Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ

Академия наук
Украинской ССР

Институт
математики

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Издательство
„Наукова думка“
Киев — 1965

517.2
Б48

В книге излагается теория разложений по собственным функциям самосопряженных операторов. Общая теория прилагается к построению подобных разложений для дифференциальных операторов в частных производных и разностных операторов, к получению интегральных представлений положительно определенных ядер, к проблеме моментов и т. д. Наряду с построением разложений излагаются вопросы теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, необходимые для построения разложений. Изложение во всей книге базируется на теории обобщенных функций конечного порядка.

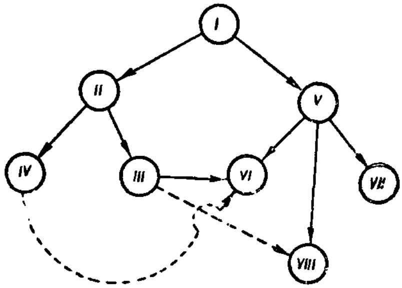
От читателя предполагается знакомство с элементами теории операторов в гильбертовом пространстве и теории уравнений в частных производных. Книга рассчитана на студентов-математиков старших курсов, аспирантов и научных работников, занимающихся приложениями методов функционального анализа.

Ответственный редактор
академик АН УССР *Ю. А. Митропольский*

II

ОГЛАВЛЕНИЕ

Схема зависимости глав



II

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена приложениям общей теории самосопряженных операторов к спектральным задачам для дифференциальных и разностных уравнений. Бурное развитие этой области происходило в последние годы, и сейчас математики, склонные к категоричности суждений, могут сказать (и говорят), что оно завершено. В этом высказывании есть некоторая доля истины. Вместе с тем нет книг, в которых излагались бы достаточно полно соответствующие вопросы. Точнее, спектральная теория самосопряженных обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений в пространствах L_2 и l_2 с точки зрения теории операторов изложена в книгах М. А. Наймарка [2] и Н. И. Ахиезера [2] и в недавно появившемся втором томе книги Данфорда и Дж. Шварца [2]. С другой стороны, аналогичным вопросам для уравнений в частных производных посвящена лишь одна глава книги И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [3], одна глава упоминавшейся книги Данфорда и Дж. Шварца, а также несколько разделов готовящегося русского издания книги К. Морена «Методы гильбертова пространства». Автор в предлагаемой книге пытается восполнить этот пробел.

Спектральную теорию уравнений в частных производных по существу и по форме нельзя строить без привлечения современной теории краевых задач (изложенных, желательно, функциональными методами). К сожалению, автор не мог сослаться на какие-либо книги в этом направлении, так как их не было, и ему пришлось самому излагать ряд вопросов теории краевых задач. Сейчас положение изменилось: появилась книга Хёрмандера по общим уравнениям [4] и у нас должна появиться книга О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой по эллиптическим уравнениям второго порядка и обзор М. С. Аграновича в «Успехах математических наук» по общим эллиптическим уравнениям. Все же хочется надеяться, что разделы книги, посвященные краевым задачам, будут полезны и для математиков, желающих ознакомиться лишь с краевыми задачами, тем более, что эти разделы написаны независимо от спектральных вопросов. Вообще, возможно, более точно следовало бы назвать эту книгу так: «Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов и краевые задачи» — последние в ней занимают треть объема.

Кратко остановимся на содержании книги.

Изложение в ней ведется при помощи обобщенных функций *конечного* порядка, так как именно такие обобщенные функции удобны в теории краевых задач и в вопросах, в которых нет нужды рассматривать дифференциальные операторы как непрерывно действующие в одном и том же пространстве. Теория этих обобщенных функций излагается в первой главе.

Небольшая вторая глава посвящена общим схемам и понятиям теории краевых задач, а третья — довольно обстоятельному изложению эллиптических уравнений. В третьей главе большое внимание уделяется вопросам гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений как внутри области, так и вплоть до ее границы. Именно эти факты нужны для построения разложений по собственным функциям. Четвертая глава мало связана со спектральной теорией — в ней собраны некоторые «неэллиптические» иллюстрации к схемам второй главы.

Общей теории разложений по собственным векторам (обобщенным и обычным) посвящена пятая глава. Здесь изложена их конструкция с использованием обобщенных функций конечного порядка и указывается лишь, как из приведенных построений выводятся схемы разложений с привлечением линейных топологических пространств, но сами такие схемы подробно не исследуются. Это связано не столько с симпатиями автора, сколько с общей направленностью книги и с необходимостью излагаемых конструкций для построения разложений по собственным функциям дифференциальных операторов, рассматриваемых с учетом граничных условий. В шестой главе строится разложение по собственным функциям самосопряженных дифференциальных операторов в частных производных в пространстве L_2, в частности, эллиптических операторов. Для последних операторов доказано существование разложений вплоть до границы области. Случай обыкновенных дифференциальных операторов не излагается и лишь в последнем параграфе главы кратко описывается имеющаяся ситуация. Седьмая глава посвящена спектральной теории самосопряженных разностных операторов в пространстве l_2. Здесь в первом параграфе излагается классическая теория якобиевых матриц и затем по этой канве строится теория разложений для уравнений с операторными коэффициентами и в частных разностях. В последней, восьмой, главе строится теория самосопряженных операторов (дифференциальных и разностных), действующих в пространстве со скалярным произведением, порожденным положительно определенным ядром. Основы этой теории были заложены в работах М. Г. Крейна, посвященных установлению интегральных представлений положительно определенных функций через собственные функции обыкновенных дифференциальных операторов. В главе излагается развитие этих работ в различных направлениях.

Подчеркнем, что ряд традиционных для спектральной теории вопросов — локализация спектра, асимптотика спектральной функции и т. д. в книге не рассматривается.

Чтение книги требует от читателя знакомства с основами теории операторов в гильбертовом пространстве, например, в объеме книги Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [1] и с элементами теории уравнений в частных производных. Полезно также знакомство с первыми параграфами книги И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [1]. Для облегчения чтения автор в ряде случаев не излагал самые общие конструкции или вводил их постепенно — в особенности, если они слишком громоздки. Однако в других случаях сперва излагаются общие построения, а затем на их основе рассматриваются примеры.

Ряд страниц книги набран мелким шрифтом, их при первом чтении можно опустить. Для лучшей ориентации приведено подробное оглавление. Нумерация формул независимая в каждой главе.

Ссылки, за редким исключением, сосредоточены в «Литературных указаниях», помещенных в конце книги. Здесь хочется подчеркнуть, что больше всего повлияли на содержание книги (как и на работу автора в целом) С. Л. Соболев, С. Г. Крейн (гл. I—IV, «краевая» часть) и М. Г. Крейн, И. М. Гельфанд, А. Я. Повзнер (гл. V—VIII, «спектральная» часть).

М. Г. Крейн и С. Г. Крейн просмотрели отдельные главы и сделали ценные замечания. При подготовке рукописи книги мне помогали мои товарищи и ученики. Так, § 5—6, гл. III (стр. 200—271) написаны совместно с Я. А. Ройтбергом, пп. 5—6, § 1, гл. VI (стр. 385—391) — совместно с Л. П. Нижником, пп. 1—3, § 5, гл. VIII (стр. 720—732) — совместно с Н. Н. Чаусом. Отдельные разделы книги просмотрели и внесли ряд исправлений Г. И. Кац, В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук и Ю. Б. Орочко. Всю книгу прочитал и провел математическое редактирование З. Г. Шефтель.

Всем названным математикам выражаю искреннюю благодарность.

Сентябрь 1964 г. *Ю. М. Березанский*

ВВЕДЕНИЕ

Это введение имеет своей целью описать тот круг вопросов, на которые опирается изложение в книге, а также уточнить терминологию, если в ней наблюдается некоторый разнобой. Введение рассчитано на читателя, более знакомого с основами функционального анализа, чем с теорией дифференциальных уравнений. Поэтому соответствующие вопросы функционального анализа и теории функций лишь напоминаются или только указывается запас необходимых познаний, в то время как вопросы, связанные с уравнениями (теория пространств С. Л. Соболева), излагаются более обстоятельно.

В дальнейшем в книге даются ссылки либо на введение, если в нем соответствующий вопрос отражен достаточно детально, либо непосредственно на ту или иную книгу.

1. Топологические понятия. В дальнейшем будут употребляться обычные обозначения теории множеств: $\in$, $\bar{\in}$, $\subseteq$, $\subset$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\times$. При этом мы будем писать $A \subseteq B$, если всякое $x \in A$ входит в B; и $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и известно, что в B имеются элементы, не входящие в A («A строго включено в B»).

Множество, состоящее из элементов $x_1, x_2, \ldots$ или x_α, $\alpha \in A$, мы иногда будем обозначать $\{x_1, x_2, \ldots\}$; $\{x_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$ или $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$. Пустое множество обозначаем 0.

Топологическим пространством называется множество Q, в котором выделена система Σ его подмножеств U, $V, \ldots$ («базис окрестностей»), при этом каждое $U \in \Sigma$ называется окрестностью любой точки $x \in U$ и требуется выполнение следующих аксиом: 1) если $x, y \in Q$, $x \neq y$, то всегда найдется окрестность точки x, не содержащая точку y («аксиома отделимости»); 2) пусть $x \in Q$; U, V — две окрестности этой точки, тогда всегда найдется ее третья окрестность $W \subseteq U \cap V$.

