и проводится аналогично доказательству следствия 2.

Лемма 4.4. *Если H инвариантна относительно группы внутренних подстановок I_h, то*

$$aH\cdot bH = (a \odot b)\,H, \tag{4.14}$$

где $(\odot) = (\cdot)^{R_h}$.

Используем равенство (4.11):

$$aH\cdot bH = R_ha\,[H\cdot L_h^{-1}(bH)] = R_ha\,[H\cdot L_h^{-1}(H\sigma^{-1}b)].$$

Но $L_h^{-1}(Ha) = H \bullet a$. В самом деле,

$$L_h\,(H \bullet a) \subseteq H\,(H \bullet a) = Ha$$

(по следствию 2). Обратно, если $x \in Ha$, то $x = h_1a = (hh_2)\,a = h\,(h_2 \bullet a) \in L_h\,(H \bullet a)$, поэтому $Ha \subseteq L_h\,(H \bullet a)$, откуда $Ha = L_h\,(H \bullet a)$, $L_h^{-1}(Ha) = H \bullet a$.

Продолжим доказательство соотношения (4.14), используя следствие 2:

$$aH \cdot bH = R_h a\,[H\,(H \cdot \sigma^{-1} b)] = R_h a\,(H \sigma^{-1} b) = R_h a\,(bH) =$$
$$= (R_h a \circ b)\,H = R_h^{-1}(R_h a \cdot R_h b)\,H = (a \odot b)\,H.$$

Л е м м а 4.5. *Смежные классы aH и bH (H — инвариантная подквазигруппа относительно I_h) либо не пересекаются, либо совпадают.*

Действительно, пусть $c \in aH \cap bH$, тогда существуют такие элементы h_1 и $h_2 \in H$, что $c = ah_1$ и $c = bh_2$. Имеем

$$c = ah_1 = a\,(h_1' h) = (a \circ h_1')\,h,$$
$$c = bh_2 = b\,(h_2' h) = (b \circ h_2')\,h,$$

следовательно, $a \circ h_1' = b \circ h_2'$. Отсюда

$$(a \circ h_1')\,H = (b \circ h_2')H,\ \ a\,(h_1' H) = b\,(h_2' H),\ \ aH = bH.$$

Значение группы I_h внутренних подстановок для квазигрупп вытекает из следующей теоремы:

Т е о р е м а 4.5. *Подквазигруппа H тогда и только тогда нормальна, когда она инвариантна относительно группы внутренних подстановок I_h*, где h — произвольный элемент из H [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть H инвариантна относительно I_h. Определим следующее отношение: $a\theta b$, если $aH = bH$. Очевидно, θ является отношением эквивалентности. Покажем, что θ — конгруэнция в $Q\,(\cdot)$.

1. θ — *конгруэнция в* $Q\,(\odot)$. Пусть $a\theta a_1$, $b\theta b_1$. Тогда

$$(a \odot b)\,H = aH \cdot bH = a_1 H \cdot b_1 H = (a_1 \odot b_1)\,H,$$

т. е. $a \odot b\theta a_1 \odot b_1$. Но это соотношение показывает, что θ — конгруэнция в $Q\,(\odot)$.

2. *Подстановка R_h допустима относительно* θ. Пусть $a\theta b$. Тогда ввиду следствия 3 леммы 4.3 имеем

$$R_h a \cdot H = (aH)\,H = (bH)\,H = R_h b \cdot H,$$

т. е. $R_h a\theta R_h b$.

Обратно, пусть $R_h a\theta R_h b$. Но $R_h a \cdot H = R_h a\,(H \cdot L_h^{-1} h) = (aH)h$. Таким же способом получаем $R_h b \cdot H = (bH)\,h$. Из $R_h a \cdot H = R_h b \cdot H$ следует $(aH)\,h = (bH)\,h$, следовательно, $aH = bH$, т. е. $a\theta b$, откуда заключаем, что R_h допустима относительно θ.

3. θ — *конгруэнция в* $Q\,(\cdot)$. Это утверждение следует из того, что R_h — допустимая подстановка для конгруэнции θ и из леммы 4.2 (см. замечание к этой лемме).

4. θ — *нормальная конгруэнция* в $Q\,(\cdot)$. Пусть $yx\theta zx$ и пусть $y = L_h y'$ и $z = L_h z'$. Преобразуем $R_h^{-1}(yx)$: $R_h^{-1}(yx) = R_h^{-1} L_h L_h^{-1} \times \times (L_h y' x) = \sigma\,(y' \bullet x)$. Так как $yx\theta zx$, то $R_h^{-1}(yx)\,\theta R_h^{-1}(zx)$, следо-

вательно, $R_h^{-1}(yx)H = R_h^{-1}(zx)H$ или $\sigma(y' \bullet x)H = \sigma(z' \bullet x)H$. Отсюда, учитывая (4.10), получаем $H(y' \bullet x) = H(z' \bullet x)$. Опять, используя (4.10), находим, что $(Hy')x = (Hz')x$, откуда $Hy' = Hz'$. Следовательно, $\sigma y'H = \sigma z'H$, т. е. $\sigma y'\theta\sigma z'$ или $R_h^{-1}L_hy'\theta\cdot R_h^{-1}L_hz'$. Принимая во внимание значения для y' и z', находим $R_h^{-1}y\theta R_h^{-1}z$, откуда $y\theta z$.

Если $xy\theta xz$, то $y\theta z$. Это предложение доказывается проще. Пусть $y = R_hy'$, $z = R_hz'$. Тогда $x\cdot R_hy'\theta x\cdot R_hz'$, $R_h^{-1}(x\cdot R_hy')\cdot\theta R_h^{-1}(x\cdot R_hz')$, $x \circ y'\theta x \circ z'$. Следовательно, $(x \circ y')H = (x \circ z')H$, $x(y'H) = x(z'H)$, откуда $y'H = z'H$, т. е. $y'\theta z'$, $R_hy'\theta R_hz'$ и $y\theta z$.

Итак, мы доказали, что θ — нормальная конгруэнция в $Q(\cdot)$. Одним из классов конгруэнции является подквазигруппа H, следовательно, H — нормальная подквазигруппа.

Необходимость. Пусть H — нормальная подквазигруппа, определяемая с помощью нормальной конгруэнции θ. Покажем, что если $\varphi \in I_h$ и $h' \in H$, то $\varphi h' \in H$. Наше утверждение достаточно доказать для случая, когда φ — одна из образующих группы I_h.

1. Предположим, что $\varphi = T_a$, и пусть $T_ah' = x$. Следовательно, $L_{\sigma a}^{-1}R_ah' = x$, $\sigma a\cdot x = h'\cdot a$, $R_h^{-1}L_ha\cdot x = h'a$. Пусть $a = L_h^{-1}R_hb$, тогда после замены a получаем $bx = h'L_h^{-1}R_hb$. Но $h'L_h^{-1}R_hb\theta h\cdot L_h^{-1}R_hb = L_hL_h^{-1}R_hb = R_hb$, т. е. $bx\theta R_hb$, $bx\theta bh$. Так как θ — нормальная конгруэнция, заключаем, что $x\theta h$, т. е. $x \in H$.

2. Пусть $\varphi = R_{a,b}$ и пусть $R_{a,b}h' = x$, откуда

$$R_{a\bullet b}^{-1}R_bR_ah' = x,\ R_{a\bullet b}x = R_bR_ah',\ (h'a)b = x(a \bullet b).$$

Так как $(h'a)b\theta(ha)b = h(a \bullet b)$, то $h(a \bullet b)\theta x(a \bullet b)$, откуда $h\theta x$, $x \in H$. Аналогично доказывается, что $L_{a,b}H = H$.

Можно дать и следующую характеристику нормальной под квазигруппы (см. [25, стр. 256]).

Теорема 4.6. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы подквазигруппа H была нормальной, является следующее. Пусть a и b — два любые фиксированные элемента из Q. Тогда, если в равенстве*

$$(ah_1)(bh_2) = (a \odot b)h_3 \tag{4.15}$$

два из трех элементов h_1, h_2, h_3 принадлежат H, то и третий тоже принадлежит H.

Доказательство. Достаточно показать, что H удовлетворяет условиям (4.10). Это будет означать, что H инвариантна относительно I_h, $h \in H$.

Докажем первое из равенств (4.10). Любой элемент из Ha имеет вид h_1a. Мы можем представить h_1 в виде f_hh_2, где f_h — левая локальная единица для h, и пусть $a = a_0 h$. Тогда

$$h_1 a = (f_h h_2)(a_0 h) = (f_h \odot a)\, h_3 = R_h^{-1}(R_h f_h \cdot R_h a_0)\, h_3 = R_h^{-1}(ha)\cdot h_3 = \\ = R_h^{-1} L_h a \cdot h_3 = \sigma a \cdot h_3.$$

Обратно, если h_3 — любой элемент из H, то, идя обратным путем получим $\sigma a \cdot h_3 = (f_h \odot a_0)\, h_3$. Ввиду условия теоремы существует при заданных h, h_3 такой элемент h_2 из H, что $(f_h \odot a_0)\, h_3 = (f_h h_2)(a_0 h)$. Следовательно, $\sigma a \cdot h_3 = h_1 a$. Итак, $Ha = \sigma a \cdot H$.

Аналогично доказывается второе из равенств (4.10):

$$a\,(bh_1) = (a_0 h)(bh_1) = (a_0 \odot b)\, h_2 = R_h^{-1}(R_h a_0 \cdot R_h b)\, h_2 = \\ = R_h^{-1}(a \cdot R_h b)\, h_2 = (a \bigcirc b)\, h_2.$$

Идя обратным путем, получаем требуемое равенство.

Наконец, рассмотрим последнее из равенств (4.10). Имеем

$$(h_1 a)\, b = (\sigma a h_1')\, b = (\sigma a h_1')(b_0 h) = (\sigma a \odot b)\, h_2 = h_3 \sigma^{-1}(\sigma a \odot b_0).$$

Но $\sigma^{-1}(\sigma a \odot b_0) = \sigma^{-1} R_h^{-1}(R_h \sigma a \cdot R_h b_0) = L_h^{-1}(L_h a \cdot b) = a \bullet b$, поэтому $(h_1 a)\, b = h_3 (a \bullet b)$ и, следовательно, $(Ha)\, b \subseteq H\, (a \bullet b)$. Аналогично получаем обратное включение, а отсюда и третье из равенств (4.10). Необходимость условия (4.15) следует непосредственно из леммы 4.4.

Следствие. Если $Q(\cdot)$ — лупа с единицей 1 и $h = 1$, то $(\odot) = (\cdot)$, и мы получаем следующее утверждение: *подлупа H тогда и только тогда будет нормальной подлупой, когда в равенстве $ah_1 \cdot bh_2 = ab \cdot h_3$ два из трех элементов h_1, h_2 и h_3 принадлежат подлупе H, тогда и третий принадлежит H.*

Теорию нормальных подквазигрупп и гомоморфизмов квазигрупп можно развить дальше, но этого мы здесь делать не будем. Отметим только следующее предложение, которое непосредственно вытекает из теоремы 4.5: *пересечение нормальных подквазигрупп тоже нормальная подквазигруппа* [4].

4°. *Гомотопия.* Естественным обобщением изоморфизма служит изотопия. Таким же естественным обобщением гомоморфизма является понятие гомотопии двух квазигрупп, введенное Албертом [1].

Сначала условимся о некоторых обозначениях. Запись α: $Q \to Q'$ означает отображение множества Q на множество Q'. В этом случае можно писать $\alpha(Q) = Q'$. Если $\beta(Q') = Q''$, то отображения β и α можно переумножить и произведение $\beta\alpha$ определяется равенством $\beta\alpha(Q) = Q''$, т. е. $\beta\alpha(Q) = \beta[\alpha(Q)]$. Не всякие отображения можно перемножать, как это видно из определения. Через Q^P обозначается множество всех отображений множества P на множество Q. Отображения α, $\beta \in Q^P$ называются *эквивалентными*, если существуют такая подстановка U множества P и такая подстановка V множества Q, что

$$\alpha = V\beta U.$$

Определение 3. Квазигруппа $P(B)$ *гомотопно отображается* на квазигруппу $Q(A)$, если существует такая тройка $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ взаимно эквивалентных между собой отображений из Q^P, что

$$\gamma B(x, y) = A(\alpha x, \beta y)$$

для любых $x, y \in P$. Квазигруппа $Q(A)$ называется *гомотопным образом* квазигруппы $P(B)$.

Как и для изотопии, будем писать сокращенно $B = A^T = A^{(\alpha, \beta, \gamma)}$, подразумевая при этом, что B действует в P, A действует в Q. В частности, если $\alpha = \beta = \gamma$, то пишем* $B = A^{(\gamma, \gamma, \gamma)} = A^\gamma$.

Тройку T назовем *гомотопией*, а отображения α, β, γ — *компонентами* T.

Произведение гомотопий T и S определяется как и произведение изотопий, если, конечно, произведение компонент T и S имеет смысл. Как и для изотопий, верно равенство $(A^T)^S = A^{TS}$. Кроме того, из $B = A^T$ следует $B = A^{T^{-1}}$, если только компоненты T являются взаимно однозначными отображениями множества P на Q.

Теперь легко доказать следующие теоремы:

Теорема 4.7. *Квазигруппа $P(B)$ тогда и только тогда гомотопно отображается на квазигруппу $Q(A)$, когда существуют такие их изотопы $P(B_0)$ и $Q(A_0)$, что $B_0 = A_0^\gamma$ для некоторого γ (т. е. $P(B_0)$ гомоморфно отображается на $Q(A_0)$).*

Доказательство. Пусть $B = A^T$, где $T = (\alpha, \beta, \gamma)$. Согласно определению гомотопии $\alpha = V_1\gamma U_1$, $\beta = V_2\gamma U_2$ (U_1, U_2 — подстановки множества P, а V_1, V_2 — подстановки множества Q). Таким образом,

$$B = A^{(\alpha, \beta, \gamma)} = A^{(V_1\gamma U_1, V_2\gamma U_2, \gamma)},$$

$$B = A^{(V_1, V_2, 1)(\gamma, \gamma, \gamma)(U_1, U_2, 1)},$$

откуда

$$B^{(U_1, U_2, 1)^{-1}} = A^{(V_1, V_2, 1)\gamma}.$$

Искомыми квазигруппами будут

$$B_0 = B^{(U_1^{-1}, U_2^{-1}, 1)} \text{ и } A_0 = A^{(V_1, V_2, 1)}.$$

Легко убедиться и в обратном: если $P(B)$ и $Q(A)$ соответственно изотопны $P(B_0)$ и $Q(A_0)$, а $P(B_0)$ гомоморфно отображается на $Q(A_0)$, то $P(B)$ гомотопно отображается на $Q(A)$.

Теорема 4.8. *Если лупа $P(B)$ гомотопно отображается на квазигруппу $Q(A)$, то лупа $P(B)$ гомоморфно отображается на некоторую лупу, изотопную квазигруппе $Q(A)$.*

* В этом случае квазигруппа $P(B)$ *гомоморфно отображается* на квазигруппу $Q(A)$.

Действительно, пусть $B = A^T = A^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ или $\gamma B(x, y) = A(\alpha x, \beta y)$. Пусть $x = e$ — единица лупы $P(B)$. Тогда $\gamma y = A(\alpha e, \beta y) = L^A_{\alpha e}\beta y$, где L^A_a — левая трансляция в $Q(A)$. Следовательно, $\beta = (L^A_{\alpha e})^{-1}\gamma$. Аналогично получаем $\alpha = (R^A_{\beta e})^{-1}\gamma$, тогда

$$\gamma B(x, y) = A[(R^A_{\beta e})^{-1}\gamma x, (L^A_{\alpha e})^{-1}\gamma y] = A_{\beta e, \alpha e}(\gamma x, \gamma y),$$

т. е.

$$B = A^{\gamma}_{\beta e, \alpha e}$$

(определение $A_{u,v}$ см. гл. I).

Следствие. *Если группа $P(B)$ гомотопно отображается на лупу $Q(A)$, то $P(B)$ гомоморфно отображается на $Q(A)$ и, следовательно, $Q(A)$ — группа.*

Действительно, согласно теореме 4.8 группа $P(B)$ гомоморфно отображается на некоторую лупу $Q(C)$, изотопную лупе $Q(A)$. Таким образом, $Q(C)$ тоже должна быть группой, и так как $Q(C)$ изотопна лупе $Q(A)$, то на основании теоремы Алберта заключаем, что и $Q(A)$ — группа.

Замечание. Неассоциативная лупа $P(B)$ может гомотопно (и даже гомоморфно) отображаться на группу $Q(A)$ (см. пример из п. 1° настоящей главы).

Примечания

1. Легко видеть, что если квазигруппа $Q(\cdot)$ а) конечна, б) ассоциативна (т. е. $Q(\cdot)$ — группа), то гомоморфный образ всегда квазигруппа.

Примеры гомоморфных образов квазигрупп, не являющихся квазигруппами, можно найти в статьях Бэйтса и Киокемейстера [38], Кауэлла [45], Ивенса [44]; они довольно сложны. Пример группоида с делением, отличного от квазигруппы, построить очень легко. Пусть Q — множество не отрицательных чисел и пусть $x \cdot y = |x - y|$, где $|x|$ — абсолютная величина числа $x \in Q$. Тогда $Q(\cdot)$ — искомый пример.

2. Для луп теорема 4.4 доказана Браком [31] и другим способом — Осборном. Здесь доказательство Осборна перенесено на квазигруппы.

3. Из теоремы 4.5 и леммы 4.5 следует, что если $Q(\cdot)$ — конечная квазигруппа, то порядок нормальной подквазигруппы $H(\cdot)$ является делителем порядка квазигруппы (обобщение теоремы Лагранжа). Если $H(\cdot)$ — подквазигруппа, но не нормальная подквазигруппа, то ее порядок может не быть порядком квазигруппы. Пример: $Q(\cdot)$ — неассоциативная лупа пятого порядка (таблица Кэли этой лупы приведена в гл. 1, п. 1°) и пусть $H = \{1, a\}$, где a — любой элемент из Q, $a \neq 1$. Очевидно, $H(\cdot)$ — подлупа порядка два. Следуя Браку [31], будем говорить, что конечная лупа $Q(\cdot)$ обладает свойством (L) (лагранжевым свойством), если порядок любой подлупы является делителем порядка лупы, и $Q(\cdot)$ обладает свойством (L'), если любая подлупа лупы $Q(\cdot)$ обладает свойством (L). Необходимое и достаточное условие, чтобы конечная лупа $Q(\cdot)$ обладала свойством (L'), состоит в следующем: в $Q(\cdot)$ должна существовать цепь $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_n = 1$, где каждая подлупа Q_i является нормальной подлупой в Q_{i-1} $(i = 1, \ldots, n)$ и Q_{i-1}/Q_i обладает свойством (L').

4. Теория нормальных подквазигрупп изучалась многими авторами. Кроме Бэйтса и Киокемейстера, отметим работы Алберта [1, 2], Бэра [36], Гаррисона [40], Мёдоча [53], а также Брака [31]. Алберт изучает нормальные подквазигруппы с помощью ассоциированной группы G (см. гл. I, п. 2°). В частности, им доказано, что подквазигруппа H квазигруппы $Q(\cdot)$ тогда и только тогда нормальна, когда $H = \Gamma 1 = \{\varphi 1\}$ и Γ — нормальный делитель ассоциированной группы G.

Глава V

КВАЗИГРУППЫ И ЛУПЫ СО СВОЙСТВОМ ОБРАТИМОСТИ (*IP*-КВАЗИГРУППЫ)

1°. *Определения и элементарные свойства.* До сих пор мы рассматривали квазигруппы и лупы с точки зрения их близости к группам, т. е. к ассоциативным квазигруппам. В группе, однако, большую роль играет и свойство обратимости, которое выражается в следующем: для каждого элемента x существует обратный элемент x^{-1} такой, что выполняется равенство $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$, и отсюда на основании ассоциативного закона получаем

$$x^{-1}(xy) = y, \ (yx)\,x^{-1} = y. \tag{5.1}$$

Равенства (5.1) можно взять в качестве определения одного весьма широкого класса квазигрупп и луп.

Определение 1. Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется *квазигруппой с правым свойством обратимости*, если существует такое отображение I_r множества Q в себя, что выполняется равенство

$$(yx)\,I_r x = y \tag{5.2}$$

для любых x и y. Аналогично определяется *квазигруппа с левым свойством обратимости.* В этом случае должно существовать такое отображение I_l, что

$$I_l x\,(xy) = y. \tag{5.3}$$

Если в квазигруппе $Q(\cdot)$ выполняются одновременно (5.2) и (5.3), то она называется *квазигруппой со свойством обратимости.* Кратко, квазигруппа с левым (правым) свойством обратимости называется *левой* (правой) *IP-квазигруппой*, а квазигруппа со свойством обратимости называется *IP-квазигруппой* [1].

Лупа со свойством обратимости кратко называется *IP-лупой.* Пусть $Q(\cdot)$ — произвольная лупа и пусть 1 — единица этой лупы. Уравнения $ax = 1$, $ya = 1$ имеют единственные решения. Элемент x называется *правым обратным* элементом для a и обозначается через a^{-1}, а элемент y называется *левым обратным* элементом для a и обозначается через ${}^{-1}a$, таким образом,

$$aa^{-1} = 1,\ {}^{-1}aa = 1.$$

Если $Q(\cdot)$ — IP-лупа, то

$$I_r x = x^{-1},\ I_l x = {}^{-1}x. \tag{5.4}$$

Для этого достаточно положить $y = 1$ в (5.2). и (5.3). Условимся в любой IP-квазигруппе сохранять для краткости записи $I_r x$ и $I_l x$ обозначения из (5.4). Таким образом, равенства (5.2) и (5.3) можно переписать в виде

$$(yx)\, x^{-1} = y,\ {}^{-1}x\,(xy) = y. \tag{5.5}$$

Докажем теперь ряд простых свойств, которые сразу вытекают из определения IP-квазигруппы.

1. *Отображение I_r: $x \to x^{-1}$ является подстановкой множества Q, причем $I_r^2 = 1$.* Действительно, из $yx \cdot x^{-1} = y$ следует $(yx \cdot x^{-1})\,(x^{-1})^{-1} = y\,(x^{-1})^{-1}$ или $yx = y\,(x^{-1})^{-1}$, откуда $(x^{-1})^{-1} = x$. Решением уравнения $I_r x = a$ будет $I_r a$, и это решение является единственным. Аналогично отображение I_l: $x \to {}^{-1}x$ также будет подстановкой множества Q причем $I_l^2 = 1$.

2. *Решением уравнения $ax = b$ будет ${}^{-1}ab$, а уравнения $ya = b$ соответственно ba^{-1}.* Действительно, $a\,({}^{-1}ab) = {}^{-1}({}^{-1}a)\,({}^{-1}ab) = b$.

3. $$(xy)^{-1} = {}^{-1}y\,{}^{-1}x,\quad {}^{-1}(xy) = y^{-1}x^{-1}. \tag{5.6}$$

Пусть $xy = z$, следовательно, $y = {}^{-1}xz$, а отсюда ${}^{-1}x = yz^{-1}$ и, наконец, $z^{-1} = {}^{-1}y^{-1}x$, т. е. $(xy)^{-1} = {}^{-1}y^{-1}x$. Аналогично доказывается и второе из равенств (5.6).

4. *Для любых a выполняются равенства*

$$L_{I_l a} = L_a^{-1},\quad R_{I_r a} = R_a^{-1},$$

которые следуют из (5.2) и (5.3) соответственно.

5. *В любой IP-квазигруппе выполняются равенства*

$$I_r R_a I_l = L_a^{-1},\quad I_l L_a I_r = R_a^{-1}, \tag{5.7}$$

$$I_l R_a I_r = L_{I_r a},\quad I_r L_a I_l = R_{I_l a}. \tag{5.8}$$

Действительно,

$$I_r R_a I_l x = ({}^{-1}xa)^{-1} = {}^{-1}a^{-1}\,({}^{-1}x) = {}^{-1}ax = L_{I_l a}x = L_a^{-1}x.$$

Аналогично доказываются и остальные равенства из (5.7) и (5.8).

6. *В любой IP-лупе правый и левый обратные элементы для x совпадают*

$${}^{-1}x = x^{-1}. \tag{5.9}$$

Для этого достаточно положить во втором из равенств (5.5) $y = x^{-1}$.

7. Таким образом, в любой IP-лупе выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} aa^{-1} = a^{-1}a = 1,\\ (ba)\,a^{-1} = a^{-1}(ab) = b,\\ (a^{-1})^{-1} = a,\ (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

$$\left.\begin{aligned} L_a^{-1} = L_{a^{-1}},\ R_a^{-1} = R_{a^{-1}},\\ IR_aI = L_a^{-1},\ IL_aI = R_a^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

где $Ix = x^{-1}$.

8. *В коммутативных IP-квазигруппах также выполняется равенство* (5.9). Действительно, $(ba)\,a^{-1} = b$, откуда ввиду коммутативности $a^{-1}\,(ab) = b$. Сравнивая это выражение с (5.3), получаем ${}^{-1}a = a^{-1}$.

9. Отметим еще следующие соотношения для локальных единиц и трансляции IP-квазигруппы. Пусть e_x, f_x — правая и соответственно левая локальные единицы элемента x. Тогда

$$xx^{-1} = f_x, \quad {}^{-1}xx = e_x, \tag{5.12}$$

$$e_x^{-1} = e_x, \quad {}^{-1}f_x = f_x. \tag{5.13}$$

Для трансляции L_x, R_x имеем

$$L_x^{-1} = L_{{}^{-1}x}, \quad R_x^{-1} = R_{x^{-1}}. \tag{5.14}$$

Равенства (5.12) и (5.14) следуют непосредственно из определения IP-квазигруппы. Для (5.13) имеем

$$(xe_x)\,e_x^{-1} = x.$$

С другой стороны, $xe_x = x$, следовательно, $xe_x^{-1} = x$, откуда $e_x^{-1} = e_x$.

2°. *Скрещенное произведение квазигрупп. Один пример IP-квазигруппы.* Выше был приведен только один пример IP-квазигруппы — группа. Ниже мы построим IP-квазигруппу, в которой $I_l \neq I_r$. Очевидно, такая квазигруппа не может быть IP-лупой (так как в IP-лупе $I_r = I_l$) и тем более группой.

Для построения такой квазигруппы мы используем так называемое *скрещенное произведение квазигруппы.* Оно подсказывается теорией расширения квазигрупп.

Пусть $P\,(\cdot)$ — некоторая квазигруппа, определенная на множестве $P = \{u, v, w, \ldots\}$, и пусть на множестве Q дана система квазигрупп Σ. Упорядоченной паре элементов u, v из P поставим в соответствие определенную операцию A из Σ, т. е. рассмотрим отображение $P^2 = P \times P$ на Σ:

$$(u, v) \longrightarrow A \in \Sigma.$$

Чтобы показать, что операция A соответствует паре u, $v \in P$, будем писать

$$(u, v) \longrightarrow A_{u, v},$$

т. е. $A = A_{u, v}$.

Рассмотрим множество $M = P \times Q$, состоящее из всевозможных пар (u, a), $u \in P$, $a \in Q$. Определим на множестве M операцию $(\circ)$:

$$(u, a) \circ (v, b) = [uv, A_{u, v}(a, b)]. \tag{5.15}$$

Таким образом, на M определен группоид $M(\circ)$, который назовем *скрещенным произведением квазигруппы* $P(\cdot)$ *и системы квазигрупп* $Q(\Sigma)$, причем будем обозначать это так:

$$M = P \times Q, (\circ) = \langle \cdot, \Sigma \rangle.$$

Легко видеть, что *скрещенное произведение квазигрупп* $Q(\circ)$ — *тоже квазигруппа*. Действительно, пусть x, $y \in M$. Покажем, что существует единственный элемент $z \in M$ такой, что $x \circ z = y$. В самом деле, пусть $x = (u, a)$, $y = (v, b)$, $z = (w, c)$. Следовательно, мы должны иметь

$$(u, a) \circ (w, c) = (v, b),$$

или

$$[uw, A_{u, v}(a, c)] = (v, b),$$

откуда

$$uw = v, A_{u, w}(a, c) = b. \tag{5.16}$$

Из первого уравнения (5.16) находим w. Таким образом, операция $A_{u,w} \in \Sigma$ определена однозначно. Второе уравнение из (5.16) дает c. Так же решается уравнение $z \circ x = y$ относительно z.

Аналогичным способом можно доказать следующее утверждение: $M(\circ)$ — *лупа тогда и только тогда, когда* 1) $P(\cdot)$ — *лупа с единицей* 1, 2) *существует такой элемент* $e \in Q$, *что*

$$A_{u, 1}(a, e) = A_{1, v}(e, a) = a$$

для любых $a \in Q$, u, $v \in P$. *В этом случае единицей лупы* $M(\circ)$ *будет пара* $(1, e)$.

Далее можно доказать следующее предложение:

Теорема 5.1. *Пусть* θ — *конгруэнция (нормальная конгруэнция) в квазигруппе* $P(\cdot)$ *и* i_Q — *универсальное отношение* [47] *на* Q (*т. е.* $a i_Q b$ *для любых* a, $b \in Q$). *Тогда отношение* $\overline{\theta} = (\theta, i_Q)$: $(u, a) \overline{\theta} (v, b)$, *означающее* $u\theta v$, $a i_Q b$ *одновременно, является конгруэнцией (нормальной конгруэнцией) в* $M(\circ)$.

Например, покажем, что из $x \circ z \overline{\theta} y \circ z$ следует $x \overline{\theta} y$, если θ — нормальная конгруэнция на $P(\cdot)$. Действительно, пусть $x = (u, a)$,

$y = (v, b)$, $z = (w, c)$. Тогда

$$(u, a) \circ (w, c)\, \overline{\theta}\, (v, b) \circ (w, c),$$
$$(uw, A_{u,w}(a, c))\, \overline{\theta}\, (vw, A_{v,w}(b, c)),$$

откуда $uw\theta vw$. Следовательно, $u\theta v$, и отсюда заключаем, что $x\overline{\theta}y$.

Следствие 1. *Если в $P(\cdot)$ существует идемпотентный элемент t, т. е. $t^2 = t$, то совокупность $N \subseteq M$ всех пар (t, a), где a пробегает все Q, является нормальной подквазигруппой в $M(\circ)$.*

Действительно, легко убедиться в том, что N является подквазигруппой в $M(\circ)$. Далее возьмем в качестве θ единичное отношение [47] j_P на $P(\cdot)$, т. е. из xj_Py следует $x = y$. Тогда $\overline{\theta} = (j_P, i_Q)$ является нормальной конгруэнцией в $M(\circ)$. Так как $(t,a)\circ(t,a)\overline{\theta}(t, a)$, то ввиду леммы 4.1 N будет нормальной подквазигруппой.

Следствие 2. *Если $P(\cdot)$ — лупа, то $N = \{(1, a)\}$, где 1 — единица $P(\cdot)$, является нормальной подквазигруппой в $M(\circ)$.*

Скрещенное произведение квазигрупп можно использовать для построения различных классов квазигрупп.

Частным случаем скрещенного произведения является *прямое произведение*: если $A_{u,v} = (\bullet)$ для всех $u, v \in P$, то $M(\circ)$ называется прямым произведением квазигрупп $P(\cdot)$ и $Q(\bullet)$:

$$(u, a)\circ(v, b) = (uv, a\bullet b).$$

Пример IP-квазигруппы, для которой $I_r \neq I_l$. Рассмотрим прямое произведение группы $P(\cdot)$ и квазигруппы $Q(A)$, где $A(a, b) = \theta a\cdot b$, $Q(\cdot)$ — группа и θ — автоморфизм второго порядка этой группы. Докажем, что $M(\circ)$, где $M = P\times Q$ и $(\circ) = \langle\cdot, A\rangle$, будет IP-квазигруппой с

$$\left.\begin{aligned} I_r(u, a) &= (u^{-1}, \theta a^{-1}),\\ I_l(u, a) &= (u^{-1}, a^{-1}). \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

Действительно, имеем

$$I_l(u, a) \circ ((u, a) \circ (v, b)) = (u^{-1}\cdot uv, \theta a^{-1}\cdot\theta a\cdot b) = (v, b),$$
$$[(v, b) \circ (u, a)] \circ I_r(u, a) = (vu, \theta b\cdot a)\circ(u^{-1}, \theta a^{-1}) =$$
$$= (vu\cdot u^{-1}, \theta(\theta b\cdot a)\cdot\theta a^{-1}) = (v, \theta^2 b\cdot\theta a\theta a^{-1}) = (v, \theta^2 b) = (v, b).$$

Следовательно, $M(\circ)$ — IP-квазигруппа. Так как $\theta \neq 1$, то из (5.17) следует, что в $M(\circ)$ имеет место $I_r \neq I_l$.

3°. *Изотопы IP-квазигрупп. Квазигруппы Муфанг.* Прежде всего заметим, что IP-квазигруппу можно определить с помощью обратных операций: *квазигруппа $Q(A)$ тогда и только тогда IP-квазигруппа, когда существуют две подстановки I_r и I_l такие, что*

$$A^{-1} = A^{(I_l, 1, 1)}, \quad {}^{-1}A = A^{(1, I_r, 1)}. \tag{5.18}$$

Действительно, согласно определению квазигруппы $Q(A)$ имеем

$$A\,[A\,(b,\ a),\ I_r a] = b,$$

откуда $A\,(b,\ a) = {}^{-1}A\,(b,\ I_r a)$, т. е. $A = ({}^{-1}A)^{(1,\ I_r,\ 1)}$. Следовательно,

$${}^{-1}A = A^{(1,\ I_r,\ 1)^{-1}} = A^{(1,\ I_r^{-1},\ 1)} = A^{(1,\ I_r,\ 1)}.$$

Аналогично доказывается и первое из равенств (5.18). Из равенств (5.18) следует

Лемма 5.1. *Все обратные квазигруппы для IP-квазигруппы A изотопны между собой.*

Действительно, пусть

$$P_l = (I_l,\ 1,\ 1), \quad P_r = (1,\ I_r,\ 1). \tag{5.19}$$

Тогда равенства (5.18) превращаются в

$$A^{-1} = A^{P_l}, \quad {}^{-1}A = A^{P_r}.$$

Используя следствие 1 леммы 1.3 получим

$${}^{-1}(A^{-1}) = {}^{-1}(A^{P_l}) = ({}^{-1}A)^{P_l^l} = A^{P_r P_l^l},$$

$$({}^{-1}A)^{-1} = (A^{P_r})^{-1} = (A^{-1})^{P_r^r} = A^{P_l P_r^r},$$

$$A^* = [{}^{-1}(A^{-1})]^{-1} = (A^{P_r P_l^l})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^{T^r} = A^{P_l T^r}.$$

Напомним, что $T^r = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)^r = (\alpha,\ \gamma,\ \beta)$ и $T^l = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)^l = (\gamma, \beta,\ \alpha)$.

Следствие. *Если A — IP-лупа, то все обратные лупы для A совпадают.*

Обратные лупы для лупы A определяются равенствами (1.18)

$$A^{\rho} = (A^{-1})^{P_A}, \quad A^{\lambda} = ({}^{-1}A)^{S_A},$$

где $P_A = (I_A^{-1},\ 1,\ 1)$, $S_A = (1,\ I_A,\ 1)$ и $A\,(x,\ I_A x) = 1$. Но в силу свойств 1 и 5 IP-луп имеем $I_r = I_l = I_A = I$ и

$$P_A = (I^{-1},\ 1,\ 1) = (I,\ 1,\ 1),$$

откуда ввиду (5.19) получаем $P_A = P_l$ и $P_A^2 = 1$. Итак,

$$A^{\rho} = (A^{-1})^{P_A} = A^{P_A^2} = A.$$

Аналогично находим $A^{\lambda} = A$, а отсюда и равенства $A^{\rho\lambda} = A$, $A^{\lambda\rho} = A$ и т. д.

Легко видеть, что имеет место и обратное утверждение: *если A — лупа* и $A^{\rho} = A^{\lambda} = A$, то *$A$ — IP-лупа.*

Пусть теперь B — некоторый изотоп IP-квазигруппы A

$$B = A^S.$$

Тогда ввиду следствия 1 леммы 1.3

$$B^{-1} = (A^S)^{-1} = (A^{-1})^{S^r} = A^{P_l S^r} = (B^{S^{-1}})^{P_l S^r} = B^{S^{-1} P_l S^r}. \quad (5.20)$$

Если B—тоже IP-квазигруппа, то мы должны иметь $B^{-1} = B^{(I'_l, 1, 1)} = B^{P'_l}$, где I'_l — некоторая подстановка. Следовательно,

$$B^{S^{-1} P_l S^r} = B^{P'_l} = (B^{S^{-1}})^{S P'_l},$$

т. е. $A^{P_l S^r} = A^{S P'_l}$, откуда

$$A^{P_l S^r (P'_l)^{-1} S^{-1}} = A. \quad (5.21)$$

Пусть $S = (\lambda, \mu, \nu)$, тогда

$$T_l = P_l S^r (P'_l)^{-1} S^{-1} = (I_l, 1, 1)(\lambda, \mu, \nu)(I_l'^{-1}, 1, 1)(\lambda^{-1}, \mu^{-1}, \nu^{-1}) =$$
$$= (I_l \lambda I_l'^{-1} \lambda^{-1}, \nu\mu^{-1}, \mu\nu^{-1}).$$

Таким образом, T_l должна быть автотопией квазигруппы A. Аналогично, получаем, рассматривая ${}^{-1}B$, что $T_r = (\nu\lambda^{-1}, I_r \mu I_r'^{-1} \mu^{-1}, \lambda\nu^{-1})$ тоже должна быть автотопией квазигруппы A. Итак, мы пришли к такому утверждению:

Теорема 5.2. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы изотоп IP-квазигруппы A был тоже IP-квазигруппой, является следующее: существуют две подстановки I'_r и I'_l порядка два; при этом $T_l = (I_l \lambda I_l'^{-1} \lambda^{-1}, \nu\mu^{-1}, \mu\nu^{-1})$ и $T_r = (\nu\lambda^{-1}, I_r \mu I_r'^{-1} \mu^{-1}, \lambda\nu^{-1})$ являются автотопиями квазигруппы A.*

Мы уже видели, что это условие необходимо. Доказательство достаточности не представляет никаких трудностей: надо идти обратным путем от равенства (5.21) к равенству (5.20) и использовать условия теоремы.

Применим предыдущую теорему для случая, когда B — лупа, т. е. найдем условия, при которых некоторый изотоп B IP-квазигруппы A является IP-лупой.

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда B главно-изотопна A, тогда изотопия согласно лемме 1.1 должна иметь вид

$$B = A^{(R_c^{-1}, L_d^{-1}, 1)}.$$

Однако ввиду равенств (5.14) получаем $R_c^{-1} = R_{c^{-1}}$, $L_d^{-1} = L_{{}^{-1}d}$. Таким образом, лупа B должна иметь вид

$$B = A^{(R_a, L_b, 1)},$$

где $a = c^{-1}$, $b = {}^{-1}d$.

Если B является IP-лупой, то в силу теоремы 5.2 существуют две подстановки I'_l и I'_r такие, что

$$T_l = (I_l R_a I'_l R_a^{-1}, L_b^{-1}, L_b), \quad T_r = (R_a^{-1}, I_r L_b I'_r L_b^{-1}, R_a)$$

будут автотопиями квазигруппы A, т. е.

$$\left.\begin{aligned} L_b(xy) &= \varphi x \cdot L_b^{-1} y, \\ R_a(xy) &= R_a^{-1} x \cdot \psi y, \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

где $\varphi = I_l R_a I'_l R_a^{-1}$, $\psi = I_r L_b I'_r L_b^{-1}$. Так как $L_b^{-1} y = L_{^{-1}b} y = {}^{-1}b y$, $R_a^{-1} x = R_{a^{-1}} x = x a^{-1}$, из (5.22) следует

$$\left.\begin{aligned} b \cdot xy &= \varphi x \cdot {}^{-1}b y, \\ xy \cdot a &= x a^{-1} \cdot \psi y. \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

Заменим в первом из равенств (5.23) элемент y на by. Тогда

$$b\,(x \cdot by) = \varphi x \cdot y. \tag{5.24}$$

Пусть $y = b^{-1}$, тогда

$$b\,(x \cdot bb^{-1}) = \varphi x \cdot b^{-1},$$

поэтому

$$\varphi x = [b\,(x \cdot bb^{-1})]\, b = (b \cdot x f_b)\, b,$$

откуда, заменяя значение для φx в (5.24), получаем

$$b\,(x \cdot by) = \{[b\,(x \cdot f_b)]\, b\}\, y. \tag{5.25}$$

Аналогично второе из равенств (5.23) дает

$$(xa \cdot y)\, a = x\,[a\,(e_a y \cdot ba)]. \tag{5.26}$$

Элемент b назовем *левым муфанговым элементом*, если для любых x и y выполняется равенство (5.25). Аналогично элемент a назовем *правым муфанговым элементом*, если выполняется равенство (5.26). Таким образом, мы получаем

Следствие. *Изотоп $B = A^{(R_a, L_b, 1)}$ тогда и только тогда будет IP-лупой, когда a и b являются правым, соответственно левым муфанговыми элементами квазигруппы $Q\,(A)$.*

Может оказаться, что все элементы IP-квазигруппы $Q(\cdot)$ являются левыми и правыми муфанговыми элементами. Такую квазигруппу назовем квазигруппой Муфанг. Таким образом, мы пришли к следующему понятию:

Определение 2. Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется *квазигруппой Муфанг*, если

$$(xy \cdot z)\, y = x\,[y\,(e_y z \cdot y)], \tag{5.27}$$

$$y\,(x \cdot yz) = [(y \cdot x f_y)\, y]\, z, \tag{5.28}$$

для любых $x, y, z \in Q$ $(y e_y = y,\ f_y y = y)$ [2].

Теорема 5.3. *Всякая квазигруппа Муфанг $Q(\cdot)$ является IP-квазигруппой.*

Действительно, для каждого $y \in Q$ существует такой элемент y', что $e_y y' \cdot y = e_y$. Пусть

$$xy \cdot y' = x'.$$

Если мы докажем, что, $x' = x$, то из этого будет следовать, что $Q(\cdot)$ — правая IP-квазигруппа. Имеем, пользуясь (5.27),

$$x'y = (xy \cdot y')\, y = x\,[y\,(e_y\,(y' \cdot y))] = x\,(ye_y) = xy,$$

откуда вытекает равенство $x' = x$. Аналогично доказывается, что $Q(\cdot)$ — левая IP-квазигруппа.

Любой элемент квазигруппы Муфанг является одновременно левым и правым муфанговым элементом, поэтому, применяя следствие теоремы 5.2, мы получаем следующее утверждение:

Следствие. *Любая лупа, изотопная квазигруппе Муфанг, будет IP-лупой.*

Пусть квазигруппа Муфанг $Q(\cdot)$ является лупой, т. е. $e_y = f_y = 1$ — единица лупы $Q(\cdot)$, и тождества (5.27) и (5.28) превращаются в следующие:

$$(xy \cdot z)\, y = x\,(y \cdot zy), \tag{5.29}$$

$$y\,(x \cdot yz) = (yx \cdot y)\, z. \tag{5.30}$$

Ниже (см. гл. VI п. 1°) будет доказано, что *в лупе тождества* (5.29) *и* (5.30) *эквивалентны*. Это дает нам основание дать следующее:

Определение 3. Лупа $Q(\cdot)$, в которой выполняется одно из тождеств (5.29) или (5.30), называется *лупой Муфанг*. Тождества (5.29) и (5.30) назовем *тождествами Муфанг*.

Из определения лупы Муфанг непосредственно следует:

Теорема 5.4. *Если любая лупа, изотопная лупе $Q(\cdot)$, является IP-лупой, то $Q(\cdot)$ — лупа Муфанг.*

Действительно, лупа Муфанг является квазигруппой Муфанг. Мы можем теперь дать более точную характеристику квазигрупп Муфанг.

Теорема 5.5. *Любая лупа, изотопная квазигруппе Муфанг, является лупой Муфанг.*

Пусть $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y$. Тогда $Q(\circ)$ будет лупой с единицей $e = ba$. Для краткости будем писать $R_a = R$, $L_b = L$. Из определения лупы $Q(\circ)$ следует

$$xy = Rx \circ Ly.$$

В равенстве (5.27) переходим к операции $(\circ)$

$$R\,[R\,(Rx \circ Ly) \circ Lz] \circ Lz = Rx \circ L\{Ry \circ L\,[R\,(Re_y \circ Lz) \circ Ly]\}.$$

Заменим x, y, z на $R^{-1}x$, $L^{-1}y$, $L^{-1}z$ соответственно:

$$R\,[R\,(x \circ y) \circ z] \circ y = x \circ L\{RL^{-1}y \circ L\,[R\,(Re_{L^{-1}y} \circ z) \circ y]\}. \tag{5.31}$$

Пусть $x = e$, тогда из (5.31) следует

$$R(Ry \circ z) \circ y = L\{RL^{-1}y \circ L[R(Re_{L^{-1}y} \circ z) \circ y]\}.$$

Таким образом, равенство (5.31) превращается в следующее:

$$R[R(x \circ y) \circ z] \circ y = x \circ [R(Ry \circ z) \circ y]. \tag{5.32}$$

Положим в (5.32) $y = e$,

$$R(Rx \circ z) = x \circ R(Re \circ z).$$

Обозначим $R(Re \circ z)$ через τz. Очевидно, τ — подстановка множества Q. Таким образом,

$$R(Rx \circ z) = x \circ \tau z.$$

или

$$R(x \circ z) = R^{-1}x \circ \tau z. \tag{5.33}$$

Пользуясь равенством (5.33), мы можем упростить равенство (5.32):

$$[(x \circ y) \circ \tau z] \circ y = x \circ [(y \circ \tau z) \circ y],$$

следовательно,

$$[(x \circ y) \circ z] \circ y = x \circ [(y \circ z) \circ y]. \tag{5.34}$$

Если мы в (5.28) перейдем к операции ($\circ$), то приходим к равенству

$$y \circ [x \circ (y \circ z)] = [y \circ (x \circ y)] \circ z, \tag{5.35}$$

причем используется следующее соотношение:

$$L(x \circ y) = \theta x \circ L^{-1}y, \tag{5.36}$$

где $\theta x = L(x \circ Le)$; (5.36) доказывается как (5.34). Тождество (5.34) немного отличается от тождества Муфанг, лупа с тождеством (5.34) называется *правой лупой Бола*, а лупа $Q(\circ)$ с тождеством (5.35) — *левой лупой Бола*.

Ниже будет показано, что всякая лупа Муфанг является левой (или правой) лупой Бола, но обратное утверждение неверно [17, 31].

С другой стороны, *если в лупе $Q(\circ)$ одновременно выполняются тождества* (5.34) *и* (5.35), *то она будет лупой Муфанг*. В самом деле, согласно теореме 5.3 лупа $Q(\circ)$ будет IP-лупой. Тогда, используя равенство (5.34), имеем

$$y \circ (z \circ y) = y \circ \{[(y^{-1} \circ y) \circ z] \circ y\} = y \circ \{y^{-1} \circ [(y \circ z) \circ y]\},$$

где $y^{-1} \circ y = e$. Таким образом,

$$y \circ (z \circ y) = (y \circ z) \circ y.$$

Последнее равенство превращает тождество (5.34) в (5.29).

Обратно: *пусть* $Q(\circ)$ — *лупа Муфанг и* R — *такие подстановки, что*

$$R(x \circ y) = R^{-1}x \circ \tau y, \quad L(x \circ y) = \theta x \circ L^{-1}y \tag{5.37}$$

для некоторых подстановок τ, θ. *Тогда* $Q(\cdot)$, *где* $xy = Rx \circ Ly$, *является квазигруппой Муфанг* [3].

Доказательство сводится к проверке формул (5.27) и (5.28). Имеем

$$(xy \cdot z)\, y = R\,[R\,(Rx \circ Ly) \circ Lz] \circ Ly = [(Rx \circ Ly) \circ \tau Lz] \circ Ly = \\ = Rx \circ [Ly\,(\tau Lz \circ Ly)].$$

Тогда для правой части (5.27) получаем

$$x\,[y\,(e_y z \cdot y)] = Rx \circ L\{Ry \circ L\,[R\,(Re_y \circ Lz) \circ Ly]\} = \\ = Rx \circ \{\theta Ry \circ [R\,(Re_y \circ Lz) \circ Ly]\}.$$

Равенство (5.27) будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$Ly \circ (\tau Lz \circ Ly) = \theta Ry \circ [(e_y \circ \tau Lz) \circ Ly],$$

или

$$y \circ (z \circ y) = \theta RL^{-1}y \circ [(e_{L^{-1}y} \circ z) \circ y]. \tag{5.38}$$

Чтобы доказать равенство (5.38), найдем e_u:

$$ue_u = u, \quad Ru \circ Le_u = u,$$

$$Le_u = (Ru)^{-1} \circ u = IRu \circ u, \quad e_u = L^{-1}(IRu \circ u).$$

Но из (5.36) следует

$$L^{-1}(x \circ y) = \theta^{-1}x \circ Ly, \tag{5.39}$$

так как, если $(\theta, L^{-1}, L) \in \mathfrak{A}_{(0)}$, то $(\theta^{-1}, L, L^{-1}) \in \mathfrak{A}_{(0)}$, где $\mathfrak{A}_{(0)}$—группа автотопии лупы $Q(\circ)$. Таким образом,

$$e_u = \theta^{-1}IRu \circ Lu.$$

Следовательно,

$$e_{L^{-1}y} = \theta^{-1}IRL^{-1}y \circ y.$$

Докажем теперь следующее равенство:

$$\theta^{-1} = I\theta I. \tag{5.40}$$

Действительно, положим во втором из равенств (5.37) $x = y^{-1}$: $Le = \theta y^{-1} \circ L^{-1}y$. Так как лупа Муфанг является IP-лупой, то из последнего равенства получаем

$$\theta y^{-1} = Le \circ (L^{-1}y)^{-1},$$

$$(\theta y^{-1})^{-1} = (Le \circ (L^{-1}y)^{-1})^{-1} = L^{-1}y \circ (Le)^{-1}. \tag{5.41}$$

С другой стороны, из (5.39) при $y = e$ находим

$$L^{-1}x = \theta^{-1}x \circ Le,$$

откуда

$$\theta^{-1}x = L^{-1}x \circ (Le)^{-1}. \tag{5.42}$$

Сравнивая (5.41) и (5.42), мы заключаем, что $(\theta x^{-1})^{-1} = \theta^{-1}x$, т. е. справедливо равенство (5.40).

Теперь можно завершить доказательство равенства (5.38):

$$\theta RL^{-1}y \circ [(e_{L^{-1}y} \circ z) \circ y] = \theta RL^{-1}y \circ \{[(\theta^{-1}IRL^{-1}y \circ y) \circ z] \circ y\} =$$
$$= \theta RL^{-1}y \circ \{I\theta I \cdot IRL^{-1}y \circ [y \circ (z \circ y)]\} = \theta RL^{-1}y \circ \{I\theta RL^{-1}y \circ$$
$$\circ [y \circ (z \circ y)]\} = y \circ (z \circ y).$$

Следовательно, (5.38) доказано, тем самым доказано и равенство (5.27). Аналогично доказывается и равенство (5.28).

4°. *Автотопии IP-квазигрупп и IP-луп.* Прежде всего мы докажем одно общее утверждение, которое имеет место в любой квазигруппе. Пусть ${}^{\sigma}A$ — любая обратная квазигруппа к квазигруппе A (см. гл. I, п. 4°). Тогда имеет место

Л е м м а 5.2. *Если T — автотопия квазигруппы A, то σT — автотопия квазигруппы ${}^{\sigma}A$.*

Действительно, пусть T — автотопия квазигруппы

$$A^T = A.$$

Тогда, используя лемму 1.3, находим

$${}^{\sigma}(A^T) = ({}^{\sigma}A)^{\sigma T},$$

откуда

$$({}^{\sigma}A)^{\sigma T} = {}^{\sigma}A. \tag{5.43}$$

Применим лемму 5.2 к IP-квазигруппам. В силу леммы 5.1 квазигруппа ${}^{\sigma}A$ изотопна квазигруппе A:

$${}^{\sigma}A = A^S. \tag{5.44}$$

Пусть T — автотопия квазигруппы A, тогда из равенств (5.43) и (5.44) следует

$$(A^S)^{\sigma T} = A^S,$$

откуда

$$A^{S(\sigma T)S^{-1}} = A,$$

т. е. $S\,(\sigma T)\,S^{-1}$ — автотопия IP-квазигруппы A.

Если $A^{\sigma} = A^{-1}$, то $S = P_l = (I_l, 1, 1)$ и $\sigma\,(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma, \beta)$. Следовательно,

$$S\,(\sigma T)\,S^{-1} = P_l\,(\sigma T)\,P_l^{-1} = (I_l, 1, 1)\,(\alpha, \gamma, \beta)\,(I_l^{-1}, 1, 1) = (I_l\alpha I_l^{-1}, \gamma, \beta).$$

Но $I_l^2 = 1$, поэтому

$$S(\sigma T)S^{-1} = (I_l \alpha I_l, \gamma, \beta).$$

Итак, имеет место

Лемма 5.3. *Пусть $Q(A)$ — IP-квазигруппа. Если $T = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{A}_A$, где $\mathfrak{A}_A$ — группа всех автотопий квазигруппы $Q(A)$, то*

$$(I_l \alpha I_l, \gamma, \beta) \in \mathfrak{A}_A, \quad (\gamma, I_r \beta I_r, \alpha) \in \mathfrak{A}_A.$$

Следствие 1. *Пусть $T = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{A}_A$. Применяем лемму 5.2 к автотопиям $(I_l \alpha I_l, \gamma, \beta)$ и $(\gamma, I_r \beta I_r, \alpha)$. Тогда из $(I_l \alpha I_l, \gamma, \beta) \in \mathfrak{A}_A$ следует $(\beta, I_r \gamma I_r, I_l \alpha I_l) \in \mathfrak{A}_A$. Далее из $(\beta, I_r \gamma I_r, \alpha) \in \mathfrak{A}_A$ имеем $(I_l \beta I_l, I_l \alpha I_l, I_r \gamma I_r) \in \mathfrak{A}_A$, а из $(I_l \gamma I_l, \alpha, I_r \beta I_r) \in \mathfrak{A}_A$. следует $(I_r \beta I_r. I_r \alpha I_r, I_l \gamma I_l) \in \mathfrak{A}_A$.*

Следствие 2. *Пусть A — IP-лупа и $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{A}_A$, тогда*

$$(I\alpha I, \gamma, \beta), \ (\gamma, I\beta I, \alpha), \ (\beta, I\gamma I, I\alpha I), (I\gamma I, \alpha, I\beta I), \ (I\beta I, I\alpha I, I\gamma I)$$

также являются автотопиями IP-лупы A.

Пусть $Q(\cdot)$ — IP-лупа. Если $T = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{A}_{(\cdot)}$ и

$$\alpha 1 = l, \beta 1 = k,$$

то, как было показано в гл. II, п. 3°, имеем

$$T = (R_k^{-1}, L_l^{-1}, 1)\gamma$$

и

$$\alpha = R_k^{-1}\gamma, \quad \beta = L_l^{-1}\gamma. \tag{5.45}$$

Из равенства $(\cdot)^T = (\cdot)$ следует

$$(\cdot)^{\left(R_k^{-1}, L_l^{-1}, 1\right)} = (\cdot)^{\gamma^{-1}},$$

т. е. изотоп $(\cdot)^{(R_k^{-1}, L_l^{-l}, 1)}$ является IP-лупой, изоморфной $(\cdot)$, и поэтому, как было показано в предыдущем пункте, элемент $a = k^{-1} = (\beta 1)^{-1}$ является правым, а $b = l^{-1} = (\alpha 1)^{-1}$ соответственно левым муфанговым элементом лупы $Q(\cdot)$, т. е. для любых x, y имеют место равенства

$$(xa \cdot y)\, a = x\,(a \cdot ya), \tag{5.46}$$

$$b\,(x \cdot by) = (bx \cdot b)\, y. \tag{5.47}$$

Ранее было отмечено, что *тождества* (5.29) *и* (5.30) *в лупе $Q(\cdot)$ эквивалентны*. Сейчас мы убедимся в справедливости этого утверждения. С этой целью докажем более общее утверждение.

Теорема 5.6. *Совокупность M_l всех левых муфанговых элементов лупы $Q(\cdot)$ является подлупой лупы $Q(\cdot)$. Подлупа $M_l(\cdot)$ совпадает с подлупой $M_r(\cdot)$ правых муфанговых элементов: $M_l = M_r = M$.*

Пусть a — любой правый муфанговый элемент. Тогда из равенства (5.46) следует $R_a(R_a x \cdot y) = x \cdot L_a R_a y$, откуда вытекает, что $T_a = (R_a^{-1}, L_a R_a, R_a)$ является автотопией. Согласно следствию 2 леммы 5.3 получаем, что $T'_a = (IR_a^{-1}I, R_a, L_a R_a)$ тоже автотопия лупы $Q(\cdot)$, следовательно, $(R_a 1)^{-1} = a^{-1}$ согласно предыдущему замечанию также будет правым муфанговым элементом. Пусть $a_1, a_2 \in M_r$. Покажем, что $a_1 a_2 \in M_r$.

