

**МЕТОДИКА  
РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ  
МЕХАНИКИ**

**Под редакцией  
проф. А. Н. МАТВЕЕВА**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1980**

Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Московского университета

Рецензенты:  
проф. Р. В. Телеснин, доц. В. И. Николаев

**Методика решения задач механики: Метод. пособие /**  
Белянкин А. Г., Матвеев А. Н., Сараева И. М., Устинова  
А. В., Шушурин С. Ф.; Под ред. А. Н. Матвеева. —  
М.: Изд-во МГУ, 1980. 160 с., 69 ил.

Пособие написано с использованием приемов программированного обучения и дает возможность студенту самостоятельно овладеть умением решать задачи по курсу механики и готовиться к семинарским занятиям. Дается классификация задач всех разделов курса механики по типам и рассматриваются различные методы решения. Для проверки усвоения теоретического материала и методов решения задач приводится большое число контрольных вопросов.

Рассчитано на студентов университетов и вузов.

М  $\frac{20302-083}{077(02)-80}$  111—80 1703020000

© Издательство Московского университета, 1980 г.

## Предисловие и методические указания

В настоящее время в схеме университетского образования теоретический материал сообщается в основном в лекционных курсах, умение решать задачи отрабатывается во время семинарских занятий, а развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме. Все формы занятий предполагают значительную самостоятельную внеаудиторную работу студента. Принятый в настоящее время учебный план предполагает, что на каждый час аудиторных занятий по курсу общей физики необходимо иметь примерно час или несколько больше самостоятельной внеаудиторной работы студента. При этом по лекционному материалу и по лабораторным работам, как правило, имеются пособия, которые помогают студенту более эффективно организовать его самостоятельную работу. Однако в настоящее время почти нет пособий, которые помогли бы студенту научиться самостоятельно решать задачи. Ввиду недостатка времени на семинарах не удастся рассмотреть все важные типы задач и методы их решения. В результате этого они остаются вне курса. Наличие настоящего пособия позволяет включить эти не охваченные семинарами вопросы в круг обязательных точно так же, как это делается в отношении теоретического материала, который не охвачен лекциями, но входит в обязательную программу.

Пособие составлено с таким расчетом, чтобы им можно было пользоваться для самостоятельных занятий. Весь материал курса разбит на разделы. Разбор задач всех разделов проводится по единой схеме, причем каждый раздел можно прорабатывать независимо от других.

Рекомендуется следующий порядок изучения каждого из разделов. В первом подразделе «Необходимый теоретический материал» перечисляются те вопросы, которые студент должен знать прежде, чем приступить к проработке задач раздела.

Во втором подразделе «Контрольные вопросы по теоретическому материалу» содержатся вопросы, которые позволяют студенту произвести самоконтроль качества усвоения теоретического материала. При выделении типов задач, встречаю-

щихся в курсе, авторы исходили главным образом из методической необходимости иметь классификацию задач, которая позволяла бы упорядочить подходы к их решению. Студенту рекомендуется прежде всего просмотреть и продумать подраздел «Типы задач и методы их решения» в целом. В каждом конкретном случае необходимо добиться четкого представления о том, что исходные данные являются необходимыми и достаточными, т. е. что задача не является ни переопределенной, ни недоопределенной.

После этого можно приступить к разделу «Примеры». Рекомендуется следующий порядок работы.

Прочитать условие задачи и убедиться, что задача действительно относится к рассматриваемому типу. Затем вернуться к соответствующему подразделу и, прочитав общую формулировку методов решения, попытаться самостоятельно решить задачу соответствующим методом. Если это удалось, то проверить правильность решения, сравнив его с решением, приводимым в тексте. Если не удалось решить самостоятельно (несмотря на то, что метод решения представляется ясным), проработать подробно решение по тексту.

Подраздел 4 содержит контрольные вопросы. Если ответ на некоторые вопросы вызывает трудности, необходимо возвратиться к соответствующим местам ранее проработанного материала и добиться умения ясно ответить на соответствующий вопрос подраздела 4.

Подраздел 5 содержит задачи для самостоятельного решения, сгруппированные по типам. При полной проработке всего предшествующего материала данного раздела эти задачи не должны вызвать затруднения. Для контроля правильности решения приведены ответы.

При составлении пособия авторы стремились использовать наиболее характерные и типичные задачи. С этой целью наряду с введением новых задач заимствовались также задачи из существующих учебников, задачников и других источников. Как общепринято в учебных пособиях, соответствующие литературные ссылки не приводятся.

## РАЗДЕЛ I

### Преобразования Лоренца

#### 1. Теоретический материал

Понятие неизменного масштаба. Исторический характер выбора масштаба. Абсолютно твердое тело. Смысл высказываний о свойствах пространства. Геометрия и опыт. Пределы справедливости геометрии Евклида. Периодические процессы. Измерение времени. Понятие единого времени. Синхронизация часов. Преобразования Галилея и их инварианты. Формула сложения скоростей. Постоянство скорости света. Однородность и изотропность пространства, однородность времени. Линейность преобразований координат. Преобразования Лоренца. Относительность одновременности. Принцип причинности и существование предельной скорости физических взаимодействий. Сокращение движущихся масштабов и замедление хода движущихся часов. Формула сложения скоростей в частной теории относительности. Опыт Физо и его релятивистская интерпретация. Реальность сокращения масштабов и замедления времени. Сокращение масштабов и абсолютно твердые тела.

#### 2. Вопросы к теоретическому материалу

2.1. Если все длины измеряются с помощью масштаба, принятого за единичный и неизменный, то какой смысл вкладывается в понятие неизменности этого масштаба? Можно ли проверить его неизменность экспериментально?

2.2. Что такое прямая линия? Как ее построить?

2.3. Каков смысл высказываний о свойствах пространств? Например, что означает утверждение, что пространство евклидово?

2.4. Каков порядок размеров ядер, атомов, молекул, небесных тел, Солнечной системы, галактик, межгалактических расстояний? В каких пределах справедлива геометрия Евклида по современным представлениям?

2.5. В чем состоит принципиальная разница в измерении продолжительности процесса, происходящего в одной точке пространства, и процесса, начинающегося в одной точке и заканчивающегося в другой?

2.6. Понятие скорости движения можно ввести только после синхронизации часов. Каким образом синхронизовать часы без использования понятия скорости?

2.7. Перечислите инварианты преобразований Галилея и докажите, что они являются действительно инвариантами.

2.8. Напишите формулу сложения скоростей Галилея в векторной форме.

2.9. Справедливо ли утверждение о постоянстве скорости света в системе координат, связанной с поверхностью Земли?

2.10. Почему утверждение о постоянстве скорости света является постулатом и всегда останется постулатом?

2.11. Почему постулативный характер принципа относительности сохранится и в будущем, несмотря на научный прогресс?

2.12. Какие свойства пространства и времени обуславливают линейность преобразования координат? Докажите эту связь.

2.13. При каких условиях преобразования Лоренца пренебрежимо мало отличаются от преобразований Галилея?

2.14. Каким образом совершается переход от прямых преобразований Лоренца к обратным с использованием принципа относительности и без него?

2.15. Теория относительности не доказывает принцип причинности, а исходя из справедливости принципа причинности вводит ограничение на скорость распространения взаимодействий. Как находится это ограничение?

2.16. Приведите пример, доказывающий реальность сокращения движущихся масштабов.

2.17. Откуда следует, что если два события заведомо не могут быть связаны причинно в некоторой системе координат, то они не могут быть также связаны причинно ни в какой другой системе координат?

2.18. Откуда следует, что если в одной системе координат не исключено, что два события могут быть связаны причинно в некоторой системе координат, то не исключена их причинная связь во всех других системах координат?

2.19. Дайте объяснение так называемого «парадокса близнецов».

2.20. Продемонстрируйте выполнимость принципа относительности при измерении длин и промежутков времени.

2.21. Допустим, что быстро движущаяся линейка сократилась настолько, что два импульса света, выпущенных одновременно в неподвижной системе координат в направлении, перпендикулярном траектории линейки, миновали ее один спереди и один сзади, т. е. длина линейки в результате сокращения оказалась меньше, чем расстояние между неподвижными источниками света. Как этот процесс выглядит в системе координат, связанной с линейкой, в которой рас-

стояние между источниками света много меньше длины ли-нейки?

**2.22.** В эксперименте по облету земного шара с атомными часами на самолете в западном и восточном направлениях часы, движущиеся в восточном направлении, отстают от часов, оставшихся на земле, а часы, движущиеся в западном направлении, опережают часы, оставшиеся на земле. Объясните это явление. Почему в реальном эксперименте отставание и опережение не одинаковы при одной и той же скорости самолета относительно земли? Какой дополнительный фактор необходимо при этом учесть?

**2.23.** Почему результат опыта Физо, доказавшего впервые неточность преобразований Галилея, не вызвал среди современников даже удивления?

**2.24.** Укажите аргументы против баллистической гипотезы о природе света.

**2.25.** Почему при столкновении высокоэнергичных частиц с неподвижными мишенями продукты столкновения движутся преимущественно в направлении движения налетающей на неподвижную мишень частицы?

**2.26.** Объясните, почему энергетически выгодно пользоваться встречными пучками в физике высоких энергий.

**2.27.** Почему в релятивистской теории невозможно себе представить ускоренное движение абсолютно твердого тела? Как происходит ускорение реального твердого тела в релятивистской теории?

**2.28.** Объясните результат опыта Майкельсона — Морли в системе координат, в которой интерферометр Майкельсона движется.

### **3. Основные типы задач и методы их решения**

#### **а) Типы и методы решения**

**3.1.** Зная протекание некоторого процесса, выраженного через координаты и время одной системы координат, найти протекание этого процесса в другой системе координат, движущейся относительно первой с известной скоростью.

**Решение.** Применяют прямые преобразования Лоренца, связывающие координаты и время рассматриваемых систем координат.

**3.2.** Известны характеристики некоторых событий или процессов в одной системе координат. Требуется найти такую систему координат, в которой эти события или процессы обладают другими заданными характеристиками.

**Решение.** Используются инварианты преобразований Лоренца и сами преобразования.

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** В движущейся со скоростью  $v$  системе координат под углом  $\alpha'$  к оси  $x'$  лежит стержень длиной  $l$ . Какова длина стержня в неподвижной системе координат и угол  $\alpha$  между стержнем и осью  $x$ ?

**Решение.** В движущейся системе координат имеем

$$l_{x'} = x'_2 - x'_1 = l \cos \alpha'; \quad l_{y'} = y'_2 - y'_1 = l \sin \alpha'.$$

В неподвижной системе по преобразованиям Лоренца

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1.$$

Следовательно, имеем в неподвижной системе

$$\begin{aligned} l'^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2 \cos^2 \alpha' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + l^2 \sin^2 \alpha' = \\ &= l^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \alpha'\right); \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{l \sin \alpha'}{l \cos \alpha' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Окончательно

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \alpha'}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

При  $v \approx c$  находим

$$l' \approx l \sin \alpha' \approx l_{y'}, \quad \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \infty; \quad \alpha \approx \pi/2,$$

т. е. стержень представляется направленным вдоль оси  $y$ , его проекция на ось  $x$  в силу сокращения почти исчезает.

**3.1.2.** В движущейся со скоростью  $v$  системе координат материальная точка перемещается под углом  $\alpha'$  к оси  $x'$  со скоростью  $u'$ . Найти скорость  $u$  этой точки и угол  $\alpha$ , образуемый ее траекторией с осью  $x$  неподвижной системы координат. Решить эту задачу также для случая распространения светового луча, когда  $u' = c$ .

**Решение.** Имеем в движущейся системе

$$u'_x = u' \cos \alpha'; \quad u'_y = u' \sin \alpha'.$$



По формулам сложения скоростей

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{u' \cos \alpha' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2} \cos \alpha'};$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{u' \sin \alpha' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u' v}{c^2} \cos \alpha'};$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = u_y / u_x.$$

Для светового сигнала справедливы те же формулы, надо лишь подставить  $u' = c$ . Формулы сильно упрощаются, если в движущейся системе координат точка движется вдоль оси  $y'$  ( $\alpha' = \pi/2$ ):

$$u_x = v, \quad u_y = u' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{v^2 + u'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \sqrt{u'^2 + v^2 \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u'}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Для светового луча  $u' = c$  получаем

$$u = c; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

При больших относительных скоростях систем координат  $v \approx c$  заключаем, что как материальная точка, так и луч света движутся почти в направлении оси  $x$ . Следует обратить внимание на то, что при определении движения по формулам сложения скоростей классической теории луч света в последнем случае двигался бы примерно под углом  $\alpha = 45^\circ$  к оси  $x$ .

**3.1.3.** Собственное время жизни  $\mu$ -мезона равно  $\tau_{0\mu} = 2,2 \cdot 10^{-6}$  с. Мезон рождается на высоте  $H = 35$  км над Землей и движется по вертикали к Земле со скоростью, отличающейся от скорости света на  $2 \cdot 10^{-2}$ , т. е.  $v/c \approx 1 - 2 \cdot 10^{-4}$ . Каким представляется в системе координат, связанной с мезоном, расстояние до Земли в момент его рождения? Какое расстояние способен пролететь мезон за время его жизни в системе координат, связанной с Землей, и успеет ли он долететь до поверхности Земли?

Решение. Примем во внимание, что в данном случае

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{v}{c}\right)} \approx 2 \cdot 10^{-2} = 0,02 = 1/50.$$

Следовательно,

1) в системе координат, связанной с мезоном, расстояние до Земли равно:

$$H_{\mu} = H \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 35/50 \text{ км} = 700 \text{ м};$$

$$2) \tau_{\mu} = \tau_{0\mu} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ с};$$

$$l = \tau_{\mu} v = \tau_{\mu} c = 3 \cdot 10^8 \cdot 1,1 \cdot 10^{-4} = 3,3 \cdot 10^4 \text{ м} = 33 \text{ км}.$$

Мезон не достигнет поверхности земли и распадется на высоте 2 км над Землей.

**3.1.4.** По оси  $x$  на расстоянии  $l$  друг от друга расположены два лазера, которые одновременно дают вспышки света в направлении, перпендикулярном оси  $y$ . В направлении оси  $x$  со скоростью  $v$  движется тело, длина которого равна  $L > l$ . При соответствующей скорости, когда длина движущегося тела будет меньше расстояния между лазерами, вспышки лазера минуют движущееся тело спереди и сзади него и дадут два пятна на фотопластинке, расположенной за движущимся телом. Очевидно, что это может произойти при скоростях линейки  $v$ , при которых  $L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < l$ . Рассмотрите весь этот процесс в системе координат, связанной с движущимся телом, в которой расстояние между лазерами значительно меньше длины тела  $L$ .

**Решение.** Если в неподвижной системе тело движется в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $v$ , т. е. слева направо, то в системе координат, связанной с телом, лазеры движутся справа налево со скоростью  $v$ . Расстояние между движущимися лазерами в этой системе координат равно  $l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Вспышки лазеров, одновременные в неподвижной системе координат, неодновременны в движущейся системе, связанной с телом длины  $L$ . Непосредственно из преобразований Лоренца видно, что в последней системе координат вспышка правого лазера происходит раньше вспышки левого лазера на  $\Delta t' = (l v / c^2) / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . За это время лазеры пройдут расстояние  $\Delta t' v$  и, следовательно,

вспышка левого лазера произойдет после вспышки правого лазера на расстоянии

$$\frac{lv^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где учтено, что расстояние между движущимися лазерами равно  $l \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . При рассматриваемых скоростях

$$\frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > L;$$

это означает, что вспышка левого лазера произойдет тогда, когда он минует левый конец неподвижного тела  $L$ . Таким образом, при объяснении рассмотренного процесса в движущейся системе координат очень важное значение имеет относительность одновременности.

**3.1.5.** Рассмотрим опыт Майкельсона—Морли в системах координат, в одной из которых интерферометр Майкельсона покоится, а в другой — движется. Считать длины плеч одинаковыми и равными  $l_0$  (рис. 1).

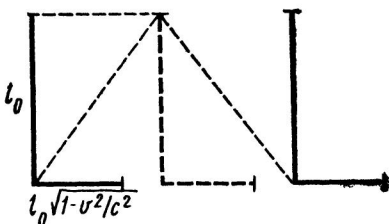


Рис. 1

**Решение.** а) В системе, связанной с интерферометром, время возвращения луча по обоим путям равно

$$\Delta t = 2l_0/c. \quad (1)$$

б) В системе координат, в которой интерферометр движется вдоль одного из плеч, со скоростью  $v$  (см. рис. 1) для времени  $\Delta t_{\perp}$ , затрачиваемого светом на прохождение пути до отражения от зеркала, расположенного на плече, перпендикулярно направлению движения имеем

$$\Delta t_{\perp}^{(1,2)} = \frac{\sqrt{l_0^2 + (v \Delta t_{\perp})^2}}{c},$$

т. е.

$$\Delta t_{\perp}^{(1,2)} = \frac{l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

и, следовательно, время возвращения луча, движущегося в перпендикулярном направлении, равно

$$\Delta t_{\perp} = 2\Delta t_{\perp}^{(1,2)} = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

Для определения интервалов времени  $\Delta t_{\parallel}^{(0)}$  и  $\Delta t_{\parallel}^{(2)}$  движения до зеркала вдоль направления движения и против направления движения имеем

$$\Delta t_{\parallel}^{(1)} = \frac{l_0 \sqrt{1-\beta^2} + v\Delta t_{\parallel}^{(1)}}{c}; \quad \Delta t_{\parallel}^{(2)} = \frac{l_0 \sqrt{1-\beta^2} - v\Delta t_{\parallel}^{(2)}}{c},$$

где  $\beta = v/c$  и учтено сокращение плеча интерферометра, направленного вдоль направления движения. Отсюда получаем

$$\Delta t_{\parallel}^{(1)} = \frac{l_0 \sqrt{1-\beta^2}}{c-v}, \quad \Delta t_{\parallel}^{(2)} = \frac{l_0 \sqrt{1-\beta^2}}{c+v}.$$

Поэтому для полного времени возвращения луча, движущегося вдоль плеча, параллельного движению интерферометра, находим:

$$\Delta t_{\parallel} = \Delta t_{\parallel}^{(1)} + \Delta t_{\parallel}^{(2)} = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

т. е. та же величина, что и для плеча, расположенного в перпендикулярном направлении:

$$\Delta t_{\parallel} = \Delta t_{\perp} = \Delta t. \quad (3)$$

Сравнивая выражения (1), (2) и (3) для интервалов времени возвращения лучей в движущейся системе координат и неподвижной, находим формулу замедления хода движущихся часов:

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1-v^2/c^2}. \quad (4)$$

**3.1.6.** Две ракеты, покоящиеся на оси  $x$  на расстоянии  $l$  друг от друга, начинают одновременно ускоряться в положительном направлении оси  $x$  по абсолютно одинаковому закону. Достигнув скорости  $v$ , они движутся равномерно. Каково расстояние между ракетами в лабораторной системе и в системе координат, связанной с ракетами? Объясните результат.

**Решение.** В силу одинакового закона ускорения ракеты в процессе ускорения проходят одинаковый путь в положительном направлении оси  $x$ . Следовательно, в режиме равномерного движения расстояние между ними будет таким же, как и до начала ускорения, т. е.  $l$ .

Поскольку в лабораторной системе координат расстояние между ракетами равно  $l$ , в системе координат, связанной с ракетами, оно должно быть  $l/\sqrt{1-v^2/c^2}$ , т. е. больше в такое число раз, чтобы после сокращения равняться  $l$ .

Увеличение расстояния между ракетами в процессе ускорения объясняется относительностью одновременности: в лабораторной системе ракеты ускоряются синхронно, а в сис-

теме координат, связанной, например, с центром масс ракет, такой одновременности нет. В этой системе ракета, находящаяся в направлении ускорения, ускоряется с некоторым опережением и благодаря этому расстояние между ракетами увеличивается.

**3.1.7.** Как известно из курса теории относительности, само по себе ускорение не оказывает влияния на ход часов. Учитывая это, мы можем в задачах говорить о мгновенном изменении скорости часов без изменения их показаний в момент изменения скорости.

Путешественник на ракете отправлялся из точки  $x=0$  в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $v$ . По прошествии времени  $\tau_1$  направление его полета меняется мгновенно на обратное, и он возвращается в исходную точку.

Сколько времени продолжался полет по часам лабораторной системы и по часам, связанным с ракетой? Решить задачу как в лабораторной системе координат, так и в системах координат, связанных с ракетой.

**Решение. I. Полет до точки поворота.**

В лабораторной системе часы, связанные с ракетой, в момент поворота  $\tau$  показывают время

$$\tau'_1 = \frac{\tau_1 - (v/c^2) \tau_1 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \tau_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1)$$

где учтено, что в момент поворота координата ракеты равна  $x_1 = \tau_1 \cdot v$ .

В системе ракеты координата равна  $x' = 0$ . Следовательно, для момента поворота имеем

$$\tau_1 = \frac{\tau'_1 + (v/c^2) x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2)$$

где учтено, что  $x' = 0$ . Формулы (1) и (2), как и следовало ожидать в соответствии с принципом относительности, совпадают.

**II. Возвращение от точки поворота в начальную точку.**

В точке поворота скорость ракеты меняется на обратную, т. е. происходит смена инерциальной системы координат, в которой ракета покоится. Показания часов в точке поворота в обеих системах координат одни и те же. Таким образом, после поворота ракета покоится в системе координат, движущейся в направлении отрицательных значений оси  $x$  (т. е. со скоростью  $-v$ ), и часы, расположенные в этой точке, показывают  $\tau'_1 = \tau_1 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , а совпадающие с ними часы лабораторной системы показывают  $\tau_1$ . Координата точки поворота в лабораторной системе равна  $x_1 = v\tau_1$ . Для дальнейшего расчета удобно в момент поворота перенести начало лабораторной системы координат в точку поворота ракеты.

Тогда точка начала полета в лабораторной системе имеет координату  $x_2 = -v\tau_1$ . Далее удобно синхронизировать начало отсчета времени таким образом, чтобы в новом начале системы координат часы показывали 0. Для этого надо все часы лабораторной системы координат отвести назад на время  $\tau$ , а в системе ракеты — на время  $\tau'_1 = \tau_1 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Для дальнейших расчетов пользуемся обычными преобразованиями Лоренца.

*В лабораторной системе.* Чтобы вернуться в исходную точку  $x_2 = -v\tau_1$ , летя со скоростью  $v$ , ракета затрачивает время  $\tau_2 = -x_2^2/v = \tau_1$ .

Часы, связанные с ракетой, в момент возвращения в исходную точку  $x_2 = -v\tau_2 = -v\tau_1$  показывают.

$$\tau'_2 = \frac{\tau_2 + \frac{v}{c^2}(-\tau_2 v)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \tau_2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3)$$

*В системе ракеты.* Координата ракеты все время  $x' = 0$  и, следовательно, для момента возвращения в исходную точку имеем

$$\tau_2 = \frac{\tau'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4)$$

Таким образом, время от улета ракеты до ее возвращения в лабораторной системе по часам, помещенным в начале координат, равно

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 2\tau_1,$$

а по часам, связанным с ракетой,

$$\tau' = \tau'_1 + \tau'_2 = 2\tau_1 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

причем этот результат получается одинаковым как при расчете в лабораторной системе координат, так и при расчете в системах координат, связанных с ракетой. В последнем случае мы вынуждены пользоваться двумя инерциальными системами координат. Именно благодаря неинерциальному характеру движения ракеты с возвращением нельзя в рассуждениях просто поменять местами часы, находящиеся в начале лабораторной инерциальной системы, и часы, связанные с ракетой.

**3.1.8.** Два электрона летят навстречу друг другу со скоростями  $v = 4/5$  с. Какова скорость электрона в системе координат, связанной с другим электроном?

**Решение.** Используем формулу сложения скоростей. Если мы будем переходить в систему координат, связанную с электроном, движущимся в положительном направлении

оси  $x$ , то формула сложения скоростей выглядит следующим образом:

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} = \frac{-2v}{1 + v^2/c^2},$$

где учтено, что  $u = -v$ , а величина  $u'$  является искомой скоростью. Чтобы оценить этот результат, полезно вычислить, как изменяется множитель  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , который характеризует величину сокращения масштабов, замедления времени, а также и энергию частиц. Обозначив  $\gamma' = 1/\sqrt{1 - u'^2/c^2}$ , находим

$$\gamma' = 2\gamma^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{4\gamma^2}}.$$

Следовательно, при больших скоростях, когда  $\gamma \gg 1$ , можно считать, что

$$\gamma' \simeq 2\gamma^2,$$

т. е. при переходе из центра масс движущихся навстречу друг другу частиц в систему координат, связанную с одной из частиц, энергия другой частицы становится весьма большой. В обычных ускорителях одна из частиц является покоящейся частицей-мишенью, на которую налетает другая частица, разогнанная до большой скорости (до больших энергий). Если покоящуюся частицу-мишень разогнать навстречу падающей на нее частице до такой же скорости, то столкновение между ними будет эквивалентно столкновению между неподвижной частицей и частицей, разогнанной до энергий, во много раз больших, чем энергия каждой частицы при встречном столкновении. Это обстоятельство используется в ускорителях на встречных пучках. Если взять два встречных пучка протонов, каждый из которых обладает энергией около 30 ГэВ, то это эквивалентно тому, что на неподвижный протон налетает другой протон с энергией около 1000 ГэВ.

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** В лабораторной системе координат два события произошли в точках  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 5$  в моменты времени  $t_1 = 0$  и  $t_2 = 4/3 \cdot 10^{-8}$  с. Найти систему координат, в которой пространственное и временное расстояния между событиями минимальны. Чему они равны?

**Решение.** Используем инвариантность интервала. Имеем,

$$s^2 = (\Delta x)^2 - c^2 \Delta t^2 = x_2^2 - c^2 t_2^2 = 9 > 0,$$

т. е. интервал пространственно-подобный. Поэтому существует система координат, в которой события одновременны ( $\Delta t' = 0$ ), а пространственное расстояние между ними равно  $l = 19 = 3$  м. Это и есть минимальное расстояние, как это видно из определения интервала. Считая, что в момент первого события начала систем координат совпадают, имеем для второго события

$$t'_2 = 0 = \frac{t_2 - x_2 v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

т. е.

$$\frac{v}{c} = \frac{t_2 c}{x_2} = \frac{4}{5}.$$

Можно использовать и другую формулу преобразований Лоренца:

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \text{ или } 3 = \frac{5 - v \frac{4}{3} 10^{-8}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

**3.2.2.** В лабораторной системе координат два события произошли в точках  $x_1 = 0$ ,  $t_1 = 0$  и  $x_2 = 4$  м,  $t_2 = \frac{5}{3} \cdot 10^{-8}$  с. Найти систему координат, в которой пространственное и временное расстояния минимальны. Чему они равны?

Решение. Имеем

$$s^2 = x_2^2 - c^2 t_2^2 = -9 < 0,$$

т. е. интервал времени-подобный. Следовательно, существует система координат, в которой эти события происходят в одной точке с минимальным интервалом между ними; этот интервал равен  $t'_2 = \sqrt{9}/c = 10^{-8}$  с.

Для нахождения системы координат имеем

$$x'_2 = 0 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

т. е.

$$\frac{v}{c} = \frac{x_2}{ct_2} = \frac{4}{5}.$$

Иначе так:

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{x_2 v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Ответ, конечно, тот же.



## 4. Контрольные вопросы

4.1. В каком случае можно сказать, что два события заведомо не связаны причинно?

4.2. Если два события не связаны причинно, то в какой системе координат наиболее очевидно отсутствие причинной связи между ними?

4.3. Если два события связаны причинно, то в какой системе координат наиболее очевидна возможность существования причинной связи между ними?

4.4. Пусть в лабораторной системе координат вдоль оси  $x$  движутся два тела с разными скоростями. Скоростью сближения или удаления в лабораторной системе координат можно назвать скорость изменения расстояния между телами, т. е. отношение изменения расстояния между телами, измеренного в лабораторной системе координат, к интервалу лабораторного времени, за которое это изменение произошло. В аналогичном смысле можно говорить о скорости приближения (или удаления) луча света к телу, движущемуся в лабораторной системе координат.

Является ли эта скорость приближения (или удаления) света к телу постоянной? Чему она равна?

4.5. Допустим, что никакого релятивистского сокращения длины нет. Вдоль линейки скользит тело длиной  $l$ . Сбоку из некоторой точки делается моментальная фотография движущегося тела, причем на фотоснимке видны одновременно и тело и линейка, так что непосредственно на снимке можно определить те деления, с которыми совпадают концы тела на фотографии.

Равняется ли расстояние между этими делениями длине тела? При каком условии это расстояние равно длине тела?

4.6. Какому критерию должны удовлетворять два события, чтобы можно было соответствующим выбором системы координат по нашему произволу изменять последовательность этих событий?

4.7. Если два события происходят последовательно в одной и той же точке, то можно ли найти систему координат, в которой эти события происходят в обратном порядке?

4.8. Чем отличаются формулы для абберации света (вывести их) в классической и релятивистской теории? В каком случае они практически совпадают?

4.9. Перечислите причины, по которым при визуальном наблюдении быстро движущихся тел они не будут казаться такими сплюснутыми в направлении движения, как это следует из формул теории относительности.

4.10. Объясните, почему нельзя себе представить ускорение тела в релятивистской теории как ускорение абсолютно твердого тела, у которого все точки ускорятся синхронно.

**4.11.** Пусть к нам быстро приближается источник света, который испускает импульсы света с интервалом в 1 с в собственной системе координат. Мы будем наблюдать эти вспышки с меньшими, чем 1 с, интервалами. Классическая и релятивистская теории приводят к различным величинам этого интервала, причем классическая теория дает несколько значений в зависимости от предположений о законах распространения света.

Перечислите все физические факторы, которыми характеризуется это явление как в классических теориях, так и в релятивистской теории.

**4.12.** Пусть в лабораторной системе координат покоится тело некоторой длины  $l$ . Вдоль тела распространяется луч света. Ему требуется время  $t=l/c$ , чтобы пройти расстояние от начальной точки тела до ее конечной точки по направлению распространения луча. Пусть теперь тело движется по направлению распространения луча со скоростью  $v$  и, следовательно, испытывает сокращение. Его длина равна  $l' = l\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Луч света по-прежнему распространяется со скоростью  $c$ .

Спрашивается, сколько времени потребуется свету, чтобы пройти расстояние от начальной точки тела до конечной точки. Дайте ответ на этот вопрос, рассмотрев весь процесс как в лабораторной системе координат, так и в системе координат, связанной с телом.

## 5. Задачи для самостоятельного решения

**5.1.** На какую величину сокращается диаметр Земли вследствие ее движения вокруг Солнца в системе координат, связанной с Солнцем ( $r=6,4 \cdot 10^8$  км,  $v=30$  км/с)?

О т в е т:  $\Delta d=6,4$  см.

**5.2.** Какова должна быть скорость тела, чтобы его размеры в направлении движения сократились в 2 раза?

О т в е т:  $v=c\sqrt{3/2}$ .

**5.3.** Поезд движется со скоростью 100 км/ч. Вдоль поезда идет человек со скоростью 5 км/ч относительно поезда по направлению его движения.

Вычислить разницу скоростей человека относительно полотна железной дороги, вычисленных по формуле сложения скоростей классической физики и частной теории относительности.

О т в е т:  $\Delta u \simeq 4,85 \cdot 10^{-14}$  км/с.

**5.4.** Протон, двигаясь вертикально со скоростью  $v=4c/5$  проходит слой атмосферы толщиной 20 км.

Какова толщина проходимого протоном слоя атмосферы в системе координат, связанной с протоном?

О т в е т:  $h'=15$  км.

5.5. Каково время пролета указанной в предыдущей задаче толщины атмосферы в системе координат, связанной с Землей и протоном?

Ответ:  $\tau_3 \simeq 8 \cdot 10^{-5}$  с,  $\tau_p \simeq 5 \cdot 10^{-5}$  с.

5.6. При постройке лаборатории по исследованию  $\pi$ -мезонов зал, в котором исследуются  $\pi$ -мезоны, пришлось отнестись от места, в котором они рождаются, на расстоянии 75 м. Мезоны каких минимальных скоростей могут исследоваться в этой лаборатории (собственное время жизни  $\pi$ -мезона равно  $2,5 \cdot 10^{-8}$  с)?

Ответ:  $v = \sqrt{100/101}$  с.

5.7. Два прожектора испускают узкие пучки света в противоположных направлениях. С какой скоростью эти прожекторы должны двигаться в направлении, перпендикулярном лучам, чтобы пучки света двигались под углом  $90^\circ$  друг к другу?

Ответ:  $v = c / \sqrt{2}$ .

5.8. Два события произошли в точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$  м в моменты времени  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 5/3 \cdot 10^{-8}$  с.

Найти скорость той системы координат, в которой события происходят в одной и той же точке. Чему равен интервал времени между событиями?

Ответ:  $v = 3/5$  с,  $\Delta\tau = 4/3 \cdot 10^{-8}$  с.

5.9. Два события произошли в точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 5$  м в моменты времени  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 10^{-8}$  с.

Найти скорость той системы координат, где эти события происходят одновременно. Чему равно расстояние между событиями?

Ответ:  $v = 3/5$  с,  $\Delta l = 4$  м.

## РАЗДЕЛ II

### Кинематика точки

#### 1. Теоретический материал

Относительность движения. Тело отсчета. Система отсчета. Способы указания положения тела в пространстве: радиус-вектор, координаты. Произвольность выбора начала отсчета движения и времени. Определение вектора перемещения. Траектория. Элементарное перемещение. Закон движения. График движения. Принцип независимости движений. Средняя скорость. Мгновенная скорость. Компоненты скорости. Среднее ускорение. Мгновенное ускорение. Компоненты ускорения. Тангенциальное и нормальное (центростремительное) ускорения. Круг кривизны для данной точки траектории. Радиус кривизны для данной точки траектории. Связь между центростремительным ускорением в данной точке, скоростью и радиусом кривизны. Определение величины и направления полного ускорения. Угловое перемещение. Угловая скорость. Связь между линейной и угловой скоростью. Угловое ускорение. Векторы угловой скорости и углового ускорения. Связь между полным линейным ускорением, угловой скоростью и угловым ускорением. Сложное движение точки. Абсолютная, относительная и переносная скорости. Связь между ними. Абсолютное, относительное и переносное ускорения.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Укажите способы задания положения тел в пространстве.

2.2. Как практически осуществляется регистрация определенных моментов времени?

2.3. Как найти результирующее перемещение точки, если известны составляющие перемещения, в которых она участвует?

2.4. Какое число способов вы можете предложить для того, чтобы разложить известное перемещение на сумму каких-либо составляющих? Чем определяется при этом однозначность разложения?

2.5. Какие вам известны способы задания закона движения?

**2.6.** Дайте определение величины и направления мгновенной линейной скорости точки, а также компонент вектора этой скорости.

**2.7.** Укажите способ для измерения мгновенной скорости.

**2.8.** Объясните, чем определяется точность измерения скорости.

**2.9.** Чему равна величина мгновенного ускорения точки? Какое направление оно имеет?

**2.10.** Чему равны компоненты вектора ускорения?

**2.11.** Опишите процедуру измерения ускорения.

**2.12.** Чем определяется точность измерения ускорения?

**2.13.** Объясните роль нормального и тангенциального ускорений в изменении скорости.

**2.14.** Запишите выражение, определяющее связь между линейным ускорением, угловой скоростью и угловым ускорением в случае движения точки по окружности.

**2.15.** Запишите выражение, определяющее связь между линейным ускорением, угловой скоростью и угловым ускорением в случае движения точки по произвольной плоской криволинейной траектории.

### **3. Основные типы задач и методы их решения**

#### **а) Типы и методы решения**

**3.1.** Определение скорости по заданной траектории и закону движения.

**Решение.** Скорость находится в результате дифференцирования функций, выражающих зависимость координат точки от времени.

**3.2.** Определение ускорения по заданной траектории и закону движения.

**Решение.** Компоненты вектора ускорения, а вместе с тем его величина и направление находятся двукратным дифференцированием функций, выражающих зависимость координат точки от времени.

**3.3.** Определение траектории и закона движения точки по заданной зависимости компонент скорости точки от времени.

**Решение.** Вид функций, выражающих зависимость координат точки от времени (закон движения), находится в результате интегрирования компонент скорости. При этом для определения произвольных постоянных, которые появляются при интегрировании, необходимо знать координаты точки в какой-нибудь определенный момент времени.

**3.4.** Определение траектории и закона движения точки по заданной зависимости компонент ускорения точки от времени.

**Решение.** Для определения закона движения необходимо дважды проинтегрировать функции, выражающие за-

висимость компонент ускорения от времени. Появляющиеся в результате интегрирования произвольные постоянные можно определить, если известны координаты точки и компоненты ее скорости в какой-либо определенный момент времени.

**3.5. Задачи на исследование сложного движения точки.**

**Решение.** Применяется принцип независимого сложения движений.

**3.6. Задачи об относительном движении нескольких материальных точек.**

**Решение.** Решаются по следующей схеме: 1) выбрать систему отсчета; 2) проанализировать характер возможных движений; 3) выбрать начало отсчета координат и времени; 4) определить начальные условия; 5) написать закон движения для каждой точки; 6) записать уравнения, соответствующие специальным условиям задачи.

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** Палочка  $AB$ , имеющая длину  $l=10$  см, движется так, что ее концы скользят вдоль направляющих  $Ox$  и  $Oy$ , скрепленных под прямым углом друг к другу. Конец  $A$  палочки движется равномерно со скоростью  $v=5$  см/с вдоль  $Ox$ .

Найти закон движения конца  $B$  палочки и определить его скорость через  $t=1,7$  с после начала движения. Конец  $A$  палочки начинает движение из точки  $O$ .

**Решение.** Закон движения конца  $A$  палочки:  $y=vt$ . Закон движения конца  $B$  палочки:  $x=\sqrt{l^2-v^2t^2}$ . Скорость конца  $B$  палочки находим дифференцированием  $x$  по  $t$ :

$$u = \frac{dx}{dt} = -\frac{v^2t}{\sqrt{l^2-v^2t^2}} \approx 8,1 \text{ см/с.}$$

**3.1.2.** Камень бросили с высокого отвесного берега, сообщив ему скорость  $v_0=20$  м/с в горизонтальном направлении.

Найти скорость камня в тот момент, когда он достигнет воды (высота берега  $h=11,25$  м).

**Решение.** Ось  $Ox$  прямоугольной системы координат направим так же, как  $\vec{v}_0$ , ось  $Oy$  — вертикально вверх. Начало координат  $O$  расположим на уровне воды так, чтобы в начальный момент времени камень находился на оси  $Oy$ .

Закон движения камня:  $x=v_0t$ ;  $y=h-gt^2/2$ . Путем дифференцирования координат  $x$  и  $y$  по времени  $t$  находим компоненты скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -gt.$$

Величина скорости может быть найдена из выражения

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

Направление скорости относительно горизонтали определяется как

$$\operatorname{tg} \alpha = v_y / v_x = -gt / v_0.$$

В момент времени, когда камень достигнет поверхности воды,  $y = h - gt^2/2 = 0$ , отсюда  $t = \sqrt{2h/g}$ .

