Р. БЭР



# ТЕОРИЯ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
И РЕДАКЦИЯ А. Я. ХИНЧИНА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО • МОСКВА—ЛЕНИНГРАД • 1932

TT 11—5—4

R. BAIRE

# LEÇONS SUR LES FONCTIONS DISCONTINUES

2-я типография ОНТИ им. Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Кр. Командиров, 29.

# ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА.

Уже при беглом взгляде на первые главы какого-нибудь курса классического анализа нам неизменно бросается в глаза одно обстоятельство. Основные понятия сначала вводятся посредством определений весьма общего характера; но непосредственно вслед за этим привносятся ограничения, суживающие область исследования; и только благодаря этим ограничениям становится возможным продвинуться сколько-нибудь далеко в построении различных теорий, составляющих математическую науку.

Но в таком случае является законным попытаться, возвращаясь к первоначальным определениям, извлечь из них все возможные интересные следствия, сохраняя за этими определениями, насколько возможно, их общий характер. Таким образом мы можем поставить себе задачу — построить, наряду с анализом классическим, иную, новую ветвь анализа, которая, разумеется, будет существенно отставать от первой в отношении количества полученных результатов, но взамен того будет создавать предложения большей общности.

К этой области математики относятся многочисленные уже теперь работы последних сорока лет, посвященные: разрывным функциям; функциям, не имеющим производной; функциям, имеющим производные всех порядков, но не разлагающимся в ряд Тэйлора; интегрированию возможно более общего класса функций; общему определению замкнутой плоской кривой и т. д.

Но весьма замечательно, что и классический анализ не может обойтись без рассмотрения вопросов, составляющих предмет этой второй ветви анализа. Особенности всевозможного рода, разрывы и т. д. появляются, помимо воли исследователя, в таких проблемах, где он охотно бы от них отказался.

Это утверждение, между прочим, оправдывается и исторически. Так, Поль дю-Буа-Реймон, в предисловии к своему философскому труду по теории функций, говорит, что к детальному анализу понятия функции он был приведен желанием ясно ориентироваться в теории интегралов диференциальных уравнений второго порядка. Повидимому, и Георг Кантор был приведен к своим общим понятиям теории множеств желанием обобщить некоторые результаты, относящиеся к тригонометрическим рядам.

С точки зрения приложений может показаться преждевременным ставить вопрос о возможном практическом значении такого рода исследований. Однако мы можем отметить, что при математическом описании явлений природы постоянно имеют дело, смотря по обстоятельствам, то с непрерывною средою, то с дискретными моментами. Разумеется, речь идет только о приближениях; но в том-то и дело, что такого рода приближения с одинаковым успехом дают нам, в одних случаях — сплошная среда, в других — отдельные моменты. Некоторые теории физики, химии и минералогии представляют известную аналогию с математическим понятием разрывности. Во всяком случае, в противовес прежнему мнению, к счастью теперь оставленному, ничто не дает нам права утверждать, будто «природа не делает скачков». При таком положении вещей не является ли обязанностью математика приступить к изучению, in abstracto, соотношений, имеющих место между этими двумя понятиями, непрерывностью и разрывностью,—понятиями, которые, будучи противоположными друг другу, столь тесно друг с другом связаны? Быть может, это было бы самым верным путем к тому, чтобы подготовить почву для появления новой математической физики, в которой роль гипотезы была бы сведена к минимуму.

Настоящая работа содержит в себе материал лекций, читанных мною в 1904 г. в Collège de France по вопросу, входящему в круг тех исследований, о которых я только что говорил.

Содержание и план книги могут быть очерчены в двух словах. Поставив себе задачу найти все разрывные функции, которые могут быть представлены посредством рядов непрерывных функций, я подробно исследую все понятия и теории, какие мне нужны для того, чтобы получить полное решение этой задачи, и в том порядке, как они встречаются на этом пути.

Следуя принципу, принятому уже во всех вышедших в свет книгах настоящего собрания, я предполагаю известными читателю лишь самые обычные понятия (включая понятия мощности и счетного множества, рассмотренные в книге Бореля Leçons sur la théorie des fonctions); поэтому мне приходится подробно и с самого начала рассматривать различные теории, относящиеся к точечным множествам. Так, я изучаю последовательно понятия множеств замкнутых, совершенных, нигде не плотных, производных множеств всех порядков. Для лучшего выяснения этих различных понятий мне показалось удобным сначала остановиться со всею подробностью на случае линейных множеств, где имеющие место обстоятельства могут быть представлены с известною наглядностью.

В этих исследованиях мне пришлось ввести принадлежащее Кантору понятие трансфинитного числа. Это понятие, будучи новым в математике, подало уже повод к философским спорам; причиною этого, без сомнения, является то, что, при известном способе его истолкования, оно приобретает как бы несколько таинственный характер. Вспомним, что ведь нечто аналогичное произошло в свое время и с мнимыми числами. Я твердо верю, что в данном случае, как и в других подобных случаях, математик имеет полную возможность стать на твердую почву. Это я пытаюсь показать во второй главе, целиком посвященной этой теории. Принятое мною изложение в своем общем плане соответствует тому, которому следовал Кантор в своих последних работах; я изменил его лишь в том смысле, что сохранил исключительно пункты, нужные мне для тех приложений, какие я имел в виду; с другой стороны, я старался пояснить изложение приведением конкретных примеров.

Работа, связанная с напечатанием настоящих лекций, была для меня значительно облегчена благодаря помощи, оказанной мне одним из моих слушателей, г. Данжуа, который взял на себя ее редактирование. Выражаю ему мою глубокую признательность.

Париж, 22 сентября 1904.

## Глава I.

# ПЕРВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ О РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ.

## I. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ.

1. Классический пример разрывных функций, разлагающихся в ряды непрерывных функций, представляют нам некоторые тригонометрические ряды. Мы будем отправляться от соотношения

lg – ln

$$\lg(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}+\ldots, \qquad (1)$$

которое, как это показывается в теории функций комплексного переменного, справедливо при условии $|z|\leqq 1$, $z\neq -1$. Левая часть написанного равенства при этом представляет собою ту ветвь логарифма, которая обращается в нуль при $z=0$ и непрерывно изменяется при непрерывном перемещении точки, изображающей число $z$, внутри и на окружности круга сходимости (не проходя при этом через точку $z=-1$).

Положим

$$z=e^{ix},$$

причем $x$ мы будем мыслить действительным числом, подчиненным условиям

$$-\pi<x<\pi.$$

Мы можем написать:

$$z=\cos x+i\sin x,$$

откуда

$$z^n=\cos nx+i\sin nx.$$

Точка, изображающая число $z$, может занимать любое положение на окружности круга сходимости, кроме $z=-1$; поэтому мы имеем:

$$\lg(1+z)=\sum(-1)^{n+1}\frac{\cos nx+i\sin nx}{n}.$$

С другой стороны, мы можем написать:

$$1+z=2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right).$$

При этом $\cos\frac{x}{2}$ положителен, ибо $x$ заключено между $-\pi$ и $+\pi$. Следовательно, модуль числа $1+z$ равен $2\cos\frac{x}{2}$, а аргумент того же числа равен $\frac{x}{2}+2k\pi$. Но в таком случае все значения функции $\lg(1+z)$ могут быть даны следующей формулой:

$$\lg(1+z)=\mathrm{Lg}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)+i\left(\frac{x}{2}+2k\pi\right),$$

где Lg означает действительный логарифм, а $k$ есть произвольное целое число.

Установив это, приравняем друг другу коэфициенты при $i$ в обеих частях равенства (1). Мы получим, что при условии $-\pi<x<\pi$ и для некоторого целого $k$

$$\frac{x}{2}+2k\pi=\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\ldots$$

Полагая $x=0$, мы убеждаемся, что $k=0$. Следовательно,

$$\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\ldots, \tag{2}$$

при условии

$$-\pi<x<\pi.$$

Чтобы довести до конца исследование функции, изображаемой рядом, стоящим в правой части равенства (2), мы заметим, что каждый член этого ряда есть периодическая функция с периодом $2\pi$. Таким образом мы можем считать сумму этого ряда известной в каждом из интервалов:

$$\pi<x<3\pi,\quad 3\pi<x<5\pi,\ldots,$$
$$-\pi>x>-3\pi,\quad -3\pi>x>-5\pi,\ldots$$

Остается рассмотреть, как ведет себя ряд, когда $x$ равно одному из чисел $\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ldots,-\pi,-3\pi,-5\pi,\ldots$ Мы непосредственно видим, что в этих случаях все члены ряда обращаются в нуль. Таким образом мы убеждаемся, что ряд

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

сходится при любом значении переменного $x$, но что сумма его есть разрывная функция $f(x)$. Геометрически она изображается в виде следующих друг за другом прямолинейных отрезков и изолированных точек (черт. 1).

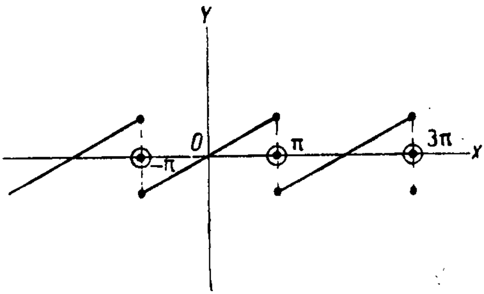
2. Станем теперь на несколько иную точку зрения. Зададим наперед какую-либо разрывную функцию $f(x)$ и попытаемся изобразить ее при помощи ряда, все члены которого были бы непрерывными функциями от $x$. Прежде всего я утверждаю, что задача эта равносильна задаче об отыскании такой последовательности непрерывных функций

$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots,$

для которой при любом значении $x_0$ переменного $x$ мы имели бы:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

что мы будем выражать короче, говоря, что последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$




Черт. 1.

имеет своим пределом функцию $f$. В самом деле, если нам дан ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, члены которого суть непрерывные функции, то последовательность сумм $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ которые также суть непрерывные функции, имеет своим пределом сумму $f$ данного ряда; и обратно, если существует последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_n \ldots$ непрерывных функций, имеющая своим пределом функцию $f$, то, полагая

$$u_1 = f_1,\ u_2 = f_2 - f_1,\ u_3 = f_3 - f_2, \ldots,$$

мы получаем ряд непрерывных функций, сумма которого есть функция $f$.

В качестве примера мы рассмотрим функцию $f(x)$, определенную для $-1 \leqq x \leqq +1$, которая равна нулю для всех значений переменного $x$, кроме значения $x = 0$, для которого она равна единице. Пусть $n$ есть какое-либо целое положительное число; определим непрерывную функцию $f_n$, полагая

$$f_n = 0$$

для

$$-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{n},$$

и для

$$\frac{1}{n} \leqq x \leqq 1.$$

Для $x = 0$ положим $f_n = 1$. В каждом же из двух интервалов $\left(-\frac{1}{n}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ мы заставим функцию $f_n$ изменяться линейно, т. е. положим

$$f_n(x) = 1 + nx \quad \text{для} -\frac{1}{n} \leqq x \leqq 0,$$

$$f_n(x) = 1 - nx \quad \text{для} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{n}.$$

Определенная таким образом функция $f_n$ очевидно непрерывна. Я утверждаю, что для любого значения $x$ в рассматриваемом интервале

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

В самом деле, возможны два случая:

*Первый случай.* $x = 0$. В этом случае $f_n = 1$ для любого $n$, т. е. для любого $n$ мы имеем $f_n = f$.

*Второй случай.* $x \neq 0$. Тогда существует такое целое положительное число $p$, что при $n > p$ мы имеем:

$$\frac{1}{n} < |x|.$$

Следовательно для $n > p$

$$f_n(x) = 0,$$

чем требуемое и доказано, ибо в этом случае $f(x) = 0$.

3. Сравним между собою оба рассмотренных примера. Мы видим, что существование разрывных функций, являющихся пределами функций непрерывных, гораздо более прямым путем обнаруживается во втором примере, нежели в первом. В связи с этим является уместным несколько остановиться на тех двух различных способах, какими вводится в математике понятие функции.

В первом примере мы исходили от обычного приема, состоящего в том, чтобы первоначально определить небольшое количество простейших функций и ввести для них условные обозначения, а затем рассматривать все новые и новые комбинации этих первых простейших функций.

Во втором примере на общее понятие функции не было наложено никаких ограничений, Мы заботились лишь о том, чтобы рассматриваемые нами функции были однозначно определены для рассматриваемых значений переменного, причем способ этого определения мог быть выбран совершенно произвольно.

С другой стороны, пример ряда

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

показывает, что даже если мы станем на первую из двух указанных точек зрения, мы рано или поздно придем к необходимости рассматривать функции, поведение которых представляет те или иные особенности. В частности, к этому приводит нас рассмотрение рядов, к которым мы в свою очередь неизбежно приходим, вводя в математику понятие предела.

4. Тот прием, которым мы воспользовались во втором примере, с успехом может быть применен к любой функции, имеющей только одну точку разрыва. В самом деле, пусть $f(x)$ есть функция, определенная для $a \leqq x \leqq b$ и непрерывная во всех точках этого интервала, за исключением точки $x = c$. Рассмотрим интервал $(c - \alpha_n,\ c + \alpha_n)$, где $\alpha_n$ есть положительное число, стремящееся к нулю при неограниченном возрастании $n$. Мы определим функцию $f_n$ следующим образом: положим $f_n = f$ для любого значения $x$ в интервале $(a, b)$, не принадлежащего интервалу $(c - \alpha_n, c + \alpha_n)$, и для $x = c$. В каждом же из двух интервалов $(c - \alpha_n,\ c)$ и $(c, c + \alpha_n)$ мы заставим функцию $f_n$ изменяться линейно. Если бы точка $c$ совпадала с одной из точек $a$ или $b$, то нам пришлось бы рассмотреть лишь одну из двух половин интервала $(c - \alpha_n,\ c + \alpha_n)$. Легко убедиться, что определенная таким образом функция $f_n$ непрерывна и имеет своим пределом функцию $f$.

## II. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ФУНКЦИЯХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПРЕДЕЛАМИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ.

5. Мы ставим себе целью изучение *разрывных функций, являющихся пределами функций непрерывных.*

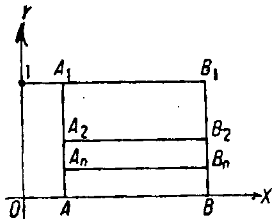
При этом мы в первую очередь ограничимся рассмотрением функций, зависящих от *одного только переменного* $x$, которое может принимать все значения, принадлежащие некоторому *конечному* интервалу $(a, b)$; далее, мы будем предполагать рассматриваемые нами функции *ограниченными*, т. е. заключенными между конечными пределами.

Прежде всего мы несколько преобразуем задачу о построении последовательности непрерывных функций, стремящейся к разрывной функции $f(x)$ (т. е. имеющей эту функцию своим пределом).

Допустим, что функция $f(x)$ есть предел последовательности непрерывных функций

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

Множество значений функций $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ мы можем иначе рассматривать как множество значений некоторой функции от двух переменных, $x$ и $n$; на место переменного $n$, принимающего только целые значения, мы теперь подставим переменное $y$, изменяющееся непрерывно. Мы введем некоторую функцию $F(x, y)$, подчинив ее в первую очередь следующим условиям: для $y = 0$ она должна обращаться в функцию $f(x)$, а для $y = \frac{1}{n}$ — в функцию $f_n(x)$. Изобразим геометрически область значений переменых $x$ и $y$ (черт. 2); $x$ изменяется в промежутке между числами $a$ и $b$ которые соответственно изображаются точками $A$ и $B$; $y$ принимает все значения, заключенные между нулем и единицею.




Черт. 2.

Мы отмечаем прямые $A_1B_1$, $A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$, соответствующие ординатам $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Функция $F(x, y)$, по определению, совпадает с функцией $f(x)$ на отрезке $AB$ и с функцией $f_n(x)$ на отрезке $A_nB_n$.

Я утверждаю, что определение функции $F(x, y)$, может быть дополнено таким образом, чтобы она оказалась *непрерывною по отношению к совокупности обоих переменных* во всем прямоугольнике $ABB_1A_1$, за исключением отрезка $AB$.

В самом деле, для того чтобы этого достигнуть, достаточно дополнить определение функции $F(x,y)$ следующим образом. Пусть на каждой прямой $x = x_0$, параллельной $OY$, функция $F(x, y)$ *линейно* зависит от $y$ в промежутке между каждыми двумя последовательными значениями вида $\frac{1}{n}$ переменного $y$; таким образом для $\frac{1}{n+1} \leqq y \leqq \frac{1}{n}$ мы будем иметь:

$$F(x, y) = \alpha y + \beta,$$

где $\alpha$ и $\beta$ суть функции от одного только $x$; эти функции определяются условиями:

$$f_n(x) = \frac{\alpha}{n} + \beta, \quad f_{n+1}(x) = \frac{\alpha}{n+1} + \beta,$$

откуда мы получаем для $\frac{1}{n+1} \leqq y \leqq \frac{1}{n}$:

$$F(x, y) = n(n+1)\left[\left(y - \frac{1}{n+1}\right)f_n(x) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{n} - y\right)f_{n+1}(x)\right]. \qquad (1)$$

Тем самым функция $F$ определена во всем прямоугольнике $ABB_1A_1$. Я утверждаю, что эта функция удовлетворяет поставленному условию непрерывности. В любой точке, ордината которой не есть число вида $\frac{1}{n}$, непрерывность функции $F$ следует из ее выражения (1). В точке же, расположенной на одном из отрезков $A_nB_n$, функция $F$ принимает общее значение двух различных выражений, которые оба непрерывны и которые соответственно изображают функцию $F$ по ту и другую сторону отрезка $A_nB_n$; таким образом функция $F$ непрерывна по отношению к совокупности обоих переменных в любой точке этого отрезка, а следовательно и в любой точке прямоугольника $ABB_1A_1$, кроме, быть может, отрезка $AB$.

Наконец, *функция $F(x, y)$ непрерывна относительно $y$ в любой точке $M$ отрезка $AB$.* Для того чтобы в этом убедиться, надо показать, что при постоянном $x = x_0$ и при $y \to 0$ функция $F(x_0, y)$ имеет своим пределом величину $F(x_0, 0) = f(x_0)$.

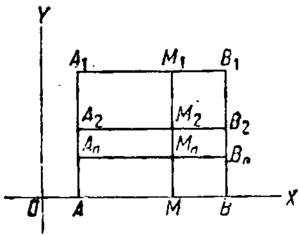
Пусть, в самом деле, $M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$ суть точки с абсциссою $x_0$, расположенные на отрезках $y = \frac{1}{n}$ (черт. 3). Мы предполагали, что последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ имеет своим пределом $f$; иначе говоря, $F\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ стремится к $f(x_0)$, когда $n$ неограниченно возрастает. Но если точка $M'$ имеет ординату $y'$, стремящуюся к нулю по какому угодно закону, то для каждого значения $y'$ найдется единственное целое число $n$, удовлетворяющее неравенствам:

$$\frac{1}{n+1} \leqq y' < \frac{1}{n},$$

и это число $n$ неограниченно возрастает, когда $y'$ стремится к нулю.

Так как функция при постоянном $x$ линейно изменяется относительно $y$, то значение ее при $y = y'$ заключено между значениями ее при $y = \frac{1}{n+1}$ и $y = \frac{1}{n}$. Так как $F\left(x_0, \frac{1}{n+1}\right)$ и $F\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ имеют пределом $f(x_0)$, то отсюда следует, что и $F(x_0, y')$ стремится к $f(x_0)$, т. е. к $F(x_0, 0)$.

Таким образом в любой точке $M$ отрезка $AB$ функция непрерывна относительно $y$.



Черт. 3.

Предположим теперь, обратно, что нам дана некоторая функция $F(x, y)$, обладающая следующими свойствами: когда $x$ изменяется в некотором интервале, изображением которого служит отрезок $AB$, а $y$ изменяется от 0 до $y_1$, функция $F(x, y)$ непрерывна относительно совокупности обоих переменных всюду, кроме точек оси $OX$, в каждой из которых она непрерывна относительно $y$. Я утверждаю, что в таком случае функция $f(x) = F(x, 0)$, которая может быть и разрывной, является пределом функций непрерывных.

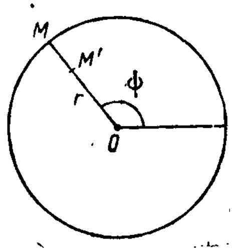
В самом деле, возьмем какую-либо последовательность убывающих и стремящихся к нулю значений $y$: $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ Положим

$$F(x, y_n) = f_n(x).$$

В силу наших предположений, каждая из функций $f_n(x)$ непрерывна. Далее, рассматривая какую-либо прямую $x = x_0$, параллельную оси $Oy$, мы заключаем, на основании непрерывности функции $F(x, y)$ относительно $y$ в точке $(x_0, 0)$, что последовательность чисел $F(x_0, y_1)$, $F(x_0, y_2)$, $\ldots, F(x_0, y_n), \ldots$ имеет пределом $F(x_0, 0)$, т. е. что последовательность $f_1(x_0)$, $f_2(x_0), \ldots$, $f_n(x_0), \ldots$ имеет пределом $f(x_0)$.

Так как это имеет место для любого $x_0$, то функция $f(x)$ есть предел непрерывных функций $f_n$.

Это рассуждение можно обобщить, заменяя ось $OX$ какою-либо кривою. Вообразим себе, например, функцию, определенную внутри и на окружности некоторого круга радиуса $R$ (черт. 4), и допустим, что функция эта непрерывна в каждой внутренней точке круга, а на окружности его обладает следующим свойством: значение функции в точке $M'$, движущейся по радиусу $OM$, стремится к значению ее в точке $M$, когда точка $M'$ стремится к точке $M$ (непрерывность по нормали). В качестве координат какой-либо точки круга мы примем ее аргумент $\psi$ и ее расстояние $r$ от центра $O$. Для $r < R$ функция $F(r, \psi)$ непрерывна относительно совокупности переменных $(r, \psi)$; для $r = R$ функция $F(r, \psi_0)$ непрерывна относительно $r$. Рассмотрим окружности, концентрические данной, радиусы которых $r_1$, $r_2, \ldots$, $r_n, \ldots$ стремятся к $R$, непрерывно возрастая. Легко убедиться, что последовательность функций от $\psi$: $F(r_n, \psi)$ имеет своим пределом функцию $F(R, \psi)$.



Черт. 4.

*Резюмируя сказанное, мы видим, что задача отыскания последовательности непрерывных функций, имеющей своим пределом данную функцию $f(x)$, определенную на отрезке $AB$, совершенно равносильна задаче отыскания такой функции $F(x, y)$, обращающейся в функцию $f(x)$ при $y = 0$, которая была бы непрерывна относительно совокупности переменных $(x, y)$ в каждой точке прямоугольника $ABB_1A_1$, за исключением точек отрезка $AB$, в каждой из которых она должна быть непрерывна только относительно $y$.*

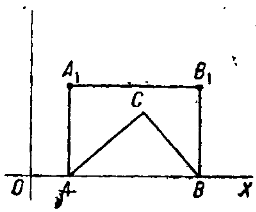
Задачу отыскания такой функции $F(x, y)$ для данной функции $f(x)$ мы будем называть проблемою $(A)$; сделаем теперь несколько замечаний относительно этой проблемы.

Если нам известно какое-либо одно решение $F_0$ этой проблемы, то из него мы легко получим сколько угодно новых решений. Для этого достаточно прибавить к функции $F_0$ любую функцию $\varphi(x, y)$, непрерывную в каждой точке прямоугольника (включая точки отрезка $AB$) относительно совокупности переменных $(x, y)$ и обращающуюся в нуль на отрезке $AB$.

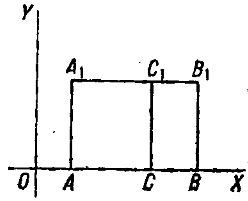
Зная одно решение $F(x, y)$ проблемы для функции $f(x)$, мы можем вывести из него другое решение $F_1$, причем функция $F_1$ может принимать на контуре прямоугольника (кроме стороны $AB$) любые наперед заданные значения. В самом деле, возьмем произвольную точку $C$ (черт. 5) внутри нашего прямоугольника и соединим ее прямыми линиями с точками $A$ и $B$. В треугольнике $ACB$ положим $F_1 = F$, вне же этого треугольника мы принимаем за $F_1$ произвольную непрерывную функцию, принимающую заданные значения на контуре $ACBB_1A_1A$.

Обобщая эту проблему, мы можем задать наперед и значения функции $F_1$ на какой-либо кривой, протекающей внутри прямоугольника и соединяющей точки $A$ и $B$*.

6. *Допустим, что данная функция $f(x)$ определена на отрезке $AB$ (черт. 6) и что между точками $A$ и $B$ имеется такая точка $C$, что на каждом из отрезков $AC$ и $CB$ функция $f(x)$ есть предел последовательности непрерывных функций. Я*




Черт. 5.




Черт. 6.

*утверждаю, что в таком случае функция $f(x)$, рассматриваемая на всем отрезке $AB$, есть предел некоторой последовательности непрерывных функций.*

Чтобы в этом убедиться, достаточно построить функцию $F$, удовлетворяющую условиям проблемы ($A$).

С этою целью мы зададим произвольно** значения функции $F$ на отрезке $CC_1$; в силу сделанных предположений мы можем далее дополнить определение функции $F$ в каждом из прямоугольников $ACC_1A_1$ и $CBB_1C_1$ таким образом, чтобы условия проблемы ($A$) были выполнены в каждом из этих прямоугольников в отдельности; но в таком случае они будут выполнены и во всем прямоугольнике $ABB_1A_1$.

Доказанная теорема может быть распространена на случай, когда отрезок $AB$ разделяется на любое конечное число отрезков, т. е.:

*Если функция $f(x)$ задана на отрезке $AB$ и если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из*

---

* Разумеется, задаваемый ряд значений в обоих случаях должен быть непрерывным. (*Прим. ред.*)

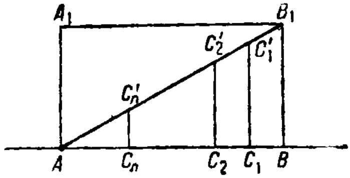
** См. *)

*которых функция $f$ является пределом последовательности непрерывных функций, то этим же свойством функция $f$ обладает и на всем данном отрезке.*

*В силу результата п. 5 отсюда следует, что всякая функция, имеющая лишь конечное число точек разрыва, является пределом последовательности непрерывных функций.*

7. Мы распространим теперь этот результат на некоторые функции более сложного типа; обратимся в первую очередь к следующему примеру, в котором рассматриваемая функция имеет бесконечное множество точек разрыва.

Представим себе функцию, определенную для всех точек отрезка (0, 1) следующим образом: 1) она равна нулю всюду кроме точек $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,\ 0$; 2) в каждой же из этих точек значение ее равно единице.



Черт. 7.

Может ли определенная таким образом функция быть представлена в качестве предела последовательности непрерывных функций? Вопрос этот решается утвердительно, как показывает теорема, которую мы сейчас докажем.

Но прежде заметим, что если точка $C$ лежит между $A$ и $B$ (причем $AB$ есть отрезок (0, 1), то отрезок $CB$ содержит лишь конечное число точек разрыва определенной нами функции, и следовательно на этом отрезке наша функция является пределом последовательности непрерывных функций.

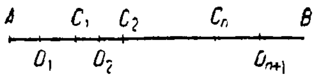
*Если функция $f$ определена на отрезке $AB$ (черт. 7) и если, какова бы ни была точка $C$, заключенная между $A$ и $B$, на отрезке $CB$ данная функция является пределом некоторой последовательности непрерывных функций, то и на всем отрезке $AB$ данная функция может быть представлена как предел некоторой последовательности непрерывных функций.*

В самом деле, рассмотрим какую-либо последовательность точек $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, стремящихся к точке $A$, причем допустим, что каждая из этих точек лежит влево от предшествующей. Проведем отрезок $AB_1$ и отметим на нем точки $C_1'$, $C_2', \ldots, C_n', \ldots$, проекциями которых на $AB$ служат данные точки $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ Мы определим в прямоугольнике $ABB_1A_1$ функцию $F(x, y)$, которая будет удовлетворять всем условиям проблемы ($A$) по отношению к данной функции $f(x)$. С этою целью мы прежде всего зададим какую-нибудь функцию, непрерывную относительно совокупности переменных $(x, y)$ в каждой точке треугольника $AA_1B_1$ и принимающую значение $f(A)$ в точке $A$.

Далее, мы определяем функцию $F$ для точек трапеции $C_1C_1'B_1B$, причем функция уже определена на сторонах $C_1B$ и $C_1'B_1$ этой трапеции; такое определение возможно в виду того, что функция $f$ на отрезке $C_1B$, согласно предположению, является пределом последовательности непрерывных функций.

Далее, мы определяем функцию $F$ для точек трапеции $C_2C_2'C_1'C_1$, причем функция эта уже определена для трех из сторон этой трапеции; затем мы последовательно определим функцию $F$ для точек всех аналогичных трапеций, основаниями которых являются отрезки $C_1C_2$, $C_2C_3$,...

Предполагая этот процесс продолженным неограниченно, мы тем самым определим функцию $F$ в каждой точке прямоугольника $AA_1B_1B$. Эта функция, очевидно, непрерывна во всех точках прямоугольника, кроме, быть может, точек отрезка $AB$. По отношению к $y$ построенная функция, как это явствует из самого построения, непрерывна и в каждой точке отрезка $AB$. Таким образом функция $F$ полностью решает поставленную задачу.



Черт. 8.

8. Сопоставляя только что полученные результаты (пп. 6 и 7), мы приходим к доказательству следующего положения:

Теорема I. *Если функция $f(x)$ определена на отрезке $AB$ и если на этом отрезке существует конечное число таких точек, что на любом отрезке, содержащемся в $AB$ и не содержащем ни одной из этих точек, $f(x)$ есть предел последовательности непрерывных функций, то и на всем отрезке $AB$ функция $f(x)$ есть предел некоторой последовательности непрерывных функций.*

В самом деле, пусть будут $C_1, C_2, \ldots, C_n$ те точки, о которых идет речь в формулировке теоремы (черт. 8). В промежутках между точками $A, C_1, C_2, \ldots, C_n, B$ отметим какие-нибудь точки $D_1, D_2, \ldots, D_{n+1}$. Тем самым отрезок $AB$ распадается на *конечное* число отрезков $AD_1$, $D_1C_1$, $C_1D_2, \ldots$, $D_{n+1}B$. На каждом из этих отрезков выполняются условия последней теоремы, причем соответствующая точка $D$ в каждом отдельном случае играет роль точки $B$. Следовательно, на каждом из этих отрезков функция $f$ есть предел последовательности непрерывных функций. А так как этих отрезков имеется лишь конечное число, то и на всем отрезке $AB$ функция $f(x)$ есть предел некоторой последовательности непрерывных функций.

9. *Для* того чтобы подойти к приложениям этой теоремы, нам необходимо ввести некоторые основные понятия теории множеств.

*Предельные точки.* Рассмотрим какое-либо точечное множество $P$, расположенное на прямолинейном отрезке $AB$. Мы будем называть точку $M$ *предельною точкою* множества $P$, если всякий отрезок, содержащий внутри себя точку $M$, содержит внутри себя по меньшей мере одну точку множества $P$, отличную от $M$.

Короче говоря, в любом соседстве точки $M$ найдется точка множества $P$, отличная от $M$.

Заметим, что если точка $M$ есть предельная точка множества $P$ (независимо от того, принадлежит ли она этому множеству или нет), то всякий отрезок, заключающий внутри себя точку $M$, непременно содержит *бесконечное множество* точек множества $P$. В самом деле, если бы какой-нибудь из таких отрезков содержал в себе лишь конечное число точек множества $P$, отличных от точки $M$, то одна какая-либо из этих точек лежала бы ближе к точке $M$, нежели все другие; обозначим через $\delta$ расстояние между этой точкой и точкой $M$. В таком случае всякий отрезок, заключающий внутри себя точку $M$ и имеющий длину меньшую, нежели $\delta$, не содержал бы внутри себя ни одной точки множества $P$ (кроме самой точки $M$, если она принадлежит множеству $P$), и, следовательно, в силу данного нами определения, точка $M$ не была бы предельною точкою множества $P$.

С другой стороны, обратное предложение является самоочевидным; следовательно, данное нами определение равносильно следующему: точка $M$ называется *предельною точкою* множества $P$, если любой отрезок, заключающий внутри себя точку $M$, содержит бесконечное множество точек, принадлежащих множеству $P$.

*Производные множества.* Мы будем называть *производным множеством* точечного множества $P$ и обозначать через $P^1$ множество всех предельных точек множества $P$.

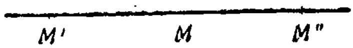
*Замкнутые множества.* Мы будем называть точечное множество *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. если всякая предельная точка данного множества принадлежит ему.

Рассмотрим, например, с одной стороны множество точек, абсциссы которых суть соответственно $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$, а с другой стороны — множество тех же точек, присоединяя к ним еще точку *нуль*. Каждое из этих двух множеств имеет точку *нуль* своей единственной предельной точкой. Отсюда следует, что второе множество замкнуто, а первое нет.

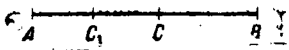
10. *Производное множество $P^1$ любого точечного множества $P$ есть замкнутое множество.*

Другими словами, множество $P^1$ содержит все свои предельные точки.

Пусть $M$ есть произвольная предельная точка множества $P^1$ (черт. 9). Я утверждаю, что точка $M$ будет предельною точкою и для множества $P$. В самом деле, всякий отрезок $M' M''$, заключающий внутри себя точку $M$, содержит бесчисленное множество точек множества $P^1$. Выберем какую-либо одну из этих точек, лежащую *внутри* отрезка $M' M''$. Так как выбранная точка есть предельная для множества $P$, то в отрезке $M' M''$ содержится бесконечное множество точек, принадлежащих множеству $P$. Следовательно, точка $M$ есть предельная точка множества $P$.



Черт. 9.



Черт. 10.

*Точечное множество $P$, помещающееся на конечном отрезке $AB$ и содержащее бесчисленное множество точек, непременно имеет по меньшей мере одну предельную точку.*

В самом деле, пусть точка $C$ есть середина отрезка $AB$ (черт. 10); по меньшей мере одна из двух половин $AC$, $CB$ должна содержать бесчисленное множество точек, принадлежащих множеству $P$. Пусть это будет половина $AC$. Относительно нее мы будем рассуждать так же, как рассуждали относительно отрезка $AB$. Мы получим некоторый новый отрезок, например $C_1C$, содержащий бесчисленное множество точек множества $P$ и длина которого равна одной четверти длины отрезка $AB$; с этим отрезком мы поступаем аналогично предыдущему и т. д. Мы получаем неограниченную последовательность отрезков, каждый из которых содержит бесчисленное множество точек множества $P$; левые концы этих отрезков никогда не приближаются к точке $A$, правые — никогда не могут приближаться к точке $B$; длины отрезков при этом стремятся к нулю. Отсюда следует, что левые и правые концы этих отрезков стремятся к одному и тому же предельному положению. Эта точка, по самому своему определению, должна быть предельною точкою множества $P$, ибо всякий отрезок, заключающий внутри себя эту точку, содержит бесчисленное множество точек, принадлежащих множеству $P$.

Из этого предложения мы теперь выведем такое следствие. Пусть дано произвольное множество $P$, расположенное на отрезке $AB$; если отрезок $\alpha\beta$, составляющий часть отрезка $AB$, не содержит ни одной точки производного множества $P^1$, то он может содержать лишь конечное число точек множества $P$; в самом деле, если бы отрезок $\alpha\beta$ содержал бесконечное множество точек множества $P$, он должен был бы содержать предельную точку этого множества, а эта последняя принадлежит множеству $P^1$.