Произведение $T_{a_1} T_{a_2}$ является автотопией IP-лупы $Q(\cdot)$:

$$T_{a_1} T_{a_2} = (R_{a_1}^{-1} R_{a_2}^{-1},\ L_{a_1} R_{a_1} L_{a_2} R_{a_2},\ R_{a_1} R_{a_2}),$$

отсюда на основании того же следствия 2 леммы 5.3 вытекает, что и $T'' = (IR_{a_1} R_{a_2} I,\ R_{a_1}^{-1} R_{a_2}^{-1},\ IL_{a_1} R_{a_1} L_{a_2} R_{a_2} I) \in \mathfrak{A}_{(\cdot)}$, и поэтому $(R_{a_1}^{-1} R_{a_2}^{-1} 1)^{-1} \in M_r$. Но $(R_{a_1}^{-1} R_{a_2}^{-1} 1)^{-1} = (R_{a_1^{-1}} R_{a_2^{-1}})^{-1} = (a_2^{-1} a_1^{-1})^{-1} = a_1 a_2$, следовательно, $a_1 a_2 \in M_r$. Мы показали, таким образом, что M_r — подлупа лупы $Q(\cdot)$[4].

Пусть $a \in M_r$, тогда из (5.46) следует

$$[(xa \cdot y)\, a]^{-1} = [x\, (a \cdot ya)]^{-1},$$

откуда

$$a^{-1}\, (y^{-1} \cdot a^{-1} x^{-1}) = (a^{-1} y^{-1} \cdot a^{-1})\, x^{-1},$$

или

$$a^{-1}\, (y \cdot a^{-1} x) = (a^{-1} y \cdot a^{-1})\, x,$$

а это означает, что $a^{-1} \in M_l$. Так как a^{-1} может быть любым элементом из M_r, то мы доказали, что $M_r \subseteq M_l$. Аналогично доказывается, что $M_r \subseteq M_l$, таким образом, $M_r = M_l = M$.

Следствие 1. *В IP-лупе $Q(\cdot)$ тождества*

$$(xy \cdot z)\, y = x\, (y \cdot zy) \tag{5.48}$$

и

$$y\, (x \cdot yz) = (yx \cdot y)\, z \tag{5.49}$$

эквивалентны.

Действительно, из тождества (5.48) следует, что $M_l = Q$, откуда вытекает равенство $M_r = Q$, т. е. тождество (5.49). Аналогично доказывается, что из (5.49) следует (5.48).

Замечание. Так как понятия правого и левого муфангового элементов в IP-лупах совпадают, то элемент a, удовлетворяющий равенству (5.46) или равенству (5.47) для любых $x, y \in Q$, мы будем называть *муфанговым элементом*, а M — *муфанговой подлупой* IP-лупы $Q(\cdot)$.

Следствие 2. *Если $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ — автотопия IP-лупы $Q(\cdot)$, то $\alpha 1, \beta 1, \gamma 1$ — муфанговые элементы.*

Действительно, $k^{-1} = (\beta 1)^{-1}$ является муфанговым элементом, т. е. $k^{-1} \in M$. Но тогда и $k \in M$. Аналогично получаем $l \in M$. Далее имеем $\gamma 1 = \gamma(1 \cdot 1) = \alpha 1 \cdot \beta 1 = lk$, следовательно, $\gamma 1 \in M$.

Заметим, что если $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ — автотопия IP-лупы $Q(\cdot)$, то все три компоненты автотопии T являются квазиавтоморфизмами IP-лупы $Q(\cdot)$. Это утверждение вытекает непосредственно из леммы 5.3.

Автотопии IP-лупы можно описать и с помощью псевдоавтоморфизмов (см. гл. III, п. 4°). Заметим, что в IP-лупе $Q(\cdot)$ имеют место следующие два равенства:

$$\varphi 1 = 1, \varphi I = I\varphi, \tag{5.50}$$

где φ — любой левый (правый) псевдоавтоморфизм, $Ix = x^{-1}$, $xx^{-1} = 1$. Первое из равенств (5.50) следует из леммы 3.1, а для доказательства второго используем равенство (3.20), которое является определением левого псевдоавтоморфизма:

$$\varphi x\,(\varphi y \cdot c) = \varphi\,(xy) \cdot c.$$

Пусть $y = x^{-1}$, тогда

$$\varphi x\,(\varphi x^{-1} \cdot c) = \varphi\,(xx^{-1}) \cdot c = \varphi 1 \cdot c = c,$$

откуда ввиду того, что $Q(\cdot)$ — IP-лупа, получаем $\varphi x^{-1} = (\varphi x)^{-1}$, т. е. второе из равенств (5.50).

В IP-лупах нет надобности различать левые и правые псевдоавтоморфизмы. Имеет место

Лемма 5.4. *В IP-лупе $Q(\cdot)$ группы всех правых и левых псевдоавтоморфизмов совпадают.*

Доказательство. Пусть φ — левый псевдоавтоморфизм с компаньоном a. Тогда (см. гл. III, п. 4°) $(\varphi, R_a\varphi, R_a\varphi)$ — автотопия IP-лупы $Q(\cdot)$. В силу следствия 2 леммы 5.3 $S = (IR_a\varphi I, I\varphi I, IR_a\varphi I)$ тоже автотопия лупы $Q(\cdot)$. Так как $\varphi I = I\varphi$ и $I^2 = 1$, то S принимает вид $S = (IR_aI\varphi, \varphi, IR_aI\varphi)$. Далее, используя равенства (5.11), находим $S = (L_{a^{-1}}\varphi, \varphi, L_{a^{-1}}\varphi)$, т. е. φ — правый псевдоавтоморфизм с компаньоном a^{-1}.

Замечание. Элемент a из $(\varphi, R_a\varphi, R_a\varphi)$ будем называть *левым компаньоном*, а элемент a^{-1} из $(L_{a^{-1}}\varphi, \varphi, L_{-1}\,\varphi)$ — *правым компаньоном* псевдоавтоморфизма φ.

Лемма 5.5. *Если $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ — автотопия IP-лупы $Q(\cdot)$ и $\alpha 1 = 1$, то α — псевдоавтоморфизм лупы $Q(\cdot)$ с левым компаньоном $\beta 1 = k$.*

Действительно, пусть $(\cdot)^T = (\cdot)$, где $T = (\alpha, \beta, \gamma)$, тогда, как было доказано в гл. II, п. 3°, автотопия T имеет вид

$$T = (R_k^{-1}, L_l^{-1}, 1)\,\gamma,$$

где $\beta 1 = k$, $\alpha 1 = l$ и

$$\beta = L_l^{-1}\,\gamma, \alpha = R_k^{-1}\,\gamma. \tag{5.51}$$

Но $L_l = L_{\alpha 1} = L_1 = 1$, поэтому $\beta = \gamma$. Следовательно, ввиду (5.51) получаем

$$T = (\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma, \gamma) = (\alpha, R_k\alpha, R_k\alpha),$$

а это означает, что α — псевдоавтоморфизм с компаньоном k.

Следствие. *Левые и правые компаньоны псевдоавтоморфизмов IP-луп являются муфанговыми элементами* [5].

Действительно, пусть φ — псевдоавтоморфизм IP-лупы $Q(\cdot)$ с правым компаньоном c, т. е. $T = (L_c\varphi, \varphi, L_c\varphi)$ — автотопия лупы $Q(\cdot)$.

В силу следствия 2 теоремы 5.6 элемент $L_c\varphi 1 = L_c 1 = c$ должен быть муфанговым элементом.

Приступим к выяснению строения автотопий IP-лупы.

Пусть $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ — автотопия IP-лупы $Q(\cdot)$. Тогда из следствия 2 леммы 5.3 получаем, что $T_1 = (I_\alpha I, \gamma, \beta)$ принадлежит группе автотопий $\mathfrak{A}_{(\cdot)}$. Следовательно, и $T_1T^{-1} \in \mathfrak{A}_{(\cdot)}$. Но

$$T_1T^{-1} = (I_\alpha I, \gamma, \beta)(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}) = (I_\alpha I_{\alpha^{-1}}, \gamma\beta^{-1}, \beta\gamma^{-1}),$$

откуда ввиду равенства (5.45) имеем

$$T_1T^{-1} = (I\alpha I\alpha^{-1}, L_l, L_l^{-1}).$$

Применяя к T_1T^{-1} следствие 2 леммы 5.3, получаем

$$T_2 = (L_l^{-1}, IL_lI, I_\alpha I_{\alpha^{-1}}) \in \mathfrak{A}_{(\cdot)},$$

откуда в силу (5.11) следует равенство

$$T_2 = (L_l^{-1}, R_l^{-1}, I_\alpha I_{\alpha^{-1}}),$$

а отсюда и

$$T_2^{-1} = (L_l, R_l, \alpha I\alpha^{-1} I) = (L_l, R_l, S) \in \mathfrak{A}_{(\cdot)}.$$

Найдем S:

$$Sx = S(x1) = L_lx \cdot R_l 1 = lx \cdot l = R_lL_lx,$$

т. е. $S = R_lL_l$. Более того, мы имеем

$$S = R_lL_l = L_lR_l,$$

так как $L_lR_lx = l \cdot xl = l1 \cdot xl = L_l1 \cdot R_lx = S(1 \cdot x) = Sx$. Таким образом,

$$T_2^{-1} = (L_l, R_l, L_lR_l) \in \mathfrak{A}_{(\cdot)}.$$

Наконец, рассмотрим автотопию T_2T:

$$T_2T = (L_l^{-1}, R_l^{-1}, R_l^{-1}L_l^{-1})(\alpha, \beta, \gamma) = (L_l^{-1}\alpha, R_l^{-1}\beta, R_l^{-1}L_l^{-1}\gamma).$$

Подстановка $L_l^{-1}\alpha$ оставляет 1 инвариантной:

$$L_l^{-1}\alpha 1 = L_l^{-1}l = 1.$$

Ввиду леммы 5.5 подстановка $\theta = L_l^{-1}\alpha$ будет псевдоавтоморфизмом с компаньоном

$$R_l^{-1}\beta 1 = c,$$

который является муфанговым элементом. Следовательно, автотопия T_2T должна иметь вид

$$T_2T = (\theta, R_c\theta, R_c\theta),$$

откуда находим

$$T = T_2^{-1}(\theta, R_c\theta, R_c\theta)$$

или

$$T = (\alpha, \beta, \gamma) = (L_l, R_l, R_l L_l)(\theta, R_c\theta, R_c\theta),$$
$$T = (L_l\theta, R_lR_c\theta, L_lR_lR_c\theta). \qquad (5.52)$$

Таким образом, доказана следующая

Т е о р е м а 5.7. *Любая автотопия IP-лупы $Q(\cdot)$ имеет вид* (5.52), *где θ — любой псевдоавтоморфизм лупы $Q(\cdot)$, а c — компаньон θ, l — любой муфанговый элемент лупы $Q(\cdot)$.*

Как следствие из теоремы 5.7 вытекает теорема для групп. Действительно, если $Q(\cdot)$ — группа, то $R_lR_c = R_{lc} = R_d$ и θ — автоморфизм группы $Q(\cdot)$ (в группе понятие псевдоавтоморфизма совпадает с понятием автоморфизма).

5°. *WIP-лупы*[6]. В любой IP-лупе выполняются следующие тождества:

$$y(xy)^{-1} = x^{-1}, \qquad (5.53)$$
$$(xy)^{-1}x = y^{-1}.$$

В связи с этими тождествами Бэр ввел следующее понятие [35]:

О п р е д е л е н и е 4. Лупа $Q(\cdot)$ называется *лупой с ослабленным свойством обратимости* (кратко *WIP-лупой*), если в $Q(\cdot)$ выполняется тождество

$$y\cdot I(xy) = Ix, \qquad (5.54)$$

где $Iy = y^{-1}$ — правый обратный элемент для y: $yy^{-1} = 1$.

В силу равенства (5.53) любая IP-лупа является WIP-лупой. Рассмотрим некоторые простые свойства WIP-луп.

а) Подстановка I^2 — автоморфизм WIP-лупы. Действительно, $I(y\cdot I(xy)) = I^2x$, следовательно,

$$I(xy)\cdot I(y\cdot I(xy)) = I(xy)\cdot I^2x,$$

откуда ввиду (5.54) получаем

$$Iy = I(xy)\cdot I^2x. \qquad (5.55)$$

Отсюда легко следует наше утверждение:

$$I^2x \cdot I^2y = I^2x \cdot I\ (I\ (xy) \cdot I^2x) = I\ (I\ (xy)) = I^2\ (xy).$$

б) $I^{-1}\ (xy) \cdot x = I^{-1}y.$ (5.56)

Это равенство получается применением к (5.55) автоморфизма I^{-2}. Аналогично доказывается, что из (5.56) следует (5.54).

в) WIP-лупа характеризуется и следующим свойством: лупа $Q\ (\cdot)$ тогда и только тогда WIP-лупа, когда из $xy \cdot z = 1$ следует $x \cdot yz = 1$.

Действительно, если $xy \cdot z = 1$, то $z = I\ (xy)$, а из $x \cdot yz = 1$ следует, что $yz = Ix$. Таким образом, $y \cdot I\ (xy) = Ix$. Обратное также легко доказывается.

г) $L_y^{-1} = IR_yI^{-1}, \quad R_y^{-1} = I^{-1}L_yI.$ (5.57)

Действительно, с помощью трансляций равенство (5.54) принимает вид

$$L_yIR_yx = Ix,$$

откуда следует первое из равенств (5.57).

д) WIP-лупа $Q\ (\cdot)$ характеризуется равенством

$$[^{-1}(\cdot)]^{-1} = (\cdot)^{(I^{-1},\ 1,\ I^{-1})} = (\cdot)^S, \tag{5.58}$$

или

$$^{-1}[(\cdot)^{-1}] = (\cdot)^{(1,\ I,\ I)}.$$

Из (5.54) следует $y = {}^{-1}(\cdot)\ (Ix,\ I\ (xy))$, откуда получаем

$$[^{-1}(\cdot)]^{-1}\ (Ix,\ y) = I\ (xy),$$

т. е. равенство (5.58).

е) Если $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ — автотопия WIP-лупы $Q\ (\cdot)$, то и

$$T_1 = (I^{-1}\gamma I, \alpha, I^{-1}\beta I),\ T_2 = (\beta,\ I\gamma I^{-1},\ I\alpha I^{-1})$$

тоже автотопии.

Используя лемму 5.2, получаем , что $\sigma T = (\gamma, \alpha, \beta)$ является автотопией для $[^{-1}(\cdot)]^{-1} = {}^{\sigma}(\cdot)$, откуда ввиду (5.58) находим

$$[(\cdot)^S]^{T^{lr}} = (\cdot)^S.$$

Следовательно,

$$T_1 = ST^{lr}S^{-1} = (I^{-1},\ 1,\ I^{-1})\ (\gamma, \alpha,\ \beta)\ (I, 1, I) = (I^{-1}\gamma I, \alpha, I^{-1}\beta\ I) \text{ —}$$

автотопия WIP-лупы $Q\ (\cdot)$. Применяя к T_1 преобразование $T \to T_1$, мы получаем автотопию T_2.

ж) Уравнения $ax = b$ и $ya = b$ имеют решения $x = I\ (I^{-1}b \cdot a)$ и $y = I^{-1}\ (a \cdot Ib)$ соответственно, что следует из равенств (5.54) и (5.56).

Примечания

[1] Понятия IP-квазигруппы и IP-лупы введены Браком [24, 25]. Элементарные свойства IP-квазигрупп можно найти в [24]. Один специальный вид IP-луп изучен Гинзбургом [41].

[2] Можно показать, что тождества (5.27) и (5.28) в квазигруппе $Q(\cdot)$ эквивалентны, поэтому квазигруппу Муфанг можно определить как квазигруппу с одним из тождеств — (5.27) или (5.28).

[3] Это предложение обобщает теорему 3 Брака из [24].

[4] Согласно определению подлупы мы должны были доказать, что в M_l уравнения $ax = b$, $ya = b$, $a, b \in$, M_l разрешимы. Однако так как $Q(\cdot)$ является лупой Муфанг, а следовательно, и IP-лупой, то из $a^{-1} \in M_l$, где $a \in M_l$, следует, что M_l — подлупа.

[5] Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т. е. не всякий муфанговый элемент является компаньоном (левым или правым) некоторого псевдоавтоморфизма. Так, в лупе Муфанг $Q(\cdot)$ (см. определение 3) любой элемент является муфанговым, и если бы все они были левыми компаньонами псевдоавтоморфизмов лупы $Q(\cdot)$, то в силу леммы 5.4 лупа $Q(\cdot)$ была бы G-лупой (см. определение 4, гл. III). В частности, и неассоциативная коммутативная лупа Муфанг должна быть G-лупой, что противоречит теореме 10.1.

[6] Лупы с ослабленным свойством обратимости (WIP-лупы) подробно изучены Осборном [57]. В частности, в [57] построен пример WIP-лупы, являющейся G-лупой (см. гл. III п. 4°). Этот пример воспроизведен в гл. X, в этой же главе доказаны и некоторые другие свойства WIP-луп.

Глава VI

ЛУПЫ МУФАНГ

1°. *Основные свойства луп Муфанг.* Наиболее изученным классом неассоциативных луп является класс луп Муфанг[1]. Как мы видели выше (см. гл. V, п. 3°, равенства (5.29) и (5.30) и следствие 1 теоремы 5.6), лупа $Q\,(\cdot)$ называется *лупой Муфанг*, если в ней выполняется одно из тождеств (*тождеств Муфанг*):

$$x\,(y\cdot xz) = (xy\cdot x)\,z, \tag{6.1}$$

$$(zx\cdot y)\,x = z\,(x\cdot yx). \tag{6.2}$$

В силу теоремы 5.3 любая *лупа Муфанг является IP-лупой.* Кроме того, в лупе Муфанг верны тождества:

$$x\cdot xz = xx\cdot z \text{ (левая альтернативность)}, \tag{6.3}$$

$$zx\cdot x = z\cdot xx, \text{ (правая альтернативность)}, \tag{6.4}$$

$$xy\cdot x = x\cdot yx \text{ (эластичность)}. \tag{6.5}$$

Равенства (6.3) и (6.4) следуют из (6.2) и (6.1) при $y=1$, а (6.5)— из (6.1) при $z = 1$.

Из тождеств (6.1) и (6.2) лупы Муфанг мы получаем следующие равенства:

$$R_y\,(R_yx\cdot z) = x\cdot L_yR_yz, \quad L_y\,(x\cdot L_yz) = R_yL_yx\cdot z,$$

откуда следует, что

$$S_y = (R_y^{-1},\, L_yR_y,\, R_y), \tag{6.6}$$

$$K_y = (R_yL_y,\, L_y^{-1},\, L_y) \tag{6.7}$$

являются автотопиями лупы $Q\,(\cdot)$. Но если $S_y \in \mathfrak{A}_{(\cdot)}$, то и $P_y = (IR_y^{-1}I,\, R_y,\, L_yR_y) \in \mathfrak{A}_{(\cdot)}$ ввиду следствия 2 леммы 5.3.

В IP-лупах имеют место соотношения (5.11)

$$R_a^{-1} = IL_aI, \quad L_a^{-1} = IR_aI.$$

Поэтому автотопия P_y имеет вид

$$P_y = (L_y,\ R_y,\ L_yR_y), \tag{6.8}$$

откуда

$$L_yx \cdot R_yz = L_yR_y(x \cdot z),$$

следовательно,

$$yx \cdot zy = y(xz \cdot y). \tag{6.9}$$

Это — *третье тождество, характеризующее лупу Муфанг, так как оно эквивалентно тождеству* (6.1). В самом деле, во-первых, из (6.9) следует эластичность при $z = 1$. Во-вторых, лупа $Q(\cdot)$ с тождеством (6.9) является IP-лупой: если положим в (6.9) $y = {}^{-1}x$, где ${}^{-1}x \cdot x = 1$, то получаем

$$z \cdot {}^{-1}x = {}^{-1}x\ (xz \cdot {}^{-1}x),$$

или в силу эластичности находим

$$z \cdot {}^{-1}x = ({}^{-1}x \cdot xz) \cdot {}^{-1}x,$$

откуда следует $z = {}^{-1}x \cdot xz$. Полагая в (6.9) $y = z^{-1}$, находим тем же путем равенство $xz \cdot z^{-1} = x$. Итак, $Q(\cdot)$ — IP-лупа, поэтому все переходы от S_y к P_y обратимы. Тождество (6.9) также назовем тождеством Муфанг. Мы доказали лемму [31]

Лемма 6.1. *Лупа $Q(\cdot)$ тогда и только тогда лупа Муфанг, когда в $Q(\cdot)$ выполняется* (6.9)[2].

Из всего сказанного вытекает, что *тождества Муфанг* (6.1), (6.2) и (6.9) *эквивалентны* и каждое из этих тождеств может быть взято в основу определения лупы Муфанг.

Пусть $Q(\cdot)$ — лупа Муфанг и пусть $Q(\circ)$ — любая лупа, изотопная лупе $Q(\cdot)$:

$$(\circ) = (\cdot)\ .$$

Так как $Q(\cdot)$ является лупой Муфанг (а следовательно, и квазигруппой Муфанг), то любая лупа, изотопная $Q(\cdot)$, будет IP-лупой, следовательно, $Q(\circ)$ — IP-лупа.

Пусть $Q(*)$ — любая лупа, изотопная лупе $Q(\circ)$:

$$(\bullet) = (\circ)^{S}.$$

Отсюда следует $(*) = (\circ)^S = ((\cdot)^T)^S = (\cdot)^{TS}$, т. е. $Q(*)$ тоже IP-лупа, так как она изотопна лупе Муфанг $Q(\cdot)$. Но тогда $Q(\circ)$ является квазигруппой Муфанг, т. е. лупой Муфанг. Итак, мы доказали теорему.

Теорема 6.1. *Лупа, изотопная лупе Муфанг, тоже лупа Муфанг.*

Теорему 6.1 можно уточнить, именно имеет место

Теорема 6.2. *Пусть $Q(\cdot)$ — лупа Муфанг. Тогда любая лупа, изотопная лупе $Q(\cdot)$, изоморфна лупе $Q(\circ)$*, где

$$x \circ y = xl \cdot l^{-1}y,$$

l — некоторый элемент из Q.

Доказательство. Любая лупа $(\bullet)$, изотопная лупе $(\cdot)$, имеет вид $(\bullet) = (\cdot)_{a,b}^{\gamma}$ (см. гл. I, п. 3°), откуда

$$(\bullet)^{\gamma^{-1}} = (\cdot)_{a,b} = (\cdot)^{(R_a^{-1},\, L_b^{-1},\, 1)}.$$

Рассмотрим лупу $(\circ) = (\bullet)^{\gamma^{-1} R_e}$ где $e = ba$. Тогда

$$(\circ) = (\cdot)^{(R_a^{-1},\, L_b^{-1},\, 1)\, R_e} = (\cdot)^{(R_{a^{-1}} R_e,\, L_{b^{-1}} R_e,\, R_e)},$$

или в развернутом виде

$$x \circ y = R_e^{-1} (R_{a^{-1}} R_e x \cdot L_{b^{-1}} R_e y),$$

откуда

$$x \circ y = [(xe \cdot a^{-1})\ (b^{-1} \cdot ye)] e^{-1}. \tag{6.10}$$

Но $uv \cdot e^{-1} = [(ue \cdot e^{-1})\ v] e^{-1}$ и в силу тождества Муфанг (6.2) мы получаем

$$uv \cdot e^{-1} = ue \cdot e^{-1} ve^{-1}.$$

Применяем последнее равенство к (6.10)

$$x \circ y = [(xe \cdot a^{-1})\ e] \{e^{-1}\ [(b^{-1} \cdot ye) e^{-1}]\}.$$

Используем теперь (6.2) и (6.9)

$$x \circ y = (x \cdot ea^{-1} e)\ [(e^{-1} b^{-1})\ (ye \cdot e^{-1})].$$

Но

$$ea^{-1} e = (ba \cdot a^{-1})\ (ba) = b\ (ba) = b^2 a = l,$$

$$e^{-1} b^{-1} = (be)^{-1} = (b \cdot ba)^{-1} = l^{-1}.$$

Таким образом,

$$x \circ y = xl \cdot l^{-1} y.$$

Вспомнив, что лупа $(\bullet)$ изоморфна лупе $(\circ)$: $(\bullet) = (\circ)^{R_e^{-1},\, \gamma}$, мы заканчиваем доказательство теоремы.

Возникает вопрос об ядрах лупы Муфанг. Докажем, что все ядра IP-лупы совпадают, следовательно, и ядра лупы Муфанг совпадают. Имеет место

Теорема 6.3. *Ядра IP-лупы $Q\ (\cdot)$ совпадают.*

Действительно, пусть $a \in N_l$:

$$ax \cdot y = a \cdot xy. \tag{6.11}$$

Тогда ввиду равенства (5.6) получаем

$$y^{-1} \cdot x^{-1} a^{-1} = y^{-1} x^{-1} \cdot a^{-1},$$

т. е. $a^{-1} \in N_r$, откуда и $a \in N_r$. Таким образом,

$$N_l \subseteq N_r.$$

Аналогично доказывается и обратное включение и поэтому

$$N_l = N_r.$$

Из (6.11) получаем равенство

$$y = (ax)^{-1}\ (a \cdot xy)$$

или

$$y = (x^{-1}a^{-1})\ (a \cdot xy). \tag{6.12}$$

Пусть $x = (pa)^{-1}$, $y = pa \cdot q$. Тогда $xy = q$ и, подставляя в (6.12) значения для x и y, находим

$$pa \cdot q = (pa \cdot a^{-1})\ (aq)$$

или

$$pa \cdot q = p \cdot aq. \tag{6.13}$$

Так как p и q одновременно с x и y могут быть любыми элементами Q, то мы показали таким образом, что $N_l \subseteq N_m$. Так как переход от (6.11) к (6.13) обратим, мы доказываем, что $N_m \subseteq N_l$, следовательно, $N_l = N_m$.

Теорема доказана. Таким образом, в IP-лупах имеет смысл говорить не о левом, среднем, или правом ядре, а только об ядре N лупы, так как $N_l = N_m = N_r = N$.

2°. *Внутренние подстановки лупы Муфанг.* Рассмотрим внутренние подстановки лупы Муфанг. Будет рассматриваться только $I = I_1$ -группа внутренних подстановок относительно единицы 1 лупы Муфанг $Q(\cdot)$, поэтому имеем (определение внутренних подстановок, см. гл. IV, п. 3°):

$$\left.\begin{aligned} R_{x,\,y} &= R_{xy}^{-1}R_yR_x, \\ L_{x,\,y} &= L_{xy}^{-1}L_xL_y, \\ T_x &= L_x^{-1}R_x. \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

Равенства (6.14) получаем из (4.4) и (4.6), полагая $h = 1$, где 1 — единица лупы Муфанг $Q(\cdot)$, так как при этом имеем $a \bullet b = a \circ b = ab$ (см. (4.3)).

З а м е ч а н и е. *Внутренние подстановки $R_{x,y}$ и $L_{x,y}$ в любой IP-лупе, а следовательно, и в любой лупе Муфанг связаны соотношением* $(Ix = x^{-1})$

$$L_{x,\,y} = IR_{y^{-1},\,x^{-1}}I. \tag{6.15}$$

Действительно, из равенств (5.11) следует

$$L_a = IR_a^{-1}I = IR_{a^{-1}}I,$$

откуда

$$L_{x,\,y} = IR_{xy}I \cdot IR_x^{-1}I \cdot IR_y^{-1}I = IR_{xy}R_x^{-1}R_y^{-1}I = IR^{-1}_{y^{-1}x^{-1}}R_{x^{-1}}R_{y^{-1}}I = IR_{y^{-1},\,x^{-1}}I.$$

Имеет место

Т е о р е м а 6.4. *Любая внутренняя подстановка лупы Муфанг* $Q\ (\cdot)$ *является ее псевдоавтоморфизмом* [31].

Достаточно доказать теорему для внутренних подстановок T_x, $R_{x,y}$, $L_{x,y}$.

Рассмотрим автотопии S_y, K_y и P_y лупы $Q\ (\cdot)$, определенные равенствами (6.6) — (6.8). Тогда и $P_y^{-1}\ S_y^{-1}$ тоже автотопия лупы $Q\ (\cdot)$. Но

$$P_y^{-1}S_y^{-1} = (L_y^{-1},\ R_y^{-1},\ R_y^{-1}L_y^{-1})\,(R_y,\ R_y^{-1}L_y^{-1},\ R_y^{-1}),$$

откуда

$$P_y^{-1}S_y^{-1} = (T_y,\ L_y^{-1}R_y^{-2},\ L_y^{-1}R_y^{-2}),$$

так как $L_yR_y = R_yL_y$ (в силу равенства (6.5)).

Применяя лемму 5.5, мы заключаем, что T_y — псевдоавтоморфизм лупы $Q\ (\cdot)$.

Найдем $S_{xy}S_y^{-1}S_x^{-1}$:

$$S_{xy}S_y^{-1}S_x^{-1} = (R_{xy}^{-1},\ L_{xy}R_{xy},\ R_{xy})\,(R_y,\ L_y^{-1}R_y^{-1},\ R_y^{-1})\,(R_x,\ L_x^{-1},\ R_x^{-1},\ R_x^{-1}),$$

$$S_{xy}S_y^{-1}S_x^{-1} = (R_{xy}^{-1}R_yR_x,\ \lambda,\ \mu),$$

где λ, μ — некоторые подстановки. Следовательно,

$$S_{xy}S_y^{-1}S_x^{-1} = (R_{x,\,y},\ \lambda,\ \mu). \tag{6.16}$$

Так как $S_{xy}\ S_y^{-1}\ S_x^{-1}$ — автотопия лупы $Q\ (\cdot)$ и $R_{x,y}\ 1 = 1$, мы опять можем применить лемму 5.5, следовательно, $R_{x,y}$ является псевдоавтоморфизмом лупы $Q\ (\cdot)$. Аналогично доказываем, что и $L_{x,y}$ — псевдоавтоморфизм лупы $Q\ (\cdot)$.

С л е д с т в и е 1. Из леммы 5.5 следует, что T_y имеет левым компаньоном $L_y^{-1}R_y^{-2}\ 1$, т. е. $y^{-1}\ (1y^{-2}) = y^{-3}$, а правым компаньоном — элемент y^3 (см. замечание к лемме 5.4).

Далее, из леммы 5.5 следует, что в (6.16) $\lambda = \mu$, и псевдоавтоморфизм $R_{x,\,y}$ имеет левым компаньоном элемент $w = \mu 1$. Но, как видно из (6.16), $\mu = R_{xy}R_y^{-1}R_x^{-1}$ и, следовательно,

$$w = R_{xy}R_y^{-1}R_x^{-1}\ 1 = R_{xy}R_{y^{-1}}R_{x^{-1}}1 = (x^{-1}y^{-1})\,(xy).$$

Элемент $w = (x^{-1}y^{-1})\ (xy)$ называется *коммутатором* элементов x и y и обозначается через $(x,\ y)$. Таким образом, $R_{x,\,y}$ *имеет левым компаньоном коммутатор* $(x,\ y)$.

С л е д с т в и е 2. Так как $R_{x,\,y}$ — псевдоавтоморфизм, то $IR_{x,\,y} = R_{x,\,y}I$, откуда на основании (6.15) имеем

$$L_{x,\,y} = R_{y^{-1},\ x^{-1}}. \tag{6.17}$$

С л е д с т в и е 3. *В коммутативной лупе Муфанг любая внутренняя подстановка является автоморфизмом* [3].

Действительно, в силу коммутативности $T_x = L_x^{-1} R_x = R_x^{-1} R_x = 1$. Внутренняя подстановка $R_{x,y}$ является псевдоавтоморфизмом с левым компаньоном $(x, y) = (x^{-1}y^{-1})(xy) = (yx)^{-1}(xy)$. Но в коммутативных лупах Муфанг $(x, y) = 1$, поэтому $R_{x,y}$ — автоморфизм. В силу равенства (6.17) L_{xy} также является автоморфизмом.

Л е м м а 6.2. *Ядро N лупы Муфанг $Q(\cdot)$ является нормальной подлупой.*

Согласно теореме 4.5 мы должны доказать, что N инвариантна относительно группы внутренних подстановок $I = I_1$ (1 — единица лупы $Q(\cdot)$). Пусть $\varphi \in I$. Как было доказано выше (см. теорему 6.4), φ должна быть псевдоавтоморфизмом с правым компаньоном c, т. е. $(\varphi, R_c\varphi, R_c\varphi)$ является автотопией лупы $Q(\cdot)$. Пусть $a \in N$, тогда

$$ax \cdot y = a \cdot xy.$$

Следовательно,

$$\varphi(ax \cdot y) \cdot c = \varphi(ax)(\varphi y \cdot c),$$

$$\varphi(a \cdot xy) \cdot c = \varphi a\, [\varphi(xy) \cdot c] = \varphi a\, [\varphi x(\varphi y \cdot c)],$$

откуда

$$\varphi(ax)(\varphi y \cdot c) = \varphi a\, [\varphi x(\varphi y \cdot c)]. \tag{6.18}$$

Если $y = \varphi^{-1} c^{-1}$, то из (6.18) получаем

$$\varphi(ax) = \varphi a \cdot \varphi x, \tag{6.19}$$

и поэтому (6.18) принимает вид

$$(\varphi a \cdot \varphi x)(\varphi y \cdot c) = \varphi a\, [\varphi x\, (\varphi y \cdot c)].$$

Если заменим φx и $\varphi y \cdot c$ соответственно через x и y, находим

$$(\varphi a \cdot x)\, y = \varphi a\, (xy),$$

т. е. $\varphi a \in N$. Лемма доказана.

Псевдоавтоморфизм φ в лупах Муфанг обладает следующим свойством:

$$\varphi(xyx) = \varphi x \varphi y \varphi x. \tag{6.20}$$

Действительно, существует такой элемент c, что

$$\varphi(xy)\, c = \varphi x\, (\varphi y \cdot c),$$

т. е. c — правый компаньон псевдоавтоморфизма φ. Тогда

$$\varphi(xyx) \cdot c = \varphi x\, (\varphi(yx)\, c) = \varphi x\, (\varphi y\, (\varphi x \cdot c)) = (\varphi x \varphi y \varphi x) c,$$

откуда следует равенство (6.19).

Следуя Браку [31], дадим следующее

О п р е д е л е н и е 1. Отображение φ лупы Муфанг в себя, удовлетворяющее равенству (6.20) и условию $\varphi 1 = 1$, назовем *полуэндоморфизмом*.

Таким образом, в лупах Муфанг *любой псевдоавтоморфизм (и, следовательно, любая внутренняя подстановка) является полуавтоморфизмом*[4].

Заметим, что для любого полуэндоморфизма лупы Муфанг имеет место равенство

$$\varphi x^{-1} = (\varphi x)^{-1}. \tag{6.21}$$

Действительно, если положим в (6.20) $y = x^{-1}$, то получаем

$$\varphi x = \varphi\ (xx^{-1}x) = \varphi x \varphi x^{-1} \varphi x,$$

откуда $\varphi x^{-1} \varphi x = 1$, $(\varphi x)^{-1} = \varphi x^{-1}$.

Автотопии лупы Муфанг описываются теоремой 5.7, т. е. *любая автотопия T лупы Муфанг имеет вид*

$$T = (L_x\theta, R_xR_c\theta, L_xR_xR_c\theta),$$

где x — любой элемент из Q, а θ — любой псевдоавтоморфизм лупы $Q\ (\cdot)$ с правым компаньоном c.

3°. *Теорема Муфанг.* Целью настоящего пункта является доказательство следующей *теоремы Муфанг*:

Теорема 6.5. *Если три элемента a, b, c лупы Муфанг связаны ассоциативным законом*

$$ab \cdot c = a \cdot bc,$$

то подлупа H, порожденная элементами a, b, c, ассоциативна.

Для доказательства этой теоремы (проведем ее по Браку [31]) нам понадобится ряд лемм.

Лемма 6.3. *Пусть $Q\ (\cdot)$ — лупа Муфанг, S — непустое множество полуэндоморфизмов, F — множество всех элементов из Q, инвариантных относительно любого полуэндоморфизма из S, и пусть M — множество всех элементов m таких, что $mf \in F$, где f — любой из F. Тогда* 1) $1 \in M \subseteq F$, 2) $F^{-1} = F^*$, $fFf = F$ *для любого* $f \in F$, 3) M — *подлупа лупы* $Q\ (\cdot)$.

Доказательство. 1. По определению полуэндоморфизма φ имеем $\varphi\ 1 = 1$, т. е. $1 \in F$, и, очевидно, $1 \in M$. Но тогда $M\ 1 \subseteq F$, т. е. $M \subseteq F$.

2. Если $f \in F$, то ввиду (6.21) имеем $\varphi\ f^{-1} = (\varphi f)^{-1} = f^{-1}$, т. е. $f^{-1} \in F$. Пусть f_1 — любой элемент из F, тогда $\varphi\ (ff_1f) = \varphi f \varphi f_1 \varphi f = ff_1f$, т. е. $ff_1f \in F$. Обратно, пусть $fxf = f_1$, тогда $x = f^{-1}f_1\ f^{-1}$, т. е. $x \in F$. Этим доказано равенство $fFf = F$.

3. Пусть m_1, $m_2 \in M$, тогда $m = m_1\ (m_2(m_1f^{-1})^{-1})\ m_1 \in F$, так как $m_1 \in M \subset F$, $m_1f^{-1} \in F$, $m_2\ (m_1f^{-1})^{-1} \in F$. Но

$$m = (m_1m_2)\ [(m_1f^{-1})^{-1}m_1] = (m_1m_2)\ (fm_1^{-1} \cdot m_1) = (m_1m_2)\ f,$$

* Через F^{-1} обозначается совокупность всех элементов f^{-1}, где $f \in F$.

т. е. $m_1 m_2 \in M$. Далее

$$f(mf)^{-1}f \in F$$

или $f(f^{-1}m^{-1})f \in F$, $m^{-1}f \in F$, откуда $m^{-1} \in M$. Следовательно, M — подлупа лупы $Q(\cdot)$.

В теории луп Муфанг большую роль играет понятие *ассоциатора* (a, b, c), который определяется равенством

$$ab\cdot c = (a\cdot bc)(a,b,c),$$

где a, b, c — любые три элемента лупы.

Следующие две леммы дают некоторые свойства ассоциаторов лупы Муфанг.

Лемма 6.4. *Если* $(a, b, c) = 1$, *то* $(a', b', c') = 1$, *где* a', b', c' *получаются из* a, b, c *некоторой перестановкой или заменой некоторых элементов из* a, b, c *на обратные.*

Доказательство. 1. Пусть $(a, b, c) = 1$, тогда $Ua = a$, $Vb = b$, $Wc = c$, где U, V, W — некоторые внутренние подстановки. Действительно, $ab\cdot c = a\cdot bc$ можно переписать в виде $R_{b,c}\,a = a$, где $R_{b,c} = R_{bc}^{-1}R_cR_b$. Так как $R_{b,c}$ — псевдоавтоморфизм, то $R_{b,c}\,a^{-1} = (R_{b,c}a)^{-1} = a^{-1}$, т. е. $a^{-1}b\cdot c = a^{-1}\cdot bc$ или $(a^{-1}, b, c) = 1$. Аналогично доказываются равенства

$$(a, b^{-1}, c) = (a, b, c^{-1}) = 1.$$

2. Из $ab\cdot c = a\cdot bc$ следует $c^{-1}\cdot b^{-1}a^{-1} = c^{-1}b^{-1}\cdot a^{-1}$ или $(c^{-1}, b^{-1}, a^{-1}) = 1$, или по 1 получаем $(c, b, a) = 1$. Далее из $ab\cdot c = a\cdot bc$ имеем $bc\cdot a^{-1} = a^{-1}(a\cdot bc)\,a^{-1} = a^{-1}(ab\cdot c)\,a^{-1} = (a^{-1}\cdot ab)\cdot(ca^{-1}) = b\cdot ca^{-1}$, т. е. $(b, c, a^{-1}) = 1$, откуда $(b, c, a) = 1$. Из $(c, b, a) = (b, c, a) = 1$ следует и равенство $(a', b', c') = 1$, где a', b', c' — любое перемещение элементов a, b, c.

Лемма 6.5. *Пусть элементы* a, b, c, d *удовлетворяют равенству* $(x, y, z) = 1$. *Тогда следующие равенства эквивалентны*:

1°) $(ab, c, d) = 1$,

2°) $((ab)^2, c, d) = 1$,

3°) $((a, b), c, d) = 1$,

4°) $(cd, a, b) = 1$,

5°) $(bc, d, a) = 1$.

Доказательство. 1°) $\to$ 2°). Равенство 1°) эквивалентно $U(ab) = ab$, где $U = R_{c,d}$ — внутренняя подстановка (см. доказательство леммы 6.4), и, следовательно, по доказанному выше U — полуавтоморфизм. Тогда
$U(ab)^2 = U(ab\cdot 1\cdot ab) = U(ab)\cdot U1\cdot U(ab) = (U(ab))^2 = (ab)^2$, т. е. получаем 2°).
2°) $\to$ 3°). Пусть $p = (a, b) = (a^{-1}b^{-1})(ab)$, т. е.

$$ab = (ba)p,\ aba = (ba\cdot p)\,a = b\cdot apa.$$

Имеем

$b\cdot apa\cdot b = aba\cdot b = (aba)\ (a^{-1}\cdot ab) = ab\cdot aa^{-1}\cdot ab = (ab)^2$, откуда следует

$$U\,(ab)^2 = Ub\cdot U\,(apa)\cdot Ub = Ub\,(\,Ua\,Up\,Ua)\ Ub.$$

Но $Ua = a$, $Ub = b$, так как $(x, c, d) = 1$ для $x = a, b$. Следовательно, $(ab)^2 = b\,(a\ Up\cdot a)b$, откуда $Up = p$, т. е. получаем 3°).

3°) $\to$ 4°). Выше (см. теорему 6.4 и ее следствие) было доказано, что $V = R_{a,\,b}$ является псевдоавтоморфизмом с левым компаньоном $p = (a, b)$.

Следовательно, $V\,(cd)\ p = Vc\cdot(Vd\cdot p)$, откуда $V(cd)\cdot p = c(dp)$ (здесь опять $Vc = c$, $Vd = d$, так как $(c, a, b) = (d, a, b) = 1$). Но $(p, c, d) = 1$ по 3°) и, применяя лемму 6.4, получаем $V(cd)\cdot p = cd\cdot p$, откуда следует $V\,(cd) = cd$, т. е. равенство 4°).

4°) $\to$ 1°). Достаточно заменить a, b, c, d на c, d, a, b соответственно.

1°), 4°) $\to$ 5°). Действительно,

$$(a\cdot bc)d = (ab\cdot c)\ d = ab\cdot cd$$

в силу 1°). Далее, используя равенство 4°) и $(b, c, d) = 1$, находим

$$ab\cdot cd = a\,(b\cdot cd) = a\,(bc\cdot d).$$

Таким образом, $(a\cdot bc)\ d = a\,(bc\cdot d)$, т. е. $(a, bc, d) = 1$. Используя лемму 6.4, мы доказываем 5°).

5°) $\to$ 1°). Применяя к $(bc, d, a) = 1$ переходы 1°) $\to$ 5°), находим соотношение $(cd, a, b) = 1$, которое эквивалентно равенству 1°).

В дальнейшем используем следующие обозначения. Пусть $A, B, C \subseteq Q$, тогда AB означает множество всех произведений вида ab, $a \in A$, $b \in B$; (A, B, C) — множество всех ассоциаторов вида (a, b, c), где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$.

Пусть A — некоторое подмножество из Q и пусть P — некоторая подлупа лупы Муфанг $Q\,(\cdot)$, содержащая подмножество A. Обозначим через A' совокупность всех элементов $x \in P$ таких, что $(A, x, P) = 1$. Тогда имеет место

Л е м м а 6.6. *A' и $A^* = (A')'$ являются подлупами лупы $Q\,(\cdot)$ и из*

$$(A, A, P) = 1 \tag{6.22}$$

следует

$$(A^*, A^*, P) = 1. \tag{6.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B = A'$, т. е.

$$(A, B, P) = 1, \tag{6.24}$$

и по лемме 6.4 получаем $B^{-1} = B$. Пусть $a \in A$, $b_1, b_2 \in B$, $x \in P$, тогда ввиду (6.24) $(a, b_1, b_2) = 1$ и поэтому

$$g = [(a \cdot b_1 b_2)x]\, b_2 = [(ab_1 \cdot b_2)\, x]\, b_2 = (ab_1)\,(b_2 x b_2).$$

Но $b_2 x b_2 \in P$ (так как $B \subset P$) и, следовательно, $(a, b_1, b_2\, x b_2) = 1$, поэтому

$$g = a\ \ [b_1\,(b_2 x b_2)] = a\ \ [(b_1 b_2 \cdot x)\, b_2].$$

Так как $b_1 b_2 \in P$, то ввиду (6.24) получаем $(a, b_2,\ b_1 b_2 \cdot x) = 1$, откуда, согласно лемме 6.4, находим $(a,\ b_1 b_2 \cdot x,\ b_2) = 1$, т. е.

$$g = [a(b_1 b_2 \cdot x)] b_2.$$

Следовательно,

$$(a \cdot b_1 b_2)\, x = a\,(b_1 b_2 \cdot x),$$

т. е. $b_1 b_2 \in B$. Итак, B — подлупа и $A^* = B' = (A')'$ тоже подлупа лупы $Q\ (\cdot)$.

Если $(A,\ A,\ P) = 1$, то $A \subseteq A'$. Но $(A',\ (A')',\ P) = 1$ или

$$(A',\ A^*,\ P) = 1. \tag{6.25}$$

В частности, $(A,\ A^*,\ P) = 1$, т. е. $A^* \subseteq A'$. Если теперь возьмем в (6.25) вместо A' подлупу A^*, то получим (6.23).

Следствие 1. *Если в* (6.23) *вместо* P *возьмем* $A^* \subseteq P$, *то получаем* $(A^*, A^*, A^*) = 1$, *т. е.* A^* — *ассоциативная подлупа.*

Следствие 2. *Если для* A *выполняется равенство* (6.22), *то* $A \subset A^*$. Действительно, из (6.24) и леммы 6.4 следует $(B,\ A,\ P) = 1$; таким образом, $A \subseteq B'$, т. е. $A \subseteq (A')'$, или $A \subseteq A^*$.

Доказательство теоремы Муфанг[5]. Пусть $ab \cdot c = a \cdot bc$ и пусть D — множество трех элементов $a,\ b,\ c$. Определим следующие два подмножества в Q:

$$F = \{x;\ (D,\ D,\ x) = (ab,\ c,\ x) = 1\}, \tag{6.26}$$

$$M = \{m;\ mF \subseteq F\}.$$

По лемме 6.3 $M \subseteq F$ и M — подлупа лупы $Q\ (\cdot)$. В качестве множества S леммы 6.3 возьмем $\{R_{d,d'}\}$, где $d,\ d' \in D$, так как $(d,\ d',\ x) = 1$ или $(x,\ d,\ d') = 1$, т. е. $R_{d,d'}\, x = x$.

Ввиду леммы 6.4 в определении F мы можем сделать перестановку элементов $a,\ b,\ c$.

1. В силу равенства (6.26) и альтернативного закона имеем

$$(d,\ d,\ D) = (d,\ d,\ F) = (D,\ D,\ F) = 1,$$

где d — любой из элементов $a,\ b,\ c$. Кроме того,

$$(d,\ d,\ DF) = 1.$$

Применяем к $d,\ d,\ D,\ F$ лемму 6.5, тогда

$$(d^2,\ D,\ F) = (dD,\ d,\ F) = (Dd,\ d,\ F) = 1. \tag{6.27}$$

Комбинируя (6.26) с (6.27), получаем

$$(DD,\ D,\ F) = 1. \tag{6.28}$$

2. Из условия теоремы и (6.26) получаем

$$(D,\ D,\ D) = (D,\ D,\ F) = 1.$$

Применяем лемму 6.5 к D, D, D, F, тогда из (6.28) следует

$$(D,\ D,\ DF) = 1. \tag{6.29}$$

3. Следующие равенства очевидны

$$(d,\ d,\ DD) = (d,\ d,\ F) = 1,$$

а из (6.28) имеем

$$(D\,D,\ d,\ F) = 1.$$

Поэтому мы можем применить лемму 6.5 к d, d, DD, F, и из очевидного равенства $(d,\ d,\ DD\cdot F) = 1$ получаем

$$(DD,\ d,\ dF) = 1. \tag{6.30}$$

4. Из равенств (6.29) и (6.30) следует, в частности,

$$(D,\ D,\ cF) = 1;\ (ab,\ c,\ cF) = 1,$$

откуда в силу определения F находим $cF \subseteq F$, т. е. $c \in M$. Аналогично получаем a, $b \in M$, т. е. $D \subseteq M$. Так как $M \subseteq F$, то из (6.26) следует $(D,\ D,\ M) = 1$. Утверждение теоремы Муфанг вытекает теперь из леммы 6.6, если взять $P = M$, $A = D$ и применить следствия 1 и 2 этой леммы.

Следствие 1. *Любые два элемента a, b лупы Муфанг порождают ассоциативную подлупу.*

Действительно, достаточно применить теорему Муфанг к равенству $aa\cdot b = a\cdot ab$.

Лупа, в которой каждые два элемента порождают ассоциативную подлупу, называется *диассоциативной* [31]. Таким образом, предыдущее следствие можно сформулировать и так: *лупа Муфанг диассоциативна.*

4°. *Коммутативные лупы Муфанг.* В этом пункте рассмотрим коммутативные лупы Муфанг. Их можно характеризовать одним тождеством

$$x^2\cdot yz = xy\cdot xz. \tag{6.31}$$

Действительно, пусть $y = 1$ в (6.31),

$$x^2\cdot z = x\cdot xz. \tag{6.32}$$

Если $z = 1$, то

$$x^2y = xy\cdot x. \tag{6.33}$$

Сравнивая (6.32) и (6.33), получаем

$$x \cdot xy = xy \cdot x,$$

откуда, заменяя xy на y, выводим коммутативность лупы $Q\ (\cdot)$. В силу коммутативности (6.31) и (6.32) находим

$$x^2 \cdot yz = x\,(x \cdot yz) = x(yz \cdot x) = xy \cdot zx,$$

т. е. $Q\ (\cdot)$ — лупа Муфанг.

Определение 2. Эндоморфизм φ лупы $Q\ (\cdot)$ называется *центральным*, если $\varphi x \in N$ и $\varphi x \cdot y = y \cdot \varphi x$ для любых x и $y \in Q$, N — ядро лупы $Q\ (\cdot)$.

Лемма 6.7. *В коммутативной лупе Муфанг $Q(\cdot)$ отображение $x \to x^3$ является центральным эндоморфизмом.*

Иными словами, мы должны доказать, что $x^3 \in N$ — ядро лупы $Q\ (.)$ и

$$(xy)^3 = x^3y^3. \tag{6.34}$$

По следствию теоремы Муфанг подлупа, порожденная элементами x и y, ассоциативна и, разумеется, коммутативна, поэтому в ней выполняется равенство (6.34). Далее, по следствию теоремы 6.4 внутренняя подстановка T_x является псевдоавтоморфизмом с левым компаньоном x^{-3}, т. е. выполняется равенство

$$T_x(y \cdot z) \cdot x^{-2} = T_x y\,(T_x z \cdot x^{-3}).$$

Но в коммутативной лупе $T_x = 1$, поэтому

$$(yz)\,x^{-3} = y\,(zx),$$

т. е. $x^{-3} \in N$, а следовательно, и $x \in N$.

Оказывается, что свойством отображения $x \to x^3$, сформулированным в лемме 6.7, обладает любая лупа, изотопная коммутативной лупе Муфанг. Это утверждение вытекает из следующей теоремы:

Теорема 6.6 *Если в лупе Муфанг $Q\ (\cdot)$ отображение $x \to x^3$ является центральным эндоморфизмом, то это свойство имеет место и в любой лупе, изотопной лупе $Q\ (\cdot)$.*

Доказательство. Пусть в $Q\ (.)\ x^3 \in N$ и $(xy)^3 = x^3y^3$, $x^3y = yx^3$ для любых $x,\ y \in Q$. Пусть, далее, $Q\ (\circ)$ — лупа, изотопная лупе $Q\ (\cdot)$. Ввиду теоремы 6.2 мы можем считать, что операция $(\circ)$ имеет вид

$$x \circ y = xl \cdot l^{-1}y.$$

Тогда

$$x^{(2)} = x \circ x = xl \cdot l^{-1}x = x^2, \tag{6.35}$$

$$x^{(3)} = (x \circ x) \circ x = x^2 l \cdot l^{-1}x = x^3. \tag{6.36}$$

Здесь мы использовали следствие теоремы Муфанг: элементы x, l порождают ассоциативную подлупу.

Имеем

$$x^{(3)}\circ y = x^3\circ y = x^3 l\cdot l^{-1} y = x^3 (l\cdot l^{-1} y) = x^3 y. \qquad (6.37)$$

Аналогично доказывается, что $x\circ y^{(3)} = xy^3$. В силу (6.37) заключаем, что

$$x^{(3)}\circ y = y\circ x^{(3)}.$$

Далее имеем

$$(x^{(3)}\circ y)\circ z = (x^3 y\cdot l)\,(l^{-1}z) = x^3 (yl\cdot l^{-1}z) = x^3\,(y\circ z) = x^{(3)}\circ (y\circ z),$$

т. е. $x^{(3)} \in N$ $(\circ)$ для любых $x \in Q$.

Наконец, докажем, что $x \to x^{(3)}$ — эндоморфизм лупы Q $(\circ)$:

$$(x\circ y)^{(3)} = (xl\cdot l^{-1}y)^3 = x^3 l^3\cdot l^{-3} y^3 = x^3 y^3.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $x^3 \in N$ для любых $x \in Q$. Учитывая равенства (6.37) и (6.36), мы заканчиваем доказательство равенства $(x\circ y)^{(3)} = x^{(3)}\circ y^{(3)}$.

Докажем здесь следующее предложение о коммутативных лупах Муфанг, необходимое нам в дальнейшем.

Теорема 6.7. *Если две коммутативные лупы Муфанг $Q(\bullet)$ и $Q(\cdot)$ изотопны, то они изоморфны.*

Действительно, в силу теоремы 6.2 лупа $Q(\bullet)$ изоморфна коммутативной лупе Муфанг $Q(\circ)$, для которой $x\circ y = xl\cdot l^{-1}y$. Так как $x\circ y = y\circ x$, то $xl\cdot l^{-1}y = yl\cdot l^{-1}x = xl^{-1}\cdot ly$, откуда после замены x и y соответственно на xl и yl получаем

$$xl^2\cdot y = x\cdot l^2 y.$$

Следовательно, $l^2 \in N$ — ядро лупы Q $(\circ)$. Но в силу леммы 6.7 $l^3 \in N$, поэтому и $l \in N$, откуда следует $x\circ y = xl^{-1}\cdot ly = xy$. Таким образом, лупа $(\bullet)$ изоморфна лупе $(\circ) = (\cdot)$.

Следующая теорема дает возможность получить коммутативные лупы Муфанг:

Теорема 6.8. *Пусть в лупе Муфанг $Q(\cdot)$ отображение $x \to x^3$ является центральным эндоморфизмом. Тогда группоид $Q(\circ)$*

$$x\circ y = x^{-1}yx^2 \qquad (6.38)$$

является коммутативной лупой Муфанг.

Доказательство. Очевидно, группоид Q $(\circ)$ имеет ту же единицу 1. Уравнение $a\circ y = b$ имеет единственное решение. Однозначная разрешимость уравнения $x\circ a = b$ будет вытекать из коммутативности операции $(\circ)$. Докажем, что $x\circ y = y\circ x$. В силу следствия теоремы Муфанг скобки в процессе доказательства не необходимы.

Из определения Q $(\circ)$ следует

$$x\circ y = x^{-1}yx^{-1}\cdot x^3.$$

Тогда

$$y \circ x = y^{-1}xy^{-1}\cdot y^3 = y^{-1}xy^{-1}\cdot x\cdot x^{-1}y^3 = (y^{-1}x)^2x^{-1}y^3 =$$
$$= (y^{-1}x)^3x^{-1}yx^{-1}y^3 = x^{-1}yx^{-1}\cdot y^3(y^{-1}x)^3 = x^{-1}yx^{-1}(y\cdot y^{-1}x)^3 =$$
$$= x^{-1}yx^{-1}\cdot x^3 = x \circ y.$$

Следовательно, $x \circ y = y \circ x$.