Следовательно, на поверхности воды камень будет иметь следующие величину и направление скорости:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 25 \text{ м/с}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{v_0} \sqrt{2gh} \simeq -\frac{1}{2}.$$

**3.1.3.** По заданному закону движения точки найти ее скорость ( $r = at$ ;  $\varphi = bt$ ).

**Решение.** Если движение точки задано уравнениями в полярных координатах, то величина и направление ее скорости определяются из выражений:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{v}, r) = \frac{r \dot{\varphi}}{\dot{r}} = r \frac{d\varphi}{dr},$$

где  $dr/dt$  — проекция скорости на направление радиуса-вектора (радиальная скорость),  $r d\varphi/dt$  — проекция скорости на направление, перпендикулярное к радиусу-вектору (трансверсальная скорость).

Из условий нашей задачи находим:

$$v = \sqrt{a^2 + a^2 t^2 b^2} = a \sqrt{1 + b^2 t^2},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{v}, r) = r \frac{d(r b/a)}{dr} = bt.$$

2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Линейка  $AB$  скользит концами  $A$  и  $B$  по двум направляющим прямым  $Ox$  и  $Oy$ , скрепленным под прямым углом, причем точка  $B$  движется с постоянной скоростью  $C$  вдоль  $Oy$ . Найти ускорение точки  $M$  линейки, если  $MA = a$ ,  $MB = b$ . Конец линейки  $B$  начинает движение из точки  $O$ .

**Решение.** Закон движения конца  $B$ :  $y_B = ct$ . Закон движения конца  $A$ :

$$x_A = \sqrt{(a + b)^2 - c^2 t^2}.$$

Закон движения точки  $M$  легко найти из простых геометрических соображений:

$$x_M = \frac{b}{a+b} \sqrt{(a+b)^2 - c^2 t^2}, \quad y_M = \frac{a}{a+b} ct.$$

Дифференцированием координат точки  $M$  по времени находим компоненты ее скорости:

$$v_{x_M} = -\frac{b}{a+b} \frac{c^2 t}{\sqrt{(a+b)^2 - c^2 t^2}},$$

$$v_{y_M} = \frac{a}{a+b} c.$$

Дифференцированием компонент скорости точки  $M$  по времени находим компоненты ее ускорения:

$$w_{x_M} = -\frac{bc^2(a+b)}{[(a+b)^2 - c^2 t^2]^{3/2}}; \quad w_{y_M} = 0.$$

### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Точка начинает движение из начала координат так, что компоненты ее скорости в полярных координатах изменяются со временем по закону:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = ae^{kt}, \quad v_t = r \frac{d\varphi}{dt} = br,$$

$a, b, k$  — постоянные величины.

Определить закон движения и траекторию точки.

**Решение.** В результате интегрирования компонент скорости по времени находим:

$$r = \int ae^{kt} dt = \frac{a}{k} e^{kt} + c_1,$$

$$\varphi = \int b dt = bt + c_2,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные интегрирования; их величины мы найдем из условия  $r=0, \varphi=0$  при  $t=0$  (точка начинает движение из начала координат).

Итак, закон движения точки

$$\begin{cases} r = \frac{a}{k} (e^{kt} - 1), \\ \varphi = bt. \end{cases}$$

Траектория точки  $r = \frac{a}{k} (e^{\frac{k}{b}\varphi} - 1)$  — логарифмическая спираль.



#### 4-й тип задач (3.4)

**3.4.1.** Точка начинает двигаться в плоскости  $(x, y)$  из начала прямоугольной системы координат с горизонтальной осью  $Ox$  и вертикальной  $Oy$  с начальной скоростью  $v_0$ , направленной под углом  $\alpha$  к горизонту.

Компоненты ускорения точки изменяются со временем по закону

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

где  $g = \text{const}$ .

Определить закон движения точки и ее траекторию.

**Решение.** Координаты точки как функции времени находим в результате двукратного интегрирования по времени компонент ускорения.

Первое интегрирование с учетом начальных условий

$$\left( v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha \text{ при } t = 0 \right)$$

дает

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha; \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt.$$

В результате следующего интегрирования при использовании начальных условий ( $x=0, y=0$  при  $t=0$ ) получаем закон движения точки

$$x = v_0 \cos \alpha t, \quad y = v_0 \sin \alpha t - gt^2/2.$$

Траекторию движения точки определим, исключив из закона движения время  $t$ :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

#### 5-й тип задач (3.5)

**3.5.1.** Найти закон движения и траекторию свободно падающего тела относительно вертикальной пластинки, совершающей горизонтальное равномерное движение со скоростью  $u$ . В начальный момент свободно падающее тело находилось в начале координат, не обладая скоростью.

**Решение.** Оси  $Ox$  и  $Oy$  координатной системы нанесем на пластинку, ось  $Ox$  направим горизонтально в сторону движения пластинки, ось  $Oy$  направим вертикально вверх.

Относительно пластинки тело участвует в двух движениях, в горизонтальном и вертикальном направлении. На основании принципа независимого сложения движений можно

считать, что каждое из этих движений происходит по своему закону. Закон движения тела:

$$x = -ut; \quad y = -gt^2/2.$$

Траектория тела относительно пластинки — парабола:

$$y = -\frac{g}{2u^2} x^2.$$

3.5.2. На проволоку, изогнутую в виде винтовой линии с вертикальной осью с шагом винта  $h=2$  см и радиусом  $R=3$  см надета бусинка (рис. 2). Бусинка начинает скользить по проволоке без начальной скорости. Трение отсутствует.

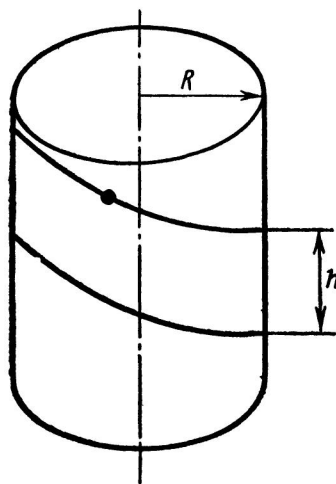


Рис. 2

Определить ускорение бусинки в конце первого витка.

Решение. Движение бусинки в каждый момент времени можно рассматривать как сумму двух движений: вращения по окружности радиуса  $R$  в горизонтальной плоскости и падения по вертикали. Соответственно скорость бусинки можно представить как геометрическую сумму  $v_1 = v \cos \alpha$ , направленной горизонтально, и  $v_2 = v \sin \alpha$ , направленной вертикально ( $\alpha$  — угол, образованный винтовой линией с горизонталью).

Нормальное ускорение при движении по окружности равно

$$a_{1n} = \frac{v_x^2}{R} = \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{R}.$$

Нормальное ускорение при движении по вертикали равно  $a_{2n}=0$ . Полное ускорение бусинки

$$a = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2 + a_{2\tau}^2},$$

где  $a_{1\tau}$  и  $a_{2\tau}$  — тангенциальные ускорения, соответствующие движению по окружности и по вертикали. Полное тангенциальное ускорение бусинки  $a_\tau$  равно

$$a_\tau = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{2\tau}^2}.$$

Из простых геометрических соображений

$$a_\tau = g \sin \alpha = g \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}.$$

Для определения  $a_{1n}$  находим  $v$  из закона сохранения энергии

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Следовательно,

$$a_{1n} = \frac{8\pi^2 hgR}{h^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

Итак, полное ускорение бусинки

$$a = \frac{gh \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2 + 64\pi^4 R^2}}{h^2 + 4\pi^2 R^2} \simeq 13 \text{ м/с}^2.$$

**3.5.3.** Шар радиуса  $r$  насажен на горизонтальную ось и катится по плоской поверхности со скоростью  $v$ , описывая окружность радиуса  $R$ . Определить полную угловую скорость шара и ее направление.

**Решение.** Шар вращается вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью  $\omega_1$ , равной  $\omega_1 = v/r$ . В то же время шар совершает вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega_2$ , равной  $\omega_2 = v/R$ .

Величина полной угловой скорости шара есть

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \left(\frac{v}{R}\right)^2}.$$

Тангенс угла наклона  $\alpha$  полной угловой скорости шара к горизонту равен:

$$\operatorname{tg} \alpha = \omega_2 / \omega_1 = r/R.$$

### 6 тип задач (3.6)

**3.6.1.** С площадки, расположенной на достаточно большой высоте над поверхностью Земли, бросают два камня с одинаковыми по величине скоростями  $v_0 = 10$  м/с. Первый камень бросают вертикально вверх, а второй — с запаздыванием на время  $\Delta t = 1$  с относительно первого — вертикально вниз.

Определить расстояние между камнями через время  $t = 5$  с от момента бросания первого камня.

**Решение.** В качестве системы отсчета возьмем ось  $x$ , направленную вертикально вверх. За начало отсчета координат примем точку, из которой бросают камни, а за начало отсчета времени — момент бросания первого камня.

Закон движения первого и второго камней можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_0 t - gt^2/2, \\ x_2 &= -v_0(t - \Delta t) - g(t - \Delta t)^2/2. \end{aligned}$$

Расстояние между телами равно:

$$S = x_1 - x_2 = (2v_0 - g \Delta t) t - v_0 \Delta t + g \Delta t^2 / 2 = 45 \text{ м.}$$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Зависит ли форма траектории от выбора системы отсчета? Свой ответ проиллюстрируйте примерами.

4.2. Проекции радиуса-вектора и вектора перемещения на координатные оси (координаты) являются векторами. Что дает возможность оперировать с координатами как с алгебраическими величинами?

4.3. Может ли вектор перемещения совпадать по величине с координатой точки?

4.4. При каком движении средняя и мгновенная скорости точки одинаковы?

4.5. Приведите пример движения, при котором постоянны величины скорости и ускорения точки.

#### 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Определить траекторию точки, совершающей одновременно два гармонических колебания равной частоты, но разных амплитуд и фаз, если колебания происходят по двум взаимно перпендикулярным направлениям:  $x = a \sin(kt + \alpha)$ ,  $y = b \sin(kt + \beta)$ .

Ответ: эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta).$$

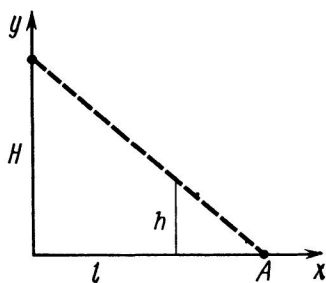


Рис. 3

5.2. Фонарь опускается по вертикали с высоты  $H = 10$  м (рис. 3) с постоянной скоростью  $v = 2$  м/с. На расстоянии  $l = 3$  м от вертикали расположен столб высотой  $h = 1,5$  м. Определить, с какой скоростью  $v_A$  будет двигаться конец тени  $A$ , падающей от столба на землю, через 5 с после начала движения фонаря.

Ответ:  $v_A = l h v / (H - vt - h)^2 = 4$  м/с.

5.3. Колесо катится по прямолинейному пути с постоянной скоростью  $v$  без проскальзывания. Радиус колеса  $R$ . Найти закон движения, а также зависимость от времени компонент скорости и ускорения той точки на ободе колеса, которая в начальный момент времени касалась земли.

О т в е т:

$$\begin{cases} x = vt + R \cos \frac{v}{R} t, \\ y = -R \sin \frac{v}{R} t, \end{cases} \begin{cases} v_x = v \left( 1 - \sin \frac{v}{R} t \right), \\ v_y = -v \cos \frac{v}{R} t, \end{cases} \begin{cases} a_x = -\frac{v^2}{R} \cos \frac{v}{R} t, \\ a_y = \frac{v^2}{R} \sin \frac{v}{R} t. \end{cases}$$

5.4. Горизонтальный диск равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ . На расстоянии  $R$  от центра диска поставлена вертикальная палочка. Найти закон движения тени палочки на экране, если весь прибор освещается горизонтальным пучком параллельных лучей. Определить также скорость  $v$  и ускорение  $a$  тени в зависимости от времени.

О т в е т:  $x = R \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $v = -R\omega \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $a = -R\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$ .

5.5. Ползун движется по прямолинейной направляющей с ускорением  $\omega = -\pi^2 \sin \pi t / 2$ . Найти закон движения ползуна, если его начальная скорость  $v_0 = 2\pi$ , а начальное положение совпадает со средним положением ползуна, принятым за начало координат.

О т в е т:  $x = 4 \sin \pi t / 2$ .

5.6. Скорость течения реки возрастает пропорционально расстоянию от берега. У берегов скорость течения равна нулю, а на середине реки достигает значения  $v = 1,5$  м/с. Ширина реки (рис. 4)  $l = 48$  м. Человек на лодке заметил с

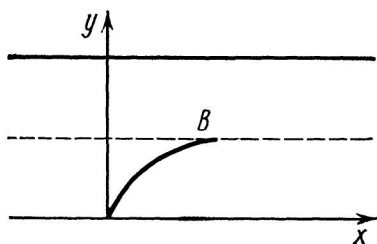


Рис. 4

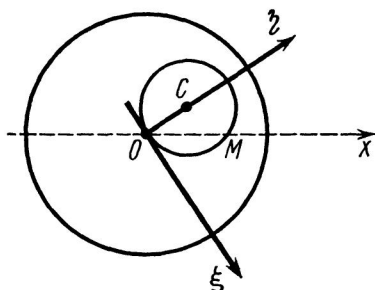


Рис. 5

берега плот, плывущий по середине реки, и начал грести с постоянной относительной скоростью  $u = 1$  м/с, перпендикулярной направлению течения. В некоторой точке  $B$  лодка и плот встретились.

Определить координаты этой точки, а также траекторию лодки.

О т в е т: лодка и плот встретились в точке с координатами  $x = vl/4u = 18$  м;  $y = l/2 = 24$  м; траектория лодки  $y^2 = lux/v$  — парабола.

5.7. Точка  $M$  совершает движение по закону  $x = a \sin \omega t$ . Несколько ниже этой точки расположен диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости. Ось диска пересекает абсолютную траекторию точки  $M$ . Найти уравнение траектории точки  $M$  относительно диска (рис. 5).

Ответ: траектория точки  $M$  относительно диска  $\xi^2 + (\eta - a/2)^2 = a^2/4$  — окружность радиуса  $a/2$  с центром в точке  $C$ .

## РАЗДЕЛ III

### Законы Ньютона и их применение

#### 1. Теоретический материал

Системы отсчета. Первый закон Ньютона как определение инерциальных систем отсчета. Силы в механике Ньютона. Второй закон Ньютона. Третий закон Ньютона. Закон сохранения количества движения системы тел. Закон изменения количества движения системы тел под действием внешних сил. Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского). Работа силы при данном перемещении. Мощность. Потенциальная энергия. Взаимная потенциальная энергия тел. Кинетическая энергия. Закон сохранения механической энергии изолированной системы тел. Закон изменения механической энергии системы тел. Закон сохранения масс.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Какая система отсчета считается «неподвижной», или абсолютной?

2.2. Сформулируйте первый закон Ньютона. В чем заключается физическое содержание этого закона?

2.3. Как вы объясните, почему тело приобретает ускорение?

2.4. Какой смысл имеет понятие силы в механике Ньютона?

2.5. В чем заключается процесс измерения силы?

2.6. Опишите эксперименты, устанавливающие связь между силой и ускорением.

2.7. Сформулируйте второй закон Ньютона.

2.8. Что такое масса?

2.9. Что такое импульс (количество движения) тела, системы тел?

2.10. Что является эталоном массы?

2.11. Перечислите единицы измерения массы и укажите связь между ними.

2.12. Перечислите единицы измерения силы и укажите связь между ними.

2.13. Сформулируйте третий закон Ньютона.

2.14. Какие силы называются внутренними для данной системы тел? Какие силы называются внешними?

- 2.15. Какая система тел называется замкнутой?
- 2.16. Сформулируйте закон сохранения количества движения системы тел.
- 2.17. Сформулируйте закон изменения количества движения системы тел под действием внешних сил.
- 2.18. Докажите закон сохранения количества движения и закон изменения количества движения системы тел на основании второго и третьего законов Ньютона.
- 2.19. Опишите эксперименты, подтверждающие закон сохранения количества движения замкнутой системы.
- 2.20. Приведите вывод уравнения Мещерского.
- 2.21. Каким образом осуществляется ускорение и торможение ракеты при помощи реактивной силы?
- 2.22. Что называется работой силы при данном перемещении?
- 2.23. Что такое мощность?
- 2.24. Перечислите единицы для измерения работы и мощности.
- 2.25. Докажите, что работа силы тяжести, работа упругодеформированной пружины и работа сил электростатических зарядов не зависят от пути, по которому происходит перемещение.
- 2.26. Проиллюстрируйте примерами зависимость работы силы трения от пути, по которому происходит перемещение.
- 2.27. Дайте определение потенциальной энергии.
- 2.28. Приведите выражения для потенциальной энергии упругодеформированной пружины и для потенциальной энергии тела в поле силы тяжести.
- 2.29. Чем объясняется произвольность выбора начального уровня отсчета потенциальной энергии?
- 2.30. Что такое взаимная потенциальная энергия тел?
- 2.31. Приведите выражение для взаимной потенциальной энергии двух электрических зарядов.
- 2.32. Какой физический смысл имеет тот или другой знак взаимной потенциальной энергии зарядов?
- 2.33. Какой знак имеет полная потенциальная энергия системы зарядов?
- 2.34. Какая связь существует между работой внешней силы и изменением потенциальной энергии?
- 2.35. Выведите условия, определяющие устойчивое и неустойчивое состояние равновесия консервативной системы тел.
- 2.36. Дайте определение кинетической энергии тела и кинетической энергии системы тел.
- 2.37. Выведите выражение для кинетической энергии материальной точки.
- 2.38. Сформулируйте закон сохранения механической энергии замкнутой консервативной системы тел. Приведите



вывод этого закона на основании второго и третьего законов Ньютона.

**2.39.** Сформулируйте закон изменения механической энергии системы тел. Выведите закон изменения механической энергии системы тел на основании второго и третьего законов Ньютона.

**2.40.** Выведите, пользуясь вторым и третьим законами Ньютона, закон сохранения масс.

**2.41.** Опишите качественно процессы, происходящие в механизмах, при совершении работы одной части механизма над другой. Объясните роль упругой деформации в процессе передачи работы.

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Типы и методы решения

**3.1.** Определение силы по заданному закону движения.

**Решение.** Используется уравнение второго закона Ньютона.

**3.2.** Определение ускорения, скорости и закона движения по заданным силам.

**Решение.** Используется уравнение второго закона Ньютона.

**3.3.** Определение ускорения, скорости и закона движения, а также сил в системах тел, связанных между собой, если известны некоторые силы и кинематические связи.

**Решение.** Используются уравнения второго закона Ньютона для каждого из тел системы в отдельности, а также уравнения кинематических связей.

Ускорение, скорость и закон движения можно найти, используя закон сохранения механической энергии.

**3.4.** Определение скоростей, приобретенных в процессе взаимодействия тел друг с другом.

**Решение.** Для замкнутых систем используется закон сохранения импульса, для незамкнутых — закон изменения импульса.

**3.5.** Определение работы силы на некотором пути.

**Решение. I способ.** Вычисляется определенный интеграл от элементарной работы в пределах, соответствующих началу и концу пути.

**II способ.** Вычисляется изменение механической энергии системы.

#### б) Примеры

##### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** Пластинки  $A$  и  $B$ , массы которых  $m_A$  и  $m_B$ , соединены между собой пружинкой. Пластинка  $A$  совершает сво-

бодные колебания вдоль вертикальной прямой по закону  $x = x_0 \cos \omega t$ . Вычислить давление пластинок  $A$  и  $B$  на стол, на котором лежит, не отрываясь от него, пластинка  $B$ . Массой пружинки пренебречь.

**Решение.** Запишем уравнение второго закона Ньютона для пластинки  $A$ :

$$m_A \ddot{x} = m_A g + F,$$

где  $F$  — сила упругости пружины.

Учитывая закон движения пластинки  $A$ , находим:

$$-m_A \omega^2 x = m_A g + F,$$

откуда

$$F = -(m_A g + m_A \omega^2 x) = -m_A (g + \omega^2 x).$$

Принимая во внимание условие невесомости пружины и третий закон Ньютона, можно заключить, что на пластинку  $B$  со стороны пружины будет действовать сила, по величине равная  $F$  и направленная в противоположную  $F$  сторону.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для пластинки  $B$  с учетом того, что пластинка  $B$  покоится на столе ( $x_B = 0$ ):

$$0 = m_B g - F + N,$$

где  $N$  — сила, действующая на пластинку  $B$  со стороны стола.

Из последнего равенства получаем

$$N = F - m_B g = -m_A g - m_B g - m_A \omega^2 x.$$

По третьему закону Ньютона сила  $N$ , действующая со стороны стола на пластинку  $B$ , равна по величине и противоположна по направлению искомой силе  $N'$  давления пластинки  $B$  на стол, т. е.

$$N' = m_A g + m_B g + m_A \omega^2 x.$$

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** На абсолютно гладкой наклонной плоскости с углом  $\alpha = 6^\circ$  относительно горизонта лежит дощечка, масса которой равна  $m = 100$  г. По дощечке тянут вверх с силой  $F = 1,6$  Н грузик, обладающий массой  $M = 500$  г. Дощечка при этом покоится. Определить, при каком значении коэффициента трения между грузиком и дощечкой это возможно. Определить также путь, который прошел грузик, приобретая скорость  $v = 0,2$  м/с, если в начале движения его скорость равнялась нулю.

**Решение.** Уравнение второго закона Ньютона для грузика можно записать в виде

$$Ma = F - Mg \sin \alpha - f_{\text{тр}}, \quad (1)$$

где  $f_{\text{тр}}$  — сила трения, действующая со стороны доски на грузик. Такая же по величине, но противоположная по направлению сила  $f_{\text{тр}}$  согласно третьему закону Ньютона действует со стороны грузика на дощечку.

Поскольку дощечка покоится, а грузик движется,

$$\begin{cases} f_{\text{тр}} - mg \sin \alpha = 0, \\ f_{\text{тр}} = kMg \cos \alpha. \end{cases} \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), находим:

$$k = \frac{m}{M} \operatorname{tg} \alpha = 0,02,$$

$$\alpha = \frac{F - (M + m) g \sin \alpha}{M}.$$

Искомый путь равен:

$$S = \frac{v^2}{2a} = \frac{1}{2} \frac{v^2 M}{F - (M + m) g \sin \alpha} \simeq 1 \text{ см.}$$

**3.2.2.** На платформе, масса которой равна  $M=5$  кг, лежит груз массы  $m=500$  г. Коэффициент трения между платформой и грузом  $k=0,1$ . Платформу тянут с силой  $F=7$  Н.

Определить ускорения  $a_1$  и  $a_2$  платформы и груза, если платформа движется по абсолютно гладкой поверхности.

**Решение.** Запишем уравнения второго закона Ньютона для платформы и груза:

$$Ma_1 = F - f_{\text{тр}}, \quad ma_2 = f_{\text{тр}}.$$

Поскольку  $F > kmg$ , груз скользит по поверхности платформы, и можно считать, что  $f_{\text{тр}} = kmg$ .

Следовательно,

$$a_1 = \frac{F - kmg}{M} = 1,3 \text{ м/с}^2, \quad a_2 = kg = 0,98 \text{ м/с}^2.$$

**3.2.3.** На вращающемся диске лежит тело массы  $m$ . Тело связано с осью вращения пружинкой жесткости  $k$ . Длина нерастянутой пружины  $l_0$ . Коэффициент трения тела о поверхность диска  $\mu$ . Диск раскручивают с большой скоростью, а затем постепенно скорость его уменьшают до некоторого значения  $\omega$ .

Найти  $\omega$ , если при этом пружина оказалась растянутой на длину  $\Delta l$ .

**Решение.** Уравнение второго закона Ньютона для тела массой  $m$  имеет вид

$$m \omega^2 (l_0 + \Delta l) = k \Delta l - \mu mg,$$

откуда получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{k \Delta l - \mu mg}{m (l_0 + \Delta l)}}.$$

### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Тележка массы  $M=1,5$  кг стоит на гладкой поверхности, по которой она может катиться без трения. На тележке лежит брусок массы  $m=500$  г. К бруску привязана веревка, за которую его тянут с горизонтально направленной силой  $f=0,24$  Н. Определить силу трения  $f_{\text{тр}}$  и ускорение  $a$  бруска и тележки. Коэффициент трения между бруском и тележкой равен  $k=0,1$ .

**Решение.** Уравнения второго закона Ньютона для бруска и тележки имеют вид:

$$ma_1 = f - f_{\text{тр}}, \quad Ma_2 = f_{\text{тр}}.$$

Поскольку  $f=0,24$  Н  $<$   $km_g=0,5$  Н, брусок покоится относительно тележки, и можно записать уравнение кинематической связи:

$$a_1 = a_2 = a.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$a = \frac{f}{M+m} = 0,1 \text{ м/с}^2,$$

$$f_{\text{тр}} = \frac{M}{M+m} f = 0,15 \text{ Н}.$$

**3.3.2.** Два груза, массы которых равны  $m_1=0,2$  кг и  $m_2=0,1$  кг, скреплены между собой нерастяжимой и невесомой нитью, перекинутой через блок. Грузы лежат на наклонных плоскостях с углами относительно горизонтали  $\alpha=15^\circ$  и  $\beta=6^\circ$  (рис. 6). До начала движения грузы находились на одной высоте.

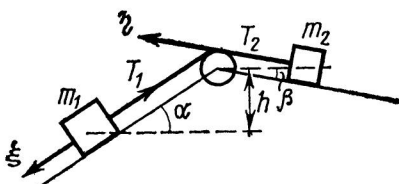


Рис. 6

Определить, на сколько левый груз опустится ниже правого через время  $t=3$  с. Коэффициент трения между грузами и плоскостями равен  $k=0,1$ . Массой блока пренебречь. Трение в оси блока отсутствует.

**Решение.** В данной задаче не составляет труда указать направление ускорения каждого из тел и, следовательно, направление равнодействующих. В подобных случаях координатные оси ( $\xi$ ,  $\eta$ ) разумно направить вдоль равнодействующих (рис. 6).

Движение тела  $m_1$  вдоль оси  $\xi$  и тела  $m_2$  вдоль оси  $\eta$  описывается уравнениями второго закона Ньютона в виде:

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin \alpha - k m_1 g \cos \alpha - T_1,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin \beta - k m_2 g \cos \beta + T_2.$$

Так как нить нерастяжима, то

$$a_1 = a_2 = a \text{ (кинематическая связь).}$$

Так как нить и блок невесомы и трение в оси блока отсутствует, то

$$T_1 = T_2 = T \text{ (динамическая связь).}$$

Из простых геометрических соображений следует, что левый груз опустится за время  $t$  ниже правого на величину

$$h = \frac{at^2}{2} (\sin \alpha + \sin \beta).$$

Из полученной системы уравнений можно определить

$$h = \frac{gt^2}{2} \frac{(\sin \alpha + \sin \beta) [m_1 (\sin \alpha - k \cos \alpha) - m_2 (k \cos \beta + \sin \beta)]}{m_1 + m_2} = 0,65 \text{ м.}$$

**3.3.3. Призма с углами** при основании  $\alpha = 6^\circ$  и  $\beta = 15^\circ$  расположена на абсолютно гладком столе (рис. 7). Грузик, масса которого  $m = 0,5$  кг, движется один раз вдоль ребер  $AB$  призмы, а другой раз—вдоль ребра  $AC$ . Трение между грузиком и призмой отсутствует.

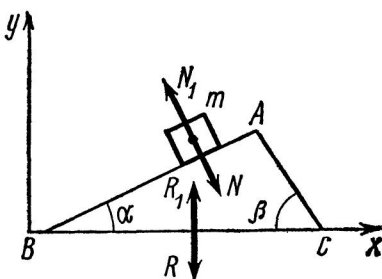


Рис. 7

Определить отношение ускорений  $a/b$  призмы при каждом из этих движений. Масса призмы равна  $M = 1$  кг.

**Решение.** Уравнения второго закона Ньютона, когда грузик движется вдоль  $AB$ , для грузика и призмы в векторной форме имеют вид:

$$m\bar{a}_1 = \bar{m}g + \bar{N}_1, \quad M\bar{a} = \bar{M}g + \bar{N} + \bar{R}_1,$$

где  $N_1$  и  $R_1$  — силы, действующие со стороны призмы на грузик и со стороны стола на призму. Согласно третьему закону Ньютона  $N_1 = -N$ ,  $R_1 = -R$ .

Спроектируем уравнения второго закона Ньютона на оси  $(xy)$  прямоугольной системы координат

$$\begin{cases} ma_x = -N_1 \sin \alpha, \\ ma_y = -mg + N_1 \cos \alpha, \\ Ma = N \sin \alpha, \\ 0 = R_1 - N \cos \alpha - Mg, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a_x$  и  $a_y$  — проекции ускорения грузика на оси  $x$  и  $y$ .

Из простых геометрических соображений можно получить уравнение кинематической связи

$$a_y = (a + a_x) \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), находим

$$a = \frac{m \sin 2\alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)} g.$$

Аналогично можно рассмотреть движение грузика  $m$  вдоль ребра  $AC$  призмы. Ускорение призмы оказывается при этом равно

$$b = \frac{-m \sin 2\beta}{2(M + m \sin^2 \beta)} g.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{b} = -\frac{\sin 2\alpha (M + m \sin^2 \beta)}{\sin 2\beta (M + m \sin^2 \alpha)} = -0,42.$$

3.3.4. Через блок  $A$ , ось которого закреплена, перекинута нить (рис. 8). На одном конце нити подвешен груз с массой  $m=5$  кг, а на другом — второй блок, через который также перекинута нить с грузом  $m_2=2$  кг и  $m_3=3$  кг на концах. Массы нитей и блоков пренебрежимо малы по сравнению с массами грузов. Определить ускорения грузов  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , а также натяжения нитей.

Решение. Уравнения второго закона Ньютона для грузов  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  имеют вид.

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - T, \\ m_2 a_2 = m_2 g - T/2, \\ m_3 a_3 = m_3 g - T/2, \end{cases} \quad (1)$$

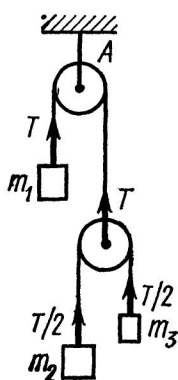


Рис. 8

где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  — ускорения относительно центра блока  $A$ .

Обозначим ускорение груза  $m_2$  относительно центра блока  $B$  через  $b$ , тогда

$$a_2 = (-a_1) + b, \quad a_3 = (-a_1) - b,$$

откуда следует уравнение кинематической связи

$$a_2 + a_3 = -2a. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), с учетом  $m_1 = m_2 + m_3$  находим

$$a_1 = \frac{(m_2 - m_3)^2}{m_2^2 + m_3^2 + 6m_2 m_3} g = \frac{1}{49} g;$$

$$a_2 = \frac{m_1^2 - 4m_2^2}{m_1^2 + 4m_2m_3} g = \frac{9}{49} g;$$

$$a_3 = \frac{m_1^2 - 4m_3^2}{m_1^2 + 4m_2m_3} g = -\frac{11}{49} g;$$

$$T = \frac{8m_1m_2m_3g}{m_1^2 + 4m_2m_3} \simeq 49 \text{ Н.}$$

3.3.5. На абсолютно гладкой горизонтальной поверхности лежит клин, (рис. 9) масса которого равна  $M=1,5$  кг и угол  $\alpha=30^\circ$ . О наклонную грань клина опирается стержень массы  $m=0,2$  кг. Стержень свободно перемещается в на-

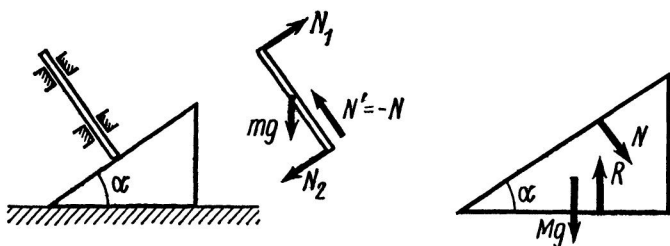


Рис. 9

правлении, перпендикулярном грани по неподвижным направляющим муфтам. Трение отсутствует.

Определить ускорения  $a$  и  $b$  клина и стержня, а также силу давления  $N$  стержня на клин.

Силы, действующие на стержень и клин (рис. 9), изображены стрелками.

**Решение. I способ.** Запишем уравнения движения клина в горизонтальном направлении и стержня в направлении нормали к наклонной грани:

$$\begin{aligned} Ma &= N \sin \alpha, \\ mb &= mg \cos \alpha - N. \end{aligned} \quad (1)$$

Из простых геометрических соображений получаем уравнение кинематической связи

$$b = a \sin \alpha. \quad (2)$$

Решая полученную систему уравнений (1) и (2), находим

$$a = \frac{mg \operatorname{ctg} \alpha}{m + \frac{M}{\sin^2 \alpha}} \simeq 0,58 \text{ м/с}^2;$$

$$b = \frac{mg \cos \alpha}{m + \frac{M}{\sin^2 \alpha}} \simeq 0,29 \text{ м/с}^2;$$

$$N = M \frac{mg \cos \alpha}{m \sin^2 \alpha + M} \simeq 1,74 \text{ Н.}$$

**II способ.** Ускорение можно найти также, пользуясь законом сохранения механической энергии

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mgh,$$

где  $v$  и  $u$  — абсолютные скорости клина и стержня, приобретенные за время опускания стержня на высоту  $h$ .

Дифференцируя это уравнение по времени, получим:

$$Mva + tub = mgu \cos \alpha,$$

или

$$M \frac{ub}{\sin^2 \alpha} + tub = mgu \cos \alpha,$$

откуда получаем

$$b = \frac{m \cos \alpha}{m + \frac{M}{\sin^2 \alpha}} g \simeq 0,29 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \frac{m \operatorname{ctg} \alpha}{m + \frac{M}{\sin^2 \alpha}} g \simeq 0,58 \text{ м/с}^2.$$

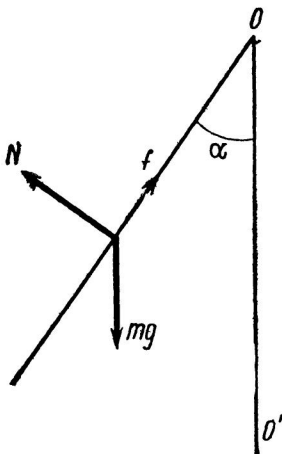


Рис. 10

**3.3.6.** Невесомый изогнутый стержень (рис. 10) вращается с угловой скоростью  $\omega = 60$  рад/с вокруг вертикальной оси  $OO'$ . На стержень надета бусинка массы  $m = 10$  г. Бусинка вращается вместе со стержнем, находясь на расстоянии  $l = 0,5$  м от точки  $O$ . Определить минимальное возможное значение коэффициента трения между бусинкой и стержнем. Угол  $\alpha = 30^\circ$ .

Решение. Уравнения движения бусинки в горизонтальном и вертикальном направлениях имеют вид

$$\begin{cases} m\omega^2 l \sin \alpha = f \sin \alpha - N \cos \alpha, \\ mg - N \sin \alpha - f \cos \alpha = 0, \end{cases}$$

где  $f$  — сила трения,  $N$  — сила реакции стержня.



Из этих уравнений находим

$$f = m\omega^2 l \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha,$$

$$N = mg \sin \alpha - m\omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha.$$

При равновесии бусинки относительно стержня  $|f| \leq \kappa |N|$ , или

$$|m\omega^2 l \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha| \leq k |mg \sin \alpha - m\omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha|.$$

Отсюда

$$k \geq \frac{m\omega^2 l \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha}{mg \sin \alpha - m\omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha} \simeq 0,5.$$

4-й тип задач (3.4)

**3.4.1.** Человек массы  $M=60$  кг прыгает под углом  $\alpha=30^\circ$  к горизонту со скоростью  $v_0=6$  м/с. В высшей точке человек бросает горизонтально назад гирию массы  $m=5$  кг со скоростью  $\omega=3$  м/с относительно себя.

Насколько увеличится дальность прыжка?

Решение. Система человек — камень является замкнутой в горизонтальном направлении. Для этого направления, следовательно, справедлив закон сохранения импульса; т. е.

$$(M + m)v_0 \cos \alpha - m(v_0 \cos \alpha - \omega) - Mv_x = 0,$$

где  $v_x$  — горизонтальная составляющая скорости человека после броска:

$$v_x = \frac{Mv_0 \cos \alpha + m\omega}{M}.$$

Если бы человек не бросал камень, дальность его прыжка была бы

$$S_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Поскольку после броска горизонтальная составляющая скорости человека увеличивается, то и дальность его прыжка также увеличивается и становится равной

$$S_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{mv_0 \omega \sin \alpha}{Mg}.$$

Увеличение дальности прыжка равно

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{mv_0 \omega \sin \alpha}{Mg} \simeq 7,5 \text{ см.}$$

**3.4.2.** Ящик с песком массы  $M=12$  кг вкатывается на ледяную горку (рис. 11), составляющую угол  $\alpha=30^\circ$  с гори-

зонтом. В начале горки ящик имел скорость  $v_0=3$  м/с. Когда он прошел путь  $l=0,4$  м, в него попал кирпич, летевший вертикально вниз. Ящик на мгновение остановился.

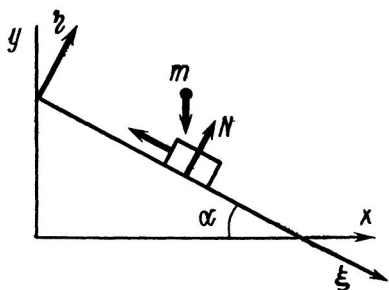


Рис. 11

Определить, с какой высоты падал кирпич, если известно, что его начальная скорость была равна нулю и что его масса  $m=3$  кг.

**Решение. 1 способ.** На кирпич и ящик действуют силы тяжести  $mg$  и  $Mg$  и сила реакции опоры  $N$ . За малое время  $dt$  неупругого соударения импульсом силы тяжести можно пренебречь по сравнению с импульсом реакции опоры. Вследствие этого в направлении оси  $\xi$  вдоль горки к системе ящик — кирпич можно применить закон сохранения импульса:

$$mu \sin \alpha - M \sqrt{v_0^2 - 2gl \sin \alpha} = 0,$$

где  $u$  — скорость кирпича непосредственно перед неупругим соударением, отсюда

$$u = \frac{M}{m} \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gl \sin \alpha}}{\sin \alpha}.$$

Высота  $H$ , с которой падал кирпич, определяется следующим выражением:

$$H = \frac{u^2}{2g} = \frac{M^2(v_0^2 - 2gl \sin \alpha)}{m^2 2g \sin^2 \alpha} \simeq 16 \text{ м.}$$

**II способ.** В горизонтальном и вертикальном направлениях ( $x$ ,  $y$ ) к системе ящик — кирпич во время неупругого соударения можно применить закон изменения импульса, как и ранее, пренебрегая при этом импульсами сил тяжести

$$\begin{cases} M \sqrt{v_0^2 - 2gl \sin \alpha} \cos \alpha = N \sin \alpha dt, \\ -M \sqrt{v_0^2 - 2gl \sin \alpha} \sin \alpha + mu = N \cos \alpha dt. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений получаем

$$u = \frac{M}{m} \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gl \sin \alpha}}{\sin \alpha}$$

и затем находим

$$H = u^2/2g \simeq 16 \text{ м.}$$

### 5-й тип задач (3.5)

**3.5.1.** Насос должен перекачать воду из одного резервуара в другой. Первый резервуар до краев наполнен водой и имеет следующие размеры: площадь дна  $S=12 \text{ м}^2$ , высота  $h=1 \text{ м}$ . Резервуары находятся на разных уровнях так, что расстояние от верха одного до верха другого составляет  $H=5 \text{ м}$ .