Если отрезок $\alpha\beta$ не содержит ни одной точки множества $P^1$, то мы условимся говорить, что в отрезке $\alpha\beta$

$$P^1 = 0.$$

Мы можем теперь доказать следующую теорему: *Если множество $P$ точек разрыва функции $f(x)$ таково, что производное множество $P^1$ состоит из конечного числа точек, то функция $f(x)$ есть предел последовательности непрерывных функций.*

Пусть в самом деле $M_1, M_2, \ldots, M_n$ суть точки, составляющие множество $P^1$. Применяя теорему I и замечая, что в любом интервале, не содержащем ни одной из точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, функция $f(x)$, имея лишь конечное число точек разрыва, является (п. 6) пределом последовательности непрерывных функций, мы заключаем, что и на всем отрезке $AB$ функция $f(x)$ есть предел последовательности непрерывных функций.

Рассмотрим в качестве примера множество $P$, составленное: 1) из точек, имеющих своими абсциссами числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$, и, следовательно, имеющих предельную точку 0, и 2) из точек $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}, \ldots$, имеющих предельную точку $\frac{1}{2}$. Множество $P^1$ в данном случае, очевидно, состоит из точек 0 и $\frac{1}{2}$. На основании последней теоремы функция, равная нулю, всюду, за исключением точек множества $P$, в которых она равна единице, является пределом последовательности непрерывных функций.

11. *Производные множества высших порядков.* Допустим, что множество $P^1$ состоит из бесконечного множества точек. В таком случае оно имеет производное множество, которое мы будем

обозначать через $P^2$ и называть *производным множеством второго порядка* по отношению к множеству $P$.

Так как множество $P^1$ замкнуто (п. 10), то множество $P^2$ целиком в нем содержится, что мы будем обозначать так *:

$$P^1 \geqq P^2.$$

Построим теперь примеры множеств, имеющих производные множества второго порядка.

Попытаемся построить такое множество, чтобы точка $\frac{1}{2}$ принадлежала его второму производному $P^2$. Для этого множество $P^1$ должно содержать бесконечное множество точек, имеющее точку $\frac{1}{2}$ своею предельною точкою. Пусть это будут, например, точки $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}, \ldots$ Мы теперь должны строить новые точки, предельными точками которых служили бы все точки множества $P^1$. Рассмотрим в первую очередь интервал от 1 до $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ и построим в нем бесконечную последовательность точек, имеющих своей предельной точкой точку $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Пусть это будут, например, точки

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}, \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2^n}, \ldots$$

Подобным же образом, в каждом из бесконечного множества интервалов с концами $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$ мы построим бесконечную последовательность точек, расположенную по отношению к данному интервалу так, как последовательность $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ расположена относительно интервала $(0,1)$.

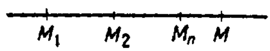
Обозначим через $P$ получаемое таким образом множество. Очевидно, что каждая из точек $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}, \ldots$ есть предельная точка множества $P$ и, следовательно, принад-

* Мы вообще условимся писать $P \geqq Q$, если множество $P$ содержит все точки множества $Q$, и $P > Q$, если множество $P$ содержит все точки множества $Q$ и сверх того, по меньшей мере, одну точку, не принадлежащую множеству $Q$.

ежит множеству $P^1$. Эти точки в свою очередь имеют своею предельною точкою точку $\frac{1}{2}$, которая, следовательно, принадлежит множеству $P^2$. Таким образом мы построим такое множество $P$, второе производное которого содержит наперед заданную точку.

*Функция, обладающая тем свойством, что множество $P$ ее точек разрыва имеет второе производное множество $P^2$, состоящее из конечного числа точек, является пределом последовательности непрерывных функций.*

В самом деле, пусть множество $P^2$ состоит из точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Каждый интервал, составляющий часть интервала $AB$ и не содержащий ни одной из точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, может содержать лишь конечное число точек множества $P^1$, и следовательно (п. 10), функция $f$ в таком интервале будет пределом последовательности непрерывных функций; а отсюда, в силу теоремы I, следует справедливость нашего утверждения.




Черт. 11.

12. Следуя намеченному пути, легко строить все более и более сложные разрывные функции, обобщая понятие производного множества. Мы условимся называть множество, производное от $P^{\nu-1}$, *производным множеством порядка* $\nu$ от множества $P$ и обозначать его через $P^\nu$; таким образом мы последовательно определяем ряд множеств $P^1, P^2, \ldots, P^\nu, \ldots$

Покажем теперь, что умея построить множество, для которого $P^\nu$ существует, мы вместе с тем сумеем и построить множество, для которого $P^{\nu+1}$ существует и содержит наперед заданную точку $M$.

Зададим себе бесконечную последовательность точек $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, стремящихся к точке $M$ (черт. 11).

В каждом из интервалов $M_n M_{n+1}$ построим множество, имеющее производное множество порядка $\nu$, и притом так, чтобы это последнее содержало точку $M_n$. Тогда множество всех построенных точек будет иметь производное множество порядка $\nu$, содержащее точки $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ Так как это последнее множество имеет точку $M$ своей предельной точкой, то первоначальное множество необходимо имеет производное множество порядка $\nu+1$, и это последнее содержит точку $M$.

В отношении к разрывным функциям мы имеем следующую теорему:

*Всякая функция, обладающая тем свойством, что множество $P$ ее точек разрыва имеет производное множество порядка $\nu$, состоя-*

*щее из конечного числа точек, является пределом последовательности непрерывных функций.* При этом $\nu$ означает любое натуральное число.

Допустим, что теорема уже доказана для всех натуральных чисел, не превышающих некоторого числа $\nu$, и покажем, что в таком случае теорема верна и для числа $(\nu+1)$.

Пусть множество $P^{\nu+1}$ состоит из точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$. В любом интервале, не содержащем ни одной из этих точек, множество $P^{\nu}$ может иметь лишь конечное число точек. В таком интервале, следовательно, данная функция является пределом последовательности непрерывных функций. Применяя теорему I, мы убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

13. Нетрудно построить множество точек, *имеющее производные множества всех порядков.*

Выберем на данном отрезке произвольную точку $M$ и построим последовательность точек $M_1$, $M_2$, $M_3, \ldots$ (черт. 11), стремящихся к точке $M$. Для каждого натурального числа $\nu$ построим в интервале $M_\nu M_{\nu+1}$ множество, имеющее производное множество порядка $\nu$, и обозначим через $P$ соединение всех построенных таким образом множеств. Я утверждаю, что это множество имеет производные множества всех порядков; в самом деле, задавая $\nu$ произвольно, мы видим, что производное множество порядка $\nu$ существует в каждом из интервалов $M_\nu M_{\nu+1}$, $M_{\nu+1} M_{\nu+2}, \ldots$ Таким образом множество $P^{\nu}$ существует и содержит точку $M$, каково бы ни было $\nu$. По этому поводу представляется уместным доказать следующую теорему:

*Если множество $P$, расположенное на некотором конечном отрезке, имеет производные множества всех порядков, то существует по меньшей мере одна точка, принадлежащая всем множествам $P^{\nu}$.*

Мы докажем следующее, еще более общее предложение:

*Если на некотором конечном отрезке задана последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$ замкнутых множеств, удовлетворяющих условиям*

$$P_1 \geqq P_2 \geqq P_3 \geqq \ldots \geqq P_\nu \geqq \ldots,$$

*то существует, по меньшей мере, одна точка, принадлежащая всем множествам $P_\nu$.*

В самом деле, отрезок $AB$, по предположению, содержит точки множества $P_\nu$, каково бы ни было $\nu$; разбивая отрезок $AB$ на два отрезка, $AC$ и $CB$, мы непосредственно убеждаемся, что по крайней мере один из них обладает тем же свойством;

повторяя это рассуждение, мы получаем последовательность интервалов, каждый из которых обладает указанным свойством. В этой последовательности каждый интервал содержится в предыдущем, и, разумеется, разделения всегда могут быть выбраны таким образом, чтобы длины построенных интервалов стремились к нулю. При этих условиях построенные интервалы будут иметь единственную общую точку. Эта точка должна принадлежать всем множествам $P_\nu$, ибо эти множества замкнуты.

14. Мы будем обозначать через $P^\omega$ множество точек, принадлежащих всем производным множества $P$; это множество $P^\omega$ мы условимся называть *производным множеством порядка* $\omega$ *от множества* $P$.

Чтобы подчеркнуть, что множество это по своему определению есть совокупность точек, общих всем множествам $P^1$ $P^2, \ldots, P^\nu, \ldots$, мы будем писать:

$$P^\omega = D(P^1, P^2, \ldots, P^\nu, \ldots)$$

и говорить, что множество $P^\omega$ есть *наибольший общий делитель* множеств $P^1, P^2, \ldots, P^\nu, \ldots$

Покажем, что $P^\omega$ есть *замкнутое* множество.

Вообще, если $P, Q, R, \ldots$ суть *замкнутые* множества в *конечном или бесконечном* числе, то множество $S$ их общих точек, если оно существует, есть множество *замкнутое*. В самом деле, всякая предельная точка множества $S$ есть вместе с тем предельная точка каждого из множеств $P, Q, R, \ldots$, следовательно, принадлежит каждому из них, а значит принадлежит и множеству $S$.

*Если некоторый интервал, составляющий часть данного интервала, не содержит ни одной точки множества* $P^\omega$, *то существует такое натуральное число* $\nu$, *что множество* $P^\nu$ *имеет в этом интервале лишь конечное число точек.*

В самом деле, если бы интервал $\alpha\beta$ содержал точки каждого из множеств $P^1, P^2, \ldots, P^\nu \ldots$, то он должен был бы, как мы знаем, содержать по меньшей мере одну точку, принадлежащую множеству $P^\omega$. Следовательно, существует множество $P^\nu$, не имеющее вовсе точек в этом интервале. В таком случае, очевидно, и все множества, следующие за $P^\nu$, обладают тем же свойством.

Таким образом множества $P^1, P^2, \ldots, P^\nu, \ldots$ распадаются на две категории; одни из них имеют точки в интервале $\alpha\beta$, другие таких точек не имеют. Среди последних найдется одно определенное множество с наименьшим индексом *. Если это не есть $P^1$, то обозначим его индекс через $\nu+1$. Очевидно, множество $P^\nu$ имеет точки в интервале $\alpha\beta$, и притом число таких точек конечно, ибо $P^{\nu+1}$ таких точек уже не имеет.

Касательно разрывных функций мы имеем следующую теорему:

*Если функция $f$ определена на отрезке $AB$, и множество $P$ ее точек разрыва таково, что $P^\omega$ состоит из конечного числа точек, то функция $f$ есть предел последовательности непрерывных функций.*

В самом деле, в любом интервале, не содержащем ни одной точки множества $P^\omega$, функция $f$ есть предел последовательности непрерывных функций, ибо в таком интервале некоторое $P^\nu$ имеет лишь конечное число точек (п. 12). Наше утверждение поэтому может быть доказано применением теоремы I.

15. Продолжим еще далее обобщение понятия производного множества.

Нетрудно построить такое множество, для которого $P^\omega$ не только существует, но содержит бесконечно много точек. Для этой цели выберем на отрезке $AB$ бесконечную последовательность точек $M_1, M_2, \ldots, M_n \ldots$ (черт. 11), стремящихся к некоторой точке $M$, и в каждом интервале $M_n M_{n+1}$ поместим множество, для которого $P^\omega$ существует и содержит точку $M_n$. Соединением всех построенных множеств будет такое множество $P$, для которого $P^\omega$ существует и содержит все точки $M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$ Отсюда мы видим, что $P^\omega$ имеет производное множество, содержащее точку $M$. Это последнее мы будем обозначать через $P^{\omega+1}$ (разумеется, это обозначение имеет чисто условный характер).

Мы можем далее построить такое множество $P$, чтобы $P^{\omega+1}$ в свою очередь имело производное множество, которое мы будем обозначать через $P^{\omega+2}$. Вообще говоря, определив множество $P^{\omega+\nu}$, мы будем обозначать его производное множество

---

* При этом мы ссылаемся на то, что всякое множество $A$ натуральных чисел содержит число, которое меньше всех остальных.

В самом деле, если число 1 принадлежит множеству $A$, то оно, очевидно, и будет наименьшим из его элементов. Если 1 не принадлежит, а 2 принадлежит множеству $A$, то 2 и будет наименьшим элементом. Если ни 1, ни 2 не принадлежат множеству $A$, мы испытываем число 3 и т. д., пока не дойдем до числа, принадлежащего множеству $A$. При этом мы всегда придем к цели после конечного числа попыток; ибо, если $a$ есть произвольное число, входящее в множество $A$, то нужное нам число попыток во всяком случае не превосходит $a$.

через $P^{\omega+\nu+1}$. Так как все эти множества замкнуты, то необходимо

$$P^{\omega} \geq P^{\omega+1} \geqq P^{\omega+2} \geqq \ldots \geqq P^{\omega+\nu} \geqq \ldots$$

Если множество $P^{\omega+\nu}$, которое есть производное от $P^{\omega}$ порядка $\nu$, существует при всяком натуральном $\nu$, то, как мы знаем (п. 13), существуют точки, принадлежащие всем этим множествам. Совокупность таких точек есть замкнутое множество, которое мы обозначим через $P^{\omega \times 2}$, и будем писать:

$$P^{\omega \times 2} = D\,(P^{\omega+1}, P^{\omega+2}, \ldots, P^{\omega+\nu}, \ldots).$$

Чтобы построить множество, для которого существует $P^{\omega \times 2}$, мы опираемся на возможность построения в любом отрезке множества, имеющего производное $P^{\omega+h}$.

Рассмотрим последовательность точек $M_1, M_2, \ldots, M_h, \ldots$, стремящихся к некоторой точке $M$. Для каждого натурального $h$ мы поместим на отрезке $M_h M_{h+1}$ множество, имеющее производное $P^{\omega+h}$. Соединение всех построенных множеств есть такое множество $P$, для которого $P^{\omega+h}$ существует при всяком $h$, а следовательно и $P^{\omega \times 2}$ существует и содержит точку $M$.

Подобным же образом множество $P^{\omega \times 2}$ может иметь производное или даже ряд последовательных производных; мы условимся последовательно обозначать их с помощью индексов

$$\omega \times 2+1, \quad \omega \times 2+2, \ldots, \quad \omega \times 2+\nu \ldots$$

Если множество $P^{\omega \times 2}$ имеет производные всех конечных порядков, то общую часть их мы обозначим через $P^{\omega \times 3}$.

Обобщая этот процесс, мы приходим к определению множества $P^{\omega \times \lambda+\nu}$, где $\lambda$ и $\nu$ — произвольные натуральные числа. Говоря точно, мы при этом вводим следующие обозначения:

Если множество $P^{\omega \times \lambda}$ уже определено, то $P^{\omega \times \lambda+1}$ означает его производное множество; $P^{\omega \times \lambda+\nu+1}$ есть производное от $P^{\omega \times \lambda+\nu}$; $P^{\omega(\lambda+1)}$ есть множество точек, каждая из которых принадлежит всем множествам

$$P^{\omega \times \lambda}, \quad P^{\omega \times \lambda+1}, \ldots, \quad P^{\omega \times \lambda+\nu}, \ldots$$

Целесообразность этих определений оправдывается тем, что можно фактически построить множества, имеющие производные таких порядков. Пользуясь все теми же стремящимися к точке $M$ точками $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, в промежутках между которыми мы помещаем множества уже известной нам конструкции, мы последовательно построим:

а) Множество, имеющее $P^{\omega \times \lambda + h + 1}$, умея построить множество, имеющее $P^{\omega \times \lambda + h}$; и следовательно, для данного значения $\lambda$, множество, имеющее при любом $\nu$ производное $P^{\omega \times \lambda + \nu}$.

б) Для этого же значения $\lambda$ множество, имеющее производное $P^{\omega \times (\lambda + 1)}$.

в) Множество, имеющее $P^{\omega \times \lambda}$ при любом $\lambda$.

Так как каждое из производных $P^{\omega}$, $P^{\omega \times 2}, \ldots, P^{\omega \times \lambda}, \ldots$ замкнуто и содержится в предыдущем, то (п. 13) существуют точки, принадлежащие всем этим множествам. Совокупность таких точек мы обозначим через $P^{\omega^2}$, так что

$$P^{\omega^2} = D(P^{\omega},\ P^{\omega \times 2}, \ldots,\ P^{\omega \times \lambda}, \ldots).$$

Заметим, что тем самым $P^{\omega^2}$ будет и множестаом точек, принадлежащих всем $P^{\omega \times \lambda + \nu}$, каковы бы ни были $\nu$ и $\lambda$, ибо $P^{\omega \times (\lambda + 1)}$ есть множество точек, принадлежащих всем $P^{\omega \times \lambda}$, $P^{\omega \times \lambda + 1}, \ldots, P^{\omega \times \lambda + \nu}$. При этом вполне возможно, что множество $P^{\omega^2}$ в свою очередь содержит бесчисленное множество точек, а следовательно имеет производное множество или целый ряд производных множеств.

Резюмируя это последовательное образование множеств, закономерно чередующихся друг за другом, мы констатируем следующее: каждый раз, когда одно из этих множеств нами получено, мы определяем следующее как его производное. Применяя это правило, мы получаем бесконечную последовательность множеств, каждое из которых содержится в предыдущем, и образуем совокупность общих точек всех этих множеств. Таким образом для определения все новых и новых производных мы имеем два существенно различных процесса.

Прежде чем пойти далее, нам необходимо углубить те новые понятия, которые связаны с этим двойственным процессом. Это и составит цель следующей главы.

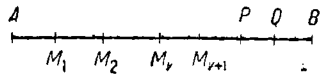
## Глава II.

# ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА.

## I. ПОНЯТИЕ ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННОГО МНОЖЕСТВА.

16. **Для** обозначения последовательного чередования множеств, введенных в п. 15, мы пользовались некоторыми новыми символами, удобство которых основывалось на том, что они весьма ясно указывали нам последовательный порядок определяемых множеств; этого было бы гораздо труднее достигнуть, пользуясь в качестве индексов одними только натуральными числами.

Введенные нами символы представляют собою первые *трансфинитные числа* Кантора. Мы попытаемся теперь точнее охарактеризовать эти числа на других примерах, где приходится с ними иметь дело.



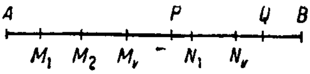

Черт. 12.

Рассмотрим бесконечную последовательность точек $M_1$, $M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$ (черт. 12), расположенных на отрезке $AB$ таким образом, что $M_{\nu+1}$ *всегда лежит правее*, нежели $M_\nu$. Мы знаем, что при таком расположении все эти точки лежат влево от их предельной точки $P$. Выберем еще какую-либо точку $Q$, лежащую вправо от $P$, и рассмотрим совокупность точек $M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots, P, Q$; условимся говорить, что из двух точек этой совокупности та, которая расположена левее другой, имеет более низкий ранг, и постараемся ввести для этих точек обозначения, которые указывали бы на их взаимное расположение.

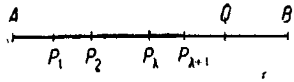
Задача эта для точек $M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$ разрешается теми индексами, которые мы приписали этим точкам. Чтобы распространить это обозначение и на точки $P$ и $Q$, мы обозначим $P$ через $M_\omega$, условившись помнить, что элемент с индексом $\omega$ имеет ранг высший, нежели элемент с любым натуральным индексом $\nu$. Точку $Q$ мы обозначим через $M_{\omega+1}$, условившись раз навсегда, что $M_{\omega+1}$ имеет ранг высший, нежели $M_\omega$. Таким образом, зная индексы двух точек нашего множества, мы тем самым будем знать их взаимное расположение.

Рассмотрим теперь, наряду с уже отмеченными точками, еще последовательность точек $N_1, N_2, \ldots, N_\nu, \ldots$ с возрастающими абсциссами, расположенных между точками $P$ и $Q$ и стремящихся к точке $Q$ (черт. 13). Допустим, что нам желательно ввести единообразные обозначения для всех построенных точек, и притом так, чтобы обозначения эти прямо указывали нам на их взаимное расположение. Для этой цели нам достаточно обозначить точку $N_\nu$ через $M_{\omega+\nu}$, а точку $Q$, расположенную правее всех других, — через $M_{\omega\times 2}$.

Нетрудно построить и более сложные множества. Возьмем на отрезке $AB$ бесконечную последовательность точек




Черт. 13.




Черт. 14.

$P_1, P_2, \ldots, P_\lambda, \ldots$, стремящихся к точке $Q$ (черт. 14). В каждом интервале $P_\lambda$, $P_{\lambda+1}$ построим последовательность точек с возрастающими абсциссами, стремящихся к правому концу $P_{\lambda+1}$ этого интервала. Взаимное расположение двух любых из числа построенных таким образом точек с полною ясностью указывается при следующей системе обозначений. Мы обозначаем слева направо точки, расположенные между $A$ и $P_1$, через $M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$, точку $P_1$ — через $M_\omega$; точки, лежащие между $P_1$ и $P_2$, — через $M_{\omega+1}$, $M_{\omega+2}, \ldots$, $M_{\omega+\nu}, \ldots$, точку $P_2$ — через $M_{\omega\times 2}$, и т. д.

Точки $P_1$, $P_2$, $P_3, \ldots$, $P_\lambda, \ldots$ при этом будут обозначены соответственно через $M_\omega$, $M_{\omega\times 2}$, $M_{\omega\times 3}, \ldots, M_{\omega\times\lambda}, \ldots$ Точка $Q$, расположенная правее всех точек $P_\lambda$, будет обозначена через $M_{\omega^2}$.

17. Другой пример представляет нам рассмотрение *последовательностей натуральных чисел*. Под этим именем мы будем разуметь множество натуральных чисел, расположенных в некотором определенном порядке:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Рассмотрим две последовательности натуральных чисел:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

которые мы обозначим соответственно через $S_1$ и $S_2$. Мы условимся говорить, что последовательность $S_2$ *возрастает сильнее* последовательности $S_1$, если существует такое число $p$, что при $n > p$ всякий раз $b_n > a_n$.

Вообще говоря, две последовательности *несравнимы*, т. е. ни одна из них не возрастает сильнее другой.

Мы покажем, что *если нам дано счетное множество последовательностей, то всегда можно построить последовательность, возрастающую сильнее, нежели каждая из данных.*

Обозначим данные последовательности соответственно через $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, а каждый из элементов — посредством пары индексов. Мы получим таким образом безграничную в двух направлениях таблицу элементов:

$$
\begin{array}{l}
S_1,\ a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1p},\ldots \\
S_2,\ a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2p},\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_n,\ a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots,\ a_{np},\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Мы теперь построим некоторую новую последовательность $\Sigma$, элементы которой мы будем обозначать через $b_1, b_2, \ldots, b_p, \ldots$

За $b_1$ мы примем целое число, следующее за $a_{11}$, за $b_2$ — целое число, следующее за наибольшим из чисел $a_{12}$ и $a_{22}$; за $b_p$ — целое число, следующее за наибольшим из чисел $a_{1p}$ $a_{2p}, \ldots, a_{pp}$.

Последовательность $\Sigma$ тем самым вполне определена. Я утверждаю, что она возрастает сильнее, нежели любая из данных последовательностей. В самом деле, сравнивая $S_n$ и $\Sigma$, мы видим, что, начиная с $n$-го члена

$$b_{n+p} > a_{n,\,n+p},$$

чем и доказывается наше утверждение.

Применим доказанную теорему к следующим последовательностям, из которых каждая возрастает сильнее предыдущей:

$$
\begin{array}{l}
S_1,\ \ 1,\ 1,\ \ldots,\ \ 1\ .\ \ldots \\
S_2,\ \ 2,\ 2,\ \ldots,\ \ 2,\ \ldots. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_n,\ \ n,\ n,\ \ldots,\ \ n,\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Даже не обращаясь к только что найденному правилу, мы непосредственно замечаем, что последовательность

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, p, \ldots$$

возрастает сильнее всех написанных. Чтобы отметить тот факт, что эта новая последовательность возрастает сильнее, чем каждая из последовательностей $S_n$, мы ее обозначим через $S_\omega$, рассматривая $\omega$ в известном смысле как индекс, превышающий все натуральные числа.

Чтобы построить последовательность, возрастающую сильнее, чем $S_\omega$, достаточно увеличить на единицу каждый элемент последовательности $S_\omega$. Мы таким образом получаем последовательность

$$2,\ 3,\ 4, \ldots,$$

возрастающую сильнее, нежели каждая из последовательностей $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots, S_\omega$, и которую мы обозначим через $S_{\omega+1}$. Вообще обозначим через $S_{\omega+n}$ последовательность

$$n+1,\ n+2, \ldots,\ n+p, \ldots$$

Последовательности $S_{\omega+1}, \ldots, S_{\omega+n}, \ldots$ образуют бесконечный ряд, в котором каждая последовательность возрастает сильнее предшествующей. Мы можем поэтому построить последовательность, возрастающую сильнее каждой из них. Такова, например, будет последовательность

$$2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots,$$

которую мы обозначим через $S_{\omega\times 2}$.

Этот процесс мы можем продолжать и далее. Мы обозначим соответственно через $S_{\omega\times 2+1}, S_{\omega\times 2+2}, \ldots, S_{\omega\times 2+\nu}, \ldots$ последовательности

$$\begin{array}{ccccc}
3, & 5, & 7, & 9, & \ldots \\
4, & 6, & 8, & 10, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\nu+2, & \nu+4, & \nu+6, & \nu+8, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Последовательность

$$3,\ 6,\ 9,\ 12, \ldots,$$

возрастающую сильнее всех написанных, мы обозначим через $S_{\omega\times 3}$.

Вообще, обозначим через $S_{\omega\times\lambda}$ последовательность

$$1\times\lambda,\ 2\times\lambda,\ 3\times\lambda,\ldots,$$

и через $S_{\omega\times\lambda+\nu}$ последовательность

$$1\times\lambda+\nu,\ 2\times\lambda+\nu,\ 3\times\lambda+\nu,\ldots$$

Рассмотрим, наконец, последовательности $S_{\omega}$, $S_{\omega\times 2},\ldots;$ $S_{\omega\times\lambda},\ldots$

$$\begin{array}{lllll}
1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\
2, & 4, & 6, & 8, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\lambda, & 2\lambda, & 3\lambda, & 4\lambda, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Непосредственно ясно, что сильнее каждой из них будет возрастать последовательность

$$1,\ 4,\ 9,\ldots,\ \lambda^2,\ldots,$$

которую мы обозначим через $S_{\omega^2}$.

18. Все рассмотренные до сих пор примеры — производные множества, выбранные на отрезке точки, последовательности натуральных чисел — имеют между собою то общее, что в каждом из этих случаев порядок рассматриваемых элементов является совершенно определенным.

При введении новых элементов нам каждый раз приходилось различать два случая. В первом случае мы имели в своем распоряжении множество уже построенных элементов, среди которых один имел наивысший ранг. В этом случае мы присоединяли некоторый новый элемент, ранг которого, по условию, должен был превышать этот старший из дотоле встречавшихся рангов. Во втором случае среди построенных элементов не оказывалось такого, ранг которого превышал бы ранги всех остальных, и мы присоединяли новый элемент, приписывая это свойство его рангу, по определению.

Эти рассуждения и методы мы теперь обобщим, стараясь стать на возможно более общую точку зрения. Элементы тех множеств, о которых будет итти речь в настоящей главе, мы себе будем представлять какими угодно математическими объектами: числами, точками, функциями, последовательностями и т. д.

*Упорядоченные множества.* Данное множество, состоящее из каких угодно элементов, мы будем называть *упорядоченным*, если нами введено соглашение, в силу которого элементы этого множества располагаются в определенном порядке, подчиняющемся следующим требованиям:

а) Из двух любых элементов $a$ и $b$ данного множества один непременно имеет ранг низший, нежели другой; мы условимся писать

$$a \prec b \text{ или } b \succ a,$$

если ранг элемента $a$ ниже ранга элемента $b$.

б) Для трех любых элементов $a$, $b$, $c$ из соотношений $a \prec b$ и $b \prec c$ вытекает, что $a \prec c$.

Например множество всех действительных чисел становится упорядоченным, если мы условимся приписывать низший ранг меньшему из двух чисел $a$ и $b$. При том же условии множество всех рациональных чисел, заключенных между 0 и 1, также становится упорядоченным.

Рациональные числа интервала (0, 1) можно также упорядочить, располагая их в последовательность, т. е. приводя их в соответствие натуральным числам 1, 2,..., $\nu$,... Это можно сделать, например, так: сначала взять числа 0, 1; затем, последовательно, все несократимые дроби, знаменатели которых суть 2, 3, 4,..., $n$,..., располагая при этом дроби с одним и тем же знаменателем в порядке их возрастания, т. е.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$$

Мы можем обозначить эти числа через

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

в том порядке, в каком мы их встречаем при только что описанном процессе.

Условимся теперь, если нам двны два рациональных числа $a_i$ и $a_j$, считать низшим ранг того из них, которое имеет меньший индекс. Благодаря этому соглашению множество рациональных чисел между 0 и 1 становится упорядоченным.

*Подобие множеств.* Два *упорядоченных* множества мы условимся называть *подобными*, если между их элементами существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее порядок этих элементов. Говоря подробнее: пусть элементам $a, b$ одного множества соответствуют элементы $a'$, $b'$ другого; тогда из $a \prec b$ должно следовать $a' \prec b'$, и обратно.

Закон, определяющий собою взаимно-однозначное соответствие, в этом случае мы будем называть *наложением* одного множества на другое.

*Два множества, подобные третьему, подобны между собою.*

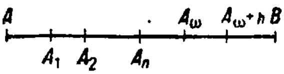
В самом деле, пусть каждое из двух множеств $A$ и $B$ подобно множеству $C$. По предположению существуют два взаимно-однозначных соответствия — первое между элементами множеств $A$ и $C$, второе между элементами множеств $B$ и $C$, причем, если элемены $a$ и $b$ соответствуют элементу $c$, а элементы $a'$ и $b'$ — элементу $c'$, то из соотношения $c \prec c'$ следует, что $a \prec a'$ и $b \prec b'$, и обратно — каждое из двух последних соотношений имеет своим следствием соотношение $c \prec c'$. Таким образом, если мы условимся считать соответствующими друг другу два таких элемента множеств $A$ и $B$, которые соответствуют одному и тому же элементу $c$ множества $C$, то из $b \prec b'$ будет следовать $a \prec a'$; ибо из $b \prec b'$ следует $c \prec c'$, откуда в свою очередь вытекает $a \prec a'$. Следовательно, это соответствие действительно является наложением.

19. *Вполне упорядоченные множества.* Упорядоченное множество мы будем называть *вполне упорядоченным*, если всякое множество, составляющее часть данного множества (в том числе и само данное множество), содержит начальный элемент, т. е. такой элемент, ранг которого ниже ранга всякого другого элемента этого множества.

Пример множества упорядоченного, но не вполне упорядоченного, представляет нам совокупность всех рациональных чисел между 0 и 1, если мы условимся считать низшим ранг того из двух таких чисел, которое по величине меньше другого. В самом деле, если мы обозначим это множество через $E$ и назовем $E'$ часть его, состоящую из чисел, *превышающих* $\frac{1}{2}$, то все числа, принадлежащие множеству $E'$, будут иметь форму $\frac{1}{2}+\alpha$, где $\alpha$ рационально и положительно; но, каково бы ни было $\alpha$, ранг числа $\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)$, также принадлежащего множеству $E'$, ниже, нежели ранг числа $\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)$. Отсюда следует, что множество $E'$ не имеет начального элемента, а следовательно множество $E$ не является вполне упорядоченным.

В качестве примера вполне упорядоченного множества рассмотрим последовательность точек $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, расположенных на прямолинейном отрезке $AB$ таким образом, что каждая из них лежит правее предшествующей. Условимся при этом считать ранг каждой из этих точек выше рангов всех тех, которые лежат влево от нее; тогда из двух точек высший ранг будет иметь та, индекс которой больше. При этом всякая часть данного множества будет иметь начальный элемент, ибо во всякой последовательности натуральных чисел найдется одно наименьшее.

Мы теперь несколько усложним этот пример: рассмотрим точки $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, A_\omega, A_{\omega+1}, \ldots, A_{\omega+h}$, где $h$ — данное натуральное число, расположенное на отрезке $AB$ (черт. 15) следующим образом: для любого $n$ точка $A_{n+1}$ лежит правее $A_n$; $A_\omega$ — правее $A_{n+1}$; $A_{\omega+i}$ правее $A_{\omega+i-1}$ $(i=1, 2, \ldots h)$. Условимся определять ранг этих точек в соответствии с порядком, в котором мы их встречаем, пробегая отрезок $AB$ слева направо. Я утверждаю, что данное множество $E$, упорядоченное таким способом, будет вполне упорядоченным. В самом деле, пусть $E'$ будет произвольная часть множества $E$; покажем, что она содержит начальный элемент. Возможны два случая.




Черт. 15.

*Первый случай.* Множество $E'$ содержит точки с натуральными индексами; в этом случае та из этих точек, которая имеет наименьший индекс, несомненно будет иметь ранг низший, нежели все другие точки множества $E'$.

*Второй случай.* Множество $E'$ не содержит точек с натуральными индексами. В этом случае оно состоит, очевидно, лишь из конечного числа точек и, следовательно, имеет начальный элемент.

Подобным же образом нетрудно убедиться, что множество точек

$$M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots, M_\omega, \ldots, M_{\omega\times\lambda+\nu}, \ldots, M_{\omega^2},$$

построенное нами в п. 16, будет вполне упорядоченным, если мы его упорядочим по тому же принципу, что в предшествующем примере.

Другой пример представляют нам производные множества данного точечного множества $P$. Мы определим множества

$$P^1, P^2, \ldots, P^n, \ldots, P^\omega, \ldots, P^{\omega\times\lambda+\nu}, \ldots, P^{\omega^2},$$

которые мы теперь можем рассматривать как элементы некоторого нового множества $H$. Из двух производных множеств мы условимся считать имеющим низший ранг то, которое было определено раньше другого. При таком соглашении множество $H$ становится вполне упорядоченным.

Наконец, рассмотрим все более сильно возрастающие последовательности:

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots, S_\omega, \ldots, S_{\omega\times\lambda+\nu}, \ldots, S_{\omega^2},$$

построенные по типу п. 17, и примем их за элементы некоторого нового множества $H$. Это множество становится вполне упорядоченным, если мы условимся, что из двух последовательностей высший ранг имеет та, которая возрастает сильнее.

## II. СРАВНЕНИЕ ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ.

20. После того как этими примерами понятие вполне упорядоченного множества сделано достаточно ясным, мы приступаем к исследованию вопроса о подобии и вообще о взаимном сравнении вполне упорядоченных множеств.

*Если множество $E$ вполне упорядочено, то и всякое множество $E'$, составляющее его часть, будет вполне упорядоченным, если мы условимся сохранять для элементов множества $E'$ тот самый порядок, какой они имели в множестве $E$.*

В самом деле, всякое множество $E''$, составляющее часть множества $E'$, есть вместе с тем часть множества $E$ и, следовательно имеет начальный элемент.

*Отрезок.* Пусть $a$ есть произвольный элемент множества $E$. Условимся называть *отрезком множества $E$, определяемым элементом $a$*, множество $A$ всех тех элементов множества $E$, ранг которых ниже, нежели ранг элемента $a$.

Множество $A$ будет вполне упорядоченным, если за его элементами мы сохраним тот порядок, какой они имели в множестве $E$.