Докажем справедливость тождества (6.31) в $Q(\circ)$

$$(x \circ y)\circ(x \circ z) = (x \circ y)^{-1}(x \circ z)(x \circ y)^{-1}(x \circ y)^3 =$$
$$= (x^{-1}yx^{-1}\cdot x^3)^{-1}(x^{-1}zx^{-1}\cdot x^3)\,(x^{-1}yx^{-1}\cdot x^3)^{-1}(x \circ y)^3 =$$
$$= [(xy^{-1}x)(x^{-1}zx^{-1})(xy^{-1}x)]\,x^{-3}\,(x \circ y)^3 = (xy^{-1}x\cdot x^{-1})(zx^{-1}\cdot xy^{-1}x)\,y^3 =$$
$$= (xy^{-1})(zy^{-1}\cdot x)y^3 = x(y^{-1}zy^{-1})\,x\cdot y^3 = x(y^{-1}zy^{-1}\cdot y^3)\,x.$$

Следовательно,

$$(x \circ y)\circ(x \circ z) = x(y \circ z)x.$$

С другой стороны,

$$(x \circ x)\circ(y \circ z) = x^2 \circ (y \circ z) = x^{-2}(y \circ z)\,x^4 = x^{-2}(y \circ z)\,x\cdot x^3 =$$
$$= x(y \circ z)\,x.$$

Таким образом, тождество (6.31) выполняется в $Q(\circ)$. Теорема доказана.

Пусть $Q(\cdot)$ — коммутативная лупа Муфанг и пусть $Q(\circ)$ — лупа Муфанг, изотопная лупе $Q(\cdot)$.

Согласно теореме 6.6, в лупе $Q(\circ)$ отображение $x \to x^{(3)} = x \circ x \circ x$ является центральным эндоморфизмом. Поэтому из $Q(\circ)$ с помощью равенства (6.38) можно получить новую коммутативную лупу Муфанг $Q(*)$. Следующая теорема выясняет связь между $Q(\cdot)$ и $Q(*)$.

Теорема 6.9. *Коммутативные лупы Муфанг $Q(\cdot)$ и $Q(*)$ изоморфны.*

Не теряя общности, мы можем считать, что $Q(\circ)$ главноизотопна лупе $Q(\cdot)$, причем изотопия имеет вид (см. теорему 6.2)

$$x \circ y = xl\cdot l^{-1}y.$$

Единица лупы $Q(\cdot)$ будет, очевидно, и единицей лупы $Q(\circ)$. Найдем обратный элемент для x в $Q(\circ)$

$$x \circ x^{-1} = 1, \quad xl\cdot l^{-1}x^{(-1)} = 1,$$

откуда

$$x^{(-1)} = l\,(xl)^{-1} = l\cdot l^{-1}x^{-1} = x^{-1}.$$

Как было показано выше (см. равенство (6.35)), имеем $x^{(2)} = x \circ x = x^2$. Теперь мы можем найти $x * y$.

$$x*y = x^{(-1)}\circ(y\circ x^{(2)}) = x^{-1}\circ(y\circ x^2) = (x^{-1}l)\,[l^{-1}(yl\cdot l^{-1}x^2)] =$$
$$= (x^{-1}l)\,[(l^{-1}\cdot yl\cdot l^{-1})\,x^2] = (x^{-1}l)(l^{-1}y\cdot x^2) = (x^{-1}l)(l^{-1}y\cdot x^{-1}\cdot x^3) =$$
$$= (x^{-1}l)(l^{-1}y\cdot x^{-1})\,x^3 = (x^{-1}(l\cdot l^{-1}y)\,x^{-1})\,x^3 = x^{-1}yx^{-1}x^3 = xy.$$

В предыдущих преобразованиях мы несколько раз употребляли тождества Муфанг и следствие теоремы Муфанг.

5°. *Примеры луп Муфанг.* Рассмотрим несколько конкретных примеров луп Муфанг.

1. Пусть $Q\ (+,\cdot)$ — *альтернативное кольцо*, т. е. в нем выполняются альтернативные тождества (6.3) и (6.6):

$$\left.\begin{aligned} x\cdot xy &= x^2y,\\ yx\cdot x &= yx^2.\end{aligned}\right\} \tag{6.39}$$

Эластичный закон следует из (6.39), а именно, заменим во втором из равенств (6.39) x на $y+x$

$$[y\,(y+x)]\ (y+x) = y\,[(y+x)\ (y+x)],$$

$$(y^2+yx)\ (y+x) = y\ (y^2+xy+yx+x^2),$$

$$y^2\cdot y + yx\cdot y + y^2x + yx\cdot x = y\cdot y^2 + y\cdot xy + y\cdot yx + y\cdot x^2. \tag{6.40}$$

В силу тождеств (6.39) имеем $y^2\cdot y = y\cdot y^2$. Проделав все сокращения в (6.40), получаем

$$yx\cdot y = y\cdot xy.$$

Для простоты дальнейших вычислений, предположим, что *кольцо* $Q\ (+,\ \cdot)$ *имеет характеристику, отличную от двух*[6], т. е. из $2x=0$ вытекает $x=0$. Тогда из (6.39) следует тождество

$$xy\cdot z + xz\cdot y - x\cdot yz - x\cdot zy = 0. \tag{6.41}$$

Действительно, к тождеству (6.41) мы приходим, если заменяем в (6.40) y на $y+z$. Обозначим левую часть полученного равенства (6.41) через $f\ (x,\ y,\ z)$ и найдем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} f\,(z,x,yx) &= zx\cdot yx + (z\cdot yx)\,x - z\,(x\cdot yx) - z\,(yx\cdot x),\\ f\,(z,x,y)\,x &= (zx\cdot y)\,x + (zy\cdot x)\,x - (z\cdot xy)\,x - (z\cdot yx)\,x,\\ f\,(zx,x,y) &= (zx\cdot x)\,y + (zx\cdot y)\,x - zx\cdot xy - zx\cdot yx,\\ f\,(z,x,xy) &= zx\cdot xy + (z\cdot xy)\,x - z\,(x\cdot xy) - z\,(xy\cdot x),\\ -f\,(z,x^2,y) &= -zx^2\cdot y - zy\cdot x^2 + z\cdot x^2y + z\cdot yx^2,\\ -zf\,(x,x,y) &= -z\,(xx\cdot y) - z\,(xy\cdot x) + z\,(x\cdot xy) + z\,(x\cdot yx).\end{aligned}\right\} \tag{6.42}$$

Сложим почленно равенства (6.42). В силу (6.41) в левой части полученного равенства будет 0, а в правой после всех сокращений

$$2\ (zx\cdot y)x - 2z\ (xy\cdot x) = 0.$$

Отсюда следует

$$(zx\cdot y)\ x - z\ (xy\cdot x) = 0$$

или

$$(zx\cdot y)x = z\ (x\cdot yx).$$

Таким образом, мы получили тождество Муфанг (6.1). Следовательно, если $Q\ (+, \cdot)$ — альтернативное тело характеристики $\neq 2$, то $Q'(\cdot)$, где $Q' = Q \diagdown 0$ является лупой Муфанг. В частности, множество всех ненулевых элементов алгебры Кэли — Диксона (определение алгебры Кэли — Диксона см., например, в книге А. Г. Куроша [47]) относительно умножения образует некоммутативную лупу Муфанг. Более того, единицы алгебры Кэли — Диксона и их противоположные элементы также образуют коммутативную лупу Муфанг 16-го порядка [7].

2. Коммутативные лупы Муфанг можно построить с помощью теоремы 6.8. Пусть $Q\ (\cdot)$ — группа, в которой $x \to x^3$ является центральным эндоморфизмом. Тогда $Q\ (\circ)$, где

$$x \circ y = x^{-1} \cdot yx^2,$$

будет коммутативной лупой Муфанг. Рассмотрим условия, при которых лупа $Q(\circ)$ ассоциативна:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

или в силу коммутативности

$$x \circ (z \circ y) = z \circ (x \circ y).$$

Таким образом,

$$x^{-1}\ (z^{-1}yz^2)\ x^2 = z^{-1}\ (x^{-1}yx^2)z^2,$$

откуда

$$x^{-1}z^{-1}yz^{-1}x^{-1}z^3x^3 = z^{-1}x^{-1}yx^{-1}z^{-1}x^3z^3.$$

Следовательно,

$$x^{-1}z^{-1}yz^{-1}x^{-1} = z^{-1}x^{-1}yx^{-1}z^{-1}.$$

Заменяем x^{-1} и z^{-1} на x и z соответственно

$$xzyzx = zxyxz. \tag{6.43}$$

Если в группе $Q\ (\cdot)$ равенство (6.43) не выполняется, то $Q\ (\circ)$ — неассоциативная коммутативная лупа Муфанг.

Равенство (6.43) можно представить в следующем виде:

$$x^{-1}z^{-1}xzy = yxzx^{-1}z^{-1}$$

или

$$(x, z)\ y = y\ (x^{-1},\ z^{-1}), \tag{6.44}$$

где $(x,\ z) = x^{-1}z^{-1}xz$ — коммутатор элементов $(x,\ z)$.
В данной группе $Q\ (\cdot)$ выполняется равенство

$$(x,\ z) = (x^{-1},\ z^{-1}).$$

Действительно, из $x^3z = zx^3$ следует

$$x^{-1}zx^2 = x^2zx^{-1}.$$

Но $x^{-1}zx^2 = x \circ z = z \circ x = z^{-1}xz^2$, откуда получаем
$x^{-1}z^{-1}xz = x^{-1}\ (z^{-1}xz^2)\ z^{-1} = x^{-1}\ (x^2zx^{-1})\ z^{-1} = xzx^{-1}\ z^{-1}$.

Таким образом, равенство (6.44) принимает вид

$$((x,\ z),\ y) = 1, \tag{6.45}$$

т. е. $Q\ (\cdot)$ — метабелева*.

Дадим теперь пример метабелевой группы $Q\ (\cdot)$, в которой $x \to x^3$ является центральным эндоморфизмом. Именно, как доказано Леви и Ван дер Варденом [48], существует группа $Q\ (\cdot)$, в которой $x^3 = 1$ для любых $x \in Q$ с n образующими, причем порядки группы $Q\ (\cdot)$, коммутанта $Q'(\cdot)$ и центра $Z\ (\cdot)$ равны $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3,\ C_n^2 + C_n^3,\ C_n^3$ соответственно. В такой группе отображение $x \to x^3 = 1$ является центральным эндоморфизмом и, очевидно, эта группа не метабелева.

6°. *Лупа Бола*: Мы встретились с определением лупы Бола при доказательстве теоремы 5.5.

Определение 3. Лупа $Q\ (\cdot)$ называется *левой лупой Бола*, если

$$(x \cdot yx)\ z = x\ (y \cdot xz) \tag{6.46}$$

для любых $x,\ y,\ z \in Q$.

Правая лупа Бола определяется тождеством

$$z\ (xy \cdot x) = (zx \cdot y)x. \tag{6.47}$$

Если не будет специальной оговорки, то под лупой Бола понимаем левую лупу Бола[8].

Рассмотрим некоторые простые свойства луп Бола.

1. *Любая лупа Муфанг является левой или правой лупой Бола.* Это утверждение следует из того, что в любой лупе Муфанг выполняется эластичный закон (6.5) : $xy \cdot x = x \cdot yx$, и поэтому тождество Муфанг $(xy \cdot x)\ z = x\ (y \cdot xz)$ превращается в (6.1). Таким образом, лупа Бола $Q\ (\cdot)$ является лупой Муфанг тогда и только тогда, когда в $Q\ (\cdot)$ выполняется эластичный закон.

2. *Лупа Бола IP-слева.* Положим в (6.46) $y = {}^{-1}x$, где ${}^{-1}xx = 1$. Тогда

$$(x \cdot {}^{-1}xx)\ z = x\ ({}^{-1}x \cdot xz),\ \ xz = x\ ({}^{-1}x \cdot xz),$$

откуда

$$z = {}^{-1}x \cdot xz. \tag{6.48}$$

3. ${}^{-1}x = x^{-1}$. Следует из (6.48) при $z = x^{-1}$.

4. *В лупе Бола выполняется левый альтернативный закон* $x \cdot xy = xx \cdot y$, следующий из (6.46) при $y = 1$.

5. *В лупе Бола тогда и только тогда выполняется правый альтернативный закон, когда она лупа Муфанг.*

---

* Группа $Q\ (\cdot)$ называется *метабелевой*, если ее коммутант K (подгруппа, порожденная всеми коммутаторами элементов группы $Q\ (\cdot)$), содержится в центре Z группы $Q\ (\cdot)$ (подгруппы, состоящей из всех элементов, коммутирующих с любым элементом из Q). Легко видеть, что условие $K \subseteq Z$ эквивалентно условию (6.45) [46].

Действительно, пусть в лупе Бола $Q(\cdot)$ выполняется правый альтернативный закон. Положим в (6.46) $z = x$, тогда

$$(x\cdot yx)x = x(y\cdot xx) = x(yx\cdot x),$$

откуда, заменяя yx на y, получаем эластичный закон, следовательно, по свойству 1 лупа $Q(\cdot)$ будет Муфанг.

6. *Если лупа $Q(\cdot)$ является одновременно левой и правой лупами Бола, то $Q(\cdot)$ — лупа Муфанг.*

В этом случае в $Q(\cdot)$ выполняются оба альтернативных закона, и ввиду свойства 5 $Q(\cdot)$ — лупа Муфанг (см. также доказательство теоремы 5.5).

7. *Если (левая) лупа Бола $Q(\cdot)$ — IP-лупа, то она лупа Муфанг.*

Действительно, в IP-лупе верно равенство

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1},$$

следовательно,

$$[(x\cdot yx)z]^{-1} = z^{-1}(x^{-1}y^{-1}\cdot x^{-1}),$$

$$[x(y\cdot xz)]^{-1} = (z^{-1}x^{-1}\cdot y^{-1})x^{-1},$$

откуда

$$z^{-1}\,(x^{-1}y^{-1}\cdot x^{-1}) = (z^{-1}x^{-1}\cdot y^{-1})\,x^{-1}.$$

Заменяя x^{-1}, y^{-1}, z^{-1} на x, y, z, получаем (6.47). Остается применить предыдущее утверждение.

8. *Решением уравнения $ax=b$ будет $x = a^{-1}b$, а уравнения $ya = b$ будет $y = a^{-1}\,(ab\cdot a^{-1})$.*

Справедливость первого утверждения следует из того, что лупа Бола IP-слева.

Пусть $ya=b$. Если решение существует, то мы имеем $(a\cdot ya)a^{-1} = ab\cdot a^{-1}$, откуда в силу тождества Бола (6.46) следует $ay = ab\cdot a^{-1}$, а отсюда $y = a^{-1}\,(ab\cdot a^{-1})$.

Проверим, что $y = a^{-1}\,(ab\cdot a^{-1})$ является решением уравнения $ya = b$. Действительно,

$$ya = (a^{-1}(ab\cdot a^{-1}))a = a^{-1}\,(ab\cdot a^{-1}a) = a^{-1}\,(ab) = b.$$

Теорема 6.10. *Лупа, изотопная лупе Бола, также является лупой Бола.*

Пусть $Q(\cdot)$ — лупа Бола и пусть $Q(\circ)$ — главный изотоп этой лупы, тогда существуют такие две подстановки α и β множества Q, что имеет место равенство

$$xy = \alpha x\circ\beta y.$$

В тождестве Болла (6.46) переходим к операции $(\circ)$

$$\alpha\,(\alpha x\circ\beta\,(\alpha y\circ\beta x)\circ\beta z) = \alpha x\circ\beta\,(\alpha y\circ\beta\,(\alpha y\circ\beta x)).$$

Заменяем αx, αy, βz на x, y и z соответственно

$$\alpha\,(x\circ\beta\,(y\circ\beta\alpha^{-1}x))\circ z = x\circ\beta\,(y\circ\beta\,(x\circ z)).$$

Если $z = 1$, получаем

$$\alpha(x\circ\beta(y\circ\beta\alpha^{-1}x)) = x\circ\beta(y\circ\beta x).$$

Учитывая последнее равенство, можно преобразовать (6.46)

$$(x\circ\beta(y\circ\beta x))\circ z = x\circ\beta(y\circ\beta(x\circ z)).$$

Положим теперь $x = 1$

$$\beta(y\circ\beta 1)\circ z = \beta(y\circ\beta z),$$

т. е.

$$\beta(y\circ\beta z) = \lambda y\circ z,$$

где $\lambda y = \beta\ (y\circ\beta\ 1)$. Следовательно, (6.46) принимает вид

$$(x\circ(\lambda y\circ x))\circ z = x\circ(\lambda y\circ(x\circ z)).$$

Ввиду того, что λ — подстановка множества Q, можно заменить λy на y

$$(x\circ(y\circ x))\circ z = x\circ(y\circ(x\circ z)),$$

т. е. $Q\ (\circ)$ — лупа Бола.

Примечания

[1] Лупы Муфанг были введены Р. Муфанг в [54], в связи с некоторыми вопросами теории недезарговых проективных плоскостей. Ею была доказана и основная теорема 6.4. для луп Муфанг. Весьма детальное исследование луп Муфанг проведено Браком, основные результаты, полученные им, включены в его монографию [31]. Гл. VII и VIII из [31] посвящены целиком лупам Муфанг, причем гл. VIII посвящена коммутативным лупам Муфанг (доказывается теорема Слэби: коммутативная лупа Муфанг, которая порождается n $(n > 1)$ элементами, централъно нильпотентна класса не более $n - 1$). Результаты, изложенные здесь, в основном содержатся в гл. VII книги Брака [31].

[2] Эквивалентность трех основных тождеств (6.1), (6.2), (6.9) доказана Болом и Браком [31].

[3] Лупа, в которой любая внутренняя подстановка является автоморфизмом, называется A-лупой (см. Брак, Пэйдж [30]). Если $Q\ (\cdot)$ *диассоциативна*, т. е. любые два элемента лупы порождают ассоциативную подлупу (см. следствие теоремы (6.4) и $Q\ (\cdot)$ — A-лупа, то в такой лупе верна теорема Муфанг 6.4. Более того [56], если $Q\ (\cdot)$ еще и коммутативна, то $Q\ (\cdot)$ является лупой Муфанг. Некоторые диссоциативные лупы рассмотрены Гинзбургом [42].

[4] Понятие полуавтоморфизма можно ввести в любой квазигруппе: φ — полуавтоморфизм квазигруппы $Q\ (\cdot)$, если $\varphi\ (xy\cdot x) = (\varphi x\varphi y)\varphi x$. Полуавтоморфизмы в квазигруппах рассматривались Садом [71].

[5] Доказательство теоремы Муфанг (теорема 6.5). Приведенное здесь, принадлежит Браку [31]. Муфанг теорему 6.5 доказывает методом индукции. Для коммутативного случая Брак находит очень простое доказательство [29]. Связь луп Муфанг с проективными плоскостями читатель найдет, например, в книге Холла [85].

[6] Имеет место более общее утверждение: в любом альтернативном кольце выполняются тождества (6.1) и (6.2) (см. Брак и Клейнфелд [28]).

[7] Пример лупы Муфанг из 81 элемента построен Болом. Эта лупа порождена тремя элементами.

[8] Примеры луп Бола, отличных от луп Муфанг, даны Болом [23], Браком [31] (см. также пример из гл. IX, п. 2°).

Глава VII

TS-КВАЗИГРУППЫ. ПРОДОЛЖЕНИЕ КВАЗИГРУПП

1°. *Определения и примеры.* Частным случаем IP-квазигруппы является так называемая TS-квазигруппа [24] (тотально-симметрическая квазигруппа), которая определяется следующим образом:

Определение 1. Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется *TS-квазигруппой*[1], если из равенства $xy = z$ следует равенство $x'y' = z'$, где x', y', z' — любое перемещение элементов x, y, z.

Приведенное определение TS-квазигруппы эквивалентно следующему определению: квазигруппа $Q(\cdot)$ называется TS-квазигруппой, если в $Q(\cdot)$ выполняются два тождества

$$xy = yx, \tag{7.1}$$

$$x(xy) = y. \tag{7.2}$$

Действительно, из первого определения следует второе: если $xy = z$, то и $yx = z$. Если $xy = z$, то $y = xz$ и, следовательно, $x(xz) = z$. Обратно, пусть в $Q(\cdot)$ выполняются (7.1) и (7.2). Покажем, что из $xy = z$ следует, например, $zx = y$:

$$zx = xy \cdot x = x \cdot xy = y.$$

Если $Q(A)$ является TS-квазигруппой, то все шесть взаимно обратных операций для A совпадают:

$$A = A^{-1} = {}^{-1}A = {}^{-1}(A^{-1}) = ({}^{-1}A)^{-1} = A^*. \tag{7.3}$$

Более того, легко видеть, что равенства (7.3) дают новое определение TS-квазигруппы $Q(\cdot)$, эквивалентное предыдущим двум.

Действительно, равенство $A = A^*$ не что иное, как равенство (7.1), а $A = A^{-1}$ не что иное, как равенство (7.2). В то же время из равенства $A = A^{-1} = A^*$ следуют остальные. В самом деле,

$$A = A^{-1} = (A^*)^{-1} = ([{}^{-1}(A^{-1})]^{-1})^{-1} = {}^{-1}(A^{-1}),$$

т. е.

$$A = {}^{-1}(A^{-1}).$$

Так как $A^{-1} = A$, то последнее равенство принимает вид

$$A = {}^{-1}A.$$

Наконец,

$$({}^{-1}A)^{-1} = A^{-1} = A.$$

Имеет место также следующее свойство, характерное для TS-квазигруппы:

TS - квазигруппа является IP-квазигруппой с $I_r = I_l = 1$.

Действительно, если $I_r = 1$, то $A\ [A\ (x, y),\ y] = x$ или иначе, ${}^{-1}A\ (x, y) = A\ (x, y)$, т. е.

$$^{-1}A = A. \tag{7.4}$$

Аналогично из $I_l = 1$ следует

$$A^{-1} = A. \tag{7.5}$$

Но тогда из (7.4) и (7.5) следуют все равенства (7.3).

Дадим еще два определения:

Определение 2. TS-лупа называется *лупой Штейнера.*

Определение 3. Идемпотентная TS-квазигруппа называется *квазигруппой Штейнера.*

Заметим сразу, что лупа Штейнера не является квазигруппой Штейнера.

Таким образом, квазигруппа Штейнера является частным случаем TS-квазигруппы, в ней, кроме аксиом (7.1) и (7.2), выполняется аксиома идемпотентности

$$x^2 = x.$$

Квазигруппы Штейнера тесно связаны с так называемыми *системами троек Штейнера*[2] (СТШ), которые определяются следующим образом: пусть Q — некоторое множество и пусть $Q^{(3)}$ — совокупность всех неупорядоченных троек (a, b, c); $a, b, c \in Q$. Подмножество $S \subseteq Q^{(3)}$ называется СТШ, если: 1) из $(a, b, c) \in S$ следует, что a, b, c попарно не равны; 2) какова бы ни была пара неравных элементов $a, b \in Q$, $a \neq b$, существует единственная тройка $(a, b, c) \in S$.

Пример. Пусть Q состоит из всех чисел от 1 до 7. Тогда $S = \{(1,2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 5, 6)\}$.

Докажем следующее предложение: *существует взаимно однозначное соответствие между всеми квазигруппами Штейнера и СТШ, определенными на множестве Q.*

Действительно, пусть на множестве Q определена СТШ S. Тогда определим операцию $(\cdot)$ на Q таким образом.

1. Если $a \neq b$, то, существует единственная тройка $(a,b,c) \in S$. Определим $ab = c$.

2. $a^2 = a$. Очевидно, $(\cdot)$ — коммутативная операция и, кроме того, из $ab = c$ следует $a'b' = c'$, где a', b', c' — любое перемеще-

ние элементов a, b, c, так как по определению троек Штейнера (a', b', c') считается равной тройке (a, b, c). Обратно, если $Q(\cdot)$ — квазигруппа Штейнера, то определим систему S неупорядоченных троек (a, b, c) следующим образом: $(a, b, c) \in S$ тогда и только тогда, когда $ab = c$, $a \neq b$. Из идемпотентности квазигруппы $Q(\cdot)$ следует, что в этом случае и $c \neq a$, $c \neq b$, т. е. тройки из S состоят из попарно неравных элементов; каждая пара a, b принадлежит одной и только одной тройке из S.

Пример. Для СТШ, данной выше, квазигруппа Штейнера $Q(\cdot)$ имеет следующую таблицу Кэли:

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	2	5	4	7	6
2	3	2	1	6	7	4	5
3	2	1	3	7	6	5	4
4	5	6	7	4	1	2	3
5	4	7	6	1	5	3	2
6	7	4	5	2	3	6	1
7	6	5	4	3	2	1	7

Примером лупы Штейнера может служить группа $G(\cdot)$, в которой каждый элемент имеет порядок два. Такая группа коммутативна и $x \cdot xy = x^2 y = y$, т. е. она TS-лупа (лупа Штейнера).

2°. *Автотопии TS-квазигрупп.* Пусть $\mathfrak{A}$ — группа всех автотопий некоторой TS-квазигруппы $Q(\cdot)$. Имеет место следующая

Лемма 7.1. *Если $T \in \mathfrak{A}$, то $T^o \in \mathfrak{A}$, где T^o одно из T^r, T^l, T^{rl}, T^{ln}, $T^{lrl} = T^{rlr} = T^*$* (см. следствие 1 леммы 1.3).

Действительно, согласно лемме 5.2 T^r, T^l являются автотопиями квазигрупп $(\cdot)^{-1}$ и ${}^{-1}(\cdot)$ соответственно. Но в TS-квазигруппе $(\cdot) = (\cdot)^{-1} = {}^{-1}(\cdot)$, таким образом, T^r и T^l являются автотопиями квазигруппы $(\cdot)$. Тогда и $(T^r)^l$ также является автотопией квазигруппы $(\cdot)$ и т. д.

Следствие. *Множества левых, правых и главных компонент всех автотопий совпадают.*

Если α — произвольная *компонента автотопии* T, то она является главной компонентой некоторой автотопии TS-квазигруппы, т. е. *является квазиавтоморфизмом* TS-квазигруппы $Q(\cdot)$ (см. гл. II, п. 3°). Обозначим группу всех квазиавтоморфизмов TS-квазигруппы $Q(\cdot)$ через K. Рассмотрим группы $\mathscr{L}, \mathscr{R}$ и Φ регулярных подстановок. Для TS-квазигрупп имеет место следующая

Лемма 7.2. *Группы регулярных подстановок $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, Φ связаны соотношением*

$$\mathscr{L} = \mathscr{R} \subseteq \Phi = \Phi^*, \tag{7.6}$$

причем $\varphi^* = \varphi$ для любого $\varphi \in \Phi$.

Действительно, равенство $\mathcal{R} = \mathcal{L}$ *имеет место для любых коммутативных квазигрупп*, оно следует из определения $\mathcal{L}$ (или $\mathcal{R}$). Далее, пусть $\lambda \in \mathcal{L}$, тогда $(\lambda, 1, \lambda) \in \mathfrak{A}$. Согласно лемме 7.1 получаем $(\lambda, 1, \lambda)^r = (\lambda, \lambda, 1) \in \mathfrak{A}$, т. е. $\lambda \in \Phi$, откуда $\mathcal{L} \in \Phi$.

Пусть $\varphi \in \Phi$, т. е. $\varphi x \cdot y = x\varphi^* y$, где $\varphi^* \in \Phi^*$. Если $x = y$, то $\varphi x \cdot x = x \cdot \varphi^* x = \varphi^* xx$, откуда $\varphi^* = \varphi$.

Следствие 1. *Если* $\varphi \in \Phi$, то $(\varphi, \varphi^{-1}, 1) \in \mathfrak{A}$.

Действительно, $\varphi \in \Phi$ эквивалентно $(\varphi, (\varphi^*)^{-1}, 1) \in \mathfrak{A}$. Но $\varphi^* = \varphi$, откуда $(\varphi, \varphi^{-1}, 1) \in \Phi$.

Следствие 2. Пусть $\varphi \in \Phi$. *Тогда и только тогда* $\varphi \in \mathcal{L}$, *когда* $\varphi^2 = 1$.

Действительно, пусть $\varphi \in \mathcal{L}$, т. е. $(\varphi, 1, \varphi) \in \mathfrak{A}$. Но $\varphi \in \Phi$ и по следствию 1 $(\varphi, \varphi^{-1}, 1) \in \mathfrak{A}$. Однако из $(\varphi, 1, \varphi) \in \mathfrak{A}$ следует $(\varphi, \varphi, 1) \in \mathfrak{A}$. Если две компоненты двух автотопий совпадают, то и третьи совпадают *, следовательно, из $(\varphi, \varphi^{-1}, 1) \in \mathfrak{A}$, $(\varphi, \varphi, 1) \in \mathfrak{A}$ следует $\varphi^{-1} = \varphi$ или $\varphi^2 = 1$.

Следствие 3. *Группа* Φ — *абелева.*

Действительно, пусть $\varphi, \psi \in \Phi$, тогда $(\varphi, \varphi^{-1}, 1) \in \mathfrak{A}$, $(\psi, \psi^{-1}, 1) \in \mathfrak{A}$, следовательно $(\varphi\psi, \varphi^{-1}\psi^{-1}, 1) \in \mathfrak{A}$. С другой стороны, $\varphi\psi \in \Phi$ и поэтому $(\varphi\psi, (\varphi\psi)^{-1}, 1) \in \Phi$. Используя приведенное выше замечание, заключаем, что $(\varphi\psi)^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1}$, откуда следует, что $\varphi\psi = \psi\varphi$.

Следствие 4. *Группа* $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ — *абелева.*

Это следует из соотношений (7.6) и следствия 3 леммы 7.2.

Лемма 7.3. *Если* $T = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{A}$, то $\lambda\mu^{-1} \in \Phi$, где λ и μ — любые из компонент автотопии T.

Действительно, T^*T^{-1} являются автотопией TS-квазигруппы $Q(\cdot)$.
Но
$$T^*T^{-1} = (\beta, \alpha, \gamma)(\alpha, \beta, \gamma)^{-1} = (\beta\alpha^{-1}, \alpha\beta^{-1}, 1),$$
таким образом, $\beta\alpha^{-1} \in \Phi$ и т. д.

Лемма 7.4. *Если* α — *квазиавтоморфизм* TS-*квазигруппы* $Q(\cdot)$, *то существует единственный квазиавтоморфизм* α' *такой, что* $(\alpha, \alpha, \alpha') \in \mathfrak{A}$.

Действительно, пусть $\alpha \in K$, т. е. существует автотопия T вида (α, β, γ). По лемме 7.3 $\varphi = \beta\alpha^{-1} \in \Phi$, а по следствию 1 леммы 7.2 $S = (\varphi, \varphi^{-1}, 1) \in \mathfrak{A}$. Тогда
$$T = (\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta\alpha^{-1}\alpha, \gamma) = (\alpha, \varphi\alpha, \gamma) = (1, \varphi, \varphi^{-1})(\alpha, \alpha, \varphi\gamma) = $$
$$= (\varphi, \varphi^{-1}, 1)(\alpha, \alpha, \varphi\gamma) = S(\alpha, \alpha, \varphi\gamma),$$
откуда
$$(\alpha, \alpha, \beta\alpha^{-1}\gamma) = S^{-1}T \in \mathfrak{A}.$$
Как мы уже знаем, любая компонента некоторой автотопии однозначно определяется остальными двумя компонентами этой автотопии, т. е. $\alpha' = \beta\alpha^{-1}\gamma$ однозначно определяется квазиавтоморфизмом α. Этим мы заканчиваем доказательство леммы.

---

* Доказательство этого утверждения см. гл. II, п. 3°.

Следствие. *Группа Φ является нормальной подгруппой группы K всех квазиавтоморфизмов TS-квазигруппы $Q(\cdot)$.*

Действительно, пусть $\varphi \in \Phi$ и $\alpha \in K$, тогда существуют автотопии $T_\alpha = (\alpha, \alpha, \alpha')$ и $S = (\varphi, \varphi^{-1}, 1)$. Но $T_\alpha^{-1} S T_\alpha$ тоже автотопия, причем

$$T_\alpha^{-1} S T_\alpha = (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}, \alpha'^{-1})(\varphi, \varphi^{-1}, 1)(\alpha, \alpha, \alpha') = (\alpha^{-1}\varphi\alpha, \alpha^{-1}\varphi^{-1}\alpha, 1),$$

откуда следует $\alpha^{-1}\varphi\alpha \in \Phi$.

3°. *Изотопы TS-квазигрупп.* В этом пункте исследуем, при каких условиях изотопы TS-квазигруппы принадлежат тем или иным классам квазигрупп. Как нам уже известно, достаточно рассмотреть главные изотопы. Пусть $Q(\cdot)$ — квазигруппа и $Q(\circ)$ — главный изотоп:

$$x \circ y = Ux \cdot Vy \tag{7.7}$$

1. Выше было показано, что всякая TS-квазигруппа является IP-квазигруппой. Найдем условия, при которых $Q(\circ)$ тоже будет IP-квазигруппой.

Имеет место следующая

Теорема 7.1. *Необходимыми и достаточными условиями, чтобы главный изотоп $Q(\circ)$ TS-квазигруппы $Q(\cdot)$, определенный равенством* (7.7), *был IP-квазигруппой, являются:* 1) $U, V \in K$, 2) $U^2, V^2 \in \Phi$.

Для доказательства используем теорему 5.2: должны существовать две подстановки I_l', I_r' такие, что

$$\left.\begin{aligned} T_l &= (I_l\lambda I_l'^{-1}\lambda^{-1}, \nu\mu^{-1}, \mu\nu^{-1}) \in \mathfrak{A}, \\ T_r &= (\nu\lambda^{-1}, I_r\mu I_r'^{-1}\mu^{-1}, \lambda\nu^{-1}) \in \mathfrak{A}. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

В нашем случае $\lambda = U$, $\mu = V$, $\nu = 1$, $I_r = I_l = 1$ и, так как $I'^r = I'^2_l = 1$, из (7.8) получаем

$$T_l = (UI_l'U^{-1}, V^{-1}, V), \; T_r = (U^{-1}, VI_r'V^{-1}, U).$$

Отсюда следует в силу лемм 7.1 и 7.3, что $U, V \in K$ и U^2, $V^2 \in \Phi$. Согласно лемме 7.4 существует квазиавтоморфизм V' такой, что $S = (V', V, V)$ и, следовательно, $T_l S^{-1} \in \mathfrak{A}$.
Но

$$T_l S^{-1} = (UI_l'U^{-1}V'^{-1}, V^{-2}, 1),$$

откуда вытекает, что $UI_l' U^{-1}V'^{-1} = V^2$, поэтому

$$I_l' = U^{-1}V^2V'U. \tag{7.9}$$

Аналогично находим для I_r':

$$I_r' = V^{-1}U^2U'V.$$

Таким образом, I'_l и I'_r являются квазиавтоморфизмами TS-квазигруппы $Q.(\cdot)$ Обратно, пусть U и V удовлетворяют условиям теоремы и пусть I'_l определена равенством (7.9), тогда

$$I'_l x\circ(x \circ y) = U(U^{-1}V^2V'\,Ux)V\,(Ux\,.Vy) = V^2V'\,Ux\cdot V(Ux\ Vy). \quad (7.10)$$

Так как $(V', V, V) \in \mathfrak{A}$, то $V\,(xy) = V'x\cdot Vy$ и так как $U^2 \in \Phi$, то $(V^2, V^{-2}, 1) \in \mathfrak{A}$, откуда $(V^2, 1, V^{-2}) \in \mathfrak{A}$, поэтому $V^2x\cdot y = V^{-2}(xy)$. Таким образом, из (7.10) получаем

$$I'_l x\circ(x \circ y) = V^{-2}\ [V'\,Ux\cdot(V'Ux\cdot V^2y)] = V^{-2}\,(V^2y) = y.$$

Аналогично доказывается и правая обратимость квазигруппы $Q\ (\circ)$.

2. Найдем условие, при котором $Q\ (\circ)$ была бы тоже TS-квазигруппой. Как мы уже видели, TS-квазигруппы являются IP-квазигруппами, причем должно иметь место $I'_l = I'_r = 1$. Применяя предыдущий результат к этому случаю, мы находим, что T_l и T_r имеют вид

$$T_l = (1,\ V^{-1}, V),\ \ T_r = (U^{-1},\ 1,\ U),$$

откуда заключаем, что $U, V \in \Phi$. Легко видеть, что условие $U, V \in \Phi$ является достаточным. В связи с этим заметим, что если $U, V \in \Phi$, то

$$U^{-1}V^{-1}\,(xy) = Ux\,.Vy. \quad (7.11)$$

Действительно, так как $U, V \in \Phi$, то $(U,\ 1,\ U^{-1}) \in \mathfrak{A}$, $(1, V, V^{-1}) \in \mathfrak{A}$, откуда $(U,\ V,\ U^{-1}\ V^{-1}) \in \mathfrak{A}$.

Покажем, что $Q\ (\circ)$ — TS - квазигруппа. Имеем, учитывая, что группа Φ — абелева (см. следствие 3 леммы 7.2):

$$x\circ(x \circ y) = Ux\cdot V\ \ (Ux\cdot Vy) = Ux\,.V\,U^{-1}V^{-1}\ \ (xy) = Ux\cdot$$
$$\cdot\, U^{-1}\ \ (xy) = UU^{-1}\ \ (x\cdot xy) = x\cdot xy = y.$$ Далее, имеем $x \circ y = y \circ x$. Действительно,

$$x \circ y = Ux\cdot Vy = U^{-1}V^{-1}\,(xy) = U^{-1}V^{-1}\,(yx) = Uy\cdot Vx = y \circ x.$$

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 7.2. *Необходимым и достаточным условием, чтобы изотоп $Q\ (\circ)$ квазигруппы $Q\ (\cdot)$, определяемый равенством $x \circ y = Ux\cdot Vy$, был тоже TS-квазигруппой, является условие: U, V должны быть средними регулярными подстановками TS-квазигруппы $Q\ (\cdot)$.*

3. Естественно теперь найти необходимые и достаточные условия, чтобы $Q\ (\circ)$ была квазигруппой Штейнера. Согласно теореме 7.2 U и V должны быть средними регулярными подстановками TS-квазигруппы $Q\ (\cdot)$, и тогда в силу равенства (7.11) получаем

$$x \circ x = Ux\cdot Vx = U^{-1}V^{-1}\ \ (xx) = U^{-1}V^{-1}x^2. \quad (7.12)$$

Но в квазигруппе Штейнера $x \circ x = x$, следовательно, из (7.12) находим

$$UVx = x^2. \quad (7.13)$$

В силу равенства (7.11) имеем

$$x \circ y = U^{-1}V^{-1}(xy),$$

откуда

$$UV(x \circ y) = xy,$$

или ввиду (7.13)

$$(x \circ y)^2 = xy. \tag{7.14}$$

Заменяя y на $x \circ y$, находим из последнего равенства

$$(x\circ(x\circ y))^2 = x(x\circ y), \quad y^2 = x(x\circ y),$$

откуда

$$x \circ y = xy^2. \tag{7.15}$$

Комбинируя (7.14) и (7.15), находим

$$(xy^2)^2 = xy. \tag{7.16}$$

Обратно, пусть в TS-квазигруппе $Q(\cdot)$ выполняется тождество (7.16). Из этого тождества после замены x на x^2 получаем

$$(x^2y^2)^2 = x^2y.$$

Меняем местами x и y:

$$(y^2x^2)^2 = y^2x,$$

следовательно, $x^2y = y^2x$. Пусть теперь

$$x \odot y = x^2y = y^2x. \tag{7.17}$$

Из (7.17) следует коммутативность операции $(\odot)$ и

$$x \odot (x \odot y) = y.$$

Действительно,

$$x \odot (x \odot y) = x^2(x \odot y) = x^2(x^2y) = y.$$

Таким образом $Q(\odot)$ — TS-квазигруппа. Более того, $Q(\odot)$ — квазигруппа Штейнера, так как $x \odot x = x^2x = x$.

Если теперь возьмем какой-нибудь главный изотоп $Q(\circ)$ TS-квазигруппы $Q(\cdot)$, в которой выполняется условие (7.16), и $Q(\circ)$ — квазигруппа Штейнера, то, повторяя рассуждения из первой части п. 3, находим, что $Q(\circ)$ связан с $Q(\cdot)$ равенством (7.15). Сравнивая (7.15) и (7.17), заключаем, что $(\circ) = (\odot)$. Итак, мы доказали теорему:

Теорема 7.3. *Необходимым и достаточным условием, чтобы главный изотоп $Q(\circ)$ TS-квазигруппы $Q(\cdot)$ был квазигруппой Штейнера, является выполнение в $Q(\cdot)$ тождества* (7.16). *В этом случае все такие главные изотопы совпадают.*

В заключение этого пункта докажем следующее утверждение:

Теорема 7.4. *Квазигруппа Штейнера изотопна некоторой коммутативной WIP-лупе.*

Действительно, зафиксируем элемент 1 из Q. Рассмотрим изотоп

$$x \circ y = 1(xy).$$

Очевидно, $Q(\circ)$ — коммутативная лупа с единицей 1. Обратным элементом для x в лупе $Q(\circ)$ будет $Ix = 1x$, так как

$$x \circ 1x = 1[x(1x)] = 1 \cdot 1 = 1.$$

Проверим основное свойство WIP-лупы

$$y \circ I(x \circ y) = y \circ [1(1 \cdot xy)] = y \circ xy = 1(y \cdot xy) = 1x = Ix.$$

4°. *Допустимые квазигруппы.* Квазигруппы Штейнера и лупы Штейнера очень тесно связаны, однако эта связь другой природы, отличной от изотопии или перехода к обратным операциям.

Прежде чем выяснить эту, очень простую для случая квазигрупп Штейнера связь, укажем один новый способ получения квазигрупп из данной квазигруппы. Предварительно необходимо изучить некоторые понятия, которые встречаются довольно часто, в частности, и в гл. IX.

Определение 4. Пусть $Q(\cdot)$ — квазигруппа. Подстановка θ множества Q называется *полной*[3] для $Q(\cdot)$, если отображение θ'

$$\theta' x = x \cdot \theta x \tag{7.18}$$

также является подстановкой множества Q. Квазигруппа, обладающая хотя бы одной полной подстановкой, называется *допустимой*.

Примеры. 1. *Любая идемпотентная квазигруппа* $Q(\cdot)$ (т. е. для любых x верно равенство $x \cdot x = x$) *допустима*, именно $\theta' = \theta = 1$.

2. *Конечные группы нечетного порядка допустимы.* Действительно, покажем, что $\theta = 1$ — полная подстановка для группы $Q(\cdot)$ порядка $m = 2n + 1$. В силу конечности Q достаточно доказать, что из $x^2 = y^2$ следует $x = y$:

$$x = x^{m+1} = x^{2n+2} = (x^2)^{n+1} = (y^2)^{n+1} = y^{2n+2} = y^{m+1} = y.$$

3. *Существуют допустимые группы четного порядка.* Так, группа Клейна допустима: $Q = \{0, a, b, c\}$.

	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Подстановка $\theta = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & b & c & a \end{pmatrix}$ будет полной для $Q(\cdot)$. Здесь $\theta' = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & c & a & b \end{pmatrix}$.

4. *Пример недопустимой группы.* Симметрическая группа $\mathfrak{S}_3$ третьей степени недопустима. Действительно, $\mathfrak{S}_3$ обладает нормальным делителем H порядка три. Пусть H' — смежный класс по H. Если $x \in H$ и $\theta x \in H$, то $\theta' x = x\theta x \in H$; пусть имеется k таких элементов.

Если $y \in H'$ и $\theta y \in H'$, то $\theta' y = y\theta y \in H$, таких элементов тоже будет k. Таким образом, $\theta' \mathfrak{S}_3$ содержит $2k$ элементов из H, но это невозможно, так как $\theta' \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_3$ содержит три элемента из H.

Рассмотрим некоторые простые свойства допустимых квазигрупп.

1. Прежде всего заметим, что *если квазигруппа $Q(\cdot)$ допустима, то может существовать несколько полных подстановок.*

В самом деле, верно следующее утверждение: *пусть θ полная подстановка и пусть $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ — автотопия квазигруппы $Q(\cdot)$, тогда* и $\beta\theta\alpha^{-1}$ — *тоже полная подстановка для $Q(\cdot)$.* Действительно,

$$\gamma\theta' x = \gamma(x \cdot \theta x) = \alpha x \cdot \beta\theta x,$$

откуда, заменяя x на $\alpha^{-1}x$, получаем

$$\gamma\theta' \alpha^{-1} x = x \cdot \beta\theta\alpha^{-1} x.$$

2. *Если $Q(\cdot)$ — допустимая квазигруппа, то и все обратные квазигруппы тоже допустимы.*

Действительно, из $x \cdot \theta x = \theta' x$ следует $x \diagdown \theta' x = \theta x$, где $(\diagdown) = (\cdot)^{-1}$; таким образом, θ' — полная подстановка для $Q(\diagdown)$. Из равенства $x \cdot \theta x = \theta' x$ следует равенство $\theta' x \diagup \theta x = x$, откуда $x \diagup \theta\theta'^{-1} x = \theta'^{-1} x$, т. е. $\theta\theta'^{-1}$ — полная подстановка для $Q(\diagup)$, где $(\diagup) = {}^{-1}(\cdot)$. Отсюда вытекает, что и остальные квазигруппы из $\Sigma_{(\cdot)}$ допустимы.

3. Следующая теорема дает признак допустимости квазигруппы $Q(\cdot)$.

Теорема 7.5. *Необходимым и достаточным условием, чтобы $Q(\cdot)$ была допустимой, является следующее: $Q(\cdot)$ изотопна некоторой идемпотентной квазигруппе* [4].

Действительно, если $Q(\cdot)$ допустима, то существуют две подстановки θ и θ' такие, что выполняется равенство (7.18).

Определим изотоп $Q(\circ)$ следующим образом:

$$x \circ y = \theta'^{-1}(x \cdot \theta y).$$

Тогда $x \circ x = \theta'^{-1}(x \cdot \theta x) = \theta'^{-1}\theta' x = x$, т. е. $Q(\circ)$ идемпотентна.

Обратно, пусть $Q(\cdot)$ изотопна идемпотентной квазигруппе $Q(\circ)$: $(\cdot) = (\circ)^T$. Тогда $(\circ) = (\cdot)^{T^{-1}}$, где $T = (\alpha, \beta, \gamma)$. Следовательно, $x \circ y = \gamma(\alpha^{-1}x \cdot \beta^{-1}y)$. Пусть $x = y$, тогда $x = x \circ x = \gamma(\alpha^{-1}x \cdot \beta^{-1}x)$, откуда $\alpha^{-1}x \cdot \beta^{-1}x = \gamma^{-1}x$. Заменим x на αx: $x \cdot \beta^{-1}\alpha x = \gamma^{-1}\alpha x$, следовательно, $\beta^{-1}\alpha$ — полная подстановка для $Q(\cdot)$.

С л е д с т в и е. *Квазигруппа* $Q\ (\cdot)$, *изотопная допустимой квазигруппе* $Q\ (\circ)$, *также допустима.*

В силу транзитивности изотопии квазигруппа $Q\ (\cdot)$ изотопна некоторой идемпотентной квазигруппе и, следовательно, является допустимой.

4. *Если* $Q\ (\cdot)$ — *допустимая группа с полной подстановкой* θ, $x \cdot \theta x = \theta' x$, *то группоид* $Q\ (A)$, *где*

$$A\ (x,\ y) = x\ \theta'\ (x^{-1}y) \tag{7.19}$$

является квазигруппой.

Действительно, уравнение $A\ (a,\ y) = b$ эквивалентно уравнению $a\,\theta'\ (a^{-1}y) = b$, которое, очевидно, имеет единственное решение $y = a\theta'^{-1}\ (a^{-1}b)$. Покажем, что уравнение $A\ (x,\ a) = b$ также однозначно разрешимо. В самом деле, это уравнение эквивалентно уравнению $x\ \theta'\ (x^{-1}a) = b$, или $x \cdot x^{-1}a \cdot \theta\ (x^{-1}a) = b$, откуда получаем $a\theta\ (x^{-1}a) = b$. Решим это уравнение

$$a^{-1}b = \theta(x^{-1}a),\quad \theta^{-1}(a^{-1}b) = x^{-1}a,\quad x = (\theta^{-1}(a^{-1}b)a^{-1})^{-1}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденный элемент является решением уравнения $A(x,\ a) = b$.

5. Рассмотрим следующий изотоп B квазигруппы A из (7.19):

$$B(x,\ y) = A\ (x^{-1},\ y) = x^{-1}\theta'\ (xy).$$

Легко видеть, что *система уравнений*

$$\left.\begin{aligned} xy &= a,\\ B\ (x, y) &= b \end{aligned}\right\}$$

имеет единственное решение при любых $a,\ b \in Q$.

Действительно, $B\ (x,\ y) = x^{-1}\theta'\ (xy) = x^{-1}\theta' a = b$, откуда элемент x определяется однозначно. Из уравнения $xy = a$ находим y, очевидно, y тоже определяется однозначно. Мы пришли к следующему важному понятию:

О п р е д е л е н и е 5. Две квазигруппы $Q\ (A)$ и $Q\ (B)$ называются *ортогональными*, если система уравнений

$$\left.\begin{aligned} A\ (x, y) &= a,\\ B\ (x, y) &= b \end{aligned}\right\}$$

однозначно разрешима для любых $a, b \in Q^5$.

Таким образом, предыдущий результат можно сформулировать в следующем виде: *для любой допустимой группы существует квазигруппа, ортогональная с ней.*

Верно и обратное утверждение: *если существует ортогональная квазигруппа* $Q\ (B)$ *к группе* $Q\ (\cdot)$, *то* $Q\ (\cdot)$ — *допустима.*

В самом деле, покажем, что $\theta x = B^{-1}(x,\ c)$ будет полной подстановкой для $Q\ (\cdot)$ при любом c. Рассмотрим отображение $\theta' x =$

$=x\,\theta x$ и покажем, что $\theta' x = d$ имеет единственное решение для любого $d \in Q$. Уравнение $\theta' x = d$ эквивалентно уравнению $xB^{-1}\cdot(x, c)=d$. Пусть $B^{-1}(x, c)=y$, тогда получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} xy &= d,\\ B(x, y) &= c,\end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

которая в силу ортогональности $Q(B)$ и $Q(\cdot)$ имеет единственное решение. В частности, существует единственный x, удовлетворяющий системе (7.20), и, следовательно, уравнению $\theta' x = d$.

5°. *Продолжение квазигрупп*[6]. Перейдем теперь к построению квазигрупп, о котором шла речь в начале предыдущего пункта. Пусть $Q(\cdot)$ — допустимая квазигруппа с полной подстановкой θ:

$$x\theta x = \theta' x.$$

На множестве $Q' = Q \bigcup k$, $k \overline{\in} Q$ определим операцию $(\circ)$ следующим образом:

$$x \circ y = \left\{\begin{array}{ll} xy, & \text{если } x, y \neq k,\ y \neq \theta x,\\ k, & \text{если } x, y \neq k,\ y = \theta x,\\ \theta' x, & \text{если } x \neq k,\ y = k,\\ \theta'\theta^{-1} y, & \text{если } x = k,\ y \neq k,\\ k, & \text{если } x = y = k.\end{array}\right\} \tag{7.21}$$

Покажем, что $Q(\circ)$ — *квазигруппа*. Рассмотрим уравнение $a \circ x = b$. Пусть $a = k$, тогда $x = k$, если $b = k$. В случае $b \neq k$ уравнение $k \circ x = b$ эквивалентно уравнению $\theta'\,\theta^{-1}\,x = b$, откуда x определяется однозначно: $x = \theta\theta'^{-1} b$. Пусть $a \neq k$. Для $b = k$ в силу определения операции $(\circ)$ получаем $x = \theta a$. Если $b \neq k$, но $b = \theta' a$, то $a \circ x = \theta' a$ возможно при $x = k$. Если же $b \neq k$ и $b \neq \theta' a$, то $a \circ x = b$ превращается в $ax = b$, откуда x определяется однозначно. Аналогично доказывается, что $Q(\circ)$ обратима слева.

Определение 6. Квазигруппа $Q'(\circ)$, построенная по формулам (7.21), называется *продолжением квазигруппы* $Q(\cdot)$ *с помощью подстановки* θ.

Для продолжения квазигрупп введем обозначение

$$(\circ) = (\cdot, \theta).$$

Если Q — конечна, то продолжение $Q'(\circ)$ получается следующим образом: в таблице Кэли для $Q(\cdot)$ заменяем произведения $x \cdot \theta x$ через k, к полученной таблице добавим строку и столбец для k, состоящие из элементов $\theta'\theta^{-1} x$ и $\theta' x$ $(x \neq k)$ соответственно, и, наконец, полагаем $k \circ k = k$. Например,

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	**3**	4
1	3	**2**	0	4	1
2	**1**	4	3	0	2
3	4	3	1	2	**0**
4	2	0	**4**	1	3

$\circ$	k	0	1	2	3	4
k	k	1	2	4	3	0
0	3	0	1	2	k	4
1	2	3	k	0	4	1
2	1	k	4	3	0	2
3	0	4	3	1	2	k
4	4	2	0	k	1	3

В этом примере $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ и $\theta' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Полужирными цифрами в первой таблице обозначены произведения $x \cdot \theta x$. Элементы, находящиеся на соответствующих местах во второй таблице, перешли в строку и столбец для k.

Если $Q(\cdot)$ — идемпотентная квазигруппа, то продолжение $(\circ) = (\cdot, 1)$ (1 — единичная подстановка множества Q) имеет простой вид

$$x \circ y = \begin{cases} xy, & x \neq k,\ y \neq k,\ x \neq y, \\ k, & x = y \neq k, \\ x, & x \neq k,\ y = k, \\ y, & x = k,\ y \neq k, \\ k, & x = y = k. \end{cases} \tag{7.22}$$

В этом случае $Q'(\circ)$ — *лупа с единицей* k.

Имеет место и обратное утверждение: *если продолжение* $Q'(\circ)$ *квазигруппы* $Q(\cdot)$ — *лупа, где* $(\circ) = (\cdot, \theta)$, то $Q(\cdot)$ — *идемпотентная квазигруппа и* $\theta = 1$, т. е. продолжение $Q'(\circ)$ имеет вид (7.22).

Действительно, пусть e — единица лупы $Q'(\circ)$. Если $e \neq k$, то из $e \circ k = k$ должно следовать $\theta' e = k$, что невозможно, так как $\theta' e \in Q$, а $k \overline{\in} Q$. Таким образом, $e = k$, и поэтому в силу определения $(\circ)$ имеет место $\theta' x = x$, $\theta' \theta^{-1} y = y$ для любых $x, y \in Q$, т. е. $\theta' = 1$, $\theta' \theta^{-1} = 1$, откуда $\theta = 1$.

Теорема 7.6. *Продолжения квазигрупп изотопны группе* $Q(\cdot)$ *тогда и только тогда, когда все элементы группы* $Q(\cdot)$ *имеют порядок два.*

Доказательство. Пусть $Q(\cdot)$ — допустимая квазигруппа с полной подстановкой θ и пусть $Q(\bullet)$ — продолжение с помощью θ. Предположим, что $(\bullet)$ изотопна группе $(\circ)$:

$$x \bullet y = \overline{\gamma}^{-1}(\overline{\alpha} x \circ \overline{\beta} y),$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ — подстановки множества $Q' = Q \bigcup k$. Тогда из определения продолжения $(\bullet) = (\cdot, \theta)$ следует

$$\begin{gathered} k = x \bullet \theta x = \bar{\gamma}^{-1}(\bar{\alpha}x \circ \bar{\beta}\theta x), \\ x \bullet k = \theta' x = \bar{\gamma}^{-1}(\bar{\alpha}x \circ \bar{\beta}k), \\ k \bullet x = \theta'\theta^{-1}x = \bar{\gamma}^{-1}(\bar{\alpha}k \circ \bar{\beta}x), \\ k = k \bullet k = \bar{\gamma}^{-1}(\bar{\alpha}k \circ \bar{\beta}k), \end{gathered}$$

откуда находим

$$\bar{\alpha}x \circ \bar{\beta}\theta x = \bar{\gamma}k, \tag{7.23}$$

$$\bar{\alpha}x \circ \bar{\beta}k = \bar{\gamma}\theta' x, \tag{7.24}$$

$$\bar{\alpha}k \circ \bar{\beta}x = \bar{\gamma}\theta'\theta^{-1}x, \tag{7.25}$$

$$\bar{\alpha}k \circ \bar{\beta}k = \bar{\gamma}k.$$

Во всех равенствах (7.23) — (7.25) $x \neq k$. Найдем из (7.23) и (7.24) $\overline{\alpha x}$ и $\overline{\beta x}$ и подставим в (7.25):

$$\begin{gathered} \bar{\gamma}k = \bar{\alpha}x \circ \bar{\beta}\theta x = \bar{\gamma}\theta' x \circ (\bar{\beta}k)^{-1} \circ (\bar{\alpha}k)^{-1} \circ \bar{\gamma}\theta'\theta^{-1}(\theta x) = \\ = \bar{\gamma}\theta' x \circ (\bar{\alpha}k \circ \bar{\beta}k)^{-1} \circ \bar{\gamma}\theta' x = \bar{\gamma}\theta' x \circ (\bar{\gamma}k)^{-1} \circ \bar{\gamma}\theta' x, \end{gathered}$$

откуда

$$(\bar{\gamma}\theta' x \circ (\bar{\gamma}k)^{-1})^2 = 1, \tag{7.26}$$

где 1 — единица группы Q' $(\circ)$. Заменяем в (7.26) $\theta' x$ на x:

$$(\bar{\gamma}x \circ (\gamma k)^{-1})^2 = 1.$$

Последнее равенство имеет место для любых $x \neq k$. Если $x = k$, то $\bar{\gamma}k \circ (\bar{\gamma}k)^{-1} = 1$, поэтому ограничение $x \neq k$ можно снять. Так как $x \to \bar{\gamma}x \circ (\bar{\gamma}k)^{-1}$ является подстановкой множества Q', мы показали, что любой элемент группы Q' $(\circ)$ имеет порядок два.