Определить, сколько времени потребуется насосу, если его мощность  $N=3,75 \text{ кВт}$  и коэффициент полезного действия  $\eta=0,6$ .

**Решение.** Запишем выражение для элементарной работы  $dA$ , которую надо совершить, чтобы перекачать из первого резервуара во второй слой воды толщиной  $dx$ , находящийся на глубине  $x$ :

$$dA = \rho g S dx (x + H),$$

где  $\rho$  — плотность воды. Тогда для перекачки всей воды надо совершить работу  $A$ :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^h \rho g S (x + H) dx = (\rho g S x^2 / 2 + \rho g S H x) \Big|_0^h = \\ &= 66 \cdot 10^4 \text{ кгм} = 66 \cdot 10^5 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Время, которое потребуется для этого, равно:

$$t = A / N \eta \simeq 49 \text{ мин.}$$

**3.5.2.** Шарик, движущийся со скоростью  $v$ , налетает на стенку, движущуюся навстречу шарика со скоростью  $u$ . Происходит абсолютно упругое соударение.

Определить изменение кинетической энергии шарика после удара. Что является причиной изменения кинетической энергии шарика? Масса стенки бесконечно велика по сравнению с массой шарика.

**Решение.** В системе отсчета, связанной со стенкой, скорость шарика до соударения равна  $v+u$ , а после соударения равна  $-(v+u)$ . Скорость шарика после соударения относительно лабораторной системы отсчета равна  $w = -(v+u) - u = -(v+2u)$ .

Легко определить изменение кинетической энергии шарика в результате удара:

$$\frac{mw^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = 2mu(u+v).$$

Кинетическую энергию шарика изменяют упругие силы, действующие на него при ударе. Чтобы убедиться в этом, подсчитаем работу упругих сил за время соударения  $\tau$ . Предполагаем, что во время удара упругая сила  $F$  постоянна (ре-

зультат не зависит от этого предположения). Поскольку импульс шарика изменился на  $m\omega - mv = -2m(v+u)$ , то

$$F = -\frac{2m(v+u)}{\tau}.$$

Работа этой силы за время  $\tau$  есть

$$A = F\tau = -2mu(u+v),$$

т. е. численно равна изменению кинетической энергии шарика.

**3.5.3.** Тележка массы  $M=0,4$  кг движется по абсолютно гладким горизонтальным рельсам со скоростью  $v=2$  м/с. На передний край тележки кладется брусок массы  $m=0,1$  кг с начальной скоростью, равной нулю.

Определить коэффициент трения между бруском и тележкой, если брусок, пройдя относительно тележки расстояние  $l=10$  см, начал двигаться с той же скоростью, что и тележка.

**Решение.** Согласно закону сохранения импульса

$$(m+M)u = Mv_0, \quad (1)$$

где  $u$  — скорость бруска и тележки после прекращения их относительного движения.

На основании закона изменения механической энергии можно написать:

$$\frac{Mv^2}{2} - \frac{(M+m)u^2}{2} = f(S-s), \quad (2)$$

где  $f$  — величина силы трения,  $S$  — перемещение тележки,  $s$  — перемещение бруска. Сила трения, приложенная к тележке, совершая отрицательную работу, уменьшает скорость тележки. Сила трения, приложенная к бруску, совершая положительную работу, увеличивает его скорость. Согласно третьему закону Ньютона эти силы имеют одну величину  $f$ .

Решая систему уравнений (1) и (2), находим:

$$f = \frac{mMv_0^2}{2(S-s)(M+m)}.$$

Так как  $f = kmg$ ,  $S-s=l$ , то

$$k = \frac{Mv_0^2}{2l(M+m)g} = 1,6.$$

#### 4. Контрольные вопросы

**4.1.** В каких системах отсчета справедливы законы Ньютона?

**4.2.** Однородный брусок висит на нити. Нить разрезают.

У каких частиц бруска будет большее ускорение в начальный момент времени: у верхних или у нижних?

4.3. Однородный брусок лежит на горизонтальной подставке. Подставку внезапно убирают. У каких частиц бруска будет большее ускорение в начальный момент времени: у верхних или у нижних?

4.4. Какой смысл имеет понятие «абсолютно жесткое тело»? Что можно сказать о величине силы упругой деформации и величине энергии упругой деформации абсолютно твердого тела?

4.5. Приведите зависимость величины силы сухого трения и силы жидкого трения от относительной скорости трущихся поверхностей.

4.6. Что такое явление застоя?

4.7. Всегда ли сила трения совершает отрицательную работу? Проиллюстрируйте свое утверждение примерами.

4.8. Какое влияние оказывает наличие сил сухого и жидкого трения на устойчивость состояний равновесия?

4.9. Что называется состоянием невесомости?

4.10. Ракету вывели на стационарную орбиту и она вращается вокруг Земли с первой космической скоростью. Каким образом можно заставить ракету двигаться по той же орбите со скоростью большей, чем первая космическая?

4.11. Ни одна система тел на поверхности Земли не может считаться замкнутой, если в нее не включена Земля. Тем не менее мы часто применяем закон сохранения импульса к системам тел без учета Земли. В каких случаях это возможно?

4.12. Будет ли увеличиваться скорость ракеты, если скорость истечения газов относительно ракеты меньше скорости самой ракеты, т. е. вытекающие из сопла ракеты газы летят вслед за ракетой?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Клин массы  $M=500$  г находится на абсолютно гладком столе (рис. 12). К клину одним концом привязана нить, перекинутая через блок. На другом конце нити подвешен груз массы  $m_1=25$  г. По наклонной грани клина скользит без трения брусок массы  $m_2=100$  г.

Определить ускорение  $a$  клина, а также силу  $N$  давления бруска на клин. Угол клина с горизонталью равен  $\alpha=30^\circ$ . Массой нити и блока пренебречь.

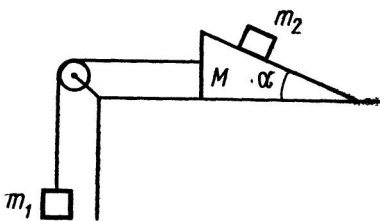


Рис. 12

О т в е т:

$$a = \frac{m_1 + m_2 \sin \alpha \cos \alpha}{M + m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} g \simeq 1,3 \text{ м/с}^2,$$

$$N = \frac{(M + m_1) \sin \alpha \cos \alpha - m_1 \sin^2 \alpha}{(M + m_1 + m_2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha} m_2 g \simeq 0,84 \text{ Н.}$$

5.2. На невесомом стержне укреплены два груза с массами  $m=100$  г и  $M=300$  г. Стержень шарнирно связан с вертикальной осью  $OO'$ .

С какой угловой скоростью  $\omega$  должна вращаться ось  $OO'$ , чтобы стержень образовывал с вертикалью угол  $\alpha=60^\circ$ ? Расстояние между грузами равно  $a=0,4$  м, расстояние от шарнира до груза  $m$  равно  $b=0,6$  м.

О т в е т:

$$\omega = \sqrt{\frac{g [mb + M(a+b)]}{\cos \alpha [mb^2 + M(a+b)^2]}} \simeq 4,6 \text{ 1/с.}$$

5.3. Через блок с неподвижной осью перекинута нить. Коэффициент трения между нитью и блоком равен  $k$ . К концам нити прикреплены грузы. Масса одного груза равна  $m$ .

Определить массу  $M$  второго груза, если известно, что это максимальная масса, при которой еще отсутствует проскальзывание нити по блоку. Блок — тонкостенный цилиндр с массой  $\mu$ .

О т в е т:

$$M = \frac{\mu m e^{k\pi}}{2m(1 - e^{k\pi}) + \mu}.$$

5.4. Кусок однородной нити висит вертикально, причем нижний конец нити как раз доходит до горизонтального стола. Показать, что если верхний конец нити освободить, то в любой момент падения нити сила ее давления на стол будет в три раза больше веса части нити, уже лежащей на столе.

5.5. Тележка массы  $M=1,5$  кг может двигаться без трения по горизонтальным рельсам. На тележке укреплен подвешенный на канате ящик с песком (баллистический маятник). В некоторый момент времени, когда тележка и маятник покоились, в ящик с песком влетела пуля, имевшая горизонтально направленную скорость  $v=32$  м/с, и застряла в нем.

Определить максимальный угол  $\alpha$ , на который отклонится маятник от вертикали. Масса пули  $\mu=10$  г, масса маятника  $m=500$  г, его длина  $l=2$  м.

О т в е т:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{(M + m)\mu}{2g(m + \mu)(M + m + \mu)} \frac{v^2}{l} \simeq 1/2, \alpha = 60^\circ.$$

5.6. Ракета взлетает вертикально вверх, выбрасывая раскаленные газы последовательно двумя равными порциями. Скорость истечения газов относительно ракеты постоянна и равна  $u$ .

Каким должен быть промежуток времени между сгоранием порций, чтобы ракета достигла максимальной высоты? Сгорание топлива происходит мгновенно. Соппротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: вторую порцию топлива выгоднее всего сжечь непосредственно вслед за первой порцией.

5.7. Однородная цепочка длины  $L=2$  м и массы  $M=500$  г лежит на абсолютно гладком горизонтальном столе. Небольшая часть цепочки пропущена в отверстие, сделанное в столе. Лежащий на столе конец цепочки сначала придерживают, а в некоторый момент времени отпускают.

Определить скорость движения цепочки в тот момент, когда длина свешивающейся части будет равна  $l=0,5$  м. Определить также ускорение цепочки  $a$  и силу реакции доски  $N$  в тот же момент времени.

Ответ:

$$v = \sqrt{gl^2/L} \simeq 1,1 \text{ м/с}, \quad a = \frac{gl}{L} = 2,5 \text{ м/с}^2,$$

$$N = Mgl \left( \frac{L}{2} - l \right) 4 \sqrt{2}/L^3 = 1,75 \text{ Н.}$$

5.8. Две пластинки, массы которых равны  $m_1=90$  г и  $m_2=100$  г, скреплены пружинкой с коэффициентом жесткости  $k=150$  Н/м. На верхнюю пластинку с высоты  $h$  падает пластилиновый шарик массы  $m=10$  г (рис. 13).

Определить минимальное значение высоты  $h$ , при котором нижняя пластинка оторвется от стола.

Ответ:

$$h \geq \frac{3(m_1 + m)^2 g}{2m_2^2 k} = 1 \text{ м.}$$

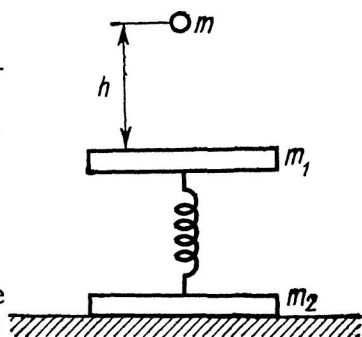


Рис. 13

## РАЗДЕЛ IV

### Простейшие задачи релятивистской динамики

#### 1. Теоретический материал

Релятивистское уравнение движения. Релятивистская масса, импульс. Масса покоя. Инертные свойства тела в направлении скорости и в перпендикулярном направлении. Причины несовпадения силы и вызываемого ею ускорения. Несоблюдение третьего закона Ньютона в простейшей форме в электромагнитных взаимодействиях. Законы сохранения импульса, момента импульса и энергии в релятивистском случае. Полная энергия и энергия покоя. Соотношение между массой и энергией. Энергия связи. Вращение перигелия Меркурия. Отклонение лучей света в поле тяготения Солнца. Ускорители заряженных частиц.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Покажите, каким образом из релятивистского уравнения движения следует, что инертные свойства тела в направлении движения и в перпендикулярном направлении различаются.

2.2. Пусть сила образует острый угол  $\alpha$  с направлением скорости. Каков угол между ускорением и скоростью — больше  $\alpha$  или меньше?

2.3. Два покоящихся тела слипаются. Чему равна масса тела, образовавшегося в результате слипания?

Два движущихся с одной и той же скоростью тела слипаются в движении. Чему равна масса покоя тела, образовавшегося в результате слипания?

Два тела, массы покоя которых одинаковы, движутся друг навстречу другу с одинаковыми скоростями и испытывают абсолютно неупругий удар, в результате которого образуется одно тело. Какова масса покоя образовавшегося тела?

2.4. Какие аргументы можно привести для доказательства утверждения, что несоблюдение третьего закона Ньютона в простейшей форме в электромагнитных взаимодействиях обусловлено не какими-то особыми свойствами электромагнитных сил, а релятивистскими свойствами пространства и времени?



2.5. Понятия центра масс системы материальных точек в релятивистском случае не существует, однако координатная система центра масс не только существует, но является очень важным понятием. Разъясните смысл этого утверждения.

2.6. Следствием каких общих свойств пространства и времени являются законы сохранения энергии, импульса и момента импульса?

2.7. Докажите, что величина  $m_0c^2$  не просто некоторая величина, имеющая размерность энергии, но и действительно энергия, называемая энергией покоя. Какое при этом важнейшее свойство энергии необходимо использовать?

2.8. Какие физические явления доказывают наличие инертных свойств у потенциальной энергии?

2.9. Приведите экспериментальные факты, доказывающие справедливость соотношения между массой и энергией. Почему не имеет смысла утверждение о превращении массы в энергию и наоборот? Может ли существовать физическая система, обладающая энергией и не обладающая инертностью или обладающая инертностью и не обладающая энергией?

2.10. Что такое энергия связи? Начертите график энергии связи, приходящейся на одну частицу, в зависимости от массового числа ядер. Какие особенности графика приводят к заключению о возможности получения энергии при расщеплении тяжелых ядер и при слиянии легких?

2.11. Может ли частная теория относительности объяснить вращение перигелия Меркурия?

Какую часть полного эффекта она может объяснить и каким образом?

2.12. Классическая теория тяготения предсказывает отклонение лучей света в поле тяготения Солнца. Чем отличается эффект отклонения, предсказываемый теорией относительности, от эффекта, предсказываемого классической теорией?

2.13. Перечислите методы ускорения заряженных частиц.

2.14. Что такое индукционный метод ускорения и какие ускорители работают по этому методу?

2.15. Что такое резонансный метод ускорения и какие ускорители работают по этому методу?

2.16. Приведите краткие характеристики циклотрона, фазотрона, синхрофазотрона, синхротрона, бетатрона. Какие частицы в них можно ускорить, до каких пределов?

2.17. Что такое радиальная и вертикальная устойчивость бетатронных колебаний?

2.18. Что такое фазовые колебания и в чем состоит принцип автофазировки?

2.19. Что такое линейные ускорители? Какие линейные ускорители Вы знаете?

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Типы и методы решения

**3.1.** Задано электромагнитное поле. Найти движение при известных начальных условиях.

**Решение.** Прямое интегрирование уравнений движения.

**3.2.** Задачи на соударение частиц.

**Решение.** Используются законы сохранения.

**3.3.** Анализ общих особенностей движения без детального знания траектории.

**Решение.** Используются законы сохранения.

**3.4.** Нахождение энергетических выходов ядерных реакций.

**Решение.** Используются соотношения между массой и энергией и законы сохранения.

#### б) Примеры

##### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** Найти плоскую траекторию релятивистской частицы с массой покоя  $m_0$  и зарядом  $e$  в однородном, постоянном по времени магнитном поле.

**Решение.** Уравнение движения имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = e [\bar{v}, \bar{B}].$$

Поскольку сила действует перпендикулярно скорости, абсолютная величина скорости в процессе движения не изменяется и поэтому величина  $\sqrt{1-v^2/c^2} = \text{const}$ . Следовательно, уравнение движения принимает вид

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\bar{v}}{dt} = e [\bar{v}, \bar{B}].$$

Это уравнение движения совпадает с уравнением движения частицы в нерелятивистском случае, но с релятивистской массой  $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2} = \text{const}$ . Поэтому траекторией является окружность, радиус  $r$  которой можно найти из равенства

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{v^2}{r} = evB,$$

т. е.

$$r = \frac{m_0 v}{eB \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mv}{eB}.$$

**3.1.2.** Найти движение частицы массы  $m$  с зарядом  $e$  в постоянном электрическом поле  $E_0$ , направленном вдоль оси  $x$ . При  $t=0$  частица покоится в начале координат.

Решение. Ясно, что движение происходит вдоль оси  $x$ , а уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} \right) = eE_0; \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0. \quad (1)$$

Отсюда с учетом  $\dot{x}_0 = 0$  находим

$$\frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} = eE_0 t. \quad (2)$$

Будем считать для определенности, что  $eE_0 > 0$ , и введем обозначение  $eE_0/m_0 = \alpha$ . Тогда из (2) получаем

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{c^2} t^2}}. \quad (3)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{\alpha t dt}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{c^2} t^2}} = \frac{c^2}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{c^2} t^2} \Big|_{t=0}^t = \\ &= \frac{c^2}{\alpha} \left( \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{c^2} t^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

В нерелятивистском случае можно считать, что  $\alpha^2 t^2/c^2 \ll 1$ , и положить

$$\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{c^2} t^2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{c^2} t^2.$$

Следовательно, формула (3) принимает в этом случае хорошо известный вид

$$x(t) \simeq \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \frac{eE_0}{m_0} t^2. \quad (4)$$

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Два тела с массами покоя  $m_0$  движутся навстречу друг другу с одинаковыми абсолютными скоростями  $v$  и испытывают лобовой абсолютно неупругий удар. Какова масса покоя образовавшегося в результате удара тела?

Решение. Используя законы сохранения энергии при столкновении, получим

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = M_0 c^2,$$

т. е.

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Таким образом, в массу покоя образовавшегося в результате столкновения тела полностью переходит инертность движения тела. В энергию покоя полностью переходит кинетическая энергия тела.

### 3-й тип (3.3)

**3.3.1.** Исследовать особенности релятивистского движения заряженной частицы в кулоновском поле ядра с зарядом  $Ze$ .

**Решение.** Законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{Ze^2}{r} = E_0 = \text{const}, \quad (1)$$

$$\frac{m_0 r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = M_0 = \text{const}. \quad (2)$$

Из закона сохранения энергии видно, что если  $E_0 > m_0 c^2$ , то траектория частицы уходит на бесконечность ( $Ze^2/r \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ). При  $E_0 < m_0 c^2$  траектория частицы заключена в конечной области пространства и частица не может отдалиться больше, чем на расстояние  $r_{\max}$ , определяемое законом сохранения энергии

$$m_0 c^2 - \frac{Ze^2}{r_{\max}} = E_0. \quad (3)$$

Минимальное расстояние  $r_{\min}$  и максимальную скорость  $v_{\max}$  можно найти также из законов сохранения:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\max}^2}{c^2}}} - \frac{Ze^2}{r_{\min}} = E_0, \quad (4)$$

$$\frac{mv_{\max} r_{\min}}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} = M_0. \quad (5)$$

Из этих двух уравнений можно найти  $v_{\max}$  и  $r_{\min}$ . Для нахождения дальнейших свойств возможных траекторий необходимо рассмотреть решение уравнений. В частности, из уравнений (4) и (5) видно, что при  $r_{\min} \rightarrow 0$   $v_{\max} \rightarrow c$ .

### 4-й тип (3.4)

**3.4.1.** Сколько килокалорий выделяется при образовании 1 кг гелия в результате слияния ядер дейтерия? Энергия

связи на одну частицу в дейтерии равна 1,09 МэВ, а в гелии 7,06 МэВ.

**Решение.** При образовании одного ядра гелия из двух ядер дейтерия выделяется энергия

$$\Delta Q_1 = (4 \cdot 7,06 - 4 \cdot 1,09) = 23,88 \text{ МэВ} = 38 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.}$$

При образовании 1 кг гелия выделяется энергия

$$Q = \frac{6 \cdot 10^{23}}{4} 10^3 \cdot 38 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Дж} = 1,4 \cdot 10^{11} \text{ Ккал.}$$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Частица движется в направлении оси  $x$  с большой скоростью. На нее действует большая сила в направлении оси  $y$ . Изменится ли в результате действия этой силы скорость частицы в направлении оси  $x$ ?

4.2. Частица обладает массой покоя  $m_0$ . При каких энергиях частицы можно считать ее скорость практически равной скорости света и при увеличении энергии считать скорость практически постоянной?

4.3. Каковы условия движения частицы в конечной области и условия ухода на бесконечность?

4.4. Почему ядро дейтрона, состоящее из 2 нуклонов, имеет меньшую массу, чем сумма масс нуклонов?

4.5. Частица самопроизвольно распадается на две частицы так, что эти частицы движутся с различными скоростями. Сумма масс покоя образовавшихся частиц будет больше или меньше покоя исходной частицы?

#### 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. При какой скорости электрона его масса будет равна массе покоя протона?

Ответ:  $v=0,999999843 \text{ С.}$

5.2. Можно приблизительно считать, что масса покоя  $\alpha$ -частицы в четыре раза больше массы покоя протона, а ее заряд составляет два элементарных заряда. Протон и  $\alpha$ -частица ускоряются одинаковой разностью потенциалов.

Какова должна быть разность потенциалов, чтобы масса  $\alpha$ -частицы превосходила массу протона в 3 раза?

Ответ:  $V=m_0c^2/e=9,10^8 \text{ В.}$

5.3. В магнитном поле  $B=10^4 \text{ Гс}$  электрон движется по окружности радиуса 3 м. Определить энергию электрона.

Ответ:  $E=900 \text{ МэВ.}$

5.4. На сколько увеличится масса 1 кг воды, если ее нагреть от 0 до 100°C?

Ответ:  $\Delta m=4,7 \cdot 10^{-12} \text{ кг.}$

5.5. Мощность потока солнечной энергии на орбите Земли равна примерно 2 кал/см<sup>2</sup>·мин. Считая, что Землей погло-

щается примерно 1% падающей энергии, определить, на сколько кг в мин увеличивается масса Земли за счет поглощения потока энергии от Солнца.

О т в е т:  $\Delta m = 1,15$  кг/мин.

5.6. На сколько ежеминутно уменьшается масса Солнца за счет излучения, если на орбите Земли мощность потока солнечной энергии равна 2 кал/см<sup>2</sup>·мин.

О т в е т:  $\Delta m = 250$  млн·т/мин.

5.7. Найти энергию, выделяющуюся при делении 1 кг урана, если при делении одного атома урана в среднем выделяется 200 МэВ. Какому количеству угля это эквивалентно, если теплотворная способность угля равна 7000 ккал/кг? Какой массе соответствует эта энергия?

О т в е т:  $Q = 2 \cdot 10^{10}$  ккал,  $M_{\text{угля}} = 3000$  т,  $m = 0,9$  г.

5.8. Фотон с частотой  $\omega$  поглощается покоящимся атомом массы  $M$ . Определить скорость атома после поглощения фотона.

О т в е т:

$$v = c \frac{\hbar \omega}{M_0 c^2 + \hbar \omega}, \quad \hbar \text{ — постоянная Планка.}$$

## РАЗДЕЛ V

### Момент силы и момент импульса. Закон сохранения момента импульса

#### 1. Теоретический материал

Скалярное и векторное умножение векторов. Производная вектора (и ортов) по времени. Конические сечения, эксцентриситет, фокальный параметр. Скорость абсолютная, относительная и переносная. Величина и направление момента силы, точка приложения. Момент инерции материальной точки относительно данной оси вращения. Момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела. Теорема о переносе оси (теорема Штейнера). Момент импульса, его величина и направление для материальной точки и для твердого тела относительно данной оси. Закон сохранения момента импульса; пределы применимости. Закон сохранения механической энергии; пределы применимости. Закон тяготения. Законы Кеплера. Закон Кулона.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Каков физический смысл производной по времени от ортов  $(\bar{i}\bar{j}\bar{k})$ ?

2.2. Из каких компонент складывается абсолютная скорость точки, двигающейся в подвижной системе отсчета?

2.3. Катушка надета на горизонтальную ось. К свободному концу нити прикреплен груз. Груз опускается, наблюдатель видит, что катушка вращается по часовой стрелке.

Какие векторы определяют величину приложенного к катушке момента сил?

2.4. Как определить направление момента сил?

2.5. К чему приведет перестановка множителей  $\bar{T}$  и  $\bar{r}$  в векторном произведении двух векторов?

2.6. Как рассчитать момент инерции однородного диска относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной его плоскости?

2.7. Зависит ли радиус инерции однородного тела от материала, из которого оно сделано?

2.8. Какие наименьшие ограничения следует наложить на систему тел, чтобы к ней можно было применить: а) закон сохранения момента импульса; в) закон сохранения механической энергии.

2.9. Какие системы являются консервативными?

2.10. Пуля летит горизонтально и попадает в маятник, висящий на нити. Чему равен момент количества движения пули относительно оси, проходящей через точку подвеса маятника? Меняется ли величина момента импульса пули в процессе полета, т. е. зависит ли момент импульса от расстояния между пулей и маятником?

### 3. Основные типы задач и методы решения

#### а) Типы и методы решения

3.1. Движение материальной точки относительно точки — центра вращения под действием центральной силы.

Решение. Используются законы всемирного тяготения, сохранения момента импульса, сохранения механической энергии, Кулона, Кеплера.

3.2. Движение материальной точки относительно данной оси вращения под действием центральной силы.

Решение. Используются законы сохранения момента импульса, механическая энергия не сохраняется.

3.3. Вращение тел относительно данной оси (момент внешних сил равен нулю).

Решение. Используются законы сохранения момента импульса, механическая энергия не сохраняется при изменении момента инерции системы.

#### б) Примеры

##### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Вывод спутника на орбиту. Спутнику на поверхности Земли сообщили вертикально направленную большую скорость  $v_0$ . В момент остановки ему сообщили дополнительно перпендикулярно  $v_0$  скорость  $v_1$ . В результате спутник вышел на заранее заданную эллиптическую орбиту, радиусом  $r = p / (1 + \varepsilon \cos \varphi)$ , где  $p$  — фокальный параметр,  $\varepsilon$  — эксцентриситет,  $\varphi = 0$  — перигей,  $\varphi = \pi$  — апогей (с апогеем в месте остановки спутника).

Определить  $v_0$  и  $v_1$ , если известны радиус Земли  $R_0$  и параметры орбиты  $p$  и  $\varepsilon$ . Соппротивление воздуха не учитывать, Землю считать сферой.

Решение. Так как диссипативной силой пренебрегают, то вся кинетическая энергия, полученная спутником в начальный момент, пойдет на работу по преодолению силы притяжения:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{R_0}^{r_A} \gamma M m \frac{dr}{r^2} = -\gamma M m \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{R_0} \right), \quad (1)$$



$$\gamma Mm/R_0^2 = mg_0. \quad (2)$$

Таким образом,

$$v_0 = \sqrt{2g_0R_0 \left(1 - \frac{R_0}{r_A}\right)}, \text{ где } r_A = \frac{p}{1 - \varepsilon} \text{ (апогей),}$$

или

$$v_0 = \sqrt{2g_0R_0 \left(1 - \frac{R_0}{r_\pi}\right)}, \text{ где } r_\pi = \frac{p}{1 + \varepsilon} \text{ (перигей).}$$

Фокальный параметр эллипса  $p = b^2/a$ , где  $a$  — большая полуось эллипса,  $b$  — малая;  $a$  зависит от полной энергии точки  $\omega$ , от массы ее  $m$  и интенсивности источника поля —  $\gamma M$ :

$$a = \gamma m M / 2 |\omega|, \quad (3)$$

$b$  зависит от момента импульса  $N = m[r v]$ , полной энергии точки  $\omega$  и массы ее  $m$ :

$$b = \frac{N}{\sqrt{2m|\omega|}}. \quad (4)$$

Таким образом,

$$p = \frac{v_A^2 r_A^2}{g_0 R_0^2}. \quad (5)$$

Момент импульса сохраняется:

$$v_A r_A = v_\pi r_\pi. \quad (6)$$

Тогда из (5) и (6) получаем

$$v_1 = v_A = \sqrt{g_0 p} \frac{R_0}{r_A},$$

или

$$v_1 = v_\pi = \sqrt{g_0 p} \frac{R_0}{r_\pi}.$$

**3.1.2. Приземление спутника.** Спутник Земли движется по эллиптической орбите с параметрами  $p$  и  $\varepsilon$ . На какую величину  $\Delta v$  следует изменить (уменьшить) скорость спутника в апогее, чтобы он перешел на новую орбиту с перигеем, равным радиусу Земли  $R_0$ , т. е. мог приземлиться?

**Решение.** Скорость спутника до изменения орбиты в точке  $r_A$  (см. 3.1.1)

$$v_A = \sqrt{g_0 p} \frac{R_0}{r_A}.$$

Скорость после изменения орбиты в той же точке  $r_A$

$$v_{1A} = \sqrt{g_0 p_1} \frac{R_0}{r_A} < v_A.$$

Найдем  $p_1$ . Старая орбита:

$$r_A = \frac{p}{1 - \varepsilon}. \quad (1)$$

Новая орбита:

$$r_A = \frac{p_1}{1 - \varepsilon_1}, \quad (2)$$

$$r_{1\pi} = \frac{p_1}{1 + \varepsilon_1} = R_0. \quad (3)$$

Из (2) и (3):

$$\varepsilon_1 = \frac{r_A - R_0}{r_A + R_0}; \quad p_1 = \frac{2r_A R_0}{r_A + R_0},$$

$\Delta v = v_A - v_{1A}$ . После подстановки  $p_1$  и  $r_A$  получим

$$\Delta v = R_0 (1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{g_0}{p}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2R_0}{p + R_0 (1 - \varepsilon)}} \right).$$

**3.1.3. Изменение орбиты спутника на круговую.** Спутник Земли имеет эллиптическую орбиту с параметрами  $p$  и  $\varepsilon$ . Насколько нужно изменить скорость спутника в апогее (перигее), чтобы он перешел на круговую орбиту того же радиуса? Радиус Земли  $R_0$ .

**Решение.** При движении по окружности радиуса  $r$  центростремительной силой является сила тяготения

$$\frac{\gamma mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}. \quad (1)$$

Так как  $\gamma M = g_0 R_0^2$ , то

$$v = R_0 \sqrt{\frac{g_0}{r}}. \quad (2)$$

Для апогея

$$r = r_A = \frac{p}{1 - \varepsilon}, \quad (3)$$

а скорость (см. 3.1.1)

$$v_A = R_0 (1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{g_0}{p}}. \quad (4)$$

Скорость на круговой орбите радиуса  $r_A$  из (2) и (3)

$$v = R_0(1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{g_0}{\rho(1 - \varepsilon)}}. \quad (5)$$

Разность (4) и (5) покажет, насколько нужно изменить  $v_A$  для перевода спутника на круговую орбиту:

$$\Delta v = v_A - v = R_0(1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{g_0}{\rho}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon}}\right).$$

Для перигея:

$$\Delta v = v_{\pi} - v = R_0(1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{g_0}{\rho}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon}}\right).$$

**3.1.4. Рассеяние легкой частицы на тяжелой.** Метеор массы  $m \ll M_0$  Солнца летит из бесконечности, имеет вдали от Солнца скорость  $v_0$  и расстояние  $l_0$  (рис. 14), такое, что траектория его изменяется и он, огибая Солнце, уходит в бесконечность.

Найти наименьшее расстояние  $r$ , на которое метеор приблизится к Солнцу. Влиянием других тел на метеор пренебрегаем.

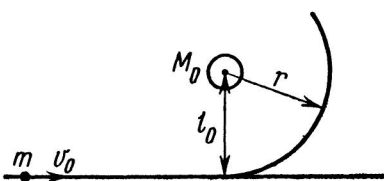


Рис. 14

**Решение.** Момент импульса  $m$  относительно  $M_0$  сохраняется, так как сила их взаимодействия центральная:

$$mv_0 l_0 = mvr, \quad (1)$$

где  $v$  — скорость метеора на расстоянии  $r$  от Солнца. Механическая энергия сохраняется (система консервативна), а потенциальная энергия в бесконечности равна нулю:

$$\frac{\gamma mM_0}{r} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) найдем  $r$ :

$$r = \sqrt{\left(\frac{\gamma M_0}{v_0^2}\right)^2 + l_0^2} - \frac{\gamma M_0}{v_0^2}.$$

**3.1.5.** В безвоздушном пространстве по одному направлению двигались два шарика. Масса одного  $m = 1,10 \cdot 10^{-10}$  г, заряд  $q = -2,4 \cdot 10^{-6}$  CGSE, масса второго —  $M = 1,10 \cdot 10^{-5}$  г, заряд  $q = 2,4 \cdot 10^{-6}$  CGSE.

Найти скорость  $v$  малого шарика относительно большого, если он притянулся и стал вращаться вокруг большого по

круговой орбите радиуса  $r=0,1$  см. Найти период обращения  $T$ .

Решение. Сила гравитационного притяжения

$$F_g = \frac{\gamma mM}{r^2} = \frac{6,7 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-5}}{10^{-2}} = 6,7 \cdot 10^{-21} \text{ дин.}$$

Сила взаимодействия Кулона

$$F_K = \frac{Qq}{r^2} = \frac{2,4 \cdot 10^{-6} \cdot 2,4 \cdot 10^{-6}}{10^{-2}} = 5,8 \cdot 10^{-10} \text{ дин,}$$

т. е.  $F_K \gg F_g$ ; сила Кулона является центростремительной силой:

$$\frac{mv^2}{r} = F_K,$$

$$v = \sqrt{\frac{5,8 \cdot 10^{-10} \cdot 0,1}{10^{-10}}} = 0,76 \text{ см/с,}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}; T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,1}{0,76} = 0,83 \text{ с.}$$

2-й тип задач (3.2)

3.2.1. Шарик (материальная точка) массы  $m$  вращается вместе с невесомой горизонтальной трубкой по инерции относительно вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ . Невесомая нить удерживает шарик на расстоянии  $l_0$  от оси и пропущена (рис. 15) вдоль оси. Очень медленно подтягивают шарик к оси до расстояния  $x$  от нее.

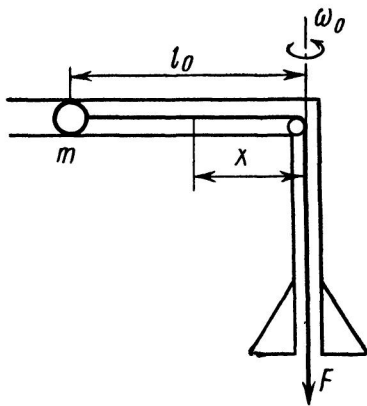


Рис. 15

Очень медленно подтягивают шарик к оси до расстояния  $x$  от нее. Найти: 1) угловую скорость шарика  $\omega_x$  как функцию  $x$ ; 2) силу натяжения нити  $F_x$ ; 3) показать, что изменение кинетической энергии  $\Delta E$  шарика равно работе  $A$  силы  $F_x$ .

Решение 1) Момент импульса сохраняется, так как момент  $[l_0 F] = 0$ ,

$$ml_0^2 \omega_0 = mx^2 \omega_x, \quad \omega_x = \frac{\omega_0 l_0^2}{x^2} > \omega_0.$$

2)  $F_x = m \omega_x^2 x = \frac{ml_0^4 \omega_0^2}{x^3}$  равновесная для каждого  $x$ .

$$3) \Delta E = \frac{J_0 \omega_0^2}{2} - \frac{J_x \omega_x^2}{2} = \frac{m l_0^2 \omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2 - l_0^2}{x^2} \right) < 0,$$

$$E_0 < E_x.$$

Если при постоянном моменте импульса  $J\omega$  уменьшается момент инерции тела  $J$ , то увеличивается кинетическая энергия  $E_{кин}$  системы:

$$A = \int_{l_0}^x F_x dx = \frac{m l_0^2 \omega_0^2}{2} \left( \frac{x^2 - l_0^2}{x^2} \right).$$

Энергия шарика увеличилась за счет работы силы  $F_x$ .

**3.2.2.** На невесомый горизонтальный стержень насажена муфта массы  $m$  (материальная точка), прикрепленная нитью длины  $a$  к оси  $OO$ , относительно которой система вращается по инерции с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  (рис. 16). Нить пережигают и муфта скользит по стержню.

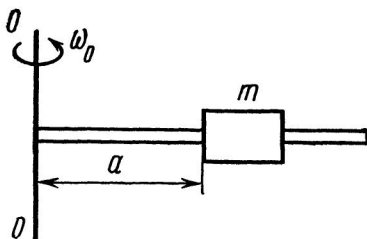


Рис. 16

Найти угловую скорость муфты  $\omega_x$  как функцию ее расстояния  $x$  от оси.

**Решение.** Момент импульса сохраняется:

$$m a^2 \omega_0 = m x^2 \omega_x; \quad \omega_x = \frac{a^2}{x^2} \omega_0.$$

3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Горизонтальный диск массы  $M$  радиуса  $r$  может вращаться без трения около вертикальной оси  $OO$ , проходящей через его центр. В точке  $A$  на краю диска сидит жук (материальная точка) массы  $m$ . Система находится в покое. В момент  $t=0$  жук начинает двигаться по ободу диска по закону  $S=at^2/2$  относительно диска.

Найти угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\beta$  диска как функцию времени  $t$ .

**Решение.** Угловая скорость жука относительно диска:

$$\omega_1 = v/r = at/r.$$

Момент импульса системы сохраняется:

$$0 = m r^2 (\omega_1 - \omega) - \frac{M r^2}{2} \omega, \quad (1)$$

откуда

$$\omega = \frac{2mat}{r(M+2m)}, \quad \beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2ma}{r(M+2m)}.$$

Относительная угловая скорость жука  $\omega_1$  и абсолютная угловая скорость диска  $\omega$  (которая для жука является переносной скоростью) имеют разные знаки. Выбор знака для  $\omega_1$  и  $\omega$  произволен, но выбранный знак  $\omega$  сохраняется у всех членов равенства (1).

**3.3.2.** Горизонтальный диск вращается без трения по инерции с угловой скоростью  $\omega_0$  относительно вертикальной оси, проходящей через его центр. Жук (материальная точка), находившийся в центре диска, начинает двигаться по радиусу с постоянной скоростью  $u$  относительно диска.

На какой угол повернется диск через  $t$  с после начала движения жука, если массы жука и диска одинаковы?

**Решение.** Момент импульса сохраняется:

$$\frac{mr^2}{2} \omega_0 = \left( \frac{mr^2}{2} + mu^2t^2 \right) \omega_t,$$

где  $m$  — масса диска и жука,  $ut$  — расстояние от оси, пройденное жуком за  $t$  с,  $\omega_t$  — угловая скорость системы через  $t$  с:

$$\omega_t = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2 \omega_0}{r^2 + 2u^2t^2}.$$

Отсюда находим пройденный угол  $\varphi$ :

$$\int_0^\varphi d\varphi = \int_0^t \frac{r^2 \omega_0}{r^2 + 2u^2t^2} dt,$$
$$\varphi = \frac{r \omega_0}{u \sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ut \sqrt{2}}{r}.$$

Начальные условия:  $t=0$ ,  $\varphi=0$ .