Пусть $a$ и $a'$ суть два различных элемента множества $E$; если $a \prec a'$, то отрезок $A$, определяемый элементом $a$, будет отрезком того отрезка $A'$, который определяется элементом $a'$; таким образом *из двух различных отрезков одного и того же вполне упорядоченного множества один всегда служит отрезком другого.*

*Если множества $E$ и $F$ подобны между собою, то отрезки $A$ и $B$, соответственно определяемые в них двумя соответствующими друг другу элементами, также подобны между собою.*

Мы покажем, что наложение, в силу которого множества $E$ и $F$ становятся подобными между собою, вместе с тем дает нам наложение отрезка $A$ на отрезок $B$. В самом деле, при этом всякому элементу $a'$ отрезка $A$ приводится в соответствие некоторый элемент $b'$ множества $F$, который необходимо принадлежит отрезку $B$, ибо из $a' \prec a$ следует, что $b' \prec b$. Подобным же образом всякому элементу отрезка $B$ соответствует некоторый элемент отрезка $A$, и это соответствие между элементами двух отрезков является *взаимным*. Далее, я утверждаю, что соответствие это представляет собою наложение, ибо соотношение $a' \prec a''$ между двумя элементами отрезка $A$ влечет за собою соотношение $b' \prec b''$ между соответствующими элементами отрезка $B$. Таким образом отрезки $A$ и $B$ подобны между собою.

Итак, *если два вполне упорядоченных множества подобны между собою, то каждый отрезок одного из них подобен некоторому отрезку другого.*

21. *Вполне упорядоченное множество $E$ не может быть подобным одному из своих отрезков.*

Покажем, что допуская возможность наложения множества $E$ на один из его отрезков $A$, мы неизбежно приходим к противоречию.

Пусть отрезок $A$ определяется элементом $a$. Этот элемент $a$, рассматриваемый как элемент множества $E$, соответствует некоторому элементу $a_1$ отрезка $A$; при этом, по самому определению отрезка, $a_1 \prec a$. Обозначим через $A_1$ отрезок множества $A$, определяемый элементом $a_1$; как мы только что видели, отрезки $A$ и $A_1$ подобны между собою.

Мы снова повторяем то же самое рассуждение. Элемент $a_1$ множества $A$ соответствует некоторому элементу $a_2$ множества $A_1$, ранг которого ниже, нежели ранг элемента $a_1$. Пусть $A_2$ есть отрезок, определяемый элементом $a_2$. Отрезки $A_1$ и $A_2$ подобны между собою. Ясно, что это рассуждение мы можем продолжать сколько угодно далеко. Таким образом мы получаем бесконечную последовательность элементов множества $E$: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, которая *не может содержать начального элемента,* ибо ранг каждого из ее элементов ниже, чем ранг предшествующего. Это очевидно создает противоречие.

Заметим, что если данное вполне упорядоченное множество содержит бесконечное множество элементов, то в нем непременно найдется такая часть, которая подобна самому множеству.

Рассмотрим, например, множество натуральных чисел 1, 2, 3,..., $n$,..., расположенных в порядке возрастания. Множество чисел 4, 5,..., $n+3$,... будет ему подобным; чтобы в этом убедиться, достаточно всякому числу $n$ первого множества поставить в соответствие число $n+3$ второго множества. Подобным же образом множества 1, 2,..., $n$,... и 2, 4, 6,..., $2n$,... подобны между собою, причем второе является частью первого.

22. Из последней теоремы мы выведем два важных следствия.

*Если даны два вполне упорядоченных множества $E$ и $F$, то какой-либо отрезок одного из них может быть подобен не более чем одному отрезку другого.*

В самом деле, если бы отрезок $A$ множества $E$ был подобен двум различным отрезкам $B$ и $B'$ множества $F$, то отрезки $B$

и $B'$ были бы подобны между собою, что невозможно, ибо один из них, как мы знаем, служит отрезком другого.

*Два подобных между собою вполне упорядоченных множества $E$ и $F$ могут быть наложены друг на друга только одним способом.*

В самом деле, если бы существовало два различных наложения, то по меньшей мере один элемент $a$ множества $E$ в этих наложениях соответствовал бы двум различным элементам $b$ и $b'$ множества $F$. Но в таком случае отрезок $A$ (определяемый элементом $a$) множества $E$ был бы подобен двум различным отрезкам $B$ и $B'$ множества $F$, что невозможно, как мы только что убедились.

23. Если $E$ и $F$ суть два вполне упорядоченных множества и если отрезок $A$ множества $E$, определяемый элементом $a$, подобен отрезку $B$ множества $F$, определяемому элементом $b$, то мы условимся называть элементы $a$ и $b$ взаимно гомологичными.

Заметим, что, если только множества $E$ и $F$ оба действительно существуют, то в них всегда можно найти пару гомологичных элементов: для этого достаточно взять начальные элементы обоих множеств.

В частном случае, когда множества $E$ и $F$ подобны между собою, мы знаем, что они допускают единственное взаимное наложение. Два элемента, соответствующие друг другу в этом наложении, будут взаимно гомологичными, ибо, как мы видели, соответствующие им отрезки подобны между собою.

Если множества $E$ и $F$ произвольны то:

I. *Каждый элемент $a$ множества $E$ имеет не более одного гомологичного ему элемента в множестве $F$.* В самом деле, если бы их было два, то отрезок $A$ был бы подобен двум различным отрезкам множества $F$, что невозможно (п. 22).

II. *Если элемент $a$ множества $E$ и элемент $b$ множества $F$ взаимно гомологичны, то всякому элементу $a'$ множества $E$, ранг которого ниже ранга элемента $a$, также найдется гомологичный ему элемент в множестве $F$.*

В самом деле, отрезки $A$ и $B$ подобны между собою. Элементы, соответствующие друг другу при взаимном наложении отрезков $A$ и $B$, будут взаимно гомологичны, если их рассматривать как элементы множеств $A$ и $B$; следовательно, они будут гомологичны и при условии, что мы их рассматриваем как элементы множеств $E$ и $F$.

III. *Если элемент $a$ множества $E$ не имеет гомологичного себе элемента в множестве $F$, то это же самое имеет место и для всякого элемента $a' \succ a$ множества $E$.*

В самом деле, если бы для $a'$ имелся гомологичный элемент в множестве $F$, то в силу пункта II то же самое имело бы место и для элемента $a$.

IV. *Множество тех элементов множества $E$, для которых имеются гомологичные элементы в множестве $F$, либо совпадает с множеством $E$, либо составляет его отрезок.*

В самом деле, если множество $E$ содержит такие элементы, которым нет гомологичных в множестве $F$, то среди этих элементов должен иметься такой, ранг которого ниже рангов всех других. Обозначим этот элемент через $a$. Всякий элемент, который меньше $a$, имеет гомологичный элемент в множестве $F$, и наоборот, всякий элемент, который больше $a$, согласно пункту III, такого гомологичного элемента не имеет. Таким образом совокупность тех элементов множества $E$, для которых в множестве $F$ найдутся гомологичные элементы, составляет некоторый отрезок множества $E$, определяемый элементом $a$.

V. *Если два вполне упорядоченных множества $E$ и $F$ таковы, что всякому элементу одного из них найдется гомологичный элемент в другом, то эти два множества подобны между собою.*

Именно, я утверждаю, что соответствие, связывающее друг с другом два гомологичных элемента, является наложением. Для этого достаточно показать, что, если $a$ и $a'$ суть два любых элемента множества $E$, а $b$ и $b'$ — соответственно гомологичные им элементы множества $F$, то из соотношения $a \prec a'$ следует $b \prec b'$.

Отрезок $A'$ множества $E$, определяемый элементом $a'$, и отрезок $B'$ множества $F$, определяемый элементом $b'$, подобны между собою. Так как отрезок $A$ есть отрезок по отношению к $A'$, то у множества $B'$ найдется подобный ему отрезок $B_1$. При этом $B_1$ есть единственный отрезок множества $F$, обладающий этим свойством. Но отрезок $A$ подобен отрезку $B$, ибо элементы $a$ и $b$ по условию взаимно гомологичны. Следовательно, $B$ совпадает с $B_1$; поэтому $B$ есть отрезок множества $B'$, и, следовательно, $b \prec b'$.

Рассмотрим теперь два произвольных вполне упорядоченных множества. Здесь возможны два случая: либо всякий элемент каждого из данных множеств имеет гомологичный элемент в другом множестве, и тогда данные множества подобны между собою, согласно пункту V; либо в одном из данных множеств найдется по крайней мере один элемент, не имеющий гомологичного элемента в другом множестве. Рассмотрим этот случай подробнее.

Допустим, что множество $E$ содержит такие элементы, для которых нет гомологичных во множестве $F$. В силу пункта IV совокупность тех элементов множества $E$, для которых имеются гомологичные элементы в множестве $F$, составляет некоторый отрезок $A$ множества $E$, определяемый элементом $a$. Я утверждаю, что все элементы множества $F$ имеют гомологичные элементы в множестве $E$ (причем последние, разумеется, все принадлежат отрезку $A$); в самом деле, в противном случае элементы множества $F$, имеющие гомологичные элементы в множестве $E$, составили бы, на основании пункта IV, некоторый отрезок $B$ множества $F$, определяемый некоторым элементом $b$; множества $A$ и $B$ при этом были бы таковы, что любой элемент одного из них имел бы гомологичный элемент в другом; в силу пункта V они были бы подобны между собою, вследствие чего $a$ и $b$ были бы взаимно-гомологичными элементами, что невозможно, ибо элемент $b$ по условию не имеет гомологичного элемента в множестве $E$. Итак, множества $A$ и $F$ таковы, что любой элемент одного из них имеет гомологичный элемент в другом, и, следовательно, множество $F$ подобно отрезку $A$ множества $E$. — Таким образом мы приходим к основной теореме, которая и составляет конечный результат всей предшествующей цепи рассуждений:

Теорема. *Два вполне упорядоченных множества $E$ и $F$ либо подобны между собою, либо одно из них подобно некоторому отрезку другого.*

## III. СЧЕТНЫЕ ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА.

24. Если вполне упорядоченное множество $E$ подобно отрезку другого вполне упорядоченного множества $F$, то мы условимся называть множество $F$, по сравнению с множеством $E$, *более протяженным.*

Попробуем строить все более и более протяженные вполне упорядоченные множества. К этому мы придем при помощи следующих общих процессов, которыми мы уже пользовались в некоторых частных случаях.

Процесс первый. Если нам дано вполне упорядоченное множество, содержащее элемент $a$, ранг которого превышает ранги всех других элементов, то мы получим более протяженное, вполне упорядоченное множество, присоединяя к данному множеству элемент $b$, ранг которого по условию превышает ранг элемента $a$.

Новое множество будет вполне упорядоченным; в самом деле, всякая часть этого множества, если только она не состоит из единственного элемента $b$, содержит элементы первоначального множества; среди них найдется один, ранг которого ниже рангов всех остальных; и, разумеется, это свойство он сохранит за собою и в новом множестве.

В качестве примера, иллюстрирующего этот процесс, мы приведем образование множества, состоящего из $\nu+1$ элементов, из множества, содержащего лишь $\nu$ элементов.

Подобным уже образом, отправляясь от множества элементов, отмеченных индексами

$$1, 2, \ldots, \nu, \ldots, \omega,$$

мы умеем уже строить множество, содержащее все эти элементы, и кроме них еще элемент с индексом $(\omega + 1)$.

**Процесс второй.** Допустим, что нам удалось построить последовательность вполне упорядоченных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots,$ подчиненную следующему условию: множество $A_1$ есть отрезок множества $A_2$; множество $A_2$ есть отрезок множества $A_3$ и т. д; вообще, множество $A_\nu$ есть отрезок множества $A_{\nu+1}$; я утверждаю, что в таком случае мы можем построить новое вполне упорядоченное множество $B$, по отношению к которому каждое из множеств $A_\nu$ будет служить отрезком. Для этой цели мы поступаем следующим образом: сначала берем все элементы множества $A_1$; за ними помещаем, в их последовательном порядке, элементы множества $A_2$, не входящие в множество $A_1$; далее — элементы множества $A_3$, не входящие в множество $A_2$, и т. д. до бесконечности. Получаемое таким образом множество обозначим через $B$. Я утверждаю, что это множество будет вполне упорядоченным, если мы введем следующие соглашения: 1) если два элемента этого множества принадлежат множеству $A_\nu$, причем ни один из них не принадлежит множеству $A_{\nu-1}$, то соотношение их рангов то же, каким оно было в множестве $A_\nu$, и 2) для двух элементов, введенных в множество $B$ двумя различными операциями, порядок рангов определяется порядком этих операций.

Мы должны показать, что всякая часть $B'$ множества $B$ имеет начальный элемент. Обозначим через $A_\nu'$ совокупность тех элементов множества $B'$, которые принадлежат множеству $A_\nu$.

Если множество $A_1'$ не пустое, то среди его элементов найдется такой, ранг которого ниже рангов всех остальных элементов множества $A_1'$, а следовательно и всех остальных элементов множества $B'$. Если множество $A_1'$ пустое, а множество $A_2'$ содержит хоть один элемент, то начальный элемент множества $A_2'$ отвечает нашему утверждению. Если множества $A_1'$ и $A_2'$ оба пусты, то мы обращаемся к множеству $A_3'$, и т. д. Продолжая эти рассуждения, мы после конечного числа шагов непременно придем к некоторому не пустому множеству $A_\nu'$, начальный элемент которого будет вместе с тем начальным элементом множества $B'$.

Таким образом множество $B$ вполне упорядочено. Заметим, что оно не может содержать такого элемента, ранг которого превосходил бы ранги всех прочих. В самом деле, всякий его элемент $a$ введен в это множество при помощи операции некоторого ранга $\nu$. Элементы множества $A_{\nu+1}$, вводимые следующей операцией, все будут иметь ранг высший, нежели $a$.

В качестве примера рассмотрим множества, каждое из которых составляет отрезок следующего, причем мы допустим, что множество $A_\nu$ содержит $\nu$ элементов, и, следовательно, элементы его могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие с числами $1, 2, \ldots, \nu$.

Тогда применением нашего второго процесса мы получаем множество, элементы которого могут быть приведены во взаимно-однозначное соответствие с числами

$$1,\ 2,\ \ldots,\ \nu, \ldots$$

Далее мы умеем уже строить последовательность вполне упорядоченных множеств с таким расчетом, чтобы элементы множества $A_1$ приводились в соответствие с символами

$$1,\ 2, \ldots, \nu, \ldots,$$

элементы множества $A_2$— с символами

$$1,\ 2, \ldots, \nu, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega+\nu, \ldots,$$

и вообще элементы множества $A_\lambda$ (где $\lambda$ — любое натуральное число) — с символами

$$1, 2, \ldots, \nu, \ldots, \omega, \ldots, \omega+\nu, \ldots, \omega\times(\lambda-1), \ldots, \omega\times(\lambda-1)+\nu, \ldots$$

Применяя наш второй процесс к этой последовательности множеств, мы получаем множество, элементы которого могут быть приведены в соответствие с символами:

$$1,\ 2, \ldots, \nu, \ldots, \omega, \ldots, \omega\times\lambda+\nu, \ldots,$$

где $\nu$ и $\lambda$ принимают все целые положительные значения.

Процесс третий. Имея вполне упорядоченное множество, не содержащее такого элемента, ранг которого был бы выше рангов всех других элементов, мы присоединяем новый элемент, ранг которого по условию превышает ранг каждого из элементов первоначального множества.

Ясно, что сохраняя все имеющиеся соотношения между рангами элементов, мы получаем в результате вполне упорядоченное множество.

Например, к двум множествам, построенным в двух последних примерах, элементы которых соответственно снабжены индексами

$$1, 2, \ldots, \nu, \ldots$$

и

$$1, 2, \ldots \nu, \ldots, \omega, \ldots, \omega \times \lambda + \nu, \ldots,$$

мы можем присоединить по одному элементу, индекс которого будет соответственно $\omega$ и $\omega^2$.

Каждый из трех описанных процессов, будучи применяем к счетным множествам, снова приводит нас к счетному множеству.

Это является очевидным в случае первого и третьего процессов, ибо в обоих этих случаях к данному счетному множеству присоединяется только один элемент. В случае второго процесса предложение наше следует из того, что, как известно, соединение счетного множества счетных множеств снова представляет собою счетное множество.

25. Теперь мы проведем для счетных вполне упорядоченных множеств исследование, в известном смысле обратное предыдущему. Мы покажем, что такое множество может всегда быть получено из менее протяженных множеств при помощи описанных трех процессов.

Когда нам задано счетное вполне упорядоченное множество $E$, мы можем различать два случая:

*Первый случай.* Множество $E$ имеет такой элемент, ранг которого выше рангов всех прочих его элементов. Обозначим этот элемент через $a$, а совокупность всех остальных элементов через $E'$. Ясно, что множество $E$ может быть получено из множества $E'$ посредством первого или третьего процессов, смотря по тому, содержит ли множество $E'$ элемент наивысшего ранга или нет.

*Второй случай.* Множество $E$ не имеет элемента, ранг которого был бы выше рангов всех остальных элементов. Мы покажем, что в этом случае множество $E$ может быть получено применением второго процесса.

Так как множество $E$ по условию счетное, то элементы его могут быть расположены в последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\nu, \ldots, \tag{1}$$

т. е. приведем во взаимно однозначное соответствие с совокупностью всех натуральных чисел. С другой стороны, так как по условию множество $E$ не имеет элемента наивысшего ранга, то для всякого его элемента найдется другой, ранг которого выше.

Начнем с элемента $a_1$. Последовательность (1) содержит бесчисленное множество элементов, ранг которых превышает ранг элемента $a_1$. Выберем среди них тот, который в последовательности (1) имеет наименьший индекс; пусть это будет $a_{\lambda_2}$. Ясно, что $\lambda_2 \geqq 2$, и что ранг элемента $a_{\lambda_2}$ выше ранга любого из элементов, предшествующих ему в последовательности (1).

В последовательности

$$a_{\lambda_2+1}, \; a_{\lambda_2+2}, \ldots$$

пусть $a_{\lambda_3}$ будет первый элемент, ранг которого превосходит ранг элемента $a_{\lambda_2}$. Этот элемент $a_{\lambda_3}$ имеет в множестве $E$ ранг, превышающий ранг каждого из элементов, предшествующих $a_{\lambda_3}$ в последовательности (1). Этот процесс мы можем продолжать неограниченно. При этом мы получаем безграничную последовательность элементов:

$$a_1 \prec a_{\lambda_2} \prec a_{\lambda_3} \prec \ldots \prec a_{\lambda_\nu} \prec \ldots, \tag{2}$$

причем каждый из элементов этой последовательности (2) имеет ранг высший, нежели любой элемент, предшествующий ему в последовательности (1); кроме того, мы имеем:

$$\lambda_{\nu+1} \succ \lambda_\nu \geqq \nu.$$

*Я* утверждаю теперь, что для любого элемента множества $E$ в последовательности (2) найдутся элементы, превышающие его по рангу. В самом деле, выбранный элемент непременно встретится в последовательности (1); если мы его обозначим через $a_\nu$, то $\lambda_{\nu+1} \succ \nu$, и в то же время ранг элемента $a_{\lambda_{\nu+1}}$ превышает ранг любого из элементов, предшествующих ему в последовательности (1), и в частности, следовательно, элемента $a_\nu$.

Мы видим, таким образом, что если $E$ есть счетное вполне упорядоченное множество, то из него можно извлечь последовательность элементов, ранг которых непрестанно возрастает таким образом, что для любого элемента множества $E$ в этой последовательности найдется элемент высшего ранга.

Отсюда мы заключаем, что множество $E$ может быть составлено применением второго из наших процессов к множествам менее протяженным. В самом деле, обозначим через $A_1$ совокупность тех элементов множества $E$, ранг которых ниже ранга элемента $a_1$, через $A_2$ совокупность тех элементов множества $E$, ранг которых ниже ранга элемента $a_{\lambda_2}$, и т. д. Каждое из этих множеств менее протяженно, нежели множество $E$, ибо составляет его отрезок. Второй процесс, будучи применен к этой последовательности множеств, приводит нас к множеству $E$.

Мы, таким образом, видим, что трех описанных нами процессов действительно достаточно, чтобы построить любое счетное вполне упорядоченное множество, отправляясь от множеств менее протяженных.

26. Проведенное нами исследование естественно приводит нас к следующим определениям: вполне упорядоченное множество может содержать элементы двух родов; элемент $a$ мы будем называть элементом *первого рода*, если отрезок, определенный этим элементом, содержит элемент наивысшего ранга. В противном случае мы будем называть $a$ элементом *второго рода*.

Как мы видели, для всякого элемента $a$ второго рода мы можем найти в определяемом им отрезке $A$ такую последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$, что

$$a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_\nu \prec \ldots$$

и что для любого элемента отрезка $A$ в этой последовательности найдется элемент, превосходящий его по рангу.

Множество $E$ при этом несомненно содержит элементы, по рангу превосходящие все $a_\nu$, и среди этих элементов элемент $a$ имеет самый низкий ранг.

Пусть теперь, обратно, нам дано некоторое вполне упорядоченное множество $E$, и мы рассматриваем какую-либо последовательность

$$a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_\nu \prec \ldots$$

элементов этого множества. Допустим, что множество $E$ содержит элементы, ранг которых превышает ранги всех $a_\nu$. Среди всех элементов, обладающих этим свойством, имеется один с наинизшим рангом; обозначим его через $a$. Пусть нам известно, что $a' \prec a$; в таком случае я утверждаю, что найдется такое натуральное число $\nu$, что $a' \prec a_\nu$; в самом деле, в противном случае мы имели бы $a_\nu \prec a'$ при любом $\nu$, и, следовательно, по определению элемента $a$, либо $a \prec a'$, либо $a'$ совпадает с $a$; то и другое противоречит нашему предположению.

Таким образом последовательность

$$a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_\nu \prec \ldots$$

и элемент $a$ связаны друг с другом следующими условиями: 1) $a_\nu \prec a$ при всяком $\nu$ и 2) если $a' \prec a$, то найдется такое $\nu$, что $a' \prec a_\nu$.

В этом случае мы условимся говорить, что элемент $a$ является *предельным элементом* для элемента $a_\nu$ при неограниченном возрастании $\nu$, а также, что последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ является *фундаментальною последовательностью*, определяющей элемент $a$.

Важно исследовать, при каких условиях две фундаментальные последовательности определяют собою один и тот же предельный элемент. В этом случае мы будем называть их *эквивалентными*.

*Необходимое и достаточное условие для эквивалентности двух последовательностей состоит в том, чтобы для каждого элемента любой из них в другой последовательности существовал элемент, превосходящий его по рангу.*

В самом деле, рассмотрим две фундаментальных последовательности:

$$a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_\nu \prec \ldots,$$

$$b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_\nu \prec \ldots.$$

Для доказательства необходимости нашего условия заметим, что если оно не выполнено, то существует, например, такой элемент $b_{\nu'}$, что $a_\nu \prec b_{\nu'}$ при всяком $\nu$ (ясно, что ни один элемент $a_\nu$ не может совпадать с $b_{\nu'}$, ибо в таком случае мы имели бы $a_{\nu+1} \succ b_{\nu'}$). Таким образом либо $b_{\nu'} \succ a$, либо $a$ и $b_{\nu'}$ совпадают. Отсюда *a fortiori* следует, что $b \succ a$ и последовательности не эквивалентны.

Но наше условие и достаточно. В самом деле, если для каждого $a_\nu$ найдется такой элемент $b_{\nu'}$, что $a_\nu \prec b_{\nu'}$, то ясно, что $b \succ a_\nu$ при любом $\nu$, и, следовательно, либо $b \succ a$, либо $b$ и $a$ совпадают. Подобным же образом мы покажем, что либо $a \succ b$, либо $a$ и $b$ совпадают. Сопоставляя эти результаты, мы видим, что $a$ и $b$ необходимо должны совпадать.

## IV. ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА.

27. В предшествующих рассуждениях нами руководила основная идея взаимного расположения элементов множества. Только на этом взаимном расположении мы сосредоточивали наше внимание, совершенно отвлекаясь от природы рассматриваемых элементов. Теперь мы введем некоторые новые понятия и обозначения, имеющие целью дать нам возможность приписывать определенный ранг каждому элементу вполне упорядоченного множества.

Элементарная теория натуральных чисел преследует двоякую задачу: во-первых, рассматривая какую-либо коллекцию каких угодно предметов и совершенно отвлекаясь от их природы с тем, чтобы видеть в них только некие тождественные между собою единицы, мы приходим к понятию натурального числа. Во вторую очередь, после того как это понятие нами усвоено, мы, в целях удобства, вводим для различных натуральных чисел, по крайней мере для некоторых из них, индивидуальные названия и обозначения.

Подобным же образом для вполне упорядоченных множеств нам представляется удобным, в целях придания большей определенности понятию ранга, ввести некоторый новый термин и в соответствии с этим рассуждать так, как если бы всякий элемент вполне упорядоченного множества имел раз навсегда определенный ранг. Мы уже видели, что натуральных чисел нам для этой цели недостаточно; поэтому мы к ним присоединим символы нового рода, которые мы будем называть *трансфинитными* числами. Понятие, которое таким образом возникает при рассмотрении вполне упорядоченных множеств, подобно тому как понятие натурального числа возникает при рассмотрении коллекций каких угодно предметов — есть понятие *конечного* или *трансфинитного порядкового числа*. Каждому элементу вполне упорядоченного множества мы приписываем определенный ранг, представляющий собою конечное или трансфинитное порядковое число. Поэтому эти вводимые нами порядковые числа должны быть таковы, чтобы двум различным элементам одного и того же вполне упорядоченного множества соответствовали два различных порядковых числа; при этом мы, естественно, считаем, что порядковое число $\alpha$, соответствующее элементу низшего ранга, меньше порядкового числа $\beta$, соответствующего элементу высшего ранга, что мы будем обозначать так: $\alpha < \beta$. В двух подобных между собою вполне упорядоченных множествах два взаимно гомологичных элемента должны рассматриваться как имеющие один и тот же ранг, и, следовательно, им должно соответствовать одно и то же порядковое число. Так как порядковые числа, по определению, обозначают ранги элементов вполне упорядоченного множества, то сами они образуют множество вполне упорядоченное.

После того как нами усвоено понятие трансфинитного числа, будет уместным в целях удобства раз навсегда установить названия и обозначения, по крайней мере для некоторых трансфинитных чисел.

28. Среди порядковых чисел, прежде всего, должны встречаться все натуральные числа, так как всякая конечная коллекция предметов, расположенных в определенном порядке, яв-

ляется вполне упорядоченным множеством. Мы будем считать ряд натуральных чисел начинающимся с нуля или с единицы, смотря по обстоятельствам.

Мы будем говорить, что множество натуральных чисел (вместе с числом 0 в некоторых случаях) составляет *первый* класс порядковых чисел. Все порядковые числа, отличные от нуля и от натуральных чисел, мы будем называть *трансфинитными*.

Мы займемся теми трансфинитными числами, которые необходимы для определения рангов всех элементов в *счетных* вполне упорядоченных множествах. Совокупность этих трансфинитных чисел мы будем называть *вторым* классом порядковых чисел.

Так например, символ $\omega$, введенный в главе I, представляет собою трансфинитное число, принадлежащее второму классу. Сверх того, это есть наименьшее число второго класса, ибо во всяком вполне упорядоченном множестве, содержащем бесчисленное множество элементов и среди них такие, которые не соответствуют никаким натуральным числам, — тот из этих последних, который имеет самый низкий ранг, соответствует числу $\omega$.

Мы теперь можем перенести на трансфинитные числа результаты, полученные нами относительно счетных вполне упорядоченных множеств, и в частности — разделение элементов такого множества на два *рода*. Порядковое число мы будем называть числом *первого рода*, если оно определяется как непосредственно следующее за другим числом, определенным ранее. Порядковое число *второго рода* мы будем опрелелять следующим образом: пусть нам дано счетное множество $A$ порядковых чисел первого или второго класса. Если множество это не содержит числа, превышающего все остальные, то мы вводим новое трансфинитное число, которое по определению превышает все числа множества $A$, непосредственно следуя за ними. Мы уже знаем, что из множества $A$ можно извлечь последовательность чисел

$$a_1 < a_2 < \ldots a_\nu < \ldots, \tag{1}$$

обладающую тем свойством, что для каждого числа, входящего в множество $A$, в этой последовательности найдется число, его превышающее. Число $a$, которое мы теперь вводим и которое по определению является числом, непосредственно следующим за всеми числами последовательности (1), мы будем называть *предельным числом* числа $a_\nu$ при неограниченном возрастании $\nu$. Это число принадлежит второму классу, ибо мы можем построить счетное вполне упорядоченное множество, различные элементы которого соответствуют всем числам множества $A$ и числу $a$.

Две последовательности порядковых чисел типа (1) имеют одно и то же предельное число, при условии, что для каждого числа любой из этих двух последовательностей в другой последовательности найдется число, его превышающее. Это является непосредственным следствием аналогичного предложения для множеств (п. 26).

Если дано счетное множество $A$ чисел, принадлежащих первому и второму классу, то существуют числа, не выходящие за пределы этих классов и превышающие все числа множества $A$. В самом деле, если множество $A$ содержит число, превышающее все остальные, то число, непосредственно за ним следующее, доказывает наше утверждение. Если же множество $A$ такого числа не содержит, то только что описанный процесс дает нам возможность построить новое число, превышающее все числа множества $A$ и также принадлежащее второму классу. Это предложение показывает, что *множество всех чисел второго класса не есть счетное множество.*

29. Теперь мы изложим основания системы обозначений для первых трансфинитных чисел*. После чисел $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$, составляющих первый класс, мы помещаем число $\omega$; при этом, по определению, $\omega > \nu$ при всяком $\nu$, и

$$\omega = \lim_{\nu \to \infty} \nu.$$

За числом $\omega$ следуют числа

$$\omega + 1,\ \omega + 2, \ldots, \omega + \nu, \ldots,$$

и пределом этой последовательности является число $\omega \times 2$, или $\omega \cdot 2$.

Вслед затем мы помещаем числа

$$\omega \times 2 + 1, \ldots, \omega \times 2 + \nu, \ldots,$$

и

$$\lim_{\nu \to \infty} [\omega \times 2 + \nu] = \omega \times 3.$$

---

* В теории Кантора эти обозначения являются следствием определения некоторых действий, производимых над трансфинитными числами, как-то: сложение, умножение и т. д. Отнюдь не отрицая интереса этой теории, но вместе с тем руководясь тем соображением, что для нашей цели трансфинитные числа нужны исключительно с точки зрения их взаимного расположения, мы избрали несколько иной способ изложения, в котором мы все внимание сосредоточиваем исключительно на этих порядковых взаимоотношениях между трансфинитными числами.

Вообще,

$$\lim_{\nu \to \infty} [\omega \cdot (\lambda - 1) + \nu] = \omega \cdot \lambda.$$

Таким путем мы определяем числа $\omega \times \lambda + \nu$, где $\lambda$ и $\nu$ принимают всевозможные натуральные значения. В этом множестве нет числа, превышающего все остальные. Поэтому мы в нем можем выбрать фундаментальную последовательность; таковою будет, например, последовательность:

$$\omega, \omega \times 2, \omega \times 3, \ldots, \omega \times \lambda, \ldots$$

Предельное число этой последовательности мы обозначим через $\omega^2$:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \omega \times \lambda = \omega^2.$$

Вслед за числом $\omega^2$ мы помещаем числа

$$\omega^2 + 1,\ \omega^2 + 2, \ldots, \omega^2 + \nu, \ldots$$

и полагаем

$$\lim_{\nu \to \infty} (\omega^2 + \nu) = \omega^2 + \omega.$$

Далее, к числу $\omega^2 + \omega$ мы прибавляем единицу и т. д. и полагаем

$$\lim_{\nu \to \infty} (\omega^2 + \omega + \nu) = \omega^2 + \omega \times 2.$$

Продолжая этот процесс, мы определим все числа вида $\omega^2 + \omega \times \lambda + \nu$, где $\lambda$ и $\nu$ принимают все натуральные значения. Предельное число этих чисел при неограниченном возрастании $\lambda$ мы обозначим через $\omega^2 \times 2$.

Далее, мы рассматриваем числа вида:

$$\omega^2 \times 2 + \omega \times \lambda + \nu$$

и полагаем

$$\lim_{\lambda \to \infty} (\omega^2 \times 2 + \omega \times \lambda) = \omega^2 \times 3.$$

Продолжая этот процесс, мы определим все числа типа

$$\omega^2,\ \omega^2 \times 2, \ldots, \omega^2 \times \lambda, \ldots,$$

и положим

$$\lim_{\lambda \to \infty} \omega^2 \times \lambda = \omega^3.$$

Далее, подобно тому как мы составляли многочлены второй степени относительно $\omega$, мы теперь будем составлять многочлены степени 3, затем $4, \ldots, \mu, \ldots$:

$$A = \omega^{\mu} \alpha_0 + \omega^{\mu - 1} \alpha_1 + \ldots + \omega \alpha_{\mu - 1} + \alpha,$$

где $\alpha$ суть натуральные числа, из которых некоторые (но только не $\alpha_0$) могут быть нулями. Чтобы сравнить число $A$ с аналогичным числом

$$B = \omega^{\nu}\beta_0 + \omega^{\nu-1}\beta_1 + \ldots + \omega\beta_{\nu-1} + \beta_{\nu}$$

и решить вопрос о том, какое из них больше, мы поступаем так. Если $\mu > \nu$, то $A > B$; если $\mu = \nu$ и $\alpha_0 > \beta_0$, то $A > B$; если $\mu = \nu$ и $\alpha_0 = \beta_0$, то мы сравниваем следующие члены так, как мы сравнивали первые. Если $\alpha_1$ отлично от нуля и $\alpha_1 > \beta_1$, то $A > B$ и т. д.

Теперь мы можем считать определенными все трансфинитные числа, которые обозначаются помощью многочленов с натуральными коэфициентами, расположенных по степеням $\omega$. Из множества всех этих чисел мы выберем фундаментальную последовательность

$$\omega < \omega^2 < \omega^3 < \ldots < \omega^{\lambda} < \ldots$$

и положим

$$\lim_{\lambda \to \infty} \omega^{\lambda} = \omega^{\omega}.$$

Прежде чем итти далее, мы несколько систематизируем введенные до сих пор обозначения.

В числе рассмотренных уже нами чисел мы встречали числа типа $\omega^{\gamma}$, где $\gamma$ было каким-либо числом, определенным ранее. Тогда числа, следующие за $\omega^{\gamma}$, определяются следующим образом.

После числа $\omega^{\gamma}$ мы помещаем числа вида $\omega^{\gamma} + \alpha$, где $\alpha$ пробегает все числа, меньшие, нежели $\omega^{\gamma}$. Среди этих чисел вида $\omega^{\gamma} + \alpha$ нет наибольшего. Число, непосредственно всех их превышающее, мы обозначим через $\omega^{\gamma} \times 2$. Далее, мы помещаем числа вида $\omega^{\gamma} \times 2 + \alpha$, где $\alpha$ снова пробегает все числа меньшие $\omega^{\gamma}$. Вообще, определив число $\omega^{\gamma} \times \lambda$, мы рассматриваем все числа вида $\omega^{\gamma} \times \lambda + \alpha$, где $\alpha < \omega^{\gamma}$, и предельное число этого множества обозначаем через $\omega^{\gamma} \times (\lambda + 1)$. Наконец, рассматриваем совокупность всех введенных таким образом чисел; предельное число их будет $\omega^{\gamma} \times \omega$ или $\omega^{\gamma+1}$.

Так, после $\omega^{\omega}$ мы введем числа вида $\omega^{\omega} + \alpha$, где $\alpha$ принимает все значения, меньшие $\omega^{\omega}$, далее, числа вида $\omega^{\omega} \times \lambda + \alpha$, где $\lambda$ принимает все натуральные значения, и, наконец, — число $\omega^{\omega+1}$. Производя тот же ряд построений с числом $\omega^{\omega+1}$, мы придем к числу $\omega^{\omega+2}$ и т. д., вообще — к числу $\omega^{\omega+\nu}$ и т. д., причем показатели будут чередоваться в порядке самих трансфинитных чисел.