Пусть $A \subseteq Q$, замыканием A называется множество всех $x \in Q$, обладающих следующим свойством: любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку из A. В дальнейшем замыкание A обычно будем обозначать $\bar{A}$. Заметим, что такое же обозначение будет применяться и для множества, получаемого из A путем перехода к сопряженным векторам (см. ниже п. 3, обычно из контекста ясно, о какой черте идет речь). Очевидно, $A \subseteq \bar{A}$.

Множество $F \subseteq Q$, для которого $F = \bar{F}$, называется замкнутым. Множество $O \subseteq Q$, для которого $Q \setminus O$ замкнуто, называется открытым. Ясно, что каждая окрестность — открытая. Если $A \subseteq Q$таково, что $\bar{A} = Q$, то говорят, что A всюду плотно в Q. Точки из $\bar{A} \setminus A$ называются предельными для A.

О базисе окрестностей Σ говорят также, что он определяет топологию в абстрактном множестве Q. Очевидно два различных базиса Σ' и Σ'' в Q иногда могут определять одинаковую топологию в Q. Последнее обозначает, что для любого $A \subseteq Q$ его замыкания, построенные согласно системе Σ' и согласно Σ'', совпадают. Мы не будем напоминать хорошо известный критерий того, что Σ' и Σ'' определяют одинаковую топологию в Q. Заметим лишь следующее. Пусть Q — топологическое пространство с базисом окрестностей Σ. Расширим понятие окрестности, понимая в дальнейшем под окрестностью точки $x \in Q$ любое открытое множество в Q, содержащее эту точку. Легко видеть, что такая система окрестностей определяет исходную топологию в Q. Под окрестностью любого множества $A \subseteq Q$ понимается произвольное открытое множество в Q, содержащее A.

Если R — любое множество топологического пространства с базисом окрестностей Σ, то R можно превратить в топологическое пространство, если брать в качестве базиса окрестностей множества $U \cap R$, где $U \in \Sigma$. Так введенная топология в R носит название относительной; говорят также, что Q индуцирует топологию в R. Легко показать, что $A \subseteq R$ замкнуто (открыто) в относительной топологии тогда и только тогда, когда $A = B \cap R$, где B замкнутое (открытое) в Q.

Пусть Q' и Q'' — два топологических пространства. Если задана функция $x'' = f(x')$, где x' — произвольный элемент Q', а x'' пробегает некоторое множество $\mathfrak{R}(f) \subseteq Q''$, то говорят, что имеется отображение (всего) Q' в Q''. Отображение называют также оператором, действующим из (всего) Q' в Q'', $\mathfrak{R}(f)$ называют его областью значений. Если $\mathfrak{R}(f) = Q''$, то говорят об отображении на все Q''. Если функция $x'' = f(x')$ определена лишь на множестве $\mathfrak{D}(f)$ из Q', то говорят об отображении с областью определения $\mathfrak{D}(f)$. Если $x'' = f(x')$ осуществляет взаимно однозначное отображение $\mathfrak{D}(f)$ на все $\mathfrak{R}(f)$, то существует обратное отображение f^{-1}, переводящее x'' в x'; $\mathfrak{D}(f^{-1}) = \mathfrak{R}(f)$, $\mathfrak{R}(f^{-1}) = \mathfrak{D}(f)$. Мы часто будем пользоваться записью $f(\cdot)$ «с невыписанной переменной x'».

Хорошо известно понятие непрерывного в точке $x'_0 \in Q'$ отображения f, действующего из Q' в Q''. Если отображение непрерывно в каждой точке $x'_0 \in \mathfrak{D}(f) \subseteq Q'$, то говорят, что f непрерывно на своей области определения (в частности, при $\mathfrak{D}(f) = Q'$—на Q'). Если f взаимно однозначно переводит все Q' на все Q'', причем f и f^{-1} непрерывны, то f называют гомеоморфизмом между Q' и Q''.

Для отображения f Q' в Q'' будем применять также обозначение $x' \to x'' = f(x')$ и $f: Q' \to Q''$ или точнее $f: \mathfrak{D}(f) \to \mathfrak{R}(f)$.

Пусть опять Q' и Q'' — два топологических пространства. Говорят, что имеет место топологическое включение $Q' \subseteq Q''$, если $Q' \subseteq Q''$, рассматриваемые как множества, и если для любого $A \subseteq Q'$ замыкание A, построенное согласно топологии Q', входит в замыкание A, построенное согласно топологии Q''.

Пусть $Q' \subseteq Q''$ (включение не топологическое). Оператором вложения Q' в Q'' называется оператор O, относящий каждому $x' \in Q'$ этот же элемент, но понимаемый как элемент пространства Q''. Очевидно топологичность включения $Q' \subseteq Q''$ эквивалентна непрерывности оператора вложения.

В дальнейшем будем рассматривать исключительно топологические пространства, в которых существует счетный базис окрестностей. В них топологию можно задавать при помощи сходимости последовательностей: обычным образом определяется понятие $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ $(x_n, x \in Q)$; оказывается, что точка $x \in \bar{A}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $x_n \in A$ такая, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Напомним некоторые сведения о метрических пространствах. Пусть Q — некоторое множество, причем на $Q \times Q$ задана функция $\varrho(x, y)$ $(x, y \in Q)$, удовлетворяющая следующим требованиям: 1) $\varrho(x, y) \geqslant 0$ $(x, y \in Q)$, $\varrho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$; 2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ $(x, y \in Q)$; 3) $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ $(x, y, z \in Q)$. Множество Q с так определенной функцией $\varrho(x, y)$ («расстоянием между точками x и y») носит название метрического пространства. Шаром $U_r(a)$ (точнее, открытым шаром) в этом пространстве с центром в точке $a \in Q$ радиуса $r > 0$ называется множество всех $x \in Q$, для которых $\varrho(x, a) < r$. Если $\varrho(x, a) = r$, то эти x пробегают, по определению, соответствующую сферу $K_r(a)$. Замкнутым шаром называется $U_r(a) \cup K_r(a)$ (из дальнейшего будет явствовать естественность этого названия). Множество из Q называется ограниченным, если оно расположено в некотором шаре. Комплекснозначную функцию на Q будем называть локально ограниченной, если она ограничена на каждом шаре.

Превратим метрическое пространство в топологическое, приняв в качестве базиса окрестностей совокупность всевозможных шаров $U_r(a)$ $(a \in Q,\ r > 0)$; легко видеть, что требования 1) и 2) в определении топологического пространства будут выполнены. Ясно, что метрическое пространство Q имеет счетный базис окрестностей в том и только том случае, когда в нем существует счетное всюду плотное множество. Пространства (топологические или метрические), у которых существует счетное всюду плотное множество, называются сепарабельными. В дальнейшем мы рассматриваем лишь сепарабельные метрические пространства. Наконец, заметим, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ равносильно утверждению, что расстояние $\varrho(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

При помощи простой конструкции показывается, что в метрическом пространстве Q аксиома отделимости выглядит гораздо более сильным образом: если F_1 и F_2—два замкнутых непересекающихся множества из Q, то всегда можно построить отделяющие их окрестности, т. е. всегда можно найти два непересекающихся открытых множества $U_1 \supset F_1$ и $U_2 \supset F_2$. Топологические пространства с таким свойством называются нормальными. Если известно, что выполнено указанное свойство лишь в том случае, когда F_1 состоит из одной точки ($F_1 = \{x\}$), то топологическое пространство называется регулярным, а если лишь в том случае, когда $F_1 = \{x\}$, $F_2 = \{y\}$ $(x \neq y)$, — то хаусдорфовым. Известно, что топологическое регулярное пространство со счетным базисом всегда метризуемо, т. е. в нем можно ввести метрику, определяющую ту же топологию, что и исходная.

Пусть имеется метрическое пространство Q; последовательность $x_1, x_2, \ldots \in Q$ называют фундаментальной, если $\varrho(x_n, x_m) \underset{n, m \to \infty}{\to} 0$. Пространство Q называется полным, если всякая фундаментальная последовательность в нем является сходящейся к некоторой точке пространства. При помощи обычной процедуры Кантора всякое метрическое пространство Q можно пополнить, т. е. построить полное метрическое пространство $\tilde{Q}$ такое, что Q является всюду плотной частью $\tilde{Q}$ и метрика $\tilde{Q}$ на Q совпадает с прежней. В дальнейшем, если противное не оговаривается, мы под метрическим пространством всегда понимаем полное метрическое пространство.

Под расстоянием между множествами A, $B \subseteq Q$ понимается число

$$\varrho(A, B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} \varrho(x, y).$$

Рассмотрим общее (в смысле определения на стр. 13) топологическое пространство Q. Множество $F \subseteq Q$ называется компактным, если из любого его покрытия окрестностями можно выбрать конечное покрытие, т. е. из всякой системы окрестностей $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$, обладающей тем свойством, что $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supseteq F$, можно выделить конечную систему, обладающую таким же свойством. Если $\bar{F}$ компактно, то само F будем называть предкомпактным. В хаусдорфовом пространстве компактное множество, как легко видеть, всегда замкнуто.