**3.3.3.** На оси горизонтального столика, вращающегося по инерции со скоростью  $n_1$  об/с, стоит человек и держит две гири массы  $m$  каждая на расстоянии  $l_1$  друг от друга ( $l_1/2$  от оси). Потом сближает их до расстояния  $l_2$  ( $l_2/2$  от оси), при этом скорость вращения системы становится  $n_2$  об/с.

Определить работу  $A$ , совершенную человеком.

**Решение.** Работа  $A$  равна разности кинетических энергий системы:

$$A = \Delta E = \frac{1}{2} \left( J_0 + \frac{2ml_2^2}{4} \right) 4\pi^2 n_2^2 - \frac{1}{2} \left( J_0 + \frac{2ml_1^2}{4} \right) 4\pi^2 n_1^2, \quad (1)$$

где  $J_0$  — момент инерции системы без гирь.

Момент импульса сохраняется:

$$\left( J_0 + \frac{2ml_1^2}{4} \right) 2\pi n_1 = \left( J_0 + \frac{2ml_2^2}{4} \right) 2\pi n_2, \quad (2)$$

откуда

$$J_0 = \frac{m(l_1^2 n_1 - l_2^2 n_2)}{2(n_2 - n_1)}.$$

Подставив  $J_0$  в (1), получим

$$A = \pi^2 m n_1 n_2 (l_1^2 - l_2^2).$$

3.3.4. Цилиндр массы  $m$ , радиуса  $r$ , высоты  $h=r$  имеет винтовой желоб под углом  $\alpha=45^\circ$  и может вращаться без трения относительно вертикальной оси (рис. 17). Шарик массы  $m$  (материальная точка) положен в желоб. Шарик начинает двигаться под действием силы тяжести, а цилиндр вращаться.

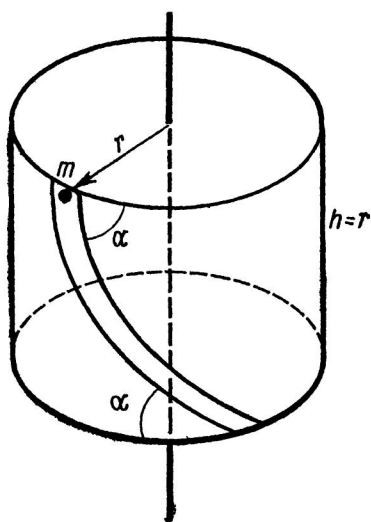


Рис. 17

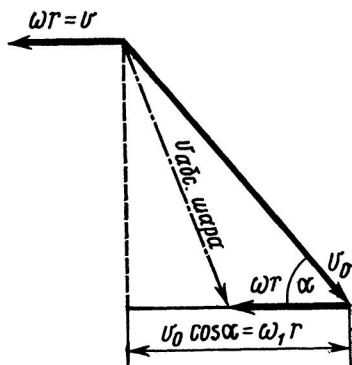


Рис. 18

Найти  $v_0$  скорость шарика относительно цилиндра и  $\omega$  угловую скорость цилиндра в момент, когда шарик попадает в конец желоба. Трением пренебречь.

Решение. Развертка скоростей представлена на рис. 18 ( $\omega r = v$  — линейная скорость желоба, равная переносной скорости шарика,  $v_0$  — относительная скорость шарика). Пусть  $\omega_1$  — относительная угловая скорость шарика. Момент количества движения сохраняется:

$$0 = \frac{mr^2}{2} \omega + mr^2 (\omega - \omega_1). \quad (1)$$

Механическая энергия сохраняется:  $\omega_1 = \frac{v_0 \cos \alpha}{r}$ ,

$$mgr = \frac{r m r^2 \omega^2}{2r} + \frac{m v_{\text{абс.шара}}^2}{2}. \quad (2)$$

Из рис. 18

$$v_{\text{абс}}^2 = v_{\text{отн}}^2 + v_{\text{пер}}^2 - 2v_{\text{отн}} v_{\text{пер}} \cos \alpha = v_0^2 + \omega^2 r^2 - 2v_0 \omega r \cos \alpha. \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) с учетом  $\omega_1$  получим

$$v_0 = \sqrt{3gr}; \quad \omega = \sqrt{2g/3r}.$$

**3.3.5.** Цилиндр массы  $m_1$ , радиуса  $r_1$  вращается по инерции с угловой скоростью  $\omega_0$  относительно своей оси симметрии без трения. Второй цилиндр  $m_2$  и  $r_2$  неподвижен, но может вращаться без трения относительно своей оси симметрии. Цилиндры приводят в соприкосновение, проскальзывания нет.

Найти изменение механической энергии системы  $\Delta E$ .

**Решение.** Сохраняется момент импульса, а линейная скорость  $v$  цилиндров вдоль линии касания одинакова (нет проскальзывания):

$$\frac{m_1 r_1^2}{2} \omega_0 + 0 = \frac{m_1 r_1^2}{2} \omega_1 + \frac{m_2 r_2^2}{2} \omega_2, \quad (1)$$

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = v, \quad (2)$$

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{m_1 r_1^2 \omega_0}{2 \cdot 2} - v^2 \left( \frac{m_1}{4} + \frac{m_2}{4} \right). \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) получаем

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2 r_1^2 \omega_0^2 r_2}{4(m_1 r_1 + m_2 r_2)}.$$

#### 4. Контрольные вопросы

**4.1.** Может ли центральная сила вызвать изменение момента импульса?

**4.2.** Почему сила трения между материальной точкой и диском (примеры 3.3.1 и 3.3.2), между цилиндрами (пример 3.3.5) не вызывает изменение момента импульса системы?

**4.3.** Сохранится ли механическая энергия в примерах 3.3.1 и 3.3.2?

**4.4.** В примере 3.1.1 пренебрегают сопротивлением воздуха. Каким законом нельзя будет воспользоваться без этого упрощения?



4.5. Можно ли применить закон сохранения момента импульса не к полному вектору  $N$ , а только к его проекции на какое-либо направление?

4.6. Какая скорость — абсолютная, относительная или переносная — входит в законы сохранения?

4.7. Как определить, какая из скоростей тела при сложном движении является переносной, какая относительной?

4.8. Как определяется понятие «центральная сила»?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Спутник Земли движется по эллиптической траектории  $r = p / (1 + \varepsilon \cos \varphi)$ . На сколько нужно изменить скорость спутника в перигее, чтобы он перешел на новую эллиптическую орбиту с фокальным параметром  $p_1$  и перигеем в той же точке  $r$ . Радиус Земли  $R_0$ .

О т в е т:

$$\Delta v = \frac{R_0(1+\varepsilon)}{p} \sqrt{g_0} (\sqrt{p} - \sqrt{p_1}).$$

5.2. С воображаемой горы на полюсе Земли посылают с одинаковой начальной скоростью  $v_0$  два снаряда:  $A$  — по радиусу Земли  $R_0$ ,  $B$  — перпендикулярно радиусу Земли (последний движется по эллиптической траектории).

1) Который из снарядов достигнет наибольшего удаления от Земли? (Найти  $R_A$  и  $R_B$ .)

2) Найти отношение  $R_A/R_B$ .

Соппротивление воздуха не учитывать.

О т в е т: 1)

$$R_A = \frac{2g_0 R_0^2}{2g_0 R_0 - v_0^2}. \text{ На расстоянии } R_A \text{ скорость } v_A = 0.$$

$$R_B = \frac{v_0^2 R_0}{2g_0 R_0 - v_0^2}. \text{ На расстоянии } R_B \text{ скорость } v_B \neq 0.$$

$$2) \frac{R_A}{R_B} = \frac{2g_0 R_0}{v_0^2}. R_A > R_B.$$

5.3. Доказать, что момент импульса планеты относительно Солнца  $N = 2m\sigma$ , где  $m$  — масса планеты,  $\sigma$  — секториальная скорость ее.

5.4. Наибольшее расстояние кометы Галлея от Солнца  $h = 35,4$  единицы (за единицу принято расстояние от Земли до Солнца), наименьшее  $l = 0,59$  ед. Линейная скорость кометы в афелии  $v_A = 0,91$  км/с. Найти скорость кометы в перигелии  $v_\pi$ .

О т в е т:  $v_\pi = v_A h / l = 54,6$  км/с.

5.5. Два горизонтальных диска массы  $m$  и радиуса  $r$  каждый могут вращаться без трения относительно вертикальных осей  $O$ , проходящих через их центры и связаны бесконечным невесомым ремнем. Человек (материальная точка) массы  $m$  начинает идти по ремню со скоростью  $v_0$  относительно ремня.

Найти угловую скорость вращения дисков  $\omega$ .

О т в е т:  $\omega = v_0/2r$ .

5.6. Горизонтальный покоящийся диск массы  $M$  и радиуса  $R$  может без трения вращаться относительно вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести. На расстоянии  $r$  от оси находится человек (материальная точка) той же массы  $M$ . Человек начинает идти по окружности радиуса  $r$  и перемещается на угол  $\pi/2$  относительно диска.

На какой угол  $\varphi$  повернется диск?

О т в е т:  $\varphi = r^2\pi/(R^2 + 2r^2)$ .

5.7. Горизонтальный диск массы  $M$  радиуса  $R$  вращается с угловой скоростью  $\omega_0$  по инерции около вертикальной оси (без трения). Материальная точка (человек) массы  $m$ , находившаяся сначала в центре диска, перемещается вдоль радиуса.

Найти изменение энергии системы в момент, когда человек дойдет до конца радиуса  $R$ .

О т в е т:  $\Delta E = MmR^2\omega_0^2/2(M + 2m)$ .

## РАЗДЕЛ VI

### Удар. Классический случай

#### 1. Теоретический материал

Силы, действующие при ударе. Время, затрачиваемое на удар, линия удара, деформации при ударе. Абсолютно упругий удар. Частично упругий удар. Абсолютно неупругий удар. Коэффициент восстановления, определение его величины. Прямой, центральный и косой удары. Закон сохранения количества движения. Закон сохранения момента количества движения. Закон сохранения механической энергии. Момент инерции тела, способ расчета, теорема о переносе оси.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Почему в момент удара систему тел можно считать замкнутой, даже если на нее действуют внешние силы?

2.2. Ударные силы являются внутренними или внешними для соударяющихся тел?

2.3. По каким направлениям следует разложить скорости тел при косом ударе?

2.4. При каком предположении тангенциальные составляющие скоростей при косом ударе после него не меняются?

2.5. Сохраняется ли механическая энергия тел при неупругом ударе?

2.6. Какие системы тел и полей можно считать консервативными?

2.7. Как определяется коэффициент восстановления?

2.8. Сохраняется ли механическая энергия тел при частично упругом ударе?

2.9. Можно ли по характеру движения тел после удара отличить абсолютно неупругий удар от упругого или частично упругого удара?

2.10. Какие силы называют ударными? В чем их основное отличие?

#### 3. Основные типы задач и методы их решения

##### а) Типы и методы решения

3.1. Центральный неупругий удар.

3.2. Прямой неупругий удар.

Решение. Используется закон сохранения импульса или закон сохранения момента импульса.

3.3. Центральный упругий удар.

3.4. Прямой упругий удар.

3.5. Косой упругий удар.

Решение. Попарно применяется закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса или момента импульса.

3.6. Частично упругий удар.

Решение. Используется закон сохранения импульса с учетом коэффициента восстановления.

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Два совершенно неупругих тела каждое весом  $P=5$  кг движутся навстречу друг другу со скоростями  $v_1=9$  м/с и  $v_2=12$  м/с. Между ними происходит прямой центральный удар.

Определить: 1) скорость  $v$  после удара; 2) работу, произведенную ударными силами; 3) ударный импульс  $s$ .

Решение. 1) Из закона сохранения импульса находим

$$\frac{P}{g} v_2 - \frac{P}{g} v_1 = \frac{2P}{g} v; \quad v = \frac{v_2 - v_1}{2} = 1,5 \text{ м/с.}$$

2) Работа ударных сил равна изменению кинетической энергии системы тел после удара:

$$A = \frac{P}{2g} (v_1^2 + v_2^2 - 2v^2) = \\ = \frac{5}{2 \cdot 9,8} (9^2 + 12^2 - 2 \cdot 1,5^2) = 56,2 \text{ кгМ.}$$

3) Ударный импульс  $s$ , действующий на материальную точку  $m$ , меняет ее количество движения скачком за очень малое время  $\tau$  (перемещение точки  $\tau$  равно нулю). Таким образом,

$$s = mu - mv = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ F \rightarrow \infty}} \int_t^{t+\tau} F dt, \\ s = \frac{P}{g} (v_2 - v) = \frac{P}{g} (v_1 + v) \simeq 5,36 \text{ кгМ/с.}$$

3.1.2. Два тела одинаковой массы движутся из одной точки вниз по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha=30^\circ$  с горизонтом. Первое пущено на  $t=2$  с раньше второго без начальной скорости. Второе с начальной скоростью  $v_0=12$  м/с. Тела ударяются друг о друга.

Определить скорость тел сразу после удара, если трения нет, а коэффициент восстановления равен нулю.

**Решение.** По закону сохранения импульса

$$mv_1 + mv_2 = 2mv. \quad (1)$$

Из кинематики находим скорости  $v_1$  и  $v_2$  перед ударом тел:

$$S = \frac{(t_1 + t)^2 g \sin \alpha}{2} = v_0 t_1 + \frac{t_1^2 g \sin \alpha}{2} \quad (2)$$

( $S$  — путь, пройденный по наклонной плоскости,  $t_1$  — время движения второго тела);

$$t_1 = \frac{t^2 g \sin \alpha}{2v_0 - 2tg \sin \alpha} = \frac{4 \cdot 9,8 \cdot 0,5}{2 \cdot 12 - 2 \cdot 2 \cdot 9,8 \cdot 0,5} = 4,45 \text{ с},$$

$$v_1 = (t_1 + t) g \sin \alpha = (4,45 + 2) 9,8 \cdot 0,5 = 31,6 \text{ м/с}, \quad (3)$$

$$v_2 = v_0 + t_1 g \sin \alpha = 12 + 4,45 \cdot 9,8 \cdot 0,5 = 33,8 \text{ м/с}. \quad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (1), получим:  $v = 32,7 \text{ м/с}$ .

**3.1.3.** Навстречу друг другу летят два шара с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Известно, что кинетическая энергия одного шара в 20 раз больше кинетической энергии другого. В каком случае шары после неупругого удара будут двигаться в сторону шара, обладавшего меньшей энергией?

**Решение.** Пусть  $m_1 v_1^2 < m_2 v_2^2$ , где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости шаров до удара. По условию

$$m_2 v_2^2 / m_1 v_1^2 = 20. \quad (1)$$

Из закона сохранения импульса по условию

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v > 0. \quad (2)$$

Подставим  $v_1$  из (1) в (2):

$$m_1 v_2 \sqrt{\frac{m_2}{20m_1}} - m_2 v_2 > 0,$$

откуда  $\frac{m_1}{m_2} > 20$ .

2-й тип задач (3.2)

**3.2.1. Баллистический маятник.** В ящик с песком, подвешенный на горизонтальной оси  $O$ , ударяет снаряд массы  $m$ , летящий горизонтально, и застревает в нем, после чего система (центр тяжести) отклоняется на угол  $\alpha$  от вертикали (рис. 19).

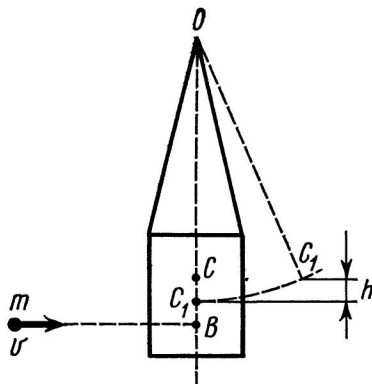


Рис. 19

Определить  $v$  — скорость снаряда, если масса ящика с песком  $M$ , расстояние его центра тяжести от оси вращения  $OC = a$ , радиус инерции относительно оси  $\rho$ , причем удар происходит так, что в оси не появляются ударные реакции.

**Решение.** После удара возникает вращение системы, поэтому следует воспользоваться законом сохранения момента импульса. Пусть расстояние от точки удара до оси равно  $BO = l$ . Тогда

$$mvl = (M\rho^2 + ml^2)\omega = \Sigma J_i\omega. \quad (1)$$

Чтобы не возникал ударный импульс в оси, снаряд должен попасть в центр качания физического маятника, т. е.  $l$  равно приведенной длине физического маятника

$$l = \frac{J}{Ma} = \frac{M\rho^2}{Ma} = \frac{\rho^2}{a}. \quad (2)$$

Таким образом, из (1) и (2)

$$\omega = \frac{mv}{Ma + ml}. \quad (3)$$

Расстояние  $y$  центра тяжести системы от оси  $O$  по определению

$$y = C_1O = \frac{Ma + ml}{M + m}. \quad (4)$$

Начальная механическая энергия системы не сохраняется, но после удара вся оставшаяся кинетическая энергия системы переходит в потенциальную:

$$\frac{1}{2} (M\rho^2 + ml^2) \left( \frac{mv}{Ma + ml} \right)^2 = (M + m)gy(1 - \cos \alpha),$$

или

$$v^2 m^2 \frac{M\rho^2 + ml^2}{2(Ma + ml)^2} = (Ma + ml)g2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (5)$$

Воспользовавшись уравнениями (1), (2), (3), получим окончательно

$$v = \frac{Ma^2 + m\rho^2}{ma} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{ga}{\rho^2}}.$$

**3.2.2.** Однородный стержень массы  $M$ , длины  $l$  может вращаться относительно горизонтальной оси  $O$ , проходящей через его конец. В свободный конец стержня ударяет пуля массы  $m$ , летящая со скоростью  $v$  перпендикулярно стержню, и застревает в нем.

На какой угол  $\alpha$  отклонится стержень после удара? Чему равен ударный импульс  $s$ ?

Решение. По закону сохранения момента импульса

$$mvl = \left( \frac{Ml^2}{3} + ml^2 \right) \omega, \quad (1)$$

$$\omega = \frac{3mv}{l(M + 3m)}.$$

Вся оставшаяся после неупругого удара кинетическая энергия переходит в потенциальную:

$$\frac{J\omega^2}{2} = Mgh_1 + mgh_2, \quad (2)$$

$$J = \frac{Ml^2}{3} + ml^2, \quad h_1 = \frac{l}{2}(1 - \cos \alpha), \quad h_2 = l(1 - \cos \alpha),$$

откуда

$$\cos \alpha = 1 - \frac{3}{gl} \frac{m^2 v^2}{(M + 2m)(M + 3m)},$$

$$s = mv - mv_1 = mv - m\omega l,$$

$$s = \frac{Mm}{3m + M} v. \quad (3)$$

Ударный импульс, приложенный к пуле, направлен против скорости  $v$ ; такой же импульс испытывает стержень, но в противоположную сторону.

3.2.3. Однородная квадратная пластинка со стороной  $a$  и массой  $M$  движется поступательно со скоростью  $v$  параллельно стороне  $AB$  (рис. 20). Точка  $A$  мгновенно закрепляется, и пластинка начинает вращаться вокруг этой точки. Определить угловую скорость  $\omega$  пластинки и импульс реакции  $s$  закрепленной точки.

Решение. Ударный импульс  $s$  приложен в точке  $A$ , поэтому его момент относительно  $A$  равен нулю, т. е. сохраняется момент импульса пластины.

$$Mv \frac{a}{2} = \frac{2}{3} Ma^2 \omega, \quad (1)$$

где  $\frac{2}{3} Ma^2$  — момент инерции пластины относительно  $A$ ,

$$\omega = \frac{3}{4} \frac{v}{a}.$$

Скорость центра масс пластинки после закрепления

$$u = \omega AC = \omega \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{8} v \sqrt{2}. \quad (2)$$

Возникший при закреплении ударный импульс  $s$  можно определить, если найти его составляющие (рис. 21):

$$s_x = Mu \cos 45^\circ - Mv = -5/8 Mv, \quad (3)$$

$$s_y = -Mu \sin 45^\circ = -3/8 Mv, \quad (4)$$

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}.$$

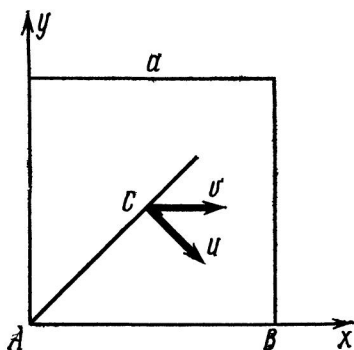


Рис. 20

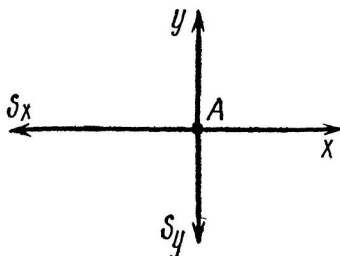


Рис. 21

### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1. Задача Гюйгенса.** Три совершенно упругих шара с массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  находятся на одной прямой в покое. Потом шар  $m_1$  ударяет шар  $m_2$  с известной скоростью  $v_1$ .

Какова должна быть масса  $m_2$  второго шара, чтобы после его удара о шар  $m_3$  скорость последнего была наибольшей?

**Решение.** Обозначим скорости шаров после удара  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$ . Рассмотрим удар шаров первого и второго:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \quad (1)$$

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (2)$$

Поделив (1) на (2), получим

$$v_1 + u_1 = u_2. \quad (3)$$

Умножив (3) на  $m_1$  и сложив с (2), найдем  $u_2$ :

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Рассмотрев также удар второго и третьего шаров, найдем:

$$u_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} u_2.$$



Подставив значение  $u_2$ , получим

$$u_3 = \frac{4m_1v_1}{m_1 + m_3 + m_2 + m_1m_3/m_2}.$$

Наибольшее  $u_3$  будет при наименьшем знаменателе:

$$\frac{d}{dm_2} \left( m_1 + m_3 + m_2 + \frac{m_1m_3}{m_2} \right) = -\frac{m_1m_3}{m_2^2} + 1 = 0,$$

откуда

$$m_2 = \sqrt{m_1m_3}.$$

**3.3.2.** Шар массы  $m$ , имея скорость  $v_0$ , ударяет шар массы  $M$  и останавливается.

Найти скорость шара  $M$  после удара. Коэффициент восстановления  $k=1$ ; удар центральный, прямой.

**Решение.** Пусть шар  $M$  имел до удара скорость  $v_1$ , после удара — скорость  $v_2$ . Направление  $v_1$  по отношению к  $v_0$  неизвестно, но  $v_1 \neq 0$ . Воспользуемся законами сохранения механической энергии и количества движения:

$$mv_0^2 + Mv_1^2 = Mv_2^2, \quad (1)$$

$$mv_0 + Mv_1 = Mv_2. \quad (2)$$

Члены с  $M$  и  $m$  сгруппируем по разные стороны знака равенства и, поделив одно на другое, получим

$$v_0 = v_2 + v_1.$$

Из (3) и (2) найдем

$$v_2 = \frac{m+M}{2M}v_0; \quad v_1 = \frac{M-m}{2M}v_0.$$

Знак  $v_1$  определяется значением  $M$  и  $m$ , величина  $v_2$  от направления  $v_1$  не зависит.

#### 4-й тип задач (3.4)

**3.4.1.** Стержень длины  $a$  массы  $m_0$  может свободно вращаться в горизонтальной плоскости относительно вертикальной оси, проходящей через его конец. Во второй конец (в край) нормально к стержню ударяет шар массы  $m$ , летящий в горизонтальной плоскости со скоростью  $v$ .

Найти скорость шара  $v_1$  и угловую скорость стержня после абсолютно упругого удара.

**Решение.** В горизонтальной плоскости система замкнута. Воспользуемся законами сохранения механической энергии и момента импульса:

$$mv^2 = J\omega^2 + mv_1^2, \quad (1)$$

$$atv = J\omega + amv_1, \quad (2)$$

где  $J = m_0 a^2 / 3$ ,  $v_+$  — скорость шара после удара.

Из (1) и (2) получим

$$v + v_1 = a\omega. \quad (3)$$

Из (3) и (2) найдем

$$\omega = \frac{2mv}{a(m + m_0/3)}, \quad v_1 = \frac{m - m_0/3}{m + m_0/3} v.$$

Направление  $v_1$  шара зависит от величины масс  $m$  и  $m_0$ .

**3.4.2.** Стержень массы  $m$  и длины  $l$  падает из горизонтального положения, вращаясь около оси  $O$ . Проходя положение равновесия, он концом абсолютно упруго ударяет математический маятник такой же массы  $m$  и длины  $l$ .

На какую высоту  $h$  поднимется маятник?

**Решение.** Найдем угловую скорость стержня  $\omega$  в момент удара:

$$mg \frac{l}{2} = \frac{ml^2}{3} \frac{\omega^2}{2}. \quad (1)$$

Пусть скорость стержня после удара  $\omega_2$ , а маятника  $\omega_1$ , тогда

$$\frac{ml^2}{3} \frac{\omega^2}{2} = \frac{ml^2 \omega_1^2}{2} + \frac{ml^2}{3} \frac{\omega_2^2}{2}, \quad (2)$$

$$\frac{ml^2}{3} \omega = ml^2 \omega_1 - \frac{ml^2}{3} \omega_2. \quad (3)$$

Вся кинетическая энергия маятника перейдет в потенциальную:

$$\frac{ml^2 \omega_1^2}{2} = mgh. \quad (4)$$

Из этих уравнений  $h = \frac{3}{8} l$ .

**3.4.3.** Однородный диск массы  $M$  и радиуса  $R$  лежит на гладкой горизонтальной поверхности. По ободу диска наносят удар, направленный вдоль линии, лежащей в плоскости диска на расстоянии  $a$  от центра.

Определить скорость в момент окончания удара. Импульс удара равен  $s$ .

**Решение.** Изменение количества движения диска за время удара равно внешнему импульсу:

$$Mv_2 - Mv_1 = s, \quad (1)$$

где  $v_2$  — скорость центра диска после удара, до удара  $v_1 = 0$ .

Изменение момента импульса диска равно моменту ударного импульса относительно оси, проходящей через точку  $O$  и перпендикулярной к плоскости диска:

$$\frac{MR^2}{2} \omega_2 - \frac{MR^2}{2} \omega_1 = sa, \quad (2)$$

где  $\omega_2$  — угловая скорость после удара,  $\omega_1 = 0$ . Таким образом,

$$v_2 = s/M, \quad \omega_2 = 2sa/MR^2.$$

5-й тип задач (3.5)

**3.5.1.** Два одинаковых абсолютно упругих гладких шара движутся поступательно. В момент удара скорость  $v_1$  центра тяжести шара 1 направлена вдоль линии центров направо, а скорость  $v_2$  центра тяжести шара 2 перпендикулярна к линии центров.

Определить  $u_1$  и  $u_2$  скорости центров тяжести шаров в конце абсолютно упругого удара и угол  $\beta$  наклона к линии центров.

Решение. Разложив скорости по направлению линии центров ( $x$ -компонента) и перпендикулярному ей ( $y$ -компонента), воспользуемся законами сохранения:

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 u_{1y} + m_2 v_{2y}, \quad (1)$$

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{2} (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{m_2}{2} (v_{2x}^2 + v_{2y}^2) &= \\ = \frac{m_1}{2} (u_{1x}^2 + u_{1y}^2) + \frac{m_2}{2} (u_{2x}^2 + u_{2y}^2). \end{aligned} \quad (3)$$

По условию  $m_1 = m_2$ ,  $v_{1y} = 0$ ,  $v_{2x} = 0$ ,  $v_{1x} = v_1$ ,  $v_{2y} = v_2$ . При центральном ударе одинаковых шаров они обмениваются скоростями, направленными вдоль линии центров; перпендикулярные к ней составляющие не меняются (нет трения), т. е.

$$v_{1y} = u_{1y} = 0, \quad v_{2y} = u_{2y} = v_2, \quad u_{1x} = v_{2x} = 0.$$

Таким образом, шар 1 останавливается, а шар 2 получает скорости:

$$u_{2y} = v_2 \text{ и } u_{2x} = v_1, \quad u_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \quad \text{tg } \beta = u_{2x}/u_{2y} = v_1/v_2.$$

**3.5.2.** Найти количество движения  $p$ , которое получает неподвижная стенка при упругом ударе об нее тела массы  $m$ ,

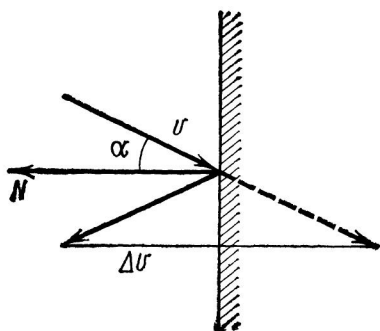


Рис. 22

скорость которого  $v$  составляет угол  $\alpha$  с нормалью  $N$  к стенке (рис. 22).

Решение. Так как тангенциальная составляющая скорости не меняет своего значения (трения нет), то

$$p = m(v_1 - v_2) = m \Delta v,$$

$$p = -mv \cos \alpha - mv \cos \alpha,$$

$$p = -2mv \cos \alpha.$$

### 6-й тип задач (3.6)

**3.6.1.** Первый шар ударяет второй так, что второй шар после удара останавливается.

Определить скорость первого шара до удара. Массы шаров одинаковы, удар центральный, скорость второго шара до удара  $v$ , коэффициент восстановления  $\varepsilon$ .

Решение. Для выполнения условий задачи шары должны двигаться навстречу друг другу. Коэффициент восстановления может быть определен как модуль отношения нормальных проекций абсолютных скоростей точки после удара и до удара.

Пусть скорость первого шара до удара  $v_1$ , а после  $u$ , тогда

$$\varepsilon = \frac{u}{v_1 + v}, \quad (1)$$

$$mv_1 - mv = mu, \quad (2)$$

откуда

$$v_1 = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} v.$$

**3.6.2.** Шар бросают под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$ . Когда он достигнет наибольшей высоты, в него ударяет шар той же массы, движущейся вниз со скоростью  $v_0/2$  к моменту удара.

Определить расстояние  $d$  между шарами через время  $t$  после удара. Удар центральный, коэффициент восстановления  $\varepsilon$ .

Решение. К моменту удара первый шар имеет только горизонтальную скорость  $v_x = v_0 \cos \alpha$ , которая после удара не меняется, а второй шар — только вертикальную скорость  $v_y = v_0/2$ . Так как удар частично упругий, то вертикальные

скорости обоих шаров после удара меняются. Обозначим их  $u_1$  и  $u_2$  соответственно, тогда

$$\varepsilon = \frac{u_1 - u_2}{v_0/2}, \quad (1)$$

$$m \frac{v_0}{2} + 0 = mu_1 + mu_2, \quad (2)$$

по вертикали  $u_1$  и  $u_2$  направлены в одну сторону.

Из (1) и (2)

$$u_2 = (1 - \varepsilon)v_0/4; \quad u_1 = (1 + \varepsilon)v_0/4.$$

Так как после удара оба шара движутся вниз с одинаковым ускорением  $g$ , то их относительная скорость не меняется и равна

$$u_1 - u_2 = \varepsilon v_0/2.$$

Таким образом, вертикальное расстояние между шарами через  $t$  с равно

$$\Delta y = \varepsilon v_0 t/2,$$

а горизонтальное

$$\Delta x = v_0 t \cos \alpha.$$

Полное расстояние  $d$  между шарами

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{v_0}{2} t \sqrt{4 \cos^2 \alpha + \varepsilon^2}.$$

**3.6.3.** Шарик ударяется в вертикальную стенку, двигаясь в нормальной к ней плоскости так, что его скорость в момент удара составляет угол  $\alpha_0 = 30^\circ$  с вертикалью, направлена снизу вверх и равна  $v_1$  (рис. 23).

Определить, на каком расстоянии  $x$  от стенки шарик упадет на горизонтальную плоскость. Коэффициент восстановления  $\varepsilon$ , высота места удара над горизонтальной плоскостью  $h$ .

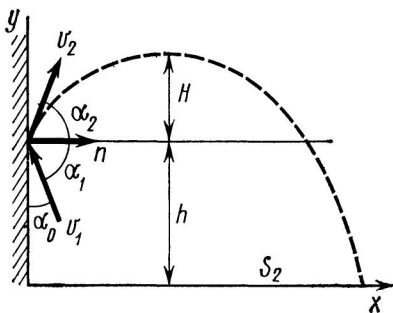


Рис. 23

**Решение.** После частично упругого удара скорость  $v_2 \neq v_1$  и угол отражения  $\alpha_2 \neq \alpha_1 = 60^\circ$ .

$$\varepsilon = |v_{2n}| / |v_{1n}|. \quad (1)$$

До удара

$$v_{1y} = v_1 \sin \alpha_1; \quad v_{1n} = v_1 \cos \alpha_1. \quad (2)$$

После удара

$$v_{2y} = v_2 \sin \alpha_2; \quad v_{2n} = v_2 \cos \alpha_2. \quad (3)$$

Но

$$v_{2y} = v_{1y}. \quad (4)$$

Из (1), (2) и (3) с учетом (4) получаем

$$1/\varepsilon \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (5)$$

Из кинематики наибольшая высота подъема тела

$$H = v_2^2 \sin^2 \alpha_2 / 2g$$

и время  $t$  свободного падения с высоты  $H+h$

$$t = \sqrt{\frac{v_2^2 \sin^2 \alpha_2}{g^2} + \frac{2gh}{g^2}}.$$

Половина наибольшего пути по оси  $n$

$$S_1 = \frac{v_2^2 \sin 2\alpha_2}{2g}, \quad \text{а } S_2 = v_2 \cos \alpha_2 t.$$

Искомый путь  $x = S_1 + S_2$ ,

$$x = \frac{1}{g} v_2 \cos \alpha_2 (v_2 \sin \alpha_2 + \sqrt{v_2^2 \sin^2 \alpha_2 + 2gh}).$$

Но из (1) и (3)  $v_2 \cos \alpha_2 = \varepsilon v_1 \cos \alpha_1$ , а

$$\sin \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 \cos \alpha_2 = 1/\varepsilon \operatorname{tg} \alpha_1 \cos \alpha_2.$$

После замены и подстановки  $\alpha_1 = 60^\circ$  получим окончательно

$$x = \varepsilon v_1 (v_1 \sqrt{3} + \sqrt{3v_1^2 + 8gh}) / 4g.$$

**3.6.4.** Боек молота массы  $m=10$  т падает со скоростью  $v=5$  м/с на наковальню с отковываемым металлом массы  $M=240$  т.

Определить коэффициент полезного действия молота  $\eta$ . Удар частично упругий, коэффициент восстановления  $\varepsilon=0,3$ .

**Решение.** Обозначим скорость бойка после удара  $u_1$ , скорость наковальни  $u_2$  (обе в одну сторону), до удара скорость наковальни  $v=0$ . Тогда

$$\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{v}. \quad (1)$$

$$mv = Mu_2 + mu_1, \quad (2)$$

откуда

$$u_1 = \frac{v(m - \varepsilon M)}{m + M}; \quad u_2 = \frac{mv(1 + \varepsilon)}{m + M}.$$

Коэффициент полезного действия  $\eta = \Delta E/E_1$ , где  $E_1 = mv^2/2$ , а  $\Delta E$  — потерянная энергия (так как она затрачена на ковку):

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} - \left( \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2} \right) = \frac{mMv^2(1 - \varepsilon^2)}{2(m + M)},$$

$$\eta = \frac{M(1 - \varepsilon^2)}{m + M} = \frac{240(1 - 0,09)}{10 + 240} = 0,874;$$

при  $\varepsilon = 1$   $\eta = 0$ .

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Какие внутренние силы могут изменить механическую энергию тел при ударе?

4.2. Сравнить задачи 3.5.2 и 3.6.2. При каких предположениях о свойствах тел угол падения равен углу отражения, а при каких не равен?

4.3. В каких пределах меняется коэффициент восстановления?

4.4. Вся масса тела может быть условно сосредоточена в центре тяжести тела и в центре качания его. Когда можно и удобно пользоваться первым, а когда вторым условием? Как ими пользуются в задаче 3.2.1?

4.5. Что такое радиус инерции тела? Для расчета какой физической величины им удобно пользоваться и почему?

4.6. Можно ли в задаче 3.3.2 положить  $v_1 = 0$ ? К чему это приведет?

#### 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Два тела, получив встречные ударные импульсы  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$ , соударяются.

Определить скорость тел  $v$  после удара, если их общая масса равна  $M$ . Удар абсолютно неупругий, центральный и прямой. Трением и сопротивлением пренебречь.

О т в е т:  $v = (s_1 - s_2)/M$ .

5.2. Паровая баба двойного действия опускается без начальной скорости с высоты  $h = 2$  м, испытывая среднюю суммарную силу давления пара  $F_1 = 9000$  Н.

Определить перемещение  $d$  забиваемой сваи при ударе, считая среднее сопротивление грунта  $F_2 = 900\,000$  Н. Коэффициент полезного действия  $\eta = E_2/E_1 = 0,6$ . Удар абсолютно неупругий.

О т в е т:  $d = 2$  см.

5.3. Математический маятник массы  $m$  длины  $l$  и невесомый стержень длины  $2l$  с материальной точкой массы  $m$  на

конце могут вращаться относительно горизонтальной оси. Маятник отклонили на угол  $90^\circ$  и отпустили. После удара маятник и стержень двигаются вместе.

На какой угол  $\alpha$  отклонится система?

О т в е т:  $\cos \alpha = 14/15$ .

5.4. Тонкая деревянная палочка массы  $M$  длины  $l$  может вращаться около горизонтальной оси. Палочка начинает свое движение из вертикального положения под действием силы тяжести. Когда она проходит горизонтальное положение, в ее середину попадает двигающаяся вертикально пуля массы  $m$ , которая застревает в ней. После удара палочка на мгновение останавливается, а затем двигается вниз.

Найти скорость пули  $v$ .

О т в е т:

$$v = \frac{2M}{m} \sqrt{\frac{gl}{3}}.$$

5.5. Ножом-пластиной длины  $l$  рубят тростник. Определить расстояние  $OA$  от руки до места удара, при котором рука не чувствует удара.

О т в е т:  $OA = \frac{2}{3} l$ .

5.6. Два математических маятника в виде шаров масс  $m_1$  и  $m_2$  свободно подвешены на нитях разной длины  $l_1$  и  $l_2$  так, что шары касаются. Первый отводят на угол  $\alpha$  в плоскости нитей и отпускают.

На какие углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  относительно отвеса отклонятся маятники после удара? (Все углы малы.) Удар центральный, абсолютно упругий.

О т в е т:

$$\alpha_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \alpha, \quad \alpha_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \alpha \sqrt{l_1/l_2}.$$

5.7. Центры шаров находятся на одной прямой. Первый ударяет второй, двигаясь со скоростью  $v$ . После этого второй ударяет третий, а сам получает скорость  $-v$ .

Найти массу третьего шара  $m_3$ , если  $m_1 = 5m_2 = 5$  г. Удары центральные, абсолютно упругие,  $v_{02} = v_{03} = 0$ .

О т в е т:  $m_3 = 4m_2 = 4$  г.