Теорема доказана.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится

Лемма 7.5. *Пусть группа Q $(\cdot)$ имеет порядок больше восьми. Если все элементы группы Q $(\cdot)$, кроме, быть может, двух элементов, имеют порядок два, то все элементы имеют порядок два.*

Пусть $p \in Q$ и $p^2 \neq 1$, тогда и $(p^{-1})^2 \neq 1$. Следовательно, остальные элементы из Q должны иметь порядок два. Элемент p^2 либо имеет порядок два, т. е. $p^4 = 1$, либо не имеет порядок два: $(p^2)^2 \neq 1$. Тогда либо $p^2 = p$, т. е. $p = 1$, что невозможно, либо $p^2 = p^{-1}$, т. е. $p^3 = 1$. Итак, мы пришли к следующему выводу: группа Q $(\cdot)$, удовлетворяющая условиям леммы, содержит циклическую подгруппу $H = \{p\}$ порядка три или четыре. В обоих случаях H — нормальный делитель группы Q $(\cdot)$. Действительно,

$(xpx^{-1})^2 \neq 1$ при любых x, так как $(xpx^{-1})^2 = xp^2x^{-1} \neq 1$, и, следовательно, $xpx^{-1} \in H$. Индекс нормального делителя H в группе $Q(\cdot)$ больше двух, так как порядок $Q(\cdot)$ больше восьми.

Далее, заметим, что

$$xpx^{-1} = p^{-1} \tag{7.27}$$

для любых $x \overline{\in} H$.

Действительно, в этом случае $xp \overline{\in} H$, и поэтому $(xp)^2 = 1$, откуда $xpx^{-1} = p^{-1}$.

Так как индекс $H(\cdot)$ в $Q(\cdot)$ больше двух, то порядок фактор-группы больше двух, и поэтому найдутся такие два элемента $\bar{x}$ и $\bar{y}$, отличные от $\bar{1}$ ($\bar{1}$ — единица фактор-группы Q/H), что $\bar{x}\bar{y} \neq \bar{1}$. Иными словами, в $Q(\cdot)$ найдутся такие два элемента x и y, не принадлежащие H, что и их произведение тоже не принадлежит H. Следовательно, $x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1$, откуда вытекает, в частности, что $xy = yx$.

С другой стороны, из (7.27) следует

$$(xy)\, p\, (xy) = p^{-1}$$

или

$$\begin{aligned}(xy)p(xy) = (xy)p(yx) = x(ypy)x = xp^{-1}x = (x^{-1}px^{-1})^{-1} = \\ = (xpx)^{-1} = p.\end{aligned}$$

Таким образом, $p = p^{-1}$ или $p^2 = 1$, что противоречит выбору p. Из всего сказанного вытекает, что все элементы группы $Q(\cdot)$ имеют порядок два.

Если порядок $Q(\cdot)$ не более восьми, то утверждение леммы неверно. Так, группа $Q(\cdot)$ с образующими a и b и с определяющими соотношениями $a^4 = 1$, $b^2 = 1$, $ab = ba^3$ имеет порядок восемь и все элементы, кроме a и a^3, имеют порядок два.

Введем следующее понятие. Две полные подстановки φ и θ квазигруппы $Q(\cdot)$ назовем *эквивалентными*, если

$$\varphi = \beta\theta\alpha^{-1},$$

где α и β являются соответственно левой и правой компонентами некоторой автотопии T.

Если $Q(\cdot)$ — группа, то, как следует из теоремы 2.5, компоненты α и β автотопии (α, β, γ) имеют вид

$$\alpha = L_a\nu, \ \beta = R_b\nu,$$

где a, b — некоторые элементы из Q, а ν — автоморфизм группы $Q(\cdot)$. Следовательно,

$$\varphi = (R_b\nu)\,\theta\,(L_a\nu)^{-1},$$

или

$$\varphi = R_b\nu\theta\nu^{-1}L_a. \tag{7.28}$$

В последнем равенстве мы заменили a^{-1} на a.

Пример неэквивалентных полных подстановок. Пусть $Q(\cdot)$ — абелева группа нечетного порядка, тогда $\theta = 1$ — полная подстановка и пусть $\varphi \neq 1$ — полный автоморфизм группы $Q(\cdot)$. Если φ и θ были бы эквивалентными, тогда мы должны были иметь в виду (7.28) $\varphi = R_b L_a = L_b L_a = L_{ab}$, но $\varphi 1 = 1$, поэтому и $L_{ab}\, 1 = 1$. Отсюда $b = a^{-1}$, т. е. $\varphi = L_1 = 1$, что противоречит выбору φ.

Теорема 7. 7. *Пусть группа $Q(\cdot)$ содержит по крайней мере один элемент порядка, отличного от двух, и пусть θ, φ — две ее полные подстановки. Продолжения $A = (\cdot, \theta)$ и $B = (\cdot, \varphi)$ изотопны тогда и только тогда, когда θ и φ эквивалентны.*

Доказательство. 1°) Необходимость. Пусть

$$B = A^{\bar{T}}, \tag{7.29}$$

где $\bar{T} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$. Введем обозначения

$$\bar{\alpha}k = a,\ \bar{\beta}k = b,\ \bar{\gamma}k = c, \tag{7.30}$$

$$\bar{\alpha}a_0 = k,\ \bar{\beta}b_0 = k,\ \bar{\gamma}c_0 = k.$$

В силу определения продолжений мы должны иметь

$$\bar{\gamma}(xy) = A(\bar{\alpha}x, \bar{\beta}y),\ x \neq k,\ y \neq k,\ y \neq \varphi x, \tag{7.31}$$

$$c = A(\bar{\alpha}x, \bar{\beta}\varphi x),\ x \neq k, \tag{7.32}$$

$$\bar{\gamma}\varphi' x = A(\bar{\alpha}x, b),\ x \neq k, \tag{7.33}$$

$$\bar{\gamma}\varphi'\varphi^{-1} x = A(a, \bar{\beta}x),\ x \neq k, \tag{7.34}$$

$$c = A(a, b). \tag{7.35}$$

Из (7.35) следует, что если два элемента из a, b, c равны k, то и третий элемент равен k. Аналогичное утверждение следует и для a_0, b_0, c_0.

Возможны следующие случаи:

1) $a = b = c = k$. Пусть $\bar{\alpha}x = \alpha x$, $\bar{\beta}x = \beta x$, $\bar{\gamma}x = \gamma x$ при $x \neq k$, т. е. α, β, γ — подстановки множества Q. Из (7.33) следует

$$\gamma\varphi' x = A(\alpha x, k) = \theta'\alpha x,$$

откуда

$$\gamma\varphi' = \theta'\alpha. \tag{7.36}$$

Из равенства (7.32) имеем

$$k = A(\alpha x, \beta\varphi x),$$

откуда

$$\beta\varphi = \theta\alpha. \tag{7.37}$$

Пусть $x, y \in Q$ и $y \neq \varphi x$, тогда из (7.31) получаем

$$\gamma(xy) = A(\alpha x, \beta y).$$

Так как $\gamma\ (xy) \neq k$, то в силу определения продолжения A имеет место

$$\gamma\ (xy) = \alpha x \cdot \beta y$$

или

$$\gamma^{-1}\ (\alpha x \cdot \beta y) = xy,\ y \neq \varphi x. \tag{7.38}$$

В случае, когда $y = \varphi x$, имеем

$$\gamma^{-1}\ (\alpha x \cdot \beta \varphi x) = \gamma^{-1}\ (\alpha x \cdot \theta \alpha x) = \gamma^{-1}\ \theta' \alpha x,$$

так как $x\theta x = \theta' x$. Но ввиду (7.36) $\gamma^{-1}\theta'\alpha = \varphi'$, поэтому

$$\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta\varphi x) = \varphi' x$$

или

$$\gamma^{-1}\ (\alpha x \cdot \beta \varphi x) = x \cdot \varphi x. \tag{7.39}$$

Таким образом, из (7.38) и (7.39) вытекает, что $\gamma^{-1}\ (\alpha x \cdot \beta y) = xy$ для любых x и y, т. е. $T = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ — автотопия группы $Q\ (\cdot)$. Равенство (7.37) означает, что φ и θ эквивалентны.

2) $c = k,\ \ a \neq k,\ \ b \neq k$. Пусть $\bar{\gamma} x = \gamma x,\ \ x \neq k$. Равенства (7.32), (7.33) и (7.34) превращаются соответственно в

$$\left.\begin{aligned} &A\ (\bar{\alpha} x,\ \bar{\beta}\varphi x) = k, && (7.40)\\ &A\ (\bar{\alpha} x,\ b) = \gamma\varphi' x, && (7.41)\\ &A\ (a,\ \bar{\beta} x) = \gamma\varphi'\varphi^{-1} x. && (7.42)\end{aligned}\right\}\ x \neq k.$$

Из (7.41) и (7.42) получаем

$$A\ (\bar{\alpha} x,\ b) = A\ (a,\ \bar{\beta}\varphi x) = \gamma\varphi' x, \quad x \neq k. \tag{7.43}$$

Пусть $\bar{\alpha} x \neq k$, тогда $x \neq a_0$. Следовательно, из (7.40) находим

$$\bar{\beta}\varphi x = \theta\bar{\alpha} x,\ \ x \neq a_0,\ \ x \neq k. \tag{7.44}$$

В частности, из (7.44) следует $\bar{\beta}\ \varphi x \neq k$, если $x \neq a_0$. Итак, из (7.43) вытекает $\bar{\alpha} x \cdot b = \alpha\ \bar{\beta}\varphi x = \gamma\varphi' x$ при $x \neq k,\ x \neq a_0$, откуда ввиду (7.44) получаем

$$\bar{\alpha} x \cdot b = a \cdot \theta\bar{\alpha} x,\ x \neq k,\ x \neq a_0.$$

Сделаем замену $x = \bar{\alpha}^{-1} y$, тогда $\bar{\alpha}^{-1} y \neq k,\ \bar{\alpha}^{-1} y \neq a_0$, откуда $y \neq \bar{\alpha} k,\ y \neq \bar{\alpha} a_0$, или $y \neq a_0,\ y \neq k$ (см. (7.30)). Итак,

$$y \cdot b = a \cdot \theta y,$$

откуда

$$\theta y = a^{-1} y b \tag{7.45}$$

для всех $y \neq k,\ \ y \neq a$.

Формула (7.45) верна и для $y = a$. Действительно, при $c = k$ из (7.35) получаем $A\ (a,\ b) = k$, откуда $\theta a = b$. Тот же результат следует из (7.45) при $x = a$.

Из (7.29) имеем

$$A = B^{\overline{T}^{-1}} = B^{(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\beta}^{-1}, \bar{\gamma}^{-1})}.$$

Если меняем ролями A и B, то φ и θ, а также элементы a, b, c и a_0, b_0, c_0 меняются ролями соответственно, так как $c = k \leftrightarrow c_0 = k$. Таким образом, мы должны получить для φ аналогичное равенству (7.45) соотношение

$$\varphi y = a_0^{-1} y b_0. \tag{7.46}$$

Найдем связь между θ и φ. Из (7.45) и (7.46) получаем

$$\theta\,(ay) = yb,\ \varphi\,(a_0 y) = yb_0.$$

Следовательно,

$$\theta\,(ay)\,b^{-1} = \varphi\,(a_0 y) b_0^{-1},$$

откуда

$$\varphi\,(a_0 y) = \theta\,(ay)\,b^{-1} b_0$$

или

$$\varphi y = \theta\,(a a_0^{-1} y)\,b^{-1} b_0,\ \varphi = R_c \theta L_d^{-1},$$

где $d = a_0 a^{-1}$, $c = b^{-1} b_0$. Но $(L_d, R_c, L_d R_c)$ — автотопия группы $Q\,(\cdot)$:

$$L_d x \cdot R_c y = dx \cdot yc = d\,(xy)\,c = L_d R_c\,(xy).$$

Следовательно, φ и θ эквивалентны.

3) $a = k$, $b \neq k$, $c \neq k$. Пусть $\bar{\alpha} x = \alpha x$, $x \neq k$, $a_0 = k$. Равенства (7.32) — (7.34) превращаются в равенства

$$\left.\begin{aligned} &A\,(\alpha x,\ \bar{\beta}\varphi x) = c, && (7.47)\\ &A\,(\alpha x,\ b) = \bar{\gamma}\varphi' x, && (7.48)\\ &A\,(k,\ \bar{\beta} x) = \bar{\gamma}\varphi'\varphi^{-1} x. && (7.49)\end{aligned}\right\}\ x \neq k.$$

Пусть $x \neq b_0$, тогда из (7.49) следует

$$\theta'\theta^{-1}\bar{\beta} x = \bar{\gamma}\varphi'\varphi^{-1} x, \quad x \neq b_0,\ x \neq k. \tag{7.50}$$

Из равенств (7.47) и (7.48) получаем

$$\alpha x \cdot \bar{\beta}\varphi x = c, \tag{7.51}$$

$$\alpha x \cdot b = \bar{\gamma}\varphi' x. \tag{7.52}$$

Равенство (7.51) имеет место при $\bar{\beta}\varphi x \neq k$ или $\varphi x \neq \bar{\beta}^{-1} k = b_0$, откуда $x \neq \varphi^{-1} b_0$. Равенство (7.52) верно при $\bar{\gamma}\varphi' x \neq k$ или $\varphi' x \neq \bar{\gamma}^{-1} k = c_0$, откуда $x \neq \varphi'^{-1} c_0$. Но условие $x \neq b_0$ из (7.49) эквивалентно условию $\bar{\gamma}\varphi'\varphi^{-1} x \neq k$, или $\varphi'\varphi^{-1} x \neq \gamma^{-1} k = c_0$, или $\varphi^{-1} x \neq \varphi'^{-1} c_0$. Таким образом, неравенство $x \neq \varphi'^{-1} c_0$ или $\varphi^{-1}\,(\varphi x) \neq \varphi'^{-1} c_0$ эквивалентно неравенству $\varphi x \neq b_0$ или $x \neq \varphi^{-1} b_0$.

Следовательно, равенства (7.51) и (7.52) верны при $x \neq \varphi^{-1}b_0$ (и $x \neq k$).

Из равенства (7.50) после замены $x = \varphi y$ получаем

$$\theta'\theta^{-1}\bar{\beta}\varphi y = \gamma\varphi' y, \tag{7.53}$$

которое должно быть верно при $\varphi y \neq b_0$, $\varphi y \neq k$, т. е. $y \neq k$ и $y \neq \varphi^{-1}b_0$. Итак, из (7.51) — (7.53) при $x \neq k$, $x \neq \varphi^{-1}b_0$ находим

$$\theta'\theta^{-1}\bar{\beta}\varphi x = \gamma\varphi' x = \alpha x \cdot b = c\,(\bar{\beta}\varphi x)^{-1}\,b.$$

Заменяем $\bar{\beta}\varphi x$ на z:

$$\theta'\theta^{-1}z = cz^{-1}b. \tag{7.54}$$

Проверим, для каких элементов z имеет место равенство (7.54). Прежде всего $z \neq k$, это же условие следует из $x \neq \varphi^{-1}b_0$. Далее, из $x = \varphi^{-1}\bar{\beta}z$ следует, что $z \neq b$, так как $\beta^{-1}b = k$, а $\varphi^{-1}k$ не имеет смысла. Поэтому (7.54) верно для любых $z \neq k$, $z \in Q$. Но из равенства $A\ (k, b) = c$ следует $c = \theta'\theta^{-1}b$. При $z = b$ в (7.54) получим то же самое. Из равенства (7.54) и определения подстановки θ' имеем

$$\theta^{-1}z \cdot \theta(\theta^{-1}z) = cz^{-1}b,\ \ \theta^{-1}z = cz^{-1}bz^{-1},$$

или

$$\theta^{-1}z = cb^{-1}\,(bz^{-1})^2. \tag{7.55}$$

Рассуждая, как при случае 1, мы заключаем, что

$$\varphi^{-1}z = c_0b_0^{-1}\ \ (b_0z^{-1})^2. \tag{7.56}$$

Из (7.55) находим

$$(bz^{-1})^2 = bc^{-1}\theta^{-1}z,\ \ z^{-2} = bc^{-1}\theta^{-1}\ \ (zb). \tag{7.57}$$

Аналогично из (7.56) получаем

$$z^{-2} = b_0c_0^{-1}\varphi^{-1}\ \ (zb_0). \tag{7.58}$$

Сравнивая (7.57) и (7.58), заключаем, что

$$\varphi^{-1}z = e\theta^{-1}\ \ (zd^{-1}),$$

где $e = c_0b_0^{-1}bc^{-1}$ и $d = b^{-1}b_0$. Итак,

$$\varphi^{-1} = L_e\theta^{-1}R_{d^{-1}} = L_e\theta^{-1}R_d^{-1},$$

следовательно,

$$\varphi = R_d\theta L_e^{-1}.$$

Отсюда следует, что φ и θ эквивалентны.

4) $b = k$, $a \neq k$, $c \neq k$. Рассуждаем, как в предыдущем случае.

5) a, b, $c \neq k$.

Тогда и a_0, b_0, $c_0 \neq k$. Посмотрим, какой вид принимают равенства (7.32) — (7.35).

а) $A(a, b) = c$.

Так как все элементы a, b, c отличны от k, то это не имеет места, так как из определения продолжения A следует $ab \neq c$ и

$$\theta a \neq b, \tag{7.59}$$

потому что $A(a, b) = A(a, \theta a) = k$.

$$\text{б)}\quad A(\bar{\alpha}x, b) = \bar{\gamma}\varphi' x,\ x \neq k. \tag{7.60}$$

Пусть $x = a_0$, тогда $A(k, b) = \bar{\gamma}\varphi' a_0$, следовательно,

$$\theta'\theta^{-1} b = \bar{\gamma}\varphi' a_0.$$

Пусть, далее, $b = \theta\bar{\alpha}x$, откуда следует $x = \bar{\alpha}^{-1}\theta^{-1}b$. Тогда из (7.60) вытекает $\bar{\gamma}\varphi^{-1}\bar{\alpha}^{-1}\theta^{-1}b = k$, откуда

$$\varphi'\bar{\alpha}^{-1}\theta^{-1} b = c_0. \tag{7.61}$$

Последнее равенство имеет смысл, так как $\bar{\alpha}^{-1}\theta^{-1}b \neq k$. В самом деле, из (7.59) следует $a \neq \theta^{-1}b$, $\bar{\alpha}k \neq \theta^{-1}b$, $k \neq \bar{\alpha}^{-1}\theta^{-1}b$. Следовательно, из (7.60) получаем

$$\bar{\alpha}x \cdot b = \bar{\gamma}\varphi' x \text{ при } x \neq k,\ x \neq a_0,\ x \neq \bar{\alpha}^{-1}\theta^{-1} b. \tag{7.62}$$

$$\text{в)}\quad A(a, \bar{\beta}x) = \bar{\gamma}\varphi'\varphi^{-1} x,\ x \neq k. \tag{7.63}$$

Если $x = b_0$, то

$$A(a, \bar{\beta}b_0) = A(a, k) = \bar{\gamma}\varphi'\varphi^{-1} b_0,$$

откуда получаем

$$\varphi'\varphi^{-1}\bar{\beta}^{-1}\theta a = c_0. \tag{7.64}$$

Последнее равенство имеет смысл, так как $\theta a \neq b$ и, следовательно, $\bar{\beta}^{-1}\theta a \neq \bar{\beta}^{-1}b = k$. Итак, из (7.63) находим

$$a \cdot \bar{\beta}x = \bar{\gamma}\varphi'\varphi^{-1} x \text{ при } x \neq k,\ x \neq b_0,\ x \neq \bar{\beta}^{-1}\theta a. \tag{7.65}$$

Сделаем в равенстве (7.65) замену $x = \varphi y$:

$$a \cdot \bar{\beta}\varphi y = \bar{\gamma}\varphi' y.$$

Последнее равенство имеет место при

$$\varphi y \neq k,\ \varphi y \neq b_0,\ \varphi y \neq \bar{\beta}^{-1}\theta a,$$

или

$$y \neq k,\ y \neq \varphi^{-1}b_0,\ y \neq \varphi^{-1}\bar{\beta}^{-1}\theta\alpha. \tag{7.66}$$

Итак,

$$a \cdot \bar{\beta}\varphi x = \bar{\gamma}\varphi' x \text{ при } x \neq k,\ x \neq \varphi^{-1} b_0,\ x \neq \varphi^{-1}\bar{\beta}^{-1}\theta a.$$

$$\text{г)}\quad A(\bar{\alpha}x, \bar{\beta}\varphi x) = c,\ x \neq k. \tag{7.67}$$

Если $x = a_0$, то

$$A(k,\ \bar{\beta}\varphi a_0) = c, \tag{7.68}$$

откуда следует, что $\bar{\beta}\varphi a_0 \neq k$, $\varphi a_0 = \bar{\beta}^{-1}k$ или

$$\varphi a_0 \neq b_0. \tag{7.69}$$

Из (7.68) получаем

$$\bar{\beta}\varphi a_0 = \theta'\theta^{-1} c. \tag{7.70}$$

Если $\varphi x = b_0$ или $x = \varphi^{-1}b_0$, то

$$A\ (\bar{\alpha}\varphi^{-1} b_0,\ k) = c,$$

откуда

$$\theta'\bar{\alpha}\varphi^{-1} b_0 = c. \tag{7.71}$$

Ввиду (7.69) равенства (7.70) и (7.71) имеют смысл. Итак, из (7.67) следует

$$\bar{\alpha}x\cdot\bar{\beta}\varphi x = c \text{ при } x \neq k,\ x \neq a_0,\ x \neq \varphi^{-1} b_0.$$

Заметим, что условия $x \neq \bar{\alpha}^{-1}\theta^{-1}b$ из (7.62) и $x \neq \varphi^{-1}\bar{\beta}^{-1}\theta a$ из (7.66) совпадают с условием $x \neq \varphi'^{-1}c_0$, так как ввиду (7.61) и (7.64) имеем

$$\bar{\alpha}^{-1}\theta^{-1} b = \varphi'^{-1} c_0, \quad \varphi^{-1}\bar{\beta}^{-1}\theta a = \varphi'^{-1} c_0.$$

Таким образом, мы находим равенства

$$\left.\begin{aligned} \bar{\alpha}x\cdot b = \bar{\gamma}\varphi' x, &\quad \text{при } x \neq a_0,\ x \neq \varphi'^{-1} c_0, \\ a\cdot\bar{\beta}\varphi x = \bar{\gamma}\varphi' x, &\quad \text{при } x \neq \varphi^{-1} b_0,\ x \neq \varphi'^{-1} c_0, \\ \bar{\alpha}x\cdot\bar{\beta}\varphi x = c, &\quad \text{при } x \neq a_0,\ x \neq \varphi^{-1} b_0, \end{aligned}\right\} \tag{7.72}$$

причем все они выполняются и при дополнительном условии $x \neq k$.

Исключаем $\bar{\alpha}x$ и $\bar{\beta}\varphi x$ из равенств (7.72)

$$\begin{gathered} (\bar{\gamma}\varphi' x\cdot b^{-1})\,(a^{-1}\cdot\bar{\gamma}\varphi' x) = c, \\ \bar{\gamma}\varphi' x\cdot c^{-1}\cdot\bar{\gamma}\varphi' x = c, \\ (\bar{\gamma}\varphi' x\cdot c^{-1})^2 = 1. \end{gathered} \tag{7.73}$$

Последнее равенство имеет место при $y \neq k$, $x \neq a_0$, $x \neq \varphi^{-1}b_0$, $x \neq \varphi'^{-1}c_0$.

Пусть

$$y = \bar{\gamma}\varphi' x\cdot c^{-1}. \tag{7.74}$$

Из $x \neq a_0$ следует $y \neq \bar{\gamma}\varphi^{-1}a_0\cdot c^{-1}$, из $x \neq \varphi^{-1}b_0$ вытекает $y \neq \bar{\gamma}\varphi'\varphi^{-1}b_0\cdot c^{-1}$ и из $x \neq \varphi'^{-1}c_0 \to y \neq \bar{\gamma}\varphi'(\varphi'^{-1}c_0) = \bar{\gamma}c_0 = k$. Кроме того, из (7.74) ясно, что $y \neq 1$, так как из $1 = \bar{\gamma}\varphi' x \cdot c^{-1}$ следует $\bar{\gamma}\varphi' x = c$, откуда $\varphi' x = k$, что не может быть. Итак, равенство (7.73) принимает вид $y^2 = 1$ и имеет место при $y \neq k$, $y \neq 1$, $y \neq \bar{\gamma}\varphi'\varphi^{-1}b_0$, $y \neq \bar{\gamma}\varphi'\varphi^{-1}b_0 \cdot c^{-1}$. Если перейти к группе $Q(\cdot)$, то первые два ограничения можно снять, следовательно, все элементы группы $Q(\cdot)$, за исключением, быть может, двух элементов, имеют порядок два. Применяя лемму 7.5, мы приходим к противоречию с условием теоремы: все элементы $Q(\cdot)$ имеют порядок два. Итак, случай 5) не может иметь места. Необходимость доказана.

2°) Достаточность. Пусть $Q(\cdot)$ — допустимая квазигруппа. Если полные подстановки θ и φ эквивалентны, то продолжения $A = (\cdot, \theta)$ и $B = (\cdot, \varphi)$ изотопны.

В самом деле, пусть θ и φ эквивалентны; это означает, что существует автотопия $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ квазигруппы $Q(\cdot)$ такая, что

$$\theta = \beta\varphi\alpha^{-1}, \tag{7.75}$$

откуда следует

$$\theta' = \gamma\varphi'\alpha^{-1}. \tag{7.76}$$

Действительно,

$$\theta' x = x\theta x = x \cdot \beta\varphi\alpha^{-1}x = \alpha(\alpha^{-1}x) \cdot \beta(\varphi\alpha^{-1}x) = \gamma(\alpha^{-1}x \cdot \varphi\alpha^{-1}x) = \\ = \gamma\varphi'\alpha^{-1}x.$$

Определим на множестве $Q' = Q \cup k$ три подстановки $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, полагая $\bar{\alpha}x = \alpha x$ для всех $x \in Q$ и $\bar{\alpha}k = k$; аналогично определяем $\bar{\beta}$ и $\bar{\gamma}$.

Докажем, что $B = A^{\bar{T}}$, где $\bar{T} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$. Для этого рассмотрим все возможные случаи.

1) $x \neq k$, $y \neq k$, $y \neq \varphi x$, тогда $B(x, y) = xy$. Если $y \neq \varphi x$, то из (7.75) следует, что $y \neq \beta^{-1}\theta\alpha x$, откуда $\beta y \neq \theta\alpha x$. Следовательно,

$$A^{\bar{T}}(x, y) = \bar{\gamma}^{-1}A(\bar{\alpha}x, \bar{\beta}y) = \bar{\gamma}^{-1}A(\alpha x, \beta y) = \gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y) = x \cdot y.$$

2) $x \neq k$, $y \neq k$, но $y = \varphi x$, тогда $B(x, y) = k$. С другой стороны,

$$A^{\bar{T}}(x, \varphi x) = \bar{\gamma}^{-1}A(\bar{\alpha}x, \bar{\beta}\varphi x) = \bar{\gamma}^{-1}A(\alpha x, \beta\varphi x) = \\ = \bar{\gamma}^{-1}A(\alpha x, \theta\alpha x) = \bar{\gamma}^{-1}k = k.$$

3) $y = k$, $x \neq k$, тогда $B(k, x) = \varphi' x$ и

$$A^{\bar{T}}(x, k) = \bar{\gamma}^{-1}A(\bar{\alpha}x, \bar{\beta}k) = \bar{\gamma}^{-1}A(\alpha x, k) = \bar{\gamma}^{-1}\theta'\alpha x = \gamma^{-1}\theta'\alpha x = \varphi' x,$$

ввиду (7.76).

4) $x = k$, $y \neq k$. В этом случае $B(k, y) = \varphi'\varphi^{-1}y$, а для $A^{\bar{T}}$ находим

$$A^{\bar{T}}(k, y) = \bar{\gamma}^{-1}A(\bar{\alpha}k, \bar{\beta}y) = \bar{\gamma}^{-1}A(k, \beta y) = \bar{\gamma}^{-1}\theta'\theta^{-1}\beta y = \gamma^{-1}\theta'\theta^{-1}\beta y.$$

Однако $\gamma^{-1}\theta'\theta^{-1}\beta = \gamma^{-1}(\gamma\varphi'\alpha^{-1})(\alpha\varphi^{-1}\beta^{-1})\beta = \varphi'\varphi^{-1}$. Таким образом, и в этом случае $A^{T}(k, y) = B(k, y)$.

5) $x = k$, $y = k$. Тогда $B(k, k) = k$ и $A^{T}(k, k) = \gamma^{-1}A(\alpha k, \beta k) = \gamma^{-1}A(k, k) = \gamma^{-1}k = k$. Итак, во всех возможных случаях $A^{T} = B$.

Теорема доказана.

Только что доказанная теорема дает возможность строить неизотопные квазигруппы, причем ввиду теоремы 7.6 эти квазигруппы не изотопны группам.

До сих пор мы изучали некоторые свойства продолжения групп. В заключение настоящего пункта вернемся к квазигруппам Штейнера и докажем следующее предложение:

Теорема 7.8. *Пусть $Q(\cdot)$ — квазигруппа Штейнера. Тогда продолжение $Q'(\circ)$, где $Q' = Q \cup k$, $(\circ) = (\cdot, 1)$, является лупой Штейнера.*

Действительно, квазигруппа Штейнера допустима, так как она идемпотентна, единичная подстановка будет полной для $Q(\cdot)$. Как было показано, $Q'(\circ)$, где $Q' = Q \cup k$ и $(\circ) = (\cdot, 1)$ (1 — единичная подстановка множества Q), является лупой с единицей k. Эта лупа коммутативна, что легко проверяется. Покажем, что

$$x \circ (x \circ y) = y. \tag{7.77}$$

Если $x = k$ и y — любой элемент из Q', то (7.77) выполняется, так как k — единица лупы $Q'(\circ)$.

Пусть $x \neq k$, $y = k$, тогда

$$x \circ (x \circ k) = x \circ x = k.$$

Наконец, если x, y, k попарно не равны, имеем

$$x \circ (x \circ y) = x \circ (xy) = x \cdot xy = y.$$

Итак, $Q'(\circ)$ — лупа Штейнера.

Примечания

[1] Понятие TS-квазигруппы введено Браком в [24] и детально изучено им в [25]. Результаты пунктов 3° и 4° взяты в основном из этих двух работ Брака.

[2] Тройки Штейнера изучаются в комбинаторном анализе (см., например, М. Холл [86], а также указанную там литературу). Связь между тройками Штейнера и квазигруппами Штейнера изучалась Браком [33] и др.

[3] Понятие полной подстановки введено Манном [49] в связи с изучением ортогональных квазигрупп (см. определение 5).

[4] Необходимые и достаточные условия допустимости групп найдены Холлом и Пэйджем [87], а также и Пэйджем [62]. В частности, доказано, что все симметрические группы $\mathfrak{S}_n$, $n > 3$ допустимы. Бэйтманом [37] показано, что все бесконечные квазигруппы также допустимы.

[5] Если взять два латинских квадрата (см. примечание 1 гл. I), соответствующих конечным ортогональным квазигруппам $Q(A)$ и $Q(B)$, и наложить один на другой, то получим квадрат той же размерности, в каждой клетке которого находятся пары элементов (a, b), $a, b \in Q$, причем все n^2 пар различны (n — число элементов из Q). Например:

A	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

B	1	2	3
1	2	1	3
2	1	3	2
3	3	2	1

	1	2	3
1	12	21	33
2	31	13	22
3	23	32	11

Квадрат, который получается таким способом, называется латинским квадратом, или квадратом Эйлера. Таким образом, ортогональность двух квазигрупп $Q(A)$ и $Q(B)$ порядка n эквивалентна существованию квадрата Эйлера порядка n. От Эйлера исходит первая задача этого направления: построить квадраты Эйлера различных порядков. В 1779 г. Эйлер высказал предположение, что квадратов Эйлера порядка $n = 4k + 2$ не существует (в частности, и порядка 6). Лишь в 1901 г. Тарри доказал, что гипотеза Эйлера для $n = 6$ верна (для $n = 2$ она тривиальна). С тех пор гипотезой Эйлера занимались многие. В 1959 г. Паркер [60] доказал, что существует квадрат Эйлера порядка 10. Другие детали о квадратах Эйлера приводятся Холлом [86], а также в цитируемой им литературе. Отметим также статьи Стейна [74], Сада [68], автора [19]. В частности, в этих статьях рассматриваются квазигруппы с тождеством $x \cdot xy = yx$. Легко заметить, что $Q(\cdot)$ и $Q(*)$, где $x*y = yx$, ортогональны. Такие квазигруппы рассмотрены и в [59].

[6] Продолжения квазигрупп впервые рассматривались Браком в [24], но только для случая, когда $Q(\cdot)$ — идемпотентная квазигруппа (см. определение $Q'(\circ)$ из (7.22)), там же доказана теорема 7.8. Продолжение квазигрупп применялось также Осборном в [58].

Глава VIII

ДИСТРИБУТИВНЫЕ КВАЗИГРУППЫ

1°. *Некоторые элементарные свойства дистрибутивных квазигрупп.*

Определение 1. Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется *дистрибутивной*[1], если в ней выполняются тождества

$$x\cdot yz = xy\cdot xz, \tag{8.1}$$

$$yz\cdot x = yx\cdot zx. \tag{8.2}$$

Тождества (8.1) и (8.2) называются соответственно *левым и правым дистрибутивными законами.*

Пример дистрибутивной квазигруппы. Пусть $Q(+, \cdot)$ — ассоциативное тело. Рассмотрим следующую операцию в $Q(+, \cdot)$: $A(x, y) = (1 - a)x + ay$, $a \neq 0,1$. Тогда проверкой можно убедиться в том, что $Q(A)$ — дистрибутивная квазигруппа. Другие примеры будут даны ниже.

Рассмотрим несколько простых свойств дистрибутивной квазигруппы.

а) *Дистрибутивная квазигруппа $Q(\cdot)$ идемпотентна*, т. е.

$$x^2 = x$$

для любых $x \in Q$. Действительно, если положим в (8.1) $y = x$, то получаем $x\cdot xz = xx\cdot xz$, откуда следует $x = xx = x^2$.

б) *Ассоциированная группа G дистрибутивной квазигруппы $Q(\cdot)$ является подгруппой группы автоморфизмов квазигруппы $Q(\cdot)$*[2].

Достаточно доказать это предложение для трансляции R_a и L_a, a — любой элемент из Q, так как R_a и L_a — образующие группы G. Тождество левой дистрибутивности переписывается следующим образом:

$$L_x(yz) = L_x y\cdot L_x z,$$

т. е. L_x — автоморфизм квазигруппы $Q(\cdot)$.

в) *Трансляции* L_x и R_x *коммутируют для любого* x:

$$R_x L_x = L_x R_x. \tag{8.3}$$

Действительно,

$$R_x L_x y = (xy)\, x = (xx)(yx) = x\,(yx) = L_x R_x y.$$

г) *Пусть* $(\cdot)^{-1} = (\diagdown)$ — *правая обратная операция для* $(\cdot)$ *и* ${}^{-1}(\cdot) = (\diagup)$ — *левая обратная операция*, $Q\,(\cdot)$ — *дистрибутивная квазигруппа*. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x\,(y \diagdown z) &= (xy) \diagdown (xz), \\ (y \diagup z)\, x &= (yx) \diagup (zx), \\ x \diagdown (yz) &= (x \diagdown y)(x \diagdown z), \\ (yz) \diagup x &= (y \diagup x)(z \diagup x) \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

для любых $x,\ y,\ z \in Q$.

Для доказательства первого из равенств (8.4) рассмотрим следующее равенство:

$$x\,(y \diagdown z) = (xy) \diagdown (xz'). \tag{8.5}$$

(Такой элемент z' существует ввиду обратимости $(\cdot)$.) Пользуясь определением операции $(\diagdown)$, имеем

$$x\,(x \diagdown y) = y$$

для любых $x,\ y \in Q$. Тогда получаем из (8.5)

$$(xy)\,[x\,(y \diagdown z)] = xz';$$
$$x\,[y\,(y \diagdown z)] = xz',$$
$$xz = xz',$$

откуда следует, что $z' = z$, и, таким образом, первое из равенств (8.4) доказано.

Аналогично доказываются остальные равенства (8.4).

д) *Любой смежный класс по подквазигруппе* $H\,(\cdot)$ *дистрибутивной квазигруппы* $Q\,(\cdot)$ *тоже является подквазигруппой*[3].

Рассмотрим смежный класс aH и пусть $a_1,\ a_2 \in aH$. Тогда существуют такие элементы $h_1,\ h_2 \in H$, что $a_1 = ah_1,\ \ a_2 = ah_2$, поэтому $a_1\, a_2 = ah_1 \cdot ah_2 = a\,(h_1\, h_2) \in aH$. Покажем теперь, что решение уравнения $a_1 x = a_2$ принадлежит смежному классу aH. Элемент x можно представить в виде ax'. Тогда $a_2 = ah_2 = a_1 x = ah_1 ax' = a\,(h_1 x')$, откуда $h_2 = h_1 x'$. Так как $H\,(\cdot)$ — подквазигруппа, то $x' \in H$, следовательно, $x = ax' \in aH$. Аналогично доказывается, что решение уравнения $ya_1 = a_2$ также принадлежит aH.

2°. *Связь с коммутативными лупами Муфанг.* Рассмотрим следующий главный изотоп дистрибутивной квазигруппы $Q\,(A)$:

$$x \cdot y = A\,(R_k^{-1} x,\ L_k^{-1} y). \tag{8.6}$$

Лупа $Q(\cdot)$ имеет единицу $A(k, k) = k = 1$. Назовем лупу $Q(\cdot)$ *соответствующей дистрибутивной квазигруппе* $Q(A)$ и обозначим ее через $Q[A]_k$: $(\cdot) = [A]_k$.

Зафиксируем элемент k. В дальнейшем будем писать сокращенно

$$R_k = R, \ L_k = L.$$

Имеет место следующая

Лемма 8.1. *Для любых* $x, y, z \in Q$ *имеют место равенства*

$$R(x\cdot y) = Rx\cdot Ry, \ L(xy) = Lx\cdot Ly,$$

$$x(yz) = (Rx\cdot y)\ (Lx\cdot z), \tag{8.7}$$

$$(yz)\ x = (yRx)\ (zLx). \tag{8.8}$$

Доказательство. 1. Используя формулу (8.6), а также коммутативность R и L, получаем

$$R\ (xy) = RA\ (Rx^{-1},\ L^{-1}y) = A(RR^{-1}x,\ RL^{-1}y) =$$

$$= A\ (R^{-1}Rx,\ L^{-1}Ry) = Rx\cdot Ry.$$

Таким образом, R — автоморфизм лупы $Q(\cdot)$. Аналогично доказывается, что L — автоморфизм лупы $Q(\cdot)$.

2. Из равенства (8.6) следует

$$A(x, y) = Rx\cdot Ly. \tag{8.9}$$

Отсюда и из левого дистрибутивного закона для операции A получаем

$$Rx\cdot L\ (Ry\cdot Lz) = R\ (Rx\cdot Ly)\ L\ (Rx\cdot Lz),$$

$$Rx\ (LRy\cdot L^2z) = (R^2x\cdot RLy)\ (LRx\cdot L^2z).$$

В последнем равенстве сделаем замену: $x \to R^{-1}x$, $y \to L^{-1}R^{-1}y$, $z \to L^{-2}z$ и, вспоминая, что $LR = RL$, выводим

$$x\ (yz) = (Rx\cdot y)\ (Lx\cdot z).$$

Аналогично доказывается и равенство (8.8).

Дистрибутивные квазигруппы очень тесно связаны с лупами Муфанг. Для них верна следующая основная

Теорема 8.1. *Каждая дистрибутивная квазигруппа изотопна некоторой коммутативной лупе Муфанг.*

Доказательство теоремы 8.1 разобьем на три части.

1. *Лупа* $Q(\cdot)$, *соответствующая дистрибутивной квазигруппе* $Q(A)$, *является IP-лупой.*

Для доказательства утверждения 1 рассмотрим левый дистрибутивный закон для операции A и преобразуем его следующим образом:

$$A\ [A\ (k,\ x),\ A\ (k,\ y)] = A\ [k,\ A\ (x,\ y)],$$

$$A\ \{A[k,\ A\ (k,\ y)],\ A\ [x,\ A\ (k,\ y)]\} = A\ [k,\ A\ (x,\ y)],$$

$$^{-1}A\{A\ [k,\ A\ (x,\ y)],\ A\ [A\ (x,\ k),\ A\ (x,\ y)]\} = A[k,\ A\ (\kappa,\ y)].$$

Применяя к левой части последнего равенства второе из равенства (8.4), получаем

$$A\{^{-1}A\ [k,\ A\ (x,\ k)],\ A\ (x,\ y)\} = A\ [k,\ A\ (k,\ y)].$$

Отображение $x \to {}^{-1}A\ (k, x)$ будет подстановкой. Обозначим ее через L_0:

$$L_0x = {}^{-1}A\ (k,\ x). \tag{8.10}$$

Тогда равенство (8.9) можно переписать следующим образом:

$$A\ [L_0Rx,\ A\ (x,\ y)] = L^2y.$$

Переходим к соответствующей лупе $Q\ (\cdot)$ с помощью формулы (8.9). Из последнего равенства получаем

$$RL_0Rx \cdot L(Rx \cdot Ly) = L^2y,\ RL_0Rx\ (LRx \cdot L^2y) = L^2y.$$

Заменив x через $L^{-1}R^{-1}x$ и y через $L^{-2}y$, получим

$$RL_0RL^{-1}R^{-1}x \cdot (xy) = y,$$

или

$$RL_0L^{-1}x \cdot (xy) = y. \tag{8.11}$$

Введем обозначение

$$RL_0L^{-1} = I_l.$$

Равенство (8.11) примет тогда вид

$$I_lx \cdot (xy) = y. \tag{8.12}$$

Аналогично доказывается, что существует подстановка I_r:

$$I_r = LR_0R^{-1},$$

где $R_0x = A^{-1}\ (x,\ k)$ такая, что имеет место равенство

$$(yx)\,I_rx = y. \tag{8.13}$$

Из равенств (8.12) и (8.13) вытекает, что $Q\ (\cdot)$ является IP-лупой (см. гл. V, п. 1°), и в силу свойства 5) IP-луп мы должны иметь

$$I_l = I_r = I,$$

где $Ix = x^{-1}$, причем $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$ (как мы знаем, $k = 1$).

2. *Лупа $Q\ (\cdot)$, соответствующая дистрибутивной квазигруппе $Q\ (A)$, является лупой Муфанг.*

Для доказательства нашего утверждения воспользуемся равенством (8.7).

$$a\ (xy) = (Ra\cdot x)\ (La\cdot y). \tag{8.14}$$

Левую трансляцию $x \to ax$ в лупе $Q\ (\cdot)$ обозначим через $\widetilde{L}_a$, тогда

$$ax = \widetilde{L}_a x.$$

Из равенства (8.14) следует

$$\widetilde{L}_a (xy) = \widetilde{L}_{Ra} x \cdot \widetilde{L}_{La} y,$$

т. е. $(\widetilde{L}_{Ra}, \widetilde{L}_{La}, \widetilde{L}_a)$ является автотопией IP-лупы $Q\ (\cdot)$. Но тогда элемент $a' = \widetilde{L}_a 1$, в силу следствия леммы 5.5 будет элементом Муфанг IP-лупы $Q\ (\cdot)$, т. е. a' является таким элементом, что для него выполняется равенство

$$a'(y\cdot a'z) = (a'y\cdot a')z \tag{8.15}$$

для любых $y, z \in Q$ (см. гл. V, п. 1°, первое тождество Муфанг (6.1)).

Но элемент $a' = \widetilde{L}_a 1 = a1 = a$ может быть любым элементом IP-лупы $Q\ (\cdot)$, т. е. на самом деле лупа $Q\ (\cdot)$ ввиду равенства (8.15) является лупой Муфанг.

3. *Лупа $Q\ (\cdot)$ коммутативна.*

Положив в равенстве (8.7) $y = 1$, получим

$$xz = Rx\ (Lxz). \tag{8.16}$$

Однако

$$x = RxLx$$

ввиду идемпотентности дистрибутивной квазигруппы $Q\ (A)$ и равенства (8.9). Следовательно, равенство (8.16) принимает вид

$$(RxLx)\ z = Rx(Lxz).$$

Последнее равенство показывает, что для тройки элементов Rx, Lx, z лупы Муфанг $Q\ (\cdot)$ выполняется ассоциативный закон. Согласно теореме Муфанг (теорема 6.5), лупа, порожденная элементами Rx, Lx, z, где x, z — любые элементы, будет ассоциативной, т. е. будет группой. Отсюда, в частности, получаем

$$Rx\ (zLx) = (Rx\cdot z)\ Lx.$$

Преобразуем обе части равенства (8.16) с помощью (8.6) и (8.7)

$$Rx(zLx) = (1\cdot Rx)\quad (zLx) = (1\cdot z)\, x = zx,$$

$$(Rx\cdot z)\ Lx = (Rx\cdot z)\ (Lx\cdot 1) = x\,(z1) = xz.$$

Таким образом,

$$xz = zx$$

для любых $x, z \in Q$. Теорема доказана полностью.

Следствие. *Любая лупа, изотопная дистрибутивной квазигруппе $Q(A)$, является лупой Муфанг $Q(\cdot)$, в которой отображение $x \to x^3$ является центральным эндоморфизмом.*

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 6.1, леммы 6.7 и теоремы 6.6.

Из теоремы 8.1 вытекает следующая

Теорема 8.2. *Пусть A — дистрибутивная операция. Тогда все обратные операции A^{-1}, ${}^{-1}A$, ${}^{-1}(A^{-1})$, $({}^{-1}A)^{-1}$, A^* также дистрибутивны, причем соответствующие им коммутативные лупы Муфанг (относительно того же элемента $k = 1$) совпадают для всех шести операций.*

Доказательство. 1. Докажем утверждение теоремы сначала для операции A^*.

Дистрибутивные законы легко проверяются:

$$A^*[x, A^*(y, z)] = A[A(z, y), x] = A[A(z, x), A(y, x)] = \\ = A^*[A^*(x, y), A^*(x, z)].$$

Аналогично проверяется правый дистрибутивный закон.

Покажем теперь, что $[A^*]_k = [A]_k$. Согласно определению, мы должны иметь

$$[A^*]_k(x, y) = A^*(R_1^{*-1}x, L_k^{*-1}y), \tag{8.17}$$

где $R_k^*x = A^*(x, k)$, $L_k^*x = A^*(k, x)$. Но так как $A^*(x, y) = A(y, x)$, то $R_k^*x = A^*(x, k) = A(k, x) = L_kx$, т. е. $R_k^* = L_k$. Аналогично можно показать, что $L_k^* = R_k$. Таким образом, из равенства (8.17) получаем

$$[A^*]_k(x, y) = A^*(L_k^{-1}x, R_k^{-1}y) = A(R_k^{-1}y, L_k^{-1}x) = [A]_k(y, x).$$

Но по теореме 8.1 $[A]_k$ — коммутативная лупа Муфанг; следовательно, $[A]_k(x, y) = [A]_k(y, x)$, откуда

$$[A^*]_k = [A]_k.$$

2. Рассмотрим теперь операцию A^{-1}. Левый дистрибутивный закон для A^{-1} доказывается так же, как и равенства (8.4). Выполнение правого дистрибутивного закона мы будем доказывать, используя теорему 8.1.

Пусть $A^{-1}(x, y) = z$. Тогда $A(x, z) = y$. Ввиду равенства (8.9) получаем $Rx \cdot Lz = y$. Отсюда можно определить z:

$$Lz = (Rx)^{-1}y, \quad z = L^{-1}(Rx)^{-1}L^{-1}y.$$

Но $(Rx)^{-1} = Rx^{-1}$, так как R — автоморфизм лупы $Q\ (\cdot)$; поэтому получаем равенство

$$z = L^{-1}Rx^{-1}L^{-1}y,$$

или

$$A^{-1}\ (x,\ y) = L^{-1}Rx^{-1}L^{-1}y.$$

Зная выражение для A^{-1}, можно легко доказать следующее соотношение:

$$A^{-1}[A(y,z),\ x] = A\ [A^{-1}\ (y,\ x),\ A^{-1}\ (z,\ x)]. \tag{8.18}$$

Имеем

$$A^{-1}\ [A(y,\ z),\ x] = L^{-1}R\ \ (Ry\cdot Lz)^{-1}\cdot L^{-1}x = L^{-1}R\ \ (Lz^{-1}\cdot Ry^{-1})\cdot$$
$$\cdot L^{-1}x = (Rz^{-1}\cdot L^{-1}R^2y^{-1})\ L^{-1}x = (L^{-1}R^2y^{-1}\ \ Rz^{-1})\cdot L^{-1}x =$$
$$= (L^{-1}R^2y^{-1}\cdot RL^{-1}x)\ (Rz^{-1}\cdot LL^{-1}x) = R\ (L^{-1}Ry^{-1}\cdot L^{-1}x)\cdot L\ (L^{-1}Rz^{-1}\cdot$$
$$\cdot L^{-1}x) = RA^{-1}(y,\ x)\cdot LA^{-1}\ (z,\ x) = A\ \ [A^{-1}\ (y,\ x),\ A^{-1}\ (z,\ x)].$$

Так как $Q\ (A^{-1})$ — квазигруппа, то должен существовать такой элемент z', что выполняется следующее равенство:

$$A^{-1}\ [A^{-1}\ (y,\ x),\ A^{-1}\ (z,\ x)] = A^{-1}\ [A^{-1}(y,\ z'),\ x].$$

Отсюда следует

$$A\{A^{-1}\ (y,\ x),\ A^{-1}\ [A^{-1}\ (y,\ z'),\ x]\} = A^{-1}\ (z,\ x).$$

Ввиду (8.18) получаем из последнего равенства

$$A^{-1}\ \{A\ \ [y,\ A^{-1}\ (y,\ z')],\ x\} = A^{-}\ \ (z,\ x),$$
$$A^{-1}\ \ (z',\ \ x) = A^{-1}\ \ (z,\ \ x),$$

т. е.

$$z' = z.$$

Таким образом, $Q\ (A^{-1})$ — дистрибутивная операция.

Найдем $[A^{-1}]_k$. Согласно определению лупы $[A^{-1}]_k$, имеем

$$[A^{-1}]_k\,(x,\ y) = A^{-1}\,(R_k'^{-1}x,\ L_k'^{-1}y), \tag{8.19}$$

где

$$R_k'x = A^{-1}(x,\ k),\quad L_k'x = A^{-1}(k,\ x).$$

Найдем $R_k'^{-1}$. Из равенства $R_k'x = A^{-1}(x,k)$ следует $A\,(x, R_k'x) = k$, откуда, заменяя x через $R_k'^{-1}x$, получаем $A\,(R_k'^{-1}x,\ x) = k$, или $R_k'^{-1}x = {}^{-1}A\,(k,\ x)$, т. е. ввиду равенства (8.10) находим

$$R_k'^{-1} = L_0.$$

Из равенства $L_k'x = A^{-1}(k,\ x)$ имеем $A\ (k,\ L_k'x) = x$, или $LL_k' = \mathbf{1}$, т. е. $L_k'^{-1} = L$. Подставляя найденные значения для $R_k'^{-1}$ и $L_k'^{-1}$

в равенство (8.19), получаем

$$[A^{-1}]_k (x, y) = A^{-1} (L_0 x, Ly),$$

откуда

$$A\ [L_0 x,\ [A^{-1}]_k\ (x,\ y)] = Ly,$$

или

$$RL_0 x \cdot L\ [A^{-1}]_k\ (x,\ y) = Ly,$$

$$L^{-1}RL_0\ x \cdot [A^{-1}]_k\ (x,\ y) = y. \tag{8.20}$$

Но $RL_0L^{-1}x = I_l x = Ix = x^{-1}$, поэтому для $L^{-1}RL_0$ получаем выражение

$$L^{-1}RL_0 x = L^{-1}RL_0L^{-1}Lx = L^{-1}ILx = L^{-1}\ (Lx)^{-1} = L^{-1}Lx^{-1} = x^{-1}.$$

Тогда равенство (8.20) примет вид

$$x^{-1} \cdot\ [A^{-1}]_k\ (x,\ y) = y,$$

откуда

$$[A^{-1}]_k\ (x,\ y) = xy,$$

т. е.

$$[A^{-1}]_k = [A]_k.$$

3. Для случая остальных операций рассуждаем следующим образом. Легко проверить, что

$${}^{-1}A = [(A^*)^{-1}]^*.$$

Так как операция A^* дистрибутивна, то по доказанному выше и операция $(A^*)^{-1}$ дистрибутивна, а поэтому и операция $[(A^*)^{-1}]^*$ также дистрибутивна. Кроме того, имеем

$$[{}^{-1}A]_k = [[(A^*)^{-1}]^*]_k = [(A^*)^{-1}]_k = [A^*]_k = [A]_k.$$

Таким образом, утверждение теоремы верно и для ${}^{-1}A$.

4. Так как A^{-1} — дистрибутивная операция, то, согласно предыдущему пункту, и операция ${}^{-1}(A^{-1})$ будет дистрибутивной, причем

$$[{}^{-1}(A^{-1})]_k = [A^{-1}]_k = [A]_k.$$

Аналогично доказывается теорема для ${}^{-1}(A^{-1})$.

З а м е ч а н и е. В предыдущих утверждениях мы зафиксировали некоторый элемент k и показали, что $[A]_k$ является коммутативной лупой Муфанг. Если возьмем другой элемент — l, то получим другую коммутативную лупу Муфанг $[A]_l$.

Однако лупы $[A]_k$ и $[A]_l$ изотопны (даже главноизотопны) дистрибутивной квазигруппе A, поэтому $[A]_k$ и $[A]_l$ изотопны между собой. Так как $[A]_k$, $[A]_l$ — коммутативные лупы Муфанг, то в силу теоремы 6.7 *лупы* $[A]_k$ *и* $[A]_l$ *изоморфны.*

3°. *Средние ядра дистрибутивных квазигрупп.* Возникает вопрос: что можно сказать о типе дистрибутивной квазигруппы? Чтобы ответить на этот вопрос, докажем одно общее утверждение: *если некоторая квазигруппа* $Q\ (\cdot)$ *идемпотентна, то* $\mathcal{R} = \mathcal{L} = \{1\}$, где $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ — группы правых, соответственно левых регулярных подстановок квазигруппы $Q\ (\cdot)$.

Действительно, пусть $\lambda \in \mathcal{L}$, тогда $\lambda\ (aa) = \lambda a$ или $\lambda a \cdot a = \lambda a$, откуда в силу идемпотентности следует $\lambda a = a$, т. е. $\lambda = 1$. Аналогично доказывается, что $\mathcal{R} = \{1\}$.

Таким образом, тип дистрибутивной квазигруппы будет $(1, \Phi, 1)$, где Φ — группа средних регулярных подстановок[4].

В этом пункте изучим группу Φ дистрибутивной квазигруппы и среднее ядро $N_m\ (k) = \Phi k$, где k — любой элемент из Q.

Выше (см. гл. II, п. 5°) было дано определение Φ-транзитивной квазигруппы: квазигруппа $Q\ (\cdot)$ называется Φ-транзитивной, если группа Φ транзитивна на Q. Дадим следующее

Определение 2. Дистрибутивная квазигруппа называется *транзитивной*, если она Φ-транзитивна.

Следующая теорема характеризует транзитивные дистрибутивные квазигруппы[5].