Пусть само Q компактно и хаусдорфово. Всякое замкнутое множество $F \subseteq Q$ будет также компактным, откуда просто следует регулярность Q. Поэтому, если дополнительно предположить счетность базиса, то Q окажется обязательно метрическим. Так как мы условились рассматривать лишь пространства со счетным базисом, то в дальнейшем под компактным пространством (или компактом) следует понимать компактное метрическое пространство.

Пусть Q — сепарабельное полное метрическое пространство. Такое пространство называется локально компактным, если каждый замкнутый шар компактен. Если Q — локально компактное пространство, то его всегда можно превратить в компактное, «присоединив ∞», т. е. ввести формальную точку ∞ и рассмотреть множество $Q \cup \infty$, в котором под окрестностью точки $\neq \infty$ понимается обычная ее окрестность, а под окрестностью ∞ понимается любое множество вида $Q \setminus F$, где F компактно. Наконец, заметим, что в метрическом пространстве компактность множества F эквивалентна тому, что из любой последовательности $x_1, x_2, \ldots \in F$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке из F. Предкомпактность F означает то, что эта предельная точка может не принадлежать F.

Перейдем к рассмотрению множеств в обычном n-мерном евклидовом вещественном пространстве E_n, состоящем из точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Под областью $G \subseteq E_n$ будем понимать открытое множество в E_n. Рассматриваются при этом как ограниченные, так и неограниченные G. Границей Γ области G называется $\Gamma = \bar{G} \setminus G$. Мы будем рассматривать исключительно области с «хорошей» границей. Будем говорить, что граница Γ принадлежит классу C^m $(m = 0, 1, \ldots)$ (или m раз непрерывно дифференцируема), если для каждой точки $x_0 \in \Gamma$ можно указать столь малый шар $U_\varepsilon(x_0)$, что множество $\Gamma \cap U_\varepsilon(x_0)$ можно задать уравнением вида $x_j = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, где j — некоторый номер, а $f(\cdot)$ — m раз непрерывно дифференцируемая функция точки $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ $(C^0 = C)$. Аналогично определяется вообще поверхность класса C^m. Ясны также аналогичные определения при $m \to \infty$.

Пусть G — произвольная область, Γ — ее граница, являющаяся поверхностью класса C. Куском γ границы Γ (или куском γ на Γ) будем называть любое множество $\gamma \subseteq \Gamma$, открытое в относительной топологии, индуцируемой на Γ топологией E_n. Будем говорить, что граница Γ кусочно m $(m = 1, 2, \ldots)$ раз непрерывно дифференцируема, если Γ совпадает с замыканием объединения $\bigcup\limits_j \Gamma_j$, где каждое Γ_j — некоторый кусок на Γ, являющийся связной поверхностью класса C^m. При этом в $\bigcup\limits_j \Gamma_j$ фигурирует или конечное число слагаемых, или счетное их число, однако в последнем случае с каждым шаром в E_n может иметь непустое пересечение лишь конечное число множеств Γ_j.

Для упрощения формулировок мы во всей книге не будем уделять особого внимания снижению до минимума требований к характеру гладкости границы рассматриваемой области. В связи с этим уместно следующее определение: будем говорить, что область G имеет кусочно гладкую границу, если она имеет m раз кусочно непрерывно дифференцируемую границу с некоторым $m = 1, 2, \ldots$, точное значение которого надлежит установить самому читателю, проанализировав то или иное рассуждение. Кроме того, для упрощения мы исключим из рассмотрения «острия и ребра с нулевыми углами», т. е. в приведенном определении кусочно m раз непрерывно дифференцируемой границы дополнительно будем требовать, чтобы имело место следующее. Пусть Γ_j и Γ_k — два соседних куска, $\nu(x)$ и $\nu(y)$ — орты нормалей к кускам Γ_j и Γ_k соответственно в точках $x \in \Gamma_j$ и $y \in \Gamma_k$. Тогда не должно быть такого положения, что направления ортов $\nu(x)$ и $\nu(y)$ стремятся совпасть при сближении точек x и y.

Понятны также термины «достаточно гладкая граница Γ» (т. е. Γ класса C^m с достаточно большим m), «достаточно гладкая поверхность», «достаточно гладкий кусок на Γ», «кусок поверхности», «кусочно гладкая поверхность». Говоря о куске γ границы Γ, мы всегда будем считать, что граница этого куска (относительно Γ) кусочно гладкая (при переходе к различным определениям относительно множеств на Γ нужно применять обычные определения в E_{n-1} после «уплощения» участков Γ посредством гомеоморфизма, достаточно гладкого в окрестности Γ_j).

Отметим также, что орт нормали к достаточно гладкой поверхности S в точке $x \in S$ всегда будет обозначаться $\nu(x)$. Если S — кусок на границе области G, то под $\nu(x)$ всегда будет пониматься орт внешней нормали.

Наконец мы обычно вместо $\bar{G}$ будем писать $G \cup \Gamma$. Если множество $A \subset G$ таково, что $\varrho(A, \Gamma) > 0$ то будем говорить, что A лежит строго внутри G. Если A — компакт, расположенный в G ($A \subseteq G$), то он лежит строго внутри G.

2. Интегрирование. Помимо обычного интегрирования по мере Лебега в n-мерном пространстве или на достаточно гладком куске поверхности, у нас часто будет встречаться интегрирование по абстрактной мере. Напомним относящиеся сюда определения.

Рассмотрим абстрактное множество Q, которое сейчас удобно называть пространством. Совокупность $\mathfrak{R}$ множеств из Q называется кольцом, если из того, что $A, B \in \mathfrak{R}$ следует, что $A \cup B \in \mathfrak{R}$ и $A \setminus B \in \mathfrak{R}$. Так как $A \cap B = (A \cup B) \setminus [((A \cup B) \setminus A) \cup ((A \cup B) \setminus B)]$, то $A \cap B$ также входит в $\mathfrak{R}$. Кольцо $\mathfrak{R}$ называется замкнутым (или σ-кольцом), если из того, что $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{R}$, следует: $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{R}$.

Легко показать, что в замкнутом кольце и $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{R}$.

Пусть задано пространство Q с некоторым кольцом множеств $\mathfrak{R}$. Функция $\mu(\Delta)$ ($\Delta \in \mathfrak{R}$) называется мерой, если $0 \leqslant \mu(\Delta) \leqslant \infty$ ($\Delta \in \mathfrak{R}$), причем $\mu(0) = 0$ (0 обозначает пустое множество) и выполнено следующее требование абсолютной аддитивности: если $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Delta_j \in \mathfrak{R}$, то $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Delta_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(\Delta_j)$. Кроме того, мы всегда будем предполагать выполненным требование так называемой локальной конечности (или локальной ограниченности): существует последовательность множеств $Q_1, Q_2, \ldots \in \mathfrak{R}$ такая, что $Q_1 \subseteq \subseteq Q_2 \subseteq \ldots, Q = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$ и $\mu(Q_j) < \infty$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Часто мера μ будет просто конечной: $Q \in \mathfrak{R}$ и $\mu(Q) < \infty$.

Если кольцо $\mathfrak{R}$, на множествах которого задана мера μ, замкнуто, то можно обычным образом строить теорию измеримых функций, вводить интеграл и суммируемые функции и т. д.; при этом роль измеримых относительно лебеговой меры множеств должны играть множества из кольца $\mathfrak{R}$. Интеграл мы будем обозначать обычным образом:

$$\int\limits_A f(x)\, d\mu(x), \qquad \int\limits_A f d\mu \quad (A \in \mathfrak{R}).$$

Напомним следующий термин. Пусть $Q \in \mathfrak{R}$, множество $A \in \mathfrak{R}$ называется множеством полной меры, если $\mu(Q \setminus A) = 0$.

В случае меры μ, заданной на незамкнутом кольце множеств $\mathfrak{R}$, до того как строить теорию интегрирования, нужно расширить (продолжить) эту меру на некоторое замкнутое кольцо. Именно, нужно построить замкнутое кольцо $\widetilde{\mathfrak{R}} \supset \mathfrak{R}$ множеств из Q и меру $\tilde{\mu}$ такие, что $\tilde{\mu}(\Delta) = \mu(\Delta)$ при $\Delta \in \mathfrak{R}$. Хорошо известна процедура построения $\widetilde{\mathfrak{R}}$: в качестве этого кольца нужно взять совокупность всех измеримых относительно меры μ множеств, а в качестве $\tilde{\mu}$ — внешнюю меру, построенную по μ (на измеримых множествах она будет абсолютно аддитивна).

Ниже мы будем рассматривать меры, заданные на некотором замкнутом кольце $\mathfrak{R}$ множеств пространства Q. Условимся в дальнейшем рассматривать только такие меры μ, для которых имеется общая последовательность множеств $Q_1, Q_2, \ldots$, фигурирующих в определении локальной конечности.