5.8. Однородный брусок массы  $M$  длины  $l$  может свободно вращаться около горизонтальной оси  $OO$ . В точку  $A$  на расстоянии  $a$  от конца бруска ударяет летящий нормально к бруску камень массы  $m$  падающий на месте удара. Брусок отклоняется на угол  $\varphi$ .

Найти скорость  $v$  камня.

О т в е т:

$$v = \frac{Ml}{m(l-a)} \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{2gl}{3}}.$$



5.9. Однородная палочка длины  $l$  и массы  $M$  может вращаться без трения относительно горизонтальной оси  $O$ . Палочку отводят в горизонтальное положение и отпускают. В нижней точке траектории палочка упруго ударяет тело массы  $m$  (материальная точка), лежащее на гладком столе.

Найти скорости палочки и тела после удара.

О т в е т :

$$v = 2\sqrt{3gl}/(1 + 3m/M), \quad \omega = \sqrt{3g/l}.$$

5.10. Невесомый жесткий стержень может свободно вращаться относительно горизонтальной оси  $O$ . На расстоянии  $a$  и  $2a$  от оси на стержне укреплены две одинаковые точечные массы. Камень такой же массы, летящий перпендикулярно стержню, попадает в нижнюю массу, после чего стержень отклоняется на угол  $\alpha = 60^\circ$ .

Найти скорости камня до удара  $v$ , после удара  $u$  и  $\omega$  стержня. Удар абсолютно упругий.

О т в е т :

$$v = \frac{3}{4}a\omega; \quad u = -\frac{1}{4}a\omega; \quad \omega = \sqrt{3g/5a}.$$

5.11. Шарик, свободно падающий с высоты  $h$  без начальной скорости, ударяется о неподвижную наклонную плоскость, расположенную под углом  $\alpha$  к горизонту (рис. 24).

Определить направление (угол  $\beta$ ) и величину скорости  $u$  шарика в конце частично упругого удара. Коэффициент восстановления  $\varepsilon$ .

О т в е т :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha; \quad u = \sqrt{2gh(\sin^2 \alpha + \varepsilon^2 \cos^2 \alpha)}.$$

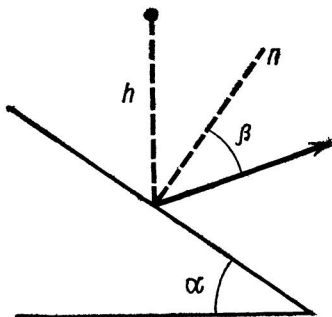


Рис. 24

5.12. Шарик падает из состояния покоя с высоты  $h$ , ударяется о пол, подпрыгивает, снова падает и т. д.

Определить, через какое время  $t$  шарик остановится. Коэффициент восстановления  $\varepsilon$ .

О т в е т :

$$t = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

## РАЗДЕЛ VII

### Неинерциальные системы координат

#### 1. Теоретический материал

Уравнение для величины полного ускорения при сложном движении материальной точки. Уравнение второго закона Ньютона в этом случае в инерциальной системе координат. Неинерциальная система координат. Уравнение второго закона Ньютона в этой системе координат. Силы инерции — массовые силы. Их специфика по сравнению с обычным понятием силы в механике. Силы инерции и законы Ньютона. Силы инерции в системе координат, движущейся с постоянным ускорением по прямой. Силы инерции в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью. Движение тел на поверхности Земли, вращающейся вокруг своей оси. Физические явления, наблюдаемые на Земле, обусловленные наличием сил инерции.

#### 2. Вопросы к теоретическому материалу

2.1. Безразличен ли (как в кинематике) выбор в динамике начала системы координат?

2.2. Как определяется инерциальная система координат? Чем вызываются механические силы в этой системе координат?

2.3. Как определяется неинерциальная система координат? Чем обусловлено появление сил инерции в этой системе координат?

2.4. Сохраняется ли первый закон Ньютона в неинерциальной системе координат?

2.5. Как обобщается второй закон Ньютона в неинерциальной системе координат?

2.6. Применим ли третий закон Ньютона в неинерциальной системе координат?

2.7. Что такое переносная сила инерции?

2.8. Что такое центробежная сила инерции?

2.9. Что такое сила инерции Кориолиса?

2.10. Чем являются математические выражения этих сил в инерциальной системе координат при сложном движении материальной точки?

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Типы и методы решения

3.1. Неинерциальные системы координат, движущиеся прямолинейно.

Решение. Применяются уравнения движения.

3.2. Неинерциальная система координат, движущаяся с постоянной угловой скоростью.

Решение. Применяются уравнения движения.

#### б) Примеры

##### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Однородный круглый цилиндр с намотанными на нем двумя тонкими нитями с закрепленными верхними концами опускается вниз и вращается вокруг своей оси симметрии (рис. 25).

Не учитывая сил трения, определить ускорение  $a$  точек, лежащих на оси цилиндра.

Решение. В неинерциальной системе координат  $x'O'y'$  к силам взаимодействия (рис. 25)  $mg$  и  $T$  необходимо добавить силу инерции  $-ma$  (указана пунктиром). Для уравнений движения в этом случае имеем

$$mg - T - ma = 0; J\varepsilon = RT; a = \varepsilon R,$$

Рис. 25

где  $mg$  — сила тяжести цилиндра,  $T$  — натяжение двух нитей,  $J$  — момент инерции цилиндра относительно его оси,  $\varepsilon$  — угловое ускорение,  $R$  — радиус цилиндра. При  $J = 1/2mR^2$  эти уравнения дают

$$a = 2/3g.$$

В инерциальной системе координат решение этой задачи дано в разделе IX (3.1.5.).

3.1.2. Однородный стержень подвешен на нити и опирается концом на абсолютно гладкую плоскость. Точка подвеса начинает двигаться горизонтально с ускорением  $a$ , при котором ось стержня и нить (рис. 26) образуют прямую линию с углом  $\alpha$  к горизонту.

Определить это ускорение и величину реакции плоскости  $N$  при движении.

Решение. 1. В неинерциальной системе координат  $x'O'y'$  к обычным силам взаимодействия (а именно натяжению

нити  $T$ , силе тяжести  $mg$  и  $N$ ) необходимо добавить силу инерции  $-m\alpha$ .

Сумма моментов сил относительно точки  $O'$  дает

$$mgl \cos \alpha = mal \sin \alpha,$$

где  $l$  — половина длины стержня.

Для величины искомого ускорения получим

$$a = g \operatorname{ctg} \alpha.$$

Уравнение моментов относительно центра масс стержня дает

$$J\ddot{\alpha} = Nl \cos \alpha,$$

где  $J$  — момент инерции стержня относительно точки центра масс,  $\ddot{\alpha}$  — угловое ускорение вращения стержня.

Так как  $\ddot{\alpha} = 0$ , то при  $l \cos \alpha \neq 0$ , получим, что  $N = 0$ .

2. В инерциальной системе координат  $xOy$  останется без изменения уравнение моментов, так как оно применимо и для движущейся точки центра масс, что опять дает  $N = 0$ .

Для определения ускорения  $a$  можем воспользоваться уравнениями

$$ma = T \cos \alpha, \quad mg = T \sin \alpha,$$

где  $m$  — масса стержня,  $g$  — ускорение силы тяжести. Эти уравнения дают

$$a = g \operatorname{ctg} \alpha.$$

**3.1.3. Математический маятник** с длиной нити  $l$  и массой шарика  $m$  подвешен на свободно падающей (с ускорением  $g$ ), доске (рис. 27).

Как будет двигаться маятник (шарик) относительно доски, если она начинает свое движение в момент, когда скорость шарика не равна нулю?

**Решение 1.** В неинерциальной системе координат  $x'O'y'$  кроме силы тяжести  $mg$  и натяжения нити  $T$  необходимо учесть силу инерции  $-mg$ . Сумма моментов

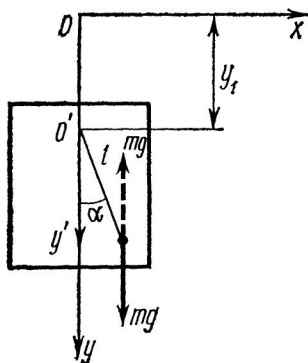


Рис. 27

всех трех сил относительно точки  $O'$  равна нулю. Для уравнения вращательного движения маятника это дает

$$ml^2\ddot{\alpha} = 0,$$

где  $ml^2$  — момент инерции маятника,  $\alpha$  — угол отклонения маятника,  $\ddot{\alpha}$  — его угловое ускорение.

Из этого уравнения следует, что  $\ddot{\alpha} = 0$ . Маятник будет вращаться с постоянной угловой скоростью

$$\omega = \dot{\alpha} = \text{const.}$$

2. В инерциальной системе  $xOy$  для координат маятника

$$x = l \sin \alpha, \quad y = y' + l \cos \alpha.$$

Для уравнений движения

$$m\ddot{x} = T \sin \alpha, \quad m\ddot{y} = mg - T \cos \alpha.$$

Для компонентов ускорения получим

$$\ddot{x} = -l\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + l\ddot{\alpha} \cos \alpha,$$

$$\ddot{y} = -l \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - l \sin \alpha \cdot \ddot{\alpha} + \ddot{y}'.$$

Считая, что  $\dot{y}' = g$ ,  $\dot{\alpha} = \omega$ ,  $\ddot{\alpha} = \beta$ , из уравнений движения получим

$$\begin{aligned} ml\beta \cos \alpha &= (ml\omega^2 - T) \sin \alpha, \\ -(ml\omega^2 - T) \cos \alpha &= ml\beta \sin \alpha. \end{aligned}$$

Эти два уравнения совместны, если

$$ml\omega^2 = T \text{ и } ml\beta = 0.$$

Первое уравнение дает величину силы  $T$ , приложенной к шарикю. Второе приводит к постоянной угловой скорости вращения маятника

$$\omega = \dot{\alpha} = \text{const.}$$

## 2-й тип задач (3.2)

3.2.1. Изогнутый стержень  $OA$  может вращаться вокруг вертикальной оси  $OY$  (рис. 28). На стержне имеется колечко  $C$ , которое может свободно, без трения перемещаться по стержню.

Определить уравнение (форму)  $y=f(x)$  стержня, при котором колечко при любой угловой скорости  $\omega$  вращения стержня не будет по нему перемещаться.

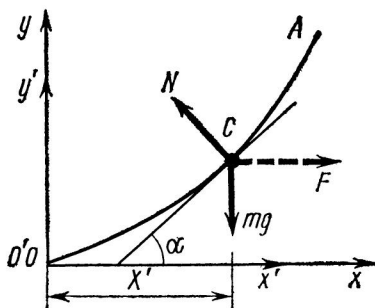


Рис. 28

Решение. 1. В неинерциальной системе координат  $x'O'y'$ , вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , к силе тяжести  $mg$  (рис. 28) и реакции опоры  $N$  следует добавить центробежную силу инерции  $F = m\omega^2 x'$  (пунктир на рис. 28), где  $m$  — масса колечка,  $x'$  — расстояние колечка от оси вращения (ось  $y$ ).

Чтобы колечко покоилось при любой угловой скорости вращения стержня, необходимо, чтобы сумма всех сил на направление возможного перемещения была равна нулю, т. е.

$$mg \sin \alpha - m\omega^2 x' \cos \alpha = 0,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\alpha$  — угол между касательной к линии стержня в точке, где находится колечко, и осью  $O'x'$ . Из этого уравнения получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy'}{dx'} = \frac{\omega^2}{g} x',$$

Интегрирование дает уравнение параболы

$$y' = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x'^2.$$

2. В инерциальной системе координат  $xOy$  центростремительной силой будет векторная сумма сил тяжести и реакции опоры колечка. Имеем

$$m\omega^2 x = mg \operatorname{tg} \alpha = mg \frac{dy}{dx}.$$

Интегрирование дает, как и прежде, уравнение параболы

$$y = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2.$$

3.2.2. Тонкий однородный стержень длины  $L$  с массой  $m$  вращается по инерции с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через его верхний конец  $O$ .

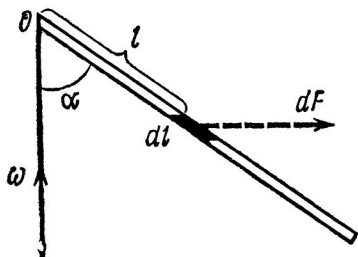


Рис. 29

Определить (рис. 29) угол  $\alpha$  устойчивого вращения стержня.

Решение. В неинерциальной системе координат, вращающейся вместе со стержнем, к каждому элементу длины стержня  $dl$  будет приложена элементарная центробежная сила инерции (рис. 29).

$$dF = S\rho dl \omega^2 r,$$

где  $S$  — сечение стержня,  $\rho$  — его плотность,  $r$  — расстояние элемента от оси вращения.

Момент этой силы относительно точки  $O$  будет

$$dM = S \rho dl \omega^2 l \sin \alpha l \cos \alpha,$$

где  $l$  — расстояние элемента массы от оси вращения.

Сумма моментов этих сил будет

$$M = S \rho \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^L l^2 dl = \frac{L^2}{3} \omega^2 m \sin \alpha \cos \alpha.$$

В рассматриваемой системе координат стержень покоится — момент силы инерции должен быть равен моменту силы тяжести ( $1/2Lmg \sin \alpha$ ). Равенство моментов сил дает

$$\sin \alpha \left( g \frac{1}{\cos \alpha} - \omega^2 \frac{2}{3} L \right) = 0.$$

Это уравнение для искомой величины угла дает два решения

$$\cos \alpha = 3g/2L\omega^2, \quad \sin \alpha = 0.$$

Решение  $\sin \alpha = 0$  не отвечает реальным условиям задачи (неустойчивое движение).

В инерциальной системе координат вращение стержня можно рассматривать как движение конического физического маятника. Его движение в этом случае может быть сведено к движению также конического, но математического маятника. Периоды движения математического маятника и стержня должны быть равны

$$2\pi \sqrt{l'/g} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgL/2}},$$

где  $l'$  — длина математического маятника,  $J = 1/3mL^2$  — момент инерции стержня относительно точки  $O$ .

Для величины  $l'$  (расстояние точки приложения суммарной центростремительной силы, действующей на стержень, от точки  $O$ ) получим

$$l' = 2/3 L.$$

Для радиуса вращения этой точки имеем

$$R = 2/3 L \sin \alpha.$$

Уравнением движения стержня будет

$$m\omega^2 2/3 L \sin \alpha = mg \operatorname{tg} \alpha.$$

или, как и ранее,

$$\sin \alpha \left( g \frac{1}{\cos \alpha} - \omega^2 \frac{2}{3} L \right) = 0.$$

3.2.3. Вращение Земли вокруг своей оси вызывает отклонение поверхности воды в реке от ее горизонтального положения.

Определить, у какого берега и на какую величину  $h$  уровень воды будет выше. Река течет в северном полушарии с севера на юг. Ширина реки  $l$ , скорость течения  $v$ , широта местности  $\varphi$ , угловая скорость вращения Земли  $\omega$ . Центробежной силой инерции пренебречь.

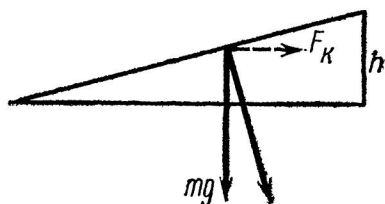


Рис. 30

Решение. 1. В неинерциальной системе координат, связанной с Землей, кроме силы тяжести  $mg$  необходимо учесть силу инерции Кориолиса:

$$F_K = 2m[v\omega] = 2m\omega v \sin \varphi.$$

Уравнение движения для частицы воды будет

$$ma = mg - 2m\omega v \sin \varphi,$$

где  $m$  — масса частицы,  $a$  — ускорение частицы,  $g$  — ускорение силы тяжести. Результирующая этих двух сил будет (рис. 30) нормальна к линии уровня воды. Из рисунка видно, что

$$\frac{h}{l} = \frac{F_K}{mg} = \frac{2m\omega v \sin \varphi}{mg}.$$

Вода будет выше у правого берега реки на величину, определяемую из последнего уравнения.

Имеем

$$h = \frac{1}{g} 2\omega v l \sin \varphi.$$

2. В инерциальной системе координат движение частиц воды следует рассматривать как сложное, состоящее одновременно из относительного и переносного движений. Первым является движение по меридиану со скоростью  $v$ . Переносное движение обусловлено вращением Земли с угловой скоростью  $\omega$ . Разность уровней воды объясняется воздействием правого берега реки.

Для уравнения движения в этом случае имеем

$$m(a_{\text{отн}} + a_K) = mg,$$

где  $a_{\text{отн}}$  — ускорение относительного движения,  $a_K = 2[\omega v]$  — ускорение Кориолиса.



3.2.4. На Земле, вращающейся вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$  по экватору с востока на запад, с относительной скоростью  $v$  движется поезд массы  $m$  (рис. 31).

Не учитывая сил трения, считая поезд за единое твердое тело, определить силу, действующую на поезд со стороны рельсов (реакцию связи)  $N$ .

Решение. 1. В неинерциальной системе координат кроме обычных сил взаимодействия, а именно силы тяжести поезда  $mg$  и реакции связи  $N$ , необходимо учитывать центробежную силу инерции  $F = m\omega^2 R$  и силу инерции Кориолиса  $F_K = 2m[v\omega]$ . Для уравнения движения имеем

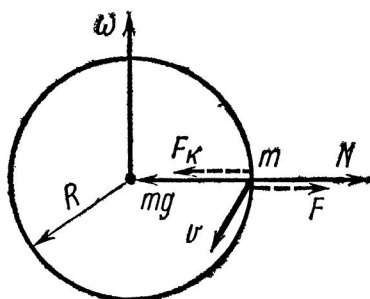


Рис. 31

$$m \frac{v^2}{R} = mg - N - m\omega^2 R + 2mv\omega,$$

где  $R$  — радиус Земли.

Для искомой величины получим

$$N = mg + 2mv\omega - m\omega^2 R - m \frac{v^2}{R}.$$

2. В инерциальной системе координат движение следует рассматривать как сложное движение с относительной скоростью  $v$  и переносной  $\omega$ . Полное ускорение в этом случае будет

$$a = \frac{v^2}{R} + \omega^2 R - 2\omega v.$$

Для уравнения движения в этом случае имеем

$$ma = m \frac{v^2}{R} + m\omega^2 R - 2m\omega v = mg - N.$$

Из этого уравнения для величины  $N$ , как и прежде, получим

$$N = mg + 2m\omega v - m \frac{v^2}{R} - m\omega^2 R.$$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. В чем состоит принцип относительности Галилея?

4.2. Применим ли этот принцип к неинерциальным системам координат?

4.3. Какие новые силы применяются в этих системах координат? Могут ли быть указаны конкретно тела, вызывающие появление этих сил?

4.4. Какой силой инерции объясняется вращение плоскости колебаний маятника Фуко?

4.5. Может ли быть, чтобы центробежная сила инерции совпала с направлением силы тяжести, была противоположна ей?

4.6. Возможен ли случай, чтобы сила инерции Кориолиса совпала с направлением силы тяжести, была ей противоположна?

4.7. Почему в неинерциальных системах координат, движущихся прямолинейно, силы инерции тел приложены (см. решения задач) к точке центра масс этих тел?

4.8. Почему в задаче 3.1.1 в уравнении для движения точки центра масс сумма всех сил равна нулю?

4.9. Одинаково ли направление векторов сил инерции и соответствующих им ускорений при сложном движении материальной точки в инерциальной системе координат? Могут ли быть указаны конкретно тела, которыми обусловлено появление этих ускорений?

4.10. Чем объясняется то, что в неинерциальной системе координат решение задачи 3.1.3 о падающем маятнике значительно проще, чем в инерциальной?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. С какой горизонтальной силой  $F$  следует двигать наклонную плоскость массы  $M$ , с углом  $\alpha$  к горизонту, чтобы лежащее на ней тело массы  $m$  не перемещалось относительно наклонной плоскости? Коэффициент силы трения скольжения между телами задан углом трения  $\varphi$ .

Ответ:  $F = (M + m)g(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi)$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести.

5.2. Сплошной цилиндр скатывается без скольжения с наклонной плоскости с углом  $\alpha$  к горизонту. Сама наклонная плоскость опускается в лифте с ускорением  $b$ . Не учитывая сил трения качения, определить ускорение  $a$  оси цилиндра относительно наклонной плоскости. Решить задачу в инерциальной и неинерциальной системе координат.

Ответ:  $a = 2/3(g - b) \sin \alpha$ .

5.3. Определить ускорение  $a$  грузов на машине Атвуда. Блок невесом, нить нерастяжима, трение не учитывать. Массы грузов  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ).

Решить задачу: 1) в неинерциальной системе координат, связанной с опускающимся грузом; 2) в инерциальной системе, связанной с поднимающимся грузом. Сопоставить исходные уравнения движения.

Ответ:  $a = (m_1 - m_2) / (m_1 + m_2)g$ .

5.4. Учитывая наличие центробежной силы инерции на вращающейся относительно своей оси Земле, определить изменение ускорения силы тяжести в зависимости от изменения широты  $\varphi$  местности (формула Клеро). Землю считать сферой. Радиус Земли принять равным 6400 километров. Четвертой степенью угловой скорости Земли по сравнению с ее квадратом пренебречь.

Ответ:

$$g_{\varphi} = g \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 0,033 \cos^2 \varphi}{g}} \text{ см/с}^2,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести без учета вращения Земли.

5.5. Суточное вращение Земли приводит к отклонению артиллерийских снарядов от начального направления их полета.

Определить величину поперечного смещения  $S$  снаряда за время  $t$ , выпущенного горизонтально на юг, на местности с широтой  $\varphi$ , с начальной скоростью  $v$ . Трение не учитывать.

Ответ:  $S = v\omega \sin \varphi t^2$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли.

5.6. Суточное вращение Земли вызывает отклонение падающих тел к востоку. Определить, на какое расстояние  $l$  тело, свободно падающее с высоты  $h$  на экваторе, отклонится у поверхности Земли от земного радиуса, продолженного до начального положения тела. Считать, что сила Кориолиса направлена всегда нормально к радиусу Земли, проведенному через начальную точку падения тела.

Ответ:  $l = \frac{2}{3} \sqrt{2} \frac{\omega}{g} \sqrt{h^3}$ , где

$g$  — ускорение силы тяжести  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли.

5.7. Прямой стержень  $OA$  (рис. 32), наклоненный под углом  $\alpha$  к горизонтали, вращается вокруг вертикальной оси  $OB$  с угловой скоростью  $\omega$ . По стержню может скользить маленькая втулка  $C$ . Коэффициент трения скольжения  $k$  задан углом трения  $\varphi$  ( $k = \text{tg } \varphi$ ).

Определить расстояние  $r_1$  от втулки до оси вращения, начиная с которого втулка будет скользить вниз, и расстояние  $r_2$ , начиная с которого втулка будет скользить вверх.

Ответ:

$$r_1 = \frac{g}{\omega^2} \text{tg}(\alpha - \varphi), \quad r_2 = \frac{g}{\omega^2} \text{tg}(\alpha + \varphi).$$

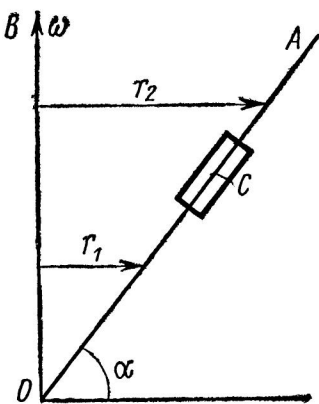


Рис. 32

## РАЗДЕЛ VIII

### Кинематика твердого тела

#### 1. Теоретический материал

Определение твердого тела. Число независимых величин, определяющих положение тела. Поступательное движение тела. Его смещение, скорость и ускорение. Свойство траекторий, скоростей и ускорений отдельных точек твердого тела. Вращение твердого тела относительно неподвижной оси. Угловая скорость и ускорение твердого тела. Распределение линейных скоростей и ускорений в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной оси. Касательное, нормальное и полное ускорение отдельных точек тела. Сложное плоское движение тела. Разложение этого движения на поступательное и вращательное движения. Сведение его к одному вращательному движению. Мгновенный центр вращения, мгновенный центр скоростей. Аналитическое исследование плоского движения твердого тела.

#### 2. Вопросы к теоретическому материалу

2.1. Как определяется поступательное движение твердого тела?

2.2. Обязательно ли, чтобы при поступательном движении тела любая его точка двигалась по прямой?

2.3. Как определяется вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси?

2.4. Как определяется направление векторов угловой скорости и углового ускорения?

2.5. К каким точкам вращающегося тела следует относить векторы угловой скорости и углового ускорения?

2.6. Как взаимно расположены эти вектора при ускоренном и замедленном вращении твердого тела?

2.7. Как определяется плоское движение твердого тела?

2.8. Каким числом независимых величин может быть задано плоское движение твердого тела?

2.9. Каковы размерности этих величин?

2.10. Безразличен ли в кинематике выбор точки, относительно которой совершается вращение тела при его плоском движении?

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Типы и методы решения

3.1. Поступательное и вращательное движение. Движение систем тел.

Решение. Применяются уравнения законов движения и уравнения связей.

3.2. Плоское движение твердого тела. Движение систем тел.

Решение. Применяются общие кинематические закономерности, уравнения закона движения и уравнения связей.

#### б) Примеры

##### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Наклонная плоскость  $A$  с углом  $\alpha$  к горизонту движется горизонтально по закону  $x=at^2$  ( $a$  — постоянная), поднимая при этом стержень  $B$  (рис. 33).

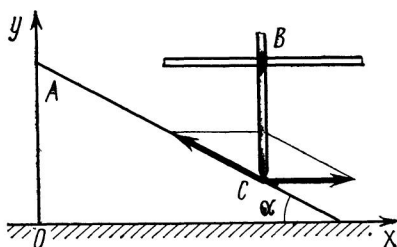


Рис. 33

Определить закон движения стержня, его скорость  $v=\dot{y}$  и ускорение  $w=\ddot{y}$ .

Решение. Движение точки  $C$  можно рассматривать как сложное движение, состоящее из двух — переносного (движения плоскости) и относительного (скольжения по этой плоскости).

Уравнение связей для смещений:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha = at^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Этот закон движения для скорости и ускорения дает

$$\dot{y} = 1/2 at \operatorname{tg} \alpha, \quad \ddot{y} = 1/2 a \operatorname{tg} \alpha.$$

3.1.2. Круглый диск с радиусом  $R$  (рис. 34), укрепленный на тонком стержне, совершает крутильные колебания так, что его угол поворота, отсчитываемый от положения равновесия, определяется уравнением

$$\alpha = \alpha_0 \cos pt,$$

где  $\alpha_0$  — амплитуда смещения,  $p$  — частота.

Определить величину угловой скорости  $\omega$  и углового ускорения  $\varepsilon$  диска, а также значение радиального  $w_n$  и касательного  $w_t$  ускорений точки на внешней окружности диска.

Решение.  $\omega = \dot{\alpha} = -\alpha_0 p \sin pt$ ,  $\varepsilon = \ddot{\alpha} = -\alpha_0 p^2 \cos pt$ ,

$$w_n = \omega^2 R = \alpha_0^2 p^2 R \sin^2 pt, \quad w_t = \varepsilon R = -R \alpha_0 p^2 \cos pt.$$

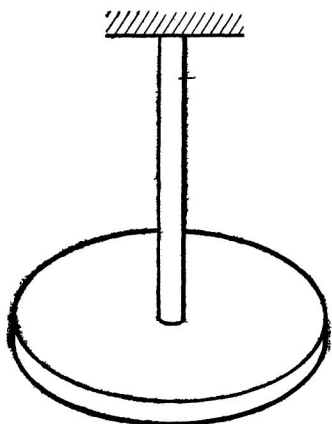


Рис. 34

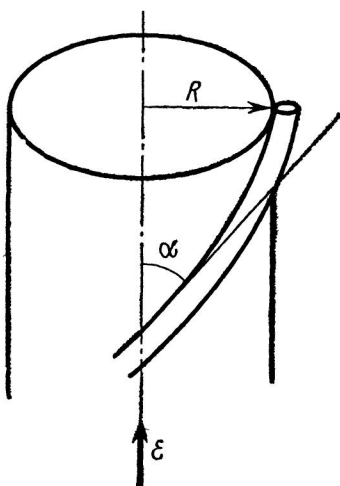


Рис. 35

3.1.3. В начало винтового желоба, имеющегося на круглом цилиндре, положен тяжелый шарик (рис. 35).

С каким угловым ускорением следует вращать цилиндр вокруг вертикальной оси, чтобы шарик свободно падал по вертикали внутри желоба? Угол образуемый осью желоба с вертикалью, —  $\alpha$ , расстояние между осью цилиндра и осью желоба —  $R$ .

Решение. Пусть шарик при повороте цилиндра на угол  $\varphi$  опустился за время  $t$  на  $h = gt^2/2$ .

В этом случае

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R\varphi}{h} = \frac{2R\varphi}{gt^2}.$$

Выражение  $\varphi = g \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{2R} t^2$  будет законом движения цилиндра. Для искомой величины углового ускорения получим

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{1}{R} g \operatorname{tg} \alpha.$$

**3.1.4.** На обод колеса с горизонтальной осью намотана нить, на свободном конце которой подвешен груз  $P$ . Груз начинает опускаться без начальной скорости, приводя колесо во вращение.

Определить угловое ускорение колеса  $\varepsilon$  и полное ускорение точки на ободе колеса  $w$  в функции высоты  $x$ , на которую опустился груз. Радиус колеса  $R$ , ускорение груза  $a = \ddot{x}$ , нить нерастяжима.

**Решение.** Уравнение связи (кинематической) при нерастяжимости нити

$$a = \varepsilon R.$$

Ускорение (полное) на ободе будет суммой ускорений: тангенциального (ускорение груза)  $a$  и нормального  $v^2/R$ , где  $v = \dot{x}$  — скорость опускания груза (скорость точки на ободе).

Так как  $v^2 = 2ah$ , то

$$w = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2 h^2}{R^2}} = \frac{a}{R} \sqrt{R^2 + 4h^2}; \quad \varepsilon = \frac{a}{R}.$$

**3.1.5.** Ползун  $A$  (рис. 36) движется поступательно по стержню  $KB$  под действием нити, продетой через колечко  $C$  и наматывающейся на вал  $M$ , который вращается с постоянной скоростью  $\omega$ .

Определить скорость  $v$  ползуна по расстоянию  $AB = x$ , если  $BC = h$ , радиус колеса  $R$ , нить нерастяжима.

**Решение.** При нерастяжимости нити уравнением кинематической связи будет  $u = \omega R$ , где  $u$  — скорость наматывания нити на вал.

Если  $l$  — длина нити  $AC$  в начальный момент времени ( $t=0$ ), то через время  $t$  она будет

$$l - ut = l - \omega R t.$$

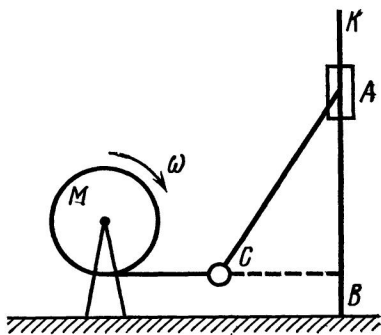


Рис. 36

Для любого момента времени имеем

$$x^2 + h^2 = (l - \omega R t)^2.$$

Дифференцируя по времени, получим искомую скорость

$$v = \dot{x} = -\frac{\omega R}{x} \sqrt{x^2 + h^2}.$$

### 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** По прямой  $AOB$  катится без скольжения диск  $C$  (рис. 37). Скорость его равна  $v_0$ . Определить направление скорости произвольной точки  $M$  диска и ее величину  $v$  как функцию угла  $\varphi$ .

Решение. Точка  $O$  является мгновенным центром вращения диска. Для точки  $P$  это дает величину скорости  $2v_0$ . Из геометрических соображений ясно, что направление вектора скорости для точки  $M$  должно проходить через точку  $P$ . Проекция скорости  $2v_0$  на направление вектора скорости точки  $M$  дает искомую величину

$$v = 2v_0 \cos \varphi.$$

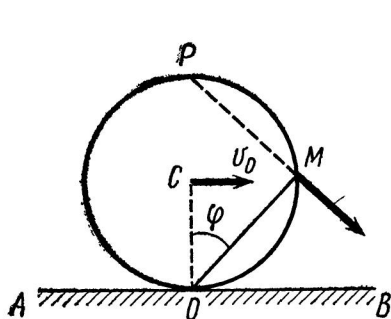


Рис. 37

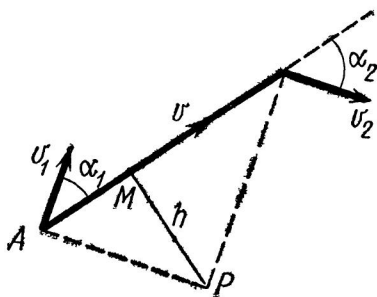


Рис. 38

**3.2.2.** Прямой твердый стержень  $AB$  движется в неподвижной плоскости. Даны: скорости концов стержня  $v_1$  и  $v_2$ , углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  этих скоростей со стержнем, его длина  $l$ .

Определить точку  $M$  на стержне, скорость  $v$  которой направлена вдоль самого стержня. Определить величину этой скорости, расстояние мгновенного центра вращения от стержня, мгновенную угловую скорость.

Решение. Точка  $P$  пересечения перпендикуляров к концам векторов скоростей  $v_1$  и  $v_2$  фиксирует положение мгно-



венной оси вращения стержня. Перпендикуляр из этой точки на стержень определяет искомую точку  $M$ .

Для твердого тела должно быть  $v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2 = v$ . Легко видеть, что

$$h = \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Для величины мгновенной угловой скорости, пользуясь последним уравнением, получим

$$\omega = \frac{v}{h} = \frac{v}{l} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2).$$

**3.2.3.** Стержень  $AB$  во все время движения касается полуокружности радиуса  $R$  (рис. 39). Концы стержня  $A$  остаются на горизонтальной прямой, проходящей через центр  $O$  полуокружности.

Определить угловую скорость  $\omega$  стержня относительно точки  $A$ , если она имеет линейную скорость  $v$ . Расстояние  $OA$  в любой момент времени считать известным и равным  $x$ .

**Решение.** Для любого момента времени имеем

$$R = x(t) \sin \varphi(t).$$

Дифференцируя по времени, получим

$$0 = \dot{x} \sin \varphi + x \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Учитывая, что  $\dot{x} = v$  для искомой величины скорости, получим

$$\omega = \dot{\varphi} = -\frac{v}{x} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{v}{x} \frac{R}{\sqrt{x^2 - R^2}}.$$

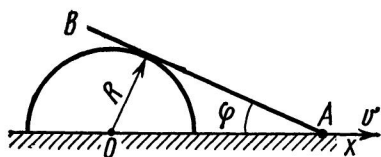


Рис. 39

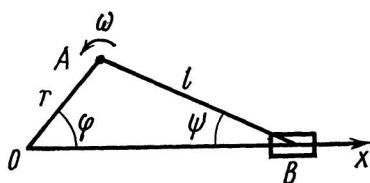


Рис. 40

**3.2.4.** Механизм паровой машины состоит из кривошипа  $OA = r$ , шатуна  $AB = l$  и ползуна  $B$  (рис. 40). При вращении кривошипа вокруг точки  $O$  ползун совершает возвратно-ступательное движение по прямой  $Ox$ .

Определить скорость ползуна  $v$ , если кривошип вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Углы  $\varphi$  и  $\psi$  считать данными для любого положения механизма.

Решение. Для координаты  $x$  ползуна имеем

$$x = r \cos \varphi + l \cos \psi.$$

Скорость его движения  $v$  будет

$$v = \dot{x} = -(r\dot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\psi} \sin \psi),$$

где  $\dot{\varphi} = \omega$ .

Для определения величины  $\dot{\psi}$  применим теорему синусов. Имеем

$$l \sin \psi = r \sin \varphi.$$

Дифференцирование по времени этого уравнения дает

$$\dot{\psi} = \frac{r}{l} \omega \frac{\cos \varphi}{\cos \psi},$$

Пользуясь этим для искомой скорости, получим

$$v = \dot{x} = -r\omega \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi}.$$

#### 4. Контрольные вопросы

- 4.1. Как определяется абсолютно твердое тело?
- 4.2. Каким числом степеней свободы оно обладает?
- 4.3. Центр масс тела двигается по синусоиде. Может ли при этом тело двигаться поступательно?
- 4.4. Как определяется полное ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
- 4.5. Аналогичны ли между собой формулы для ускорений при равномерных поступательном и вращательном движениях твердого тела?
- 4.6. Какие смещения, скорости и ускорения (см. 4.5) соответствуют друг другу?
- 4.7. Какому условию должны удовлетворять проекции величин скоростей и ускорений при плоском движении твердого тела?
- 4.8. Чем отличается угловая скорость вращения твердого тела вокруг неподвижной оси от мгновенной угловой скорости при плоском движении твердого тела?
- 4.9. Как определяется местоположение мгновенного центра вращения при плоском движении твердого тела?
- 4.10. Сохраняется ли величина угловой скорости вращения твердого тела при его плоском движении, если ось вращения смещают параллельно ей самой?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Колесо, получившее начальную угловую скорость  $\omega_0$ , сделав  $n$  оборотов, остановилось вследствие трения. Считая вращение равномерно замедленным, определить угловое ускорение  $\varepsilon$ .

Ответ:

$$\varepsilon = \omega_0^2 / 4\pi n.$$

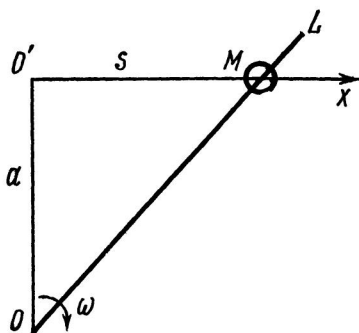


Рис. 41

5.2. Прямая  $OL$ , вращаясь вокруг своего начала  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , перемещает колечко  $M$ , насаженное на неподвижную проволоку, отстоящую от точки  $O$  на расстояние  $a$  (рис. 41).

Определить скорость  $v$  и ускорение  $w$  колечка в функции расстояния  $O'M = S$ .

Ответ:  $v = a\omega + \frac{\omega}{a} S^2$ ,  $w = 2\omega^2 S (1 + S^2/a^2)$ .

5.3. Стержень  $OA$ , который может вращаться относительно оси  $O$ , опирается на куб  $B$  высотой  $h$ , движущийся горизонтально со скоростью  $v$  (рис. 42).

В момент, когда расстояние между точкой  $O$  и гранью куба равно  $S$ , определить скорость  $v$  и ускорение  $w$  движения точки  $E$  по стержню, а также угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  вращения стержня.