Теорема 8.3. *Дистрибутивная квазигруппа* $Q\ (A)$ *транзитивна тогда и только тогда, когда она медиальна и идемпотентна.*

Доказательство. Согласно теореме 2.9, транзитивная квазигруппа изотопна группе. Таким образом, коммутативная лупа Муфанг $Q\ (\cdot)$, соответствующая транзитивной дистрибутивной квазигруппе, должна быть абелевой группой. Тогда ввиду (8.9) имеет место равенство

$$A(x, y) = Rx \cdot Ly.$$

Как было показано в п. 1° настоящей главы, трансляции R и L дистрибутивной квазигруппы $Q\ (A)$ являются автоморфизмами для $Q(\cdot)$, кроме того, они коммутируют: $RL = LR$. Итак,

$$A\ [A\ (x, y), A\ (u, v)] = A\ (Rx \cdot Ly,\ Ru \cdot Lv) = R\ (Rx \cdot Ly) \cdot L\ (Ru \cdot Lv) = (R^2x \cdot RLy) \cdot (LRu \cdot L^2v) = (R^2x \cdot LRu)\ (RLy \cdot L^2v) = RA \cdot (x, u) \cdot LA\ (y, v) = A\ [A\ (x, u), A\ (y, v)],$$

т. е. $Q\ (A)$ медиальна и, очевидно, идемпотентна.

Обратно, пусть A медиальна и идемпотентна. Тогда A дистрибутивна

$$A\ [x, A\ (y, z)] = A\ [A\ (x, x), A\ (y, z)] = A\ [A\ (x, y), A\ (x, z)].$$

Также проверяется правый закон дистрибутивности.

Ввиду леммы 2.6 квазигруппа $Q\ (A)$ транзитивна.

Из теоремы 8.3 следует, что вопрос о существовании нетранзитивных дистрибутивных квазигрупп эквивалентен вопросу о существовании немедиальных дистрибутивных квазигрупп.

Лемма 8.2. *Среднее ядро Φk является нормальной подквазигруппой дистрибутивной квазигруппы Q (A).*

В самом деле, пусть

$$A\ (x,\ y) = Rx \cdot Ly.$$

Тогда ввиду равенства (2.22) имеем

$$\Phi_A = R^{-1}\Phi R,$$

где Φ_A и Φ — группы средних регулярных подстановок квазигруппы Q (A) и лупы Q $(\cdot)$ соответственно.

Найдем среднее ядро дистрибутивной квазигруппы Q (A) относительно элемента $k = 1$, т. е. найдем Φ_A 1:

$$\Phi_A 1 = R^{-1}\Phi R 1. \qquad (8.21)$$

Но $R1 = A\ (1,\ 1) = 1$ и $\Phi 1 = N$ — ядро коммутативной лупы Муфанг Q $(\cdot)$. В силу теоремы 6.3 среднее ядро N_m совпадает с ядром N лупы Q $(\cdot)$. Далее, ядро лупы Q $(\cdot)$ является нормальным (см. лемму 6.2). Заметим, что *ядра любой лупы — характеристические подлупы*, т. е. они инвариантны относительно любого автоморфизма лупы, это утверждение легко проверить. В частности, N инвариантно относительно R^{-1}, поэтому из (84) следует

$$\Phi_A 1 = N.$$

Применяя следствие 1 леммы 4.2, мы заключаем, что Φ_A 1 — нормальная подквазигруппа в Q (A).

Докажем теперь ряд свойств, связанных с ядром коммутативной лупы Муфанг Q $(\cdot)$, соответствующей дистрибутивной квазигруппе Q (A).

Лемма 8.3. *Решение уравнения $Ra = La \cdot x$ принадлежит ядру N лупы Муфанг Q $(\cdot)$.*

В самом деле, в коммутативной лупе Муфанг Q $(\cdot)$ выполняется тождество

$$x^2\ (yz) = xy \cdot xz \qquad (8.22)$$

для всех $x,\ y, z \in Q$. Применяя (8.7) к тождеству (8.22), выводим

$$x^2 \cdot yz = (Rx^2 \cdot y)\ \ (Lx^2 \cdot z),$$

откуда, сравнивая правые части последних двух равенств, получаем

$$xy \cdot xz = (Rx^2 \cdot y)\ \ (Lx^2 \cdot z). \qquad (8.23)$$

После замены $y \to x^{-1}y$ и $z \to Lx^{-2}z$ равенство (8.23) превращается в равенство

$$[Rx^2\ (x^{-1}y)]\ z = y\ [x\ (Lx^{-2}z)]. \qquad (8.24)$$

Введем обозначения

$$Rx^2(x^{-1}y) = \varphi_x y, \quad x(Lx^{-2}z) = \varphi_x^* z.$$

Тогда равенство (8.24) примет вид

$$\varphi_x y \cdot z = y \cdot \varphi_x^* z,$$

т. е. φ_x — средняя регулярная подстановка лупы $Q(\cdot)$ и φ_x^* — сопряженная подстановка для подстановки φ_x. Следовательно, элемент $\varphi_x 1$ принадлежит ядру лупы $Q(\cdot)$ (см. гл. II, п. 2°). Обозначим этот элемент через πx:

$$\pi x = \varphi_x 1 = Rx^2 \ (x^{-1}1),$$

$$\pi x = Rx^2 \cdot x^{-1}. \tag{8.25}$$

Так как $\varphi_x^* 1 = \varphi_x 1$, то найдем еще одно выражение для πx:

$$\pi x = x \cdot Lx^{-2}.$$

Покажем, что решение уравнения $Ra = La \cdot x$ равно πa.

В самом деле, из равенства (8.25) вытекает

$$Ra^2 = a \cdot \pi a, \tag{8.26}$$

откуда

$$Ra^2 \cdot La = (a \cdot \pi a)\, La, \ (Ra \cdot Ra)\, La = (a \cdot La) \cdot \pi a,$$
$$Ra\ (Ra \cdot La) = (a \cdot La)\ \pi a, \ Ra \cdot a = a\ (La \cdot \pi a).$$

Следовательно,

$$Ra = La \cdot \pi a \tag{8.27}$$

Следствие 1. π — *эндоморфизм лупы* $Q(\cdot)$. Действительно,

$$\pi(xy) \cdot L(xy) = R\ (x \cdot y) = Rx \cdot Ry,$$

откуда

$$\pi(xy)\ (LxLy) = (Lx\pi x)\ (Ly \cdot \pi y) = [(Lx\pi x)\ Ly]\pi y = [(LxLy)\,\pi x]\pi y =$$
$$= (Lx \cdot Ly)\ (\pi x \cdot \pi y),$$

следовательно,

$$\pi(xy) = \pi x \cdot \pi y.$$

Следствие 2. *Для любых x, y имеет место равенство*

$$A\ (x,\ y) = A\ (y,\ x)\ \pi\ (xy^{-1}).$$

В самом деле,

$$A\ (x,\ y) = Rx \cdot Ly = (Lx \cdot \pi x)\ [Ry \cdot (\pi y)^{-1}].$$

Но согласно следствию, 1 π — эндоморфизм лупы $Q(\cdot)$, поэтому $(\pi y)^{-1} = \pi y^{-1}$ и, следовательно,

$$A\ (x,\ y) = (Lx \cdot \pi x)\ (Ry \cdot \pi y^{-1}) = (LxRy)\ \pi x \pi y^{-1} = (RyLx)\ \pi(xy^{-1}),$$

откуда

$$A\ (x,\ y) = A\ (y,\ x) \cdot \pi(xy^{-1}).$$

С л е д с т в и е 3. *Имеет место равенство*

$$A\ (x,\ y) = x^{-1}y^2\ \rho(xy^{-1}),$$

где ρ — *некоторый центральный эндоморфизм коммутативной лупы Муфанг* $Q\ (\cdot)$.

В самом деле, умножая обе части равенства (8.26) на Rx, получаем

$$Rx^2 \cdot Rx = x \cdot \pi x \cdot Rx,\quad Rx^3 = x \cdot \pi x \cdot Rx,$$

откуда

$$Rx = x^{-1} \cdot Rx^3 \cdot \pi x^{-1}. \tag{8.28}$$

В силу леммы 6.7 отображение $x \to x^3$ является центральным эндоморфизмом коммутативной лупы Муфанг ($x^3 \in N$), поэтому отображение ρ, определяемое равенством

$$\rho x = Rx^3 \pi x^{-1},$$

будет также центральным эндоморфизмом

$$\rho\,(xy) = R\,(xy)^3\ \pi(xy)^{-1} = Rx^3Ry^3\pi x^{-1}\pi y^{-1} = Rx^3\pi x^{-1} \cdot Ry^3\pi y^{-1} = \\ = \rho x \cdot \rho y.$$

Таким образом (8.28) принимает вид

$$Rx = x^{-1}\ \rho x. \tag{8.29}$$

Пользуясь равенством (8.29), найдем Lx:

$$Lx = Rx\pi x^{-1} = x^{-1}\rho x \cdot \pi x^{-1}.$$

Теперь мы можем найти $A\ (x,\ y)$:

$$A\ (x,y) = Rx \cdot Ly = x^{-1}\rho x \cdot y^{-1}\rho y \cdot \pi y^{-1} = x^{-1}y^{-1}\rho x\rho y\pi y^{-1}. \tag{8.30}$$

В частности, при $x = y$ мы получаем из предыдущего равенства

$$y = A\ (y,\ y) = y^{-2}\rho y^2\pi y^{-1},$$

откуда

$$y^3\rho y^{-2} = \pi y^{-1}.$$

Подставляя в равенство (8.30) значение для πy^{-1}, получаем

$$A\ (x,\ y) = x^{-1}y^{-1} \cdot \rho x \cdot \rho y \cdot y^3 \cdot \rho y^{-2},$$
$$A\ (x,\ y) = x^{-1}y^2\ \rho(xy^{-1}).$$

Совокупность всех элементов квазигруппы $Q\ (A)$, коммутирующих с данным элементом k, назовем *централизатором* элемента k и обозначим его через Z_k. Тогда из леммы 8.3 имеем еще одно

С л е д с т в и е 4. *Централизатор* Z_k *дистрибутивной квазигруппы* $Q\ (A)$ *является нормальной коммутативной подквазигруппой.*

Покажем, что если $a \in Z_k$, то $\pi a = 1$, и, обратно, если $\pi a = 1$, то $a \in Z_k$.

Действительно, если $a \in Z_k$, то

$$A\ (a,\ k) = A\ (k,\ a).$$

Если $Q\ (\cdot)$ — коммутативная лупа Муфанг, соответствующая квазигруппе $Q\ (A)$ относительно элемента k, то предыдущее равенство означает, что $Ra = La$, т. е. $\pi a = 1$. Обратное утверждение очевидно. Множество Z_k — подлупа лупы $Q\ (\cdot)$, так как если $a, b \in Z_k$, то $\pi\ (ab) = \pi a \cdot \pi b = 1 \cdot 1 = 1$, т. е. $ab \in Z_k$. Аналогично доказывается, что если $a \in Z_k$, то и $a^{-1} \in Z_k$.

Далее, так как Z_k является ядром эндоморфизма π лупы $Q\ (\cdot)$, то Z_k — нормальная подлупа.

Наконец, покажем, что Z_k инвариантна относительно автоморфизмов R, R^{-1}, L и L^{-1}. Покажем, что имеют место равенства

$$R\pi = \pi R,\ L\pi = \pi L. \tag{8.31}$$

В самом деле, из равенства $Ra = \pi a La$ следует

$$R^2 a = R\ (\pi a \cdot La) = R\pi a \cdot RLa. \tag{8.32}$$

С другой стороны, имеем

$$R^2 a = R\ (Ra) = \pi\ (Ra) \cdot L(Ra) = \pi Ra \cdot LRa. \tag{8.33}$$

Сравнивая правые части (8.32) и (8.33), получаем первое из равенств (8.31). Таким же способом находим и второе из равенств (8.31).

Пусть теперь $\pi a = 1$. Тогда $\pi Ra = R\pi a = R1 = 1$, т. е. $Ra \in Z_k$. Аналогично устанавливается инвариантность Z_k и по отношению к автоморфизмам R^{-1}, L, L^{-1}.

Так как Z_k — нормальная подлупа, инвариантная относительно R, R^{-1}, L^{-1}, L, то, согласно следствию 1 леммы 4.2, мы заключаем, что Z_k — нормальная подквазигруппа дистрибутивной квазигруппы $Q\ (A)$.

Коммутативность Z_k доказывается очень просто на основании (8.27). Пусть $a,\ b \in Z_k$, тогда

$$A\ (a, b) = A\ (b, a)\ \pi(ab^{-1}).$$

Но $\pi\ (ab^{-1}) = \pi a\, (\pi b)^{-1} = 1$, следовательно, $A\ (a, b) = A\ (b,\ a)$,

Квазигруппа A называется *антикоммутативной*, если равенство $A\ (x,\ y) = A\ (y,\ x)$ имеет место только для $x = y$.

Теорема 8.4. *Если антикоммутативная дистрибутивная квазигруппа конечна, то она транзитивна*[6].

В самом деле, пусть $Q\ (A)$ антикоммутативна. Тогда $\pi a = 1$ только для $a = 1$, так как равенство $Ra = La$ или $A\ (a,\ k) =$

$= A(k, a)$ имеет место только при $\pi a = 1 = k$. Следовательно, эндоморфизм π должен быть автоморфизмом, т. е. для любого $b \in Q$ существует элемент c такой, что $b = \pi c$. Но πc принадлежит ядру лупы $Q(\cdot)$, откуда вытекает, что любой элемент $b \in Q$ принадлежит ядру лупы $Q(\cdot)$; таким образом, $Q(\cdot)$ является группой. Следовательно, $Q(A)$ будет транзитивной квазигруппой.

Наконец, докажем следующую лемму, необходимую нам в дальнейшем:

Лемма 8.4. *Пусть $Q(\cdot)$ — коммутативная лупа Муфанг. Если существуют такие два автоморфизма R и L, что $Rx \cdot Lx = x$ и $Rx(Lx)^{-1}$ принадлежит ядру лупы $Q(\cdot)$, то $Q(\cdot)$ соответствует некоторой дистрибутивной квазигруппе.*

Пусть $Rx(Lx)^{-1} = \pi x$. Тогда $Rx = Lx\pi x$, где πx принадлежит ядру лупы $Q(\cdot)$. Докажем формулы (8.7) и (8.8). Имеем

$$(Rx \cdot y)(Lx \cdot z) = [(Lx \cdot \pi x)y](Lx \cdot z) = [\pi x(Lx \cdot y)](Lx \cdot z) = \pi x \cdot [(L \cdot xy)(Lx \cdot z)] = \pi x [Lx^2 (yz)] = (\pi x Lx^2)(yz) = [Rx(Lx)^{-1} \cdot Lx^2](yz) = (Rx Lx)(yz) = x(yz).$$

Аналогично доказывается и равенство (8.8).

Рассмотрим операцию A, определяемую формулой

$$A(x, y) = Rx \cdot Ly.$$

Воспользовавшись равенством (8.7), можно доказать левый дистрибутивный закон. Имеем

$$A[x, A(y, z)] = Rx \cdot L(Ry \cdot Lz) = Rx(LRy \cdot L^2 z),$$

$$A[x, A(y, z)] = (R^2 x \cdot LRy)(LRx \cdot L^2 z). \tag{8.34}$$

Но L и R коммутируют. В самом деле, из равенства $Rx \cdot Lx = x$, следует: $R(Rx \cdot Lx) = Rx$ или $R^2 x \cdot RLx = Rx$. С другой стороны, подставляя в равенство $Rx \cdot Lx = x$ вместо x элемент Rx, получаем $R^2 x \cdot LRx = Rx$. Поэтому $RLx = LRx$.

Возвратимся к равенству (8.34). Имеем

$$A[x, A(y, z)] = (R^2 x \cdot RLy)(LRx \cdot L^2 z) = R(Rx \cdot Ly) L(Rx \cdot Lz) = RA(x, y) \cdot LA(x, z) = A[A(x, y), A(x, z)).$$

Аналогично доказывается правый дистрибутивный закон.

Так как $Rx = Rx \cdot L1 = A(x, 1)$ и $Lx = R1 \cdot Lx = A(1, x)$, то мы заключаем, что лупа $Q(\cdot)$ соответствует дистрибутивной квазигруппе $Q(A)$.

В случае транзитивных дистрибутивных квазигрупп второе условие (чтобы $Rx(Lx)^{-1}$ принадлежало ядру) всегда выполняется.

4°. *Связь с квазигруппами Штейнера и медиальными квазигруппами.* Напомним, что квазигруппа $Q(A)$ называется TS-квазигруппой, если из равенства $A(a, b) = c$ следуют остальные пять равенств, получаемые из предыдущего путем перестановки элементов a, b и c, например, $A(a, c) = b$, $A(b, c) = a$ и т. д. Как было показано в гл. VII, п. 1°, это определение эквивалентно следующему: квазигруппа $Q(A)$ будет TS-квазигруппой, если для любых x, $y \in Q$ имеем

$$\left.\begin{aligned} A(x, y) &= A(y, x), \\ A[x, A(x, y)] &= y. \end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

Идемпотентная TS-квазигруппа называется квазигруппой Штейнера.

Исследуем связь, которая существует между дистрибутивными квазигруппами и квазигруппами Штейнера.

Значение квазигрупп Штейнера для дистрибутивных квазигрупп вытекает из следующей теоремы 8.5, а также из теоремы 8.6, которые показывают, что любая дистрибутивная квазигруппа является расширением транзитивной дистрибутивной квазигруппы с помощью дистрибутивной квазигруппы Штейнера.

Впервые дистрибутивные квазигруппы Штейнера были рассмотрены Браком [25]; ему принадлежит и лемма 8.5, доказанная ниже.

Имеет место

Т е о р е м а 8.5. *Фактор-квазигруппа $Q(A)/\Phi_A k$ дистрибутивной квазигруппы $Q(A)$ по своему среднему ядру $\Phi_A k$ является дистрибутивной квазигруппой Штейнера.*

Так как, по лемме 8.1, среднее ядро $\Phi_A k$ дистрибутивной квазигруппы $Q(A)$ является нормальной подквазигруппой, то мы можем взять по нему фактор-квазигруппу $\overline{Q}(A) = \{\overline{a}\}$.

Покажем, что дистрибутивная фактор-квазигруппа $\overline{Q}(A)$ коммутативна. Для этого используем следствие 2 леммы 8.3:

$$A(x, y) = A(y, x)\,\pi(xy^{-1}).$$

Переходя к смежным классам, получаем

$$A(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{A(x, y)} = \overline{A(y, x)\pi(xy^{-1})} = \overline{A(y, x)}\cdot\overline{\pi(xy^{-1})},$$
$$A(\overline{x}, \overline{y}) = A(\overline{y}, \overline{x})\cdot\overline{\pi(xy^{-1})}. \tag{8.36}$$

Но $\pi(xy^{-1}) \in \Phi_A k = \overline{1}$, поэтому $\overline{\pi(xy^{-1})} = \overline{1}$, откуда, подставляя $\overline{1}$ в равенство (8.36), получаем

$$A(\overline{x}, \overline{y}) = A(\overline{y}, \overline{x}).$$

Доказательство второго из тождеств (8.35) основывается на следующей простой лемме:

Л е м м а 8.5. *Пусть $Q(A)$ — коммутативная дистрибутивная квазигруппа. Тогда и только тогда $Q(A)$ будет квазигруппой Штейнера, когда любой элемент соответствующей коммутативной лупы Муфанг $Q(\cdot)$ имеет порядок 3.*

Действительно, пусть $x^3 = 1$ для любого $x \in Q(\cdot)$. Если $Q(A)$ коммутативна, то из равенства (8.26) следует, что $\pi(xy^{-1}) = 1$ для любых $x, y \in Q(\cdot)$, т. е. $\pi z = 1$ для всех $z \in Q(\cdot)$, а это означает ввиду равенства (8.26), что $R = L$. Так как $x^3 = 1$, то $x(xx) = 1$; переходя к операции A, получаем

$$A[R^{-1}x, R^{-1}A(R^{-1}x, R^{-1}x)] = 1.$$

Но $A(R^{-1}x, R^{-1}x) = R^{-1}x$, поэтому имеем

$$A(R^{-1}x, R^{-2}x) = 1,$$

откуда

$$A(Rx, x) = R^2 1 = 1 = k, \quad A(Rx, x) = k, \ A[x, A(x, k)] = k.$$

Так как x и k — любые элементы из Q, то мы доказали второе из тождеств (8.35). Следовательно, $Q(A)$ является квазигруппой Штейнера.

Обратно, пусть $Q(A)$ — дистрибутивная квазигруппа Штейнера. Так как $Q(A)$ коммутативна, то, как мы видели выше, $R = L$ и

$$A(a, b) = R(ab), \tag{8.37}$$

и, переходя к лупе $Q(\cdot)$, получаем из (8.35)

$$R[a \cdot R(ab)] = b,$$

откуда следует

$$R^{-1}a \cdot (ab) = R^{-2}b. \tag{8.38}$$

Но из (8.37) при $a = b$ находим

$$Ra^2 = a$$

или

$$R^{-1}a = a^2. \tag{8.39}$$

Подставляя (8.39) в равенство (8.38) и заменяя там b на 1, получаем

$$a^2(a1) = 1^2,$$

или

$$a^3 = 1.$$

Лемма доказана.

Закончим теперь доказательство теоремы 8.5. Как известно, в коммутативной лупе Муфанг x^3 всегда принадлежит ядру: $x^3 \in N$, т. е. $x^3 \in \bar{1}$, откуда следует $\overline{x^3} = \bar{1}$, т. е. $\bar{x}^3 = \bar{1}$. Применяя лемму 8.5, мы заканчиваем доказательство теоремы 8.5.

Подквазигруппа $H(A)$ квазигруппы $Q(A)$ порождается подмножеством $\{a, b, c, \ldots, j, k\} = M$, если H состоит из всех «*слов*», составленных из элементов подмножества M. Словами длины 1 будем считать элементы подмножества M; пусть слово длины $\leqslant n-1$ уже определено; под словом длины n будем понимать выражение вида $A^i(u, v)$, где A^i — одна из операций A, A^{-1}, ${}^{-1}A$, а элементы u и v — слова длины $\leqslant n - 1$, причем одно из них имеет длину $n - 1$.

Докажем следующую теорему:

Теорема 8.6. *Если для четырех элементов a, b, c, d дистрибутивной квазигруппы выполняется медиальный закон*

$$A\,[A\,(a,\,b),\,A\,(c,\,d)] = A\,[A\,(a,\,c),\,A\,(b,\,d)], \tag{8.40}$$

то эти элементы порождают транзитивную дистрибутивную подквазигруппу, т. е. в силу теоремы 8.3 *эти элементы порождают медиальную и идемпотентную квазигруппы.*

Не нарушая общности, будем считать, что $c = k = 1$. Перейдем к операции $(\cdot)$: $xy = A\,(R^{-1}x,\,L^{-1}y)$. Равенство (8.40) примет тогда следующий вид:

$$(R^2a\cdot LRb)\cdot(LR1\cdot L^2d) = (R^2a\cdot LR1)(LRb\cdot L^2d),$$
$$(R^2a\cdot LRb)L^2d = R^2a(LRb\cdot L^2d). \tag{8.41}$$

Используя теперь равенство (8.25), находим

$$LRb = L(Lb\cdot\pi b) = L^2b\cdot L\pi b = L^2b\cdot\pi Lb,$$
$$R^2a = R(Ra) = R(La\cdot\pi a) = L(La\cdot\pi a)\cdot\pi(La\cdot\pi a) = (L^2a\cdot L\pi a)\cdot$$
$$\cdot(\pi La\cdot\pi^2a) = L^2a\cdot\pi\;(La\cdot La\cdot\pi a) = L^2a\cdot\pi a.$$

Подставляя найденные значения для R^2a и LRb в равенство (8.41), получим

$$[(L^2a\cdot\pi a)\;(L^2b\cdot\pi Lb)]L^2d = (L^2a\cdot\pi a)\,[(L^2b\cdot\pi Lb)L^2d].$$

Так как для любого a элемент πa принадлежит ядру, то предыдущее равенство можно переписать следующим образом:

$$[(L^2a\cdot L^2b)\;L^2d]\;(\pi a\cdot\pi Lb) = [L^2a\;(L^2b\cdot L^2d)]\;(\pi a\cdot\pi Lb).$$

Сокращая на $\pi a\cdot\pi Lb$ и на автоморфизм L^2, выводим

$$ab\cdot d = a\cdot bd.$$

На основании теоремы Муфанг элементы a, b, c порождают ассоциативную подлупу (группу) в лупе $Q(\cdot)$. Обозначим ее через $H\,(\cdot)$. Легко убедиться в том, что подлупа $H'(\cdot)$ лупы $Q\,(\cdot)$, порожденная всеми элементами группы $H(\cdot)$ и всеми элементами ядра лупы $Q(\cdot)$, также является группой.

Обозначим подквазигруппу дистрибутивной квазигруппы $Q\,(A)$, порожденную элементами a, b, $c\;(= k = 1)$, d, через $H_0\,(A)$. Покажем, что

$$H_0 \subseteq H'.$$

Элементы a, b, d, $1 \in H'$ принадлежат группе $H'(\cdot)$. Предположим, что слова длины $\leqslant n - 1$ из $H_0\;(A)$ уже принадлежат $H'(\cdot)$.

Согласно следствию 3 леммы 8.3 имеем

$$A(u, v) = u^{-1} v^2 \rho (uv^{-1}), \tag{8.42}$$

где ρx при любом x принадлежит ядру лупы $Q(\cdot)$. Так как по теореме 8.2 коммутативные лупы Муфанг, соответствующие дистрибутивным квазигруппам ${}^{-1}A$ и A^{-1}, совпадают с той же лупой $(\cdot)$, которая соответствует квазигруппе A, то для ${}^{-1}A$ и A^{-1} мы должны иметь аналогичные формулы

$$\left.\begin{aligned} A^{-1}(u, v) &= u^{-1} v^2 \rho_1 (uv^{-1}), \\ {}^{-1}A(u, v) &= u^{-1} v^2 \rho_2 (uv^{-1}) \end{aligned}\right\}, \tag{8.43}$$

где ρ_1, ρ_2 — центральные эндоморфизмы лупы $Q(\cdot)$.

Пусть w — слово длины n из $H_0(A)$; тогда w имеет вид

$$w = A^i(u, v),$$

где $A^1 = A, {}^{-1}A, A^{-1}$, а элементы u, v — слова длины $\leqslant n-1$. По предположению индукции $u, v \in H'(\cdot)$. Тогда ввиду равенств (8.42) и (8.43) $w \in H'(\cdot)$, т. е. $H_0 \subset H'$.

Так как $H'(\cdot)$ — группа, то $H_0(\cdot)$ — также группа. Но это означает, что $H_0(A)$ — транзитивная подквазигруппа дистрибутивной квазигруппы $Q(A)$.

С л е д с т в и е 1. *Любые три элемента дистрибутивной квазигруппы $Q(A)$ порождают транзитивную дистрибутивную подквазигруппу.*

В самом деле, из дистрибутивного закона вытекает

$$A[A(a, b), A(c, c)] = A[A(a, b), c] = A[A(a, c), A(b, c)],$$

т. е. для четверки элементов a, b, c, c выполняется медиальный закон (8.34). Применяя к этим элементам теорему 8.6, убеждаемся в справедливости высказанного утверждения.

С л е д с т в и е 2. *Нетранзитивные дистрибутивные квазигруппы имеют по крайней мере четыре образующих.*

Заметим, что в общем случае медиальный закон не имеет места (ниже будет указан пример). Выше (см. теорему 8.3) было показано, что выполнение для дистрибутивной квазигруппы медиального закона равносильно транзитивности дистрибутивной квазигруппы. Поэтому представляет интерес рассмотреть следующее уравнение:

$$A[A(a, b), A(c, d)] = A[A(a, x), A(b, d)].$$

Обозначим решение этого уравнения через $[a, b, d]_c$. Медиальный закон равносилен равенству $[a, b, d]_c = c$ для любых $a, b, c, d \in Q$.

Зафиксируем элемент c, именно будем считать, что $c = k = 1$, и обозначим через Q_k подквазигруппу, порожденную всеми выражениями $[a, b, d]_k$, где a, b, d пробегают всю квазигруппу $Q(A)$. Значение подквазигруппы $Q_k(A)$ вытекает из следующей теоремы:

Теорема 8.7. *Подквазигруппа $Q_к(A)$ — нормальная дистрибутивная подквазигруппа Штейнера квазигруппы $Q(A)$ и фактор-квазигруппа $Q(A)/Q_к(A)$ транзитивна.*

В самом деле, пусть $x = [a, b, c]_к$, т. е. выполняется равенство

$$A[A(a, b), A(1, c)] = A[A(a, x), A(b, c)].$$

Перейдя к лупе $Q(\cdot)$, получим

$$(R^2a \cdot RLb) L^2c = (R^2a \cdot RLx)(LRb \cdot L^2c). \qquad (8.44)$$

Преобразуем равенство (8.44) тем же способом, как в теореме 8.6:

$$[(L^2a \cdot \pi a)(L^2b \cdot \pi Lb)]L^2c = [(L^2a \cdot \pi a) \cdot LRx][(L^2b \cdot \pi Lb) \cdot L^2c],$$
$$[(L^2a \cdot L^2b)L^2c](\pi a \cdot \pi Lb) = [(L^2a \cdot LRx)(L^2b \cdot L^2c)](\pi a \cdot \pi Lb),$$
$$(L^2a \cdot L^2b)L^2c = (L^2a \cdot LRx)(L^2b \cdot L^2c),$$
$$ab \cdot c = (a \cdot RL^{-1}x)(bc). \qquad (8.45)$$

Используем теперь следующее утверждение Брака [25]:

Лемма 8.6. *Пусть дана коммутативная лупа Муфанг $Q(\cdot)$. Обозначим через $[a, b, c]$ решение уравнения*

$$ab \cdot c = (ax)(bc). \qquad (8.46)$$

Тогда имеют место равенства:

1) $[wa, b, c] = [a, wb, c] = [a, b, wc] = [a, b, c]$, *где a, b, c — любые элементы, w — элемент ядра лупы $Q(\cdot)$;*

2) $[a, b, c]^3 = 1$ *для любых $a, b, c \in Q$.*

Доказательство. 1. Согласно определению символа $[a, b, c]$:

$$(aw \cdot b)c = (aw \cdot [aw, b, c])(bc). \qquad (8.47)$$

Но $(aw \cdot b)c = (wa \cdot b)c = w(ab \cdot c)$. Проделывая те же самые преобразования в правой части (8.47) и сокращая потом w, находим

$$(a[a, b, c])(bc) = (a[aw, b, c])(bc),$$

откуда следует $[aw, b, c] = [a, b, c]$. Аналогично получаются и остальные равенства из утверждения 1) леммы.

2. Ввиду леммы 6.7 отображение $x \to x^3$ является центральным эндоморфизмом лупы $Q(\cdot)$. Поэтому из (8.46) получаем

$$a^3b^3 \cdot c^3 = (a^3[a, b, c])^3(b^3c^3).$$

Так как последнее равенство имеет место в группе $N(\cdot)$ (ядро лупы $Q(\cdot)$), то сразу получаем $[a, b, c]^3 = 1$.

Вернемся к доказательству теоремы 8.7. Из равенства (8.45) следует $RL^{-1}x = [a, b, c]$ или

$$[a, b, c]_k = LR^{-1}[a, b, c]. \qquad (8.48)$$

Легко убедиться на основании равенства (8.46) в том, что для любого автоморфизма φ лупы $Q(\cdot)$ выполняется равенство

$$\varphi[a, b, c] = [\varphi a, \varphi b, \varphi c], \tag{8.49}$$

откуда, в частности, имеем

$$R[a, b, c] = [Ra, Rb, Rc]. \tag{8.50}$$

Применяя лемму 8.3 к правой части равенства (8.50), выводим

$$R[a, b, c] = [La \cdot \pi a, Lb \cdot \pi b, Lc \cdot \pi c]. \tag{8.51}$$

Ввиду утверждения 1) леммы Брака можно отбросить элементы πa, πb, πc из правой части равенства (8.51), при этом получаем

$$R[a, b, c] = [La, Lb, Lc],$$

$$R[a, b, c] = L[a, b, c], \tag{8.52}$$

откуда ввиду равенства (8.48) следует, что

$$[a, b, c]_k = [a, b, c].$$

Таким образом, $Q_k(A)$ порождается всеми решениями уравнения (8.46), где a, b, c — любые элементы. Соответствующая лупа Муфанг $Q_k(\cdot)$ порождается также всеми выражениями вида $[a, b, c]$. Ввиду равенства (8.49) подлупа $Q_k(\cdot)$ характеристична*. Следовательно, $Q_k(\cdot)$ инвариантна относительно любой внутренней подстановки, так как любая внутренняя подстановка коммутативной лупы Муфанг $Q(\cdot)$ является ее автоморфизмом (следствие 3 теоремы 6.4). Таким образом, подлупа $Q(\cdot)$ нормальна. Кроме того, $Q_k(\cdot)$ инвариантна относительно автоморфизмов R, R^{-1}, L и L^{-1}, поэтому $Q_k(A)$ — нормальная подквазигруппа. Вследствие равенства (8.52) $Q_k(A)$ будет коммутативной подквазигруппой, а в силу утверждения 2) леммы 8.6 и леммы 8.5 заключаем, что $Q_k(A)$ — дистрибутивная квазигруппа Штейнера.

Рассмотрим теперь фактор-квазигруппу $\overline{Q}(A) = Q(A)/Q_k(A)$. Ввиду равенства (8.46) получаем

$$\bar{a}\bar{b}\cdot\bar{c} = (\bar{a}\cdot\bar{x})(\bar{b}\cdot\bar{d}).$$

Но $\bar{x} = \bar{1}$, так как $x = [a, b, c] \in Q_k = \bar{1}$; следовательно,

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b}\cdot\bar{c}),$$

т. е. соответствующая лупа $\overline{Q}(\cdot)$ ассоциативна, откуда вытекает, что $\overline{Q}(A)$ транзитивна. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в дистрибутивной квазигруппе $Q(A)$ выполняется медиальный закон, то $Q(A)$ транзитивна* (см. теорему 8.3).

---

* Т. е. подлупа $Q_k(\cdot)$ инвариантна относительно любого автоморфизма лупы $Q(\cdot)$.

Действительно, в этом случае $[a, b, c]_k = k$ для любых a, b, c, k, т. е. Q_k состоит из одной единицы $k = 1$, а фактор-квазигруппа $Q(A)/Q_k(A)$ совпадает с квазигруппой $Q(A)$ и согласно теореме 8.7 будет транзитивной.

Следствие 2. *Если дистрибутивная квазигруппа $Q(A)$ не содержит нетривиальных подквазигрупп Штейнера, то $Q(A)$ транзитивна.*

В самом деле, предположим, что всякая дистрибутивная подквазигруппа Штейнера дистрибутивной квазигруппы $Q(A)$ состоит из одного элемента. Тогда, в частности, Q_k состоит из одного элемента; следовательно, выполняется медиальный закон, и согласно следствию 1 $Q(A)$ транзитивна.

5°. *Примеры нетранзитивных дистрибутивных квазигрупп.* В этом пункте дадим примеры нетранзитивных дистрибутивных квазигрупп, т. е. таких квазигрупп, в которых не выполняется медиальный закон. Для построения этих примеров рассмотрим сначала некоторые свойства коммутативных дистрибутивных квазигрупп.

Как мы видели, в случае коммутативных дистрибутивных квазигрупп $R = L$, и поэтому $Q(A)$ и $Q(\cdot)$ связаны следующим образом:

$$A(a, b) = R(a \cdot b). \tag{8.53}$$

Поскольку согласно равенству (8.39)

$$R^{-1}a = a^2, \tag{8.54}$$

заключаем, что в соответствующей коммутативной лупе Муфанг отображение $a \to a^2$ должно быть подстановкой.

Легко видеть, что имеет место и обратное утверждение:

Если в коммутативной лупе Муфанг отображение $a \to a^2$ является подстановкой, то такая лупа соответствует некоторой коммутативной дистрибутивной квазигруппе.

В самом деле, подстановка $R^{-1}a = a^2$ будет автоморфизмом

$$a^2b^2 = a^2(bb) = ab \cdot ab = (ab)^2$$

ввиду основного тождества коммутативных луп Муфанг. Так как $Ra^2 = a$, то первое условие леммы 8.4 выполняется: $Ra \cdot Ra = a$. Второе условие также выполняется: $Ra(La)^{-1} = Ra(Ra)^{-1} = 1$, а единица всегда принадлежит ядру. Таким образом, равенство (8.53) определяет дистрибутивную и, очевидно, коммутативную квазигруппу.

Теорема 8.8. *Любая конечная коммутативная лупа Муфанг нечетного порядка соответствует некоторой коммутативной дистрибутивной квазигруппе.*

Пусть $Q(\cdot)$ — некоторая коммутативная лупа Муфанг нечетного порядка. Тогда отображение $a \to a^2$ будет подстановкой. В самом деле, пусть $x \to x^2$ и $y \to y^2$ и пусть $x^2 = y^2$. Так как элементы

x и y в коммутативной лупе Муфанг порождают коммутативную группу, то из равенства $x^2 = y^2$ следует $(xy^{-1})^2 = 1$. Обозначим xy^{-1} через z; тогда $z^2 = 1$. Но z^3 принадлежит ядру; следовательно, и $z = z^2 \cdot z = z^3$ также принадлежит ядру. Так как ядро коммутативной лупы Муфанг является нормальной подлупой лупы $Q(\cdot)$, то порядок ядра будет делителем нечетного числа, т. е. ядро лупы $Q(\cdot)$ имеет нечетный порядок. Так как $z^2 = 1$, то мы должны иметь $z = 1$, откуда следует $x = y$. Следовательно, отображение $x \to x^2$ будет подстановкой.

Заметим, что лупа Муфанг (не обязательно коммутативная) четного порядка не может быть изотопной никакой коммутативной дистрибутивной квазигруппе, так как легко показать, что не существует коммутативной дистрибутивной квазигруппы четного порядка (см. например, [78]).

Из теоремы 8.8 вытекает, что каждая коммутативная группа нечетного порядка соответствует некоторой транзитивной коммутативной дистрибутивной квазигруппе.

Пример нетранзитивной коммутативной дистрибутивной квазигруппы. Искомый пример сводится к неассоциативной коммутативной лупе Муфанг, в которой отображение $x \to x^2$ является подстановкой. Такой пример построен в гл. VI, п. 5°. Там мы взяли группу $Q(\cdot)$, в которой $x^3 = 1$ для любого $x \in Q$, определили операцию $x \circ y = x^{-1}yx^2$ и доказали, что $Q(\circ)$— коммутативная неассоциативная лупа Муфанг. Рассмотрим операцию A, определяемую формулой (8.53):

$$A(x, y) = R(x \circ y),$$

где $R^{-1}a = a \circ a = a^{-1}$ ввиду (8.54). Следовательно, $Ra^{-1} = a$ или $Ra = a^{-1}$. Поэтому

$$A(a, b) = R(a \circ b) = (a \circ b)^{-1} = (a^{-1}ba^2)^{-1} = a^{-2}b^{-1}a.$$

Но $a^3 = 1$, откуда $a^{-2} = a$, и получаем следующую формулу для операции A:

$$A(x, y) = xy^{-1}x.$$

Легко показать, что квазигруппа $Q(A)$ будет нетранзитивной дистрибутивной; более того, легко показать, что $Q(A)$ является дистрибутивной квазигруппой Штейнера.

Примечания

[1] Понятие дистрибутивной квазигруппы введено Бурстином и Мейером [34]. Некоторые результаты из этой работы приведены в книге А. К. Сушкевича [78]. Здесь в основном излагаются результаты из [16].

[2] Из предложения б) следует, что дистрибутивная квазигруппа обладает транзитивной группой автоморфизмов: если a, b — любые элементы из Q, то существует такой автоморфизм α, что $\alpha a = b$; в качестве α мы можем взять L_c, где $A(c, a) = b$. Отметим здесь, что лупы с транзитивной группой автоморфизмов (определение то же, что и для квазигрупп с условием $a, b \neq 1$ — единица лупы) были изучены Браком [27]. Им доказано следующее предложение: если $Q(\cdot)$ обладает транзитивной группой автоморфизмов и в $Q(\cdot)$ выполняется условие обрыва убывающих цепей нормальных подлуп, то $Q(\cdot)$ — простая лупа (единственными нормальными подлупами являются Q и 1). С другой стороны, Фишер [80] изучал группу $R(A)$, порожденную всеми правыми трансляциями дистрибутивной квазигруппы. Им доказано, что если $Q(A)$ — конечная дистрибутивная квазигруппа, то $R(A)$ — разрешимая группа.

[3] Вообще говоря, смежные классы по подквазигруппе H дистрибутивной квазигруппы $Q(\cdot)$ могут и не обладать лагранжевым свойством: aH и bH могут иметь общие элементы и, тем не менее, не совпадать (см. пример в [20]).

[4] В [20] доказано существование дистрибутивных квазигрупп $Q(\cdot)$ типа (1, 1, 1). Так как имеются транзитивные дистрибутивные квазигруппы любого порядка $n \neq 4k + 2$ (см. примечания к гл. IX), то, взяв прямое произведение такой квазигруппы с квазигруппой $Q(\cdot)$, можно получить дистрибутивные квазигруппы со средним ядром любого порядка $n \neq 4k + 2$. Заметим, что всякая дистрибутивная квазигруппа типа (1, 1, 1) должна быть квазигруппой Штейнера.

[5] Транзитивные (медиальные) дистрибутивные квазигруппы изучались в [13]. Стейн и Фултон [81] указывают на связь между этими квазигруппами и коническими сечениями. В [58] Осборн рассматривает связь между евклидовой геометрией и медиальной квазигруппой $Q(\circ)$, $x \circ y = (1 - a)x + ay$, где $Q(+, \cdot)$ — поле комплексных чисел, $a \neq 0, 1$. В этой же статье изучается лупа, которая является продолжением вида $(\cdot, \varepsilon)$ лупы $Q(\cdot)$, где ε — тождественное отображение (см. определение 6, гл. VII, п. 5°). Конечные медиальные дистрибутивные квазигруппы изучались и Садом [65].

[6] Ю. И. Соркин [77] показал, что любая конечная дистрибутивная квазигруппа либо коммутативна, либо получается из коммутативной квазигруппы при помощи конечного числа расширений антикоммутативными квазигруппами, т. е. медиальными дистрибутивными квазигруппами.

Глава IX

ЛЕВОДИСТРИБУТИВНЫЕ КВАЗИГРУППЫ

1°. *Леводистрибутивные квазигруппы, изотопные группам.* В связи с определением дистрибутивной квазигруппы возникает вопрос: не зависит ли левая сторона дистрибутивного закона (8.1) от правой стороны (8.2)? Как мы увидим ниже, этот вопрос решается отрицательно, т. е. существуют *леводистрибутивные квазигруппы*, иными словами, квазигруппы $Q(A)$, в которых выполняется левый дистрибутивный закон

$$A[x, A(y, z)] = A[A(x, y), A(x, z)],$$

но не выполняется правый дистрибутивный закон. Впервые такие квазигруппы построил Стейн [75], применив один из методов Хоссу [83].

Дадим следующее

Определение 1. Группоид $Q(A)$ называется *однородным*[1] *слева над лупой* $Q(\cdot)$, если существует подстановка φ такая, что

$$A(x, y) = x\varphi(x \diagdown y),$$

где $(\diagdown) = (\cdot)^{-1}$, т. е. правая обратная операция для $(\cdot)$. Аналогично определяется *правая однородная операция над* $Q(\cdot)$:

$$A(x, y) = \varphi(x / y) \cdot y.$$

В частности, если $Q(\cdot)$ — группа, лупа Муфанг и вообще IP-лупа, то определение операции, однородной слева над $Q(\cdot)$, принимает вид

$$A(x, y) = x\varphi(x^{-1}y),$$

так как $x \diagdown y = x^{-1}y$ в IP-лупе.

Пользуясь понятием однородности, можно сформулировать следующее утверждение:

Теорема 9.1. *Дистрибутивная квазигруппа однородна слева (а также справа) над некоторой коммутативной лупой Муфанг*[2].

Действительно, в предыдущей главе было доказано, что дистрибутивная квазигруппа $Q(A)$ изотопна некоторой коммутативной лупе Муфанг $Q(\cdot)$:

$$A(x, y) = Rx \cdot Ly,$$

где R и L — автоморфизмы лупы $Q(\cdot)$.

Для доказательства теоремы вспомним, что Rx, Lx и y порождают ассоциативную подлупу $H(\cdot)$ в $Q(\cdot)$ (см. доказательство основной теоремы о дистрибутивных квазигруппах). Подлупе $H(\cdot)$ принадлежит и элемент x (так как $x = Rx \cdot Lx$), а следовательно, и элемент $x^{-1} \in H$. Таким образом, мы имеем

$$(x^{-1}Lx)\, y = x^{-1}(Lx \cdot y),$$

или, меняя x на x^{-1} и y на Ly, получаем

$$(xLx^{-1})Ly = x(Lx^{-1}Ly),$$

$$Rx \cdot Ly = xL(x^{-1}y),$$

$$A(x, y) = x L(x^{-1}y).$$

Следующие теоремы дают возможность получить ответ на вопрос, поставленный в начале этого пункта.

Теорема 9.2. *Если леводистрибутивная квазигруппа $Q(A)$ изотопна группе $Q(\cdot)$, тогда она однородна слева над этой группой:*

$$A(x, y) = x\theta(x^{-1}y),$$

причем θ — полный автоморфизм группы $Q(\cdot)$; и обратно: если группоид $Q(A)$ однороден слева над группой $Q(\cdot)$: $A(x, y) = x\theta(x^{-1}y)$, причем θ — полный автоморфизм, тогда $Q(A)$ — леводистрибутивная квазигруппа* [3].

Доказательство. Будем считать, что $Q(A)$ главноизотопна некоторой группе $Q(\cdot)$, при этом доказательство теоремы не теряет общности. Итак, пусть

$$A(x, y) = \varphi x \cdot \psi y. \tag{9.1}$$

В частности, при $y = x$ получаем

$$x = \varphi x \cdot \psi x. \tag{9.2}$$

Следовательно, ψ — полная подстановка.

С другой стороны, при $x = \varphi^{-1}1$ из (9.1) следует

$$L_{\varphi^{-1}1} = \psi,$$

* Здесь принято другое определение полной подстановки (см. определение 4, гл. VII, п. 4°). Подстановка θ множества Q называется *полной* для квазигруппы $Q(\cdot)$, если существует такая подстановка θ', что выполняется равенство $\theta' x \cdot \theta x = x$ для любого $x \in Q$. Если θ — одновременно автоморфизм квазигруппы $Q(\cdot)$, то θ называется *полным автоморфизмом*.

таким образом, ψ — автоморфизм квазигруппы $Q(A)$. Отсюда вытекает, что
$$\psi(\varphi x \cdot \varphi y) = \varphi(\psi x) \cdot \psi(\psi y),$$
откуда
$$\psi(xy) = \varphi\psi\varphi^{-1}x \cdot \psi y.$$

Последнее равенство означает, что ψ — квазиавтоморфизм группы $Q(\cdot)$. Согласно лемме 2.5 подстановку ψ можно представить в виде
$$\psi x = k\theta x,$$
где θ — автоморфизм группы $Q(\cdot)$. Из равенства (9.2) можно найти φ
$$\varphi x = x(\psi x)^{-1} = x(k\theta x)^{-1} = x\theta x^{-1}k^{-1}.$$

Таким образом,
$$A(x, y) = \varphi x \cdot \psi y = x\theta x^{-1}k^{-1} \cdot k\theta y = x\theta(x^{-1}y).$$

Очевидно, θ — полный автоморфизм, так как
$$x = \varphi x \cdot \psi x = (\varphi x \cdot k)\theta x = \lambda x \cdot \theta x.$$

Обратно, пусть группоид $Q(A)$ однороден слева над группой $Q(\cdot)$:
$$A(x, y) = x\theta(x^{-1}y),$$
и пусть θ — полный автоморфизм. Докажем сначала, что $Q(A)$ — квазигруппа. Достаточно показать, что $A(x, a) = b$ однозначно разрешимо, так как $A(a, y) = b$, очевидно, однозначно разрешимо. Уравнение $A(x, a) = b$ эквивалентно $x\theta(x^{-1}a) = b$ или $x\theta x^{-1} = b\theta a^{-1}$. Так как θ — полный автоморфизм, то $x \to x\theta x^{-1}$ является подстановкой множества Q, поэтому существует единственный элемент x_0, удовлетворяющий равенству $x_0\theta x_0^{-1} = b\theta a^{-1}$.

Проверим теперь левый дистрибутивный закон в $Q(A)$:
$$\begin{aligned} A[A(x, y), A(x, z)] &= A(x\theta(x^{-1}y), x\theta(x^{-1}z)) = \\ &= x\theta(x^{-1}y) \cdot \theta[(x\theta(x^{-1}y))^{-1}x\theta(x^{-1}z)] = x\theta(x^{-1}y)\,\theta[\theta(y^{-1}x)x^{-1} \times \\ &\times x\,\theta(x^{-1}z)] = x\theta(x^{-1}y)\,\theta[\theta(y^{-1}x)\,\theta(x^{-1}z)] = x\theta(x^{-1}y)\theta^2(y^{-1}z) = \\ &= x\theta[x^{-1}y\theta(y^{-1}z)] = A[x, A(y, z)]. \end{aligned}$$

Т е о р е м а 9.3. *Квазигруппа $Q(A)$, построенная в предыдущей теореме, тогда и только тогда дистрибутивна, когда группа $Q(\cdot)$ абелева.*

Действительно, если $Q(A)$ дистрибутивна, то она изотопна коммутативной лупе Муфанг $Q(+)$. С другой стороны, $Q(A)$ изотопна группе $Q(\cdot)$, так как
$$A(x, y) = x\theta(x^{-1}y) = x\theta x^{-1} \cdot \theta y = \lambda x \cdot \theta y,$$

где λ — подстановка, ввиду того что θ — полный автоморфизм. Таким образом, коммутативная лупа Муфанг $Q(+)$ изотопна группе $Q(\cdot)$, откуда по теореме Алберта $Q(+)$ и $Q(\cdot)$ изоморфны; следовательно, $Q(\cdot)$ — абелева группа.

Обратно, пусть $Q(\cdot)$ — абелева группа. Покажем, что подстановка $\lambda x = x\theta x^{-1}$ тоже автоморфизм. Имеем

$$\lambda(xy) = xy\theta(x^{-1}y^{-1}) = xy\theta x^{-1}\theta y^{-1} = x\theta x^{-1}y\theta y^{-1} = \lambda x \cdot \lambda y.$$

Правый дистрибутивный закон теперь легко проверяется.

Из этих двух теорем следует существование леводистрибутивных, но не праводистрибутивных квазигрупп: достаточно взять некоммутативную группу $Q(\cdot)$, обладающую полным автоморфизмом. Если группа $Q(\cdot)$ конечна, то понятие полного автоморфизма совпадает с понятием специального автоморфизма (автоморфизм θ называется *специальным*, если он оставляет инвариантным только единицу группы, т. е. из $\theta c = c$ следует $c = 1$). Действительно, если θ — полный автоморфизм и $\lambda x \cdot \theta x = x$, то из $\lambda c\theta c = c$ следует $\lambda c = 1$. Но одновременно $\lambda 1 = 1$, так как $\lambda 1 \cdot \theta 1 = 1$, откуда $\lambda 1 = 1$. Следовательно, $\lambda c = \lambda 1$, $c = 1$. Обратно, пусть θ — специальный автоморфизм и пусть $\lambda x = x\theta x^{-1}$, $\lambda y = y\theta y^{-1}$. Из $\lambda x = \lambda y$ следует $x\theta x^{-1} = y\theta y^{-1}$ или $y^{-1}x = \theta y^{-1}\theta x = \theta(y^{-1}x)$, откуда в силу определения специального автоморфизма вытекает равенство $y^{-1}x = 1$, т. е. $y = x$. Так как Q — конечное множество, мы заключаем, что λ — подстановка и поэтому θ — полный автоморфизм.

Б. Нейман [55] дает пример конечной некоммутативной группы со специальным автоморфизмом. Таким образом, существование леводистрибутивной, но не праводистрибутивной квазигруппы доказано[4].

2°. *Сердцевина лупы Муфанг.* Естественно поставить вопрос: *существуют ли другие классы леводистрибутивных квазигрупп, не изотопные группам?*

Покажем, что такие квазигруппы существуют. Используем для этого понятие, введенное Браком [31], для лупы Муфанг.

Определение 2. Пусть $Q(\cdot)$ — лупа и пусть $(\cdot)^{-1} = (\diagdown)$. Группоид $Q(+)$, где операция $(+)$ определяется равенством

$$x + y = x(y \diagdown x), \tag{9.3}$$

называется *сердцевиной лупы* $Q(\cdot)$.

В случае, если $Q(\cdot)$ — лупа Муфанг, равенство (9.3) превращается в

$$x + y = x(y^{-1}x)$$

или

$$x + y = xy^{-1}x,$$

так как лупа Муфанг диассоциативна (см. следствие теоремы Муфанг).

Т е о р е м а 9.4. *Сердцевина $Q(+)$ лупы Муфанг $Q(\cdot)$ является квазигруппой тогда и только тогда, когда отображение $x \to x^2$ в лупе $Q(\cdot)$ является подстановкой.*

Если $Q(+)$ — квазигруппа, то уравнение $x + 1 = a$ имеет единственное решение, т. е. $x(1^{-1}x) = a$, или $x^2 = a$ имеет единственное решение для любых $a \in Q$. Обозначим решение этого уравнения через $a^{1/2}$. Обратно, пусть уравнение $x^2 = a$ разрешимо однозначно для любых $a \in Q$. Уравнение

$$a + y = b$$

эквивалентно уравнению

$$ay^{-1}a = b,$$

которое, очевидно, разрешимо однозначно; его решением будет

$$y = ab^{-1}a.$$

Рассмотрим уравнение

$$x + a = b \tag{9.4}$$

Предположим, что решение существует

$$x_0 + a = b$$

или

$$x_0a^{-1}x_0 = b.$$

Умножаем справа на a^{-1}

$$x_0a^{-1}x_0a^{-1} = ba^{-1}, \ (x_0a^{-1})^2 = ba^{-1},$$

откуда

$$x_0a^{-1} = (ba^{-1})^{1/2},$$
$$x_0 = (ba^{-1})^{1/2}a. \tag{9.5}$$

Единственность решения уравнения (9.4) таким образом доказана. Докажем теперь, что x_0 из (9.5) в самом деле является решением уравнения (9.4):

$$x_0 + a = x_0a^{-1}x_0 = (ba^{-1})^{1/2}a \cdot a^{-1}(ba^{-1})^{1/2}a = (ba^{-1})^{1/2} \cdot (ba^{-1})^{1/2} \times$$
$$\times a^{-1} = ba^{-1} \cdot a = b.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 9.5. *В сердцевине $Q(+)$ лупы Муфанг выполняется левый дистрибутивный закон*

$$x + (y + z) = (x + y) + (x + z) \tag{9.6}$$

для любых $x, y, z \in Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ниже мы используем основные тождества лупы Муфанг (6.1), (6.2), (6.9), тождества (6.3) — (6.5), а

также тот факт, что лупа Муфанг является IP-лупой. Имеем
$t = (x + y) + (x + z) = xy^{-1}x + xz^{-1}x = xy^{-1}x \cdot (xz^{-1}x)^{-1} \cdot xy^{-1}x.$
Отсюда следует

$$t = xy^{-1}x \cdot x^{-1}zx^{-1} \cdot xy^{-1}x = (xy^{-1}x \cdot x^{-1}zx^{-1})(xy^{-1}x),$$
$$t = \{x\,[y^{-1}\,(x \cdot x^{-1}zx^{-1})]\} \cdot xy^{-1}x.$$

Вычислим выражение в круглых скобках

$$x \cdot x^{-1}zx^{-1} = (xx^{-1} \cdot z)x^{-1} = zx^{-1}.$$

Следовательно,

$$t = [x\,(y^{-1} \cdot zx^{-1})] \cdot xy^{-1}x = (\{[x\,(y^{-1} \cdot zx^{-1})]x\}\,y^{-1})\,x =$$
$$\{[xy^{-1} \cdot (zx^{-1} \cdot x)]y^{-1}\}\,x = [(xy^{-1} \cdot z)y^{-1}]x = [x\,(y^{-1}zy^{-1})]\,x =$$
$$= x \cdot y^{-1}zy^{-1} \cdot x = x \cdot (y + z)^{-1}x = x + (y + z).$$

Равенство (9.6) доказано, и, следовательно, $Q\,(+)$ леводистрибутивна.