Напомним понятие обобщенной меры. Пусть на $\mathfrak{R}$ заданы две меры μ_1 и μ_2, функция множеств $\omega(\Delta) = \mu_1(\Delta) - \mu_2(\Delta)$, где $\Delta \in \mathfrak{R}$ входит в некоторое Q_j $(j = 1, 2, \ldots)$, носит название вещественной обобщенной меры. Ее вариацией на множестве Δ называется следующее число:

$$\operatorname*{Var}_{\Delta} \omega = \sup \sum_{j=1}^{n} |\omega(\Delta_j)|, \tag{1}$$

где sup распространяется на всевозможные непересекающиеся $\Delta_j \in \mathfrak{R}$

такие, что $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \Delta_j \subseteq \Delta$. Можно показать, что $\nu(\Delta) = \operatorname*{Var}\limits_{\Delta} \omega$ после естественного продолжения на все $\mathfrak{R}$ $(\nu(\Delta) = \lim\limits_{j\to\infty} \nu(\Delta \cap Q_j),\ \ \Delta \in \mathfrak{R})$ будет локально конечной обычной мерой, причем $\nu(\Delta) = \operatorname*{Var}\limits_{\Delta} \omega \leqslant \leqslant \mu_1(\Delta) + \mu_2(\Delta)$ $(\Delta \in \mathfrak{R})$. Если ω_1 и ω_2 — две обобщенные вещественные меры, то обобщенной (комплекснозначной) мерой называется функция множеств $\omega(\Delta) = \omega_1(\Delta) + i\omega_2(\Delta)$. Аналогично (1) вводится понятие вариации обобщенной меры ω.

В дальнейшем важную роль будет играть теорема Радона—Никодима. Напомним ее формулировку.

Пусть на замкнутом кольце $\mathfrak{R}$ задана, вообще говоря, обобщенная мера ω и обычная мера μ. Мера ω называется абсолютно непрерывной относительно μ, если $\omega(\Delta) = 0$ для каждого такого $\Delta \in \mathfrak{R}$, для которого $\mu(\Delta) = 0$.

Теорема Радона—Никодима звучит так.

Для того чтобы ω была абсолютно непрерывна относительно μ, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление

$$\omega(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \Omega(x)\, d\mu(x) \qquad (\Delta \in \mathfrak{R}), \tag{2}$$

где $\Omega(x)$ — некоторая функция $x \in Q$, суммируемая на каждом Q_j $(j = 1, 2, \ldots)$. Функция $\Omega(x)$ определяется по ω и μ однозначно с точностью до значений на множестве нулевой меры. Имеем также:

$$\operatorname*{Var}\limits_{\Delta} \omega = \int\limits_{\Delta} |\Omega(x)|\, d\mu(x) \qquad (\Delta \in \mathfrak{R}).$$

Как известно по мерам μ' и μ'', заданным на множествах соответственно пространств Q' и Q'', можно определить так называемое произведение мер — меру $\mu'\mu''$, заданную на множествах пространства $Q' \times Q''$ и определяемую на прямоугольниках $E' \times E''$ равенством $\mu'\mu''(E' \times E'') = \mu'(E')\,\mu''(E'')\,(E' \subseteq Q',\ E'' \subseteq Q'')$. Наряду с обозначением $\mu'\mu''$ мы будем употреблять обозначения $d\mu'd\mu''$.

До сих пор мы не предполагали, что Q — топологическое пространство. Теперь предположим это. Тогда возникает вопрос, каким должно быть кольцо $\mathfrak{R}$, чтобы все непрерывные функции на Q оказались измеримыми. Легко понять, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{R}$ содержало замкнутое кольцо всех борелевских множеств из Q, т. е. множеств, которые получаются из открытых и замкнутых множеств пространства Q путем применения не более чем счетное число раз операций объединения и пересечения. Часто говоря о мере, определенной на множествах топологического пространства, считают, что она задана лишь на борелевских множествах и не интересуются ее продолжением на все измеримые множества. Мы часто будем рассматривать функции, измеримые по Борелю, т. е. измеримые относительно кольца всех борелевских множеств. Когда из контекста будет ясно, о какой измеримости идет речь, слова «борелевское», «по Борелю» будут опускаться.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь меры, заданные на борелевских множествах метрического пространства Q, при этом роль множеств Q_j будут играть шары $U_j(x_0)$ с центром в точке x_0 радиуса j.

В случае мер, заданных в обычном n-мерном пространстве E_n, может быть проведена некоторая детализация результатов. Мы лишь отметим следующее. Существует последовательность разбиений всего пространства E_n на полузамкнутые параллелепипеды вида $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)$ $(-\infty < a_j < b_j < \infty;\ j = 1, \ldots, n)$, диаметры которых с увеличением номера разбиения стремятся к нулю, такая, что для функции $\Omega(x)$ из (2) μ-почти для всех x (т. е. для всех $x \in Q$ за исключением, возможно, некоторого множества, мера μ которого равна нулю) справедлива формула

$$\Omega(x) = \lim_{\Delta_\nu \to x} \frac{\omega(\Delta_\nu)}{\mu(\Delta_\nu)}. \tag{3}$$

Здесь Δ_ν — последовательность параллелепипедов разбиения, стягивающаяся к точке $x \in \Delta_\nu$; меры μ и ω заданы во всяком случае на ограниченных борелевских множествах.

Наконец, напомним, что неубывающая функция $f(x)$ одномерной переменной $x \in E_1$ порождает некоторую локально конечную меру, определенную во всяком случае на ограниченных борелевских множествах из E_1. Именно, на полузамкнутом интервале вида $[a, b)$ $(-\infty < a < b < \infty)$ можно положить $\mu_f([a, b)) = f(b) - f(a)$, а затем расширить эту меру на все измеримые множества. Ясно, что и наоборот — всякая локально конечная мера μ, определенная во всяком случае на ограниченных борелевских множествах на оси, может быть получена посредством некоторой $f(x)$: можно положить $f(x) = \mu([0, x))$ при $x > 0$, $f(x) = -\mu([x, 0))$ при $x < 0$ и $f(0) = 0$. Если $f(x)$ $(x \in E_1)$ ограничена, то мера μ_f определена на всех борелевских $\Delta \subseteq E_1$ и конечна. Наоборот, конечной μ отвечает ограниченная $f(x)$.

Подобным же способом устанавливается связь между функциями $f(x)$ $(x \in E_1)$, вариация которых ограничена на каждом конечном интервале оси (т. е. функциями с локально ограниченной вариацией) и обобщенными мерами, определенными во всяком случае на ограниченных борелевских множествах.

Ниже мы не будем различать неубывающие функции на вещественной оси и меры, которые они порождают. Такие функции мы обозначаем $\mu(x)$, а соответствующие меры — $\mu(\Delta)$, μ, $d\mu(x)$, $d\mu$, а иногда просто dx. Эту же договоренность примем и для функций ограниченной вариации.

В дальнейшем говоря о мерах, заданных на множествах вещественной оси, будем под интервалом понимать полузамкнутые интервалы вида $[a, b)$ $(-\infty < a < b < \infty)$ (если противное не оговорено). Иногда таким же образом будем обозначать и бесконечные интервалы вида $(-\infty, b)$ и $[a, +\infty)$.

3. **О линейных нормированных и гильбертовых пространствах.** Как уже говорилось, чтение книги предполагает свободное владение основами функционального анализа в таких пространствах. Поэтому напоминать его положения не имеет смысла — они должны быть хорошо известны. Мы ограничимся лишь тем, что укажем некоторые особенности в определениях и обозначениях.

Под линейным нормированным (банаховым) пространством B всегда понимается (если противное не оговорено) полное комплексное линейное нормированное пространство. Под подпространством такого пространства понимается замкнутое линейное множество. Мы будем рассматривать как линейные непрерывные функционалы в B, так и антилинейные непрерывные функционалы. Антилинейность $l(f)$ обозначает выполнение равенства $l(\lambda f + \mu g) = \bar{\lambda} l(f) + \bar{\mu} l(g)$, где λ, μ — скаляры, а f, $g \in B$. Часто слово «непрерывный» будем опускать. Сопряженное к B пространство, составленное из всех линейных непрерывных функционалов над B, будем обозначать B'. Так же будем обозначать и пространство всех антилинейных непрерывных функционалов; из контекста всегда будет ясно, о каких функционалах идет речь. Каждый линейный оператор A, действующий непрерывно из всего линейного нормированного пространства B_1 в линейное нормированное пространство B_2, порождает сопряженный оператор A^* действующий из B_2' в B_1' и связанный с A равенством: $(A^*l)(f) = l(Af)$ $(f \in B_1,\ l \in B_2')$. Как известно, свойства оператора A влекут соответствующие свойства A^*. Так, $\| A^* \| = \| A \|$, оператор A^* вполне непрерывен если A вполне непрерывен и т. д.

Для единичного оператора будем применять обозначение E, для обратного к A — обозначение A^{-1}. При этом говорим, что непрерывный или нет линейный оператор A, действующий в B, имеет обратный A^{-1}, если область значений A совпадает со всем пространством B, оператор A^{-1} определен во всем B, непрерывен и удовлетворяет равенству $A^{-1}Ax = x$ для каждого x из области определения A. Отсюда следует, что и $AA^{-1}y = y$ $(y \in B)$.