Ответ:  $v = \frac{vh}{\sqrt{S^2 + h^2}}$ ,  $\omega = -\frac{vh}{S^2 + h^2}$ ,

$$\varepsilon = \frac{2v^2 h S}{(S^2 + h^2)^2}, \quad w = \frac{v^2 h}{\sqrt{S^2 + h^2}} \sqrt{h^2 + 4S^2}.$$

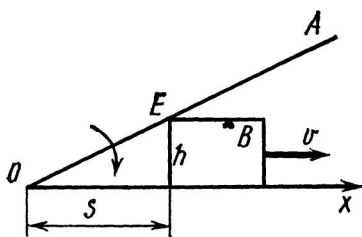


Рис. 42

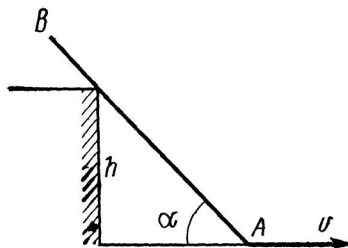


Рис. 43

5.4. Конечная точка  $A$  прямого стержня  $AB$  движется с постоянной горизонтальной скоростью  $v$  (рис. 43).

Определить угловую скорость  $\omega = \dot{\alpha}$ , стержня как функцию угла  $\alpha$ , который его ось образует с горизонтом. Величина  $h$  дана.

Ответ:

$$\omega = -v/h \sin^2 \alpha.$$

5.5. Прямой жесткий угол  $P_1MP_2$  движется так, что его вершина  $M$  описывает окружность радиуса  $R$ , а его стороны  $P_1M$  и  $P_2M$  проходят через две неподвижные точки  $A$  и  $B$  (рис. 44).

При условии, что скорость точки  $M$  постоянна и равна  $C$ , определить скорости  $\omega_A$  и  $\omega_B$  вращения сторон угла относительно точек  $A$  и  $B$  и скорости  $v_A$  и  $v_B$ , с которыми стороны угла скользят в точках  $A$  и  $B$ . Угол  $\varphi$  считать данным.

Ответ:

$$\omega_A = \omega_B = c/2R, \quad v_A = c \sin \varphi/2, \quad v_B = c \cos \varphi/2.$$

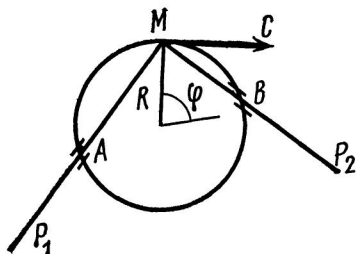


Рис. 44

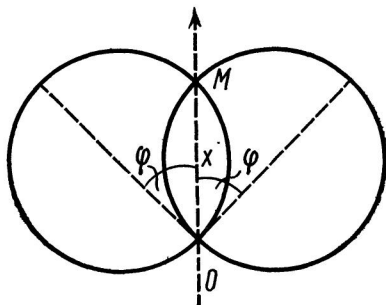


Рис. 45

5.6. Два одинаковых кольца радиуса  $R$  вращаются в противоположные стороны с равными угловыми скоростями  $\omega$  около точки  $O$  (рис. 45).

Определить скорость  $v$  и ускорение  $\epsilon$  точки  $M$  пересечения этих колец. Определить скорости  $u$  и ускорение  $\omega$  точки  $M$  при ее движении по прямой  $OM = x$ .

Ответ:

$$v = 2R\omega, \quad \epsilon = 4R\omega^2, \quad \dot{x} = u = -\omega \sqrt{4R^2 - x^2}, \quad \omega = \omega^2 x.$$

## РАЗДЕЛ IX

### Динамика твердого тела

#### 1. Теоретический материал

Твердое тело. Число независимых координат, определяющих положение твердого тела. Сила (вектор) — мера механического действия на тело со стороны других тел. Масса (скаляр) — мера инертности тела при его поступательном движении. Первый закон Ньютона, инерциальная система координат. Второй закон Ньютона, ускорение (вектор) — результат действия силы на тело. Третий закон Ньютона — закон взаимодействия тел. Уравнения движения при поступательном движении тела. Получение (интегрированием уравнений движения) законов движения тела, начальные условия, их роль при этом. Закон сохранения количества движения. Теорема о движении точки центра масс при движении системы тел. Закон сохранения механической энергии. Момент силы (вектор). Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси. Момент инерции (тензор) — мера инертности тела при вращательном движении тела. Уравнение движения тела при его вращении (уравнение моментов). Угловое ускорение (вектор) — результат действия момента силы на тело. Получение из уравнения моментов законов движения при вращении тела. Закон сохранения момента количества движения для системы тел. Плоское движение твердого тела. Уравнения движения и законы движения тела в этом случае. Качение твердого тела. Сведение двух видов движения к одному. Мгновенная ось вращения. Силы трения покоя, скольжения, качения. Коэффициенты сил трения.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Можно ли рассматривать первый закон Ньютона как утверждение, что имеется инерциальная система координат? Как следует выбрать начало и направление осей системы координат?

2.2. Какими законами Ньютона пользуются при решении задач динамики?

2.3. Что такое уравнения движения тела? В чем состоит основная задача динамики?

2.4. Что такое начальные условия? Какова их роль при решении задач динамики?

2.5. Как определяется точка центра масс твердого тела? Как формулируется теорема о ее движении?

2.6. В чем состоит закон сохранения количества движения системы тел? При каких условиях им можно пользоваться?

2.7. Как формулируется закон сохранения механической энергии? При наличии каких сил он выполняется, при каких нет?

2.8. Что утверждается законом сохранения момента количества движения системы тел?

2.9. Возможно ли применение этого закона сохранения при наличии внешних сил, действующих на систему тел?

2.10. В чем преимущества пользования ранее упомянутыми законами сохранения по сравнению с применением уравнений движения?

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Типы и методы решения

3.1. Поступательное, вращательное и плоское движение твердого тела при постоянных величинах сил и моментах сил. Движение системы тел при этих же условиях.

Решение. Применяются уравнения движения, уравнения кинематических связей.

3.2. Поступательное, вращательное и плоское движение твердого тела. Движение системы твердых тел.

Решение. Применяются законы сохранения.

#### б) Примеры

##### 1-й тип задач (3.1)

##### Примеры:

3.1.1. По наклонной шероховатой плоскости с углом  $\alpha$  к горизонту начинает двигаться без начальной скорости брусок массы  $m$ . За время  $t$  он проходит расстояние  $S$  (рис. 46).

Определить коэффициент силы трения скольжения и полную величину силы со стороны плоскости на брусок.

Решение. Реакция плоскости  $F_1 = mg \cos \alpha$ . Сила трения скольжения  $F_2 = kmg \cos \alpha$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $k$  — коэффициент силы трения скольжения.

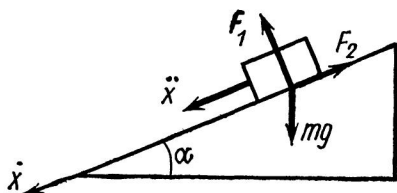


Рис. 46

Полная величина искомой силы определится выражением

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = mg \cos \alpha \sqrt{1 + k^2}.$$

Для уравнения движения бруска имеем

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - kmg \cos \alpha,$$

где  $\ddot{x}$  — ускорение движения бруска.

Учитывая, что  $\ddot{x} = 2S/t^2$  для величины коэффициента трения скольжения, получим

$$k = \operatorname{tg} \alpha - \frac{2S}{gt^2} \frac{1}{\cos \alpha}.$$

**3.1.2.** Клин с углом  $\alpha$  и массой  $M$  опускается вертикально под действием собственной силы тяжести и двигает горизонтально брусок с массой  $m$  (рис. 47). Не учитывая сил трения, определить ускорения движения бруска  $\ddot{x}$ , клина  $\ddot{y}$  и силу взаимодействия  $N$  между ними.

**Решение.** Уравнения движения клина и бруска соответственно будут

$$M\ddot{y} = Mg - N \sin \alpha, \quad m\ddot{x} = N \cos \alpha,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

Для уравнения связи между ускорениями имеем  $\ddot{x} = \ddot{y} \operatorname{tg} \alpha$ . Решение системы уравнений дает

$$\ddot{x} = \frac{M \operatorname{tg} \alpha}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \ddot{y} = \frac{Mg}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$N = \frac{mM \operatorname{tg} \alpha}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha} g.$$

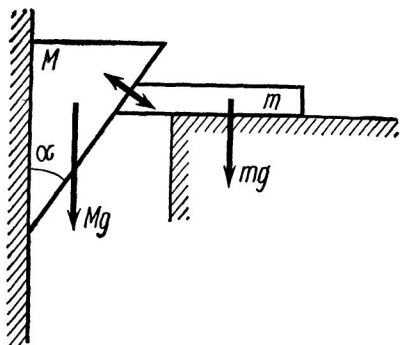


Рис. 47

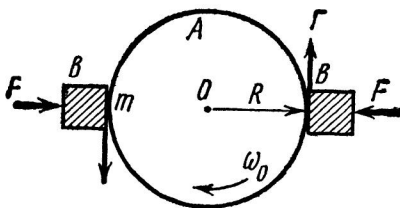


Рис. 48

**3.1.3.** Массивный цилиндр  $A$  массы  $m$  радиуса  $R$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  (рис. 48).

Определить величину силы  $F$  нажатия тормозных колодок  $B$ , если при коэффициенте силы трения скольжения  $k$  цилиндр останавливается через время  $t$  после начала тормо-

жения. Коэффициент трения скольжения считать постоянной величиной.

Решение. Уравнение движения цилиндра будет

$$J\varepsilon = -M,$$

где  $J$  — момент инерции цилиндра,  $\varepsilon$  — его угловое ускорение,  $M$  — момент сил трения.

Имеем

$$J = 1/2 mR^2; M = 2FkR; \varepsilon = \omega_0/t.$$

Подстановка последних трех уравнений в первое дает искомую величину  $F$ .

Имеем

$$F = mR\omega_0/4kt.$$

**3.1.4.** Цилиндр (блок)  $A$  укреплен на стержне  $C$  (рис. 49). На блоке намотана тонкая нерастяжимая невесомая нить с грузом  $m$  на конце. Груз опускается и приводит блок во вращение. Радиус блока  $R$ , его масса  $m_0$ , момент инерции  $J$ , масса груза  $m$ .

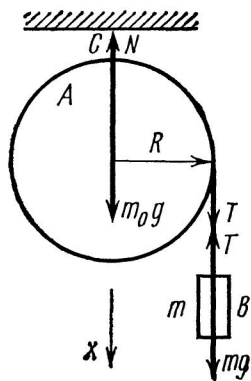


Рис. 49

Не учитывая сил трения, определить ускорение опускания груза  $x$ , угловое ускорение  $\varepsilon$  блока, натяжение нити  $T$ , натяжение стержня  $N$ .

Решение. Необходимы 3 вида уравнений:

1) два уравнения движения: одно для груза, другое для блока:

$$m\ddot{x} = mg - T, J\varepsilon = RT;$$

2) уравнение кинематической связи, нерастяжимость нити дает

$$\ddot{x} = \varepsilon R;$$

3) уравнение статическое; отсутствие поступательного движения блока дает

$$T + m_0 g - N = 0.$$

Решение системы из этих четырех уравнений приведет к следующим значениям искомых величин:

$$\ddot{x} = \frac{mR^2}{J + mR^2} g, \varepsilon = \frac{mR}{J + mR^2} g,$$

$$T = \frac{Jm}{J + mR^2} g, N = \frac{J(m + m_0) + m_0 m R^2}{J + mR^2} g.$$



3.1.5. Сплошной однородный цилиндр с двумя намотанными на нем тонкими нерастяжимыми и невесомыми нитями, концы которых закреплены, вращаясь, опускается вниз (рис. 50).

Определить, без учета сил трения, ускорение движения точки центра масс цилиндра.

Решение. Цилиндр совершает плоское движение. Он движется вниз и вращается вокруг своей оси. Момент количества движения цилиндра относительно любой неподвижной точки в этом случае должен состоять из двух членов, один из которых учитывает поступательное, а другой — вращательное движение.

Для момента количества движения  $N$  цилиндра имеем

$$N = rmv \sin \alpha + J\omega,$$

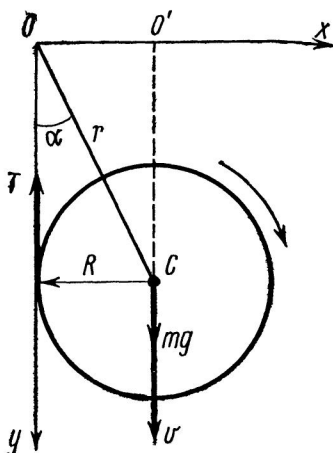


Рис. 50

где  $r$  — радиус-вектор точки центра масс цилиндра,  $v$  — скорость его движения;  $m$ ,  $J$ ,  $\omega$  — соответственно масса, момент инерции относительно точки центра масс и угловая скорость цилиндра,  $\alpha$  — угол между векторами  $r$  и  $v$ .

Решим задачу для двух случаев выбора точки начала координат. В первом случае выберем (рис. 50) точку  $O$  (место крепления нитей). Во втором случае воспользуемся точкой  $O'$ , находящейся на одной вертикали с центром масс цилиндра.

1) Для момента количества движения цилиндра относительно точки  $O$  имеем

$$N = r \sin \alpha mv + J\omega = Rmv + J\omega,$$

где  $R$  — радиус цилиндра.

Производная по времени от момента количества движения должна быть равна сумме моментов всех внешних сил. Это дает

$$Rma + J\varepsilon = mgR,$$

где  $a$  — искомое ускорение,  $\varepsilon$  — угловое ускорение цилиндра.

Для уравнения связи между  $a$  и  $\varepsilon$  при нерастяжимости нитей имеем

$$a = \varepsilon R.$$

Из этих уравнений следует

$$a = \frac{mR^2}{J + mR^2} g.$$

Учитывая, что  $J = 1/2 mR^2$ , получим:

$$a = 2/3 g.$$

2) Для момента количества движения цилиндра относительно точки  $O'$  первый член выражения для этой величины равен нулю, так как угол  $\alpha = 0$ . Уравнения движения в этом случае будут:

$$ma = mg - T, J\epsilon = RT, a = \epsilon R,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести. Эти уравнения, как и прежде, дают

$$a = 2/3 g.$$

Отметим, что в первом случае применяют одно динамическое и одно кинематическое уравнения, во втором — два динамических и одно кинематическое. Второе уравнение (уравнение моментов) является справедливым не только относительно неподвижной точки (точки начала координат  $O$ ), но и относительно точки, движущейся с ускорением (точки  $C$  центра масс тела (цилиндра)). Тожественность уравнений моментов можно рассматривать как обоснование того, что в плоском движении тела уравнение моментов может применяться относительно центра масс в том же виде, как и относительно начала координат. Обычно уравнение моментов полагают написанным именно относительно точки центра масс тела.

**3.1.6.** К ведущему колесу автомашины приложен вращающий момент  $M$ , оно движется по горизонтали. Коэффициент трения покоя о поверхность  $k$ . Радиус колеса  $R$ , радиус инерции  $\rho$ , масса  $m$ , вес  $P$  (рис. 51).

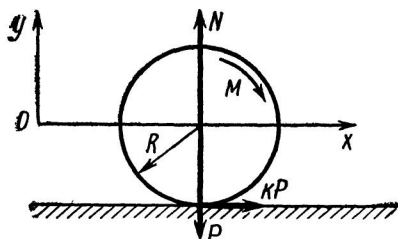


Рис. 51

Какому условию должен удовлетворять вращающий момент для того, чтобы колесо катилось без скольжения? Трение качения не учитывать.

Решение. Уравнения движения будут:

$$m\ddot{x} = kP; m\rho^2\epsilon = M - kPR; \ddot{x} = \epsilon R,$$

где  $\ddot{x}$  — ускорение движения центра масс,  $\epsilon$  — угловое ускорение колеса.

Для величины вращающего момента эта система уравнений дает

$$M = k \frac{P}{R} (R^2 + \rho^2).$$

С увеличением  $M$  растет  $k$  и достигает своей максимальной величины  $k_0$ . В этом случае имеем

$$M = k_0 \frac{P}{R} (R^2 + \rho^2).$$

Это максимальное значение момента, при котором еще нет скольжения колес.

При  $M > k_0 \frac{P}{R} (R^2 + \rho^2)$  скольжение колеса неизбежно.

**3.1.7.** Однородному диску, поставленному ребром на горизонтальную шероховатую плоскость (рис. 52), сообщено поступательное движение со скоростью  $v_0$  параллельно плоскости.

Определить скорость движения центра диска в тот момент, когда начнется качение без скольжения. Коэффициенты трения покоя и скольжения считать равными, трение качения не учитывать.

Решение. Наличие силы трения скольжения  $F$  (рис. 53) приведет к уменьшению скорости  $v_0$  и появлению вращения диска (угловой скорости  $\omega$ ).

Уравнения движения будут:

$$m \frac{dv}{dt} = -kmg, \quad \frac{1}{2} mR^2 \frac{d\omega}{dt} = kmgR,$$

где  $m$  — масса диска,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $R$  — радиус диска,  $k$  — коэффициент трения,  $v$  — скорость центра масс диска,  $\omega$  — угловая скорость.

Эти уравнения дают

$$v = -kgt + v_0, \quad \omega = \frac{2kgt}{R}.$$

В момент начала движения без скольжения должно быть  $v = \omega R$ . Пользуясь этим, из выражений для  $v$  и  $\omega$  получим время  $t_0$ , через которое начнется движение без скольжения:

$$t_0 = \frac{v_0}{3kg}.$$

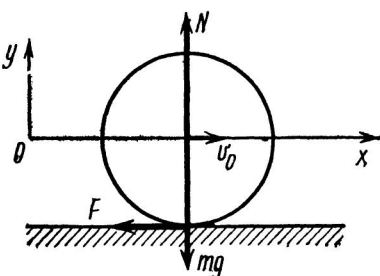


Рис. 52

Для скорости  $v_{t_0}$  с начала движения без скольжения получим

$$v_{t_0} = v_0 - kgt_0 = v_0 - kg \frac{v_0}{3kg} = \frac{2}{3} v_0.$$

3.1.8. Однородный цилиндр с радиусом  $R$  скатывается без скольжения с наклонной плоскости с углом  $\alpha$  к горизонту. Известен коэффициент трения качения  $k$  (рис. 53).

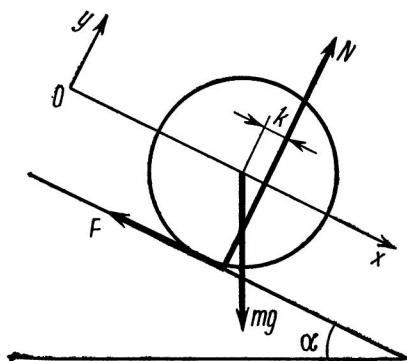


Рис. 53

Определить ускорение  $a = \ddot{x}$  движения центра масс цилиндра. При каком значении  $k$  центр цилиндра будет двигаться равномерно, а цилиндр равномерно вращаться?

Решение. Уравнения движения для цилиндра будут:

$$ma = m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F;$$

$$J\varepsilon = FR - kmg \cos \alpha; \quad \ddot{x} = \varepsilon R,$$

где  $m$  — масса цилиндра,  $J$  — его момент инерции,  $\varepsilon$  — его угловое ускорение,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $F$  — сила трения покоя.

Эти уравнения дают

$$a = \ddot{x} = \frac{mR(R \sin \alpha - k \cos \alpha)}{J + mR^2}.$$

При  $J = 0,5mR^2$  получим

$$a = \frac{2}{3} \left( \sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \right) g.$$

При равномерном движении центра масс цилиндра его ускорение должно быть равно нулю. Это дает

$$k = R \operatorname{tg} \alpha.$$

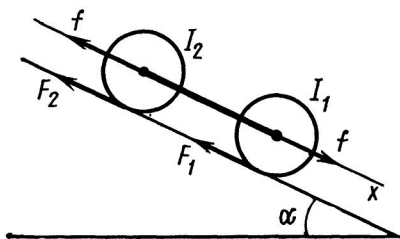


Рис. 54

3.1.9. Два катка, скрепленных стержнем, скатываются без скольжения с наклонной плоскости с углом  $\alpha$  к горизонту (рис. 54). Массы их  $m$  и радиусы  $R$  одинаковы; моменты инерции  $J_1$  и  $J_2$ .

Определить: 1) угловое ускорение скатывания кат-

ков; 2) силу, действующую со стороны стержня на каток, если каток с большим моментом инерции движется впереди и наоборот. Силы трения качения не учитывать.

Решение. Для уравнений движения катков (рис. 54), если  $J_1 > J_2$ , имеем:

$$m\ddot{x} = ma = mg \sin \alpha + f - F_1; \quad J_1 \varepsilon = F_1 R,$$

$$m\ddot{x} = ma = mg \sin \alpha - f - F_2; \quad J_2 \varepsilon = F_2 R,$$

$$\ddot{x} = a = \varepsilon R,$$

где  $f$  — сила, действующая на катки со стороны стержня,  $F_1$  и  $F_2$  — силы трения покоя.

Эти уравнения дают

$$\varepsilon = \frac{2Rgm \sin \alpha}{J_1 + J_2 + 2mR^2}; \quad f = \frac{J_1 - J_2}{2R} \varepsilon.$$

При выбранных (рис. 54) направлениях сил  $f$  стержень сжат.

Во втором случае знак у  $f$  изменяется, решение прежнее, стержень растянут.

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** На прямоугольный трехгранный клин с массой  $M$ , лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, положен подобный же, но меньший клин с массой  $m$  (рис. 55).

Определить горизонтальную скорость  $u$  большего клина в момент, когда малый, спустившись до конца, приобретет горизонтальную скорость  $v$ . На какое расстояние  $S$  при этом будет смещен больший клин? Трением о воздух пренебречь. (Необходимые размеры тел указаны на рисунке).

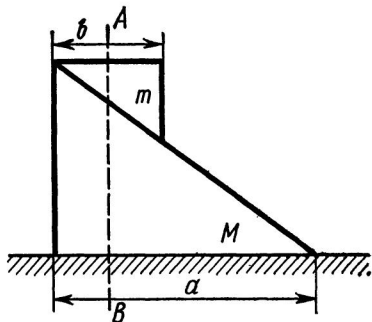


Рис. 55

Решение. 1. Решим задачу применением закона сохранения количества движения.

В горизонтальном направлении на систему внешние силы не действуют. В этом направлении система изолирована — должен выполняться закон сохранения количества движения.

Если  $Mu$  — количество движения большого клина, то для малого оно будет  $m(v - u)$ . По закону сохранения количества движения имеем

$$0 = -Mu + m(v - u),$$

что дает

$$u = mv/(m + M).$$

Время движения и большого и малого клина одинаково, поэтому

$$(a - b)/u = S/v.$$

Для величины смещения большого клина получим

$$S = (a - b) m/(m + M).$$

2. Решим задачу, применив теорему о движении точки центра масс системы тел.

Координата центра масс дается формулой  $R = \Sigma mr/\Sigma m$ , где  $m$  — масса частей системы,  $r$  — координата центра этой массы. В нашем случае нет внешних горизонтальных сил — центр масс клиньев должен опускаться (рис. 55) по вертикали  $AB$ . Выберем за начало координат точку  $B$ . Это дает  $R = \Sigma mr = 0$ .

Применительно к рассматриваемой задаче получим

$$0 = -MS + m[(a - b) - S] \text{ или } S = \frac{m(a - b)}{(m + M)}.$$

3.2.2. Горизонтальная трубка  $OA$  массы  $M$  и длины  $2a$  вместе с находящимся в ее середине и привязанным нитью шариком  $B$  массы  $m$  вращается

по инерции вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega_0$  (рис. 56). Нить перерезают.

Определить угловую скорость вращения трубки в момент, когда шарик вылетает из нее.

Решение. Момент внешних сил (сил тяжести) для трубки и шарика не направлен по оси вращения. По закону сохранения момента количество движения системы должно быть

$$(J + ma^2) \omega_0 = (J + m4a^2) \omega,$$

где  $J = 1/3 M(2a)^2$  — момент инерции трубки.

Для величины искомой угловой скорости получим

$$\omega = \frac{4M + 3m}{4(M + 3m)} \omega_0.$$

3.2.3. Сплошной однородный цилиндр с двумя намотанными на нем тонкими нерастяжимыми и невесомыми нитями, концы которых закреплены, опускается вниз (рис. 57).

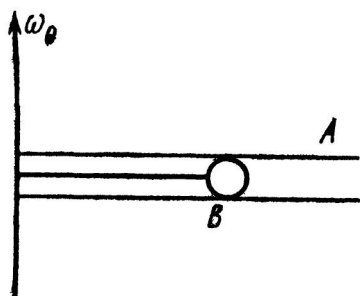


Рис. 56

Определить, без учета сил трения, ускорение движения точки центра масс цилиндра.

Решение этой задачи дано ранее (см. 3.1.5) с использованием уравнений движения.

Рассмотрим решение задачи, пользуясь законом сохранения механической энергии. По этому закону уменьшение потенциальной энергии тела должно быть равно увеличению его кинетической энергии. Имеем

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

где  $h$  — расстояние, на которое опустился цилиндр, ранее покоящийся,  $v$  — скорость движения его оси,  $\omega$  — угловая скорость его вращения,  $m$  — масса цилиндра,  $J = \frac{1}{2}mR^2$  — момент инерции относительно его оси,  $g$  — ускорение силы тяжести.

При нерастяжимых нитях уравнением связи будет  $v = \omega R$ , где  $R$  — радиус цилиндра.

Получим

$$mgh = \frac{3}{4}mv^2.$$

Дифференцируя это уравнение по времени, найдем

$$a = dv/dt = \frac{2}{3}g.$$

**3.2.4.** Однородный цилиндр с радиусом  $R$  скатывается без скольжения с наклонной плоскости с углом  $\alpha$  к горизонту (рис. 58). Коэффициент трения качения  $k$ .

Определить ускорение  $a = \ddot{x}$  движения центра масс цилиндра. При каком значении  $k$  центр масс цилиндра будет двигаться равномерно, а цилиндр — равномерно вращаться? (В начальный момент цилиндр неподвижен.)

Решение этой задачи дано ранее (см. 3.1.8) с использованием уравнений движения. Рассмотрим решение задачи, пользуясь законом сохранения энергии.

При уменьшении потенциальной энергии цилиндра появляется кинетическая энергия цилиндра, совершается работа против сил трения качения. Имеем

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + kmg\varphi \cos \alpha,$$

где  $m$  — масса цилиндра,  $J$  — его момент инерции,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $v$  — скорость движения оси цилиндра,

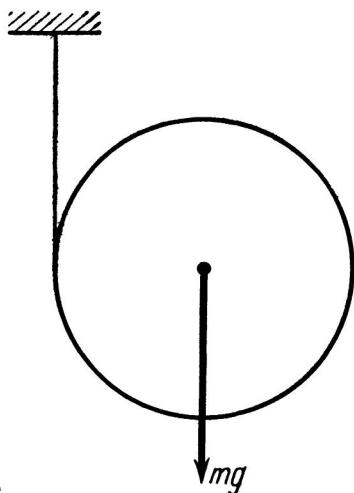


Рис. 57

$\omega$  — его угловая скорость, когда цилиндр опустился по вертикали на расстояние  $h$ ,  $\varphi$  — угол поворота цилиндра.

Пусть цилиндр спустился по наклонной плоскости на длину  $l$ . В этом случае (рис. 58) имеем  $h = l \sin \alpha = R \varphi \sin \alpha$ . Пользуясь также тем, что  $v = \omega R$ ;  $J = 1/2 m R^2$ , получим

$$mgR \varphi \sin \alpha = \frac{3}{4} mv^2 + k \varphi mg \cos \alpha.$$

Дифференцирование этого уравнения по времени с учетом того, что  $\dot{\varphi} = \omega = v/R$ , дает искомое значение ускорения движения центра масс цилиндра:

$$a = \ddot{x} = \dot{v} = \frac{2}{3} g \left( \sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \right).$$

При  $a=0$  получим условие движения цилиндра с постоянной скоростью:

$$k = R \operatorname{tg} \alpha.$$

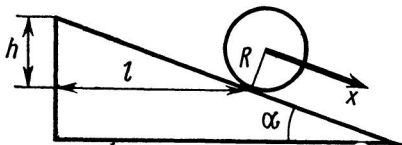


Рис. 58

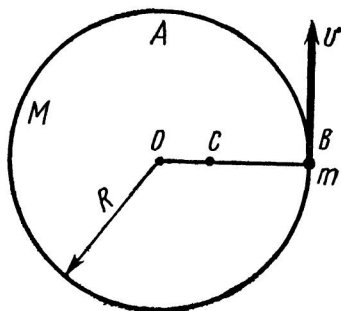


Рис. 59

**3.2.5.** На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости находится тонкое кольцо  $A$  с массой  $M$  и радиусом  $R$ . По кольцу движется жук (материальная точка)  $B$  массы  $m$  с постоянной относительной скоростью  $v$  (рис. 59).

Определить движение этой системы на плоскости, если в начальный момент кольцо и жук покоились.

**Решение.** В горизонтальном направлении внешние силы на систему не действуют. Ранее неподвижный центр масс  $C$  (рис. 59) системы  $A, B$  должен по закону сохранения количества движения сохранить свое состояние покоя и при начавшемся движении жука по кольцу. По закону сохранения момента количества движения вращение жука относительно точки вызовет вращение центра кольца относительно этой же точки.

Определим радиус вращения жука и центра кольца. Если  $OC=a$ ,  $CB=b$ , то

$$a + b = R, \quad Ma = mb.$$

Для радиусов вращения это дает

$$a = \frac{m}{m+M} R, \quad b = \frac{M}{m+M} R.$$



Для момента инерции кольца относительно точки центра масс системы имеем

$$J = M(R + a)^2.$$

По закону сохранения момента количества движения должно быть

$$0 = J\omega - mb(v - \omega b),$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения кольца.

Из этого уравнения, пользуясь выражениями для  $a$  и  $J$ , получим величину угловой скорости  $\omega$  вращения центра кольца:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{(M + m)m}{M^2 + 4Mm + 2m^2}.$$

Абсолютная скорость жука будет

$$v_{\text{абс}} = v - \omega b.$$

**3.2.6.** Из пушки, находящейся на горизонтальной поверхности, произведен выстрел под углом  $\alpha$  к горизонту. Относительная скорость снаряда в момент его вылета из ствола пушки  $v$ , его масса  $m$ , масса пушки  $M$ .

Определить расстояние, на которое смещается пушка, если коэффициент сил трения скольжения о поверхность равен  $k$ .

Решение. Время движения снаряда в стволе по сравнению с временем движения самой пушки очень мало. В связи с этим можно, пока снаряд в стволе, пренебречь наличием внешних горизонтальных сил. К движению снаряда это позволит применить закон сохранения количества движения

$$m(v \cos \alpha - V) - MV = 0,$$

где  $V$  — скорость движения пушки в момент вылета снаряда из ствола.

Из этого уравнения получим

$$V = \frac{mv \cos \alpha}{m + M}.$$

По закону сохранения энергии кинетическая энергия пушки будет полностью затрачена на работу против сил трения. Это позволяет написать, что

$$\frac{1}{2} M \left( \frac{mv \cos \alpha}{m + M} \right)^2 = M g k S,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $S'$  — расстояние, на которое сместилась пушка.

Из этого уравнения получим

$$S = \frac{1}{2gk} \left( \frac{mv \cos \alpha}{m + M} \right).$$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Скалярная или векторная величина момент инерции тела? Какой пример можете привести на вычисление момента инерции?

4.2. Можно ли изменить момент инерции тела, не изменяя его массы? Если можно, то как это осуществляется?

4.3. Как определяется: 1) работа силы при поступательном движении тела; 2) работа момента силы при вращении тела?

4.4. Чем определяется потенциальная и кинетическая энергия твердого тела? Чему равна полная механическая энергия тела?

4.5. Как определяется кинетическая энергия при плоском движении твердого тела?

4.6. Какие уравнения движения применяют при решении задач на плоское движение твердого тела?

4.7. В разные или одинаковые стороны направлены силы трения покоя при качении без скольжения ведомого и ведущего колес автомашины?

4.8. На какую величину увеличится момент количества движения тела при его плоском движении, если этот момент взят не относительно точки центра масс тела, а относительно неподвижной точки, не лежащей на одной прямой с направлением вектора скорости центра масс тела?

4.9. Обладает ли каким-либо преимуществом использование закона сохранения механической энергии при решении задач динамики по сравнению с применением уравнений движения?

#### 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. На горизонтальной плоскости лежит клин массы  $M$  с углом  $\alpha$  к горизонту. На плоскость клина положено тело массы  $m$ .

Определить горизонтальные ускорения обоих тел и силы  $N$  и  $R$ , с которыми тело действует на клин и клин действует на плоскость. Силы трения не учитывать.

О т в е т:

$$a_m = \frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g, \quad a_M = \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g,$$
$$N = \frac{mM \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g, \quad R = \frac{M(M + m)}{M + m \sin^2 \alpha} g.$$

5.2. На тело  $A$  массы  $M$ , находящееся на горизонтальной плоскости, положено тело  $B$  с массой  $m$ .

Какую нужно приложить горизонтальную силу  $F$  к телу  $A$ , чтобы тело  $B$  соскользнуло с поверхности тела  $A$ ? Коэффициент силы трения между плоскостью и телом  $A$  равен  $k_1$ , между телами  $A$  и  $B$  равен  $k_2$ .

Ответ:  $F \geq (m+M)(k_1+k_2)g$ .

5.3. На горизонтальной плоскости лежит катушка ниток (рис. 60).

С каким ускорением  $a$  будет двигаться ось катушки, если тянуть за нитку с силой  $F$ . Под каким углом  $\alpha$  к горизонту должна быть направлена сила  $F$  для того, чтобы катушка двигалась в сторону натянутой нити? Определить силу трения между катушкой и плоскостью. Катушка должна двигаться по плоскости без скольжения.

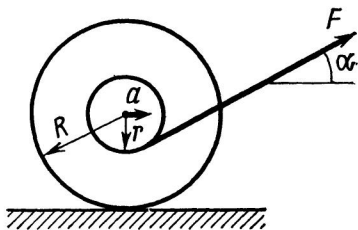


Рис. 60

Ответ:

$$a = F(R \cos \alpha - r)R / (J + mR^2),$$

где  $m$  и  $J$  — масса и момент инерции катушки,  $a > 0$ , если

$$\cos \alpha > \frac{r}{R}; \text{ сила трения } f = F \cos \alpha - ma.$$

5.4. Ось ведомого колеса автомашины движется горизонтально и прямолинейно. К оси колеса приложена горизонтально направленная сила  $F$ . Радиус колеса  $R$ , радиус инерции  $\rho$ , вес  $P$ . Коэффициент силы трения покоя колеса о поверхность равен  $k$ . Какому условию должна удовлетворять сила  $F$  для того, чтобы колесо катилось без скольжения? Трение качения не учитывать.

Ответ:  $F \leq k_0 \frac{F}{\rho^2} (R^2 + \rho^2)$ , где  $k_0$  — максимальное значение величины коэффициента силы трения покоя  $k$ .

5.5. Эллиптический маятник состоит из тела  $A$  с массой  $m_1$ , которое может перемещаться поступательно по гладкой горизонтальной плоскости, и груза  $B$  с массой  $m_2$ , связанного стержнем длины  $l$ . В начальный момент стержень отклонен на угол  $\varphi_0$  от вертикали и отпущен без начальной скорости (рис. 61). Пренебрегая весом стержня, определить смещение тела  $A$  в зави-

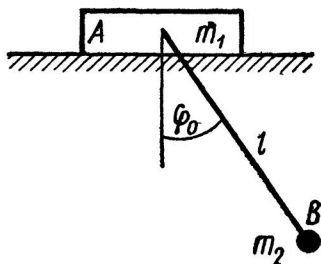


Рис. 61

симости от угла отклонения стержня  $\varphi$ .

О т в е т:

$$S = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi).$$

5.6. На горизонтальной оси насажен блок (однородный диск), через который перекинута невесомая нерастяжимая веревка, на концах которой висят две обезьяны равного веса. В некоторый момент одна из обезьян стала подниматься по веревке с относительной скоростью  $u$ .

Определить скорость движения второй обезьяны. Масса блока  $M$ , масса каждой обезьяны  $m$ . Скольжения веревки по блоку нет.

О т в е т:

$$v = 2mu/(M + 4m).$$

5.7. На вертикально поставленный винт с радиусом  $R_0$  надета массивная гайка. Ей сообщается угловая скорость  $\omega$  такого направления, что гайка поднимается вверх.

Не учитывая сил трения, определить, на какую высоту  $l$  поднимется гайка. Гайка имеет цилиндрическую форму, ее внешний радиус равен  $R$ , шаг винта равен  $h$ .

О т в е т:

$$l = \frac{\omega^2}{4g} \left( \frac{h^2}{2\pi^2} + R^2 - R_0^2 \right),$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

## РАЗДЕЛ X

### Упругие силы и деформации в твердом теле

#### 1. Теоретический материал

Сплошные тела. Типы деформаций. Элементарные деформации — растяжение (сжатие), сдвиг. Однородные и неоднородные деформации. Относительное удлинение. Относительный сдвиг. Относительное поперечное сжатие (расширение). Коэффициент Пуассона. Изменение объема тел при деформации растяжения (сжатия). Абсолютно упругое тело. Предел упругости. Пластические деформации. Связь между деформациями образца и возникающими в нем силами: «область пропорциональности», «область текучести». Закон Гука. Модуль Юнга. Модуль сдвига. Принцип суперпозиции напряжений. Изотропные и анизотропные тела. Связь между модулем Юнга, модулем сдвига и коэффициентом Пуассона для изотропных тел. Коэффициент сжимаемости и объемный модуль сжатия изотропных тел. Энергия упругой деформации при растяжении (сжатии). Энергия упругой деформации при сдвиге. Упругий гистерезис. Петля упругого гистерезиса. Устойчивость упругого равновесия.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

- 2.1. Какой смысл имеет понятие сплошное тело?
- 2.2. Какая деформация называется однородным растяжением (сжатием)?
- 2.3. Какая деформация называется однородным сдвигом?
- 2.4. Почему деформации растяжения (или сжатия) и сдвига называются элементарными деформациями?
- 2.5. Что такое деформация изгиба?
- 2.6. Что такое деформация кручения?
- 2.7. Что такое относительное удлинение?
- 2.8. Что такое относительный сдвиг?
- 2.9. Каким образом можно однозначно описать произвольную деформацию тела?
- 2.10. Придумайте эксперимент, подтверждающий сокращение поперечных размеров тел при растяжении.
- 2.11. Что называется относительным поперечным расширением или сжатием?
- 2.12. Что называется коэффициентом Пуассона? От чего зависит коэффициент Пуассона?

2.13. Вычислите изменение объема куба с ребрами в единицу длины после деформации растяжения (сжатия).

2.14. Как изменяется объем тел при растяжении (сжатии)?

2.15. Что можно сказать о величине коэффициента Пуассона реальных тел?

2.16. Что называется абсолютно упругим телом?

2.17. Что называется пределом упругости данного реального тела?

2.18. Что такое остаточные или пластические деформации?

2.19. Изобразите графически зависимость сил, возникающих в образце от деформаций растяжения. Опишите поведение образца, соответствующее различным участкам графика.

2.20. Напишите выражение, определяющее связь между нормальным напряжением и относительным удлинением.

2.21. Что такое модуль Юнга? От чего он зависит? Что можно сказать о знаке модуля Юнга?