Заметим, наконец, что если нам приходится рассматривать последовательность чисел

$$\omega^{\alpha_1} < \omega^{\alpha_2} < \ldots < \omega^{\alpha_\nu} < \ldots,$$

откуда следует, что

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\nu < \ldots,$$

то предельное число этой последовательности (число, непосредственно превосходящее все ее элементы) мы обозначаем через $\omega^{\lim \alpha_\nu}$. Законность этого определения вытекает из того, что если две последовательности

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots,$$

и

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots,$$

определяют одно и то же число, то число $\omega^{\alpha_\nu}$ менее числа $\omega^{\beta_{\nu'}}$, если $\nu'$ выбрано так, что $\alpha_\nu < \beta_{\nu'}$, и обратно; следовательно последовательности $\omega^{\alpha_\nu}$ и $\omega^{\beta_{\nu'}}$ определяют одно и то же число.

Таким образом после $\omega^\omega$ мы рассматриваем числа, которые суть степени числа $\omega$ с показателями, представляющими собою многочлены, расположенные по степеням числа $\omega$; предельным числом для этих чисел будет $\omega^{\omega^\omega}$.

Обратим внимание, что всякое новое введенное нами соглашение позволяет нам строить и обозначать новые трансфинитные числа, но каждый раз лишь в счетном числе. В данный момент мы научились обозначать множество трансфинитных чисел, в котором мы имеем фундаментальную последовательность:

$$\omega,\ \omega^\omega,\ \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}} \ (\nu \text{ раз})$$

Чтобы обозначить предельное число этой последовательности, нам пришлось бы ввести новый символ. Мы видим, таким образом, что, установив определенную систему соглашений, мы всегда можем ее расширить; но нам не удается построить такой системы, которая позволила бы нам установить обозначения для всех трансфинитных чисел второго класса. Разумеется, это обстоятельство не мешает нам вести рассуждения, касающиеся произвольных трансфинитных чисел второго класса.

30. Известно, сколь важную роль играет в математике способ доказательства, основанный на так называемом принципе полной индукции; этот принцип позволяет утверждать, что некоторое предложение справедливо для любого натурального числа $n$, если известно, что 1) оно справедливо для первых, наименьших значений $n$ и 2) будучи справедливым для всех натуральных чисел, меньших, нежели $n$, оно справедливо и для числа $n$. Мы теперь установим аналогичный принцип для чисел первого и второго класса.

Теорема. *Если в формулировку некоторого предложения входит символ $\alpha$, значения которого могут пробегать всю совокупность чисел первого и второго класса, то предложение это будет доказано для всех этих значений символа $\alpha$, коль скоро мы покажем, что: 1) предложение это справедливо для первых значений $\alpha$ (т. е. $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$) и 2) что предложение это, будучи доказано для всех чисел $\alpha'$, меньших некоторого определенного числа $\alpha$ первого или второго класса, будет справедливо и для этого числа $\alpha$.*

В самом деле, допустим, что оба условия выполнены. Я утверждаю, что в таком случае предложение справедливо для всех чисел $\alpha$ первого и второго класса. Действительно, если бы это было не так, то должны были бы существовать числа, для которых предложение неверно. Пусть наименьшее из них будет $\gamma$; в силу условия 1, $\gamma$ не может быть первым порядковым числом. Следовательно, существуют числа, меньшие, нежели $\gamma$, и для всех этих чисел предложение справедливо. В силу условия 2, оно должно быть справедливо и для числа $\gamma$, что противоречит нашему предположению.

Практически, при доказательстве того, что выполнено условие 2, приходится иногда различать два случая, смотря по тому, будет ли $\alpha$ числом первого или второго рода *.

31. Мы теперь бегло коснемся *несчетных* вполне упорядоченных множеств. Пусть $E$ есть такое множество. Мы прежде всего заметим, что всякое счетное вполне упорядоченное множество $F$ подобно некоторому отрезку множества $E$, ибо множество $E$, будучи несчетным, не может быть подобным ни множеству $F$, ни какому-либо из его отрезков.

Я утверждаю, что всякое число первого или второго класса обозначает собою ранг одного из элементов множества $E$. В самом деле, пусть это число будет $\alpha$. Множество чисел $< \alpha$ есть счетное вполне упорядоченное множество и, следовательно,

* Мы условимся для всякого порядкового числа $\alpha$ первого рода обозначать через $\alpha - 1$ непосредственно предшествующее ему число.

подобно некоторому отрезку множества $E$; элемент множества $E$, определяющий собою этот отрезок, очевидно, имеет ранг $\alpha$.

Допустим, что среди элементов множества $E$ имеются такие, которые определяют собою несчетные отрезки. Обозначим через $a$ тот из этих элементов, ранг которого ниже всех других, и через $A$ — определяемый им отрезок. Этот отрезок $A$ есть несчетное множество; напротив, всякий отрезок $A'$, определяемый элементом $a' < a$, будет счетным множеством. Как мы только что убедились, отрезок $A$ содержит элементы, соответствующие всем числам первого и второго классов, и обратно, всякий элемент отрезка $A$ имеет своим рангом некоторое число первого или второго класса. Таким образом имеет место взаимно однозначное соответствие между элементами отрезка $A$, с одной стороны, и числами первого и второго классов — с другой.

Мы предположили, что множество $E$ содержит элементы, не входящие в отрезок $A$; в частности, элемент $a$. Ранг этого элемента непосредственно превышает все числа первого и второго классов, а потому естественно обозначить этот ранг посредством символа, который будет, по определению, первым трансфинитным числом, превышающим все числа второго класса. Обозначим его через $\Omega$ и будем называть $\Omega$ первым трансфинитным числом третьего класса. Чтобы выразить тот факт, что $\alpha$ есть число первого или второго класса, мы можем писать $\alpha < \Omega$.

## Глава III.

# ЛИНЕЙНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА.

## I. ПРОИЗВОДНЫЕ МНОЖЕСТВА ВСЕВОЗМОЖНЫХ ПОРЯДКОВ.

32. **Применим теперь к точечным множествам понятия и результаты главы II.**

В главе I мы научились строить множества, имеющие производные множества порядков $1, 2, \ldots, \nu, \ldots, \omega\lambda+\nu, \ldots, \omega^2$.

Теперь мы можем обобщить понятие производного множества. Для всякого точечного множества, расположенного на прямолинейном отрезке, мы определим производное множество порядка $\alpha$, $P^\alpha$, где $\alpha$ означает любое число первого или второго класса. Для того чтобы это определение могло быть применено к любому числу первого и второго класса, достаточно, согласно обобщенному принципу индукции, установить это определение для $\alpha=1$ и показать, как оно формулируется для числа $\alpha$, если для всех чисел $\alpha'<\alpha$ оно уже установлено.

Но $P^1$ нами уже определено. Чтобы удовлетворить второму условию, мы будем различать два случая: если $\alpha$ есть число первого рода, т. е. если оно имеет непосредственно предшествующее ему число $\alpha-1$, то мы определяем $P^\alpha$ как производное множество от множества $P^{\alpha-1}$. Если же $\alpha$ есть число второго рода, то оно служит предельным числом некоторой последовательности чисел $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_\nu<\ldots$ Мы предполагаем определение уже установленным для каждого из этих чисел. Вспомним, что при этом

$$P^{\alpha_1} \geqq P^{\alpha_2} \geqq \ldots \geqq P^{\alpha_\nu} \geqq \ldots$$

Мы определяем $P^\alpha$ как совокупность точек, принадлежащих всем множествам $P^{\alpha_\nu}$. Можно также сказать, что $P^{\alpha'}$ есть совокупность точек, принадлежащих всем множествам $P^\alpha$, для которых $\alpha'<\alpha$.

*Каждое производное множество замкнуто.*

Мы уже знаем, что это справедливо для $P^1$. Допустим, что наше утверждение верно для всех чисел, меньших, нежели $\alpha$, и покажем, что в таком случае оно справедливо и для числа $\alpha$. Если $\alpha$ есть число первого рода, то $P^{\alpha}$ замкнуто, будучи производным множеством от $P^{\alpha-1}$. Если же число $\alpha$ — второго рода, то $P^{\alpha}$ замкнуто как общая часть замкнутых множеств $P^{\alpha_1}$, $P^{\alpha_2}, \ldots, P^{\alpha_\nu}, \ldots$ (п. 14).

33. Покажем, что каково бы ни было число $\alpha$ первого или второго класса, существуют точечные множества, имеющие производные множества порядка $\alpha$, и вместе с тем разрывные функции, множества точек разрыва которых обладают этим свойством.

Все это было нами показано для $\alpha = 1$. Пусть все наши утверждения справедливы для всех чисел $\alpha'$, меньших, нежели некоторое определенное число $\alpha$; покажем, что в таком случае они справедливы и для числа $\alpha$. Допустим сначала, что $\alpha$ есть число первого рода. Рассмотрим последовательность точек $M_1$, $M_2, \ldots, M_n, \ldots$, стремящихся к точке $M$ (черт. 11) так, что каждая из них расположена правее предыдущей. В каждом из интервалов $M_nM_{n+1}$ поместим множество, имеющее производное порядка $\alpha - 1$, что мы по предположению можем сделать. Обозначая через $P$ соединение всех построенных множеств, мы видим, что в любом соседстве точки $M$ найдутся точки множества $P^{\alpha-1}$; следовательно, точка $M$ является предельною точкою для множества $P^{\alpha-1}$, а потому множество $P^{\alpha}$ существует и содержит точку $M$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha$ есть число второго рода, т. е. когда оно является пределом последовательности чисел $\alpha_1$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$

Возьмем снова последовательность точек $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, стремящихся к точке $M$ (черт. 11). В интервале $M_1M_2$ поместим множество точек, имеющее производное порядка $\alpha_1$, в интервале $M_2M_3$ — множество, имеющее производное порядка $\alpha_2$, и т. д. Обозначая через $P$ соединение всех построенных множеств, мы видим, что в соседстве точки $M$ найдутся точки любого из множеств $P^{\alpha_\nu}$. Следовательно, точка $M$ принадлежит каждому из множеств $P^{\alpha_\nu}$, а значит множество $P^{\alpha}$ существует и содержит точку $M$.

Рассмотрим теперь функцию, равную нулю всюду, кроме точек того или другого из построенных нами множеств, и равную единице в каждой из этих точек. Тогда каждая из этих точек будет точкою разрыва для построенной функции, а следовательно множество точек разрыва этой функции имеет производное порядка $\alpha$.

34. Если какое-либо из производных множеств состоит из конечного числа точек, то следующее производное является пустым. Обратно, если одно из производных множеств оказывается пустым, то среди производных множеств непременно найдется такое, которое состоит лишь из конечного числа точек. В самом деле, среди пустых производных множеств данного множества $P$ найдется одно с наименьшим индексом, который мы обозначим через $\alpha$. Я утверждаю, что $\alpha$ не может быть числом второго рода; действительно, в этом случае оно было бы пределом последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$, причем ни одно из множеств $P^{\alpha_\nu}$ не является пустым; следовательно, множества $P^{\alpha_\nu}$ имеют общие точки (п. 13); но множество $P^\alpha$ как раз есть совокупность этих общих точек и, следовательно, не может быть пустым. Итак, $\alpha$ необходимо есть число первого рода, а потому $P^\alpha$ является производным от множества $P^{\alpha-1}$, которое поэтому должно состоять из конечного числа точек *.

*Функция $f(x)$, определенная на конечном отрезке $AB$, есть предел последовательности непрерывных функций, если множество $P$ ее точек разрыва таково, что одно из его производных множеств $P^\alpha$ состоит из конечного числа точек.*

Теорема эта доказана нами для $\alpha = 1$. Пусть она справедлива для всех чисел $\alpha'$, меньших некоторого числа $\alpha$; покажем, что в таком случае она верна и для числа $\alpha$.

Пусть множество $P^\alpha$ состоит из точек $M_1, M_2, \ldots, M_h$. Мы можем применить теорему I. В самом деле, в каждом интервале, не содержащем ни одной точки множества $P^\alpha$, некоторое множество $P^{\alpha'}$, где $\alpha' < \alpha$, как мы видели, имеет лишь конечное число точек. В этом интервале, следовательно, функция $f$ есть предел последовательности непрерывных функций. Применяя теорему I, мы заключаем, что функция $f$ есть предел последовательности непрерывных функций и во всем интервале $AB$.

## II. СОВЕРШЕННЫЕ НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫЕ МНОЖЕСТВА.

35. Все множества, какие мы строили до сих пор, имели между собою следующее общее свойство: для каждого из них оказывались пустыми все производные множества, начиная с неко-

* При этом является весьма существенный предположение, что исходное множество $P$ помещается на конечном отрезке.

торого индекса, представлявшего собою число первого или второго класса.

Я утверждаю, что всякий интервал $\lambda$, содержащийся в интервале $AB$, содержит в себе другой интервал $\mu$, в котором нет ни одной точки такого множества. В самом деле, пусть интервал $AB$ содержит такой интервал $\lambda$, что во всяком интервале $\mu$, заключенном внутри $\lambda$, найдутся точки данного множества $P$. В этом случае все точки интервала $\lambda$ должны принадлежать производному множеству $P^1$, а следовательно и каждому из множеств $P^2, \ldots, P^n, \ldots, P^\omega$, вообще — каждому из производных множеств; значит, ни одно из этих множеств не может быть пустым.

Это замечание приводит нас к следующему определению: мы назовем множество $P$ *нигде не плотным* в отрезке $AB$, если всякий интервал, содержащийся в интервале $AB$, содержит в себе другой интервал, в котором нет ни одной точки множества $P$. Как мы убедились, всякое множество, одно из производных которого пусто, является нигде не плотным.

Сделаем теперь другое замечание. В каждом из построенных нами примеров ни одно из производных множеств данного множества $P$ (если не говорить о пустых) не могло совпадать со своим производным множеством. В самом деле, если бы это случилось, то все последующие производные, очевидно, также совпадали бы с этим производным множеством, и, следовательно, ни одно из них не могло бы оказаться пустым.

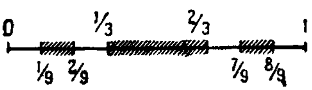
36. Пусть нам дано замкнутое множество $P$, не совпадающее со своим производным множеством. Рассмотрим те его точки, которые не входят в производное множество. Пусть $A$ есть одна из этих точек. Так как она не является предельной точкой для множества $P$, то существует такой интервал, который содержит внутри себя точку $A$, но не содержит никаких других точек множества $P$. Мы скажем в этом случае, что точка $A$ есть *изолированная точка* множества $P$. Во всех рассмотренных нами примерах каждое из последовательных производных множеств содержит точки, исчезающие при переходе к следующему производному. Следовательно, множество $P^\omega$ содержит менее точек, нежели любое из множеств $P^\nu$, и, вообще, любое производное множество менее богато точками, нежели любое ему предшествующее.

Но существуют и такие множества, которые совпадают со своими производными. Таково, например, множество всех точек какого-либо отрезка $AB$ (включая концы).

Множество, совпадающее со своим производным, мы будем называть *совершенным*. Очевидно, что всякое совершенное множество замкнуто. Условимся называть *плотным в себе* всякое множество, каждая точка которого есть для него предельная точка. Таким образом, для того, чтобы данное множество было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы оно было 1) замкнутым и 2) плотным в себе.

37. Мы покажем теперь, что существуют *совершенные нигде не плотные множества,* и проведем подробное исследование этих множеств.

Обозначим через $E$ множество всех точек отрезка $(0, 1)$. Чтобы определить интересующее нас множество $P$, мы сначала определим множество точек отрезка $E$, не принадлежащих множеству $P$, — множество, которое мы обозначим через $E—P$. Разделим отрезок $(0, 1)$ на три равные части посредством точек $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ и отбросим все внутренние точки среднего из трех получающихся отрезков (черт. 16). Далее, каждый из двух оставшихся отрезков $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ мы делим на три равные части и в каждом случае выбрасываем внутренние точки средней части. У нас остаются четыре интервала, с каждым из которых мы поступаем таким же образом, и т. д. до бесконечности. Мы определяем множество $E—P$ как совокупность всех *внутренних* точек исключенных нами интервалов.



Черт. 16.

Чтобы подвергнуть изучению свойства точек множества $P$, изобразим абсциссы точек множества $E$ в виде троичных дробей. Таким образом каждое число $x$, заключенное между 0 и 1, изобразится в виде ряда

$$\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\ldots,$$

где каждое $a$ есть 0, 1 или 2.

Числа $a_1$, $a_2$, $a_3, \ldots$ последовательно определяются так: число $a_1$ должно быть таково, чтобы, полагая

$$x=\frac{a_1+x_1}{3},$$

мы имели:

$$0 \leqq x_1 \leqq 1 .$$

В случае, когда $x=\frac{1}{3}$ или $x=\frac{2}{3}$, система чисел $(a_1, x_1)$ может быть выбрана двумя различными способами. (Этой неопределенности мы могли бы избежать, подчиняя $x_1$ условиям $0 \leqq x_1 < 1$.) Во всех случаях, после того как $x_1$ найдено, мы поступаем с ним так же, как ранее поступали с $x$. Мы выбираем $a_2$ таким образом, что $x_1 = \frac{a_2 + x_2}{3}$, причем $0 \leqq x_2 \leqq 1$ и т. д. Если при этом ни одно из чисел $x_i$ не окажется равным нулю, то наш процесс никогда не придет к концу.

Числа, для которых это разложение обрывается на конечном числе членов (т. е. для которых все $a$, нвчиная с некоторого, суть нули), имеют форму $\frac{p}{3^h}$, где $p$ — целое число. Но все эти числа допускают и другое, бесконечное разложение. В самом деле, так как

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots,$$

то мы имеем например:

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^h} = \frac{a_1}{3} + \ldots + \frac{a_{h-1}}{3^{h-1}} + \frac{2}{3^{h+1}} + \frac{2}{3^{h+2}} + \ldots$$

Если число $x$ не имеет формы $\frac{p}{3^h}$, то числа $x_1, x_2, x_3, \ldots$ все лежат *внутри* отрезка $(0, 1)$. Следовательно, для таких чисел мы никогда не можем натолкнуться на неопределенность. Бесконечное разложение такого числа всегда является единственным.

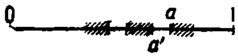
В процессе определения множества $E - P$ мы, в первую очередь, исключили числа, для которых $a_1 = 1$ и $0 < x_1 < 1$. При второй операции мы исключили числа, для которых $a_1 = 0$ или 2, $a_2 = 1$ и $0 < x_2 < 1$. При $n$-ой операции мы исключили числа, для которых ни одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ не рввно 1, между тем как $a_n = 1$ и $0 < x_n < 1$.

В общем, следовательио, мы исключили все точки, в троичном разложении которых, каково бы ни было это разложение, по меньшей мере на одном месте стоит цифра 1.

Множество $P$ состоит, следовательно, из точек, не удовлетворяющих этому условию, т. е. из точек, *в троичном разложении которых все цифры равны* 0 *или* 2 (при этом некоторые из точек множества $P$ могут быть представлены и разложением, содержащим цифры 1, лишь бы наряду с этим имелось и другое разложение, в котором эта цифра отсутствует.)

Перейдем теперь к изучению свойств множества $P$. Это множество прежде всего содержит все точки $e$, являющиеся концами исключенных интервалов. В самом деле, концом интервала, исключенного при $n$-ой операции, служит точка, для которой каждая из $(n-1)$ первых цифр есть 0 или 2, причем $x_{n-1}=\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$, смотря по тому, имеем ли мы дело с левым или правым концом интервала. В первом случае мы имеем бесконечное, а во втором — конечное разложение, свободное от цифры 1, вследствие чего взятая точка принадлежит множеству $P$.

Я утверждаю, что каждая такая точка является предельной для других точек $e$. В самом деле, рассмотрим точку $a$, являющуюся левым концом интервала, исключенного при $n$-ой операции (черт. 17). После этой операции остается невыброшенным интервал, по отношению к которому точка $a$ служит правым концом. При следующей $(n+1)$-ой операции, этот интервал делится на три части, средняя из которых выбрасывается. Правый конец $a'$ этой средней части, представляющий собою точку типа $e$, отстоит от точки $a$ на расстоянии одной трети прежнего интервала. Применяя следующую операцию к интервалу $aa'$ и продолжая этот процесс бесконечно, мы получаем последовательность точек типа $e$, стремящихся к точке $a$, чем наше утверждение и доказано. Точка $a$ является предельною лишь *с одной стороны*, именно со стороны, противоположной тому из исключенных интервалов, концом которого она является.



Черт. 17.

Всех исключенных интервалов имеется *счетное* множество, ибо при каждой операции мы исключали конечное число их. Следовательно, множество точек $e$ есть счетное множество.

Я утверждаю, что множество $P$ содержит точки, не принадлежащие к числу точек $e$; таковыми будут точки, изображаемые бесконечным троичным разложением, содержащим только цифры 0 и 2, причем та и другая встречаются в этом разложении бесконечное число раз. В самом деле, разложение такого числа единственно и не содержит цифры 1, вследствие чего такая точка не есть точка $e$ и не принадлежит множеству $E-P$. Сверх того, каково бы ни было $n$, после $n$-ой операции выбранная нами точка лежит внутри одного из сохранившихся интервалов.

Чтобы привести пример такой точки, возьмем число, в разложении которого цифры 0 и 2 последовательно чередуются. Это есть число

$$\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\ldots=\frac{1}{4}.$$

Возьмем теперь любую из таких точек $l$. Я утверждаю, что точка $l$ есть предельная для точек множества $P$ и притом *с обеих сторон*. В самом деле, длина каждого из интервалов, оставшихся после $n$-ой операции, равна $\frac{1}{3^n}$, а концы такого интервала принадлежат множеству $P$. Но точка $l$ непременно лежит внутри такого интервала, чем наше утверждение и доказывается.

Наконец, каждая точка множества $P$ входит в одну из двух рассмотренных нами категорий. Следовательно, множество $P$ *плотно в себе*.

Я утверждаю, что множество $P$ *замкнуто*. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что всякая точка $M$, не принадлежащая множеству $P$, не будет предельной точкой для этого множества. Но такая точка $M$ есть обязательно *внутренняя* точка одного из исключенных интервалов, и, следовательно, в ближайшем соседстве ее не найдется ни одной точки множества $P$.

Итак, множество $P$ плотно в себе и замкнуто. Следовательно, $P$ есть *совершенное* множество.

Я утверждаю, что множество $P$ *нигде не плотно* в интервале $(0, 1)$. В самом деле, возьмем в этом интервале произвольный отрезок $\alpha\beta$ длины $\lambda$. После операции нумера $n$, если только $n$ достаточно велико, длина $\frac{1}{3^n}$ оставшихся интервалов становится менее, нежели $\lambda$. Следовательно, отрезок $\alpha\beta$ необходимо содержит в себе интервал, все точки которого являются исключенными.

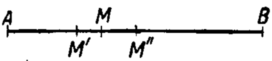
Исследуем мощность множества $P$. Рассмотрим множество $(l)$ точек $l$, или, как мы их будем называть, точек второго рода множества $P$. Рассмотрим, с другой стороны, множество $R$ точек, остающихся на отрезке $(0, 1)$, после того как мы отбросим из этого отрезка множество $A$ точек, абсциссы которых имеют форму $\frac{q}{2^k}$, и абсциссу каждой из точек множества $R$ будем мыслить написанной по двоичной системе. Это будут, следовательно, разложения вида:

$$\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\ldots,$$

где все $\alpha$ суть 0 или 1, причем каждая из этих двух цифр встречается в разложении бесчисленное множество раз.

Можно установить взаимно-однозначное соответствие между точками $l$ и точками множества $R$. Достаточно условиться, что значению $a_i = 0$ будет соответствовать значение $\alpha_i = 0$, а значению $a_i = 2$ — значение $\alpha_i = 1$. Следовательно, эти два множества имеют одинаковую мощность. Но множество $R$ мы получили, выбрасывая из множества $E$, имеющего мощность континуума, некоторое счетное множество $A$. Таким образом множество $(l)$ имеет мощность континуума $A$, так как точки $e$ (точки первого рода) множества $P$ образуют счетное множество, то, очевидно, множество $P$ имеет мощность континуума.

38. Рассмотрим теперь общие свойства нигде не плотных совершенных множеств. Пусть $P$ есть совершенное множество, нигде не плотное на некотором отрезке $AB$ $(a \leqq x \leqq b)$. Обозначим через $E$ множество всех точек этого отрезка. Пусть $M$ есть одна из точек множества $E - P$, и $x_0$ — ее абсцисса. Так как множество $P$ замкнуто, то точка $M$ не может быть его предельною точкою (черт. 18). Следовательно, можно найти интервал, содержащий внутри себя точку $M$ и не содержащий ни одной точки множества $P$. Может случиться, что множество $P$ имеет точки, абсциссы которых менее, нежели $x_0$. Пусть $x'$ есть верхний предел абсцисс таких точек. Тогда во всяком случае $x' < x_0$. Точка $M'$, абсцисса которой равна $x'$, принадлежит множеству $P$, ибо она является предельной точкой для точек множества $P$.



Черт. 18.

Подобным же образом мы убеждаемся в существовании такой точки $M''$ множества $P$, абсцисса которой $x''$ является нижним пределом абсцисс тех точек множества $P$, которые расположены правее точки $M$, если только такие точки существуют. Таким образом точка $M$ лежит внутри некоторого интервала $M' M''$, обладающего следующими двумя свойствами: 1) ни одна из внутренних точек этого интервала не принадлежит множеству $P$ и 2) точки $M'$ и $M''$ принадлежат множеству $P$ (за исключением того случая, когда одна из них совпадает с одною из точек $A$ или $B$).

Будем обозначать через $\lambda$ интервалы, обладающие этими двумя свойствами. Два различных интервала $\lambda$ не могут ни перекрываться, ни даже соприкасаться друг с другом. В самом деле, в первом случае один из концов одного из этих интервалов должен был бы лежать внутри другого. Эта точка, помещающаяся внутри одного из интервалов $\lambda$ и потому отличная от $A$ и $B$, не может принадлежать множеству $P$; но это противоречит тому, что эта точка является концом другого интервала $\lambda$. Во втором случае общий конец двух интервалов был бы изолированной точкой множества $P$, что невозможно, так как $P$ есть совершенное множество.

Не может случиться, чтобы интервалов $\lambda$ имелось лишь конечное число. В самом деле, в таком случае мы имели бы наряду с ними столько же (точнее: на единицу более или менее или столько же) интервалов, все точки которых принадлежали бы множеству $P$; это же невозможно, ибо множество $P$ нигде не плотно. Таким образом интервалов $\lambda$ непременно имеется бесконечное множество.

С другой стороны, это множество *счетное*. В самом деле, каково бы ни было $\alpha > 0$, имеется лишь конечное число интервалов $\lambda$, длина которых превосходит $\alpha$, ибо эти интервалы взаимно не перекрываются. Рассмотрим теперь последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ положительных чисел, стремящихся к нулю. Возьмем сначала те из интервалов $\lambda$, длины которых превосходят $\alpha_1$, затем те из оставшихся, длины которых превосходят $\alpha_2$, и т. д. Мы получим счетную последовательность, в которой каждый из интервалов $\lambda$ займет определенное место.

Наконец, всякий интервал, составляющий часть отрезка $AB$, должен содержать некоторую часть одного из интервалов $\lambda$, ибо в нем должны содержаться точки, не принвдлежащие множеству $P$. Это последнее обстоятельство мы будем выражать, говоря, что множество интервалов $\lambda$ *всюду плотно* на отрезке $AB$.

Таким образом, *если $P$ есть совершенное множество, нигде не плотное в некотором интервале, то в этом интервале существует всюду плотное множество не перекрывающихся друг с другом интервалов, содержащих все те и только те точки, которые не принадлежат множеству $P$*.

39. Пусть теперь, обратно, на отрезке $AB$ дано счетное множество интервалов $\lambda$, не имеющих попарно ни общих точек, ни общих концов. Я утверждаю, что множество $P$ точек, не принадлежащих ни одному из этих интервалов, есть совершенное нигде не плотное множество. При этом мы должны только оговориться, что в случае, если одна из точек $AB$ служит концом одного из интервалов $\lambda$, мы будем считать ее принадлежащею этому интервалу.

Прежде всего, множество $P$ замкнуто, ибо всякая точка, не принадлежащая ему, является внутренней точкой одного из интервалов $\lambda$, а следовательно не может быть предельной точкой множества $P$.

Чтобы показать, что $P$ есть совершенное множество, нам остается, следовательно, убедиться, что оно плотно в себе, т. е. не имеет изолированных точек. Если бы какая-либо из его точек $K$ была изолированной, то она была бы заключена в некотором интервале $HI$, в котором кроме точки $K$ нет ни одной точки множества $P$. Рассмотрим отрезок $HK$. Из всех его точек одна только точка $K$ принадлежит множеству $P$. Следовательно, существует такой интервал $\lambda$, который содержит отрезок $IK$ и имеет точку $K$ одним из своих концов. Подобным же образом мы убедимся, что точка $K$ является одним из концов другого интервала $\lambda$, содержащего отрезок $KI$. Два полученных нами интервала $\lambda$ имеют общий конец, что противоречит нашему предположению. Следовательно, точка $K$ не может быть изолированной, а значит $P$ есть совершенное множество.

Наконец, множество $P$ нигде не плотно на отрезке $AB$, ибо множество интервалов $\lambda$ всюду плотно на этом отрезке.

Интервалы $\lambda$, совокупность которых всецело определяет собою множество $P_0$, мы будем называть *смежными интервалами* множества $P$.

Рассмотрим теперь свойства точек множества $P$. Первую категорию этих точек составляют концы интервалов $\lambda$. В самом деле, ни один из этих концов не принадлежит ни одному из интервалов $\lambda$. Я утверждаю, что кроме них множество $P$ содержит еще другие точки. Чтобы доказать это, мы покажем, что совершенное множесто $P$ не может быть счетным. Сначала мы докажем следующую лемму.

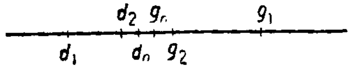
*Пусть дано совершенное множество $P$, расположенное на прямолинейном отрезке $AB$ и пусть $\alpha\beta$ есть интервал, содержащийся в отрезке $AB$ и содержащий внутри себя по крайней мере одну точку множества $P$. Пусть, с другой стороны, $M$ есть некоторая определенная точка множества $P$. Тогда можно найти интервал $\alpha_1\beta_1$ сколь угодно малой длины, заключенный в интервале $\alpha\beta$, не содержащий точки $M$, но содержащий по крайней мере одну точку множества $P$.*

В самом деле, интервал $\alpha\beta$, содержащий внутри себя точку множества $P$, необходимо содержит бесчисленное множество таких точек, ибо множество $P$ плотно в себе. Следовательно, можно указать точку $M_1$ множества $P$, отличную от точки $M$ и принадлежащую интервалу $\alpha\beta$. Но в таком случае любой достаточно малый интервал, содержащий точку $M_1$, доказывает наше утверждение.

Покажем теперь, что совершенное множество $P$ не может быть счетным.

Если бы множество $P$ было счетным, то мы могли бы обозначить его точки через $M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$ Возьмем какой-либо интервал $\alpha\beta$, содержащий внутри себя, по крайней мере одну точку множества $P$. Согласно доказанной лемме, мы можем найти внутри интервала $\alpha\beta$ интервал $\alpha_1\beta_1$, не содержащий точки $M_1$, но содержащий внутри себя другие точки множества $P$; далее, в интервале $\alpha_1\beta_1$ мы можем найти интервал $\alpha_2\beta_2$, не содержащий точки $M_2$, но содержащий внутри себя другие точки множества $P$, и т. д. Таким образом мы определим бесконечную последовательность интервалов, каждый из которых содержится внутри предшествующего и содержит точки множества $P$, причем интервал $\alpha_\nu\beta_\nu$ не содержит ни одной из точек $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$. При этом ничто не мешает нам выбирать эти интервалы так, чтобы длины их стремились к нулю. В таком случае существует единственная точка $H$, принадлежащая всем интервалам $\alpha_\nu\beta_\nu$ и, следовательно, отличная от всех точек $M_\nu$. Точка $H$ принадлежит множеству $P$, ибо, по самому ее построению, в любом ее соседстве найдутся точки множества $P$, и, следовательно, она является предельной точкой множества $P$. Таким образом, множество $P$ содержит точку, отличную от каждой из точек $M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$, что противоречит нашему предположению. Итак, множество $P$ действительно не может быть счетным и потому должно содержать еще другие точки кроме концов интервалов $\lambda$.

Таким образом, *совершенное множество не может быть счетным; счетное множество не может быть совершенным.*



Черт. 19.

Пусть нам дано нигде не плотное совершенное множество; расположим его смежные интервалы в последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ Если мы исключим из отрезка $AB$ $n$ первых интервалов $\lambda$, то наибольшая длина какого-либо из оставшихся интервалов необходимо стремится к нулю с возрастанием $n$. В самом деле, в противном случае длина эта постоянно превосходила бы некоторое постоянное число $\alpha$, и на отрезке $AB$ мы имели бы интервал длины $\alpha$, ни одна из точек которого не являлась бы исключенной, вследствие чего множество $P$ не могло бы быть нигде не плотным.

В существовании точек второго рода (т. е. отличных от концов интервалов $\lambda$) можно убедиться и другим путем. Пусть $g$ и $d$ соответственно означают левые и правые концы интервалов $\lambda$; согласно сделанным нами предположениям касательно интервалов $\lambda$, влево от каждой определенной точки $g$ и вправо от каждой определенной точки $d$ имеется, в любой близости, бесчисленное множество как точек $g$, так и точек $d$.

Установивши это, выберем влево от точки $g_1$ некоторую точку $d_1$ (черт. 19). Вправо от $d_1$ возьмем точку $g_2$ так, чтобы она лежала левее точки $g_1$. При этом мы подчиняем этот выбор еще тому условию, чтобы иметь:

$$d_1g_2 < \frac{d_1g_1}{2}.$$

Далее, возьмем точку $d_2$ влево от $g_2$ так, чтобы

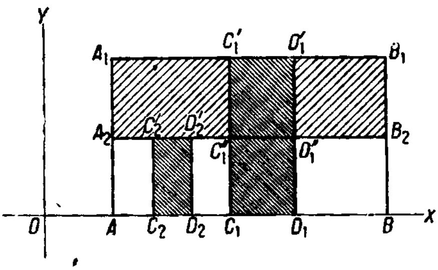
$$d_2 g_2 < \frac{d_1 g_2}{2},$$

и т. д. Мы получаем таким образом точки $g_1, d_1, g_2, d_2, \ldots$, следующие друг за другом слева направо в таком порядке:

$$d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots g_n, \ldots, g_2, g_1.$$

Длины интервалов $g_n d_n$, $d_n g_{n+1}$ стремятся к нулю. Значит последовательности точек $d_n$ и $g_n$ имеют общую предельную точку. Эта точка, будучи предельной для множества $P$, необходимо принадлежит этому множеству. Сверх того, она является предельною *с обеих сторон* и, следовательно, отлична от точек типов $g$ и $d$.

40. Чтобы указать одно из приложений понятия совершенного нигде не плотного множества, вернемся к разрывным функциям. Здесь имеет место следующее предложение.




Черт. 20.

*Функция $f(x)$, равная единице в точках совершенного нигде не плотного множества $P$, расположенного на отрезке $AB$, и равная нулю во всех других точках этого отрезка, есть предел последовательности непрерывных функций.*

Каждая точка множества $P$ есть точка разрыва этой функции, ибо в соседстве любой точки множества $P$ имеются точки, не принадлежащие этому множеству.

Мы можем допустить, что точки $A$ и $B$ принадлежат множеству $P$, ибо в противном случае мы заменили бы их крайними точками $A_1$ и $B_1$ множества $P$. Разумеется, если наша функция есть предел последовательности непрерывных функций в отрезке $A_1 B_1$, то она обладает тем же свойством и в отрезке $AB$.