Условимся еще о некоторых обозначениях. Норму в пространстве B будем обычно снабжать соответствующим индексом: $\|\cdot\|_B$. Индекс опускается в случае, когда это не будет приводить к недоразумениям. Индексы у нормы операторов обычно писаться не будут. Под непрерывным или ограниченным оператором, если не оговаривается противное, понимается непрерывный оператор, определенный во всем пространстве. Область определения и область значения оператора A всегда будем обозначать, соответственно, $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{R}(A)$ (см. стр. 14). Если оператор C является расширением оператора A, мы пишем: $C \supseteq A$ или $A \subseteq C$ (т. е. $\mathfrak{D}(C) \supseteq \mathfrak{D}(A)$ и $Cf = Af$ для $f \in \mathfrak{D}(A)$). Если оператор A действует на функции или последовательности по переменному x, то это обозначается A_x.

Замыкание оператора A обычно будем обозначать $\bar{A}$; если $\bar{A} = A$, то A называется замкнутым. Напомним, что если оператор A действует из пространства B_1 в пространство B_2 и имеет область определения $\mathfrak{D}(A)$, то под замыканием $\bar{A}$ понимается расширение оператора A, получаемое следующим образом: $f \in \mathfrak{D}(\bar{A})$ тогда и только тогда, когда найдется последовательность $f_n \in \mathfrak{D}(A)$ такая, что $f_n \to f$ (в B_1) и Af_n фундаментальна в B_2. Пусть $g = \lim Af_n$, тогда полагают $\bar{A}f = g$. Для корректности этого определения нужно требовать, чтобы предельный элемент g не зависел от выбора последовательности f_n, аппроксимирующей f. Иными словами, необходимо выполнение следующего условия: если последовательность $h_n \in \mathfrak{D}(A)$ такова, что в B_1 $h_n \to 0$ и в B_2 $Ah_n \to u$, то $u = 0$. Операторы, обладающие этим свойством, называются операторами, допускающими замыкание. Ясно, что $\mathfrak{D}(\bar{A})$ можно получить из $\mathfrak{D}(A)$, пополняя последнюю относительно новой нормы: $\|f\| = \|f\|_{B_1} + \|Af\|_{B_2}$ ($f \in \mathfrak{D}(A)$).

Частным случаем операции замыкания является так называемое замыкание по непрерывности. Предположим, что оператор A действует непрерывно из B_1 в B_2, причем он определен на некоторой области определения $\mathfrak{D}(A)$. Тогда процедура замыкания выглядит проще — достаточно лишь требовать, чтобы $f_n \to f$, так как фундаментальность Af_n вытекает автоматически из непрерывности A. Ясно, что A допускает замыкание, причем $\bar{A}$ является непрерывным оператором из B_1 в B_2 с областью определения $\mathfrak{D}(\bar{A}) = \overline{\mathfrak{D}(A)}$.

Перейдем к рассмотрению гильбертова пространства H. Под таким пространством всегда понимаем (если противное не оговаривается) полное комплексное гильбертово пространство (неполное называют унитарным). У нас будут встречаться только сепарабельные H. Скалярное произведение и норму в H обозначаем $(\cdot\,,\cdot)_H$ и $\|\cdot\|_H$, эти индексы опускаются, если нет опасности путаницы. Нам довольно часто придется рассматривать так называемое квазигильбертово пространство — линейное пространство F, в котором введено квазискалярное произведение — билинейная форма $(f, g)_F$ $(f, g \in F)$, обладающая всеми свойствами скалярного произведения за исключением того, что равенство $(f, f)_F = 0$ может выполняться на отличных от нуля векторах f. Для превращения F в гильбертово пространство, как известно, нужно поступить следующим образом: совокупность всех $f \in F$, для которых $(f, f)_F = 0$, образует линейное множество G, так как для квазискалярного произведения справедливо неравенство Коши — Буняковского $|(f, g)_F|^2 \leqslant (f, f)_F\ (g, g)_F$ $(f, g \in F)$; следует рассмотреть фактор-пространство F/G, составленное из классов смежности по G, ввести для этих классов по $(\cdot, \cdot)_F$ скалярное произведение и затем произвести пополнение. В результате получим гильбертово пространство.

Ортогональное разложение H в сумму подпространств $H_1, H_2, \ldots$ обозначим $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots = \oplus \sum_j H_j$, а прямое разложение H в сумму H_1 и H_2 — $H = H_1 \dot{+} H_2$. Наряду с операторами ортогонального проектирования (ортогональными проекторами) иногда будем пользоваться операторами косого проектирования: если $H = H_1 \dot{+} H_2$, то $f = f_1 + f_2$ $(f \in H,\ f_1 \in H_1,\ f_2 \in H_2)$, оператор перехода от f к f_1 будет оператором косого проектирования на H_1.

Относительно операторов в H сохраняется, конечно, все сказанное об операторах в общем линейном нормированном пространстве. Сделаем еще некоторые дополнительные замечания. Так, при рассмотрении операторов, сопряженных к ограниченным операторам, нужно учитывать, что $H' = H$. Далее, как известно, сопряженный оператор A^* определяется и для неограниченного действующего в H A со всюду плотной областью определения: нужно рассмотреть все те $g \in H$, для каждого из которых найдется $g^* \in H$ такое, что $(Af, g) = (f, g^*)$ $(f \in \mathfrak{D}(A))$. Эти g составляют $\mathfrak{D}(A^*)$, при этом полагаем $A^* g = g^*$. Если A допускает замыкание, то существует $A^{**} = (A^*)^* = \tilde{A}$. В книге существенную роль играют самосопряженные операторы, т. е. такие операторы A в H, что $A^* = A$. Для этих операторов имеет место спектральная теорема в следующей форме:

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda f \quad (f \in \mathfrak{D}(A)), \qquad f = \int_{-\infty}^{\infty} dE_\lambda f \quad (f \in H), \tag{4}$$

где E_λ — разложение единицы, отвечающее A. В простейшем случае дискретного спектра $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $E_\lambda = \sum_{\lambda_j < \lambda} P_{\lambda_j}$, где P_{λ_j} — ортогональный проектор на собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_j. В общем случае E_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ обозначает некоторое семейство ортогональных проекторов, возрастающих от 0 к E при λ, изменяющемся от $-\infty$ до $+\infty$, и обладающих хорошо известными свойствами.

Оператор A в H называется эрмитовым, если $(Af, g) = (f, Ag)$ для любых $f, g \in \mathfrak{D}(A)$. Понятно, что всякий самосопряженный оператор эрмитов, однако обратное не всегда имеет место. Вопрос о том, будет ли данный эрмитов оператор A самосопряженным, связан с характером его дефектных чисел. Напомним, что дефектным числом эрмитова оператора A, отвечающим верхней полуплоскости, называется размерность ортогонального дополнения N_z к линейному множеству $\mathfrak{R}(A - zE)$ ($\operatorname{Im} z > 0$; если A дополнительно замкнут, то $\mathfrak{R}(A - zE)$ замкнуто, т. е. подпространство). Эта размерность не зависит от z, $\operatorname{Im} z > 0$. Аналогично определяется дефектное число, отвечающее нижней полуплоскости: нужно рассматривать z, $\operatorname{Im} z < 0$. Как известно, оператор A самосопряжен в том и только том случае, когда оба его дефектных числа равны нулю. Эрмитов оператор допускает самосопряженное расширение в H тогда и только тогда, когда его дефектные числа равны; для каждого из таких расширений справедливы равенства (4). Если одно из дефектных чисел равно нулю, то такой оператор не допускает даже эрмитовых расширений в H и называется максимальным. В любом случае A все же можно расширить до самосопряженного оператора, если выйти из H в более широкое гильбертово пространство $\tilde{H}$. Пусть $\tilde{E}_\lambda$ — разложение единицы в $\tilde{H}$, отвечающее такому расширению A, а P — ортогональный проектор, проектирующий $\tilde{H}$ на H. Тогда семейство операторов $E_\lambda = P\tilde{E}_\lambda P$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ в H носит название обобщенного разложения единицы. Заметим, что вместо обычного или обобщенного разложения единицы E_λ мы часто будем говорить об операторной мере $E(\Delta)$, отвечающей E_λ (Δ — произвольное борелевское множество на оси). В простейшем случае $\Delta = [a, b)$ $E(\Delta) = E([a, b)) = E_b - E_a$.

Не будем напоминать остальные факты, связанные с построением разложения единицы и обобщенного разложения единицы для эрмитова оператора A, с построением и описанием всех его самосопряженных расширений и т. д., хотя все эти факты будут необходимы для понимания V — VIII глав. Читатель, незнакомый с этой теорией, должен обратиться к соответствующим источникам. Мы также не напоминаем определения и свойства других классов операторов в H, которые дальше будут встречаться (изометрические, унитарные и нормальные операторы). Сделаем еще несколько замечаний.