2.22. Какая связь существует между тангенциальным напряжением и относительным сдвигом? Что такое модуль сдвига? От чего он зависит? Какой знак имеет модуль сдвига?

2.23. В чем заключается принцип суперпозиции деформаций?

2.24. Напишите соотношение, связывающее модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона изотропных тел.

2.25. Напишите соотношение между коэффициентом сжимаемости изотропного вещества, коэффициентом Пуассона и модулем Юнга.

2.26. Выведите выражение для энергии упругой деформации растяжения. Чему равна плотность этой энергии?

2.27. Выведите выражение для энергий упругой деформации при сдвиге.

2.28. Начертите график зависимости напряжений от периодически повторяющихся деформаций.

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Типы и методы решения

3.1. Определение упругих напряжений по известным внешним силам.

Решение. Используется уравнение движения.

3.2. Определение деформаций по известным внешним силам.

Решение. Используется закон Гука.

3.3. Определение коэффициентов упругости при заданном законе движения под действием упругих сил.

Решение. Используется уравнение движения и закон Гука.

3.4. Определение модулей упругости и коэффициентов упругости по известным силам и деформациям.

Решение. Используется закон Гука.

3.5. Определение энергии упругой деформации.

Решение. **I способ:** используется выражение для энергии упругой деформации. **II способ:** используется закон сохранения энергии.

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Однородный брусок, масса которого  $M$ , движется ускоренно под действием силы  $F$ , равномерно распределенной по всему сечению бруска.

Найти напряжение, возникающее в результате движения, в произвольном сечении бруска. Длина бруска  $l$ , площадь его поперечного сечения  $S$ .

Решение. Уравнения второго закона Ньютона для всего бруска и для его части длиной  $x$  имеют вид

$$\begin{cases} F = Ma, \\ T = xMa/l, \end{cases}$$

где  $T$  — сила упругой деформации растяжения в сечении с координатой  $x$ :

$$T = \frac{x}{l} F.$$

Напряжение  $\sigma$  в сечении с координатой  $x$  равно

$$\sigma = \frac{xF}{lS}$$

и направлено перпендикулярно сечению  $S$ .

3.1.2. Однородный диск массы  $M$  и радиуса  $R$  вращается вокруг своей оси с угловым ускорением  $\beta$ . Силы, ускоряющие диск, равномерно распределены по ободу диска.

Найти силу  $F$ , действующую на единицу длины окружности, ограничивающей мысленно выделенную часть диска радиуса  $r$ .

Решение. Запишем уравнение вращательного движения части диска радиуса  $r$ :

$$\frac{1}{2} mr^2 \beta = F 2\pi r^2,$$

где  $m$  — масса мысленно выделенной части; поскольку диск однородный, то

$$m = \frac{M}{\pi R^2} \pi r^2.$$

Итак,

$$F = \frac{1}{4} \frac{Mr^2 \beta}{\pi R^2}$$

и направлена по касательной к окружности радиуса  $r$ .

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Однородный упругий стержень, длина которого равна  $L=20$  см, масса  $M=300$  г, площадь поперечного сечения  $S=50$  мм<sup>2</sup> и модуль Юнга  $E=7,2 \cdot 10^4$  Н/мм<sup>2</sup>, равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega=100$  1/с вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов.

Найти распределение натяжений  $T$  в стержне и полное его удлинение  $\Delta L$ . При подсчете натяжений пренебречь деформациями. При подсчете линейной деформации считать поперечное сечение неизменным и удлинение малым.

**Решение.** Запишем уравнение второго закона Ньютона для элемента стержня длиной  $dx$ , находящегося на расстоянии  $x$  от оси вращения:

$$\frac{M}{L} dx \omega^2 x = -dT.$$

Натяжение в сечении с координатой  $x$  найдем в результате интегрирования этого уравнения:

$$\int_x^L \frac{M}{L} \omega^2 x dx = - \int_T^0 dT.$$

Окончательно получаем

$$T = \frac{M \omega^2}{2L} (L^2 - x^2).$$

Обозначим удлинение элемента стержня  $dx$  через  $d\xi$ . Используем известную связь между напряжением и относительным удлинением:

$$\frac{T}{S} = E \frac{d\xi}{dx},$$

где  $S$  — сечение стержня.

В результате интегрирования по всей длине стержня получим полное его удлинение:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{T}{SE} dx = \frac{M \omega^2 L^2}{3SE} \simeq 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$



### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** На нижнем конце кварцевой нити, закрепленной в верхней точке, подвешен шарик массы  $m=3$  г и радиуса  $R=0,25$  см. Продолжение нити проходит через центр шарика. Шарик под действием момента упругих сил кручения нити совершает гармонические колебания с периодом  $T=4$  с вокруг вертикальной оси.

Определить коэффициент упругости  $D$  нити при кручении.

**Решение.** Уравнение вращательного движения шарика вокруг вертикальной оси можно записать в виде:

$$I\ddot{\varphi} = -D\varphi,$$

где  $I = \frac{2}{5}mR^2$  — момент инерции шарика относительно оси, проходящей через центр,  $\varphi$  — угол закручивания нити.

Поскольку шарик совершает гармоническое колебание, то

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \delta),$$

где  $\omega = 2\pi/T$  — частота и, следовательно,

$$\ddot{\varphi} = -\varphi_0\omega^2 \cos(\omega t + \delta).$$

Подставив выражения для  $\varphi$  и  $\ddot{\varphi}$  в уравнение движения, получим

$$I\omega^2 = D.$$

Окончательно имеем

$$D = \frac{2}{5}mR^2\omega^2 = \frac{2}{5}mR^2 \frac{4\pi^2}{T^2} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ эрг/град.}$$

### 4-й тип задач (3.4)

**3.4.1.** Стержень длины  $l=2$  м и поперечного сечения  $S=50$  мм<sup>2</sup> подвешен за один конец к потолку. Под влиянием собственного веса  $P$  стержень растянулся на  $\Delta l=0,0007$  мм.

Определить модуль Юнга  $E$  материала стержня, если плотность материала  $\rho=2,7$  г/см<sup>3</sup>.

**Решение.** Натяжение в сечении, расположенном на расстоянии  $x$  от свободного конца стержня, равно

$$T = \frac{M}{l} xg = \frac{P}{l} x.$$

На основании закона Гука

$$\frac{T}{S} = E \frac{d\xi}{dx},$$

где  $d\xi$  — удлинение элемента стержня длины  $dx$ , расположенного на расстоянии  $x$  от свободного конца стержня.

В результате интегрирования по всей длине стержня получаем

$$\int_0^l \frac{M}{Sl} xg dx = E \Delta l,$$

отсюда

$$E = \frac{Pl}{2S \Delta l} = 7,6 \cdot 10^4 \text{ Н/мм}^2.$$

3.4.2. На двух призмах (рис. 62) лежит брусок, имеющий прямоугольное поперечное сечение с высотой  $h=4$  мм и шириной  $c=12$  мм. На расстоянии  $a=15$  см от призм брусок нагружен двумя одинаковыми гирями весом  $P=20$  Н каждая.

Брусок изогнулся так, что радиус его кривизны стал равен  $R=2,28$  м. Определить модуль Юнга  $E$  материала бруска.

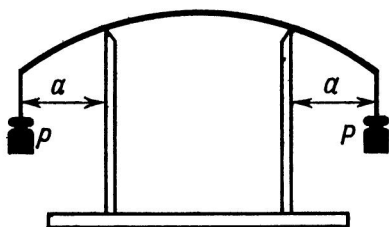


Рис. 62

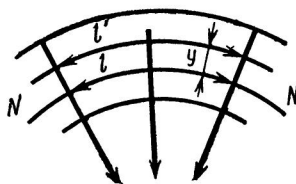


Рис. 63

Решение. Продольное сечение бруска имеет вид, изображенный на рис. 63, где  $NN$  — нейтральный слой, стрелки направлены к центру кривизны. Из простых геометрических соображений имеем

$$\frac{R+y}{R} = \frac{l'}{l}, \text{ или } \frac{y}{R} = \frac{l'-l}{l}.$$

На основании закона Гука

$$\sigma = E \frac{l'-l}{l},$$

где  $\sigma$  — нормальное напряжение. Следовательно,

$$\frac{y}{R} = \frac{\sigma}{E}. \quad (1)$$

Из условия равновесия бруска следует равенство моментов:

$$Pa = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma dSy, \quad (2)$$

где  $dS=c dy$  — элементарная площадь поперечного сечения.

Используя равенства (1) и (2), получаем

$$Pa = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{Ec}{R} y^2 dy.$$

Отсюда находим

$$E = \frac{12PaR}{h^3c} = 10,7 \cdot 10^4 \text{ Н/мм}^2.$$

**3.4.3.** Объем упругого круглого стержня длины  $l=1$  м под влиянием нагрузки  $P=200$  Н изменился на  $\Delta V=0,38$  мм<sup>3</sup>. Определить коэффициент Пуассона  $m$  материала стержня. Модуль Юнга известен и равен  $E=2,1 \cdot 10^5$  Н/мм<sup>2</sup>.

Решение. Изменение объема стержня — малая величина, поэтому можно написать

$$\Delta V = S \Delta l - l \Delta S,$$

где  $S$  и  $\Delta S$  — площадь и изменение площади поперечного сечения стержня.

После простых преобразований получим

$$\Delta V = V \frac{\Delta l}{l} (1 - 2m).$$

Принимая во внимание закон Гука, можно написать

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{S} \frac{1}{E},$$

следовательно,

$$\Delta V = \frac{Pl}{E} (1 - 2m),$$

отсюда

$$m = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E \Delta V}{Pl} \right) \simeq 0,3.$$

### 5-й тип задач (3.5)

**3.5.1.** Берем пружину за среднюю точку  $O$  (рис. 64) и вытягиваем на расстояние  $x$ , а затем отпускаем. Пружина быстро становится растянутой равномерно, причем переход к такому состоянию сопровождается некоторой потерей энергии.

Оценить величину этой потери, считая жесткость пружины  $k$  очень большой. (После того как пружина растянется равномерно, возникнут колебания груза  $m$ , сопровождающиеся дополнительными потерями.)

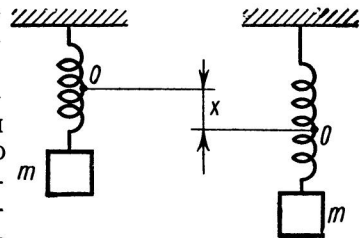


Рис. 64

Решение. Энергия пружины, оттянутой за среднюю точку  $O$ , равна

$$W_1 = \frac{(2k)x^2}{2}.$$

Когда пружину отпустили, ее энергия стала равной

$$W_2 = \frac{kx^2}{2},$$

так как за время перераспределения упругих деформаций в пружине масса  $m$  не успевает сдвинуться. Следовательно, потери энергии в пружине

$$W_1 - W_2 = \frac{kx^2}{2}.$$

Это, конечно, довольно грубая оценка.

3.5.2. Груз весом  $P=4,5$  т, прикрепленный к концу стального проволочного каната, движется вниз с постоянной скоростью  $v=1$  м/с.

Определить напряжения  $\sigma$ , которые возникнут в канате при внезапной остановке его верхнего конца. Длина каната в момент остановки равна  $l=18$  м, площадь его поперечного сечения  $S=16$  см<sup>2</sup>. Модуль Юнга стали равен  $E=10,5 \times 10^6$  Н/мм<sup>2</sup>. Массой каната пренебречь.

Решение. Используя закон сохранения механической энергии, можно получить следующее уравнение для определения наибольшего удлинения  $\Delta l$  каната:

$$\frac{ES \Delta l^2}{2l} - \frac{ES \Delta l_{\text{ст}}^2}{2l} = \frac{Pv^2}{2g} + P(\Delta l - \Delta l_{\text{ст}}), \quad (1)$$

где  $\Delta l_{\text{ст}}$  — статическое удлинение каната.

С учетом того, что

$$P = ES \frac{\Delta l_{\text{ст}}}{l},$$

из (1) получаем

$$\frac{ES}{2l} (\Delta l - \Delta l_{\text{ст}})^2 = \frac{Pv^2}{2g},$$

откуда

$$\Delta l = \Delta l_{\text{ст}} + v \sqrt{\frac{Pl}{ESg}}.$$

Следовательно, при внезапной остановке растягивающее напряжение в канате возрастает в отношении

$$\frac{\Delta l}{\Delta l_{\text{ст}}} = 1 + \frac{v}{\Delta l_{\text{ст}}} \sqrt{\frac{Pl}{ESg}} = 1 + \frac{v}{\sqrt{\Delta l_{\text{ст}} g}}.$$

Подставив цифровые данные задачи, получим:

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{Pl}{ES} = 0,482 \text{ см,}$$

$$\frac{\Delta l}{\Delta l_{\text{ст}}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{0,482 \cdot 981}} = 5,6,$$

$$\sigma = 5,6 \frac{P}{S} = 1575 \text{ кг/см}^2.$$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Все силы, действующие на поверхность тела, направлены внутрь. Что при этом происходит с объемом тела (увеличивается он или уменьшается)?

4.2. Могут ли два материала быть одинаково упругими, но в разной мере хрупкими?

4.3. Какой порядок величины имеют модуль Юнга и модуль сдвига различных материалов?

4.4. Рассмотрим плоскую деформацию. Пусть плоскость чертежа (рис. 65) является одной из плоскостей, где действуют напряжения. Выделим три перпендикулярные к ней площадки, как показано на рисунке. Для площадок  $BO$  и  $OA$  заданы  $\sigma_x$ ,

$\sigma_y$  и  $\tau_x, \tau_y$  — нормальные и тангенциальные напряжения.

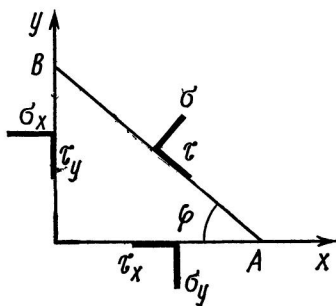


Рис. 65

Определить  $\sigma$  и  $\tau$  площадки  $BA$ .

Ответ:

$$\sigma = \sigma_y \cos^2 \varphi + \sigma_x \sin^2 \varphi; \quad \tau = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi.$$

4.5. Зная петлю упругого гистерезиса, как можно оценить количество выделяющегося в процессе деформации тепла?

4.6. Опишите поведение стержня при увеличении внешней продольной нагрузки.

#### 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Проволока имеет длину  $L$  и коэффициент упругости  $k$ . От нее отрезали кусок длиной  $l$ . Определить коэффициент упругости  $k_l$  этого куска.

Ответ:

$$k_l = \frac{L}{l} k.$$

5.2. Опора высотой  $h$ , сделанная из материала с удельным весом  $\rho$ , нагружена сверху весом  $P$ . Определить зависимость площади поперечного сечения  $S$  опоры от высоты  $x$ , если известно, что напряжение в любом сечении равно  $R = \text{const}$ .

Ответ:

$$S = \frac{P}{R} e^{\frac{\rho(h-x)}{R}}.$$

5.3. На двух призмах, как показано на рис. 62, лежит металлический прут, имеющий круглое поперечное сечение диаметром  $d = 5$  мм. На расстоянии  $a = 2,5$  см от призм прут нагружен двумя одинаковыми гирями весом  $P = 200$  Н каждая.

Определить радиус кривизны прутка  $R$ , если он сделан из латуни, коэффициент растяжения которой равен  $1/E = \alpha = 9,4 \cdot 10^{-6}$  мм<sup>2</sup>/Н.

Ответ:

$$R = \frac{\pi d^4}{64 \alpha P a} \simeq 65 \text{ см.}$$

5.4. Стальной стержень длины  $l = 20$  м, подвешенный к потолку, подвергается действию растягивающей силы  $P = 2$  т, приложенной к нижнему концу стержня, и своего собственного веса  $\rho = 96$  кг.

Определить полное удлинение  $\Delta l$  стержня. Площадь поперечного сечения стержня  $S = 6$  см<sup>2</sup>. Модуль Юнга стали  $E = 20,10^4$  Н/мм<sup>2</sup>.

Ответ:

$$\Delta l = \frac{l}{ES} \left( P + \frac{1}{2} \rho \right) \simeq 0,34 \text{ см.}$$

5.5. Круглый стальной вал с маховиком на одном конце вращается со скоростью 120 об/мин. Вал внезапно заторможен на другом конце.

Найти наибольшее напряжение  $\tau$  в валу от внезапной остановки. Длина вала  $l = 1,5$  м, диаметр  $d = 50$  мм, вес маховика  $P = 450$  Н, его радиус инерции  $R = 250$  мм. Модуль сдвига стали  $G = 8,10^6$  Н/см<sup>2</sup>.

Ответ:

$$\tau = \sqrt{\frac{16G}{\pi d^2 l} \frac{PR^2 \omega^2}{2g}} = 15670 \text{ Н/см}^2.$$

## РАЗДЕЛ XI

### Свободные незатухающие колебания материальной точки

#### 1. Теоретический материал

Закон гармонического колебательного движения. Движение точечного тела (материальной точки) по окружности как круговая модель гармонического колебательного движения точечного тела по прямой. Смысл параметров гармонического колебательного движения (амплитуда, круговая частота, фаза, начальная фаза) с точки зрения круговой модели. Скорость и ускорение тела при гармонических колебаниях: векторные диаграммы смещения, скорости, ускорения.

Сложение колебаний как частный случай проблемы относительного движения. Сложение и разложение колебаний.

Сложение и разложение двух гармонических колебаний с равными частотами (частный случай плоского переносного колебания). Фигуры Лиссажу. Сложение и разложение гармонических колебаний с неравными частотами. Биения. Ряд Фурье.

Квазигукова сила. Достаточность наличия квазигуковой силы для возникновения гармонических колебаний. Связь частоты гармонических колебаний с динамическими параметрами (массой точечного тела, коэффициентом упругости). Зависимость амплитуды и фазы гармонических колебаний от значения смещения и от значения скорости точечного тела в произвольные моменты времени. Гармонические колебания при наличии и квазигуковой и постоянной силы. Количество движения, кинетическая энергия, потенциальная энергия и полная механическая энергия при гармонических колебаниях.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Что такое колебательное движение точечного тела по прямой?

2.2. Что такое период колебаний?

2.3. Как должно двигаться точечное тело по окружности для того, чтобы быть круговой моделью гармонического колебания точечного тела по прямой?

2.4. В чем смысл фазы гармонических колебаний с точки зрения круговой модели?

2.5. В чем различие задачи о сложении колебаний и задачи о разложении колебаний с точки зрения понятий относительного движения?

2.6. Каким должно быть переносное движение для того, чтобы при сложении колебаний получился покой?

2.7. При каком условии фигуры Лиссажу замкнуты?

2.8. Какова связь коэффициента упругости квазигуковой силы с модулем упругости?

2.9. Как доказать, что наличие квазигуковой силы достаточно для существования гармонических колебаний?

2.10. Как осуществить гармонические колебания точечного тела на пружине с нулевой начальной фазой? С начальной фазой  $180^\circ$ ?

2.11. В чем отличие гармонических колебаний груза в покоящемся и падающем лифтах (при одинаковых начальных условиях)?

2.12. На плоскости значений начальных смещений и начальных скоростей построить множество точек, соответствующих одинаковой амплитуде гармонических колебаний.

2.13. На плоскости значений начальных смещений и начальных скоростей построить множество точек, соответствующих одной и той же начальной фазе гармонических колебаний.

2.14. На плоскости значений начальных смещений и начальных скоростей построить множество точек, соответствующих одной и той же паре значений амплитуды и начальной фазы.

2.15. Как найти амплитуду и начальную фазу гармонических колебаний, если смещение и скорость заданы в два различных произвольных момента времени?

2.16. Как будет меняться частота колебаний при вращении груза на пружине вокруг оси, перпендикулярной пружине, от угловой скорости вращения?

2.17. Чему равны средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии гармонически колеблющегося точечного тела?

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Типы и методы решения

3.1. Вычисление собственных частот свободных незатухающих колебаний точечного тела по прямой. Обратные варианты.

Решение. Использование соотношения между динамическими параметрами (коэффициентом упругости, массой) и кинематическими параметрами (круговой частотой, частотой, периодом).

3.2. Определение амплитуды и начальной фазы колебаний точечного тела по прямой.

Решение. Использование соотношений между начальной фазой и амплитудой, с одной стороны, начальными ус-



ловиями (значениями смещения и скорости) и динамическими параметрами (коэффициентом упругости, массой), с другой стороны.

**3.3.** Сведение различных физических ситуаций к задаче о гармонических колебаниях точечных тел.

**Решение.** Нахождение на основе анализа конкретных физических ситуаций коэффициента квазигуковой силы и сведение к задаче типа (3.2).

### б) Примеры

#### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** Подвешенный к пружине груз увеличивает ее длину на 3 см.

**Найти частоту и период колебаний груза.**

**Решение.** Поскольку коэффициент упругости определяется как отношение величины деформирующей пружины силы к абсолютному удлинению (или сжатию), то  $k = P(\Delta x)^{-1}$ , где  $k$  — коэффициент упругости,  $P$  — растягивающая сила, а  $\Delta x$  — абсолютное смещение. Тогда частота колебаний равна

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/\Delta x} = 2,88 \text{ Гц,}$$

а период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/\Delta x}} = 0,347 \text{ с.}$$

**3.1.2.** Считая, что поршень двигателя внутреннего сгорания колеблется гармонически, определить силу, действующую на коленчатый вал со стороны поршня, когда он находится в мертвой точке. Масса поршня 1,2 кг, частота оборотов коленчатого вала 20 мин<sup>-1</sup>, ход поршня 12 см. Изменением давления газов в цилиндре пренебречь.

**Решение.** Когда поршень находится в мертвой точке, он наиболее удален от оси коленчатого вала и смещен от нейтрального положения на половину величины хода. Если считать, что на него действует квазигукова сила  $F = k\Delta x/2$ , а коэффициент упругости  $k = m\omega_0^2$ , окончательно получаем

$$F = m\omega_0^2 \Delta x/2 = 2\pi^2\nu_0^2 m \Delta x = 31,58 \text{ Н} = 3,22 \text{ кг.}$$

#### 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Груз массой 2 кг подвешен к пружине с коэффициентом упругости 5 Н/м. Какова будет амплитуда и начальная фаза колебаний, если в начальный момент времени

отклонение груза составляло 0,3 м, а начальная скорость 1 м/с? Начало отсчета совмещено с положением неподвижно-го груза на растянутой пружине.

**Решение.** Если закон движения гармонических колеба-ний записать в форме  $x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ , то начальное сме-щение и скорость будут выражаться через амплитуду и на-чальную фазу следующим образом:

$$x_0 = A_0 \sin \varphi_0, \quad v_0 = \omega_0 A_0 \cos \varphi_0.$$

Решая эту систему тригонометрических уравнений относи-тельно  $A_0$  и  $\varphi_0$ , получим:

$$A_0 = (x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2)^{1/2}, \quad \varphi_0 = \arctg \left( \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \right).$$

Подставляя заданные значения, получим:

$$A_0 = 0,7 \text{ м}; \quad \varphi_0 = \arctg 0,4743 = 25^\circ 22,5'.$$

**3.2.2.** Коэффициент упругости пружины равен 100 г/см. К ней подвешен груз массой 200 г. Каковы должны быть на-чальные отклонения и скорость груза для того, чтобы ам-плитуда колебаний груза была равна 0,1 м, а начальная фа-за  $45^\circ$ ? Начало отсчета совмещено с положением груза, по-коящегося на пружине.

**Решение.** Используем непосредственно выражения

$$x_0 = A_0 \sin \varphi_0, \quad v_0 = \omega_0 A_0 \cos \varphi_0.$$

Подставляя данные задачи, имеем  $x_0 = 0,1 \cdot 0,5 \sqrt{2} = 0,07 \text{ м}$ ,

$$v_0 = \sqrt{\frac{100^2}{9,82 \cdot 0,2}} \cdot 0,1 \cdot 0,5 \sqrt{2} = 5,05 \text{ м/с}.$$

3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Ареометр, цилиндрическая часть которого имеет диаметр 5 мм, плавает в керосине. Ареометру сообщают тол-чок в вертикальном направлении.

Найти период колебаний ареометра, если его масса 50 г. Керосин можно считать невязким.

**Решение.** При небольшом погружении ареометра отно-сительно положения его равновесия на него будет действо-вать выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытеснен-ной добавочной погружившейся частью ареометра. Посколь-ку трубка ареометра цилиндрическая, то добавочно погру-жившаяся часть, а следовательно, и выталкивающая сила

пропорциональны глубине дополнительного погружения  $x$ . Выталкивающая сила  $F$  будет равна

$$F = \frac{\pi D^2}{4} \rho g x,$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $D$  — диаметр трубки,  $\rho$  — плотность жидкости.

Следовательно, выталкивающая сила является квазигуковой. Если направить ось координат вертикально вверх, то второй закон Ньютона для центра масс ареометра запишется в виде

$$m\ddot{x} + \frac{\pi D^2}{4} \rho g x = 0.$$

Тогда круговая частота колебаний  $\omega_0$  будет равна

$$\omega_0 = (\pi D^2 \rho g / 4m)^{0,5} = 0,5D (\pi \rho g / m)^{0,5}.$$

Искомый период  $T_0 = 2\pi / \omega_0$ , т. е.  $T_0 = 4 (m\pi / \rho g)^{0,5} / D$ .

Подставляя числовые данные, получим

$$T_0 = 3,58 \text{ с.}$$

**3.3.2.** По диаметру планеты просверлен туннель. Найти период колебаний тела, упавшего без начальной скорости в этот туннель, и амплитуду его скорости. Предполагается, что в туннеле атмосферы нет.

**Решение.** Ускорение свободного падения тела по мере приближения к центру планеты будет уменьшаться пропорционально его расстоянию до центра планеты. Коэффициентом этой пропорциональной зависимости является отношение ускорения свободного падения на поверхности планеты к ее радиусу  $R_0$ .

Тогда второй закон Ньютона для движения тела по туннелю запишется так:

$$m\ddot{x} + mg_0 \frac{x}{R_0} = 0,$$

где  $x$  — расстояние до центра планеты.

Тогда

$$\omega_0 = (g_0 / R_0)^{0,5}, \quad T = 2\pi (R_0 / g_0)^{0,5}$$

и закон движения тела в туннеле будет иметь вид

$$x = R_0 \sin [t (g_0 / R_0)^{0,5} + \pi / 2].$$

Амплитуда скорости

$$v_0 = \omega_0 R_0 = (R_0 / G_0)^{0,5}.$$

Ниже приводятся данные и ответы для планет Солнечной системы (в единицах СИ).

Планета	$10^{-6} R_0$	$10^{-3} \rho$	$T_0$	$v_0$
Меркурий . . . . .	2,42	5,62	1h23'37"	3 031
Венера . . . . .	6,06	5,23	1h26'41"	7 321
Земля . . . . .	6,37	5,52	1h24'22"	7 908
Марс . . . . .	3,38	3,95	1h39'44"	3 549
Юпитер . . . . .	71,8	1,30	2h53'50"	43 253
Сатурн . . . . .	60,3	0,68	4h00'21"	26 272
Уран . . . . .	23,5	1,58	2h37'42"	15 605
Нептун . . . . .	24,6	1,65	2h34'19"	16 693
Плутон . . . . .	2,5	3,0	1h54'27"	2 287

Данные о планетах взяты из книги: Weigert A., Zimmermann H. ABC Astronomie, 3 Aufl., VEB F. A. Brockhaus Verlag, Leipzig, 1971.

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к параллельному их соединению?

4.2. Как будет зависеть период колебаний груза на пружине от географической широты места? Каким он будет в условиях невесомости?

4.3. Чему равен период колебаний потенциальной энергии груза, подвешенного на пружине, если известна частота колебаний груза?

4.4. Фазовая траектория — это график зависимости скорости точечного тела (или его количества движения) от положения тела.

Как будут выглядеть фазовые траектории гармонических колебаний точечного тела? Рассмотреть случаи: круговая частота больше единицы и круговая частота меньше единицы.

4.5. Точечное тело совершает гармонические колебания по прямой по заданному закону. Но сама прямая перемещается относительно системы отсчета параллельно самой себе так, что ее смещение относительно некоторой неподвижной прямой изменяется гармонически.

Как будет двигаться точечное тело относительно неподвижной системы координат?

4.6. Точечное тело совершает гармонические колебания относительно неподвижной системы координат и относительно прямой по двум различным заданным законам. Как найти закон движения прямой относительно неподвижной системы координат?

4.7. В чем состоит кинематический смысл разложения произвольного колебательного движения в ряд Фурье?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Груз колеблется на пружинке. При увеличении массы груза наполовину период колебаний увеличился на 1 с.

Чему равен период колебаний до увеличения массы груза?

Ответ: 4,45 с.

5.2. Доска совершает гармонические колебания в горизонтальном направлении с периодом 5 с. Лежащее на ней тело начинает скользить, когда амплитуда колебания достигает 0,62 м.

Каков коэффициент трения покоя между грузом и доской?

Ответ: 0,1.

5.3. Определить период колебаний ртути, находящейся в U-образной трубке. Масса ртути 13,28 г. Внутренний диаметр трубки 0,5 см.

Ответ: 0,5 с.

5.4. К резиновому шнуру длиной 30 см, имеющему поперечное сечение  $1 \text{ см}^2$ , подвешена гири весом 0,8 кг.

Найти период вертикальных колебаний гири, если модуль Юнга равен  $0,3 \text{ кг/мм}^2$ .

Ответ: 1,78 с.

5.5. Ареометр весом 0,2 кг плавает в жидкости. Период его малых вертикальных колебаний 3,4 с.

Найти плотность жидкости, если диаметр его вертикальной цилиндрической трубки 1 см.

Ответ:  $886 \text{ кг/м}^3$ .

5.6. Амплитуда гармонических колебаний точечного тела 2 см, полная энергия колебаний  $3 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$ .

При каком смещении от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила  $2,25 \cdot 10^{-5} \text{ Н}$ ?

Ответ: 3 см.

5.7. Медный шарик, подвешенный на пружинке, совершает вертикальные колебания с периодом 1,0000 с.

Чему станет равным период колебаний, если к той же пружине подвесить вместо медного шарика алюминиевый шарик такого же радиуса?

Ответ: 0,5488 с.

## РАЗДЕЛ XII

### Свободные затухающие колебания материальной точки

#### 1. Теоретический материал

Квазистоксова сила как сила, пропорциональная скорости точечного тела. Коэффициент трения как коэффициент пропорциональности квазистоксовой силы (активное механическое сопротивление). Закон движения точечного тела по прямой при наличии квазигуковой и квазистоксовой сил. Условный период затухающего колебания. Коэффициент затухания. Время релаксации. Логарифмический коэффициент затухания (декремент) колебания. Начальная амплитуда и начальная фаза затухающих колебаний. Векторная диаграмма для случая затухающих колебаний точечного тела по прямой. Векторы скорости и ускорения при затухающем колебании. Кинетическая, потенциальная и полная механическая энергия точечного тела при затухающем колебании.

Сложение и разложение затухающих колебаний.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. В чем различие между стоксовой силой, действующей на шарик при его движении в вязкой жидкости, и квазистоксовой силой?

2.2. Как вывести зависимость от времени амплитуды свободно затухающего колебания точечного тела по прямой?

2.3. Почему период затухающих колебаний является условным?

2.4. Какая связь между коэффициентом затухания, временем релаксации (постоянной времени) и логарифмическим коэффициентом затухания?

2.5. Каково условие превращения затухающих колебаний в аperiodические?

2.6. Какую фигуру описывает конец вектора смещения точечного тела при его вращении вокруг центра? Что является круговой моделью затухающих колебаний точечного тела по прямой?

2.7. На какой угол будет опережать вектор скорости при затухающих колебаниях вектор смещения?

2.8. Как будет выглядеть на плоскости значений коэффициента затуханий и коэффициента упругости граница раздела областей затухающих и аperiodических колебаний?

2.9. На какой угол будет опережать вектор ускорения вектор смещения при затухающих колебаниях?

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Типы и методы решения

3.1. Задачи на кинематику свободных затухающих колебаний. Определение параметров затухания из данных о законе движения. Построение закона движения по заданным параметрам затухания.

Решение. Использование соотношений между кинематическими параметрами (коэффициент затухания, время релаксации и логарифмический коэффициент затухания) и видом закона движения.

3.2. Задачи на динамику свободных затухающих колебаний. Нахождение параметров затухания из динамических данных. Вычисление сил, действующих на тело, с использованием значений параметров затухания.

Решение. Использование соотношений между динамическими параметрами (коэффициент упругости, масса, коэффициент трения) и кинематическими параметрами (коэффициент затухания, время релаксации и логарифмический коэффициент затухания).

#### б) Примеры

##### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Амплитуда затухающих колебаний в начальный момент времени равна 18 см. Через 15 с после начала движения она равна 6 см. В какой момент времени амплитуда будет равна 1,8 см?

Решение. При свободных затухающих колебаниях амплитуда уменьшается со временем экспоненциально по закону

$$a_t = a_0 e^{-\delta t}.$$

$$\text{Отсюда } \delta t_2 = \ln \frac{a_0}{a_2}, \text{ или } t_2 = \frac{1}{\delta} \ln \frac{a_0}{a_2}.$$

Коэффициент затухания  $\delta$  можно найти из условия

$$a_1 = a_0 e^{-\delta t_1}.$$

$$\text{Следовательно, } \delta = \ln \frac{a_0}{a_1} / t_1.$$

Отсюда

$$t_2 = t_1 \ln \frac{a_0}{a_2} / \ln \frac{a_0}{a_1}.$$

Подставляя данные задачи, получим

$$t_2 = 15,0 \frac{\ln \frac{18,0}{1,8}}{\ln \frac{18,0}{6,0}} = 15,0 \frac{\lg 10}{\lg 3} = \frac{15}{0,478} = 31,4 \text{ с.}$$

**3.1.2.** Каков логарифмический коэффициент затухания груза, подвешенного на упругом шнуре, если его начальная амплитуда 6 см, а через 5 мин она равна 3 мм? Масса груза 500 г, а коэффициент упругости 50 Н/м.

Решение. Логарифмический коэффициент затухания связан с коэффициентом затухания и условным периодом затухающих колебаний соотношением  $\theta = \delta T'$ . Поскольку условный период сам зависит от коэффициента затухания, то логарифмический коэффициент затухания будет выражаться через данные задачи следующим образом:

$$\theta = \frac{2\pi}{t} \ln \frac{a_0}{a_1} / \left[ \frac{k}{m} - \frac{1}{t^2} \ln^2 \left( \frac{a_0}{a_1} \right) \right]^{1/2}.$$

Подставляя числовые данные, получим  $\theta = 6,27 \cdot 10^{-3}$ .

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Шарик, радиус которого равен 1 см, а масса 90 г, подвешен на двух последовательно соединенных пружинах с коэффициентами упругости 25 Н/м и 75 Н/м. Шарик опущен в касторовое масло, имеющее температуру 20°C.

Определить частоту колебаний шарика и декремент колебаний шарика. Массой пружин и их трением о жидкость пренебречь.

Решение. Коэффициент упругости двух последовательно соединенных пружин с различными коэффициентами упругости будет равен обратной величине суммы обратных значений соответствующих коэффициентов упругости. Тогда второй закон Ньютона для движения шарика в вязкой жидкости будет иметь вид

$$m\ddot{x} + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x + 6\pi r \eta \dot{x} = 0, \quad (1)$$

где  $m$  — масса шарика,  $r$  — его радиус,  $x$  — смещение,  $k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты упругости пружины,  $\eta$  — коэффициент внутреннего трения жидкости. Из (1) следует, что частота колебаний шарика будет равна

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)} - \delta^2 \right)^{1/2},$$

а коэффициент затухания  $\delta = 3\pi r \eta / m$ .



Подставляя численные значения, получим  $\nu = 0,93$  Гц,  $\sigma = 0,186$  с<sup>-1</sup>.

3.2.2. Груз массы 2 кг растягивает пружину на 2 см. После начала свободных колебаний включается демпфер, и колебания становятся затухающими с логарифмическим коэффициентом колебаний, равным 1,57.

Какая сила действует на груз со стороны демпфера при движении груза со скоростью 5 см/с?

Решение. Соотношение, связывающее логарифмический коэффициент затухания с коэффициентом затухания (см. задачу 3.1.2), можно решить относительно коэффициента трения (активного сопротивления)  $h$ . Сделав это, получим

$$h = \theta \sqrt{\frac{mk}{\pi^2 + \theta^2}}.$$

Коэффициент упругости по условию задачи равен  $mg/\Delta x$ . Искомая сила

$$F = rv = v\theta \sqrt{\frac{m^2g}{\Delta x(\pi^2 + \theta^2)}} = vm \sqrt{\frac{g/\Delta x}{(\pi/\theta)^2 + 1}}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$F = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \sqrt{\frac{9,81}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 5}} = \sqrt{0,981} \approx 1 \text{ Н.}$$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Как найти время релаксации тела, если заданы логарифмический коэффициент затухания, собственная частота колебаний и активное сопротивление?

4.2. В чем проявляется влияние сухого трения при затухающих колебаниях точечного тела по прямой?

4.3. Что нужно знать кроме коэффициента упругости и коэффициента трения тела для того, чтобы определить амплитуду и начальную фазу колебаний?

4.4. В чем кинематический смысл сложения двух затухающих колебаний?

#### 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на 98 мм. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания.

Чему должен быть равен коэффициент затухания, чтобы: а) через 10 с их амплитуда составила 1% от начальной величины; б) груз возвращался в положение равновесия апе-

риодически; в) логарифмический коэффициент затухания был равен 6?

Ответ: а)  $0,46 \text{ с}^{-1}$ ; б) более  $10 \text{ с}^{-1}$ ; в)  $0,89 \text{ с}^{-1}$ .

5.2. Амплитуда колебаний груза, находящегося в жидкости и подвешенного на пружинке, за 1 мин уменьшилась вдвое.

Во сколько раз она уменьшится еще за 20 с?

Ответ: в 1,25 раза.

5.3. Через какое время энергия колебаний камертона, совершающего затухающие колебания частотой 600 Гц, уменьшится в миллион раз, если логарифмический коэффициент затуханий равен  $8,10^{-4}$ ?

Ответ: через 13,8 с.

5.4. Груз, подвешенный на пружине и находящийся в жидкости, совершает колебания вдоль линейки с делениями. Три последних крайних положения груза пришлись против делений: 20,0; 5,6; 12,8.

Считая коэффициент затухания постоянным, определить деление, соответствующее положению равновесия груза.

Ответ: 10,4.

5.5. Какова общая сумма путей, пройденных взад и вперед точечным телом по прямой до полного затухания его свободных колебаний, если его начальное отклонение равно 1 мм, а логарифмический коэффициент затухания равен  $2,10^{-3}$ ?

Ответ: 499,5 мм.

## РАЗДЕЛ XIII

### Вынужденные колебания материальной точки

#### 1. Теоретический материал

Вынуждающая сила. Период вынуждающей силы. Гармоническая вынуждающая сила.

Вынужденное колебание. Вынужденное колебание при действии только одной гармонической вынуждающей силы. Вынужденное колебание при действии гармонической вынуждающей силы и квазигуковой силы. Вынужденные колебания при действии гармонической вынуждающей силы и квазистоксовой силы.