Мы построим функцию $F(x, y)$, соответствующую данной функции $f(x)$ в смысле п. 5. Мы положим прежде всего $F(x, y) = 1$ на каждой прямой, параллельной оси $OY$, проведенной через одну из точек множества $P$ и ограниченной прямою $y = 1$; в частности — на каждом из отрезков $AA_1$ и $BB_1$ (черт. 20).

Далее, мы занумеруем все смежные интервалы множества $P$ в каком-нибудь определенном порядке. Пусть $C_1 D_1$ будет первый из этих интервалов. Проведем прямые $C_1C_1'$ и $D_1D_1'$. В прямоугольнике $C_1D_1D_1'C_1'$ мы можем построить функцию $F$ так, чтобы она удовлетворяла условиям проблемы $A$ (п. 5). В самом деле, на отрезке $C_1D_1$ функция $f(x)$ имеет только две точки разрыва, именно точки $C_1$ и $D_1$. Проведем далее отрезок $A_2B_2$ прямой $y=\frac{1}{2}$. В каждом из прямоугольников $A_2C_1''C_1'A_1$ и $D_1''B_2B_1D_1'$ мы полагаем $F=1$. Функция $F(x, y)$ непрерывна относительно обоих переменных в той области, где мы ее до сих пор определили. Продолжим теперь ее определение. Возьмем второй смежный интервал $C_2D_2$ и построим прямоугольник $C_2D_2C_2'D_2'$, сторона $C_2'D_2'$ которого лежит на отрезке $A_2B_2$. Значения функции $F$ в этом прямоугольнике, подобно прямоугольнику $C_1D_1D_1'C_1'$, могут быть выбраны удовлетворяющими условиям проблемы. Пусть $A_3B_3$ есть отрезок прямой $y=\frac{1}{3}$. Во всех областях, лежащих выше отрезка $A_3B_3$ и где функция $F$ еще не определена, мы теперь положим $F=1$. Применяя этот процесс снова и снова, мы определим функцию $F$ во всех точках нашего основного прямоугольника, причем для каждой отдельной точки функция $F$ определяется после *конечного* числа операций. В силу этого функция $F$ в каждой точке прямоугольника непрерывна относительно совокупности обоих переменных. Что касается непрерывности функции $F$ относительно $y$ в точках оси $OX$, то непрерывность эта прежде всего несомненна в точках множества $P$, ибо функция $F$ постоянна на прямой, проведенной через такую точку параллельно $OY$. Каждая же точка, не принадлежащая множеству $P$, содержится внутри одного из смежных интервалов $C_\nu D_\nu$. Операция нумера $\nu$ определяет нам функцию $F$ в соседстве интервала $C_\nu D_\nu$, и в силу этого построения функция $F$ непрерывна относительно $y$ в каждой точке этого отрезка.

Таким образом функция $f$ есть предел последовательности непрерывных функций.

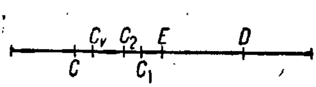
## III. ОБЩЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ.

41. Вернемся к теории точечных множеств, чтобы дополнить ее. Прежде всего укажем несколько свойств, общих всем совершенным множествам как нигде не плотным, так и лишенным этого признака. Пусть $P$ есть *совершенное* множество, расположенное на прямолинейном отрезке. Мы видели (п. 38), что всякая точка, не принадлежащая множеству $P$, содержится в некотором интервале, одни только концы которого принадлежат множеству $P$; мы и в общем случае условимся называть

эти интервалы *смежными интервалами* множества $P$; интервалы эти взаимно не перекрываются, а следовательно их имеется либо конечное число, либо счетное множество.

Обозначим теперь через $P$ *произвольное линейное точечное множество*. Мы определили уже его производные множества $P^{\alpha}$, где $\alpha$ означает любое число первого или второго класса.

Я утверждаю, что *если некоторый интервал $AB$ при любом $\alpha$ содержит точки множества $P^{\alpha}$, то он содержит и такие точки, которые принадлежат всем без исключения множествам $P^{\alpha}$*. В самом деле, если отрезок $AB$ мы разделим на две части $AC$ и $CB$, то по меньшей мере одна из этих двух частей будет обладать тем же самым свойством; продолжая этот процесс, мы получаем бесконечную последовательность интервалов, из которых каждый, будучи заключен в предыдущем, обладает тем же свойством, что и основной отрезок $AB$; при этом мы можем, очевидно, распорядиться так, чтобы длины этих интервалов стремились к нулю; при этом условии будет существовать единственная точка, общая всем построенным интервалам; эта точка есть предельная точка для каждого из множеств $P^{\alpha}$ и, следовательно, принадлежит каждому из них. Естественно обозначить через $P^{\Omega}$ множество точек принадлежащих, каждая, всем множествам $P^{\alpha}$. Это множество $P^{\Omega}$ мы будем называть производным множеством порядка $\Omega$ от множества $P$.



Черт. 21.

Множество $P^{\Omega}$ *замкнуто*, ибо оно представляет собою совокупность общих точек некоторой системы замкнутых множеств (п. 14).

В интервале, не содержащем ни одной точки множества $P^{\Omega}$, все множества $P^{\alpha}$, начиная с некоторого определенного индекса, должны оказаться пустыми. В самом деле, если бы этот интервал содержал, при любом $\alpha$, точки множества $P^{\alpha}$, то, как мы видели, он необходимо должен был бы содержать и точки множества $P^{\Omega}$.

Для каждого интервала $CD$, не содержащего внутри себя ни одной точки множества $P^{\Omega}$, существует такой индекс $\alpha < \Omega$, что ни одна из внутренних точек интервала $CD$ не принадлежит множеству $P^{\alpha}$. В самом деле, возьмем между $C$ и $D$ какую-нибудь точку $E$ (черт. 21), а между $E$ и $C$ выберем какую-нибудь последовательность точек $C_1, C_2, \ldots, C_{\nu} \ldots$, стремящихся к точке $C$; каждый из интервалов $C_1E, C_2C_1, \ldots, C_{\nu}C_{\nu-1}, \ldots$ удовлетворяет условиям предшествующего предложения. Следовательно, для каждого из них найдется такой индекс $\alpha$, что множество $P^\alpha$ не имеет ни одной точки внутри этого интервала; пусть эти индексы суть соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ Мы знаем, что существует число первого или второго класса, превышающее все эти числа. Рассуждая таким же образом относительно отрезка $ED$, мы в конце концов убеждаемся, что существует такой индекс $\alpha$, для которого множество $P^\alpha$ не содержит ни одной точки *внутри* первоначального интервала $CD$.

Я теперь утверждаю, что множество $P^\Omega$ не может содержать изолированных точек. В самом деле, для всякой такой точки $M$ мы могли бы найти такой содержащий ее внутри себя интервал $CD$, который не содержит никаких других точек множества $P^\Omega$. Но в таком случае существует такой индекс $\alpha'$, что множество $P^{\alpha'}$ не содержит ни одной точки внутри интервала $CM$, и такой индекс $\alpha''$, что множество $P^{\alpha''}$ не содержит ни одной точки внутри интервала $MD$. Обозначая через $\alpha$ наибольшее из двух чисел $\alpha'$ и $\alpha''$, мы видим, что множество $P^\alpha$ не содержит в интервале $CD$ ни одной точки кроме точки $M$; а отсюда следует, что точка $M$ не может принадлежать множеству $P^{\alpha+1}$, а следовательно и подавно не принадлежит множеству $P^\Omega$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом множество $P^\Omega$, будучи замкнутым, в то же время плотно в себе; следовательно, *$P^\Omega$ есть совершенное множество.*

Отсюда следует существование множества смежных интервалов, заключающих внутри себя всю совокупность точек, не принадлежащих множеству $P^\Omega$. Этим интервалам $C_1D_1, \ldots, C_\nu D_\nu, \ldots$ соответствуют числа $\alpha_1, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ таким образом, что множество $P^{\alpha_\nu}$ не содержит ни одной точки внутри интервала $C_\nu D_\nu$. Следовательно, мы можем найти такое число $\alpha$, что множество $P^\alpha$ не содержит в себе внутренних точек ни одного из этих интервалов и, следовательно, составляет часть множества $P^\Omega$; а так как, с другой стороны, множество $P^\Omega$, как мы знаем, составляет часть множества $P^\alpha$, то эти два множества необходимо должны совпадать между собою.

Таким образом для произвольного множества $P$ либо среди производных множеств $P^\alpha$ имеются пустые, либо, если ни одно из них не пусто, существует такое совершенное множество $P^\Omega$, что все производные множества, начиная с некоторого значения $\alpha$, совпадают с $P^\Omega$. В первом случае, когда некоторые из производных множеств пусты, мы можем сказать, что совокупность общих точек всех производных множеств есть пустое множество. Мы условимся символизировать это обстоятельство соотношением $P^{\Omega}=0$. Тогда, в обоих случаях, существуют такие числа $\alpha$, что $P^{\alpha}=P^{\Omega}$. Среди чисел $\alpha$, удовлетворяющих этому условию, имеется одно наименьшее, которое мы обозначим через $\beta$. Тогда мы имеем: $P^{\beta}=P^{\Omega}$ и $P^{\alpha}>P^{\Omega}$ при $\alpha<\beta$. Множество $P^{\beta}$ совпадает со своим производным множеством, т. е. это — множество либо совершенное, либо пустое; если же $\alpha<$ $<\beta$, то множество $P^{\alpha}$ обязательно содержит точки, не принадлежащие множеству $P^{\beta}$.

42. Пусть нам дано *замкнутое* множество $P$, которое мы, в целях единства обозначений, будем также обозначать через $P^0$. Какая-либо точка $M$ этого множества либо принадлежит всем множествам $P^{\alpha}$ и в таком случае принадлежит и множеству $P^{\Omega}$, либо она этим свойством не обладает, и в этом случае нам необходимо теперь рассмотреть дело подробнее. Существуют, следовательно, такие числа $\alpha$, что множество $P^{\alpha}$ не содержит точки $M$. Пусть $\gamma$ есть наименьшее из этих чисел; $\gamma$ не может быть числом второго рода; в самом деле, если бы это было так, то точка $\gamma$, принадлежащая по условию всем множествам $P^{\alpha}$, при $\alpha<\gamma$, принадлежала бы и множеству $P^{\gamma}$. Таким образом $\gamma$ есть число первого рода; положим $\gamma-1=\delta$. $M$ есть изолированная точка множества $P^{\delta}$; другими словами, точка $M$ принадлежит множеству $P^{\delta}-P^{\delta+1}$. Ясно, что множестаа $P^{\delta}-P^{\delta+1}$ и $P^{\delta'}-P^{\delta'+1}$, если $\delta'\lesseqgtr\delta$, не имеют между собою общих точек; в самом деле, пусть, например, $\delta<\delta'$; точка $M$, будучи изолированной точкой множества $P^{\delta}$, не может принадлежать ни одному из следующих производных миожеств, и в частности — множеству $P^{\delta'}$. Полученный нами результат мы можем выразить соотиошением:

$$P^0=\Sigma(P^{\delta}-P^{\delta+1})+P^{\Omega}\quad(\delta=0,1\ldots<\Omega),\qquad(1)$$

где $\delta$ пробегает все значения, меньшие $\Omega$, или, если угодно все значения, меньшие, нежели $\beta$, где $\beta$ есть число, определенное нами выше. Написанная формула означает, что каждая точка множества $P^0$ принадлежит либо множеству $P^{\Omega}$, либо одному из множеств $P^{\delta}-P^{\delta+1}$. Заметим, наконец, что при $\delta<\beta$ множество $P^{\delta}-P^{\delta+1}$ не может быть пустым. В самом деле, в этом случае мы имели бы $P^{\delta} = P^{\delta+1}$. Множество $P^{\delta}$, совпадающее со своим производным, совпадало бы и со всеми последующими производными; это же невозможно, ибо $\delta < \beta$, между тем как $\beta$, по определению, есть первое число, удовлетворяющее этому условию.

43. В наши рассмотрения мы введем теперь понятие мощности.

Условимся называть множество $Q$ *изолированным*, если каждая его точка изолирована. Таково каждое из множеств $P^{\delta} - P^{\delta+1}$.

Я утверждаю, что всякое изолированное множество есть счетное множество. В самом деле, для каждой точки $M$ изолированного множества $Q$ существует интервал, содержащий точку $M$ и не содержащий ни одной другой точки множества $Q$. Иначе говоря, расстояния от точки $M$ до других точек множества $Q$ имеют *положительную* нижнюю грань $2\mu$. Построим интервал длины $2\mu$, имеющий середину в точке $M$, и проведем аналогичное построение для каждой точки множества $Q$. Очевидно, два таких интервала не могут взаимно перекрываться, и, следовательно, всех их — счетное множество (п. 38). Так как каждый из этих интервалов содержит лишь одну точку множества $Q$, то $Q$ также есть счетное множество.

Таким образом, в формуле (1) каждый член суммы $\sum$ представляет собою счетное множество. Так как сумма эта содержит счетное множество членов, то $\sum (P^{\delta} - P^{\delta+1})$ представляет собою счетное множество. С другой стороны, совершенное множество $P^{\Omega}$, если только оно существует, есть, как мы знаем, несчетное множество. Таким образом:

*Всякое замкнутое множество есть либо счетное множество, либо соединение счетного множества и совершенного множества.*

44. Иногда называют *приводимым* множество $P$, для которого $P^{\Omega}$ есть пустое множество. Всякое приводимое множество есть счетное множество.

Если множество $P$ замкнуто, то, как мы видели, всякая не принадлежащая ему точка содержится в интервале, одни только концы которого принадлежат множеству $P$. Мы и в этом случае будем называть эти интервалы *смежными интервалами* множества $P$. Два таких интервала не могут перекрываться между собою, но могут иметь общий конец. Если это последнее обстоятельство не встречается, то $P$ есть совершенное множество.

Нетрудно фактически построить замкнутое множество, имеющее производные всех порядков, включая $P^{\Omega}$ и для которого

$P^{\beta} > P^{\Omega}$, где $\beta$ — любое наперед заданное число первого ил второго класса.

Рассмотрим для этой цели произвольное, совершенное, нигд не плотное множество $Q$. В каждый из его смежных интервалов поместим приводимое замкнутое множество, производное порядка $\beta$ которого содержит точки, не принадлежащие множеству $Q$. Это мы уже умеем делать. Пусть $P$ есть соединение всех построенных множеств. Множество $P$ имеет $P^{\Omega} = Q$, в то время как $P^{\beta} > Q$.

Следует заметить, что счетное множество может иметь своим производным совершенное нигде не плотное множество, а также и множество только что рассмотренного нами типа. Пусть, например, $Q$ есть совершенное нигде не плотное множество. Тогда совокупность концов его смежных интервалов есть счетное множество, производным которого является множество $Q$.

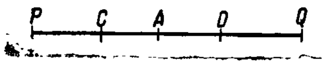
## Глава IV.

# ФУНКЦИИ ОТ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

## I. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА.

45. Проведенный нами анализ точечных множеств был необходим, чтобы подготовить изучение той роли, какую в свойствах функции играет распределение ее точек разрыва. Теперь является своевременным ввести некоторые новые понятия, касающиеся непрерывности и разрывности каких угодно функций,— понятия, которые, как мы увидим, позволят нам установить необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная разрывная функция была пределом последовательности непрерывных функций.

В данный момент мы ограничимся рассмотрением функций от одного единственного переменного, которые мы при этом будем предполагать *ограниченными.*




Черт. 22.

Мы будем предполагать, что функция $f(x)$ определена в интервале $(a, b)$, т. е., что каждому значению $x$, удовлетворяющему условиям $a \leqq x \leqq b$, соответствует определенное значение функции $f$.

Пусть $CD$ есть произвольный интервал, содержащийся в отрезке $PQ$, изображающем собою интервал изменения переменного $x$ (черт. 22). Значения, принимаемые функцией в точках интервала $CD$, образуют множество чисел, которое имеет определенную верхнюю грань $M(f, CD)$, определенную нижнюю грань $m(f, CD)$ и, наконец, определенное колебание:

$$\omega(f, CD) = M(f, CD) - m(f, CD).$$

Рассмотрим произвольную точку $A$ отрезка $PQ$. Окружим ее интервалом $CD$ длины $2\rho$, середина которого лежит в точке $A$. Допустим, что мы затем заменяем $\rho$ некоторым меньшим числом $\rho'$; интервал $CD$ при этом заменяется некоторым меньшим интервалом. При этом число $M(CD)$, которое мы также будем обозначать через $M_\rho$, не может увеличиться, а $m_\rho$ не может уменьшиться. Поэтому мы имеем:

$$M_\rho \geqq M_{\rho'}, \quad m_\rho \leqq m_{\rho'}, \quad \omega_\rho \geqq \omega_{\rho'}.$$

Пусть теперь $\rho$ принимает последовательность значений $\rho_1$, $\rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$, убывающих и стремящихся к нулю. Мы получаем соответственно бесконечную последовательность верхних граней, подчиненных неравенствам:

$$M_{\rho_1} \geqq M_{\rho_2} \geqq \ldots \geqq M_{\rho_n} \geqq \ldots$$

Эти числа стремятся к некоторому пределу $M(f, A)$ (который является, как известно, их нижней гранью); мы будем называть $M(f, A)$ *максимумом функции* $f(x)$ в *точке* $A$. Если теперь $CD$ есть *произвольный* интервал, содержащий внутри себя точку $A$, то, при достаточно большом $n$, интервал длины $2\rho_n$, имеющий середину в точке $A$, содержится внутри интервала $CD$, откуда:

$$M(f, CD) \geqq M_{\rho_n} \geqq M(f, A).$$

Таким образом $M(f, A)$ является нижнею гранью всех чисел $M(f, CD)$, где $CD$ есть любой интервал, содержащий внутри себя точку $A$.

Число $M(f, A)$ характеризуется следующими двумя свойствами:

а) Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует интервал $CD$, содержащий внутри себя точку $A$ и для всех точек которого

$$f < M(f, A) + \varepsilon.$$

б) Каково бы ни было $\varepsilon > 0$ и каков бы ни был интервал $CD$, содержащий внутри себя точку $A$, в этом интервале найдется такая точка $A'$, что

$$f(A') > M(f, A) - \varepsilon.$$

Аналогичным образом мы определяем число $m(f, A)$—*минимум функции* $f$ *в точке* $A$—как верхнюю грань всех чисел $m(f, CD)$, где $CD$ — какой угодно интервал, содержащий внутри себя точку $A$. Очевидно, мы имеем:

$$m(f, A) \leqq M(f, A),$$

ибо $m$ не превышает $f(A)$, которое, в свою очередь, не превышает $M$.

В частном случае, когда функция $f$ непрерывна в точке $A$, мы имеем:

$$M(f, A) = m(f, A) = f(A).$$

Положим вообще

$$\omega(f, A) = M(f, A) - m(f, A).$$

Это число $\omega$ мы назовем *колебанием функции $f$ в точке $A$*. Очевидно, $\omega \geqq 0$. Случай непрерывности характеризуется условием $\omega = 0$; в точке, где $\omega > 0$, функция разрывна.

46. *Полунепрерывность*. Случаем, несколько более общим, нежели непрерывность, является тот, когда мы имеем только

$$f(A) = M(f, A).$$

В общем случае, сколь бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такой интервал $CD$, для любой точки $A'$ которого

$$f(A') < M(f, A) + \varepsilon,$$

значит, в данном случае мы имеем:

$$f(A') < f(A) + \varepsilon.$$

Это есть одно из двух свойств, в совокупности дающих непрерывность. Мы в этом случае скажем, что функция $f(x)$ *полунепрерывна сверху в точке $A$*.

Аналогичным образом, если в соответственно выбранном интервале

$$f(A') > f(A) - \varepsilon,$$

то мы скажем, что функция *полунепрерывна снизу в точке $A$*.

В случае, когда оба условия выполняются, функция $f(x)$ непрерывна в точке $A$.

Мы будем говорить, что функция *полунепрерывна сверху* или *снизу* в данном интервале, если она обладает соответствующим свойством во всех точках этого интервала.

Установив эти определения, рассмотрим максимум $M(f, A)$ какой-либо функции $f(A)$, определенной в каждой точке некоторого отрезка $PQ$. Очевидно, $M(f, A)$ есть функция от $A$, определенная для всех точек отрезка $PQ$. Обозначим ее через $\varphi(A)$.

Я утверждаю, что функция $\varphi(A)$ *полунепрерывна сверху*.

В самом деле, пусть $A$ есть произвольная точка отрезка $PQ$, и $\varepsilon$ — произвольное положительное число (черт. 22). По определению функции $M(f, A)$ мы можем найти интервал $CD$, середина которого находится в точке $A$ и для всех точек которого

$$M(f, CD) < M(f, A) + \varepsilon.$$

Если $A'$ есть любая точка отрезка $CD$, то, по определению функции $M$, мы имеем:

$$M(f, A') \leqq M(f, CD),$$

откуда

$$M(f, A') < M(f, A) + \varepsilon$$

или

$$\varphi(A') < \varphi(A) + \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

Подобным же образом легко показать, что функция

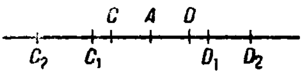
$$\psi(A) = m(f, A)$$

полунепрерывна снизу.

Сумма конечного числа функций, полунепрерывных сверху в точке $A$, также обладает этим свойством. Очевидно, достаточно доказать это предложение для случая двух функций $f_1$ и $f_2$.

По предположению, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти два интервала $C_1D_1$ и $C_2D_2$, каждый из которых содержит внутри себя точку $A$ (черт. 23), причем для любой точки $A'$ первого из них

$$f_1(A') < f_1(A) + \varepsilon,$$



Черт. 23.

а для любой точки $A'$ второго

$$f_2(A') < f_2(A) + \varepsilon.$$

Возьмем интервал $CD$, содержащийся в каждом из интервалов $C_1D_1$, $C_2D_2$ и содержащий внутри себя точку $A$. Для любой его точки $A'$ выполняются оба написанных неравенства. Таким образом мы имеем:

$$f_1(A') + f_2(A') < f_1(A) + f_2(A) + 2\varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

Заметим, наконец, что если функция $f$ полунепрерывна сверху, то функция $-f$ полунепрерывна снизу, ибо из неравенства

$$f(A') < f(A) + \varepsilon$$

следует

$$-f(A') > -f(A) - \varepsilon.$$

*Колебание* $\omega(f, A)$ *функции* $f(x)$ *есть функция полунепрерывная сверху*; в самом деле, $\omega(f, A)$ есть сумма функций $M(f, A)$ и $-m(f, A)$, каждая из которых полунепрерывна сверху.

*Если функция* $f(x)$ *полунепрерывна сверху в интервале* $PQ$ *и если* $a$ *означает какое угодно число, то множество точек интервала* $PQ$, *для которых*

$$f \geqq a,$$

*замкнуто.*

В самом деле, пусть $A_0$ есть предельная точка последовательности точек $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, для каждой из которых

$$f(A_n) \geqq \alpha.$$

В каждом интервале, содержащем внутри себя точку $A_0$, имеются точки последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, стало быть точки, для которых

$$f \geqq \alpha.$$

Следовательно, максимум функции $f$ в таком интервале не менее, нежели $\alpha$. Отсюда:

$$M(f, A_0) \geqq \alpha,$$

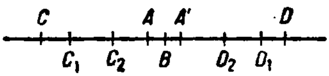
а так как функция $f$ полунепрерывна сверху, то

$$M(f, A_0) = f(A_0),$$

и, следовательно,

$$f(A_0) \geqq \alpha.$$

В частности, для всякой функции $f$ множество точек, в которых колебание ее не менее данного положительного числа $\alpha$, есть *замкнутое* множество.



Черт. 24.

47. Нам теперь придется различать между собою некоторые классы разрывных функций.

Допустим, в качестве первого случая, что функция $f$ обладает следующим свойством: сколь бы мало ни было $\varepsilon > 0$, в любом интервале отрезка $PQ$ найдется точка, в которой колебание функции менее, нежели $\varepsilon$. Мы покажем, что в таком случае в любом интервале отрезка $PQ$ найдутся точки, в которых колебание равно нулю.

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ есть последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю. Будем исходить от какого угодно интервала $CD$ (черт. 24).

По предположению, в этом интервале найдется точка $A$, для которой

$$\omega(f, A) < \varepsilon_1.$$

Но функция $\omega$ полунепрерывна сверху. Следовательно, мы можем найти интервал $C_1D_1$, содержащий точку $A$ внутри себя и для любой точки $A'$ которого

$$\omega(f, A') < \omega(f, A) + \varepsilon_1 < 2\varepsilon_1.$$

В интервале $C_1D_1$ мы можем взять такую точку $A_1$, для которой

$$\omega(f, A_1) < \varepsilon_2.$$

В силу полунепрерывности функции $\omega$ мы можем, далее найти в этом интервале такой интервал $C_2D_2$, для любой точки $A'$ которого

$$\omega(f, A') < \omega(f, A_1) + \varepsilon_2 < 2\varepsilon_2.$$

Продолжая это рассуждение, мы получаем последовательность интервалов $C_1D_1, C_2D_2, \ldots, C_nD_n, \ldots$, каждый из которых содержится в предыдущем, причем для любой точки $A'$ интервала $C_nD_n$ мы имеем:

$$\omega(f, A') < 2\varepsilon_n.$$

Так как каждый интервал содержится в предшествующем, то все эти интервалы имеют по крайней мере одну общую точку; пусть одна из таких точек будет $B$. Колебание в этой точке менее, нежели $\varepsilon_n$, каково бы ни было $n$; следовательно, оно равно нулю, чем наше утверждение и доказано.

Таким образом в этом случае имеется всюду плотное в интервале $PQ$ множество точек, в каждой из которых функция $f$ непрерывна. Мы будем называть такую функцию *точечно разрывной*. Очевидно, для такой функции *минимум колебания равен нулю во всяком интервале, а следовательно и во всякой точке отрезка* $PQ$. Мы уже знаем, что множество точек, в которых колебание функции не менее положительного числа $\varepsilon$, замкнуто. Для точечно разрывной функции это множество, по самому определению такой функции, *нигде не плотно*. Если функция $f$ этому условию не удовлетворяет, то это значит, что существует, с одной стороны, такой интервал $AB$, а с другой — такое положительное число $\alpha$, что в любой точке интервала $AB$

$$\omega \geqq \alpha.$$

Функции такого рода мы будем называть *разрывными сплошь*.

Таким образом функция разрывна *точечно* или *сплошь*, смотря по тому, обращается ли всюду в нуль минимум ее колебания или нет (при этом непрерывные функции мы рассматриваем как частный случай функций точечно разрывных).

В качестве примера функции сплошь разрывной упомянем функцию, которая на отрезке $(0, 1)$ равна *нулю* во всех точках с рациональными абсциссами и *единице* во всех точках, абсциссы которых иррациональны. Пусть $A$ есть любая точка этого отрезка. В любом соседстве ее имеются точки обоего рода, вследствие чего

$$M(f, A) = 1, \ m(f, A) = 0, \ \omega(f, A) = 1.$$

Примеры функций точечно разрывных представляют нам все функции, какие мы рассматривали в предшествующих главах; в частности — все функции, для которых множество точек разрыва приводимо. Ибо для такой функции в любом интервале найдется другой интервал, не содержащий ни одной точки разрыва.

В качестве другого примера рассмотрим функцию, определяемую на отрезке (0, 1) следующим образом:
при $x = 0$ и $x = 1$,

$$f = 1;$$

при $x = \frac{1}{2}$,

$$f = \frac{1}{2},$$

при $x = \frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{4}$,

$$f = \frac{1}{4}.$$

Вообще, в точке $x = \frac{p}{2^\nu}$, если дробь несократвма, мы полагаем

$$f = \frac{1}{2^\nu}.$$

Во всех же остальных точках мы положим

$$f = 0.$$

Покажем, что построенная таким образом функция (имеющая точки разрыва в любом интервале) будет точечно разрывна.

В самом деле, нетрудно убедиться, что эта функция непрерывна в любой точке, абсцисса которой не имеет формы $\frac{p}{2^\nu}$; действительно, в каждой такой точке $A$

$$f = 0.$$

Пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число и $\nu$ — такое н туральное число, что

$$\frac{1}{2^\nu} < \varepsilon.$$

Мы можем найти интервал, содержащий точку $A$ и не содер жащий ни одной из точек $\frac{p}{2^h}$ $(h \leqq \nu - 1)$.

В любой точке такого интервала

$$0 \leqq f \leqq \frac{1}{2^\nu} < \varepsilon.$$

К этому можно еще прибавить, что функция $f$ полунепрерывна сверху; в самом деле, для точек, подобных рассмотренной точке $A$, это условие выполнено в силу того, что функция $f$ в таких точках непрерывна. В точке же $A'$ с абсциссою $\frac{p}{2^\nu}$ мы имеем

$$f = \frac{1}{2^\nu}.$$

Рассмотрим интервал длины $\frac{1}{2^\nu}$, содержащий точку $A'$; в любой точке такого интервала

$$f \leqq \frac{1}{2^\nu},$$

откуда и следует, что функция $f$ полунепрерывна сверху в точке $A'$; следовательно, она обладает этим свойством и во всем интервале $(0, 1)$.

48. Мы покажем, что всякая полунепрерывная функция точечно разрывна. Убедимся сначала, что, *если функция* $f(x)$ *определена в интервале* $PQ$ и если мы обозначим через $\varphi$ функцию $M(f, A)$, *то функция* $\varphi - f$, которая, очевидно, нигде не отрицательна, *имеет в каждой точке отрезка* $PQ$ *минимум, равный нулю.*

В самом деле, пусть $A$ есть любая точка отрезка $PQ$ и $\varepsilon$ — любое положительное число. Так как функция $\varphi$ полунепрерывна сверху, то существует интервал $CD$, содержащий точку $A$ внутри себя и для любой точки $B$ которого

$$\varphi(B) < \varphi(A) + \varepsilon.$$

С другой стороны, по определению функции $\varphi$, мы можем в любой близости к точке $A$ найти такую точку $B$, для которой

$$f(B) > \varphi(A) - \varepsilon.$$

Отсюда следует, что в любой близости к точке $A$ найдутся точки, удовлетворяющие обоим поставленным условиям. Производя почленное вычитание этих неравенств, мы получаем:

$$\varphi(B) - f(B) < 2\varepsilon,$$

откуда мы и заключаем, что функция $\varphi - f$ имеет в точке $A$ минимум, равный нулю.

Тем же путем легко показать, что этим же свойством обладает функция $f - \psi$, где $\psi = m(f, A)$.

Установив это, покажем теперь, что всякая полунепрерывная функция $f$ точечно разрывна. В самом деле, в этом случае $\varphi = f$; следовательно, $\omega = \varphi - \psi = f - \psi$; в силу только что доказанной леммы минимум функции $\omega$ равен нулю в каждой точке, откуда и следует точечная разрывность функции $f$.

49. Станем теперь на точку зрения расположения точек разрыва. Мы видели, что если $\omega$ означает колебание какой-либо точечно разрывной функции, а $\delta$ — какое угодно положительное число, то точки, в которых $\omega \geqq \delta$, образуют нигде не плотное множество, причем это свойство может служить в качестве определения точечно разрывных функций. Пусть $G$ есть множество всех точек разрыва рассматриваемой функции. Мы можем воображать его составленным следующим образом: возьмем последовательность положительных чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, стремящихся к нулю. Обозначим через $G_n$ совокупность тех точек отрезка $PQ$, в которых $\omega \geqq \delta_n$. Тем самым мы определяем последовательность $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ замкнутых множеств, каждое из которых нигде не плотно на отрезке $PQ$. Соединение всех этих множеств есть множество $G$. В самом деле, любая точка любого из множеств $G_n$ есть точка разрыва данной функции и потому принадлежит множеству $G$. Обратно, если $A$ есть точка разрыва, то в ней $\omega > 0$, а стало быть и $\omega > \delta_n$ при достаточно большом $n$, вследствие чего точка $A$ принадлежит множеству $G_n$.

Тем самым мы приходим к некоторой новой классификации точечных множеств.

Данное множество мы назовем множеством *первой категории* в отрезке $PQ$, если оно представляет собою соединение счетной последовательности множеств, каждое из которых нигде не плотно в этом отрезке. В противном случае мы назовем его множеством *второй категории*.

Укажем некоторые свойства множеств первой категории.

*Соединение конечного или счетного числа множеств первой категории есть множество также первой категории.*

В самом деле, множество первой категории состоит из счетного множества нигде не плотных множеств. Но соединение счетного множества счетных множеств снова есть счетное множество. В частности, соединение счетного множества множеств первой категории, будет поэтому соединением счетного множества нигде не плотных множеств.

*Если $G$ есть множество первой категории в отрезке $PQ$, то в любом интервале этого отрезка найдется точка, не принадлежащая множеству $G$.*

В самом деле, множество $G$ есть соединение счетного множества нигде не плотных множеств, которые мы обозначим через $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ Пусть $ab$ есть любой интервал отрезка $PQ$. Так как множество $G_1$ нигде не плотно в отрезке $PQ$, то в интервале $ab$ найдется интервал $a_1b_1$, не содержащий ни одной точки множества $G_1$. По аналогичным соображениям, в интервале $a_1 b_1$ найдется интервал $a_2 b_2$, не содержащий ни одной точки множества $G_2$, и т. д. Мы таким образом получаем последовательность интервалов $a_1 b_1$, $a_2 b_2, \ldots$, $a_n b_n$, $\ldots$, где каждый интервал $a_n b_n$ содержится в предшествующем и не содержит ни одной точки множества $G_n$. Пусть $A$ есть точка, общая всем этим интервалам; она не принадлежит ни одному из множеств $G_n$, а следовательно не может принадлежать и множеству $G$. Наше утверждение, таким образом, доказано, и мы видим, что множество $E - G$ точек отрезка $PQ$, не принадлежащих множеству $G$, всюду плотно во всем отрезке $PQ$. Кроме того, мы видим, что само множество $E$ по отношению к себе не может быть множеством первой категории. Следовательно, оно есть множество второй категории, так же как и множество $E - G$.

Всякое счетное множество есть множество первой категории. В самом деле, оно представляет собою соединение счетного множества отдельных точек, каждую из которых мы можем рассматривать как нигде не плотное множество.

Чтобы построить множество первой категории, которое было бы несчетным и вместе с тем всюду плотным, мы можем поступать следующим образом: возьмем в интервале $(0, 1)$ совершенное нигде не плотное множество, точки которого имеют абсциссы вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, где каждое $a_n$ есть 0 или 2. Рассмотрим смежные интервалы этого множества, которое мы обозначим через $G_1$; в каждом из этих интервалов мы поместим множество, расположенное относительно этого интервала так, как множество $G_1$ расположено относительно интервала $(0, 1)$. Обозначим через $G_2$ соединение всех построенных множеств, включая множество $G_1$. Очевидно, что $G_2$ есть совершенное нигде не плотное множество. С каждым из его смежных интервалов мы поступим так же, как поступали со смежными интервалами множества $G_1$, и совокупность всех построенных множеств обозначим через $G_3$. Этот процесс мы продолжим безгранично, и обозначим через $G$ соединение всех множеств $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ Множество $G$ есть множество первой категории. Я утверждаю, что оно всюду плотно. В самом деле, максимальная длина смежного интервала для множества $G_1$ есть $\frac{1}{3}$, для множества $G_2$ — $\frac{1}{3^2}$, вообще для множества $G_n$ — $\frac{1}{3^n}$. Эта длина стремится к нулю при неограниченном возрастании $n$. Следовательно, для любого интервала мы можем найти столь большое число $n$, что множество $G_n$, а следовательно и множество $G$, имеет точки в этом интервале. Это же и означает, что множество $G$ всюду плотно.

## I. УСЛОВИЕ, НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ДАННАЯ ФУНКЦИЯ БЫЛА ПРЕДЕЛОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ.

30. Мы можем теперь приступить к исследованию тех условий, которым подчинены функции, являющиеся предельными для последовательностей непрерывных функций.