Ортогональное дополнение N_z к $\mathfrak{R}(A - zE)$, где A—эрмитов оператор, носит название дефектного подпространства, отвечающего числу $z(\operatorname{Im} z \neq 0)$. Его можно охарактеризовать иначе как собственное подпространство оператора A^*, отвечающее собственному значению $\bar{z}$. Как уже напоминалось, важную роль играет вопрос о том, будут ли дефектные числа у A одинаковы или нет, т. е. будут ли размерности подпространств N_z и $N_{\bar{z}}$ совпадать или нет. В связи с этим полезна следующая конструкция. Говорят, что в H введена инволюция, если для каждого $f \in H$ определен вектор $\bar{f} \in H$ (сопряженный к f вектор), причем оператор $f \to \bar{f}$ обладает следующими свойствами: $\overline{(\lambda f + \mu g)} = \bar{\lambda} \bar{f} + \bar{\mu} \bar{g}$, $\bar{\bar{f}} = f$, $\overline{(f, g)} = (\bar{f}, \bar{g})$ $(f, g \in H)$. Оператор A называется вещественным относительно инволюции $f \to \bar{f}$, если его область определения $\mathfrak{D}(A)$ инвариантна относительно нее и $A\bar{f} = \overline{Af}$ $(f \in \mathfrak{D}(A))$. Нетрудно проверить, что если эрмитов оператор A вещественен относительно некоторой инволюции, то он имеет равные дефектные числа.

Наконец, условимся о некотором операторе A в H говорить, что он положителен, если $(Af, f) \geqslant \varepsilon (f, f)$ $(\varepsilon > 0,\ f \in H)$ и $\mathfrak{R}(A) = H$. В этом случае существует A^{-1}. Если только известно, что $(Af, f) \geqslant 0$ $(f \in H)$, то A будем называть неотрицательным и пишем $A \geqslant 0$.

В заключение заметим, что изредка мы будем использовать некоторые сведения о линейных топологических пространствах. Соответствующие ссылки на литературу будут даваться по ходу изложения.

4. Классы функций. Функциональные пространства. Приведем ряд определений, которые будут фигурировать в дальнейшем.

Напомним, что E_n обозначает эвклидово вещественное n-мерное пространство. Для скалярного произведения и длины вектора (нормы) в E_n будем употреблять всюду, за исключением гл. VIII, обозначения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $|\cdot|$. Комплексное n-мерное пространство, т. е. пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — комплексные числа, будем обозначать C_n. По-прежнему $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $|\cdot|$ — скалярное произведение и норма в $C_n : \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$, $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $(x, y \in C_n)$.

Введем обозначения для производных, употребляемые в книге. Для достаточно гладкой функции $u(x)$ $(x \in E_n)$ положим

$$(D^\alpha u)(x) = (D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} u)(x), \qquad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — вектор с целочисленными неотрицательными координатами. Порядок производной D^α обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Иногда будет более удобно вместо производных (5) пользоваться производными

$$(\partial^\alpha u)(x) = (\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} u)(x), \quad \partial_j = \frac{1}{i} D_j \, (j = 1, \ldots, n; \ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)). \tag{6}$$

Для дифференцирования по направлению орта e употребляем обычное обозначение: $\dfrac{\partial}{\partial e}$.

Пусть $G \subseteq E_n$ — некоторая область (ограниченная или нет), имеющая кусочно-гладкую границу Γ. Через $C^l(G)$ $(l = 0, 1, \ldots)$ будем обозначать совокупность всех комплекснозначных функций $u(x)$ $(x \in G)$, имеющих l непрерывных в G производных; аналогично $C^\infty(G)$ обозначает совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций в G. Ясно, что $C^l(G)$ $(l = 0, 1, \ldots, \infty)$ — линейные классы. Индекс $l = 0$ здесь и ниже обычно будет опускаться.

Через $C^l(G \cup \Gamma)$ $(l = 0, 1, \ldots, \infty)$ будем обозначать совокупность функций $u(x)$ $(x \in G \cup \Gamma)$, l раз непрерывно дифференцируемых вплоть до границы Γ, т. е. в $G \cup \Gamma$. Иными словами, $C^l(G \cup \Gamma)$ совпадает со значениями на $G \cup \Gamma$ функций класса $C^l(E_n)$. Класс $C^l(G \cup \Gamma)$ при $l < \infty$ и ограниченной G является полным нормированным пространством, если в него ввести обычным способом норму: $\| u \|_{C^l(G)} = \max\limits_{\substack{x \in G \cup \Gamma, \\ |\alpha| \leqslant l}} |(D^\alpha u)(x)|$. Легко показать, что в таком пространстве $C^l(G \cup \Gamma)$ будет плотным класс $C^\infty(G \cup \Gamma)$: $C^l(G \cup \Gamma) = \overline{C^\infty(G \cup \Gamma)}$.

Отметим еще некоторые классы функций, являющиеся частями класса $C^l(G)$. Пусть γ — некоторый кусок на Γ, тогда $C^l(G \cup \gamma)$ обозначает совокупность функций $u(x)$ $(x \in G \cup \gamma)$, l раз непрерывно дифференцируемых в G вплоть до куска γ, т. е. в $G \cup \gamma$.

Рассмотрим функцию $u(x)$, аннулирующуюся в некоторой «полоске вблизи границы Γ» (т. е. аннулирующуюся при $\varrho(x, \Gamma) < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое) и, если G неограничена, в некоторой окрестности ∞ (т. е. при $|x| \geqslant R$, где $R > 0$ достаточно большое). Такая функция, как известно, называется финитной относительно G и ∞. Совокупность всех финитных относительно G и ∞ функций из $C^l(G)$ $(l = 0, 1, \ldots, \infty)$ будем обозначать $C_0^l(G)$ (ε и R для каждой функции $u \in C_0^l(G)$ свои). Аналогичный смысл имеет добавление индекса «0» и в обозначениях других классов функций на G. Мы также будем пользоваться термином «финитная на ∞ функция». Такой функцией будет называться функция $u(x)$, $x \in G$ (G — неограничена), аннулирующаяся при $|x| \geqslant R$, где $R > 0$ достаточно большое. Иначе этот факт для финитных на ∞ функций из $C^l(G)$ мы будем еще выражать так: u входит в $C^l(G) \cap C_0(E_n)$*.

Пусть Q — локально компактное сепарабельное пространство, $d\mu(x)$ — некоторая мера, заданная на его борелевских множествах. Обычным образом строится гильбертово пространство $L_2(Q, d\mu(x))$ комплекснозначных функций, суммируемых с квадратом относительно $d\mu(x)$:

$$\|f\|^2_{L_2(Q,d\mu(x))} = \int_Q |f(x)|^2 d\mu(x), \qquad (f, g)_{L_2(Q,d\mu(x))} = \int_G f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

Об измеримой по Борелю функции $f(x)$ $(x \in Q)$ будем говорить, что она локально суммируема с квадратом, если интеграл $\int_{U_r(a)} |f(x)|^2 d\mu(x)$, распространенный по любому шару $U_r(a) \subset Q$, существует.

В случае, когда Q совпадает с областью $G \subseteq E_n$, а $d\mu(x)$ — с обычной лебеговой мерой, пространство $L_2(Q, d\mu(x))$ будем обозначать $L_2(G)$. Если $\mu(\Delta) = \int_\Delta m(x)\,dx$, где dx — лебегова мера, то пространство обозначается $L_2(G, m(x)\,dx)$ («пространство с весом $m(x)$»).

Будем говорить о функции $f(x)$ $(x \in G)$, что она суммируема с квадратом внутри G (или входит в L_2 внутри G), если она суммируема с квадратом в каждой ограниченной области, расположенной строго внутри G. Иными словами, это прежнее определение локальной суммируемости с квадратом применительно к пространству $Q = G$. Класс всевозможных функций $f(x)$ описанного вида будем обозначать $L_{2,\text{лок}}(G)$.

Пусть γ — некоторый кусок на Γ. Будем рассматривать всевозможные ограниченные подобласти $G' \subseteq G$, имеющие общую с Γ границу лишь строго внутри куска γ. Если $f(x)$ $(x \in G)$ такова, что $f(x) \in L_2(G')$ $(x \in G')$ при любой G', то о такой $f(x)$ будем говорить, что она входит в L_2 внутри G вплоть до γ. Класс таких функций обозначаем $L_{2,\text{лок}}(G, \gamma)$.

Все сказанное сейчас относительно суммируемых с квадратом функций можно повторить для суммируемых с p-ой степенью функций $(p \geqslant 1)$. При этом, конечно, такие функции будут образовывать полное нормированное пространство $L_p(Q, d\mu(x))$ относительно нормы

$$\|f\|_{L_p(Q,d\mu(x))} = \left(\int_Q |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Понятны обозначения: $L_p(G)$, $L_{p,\text{лок}}(G)$, $L_{p,\text{лок}}(G, \gamma)$.

---

* Подобные не вполне строгие «пересечения», а также «включения» типа $C(E_n) \subset C(G)$ мы иногда будем употреблять и в дальнейшем. Их смысл будет поясняться или следовать из контекста.