Из теорем 9.4 и 9.5 следует

Т е о р е м а 9.6. *Сердцевина лупы Муфанг $Q\,(\cdot)$, в которой отображение $x \to x^2$ является подстановкой, будет леводистрибутивной квазигруппой.*

Возникает вопрос: будет ли леводистрибутивная квазигруппа, построенная по теореме 9.5, и праводистрибутивной? Ответ дает следующая

Т е о р е м а 9.7. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы сердцевина лупы Муфанг была дистрибутивной (т. е. право дистрибутивной), является равенство*

$$xy^2x = yx^2y \tag{9.7}$$

для любых x, $y \in Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (9.7) необходимо. Если $Q\,(+)$, где $x + y = xy^{-1}x$, дистрибутивна и справа, то, в частности, должно быть

$$(y + x^{-1}) + 1 = (y + 1) + (x^{-1} + 1), \tag{9.8}$$

откуда следует $yxy + 1 = y^2 + x^{-2}$, или $(yxy)^2 = y^2x^2y^2$. Возведем в квадрат:

$$yxy \cdot yxy = y^2x^2y^2. \tag{9.9}$$

Сокращая (9.9) слева и справа на y, получаем условие (9.7).

Условие (9.7) достаточно. В самом деле, идя в обратном порядке от равенства (9.9), получим равенство (9.8). Пусть z — любой элемент. Подстановка L_z, определяемая равенством $L_za = z + a$, является, как это следует из левого дистрибутивного закона (9.6), автоморфизмом квазигруппы $Q\,(+)$. Применим автоморфизм L_z

к обеим частям равенства (9.8)

$$(L_z y + L_z x^{-1}) + L_z 1 = (L_z y + L_z 1) + (L_z x^{-1} + L_z 1). \qquad (9.10)$$

Но $L_z 1 = z + 1 = z^2$, $L_z y = zy^{-1}z$, $L_z x^{-1} = zxz$. Заменяя z^2, $zy^{-1}z$, zxz соответственно через u, v, w, из (9.10) получаем $(v + w) + u = (v + u) + (w + u)$. Так как u, v, w могут быть любыми элементами лупы $Q(\cdot)$, теорема доказана.

Естественно возникает вопрос: каким лупам изотопны леводистрибутивные квазигруппы? В случае, когда леводистрибутивная квазигруппа является сердцевиной некоторой лупы Муфанг, ответ дает следующая

Теорема 9.8. *Леводистрибутивная квазигруппа $Q(A)$, являющаяся сердцевиной некоторой лупы Муфанг $Q(\cdot)$, изотопна левой лупе Бола $Q(\circ)$*, т. е. в $Q(\circ)$ выполняется тождество

$$[x\circ(y\circ x)]\circ z = x\circ[y\circ(x\circ z)] \qquad (9.11)$$

(см. гл. VI, п. 6°).

Доказательство. Рассмотрим следующий главный изотоп леводистрибутивной квазигруппы $Q(A)$;

$$x\circ y = A(R^{-1}x,\ L^{-1}y), \qquad (9.12)$$

где $Rx = A(x, 1)$, $Lx = A(1, x)$ (1 — единица лупы Муфанг $Q(\cdot)$). Ввиду определения сердцевины два последние равенства принимают вид

$$Rx = x^2,\ Lx = x^{-1}.$$

Таким образом, из (9.9) находим

$$A(x, y) = Rx\circ Ly = x^2\circ y^{-1},$$

откуда следует

$$x^2\circ y = xyx. \qquad (9.13)$$

Найдем $(x^2 \circ y)^2 \circ z$ в лупе Муфанг $Q(\cdot)$

$$(x^2\circ y)^2\circ z = xyx\cdot z\cdot xyx = xyx\cdot(z\cdot xyx) = (x\cdot yx)\,[(zx\cdot y)\cdot x] =$$
$$= x\,[yx\cdot(zx\cdot y)]\,x = x\,[y\,(x\cdot zx)\,y]\,x = x\,[y\,(xzx)\,y]\,x =$$
$$= x\,[y\,(x^2\circ z)\,y]\,x = x\,[y^2\circ(x^2\circ z)]\,x = x^2\circ[y^2\circ(x^2\circ z)],$$

следовательно,

$$(x^2\circ y)^2\circ z = x^2\circ[y^2\circ(x^2\circ z)]. \qquad (9.14)$$

Единица лупы $Q(\cdot)$ является единицей лупы $Q(\circ)$; поэтому, полагая $z = 1$ в равенстве (9.14), получаем $(x^2 \circ y)^2 = x^2 \circ (y^2 \circ x^2)$, таким образом, $[x^2 \circ (y^2 \circ x^2)] \circ z = x^2 \circ [y^2 \circ (x^2 \circ z)]$. Наконец, заменяя x^2 и y^2 через x и y, получаем искомое тождество (9.7).

С л е д с т в и е 1. *Лупа* $Q(\circ)$, *построенная в теореме* 9.8, *является лупой Муфанг тогда и только тогда, когда в лупе Муфанг* $Q(\cdot)$ *выполняется условие* (9.7).

Сначала заметим, что равенство (9.13) можно переписать следующим образом:

$$x \circ y = x^{1/2} y x^{1/2}. \tag{9.15}$$

Если $Q(\circ)$ — лупа Муфанг, то в ней выполняется правый альтернативный закон

$$y \circ (x \circ x) = (y \circ x) \circ x. \tag{9.16}$$

Переходим к лупе $Q(\cdot)$ с помощью равенства (9.15)

$$y^{1/2}(x^{1/2}xx^{1/2})\,y^{1/2} = (y^{1/2}xy^{1/2})^{1/2}\,x\,(y^{1/2}xy^{1/2})^{1/2}.$$

Заменим $y^{1/2}$ через y

$$yx^2y = (yxy)^{1/2}\,x\,(yxy)^{1/2}. \tag{9.17}$$

Обозначим yxy через z^2; тогда $y^{-1}z^2y^{-1} = y^{-1}(yxy)\,y^{-1} = x$. Подставляя в (9.17) найденное значение для x, получаем

$$y\,(y^{-1}z^2y^{-1})^2y = (z^2)^{1/2}\cdot y^{-1}z^2y^{-1}\cdot(z^2)^{1/2},$$
$$z^2y^{-2}z^2 = zy^{-1}z^2y^{-1}z, \quad zy^{-2}z = y^{-1}z^2y^{-1}.$$

Наконец, заменяя y^{-1} через y и учитывая, что y и z могут быть любыми элементами, получаем тождество (9.7).

Так как все переходы от равенства (9.16) к (9.17) обратимы, то из условия (9.7) следует равенство (9.16). Но если в левой лупе Бола $Q(\circ)$ выполняется правый альтернативный закон, то она является лупой Муфанг (см. свойство 5 луп Бола из гл. VI, п. 6°).

Комбинируя теорему 9.7 и следствие 1 теоремы 9.8, получаем

С л е д с т в и е 2. *Если в лупе Муфанг* $Q(\cdot)$ *выполняется условие* (9.7), *сердцевина лупы* $Q(\cdot)$ *является дистрибутивной квазигруппой, изотопной лупе Муфанг* $Q(\circ)$, *построенной по формуле* (9.15) [5].

Из теоремы 8.1, в которой утверждается, что всякая дистрибутивная квазигруппа изотопна некоторой коммутативной лупе Муфанг, следует, что операция $(\circ)$ коммутативна.

Из всего сказанного вытекает, что если возьмем лупу Муфанг $Q(\cdot)$, в которой отображение $x \to x^2$ является подстановкой и условие (9.7) не выполняется, и построим сердцевину $Q(+)$, то получим леводистрибутивную квазигруппу, но не праводистрибутивную. Квазигруппа $Q(+)$ не изотопна группе, так как в этом случае, по теореме Алберта, $Q(\circ)$ должна быть группой, но $Q(\circ)$ даже не является лупой Муфанг.

П р и м е р. Возьмем следующую группу $Q(\cdot)$, рассмотренную в [89, стр. 225]. Эта группа имеет порядок $3^\alpha q^3$, где q — простое число вида $3k+2$, и задается следующей системой определяющих соотношений:

$$a^{3\alpha}=1,\quad b^q=c^q=d^q=1,$$

$$cb=bcd,\ a^{-1}ba=c,\ a^{-1}ca=b^{-1}c^{-1},$$

$$da=ad,\ db=bd,\ dc=cd.$$

Из равенств $a^{-1}ba=c, a^{-1}ca=b^{-1}c^{-1}$ следует $a^{-2}ba^2=a^{-1}(a^{-1}ba)a=$ $=a^{-1}ca=b^{-1}c^{-1}$. Умножая слева на b, получаем $ba^{-2}ba^2=c^{-1}$. Если бы в этой группе выполнялось условие (9.7), то мы могли бы заменить в последнем равенстве $ba^{-2}b$ через $a^{-1}b^2a^{-1}$:

$$c^{-1}=(a^{-1}b^2a^{-1})\,a^2=a^{-1}b^2a=(a^{-1}ba)^2=c^2,$$

откуда $c^3=1$. Но, по условию, $c^q=1$, $q>3$. Следовательно, в рассматриваемой группе $Q(\cdot)$ условие (9.7) не выполняется. По доказанным теоремам сердцевина группы $Q(\cdot)$ будет лево-, но не праводистрибутивной, а также не будет изотопной группе.

Как показал Брак [31], сердцевина лупы Муфанг инвариантна при изотопии, т. е. имеет место

Теорема 9.9. *Если лупы Муфанг $Q(\circ)$ и $Q(\cdot)$ изотопны, то их сердцевины изоморфны.*

Доказательство. Главная изотопия луп $Q(\circ)$ и $Q(\cdot)$ должна иметь вид

$$x\circ y=R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}y.$$

или

$$x\circ y=xu\cdot vy,$$

так как $R_a^{-1}=R_{a^{-1}}=R_u$, $L_b^{-1}=L_{b^{-1}}=L_v$, ввиду того что лупа Муфанг является IP-лупой.

Пусть $Q(\oplus)$ и $Q(+)$ — сердцевины при $Q(\circ)$ и $Q(\cdot)$ соответственно. Тогда

$$x\oplus y=x\circ y^{(-1)}\circ x, \tag{9.18}$$

где $y\circ y^{-(1)}=e$ и $e=ba$. В правой части равенства (9.18) переходим к операции $(\cdot)$

$$x\oplus y=(x\circ y^{(-1)})\circ x=[(xu\cdot vy^{(-1)})\ \ u]\,(vx)=[x\,(u\cdot vy^{(-1)}u)]\cdot$$
$$\cdot(vx)=x\ \ [(u\cdot vy^{(-1)}\cdot u)\,v]\,x,$$

$$x\oplus y=xy_1x, \tag{9.19}$$

где

$$y_1=(u\cdot vy^{(-1)}\cdot u)\,v$$

не зависит от x. Подставляем в (9.19) $y=x$

$$y\oplus y=yy_1y,\qquad y=yy_1y,$$

откуда

$$y_1 = y^{-1},$$

т. е.

$$x \oplus y = xy_1x = xy^{-1}x, \quad x \oplus y = x + y.$$

3°. *Некоторые результаты относительно F-квазигрупп.* Леводистрибутивные квазигруппы тесно связаны с F-квазигруппами (см. гл. III, п. 5°), именно любая леводистрибутивная квазигруппа является (левой) F-квазигруппой. Действительно, пусть $Q\,(\cdot)$ — леводистрибутивная квазигруппа:

$$x \cdot yz = xy \cdot xz. \tag{9.20}$$

Очевидно, что отображение S_a: $x \to a \diagdown x$* будет подстановкой. Подставляя в (9.20) вместо z элемент

$$S_x z = x \diagdown z,$$

получаем

$$x\,(y \cdot S_x z) = xy \cdot x S_x z.$$

Но, по определению операции $(\diagdown)$, имеем

$$x\, S_x z = x\,(x \diagdown z) = z,$$

поэтому левый дистрибутивный закон (9.20) принимает вид

$$xy \cdot z = x \cdot y\, S_x z, \tag{9.21}$$

т. е. *леводистрибутивная квазигруппа является (левой) F-квазигруппой.*

Отметим, что в этом случае подстановки S_x являются автоморфизмами квазигруппы $Q\,(\cdot)$:

$$S_x\,(yz) = S_x y \cdot S_x z.$$

Действительно, легко видеть, что $S_x = L_x^{-1}$, а в леводистрибутивных квазигруппах левые трансляции являются автоморфизмами.

С другой стороны, равенство (3.32), установленное для любой F-квазигруппы, дает возможность охарактеризовать F-квазигруппы с помощью тождества, весьма близкого к левому дистрибутивному закону. Именно из формулы (3.32) следует, что

$$z = e_x \cdot S_x z,$$

поэтому, подставляя в (9.21) найденное значение для z, получаем

$$(xy) \cdot (e_x S_x z) = x\,(y \cdot S_x z),$$

---

* Как и выше, равенства $xy = z$ и $x \diagdown z = y$ эквивалентны, т. е. $(\cdot)^{-1} = (\diagdown)$.

или

$$(xy)(e_x z) = x(yz). \tag{9.22}$$

Легко показать, что равенства (9.21) и (9.22) эквивалентны. Кроме того, из (9.21) вытекает также следующее утверждение: *идемпотентная (левая) F-квазигруппа является леводистрибутивной квазигруппой; в этом случае $e_x = x$.*

В гл. III, п. 5° было доказано, что F-квазигруппы изотопны F-квазигруппам с левой единицей. Будем предполагать, что $Q(\cdot)$ — *F-квазигруппа с левой единицей* 1.

Рассмотрим следующий изотоп $Q(\circ)$ F-квазигруппы $Q(\cdot)$:

$$x \circ y = R^{-1}(x \cdot Ry), \tag{9.23}$$

где $Rx = x1$. Легко видеть, что $Q(\circ)$ — лупа, именно ее единицей служит элемент 1:

$$x \circ 1 = R^{-1}(x \cdot R1) = R^{-1}(x1) = R^{-1}(Rx) = x,$$
$$1 \circ x = R^{-1}(1 \cdot Rx) = R^{-1}(Rx) = x,$$

ввиду того что $R1 = 1 \cdot 1 = 1$.

Нам понадобится следующая

Лемма 9.1. *Существует зависящий от элементов x, y автоморфизм $\theta_{x,y}$ квазигруппы $Q(\cdot)$ такой, что имеет место равенство*

$$S_x S_y = \theta_{x,y} S_{y\circ x}$$

для любых x, $y \in Q$.

Доказательство. Найдем $(\cdot)^{S_x S_y}$, используя равенство (3.23) и имея в виду, что в нашем случае φ_x должна быть подстановкой $S_{R^{-1}x}$ (см. гл. III, п. 4°):

$$(\cdot)^{S_{R^{-1}x} S_{R^{-1}y}} = (\cdot)_{y \cdot S^{-1}_{R^{-1}y} x},$$

или

$$(\cdot)^{S_x S_y} = (\cdot)_{Ry \cdot S_y^{-1} Rx}.$$

Найдем $Ry \cdot S_y^{-1} Rx$:

$$Ry \cdot S_y^{-1} Rx = (y1)(S_y^{-1} Rx) = y\,[1 \cdot S_y(S_y^{-1} Rx)] = y \cdot Rx.$$

Следовательно,

$$(\cdot)^{S_x S_y} = (\cdot)_{yRx} = (\cdot)_{RR^{-1}(yRx)} = (\cdot)_{R(y\circ x)} = (\cdot)^{S_{y\circ x}},$$

т. е.

$$(\cdot)^{S_x S_y} = (\cdot)^{S_{y\circ x}},$$

или

$$(\cdot)^{S_x S_y S^{-1}_{y\circ x}} = (\cdot),$$

откуда следует, что подстановка

$$\theta_{x,y} = S_x S_y S_{y\circ x}^{-1}$$

должна быть автоморфизмом операции $(\cdot)$.

Теорема 9.10. *Для любых x, y, $z \in Q$ имеют место следующие равенства*:

$$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ\theta_{y,\,x}z), \tag{9.24}$$

$$xy = x\circ(y\circ e_x^{-1}). \tag{9.25}$$

Доказательство. 1. Преобразуем основное равенство (3.3) F-квазигруппы с помощью (9.23)

$$xy\cdot z = x\cdot yS_x z,$$

$$R\,[R\,(x\circ R^{-1}y)\circ R^{-1}z] = R\,[x\circ R^{-1}R\,(y\circ R^{-1}S_x z)],$$

$$R\,(x\circ R^{-1}y)\circ R^{-1}z = x\circ(y\circ R^{-1}S_x z),$$

или

$$R\,(x\circ y)\circ z = x\circ(Ry\circ R^{-1}S_x Rz). \tag{9.26}$$

Подставим в (9.26) $y = 1$

$$Rx\circ z = x\circ(R1\circ R^{-1}S_x Rz),$$

$$Rx\circ z = x\circ R^{-1}S_x Rz. \tag{9.27}$$

Заменив в последнем равенстве элемент x на $x\circ y$, получим

$$R\,(x\circ y)\circ z = (x\circ y)\circ R^{-1}S_{x\circ y}Rz. \tag{9.28}$$

Приравняем правые части равенств (9.26) и (9.28)

$$(x\circ y)\circ R^{-1}S_{x\circ y}Rz = x\circ(Ry\circ R^{-1}S_x Rz),$$

откуда

$$(x\circ y)\circ z = x\circ(Ry\circ R^{-1}S_x S_{x\circ y}^{-1}Rz). \tag{9.29}$$

С помощью (9.27) выражение в скобках из правой части (9.29) можно упростить следующим образом:

$$Ry\circ R^{-1}S_x S_{x\circ y}^{-1}Rz = y\circ R^{-1}S_y R\cdot R^{-1}S_x S_{x\circ y}^{-1}Rz = y\circ R^{-1}S_y S_x S_{x\circ y}^{-1}Rz,$$

или, ввиду леммы 9.1,

$$Ry\circ R^{-1}S_y S_x S_{x\circ y}^{-1}Rz = y\circ R^{-1}\theta_{y,x}Rz = y\circ\theta_{y,x}z,$$

так как $\varphi R = R\varphi$ для любого автоморфизма φ операции $(\cdot)$. Таким образом, из (9.29) получаем

$$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ\theta_{y,x}z).$$

2. Для доказательства (9.25) используем второй вид основного равенства F-квазигруппы

$$x\,(yz) = (xy)\,(e_x z).$$

Переходя к лупе $Q(\circ)$, получаем

$$R[x\circ R^{-1}R(y\circ R^{-1}z)] = R[(xy)\circ R^{-1}R(e_x\circ R^{-1}z)],$$

откуда следует

$$(xy)\circ(e_x\circ z) = x\circ(y\circ z). \tag{9.30}$$

В частности, при $z = 1$ имеем

$$(xy)\circ e_x = x\circ y. \tag{9.31}$$

Обе части равенства (9.31) умножаем справа на $\theta^{-1}_{e_x, xy}e_x^{-1}$*

$$((xy)\circ e_x)\circ\theta^{-1}_{e_x, xy}e_x^{-1} = (x\circ y)\circ\theta^{-1}_{e_x, xy}e_x^{-1},$$

откуда ввиду тождества (9.24) находим

$$(xy)\circ(e_x\circ e_x^{-1}) = x\circ(y\circ\theta_{y,x}\theta^{-1}_{e_x, xy}e_x^{-1}),$$

$$xy = x\circ(y\circ\theta_{y,x}\theta^{-1}_{e_x, xy}e_x^{-1}).$$

Но

$$\theta_{e_x, xy} = \theta_{y, x}. \tag{9.32}$$

В самом деле, вычисляя левую часть (9.31) с помощью леммы 9.1, получаем

$$\theta_{e_x, xy} = S_{e_x}S_{xy}S^{-1}_{(xy)\circ e_x},$$

откуда ввиду (3.31) и (9.31) следует

$$\theta_{e_x, xy} = S_{e_x}\cdot S^{-1}_{e_x}S_yS_x\cdot S^{-1}_{x\circ y} = S_yS_xS^{-1}_{x\circ y} = \theta_{y, x}.$$

Итак, равенство (9.32) доказано, а значит, установлено и равенство (9.25)

Заметим, что (9.30), в котором xy заменено соответствующим выражением из (9.25), дает следующее тождество в лупе $Q(\circ)$:

$$[x\circ(y\circ e_x^{-1})]\circ(e_x\circ z) = x\circ(y\circ z).$$

Следствие. *Любая F-квазигруппа с левой единицей изотопна некоторой специальной лупе.*

Как мы видели выше (см. гл. III, п. 1°), лупа $Q(\circ)$ называется *специальной*, если в ней выполняется равенство (9.24) для любых $x, y, z \in Q$ и $\theta_{x,y}$ — автоморфизм лупы $Q(\circ)$.

Докажем, что лупа $Q(\circ)$, о которой идет речь в теореме 9.10, на самом деле является специальной, т. е. покажем, что $\theta_{x,y}$ является автоморфизмом и лупы $Q(\circ)$. Для этого заметим, то

$$\theta_{x,y}R = R\theta_{x,y}.$$

В самом деле, так как $\theta_{x,y}$ — автоморфизм квазигруппы $Q(\cdot)$,

* u^{-1} означает правый обратный элемент для u в лупе $Q(\circ)$.

находим

$$\theta_{x,y}Rz = \theta_{x,y}(z1) = \theta_{x,y}z\theta_{x,y}1.$$

Но $\theta_{x,y}1 = 1$, поэтому получаем

$$\theta_{x,y}Rz = R\theta_{x,y}z.$$

Следовательно,

$$\theta_{x,y}(u \circ v) = \theta_{x,y}R^{-1}(uRv) = R^{-1}(\theta_{x,y}u \cdot R\theta_{x,y}v) = \theta_{x,y}u \circ \theta_{x,y}v.$$

З а м е ч а н и е. Только что доказанное предложение(следствие теоремы) верно для любой левой F-квазигруппы, так как любая левая F-квазигруппа изотопна левой F-квазигруппе с левой единицей.

4°. *Леводистрибутивные квазигруппы и F-квазигруппы.* Выше мы отметили, что любая леводистрибутивная квазигруппа является левой F-квазигруппой, поэтому в силу следствия 1 теоремы 9.10 вытекает следующая

Л е м м а 9.2. *Всякая леводистрибутивная квазигруппа изотопна некоторой специальной лупе.*

Если $Q(A)$ — леводистрибутивная квазигруппа, то изотоп

$$xy = A(x, L^{-1}y), \tag{9.33}$$

где $Lx = A(1, x)$ (1 — фиксированный элемент из Q) будет левой F-квазигруппой с левой единицей 1. Комбинируя (9.33), (9.23), находим

$$x \circ y = R^{-1}A(x, L^{-1}Ry), \tag{9.34}$$

где $Q(\circ)$ является согласно теореме 9.10 специальной лупой. Изотопия, о которой говорится в лемме 9.2, имеет вид

$$A(x, y) = R(x \circ R^{-1}Ly).$$

Заметим, что L *является автоморфизмом квазигруппы* $Q(A)$ *и лупы* $Q(\circ)$. Первое утверждение следует из определения леводистрибутивной квазигруппы $Q(A)$. Для доказательства второго утверждения воспользуемся очевидным равенством

$$LR = RL,$$

которое означает, что

$$A[A(1, x), 1] = A[1, A(x, 1)].$$

Последнее равенство вытекает из леводистрибутивности операции A. Имеем

$$L(x \circ y) = LR^{-1}A(x, L^{-1}Ry) = R^{-1}A(Lx, L^{-1}RLy) = Lx \circ Ly.$$

Пользуясь второй частью теоремы 9.10, т. е. равенством (9.25), можно найти представление леводистрибутивной квазигруппы

$Q(A)$ через лупу $Q(\circ)$. Сначала докажем, что $e_x^{-1} = Lx^{-1}$, где $xe_x = x$, откуда ввиду (9.33) $A(x, L^{-1}e_x) = x$. В силу идемпотентности леводистрибутивной квазигруппы получаем $L^{-1}e_x = x$ или $e_x = Lx$, т. е. $e_x^{-1} = (Lx)^{-1} = Lx^{-1}$. Тогда из равенства (9.25) имеем

$$A(x, L^{-1}y) = x \circ (y \circ Lx^{-1}),\ A(x, y) = x \circ (Ly \circ Lx^{-1}),$$

или

$$A(x, y) = x \circ L(y \circ x^{-1}).$$

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые свойства автоморфизмов $\theta_{x,y}$, определенные леммой 9.1 для F-квазигруппы $Q(\cdot)$, связанные с леводистрибутивной квазигруппой $Q(A)$ соотношением (9.33).

Лемма 9.3. *Автоморфизмы $\theta_{x,y}$ коммутируют с трансляциями R и L*, где $Rx = A(x, 1)$, $Lx = A(1, x)$.

Действительно, из

$$\theta_{x,y}(uv) = \theta_{x,y}u \cdot \theta_{x,y}v,$$

переходя к операции A, получаем

$$\theta_{x,y}A(u, L^{-1}v) = A(\theta_{x,y}u, L^{-1}\theta_{x,y}v). \tag{9.35}$$

Так как $\theta_{x,y}$ является автоморфизмом квазигруппы $Q(\cdot)$, обладающей левой единицей, то $\theta_{x,y}1 = 1$, и поэтому из (9.35) при $u = 1$ получаем $\theta_{x,y}L^{-1} = L^{-1}\theta_{x,y}$, откуда $L\theta_{x,y} = \theta_{x,y}L$. Коммутативность R и $\theta_{x,y}$ была доказана в предыдущем пункте (следствие теоремы 9.10).

Лемма 9.4. *Автоморфизмы $\theta_{x,y}$ представляются через левые трансляции леводистрибутивной квазигруппы $Q(A)$ следующим образом*:

$$\theta_{y,x} = L_y^{-1}LL_x^{-1}L_{x\circ y}. \tag{9.36}$$

Действительно, в тождестве (9.24) переходим к операции A

$$R^{-1}A(x\circ y, L^{-1}Rz) = R^{-1}A[x, L^{-1}RR^{-1}A(y, L^{-1}R\theta_{y,x}z)],$$
$$A(x\circ y, L^{-1}Rz) = A[x, A(L^{-1}y, \theta_{y,x}L^{-2}Rz)],$$

так как $\theta_{x,y}$ коммутирует с L и R.

Упрощаем последнее равенство

$$A(x\circ y, z) = A[x, A(L^{-1}y, \theta_{y,x}L^{-1}z)].$$

Переходим к левым трансляциям

$$L_{x\circ y}z = L_xL_{L^{-1}y}\theta_{y,x}L^{-1}z,$$

откуда

$$\theta_{y,x} = L_{L^{-1}y}^{-1}L_x^{-1}L_{x\circ y}L. \tag{9.37}$$

Но

$$L^{-1}_{L^{-1}y} = L^{-1}L^{-1}_{zy}L. \tag{9.38}$$

В самом деле,

$L_{L^{-1}y}z = A\ (L^{-1}y,\ z) = A\ (L^{-1}y,\ L^{-1}Lz) = L^{-1}A\ (y,\ \ Lz) = L^{-1}L_yLz$

откуда получаем (9.38). Равенство (9.37) принимает вид

$$\theta_{y,\,x} = L^{-1}L_y^{-1}LL_x^{-1}L_{x\bullet y}L,$$

откуда

$$L\theta_{y,x}L^{-1} = L_y^{-1}LL_x^{-1}L_{x\circ\, y},$$

или

$$\theta_{y,\,x} = L_y^{-1}LL_x^{-1}L_{x\circ\, y}.$$

Следствие. $\theta_{x,y}$ — *автоморфизм и для леводистрибутивной квазигруппы* $Q\ (A)$. Это же утверждение следует непосредственно из леммы 9.3.

Лемма 9.5. *Имеет место следующее соотношение для автоморфизмов* $\theta_{x,\,y}$:

$$\theta_{Ly,Lx} = \theta_{y,\,x}.$$

Доказательство. Используем равенство (9.36)

$$\theta_{Ly,\ Lx} = L^{-1}_{Ly}LL^{-1}_{Lx}L_{Lx\circ Ly} = L^{-1}_{Ly}LL^{-1}_{Lx}L_{L(x\circ y)}.$$

Из равенства (9.38) находим L_{Ly}:

$$L_{Ly} = LL_yL^{-1}. \tag{9.39}$$

Следовательно,

$$\theta_{Ly,\,Lx} = LL_y^{-1}L^{-1}\cdot L\cdot LL_x^{-1}L^{-1}\cdot LL_{x\circ\, y}L^{-1} = LL_y^{-1}LL_x^{-1}L_{x\circ y}L^{-1} =$$
$$= L\theta_{y,\,x}L^{-1} = \theta_{y,\,x}.$$

Лемма 9.6. *В любой специальной лупе* $Q(\circ)$ *выполняется равенство*

$$x\circ(x^{-1}\circ y) = \delta_x y, \tag{9.40}$$

где x^{-1} — *правый обратный элемент для* x, *а* δ_x — *некоторый автоморфизм, зависящий от* x.

В самом деле, положим в равенстве (9.24) $y = x^{-1}$, тогда

$$(x\circ x^{-1})\circ z = x\circ\ (x^{-1}\circ\theta_{x^{-1},\ x}z).$$

Заменяя z на $\theta^{-1}_{x^{-1},x}z$, получаем равенство (9.40), где $\delta_x = \theta^{-1}_{x^{-1},x}$.

Следствие. *Если* $Q\ (A)$ — *леводистрибутивная квазигруппа, то*

$$\delta_x = L^{-1}L_xL^{-1}L_{x^{-1}}. \tag{9.41}$$

Действительно,

$$\delta_x = \theta^{-1}_{x^{-1},\, x} = (L^{-1}_{x^{-1}} L L^{-1}_x L_{x\circ x^{-1}})^{-1} = L^{-1}_{x\circ x^{-1}} L_x L^{-1} L_{x^{-1}}.$$

Но $x \circ x^{-1} = 1$, где 1 — единица лупы $Q\,(\circ)$ и $L_1 = L$. Поэтому $\delta_x = L^{-1} L_x L^{-1} L_{x^{-1}}$.

Выше было доказано (лемма 9.2), что каждая леводистрибутивная квазигруппа $Q\,(A)$ изотопна некоторой специальной лупе $Q\,(\circ)$. В лупе $Q\,(\circ)$ выполняется следующее тождество:

$$[x\circ(y\circ e_x^{-1})]\circ(e_x\circ z) = x\circ(y\circ z), \tag{9.42}$$

где e_x — правая локальная единица квазигруппы $Q\,(\cdot)$, определяемой равенством (9.33). Однако мы показали, что $e_x = Lx$. Таким образом, тождество (9.42) принимает вид

$$[x\circ(y\circ Lx^{-1})]\circ(Lx\circ z) = x\circ(y\circ z). \tag{9.43}$$

Заменяя z на $Lx^{-1}\circ z$ в равенстве (9.42), получаем

$$[x\circ(y\circ Lx^{-1})]\circ[Lx\circ(Lx^{-1}\circ z)] = x\circ[y\circ(Lx^{-1}\circ z)]. \tag{9.44}$$

Но $Lx^{-1} = (Lx)^{-1}$ в силу того, что L — автоморфизм лупы $Q\,(\circ)$; следовательно, ввиду леммы 9.6 находим

$$Lx\circ(Lx^{-1}\circ z) = Lx\circ((Lx)^{-1}\circ z) = \delta_{Lx} z.$$

С другой стороны, $\delta_{Lx} = \theta^{-1}_{Lx,\,(Lx)^{-1}} = \theta^{-1}_{Lx,\,Lx^{-1}} = \theta^{-1}_{x,\,x^{-1}} = \delta_x$. Здесь мы использовали лемму 9.5.

Итак, равенство (9.44) принимает вид

$$[x\circ(y\circ Lx^{-1})]\circ\delta_x z = x\circ[y\circ(Lx^{-1}\circ z)]. \tag{9.45}$$

Исследуем *частный случай, когда* $L^2 = 1$. Это означает, что имеет место

$$A\,[1,\ A\,(1,\ y)] = y.$$

К обеим частям последнего равенства применяем трансляцию L_x квазигруппы $Q\,(A)$

$$L_x A\,[1,\ A\,(1,\ y)] = y,$$

$$A\,[L_x 1,\ A\,(L_x 1,\ L_x y)] = L_x y,$$

$$A\,[u,\ A\,(u,\ v)] = v. \tag{9.46}$$

Равенство (9.46) имеет место для любых $u,\ v \in Q$, т. е.

$$L_u^2 = 1. \tag{9.47}$$

Если в (9.46) перейдем к лупе $Q\,(\circ)$, получим

$$R\,[u\circ R^{-1} L R\,(u\circ R^{-1} L v)] = v, \quad R\,[u\circ(Lu\circ R^{-1} v)] = v,$$

$$u\circ(Lu\circ R^{-1} v) = R^{-1} v, \quad u\circ(Lu\circ v) = v.$$

Если $v = 1$, то $u \circ Lu = 1$, откуда
$$Lu = u^{-1}. \tag{9.48}$$
Пусть в леводистрибутивной квазигруппе $Q(A)$ выполняется тождество (9.46). Тогда в равенстве (9.43), которое имеет место в специальной лупе $Q(\circ)$, изотопной леводистрибутивной квазигруппе $Q(A)$, вместо Lx^{-1} можем писать просто x, так как $Lx^{-1} = L(Lx) = L^2x = x$. Следовательно, в этом случае (9.45) принимает вид
$$[x \circ (y \circ x)] \circ \delta_x z = x \circ [y \circ (x \circ z)]. \tag{9.49}$$
Но из равенств (9.39), (9.41) и (9.48) следует
$$\delta_x = L^{-1} L_x L^{-1} L_{x^{-1}} = L^{-1} L_x L^{-1} L_{Lx} = L^{-1} L_x L^{-1} L L_x L^{-1} = 1.$$

Из сказанного вытекает, что равенство (9.49) превращается в тождество Бола (9.12). Итак, имеет место следующая

Теорема 9.11. *Если в леводистрибутивной квазигруппе $Q(A)$ имеет место равенство*
$$L_f^2 = 1$$
для некоторого фиксированного элемента $f = 1$, тогда $Q(A)$ изотопна некоторой левой лупе Бола $Q(\circ)$.

В частности, условие (9.47) выполняется в любой леводистрибутивной квазигруппе $Q(A)$, являющейся сердцевиной лупы Муфанг $Q(\cdot)$. Действительно,
$$L_x^2\, y = A[x, A(x, y)] = x(xy^{-1}x)^{-1}x = x(x^{-1}yx^{-1})x = y.$$
Следовательно, $Q(A)$ изотопна некоторой левой лупе Бола (ср. с теоремой 9.8).

Таким образом, условие $L_x^2 = 1$ является достаточным для того, чтобы леводистрибутивная квазигруппа была изотопна левой лупе Бола. Очевидно, это условие не необходимо, так как существуют леводистрибутивная квазигруппа, изотопная группе (см. п. 1° этой главы), но тем не менее $L_x^2 \neq 1$. Последнее неравенство имеет место, когда в теореме 9.2 возьмем $\theta^2 \neq 1$. Ниже дадим некоторые необходимые и достаточные условия, чтобы лупа $Q(\circ)$, построенная по формуле (9.34), была левой лупой Бола. Докажем сначала следующее предложение.

Лемма 9.7. *Специальная лупа $Q(\circ)$* **будет левой лупой Бола тогда и только тогда, когда*
$$\theta_{x,y}\, \theta_{y \circ x, x} = 1 \tag{9.50}$$
для любых $x, y \in Q$.

Действительно,
$$[x \circ (y \circ x)] \circ z = x \circ [(y \circ x) \circ \theta_{y \circ x, x}\, z],$$

* Лупа $Q(\circ)$ не обязательно изотопна леводистрибутивной квазигруппе.

откуда

$$[x \circ (y \circ x)] \circ z = x \circ [y \circ (x \circ \theta_{x,y} \theta_{y \circ x,x} z)]. \qquad (9.51)$$

Сравнивая полученное равенство с (левым) тождеством Бола, получаем утверждение леммы.

Для леводистрибутивной квазигруппы условие (9.50) принимает вид

$$P_{x \circ (y \circ x)} = P_x P_y P_x, \qquad (9.52)$$

где $P_x = L_x L^{-1}$. Действительно, используем лемму 9.4

$$\theta_{x,y}\theta_{y \circ x,\ x} = L_x^{-1} L L_y^{-1} L_{y \circ x} L_{y \circ x}^{-1} L L_x^{-1} L_{x \circ (y \circ x)} = 1,$$

откуда

$$L_{x \circ (y \circ x)} L^{-1} = L_x L^{-1} L_y L^{-1} L_x L^{-1}.$$

Получили равенство (9.52).

Итак, необходимое и достаточное условие, чтобы леводистрибутивная квазигруппа $Q(A)$ была изотопна лупе Бола $Q(\circ)$, дается равенством (9.52); при этом изотопия определяется (9.34).

Можно найти и другие необходимые и достаточные условия, чтобы лупа $Q(\circ)$, определяемая равенством (9.34), была лупой Бола, причем эти условия выражаются в терминах самой лупы $Q(\circ)$. Как уже видели выше, в лупе $Q(\circ)$ выполняются тождества (9.33) и (9.51):

$$x \circ (y \circ z) = [x \circ (y \circ Lx^{-1})] \circ (Lx \circ z), \qquad (9.53)$$

$$[x \circ (y \circ x)] \circ z = x \circ [y \circ (x \circ \psi_{x,\ y} z)], \qquad (9.54)$$

где $\psi_{x,\ y} = \theta_{x,\ y}\theta_{y \circ x,\ x}$.

Из (9.53) получаем

$$\left.\begin{aligned} &[x \circ (y \circ x)] \circ z = \{[x \circ (y \circ Lx^{-1})] \circ (Lx \circ x)\} \circ z, \\ &x \circ [y \circ (x \circ \psi_{x,\ y} z)] = [x \circ (y \circ Lx^{-1})] \circ [Lx \circ (x \circ \psi_{x,\ y} z)]. \end{aligned}\right\} \qquad (9.55)$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} t &= x \circ (y \circ Lx^{-1}), \\ \lambda x &= Lx \circ x. \end{aligned}\right\} \qquad (9.56)$$

Тогда из равенств (9.54) и (9.55) следует

$$(t \circ \lambda x) \circ z = t \circ [Lx \circ (x \circ \psi_{x,\ y} z)]. \qquad (9.57)$$

Если $t = 1$, т. е. $x \circ (y \circ Lx^{-1}) = 1$, тогда

$$\lambda x \circ z = Lx \circ (x \circ \varphi_x z), \qquad (9.58)$$

так как $\psi_{x,y} = \varphi_x$ будет зависеть только от x. Из (9.58) находим

$$Lx \circ (x \circ z) = \lambda x \circ \varphi_x^{-1} z,$$

и, следовательно, равенство (9.57) принимает вид

$$(t \circ \lambda x) \circ z = t \circ (\lambda x \circ \varphi_x^{-1} \psi_{x, y} z).$$

Так как лупа Q $(\circ)$ — специальная, получаем окончательно

$$\theta_{\lambda x, t} = \varphi_x^{-1} \psi_{x, y}. \tag{9.59}$$

Напомним, что t, y и x связаны соотношением (9.56). В силу леммы 9.7 необходимым и достаточным условием того, чтобы лупа Q $(\circ)$ была лупой Бола, является

$$\psi_{x, y} = 1, \tag{9.60}$$

а это условие, как видно из (9.59), эквивалентно условию

$$\theta_{\lambda x, t} = \varphi_x^{-1},$$

где t, x — любые элементы из Q. В частности, при $t = 1$ имеем

$$\varphi_x = 1. \tag{9.61}$$

Отсюда следует, что

$$\theta_{\lambda x, t} = 1. \tag{9.62}$$

Очевидно, что равенства (9.61) и (9.62) эквивалентны равенству (9.60). С другой стороны, равенство (9.62) показывает, что λx должен принадлежать среднему ядру N_m лупы Q $(\circ)$

$$Lx \circ x \in N_m. \tag{9.63}$$

А из равенств (9.61) и (9.56) следует

$$(Lx \circ x) \circ z = Lx \circ (x \circ z). \tag{9.64}$$

Из всего сказанного вытекает следующая

Теорема 9.12. *Изотоп* (9.34) *леводистрибутивной квазигруппы Q (A), будет лупой Бола тогда и только тогда, когда выполняются соотношения* (9.63) *и* (9.64).

Замечание. Теорема 9.12 верна и для любой лупы Q $(\cdot)$, изотопной леводистрибутивной квазигруппе Q (A), так как лупа Q $(\cdot)$, будучи изотопной левой лупе Бола Q $(\circ)$, сама будет левой лупой Бола.

Примечания

[1] Понятие однородного группоида введено Хоссу [84] для групп.

[2] В другой статье [76] Стейн доказывает следующую теорему. Пусть $\Gamma(\cdot)$ — группа и пусть S — подмножество, удовлетворяющее следующим условиям для любых a, b, c, $c \neq b$: 1) b, c лежат в различных смежных классах нормализатора элемента a (определение нормализатора см., например, [46]), 2) $aba^{-1} \in S$. Тогда $S(\circ)$, где $x \circ y = xyx^{-1}$, является леводистрибутивной квазигруппой.

[3] Теорему 9.2 можно было доказать и исходя из предложения 4) гл. VII, п. 4°. Как доказано там же (предложение 5), квазигруппа $B(x, y) = A(x^{-1}, y)$ и группа $(\cdot)$ ортогональны. В работе Стейна [76], упомянутой выше (см. примечание 2), доказано, что леводистрибутивная квазигруппа $(\cdot)$ и ее изотоп $(\circ)$, определяемый равенством $x \circ y = x(ay)$, где a — любой элемент, также ортогональны.

[4] Отметим здесь следующий результат Стейна [74]: конечные леводистрибутивные квазигруппы порядка $4k + 2$ не существуют. Это же утверждение следует из более общего утверждения Стейна [74]: идемпотентная квазигруппа порядка $4k + 2$ не может иметь транзитивную группу автоморфизмов. В связи с этим можно показать, что существуют дистрибутивные (а следовательно, и леводистрибутивные) квазигруппы любого конечного порядка $n \neq 4k + 2$ (см., например, [13]).

[5] Более того, как легко показать, $Q(+)$ на самом деле является дистрибутивной квазигруппой Штейнера.

Глава X

ЗАДАЧА О G-ЛУПАХ

Одной из нерешенных задач теории квазигрупп и луп является следующая: найти все лупы $Q(\cdot)$, обладающие свойством, заключающимся в том, что если какая-нибудь лупа изотопна $Q(\cdot)$, то она будет изоморфна ей. Такие лупы мы называли в гл. III, п. 4° G-лупами *.

Задача, которую мы сформулировали, имеет большое значение в некоторых геометрических вопросах (особенно в теории сетей). Здесь мы рассмотрим только некоторые ее алгебраические аспекты [1].

Как было уже отмечено выше, все группы ввиду теоремы Алберта (теорема 1.4) являются G-лупами. Но кроме групп есть и другие классы G-луп.

Заметим, что неассоциативные G-лупы надо искать среди некоммутативных луп ввиду следующей теоремы:

Теорема 10.1. *Если G-лупа коммутативна, она абелева группа.*

Действительно, пусть $Q(\cdot)$ — коммутативная G-лупа, следовательно, изотоп $Q(\cdot)_{a,b}$ тоже лупа и тоже коммутативна при любых a, b:

$$R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y = R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x,$$

откуда

$$R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y = L_b^{-1}x \cdot R_a^{-1}y, \quad R_a^{-1}L_bx \cdot y = x \cdot R_a^{-1}L_by.$$

Рассуждая дальше, как при доказательстве леммы 2.6, заключаем, что $Q(\cdot)$ — транзитивная лупа и, следовательно, $Q(\cdot)$ — группа.

1°. *G-лупы Муфанг.* Начнем с луп Муфанг. Целью настоящего пункта является доказательство следующей теоремы Брака [33]:

* Собственно говоря, мы назвали G-лупами те лупы $Q(\cdot)$, для которых все правые и все левые производные изоморфны самой лупе $Q(\cdot)$, но, как доказано в гл. III, п. 4°, теорема 3.8, такие лупы и только такие обладают свойством, что любая лупа, изотопная $Q(\cdot)$, будет изоморфна $Q(\cdot)$.

Т е о р е м а 10.2. *Пусть $Q(\cdot)$ — лупа Муфанг и пусть $K(\cdot)$ — подлупа, порожденная всеми элементами ядра N и всеми элементами x^3 (x — любой элемент из Q). Тогда $K(\cdot)$ является G-лупой* [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $(x_1 x_2 \ldots x_{k-1} x_k)$, $k \geqslant 2$ будем обозначать произведение в $Q(\cdot)$ элементов $x_1, x, \ldots, x_k$, взятых в данном порядке, при некотором распределении скобок. Так, $(x_1x_2x_3x_4x_5)$ может быть, например, $(x_1 \cdot x_2x_3)(x_4x_5)$. В силу обозначения этого символа всегда существует такое s, $1 < s \leqslant k$, что

$$(x_1x_2 \ldots x_k) = (x_1x_2 \ldots x_s)(x_{s+1} \ldots x_k).$$

В силу определения $K(\cdot)$ любой элемент из K имеет вид $(y_1y_2 \ldots y_k)$, где $y_i = nx_i^3n'$, $n, n' \in N$. Выражение $(y_1y_2 \ldots y_k)$ назовем *словом* длины k.

Вспомним теперь следующие свойства псевдоавтоморфизмов лупы Муфанг $Q(\cdot)$:

а) множества правых и левых псевдоавтоморфизмов лупы $Q(\cdot)$ совпадают (см. лемму 5.4);

б) любая внутренняя подстановка лупы $Q(\cdot)$ является ее псевдоавтоморфизмом (теорема 6.4);

в) элемент x^3 является правым компаньоном псевдоавтоморфизма $T_x = L_x^{-1}Rx$ (следствием теоремы 6.4);

г) ядро $N(\cdot)$ лупы $Q(\cdot)$ инвариантно относительно любого псевдоавтоморфизма (лемма 6.2);

д) если λ — псевдоавтоморфизм с правым компаньоном k, тогда

$$\lambda(xy) = k^{-1}(k\lambda x \cdot \lambda y).$$

Это равенство следует из определения правого псевдоавтоморфизма (3.19).

После таких предварительных замечаний можно приступить к доказательству теоремы. Докажем следующее утверждение: *любой элемент подлупы $K(\cdot)$ является левым компаньоном некоторого псевдоавтоморфизма*; это утверждение вытекает из следующего более общего утверждения: (A) — *элемент θu, где θ — любой псевдоавтоморфизм, а u — любой элемент из K, является левым компаньоном некоторого псевдоавтоморфизма.*

Доказательство сформулированного выше предложения проведем методом индукции по длине слова u.

Пусть $n = 1$. Тогда $u = \theta_{y_1} = \theta(nx^3n')$. Ввиду равенства (6.20) имеем

$$u = \theta n\theta x^3\theta n.$$

В силу свойства г) $\theta n, \theta n' \in N$.

Далее, любой псевдоавтоморфизм θ лупы Муфанг является полуавтоморфизмом (см. гл. VI, п. 2°), т. е.

$$\theta(xyx) = \theta x\theta y\theta x.$$

В частности, при $y = x$ получаем

$$\theta x^3 = (\theta x)^3,$$

следовательно,

$$u = n_1 (\theta x)^3 n_1' = n_1 x_1^3 n_1' = y_1',$$

т. е. u является словом длины один (иначе говоря, множество слов длины один инвариантно при любом псевдоавтоморфизме). Итак, достаточно в случае $n = 1$ доказать, что $y_1 = nx^3n'$ является левым компаньоном некоторого псевдоавтоморфизма.

Имеем

$$ {}_{y_1}(\cdot) = {}_{nx^3n'}(\cdot) = {}_{n}({}_{x^3}({}_{n'}(\cdot))) = {}_{n}({}_{x^3}(\cdot)) = {}_{n}((\cdot)^{T_x^{-1}}) = {}_{T_x^{-1}n}(\cdot)^{T_x^{-1}}. \qquad (10.1)$$

Здесь мы использовали равенства (3.7) и (3.22):

$$ {}_{b}({}_{a}(\cdot)) = {}_{ba}(\cdot),$$

$$ {}_{a}((\cdot)^{\varphi}) = ({}_{\varphi a}(\cdot))^{\varphi} = {}_{\varphi a}(\cdot)^{\varphi}.$$

Так как $T_x^{-1}n \in N$, то из (10.1) находим, что ${}_{y_1}(\cdot) = (\cdot)T_x^{-1}$, т. е. y_1 — левый компаньон псевдоавтоморфизма T_x^{-1}.

Предположим, что утверждение (A) верно для любых u длины меньше n. Пусть $u = (y_1 y_2 \ldots y_n)$, тогда существует такое s, что

$$u = (y_1 y_2 \ldots y_s)(y_{s+1} \ldots y_n) = vw.$$

Длины слов v и w равны соответственно s и $n—s$. Так как θ — одновременно и правый и левый псевдоавтоморфизм, то пусть k — правый компаньон псевдоавтоморфизма θ:

$$(\cdot)_k = (\cdot)^{\theta^{-1}}.$$

В силу свойства д) псевдоавтоморфизмов получаем

$$\theta(vw) = k^{-1}(k\theta v \cdot \theta w).$$

Следовательно,

$$ {}_{\theta u}(\cdot) = {}_{\theta(vw)}(\cdot) = {}_{k^{-1}(k\theta v \cdot \theta w)}(\cdot) = {}_{k^{-1}}({}_{k\theta v}({}_{\theta w}(\cdot))).$$

Длина слова w меньше n, поэтому, по предположению индукции, пусть α — псевдоавтоморфизм, левым компаньоном которого является $\theta w : (\cdot) = (\cdot)^{\alpha^{-1}}$. Таким образом,

$$ {}_{\theta u}(\cdot) = {}_{k^{-1}}({}_{k\theta v}((\cdot)^{\alpha^{-1}})) = {}_{k^{-1}}({}_{\alpha^{-1}(k\theta v)}(\cdot)^{\alpha^{-1}}) =$$

$$= {}_{\alpha^{-1}k^{-1}}({}_{\alpha^{-1}(k\theta v)}(\cdot))^{\alpha^{-1}} = {}_{\alpha^{-1}k^{-1}\cdot[l^{-1}(l\alpha^{-1}k \cdot \alpha^{-1}\theta v)]}(\cdot)^{\alpha^{-1}},$$

где l — правый компаньон псевдоавтоморфизма α^{-1}.

Здесь мы использовали свойство (3.7) и свойство д) псевдоавтоморфизмов. Далее, мы замечаем, что

$$\alpha^{-1}k^{-1}\cdot[l^{-1}(l\alpha^{-1}k\cdot\alpha^{-1}\theta v] = (\alpha^{-1}k)^{-1}[l^{-1}(l\alpha^{-1}k\cdot\alpha^{-1}\theta v)] =$$
$$= L_{\alpha^{-1}k}^{-1}L_l^{-1}L_{l\alpha^{-1}k}\alpha^{-1}\theta v = L_{l,\,\alpha^{-1}k}^{-1}\alpha^{-1}\theta v = \beta v,$$

где $\beta = L_{l,\alpha^{-1}k,\,l}^{-1}\alpha^{-1}\theta$ является псевдоавтоморфизмом. Итак,

$$_{\theta u}(\cdot) = {}_{\beta v}(\cdot)^{\alpha^{-1}}.$$

Снова, используя предположение индукции для v, заключаем, что $_{\beta v}(\cdot) = (\cdot)^{\gamma}$ и, следовательно,

$$_{\theta u}(\cdot) = (\cdot)^{\gamma\alpha^{-1}}.$$

Утверждение а) доказано, а из справедливости этого утверждения следует справедливость теоремы.

Следствие. *Подлупа $K(\cdot)$ нормальна* [3].

2°. *Лупы с ядром индекса два* [4]. В настоящем пункте мы докажем, что существуют G-лупы, отличные от луп Муфанг. Покажем, что и некоторые из WIP-луп (см. определение 4 в гл. V) также являются G-лупами.

Рассмотрим лупу $Q(\cdot)$, которую имеет ядро N индекса два, т. е. $Q = \{N,\ p\,N\}$, $p \overline{\in} N$, для некоторого $p \in Q$.

Лемма 10.1. *N является нормальной подлупой лупы $Q(\cdot)$.*

Согласно следствию теоремы 4.6 мы должны показать, что имеет место равенство

$$xN\cdot yN = (xy)N \tag{10.2}$$

для любых $x, y \in N$.

Для этого заметим, что если $a \in N$, то $aN = N$.
Если $a \overline{\in} N$, то

$$aN = pN.$$

Действительно, пусть $x = an$, следовательно, $x \overline{\in} N$, и поэтому $x \in pN$, т. е. $aN \subseteq pN$. Для доказательства обратного включения заметим, что $aN = Na$.

В самом деле, пусть будет уравнение $yp = pn$, $n \in N$. Если $y \overline{\in} N$, то $y = pn_1 \in pN$, откуда $(pn_1)p = pn$, или ввиду того, что n_1 — элемент ядра, получаем $p(n_1p) = pn$, $n_1p = n$, т. е. $p \in N$, что невозможно ввиду выбора элемента p.

Рассмотрим теперь уравнение $ax = pn$. Элемент $a \overline{\in} N$, поэтому $a = pn_2$, следовательно, получаем уравнение $(pn_2)x = pn$ или $p(n_2x) = pn$, $n_2x = n$, откуда $x \in N$. Таким образом, доказано, что $pn \in aN$, т. е. $pN \subseteq aN$.

Равенство (10.2) очевидно, если хотя бы один из элементов x или y принадлежит ядру N; это следует из свойств ядра N. Следовательно, достаточно доказать, что

$$pN\cdot pN = p^2N. \tag{10.3}$$

Но $p^2 \in N$. В самом деле, пусть $p^2 \in pN$, откуда $p^2 = pn$, т. е. $p = n \in N$, что невозможно. Итак, вместо (10.3) мы должны доказать равенство:

$$pN \cdot pN = N. \tag{10.4}$$

Пусть $x \in pN \cdot pN$, т. е. $x = pn_1 \cdot pn_2$. Имеем

$$x = p(n_1 \cdot pn_2) = p(n_1 p \cdot n_2).$$

Существует такой элемент $n_3 \in N$, что $n_1 p = pn_3$, следовательно,

$$x = p(pn_3 \cdot n_2) = p(p \cdot n_3 n_2) = p^2 \cdot n_3 n_2 \in N,$$

т. е. $pN \cdot pN \subseteq N$. Обратно, пусть $n \in N$ и пусть дано уравнение $n = p^2 x$; очевидно, $x \in N$. Тогда $n = p^2 x = p(px) \in pN \cdot pN$, т. е. $N \subseteq pN \cdot pN$. Таким образом, равенство (10.4) доказано.

Выше мы видели, что $aN = Na$, в частности, $pN = Np$. Последнее равенство определяет следующее взаимное обратное отображение φ ядра N на себя:

$$pn = \varphi n \cdot p.$$

Лемма 10.2. *φ является автоморфизмом ядра N.*

Действительно, пусть $x, y \in N$, тогда

$$\varphi(xy) \cdot p = p \cdot xy = px \cdot y = (\varphi x \cdot p)y = \varphi x \cdot (py) = \varphi x(\varphi y p) = (\varphi x \varphi y)p,$$

следовательно,

$$\varphi(xy) = \varphi x \varphi y.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства производных операций (см. гл. III, п. 2°). Сформулируем их для правых производных операций $(\cdot)_a$, определяемых равенством

$$ax \cdot y = a(x \cdot y)_a.$$

1) если $Q(\cdot)$ — лупа с единицей 1, то $Q(\cdot)_a$ и $Q_a(\cdot)$ — лупы с той же единицей (утверждение 1 теоремы 3.3);

2) $((\cdot)_a)_b = (\cdot)_{ab}$ (утверждение 2 теоремы 3.3);

3) $(\cdot)_x = (\cdot)$ тогда и только тогда, когда x принадлежит левому ядру.

Докажем основное свойство лупы с ядром индекса два.

Теорема 10.3. *Лупа $Q(\cdot)$ с ядром индекса два является G-лупой с ослабленным свойством обратимости.*

Доказательство. Пусть N — ядро лупы $Q(\cdot)$. Если $x \in N$, то $(\cdot)_x = (\cdot)$. Ниже мы докажем, что $(\cdot)_p = (\cdot)^\lambda$, где λ — некоторая подстановка множества Q. Пусть $y \in pN$: $y = pn$. Будем иметь

$$(\cdot)_y = (\cdot)_{pn} = (\cdot)_{\varphi n \cdot p} = ((\cdot)_{\varphi n})_p = (\cdot)_p = (\cdot)^\lambda.$$

Следовательно, любая правая производная $Q(\cdot)_x$, $x \in Q$ изоморфна лупе $Q(\cdot)$. Аналогично показывается, что любая левая производная изоморфна лупе $Q(\cdot)$. Итак, теорема будет доказана, если мы покажем, что $(\cdot)_p$ и ${}_p(\cdot)$ изоморфны $(\cdot)$.

Определим следующую подстановку λ множества Q:

$$\lambda n = \varphi n, \quad \lambda(pn) = p\varphi n$$

для всех $n \in N$.

Очевидно,

$$\lambda^{-1} n = \varphi^{-1} n, \quad \lambda^{-1}(pn) = p\varphi^{-1} n.$$

Покажем, что $(\cdot)_p = (\cdot)^\lambda$, или, более подробно,

$$(x \cdot y)_p = \lambda^{-1}(\lambda x \, \lambda y). \tag{10.5}$$

Возможны следующие четыре случая.