Лемма. *Пусть $T$ означает множество чисел, обладающее тем свойством, что* $M(T) - m(T) > 2\lambda$, где $M(T)$ и $m(T)$ соответственно означают верхнюю и нижнюю грань множества $T$, а $\lambda$ — некоторое положительное число. *Тогда для любого числа $a$ найдется такое число $b$ множества $T$, что* $|a - b| > \lambda$.

Из условия

$$M(T) - m(T) - 2\lambda > 0$$

следует:

$$[M(T) - a - \lambda] + [a - m(T) - \lambda] > 0.$$

Так как сумма этих двух скобок положительна, то, по меньшей мере, одна из них должна иметь положительную величину. Пусть это будет первая скобка; тогда, при достаточно малом $\varepsilon$, мы будем иметь:

$$M(T) - a - \lambda > \varepsilon.$$

В силу определения числа $M(T)$, множество $T$ содержит число $b$, удовлетворяющее условию

$$b > M(T) - \varepsilon.$$

Складывая эти неравенства, мы получаем

$$b - a > \lambda.$$

Если бы мы имели

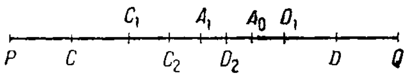
$$a - m(T) - \lambda > 0,$$

то аналогичным путем мы нашли бы такое число $b$ множества $T$, что

$$a - b > \lambda,$$

чем наше утверждение и доказано.

51. Допустим теперь, что нам дана последовательность непрерывных функций $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$, определенных на некотором отрезке $PQ$ и стремящихся к функции $f$, которую мы для простоты будем предполагать ограниченной. Я утверждаю, что функция $f$ точечно разрывна. Покажем, что предполагая функцию $f$ разрывною сплошь, мы неизбежно приходим к противоречию.




Черт. 25.

В самом деле, в этом предположении существует такой отрезок $CD$ (черт. 25) и такое положительное число $2\lambda$, что в каждой точке $A$ отрезка $CD$ колебание $\omega(f, A)$ превосходит $2\lambda$. Пусть $\mu < \lambda$ есть некоторое положительное число; положим

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$. Пусть $A_0$ есть произвольная точка отрезка $CD$. Последовательность $f_1(A_0), f_2(A_0), \ldots, f_\nu(A_0), \ldots$ имеет своим пределом $f(A_0)$. Следовательно, существует натуральное число $\alpha$, для которого

$$|f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Так как функция $f_\alpha$ непрерывна, то найдется интервал $C_1D_1$, содержащий внутри себя точку $A_0$, заключенный внутри отрезка $CD$ и для любой точки $A$ которого

$$|f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Но колебание функции $f$ в отрезке $C_1D_1$ превосходит $2\lambda$. В силу леммы п. 50, существует поэтому в интервале $C_1D_1$ такая точка $A_1$, что

$$|f(A_1) - f(A_0)| > \lambda. \tag{3}$$

Последовательность $f_1(A_1), f_2(A_1), \ldots, f_\nu(A_1), \ldots$ имеет своим пределом $f(A_1)$. Значит, можно найти такое натуральное число $\beta$, что

$$|f_\beta(A_1) - f(A_1)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Но функция $f_\beta$ непрерывна, вследствие чего мы можем найти интервал $C_2D_2$, содержащий внутри себя точку $A_1$, заключенный в интервале $C_1D_1$ и для всех точек $A$ которого

$$|f_\beta(A) - f_\beta(A_1)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Сверх того, любая точка $A$ интервала $C_2D_2$ удовлетворяет условию (2).

Комбинируя, с одной стороны, соотношения (1) и (2), с другой, — соотношения (4) и (5), мы получаем:

$$|f_\alpha(A) - f(A_0)| < 2\varepsilon,$$

$$|f_\beta(A) - f(A_1)| < 2\varepsilon,$$

а сопоставляя эти два неравенства с неравенством (3), мы получаем

$$f_\alpha(A) - f_\beta(A)| > \lambda - 4\varepsilon,$$

или, что то же,

$$|f_\alpha(A) - f_\beta(A)| > \mu\,. \tag{6}$$

Это последнее неравенство выполняется для любой точки $A$ отрезка $C_2D_2$.

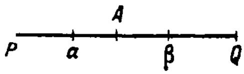
С другой стороны, мы отправлялись от последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ Но все наши рассуждения сохраняют силу, если мы станем отправляться от последовательности $f_{p+1}$, $f_{p+2}, \ldots$, где $p$ — любое натуральное число, и вместе с тем заменим отрезок $CD$ каким-либо содержащимся в нем интервалом. Таким образом для любого $p$ мы в любом интервале, заключенном в отрезке $CD$, найдем такой интервал $C_2D_2$, все точки $A$ которого удовлетворяют условию (6), где $\alpha$ и $\beta$ суть некоторые натуральные числа бо́льшие, нежели $p$. Для всякой такой точки $A$, следовательно, выполняется условие:

$$\omega\,[f_{p+1}(A), f_{p+2}(A), \ldots] > \mu, \tag{7}$$

где левая часть означает собою расстояние между граням множества чисел, заключенных в скобках.

Таким образом, каково бы ни было $p$, множество $G_p$ те точек отрезка $CD$, для которых условие (7) не выполняетс нигде не плотно на отрезке $CD$. Если числу $p$ мы будем после довательно давать значения $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$, то соединение всех множеств $G_1, G_2, \ldots, G_\nu, \ldots$ будет множеством первой ка тегории относительно отрезка $CD$, а следовательно на этом от резке найдутся точки, не принадлежащие множеству $G$. Пусть $A$ будет такая точка; так как она не принадлежит ни одному из множеств $G_p$, то она при любом $p$ удовлетворяет условию (7). Это же очевидно противоречит тому, что $f_\nu(A)$ стремится к определенному пределу, когда $\nu$ неограниченно возрастает.

Итак, *всякая функция, являющаяся пределом последовательности непрерывных функций, есть функция точечно разрывная.*




Черт. 26.

Нетрудно проверить это условие на всех рассмотренных нами примерах. С другой стороны, мы можем теперь легко указать пример функции, которая заведомо не может быть пределом последовательности непрерывных функций. Такою будет, например, функция, равная *нулю* во всех точках с рациональными абсциссами и *единице* во всех точках с иррациональными абсциссами, ибо эта функция сплошь разрывна во всяком интервале.

## III. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ НА СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО СОВЕРШЕННОГО МНОЖЕСТВА.

52. Нам предстоит теперь распространить полученные в настоящей главе результаты на тот случай, когда вместо сплошного отрезка мы полагаем в основание наших рассуждений произвольное совершенное множество.

При этом мы убедимся, что большинство из этих результатов сохранится и что, следовательно, свойство отрезка *быть совершенным множеством* играло основную роль во всем предшествующем.

Рассмотрим функцию $f$, определенную на совершенном множестве $H$, расположенном на отрезке $PQ$ (черт. 26). Пусть $\alpha\beta$ есть какой-либо интервал, содержащий внутри себя точки множества $H$.

Значения функции $f$ в точках множества $H$, заключенных в отрезке $\alpha\beta$, имеют определенную верхнюю и нижнюю грань и определенное колебание, которые мы соответственно обозначим через

$$M(f, H, \alpha\beta), \quad m(f, H, \alpha\beta)$$

и

$$\omega(f, H, \alpha\beta) = M - m.$$

Пусть $A$ есть произвольная точка множества $H$. Рассмотрим последовательность интервалов $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots, \alpha_n\beta_n, \ldots$, каждый из которых содержится в предыдущем и содержит внутри себя точку $A$, причем длина интервала $\alpha_n\beta_n$ стремится к нулю при неограниченном возрастании $n$. Числа $M(f, H, \alpha_n\beta_n)$ при возрастании $n$ не могут увеличиваться. Следовательно, эти числа имеют нижний предел, который при этом не зависит от выбранной системы интервалов $\alpha_n\beta_n$. Этот предел мы будем называть *максимумом функции $f$ в точке $A$ относительно множества $H$* и обозначать через $M(f, H, A)$. Аналогичным образом определяется *минимум относительно множества $H$*, $m(f, H, A)$. *Колебанием* $\omega(f, H, A)$ мы будем называть разность между этими двумя числами.

При помощи этих определений мы можем ввести понятия непрерывности и разрывности функции в точках множества $H$ относительно этого множества. Мы скажем, что функция *$f$ непрерывна в точке $A$ относительно множества $H$*, если $\omega(f, H, A) = 0$, в противном случае мы назовем функцию *$f$ разрывною в точке $A$ относительно множества $H$*.

Если $M(f, H, A) = f(A)$, то мы скажем, что функция $f$ *полунепрерывна сверху* в точке $A$ относительно множества $H$; в этом случае, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти интервал $\alpha\beta$, содержащий точку $A$ внутри себя и для любой точки которого $A'$, одновременно принадлежащей и множеству $H$, мы имели бы:

$$f(A') < f(A) + \varepsilon;$$

и обратно, если это условие выполнено, то в качестве его следствия мы получаем $M = f$.

Аналогичным образом определяется *полунепрерывность снизу*.

Функция $\varphi$, равная $M(f, H, A)$ в каждой точке $A$ множества $H$, полунепрерывна сверху (какова бы ни была функция $f$).

Функция, полунепрерывная сверху на множестве $H$ и минимум которой относительно $H$ равен нулю в каждой точке множества $H$, необходимо обращается в нуль в некоторых точках множества $H$ в каждом интервале, в котором содержится хотя бы одна точка множества $H$.

Докажем это последнее предложение. Возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, стремящихся к нулю. В любом интервале $\alpha\beta$ (черт. 27), содержащемся в отрезке $PQ$ и содержащем внутри себя точки множества $H$, мы можем найти точку $A_1$ множества $H$, для которой

$$f(A_1) < \varepsilon_1.$$

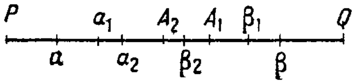
Так как наша функция полунепрерывна сверху, то существует интервал $\alpha_1 \beta_1$, содержащий внутри себя точку $A_1$ и для любой точки $A$ которого (принадлежащей множеству $H$)

$$f(A) < f(A_1) + \varepsilon_1 < 2\varepsilon_1.$$

Подобным образом, внутри интервала $\alpha_1 \beta_1$ мы найдем точку $A_2$, для которой

$$f(A_2) < \varepsilon_2,$$

и затем определим интервал $\alpha_2\beta_2$, содержащий точку $A_2$, заключенный в интервале $\alpha_1\beta_1$, и для любой точки $A$ которого (принадлежащей множеству $H$)




Черт. 27.

$$f(A) < f(A_2) + \varepsilon_2 < 2\varepsilon_2$$

и т. д. Мы последовательно получаем интервалы $\alpha_1 \beta_1, \ldots, \alpha_n \beta_n, \ldots$, причем в любой точке $A$ множества $H$, заключенной в интервале $\alpha_n \beta_n$,

$$f(A) < 2\varepsilon_n.$$

Так как каждый интервал содержится в предыдущем, то все они имеют по крайней мере одну общую точку. В такой точке $A$ мы имеем:

$$f(A) < 2\varepsilon_n$$

при любом $n$, и, следовательно, $f(A) = 0$.

53. Среди функций, определенных на совершенном множестве, мы можем провести ту же классификацию, какую мы провели в свое время для функций, определенных на отрезке. Необходимо различать три случая.

*Первый случай*. Данная функция *непрерывна* в каждой точке множества $H$. Это будет тогда, если $\omega$ равно нулю в каждой точке множества $H$.

Например, всякая функция, определенная на отрезке $PQ$ и непрерывная в этом отрезке, будет непрерывна и на всяком совершенном множестве, расположенном на этом отрезке.

Чтобы указать пример иного рода, рассмотрим совершенное множество, точки которого имеют абсциссы вида

$$\sum \frac{a_n}{3^n},$$

где каждое $a_n$ есть 0 или 2. Если мы дадим функции $f$ какое-либо постоянное значение во всех точках множества $H$, а вне этого множества определим ее как угодно, то такая функция, разумеется, будет непрерывна на множестве $H$. Непрерывною на множестве $H$ будет также функция, равная нулю во всех точках множества $H$, лежащих левее точки $A$, и единице — во всех точках множества $H$, лежащих правее точки $A$; при этом $A$ есть произвольная точка, принадлежащая одному из смежных интервалов множества $H$.

*Второй случай.* Функция $f$ имеет точки разрыва; но во всяком интервале, содержащем точки множества $H$, существуют, сколь бы мало ни было $\varepsilon > 0$, такие точки множества $H$, в которых колебание функции $f$ относительно множества $H$ не превосходит $\varepsilon$. Так как колебание есть функция полунепрерывная сверху, то во всяком интервале, содержащем точки множества $H$, найдутся точки этого множества, в которых $\omega = 0$ и, следовательно, функция $f$ непрерывна. В этом случае мы назовем функцию $f$ точечно разрывной на множестве $H$.

Возьмем нигде не плотное совершенное множество $H$, рассмотренное в предыдущем примере. Пусть $f = \frac{1}{2}$ в точках $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, $f = \frac{1}{2^2}$ в точках $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$; вообще, в точках с абсциссою $\frac{p}{3^n}$ (где дробь несократима), принадлежащих множеству $H$, положим $f = \frac{1}{2^n}$. Наконец, пусть $f = 0$ во всех остальных точках множества $H$; Очевидно, функция $f$ разрывна в каждой точке, где $f > 0$, и вместе с тем во всяком интервале, содержащем точки множества $H$; среди них найдутся такие, где $\omega$ не превышает любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon$. Следовательно, функция точечно разрывна на множестве $H$.

*Третий случай.* Условие предыдущего случая не выполняется. Следовательно, существует такой интервал $\alpha\beta$, содержащий точки множества $H$, и такое положительное число $\lambda$, что колебание функции $f$ превосходит $\lambda$ в любой точке множества $H$, лежащей в интервале $\alpha\beta$. В этом случае мы скажем, что функция *разрывна сплошь*.

54. Теперь мы обобщим ряд понятий, относящихся к множествам. Если $H$ есть совершенное множество, а $K$ — произвольное множество, содержащееся в множестве $H$, то возможны два случая:

*Первый случай.* В каждом интервале, содержащем внутри себя точки множества $H$ найдется другой интервал, обладающий тем же свойством, но не содержащий ни одной точки множества $K$.

*Второй случай.* Существует интервал $\lambda$, содержащий внутри себя точки множества $H$ и обладающий тем свойством, что всякий другой интервал, содержащийся в нем и содержащий внутри себя точки множества $H$, содержит по меньшей мере одну точку множества $K$.

В первом случае мы будем называть множество $K$ *нигде не плотным* на множестве $H$. Во втором случае мы будем говорить, что множество $K$ всюду плотно на части множества $H$, заключенной в интервале $\lambda$.

Например, множество тех точек множества $H$, в которых колебание относительно множества $H$ некоторой точечно разрывной на этом множестве функции не менее некоторого числа $\sigma > 0$, есть множество, нигде не плотное на множестве $H$. И обратно, если это условие выполняется при всяком $\sigma > 0$, то данная функция точечно разрывна на множестве $H$.

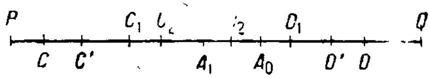
Рассмотрим множество $G$ точек разрыва такой функции. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ есть последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю. Множество $G$ есть соединение всех множеств $G_n$, где через $G_n$ мы обозначаем совокупность точек, в которых $\omega \geqq \sigma_n$.

Множество, содержащееся в множестве $H$, мы будем называть множеством *первой категории* относительно $H$, если оно представляет собою соединение счетного числа множеств, нигде не плотных на множестве $H$.

Я утверждаю, что, если $K$ есть множество первой категории относительно множества $H$, то во всяком интервале, содержащем точки множества $H$, среди этих последних найдутся такие, которые не принадлежат множеству $K$.

В самом деле, пусть $\alpha\beta$ есть какой угодно интервал, содержащий внутри себя точки множества $H$. По предположению, множество $K$ представляет собою соединение счетной последовательности множеств $K_1, K_2, \ldots, K_n$, каждое из которых нигде не плотно на множестве $H$. В интервале $\alpha\beta$ мы можем поэтому найти интервал $\alpha_1\beta_1$, содержащий внутри себя точки множества $H$, но не содержащий ни одной точки множества $K_1$; затем, в интервале $\alpha_1\beta_1$ — такой другой интервал $\alpha_2\beta_2$, который содержит внутри себя точки множества $H$, но не содержит ни одной точки множества $K_2$, и т. д. Мы получаем последовательность интервалов $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots, \alpha_n\beta_n, \ldots$, причем интервал $\alpha_n\beta_n$, содержащийся внутри интервала $\alpha_{n-1}\beta_{n-1}$, содержит точки множества $H$, но не содержит ни одной точки множества $K_n$. Любая общая всем этим интервалам точка не принадлежит ни одному из множеств $K_n$, а следовательно не принадлежит и множеству $K$.

Приведем следующий пример множества, нигде не плотного на некотором другом множестве. Возьмем совершенное множество $H$, абсциссы точек которого имеют форму $\sum \frac{a_n}{3^n}$, где всякое $a_n$ есть 0 или 2. В каждом из смежных интервалов множества $H$ поместим множество, расположенное относительно этого интервала так, как само множество $H$ расположено относительно интервала $(0, 1)$. Пусть $H_1$ есть соединение всех взятых множеств; очевидно, $H_1$ есть совершенное множество. Я утверждаю, что множество $H$ нигде не плотно на множестве $H_1$.



Черт. 28.

В самом деле, рассмотрим какой-либо интервал, содержащий внутри себя точки множества $H_1$. Этот интервал, необходимо содержащий внутри себя смежные интервалы множества $H$ (или части таких интервалов), содержит поэтому и такие точки множества $H_1$, которые не принадлежат множеству $H$. Но каждая из таких точек, в силу замкнутости множества $H$, содержится в некотором интервале, не содержащем ни одной точки множества $H$. Отсюда и следует, что множество $H$ нигде не плотно на множестве $H_1$.

55. Мы теперь обобщим теорему, в которой мы установили необходимое свойство всех функций, являющихся предельными для последовательностей непрерывных функций.

*Если на совершенном множестве $H$ определена последовательность непрерывных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, имеющих пределом функцию $f$, то эта последняя точечно разрывна на множестве $H$.*

Мы должны показать, что функция $f$ не может быть сплошь разрывною на множестве $H$. Если бы это было так, то должен был бы существовать такой интервал $CD$ (черт. 28), содержащий внутри себя точки множества $H$, и такое положительное число $2\lambda$, что в любой точке $A$ множества $H$, заключенной в интервале $CD$,

$$\omega(f, H, A) > 2\lambda.$$

Следовательно, в каждом интервале $C'D'$, который содержится в интервале $CD$ и содержит внутри себя точки множества $H$, мы должны были бы иметь:

$$\omega(f, H, C'D') > 2\lambda.$$

Возьмем число $\mu$, удовлетворяющее неравенствам

$$0 < \mu < \lambda,$$

и положим

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon.$$

Пусть, с другой стороны, мы выбрали какой-либо интервал $C'D'$, содержащий внутри себя точки множества $H$, и пусть $A_0$ — одна из этих точек. Последовательность $f_1(A_0)$, $f_2(A_0), \ldots, f_n(A_0), \ldots$ имеет пределом $f(A_0)$. Следовательно, мы можем найти такое натуральное число $\alpha$, что

$$|f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

По предположению, функция $f_\alpha$ непрерывна на совершенном множестве $H$. Так как точка $A_0$ лежит *внутри* интервала $C'D'$, то мы можем, следовательно, найти интервал $C_1D_1$, содержащий внутри себя точку $A_0$, содержащийся в интервале $C'D'$ и для любой точки $A$ которого, принадлежащей множеству $H$,

$$|f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Заменим теперь интервал $C_1D_1$ интервалом $C_1'D_1'$, *внутренним* по отношению к нему и содержащим внутри себя точку $A_0$. Значения функции $f$ в точках множества $H$, заключенных в интервале $C_1'D_1'$, образуют множество, колебание (т. е. расстояние между верхней и нижней гранями) которого превышает $2\lambda$. Поэтому, в силу леммы п. 50, мы можем утверждать существование такой точки $A_1$ множества $H$, заключенной в интервале $C_1'D_1'$, для которой

$$|f(A_1) - f(A_0)| > \lambda. \tag{3}$$

Так как последовательность $f_1(A_1), f_2(A_1), \ldots, f_n(A_1), \ldots$ имеет своим пределом $f(A_1)$, то существует такое натуральное число $\beta$, что

$$|f_\beta(A_1) - f(A_1)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Далее, в силу непрерывности функции $f_\beta$ в точке $A_1$, которая находится *внутри* интервала $C_1D_1$, ибо принадлежит интервалу $C_1'D_1'$, мы находим интервал $C_2D_2$, содержащий внутри себя точку $A_1$, содержащийся внутри интервала $C_1D_1$ и для любой точки $A$ которого, одновременно принадлежащей множеству $H$,

$$|f_\beta(A) - f_\beta(A_1)| < \varepsilon. \qquad (5)$$

Из этих неравенств мы, подобно случаю п. 51, заключаем, что для любой точки $A$ множества $H$, содержащейся в интервале $C_2D_2$,

$$\omega\,[f_1(A),\ f_2(A), \ldots,\ f_n(A), \ldots] > \mu.$$

Но все наши рассуждения сохраняют силу, будучи применены к последовательности $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots$, где $p$ — любое натуральное число. Таким образом для любого $p$, в любом интервале $C'D'$, заключенном в интервале $CD$ и содержащем внутри себя точки множества $H$, найдется интервал $C_2D_2$, содержащий внутри себя точки множества $H$, причем для каждой из них

$$\omega\,[f_{p+1}(A), f_{p+2}(A), \ldots] > \mu. \qquad (6)$$

Другими словами, совокупность $G_p$ точек множества $H$, не удовлетворяющих условию (6), есть множество, нигде не плотное на множестве $H$ в интервале $CD$. Заставим $p$ принимать поочередно все значения $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ и обозначим через $G$ соединение всех множеств $G_\nu$. Тогда $G$ есть множество первой категории относительно множества $H$. Следовательно, существуют точки множества $H$, не принадлежащие множеству $G$. Каждая точка $A$ при всяком $p$ удовлетворяет неравенству (6). Это же противоречит тому, что $f_n(A)$ стремится к определенному пределу при неограниченном возрастании $n$.

*Таким образом всякая функция $f$, являющаяся пределом последовательности непрерывных функций, точечно разрывна на всяком совершенном множестве.*

Приведем следующий пример функции, которая заведомо не может быть пределом последовательности непрерывных функций. Пусть $H$ есть нигде не плотное совершенное множество и пусть функция $f$ равна единице в концах его смежных интервалов и нулю — во всех остальных точках; функция $f$ точечно разрывна на всем отрезке; но она разрывна сплошь на множестве $H$, ибо колебание ее относительно $H$ равно единице в каждой точке этого множества. Следовательно, функция $f$ не может быть пределом последовательности непрерывных функций.

## IV. ОТЫСКАНИЕ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ.

56. Теперь мы должны спросить себя, будут ли найденные нами необходимые условия для того, чтобы данная функция была пределом последовательности непрерывных функций, вместе с тем и достаточными. Этот вопрос мы рассмотрим во всей его общности в следующей главе. Здесь же мы ограничимся рассмотрением того частного случая, когда функция $f$, определенная на отрезке $(0, 1)$, принимает только два значения: 0 и 1.

Заметим, что, каково бы ни было совершенное множество $H$, числа $M$, $m$ и $\omega$, относящиеся к функции $f$ и множеству $H$, могут иметь на этом множестве только значения 0 и 1, ибо функция $f$ не принимает иных значений. В частности, так как $\omega = 1$ в каждой точке разрыва, то множество этих точек необходимо замкнуто. Для того, чтобы функция $f$ была пределом последовательности непрерывных функций, *необходимо*, чтобы она была точечно разрывна на всяком совершенном множестве.

Обозначим через $P_0$ совокупность всех точек отрезка $(0, 1)$ и через $P_1$ — множество точек разрыва функции $f$, которое, как мы знаем, замкнуто. Множество $P_1$, в каждой точке которого $\omega = 1$, должно быть *нигде не плотным* на множестве $P_0$. В каждом из смежных интервалов множества $P_1$ функция $f$ непрерывна и, следовательно, либо всюду равна нулю, либо всюду равна единице (в обоих случаях, за исключением, быть может, концов данного интервала). Замкнутое множество $P_1$ может иметь производные множества всех порядков, соответствующих числам первого и второго классов; в таком случае, оно имеет и производное $P_1^{\Omega}$, которое, как мы знаем, есть *совершенное* множество. На множестве $P_1^{\Omega}$ поэтому функция $f$ должна быть точечно разрывной. Множество $P_2$ точек разрыва функции $f$ относительно множества $P_1^{\Omega}$ есть поэтому множество замкнутое и нигде не плотное на $P_1^{\Omega}$. Может случиться, что множество $P_2$ имеет производное $P_2^{\Omega}$. В таком случае мы рассмотрим множество $P_3$ точек разрыва функции $f$ относительно множества $P_2^{\Omega}$, и т. д. Если множество $P_n$ определено и если множество $P_n^{\Omega}$ существует, то вообще через $P_{n+1}$ мы обозначаем множество точек разрыва функции $f$ относительно множества $P_n^{\Omega}$. Может случиться, что указанный процесс будет продолжаться безгранично. Тогда мы получим последовательность множеств $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$, каждое из которых замкнуто и содержится в предыдущем. Мы знаем, что в этом случае существуют точки, общие всем этим множествам. Множество таких точек, которое, как мы знаем, замкнуто, мы обозначим через $P_{\omega}$. Оно, в свою очередь, может иметь производное множество порядка $\Omega$. В таком случае мы обозначим множество точек разрыва функции $f$ относительно множества $P_{\omega}^{\Omega}$ через $P_{\omega+1}$.

Определим теперь множество $P_{\alpha}$ для любого числа $\alpha$ первого или второго класса. Допустим, что определение уже дано для всех чисел $\alpha'$, предшествующих числу $\alpha$.

Если число $\alpha$ первого рода, то $P_{\alpha}$ есть, по определению, множество точек разрыва функции $f$ относительно множества $P_{\alpha-1}^{\Omega}$.

Если же $\alpha$ — число второго рода, то $P_{\alpha}$ есть, по определению, совокупность всех точек, общих всем множествам $P_{\alpha'}$, для которых $\alpha' < \alpha$.

Если среди чисел $\alpha'$, меньших, нежели $\alpha$, мы возьмем фундаментальную последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu}, \ldots,$ имеющую пределом $\alpha$, то можно также сказать, что $P_{\alpha}$ есть совокупность точек, общих всем множествам $P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, \ldots, P_{\alpha_{\nu}}, \ldots$

57. Мы должны теперь рассмотреть ближе определенные таким образом множества. Мы увидим, что получаемый ряд множеств представляет много общего с рядом производных множеств какого-либо данного множества. Мы докажем следующее общее предложение.

*Если на некотором прямолинейном отрезке имеется ряд множеств, приведенных в соответствие с рядом чисел первого или второго класса, и если $P_{\alpha} \geqq P_{\alpha'}$ всякий раз как $\alpha < \alpha'$, то существует индекс (число) $\beta$, начиная с которого все данные множества совпадают между собою, т. е.*

$$P_{\beta} = P_{\beta+1} = P_{\beta+2} = \ldots$$

Возможны два случая. Во-первых, может случиться, что некоторые из множеств $P_{\alpha}$ пусты. Пусть $\beta$—наименьший индекс, для которого это имеет место.

В таком случае

$$P_{\beta} = P_{\beta+1} = \ldots = 0.$$

Во-вторых, может случиться, что ни одно из множеств $P_{\alpha}$ не пусто. В этом случае можно показать, что существует по меньшей мере одна точка, принадлежащая всем множествам $P_\alpha$. С этою целью мы разделим данный отрезок пополам. Тогда ясно, что по меньшей мере одна из двух половин будет содержать точки, принадлежащие множествам сколь угодно высоких индексов. Эту половину мы снова делим пополам и т. д. Мы получаем последовательность интервалов, имеющих единственную общую точку. Эта точка обладает тем свойством, что в любом ее соседстве найдутся точки, принадлежащие любому из множеств $P_\alpha$; а так как всякое $P_\alpha$ замкнуто, то полученная точка всем им принадлежит.

Обозначим через $P_\Omega$ совокупность точек, каждая из которых принадлежит всем множествам $P_\alpha$. Будучи совокупностью общих точек системы замкнутых множеств, множество $P_\Omega$ также замкнуто. Для каждого интервала, не содержащего ни одной точки множества $P_\Omega$, существует такой индекс $\alpha$, что множество $P_\alpha$ не содержит в этом интервале ни одной точки; в самом деле, в противном случае данный интервал содержал бы точки каждого из множеств $P_\alpha$ и, следовательно, должен был бы содержать точки множества $P_\Omega$.

Рассмотрим теперь интервал $CD$, ни одна из *внутренних* точек которого не принадлежит множеству $P_\Omega$. Возьмем в этом интервале произвольную точку $E$ (черт. 21) и поместим в интервале $EC$ счетную последовательность точек, стремящихся к точке $C$. Для каждого из полученных интервалов найдется такой индекс $\alpha_i$, что множество $P_{\alpha_i}$ не содержит ни одной точки в этом интервале. Рассмотрим совокупность этих чисел $\alpha_i$; мы можем найти число $\alpha'$, превышающее каждое из них. Множество $P_{\alpha'}$ в таком случае не содержит ни одной точки внутри интервала $CE$. Подобным же образом мы найдем множество $P_{\alpha''}$, не содержащее ни одной точки внутри интервала $ED$. Пусть $\alpha$ есть наибольшее из чисел $\alpha'$ и $\alpha''$. Тогда множество $P_\alpha$ не содержит ни одной точки внутри интервала $CD$.

Множество $P_\Omega$, будучи замкнутым, имеет конечное число или бесчисленное множество смежных интервалов. Для каждого из них найдется, как мы видели, такое число $\alpha_i$, что множество $P_{\alpha_i}$ не содержит в данном интервале ни одной точки; мы можем найти число $\alpha$, превышающее все эти числа $\alpha_i$. Множество $P_\alpha$ в таком случае не будет содержать ни одной точки ни в одном из этих смежных интервалов. Стало быть, все его точки принадлежат множеству $P_\Omega$. Так как, с другой стороны, множество $P_\Omega$ составляет часть множества $P_\alpha$, то эти два множества совпадают.

Далее, из $\alpha' > \alpha$ следует $P_{\alpha'} = P_\alpha = P_\Omega$, ибо множество $P_{\alpha'}$, составляя часть множества $P_\alpha$, вместе с тем содержит в себе множество $P_\Omega$. Таким образом мы имеем:

$$P_\alpha = P_{\alpha+1} = \ldots = P_\Omega.$$

Наше утверждение доказано.

Заметим еще, что среди чисел $\alpha$, для которых $P_\alpha = P_\Omega$, найдется наименьшее, которое мы обозначим через $\beta$. В таком случае

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \ldots = P_\Omega,$$

но

$$P_{\beta'} > P_\beta,$$

если

$$\beta' < \beta.$$

Если к условиям нашей теоремы мы присоединим еще то, что изолированная точка множества $P_\alpha$ обязательно отсутствует в множестве $P_{\alpha+1}$, то множество $P_\Omega$, если оно существует, будет совершенным множеством. В самом деле, если бы множество $P_\beta = P_\Omega$ содержало изолированную точку $A$, то эта точка не могла бы входить в множество $P_{\beta+1} = P_\Omega$, что создает противоречие. Таким образом множество $P_\Omega$ плотно в себе; а так как оно замкнуто, то оно есть совершенное множество.

*Итак, в обоих возможных случаях множества $P_\alpha$ все совпадают между собою, начиная с некоторого индекса $\beta$, причем $P_\beta$ есть либо пустое, либо совершенное множество.*

58. Вернемся к множествам $P_\alpha$, определенным нами в п. 56. Множества эти замкнуты, и каждое из них содержится в предыдущем. Пусть $\beta$ есть наименьший индекс, для которого

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \ldots = P_\Omega.$$

Ни одна изолированная точка множества $P_\alpha$ не принадлежит множеству $P_\alpha^\Omega$, ни тем более множеству $P_{\alpha+1}$. Следовательно, $P_\beta$ есть либо пустое, либо совершенное множество. Я утверждаю теперь, что *в случае, когда функция $f$ точечно разрывна на всяком совершенном множестве, $P_\beta$ необходимо есть пустое множество.* В самом деле, если бы оно не было пустым, то, так как $P_{\beta+1}=P_\beta$, всякая точка множества $P_\beta$ была бы точкою разрыва функции $f$ относительно множества $P_\beta$, т. е. функция $f$ была бы сплошь разрывною на множестве $P_\beta$.

Пусть теперь $A$ есть произвольная точка отрезка $P_0$. Так как $P_\Omega=0$, то точка $A$ не может принадлежать всем множествам $P_\alpha$. Среди тех из них, которые не содержат точки $A$, найдется одно с наименьшим индексом, который мы обозначим через $\delta$; при этом $\delta \geqq 1$. Число $\delta$ не может быть числом второго рода. В самом деле, в этом случае множество $P_\delta$ было бы совокупностью точек, общих всем множествам $P_\alpha$ при $\alpha<\delta$. Так как все эти множества содержат точку $A$, то и множество $P_\delta$ должно было бы содержать эту точку. Итак $\delta$ — число первого рода; положим $\gamma=\delta-1$; таким образом существует такое число $\gamma$, что точка $A$ входит в множество $P_\gamma$, но не входит в множество $P_{\gamma+1}$; иначе говоря, точка $A$ принадлежит множеству $P_\gamma-P_{\gamma+1}$. Этот индекс $\gamma$ для каждой точки $A$ является вполне определенным; следовательно,

$$P_0=\sum(P_\gamma-P_{\gamma+1}), \quad 0\leqq\gamma<\beta.$$

Рассмотрим теперь какое-либо из множеств $P_\gamma-P_{\gamma+1}$, где $\gamma<\beta$. Так как множество $P_{\gamma+1}$ составляет часть множества $P_\gamma^\Omega$, то мы можем написать:

$$P_\gamma-P_{\gamma+1}=(P_\gamma-P_\gamma^\Omega)+(P_\gamma^\Omega-P_{\gamma+1}).$$

Далее, мы подвергаем разложению первое слагаемое правой части. Обозначим замкнутое множество $P_\gamma$ через $P_\gamma^0$. Мы знаем (п. 42), что

$$P_\gamma^0-P_\gamma^\Omega=\sum(P_\gamma^\nu-P_\gamma^{\nu+1}),$$

где $\nu$ пробегает все значения, меньшие некоторого определенного числа первого или второго класса, или, если угодно, все значения, меньшие нежели $\Omega$. Мы, таким образом, имеем:

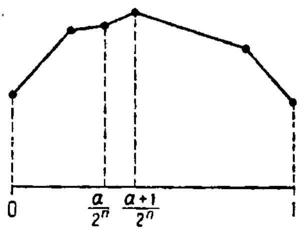
$$P_\gamma-P_{\gamma+1}=\sum(P_\gamma^\nu-P_\gamma^{\nu+1})+(P_\gamma^\Omega-P_{\gamma+1}).$$

*Итак, для всякой точки $A$ множества $P_0$ найдется либо система таких двух чисел $\gamma$, $\nu$ первого или второго класса, что точка $A$ принадлежит множеству $P_\gamma^\nu-P_\gamma^{\nu+1}$, либо такое число $\gamma$, что точка $A$ принадлежит множеству $P_\gamma^\Omega-P_{\gamma+1}$.*

59. Установив это, мы можем теперь доказать следующую теорему.