Частным случаем гильбертова пространства $L_2(Q, d\mu(x))$ являются пространства последовательностей $l_2([0, \infty), m_j)$, где $m_j > 0$ ($j = 0, 1, \ldots$) — заданная весовая последовательность. Элементами пространства $l_2([0, \infty), m_j)$ служат последовательности $(f_0, f_1, \ldots)$ комплексных чисел, причем

$$\| f \|^2_{l_2([0,\infty), m_j)} = \sum_{j=0}^{\infty} | f_j |^2 m_j, \qquad (f, g)_{l_2([0,\infty), m_j)} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \bar{g}_j m_j.$$

Если $m_j = 1$ ($j = 0, 1, \ldots$), то рассматриваемое пространство обозначаем $l_2([0, \infty))$. Аналогичные пространства вводятся и для случая, когда j пробегает другое бесконечное дискретное множество. Понятны также обозначения типа $l_p([0, \infty), m_j)$.

Отметим еще, что для характеристической функции множества A мы всегда будем применять обозначение $\varkappa_A(x)$. Под носителем функции $f(x)$ ($x \in Q$) понимается совокупность всех x, где $f(x) \neq 0$. Для произвольного топологического пространства Q совокупность всех непрерывных комплекснозначных функций обозначается, естественно, через $C(Q)$.

5. Понятие соболевского пространства. Введем пространства С. Л. Соболева, которые будут систематически использоваться почти во всех дальнейших главах. Пусть G — ограниченная область n-мерного пространства E_n с один раз кусочно непрерывно дифференцируемой границей Γ*. Рассмотрим на функциях $u \in C^l(G \cup \Gamma)$ ($l = 0, 1, \ldots$) норму

$$\| u \|_{W_p^l(G)} = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \| D^\alpha u \|_{L_p(G)} \qquad (p > 1). \tag{7}$$

Пополнение $C^l(G \cup \Gamma)$ по этой норме называют соболевским пространством $W_p^l(G)$. Так как $\| u \|_{L_p(G)} \leqslant \| u \|_{W_p^l(G)}$ ($u \in C^l(G \cup \Gamma)$), то это пополнение будет состоять во всяком случае из функций пространства $L_p(G)$. Позже мы увидим, что при $l > 0$ функции из $W_p^l(G)$ будут обладать дополнительными свойствами гладкости. При $l = 0$ ясно, что $W_p^l(G) = W_p^0(G) = L_p(G)$.

Норму в $W_p^l(G)$ часто вместо (7) удобно вводить следующим образом:

$$\| u \|_{W_p^l(G)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \| D^\alpha u \|^p_{L_p(G)} \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int_G | (D^\alpha u)(x) |^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{8}$$

* Мы для простоты это ограничение ослаблять не будем.

Конечно, выражения в (7) и (8) различны и эти нормы, в силу неравенства $N^{p-1}(a_1 + \ldots + a_N) \leqslant (a_1^p + \ldots + a_N^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant a_1 + \ldots + a_N$ $(a_1, \ldots, a_N \geqslant 0)$, будут лишь эквивалентны, однако мы сохраняем одно и то же обозначение $\|\cdot\|_{W_p^l(G)}$ для обеих норм (7) и (8). Более того, нормам (7) и (8) эквивалентна норма

$$\|u\|_{W_p^l(G)} = \left(\|u\|^p_{L_p(G)} + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(G)}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{9}$$

(поясним это позже, см. п. 7). Одинаковые обозначения для эквивалентных норм (7) — (9) в дальнейшем не будут приводить к путанице.

Итак, $W_p^l(G)$ $(l = 0, 1, \ldots, p > 1)$ является полным линейным нормированным пространством. Мы почти исключительно будем пользоваться пространствами $W_2^l(G)$ $(l = 0, 1, \ldots)$, которые являются гильбертовыми. Скалярное произведение в $W_2^l(G)$ можно вводить одним из двух эквивалентных способов:

$$(u, v)_{W_2^l(G)} = \sum_{|\alpha| \leqslant l} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(G)} = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \int_G (D^\alpha u)(x)\overline{(D^\alpha v)(x)}dx, \tag{10}$$

$$(u, v)_{W_2^l(G)} = (u, v)_{L_2(G)} + \sum_{|\alpha|=l} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(G)} = \tag{11}$$

$$= \int_G u(x)\overline{v(x)}dx + \sum_{|\alpha|=l} \int_G (D^\alpha u)(x)\overline{(D^\alpha v)(x)}\,dx.$$

Для скалярного произведения и нормы в $W_2^l(G)$ мы обычно будем использовать обозначения $(\cdot, \cdot)_l$ и $\|\cdot\|_l$ $(l = 0, 1, \ldots)$.

Наконец заметим, что справедливо неравенство $\|u\|_{W_p^l(G)} \leqslant C\|u\|_{C^l(G \cup \Gamma)}$ $(C > 0;\ u \in C^l(G \cup \Gamma))$, из которого, в частности, вытекает плотность $C^\infty(G \cup \Gamma)$ в $W_p^l(G)$ $(l = 0, 1, \ldots; p > 1)$.

6. **Понятие о теоремах вложения.** Применение соболевских пространств $W_p^l(G)$ в теории краевых задач и в смежных вопросах было обусловлено тем замечательным обстоятельством, что функции из таких пространств, в отличие от пространства $L_2(G)$, при l достаточно большом имеют смысл на многообразиях меньших, чем n размерностей и вместе с тем $W_2^l(G)$ (в отличие от $C^l(G \cup \Gamma)$) является гильбертовым пространством. Сейчас мы изложим основные относящиеся сюда результаты, предварительно пояснив природу возникающей ситуации на простейшем примере.

Пусть $n = 1$, G — конечный интервал $(a. b)$. Зафиксируем $x \in (a, b)$, тогда для любой $\xi \in (a, b)$ имеем

$$u(x) = u(\xi) - \int_x^\xi u'(t)\,dt \quad (u \in C^1([a, b])). \tag{12}$$

Интегрируя это выражение по ξ в пределах от x до b, получим:

$$(b - x)\,u(x) = \int_x^b u(\xi)\,d\xi - \int_x^b \left(\int_x^\xi u'(t)\,dt\right) d\xi = \int_x^b u(\xi)\,d\xi + {}$$

$$+ \int_x^b (t - b)\,u'(t)\,dt. \tag{13}$$

Аналогично проинтегрировав (12) по ξ от a до x, сложив результат с (13) и разделив на $b - a$, найдем:

$$u(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(\xi)\,d\xi + \frac{1}{b-a}\int_a^b B(x, \xi)\,u'(\xi)\,d\xi \quad (x \in (a, b)), \tag{14}$$

где $B(x, \xi)$ — некоторое ограниченное ядро, конструирующееся как сумма двух ядер типа $B_1(x, \xi) = \varkappa_{(x,b)}(\xi)\ (\xi - b)$.

Из (14) при помощи неравенства Гельдера заключаем, что

$$\| u \|_{C([a,b])} \leqslant C \| u \|_{W_p^1((a,b))} \quad (u \in C^1([a, b])). \tag{15}$$

Таким образом, если последовательность $u_n(x)$ фундаментальна в метрике $W_p^1((a, b))$, то она будет фундаментальной и в метрике $C([a, b])$ и поэтому предельная функция будет расположена в $C([a, b])$. Иными словами мы получаем включение: $W_p^1((a, b)) \subset C([a, b])$.

Подобное положение имеет место и в случае n измерений, однако теперь в представлении типа (14) ядро $B(x, \xi)$ будет иметь степенную особенность при $|x - \xi| \to 0$ и вместо оценки (15) придется писать более слабые неравенства часто с заменой $\|\cdot\|_{C([a,b])}$ нормами типа $\|\cdot\|_{L_q(D)}$, где $D \subseteq G$ — многообразие той или иной размерности. Это приводит к следующим результатам, носящим название теорем вложения.

Рассмотрим в ограниченной области $G \subset E_n$ с один раз кусочно непрерывно дифференцируемой границей Γ пространство $W_p^l(G)$ $(l = 0, 1, \ldots;\ p > 1)$. Тогда

1) *Предположим, что $k = 0, 1, \ldots$ таково, что*

$$0 \leqslant k < l - \frac{n}{p}. \tag{16}$$

Утверждается, что $W_p^l(G) \subset C^k(G \cup \Gamma)$, *причем оператор O вложения пространства* $W_p^l(G)$ *в пространство* $C^k(G \cup \Gamma)$ *непрерывен (т. е. непрерывен оператор, относящий каждой* $u \in W_p^l(G)$ *эту же u, но понимаемую как элемент из* $C^k(G \cup \Gamma)$).

2) *Предположим, что выполнено противоположное к (16) неравенство*

$$k \geqslant l - \frac{n}{p}. \tag{17}$$

Пусть $m = 0, 1, \ldots$ *и вещественное q таковы, что*

$$m > n - (l - k)p, \quad 1 < q < \frac{mp}{n - (l - k)p}; \tag{18}$$

$D \subseteq G \cup \Gamma$ — *любое l раз непрерывно дифференцируемое многообразие размерности m. Тогда для каждой* $u \in W_p^l(G)$ *производная* $(D^\alpha u)(x) \in L_q(D)$ $(x \in D)$, *где* $|\alpha| \leqslant k$, *причем имеет место «непрерывность оператора вложения»:* $\| D^\alpha u \|_{L_q(D)} \leqslant C \| u \|_{W_p^l(G)}$ $(C > 0;$ $u \in W_p^l(G))$. *При сдвиге многообразия D элемент* $D^\alpha u$ *непрерывно зависит от величины сдвига, это можно записать так:*

$$\| (D^\alpha u)(\cdot + \delta) - (D^\alpha u)(\cdot) \|_{L_q(D)} \to 0 \text{ при } \delta \to 0 \ (|\alpha| \leqslant k).$$

Более того, оказывается, что в 1) и 2) оператор не только непрерывен, но и вполне непрерывен. В случае 2) под этим нужно понимать то обстоятельство, что из ограниченной в $W_p^l(G)$ *последовательности функций* $u_n \in W_p^l(G)$ *можно выделить подпоследовательность* u_{n_ν}, *для которой* $(D^\alpha u_{n_\nu})(x)$ $(x \in D)$ *при любом* α, $|\alpha| \leqslant k$, *сходится в пространстве* $L_q(D)$.