1) $x, y \in N$. Тогда $(x \cdot y)_p = xy$ и

$$\lambda^{-1}(\lambda x \cdot \lambda y) = \lambda^{-1}(\varphi x \cdot \varphi y) = \varphi^{-1}(\varphi x \cdot \varphi y) = xy,$$

так как $\varphi x, \varphi y \in N$.

2) $x \in N$, $y \in pN$, т. е. $y = pn$. Имеем

$$px \cdot y = px \cdot pn = p(x \cdot pn) = p(xp \cdot n) = p(p\varphi^{-1}x \cdot n),$$

откуда

$$(x \cdot y)_p = p\varphi^{-1}x \cdot n.$$

С другой стороны, имеем

$$\lambda^{-1}(\lambda x \cdot \lambda y) = \lambda^{-1}(\varphi x \cdot \lambda(pn)) = \lambda^{-1}(\varphi x \cdot p\varphi n) = \lambda^{-1}(\varphi xp \cdot \varphi n) =$$
$$= \lambda^{-1}(px \cdot \varphi n) = \lambda^{-1}(p \cdot x\varphi n) = p\varphi^{-1}(x\varphi n) = p(\varphi^{-1}x \cdot n).$$

Следовательно, и в этом случае $(x \cdot y)_p = \lambda^{-1}(\lambda x \cdot \lambda y)$.

3) $x \in pN$, $y \in N$. Пусть $x = pn$, тогда

$$px \cdot y = p(pn) \cdot y = p(pn \cdot y) = p(x \cdot y)_p,$$

откуда

$$(x \cdot y)_p = pn \cdot y.$$

$$\lambda^{-1}(\lambda x \cdot \lambda y) = \lambda^{-1}(\lambda(pn) \cdot \lambda y) = \lambda^{-1}(p\varphi n \cdot \varphi y) = p\varphi^{-1}(\varphi n \cdot \varphi y) = p(ny).$$

Таким образом, и в этом случае равенство (10.5) выполняется.

4) $x \in pN$, $y \in pN$, т. е. $x = pn_1$, $y = pn_2$. Имеем

$$px \cdot y = p(pn_1) \cdot pn_2 = p^2 n_1 \cdot pn_2 = (p^2 n_1 \cdot p) n_2.$$

Но $p^2 \in N$, поэтому

$$px \cdot y = [p\varphi^{-1}(p^2 n_1)] n_2 = p[\varphi^{-1}(p^2 n_1) n_2].$$

Следовательно,

$$(x \cdot y)_p = \varphi^{-1}(p^2 n_1) \cdot n_2.$$

С другой стороны, имеем

$$\lambda^{-1}(\lambda x\cdot\lambda y) = \lambda^{-1}[\lambda(pn_1)\cdot\lambda(pn_2)] = \lambda^{-1}(p\varphi n_1\cdot p\varphi n_2) =$$
$$= \lambda^{-1}[p(\varphi n_1\cdot p\varphi n_2)] = \lambda^{-1}[p((\varphi n_1\cdot p)\varphi n_2)] = \lambda^{-1}[p(pn_1;\varphi n_2)] =$$
$$= \lambda^{-1}[p(p\cdot n_1\varphi n_2)] = \lambda^{-1}(p^2\cdot n_1\varphi n_2) = \varphi^{-1}(p^2 n_1\varphi n_2) = \varphi^{-1}(p^2 n_1)n_2.$$

Итак, равенство (10.5) доказано. Аналогично доказывается равенство $_p(\cdot) = (\cdot)^{\lambda^{-1}}$.

Докажем, что $Q(\cdot)$ — WIP-лупа. В силу свойства 2) WIP-лупы надо показать, что из $uv\cdot w = 1$ следует $u\cdot vw = 1$. Очевидно, это утверждение выполняется, если хотя бы один из элементов u, v, w принадлежит N. Если же ни один из элементов u, v, w не принадлежит N, то равенство $uv\cdot w = 1$ невозможно: $uv\cdot w$ принадлежит pN и не может быть равно единице, которая принадлежит ядру. Доказательство теоремы 10.3 закончено.

Для доказательства одного следствия этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма 10.3. *Пусть F — некоторая группа и φ — ее автоморфизм такой, что его квадрат является внутренним автоморфизмом:*

$$\varphi^2 x = kxk^{-1}, \tag{10.6}$$

тогда $k^{-1}\varphi^{-1}k$ принадлежит центру группы F.

Действительно, $(k^{-1}\varphi^{-1}k)x = k^{-1}(\varphi^{-1}kx) = k^{-1}\varphi^{-1}(k\varphi x)$.
Но из (10.6) получаем

$$kx = \varphi^2 x\cdot k,$$

следовательно,

$$(k^{-1}\varphi^{-1}k)x = k^{-1}\varphi^{-1}(\varphi^3 xk) = k^{-1}(\varphi^2 x\cdot\varphi^{-1}k) = k^{-1}(kxk^{-1}\varphi^{-1}k) =$$
$$= x(k^{-1}\varphi^{-1}k).$$

Следствие из теоремы 10.3. *Каковы бы ни были элементы u, v, $w \overline{\in} N$ существует фиксированный элемент $a \in N$ такой, что имеет место равенство*

$$uv\cdot w = (u\cdot vw)a. \tag{10.7}$$

Очевидно, что $a \in N$, так как $uv\cdot w$ и $u\cdot vw$ не могут принадлежать N. Пусть $u = pn_1$, $v = pn_2$, $w = pn_3$ и пусть $p^2 = k$. Вычислим $uv\cdot w$ и $u\cdot vw$:

$$uv\cdot w = (pn_1\cdot pn_2)\cdot pn_3 = [p(n_1\cdot pn_2)]\cdot pn_3 = [p(n_1 p\cdot n_2)]\cdot pn_3 =$$
$$= [p(p\varphi^{-1}n_1\cdot n_2)]\cdot pn_3 = [(p^2\cdot\varphi^{-1}n_1 n_2)p]n_3 = p\varphi^{-1}(k\varphi^{-1}n_1 n_2)n_3,$$
$$u\cdot vw = pn_1\cdot(pn_2\cdot pn_3) = pn_1(k\cdot\varphi^{-1}n_2 n_3) = pn_1 k\varphi^{-1}n_2 n_3.$$

Для заданных u, v, w существует такой элемент a, что выполняется тождество (10.7) Покажем, что a не зависит от u, v и w. Учитывая значения для $uv\cdot w$ и $u\cdot vw$, можно переписать равенство (10.7) следующим образом:

$$p\cdot\varphi^{-1}(k\varphi^{-1}n_1 n_2)n_3 = (p\cdot n_1 k\varphi^{-1}n_2 n_3)a, \tag{10.8}$$

откуда

$$\varphi^{-1}(k\cdot\varphi^{-1}n_1n_2)n_3 = (n_1k\varphi^{-1}n_2n_3)a,$$
$$\varphi^{-1}k\varphi^{-2}n_1\varphi^{-1}n_2n_3 = (n_1k\varphi^{-1}n_2n_3)a.$$

Теперь найдем $\varphi^2 n$, где $n\in N$. Для этого вычислим $p(pn)$:

$$p(pn) = p(\varphi np) = (\varphi^2 np)p = \varphi^2 np^2 = \varphi^2 n\cdot k.$$

С другой стороны, $p(pn) = kn$, следовательно,

$$\varphi^2 n = knk^{-1}. \qquad (10.9)$$

Из равенства (10.9) найдем $\varphi^{-2}n$:

$$\varphi^{-2}n = k^{-1}nk.$$

С помощью последнего равенства преобразуем (10.8)

$$\varphi^{-1}k\cdot k^{-1}n_1\, k\varphi^{-1}n_2n_3 = (n_1k\varphi^{-1}n_2n_3)a. \qquad (10.10)$$

Но $\varphi^{-1}k\cdot k^{-1} = k(k^{-1}\varphi^{-1}k)k^{-1}$, откуда на основании леммы 10.3 заключаем, что $\varphi^{-1}k\cdot k^{-1}$ принадлежит центру ядра N. Следовательно, из (10.10) получаем

$$(n_1k\varphi^{-1}n_2n_3)\varphi^{-1}k\cdot k^{-1} = (n_1k\varphi^{-1}n_2n_3)a,$$

откуда

$$a = \varphi^{-1}k\cdot k^{-1}.$$

Теорема 10.4. *Пусть $Q(\cdot)$ — лупа и пусть N — ее ядро. Пусть, далее, лупа $Q(\cdot)$ обладает нормальным делителем H индекса два, содержащимся в ядре N. Необходимым и достаточным условием, чтобы $Q(\cdot)$ была группой, является существование хотя бы одного элемента $p\in H$ такого, что*

$$p^2\cdot p = p\cdot p^2. \qquad (10.11)$$

Доказательство. Необходимость условия (10.11) очевидна. Достаточность тоже легко доказывается. По условиям теоремы $H\subseteq N\subseteq Q$. Докажем, что $N = Q$. Предположим противное, т. е. что $N\neq Q$. Очевидно, мы должны иметь $H = N$. Тогда $Q(\cdot)$ является лупой с ядром индекса два и в ней выполняется следствие теоремы 10.3. В частности, применяя следствие теоремы 10.3, для случая $u=v=w=p$, из равенства (10.7) находим $a = 1$. Следовательно, $uv\cdot w = u\cdot vw$ для любых u, v, $w\in N$, т. е. в $Q(\cdot)$ выполняется ассоциативный закон, иными словами, $N = Q$, что противоречит нашему предположению.

Следствие. *Лупа $Q(\cdot)$ с ядром индекса два не является лупой Муфанг.*

Действительно, в лупе Муфанг любой элемент порождает ассоциативную подлупу, т. е. в $Q(\cdot)$ условие (10.11) выполняется и, следовательно, $Q(\cdot)$ должна быть группой. Это противоречит тому, что $Q(\cdot)$ имеет ядро индекса два.

Следующая теорема допояняет теорему 10.3.

Теорема 10.5. *Пусть* N — *группа, обладающая автоморфизмом* φ *таким, что* $\varphi^2 x = kxk^{-1}$, $\varphi k \neq k$. *Тогда существует лупа* $Q(\cdot)$, *имеющая* N *своим ядром индекса два.*

Заметим, что лупа $Q(\cdot)$ будет G-лупой с ослабленным свойством обратимости, но не лупой Муфанг.

Доказательство. Пусть $P = \{\cdot\}$ — циклическая группа порядка два $P(0, p)$ и пусть $\Sigma = \{A_{a,b}\}$, $a, b \in P$ — система квазигрупп, определенная на множестве N:

$$A_{a,b}(x, y) = \varphi_b^{-1} x \cdot y,$$

где $\varphi_0 = 1$, $\varphi_p = \varphi$.

Рассмотрим скрещенное произведение $Q(\circ)$ (см. гл. V), где

$$\left.\begin{aligned} Q &= P \times N, \\ (\circ) &= \langle \cdot, \Sigma \rangle. \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

Легко видеть, что $Q(\circ)$ — лупа с единицей $(0,1)$, где 1 — единица группы N. Очевидно, совокупность всех пар $(0, x)$, где x пробегает группу N, является подлупой лупы $Q(\circ)$.

Нетрудно также проверить, что N — ядро лупы $Q(\circ)$.

Определим следующую подстановку λ множества Q:

$$\lambda(0, x) = (0, \varphi x), \ \ \lambda(p, x) = (p, \varphi x).$$

Повторяя вычисления из доказательства теоремы 10.3, убеждаемся в том, что

$$(\circ)_{(p,1)} = (\circ)^{\lambda}.$$

Если x — любой элемент из N, то его можно представить в виде $x = \varphi^{-1} y$. Тогда

$$(\circ)_{(p,x)} = (\circ)_{(p,\, \varphi^{-1} y \cdot 1)} = (\circ)_{(0,y) \circ (p,1)} = ((\circ)_{(0,y)})_{(p,1)} = (\circ)_{(p,1)} = (\circ)^{\lambda}.$$

Для того чтобы $Q(\circ)$ имело ядро индекса два, необходимо доказать, что $(\circ)^{\lambda} \neq (\circ)$. С этой целью вычислим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}(\lambda(p,x) \circ \lambda(p,y)) &= \lambda^{-1}((p, \varphi x) \circ (p, \varphi y)) = \lambda^{-1}(0,\ k\varphi^{-1}\varphi x \cdot \varphi y) = \\ &= \lambda^{-1}(0, kx\varphi y) = (0, \varphi^{-1}(kx\varphi y)) = (0, \varphi^{-1}k\varphi^{-1}x \cdot y). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(p,x) \circ (p,y) = (0, k\varphi^{-1}x \cdot y).$$

Так как $\varphi k \neq k$, то $(\circ)^{\lambda} \neq (\circ)$.

Замечание. Если N — абелева группа, то условия теоремы 10.5 превращаются в следующие: $\varphi^2 = 1$ и существует такой элемент k, что $\varphi k \neq k$.

Примеры. 1. Пусть $N = C_2 \times C$, где C — аддитивная группа целых чисел, C_2 — ее подгруппа четных чисел, таким образом, N состоит из всех пар вида $x = (2i, j)$, i, j — целые числа. Пусть $\varphi(2i, j) = (2i, -i-j)$. Легко видеть, что φ — автоморфизм группы N, причем $\varphi^2 = 1$, $\varphi(2,0) = (2,-1) \neq (2, 0)$, следовательно, φ удовлетворяет условиям теоремы 10.5. Элементы лупы Q составляют пары $(0, x)$ или (p, x), или, подробнее, тройки $(0; 2i, j)$ и $(p; 2i, j)$. Этот пример рассмотрен Осборном [57].

2. Пусть $\mathfrak{B}_4 = \{0, a, b, c\}$ — четверная группа. Пусть $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & b & a & c \end{pmatrix}$. Подстановка φ будет автоморфизмом группы $\mathfrak{B}_4$, причем $\varphi^2 = 1$, $\varphi a \neq a$. Можно построить лупу Q порядка 8 по формулам (10.12), лупа Q будет неассоциативной G-лупой с ослабленным свойством обратимости.

3°. *Пример G-лупы, отличной от WIP-лупы.* Следующий пример показывает существование G-луп, отличных от WIP-луп.

Пусть $F = F(+, \cdot)$ — поле. Рассмотрим множество $Q = F' \times F$, где F состоит из всех ненулевых элементов поля F, т. е. Q состоит из всех пар вида (a, x), $a \neq 0$. Определим операцию умножения $(\circ)$ в Q следующим образом:

$$(a, x) \circ (b, y) = (ab, (a^{-1} - 1)(b^{-1} - 1)s + b^{-1}x + y).$$

Так как $(a, x), (b, y) \in Q$, то $a \neq 0, b \neq 0$. Легко убедиться в том, что $Q(\circ)$— лупа с единицей $e = (1,0)$.

Вычислим произведение $(u \circ v) \circ w$, где $u = (a, x)$, $v = (b, y)$, $w = (c, z)$. Имеем

$$(u \circ v) \circ w = [(a, x) \circ (b, y)] \circ (c, z) = (ab, (a^{-1} - 1)(b^{-1} - 1)s + b^{-1}x + y) \circ (c, z) = (abc, (a^{-1}b^{-1} - 1)(c^{-1} - 1)s + c^{-1}(a^{-1} - 1) \times (b^{-1} - 1)s + c^{-1}b^{-1}x + c^{-1}y + z),$$

$$(u \circ v) \circ w = (abc, (abc)^{-1}(2 - a - b - c + abc)s + b^{-1}c^{-1}x + c^{-1}y + z). \tag{10.13}$$

Аналогично находим

$$u \circ (v \circ w) = (abc, (abc)^{-1}(1 - ab - ac - bc + 2abc)s + b^{-1}c^{-1}x + c^{-1}y + z). \tag{10.14}$$

Решение уравнения $(u \circ v) \circ w = u \circ t$, где u, v, w — данные элементы из Q, должно быть

$$t = (\circ)_u (v, w),$$

где $(\circ)_u$ — правая производная операции $(\circ)$. Пусть $t = (d, z')$, тогда

$$u \circ t = (a, x) \circ (d, z') = (ad, (a^{-1} - 1)(d^{-1} - 1)s + d^{-1}x + z'). \tag{10.15}$$

Сравнивая (10.14) и (10.15), находим

$$\left.\begin{aligned} d &= bc, \\ z' &= (abc)^{-1}(1-b)(1-c)s + c^{-1}y + z. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом,

$$(\circ)_u(v,\ w) = (bc,\ (abc)^{-1}\ (1-b)\ (1-c)\ s + c^{-1}y + z). \quad (10.16)$$

Покажем, что

$$(\circ)_u = (\circ)^{\lambda_u}, \quad (10.17)$$

где $\lambda_u(b,\ x) = (b,\ ax)$.

Действительно,

$$\lambda_u^{-1}(b,\ x) = (b,\ a^{-1}x)$$

и

$$\lambda_u^{-1}(\lambda_u v \circ \lambda_u w) = \lambda_u^{-1}(\lambda_u(b,\ y) \circ \lambda_u(c,\ z)) = \lambda_u^{-1}((b,\ ay) \circ (c,\ az)) =$$
$$= \lambda_u^{-1}(bc,\ (b^{-1}-1)(c^{-1}-1)s + c^{-1}ay + az) = (bc,\ a^{-1}(b^{-1}-1) \times$$
$$\times (c^{-1}-1)s + c^{-1}y + z).$$

Сравнивая последнее равенство и (10.16), выводим соотношения (10.17). Аналогично доказывается, что все левые производные операции $(\circ)$ изоморфны операции $(\circ)$. Следовательно, лупа $Q(\circ)$ будет G-лупой.

Построенная лупа, вообще говоря, не WIP-лупа. Действительно, пусть $(u \circ v) \circ w = e$. Это равенство вследствие (10.13) эквивалентно равенствам

$$\left.\begin{aligned} &abc = 1, \\ &(2-a-b-c+abc)s + b^{-1}c^{-1}x + c^{-1}y + z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Лупа $Q(\circ)$ будет WIP-лупой, если из $(u \circ v) \circ w = e$ следует $u \circ (v \circ w) = e$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &abc = 1, \\ &(1-ab-ac-bc+2abc)s + b^{-1}c^{-1}x + c^{-1}y + z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, мы должны иметь

$$\left.\begin{aligned} &abc = 1, \\ &(a-1)(b-1)(c-1)s = 0. \end{aligned}\right\}$$

Пусть $s = 0$, тогда, как следует из (10.13) и (10.14), лупа $Q(\circ)$ ассоциативна, т. е. является группой. Если $s \neq 0$,

$$(ab-1)(a-1)(b-1) = 0 \quad (10.18)$$

для любых ненулевых элементов поля F. Если поле F содержит более чем три элемента, то равенство (10.18) не выполняется, поэтому $Q(\circ)$ не WIP-лупа.

Покажем, что лупа $Q(\circ)$ является специальной (см. гл. III, п. 1°), т. е. докажем, что

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ \bar{\theta} w), \tag{10.19}$$

где $\bar{\theta}$ — зависящий от u, v автоморфизм лупы $Q(\circ)$.

Пусть $\bar{\theta} w = w' = (c', z')$. Вычисляя левую и правую части равенства (10.19) по формулам (10.13) и (10.14) и сравнивая результаты, находим

$$c' = c,$$

$$(abc)^{-1}(2 - a - b - c + abc)\, s + b^{-1}c^{-1}x + c^{-1}y + z =$$
$$= (abc)^{-1}(1 - ab - ac - bc + 2abc)\, s + b^{-1}c^{-1}x + c^{-1}y + z',$$

откуда получаем

$$z' = z + l_{a,\, b,\, c},$$

где
$$l_{a,\, b,\, c} = (a - 1)(b - 1)(c - 1)\, s.$$

Итак,

$$\bar{\theta}(c, z) = (c, z + l_{a, b, c}).$$

Следовательно, имеем

$$\bar{\theta}(c_1, z_1) \circ \bar{\theta}(c_2, z_2) = (c_1, z_1 + l_{a,\, b,\, c_1}) \circ (c_2, z_2 + l_{a,\, b,\, c_2}) =$$
$$= (c_1c_2,\ (c_1^{-1} - 1)(c_2^{-1} - 1)\, s + c_2^{-1}z_1 + c_2^{-1}l_{a,\, b,\, c_1} + z_2 + l_{a,\, b,\, c_2}),$$
$$\bar{\theta}((c_1, z_1) \circ (c_2, z_2)) = \bar{\theta}(c_1c_2,\ (c_1^{-1} - 1)(c_2^{-1} - 1)\, s + c_2^{-1}z_1 + z_2) =$$
$$= (c_1c_2,\ (c_1^{-1} - 1)(c_2^{-1} - 1)\, s + c_2^{-1}z_1 + z_2 + l_{a, b, c_1c_2}).$$

Чтобы $\bar{\theta}$ был автоморфизмом лупы $Q(\circ)$, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$c_2^{-1} l_{a, b, c_1} + l_{a, b, c_2} = l_{a, b, c_1c_2} \tag{10.20}$$

для любых a, b, c_1, c_2. Справедливость равенства (10.20) проверяется прямым вычислением.

4°. *Универсальные свойства луп.* Из определения G-лупы $Q(\cdot)$ следует, что все алгебраические свойства лупы $Q(\cdot)$ остаются инвариантными при изотопии. Некоторое свойство называется *алгебраическим для лупы* (*группоида* и т. д.), если оно инвариантно относительно изоморфизма. Поэтому целесообразно рассмотреть лупы, которые обладают следующим свойством: если лупа $Q(\cdot)$ обладает свойством P, то и любая лупа, ей изотопная, тоже обладает свойством P. Свойство P в этом случае назовем *универсальным*. Таким образом, *любое алгебраическое свойство G-лупы является универсальным.*

Рассмотрим некоторые простые алгебраические свойства и найдем условия, при которых они универсальны.

1. *Следующие свойства универсальны в любой лупе: ассоциативность* (теорема Алберта 1.4) *быть лупой Муфанг* (теорема 6.1), *быть лупой Бола* (теорема 6.10).

2. *Коммутативность является универсальным свойством только в группах.*

Действительно, пусть $Q(\cdot)$ — коммутативная лупа и пусть изотоп $Q(\circ)$, где

$$x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y,$$

тоже коммутативен. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 10.1, устанавливаем справедливость утверждения 2.

3. *IP-свойство в лупе* $Q(\cdot)$ (т. е. свойство лупы быть IP-лупой) *является универсальным свойством тогда и только тогда, когда* $Q(\cdot)$ — *лупа Муфанг.*

Действительно, если любая лупа, изотопная лупе $Q(\cdot)$, является IP-лупой, то $Q(\cdot)$ должна быть лупой Муфанг (теорема 6.3), и, обратно, если $Q(\cdot)$— лупа Муфанг, то она будет и IP-лупой. Так как любая лупа $Q(\circ)$, изотопная лупе Муфанг, тоже Муфанг (теорема 6.1), то это означает, что $Q(\circ)$ также IP-лупа.

4. *Если WIP — свойство, т. е. свойство лупы* $Q(\cdot)$ *быть WIP-лупой, является универсальным, тогда в* $Q(\cdot)$ *выполняется тождество*

$$xy \cdot \theta_x zx = (x \cdot yz)\, x,$$

где θ_x — зависящий от x автоморфизм лупы $Q(\cdot)$.

Действительно, пусть $Q(\cdot)$ — WIP-лупа, т. е.

$$x(yx)^{-1} = y^{-1},$$

где $xx^{-1} = 1$. Пусть $Q(\circ)$ — лупа, изотопная лупе $Q(\cdot)$, т. е. операция $(\circ)$ имеет вид

$$x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y.$$

Найдем необходимые и достаточные условия, чтобы $Q(\circ)$ была WIP-лупой. Для этого найдем сначала $x^{(-1)}$ из $x \cdot x^{(-1)} = e$, где $e = ba$ — единица лупы $Q(\circ)$. Имеем

$$R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}x^{(-1)} = e. \tag{10.21}$$

Как было показано в гл. V, п. 5°, свойство ж), уравнение $ax = b$ имеет решение $x = I(I^{-1}b \cdot a)$, где $Ix = x^{-1}$, таким образом, из (10.21) получаем

$$L_b^{-1}x^{(-1)} = I(I^{-1}e \cdot R_a^{-1}x) = IL_cR_a^{-1}x,$$

или

$$x^{(-1)} = L_bIL_cR_a^{-1}x.$$

Здесь $c = I^{-1}e = I^{-1}(ba)$.

Пусть $Q(\circ)$ — WIP-лупа, т. е.

$$x \circ (y \circ x)^{(-1)} = y^{(-1)}. \tag{10.22}$$

Тогда

$$R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}(y \circ x)^{(-1)} = y^{(-1)}.$$

Следовательно,

$$L_b^{-1}(y \circ x)^{(-1)} = I\,(I^{-1}y^{(-1)} \cdot R_a^{-1}x),$$

$$L_b^{-1}L_bIL_cR_a^{-1}(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x) = I\,(I^{-1}L_bIL_cR_a^{-1}y \cdot R_a^{-1}x).$$

Сделав всевозможные сокращения, получаем

$$L_cR_a^{-1}(y \cdot x) = I^{-1}L_bIL_cy \cdot R_a^{-1}L_bx. \tag{10.23}$$

Так как мы хотим, чтобы (10.22) было универсальным свойством, то равенство (10.23) должно выполняться для любых $a, b, x, y \in Q$. Пусть $b = 1$, тогда $c = I^{-1}a$ и

$$L_{I^{-1}a}R_a^{-1}(yx) = I^{-1}ay \cdot R_a^{-1}x, \tag{10.24}$$

откуда

$$I^{-1}a \cdot R_a^{-1}(yx) = I^{-1}ay \cdot R_a^{-1}x.$$

Заменяем a на Ia и x на $R_{Ia}x$:

$$aR_{Ia}^{-1}(y \cdot xIa) = ay \cdot x. \tag{10.25}$$

В частности, при $x = a$ получаем

$$aR_{Ia}^{-1}y = ay \cdot a. \tag{10.26}$$

Комбинируя (10.24) и (10.25), находим

$$ay \cdot x = [a\,(y \cdot x\,Ia)]a. \tag{10.27}$$

Пусть $xIa = z$. Используя снова свойство ж) WIP-лупы $Q(\cdot)$, находим $x = I^{-1}(Ia \cdot Iz)$. Определим подстановку θ_a с помощью равенства

$$I^{-1}(Ia \cdot Iz) = \theta_a z \cdot a,$$

т. е.

$$\theta_a = R_a^{-1}I^{-1}L_{Ia}I,$$

или в силу свойства д) WIP-луп получаем

$$\theta_a = I^{-1}L_aL_{Ia}I. \tag{10.28}$$

Итак, (10.26) можно переписать в виде

$$ay \cdot \theta_a za = (a \cdot yz)\, a. \tag{10.29}$$

Равенства (10.24) и (10.27) показывают, что $T_1 = (L_{I^{-1}a},\ R_a^{-1},\ L_{Ia}^{-1} R_a^{-1})$ и $T_2 = (L_a,\ R_{Ia}^{-1},\ R_a L_a)$ являются автотопиями лупы $Q(\cdot)$. Но тогда и $T_1 T_2 = (L_{Ia}^{-1} L_a,\ R_a^{-1} R_{Ia}^{-1},\ L_{Ia}^{-1} L_a) = (\alpha,\ \beta,\ \alpha)$ — автотопия лупы $Q(\cdot)$. Но $l = \alpha 1 = L_{I_{-1_a}} L_a 1 = I^{-1}a \cdot a = 1$ и $\beta^{-1}1 = R_{Ia} R_a 1 = a \cdot Ia = 1$, откуда и $k = \beta 1 = 1$.

Любая автотопия лупы $Q(\cdot)$ должна иметь вид (2.6). Поэтому мы заключаем, что $T_1 T_2 = (R_k^{-1},\ L_l^{-1},\ 1)\alpha = (1, 1, 1)\alpha = \alpha$, т. е. $\beta = \alpha$ и α — автоморфизм лупы $Q(\cdot)$. Учитывая это обстоятельство, из (10.28) получаем:

$$\theta_a = I^{-1}\alpha I = \alpha, \tag{10.30}$$

так как любой автоморфизм α в любой лупе $Q(\cdot)$ коммутирует с подстановкой I.

Замечание. Равенство (10.29) превращается в тождество Муфанг (6.9), если $\theta_x = 1$ для любых x. Равенство $\theta_x = 1$ равносильно равенству $L_{I^{-1}x} L_x = 1$ в силу (10.30), т. е. $I^{-1}x(xz) = z$. Последнее равенство означает, что $Q(\cdot)$ IP-слева лупа. Следовательно, *если для IP-слева лупы $Q(\cdot)$ свойство $Q(\cdot)$ быть WIP-лупой является универсальным* (т. е. *любая лупа, изотопная* $Q(\cdot)$, *будет WIP-лупой*), *тогда $Q(\cdot)$ — лупа Муфанг.*

5. Лупа $Q(\cdot)$ называется *скрещенно-обратимой*, если верно следующее тождество:

$$xy \cdot Ix = y, \tag{10.31}$$

где $x \cdot Ix = 1$. Скрещенно-обратимые лупы (кратко CI-лупы) были введены Арци [5].

Покажем, что *если в $Q(\cdot)$ CI-свойство является универсальным, то $Q(\cdot)$ — абелева группа.*

Сначала докажем следующие простые утверждения, которые имеют место в CI-лупах:

а) *Тождество* (10.31) *эквивалентно тождеству*

$$x(yIx) = y. \tag{10.32}$$

Действительно, тождество (10.31) в трансляциях записывается следующим образом:

$$R_{Ix} L_x = 1,$$

откуда следует, что $L_x R_{Ix} = 1$. Последнее равенство эквивалентно равенству (10.32). Аналогично доказывается, что из (10.32) следует (10.31).

$$\text{б)}\quad R_x^{-1} = L_{I^{-1}x}\,, \quad L_x^{-1} = R_{Ix}\,. \tag{10.33}$$

Оба равенства следуют из (10.31).

в) *Уравнение* $ax = b$ *имеет решение* $x = b/a$, *а уравнение* $ya = b$ — *решение* $y = I^{-1}b \cdot a$. Это утверждение следует из определения CI-лупы.

г) *Подстановка* I *является автоморфизмом в* CI-*лупе*:

$$I(xy) = IxIy. \tag{10.34}$$

Действительно, из определения (10.31) CI-лупы следует

$$(xy \cdot Ix)\, I(xy) = Ix,$$

откуда

$$yI\,(xy) = Ix. \tag{10.35}$$

На основании свойства в) CI-луп из равенства (10.35) находим (10.34). Попутно мы доказали, что *всякая* CI-*лупа является* WIP-*лупой*.

Приступим к доказательству утверждения, сформулированного выше. Пусть $Q\,(\circ)$ — лупа, изотопная лупе $Q\,(\cdot)$:

$$x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y.$$

Как и в п. 4, находим $x^{(-1)}$ из $x \circ x^{(-1)} = e$, где $e = ba$. Имеем

$$R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}x^{(-1)} = e,$$

$$L_b^{-1}x^{(-1)} = eI\,(R_a^{-1}x) = L_eIR_a^{-1}x,$$

$$x^{(-1)} = L_bL_eIR_a^{-1}x. \tag{10.36}$$

Если $Q\,(\circ)$ тоже CI-лупа, имеем

$$x \circ (y \circ x^{(-1)}) = y.$$

Переходим к операции $(\cdot)$

$$R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}\,(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x^{(-1)}) = y.$$

Применяем свойство в)

$$L_b^{-1}\,(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x^{(-1)}) = yIR_a^{-1}x,$$

откуда в силу (10.36) получим

$$L_b^{-1}\,(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}L_bL_eI\,R_a^{-1}x) = y \cdot IR_a^{-1}x.$$

После сокращений находим

$$L_b^{-1}\,(R_a^{-1}y \cdot L_ex) = yx,$$

откуда

$$L_b\,(yx) = R_a^{-1}y \cdot L_ex,$$

или, учитывая (10.33), получим

$$b(yx) = (I^{-1}ay)(ex). \tag{10.37}$$

Введем обозначения: $I^{-1}a = u$, $e = ba = v$, следовательно, $uv = I^{-1}a(ba) = b$ ввиду (10.32). Значит, (10.37) превращается в

$$uv \cdot yx = uy \cdot vx. \tag{10.38}$$

Таким образом, $Q(\cdot)$ — медиальная лупа. Но всякая медиальная лупа является абелевой группой. Действительно, при $x = u = 1$ получаем $vy = yv$. При $y = 1$ равенство (10.38) превращается в $uv \cdot x = u \cdot vx$. Следовательно, $Q(\cdot)$— абелева группа.

6. Наконец, докажем следующее предложение: *в лупе $Q(\cdot)$ свойство левой обратимости тогда и только тогда универсально, когда $Q(\cdot)$ — левая лупа Бола.*

Пусть $Q(\cdot)$ IP-слева лупа

$$^{-1}x(xy) = y, \tag{10.39}$$

где $^{-1}xx = 1$.

Пусть дана лупа $Q(\circ)$, изотопная лупе $Q(\cdot)$:

$$x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y,$$

и пусть она будет IP-слева лупой:

$$^{(-1)}x \circ (x \circ y) = y.$$

Преобразуем последнее равенство

$$R_a^{-1}(^{(-1)}x) \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) = y.$$

Но из (10.39) следует, что $L_b^{-1} = L_{^{-1}b}$, поэтому мы имеем

$$R_a^{-1}(^{(-1)}x) \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot {^{-1}b}y) = y.$$

Заменяем ^{-1}b на c, x на $R_a x = xa$ и пусть $t = R_a^{-1}(^{(-1)}(xa))$:

$$t\,[c(x \cdot cy)] = y. \tag{10.40}$$

Элемент t не зависит от y, поэтому положим $y = 1$ в (10.40):

$$t(c \cdot xc) = 1,$$

откуда находим

$$c \cdot xc = t^{-1}. \tag{10.41}$$

С другой стороны, из (10.40) в силу того, что $Q(\cdot)$ IP-слева лупа, получаем

$$c(x \cdot cy) = t^{-1}y,$$

откуда, учитывая (10.41), находим

$$c\,(x \cdot cy) = (c \cdot xc)\,y.$$

Так как c может быть любым элементом из Q, мы доказали, что $Q\,(\cdot)$ — (левая) лупа Бола. Обратное см. гл. VI, п. 6°.

Примечания

[1] Одним из общих результатов, касающихся G-луп, является следующий: если A — G-лупа, то и обратные лупы A^{ρ} и A^{λ} (см. определение обратных луп в гл. I, п. 4°) также являются G-лупами [18].

[2] Из теоремы 10.2, как показал Брак [32], следует, что любая простая лупа Муфанг является G-лупой. Лупа $Q\,(\cdot)$ называется *простой*, если она не содержит других нормальных подлуп, кроме единичной или самой лупы. Пример неассоциативных простых луп Муфанг построен Пэйджем [63].

[3] Отметим следующую G-лупу (являющуюся лупой Муфанг): мультипликативная лупа $Q'\,(\cdot)$ альтернативного кольца с делением $Q\,(+,\ \cdot)$, где Q' — множество ненулевых элементов из Q (определение альтернативного кольца с делением см., например, [47]) является G-лупой [31].

[4] Здесь мы следуем изложению из [21].

[5] Скрещенно-обратимые лупы (CI-лупы) являются естественным обобщением абелевых групп. Они подробно изучены Арци [3—6]. В последней статье изучаются автотопии CI-луп, метод исследования такой же, как у Брака для IP-луп (см. гл. V, п. 4°).

Глава XI

КВАЗИГРУППЫ И СЕТИ

1°. *Алгебраические сети.* Понятие квазигруппы имеет естественную интерпретацию с помощью так называемых сетей [1].

Геометрическая сеть $\mathfrak{A}$ состоит из трех семейств L_i ($i = 1, 2, 3$) кривых, обладающих следующими двумя свойствами: 1) кривые одного семейства не пересекаются и 2) кривые различных семейств пересекаются только в одной точке. С помощью гомеоморфного преобразования, т. е. с помощью непрерывной деформации, два семейства L_1 и L_2 могут быть приведены к двум семействам L_1' и L_2', состоящим из параллельных прямых, причем прямые из L_1' перпендикулярны к прямым из L_2', иначе говоря, L_1' и L_2' образуют координатную сеть: прямые из L_1' имеют уравнение $x = \mathrm{const}$, а из L_2' $y = \mathrm{const}$. Тогда кривые из третьего семейства L_3' превращаются в семейство L_3' линий уровня некоторой функции $z = f(x, y)$ (рис. 1).

Если $\mathfrak{A}$ гомеоморфна сети $\mathfrak{A}'$, состоящей из семейств L_i' параллельных прямых, то $\mathfrak{A}$ называется *регулярной сетью.*

Понятие геометрической сети можно обобщить, именно мы дадим понятие алгебраической сети или просто сети [2].

Определение 1. Система $\mathfrak{A}$ объектов двух видов — линии и точки с одним отношением инцидентности называется *сетью*, если выполняются следующие условия.

Пусть совокупность L всех линий из $\mathfrak{A}$ разбита на три непересекающихся класса L_1, L_2 и L_3. Тогда:

1) две линии различных классов инцидентны только одной точке из $\mathfrak{A}$;

2) каждая точка из $\mathfrak{A}$ инцидентна одной и только одной линии каждого класса.

Как общепринято, вместо слова «инцидентна» будем употреблять выражения «проходит через» или «лежит на» и т. д.

Линии класса L_i ($i = 1, 2, 3$) назовем *i-линиями.* Так как в силу аксиомы 2 линии одного класса не пересекаются, удобно назвать их параллельными.

Докажем, что существует взаимное однозначное соответствие между линиями двух различных классов — L_i и L_j.

Действительно, возьмем какую-нибудь k-линию ($k \neq i$, j) и обозначим ее через l; k-линия l пересекает i-линию l' только в одной точке A. Через точку A проходит единственная j-линия l''. Тогда $l' \leftrightarrow l''$ — взаимно однозначное соответствие между всеми линиями классов L_i и L_j.

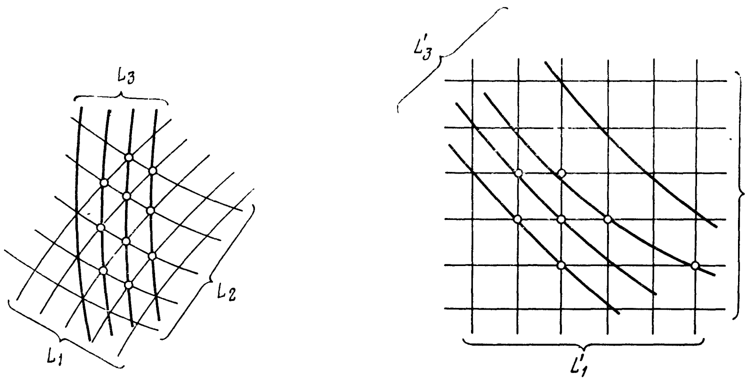


Рис. 1

Одновременно мы получили следующее утверждение: существует взаимно однозначное соответствие между всеми точками, лежащими на любой линии, и всеми линиями одного класса. Это утверждение следует из того, что соответствие $l' \leftrightarrow A$, рассмотренное выше, устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми линиями класса L_i и всеми точками k-линии l.

Из этого же утверждения мы получаем еще одно взаимно однозначное соответствие — между всеми точками двух различных линий (не обязательно принадлежащих одному классу).

Все это дает нам право ввести понятие *порядка сети* — это число (или мощность множества линий) линии одного класса (либо число точек, лежащих на одной линии).

Пусть $Q = \{a, b, c, ...\}$ — некоторое множество и пусть порядок Q совпадает с порядком данной сети $\mathfrak{A}$, т. е. существует взаимно однозначное соответствие между всеми элементами множества Q и всеми линиями любого класса из $\mathfrak{A}$. Это позволяет обозначать каждую i-линию некоторым элементом из Q. Так, если i-линии l соответствует элемент $a \in Q$, обозначим ее через (i, a).

Множество Q превращается в квазигруппу, если мы рассмотрим следующую операцию. Пусть a, $b \in Q$. Тогда линии $(1, a)$ и $(2, b)$ пересекаются в единственной точке A, а через эту точку проходит единственная линия $(3, c)$. В таком случае мы положим $c = ab$.

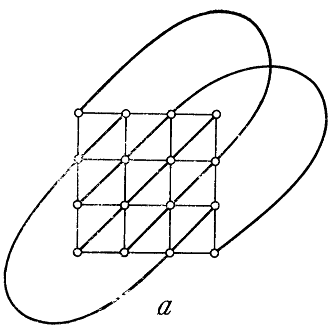
Уравнение $ax = b$ имеет единственное решение в $Q(\cdot)$. Действительно, линии $(1, a)$ и $(3, b)$ пересекаются в единственной точке B и через эту точку проходит единственная 2-линия. Пусть она отмечена элементом $d \in Q$, т. е. через B проходит линия $(2, d)$. Согласно определению операции в $Q(\cdot)$ мы должны иметь $ad = b$, т. е. уравнение $ax = b$ имеет единственное решение $x = d$. Аналогично доказывается, что уравнение $ya = b$ имеет единственное решение. Таким образом, $Q(\cdot)$ — квазигруппа.

Квазигруппу $Q(\cdot)$ назовем *координатной квазигруппой для сети* $\mathfrak{A}$.

Обратно, пусть $Q(\cdot)$ — квазигруппа. Докажем, что она является координатной квазигруппой некоторой сети $\mathfrak{A}$. Определим $\mathfrak{A}$ следующим образом. Точкой P сети $\mathfrak{A}$ будем называть упорядоченную пару элементов $P = [a, b]$. Пара (i, a), где $i = 1, 2, 3$ и $a \in Q$, называется i-линией. Инцидентность определяется так: точка $[a, b]$ инцидентна только линиям $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, ab)$. Легко видеть, что $\mathfrak{A}$ является сетью, а $Q(\cdot)$ — координатной квазигруппой этой сети.

Замечание. Точки $A = [a, b]$ и $B = [c, d]$ находятся на одной 1-линии, если $a = c$, на одной 2-линии, если $b = d$, и на одной 3-линии, если $ab = cd$. Поэтому 1-, 2- и 3-линии можно обозначать соответственно уравнениями $x = a$, $y = b$, $xy = s$, где $s = ab = cd$.

Пример. Пусть $Q = \{0, 1, 2, 3\}$ и пусть $Q(\cdot)$ — циклическая группа. Тогда группе $Q(\cdot)$ соответствует сеть $\mathfrak{A}$ (рис. 2).



а

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

б

Рис. 2

Здесь вертикальные и горизонтальные линии являются 1- и 2-линиями соответственно, остальные будут линиями 3-го класса. Точки сети $\mathfrak{A}$ обозначены на рис. 2 кружочками.

При соответствующем обозначении линий из $\mathfrak{A}$ элементами из Q координатная квазигруппа $Q(\cdot)$ становится лупой. Для этого выбираем произвольную точку O и обозначим линии, проходящие через O, элементом $1 \in Q$. Обозначим остальные 3-линии так, как показано на рис. 3. Возьмем линию $(3, x)$. Она пересекает линии $(1,1)$ и $(2,1)$ соответственно в точках A и B.

Через точку A проходит единственная 2-линия, обозначим ее $(2, x)$, через точку B проходит единственная 1-линия, которую обозначим $(1, x)$. Таким образом, все линии из $\mathfrak{A}$ будут отмечены элементами из Q. Координатная квазигруппа $Q(\cdot)$ при таком обозначении линий будет лупой: через точку A проходят линии $(1, 1), (2, x)$ и $(3, x)$, следовательно, $1\,x = x$; через точку B проходят линии $(1, x)$, $(2, 1)$ и $(3, x)$, следовательно, $x\,1 = x$.

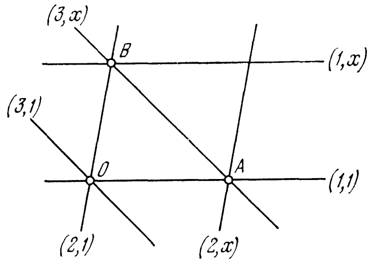


Рис. 3

При различных обозначениях линий сети $\mathfrak{A}$ элементами из Q получаем различные координатные квазигруппы. Легко видеть, что *все эти квазигруппы изотопны*. Действительно, если при одном обозначении через точку A проходят линии $(1, x)$, $(2, y)$, $(3, z)$, то при другом обозначении через эту же точку проходят те же линии, но по-иному обозначенные: $(1, \alpha x)$, $(2, \beta y)$, $(3, \gamma z)$, где α, β, γ — некоторые перемещения элементов множества Q. При первом обозначении получаем координатную квазигруппу $Q(\cdot)$, причем $xy = z$, а при втором — квазигруппу $Q(\circ)$. На этот раз мы имеем равенство $\alpha x \circ \beta y = \gamma z$ или $\alpha x \circ \beta y = \gamma(xy)$, а это означает, что $Q(\cdot)$ и $Q(\circ)$ изотопны. Таким образом, все координатные квазигруппы одной сети $\mathfrak{A}$ изотопны между собой.

Из всего сказанного вытекает, что каждой сети соответствует класс всех изотопных между собой квазигрупп. Поэтому *каждому свойству сети соответствует некоторое свойство всего класса изотопных между собой квазигрупп*, иначе говоря, соответствующее свойство квазигруппы инвариантно при изотопии.

Заметим еще следующее обстоятельство. Как отмечено выше, в определении координатной квазигруппы играет роль то обстоятельство, какой класс линий считается первым классом (т. е. какие линии считаются 1-линиями) и т. д. Пусть линии из сети $\mathfrak{A}$ обозначены каким-то образом и пусть линии из классов L_i $(i = 1, 2, 3)$ будут соответственно i-линиями. Операцию соответствующей координатной квазигруппы обозначим через $(\cdot)$. Пусть линии из L_1 при этом будут 1-линиями, линии из L_2 3-линиями, а линии из L_3 будем считать 2-линиями. Операцию соответствующей квазигруппы обозначим через $(\circ)$. Пусть через точку A проходят линии l_1, l_2, l_3 из классов L_1, L_2, L_3 соответственно и пусть они обозначены через x, y, z соответственно. В силу выбора i-линии в $Q(\cdot)$ мы имеем $xy = z$, а в $Q(\circ)$ имеем $x \circ z = y$, следовательно, $(\circ) = (\cdot)^{-1}$, т. е. *квазигруппа $Q(\circ)$ обратна справа к квазигруппе*

$Q(\cdot)$. Следовательно, *переименованию классов соответствует обратная квазигруппа к данной квазигруппе* [3].

2°. *Условия замыкания.* Интерпретация квазигрупп с помощью сетей дает возможность изучить классы изотопных между собой квазигрупп. Одна из задач, которая здесь возникает, связана с понятием регулярности сети. Известно [10, 11], что геометрическая сеть регулярна, если в ней выполняются так называемые условия замыкания. Здесь мы дадим общее понятие условий замыкания в квазигруппах и сетях и рассмотрим подробнее некоторые из них.

Определение 2. Пусть $Q(\cdot)$ — квазигруппа. Мы говорим, что в $Q(\cdot)$ выполняется условие замыкания (D), если из равенств

$$x_{p_i} \cdot y_{q_i} = x_{r_i} y_{s_i} \, (i = 1, 2, \ldots, k-1) \tag{11.1}$$

следуют равенства

$$x_{p_j} \cdot y_{q_j} = x_{r_j} y_{s_j} \, (j = k, k+1, \ldots, n), \tag{11.2}$$

причем

$$x_{p_j}, x_{r_j} \in X = \{x_{p_i}, x_{r_i}\}, \; y_{q_j}, y_{s_j} \in Y = \{y_{q_i}, y_{s_i}\}, \; i = 1, 2, \ldots, k-1, \; j = k, k+1, \ldots, n.$$

Прежде чем перейти к примерам, докажем следующую теорему:

Теорема 11.1. *Если в квазигруппе $Q(\cdot)$ выполняется условие замыкания (D), то и в любой изотопной квазигруппе также выполняется условие замыкания (D)*, иными словами, *условия замыкания инвариантны при изотопии.*

Действительно, пусть $Q(\cdot)$ и $Q(\circ)$ изотопны

$$xy = \gamma^{-1}(\alpha x \circ \beta y),$$

тогда равенства (11.1) превращаются в

$$\gamma^{-1}(\alpha x_{p_i} \circ \beta y_{q_i}) = \gamma^{-1}(\alpha x_{n_i} \circ \beta y_{s_i}) \, (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

или

$$\alpha x_{p_i} \circ \beta y_{q_i} = \alpha x_{r_i} \circ \beta y_{s_i} \, (i = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{11.3}$$

Введем обозначения: $\alpha x_l = u_l$, $\beta y_l = v_l$, тогда (11.3) принимает вид

$$u_{p_i} \circ v_{q_i} = u_{r_i} \circ v_{s_i} \, (i = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{11.4}$$

Равенства (11.2) превращаются в

$$u_{p_j} \circ v_{q_j} = u_{r_j} \circ v_{s_j} \, (j = k, k+1, \ldots, n). \tag{11.5}$$

Следовательно, из (11.4) имеем (11.5), т. е. в $Q(\circ)$ выполняется то же условие (D).

Рассмотрим сеть $\mathfrak{A}$, для которой $Q(\cdot)$ является координатной квазигруппой. Каждое из равенств (11.1) означает, что некоторые точки находятся на определенных 3-линиях.

Замечание. Будем говорить также, что условие (D) выполняется в сети $\mathfrak{A}$.

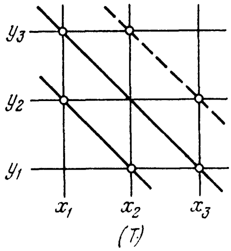


Рис. 4

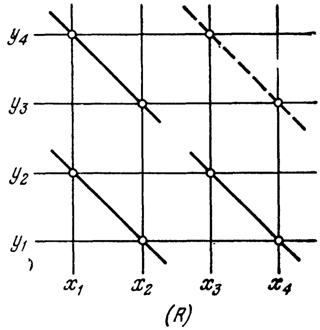


Рис. 5

Наиболее известными условиями замкнутости в случае геометрических сетей, обеспечивающих их регулярность, являются:

1) *условия Томсена* (T) (рис. 4)

$$\left.\begin{matrix} x_1y_2 = x_2y_1, \\ x_1y_3 = x_3y_1, \end{matrix} \rightarrow x_2y_3 = x_3y_2; \right\} \tag{11.6}$$

2) *условия Рейдемейстера* (R) (рис. 5)

$$\left.\begin{matrix} x_1y_2 = x_2y_1, \\ x_1y_4 = x_2y_3, \rightarrow x_3y_4 = x_4y_3; \\ x_3y_2 = x_4y_1, \end{matrix}\right\} \tag{11.7}$$

3) *три условия Бола* (рис. 6)

$$\left.\begin{matrix} \begin{array}{l} x_1y_2 = x_2y_1, \\ x_1y_3 = x_2y_2, \\ x_3y_2 = x_4y_1, \\ \hline x_3y_3 = x_4y_2. \end{array} & \begin{array}{l} x_1y_2 = x_2y_1, \\ x_1y_4 = x_2y_3, \\ x_2y_2 = x_3y_1, \\ \hline x_2y_4 = x_3y_3. \end{array} & \begin{array}{c} x_1y_2 = x_2y_1, \\ x_1y_4 = x_2y_3 = x_3y_2 = x_4y_1, \\ \hline x_3y_4 = x_4y_3; \end{array} \end{matrix}\right\} \tag{11.8}$$

обозначим для краткости эти условия через (B_r), (B_l) и (B) соответственно;

4) *условия шестиугольника* (H)[4] (рис. 7)

$$\begin{array}{c} x_1y_2 = x_2y_1, \\ x_1y_3 = x_2y_2 = x_3y_1, \\ \hline x_2y_3 = x_3y_2. \end{array}$$

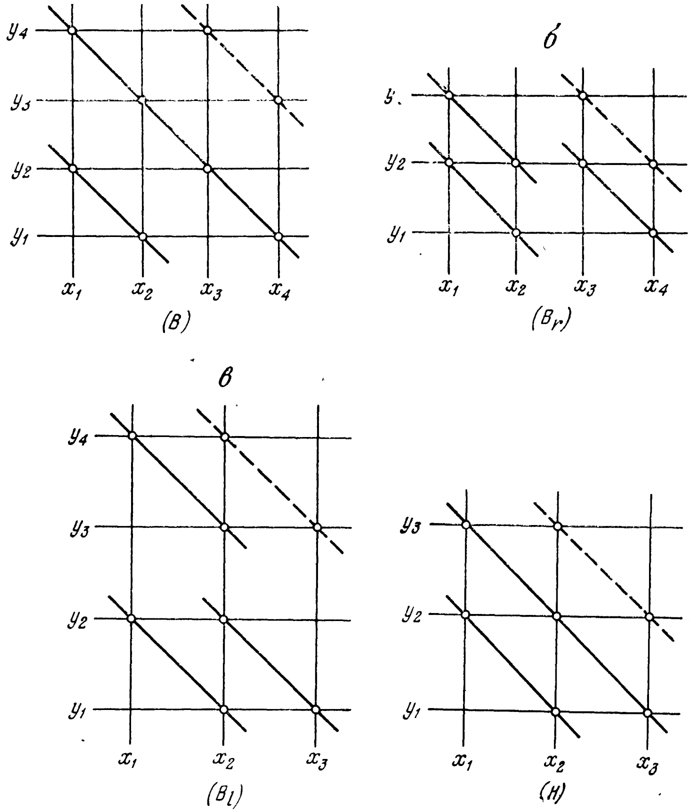


Рис. 6. *(а, б, в)* Рис. 7

Рассмотрим каждое условие в отдельности.

1. *Условие Томсена* (T).

Теорема 11.2. *В квазигруппе $Q(\cdot)$ тогда и только тогда выполняется условие Томсена, когда $Q(\cdot)$ изотопна абелевой группе.*

В силу теоремы 11.1 достаточно рассмотреть лупу, в которой выполняется условие (T); поэтому пусть $Q(\cdot)$— лупа с единицей 1.

В равенство (11.6) подставим $x_1 = 1$. Получаем

$$y_2 = x_2 y_1, \quad y_3 = x_3 y_1 \to x_2 y_3 = x_3 y_2$$

или

$$x_2 \cdot x_3 y_1 = x_3 \cdot x_2 y_1. \tag{11.9}$$

Положим в (11.9) $y_1 = 1$, тогда получаем $x_2 x_3 = x_3 x_2$, т. е. $Q(\cdot)$ коммутативна. Тогда

$$x_2(y_1 x_3) = x_2(x_3 y_1) = x_3(x_2 y_1) = (x_2 y_1) x_3,$$

т. е. $Q(\cdot)$ ассоциативна. Следовательно, $Q(\cdot)$ — абелева группа.

Обратно, пусть $Q(\circ)$ — квазигруппа, изотопная некоторой абелевой группе $Q(\cdot)$. Докажем, что в $Q(\circ)$ выполняется условие (T). Вместо $Q(\circ)$ снова возьмем изотопную ей абелеву группу $Q(\cdot)$ и докажем, что в $Q(\cdot)$ выполняется условие (T). Пусть

$$x_1y_2 = x_2y_1, \quad x_1y_3 = x_3y_1,$$

тогда

$$x_2y_3 = x_2(x_1^{-1}x_3y_1) = x_1^{-1}x_3 \cdot x_2y_1 = x_1^{-1}x_3 \cdot x_1y_2 = x_3y_2,$$

т. е. в $Q(\cdot)$ условие (T) имеет место. В силу теоремы 11.1 условие (T) имеет место и в $Q(\circ)$, а также в сети $\mathfrak{A}$, соответствующей квазигруппе $Q(\circ)$.

2. *Условие Рейдемейстера* (R).

Теорема 11.3. *В квазигруппе $Q(\cdot)$ тогда и только тогда выполняется условие Рейдемейстера, когда $Q(\cdot)$ изотопна группе.*

Как и в предыдущей теореме, можно считать, что $Q(\cdot)$ — лупа. Положим в (11.7) $x_2 = y_2 = 1$. Получаем

$$x_1 = y_1, \; x_1y_4 = y_3, \quad x_3 = x_4y_1 \rightarrow x_3y_4 = x_4y_3.$$

Но

$$x_3y_4 = (x_4y_1)\,y_4, \; x_4y_3 = x_4(x_1y_4) = x_4\,(y_1y_4).$$

Следовательно,

$$(x_4y_1)\,y_4 = x_4\,(y_1y_4),$$

т. е. $Q(\cdot)$ — группа.

Обратно, пусть $Q(\cdot)$ — группа и пусть в $Q(\cdot)$ выполняются равенства

$$x_1y_2 = x_2y_1, \; x_1y_4 = x_2y_3, \; x_3y_2 = x_4y_1.$$

Тогда имеем

$$x_3y_4 = (x_4y_1 \cdot y_2^{-1})\,(x_1^{-1} \cdot x_2y_3) = x_4\,(y_1y_2^{-1}x_1^{-1}\,x_2)y_3.$$

В силу первого равенства из (11.7) получаем

$$x_3y_4 = x_4y_3,$$

т. е. в $Q(\cdot)$ выполняется условие (R).