*Всякая функция $f$, точечно разрывная на каждом совершенном множестве и принимающая в интервале $(0, 1)$ только значения 0 или 1, является пределом последовательности непрерывных функций.*

До сих пор мы всегда приводили задачу отыскания последовательности непрерывных функций, имеющих своим пределом какую-либо данную функцию, к построению некоторой функции $F(x, y)$, определяемой в известном прямоугольнике и подчиненной известным условиям. Теперь мы укажем другой способ, позволяющий строить последовательность непрерывных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, стремящихся к данной разрывной функции $f$. Допустим, что функция $f$ определена на отрезке $(0, 1)$. Функцию $f_1$ мы построим так, чтобы она изменялась линейно в каждом из интервалов $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Функция $f_2$ будет изменяться линейно в каждом из интервалов $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$. Вообще, функция $f_n$ будет изменяться линейно в каждом из интервалов $\left(\frac{\alpha}{2^n}, \frac{\alpha+1}{2^n}\right)$, где $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Функция $f_n$ поэтому будет вполне определенной, если мы зададим ее значение в каждой из точек $\frac{\alpha}{2^n}$. Геометрически она изображается ломаной линией, состоящей из $2^n$ звеньев (черт. 29).




Черт. 29.

Перейдем теперь к определению функций $f_n$ в занимающем нас случае.

Все сводится к определению величины $f_n(H)$, где $H = \frac{p}{2^n}$.

Рассмотрим интервал $\lambda$ длины $\frac{1}{2^{n-1}}$, середина которого находится в точке $H$, и обратимся к множествам $P_\gamma$ и $P_\gamma^\nu$, построенным для функции $f$. Обозначим через $Q_{\gamma, \nu}$ часть множества

$P_\gamma^\nu$, заключенную в интервале $\lambda$, что мы будем выражать соотношением $Q_{\gamma,\nu} = D(P_\gamma^\nu, \lambda)$. Множества $Q_{\gamma,\nu}$ замкнуты и порядок их соответствует порядку множеств $P_\gamma^\nu$ в том смысле что

$$Q_{\gamma,\nu} \geqq Q_{\gamma',\nu}, \text{ если } \gamma < \gamma';$$

$$Q_{\gamma,\nu} \geqq Q_{\gamma,\nu'}, \text{ если } \nu < \nu'.$$

Установив это, рассмотрим в первую очередь множества $Q_{\gamma,0}$, где $\gamma$ принимает всевозможные значения первого и второго класса. Рассмотрим те из этих множеств, которые не пусты. Среди этих множеств найдется одно с наибольшим индексом. В самом деле, мы знаем, что, начиная с некоторого индекса, все множества $Q_{\gamma,0}$ пусты. Среди этих пустых имеется одно с наименьшим индексом, который мы обозначим через $\delta$. Это $\delta$ не может быть числом второго рода, ибо в таком случае $Q_{\delta,0}$ представляло бы собою совокупность точек интервала $\lambda$, принадлежащих всем множествам $P_\gamma^0$ при $\gamma < \delta$; но по предположению каждое из этих множеств содержит точки в интервале $\lambda$; а в таком случае, как мы знаем, у них необходимо имеются общие точки в интервале $\lambda$, и, следовательно, множество $Q_{\delta,0}$ не может быть пустым. Итак, $\delta$ есть число первого рода. Положим $h = \delta - 1$; *существует, таким образом, число $h$, характеризуемое тем условием, что множество $Q_{h,0}$ существует, между тем как множество $Q_{h+1,0}$ пусто.*

Рассмотрим теперь множества $Q_{h,\nu}$, где $\nu$ может означать любое число первого или второго класса, а также число $\Omega$. Может случиться, что множество $Q_{h,\Omega}$ существует; в противном случае, рассуждение, подобное только что проведенному, показало бы нам, что существует наибольшее число $k$, для которого множество $Q_{h,k}$ не пусто.

Таким образом мы доказали существование двух чисел $h$ и $k$, обладающих следующим свойством: если $k < \Omega$, то множество $Q_{h,k}$ существует, между тем как множество $Q_{h,k+1}$ пусто; если же $k = \Omega$, то множество $Q_{h,\Omega}$ существует, а множество $Q_{h+1,0}$ пусто.

Установив это, мы примем за $f_n(H)$ *минимум функции на множестве* $Q_{h,k}$. Покажем теперь, что определенная таким образом последовательность функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ имеет своим пределом функцию $f$, т. е., что в любой точке $A$ отрезка $(0, 1)$ $f_n(A)$ имеет своим пределом $f(A)$. Мы будем различать два случая, соответственно с тем, принадлежит ли точка $A$ одному из множеств $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$ или одному из множеств $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$.

*Первый случай.* Точка $A$ принадлежит некоторому множеству $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$. Это означает, что $A$ есть изолированная точка множества $P_\gamma^\nu$. Иначе говоря, существует интервал $\mu$, содержащий внутри себя точку $A$ и не содержащий ни одной другой точки множества $P_\gamma^\nu$. Если $n$ достаточно велико, то точки $H = \frac{p}{2^n}$ между которыми заключена точка $A$, столь близки к ней, что соответствующие им интервалы $\lambda$ целиком помещаются внутри интервала $\mu$. При выполнении этого условия я утверждаю, что мы должны иметь $h = \gamma$ и $k = \nu$, по определению множества $Q_{h,\,k}$. В самом деле, ни одно из множеств, следующих за $P_\gamma^\nu$, не может иметь точек в интервале $\lambda$, содержащем точку $A$, ибо множество $P_\gamma^\nu$ имеет в этом интервале единственную точку $A$. Из этой единственной точки и состоит множество $Q_{\gamma,\,\nu}$. А следовательно, при достаточно большом $n$ мы имеем для обеих точек $H$, между которыми заключается точка $A$,

$$f_n(H) = f(A).$$

А так как между этими точками функция $f_n$ изменяется линейно, то и

$$f_n(A) = f(A),$$

откуда

$$\lim_{n \to \infty} f_n(A) = f(A).$$

*Второй случай.* Точка $A$ принадлежит одному из множеств $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$. При этом $P_\gamma^\Omega$ есть совершенное множество, а $P_{\gamma+1}$ есть множество точек разрыва функции $f$ на множестве $P_\gamma^\Omega$. Следовательно, в точке $A$ функция $f$ непрерывна относительно множества $P_\gamma^\Omega$. А так как функция $f$ принимает только значения 0 и 1, то непрерывность ее в точке $A$ влечет за собою то, что она постоянна на множестве $P_\gamma^\Omega$ в соседстве этой точки. Следовательно, мы можем указать интервал $\mu$, содержащий внутри себя точку $A$ и в любой точке $A'$ которого, одновременно принадлежащей множеству $P_\gamma^\Omega$, $f(A') = f(A)$. Если $n$ достаточно велико, то, подобно предыдущему, легко убедиться, что точкам $H=\frac{p}{2^n}$, между которыми заключена точка $A$, соответствуют интервалы $\lambda$, целиком помещающиеся внутри интервала $\mu$. Если это выполнено, то по определению множества $Q_{h,\ k}$ мы должны принять $h=\gamma$, $k=0$; в самом деле, в каждом из этих интервалов $\lambda$ множество $P_\gamma^\Omega$ существует, между тем как множество $P_{\gamma+1}$ пусто. Следовательно, мы должны принять

$$f_n(H)=m(f,\ Q_{\gamma,\ \Omega})=f(A)$$

в каждой из двух точек $H$, между которыми заключена точка $A$. Следовательно, при достаточно большом $n$,

$$f_n(A)=f(A),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} f_n(A)=f(A).$$

*Итак, в частном случае, когда функция $f$ принимает только значения 0 и 1, необходимое и достаточное условие для того, чтобы такая функция была пределом последовательности непрерывных функций, состоит в том, чтобы она была точечно разрывна на всяком совершенном множестве.*

## Глава V.

# ФУНКЦИИ ОТ $n$ ПЕРЕМЕННЫХ.

## I. ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ $n$ ИЗМЕРЕНИЙ.

60. Мы снова обращаемся к вопросам, которые служили предметом нашего исследования в предыдущей главе, но становимся теперь на самую общую точку зрения, обращаясь к случаю функций от любого числа переменных.

Рассматривая какую-либо функцию от $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, нам удобно говорить, что аргументом ее является точка в пространстве $n$ измерений. Поэтому в первую очередь нам надлежит распространить на точечные множества в таком пространстве определения и результаты, установленные нами для линейных множеств.

Обозначим через $G_n$ пространство $n$ измерений. По определению это есть совокупность всех систем $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где каждое переменное может принимать любые конечные действительные значения.

Мы называем точку $A$ *предельною точкою* точечного множества $P$, если всякая сфера, имеющая центр в точке $A$, содержит точку множества $P$, отличную от точки $A$; другими словами, если всякая такая сфера содержит бесчисленное множество точек множества $P$. Через $P^1$ мы обозначаем совокупность предельных точек множества $P$; это есть его *производное множество*. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Всякое производное множество замкнуто. Множество называется *плотным в себе*, если каждая его точка является для него предельной. Множество называется *совершенным*, если оно совпадает со своим производным, т. е. если оно замкнуто и плотно в себе.

Например, в пространстве $G_2$ множество точек, лежащих внутри и на окружности некоторого круга, есть совершенное множество. Совокупность внутренних точек круга не может быть совершенным множеством, ибо это множество не замкну но это множество плотно в себе.

Совокупность точек прямолинейного отрезка в пространст $G_2$ есть совершенное множество.

Приведем еще следующий пример совершенного множест в пространстве $G_2$. Пусть $H$ есть нигде не плотное соверше ное множество, расположенное на оси $OX$, а $K$ — совершенн нигде не плотное множество, расположенное на оси $OY$. Чер каждую точку множества $H$ проведем прямую параллельно $OY$ а через каждую точку множества $K$ — параллельно $OX$. Мно жество точек пересечения построенных таким образом прямы есть совершенное множество.

Еще пример совершенного множества в пространстве $G$ представляет нам соединение всех параллельных $OY$ отрезко длины 1, начинающихся в точках множества $H$.

Подобно случаю линейных множеств (п. 14), легко убе диться, что *совокупность точек, общих данной системе замкну тых множеств* (в конечном или бесконечном числе), *есть зам кнутое множество, если оно не пусто.*

Всякое $n$-мерное множество, если оно *ограничено* и содержит бесконечное множество точек, имеет по крайней мере одну предельную точку. Доказательство проводится аналогично случаю линейных множеств (п. 10). Следует только разбиение на отрезки заменить разбиением на параллелепипеды, стягивающиеся к единственной определенной точке, которая и будет предельной точкой данного множества.

*Если множества* $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ *замкнуты и если*

$$P_1 \geqq P_2 \geqq \ldots \geqq P_n \geqq \ldots$$

*и множество* $P_1$ *ограничено, то существует по крайней мере одна точка, общая всем этим множествам.*

Это предложение тоже доказывается вполне аналогично случаю линейных множеств, заменяя разбиение на отрезки разбиением на параллелепипеды.

Если мы откажемся от гипотезы ограниченности множеств, то предложение теряет силу. Так, например, если $P_\nu$ означает линейное множество точек с абсциссами $\nu, \nu+1, \nu+2, \ldots$, то $P_\nu > P_{\nu+1}$; множество $P_\nu$ замкнуто (ибо не имеет предельных точек) и вместе с тем не существует точки, общей всем данным множествам.

61. Мы теперь распространим на случай пространства $n$ измерений теорему п. 57 и с этою целью сначала рассмотрим новый процесс определения данного замкнутого множества,

Пусть $B$ есть точка, все $n$ координат которой имеют форму

$$x = \frac{\alpha_i}{2^p},$$

где $\alpha_i$ — целое число. Рассмотрим куб $\Delta$, грани которого параллельны координатным плоскостям, с центром в точке $B$ и с длиною ребра $\frac{1}{2^{p-1}}$. *Внутренними* точками этого куба будут точки, для которых

$$\frac{\alpha_i - 1}{2^p} < x_i < \frac{\alpha_i + 1}{2^p}.$$

Все же точки куба (как внутренние, так и лежащие на поверхности) характеризуются условиями

$$\frac{\alpha_i - 1}{2^p} \leqq x_i \leqq \frac{\alpha_i + 1}{2^p}.$$

Для любой точки $A$ и любого числа $p$ существует куб указанного вида, содержащий внутри себя точку $A$ (и, вообще говоря, не единственный).

Заставим теперь $p$ принимать поочередно все натуральные значения и обозначим через $(\Delta)$ совокупность всех получаемых таким образом областей. Параметрами элемента множества $(\Delta)$ являются целые числа $p$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Таким образом множество $(\Delta)$ представляет собою *счетное* множество областей.

Укажем теперь одно свойство этих областей, имеющее основное значение во всем дальнейшем. *Пусть $A$ есть произвольная точка и $\Sigma$ — сфера с центром в точке $A$. Мы можем в таком случае найти область $\Delta$, содержащую внутри себя точку $A$ и целиком заключенную внутри сферы $\Sigma$.* В самом деле, при любом $p$ существует область $\Delta$, содержащая внутри себя точку $A$. Если $p$ неограниченно возрастает, то наибольшее измерение такой области стремится к нулю.

Пусть в пространстве $G_n$ мы имеем произвольное *замкнутое* множество $P$. Рассмотрим различные области $\Delta$. Мы назовем данную область $\Delta$ *внешней* по отношению к множеству $P$, если она не содержит ни одной точки этого множества. Таким образом среди областей $\Delta$ мы различаем, с одной стороны, области внешние по отношению к множеству $P$, с другой, — области, содержащие по меньшей мере одну точку множества $P$.

*Я утверждаю* теперь, что, *зная все области, внешние относительно множества $P$, мы тем самым знаем и множество $P$* (обратное, само собою разумеется). Покажем, что, зная все области, внешние относительно множества $P$, мы для любой точки $A$ можем решить вопрос о том, принадлежит ли она множеству [1] или нет. В самом деле, выше мы видели, что мы можем найти последовательность $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p, \ldots$, областей $\Delta$, каждая из которых содержит внутри себя точку $A$ и целиком заключается в предыдущей, причем ребра этих областей стремятся к нулю. При этом возможны два случая:

*Первый случай.* Каждая из областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p, \ldots$ содержит по крайней мере одну точку множества $P$; при этом условии всякая сфера с центром в точке $A$ содержит внутри себя по крайней мере одну точку множества $P$; а так как это множество по предположению замкнуто, то оно должно содержать точку $A$.

*Второй случай.* Некоторые из этих областей не содержат ни одной точки множества $P$. В этом случае, очевидно, точка $A$ не может принадлежать множеству $P$.

Этим процессом, между прочим, доказывается, что всякое замкнутое множество может быть определено при помощи счетного числа условий. Обозначим через $G_n - P$ совокупность тех точек пространства $G_n$, которые не принадлежат множеству $P$.

*Множество $G_n - P$ можно рассматривать как соединение всех областей* ($\Delta$), *внешних по отношению к множеству $P$.* В самом деле, каждая точка, принадлежащая какой-либо из этих областей, непременно принадлежит множеству $G_n - P$. С другой стороны, если точка $A$ не принадлежит множеству $P$, то существует область $\Delta$, содержащая точку $A$ внутри себя и внешняя относительно множества $P$.

Если замкнутое множество $Q$ составляет часть замкнутого множества $P$, то очевидно, что всякая область $\Delta$, внешняя относительно множества $P$, и подавно будет внешней относительно множества $Q$. Далее, если $P > Q$ (значит, случай совпадения исключен), то необходимо существует область, внешняя относительно множества $Q$, но не внешняя относительно множества $P$. Ибо в противном случае совокупность внешних областей для множеств $P$ и $Q$ была бы одною и тою же, а следовательно и самые множества эти совпадали бы между собою.

62. Рассмотрим теперь систему замкнутых множеств, соответствующих числам первого и второго классов,

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_\alpha, \ldots,$$

и пусть при $\alpha < \alpha'$ мы имеем $P_\alpha \geqq P_{\alpha'}$. Обозначим, вообще, через $\Delta_E(P_\alpha)$ множество областей $\Delta$, внешних по отношению к множеству $P_\alpha$. Заметим, что множество $\Delta_E(P_{\alpha+1})$ содержит в себе все элементы множества $\Delta_E(P_\alpha)$. Далее, для того чтобы множества $\Delta_E(P_{\alpha+1})$ и $\Delta_E(P_\alpha)$ совпадали между собою, необходимо и достаточно, чтобы мы имели

$$P_{\alpha+1} = P_\alpha .$$

Обозначим через $C(P_\alpha)$ совокупность областей, принадлежащих множеству $\Delta_E(P_{\alpha+1})$, но не принадлежащих множеству $\Delta_E(P_\alpha)$. Рассмотрим последовательность

$$C(P_o), C(P_1), \ldots, C(P_\alpha), \ldots$$

Каждое из этих выражений означает собою некоторое множество областей $\Delta$. Два любых из этих множеств лишены общих элементов, так как любой элемент множества $C(P_\alpha)$, принадлежит множеству $\Delta_E(P_{\alpha+1})$, а стало быть и множеству $\Delta_E(P_{\alpha+2})$ и, вообще, всякому множеству $\Delta_E(P_{\alpha'})$, если $\alpha' > \alpha$, следовательно, он не может принадлежать ни множеству $C(P_{\alpha+1})$, ни, вообще, какому-либо из множеств $C(P_{\alpha'})$ при $\alpha' > \alpha$. Таким образом два различных множества $C(P_\alpha)$ не могут иметь общих элементов.

Различные множества $C(P_\alpha)$, лишенные попарно общих элементов, суть части множества $(\Delta)$, содержащего счетное число элементов. Следовательно, среди множеств $C(P_\alpha)$ имеется не более счетного множества не пустых. Поэтому, по определению чисел первого и второго классов, найдется число $\beta$, превышающее все те числа $\alpha$, для которых множество $C(P_\alpha)$ не пусто. Множество $C(P_\beta)$, равно как и все следующие за ним, пусто. Но мы знаем, что из соотношений

$$C(P_\beta) = C(P_{\beta+1}) = \ldots = 0$$

мы можем заключить, что

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \ldots$$

Обозначим через $P_\Omega$ совокупность точек, общих всем множествам $P_\alpha$. Доказанное нами предложение можно формулировать так.

*Существуют такие числа α первого или второго класса, что*

$$P_\alpha = P_\Omega.$$

63. Этот результат мы дополним следующими замечаниями.

*Замечание I.* Пусть данные множества $P_0, P_1, \ldots$ удовлетворяют следующему условию: если $\alpha$ есть число второго рода, то $P_\alpha$ есть совокупность точек, общих всем множествам $P_{\alpha'}$ при $\alpha' < \alpha$.

Рассмотрим тогда какую-либо точку $A$ множества $P_0$. Возможны два случая: либо точка $A$ принадлежит всем множествам $P_\alpha$ и, стало быть, принадлежит множеству $P_\Omega$ либо это условие не выполняется; в последнем случае среди множеств, не содержащих точки $A$, найдется одно с наименьшим индексом, который мы обозначим через $\delta$; это $\delta$ не может быть числом второго рода, ибо в таком случае точка $A$, принадлежащая всякому множеству $P_\alpha$ при $\alpha < \delta$, принадлежала бы и множеству $P_\delta$. Положим $\delta - 1 = \gamma$. Тогда точка $A$ принадлежит множеству $P_\gamma - P_{\gamma+1}$. Таким образом мы получаем соотношение:

$$P_0 = \Sigma (P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega,$$

где $\gamma$ пробегает все числа первого и второго классов (или, если угодно, все числа $< \beta$, где $\beta$ означает наименьшее число, для которого $P_\beta = P_\Omega$).

*Замечание II.* Если, кроме предшествующего условия, мы еще имеем

$$P_\Omega = 0$$

и если множество $P_0$ ограничено, то наименьшее число $\delta$, удовлетворяющее условию

$$P_\delta = P_\Omega = 0,$$

не может быть числом второго рода.

В самом деле, если бы это было так, то $\delta$ было бы пределом последовательности чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, где всякое $\delta_n < \delta$. Но множества $P_{\delta_1}, P_{\delta_2}, \ldots, P_{\delta_n}, \ldots$, будучи ограниченными, замкнутыми и не пустыми, необходимо имеют общие точки, вследствие чего множество $P_\delta$ не может быть пустым. Значит, $\delta$ по необходимости есть число первого рода; положим $\delta - 1 = \gamma$. Итак, *существует такое число $\gamma$, что множество $P_\gamma$ не пустое, а множество $P_{\gamma+1}$ пусто.*

*Замечание III.* Пусть данные множества удовлетворяют тому условию, что *любая изолированная точка какого-либо из них* *отсутствует в следующем множестве.* В этом случае я утверждаю, что *множество $P_\Omega$, если только оно не пусто, есть совершенное множество.* В самом деле, замкнутость множества $P_\Omega$ следует из того, что, как мы знаем, оно совпадает с одним из множеств $P_\beta$. Если бы множество $P_\Omega$ содержало изолированную точку $A$, то эта точка была бы изолированной в множестве $P_\beta$, а следовательно не могла бы принадлежать множеству $P_{\beta+1} = P_\Omega$. Итак, $P_\Omega$ есть совершенное множество.

64. Предшествующие рассуждения могут быть применены к ряду производных множеств данного множества $P$. Производные множества $P^\alpha$ определяются в полной аналогии со случаем линейных множеств. Эти множества, начиная с $P^1$, удовлетворяют всем условиям п. 62, а также условиям замечаний I и III. Таким образом, все производные множества, начиная с некоторого, совпадают друг с другом. При этом множество $P^\Omega$, если оно не пусто, есть совершенное множество. Допустим, что множество $P$ замкнуто, и положим $P = P^0$. Тогда

$$P^0 = \Sigma (P^\gamma - P^{\gamma+1}) + P^\Omega.$$

В силу замечания II мы видим, что если в некоторой ограниченной области множество $P^\Omega$ пусто, то существует такое число $\gamma$, что множество $P^\gamma$ имеет точки в этой области, между тем как множество $P^{\gamma+1}$ не содержит в ней ни одной точки. Множество $P^\gamma$ имеет, следовательно, лишь конечное число точек в рассматриваемой области.

65. Установим теперь ряд определений, касающихся совершенных множеств.

Пусть $P$ есть совершенное множество в пространстве $G_n$. Пусть $A$ есть любая точка множества $P$ и $\Sigma$ — сфера, содержащая точку $A$ внутри себя. Мы знаем, что сфера $\Sigma$ содержит бесчисленное множество точек множества $P$. Мы будем называть совокупность точек множества $P$, принадлежащих сфере $\Sigma$, *участком множества $P$, определяемым сферою $\Sigma$.*

Множество $Q$, содержащееся в множестве $P$, мы назовем *нигде не плотным на множестве $P$, если во всяком участке множества $P$ найдется другой его участок, не содержащий ни одной точки множества $Q$.* Если это условие не выполнено, то существует такой участок $\Pi$ множества $P$, что в любом участке множества $\Pi$ содержатся точки множества $Q$, так что множество $Q^1$ содержит все точки участка $\Pi$. В этом случае множество $Q$ всюду плотно на участке $\Pi$.

Мы называем множество $Q$ множеством *первой категории* относительно множества $P$, если множество $Q$ представляет собою соединение счетного числа множеств, *нигде не плотных* на множестве $P$. Множество, не являющееся множеством первой категории, мы будем называть множеством *второй категории.*

Я утверждаю, что *если $Q$ есть множество первой категории относительно множества $P$, то существуют точки множества $P$, не принадлежащие множеству $Q$.* В самом деле, пусть каждое из множеств $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ нигде не плотно на множестве $P$ и пусть $Q$ есть соединение этих множеств. Пусть $\Sigma$ есть какая-либо сфера, содержащая внутри себя точки множества $P$. Внутри ее мы можем найти сферу $\Sigma_1$, содержащую точки множества $P$, но не содержащую точек множества $Q_1$; внутри $\Sigma_1$ — другую сферу $\Sigma_2$, содержащую точки множества $P$, но не содержащую точек множества $Q_2$. Продолжая это рассуждение неограниченно и выбирая сферы так, чтобы их радиусы стремились к нулю, мы получаем предельную точку $B$, принадлежащую всем сферам $\Sigma_n$; $B$ есть предельная точка множества $P$ и, следовательно, принадлежит этому множеству; с другой стороны, точка $B$ не принадлежит ни одному из множеств $Q_n$ и, следовательно, не принадлежит множеству $Q$.

## II. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ.

66. Теперь мы распространим на случай функций от нескольких переменных определения, установленные нами для функций одного независимого переменного (глава IV, раздел I). Мы сразу обращаемся к функциям, определенным на произвольном совершенном множестве.

Пусть функция $f$ определена на совершенном множестве $P$ в пространстве $G_n$. Рассмотрим какой-либо участок $\Pi$ этого множества. В различных точках этого участка функция $f$ принимает различные значения, совокупность которых имеет определенные верхнюю и нижнюю грани и определенное колебание; эти числа мы соответственно обозначим через $M(f, \Pi)$, $m(f, \Pi)$ и $\omega(f, \Pi)$. Возьмем любую точку $A$ множества $P$; окружим ее сферой $\Sigma$, имеющей центр в точке $A$, и обозначим через $\Pi$ участок множества $P$, определяемый сферою $\Sigma$. Когда радиус сферы $\Sigma$ стремится к нулю, то функция $M(f, \Pi)$ не может возрастать, функция $m(f, \Pi)$ не может убывать, а следовательно $\omega(f, \Pi)$ не может возрастать. Следовательно, эти три величины в указанном процессе имеют определенные пределы, которые мы соответственно обозначим через

$$M(f, P, A), \quad m(f, P, A), \quad \omega(f, P, A).$$

Мы будем называть функцию $f$ *непрерывной* в точке $A$, если

$$\omega = 0,$$

и *разрывной*, если

$$\omega > 0.$$

Если $\Pi$ есть участок множества $P$, определяемый какой-либо сферой $\Sigma$, содержащей внутри себя точку $A$, то

$$M(f, P, A) \leqq M(f, \Pi).$$

Мы скажем, что функция $f$ *полунепрерывна сверху* в точке $A$ относительно множества $P$, если

$$M(f, P, A) = f(A).$$

В этом случае, сколь бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такая сфера с центром в точке $A$, что, какова бы ни была точка $A'$ множества $P$, содержащаяся в этой сфере:

$$f(A') < f(A) + \varepsilon.$$

Обратно, если это условие выполнено, то

$$M = f$$

и функция полунепрерывна сверху.

Аналогичное определение устанавливается для функций, полунепрерывных снизу. Для всякой функции $f$, определенной на множестве $P$, функция $\varphi(A) = M(f, P, A)$, полунепрерывна сверху и функция $\psi(A) = m(f, P, A)$ полунепрерывна снизу. Отсюда следует, что $\omega = M - m$ есть функция, полунепрерывная сверху.

Для функции $f$, полунепрерывной сверху, множество точек, в которых $f \geqq \alpha$, замкнуто, каково бы ни было $\alpha$. В частности, для произвольной функции $f$ множество точек, в которых $\omega \geqq \alpha$, замкнуто.

67. Если функция $f$ определена на совершенном множестве $P$, то возможны три случая:

*Первый случай*. В каждой точке множества $P$

$$\omega = 0,$$

— функция непрерывна на множестве $P$.

*Второй случай*. В некоторых точках $\omega > 0$; имеются, стало быть, точки разрыва. Но допустим, что для любого $\delta > 0$ множество точек, в которых

$$\omega(f, P, A) \geqq \delta,$$

*нигде не плотно* на множестве $P$. Рассматривая тогда последовательность $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, стремящихся к нулю положительных чисел, мы видим, что множество точек разрыва, будучи соединением счетного числа нигде не плотных множеств, есть множество первой категории относительно $P$. Значит, на любом участке множества $P$ найдутся точки, в которых функция непрерывна.

В этом случае мы назовем функцию $f$ *точечно разрывной* на множестве $P$.

*Третий случай.* Функция $f$, будучи разрывной на множестве $P$, не является точечно разрывной; следовательно, существует такое положительное число $\alpha$ и такой участок $\Pi$ множества $P$, что $\omega \geqq \alpha$ в каждой точке этого участка $\Pi$. В этом случае мы скажем, что функция $f$ *разрывна сплошь* на участке $\Pi$.

68. *Если последовательность функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, определенных и непрерывных на совершенном множестве $P$, имеет своим пределом функцию $f$, то эта последняя точечно разрывна на множестве $P$.* При этом мы предполагаем функцию $f$ ограниченной.

Мы будем пользоваться все тем же способом доказательства. Покажем, как вытекает противоречие из допущения, что функция $f$ разрывна сплошь на некотором участке множества $P$. Пусть существует такой участок $H$ множества $P$ и такое положительное число $2\lambda$, что $\omega > 2\lambda$ в каждой точке множества $H$. При этом условии, разумеется, колебание функции $f$ на любом участке множества $H$ превосходит $2\lambda$. Возьмем какое-либо положительное число $\mu$, меньшее, нежели $\lambda$, и положим

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon.$$

Пусть $p$ есть любое натуральное число и $H_1$ — любой участок множества $H$. Пусть $A_0$ есть точка множества $H$, заключенная внутри сферы $\Sigma$, определяющей собою участок $H'$. Так как последовательность $f_{p+1}(A_0), f_{p+2}(A_0), \ldots$ имеет своим пределом $f(A_0)$, то существует такое натуральное число $\alpha > p$, что

$$|f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon.$$

Так как функция $f_\alpha$ непрерывна на множестве $H$, то существует сфера $\Sigma_1$ с центром в точке $A_0$, содержащаяся внутри сферы $\Sigma$ и такая, что для любой точки $A$ участка $H_1$ множества $H$, определяемого сферой $\Sigma_1$,

$$|f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon.$$

Заменим теперь сферу $\Sigma_1$ концентрической сферою $\Sigma_2$ меньшего радиуса. Эта сфера $\Sigma_2$ содержит внутри себя точку $A_0$ множества $H$; обозначим через $H_2$ участок множества $H$, определяемый сферою $\Sigma_2$; по предположению, на этом участке колебание функции $f$ превосходит $2\lambda$. Следовательно, на этом участке найдется точка $A_1$, для которой

$$|f(A_1)-f(A_0)|>\lambda.$$

Точка $A_1$, принадлежащая сфере $\Sigma_2$, несомненно лежит *внутри сферы* $\Sigma_1$. Мы можем найти, во-первых, число $\beta>p$, для которого

$$|f_\beta(A_1)-f(A_1)|<\varepsilon,$$

а затем, пользуясь непрерывностью функции $f_\beta$, — сферу $\Sigma_3$ с центром в точке $A_1$, заключенную в сфере $\Sigma_1$ и такую, что, обозначая через $H_3$ определяемый ею участок множества $H$, мы имели бы для любой точки $A$ этого участка

$$|f_\beta(A)-f_\beta(A_1)|<\varepsilon.$$

Полученные нами пять неравенств справедливы для любой точки $A$ участка $H_3$, в силу того, что этот участок составляет часть участка $H_1$; отсюда мы заключаем, что для любой точки $A$ участка $H_3$

$$|f_\alpha(A)-f_\beta(A)|>\mu,$$

и, следовательно,

$$\omega\,[f_{p+1}(A), f_{p+2}(A), \ \ldots\,]>\mu. \qquad (1)$$

Далее мы заключаем так: для всякого натурального числа $p$ любой участок $H_1$ множества $H$ содержит внутри себя такой участок $H_3$, все точки которого удовлетворяют условию (1). Совокупность точек множества $H$, не удовлетворяющих этому условию, есть, следовательно, множество *нигде не плотное* относительно $H$. Заставляя *$p$ пробегать* все натуральные значения и беря соединение всех множеств упомянутого типа, мы получаем множество *первой категории* относительно $H$. Поэтому существуют точки $A$ множества $H$, не принадлежащие этому множеству и, следовательно, при любом $p$ удовлетворяющие условию (1); это же противоречит тому обстоятельству, что $f_p(A)$ стремится к определенному пределу при неограниченном возрастании $p$.

Итак, *функция $f$ точечно разрывна на всяком совершенном множестве.*

69. Мы теперь покажем, что это необходимое условие в то же время и достаточно. Для этой цели нам удобно, однако, сделать некоторые предварительные рассмотрения.

Пусть $f$ есть функция, определенная на произвольном совершенном множестве $P$ и притом ограниченная, т. е. имеющая конечную верхнюю грань $M$ и конечную нижнюю грань $m$, Я утверждаю, что если функция $f$ есть предел последовательности непрерывных функций, то существует последовательность непрерывных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, имеющая своим пределом функцию $f$ и *все функции которой заключены между* $M$ *и* $m$.

Пусть нам известна последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ непрерывных функций, имеющих своим пределом функцию $f$, но не удовлетворяющих вышеупомянутому дополнительному условию. Покажем, как в таком случае следует строить функцию $f_i$, которая должна заменить функцию $\varphi_i$. Во всякой точке, где $m \leqq \varphi_i \leqq M$, мы положим $f_i = \varphi_i$. В точках, где $\varphi_i \geqq M$, мы положим $f_i = M$; наконец, в точках, где $\varphi_i \leqq m$, мы положим $f_i = m$.

Прежде всего, из непрерывности функции $\varphi_i$ следует непрерывность функции $f_i$, ибо для двух любых точек $A$ и $A'$ мы имеем:

$$|f_i(A) - f_i(A')| \leqq |\varphi_i(A) - \varphi_i(A')|.$$

Если точка $A'$ стремится к точке $A$, то правая часть этого неравенства стремится к нулю, а следовательно также и левая.

Покажем теперь, что в любой точке $A$

$$\lim_{i \to \infty} f_i(A) = f(A).$$

В самом деле, возможны три случая:

*Первый случай.* $m < f(A) < M$. В этом случае, при достаточно большом $i$, $m < \varphi_i(A) < M$. Поэтому, при больших значениях $i$, $f_i(A) = \varphi_i(A)$, откуда и следует справедливость нашего утверждения.

*Второй случай.* Пусть $f(A) = M$. В таком случае для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой индекс $\nu$, что при $i > \nu$:

$$M - \varepsilon < \varphi_i(A) < M + \varepsilon.$$

Поэтому, начиная с этого индекса,

$$M - \varepsilon < f_\nu(A) \leqq M,$$

откуда и для этого случая вытекает справедливость нашего утверждения.

*Третий случай.* Если $f(A) = m$, доказательство аналогично предыдущему. Таким образом, наше утверждение справедливо во всех случаях.

70. Установив это, обратимся теперь к некоторым свойствам равномерно сходящихся рядов. Пусть мы имеем ряд $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, члены которого суть функции, определенные на некотором совершенном множестве $P$, и пусть ряд этот сходится в каждой точке множества $P$. Мы скажем, что *данный ряд равномерно сходится на множестве $A$, если для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякого натурального числа $h$ найдется такое натуральное число $n > h$, что*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots| < \varepsilon$$

*в любой точке множества $P$* *.

Полагая

$$f_\nu = u_1 + u_2 + \ldots + u_\nu$$

и обозначая через $f$ сумму данного ряда, мы будем говорить, что функция $f_\nu$ равномерно стремится к функции $f$. Известно, что если члены ряда суть непрерывные функции, то и функция $f$ непрерывна. В самом деле, пусть $A$ есть произвольная точка множества $P$ и $\varepsilon$ — произвольное положительное число; тогда существует такое натуральное число $n$, что

$$|f_n - f| < \varepsilon$$

для любой точки множества $P$. В силу непрерывности функции $f_n$ существует такая сфера $\Sigma$ с центром в точке $A$, что для любой точки $A'$ множества $P$, заключенной внутри этой сферы,

$$|f_n(A') - f_n(A)| < \varepsilon.$$

Далее мы имеем:

$$|f_n(A) - f(A)| < \varepsilon,$$

$$|f_n(A') - f(A')| < \varepsilon,$$

откуда

$$|f(A) - f(A')| < 3\varepsilon,$$

чем и доказывается непрерывность функции $f$ в точке $A$.

---

* Определение это, несколько более широкое, нежели обычное определение равномерной сходимости, было введено Dini, который назвал этот характер сходимости *сходимостью просто равномерной*.