Вынужденное колебание при действии гармонической вынуждающей силы, квазигуковой силы и квазистоксовой силы. Сдвиг фазы вынужденного колебания по отношению к фазе гармонического вынужденного колебания и ее зависимость от гармонических параметров. Полное механическое сопротивление (механический импеданс). Инерционное сопротивление и упругое сопротивление как составляющие реактивного сопротивления. Зависимость амплитуд смещения, скорости и ускорения вынужденного колебания от динамических параметров. Шесть резонансных кривых (зависимости амплитуд смещения, скорости, ускорения, сдвига фаз смещения, скорости и ускорения относительно фазы гармонической вынуждающей силы от частоты гармонической вынуждающей силы).

Добротность.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Как используется при рассмотрении вынужденных колебаний принцип суперпозиции движений (независимости движений)?

2.2. По какому переносному колебанию удобно раскладывать движение точечного тела в случае: а) действия одной гармонической вынуждающей силы; б) действия гармонической вынуждающей силы и квазигуковой силы?

2.3. С точки зрения какой системы отсчета вынужденное колебание при наличии гармонической вынуждающей силы, квазигуковой силы и квазистоксовой силы будет свободным затухающим колебанием?

2.4. Почему вынужденное гармоническое колебание имеет предельный (асимптотический) характер?

2.5. Какая связь между резонансной частотой амплитуды смещения колебаний и резонансной частотой амплитуды скорости колебаний?

2.6. Будет ли иметь место резонанс смещений колебаний при действии суммы гармонических вынуждающих сил с различными частотами?

2.7. При какой частоте гармоническая вынуждающая сила будет совершать максимальную работу?

2.8. Чем отличаются друг от друга фазовые резонансные кривые для амплитуд смещения, скорости и ускорения?

2.9. Что такое добротность и как она связана с параметрами, характеризующими свободное затухающее колебание?

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Типы и методы решения

3.1. Задачи на вычисление параметров вынужденных колебаний (резонансную частоту, амплитуду вынужденных колебаний) при различных частотах вынуждающей силы.

Решение. Использование соотношения между амплитудой смещения, скорости и ускорения и динамическими параметрами либо непосредственно, либо через параметры, характеризующие свободные затухающие колебания.

3.2. Задачи на вычисление динамических и кинематических параметров по заданным параметрам резонанса для амплитуд смещения, скорости и ускорения.

Решение. Использование тех же соотношений, что и при решении задач типа 3.1, по отношению к которым задачи типа 3.2 представляют как бы обратные задачи.

#### б) Примеры

##### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Амплитуды скорости вынужденных колебаний при частотах вынуждающей силы, равных 200 Гц и 300 Гц, равны между собой.

Принимая, что амплитуда вынуждающей силы в обоих случаях одна и та же, найти частоту, соответствующую резонансу скорости.

Решение. Амплитуда скорости точечного тела при установившихся вынужденных колебаниях зависит от коэффициента трения  $r$ , массы  $m$  и коэффициента упругости  $k$  следующим образом:

$$A_v = F_0 / \left[ r^2 + \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Если  $A_v(v_1) = A_v(v_2)$ , то  $(m\omega_1 - k/\omega_1)^2 = (m\omega_2 - k/\omega_2)^2$ . Отсюда следует, что либо  $m\omega_1 - k/\omega_1 = m\omega_2 - k/\omega_2$ , либо  $m\omega_1 - k/\omega_1 = k/\omega_2 - m\omega_2$ .

Первую возможность нужно исключить, так как она приводит к мнимому значению собственной частоты. Вторая возможность дает  $v_0 = \sqrt{v_1 v_2}$ . Поскольку резонансная частота для амплитуды скорости совпадает с собственной частотой колебаний тела, то искомая резонансная частота

$$v_{\text{рез}} = 100 \sqrt{6} = 245 \text{ Гц.}$$

**3.1.2.** Амплитуды смещений вынужденных колебаний при частотах вынуждающей силы, равных 200 Гц и 300 Гц, равны между собой.

Найти частоту, соответствующую резонансу смещений.

Решение. Амплитуда смещения точечного тела при установившихся вынужденных колебаниях связана с амплитудой скорости (см. 3.1.1) следующим образом:  $A_x = A_v/\omega$ .

Тогда равенство амплитуд смещения при частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  можно записать в виде

$$\omega_1 = \sqrt{r^2 + (m\omega_1 - k/\omega_1)^2} = \omega_2 \sqrt{r^2 + (m\omega_2 - k/\omega_2)^2},$$

или

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{4\delta^2 + (\omega_2 - \omega_0^2/\omega_2)^2}{4\delta^2 + (\omega_1 - \omega_0^2/\omega_1)^2},$$

где  $\delta$  — коэффициент затухания.

Резонансная частота для амплитуды смещения связана с собственной частотой колебаний  $\omega_0$  так:

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2.$$

Поэтому коэффициент затухания можно выразить через резонансную частоту для амплитуды смещения и через собственную частоту:

$$\delta^2 = (\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2)/2.$$

Из условия равенства амплитуд смещений при различных частотах после алгебраических преобразований получаем

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{(\omega_2^2 + \omega_1^2)/2},$$

или

$$v_{\text{рез}} = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)/2}.$$

Подставляя числовые данные, получим искомое значение резонансной частоты:

$$v_{\text{рез}} = 100 \sqrt{6,5} = 255 \text{ Гц.}$$

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Амплитуда смещения точечного тела при вынужденных колебаниях под действием гармонической вынуждающей силы частотой 0,1 Гц равна амплитуде смещения при действии вынуждающей силы с той же амплитудой, но с частотой 0,2 Гц.

Найти постоянную времени, если масса колеблющегося тела равна 1 г, а коэффициент упругости равен 0,5 Н/м.

**Решение.** Равенство амплитуд смещения при различных частотах гармонической возбуждающей силы (см. 3.1.2) означает, что

$$\omega_1 \sqrt{r^2 + (m\omega_1 - k/\omega_1)^2} = \omega_2 \sqrt{r^2 + (m\omega_2 - k/\omega_2)^2}.$$

После алгебраических преобразований получаем

$$r = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2k/m},$$

а постоянная времени (время релаксации) равна  $\tau = 2m/r$ .

Подставляя численные данные, получим, что постоянная времени равна

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,5}} = 1,16 \text{ с.}$$

**3.2.2.** Тело массой 100 г может совершать свободные незатухающие колебания с периодом 0,628 с. Для него снята резонансная кривая амплитуды скорости при некоторой квазистоксовой силе трения. Если на ее графике провести прямую, параллельную оси круговой частоты при значениях амплитуды, равной половине резонансной, то расстояние между точками ее пересечения с кривой составило (на оси частот) 10,1.

Найти коэффициент затухания при этой квазистоксовой силе.

**Решение.** Из выражения для частотной зависимости амплитуды скорости (см. 3.1.1) следует, что резонансное значение амплитуды скорости равно  $A_{v_{\text{рез}}} = F_0/r$ .

Из условия задачи

$$\frac{F_0}{2r} = \frac{F_0}{r^2 + (m\omega - k/\omega)^2}.$$

Отсюда получим

$$m\omega - k/\omega = 3r^2.$$

Это можно рассматривать как соотношение, определяющее частоты, соответствующие пересечению прямой с резонансной

кривой:  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Решая это квадратное уравнение, получим, что расстояние по оси частот равно

$$\Delta\omega = \frac{2}{m} \sqrt{9r^4 + km}.$$

Это соотношение можно разрешить относительно  $r$  и соответственно найти коэффициент затухания:

$$r = \sqrt[4]{\frac{m^2(\Delta\omega^2 - 4\omega_0^2)}{36}}.$$

Если  $m=0,1$  кг,  $\Delta\omega=2\pi \cdot 10,1=63,2$ , а собственная круговая частота  $\omega_0=6,28/0,628=10$ , то коэффициент трения  $r=1$ , а коэффициент затухания  $\delta=1/0,2=5$  с<sup>-1</sup>.

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Какой вид имеет график зависимости амплитуды ускорения от частоты?

4.2. Как зависит от коэффициента трения опасность разрушения какого-либо сооружения от резонанса?

4.3. Как можно приближенно решить задачу о вынужденных колебаниях, если вынуждающая сила периодична, но не гармонична?

4.4. Какой вид имеют векторные диаграммы движения тела при вынужденных колебаниях при гармонической вынуждающей силе?

#### 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Тело массы 10 г совершает затухающие колебания с амплитудой в начале колебаний 7 см. Коэффициент затухания 1,6 с<sup>-1</sup>. Под действием вынуждающей периодической силы частотой 5 Гц установились вынужденные колебания с амплитудой 5 см. Сдвиг фазы смещения относительно фазы вынуждающей силы — 0,75.

Найти частоту собственных колебаний груза.

О т в е т: 5,25 Гц.

5.2. Гирька весом 0,2 кг, висят на вертикальной пружине, совершает затухающие колебания с коэффициентом затухания 0,75 с<sup>-1</sup>. Коэффициент упругости пружины равен 0,5 кг/см.

Начертить зависимость амплитуды смещения от частоты вынуждающей периодической силы, если известно, что амплитуда силы равна 0,98 Н.

5.3. По грунтовой дороге прошел трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии 30 см друг от друга. По этой дороге покатали детскую коляску,

имеющую две одинаковые рессоры, каждая из которых прогибается на 2 см под действием груза в 1 кг.

С какой скоростью катили коляску, если от толчков на углублениях она, попав в резонанс, начала сильно раскачиваться? Вес коляски 10 кг.

Ответ: 1,7 км/ч.

5.4. Амплитуда смещения вынужденных колебаний при очень малой частоте равна 2 мм, а при резонансе равна 16 мм. Предполагая, что декремент колебаний меньше единицы, определить его.

Ответ: 0,4.

5.5. Тело массы 1 г, подвешенное на пружине, колеблется с частотой 2 см. На тело начала действовать направленная вертикально гармоническая сила с амплитудой  $10^{-3}$  Н и некоторая сила вязкого трения.

Определить амплитуду силы вязкого трения и коэффициент трения, если амплитуда смещения тела при резонансе равна 5 см.

Ответ: коэффициент трения равен  $9,83 \cdot 10^{-3}$  кг/с или  $7,82 \cdot 10^{-3}$  кг/с; амплитуда силы вязкого трения равна соответственно  $4,70 \cdot 10^{-5}$  Н или  $3,47 \cdot 10^{-5}$  Н.



## РАЗДЕЛ XIV

### Крутильные колебания

#### 1. Теоретический материал

Крутильные колебания как периодические вращательные движения твердого тела. Угол поворота как аналог смещения точечного тела. Гармоническое крутильное колебание. Кинематические параметры крутильных колебаний: круговая частота, угловая амплитуда и начальная фаза.

Сложение и разложение крутильных колебаний. Сложение и разложение крутильных колебаний с одинаковой частотой. Сложение и разложение гармонических крутильных колебаний с различными частотами. Крутильные биения. Гармонический анализ крутильных колебаний.

Динамика свободных крутильных колебаний. Квазигуков момент и его коэффициент. Связь кинематических параметров гармонических крутильных колебаний с динамическими параметрами. Нахождение амплитуды и начальной фазы гармонических крутильных колебаний. Векторная диаграмма гармонического крутильного колебания.

Момент количества движения, кинетическая энергия, потенциальная энергия и полная механическая энергия гармонического крутильного колебания.

Квазиньютонов (тормозящий) момент и его коэффициент (активное сопротивление). Кинематические параметры затухающих крутильных колебаний и их связь с динамическими параметрами. Векторная диаграмма для случая затухающих крутильных колебаний.

Вынужденный периодический момент сил. Гармонический вынуждающий момент сил. Вынужденное крутильное колебание при действии гармонического вынуждающего момента, квазигукового момента сил и квазиньютонова момента сил. Амплитуды углового смещения, углового ускорения и угловой скорости и их зависимость от частоты вынуждающего гармонического момента. Сдвиг фазы вынужденных крутильных колебаний по отношению к фазе гармонического вынуждающего момента. Полное механическое сопротивление при вынужденных крутильных колебаниях (крутильный импеданс). Шесть резонансных кривых для вынужденных крутильных колебаний.

Физический маятник как пример нелинейных крутильных колебаний. Период колебаний физического маятника и его зависимость от динамических параметров. Математический маятник. Приведенная длина физического маятника.

## 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. В чем состоит аналогия между колебаниями точно-го тела по прямой и крутильными колебаниями?

2.2. Что такое крутильное колебание?

2.3. В чем состоит смысл понятия фазы крутильных колебаний?

2.4. Что значит: сложить два крутильных колебания, имеющих одну и ту же ось?

2.5. Каким должно быть переносное крутильное колебание для того, чтобы при сложении двух колебаний получилось отсутствие вращения тела относительно оси?

2.6. Как можно представить себе фигуры Лиссажу для крутильных колебаний?

2.7. Как связан коэффициент квазигукового момента с модулем кручения?

2.8. Как доказать, что наличие квазигукового момента достаточно для существования гармонических крутильных колебаний?

2.9. Как осуществить гармонические крутильные колебания с нулевой начальной фазой? С начальной фазой  $180^\circ$ ?

2.10. Что нужно задать, чтобы определить амплитуду и начальную фазу гармонических крутильных колебаний?

2.11. Как можно осуществить гармонический вынуждающий момент при вынужденных крутильных колебаниях?

2.12. Чему равны средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии тела при крутильных незатухающих колебаниях?

## 3. Основные типы задач и методы их решения

### а) Типы и методы решения

3.1. Задачи на динамику крутильных свободных незатухающих колебаний: вычисление собственных частот крутильных колебаний.

Решение. Использование соотношения между динамическими параметрами (коэффициентом квазигукового момента, моментом инерции) и кинематическими параметрами (круговая частота, частота, период).

3.2. Задачи на динамику свободных затухающих крутильных колебаний: вычисление условного периода, условной частоты, коэффициента затухания, декремента колебаний, времени релаксации.

Решение. Использование соотношений между динамическими параметрами (коэффициент квазигукового момента, момент инерции, коэффициент квазиньютонова момента) и кинематическими параметрами (коэффициент затухания, время релаксации и декремент колебаний).

3.3. Задачи на вычисление параметров вынужденных крутильных колебаний при действии гармонического вынуждающего момента сил: резонансные частоты для амплитуды угла поворота, угловой скорости, углового ускорения при различных частотах вынуждающего момента.

Решение. Использование соотношений между амплитудами угла поворота, угловой скорости и углового ускорения и динамическими параметрами либо непосредственно, либо через параметры, характеризующие свободные затухающие крутильные колебания.

3.4. Вычисление периодов колебаний различных видов физических маятников, в частности математических.

Решение. Вычисление параметров, от которых зависит частота колебаний физического маятника, в основном момента инерции, и использование соотношения, связывающего частоту и эти параметры.

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Верхний конец стальной проволоки диаметром 0,5 мм и длиной 80 см заземлен. К нижнему концу проволоки прикреплен шар массой 2 кг и диаметром 10 см. Если шар повернуть вокруг вертикальной оси на небольшой угол и отпустить, он будет совершать крутильные колебания.

Чему равен их период?

Решение. Уравнение движения для свободных незатухающих крутильных колебаний будет

$$J\ddot{\varphi} + D\varphi = 0.$$

В данном случае упругий момент будет создаваться деформацией кручения стальной проволоки, следовательно,

$$D = \pi r^4 G / 2l,$$

где  $r$  — радиус проволоки,  $G$  — модуль сдвига материала,  $l$  — длина проволоки.

Момент инерции шара относительно оси, совпадающей с его диаметром, равен  $0,4mR^2$ , где  $m$  — масса шара, а  $R$  — радиус шара. Тогда период колебаний будет равен:

$$T_0 = 2\pi (J/D)^{0,5} = 2\pi \left( \frac{0,8mR^2l}{\pi r^4 G} \right)^{0,5} = \frac{2R}{r^2} \left( \frac{0,8ml\pi}{G} \right)^{0,5}.$$

По условию задачи  $m=2$  кг,  $R=5 \cdot 10^{-2}$  м,  $l=0,8$  м,  $r=2,5 \cdot 10^{-4}$  м,  $G=7,8 \cdot 10^{10}$  (в единицах СИ).

Подставляя численные значения, получим  $T_0=11,2$  с.

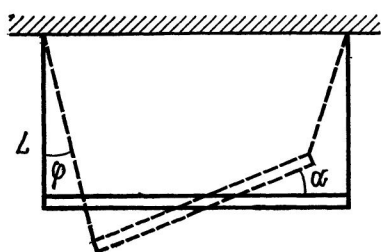


Рис. 66

**3.1.2.** Однородная палочка подвешена за концы на двух одинаковых нитях длины 785 мм. В состоянии равновесия обе нити параллельны. Найти период малых колебаний, возникающих после некоторого поворота палочки вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр.

Решение Пусть палочка имеет длину  $l$  (рис. 66). Обозначим угол отклонения нитей  $\varphi$ , а угол поворота палочки  $\alpha$ . Уравнение движения будет для палочки иметь вид

где  $J=ml^2/12$ . Момент сил равен сумме моментов сил, действующих на палочку со стороны нитей, т. е.  $M=2 M_1$ ,

$$J\ddot{\alpha} + M = 0,$$

$$M_1 = \frac{mg}{2} \varphi \frac{l}{2} = \frac{mg\varphi l}{4}; \quad M = \frac{mg\varphi l}{2}.$$

При малых колебаниях  $\alpha l/2 = \varphi L$ , т. е.  $\varphi = \alpha l/2L$ . Тогда уравнение движения будет иметь вид

$$\frac{ml^2}{12} \ddot{\alpha} + \frac{mg l^2}{4L} \alpha = 0.$$

Круговая частота  $\omega = \sqrt{3g/L}$ , а период колебаний  $T_0 = 2\pi \sqrt{L/3g}$ . Подставляя числовое значение длины и ускорения свободного падения, получим

$$T_0 = 1,026 \text{ с.}$$

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Цилиндр массы 2 кг и радиуса 10 см может совершать свободные незатухающие крутильные колебания относительно вертикальной оси. После погружения его в жидкость амплитуда его колебаний за 1 мин уменьшается с  $10^\circ$  до  $3^\circ$ .

Считая, что коэффициент затухания его колебаний остается постоянным, найти ньютонов (тормозящий) момент, действующий на цилиндр со стороны жидкости, при угловой скорости цилиндра 10 рад/с.

Решение. Коэффициент затухания будет равен

$$\delta = \frac{1}{t} \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_1},$$

а поскольку коэффициент ньютоновского момента равен  $H = 2\delta J$ , тормозящий момент при угловой скорости  $\omega_1$  будет равен  $M_f = 2\delta J \omega_1$ .

Для данных задачи в системе СИ коэффициент затухания равен  $4,75 \cdot 10^{-3}$ , а искомый тормозящий момент равен  $4,7 \cdot 10^{-3}$ .

### 3-й тип задач (3.3)

3.3.1. Найти амплитуду поворота цилиндра, погруженного в жидкость (см. условия 3.2.1), если на него действует гармонический вынуждающий момент сил амплитудой  $10^{-2}$  Нм для резонансной частоты вынуждающего момента.

Решение. Амплитуда углового смещения зависит от частоты вынуждающего гармонического момента следующим образом:

$$A_\varphi = M_0 \left\{ \omega \left[ H + \left( J\omega - \frac{D}{\omega} \right)^2 \right]^{0,5} \right\}^{-1},$$

где  $M_0$  — амплитуда вынуждающего момента,  $H$  — постоянная тормозящего момента (активное сопротивление),  $J$  — момент инерции и  $D$  — постоянная упругого момента. В случае резонанса она равна:

$$A_\varphi = M_0 (4\delta^2 \omega^2 + 4\delta^4)^{-0,5} \simeq \frac{M_0}{2\delta\omega} \quad (\delta \ll 1).$$

Подставляя числовые данные, получаем

$$A_\varphi = 10^{-2} / 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1 = 0,25 \simeq 14^\circ 19' 26'', 2.$$

### 4-й тип задач (3.4)

3.4.1. Тонкая пластинка из однородного материала имеет форму равностороннего треугольника со стороной 175 мм. Она может вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из сторон пластинки.

Найти период малых колебаний этой пластинки.

Решение. Период малых колебаний физического маятника составляет

$$T_0 = 2\pi (l_1/g)^{0,5},$$

где  $l_1$  — приведенная длина физического маятника, равная  $J/md$ , а  $J$  — момент инерции физического маятника относительно оси колебаний,  $m$  — его масса,  $d$  — расстояние от оси до центра масс. Момент инерции относительно стороны

треугольника равен  $ma^2/8$ . Центр масс находится на расстоянии  $a/2\sqrt{3}$  от оси. Следовательно,

$$T_0 = \pi \sqrt[4]{3} \sqrt{a/g} = 4,13 \sqrt{a/g} = 1,32 \sqrt{a} = 0,552c.$$

**3.4.2.** Физический маятник устанавливается так, что его центр масс располагается вертикально над точкой подвеса. Затем маятник начинает двигаться без трения из этого положения с нулевой начальной скоростью. В момент прохождения через нижнее положение угловая скорость маятника достигает значения 420 об/мин.

Найти собственную частоту  $\nu_0$  малых колебаний этого маятника (в СИ).

**Решение.** Пусть расстояние от точки подвеса  $O$  до центра масс  $M$  равно  $a$ . Согласно теореме о сохранении полной механической энергии вращающегося твердого тела

$$J\dot{\varphi}_{\max}^2/2 = 2mg.$$

Отсюда приведенная длина физического маятника равна

$$\frac{J}{ma} = \frac{4g}{\dot{\varphi}_{\max}^2}.$$

Поскольку  $\omega_0 = \sqrt{mag/J}$ , то

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g\dot{\varphi}_{\max}^2}{4g}} = \frac{\dot{\varphi}_{\max}}{4\pi} = \frac{22}{4\pi} = 1,75\text{Гц}.$$

#### 4. Контрольные вопросы

**4.1.** Чему равен период колебаний кинетической энергии тела, совершающего крутильные гармонические колебания с известной частотой?

**4.2.** Начертить фазовую траекторию свободных незатухающих крутильных колебаний. Рассмотреть два случая: круговая частота больше и меньше единицы.

**4.3.** В чем состоит кинематический смысл разложения произвольного крутильного колебания в ряд Фурье?

**4.4.** В чем проявляется влияние сухого трения при затухающих крутильных колебаниях?

**4.5.** Что нужно знать для определения амплитуды и начальной фазы затухающего крутильного колебания?

**4.6.** Какой вид имеет график зависимости угловой скорости крутильных колебаний от частоты вынуждающего гармонического момента?

**4.7.** Нарисовать векторные диаграммы вынужденных крутильных колебаний при гармонической вынуждающей силе.

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Однородная пластинка, имеющая форму равностороннего треугольника, подвешена за вершины тремя нитями, имеющими одинаковую длину 383 мм. В состоянии равновесия пластинка горизонтальна, а нити вертикальны.

Найти период крутильных колебаний пластинки вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии пластинки. Считать, что каждая нить отклоняется на малый угол от вертикали.

Ответ: 0,62 с.

5.2. Определить период крутильных колебаний тонкого диска, подвешенного горизонтально на трех параллельных нитях длиной 120 см.

Ответ: 1,55 с.

5.3. Диск состоит из двух половин одинаковой толщины: одна половина алюминиевая, вторая — свинцовая.

Каково отношение периодов колебаний этого диска относительно осей, перпендикулярных к плоскости диска? В первом случае ось проходит через точку  $A$ , а в другом — через точку  $B$  (рис. 67).

Ответ: 0,9.

5.4. Шар радиусом 5 см подвешен на нити длиной 10 см. Определить погрешность, которую мы делаем, приняв его за математический маятник длиной 15 см.

Ответ: 2,2%.

5.5. Математический маятник длиной 0,5 м отклонился при первом колебании на 5 см, а при втором (в ту же сторону) — на 4 см.

Найти время релаксации математического маятника.

Ответ: 6,4 с.

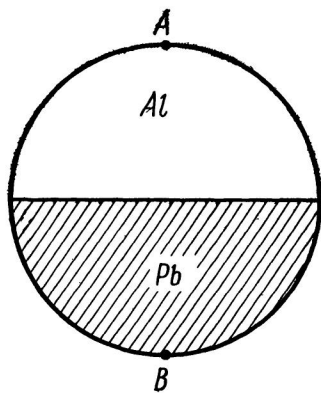


Рис. 67

# РАЗДЕЛ XV

## Гидростатика

### 1. Теоретический материал

Жидкости и газы. Различие между ними. Поведение их в условиях невесомости.

Давление. Единицы давления: Паскаль, бар, физическая и техническая атмосфера, тор. Сжимаемость жидкостей и газов. Коэффициент сжимаемости.

Массовые силы: сила тяжести, силы инерции. Равновесие жидкостей и газов при отсутствии массовых сил. Закон Паскаля. Равновесие несжимаемой жидкости при наличии массовых сил (силы тяжести, сил инерции, в частности центробежной силы). Равновесие сжимаемой жидкости (газа) при наличии массовых сил: газ в однородном поле тяжести, газ при наличии сил инерции, гидростатический парадокс. Условия плавания: в несжимаемой жидкости, при наличии массовых сил. Закон Архимеда. Выталкивающая сила. Условия плавания в сжимаемых жидкостях. Подъемная сила аэростата. Потолок аэростата.

Давление жидкости или газа на стенку при наличии массовых сил.

### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. В чем основное различие между поведением жидкости или газа в условиях невесомости?

2.2. Какой опыт свидетельствует в пользу справедливости закона Паскаля?

2.3. В чем состоит основное различие в распределении давлений внутри несжимаемой и сжимаемой жидкостей?

2.4. Как зависит распределение давлений внутри несжимаемой жидкости от вертикального ускорения сосуда с жидкостью?

2.5. Как будет зависеть давление в вертикальном столбе сжимаемой жидкости (газа) от высоты?

2.6. Что такое «барометрическая формула»?

2.7. В чем отличие условий плавания в несжимаемой жидкости и в сжимаемой жидкости?



### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Типы и методы решения

3.1. Задачи на использование данных о физических свойствах жидкостей и газов (плотности, сжимаемости).

Решение. Использование табличных данных, перевод величин из различных систем в СИ и использование определений и зависимостей, связывающих эти величины.

3.2. Задачи на поведение несжимаемых жидкостей при наличии массовых сил (силы тяжести, силы инерции).

Решение. Использование принципа совпадения поверхностей равного давления и потенциальных поверхностей несжимаемой жидкости. Вычисление по давлению, зависящему от координаты, полной силы действия на поверхность.

Использование экспоненциальной зависимости давления от высоты для сжимаемого газа, находящегося в однородном поле сил.

3.3. Задачи на плавание тел в жидкостях и газах.

Решение. Использование значения архимедовой силы и ее вычисление в конкретных ситуациях для несжимаемых и сжимаемых жидкостей.

#### б) Примеры

##### 1 тип задач (3.1)

3.1.1. В массивном куске металла высверлено отверстие диаметром 4 см. В цилиндрическую полость налита вода. С какой силой нужно действовать на поршень для того, чтобы сжать объем воды на 1%?

Решение. Сжимаемость воды, которая, вообще говоря, является функцией давления, в интервале до 1000 атм в среднем равна  $4 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ . Давление, при котором объем воды уменьшится на 1%, можно найти из условия  $10^{-2} = 4 \cdot 10^{-10} p$ . Отсюда  $p = 250 \cdot 10^5 \text{ Па}$  или 250 атм. Искомую силу найдем, умножая давление на площадь поперечного сечения поршня:  $F = 4 \cdot 10^{-4} \pi 250 \cdot 10^5 \text{ Н} = 31,4 \text{ кН} = 3,14 \text{ т}$ .

3.1.2. Если осушить Марианскую впадину, какое атмосферное давление будет нормальным на ее дне?

Решение. Зависимость плотности и давления сжимаемой жидкости в однородном поле тяжести является экспоненциальной и для давления имеет вид

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho g}{p_0} h},$$

где  $p_0$  — давление на уровне моря,  $\rho_0$  — плотность жидкости на уровне моря. Для Марианской впадины высота ее над уровнем моря равна 10542 м. Давление в Марианской впадине превысило бы атмосферное давление в

$\exp \left( \frac{1,293 \cdot 9,8 \cdot 10542}{10330 \cdot 9,8} \right)$  раз, т. е. в  $e^{1,32} = 3,74$  раза.

Нормальное давление на дне осушенной Марианской впадины составило бы 2842 мм рт. ст. (тор).

## 2 тип задач (3.2)

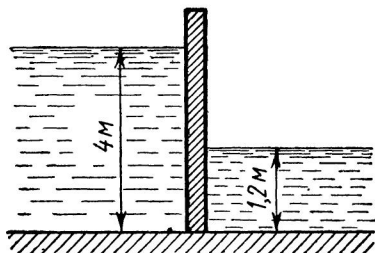


Рис. 68

**3.2.1.** Канал прямоугольного сечения с водой (рисунок) шириной 3,5 м перегороден подъемным щитом, который помещается в параллелях (пазах) боковых сторон канала.

Какое усилие нужно приложить для подъема щита, если коэффициент трения щита о параллели 0,35; вес щита 250 кг, уровень воды слева щита 4 м, а справа 1,2 м?

**Решение.** Давление на щит будет возрастать линейно по мере удаления от поверхности воды, так как давление в вертикальном направлении линейно изменяется с изменением высоты и справедлив закон Паскаля:

$$p = \rho g y,$$

где  $\rho$  — удельный вес воды,  $y$  — расстояние от поверхности воды вниз. Интегрируя давление по толщине слоя воды, получим полную силу давления на боковую поверхность:

$$F = \rho g y_0^2 \frac{d}{2},$$

где  $y_0$  — глубина слоя жидкости,  $d$  — ширина щита.

Это выражение можно записать в виде

$$0,5 \rho g y_0 \cdot y_0 d$$

и сказать, что давление на щит равно давлению на щит на половине глубины слоя жидкости, умноженному на площадь поверхности щита, находящейся в воде. Вычисляя аналогичное давление на щит с другой стороны, получим силу давления на щит.

Усилие, необходимое для подъема щита, будет равно

$$G = P + kF + 9168 \text{ кг} \approx 9,2 \text{ т.}$$

**3.2.2.** В машине Этвуда в качестве грузов использованы два сосуда кубической формы с ребром 5 см. В один сосуд налита вода, в другой — ртуть. Найти силу давления воды на боковые стенки сосуда. Массой блока, нитей и сосудов пренебречь.

Решение. Сила давления на боковую стенку сосуда будет равна

$$F_1 = \frac{\rho(g+a)l^3}{2},$$

где  $\rho_1$  — плотность воды,  $g$  — ускорение свободного падения,  $a$  — ускорения движения сосуда с водой,  $l$  — длина ребра куба.

Подставляя значение ускорения движения сосуда, получим

$$F_1 = 0,5 \rho l^3 g \left( 1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right).$$

Выражая массы сосудов через плотность ( $\rho_2$  — плотность ртути), получим

$$F_1 = 0,5 \rho l^3 g \left[ 1 + \frac{(\rho_2 - \rho_1) l^3}{(\rho_2 + \rho_1) l^3} \right] = \frac{\rho_1 \rho_2 l^3 g}{\rho_2 + \rho_1}.$$

Подставляя численные данные, получим  $F_1 = 1,16$  Н.

### 3 тип задач (3.3)

**3.3.1.** Тонкая палочка одним концом прикреплена к стенке сосуда, а другим погружена в ртуть. Палочка может свободно вращаться относительно горизонтальной оси шарнира, находящегося над уровнем ртути.

Найти плотность вещества палочки, если при равновесии палочки в воду не погружена 0,412 длины палочки. Капиллярные силы не учитывать. Что это за вещество?

Решение. При равновесии сумма моментов сил тяжести и архимедовой силы должна быть равна нулю. Пусть в воду не погружена  $n^{-1}$ -я часть длины палочки. Архимедова сила равна

$$\rho_0 V (n - 1) n^{-1},$$

где  $V$  — объем палочки,  $\rho_0$  — плотность воды, и приложена на расстоянии

$$\frac{l}{n} + \frac{l}{2n} (n - 1) = \frac{l(n + 1)}{2n}$$

от шарнира. Поскольку сила тяжести приложена к центру масс, то равенство моментов сил запишется в виде

$$\rho V \frac{l}{2} \sin \alpha = \rho_0 \frac{V}{n} (n - 1) l \frac{n + 1}{n} \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между палочкой и горизонтальной плоскостью.

Решая это уравнение относительно неизвестной плотности палочки  $\rho$ , получим

$$\rho = \rho_0 (1 - n^{-2}).$$

Так как в данном случае  $n = 2,43$ , то  $\rho = 11290$ .

**3.3.2.** Баллон сферического аэростата при подъеме поддерживается равным  $700 \text{ м}^3$ . Вес корзины, оболочки и пассажиров  $447 \text{ кг}$ .

Сколько нужно балласта в корзине для того, чтобы аэростат уравнивался на высоте  $1033 \text{ м}$  над уровнем Земли, если баллон заполнен водородом?

Решение. Подъемная сила аэростата выражается через объем баллона и плотность воздуха и водорода следующим образом:

$$F = Vg (\rho_{\text{возд}} - \rho_{\text{H}_2}).$$

При подъеме плотности воздуха и водорода будут убывать по экспоненциальному закону (см. 3.1.2). Следовательно, подъемная сила на высоте  $h$  равна

$$F_1 = Vg (\rho_{0\text{возд}} - \rho_{0\text{H}_2}) e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}},$$

где  $\rho_0$  — плотность газов на уровне Земли (при нормальных условиях),  $p_0$  — нормальное атмосферное давление. Поэтому

$$\begin{aligned} F_1 &= 700 \cdot 9,8 (1,29 - 0,09) e^{-1,29 \cdot 9,8 \cdot 1033 / 10\,330 \cdot 9,8} = \\ &= 700 \cdot 9,8 \cdot 1,2 e^{-0,13} = 7228 \text{ Н} = 738 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Поэтому в корзине нужно иметь  $738 \text{ кг} - 447 \text{ кг} = 291 \text{ кг}$  балласта.

#### 4. Контрольные вопросы

**4.1.** Во вращающемся сосуде давление на дно у стенки сосуда больше, чем в центре. Почему при вращении сосуда вода не течет от стенки к его центру?

**4.2.** Два сплошных тела из одного и того же вещества подвешены к концам неравноплечного рычага и уравнивают друг друга в воздухе. Сохранится ли равновесие, если погрузить эти тела в сосуд с водой? Изменится ли равновесие, если вещество тел различно?

**4.3.** Из какого материала надо сделать гири, чтобы при точном взвешивании можно было не вводить поправки на потерю веса в воздухе?

**4.4.** На дне сосуда с жидкостью (или газом) лежит тело, удельный вес которого немного больше удельного веса жид-

кости (или газа). Можно ли, повышая давление на жидкость (или газ), заставить тело подняться вверх?

4.5. Как найти высоту «выполнения» азростата?

4.6. Опираясь на какие положения, можно вывести закон Паскаля?

4.7. Как вывести закон Архимеда для тела, погруженного в несколько несмешивающихся слоев жидкости, расположенных параллельно друг другу?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Каково давление воздуха в кессоне, опущенном в воду и предназначенном для подводных работ на дне реки на глубине 4,5 м, если атмосферное давление равно 755 тор?

Ответ: 7 атм.

5.2. На тележке стоит сосуд с водой. Тележка движется в горизонтальном направлении с ускорением  $6 \text{ м/с}^2$ . Какой угол с горизонтом составит поверхность воды?

Ответ:  $31,5^\circ$ .

5.3. Желоб имеет сечение, приведенное на рис. 69. Желоб наполнен до краев водой. Определить силу давления на 1 м длины боковой стенки и момент этой силы относительно ребра.

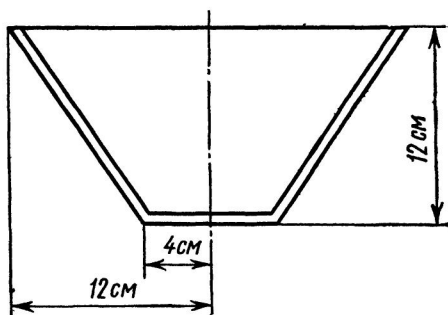


Рис. 69

Ответ: 8,64 кг; 41,6 кг·см.

5.4. Найти силу давления воды на речную плотину, имеющую форму трапеции, если ее высота 5 м, а основания 10 и 15 м.

Ответ: 146 Т.

5.5. Полый железный шар, внешний и внутренний диаметры которого равны 10 и 4 см соответственно, плавает в расплаве цинка.

Груз какой массы нужно добавить к этому полному шару для того, чтобы он полностью погрузился в расплав?

Ответ: 105 г.

5.6. Какова подъемная сила кубометра гелия, если плотность гелия относительно воздуха 0,137?

Ответ: 1,12 кг.

## Содержание

Предисловие и методические указания (Матвеев А. Н.) . . .	3
Раздел I. Преобразования Лоренца (Матвеев А. Н.) . . .	5
Раздел II. Кинематика точки (Сараева И. М.) . . . . .	20
Раздел III. Законы Ньютона и их применение (Сараева И. М.)	31
Раздел IV. Простейшие задачи релятивистской динамики (Матвеев А. Н.) . . . . .	48
Раздел V. Момент силы и момент импульса. Закон сохранения момента импульса (Устинова А. В.) . . . . .	55
Раздел VI. Удар. Классический случай (Устинова А. В.) . . .	67
Раздел VII. Неинерциальные системы координат (Белянкин А. Г.) . . . . .	82
Раздел VIII. Кинематика твердого тела (Белянкин А. Г.) . . .	92
Раздел IX. Динамика твердого тела (Белянкин А. Г.) . . . .	101
Раздел X. Упругие силы и деформации в твердом теле (Сараева И. М.) . . . . .	117
Раздел XI. Свободные незатухающие колебания материальной точки (Шушурин С. Ф.) . . . . .	127
Раздел XII. Свободные затухающие колебания материальной точки (Шушурин С. Ф.) . . . . .	134
Раздел XIII. Вынужденные колебания материальной точки (Шушурин С. Ф.) . . . . .	139
Раздел XIV. Крутильные колебания (Шушурин С. Ф.) . . . .	145
Раздел XV. Гидростатика (Шушурин С. Ф.) . . . . .	152

## **МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ**

Заведующий редакцией  
*С. И. Зеленский*  
Редактор *О. В. Семенов*  
Художественный редактор  
*Ю. М. Добрянская*  
Технический редактор  
*Т. Е. Светличная*  
Корректоры *Н. В. Тютина,*  
*М. К. Соболева*

Тематический план 1980 г. № 111  
ИБ № 915

Сдано в набор 20.12.79. Подписано  
к печати 18.04.80. Формат 60×90/16.  
Бумага тип. № 3. Гарнитура  
литературная. Высокая печать.  
Усл. печ. л. 10,0. Уч.-изд. л. 8,87.  
Изд. № 633. Зак. 252.  
Тираж 10600 экз. Цена 60 коп.

Издательство  
Московского университета.  
Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.  
Типография Изд-ва МГУ.  
Москва, Ленинские горы

М. 54



МЕТОДИКА  
РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ  
МЕХАНИКИ



Издательство  
Московского университета  
1980