3. *Условия Бола* (B_l).

Теорема 11.4. *В квазигруппе $Q(\cdot)$ тогда и только тогда выполняется условие Бола (B_l), когда $Q(\cdot)$ изотопна левой лупе Бола.*

Доказательство. Как и выше, докажем теорему для случая, когда $Q(\cdot)$ — лупа. Положим в равенствах (11.8) $x_2 = y_2 = 1$.

Получаем

$$x_1 = y_1, \; x_1y_4 = y_3, \; 1 = x_4y_1 \rightarrow y_4 = x_4y_3.$$

Следовательно, $x_4 = {}^{-1}y_1$ и $y_3 = x_1y_4 = y_1y_4$, откуда мы должны получить

$$y_4 = x_4y_3 ={}^{-1} y_1 \cdot y_1y_4,$$

т. е. $Q(\cdot)$ — IP-слева.

Пусть $Q(\circ)$ — любая лупа, изотопная лупе $Q(\cdot)$. В ней также выполняется условие (B_l), следовательно, в лупе $Q(\cdot)$ свойство левой обратимости универсально. Поэтому в силу утверждения 5, доказанного в предыдущей главе (п. 4°), лупа $Q(\cdot)$ должна быть левой лупой Бола.

Обратно, пусть $Q(\cdot)$ — левая лупа Бола. Докажем, что в ней выполняется условие (B_l). Пусть

$$\left.\begin{aligned} x_1y_2 &= x_2y_1,\\ x_1y_4 &= x_2y_3,\\ x_2y_2 &= x_4y_1.\end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

Из (11.10) находим y_4, учитывая, что лупа Бола IP-слева:

$$y_4 = \overset{-1}{x_1}\cdot x_2y_3.$$

Следовательно,

$$x_2y_4 = x_2(\overset{-1}{x_1}\cdot x_2y_3),$$

откуда в силу тождества Бола получаем

$$x_2y_4 = (x_2\cdot \overset{-1}{x_1}x_2)y_3. \tag{11.11}$$

Из (11.10) находим y_2:

$$y_2 = \overset{-1}{x_1}\cdot x_2y_1.$$

Таким образом,

$$x_2y_2 = x_2(\overset{-1}{x_1}\cdot x_2y_1) = (x_2\cdot \overset{-1}{x_1}x_2)\, y_1. \tag{11.12}$$

Сравнивая (11.12) с третьим равенством из (11.10), мы заключаем, что

$$x_2\cdot \overset{-1}{x_1}x_2 = x_4. \tag{11.13}$$

Заменяя найденное значение для x_4 из (11.13) в (11.11), находим $x_2y_4 = x_4y_3$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается теорема для условия Бола (B_r).

Следствие. *Если в сети $\mathfrak{A}$ одновременно выполняются условия замыкания (B_l) и (B_r), то любая координатная квазигруппа $Q(\cdot)$ сети $\mathfrak{A}$ изотопна лупе Муфанг.*

Действительно, лупа $Q(\circ)$, изотопная квазигруппе $Q(\cdot)$, является левой и правой лупами Бола. По свойству 6 луп Бола (см. гл. VI, п. 6°) лупа $Q(\circ)$ будет лупой Муфанг.

Условимся о следующих обозначениях. Если из того, что условие (D) имеет место в квазигруппе $Q(\cdot)$ (или в сети $\mathfrak{A}$), следует выполнение условия (D') в квазигруппе $Q^{\sigma}(\cdot)$, где ${}^{\sigma}(\cdot)$ — одна из операций, обратных к операции $(\cdot)$ (см. гл. I, п. 4°), то мы будем писать

$$^{\sigma}(D) \Rightarrow (D').$$

В частности,

$$(D) \Rightarrow (D')$$

означает, что если в $Q(\cdot)$ выполняется условие (D), то в $Q(\cdot)$ выполняется условие (D'). Если $(D) \Rightarrow (D')$ и $(D') \Rightarrow (D)$, то условия (D) и (D') назовем *эквивалентными* и будем писать

$$(D) \Leftrightarrow (D').$$

Перейдем к изучению условия (B).

4. *Условие Бола* (B).

Условие замыкания (B) в квазигруппе $Q(\cdot)$ состоит в следующем: Из равенств

$$x_1y_2 = x_2y_1, \quad x_1y_4 = x_2y_3 = x_3y_2 = x_4y_1 \tag{11.14}$$

следует

$$x_3y_4 = x_4y_3. \tag{11.15}$$

Докажем следующее утверждение:

Теорема 11.5. 1) ${}^{-1}(B) \Leftrightarrow (B_l)$, 2) $(B)^{-1} \Leftrightarrow (B_r)$.

Действительно, обозначим общее значение произведений из равенств (11.14) и (11.15) через t, s и p соответственно. Тогда из первого равенства (11.14) получаем

$$x_1 = t \,/\, y_2, \quad x_2 = t \,/\, y_1,$$

где $a \,/\, b = c$ равносильно $cb = a$, т. е. $(/) = {}^{-1}(\cdot)$. Операцию $(\cdot)^{-1}$ обозначим через $(\backslash)$.

Из второго равенства (11.14) находим

$$x_1 = s \,/\, y_4, \quad x_2 = s \,/\, y_3, \quad x_3 = s \,/\, y_2, \quad x_4 = s \,/\, y_1.$$

Из равенства (11.15) получаем

$$x_3 = p \,/\, y_4, \quad x_4 = p \,/\, y_3.$$

Таким образом, имеем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t \,/\, y_2 = s \,/\, y_4, \\ x_2 &= t \,/\, y_1 = s \,/\, y_3, \\ x_3 &= s \,/\, y_2 = p \,/\, y_4, \end{aligned}\right\} \tag{11.16}$$

откуда должно следовать

$$x_4 = s \,/\, y_1 = p \,/\, y_3. \tag{11.17}$$

Обозначим $t, s, p, y_1, y_2, y_3, y_4$ соответственно через x_1', x_2', x_4', y_4' y_2', y_3', y_1'. Тогда равенства (11.16) превращаются в

$$\left.\begin{aligned} x_1' / y_2' &= x_2' / y_1', \\ x_1' / y_4' &= x_2' / y_3', \\ x_2' / y_2' &= x_4' / y_1', \end{aligned}\right\} \tag{11.18}$$

из которых должно следовать (переобозначая (11.17))

$$x_2' / y_4' = x_4' / y_3'. \tag{11.19}$$

Сравнивая (11.18) и (11.19) с (11.8), заключаем, что в $Q\,(/)$ выполняется условие (B_l).

Теорема 11.6. *В квазигруппе $Q\,(\circ)$ тогда и только тогда выполняется условие замыкания (B), когда $Q\,(\circ)$ изотопна лупе $Q\,(\cdot)$ с тождеством*

$$z\,[(xy) \backslash z] = (z \,/\, y)\,(x \backslash z).$$

Доказательство. Пусть в квазигруппе $Q\,(\circ)$ выполняется условие (B), тогда и в лупе $Q\,(\cdot)$, изотопной квазигруппе $Q\,(\circ)$, тоже выполняется условие (B). Положим в (11.14) $y_2 = x_3^{-1}$, $y_1 = x_4^{-1}$, тогда из равенств

$$x_1 x_3^{-1} = x_2 x_4^{-1},$$

$$x_1 y_4 = x_2 y_3 = x_3 x_3^{-1} = x_4 x_4^{-1} = 1 \tag{11.20}$$

должно следовать

$$x_3 x_1^{-1} = x_4 x_2^{-1},$$

так как из (11.20) получаем $y_4 = x_1^{-1}$, $y_3 = x_2^{-1}$. Пусть $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = d$ и, следовательно, из $ac^{-1} = bd^{-1}$ следует $ca^{-1} = db^{-1}$. В частности, при $c = 1$ получаем, что из $a = bd^{-1}$ должно вытекать $a^{-1} = db^{-1}$, т. е. выполняется тождество

$$(bd^{-1})^{-1} = db^{-1}. \tag{11.21}$$

Если в (11.21) положим $d = 1$, то

$$(d^{-1})^{-1} = d,$$

поэтому, заменяя d на d^{-1} в (11.21), получаем

$$(bd)^{-1} = d^{-1}\, b^{-1}. \tag{11.22}$$

Таким образом, мы доказали следующее предложение: *свойство подстановки* I: $x \to x^{-1}$ *быть обратным автоморфизмом является универсальным в лупе* $Q(\cdot)$, *если в* $Q(\cdot)$ *выполняется условие* (B).

Пусть $Q(\circ)$ — любая лупа, изотопная лупе $Q(\cdot)$. В лупе $Q(\circ)$ также должно выполняться тождество (11.22)

$$(x \circ y)^{(-1)} = y^{(-1)} \circ x^{(-1)}. \tag{11.23}$$

Пусть

$$x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y \tag{11.24}$$

и

$$x \circ x^{(-1)} = e,$$

где $e = ba$. Найдем сначала $x^{(-1)}$. Имеем

$$R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}x^{(-1)} = e. \tag{11.25}$$

Определим отображение I_c следующим равенством:

$$x \cdot I_c x = e. \tag{11.26}$$

Из (11.26) следует, что I_c — подстановка множества Q и, в частности,

$$I_1 = I,$$

где 1 — единица лупы $Q(\cdot)$. Итак, из (11.25) находим

$$L_b^{-1}x^{(-1)} = I_e R_a^{-1}x,$$

откуда

$$x^{(-1)} = L_b I_e R_a^{-1}x. \tag{11.27}$$

Используя последнее равенство и равенство (11.24), преобразуем (11.23)

$$L_b I_e R_a^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) = R_a^{-1}(L_b I_e R_a^{-1}y) \cdot L_b^{-1}(L_b I_e R_a^{-1}x).$$

Следовательно,

$$L_b I_e R_a^{-1}(xy) = \varphi y \cdot I_e x, \tag{11.28}$$

где

$$\varphi = R_a^{-1} L_b I_e R_a^{-1} L_b.$$

Равенство $(x^{-1})^{-1} = x$ универсально: оно имеет место в любой лупе, изотопной лупе $Q(\cdot)$, поэтому

$$(x^{(-1)})^{(-1)} = x,$$

или в силу (11.27) получаем

$$(L_b I_e R_a^{-1})^2 = 1.$$

Тогда

$$L_b I_e \varphi = L_b I_e (R_a^{-1} L_b I_e R_a^{-1} L_b) = (L_b I_e R_a^{-1})^2 L_b = L_b,$$

следовательно,

$$\varphi = I_e^{-1}.$$

Итак, из (11.28) следует

$$L_b I_e R_a^{-1}(xy) = I_e^{-1} y \cdot I_e x. \qquad (11.29)$$

Пусть $I = 1$ в (11.29)

$$L_b I_e R_a^{-1} x = I_e^{-1} 1 \cdot I_e x.$$

Найдем $I_e^{-1} y = t$. Имеем $I_e t = y$, $t \cdot I_e t = ty$, откуда $ty = e$ (см. (11.26)).

В частности, для $y = 1$ получаем $t \cdot 1 = e$, следовательно,

$$L_b I_e R_a^{-1} x = e \cdot I_e x = L_e I_e x,$$

и тождество (11.29) принимает вид

$$L_e I_e (xy) = I_e^{-1} y \cdot I_e x. \qquad (11.30)$$

Мы уже видели, что равенство $I_e^{-1} y = t$ эквивалентно равенству $ty = e$, таким образом,

$$I_e^{-1} y = e \,/\, y, \qquad (11.31)$$

где $(/) = {}^{-1}(\cdot)$. Из (11.26) находим

$$I_e x = x \setminus e, \qquad (11.32)$$

где $(\setminus) = (\cdot)^{-1}$. Поэтому мы можем переписать (11.30) в следующем виде (заменяем e на z):

$$z\,[(xy) \setminus z] = (z \,/\, y)(x \setminus z). \qquad (11.33)$$

Заметим, что $z = e$ может быть любым элементом множества Q, поэтому (11.33) выполняется при любых $x, y, z \in Q$.

Обратно, покажем, что если в лупе $Q(\cdot)$ имеет место тождество (11.33), то в $Q(\cdot)$ выполняется условие (B).

Пусть

$$x_1 y_2 = x_2 y_1, \quad x_1 y_4 = x_2 y_3 = x_3 y_2 = x_4 y_1 = z. \qquad (11.34)$$

Тогда из (11.34) следует

$$y_4 = x_1 \setminus z, \; y_3 = x_2 \setminus z, \; x_3 = z \,/\, y_2,$$

или в силу равенств (11.31) и (11.32) получаем

$$y_4 = I_z x_1, \; y_3 = I_z x_2, \; x_3 = I_z^{-1} y_2.$$

Найдем x_4y_3:

$$x_4y_3 = x_4 \cdot I_z x_2 = L_{x_4} I_z x_2.$$

Из равенства (11.34) получим x_2: $R_{y_1}x_2 = x_1y_2$, откуда $x_2 = R_{y_1}^{1}\ (x_1y_2)$.
Поэтому

$$x_4y_3 = L_{x_4} I_z R_{y_1}^{-1}(x_1x_2). \qquad (11.35)$$

Найдем $L_e I_e R_a$, где a, e — любые элементы из Q:

$$L_e I_e R_a x = L_e I_e (xa) = L_e\,[(xa) \diagdown e] = e\,[(xa) \diagdown e] = (e \diagup a)(x \diagdown e).$$

Здесь мы использовали (11.32) и (11.33). Таким образом,

$$L_e I_e R_a = L_b I_e,$$

где $b = e \diagup a$, т. е. $e = ba$. Из (11.35) находим

$$L_b I_e R_a^{-1} = L_e I_e.$$

Применим последнее равенство к (11.35), учитывая, что $x_4y_1 = z$ (см. (11.34)):

$$L_{x_4} I_z R_{y_1}^{-1} = L_z I_z.$$

Итак,

$$x_4y_3 = L_z I_z (x_1y_2) = z\,[(x_1y_2) \diagdown z] = (z \diagup y_2)(x_1 \diagdown z).$$

Учитывая (11.34), находим из последнего равенства $x_4y_3 = x_3y_4$, т. е. в $Q(\cdot)$ выполняется условие (B). Теорема доказана.

Следствие 1. *В лупе $Q(\cdot)$ свойство подстановки I быть обратным автоморфизмом будет универсальным тогда и только тогда, кода в $Q(\cdot)$ выполняется тождество* (11.33).

Следствие 2. *Если лупа $Q(\cdot)$ удовлетворяет тождеству* (11.33), *то и любая лупа, изотопная лупе $Q(\cdot)$, также удовлетворяет этому тождеству.*

Иными словами, *свойство* (11.33) *универсально*.

3°. *Аксиомы Муфанг — Бола и сердцевина лупы.* Условия Бола (B_l) и (B_r) тесно связаны с левым, соответственно правым IP-свойством. Как мы уже знаем, лупа $Q(\cdot)$ называется IP-слева, если для любых x и y верно равенство

$$^{-1}x\,(xy) = y,$$

где $^{-1}x x = 1, 1$ — единица лупы $Q(\cdot)$.

Посмотрим, как формулируется это условие для сети $\mathfrak{A}$, координатной лупой которой является $Q(\cdot)$.

Пусть точка I имеет координаты $[1, 1]$ и пусть AB произвольная 3-линия $(3, x)$. Тогда через точку A' (рис. 8) проходят линии $(1, x')$, $(2, x)$ и $(3, 1)$ при некотором x'. Следовательно, $x'x = 1$,

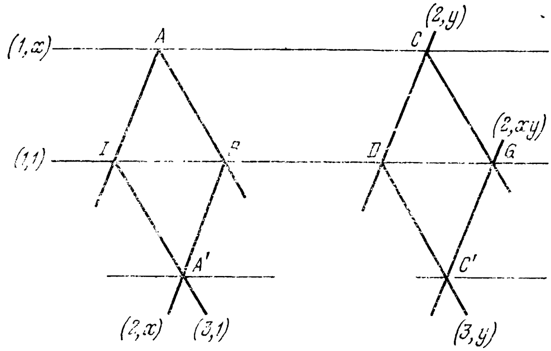


Рис. 8

т. е. $x' = {}^{-1}x$. На линии $(1, x)$ берем произвольную точку $C = [x, y]$, следовательно, $CD = (2, y)$, $CG = (3, xy)$ и через C' проходят $(1, x)$, $(2, xy)$, $(3, y)$ при некотором x''. Опять в силу определения координатной лупы $Q(\cdot)$ получаем

$$x''(xy) = y.$$

Чтобы $Q(\cdot)$ была лупой IP-слева, необходимо и достаточно, чтобы $x'' = {}^{-1}x$, т. е. 1-линия, проходящая через A', должна пройти и через C' при любом выборе точки C на $(1, x)$. Приходим к такому понятию. Зафиксируем i-линию l и пусть m — произвольная i-линия ($i = 1, 2, 3$). Берем на m произвольную точку P. Через точку P проведем остальные две линии PR и PS (рис. 9).

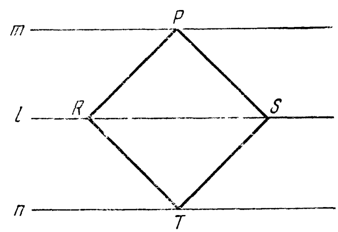


Рис. 9

Через точку R проходит единственная линия, параллельная линии PS, а через S — единственная линия, параллельная линии PR; они пересекаются в точке T. Через точку T проходит единственная i-линия. Назовем, следуя Браку [33], i-линию n, проходящую через T, *отражением* [5] линии m от линии l. В частности, при $m = l$ будем считать, что отражение m от l есть тоже l. Вообще говоря, отражение n зависит от положения точки P. Если отражение не зависит от P, то говорят, что в сети $\mathfrak{A}$ выполняется *i-я аксиома Муфанг — Бола для линии l.*

Вернемся к лупе $Q(\cdot)$, являющейся IP-слева. Пользуясь понятием отражения линии, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Лемма 11.1. *Необходимым и достаточным условием, чтобы лупа $Q(\cdot)$ с единицей 1 была IP-слева, является выполнение 1-й* *аксиомы Муфанг — Бола для 1-линии* (1,1) *в сети* $\mathfrak{A}$, *координатной лупой которой является* $Q(\cdot)$.

Необходимость уже была доказана. Докажем достаточность.

Пусть $m = (1, x)$ и пусть $P = [x, y]$. Следовательно, через P проходят линии $(1, x)$, $(2, y)$ и $(3, xy)$. Тогда $R = [1, y]$, $S = [1, xy]$. Пусть, далее, отражение линии m от линии $l = (1, 1)$ будет $n = (1, x')$. Через точку T, таким образом, проходят линии $(1, x')$, $(2, xy)$ и $(3, y)$, следовательно, $x'(xy) = y$. При $y = 1$ получаем $x'x = 1$, т. е. $x' = {}^{-1}x$, и поэтому мы получаем равенство ${}^{-1}x\,(xy) = y$, которое означает, что $Q(\cdot)$ — IP-слева.

Аналогичное утверждение имеет место для луп IP-справа.

Мы будем говорить, что *i-я аксиома Муфанг — Бола* имеет место в сети $\mathfrak{A}$, если справедлива i-я аксиома Муфанг — Бола для любой i-линии l из $\mathfrak{A}$.

Предположим, что в $\mathfrak{A}$ выполняется 1-я аксиома Муфанг — Бола (рис. 10).

Пусть $m = (1, y)$, $l = (1, x)$ и пусть n является отражением 1-линии m от 1-линии l. Так как в $\mathfrak{A}$ выполняется 1-я аксиома Муфанг — Бола, то положение 1-линии n не зависит от точки P, а только от положения 1-линий m и l, т. е. отметка 1-линии n зависит только от x и y. Пусть $n = (1, x \overset{1}{+} y)$, где $\overset{1}{+}$ — знак некоторой новой операции на множестве Q. Тогда $R = [x, p]$ и $S = [x, t]$ для некоторого t. Точка T должна иметь координаты $[x \overset{1}{+} y, t]$. Так как PS и RT 3-линии, то

$$yp = xt,$$

$$xp = (x \overset{1}{+} y)\,t. \tag{11.36}$$

Определение 3. Пусть $Q(\cdot)$ — координатная квазигруппа сети $\mathfrak{A}$ с 1-й аксиомой Муфанг — Бола. Тогда $Q(\overset{1}{+})$ назовем 1-*сердцевиной* квазигруппы.

Пусть $Q(\cdot)$ — лупа с единицей 1. Выберем p так, чтобы $t = 1$: $yp = x$. Тогда $x \overset{1}{+} y = xp = x\,(y \backslash x)$, и таким образом получено определение сердцевины из гл. IX, п. 2°.

Рис. 11 и 12 дают определения 2- и 3-*сердцевин*: если в $\mathfrak{A}$ выполняется 2-аксиома Муфанг — Бола, то отражение $(2, y)$ от $(2, x)$ дает 2-сердцевину $Q(\overset{2}{+})$, причем $x \overset{2}{+} y$ зависит от x и y следующим образом:

$$py = tx, \quad px = t\,(x \overset{2}{+} y).$$

Если в $\mathfrak{A}$ выполняется 3-я аксиома Муфанг — Бола, то отражение $(3, y)$ от $(3, x)$ дает определение 3-сердцевины $Q(\overset{3}{+})$, причем

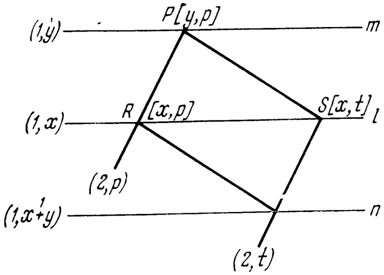


Рис. 10

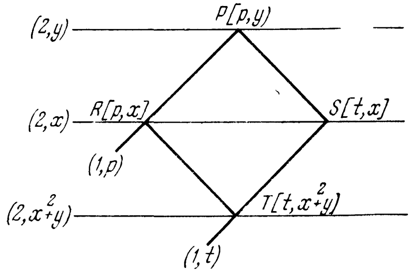


Рис. 11

имеет место

$$pt = y, \quad pv = vt = x, \quad vu = x \overset{3}{+} y.$$

Прежде чем перейти к изучению сердцевины, докажем следующую теорему:

Теорема 11.7. *i-я аксиома Муфанг — Бола эквивалентна условию замыкания (B_l), если $i = 1$; (B_r) — если $i = 2$; (B) — если $i = 3$.*

Докажем теорему для $i = 1$. Пусть в координатной квазигруппе $Q(\cdot)$ сети $\mathfrak{A}$ с 1-й аксиомой Муфанг — Бола выполняются равенства

$$x_1y_2 = x_2y_1, \quad x_2y_2 = x_4y_1, \quad x_1y_4 = x_2y_3.$$

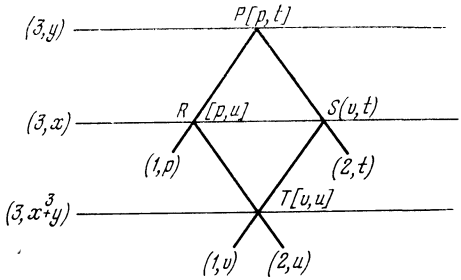


Рис. 12

Из $x_1y_2 = x_2y_1$ следует в виду (11.36)

$$x_2y_2 = (x_2 \overset{1}{+} x_1)\, y_1, \tag{11.37}$$

а из $x_1y_4 = x_2y_3$ получаем

$$x_2y_4 = (x_2 \overset{1}{+} x_1)\, y_3. \tag{11.38}$$

Сравнивая (11.37) с $x_2y_2 = x_4y_1$, получаем $x_2 \overset{1}{+} x_1 = x_4$, следовательно, из (11.38) и последнего равенства вытекает $x_2y_4 = x_4y_3$.

Обратно, пусть в $Q(\cdot)$ выполняется условие замыкания (B_l). Докажем, что в сети $\mathfrak{A}$ с координатной квазигруппой $Q(\cdot)$ выполняется 1-я аксиома Муфанг — Бола. Для этого достаточно показать, что в системе равенств

$$\left.\begin{aligned} yp &= xt, \\ xp &= ut \end{aligned}\right\} \tag{11.39}$$

элемент u зависит только от x и y: $u = x \overset{1}{+} y$. Пусть имеем также равенства

$$\left.\begin{aligned} yp' &= xt', \\ xp' &= vt'. \end{aligned}\right\} \tag{11.40}$$

Положим $x_1 = y$, $x_2 = x$, $x_4 = u$, $y_1 = t$, $y_2 = p$, $y_3 = t'$, $y_4 = p$, тогда равенства (11.39) и первое равенство из (11.40) превращаются в первые три равенства из (11.8). Но в силу (B_l) получаем $x_2y_4 = x_4y_3$, т. е. $xp' = ut'$. Сравнивая полученное равенство со вторым равенством из (11.40), находим, что $u = v$. Это означает, что u не зависит от p, а только от x и y. Если, например, $p' = x$, то t, а следовательно, и v, зависят только от x и y, поэтому $u\,(= v)$ также зависит только от x и y. Теорема доказана.

Следствие. *Если в сети $\mathfrak{A}$ выполняется 1-я аксиома Муфанг — Бола, то любая координатная лупа $Q(\cdot)$ сети $\mathfrak{A}$ является левой лупой Бола.*

Утверждение следует из теорем 11.4 и 11.7.

4°. *Сердцевина лупы Бола.* Переходим к изучению сердцевин. Предположим, что в сети $\mathfrak{A}$ выполняется 1-я аксиома Муфанг — Бола. Как было показано выше, любая координатная квазигруппа $Q(\cdot)$ изотопна левой лупе Бола.

Сердцевина определяется в любой координатной квазигруппе $Q(\cdot)$ сети $\mathfrak{A}$. Естественно возникает вопрос: какова зависимость между сердцевинами всех координатных квазигрупп сети $\mathfrak{A}$.

Оказывается имеет место

Теорема 11.8. *Сердцевины* всех координатных квазигрупп сети $\mathfrak{N}$ с 1-й аксиомой Муфанг — Бола изоморфны между собой.*

Действительно, пусть $Q(\cdot)$ и $Q(\circ)$ — две координатные квазигруппы сети $\mathfrak{A}$ и пусть $Q(+)$ и $Q(\oplus)$ соответственно их сердцевины. Тогда в силу их определения имеем

$$\left.\begin{aligned} yp &= xt, \\ xp &= (x+y)\,t, \\ y\circ p' &= x\circ t', \\ x\circ p' &= (x\oplus y)\circ t'. \end{aligned}\right\} \tag{11.41}$$

* В дальнейшем мы рассматриваем только 1-сердцевины и поэтому «1» опускаем.

Пусть $u \circ v = \gamma^{-1}(\alpha u \cdot \beta v)$. Тогда равенства (11.41) превращаются в

$$\gamma^{-1}(\alpha y \cdot \beta p') = \gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta t'),$$
$$\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta p') = \gamma^{-1}(a(x \oplus y) \cdot \beta t'),$$

откуда

$$\alpha y \cdot \beta p' = \alpha x \cdot \beta t',$$
$$\alpha x \cdot \beta p' = \alpha(x \oplus y) \cdot \beta t'.$$

Ввиду определения сердцевины $Q(+)$ получаем

$$\alpha x + \alpha y = \alpha(x \oplus y),$$

а это означает, что $Q(\oplus)$ и $Q(+)$ изоморфны.

Теорема 11.9. *Сердцевина любой координатной квазигруппы сети $\mathfrak{A}$ с 1-й аксиомой Муфанг — Бола является леводистрибутивным группоидом.*

В силу предыдущей теоремы 11.4 достаточно доказать теорему для сердцевины лупы Бола*. В этом случае было показано, что

$$x + y = x(y \setminus x).$$

Так как лупа Бола является IP-слева, то $y \setminus x = y^{-1}x$ и, следовательно,

$$x + y = x(y^{-1}x). \tag{11.42}$$

Удобно обозначать отражение 1-линии $m = (1, y)$ от 1-линии $(1, x)$ следующим образом (см. рис. 11):

$$x, y : P \to R,\ S,\ T.$$

Заметим при этом, что P однозначно определяет точки R, S, T. Используя координаты, можно записать

$$[y,\ p] \to [x,\ p],\ [x,\ t],\ [x + y,\ t].$$

Так как PT и RS являются 3-линиями, то в силу (11.36) должны иметь место равенства

$$yp = xt,\ xp = (x + y)t.$$

Доказательство теоремы 11.9. Рассмотрим следующие отражения (рис. 13):

$$y, z : A \to H, E, I, \tag{11.43}$$
$$x, y + z : I \to F, K, L, \tag{11.44}$$
$$x, y : E \to F, B, G, \tag{11.45}$$
$$x, z : A \to C, B, D, \tag{11.46}$$
$$x + y,\ x + z : D \to G, M, L'. \tag{11.47}$$

* Здесь имеется в виду левая лупа Бола.

Отражение (11.46) должно иметь вид

$$x, z : A \to C, B', D. \tag{11.48}$$

Но из (11.43) и (11.44) следует, что A, E, B находятся на одной 3-линии, а из (11.48) следует, что B' находится на этой же 3-линии. Так как B и B' одновременно находятся и на одной 1-линии $(1, x)$, то они совпадают.

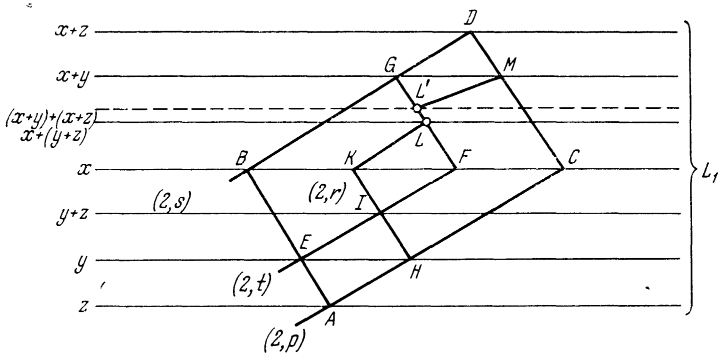


Рис. 13

В координатах отражения (11.43) — (11.47) имеют вид

$$[z, p] \to [y, p], [y, t], [y+z, t], \tag{11.49}$$

$$[y+z, t] \to [x, t], [x, r], [x+(y+z), r],$$

$$[y, t] \to [x, t], [x, s], [x+y, s],$$

$$[z, p] \to [x, p], [x, s], [x+z, s],$$

$$[x+z, s] \to [x+y, s], [x+y, r'], [(x+y)+(x+z), r'] \tag{11.50}$$

Докажем, что

$$r = r'. \tag{11.51}$$

Для этого заметим, что HI является 3-линией, это следует из определения отражения (11.43). Из (11.44) мы находим, что IK тоже 3-линия, т. е. H и K лежат на одной 3-линии. В таком случае имеет место равенство

$$yp = xr.$$

Так как A — произвольная точка из $(1, z)$, положим $p = 1$:

$$y = xr,$$

отсюда находим в силу левой обратимости лупы Бола, что

$$r = x^{-1}y. \tag{11.52}$$

Из (11.46) и (11.47) заключаем, что CD и DM являются 3-линиями, т. е. C и M находятся на одной 3-линии; следовательно, имеем

$$xp = (x + y) r',$$

откуда ввиду равенства $p = 1$ получаем

$$(x + y) r' = x. \tag{11.53}$$

Найдем $(x + y) r$, учитывая (11.42) и (11.52) и тождество Бола:

$$(x + y) r = (x \cdot y^{-1} x)(x^{-1} y) = x [y^{-1} (x \cdot x^{-1} y)] = x(y^{-1} y) = x.$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (11.53), устанавливаем равенство (11.51).

Из (11.44), (11.45) и (11.47) следует, что FL, LG и GL' являются 3-линиями, следовательно, F, G, L и L' находятся на одной 3-линии. С другой стороны, из (11.43) и (11.50) и из того, что $r = r'$, вытекает, что K, M, L, L' находятся на одной 2-линии, а именно на $(2, r)$. Таким образом, 3-линия $FGLL'$ и 2-линия $KMLL'$ имеют общие точки L и L', а это возможно только тогда, когда $L = L'$, откуда следует, что

$$x + (y + z) = (x + y) + (x + z).$$

Теорема доказана.

Найдем условия, при которых $Q\,(+)$ является квазигруппой.

Теорема 11.10. *Необходимым и достаточным условием, чтобы сердцевина лупы Бола $Q\,(\cdot)$ была квазигруппой, является условие: отображение $x \to x^2$ должно быть подстановкой множества Q.*

Необходимость условия получается немедленно: если $Q\,(+)$ — квазигруппа, то уравнение $x + 1 = a$ имеет единственное решение, т. е. $x\,(1^{-1} x) = a$ или $x^2 = a$ имеет единственное решение для любых $a \in Q$. Обозначим решение этого уравнения через $a^{1/2}$.

Прежде чем доказать достаточность условия, сформулированного в теореме, необходимо доказать справедливость следующих двух соотношений:

$$(x^{1/2})^{-1} = (x^{-1})^{1/2}, \tag{11.54}$$

$$(x + y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}. \tag{11.55}$$

Для доказательства (11.54) используем левый альтернативный закон $x \cdot xy = x^2 \cdot y$, который имеет место в любой лупе Бола:

$$(x^{-1})^2 x^2 = (x^{-1} x^{-1})(xx) = x^{-1}(x^{-1} \cdot xx) = x^{-1} x = 1,$$

откуда

$$(x^{-1})^2 = (x^2)^{-1}. \tag{11.56}$$

Пусть $x^2 = y$, тогда из равенства (11.56) получаем $(x^{-1})^2 = y^{-1}$, откуда $x^{-1} = (y^{-1})^{1/2}$, или $(y^{1/2})^{-1} = (y^{-1})^{1/2}$. Элемент y одновременно с x может быть любым элементом множества Q, так как $x \to x^2$ является подстановкой множества Q. Другое доказательство можно получить, если учесть, что в лупе Бола любой элемент порождает ассоциативную подлупу (см. например, [11]).

Для доказательства (11.55) найдем $(x^{-1} + y^{-1})(x + y)$. Имеем

$$(x^{-1} + y^{-1})(x + y) = (x^{-1} \cdot yx^{-1})(x \cdot y^{-1}x) = \\ = x^{-1} \{y[x^{-1}(x \cdot y^{-1}x)]\} = x^{-1}(y \cdot y^{-1}x) = x^{-1}x = 1,$$

откуда следует равенство (11.55).

Достаточность. Пусть $x \to x^2$ — подстановка множества Q. Докажем, что уравнение

$$a + y = b \tag{11.57}$$

имеет единственное решение для любых $a, b \in Q$.

Пусть y_0 — решение уравнения (11.57). Тогда (11.57) в силу определения операции $(+)$ принимает вид

$$a \cdot y_0^{-1}a = b,$$

откуда

$$(a \cdot y_0^{-1}a)\, a^{-1} = ba^{-1},\ a(y_0^{-1} \cdot aa^{-1}) = ba^{-1},$$

$$ay_0^{-1} = ba^{-1},\ y_0^{-1} = a^{-1} \cdot ba^{-1},$$

$$y_0 = (a^{-1} \cdot ba^{-1})^{-1}, \tag{11.58}$$

или

$$y_0 = (a^{-1} + b^{-1})^{-1}.$$

Следовательно,

$$y_0 = a + b. \tag{11.59}$$

Проверим, что y_0, определенное равенством (11.58), является решением уравнения (11.57):

$$a \cdot y_0^{-1}a = a[(a^{-1} \cdot ba^{-1})a] = a[a^{-1}(b \cdot a^{-1}a)] = a(a^{-1}b) = b.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$x + a = b. \tag{11.60}$$

Предположим, что x_0 является решением уравнения (11.60). Тогда из (11.60) следует

$$x_0(a^{-1}x_0) = b. \tag{11.61}$$

Пусть $a^{-1} = c$, тогда $(x_0 \cdot cx_0)\, c^{1/2} = bc^{1/2}$, откуда

$$c^{1/2}[x_0(c \cdot x_0c^{1/2})] = c^{1/2} \cdot bc^{1/2}. \tag{11.62}$$

Преобразуем левую часть равенства (11.62)

$$c^{1/2}[x_0(c^{1/2}c^{1/2} \cdot x_0c^{1/2})] = c^{1/2}\{x_0[c^{1/2}(c^{1/2} \cdot x_0c^{1/2})]\} = \\ = (c^{1/2} \cdot x_0c^{1/2})(c^{1/2} \cdot x_0c^{1/2}) = (c^{1/2} \cdot x_0c^{1/2})^2 = (c^{1/2} + x_0^{-1})^2.$$

Правая часть (11.62) равняется $c^{1/2} + b^{-1}$, таким образом

$$c^{1/2} + x_0^{-1} = (c^{1/2} + b^{-1})^{1/2}. \qquad (11.63)$$

Находим x_0^{-1} из (11.63) с помощью равенства (11.59): $x_0^{-1} = c^{1/2} + (c^{1/2} + b^{-1})^{1/2}$, откуда $x_0 = [c^{1/2} + (c^{1/2} + b^{-1})^{1/2}]^{-1}$, или, используя равенства (11.54) и (11.55), получаем

$$x_0 = (c^{1/2})^{-1} + [(c^{1/2} + b^{-1})^{1/2}]^{-1},\ x_0 = (c^{-1})^{1/2} + [(c^{-1})^{1/2} + b]^{1/2}.$$

Принимая во внимание, что $c = a^{-1}$, окончательно находим

$$x_0 = a^{1/2} + (a^{1/2} + b)^{1/2}. \qquad (11.64)$$

Переходы от (11.61) к (11.63), а затем к (11.64) обратимы, откуда заключаем, что решение уравнения (11.60) существует, так как равенство (11.61) не что иное, как $x_0 + a = b$. Теорема доказана.

Теоремы 11.9 и 11.10 обобщают соответственно теоремы 9.5 и 9.4 для луп Муфанг.

Отметим следующее свойство сердцевины $Q(+)$:

$$x + (x + y) = y. \qquad (11.65)$$

Действительно, комбинируя равенство $a + y_0 = b$ и (11.58), получаем

$$b = a + y_0 = a + (a + b).$$

Возникает вопрос, какова лупа, изотопная сердцевина $Q(+)$ лупы Бола $Q(\cdot)$, в которой выполняется условие теоремы 11.10. Имеет место следующая

Теорема 11.11. *Пусть в лупе Бола $Q(\cdot)$ выполняется условие теоремы* 11.10 *и пусть $Q(+)$ — сердцевина лупы $Q(\cdot)$. Тогда квазигруппа $Q(+)$ изотопна некоторой лупе Бола.*

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 9.11: в леводистрибутивной квазигруппе $Q(+)$ имеем $L_x^2 = 1$ в силу равенства (11.65).

Примечания

[1] Понятие сети, по-видимому, впервые введено Томсеном в 1929 г. (см. [23]).

[2] Понятие сети, данное здесь, является частным случаем понятия k-сети для $k = 3$. k-сеть определяется как и 3-сеть $\mathfrak{A}$, но L разбивается на k непересекающихся классов $L_1, L_2, \ldots, L_k$, удовлетворяющих аксиомы 1 и 2. Понятие k-сети при $k \geqslant 4$ тесно связано с системой взаимно ортогональных квазигрупп (см. гл. VII, п. 4°, определение 5). Подробности о k-сетях приводятся у Брака [31, 33], а также у Пиккерта [61].

[3] Отсюда вытекает, что сеть $\mathfrak{A}$ определяет квазигруппу с точностью до изотопии и парастрофии (см. примечание 7 к гл. I).

[4] Об условии (H). Если в лупе $Q(\cdot)$ выполняется условие (H), то $x^{-1} = {}^{-1}x$, и это свойство является универсальным. Более того, все такие лупы моноассоциативны, т. е. любой элемент порождает ассоциативную подгруппу (см., например, [10]).

[5] Таким образом, отражение является некоторым преобразованием сети $\mathfrak{A}$ (при наличии первой аксиомы Муфанг — Бола). Другие преобразования в сетях (без дополнительных условий) рассмотрены Арци [7], именно рассматриваются преобразования, аналогичные преобразованиям движения в обычных евклидовых плоскостях.

ЗАДАЧИ

Сформулируем ряд задач по теории квазигрупп, которые до сих пор, насколько это известно автору, не решены и решение которых представляет интерес.

1. Найти необходимые и достаточные условия, чтобы специальная лупа (гл. III, п. 1°) была изотопна левой F-квазигруппе. Выполняется ли какое-нибудь тождество в специальных лупах? Каким лупам изотопны двусторонние F-квазигруппы (гл. III, п. 5°)?

2. Пусть $Q(\cdot)$ — группа и пусть $x \circ y = z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \ldots z_n^{\varepsilon_n}$, где $z_i = x$ или y, $\varepsilon_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). При каких значениях ε_i группоид $Q(\circ)$ будет квазигруппой?

3. Квазигруппа $Q(\cdot)$ называется *квазигруппой Стейна* [76], если в $Q(\cdot)$ выполняется тождество $x \cdot xy = yx$. Каким лупам они изотопны?

4. Квазигруппу $Q(A)$ назовем *σ-квазигруппой*, если ${}^{\sigma}A = A$, где ${}^{\sigma}A$ — обратная операция для A (гл. I, п. 4°). Если ${}^{\sigma}A = A^T$(A^T — изотоп квазигруппы A), то будет ли A изотопной некоторой σ-квазигруппе [72]?

5. Построить и развить теорию гомотопий для квазигрупп (гл. IV, п. 4°).

6. Построить теорию расширений для квазигрупп (см. гл. V, п. 2°, скрещенное произведение квазигрупп, а также [26, 2, 90]).

7. Распространить теоремы о продолжении групп на любые лупы (в частности, на лупы Муфанг и на другие классы луп).

8. Существуют ли леводистрибутные квазигруппы, изотопные лупам, отличным от лупы Бола (гл. IX)?

9. Если на предыдущий вопрос возможен положительный ответ, то возникает задача описания таких луп, в частности, требуется указать, какие тождества выполняются в них.

10. Какие необходимые и достаточные условия следует наложить на лупу, чтобы ее сердцевина (гл. IX, п. 2°) была леводистрибутивным группоидом (квазигруппой)?

11. В каких лупах свойство быть специальной (гл. III, п. 1°) является универсальным (гл. X, п. 4°)?

12. Найти классы G-луп, отличные от описанных в гл. X, п. 1°. Описать класс всех G-луп (например, с помощью тождеств).

13. Найти другие условия замыкания в сетях (гл. XI, п. 2°), построить общую теорию условий замыкания.

14. Исследовать лупы с тождеством $z\,[(xy)\diagdown z] = (z/y)\,(x\diagdown z)$ (гл. XI, п. 2°, теорема 11.6).

15. Будет ли бесконечная антикоммутативная дистрибутивная квазигруппа транзитивной (гл. VIII, теорема 8.4)?

16. Пусть $S(\cdot)$ — полугруппа с сокращением (т. е. из $xy = xz$ или $yx = zx$ следует $y = z$). Можно ли ее включить в квазигруппу (лупу) с нетривиальным тождеством? (Тождество нетривиально, если существует неодноэлементная квазигруппа, в которой оно не выполнятся.)*

17. Каким необходимым и достаточным условиям должен удовлетворять группоид $Q(\cdot)$, чтобы он был вложим в лупу Муфанг, в IP-лупу, в дистрибутивную квазигруппу*?

18. При наличии каких тождеств в квазигруппе $Q(\cdot)$ следует, что $Q(\cdot)$ — лупа? (Примером такого тождества может служить ассоциативность.)*

19. Существуют ли лупы с наперед заданным типом $(\mathscr{L}, \Phi, \mathscr{R})$ и с заданными пересечениями $\mathscr{L} \cap \Phi$, $\Phi \cap \mathscr{R}$, $\mathscr{L} \cap \mathscr{R}$, $\mathscr{L} \cap \Phi \cap \mathscr{R}$?

20. Каковы квазигруппы, или лупы, у которых все конгруэнции нормальны? (В IP-квазигруппах все конгруэнции нормальны, см., например, [22].)

---

* Предложена И. Е. Бурмистровичем.

ЛИТЕРАТУРА *

1. A. A. Albert (А. А. Алберт). Quasigroups I.— Trans. Amer. Math Soc., 1943, 54, 507—519.
2. A. A. Albert. Quasigroups II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1944, **55**, 401—419.
3. R. Artzy (Р. Арци). On loops with a special property.— Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, N 3, 448—453.
4. R. Artzy. Croosed—inverse and related loops.— Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 91, N 3, 480—492.
5. R. Artzy. On automorphic—inverse properties in loops.— Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, N 4, 588—591.
6. R. Artzy. Relations between loop identities.— Proc. Amer. Math. Soc., 1960, **11**, N 6, 847—851.
7. R. Artzy. Net motions and loops.— Arch. Math., 1963, **14**, N 2, 95—101.
8. R. Artzy. Isotopy and parastrophy of quasigroups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, N 3, 429—431.
9. J. Aczél (Я. Ацель). Vorlesungen über Functionalgleichungen und ihre Anwendungen. Berlin, VEB Deutsch Verl. Wiss., 1961.
10. J. Aczél. Kvázicsoportok — hálózatok - nomogramok (Квазигруппы, сети, номограммы).— Matem. lapok, 1964, **15**, 1—3, 114—162.
11. J. Aczél, V. D. Belousov, M. Hosszú (Я. Ацель, В. Д. Белоусов, М. Хоссу). Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups.— Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1960, **11**, N 1—2, 127—136.
12. В. Д. Белоусов. Производные операции и ассоциаторы в лупах.— Матем. сб., 1958, 45 (87), 1, 51—70.
13. В. Д. Белоусов. Транзитивные дистрибутивные квазигруппы.— Укр. мат. ж., 1958, **10**, № 1, 13—22.
14. В. Д. Белоусов. Регулярные подстановки в квазигруппах.— Уч. зап. Бельцкого пед. ин-та, 1958, вып. 1, 39—49.
15. В. Д. Белоусов. Об одном классе квазигрупп.— Уч. зап. Бельцкого пед. ин-та, 1960, вып. 5, 29—46.
16. В. Д. Белоусов. О структуре дистрибутивных квазигрупп.— Матем. сб., 1960, 50 (92), 3, 267—298.
17. В. Д. Белоусов. Леводистрибутивные квазигруппы.— Изв. вузов (матем.), 1963, 1 (32), 16—20.
18. В. Д. Белоусов. Взаимнообратные квазигруппы и лупы.— Изв. АН МССР, 1963, № 11, 3—10.
19. В. Д. Белоусов. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами.— Усп. матем. наук, 1965, **20**, 1 (121), 75—146.

* Здесь приводится только литература, использованная в книге. Другие названия можно найти в монографии Р. Брака [31], см. также Реферативный журнал «Математика», отдел «Алгебра».

20. В. Д. Белоусов. Две задачи по дистрибутивным квазигруппам.— В сб. Исследования по алгебре и математическому анализу. Кишинев, 1965, 109—112.
21. В. Д. Белоусов. Лупы с ядром индекса два.— В сб. Исследования по алгебре и математическому анализу. Кишинев, 1965, стр. 11—21.
22. Г. Биркгоф. Теория структур. М., 1952.
23. G. Bol. (Г. Бол). Gewebe und Gruppen.— Math. Ann., 1937, 414—431.
24. R. H. Bruck (Р. Х. Брак). Some results in the theory of quasi groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 55, 19—52.
25. R. H. Bruck. Contributions to the theory of loops.— Trans. Amer. Math. Soc., 1946, 60, 245—354.
26. R. H. Bruck. An extension theory for a certain class of loops.— Bull. Amer. Math. Soc., 1951, 57, 11—26.
27. R. H. Bruck. Loops with transitive automorphism groups.— Pacif. J. Math., 1951, 1, 481—483.
28. R. H. Bruck, E. Kleinfeld (Р. Х. Брак, Е. Клейнфелд). The structure of alternative division rings.— Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, N 6, 878—890.
29. R. Bruck (Р. Брак). Pseudoautomorphisms and Moufang loops.— Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 66—72.
30. R. Bruck, L. Paige (Р. Брак, Л. Пейдж). Loops whose inner mapping are automorphism.— Ann. of Math., 1956, 63, 308—323.
31. R. Bruck. A survey of binary systems. Berlin — Heidelberg — Göttingen, Springer Verlag, 1958.
32. R. Bruck. Some theorems on Moufang loops.— Math. Zeitsch., 1960, 73, N 1, 59—78.
33. R. Bruck. What is a loop? Studies in Math., v. 2, p. 59—99.
34. C. Burstin, W. Mayer (Ц. Бурстин, В. Мейер). Distributive Gruppen von endlicher Ordnung.— J. reine und angew. math., 1929, 160, 111—130.
35. R. Baer (Р. Бэр). Net and groups II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1940, 47, 435—439.
36. R. Baer. The homomorphism theorems for loops.— Amer. J. Math., 1945, 67, 450—460.
37. P. T. Bateman (П. Т. Бэйтман). A remark on infinite groups.— Amer. Math. Monthly, 1950, 57, 623—624.
38. G. E. Bates, F. Kiokemeister (Г. Е. Бэйтс, Ф. Киокемейстер). A note on homomorphic mappings of quasigroups into multiplicative systems.— Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, 1180—1185.
39. G. N. Garrison (Г. Н. Гаррисон). Quasigroups.— Ann. of Math., 1940, 41, 474—487.
40. G. N. Garrison. Note on invariant complexes of a quasigroup.— Ann. of Math., 1946, (2) 47, 50—55.
41. A. Ginzburg (А. Гинзбург). Systemes multiplicatifs de relations, Boucles quasi-associatives.— Compt. rend. Acad. Sci., 1960, 250, N 8, 1413—1416.
42. A. Ginzburg. A note on Cayley loops.— Canad. J. Math., 1964, 16, N 1, 77—81.
43. H. Griffin (Г. Гриффин). The abelian quasigroups.— Amer. J. Math., 1940, 62, 725—737.
44. T. Evans (Т. Иванс). Homomorphisms of non-associative systems.— J. London Math. Soc., 1949, 24, 254—260.
45. W. R. Cowell (В. Р. Кауэлл). Concerning a class of permutable congruence relations on loops.— Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, N 4, 583—588.
46. А. Г. Курош. Теория групп. М.— Л., Гостехиздат, 1953.
47. А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре. М., Физматгиз, 1962.

48. F. Levi, B. L. van der Waerden (Ф. Леви, Б. Л. Ван дер Варден). Über eine besondere Klasse von Gruppen.— Abh. Math. Sem. Hansisch. Univ., 1933, 9, 154—158.
49. H. Mann (Г. Манн). The construction of orthogonal latin squares.— Ann. Math. Stat., 1942, 13, 418—423.
50. G. Mattenet (Г. Маттене). Exemple d'équivalence régulière et simplifiable dans un quasi-groupe. — C. R. Acad. Sci., 1962, 255, 23, 3092—3094.
51. D. C. Murdoch (Д. Мёдоч). Quasigroups which satisfy certain generalized associative laws.— Amer. J. Math., 1939, 61, 509—522.
52. D. G. Murdoch. Structure of abelian quasigroups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1941 (49), 392—409.
53. D. G. Murdoch. Note on normality in quasigroups.— Bull. Amer. Math. Soc., 1941, 47, 134—138.
54. R. Moufang (Р. Муфанг). Zur Struktur von Alternativ Körpern.— Math. Ann., 1935, 110, 416—430.
55. B. H. Neumann (Б. Х. Нейман). On the commutativity of addition.— J. London Math. Soc., 1940, 15, 203—208.
56. M. Osborn (М. Осборн). A theorem on A-loop.— Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, N 3, 347—349.
57. M. Osborn. Loops with the weak inverse property.— Pacif. J. Math., 1960, 10, N 1, 295—304.
58. M. Osborn. New loops from old geometries.— Amer. Math. Monthly, 1961, 68, N 2, 103—107.
59. M. Osborn. Vector loops.— Illinois Journal of Math., 1961, 5, 4, 565—584.
60. E. T. Parker (Е. Т. Паркер). Orthogonal latin squares.— Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1959, 45, 6, 859—862.
61. G. Pickert (Г. Пиккерт). Projective Ebenen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955.
62. L. Paige (Л. Пэйдж). Complete mappings of finite groups.— Pacif. J. Math., 1951, 1, N 1, 111—116.
63. L. Paige. A class of simple Moufang lops.— Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, 471—482.
64. A. Sade (А. Сад). Quasigroupes obeissant à certains lois.— Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1957, 22, 151—184.
65. A. Sade. Quasigroupes automorphes par le groupe linéaire et géometrie finie.— J. reine angew. Math., 1958, 199, N 1—2, 100—120.
66. A. Sade. Quasigroupes parastrophiques. Expressions et identités.— Math. Nachr., 1959, 20, N 1—2, 73—106.
67. A. Sade. Entropie demosienne de multigroupoïdes et des quasigroupes.— Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1959, ser. I, 73, N 3, 302—309.
68. A. Sade. Produit direct singulier de quasigroupes orthogonaux et antiabéliens.— Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1960, ser. I, 74, N 2, 91—99.
69. A. Sade. Antiautotopie dans les quasigroupes.— Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1960, ser. I, 74, N 1, 5—11.
70. A. Sade. Paratopie et autoparatopie des quasigroupes.— Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1962, ser. I, 76, N 3, 88—96.
71. A. Sade. Semi-automorphisme de groupoïdes et de quasigroupes.— Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1962, ser. I, 76, N 3, 97—104.
72. A. Sade. Quelques problèmes non-résolus dans la théorie des groupes.— Mat. bibliot., 1963, 25, 71—72.
73. A. Sade. Le groupe d'antiautotopie et l'équation $Q(X, X^{-1}, l) = QP^{12} = Q$. — J. reine und angew. Math., 1964, 216, 3/4, 199—217.
74. S. K. Stein (Ш. К. Стейн). On the foundations of quasigroups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, 228—256.
75. S. K. Stein. On a construction of Hosszú.— Publ. Math. Debrecen, 1959, 6, N 1—2, 10—14.

76. S. K. S t e i n. Left distributive quasigroups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, N 4, 577—578.
77. Ю. И. С о р к и н. О дистрибутивных квазигруппах.— Уч. зап. МЗПИ, 1959, 3, 82—92.
78. А. К. С у ш к е в и ч. Теория обобщенных групп. Киев, 1937.
79. K. T o y o d a (К. Т о й о д а). On axioms of linear functions Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1941, 17, 221—227.
80. B. F i s c h e r (Б. Ф и ш е р). Distributive Quasigruppen endlincher Ordnung.— Math. Zeitschr., 1964, 83, 267—303.
81. C. F u l t o n, S. K. S t e i n (Ч. Ф у л т о н, Ш. К. С т е й н). The passage from geometry to algebra.— Math. Ann., 1957, 134, N 2, 140—142.
82. Е. А. Х а л е з о в. Автоморфизмы примитивных квазигрупп.— Матем. сб., 1961, 53(95) 3, 329—342.
83. M. H o s s z ú (М. Х о с с у). Nonsymmetric means.— Publ. Math. Debrecen, 1959, 6, 1—9.
84. M. H o s s z ú. Homogeneons groupoides.— Ann. Univ. Sci. Budapest, Math., 1960—1961, 3—4, 95—98.
85. М. Х о л л. Теория групп. М., ИЛ, 1962.
86. М. Х о л л. Комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1962.
87. M. H a l l, L. P a i g e (М. Х о л л, Л. П э й д ж). Complete mappings of finite groups.— Pacif. J. Math., 1955, 5, N 4, 541—549.
88. K. C u l i k (К. Ч у л и к). Poznámky k teorii operací.— Časop. pěstov. mat., 1960, 83, N 4, 474.
89. О. Ю. Ш м и д т. Избранные труды (Математика). М., 1959.
90. S. E i l e n b e r g, S. M a c L a n e (С. Э й л е н б е р г, С. М а к л е й н). Algebraic cohomology groups and loops.— Duke Math. J., 1947, 14, 435—463.
91. M. H. E t h e r i n g t o n (М. Х. Э т т е р и н г т о н). Non-associative arithmetics.— Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1949, 62A, 442—453.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Валентин Данилович Белоусов

Основы теории квазигрупп и луп

Утверждены к печати Институтом математики Академии наук Молдавской ССР

Редактор *Ю. И. Соркин*
Художник *Э. Л. Эрман*
Технический редактор *Ф. М. Хенох*

Сдано в набор 3/X1966 г. Подписано к печати 8/II 1967 г. Формат $60\times90^1/_{16}$. Уч.-изд. л. 11,3. Тираж 2800. Бумага типогр. № 2 кама. Тип. зак. 1397. Т-01082.

Цена 68 коп.

Издательство «Наука»
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
17	4 сн.	${}^{-1}A\,(A^{-1})$	${}^{-1}(A^{-1})$
18	10 св.	σA	${}^{\sigma}A$
20	4 св.	$(A^*)^{-I^{-1}}$	$(A^*)^{I^{-1}}$
169	4 св.	$L_{L^{-1}y}$	$L^{-1}_{L^{-1}y}$
177	14 св.	$(\cdot)\,T_x^{-1}$	$(\cdot)^{T_x^{-1}}$

В. Д. Белоусов