71. Покажем теперь, что если члены равномерно сходящегося ряда суть пределы последовательностей непрерывных функций, то этим же свойством обладает и сумма ряда. Сначала мы сведем общий случай к частному.

Пусть мы имеем равномерно сходящийся ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_\nu + \ldots \tag{1}$$

Положим

$$f_\nu = u_1 + u_2 + \ldots + u_\nu.$$

Рассмотрим какой-либо сходящийся ряд $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$ с положительными и убывающими членами. Согласно сделанным нами предположениям существует такое натуральное число $p_0$, что для всех точек множества $P$ $|f_{p_0} - f| < \alpha_1$; далее, существует такое число $p_1 > p_0$, что для всех точек множества $P$ $|f_{p_1} - f| < \alpha_2$, и вообще, такое $p_i > p_{i-1}$, что для всех точек множества $P$ $|f_{p_i} - f| < \alpha_{i+1}$. Положим

$$U_0 = f_{p_0},\ U_1 = f_{p_1} - f_{p_0}, \ldots,\ U_i = f_{p_i} - f_{p_{i-1}}, \ldots$$

Тогда:

$$|U_i| = |f_{p_i} - f_{p_{i-1}}| \leqq |f_{p_i} - f| + |f_{p_{i-1}} - f|,$$

и следовательно

$$|U_i| < \alpha_i + \alpha_{i+1} < 2\alpha_i.$$

Каждая из функций $U$ представляет собою сумму конечного числа членов данного ряда и, следовательно, как это непосредственно очевидно, является пределом последовательности непрерывных функций.

Таким образом *посредством соответственной группировки членов данного ряда мы можем заменить этот ряд другим рядом $U_0, U_1, \ldots, U_i, \ldots$, члены которого, начиная со второго, менее по абсолютному значению соответствующих членов любого, наперед заданного, числового ряда с положительными членами*

$$2\alpha_1, 2\alpha_2, \ldots, 2\alpha_i, \ldots$$

72. Чтобы показать, что сумма $f$ ряда (1) есть предел последовательности непрерывных функций, мы, следовательно, можем предположить, что члены этого ряда по абсолютному значению менее соответствующих членов сходящегося ряда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ с положительными членами. Таким образом мы имеем:

$$|u_k| \leqq \alpha_k.$$

По предположению, существует последовательность $u_h$, $u_{h,1}$, $u_{h,2}, \ldots, u_{h,p}, \ldots$ непрерывных функций, имеющая пределом функцию $u_h$ и такая, что для любого $p$

$$|u_{h,p}| \leqq a_h,$$

и следовательно

$$|u_h - u_{h,p}| \leqq 2a_h.$$

Положим:

$$f_i = u_{1,i} + u_{2,i} + \ldots + u_{i,i}.$$

Функция $f_i$ непрерывна. Я утверждаю, что она стремится к функции $f$ при $i \to \infty$. В самом деле, мы можем написать:

$$f - f_i = (u_1 - u_{1,i}) + (u_2 - u_{2,i}) + \ldots + (u_i - u_{i,i}) + u_{i+1} + \\ + u_{i+2} + \ldots$$

Пусть $2\varepsilon$ означает произвольное положительное число. Пусть натуральное число $q$ выбрано так, что

$$2(a_{q+1} + a_{q+2} + \ldots) < \varepsilon.$$

Пусть далее $i > q$; разобьем найденное нами для разности $f - f_i$ выражение на две части, первая из которых пусть содержит $q$ первых членов. Положим

$$(u_1 - u_{1,i}) + (u_2 - u_{2,i}) + \ldots + (u_q - u_{q,i}) = \lambda,$$

$$(u_{q+1} - u_{q+1,i}) + \ldots + (u_i - u_{i,i}) + u_{i+1} + u_{i+2} + \ldots = \mu.$$

Тогда

$$f - f_i = \lambda + \mu.$$

Рассмотрим сначала $\mu$. Члены составляющего эту сумму ряда по абсолютному значению менее соответственных членов ряда

$$2a_{q+1} + 2a_{q+2} + \ldots + 2a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots < \varepsilon,$$

откуда

$$|\mu| < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь $\lambda$. Для определенной точки $A$ множества $P$ $\lambda$ стремится к нулю при неограниченном возрастании $i$, будучи суммою конечного числа разностей, каждая из которых стремится к нулю. Следовательно, при достаточно большом $i$ мы будем иметь: $|\lambda| < \varepsilon$.

Таким образом, для любой точки $A$ множества $P$, при достаточно большом $i$:

$$|f(A)-f_i(A)|<2\varepsilon.$$

Это означает, что $f_i(A)$ имеет своим пределом $f(A)$ в каждой точке $A$ множества $P$. Следовательно, функция $f$ есть предел последовательности непрерывных функций.

Доказанную теорему мы можем формулировать так:

*Если последовательность функций $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$, каждая из которых есть предел последовательности непрерывных функций равномерно стремится к функции $f$, то последняя также является пределом последовательности непрерывных функций.*

В самом деле, полагая,

$$u_\nu=f_\nu-f_{\nu-1},$$

мы видим, что функция $f$ есть сумма равномерно сходящегося ряда функций, каждая из которых есть предел последовательности непрерывных функций.

Иначе говоря, допустим, что функция $f$ обладает следующим свойством: сколь бы мало ни было $\varepsilon>0$, существует функция $\varphi$, являющаяся пределом последовательности непрерывных функций и отличающаяся от функции $f$ менее чем на $\varepsilon$. Я утверждаю, что в таком случае функция $f$ есть предел последовательности непрерывных функций. В самом деле, чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть какую-либо последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ положительных чисел, стремящихся к нулю, и определить для каждого числа $\varepsilon_i$ этой последовательности функцию $\varphi_i$, отличающуюся от $f$ менее нежели на $\varepsilon_i$ и являющуюся пределом последовательности непрерывных функций. Эти функции равномерно стремятся к функции $f$, и, следовательно, мы можем применить только что доказанную теорему.

В виде самой краткой формулировки мы можем сказать, что *функция, которая сколь угодно мало отличается от функции, являющейся пределом последовательности непрерывных функций, сама обладает этим свойством.*

73. В дальнейшем мы будем пользоваться непрерывными функциями, которые мы будем строить аналогично тем функциям одного переменного, какие мы рассматривали выше (п. 59). Допустим сначала, что речь идет о функциях, определяемых во всех точках пространства $G_n$. Пусть $p$ есть произвольное натуральное число; рассмотрим все точки пространства $G_n$, ко-

ординаты которых имеют форму $\frac{a}{2^p}$, где $a$ — произвольное целое число; обозначим совокупность таких точек через $S_p$. Эти точки представляют собою вершины построенной в пространстве $G_n$ сети кубов, причем какой-либо куб $\delta$ этой сети определяется условиями $\frac{a_i}{2^p} \leqq x_i \leqq \frac{a_i+1}{2^p}$. Для определения функции, которую мы далее обозначим через $f_p$, мы сначала установим ее значения в точках множества $S_p$. Затем, чтобы завершить ее определение во всем пространстве $G_n$, мы потребуем, чтобы в каждом из кубов $\delta$ эта функция была *линейною по отношению к каждому из переменных*. Тем самым функция эта будет вполне определена.

Рассмотрим, например, случай трех переменных $x$, $y$, $z$. В каждом из кубов функция $f_p$ имеет форму:

$$A_1\,xyz + A_2\,yz + A_3\,xz + A_4\,xy + A_5\,x + A_6\,y + A_7\,z + A_8.$$

Восемь входящих в это выражение коэфициентов всецело определяются тем, что функция должна иметь наперед заданное значение в каждой из восьми вершин куба.

Точки пространства $G_n$ мы будем разделять на различные категории. Так, в случае $n=3$ мы будем различать точки множества $S_p$ (вершины кубов $\delta$); точки, лежащие на ребрах кубов, но не являющиеся вершинами последних; точки, лежащие на гранях, но не на ребрах; и наконец — точки, расположенные внутри кубов.

В точках множества $S_p$ значение функции $f_p$ задается наперед. В точке $A$, лежащей на ребре, значение функции $f_p$ определяется ее значениями в вершинах этого ребра. В точке, расположенной на грани, значение функции $f_p$ определяется ее значениями в четырех вершинах этой грани. Наконец, в точке, заключенной внутри куба, это значение устанавливается с помощью значений функции в восьми вершинах этого куба.

Подобным же образом и в общем случае мы убеждаемся, что значение функции $f_p$ в точке $A$ с координатами $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ определяется значениями той же функции во всех тех точках множества $S_p$, кординаты которых $\frac{a_1}{2^p}, \frac{a_2}{2^p}, \ldots, \frac{a_n}{2^p}$ удовлетворяют неравенствам:

$$\left|x_i - \frac{a_i}{2}\right| < \frac{1}{2^p}. \tag{1}$$

Заметим, наконец, что *значение функции* $f_p$ *в точке* $A$ *заключено между наибольшим и наименьшим из тех значений, которые его определяют.* Точки множества $S_p$, удовлетворяющие условию (1), мы будем называть *точками порядка* $p$, *связанными с точкой* $A$.

Условие (1) можно написать и так:

$$\frac{\alpha_i - 1}{2^p} < x_i < \frac{\alpha_i + 1}{2^p}.$$

Таким образом, всякая точка, связанная с точкой $A$ является центром некоторого куба $\Delta$, содержащего внутри себя точку $A$ (п. 61).

Все сводится к определению значения функции $f_p$ в каждой точке $B$ множества $S_p$. Это значение мы определим на основании совокупности всех значений, принимаемых функцией в кубе $\Delta$, имеющем центр в точке $B$ и длину ребра $\frac{1}{2^{p-1}}$.

С каждой областью $\Delta$ мы свяжем определенное число $\varphi(\Delta)$ и затем положим для каждой точки $B$ множества $S_p$ $f_p(B) = \varphi(\Delta)$, принимая за $\Delta$ куб с центром в точке $B$ и с длиною ребра $\frac{1}{2^{p-1}}$. Для прочих точек пространства $G_n$ мы затем определим значения функции $f_p$ вышеописанным способом. Я утверждаю, что построенная таким образом последовательность функций $f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots$ будет стремиться к функции $f$, если числа $\varphi(\Delta)$ будут удовлетворять следующем условию:

Условие (а). *Каковы бы ни были точка* $A$ *пространства* $G_n$ *и положительное число* $\varepsilon$, *существует такая сфера* $\Sigma$ *с центром в точке* $A$, *что для любой области* $\Delta$, *содержащейся в сфере* $\Sigma$ *и содержащей внутри себя точку* $A$:

$$|\varphi(\Delta) - f(A)| < \varepsilon. \quad \text{(a)}$$

В самом деле, когда $p$ превосходит некоторое число $q$, то все области, заключающие внутри себя точку $A$ и имеющие длину ребра, равную $\frac{1}{2^{p-1}}$, находятся внутри сферы $\Sigma$. Начиная с этого момента, значения функции $f_p$ в точках порядка $p$, связанных с точкою $A$, суть числа $\varphi(\Delta)$, удовлетворяющие условию (а). Но величина $f_p(A)$ заключена между значениями функции $f_p$ в [illegible] порядка $p$, связанных с точкою $A$. Следовательно, [illegible] $> q$:

$$|f_p(A) - f(A)| < \varepsilon,$$

отсюда

$$\lim_{p \to \infty} f_p(A) = f(A).$$

Во всем предшествующем мы предполагали, что функция $f$ определена во всех точках пространства $G_n$. Допустим теперь, что функция $f$ определена только в точках произвольного совершенного множества $P$. В этом случае достаточно будет определить числа $\varphi(\Delta)$ для тех из областей $\Delta$, которые содержат внутри себя точки множества $P$. Функцию $f_p$ мы будем определять, как ранее, но станем теперь рассматривать ее только в точках совершенного множества $P$. Если числа $\varphi(\Delta)$ удовлетворяют условию (а), то $f_p$ стремится к $f$ в каждой точке множества $P$.

74. Займемся теперь определением чисел $\varphi(\Delta)$. Пусть $f$ есть ограниченная функция, определенная на совершенном множестве $P$ в пространстве $G_n$ и точечно разрывная на всяком совершенном множестве. Пусть, с другой стороны, $\sigma$ есть произвольное положительное число. Мы постараемся определить: 1) функцию $F$, определенную на множестве $P$ и отличающуюся от функции $f$ не более, нежели на $\sigma$, и 2) числа $\varphi(\Delta)$, удовлетворяющие условию (а) относительно функции $F$.

В целях симметрии обозначений, мы теперь обозначим множество $P$ через $P_0$. Мы в дальнейшем определим множества $P_1, \ldots, P_\alpha, \ldots$, где $\alpha$ — любое число первого или второго класса. Для этой цели установим следующие соглашения:

а) Если $\alpha > 0$ есть число первого рода, то пусть $P_\alpha$ есть совокупность тех точек $A$ множества $P_{\alpha-1}^{\Omega}$, где

$$\omega[f, P_{\alpha-1}^{\Omega}, A] \geqq \sigma.$$

Согласно нашим предположениям, множество $P_\alpha$ нигде не плотно на множестве $P_{\alpha-1}^{\Omega}$, если последнее существует, а потому:

$$P_{\alpha-1} > P_\alpha.$$

б) Если $\alpha$ есть число второго рода, то $P_\alpha$ определяется как совокупность точек, общих всем множествам $P_{\alpha'}$, при всяком $\alpha' < \alpha$.

Мы непосредственно видим, что множества $P_\gamma$ замкнуты, удовлетворяют условиям п. 62 и, кроме того, условиям замечаний I и III. Следовательно, множества эти, начиная с некоторого индекса $\beta$, совпадают с некоторым множеством $P_\Omega$, причем, в силу замечания I, мы можем написать:

$$P_0 = \Sigma(P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega,$$

где $\gamma$ пробегает все значения, меньшие, нежели $\beta$.

В силу замечания III, $P_\Omega$ есть либо совершенное, либо пустое множество. Я утверждаю, что в нашем случае это есть пустое множество. В самом деле, если бы оно не было пустым, то соотношение

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \ldots = P_\Omega$$

противоречило бы найденному нами соотношению $P_\beta > P_{\beta+1}$.

Следовательно, мы можем написать:

$$P_0 = \Sigma(P_\gamma - P_{\gamma+1}).$$

Каждая точка $A$ множества $P_0$ принадлежит определенному множеству $P_\gamma - P_{\gamma+1}$. Множество же $P_\gamma - P_{\gamma+1}$ можно разложить следующим образом:

$$P_\gamma - P_{\gamma+1} = (P_\gamma - P_\gamma^\Omega) + (P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}),$$

где, в свою очередь:

$$P_\gamma - P_\gamma^\Omega = \Sigma(P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}),$$

причем $\nu$ пробегает все числа первого и второго классов, и члены последней суммы суть неперекрывающиеся между собою и не пустые множества, вплоть до некоторого определенного индекса, начиная с которого все эти множества пусты.

Таким образом мы видим, что каждая точка $A$ множества $P_0$ принадлежит либо одному из множеств $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$, либо одному из множеств $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$.

Установив это, определим теперь функцию $F$. В точке $A$, принадлежащей одному из множеств $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$, мы положим:

$$F(A) = f(A).$$

В точке $A$, принадлежащей одному из множеств $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$, мы положим:

$$F(A) = m(f, P_\gamma^\Omega, A).$$

Я утверждаю, что в последнем случае:

$$|f-F|<\sigma.$$

В самом деле, в точке $A$, принадлежащей множеству $P_\gamma^\Omega$, но не принадлежащей множеству $P_{\gamma+1}$, мы имеем:

$$\omega[f, P_\gamma^\Omega, A]<\sigma.$$

Но $\omega=M-m$, причем $m=F$ и $m \leqq f \leqq M$. Отсюда:

$$|f-F| \leqq M-m<\sigma.$$

Таким образом, мы имеем всюду:

$$|f-F|<\sigma.$$

Перейдем теперь к определению чисел $\varphi(\Delta)$. Пусть $\Delta$ — какая-либо из наших областей. Обозначим через $Q_{\gamma,\nu}$ множество точек, принадлежащих множеству $P_\gamma^\nu$ и заключенных в области $\Delta$, причем возможно $\nu=\Omega$. Множества $Q$ суть замкнутые множества, расположенные в том же порядке, что и множества $P$ Рассмотрим сначала все множества $Q_{\gamma,0}$, где $\gamma$ пробегает все. числа первого и второго классов. Множества эти удовлетворяют условиям теоремы п. 62 и замечания II. В самом деле, при достаточно большом $\gamma$ множество $Q_{\gamma,0}$ пусто, ибо при $\gamma \geqq \beta$ $P_\gamma^0$ есть пустое множество. Кроме того, эти множества ограничены. Следовательно, существует такое число $h$, что в области $\Delta$ множество $Q_{h,0}$ не пусто, между тем как $Q_{h+1,0}$ есть пустое множество.

Определив таким образом число $h$, рассмотрим теперь множества $Q_{h,\nu}$ при различных $\nu$. Если множество $Q_{h,\Omega}$ не пусто, положим $k=\Omega$. В противном случае множества $Q_{h,\nu}$ находятся в условиях замечания II. Следовательно, существует такое число $k$, что множество $Q_{h,k}$ не пусто, в то время как $Q_{h,k+1}$ есть пустое множество.

Определив таким образом для всех случаев множество $Q_{h,k}$, мы полагаем:

$$\varphi(\Delta)=m(f, Q_{h,k}).$$

Я утверждаю, что числа $\varphi(\Delta)$ удовлетворяют условию (a). В самом деле, если $A$ есть произвольная точка множества $P$, то возможны два случая:

*Первый случай.* Точка $A$ принадлежит одному из множеств $P_\gamma^\nu-P_\gamma^{\nu+1}$. В таком случае $A$ есть изолированная точка множества $P_\gamma^\nu$. Возьмем какую-либо сферу $\Sigma$ с центром в точке $A$, не содержащую кроме точки $A$ ни одной точки множества $P_\gamma^\nu$. Если $\Delta$ есть область, содержащая точку $A$ и заключенная в сфере $\Sigma$ то, очевидно, множество $Q_{\gamma,\nu}$ состоит из единственной точки $A$ между тем как $Q_{\gamma,\nu+1}$ есть пустое множество. Следовательно, $h=\gamma$, $k=\nu$, и мы имеем:

$$\varphi(\Delta)=f(A)=F(A),$$

т. е. условие (a) выполнено.

*Второй случай.* Точка $A$ принадлежит одному из множеств $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$. Мы положили:

$$F(A)=m(f,\ P_\gamma^\Omega,\ A).$$

Если задано произвольное $\varepsilon>0$, то существует такая сфера $\Sigma$ с центром в точке $A$, что, обозначая через $\Pi$ участок множества $P_\gamma^\Omega$, определяемый сферою $\Sigma$, мы имеем:

$$m(f,\Pi)>m(f,\ P_\gamma^\Omega,\ A)-\varepsilon.$$

С другой стороны, так как точка $A$ не принадлежит замкнутому множеству $P_{\gamma+1}$, можно уменьшить радиус сферы $\Sigma$ до таких пределов, чтобы она не содержала ни одной точки множества $P_{\gamma+1}$. Но в таком случае, если какая-либо область $\Delta$ содержит точку $A$ и заключается в сфере $\Sigma$, множество $Q_{\gamma,\Omega}$ содержит точку $A$, между тем как $Q_{\gamma+1,0}$ есть пустое множество. В силу наших определений, мы должны выбрать $Q_{h,k}=Q_{\gamma,\Omega}$. Следовательно, мы полагаем:

$$\varphi(\Delta)=m(f,\ Q_{\gamma,\Omega}).$$

Но так как множество $Q_{\gamma,\Omega}$, содержащее точку $A$, составляет часть участка $\Pi$, то величина $m(f, Q_{\gamma,\Omega})$ заключена между $m(f, P_\gamma^\Omega, A)$ и $m(f, P_\gamma^\Omega, A)-\varepsilon$ и, следовательно, между $F(A)$ и $F(A)-\varepsilon$. Таким образом

$$|\varphi(\Delta)-F(A)|<\varepsilon,$$

т. е. условие (a) выполняется и в этом случае.

Следовательно, функция $F$ есть предел последовательности непрерывных функций, а значит этим свойством обладает и функция $f$. Таким образом мы убеждаемся, что найденное нами необходимое условие вместе с тем и достаточно.

## IV. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НА СЛУЧАЙ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ.

75. В целях избежания затруднений второстепенного характера мы до сих пор предполагали все рассматриваемые нами функции *ограниченными*.

Мы теперь освободимся от этого ограничения, причем будем даже рассматривать функции, могущие принимать и значения $+\infty$ и $-\infty$.

По определению, мы будем считать, что $+\infty$ превышает все действительные числа, в то время как $-\infty$ меньше каждого из них. Мы обозначим через $R$ совокупность всех действительных чисел, а через $R'$ — ту же совокупность, к которой присоединены еще числа $+\infty$ и $-\infty$.

Мы скажем, что последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *имеет своим пределом* $+\infty$, если, каково бы ни было число $A$, все числа $u$, начиная с некоторого, превосходят $A$. Мы даем аналогичное определение для последовательности, имеющей пределом $-\infty$.

Общее определение предела, дополненное только что установленным соглашением, можно формулировать так: последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ имеет своим пределом число $u_0$ (где $u_0$ и все $u_n$ принадлежат множеству $R'$), если для любых двух чисел $u'$ и $u''$, удовлетворяющих неравенствам $u' < u_0 < u''$, существует такое натуральное число $p$, что при $n > p$ мы имеем:

$$u' < u_n < u'' \, *.$$

Если функция, определенная на каком-либо совершенном множестве, принимает в каждой точке этого множества значение, принадлежащее множеству $R'$, то понятия верхней и нижней границы этой функции на каком-либо участке, а стало быть и в какой-либо точке данного множества, сохраняют силу; но каждое из этих чисел может при этом иногда равняться $+\infty$ или $-\infty$. Чтобы установить величину колебания функции в каком-либо участке или в какой-либо точке, мы условимся, что для любого конечного числа $a$:

$$+\infty - a = a - (-\infty) = +\infty - (-\infty) = +\infty,$$
$$+\infty - (+\infty) = -\infty - (-\infty) = 0.$$

---

* Интересно отметить один факт, оттеняемый нашим определением и который мне представляется мало известным: понятие предела не предполагает предварительного определения действий над иррациональными числами; для его установления необходимо только понятие об иррациональных числах, составляющих вместе с числами рациональными упорядоченное множество определенного типа.

Если, при сообдюдении этих условий, в какой-либо точке $\omega = 0$, то мы будем называть функцию непрерывной в этой точке. Различение между функциями, точечно или сплошь разрывными на данном совершенном множестве, сохраняет при этом определенный смысл.

Мы видим, что функция может принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ и при этом быть всюду непрерывной. Тем не менее, мы сохраним термин функции непрерывной в собственном смысле слова для функций, конечных в каждой точке и тем самым, как мы знаем, ограниченных на всяком ограниченном множестве.

76. Посмотрим теперь, при каких условиях произвольная разрывная функция может быть пределом последовательности конечных непрерывных функций. Мы покажем, что общий случай можно привести к случаю ограниченных функций.

Пусть $y$ есть переменная величина, могущая принимать любые значения, принадлежащие множеству $R'$. Мы поставим ей в соответствие другую переменную величину $z$, определяемую следующим образом:

$$\text{при } 0 \leqq y \leqq +\infty \qquad z = \frac{y}{1+y},$$

$$\text{при } -\infty \leqq y \leqq 0 \qquad z = \frac{y}{1-y}.$$

В первом случае $z$ непрерывно и, непрестанно возрастая, изменяется от 0 до 1; во втором — также непрерывно и, непрестанно возрастая, — от $-1$ до 0. Обозначим соответственно через $R_1'$ и $R_1$ множества

$$-1 \leqq z \leqq 1 \text{ и } -1 < z < 1.$$

Множество $R_1'$ соответствует множеству $R'$, а множество $R_1$ — множеству $R$.

Мы видим, что из $y' < y''$ следует $z' < z''$, и обратно. Обозначим через T преобразование, посредством которого $y$ переходит в $z$, и через $\mathrm{T}^{-1}$ — обратное преобразование, посредством которого $z$ переходит в $y$.

Рассмотрим последовательность чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, стремящихся к числу $y_0$. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, z_0$ суть числа, соответственно получаемые из чисел $y$ с теми же индексами посредством преобразования T; я утверждаю, что

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z_0.$$

В самом деле, пусть $z'$ и $z''$ суть два любых числа, для которых:

$$z' < z_0 < z''.$$

Числа $y'$ и $y''$, соответственно получаемые из $z'$ и $z''$ преобразованием $T^{-1}$, удовлетворяют неравенствам

$$y' < y_0 < y''.$$

Так как $y_n$ имеет своим пределом $y_0$, то существует такое натуральное число $p$, что при $n > p$

$$y' < y_n < y''.$$

Следовательно, при $n > p$

$$z' < z_n < z'',$$

т. е. $\lim z_n = z_0$. Обратная теорема доказывается тем же путем.

Пусть функция $f$ определена на произвольном совершенном множестве $P$; значение функции $f$ в каждой точке этого множества мы подвергаем преобразованию T. Мы получаем новую функцию $\varphi$; условимся говорить, что функция $\varphi$ получена преобразованием T из функции $f$ и что, обратно, функция $f$ получается из функции $\varphi$ преобразованием $T^{-1}$. Функция $f$ при этом произвольна, а функция $\varphi$ — ограничена и заключается между $-1$ и $+1$. Я утверждаю, что функция $\varphi$ непрерывна во всех точках непрерывности функции $f$, и обратно. В самом деле, если, например, функция $f$ непрерывна в точке $A$, то это означает, что для любой последовательности точек $A_1$, $A_2, \ldots, A_n, \ldots$, стремящихся к точке $A$, мы имеем:

$$\lim f(A_n) = f(A).$$

Для функции, получаемой из $f$ посредством преобразования T, мы отсюда заключаем, что

$$\lim \varphi(A_n) = \varphi(A).$$

Пусть теперь последовательность функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ имеет своим пределом функцию $f$. Применим преобразование T к каждой из этих функций. Мы, таким образом, получим последовательность новых функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \varphi$, причем $\varphi_n \to \varphi$, ибо в любой точке $A$ из соотношения

$$\lim f_n(A) = f(A)$$

следует:

$$\lim \varphi_n(A) = \varphi(A).$$

Подобным же образом доказывается и обратное предложение, касающееся функций, получаемых преобразованием $T^{-1}$ из функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$, заключенных между $-1$ и $+1$ и имеющих своим пределом функцию $\varphi$.

77. Установив это, покажем, что всякая функция $f$ является или не является пределом последовательности непрерывных функций, в зависимости от того, обладает ли этим свойством функция $\varphi$, получаемая из нее преобрвзованием T.

В самом деле: 1. Если функции $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ непрерывны, то непрерывными будут и получаемые из них посредством преобразования T функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, и если первые стремятся к функции $f$, то последние будут стремиться к функции $\varphi$. Таким образом, если функция $f$ есть предел последовательности непрерывных функций, то функция $\varphi$ также обладает этим свойством.

2. Допустим, что функция $\varphi$ есть предел последовательности непрерывных функций; так как $\varphi$ заключена между $-1$ и $+1$, то мы можем допустить, что $-1 \leqq \varphi_\nu \leqq 1$. Помножим функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ соответственно на положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$, меньшие, нежели 1 и стремящиеся к 1. Рассмотрим функции $\alpha_1\varphi_1, \alpha_2\varphi_2, \ldots, \alpha_\nu\varphi_\nu, \ldots$, они имеют своим пределом функцию $\varphi$ и удовлетворяют условиям:

$$-\alpha_\nu \leqq \alpha_\nu \varphi_\nu \leqq \alpha_\nu,$$

так что функция $\alpha_\nu\varphi_\nu$ заключена между двумя числами, лежащими *внутри* интервала $(-1, +1)$. Функция $f_\nu$, получаемая из $\alpha_\nu\varphi_\nu$ посредством преобразования $T^{-1}$, есть поэтому конечная непрерывная функция, стремящаяся к функции $f$ при $\nu \to \infty$.

С другой стороны, на любом совершенном множестве функции $f$ и $\varphi$ имеют одни и те же точки непрерывности. Стало быть, они одновременно являются точечно или сплошь разрывными. Но для функции $\varphi$ точечная разрывность на всяком совершенном множестве есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы она была пределом последовательности непрерывных функций. Мы теперь видим, что это же условие сохраняет силу и для функции $f$. Таким образом мы можем формулировать следующую общую теорему:

*Для того, чтобы данная произвольная функция (конечная или бесконечная) была пределом последовательности непрерывных функций, необходимо и достаточно, чтобы она была точечно разрывна на всяком совершенном множестве.*

78. В качестве частного случая отметим функции полунепрерывные. Легко показать, что всякая полунепрерывная функция точечно разрывна на всяком совершенном множестве, обобщая доказательство п. 48, проведенное для случая прямолинейного отрезка. Отсюда мы заключаем, что такая функция всегда является пределом последовательности непрерывных функций.

Это обстоятельство мы можем доказать независимо от общей теории. Мы непосредственно определим числа $\varphi(\Delta)$, которые мы рассматривали в п. 73 Допустим, что данная функция полунепрерывна сверху на совершенном множестве $P$. В таком случае мы в каждой области $\Delta$ примем за $\varphi(\Delta)$ максимум функции $f$ в этой области. Я утверждаю, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, условие

$$|\varphi(\Delta) - f(A)| < \varepsilon \tag{a}$$

выполняется в каждой точке $A$ множества $P$. В самом деле, по определению функций, полунепрерывных сверху, существует такая сфера $\Sigma$ с центром в точке $A$, что для любой точки $A'$ множества $P$, заключенной внутри сферы $\Sigma$,

$$f(A') < f(A) + \varepsilon.$$

Если область $\Delta$, содержащая точку $A$, заключена внутри сферы $\Sigma$, то число $\varphi(\Delta)$ будет поэтому заключено между $f(A)$ и $f(A) + \varepsilon$. Следовательно, мы будем иметь:

$$f(A) < \varphi(\Delta) < f(A) + \varepsilon.$$

79. Вот еще другой пример функций, служащих пределами последовательностей непрерывных функций. Рассмотрим непрерывную функцию $F(x)$ от одного переменного. Допустим, что функция эта имеет производную, хотя бы только одностороннюю, например производную справа; это означает, что отношение

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

имеет определенный предел, когда $h$ стремится к нулю по положительным значениям. Пусть этот предел будет $f(x)$. Я утверждаю, что функция $f(x)$ есть предел последовательности непрерывных функций (не исключая при этом случая, когда

$f(x)$ может принимать значения $+\infty$ и $-\infty$). Возьмем последовательность положительных чисел

$$h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots,$$

стремящихся к нулю. Положим

$$\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}=f_n(x).$$

Функция $f_n(x)$ непрерывна и имеет своим пределом функцию $f(x)$, когда $n$ неограниченно возрастает.

80. Известно, что непрерывная функция $f$ в ограниченной области может быть аппроксимирована многочленом с любой, наперед заданной степенью точности. Другими словами, сколь бы мало ни было $\varepsilon$, существует такой многочлен $P$, что во всех точках данной ограниченной области

$$|f-P|<\varepsilon.$$

Я утверждаю, что всякая функция, являющаяся пределом последовательности непрерывных функций, может быть рассматриваема во всем пространстве $G_n$ как предел последовательности многочленов или, если угодно, как сумма ряда многочленов. В самом деле, рассмотрим бесконечную последовательность областей $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, каждая из которых содержится в следующей и которые обладают тем свойством, что всякая точка пространства $G_n$ принадлежит всем областям, начиная с некоторой. С другой стороны, выберем какую-либо последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ положительных чисел стремящихся к нулю. Тогда мы можем найти последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ таких многочленов, что для любого $i$

$$|f_i(A)-P_i(A)|<\varepsilon_i$$

во всех точках области $c_i$. Очевидно, последовательность многочленов $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ имеет своим пределом функцию $f$ во всем пространстве $G_n$. Следовательно, ряды многочленов и ряды непрерывных функций представляют один и тот же класс функций.

81. В предшествующем мы все время имели дело с разрывными функциями некоторого особого рода — именно с теми, которые служат пределами для последовательностей непрерывных функций. Условимся говорить, что непрерывные функции составляют *нулевой* класс функций. Функции, служащие

пределами последовательностей непрерывных функций, образуют по определению, *первый* класс.

Существуют функции, которые, будучи предельными для последовательностей функций первого класса, сами этому классу не принадлежат. Рассмотрим, например, в случае одного независимого переменного, функцию $f$, равную единице во всех точках с рациональными абсциссами и нулю во всех точках с иррациональными абсциссами. Она не может быть функцией первого класса. Но она является пределом последовательности функций первого класса. В самом деле, рассмотрим функцию $f_\nu$, равную нулю всюду, кроме точек, абсцисса которых может быть представлена дробью со знаменателем, не превосходящим $\nu$, и единице — в таких точках. Очевидно, в каждой точке $f_\nu$ имеет своим пределом $f$, когда $\nu$ неограниченно возрастает. Но функция $f_\nu$, имеющая лишь конечное число точек разрыва, является, как мы знаем, пределом последовательности непрерывных функций. Функцию $f$ мы поэтому можем рассматривать как предел последовательности функций первого класса, или, если угодно, как сумму ряда, каждый член которого есть функция первого класса. Значит, существует двойной ряд многочленов $\Sigma_\alpha \Sigma_\beta P_{\alpha\beta}(x)$, сходящийся при всех значениях $x$ и сумма которого равна единице, если $x$ рационально, и нулю, если $x$ иррационально.

Условимся говорить, что функции, не принадлежащие первому классу, но являющиеся предельными для функций первого класса, суть функции *второго* класса. Таким образом мы приходим к теоретическому распределению функций по классам. Обобщая предшествующие определения, мы получаем функции классов 3, 4, . . ., $n$, . . .

Мы можем даже определить понятие функции класса $\alpha$, где $\alpha$ — любое число первого или второго класса. Мы будем говорить, что данная функция $f$ принадлежит классу $\alpha$, если она служит пределом последовательности функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, каждая из которых, в свою очередь, является предельной для функций определенного класса, номер которого $< \alpha$, и если сама функция $f$ ни одному из таких классов не принадлежит.

Пусть $E$ означает совокупность функций всех классов, которым в качестве индексов соответствуют числа первого и второго классов. Я утверждаю, что *множество $E$ содержит все свои предельные функции*, т. е., что если последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ имеет своим пределом функцию $f$ и если все функции этой последовательности принадлежат множеству $E$, то и функция $f$ принадлежит этому множеству. В самом деле, по предположению, функции $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ принадлежат соответственно некоторым классам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ Мы знаем, что существует число $\alpha$ первого или второго класса, превосходящее все эти числа; следовательно, функция $f$ принадлежит либо классу $\alpha$, либо какому-нибудь классу низшего индекса и, во всяком случае, принадлежит множеству $E$.

Интересно спросить себя, существует ли свойство функций, сохраняющееся в пределе, т. е. такое, что если все функции последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ этим свойством обладают, то будет им обладать и предельная функция $f$. Здесь мы ограничимся формулировкой следующего предложения:

Пусть функция $f$ определена на совершенном множестве $P$. Если существует функция $\varphi$ первого класса, определенная на множестве $P$ и отличающаяся от функции $f$ только в точках, совокупность которых есть множество первой категории относительно $P$, то это свойство сохраняется в пределе. Ясно, что этим свойством обладают все функции классов 0 и 1. Следовательно, оно принадлежит и всем функциям, входящим в множество $E$ *.

---

* Относительно доказательства я отсылаю к моей работе — «Sur la représentation des fonctions continues», «Acta Mathematica», t. 32.

## ОГЛАВЛЕНИЕ.