Заметим, что можно было бы ввести соболевское пространство $W_q^k(D)$ функций, определенных на многообразии D (для этого нужно многообразие «выпрямить» посредством замены переменных). Тогда из 2), в частности, вытекало бы «включение» $W_p^l(G) \subset W_q^k(D)$, причем оператор O вложения $W_p^l(G)$ в $W_q^k(D)$ был бы непрерывным и даже вполне непрерывным.

Поясним полную непрерывность оператора вложения на рассматривавшемся примере пространства $W_p^1((a, b))$. Сейчас нужно установить полную непрерывность оператора вложения $W_p^1((a, b)) \to C([a, b])$ или, иными словами, доказать, что множество функций $u \in W_p^1((a, b))$ таких, что $\| u \|_{W_p^1((a,b))} \leqslant 1$, предкомпактно в $C([a, b])$. Согласно теореме Арцела, следует доказать ограниченность этого множества в

$C([a, b])$ и его равностепенную непрерывность. Ограниченность следует из оценки (15), а равностепенная непрерывность — из (12): при $x', x'' \in [a, b]$

$$|u(x') - u(x'')| = \left| \int\limits_{x'}^{x''} u'(t)\,dt \right| \leqslant |x' - x''|^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{x'}^{x''} |u'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant |x' - x''|^{\frac{1}{p'}} \| u \|_{W_p^1((a,b))} \leqslant |x' - x''|^{\frac{1}{p'}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right).$$

Подчеркнем, что из теорем вложения вытекает: гладкость функции $u(x) \in W_p^l(G)$ увеличивается с увеличением l, p и уменьшением n. Далее, для каждой $u \in W_p^l(G)$ при $l > 0$ существует значение $(D^\alpha u)(x)$ с $|\alpha| \leqslant l - 1$ для x, меняющихся по поверхности S размерности $n - 1$, расположенной в $G \cup \Gamma$. Более того, соответствующие нормы $(D^\alpha u)(x)$, понимаемой как функция на S, оцениваются через норму $\| u \|_{W_p^l(G)}$.

7. Некоторые неравенства относительно соболевских норм и пространства $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$. Прежде всего приведем так называемое неравенство Эрлинга—Ниренберга. Оно связывает нормы пространств $W_p^k(G)$, $W_p^l(G)$, $W_p^s(G)$, где $0 \leqslant k \leqslant l < s$, и выглядит следующим образом.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $K(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\| u \|_{W_p^l(G)} \leqslant \varepsilon \| u \|_{W_p^s(G)} + K(\varepsilon) \| u \|_{W_p^k(G)} \quad (u \in W_p^s(G))^*. \tag{19}$$

Поясним неравенство Эрлинга—Ниренберга на простейшем примере пространств $W_2^0((a, b)) = L_2((a, b))$, $W_2^1((a, b))$ и $W_2^2((a, b))$. Достаточно рассмотреть функцию $u \in C^2([a, b])$, $(D^2 u)(x) \not\equiv 0$. Зафиксируем $\delta_0 > 0$ и продолжим $u(x)$ на $[a, b + \delta_0]$ таким образом, чтобы $u \in C^2([a, b + \delta_0])$ и

$$\int\limits_{b}^{b+\delta_0} |(D^\alpha u)(x)|^2 dx \leqslant \int\limits_{a}^{b} |(D^\alpha u)(x)|^2 dx \quad (\alpha = 0, 1, 2). \tag{20}$$

Запишем соотношение (12), заменив $u(x)$ на $u'(x)$:

$$u'(x) = u'(\xi) - \int\limits_{x}^{\xi} u''(t)\,dt \quad (x, \xi \in (a, b)).$$

---

* Мы часто будем использовать эквивалентную форму этого неравенства, в котором нормы $\|u\|_\bullet$ заменены их квадратами $\|u\|_\bullet^2$.

Проинтегрируем это равенство по ξ в пределах от x до $x+\delta$, где $\delta < \delta_0$. Получим

$$\delta u'(x) = u(x+\delta) - u(x) - \int_x^{x+\delta}\left(\int_x^{\xi} u''(t)\,dt\right)d\xi = u(x+\delta) - u(x) - \\ - \int_x^{x+\delta}(x+\delta-t)\,u''(t)\,dt. \tag{21}$$

Далее имеем

$$\left|\int_x^{x+\delta}(x+\delta-t)\,u''(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int_x^{x+\delta}(x+\delta-t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\|u''\|_{L_2((a,b+\delta_0))} \leqslant \\ \leqslant \frac{\delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}\|u\|_{W_2^2((a,b))} \quad (x\in(a,\ b)). \tag{22}$$

Оценим теперь норму $\|\cdot\|_{L_2((a,b))}$ функции $u'(x)$, пользуясь (21), (22) и (20):

$$\delta\|u'\|_{L_2((a,b))} \leqslant \|u(\cdot+\delta)\|_{L_2((a,b))} + \|u\|_{L_2((a,b))} + C_1\,\delta^{\frac{3}{2}}\|u\|_{W_2^2((a,b))} \leqslant \\ \leqslant C_2\|u\|_{L_2((a,b))} + C_1\,\delta^{\frac{3}{2}}\|u\|_{W_2^2((a,b))}.$$

Разделив на δ, получим неравенство

$$\|u'\|_{L_2((a,b))} \leqslant C_1\delta^{\frac{1}{2}}\|u\|_{W_2^2((a,b))} + \frac{C_2}{\delta}\|u\|_{L_2((a,b))},$$

откуда и следует (19) в рассматриваемом частном случае (при более точной оценке выше $\delta^{\frac{1}{2}}$ можно заменить на δ).

Заметим, что проведенное сейчас рассуждение, в частности, поясняет и эквивалентность норм (9) и (7): мы можем оценить $\|D^{\alpha}u\|_{L_p(G)}$ при $0 < |\alpha| < l$ через подобные нормы при $\alpha = 0$ и $|\alpha| = l$.

Введем пространство $\mathring{W}_p^l(G)$ $(l = 0,\ 1,\ \ldots;\ p > 1)$. Оно определяется как подпространство пространства $W_p^l(G)$, полученное замыканием в $W_p^l(G)$ линейного множества $C_0^{\infty}(G) \subset W_p^l(G)$. Ясно, что можно было бы замыкать вместо $C_0^{\infty}(G)$ совокупность всех финитных относительно G функций из $W_p^l(G)$ (ее обозначают $W_{p,0}^l(G)$). Оказывается что $\mathring{W}_p^l(G)$ *при* $l = 1,\ 2,\ \ldots$ *совпадает с совокупностью всех* *функций* $u(x)\in W_p^l(G)$, *для которых* $(D^\alpha u)(x)=0$ $(x\in\Gamma)$ *при* $|\alpha|\leqslant l-1$ *(мы делаем предположение, что* Γ l *раз кусочно непрерывно дифференцируема).* То, что каждая функция $u(x)\in \mathring{W}_p^l(G)$ обладает указанным свойством, следует из теорем вложения: для $u_n(x)\in C_0^\infty(G)$ оно очевидно, далее можно написать неравенство типа

$$\| D^\alpha u_n \|_\Gamma \leqslant C \| u_n \|_{W_p^l(G)},$$

где $|\alpha|\leqslant l-1$, а $\|\cdot\|_\Gamma$ — норма функций, заданных на Γ, и имеющая вид, следующий из теорем вложения. Если в $W_p^l(G)$ $u_n\to u$, то в силу этого неравенства $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$. Поэтому $(D^\alpha u)(x)=0$ $(x\in\Gamma)$ при $|\alpha|\leqslant l-1$. На доказательстве обратного утверждения мы не останавливаемся.

Нам понадобится следующее неравенство.

Пусть G *— ограниченная область с один раз кусочно непрерывно дифференцируемой границей* Γ, d *— ее диаметр. Тогда при* $0\leqslant k<l$ *справедлива оценка:*

$$\| u \|_{W_p^k(G)} \leqslant d^{l-k} \| u \|_{W_p^l(G)} \quad (u\in \mathring{W}_p^l(G)). \tag{23}$$

Ясно, что достаточно установить частный случай этого неравенства:

$$\| u \|_{L_p(G)} \leqslant d \| u \|_{W_p^1(G)} \quad (u\in \mathring{W}_p^1(G)).$$

Последнее же неравенство вытекает из простой оценки, которую мы проиллюстрируем в одномерном случае.

Пусть $u\in \mathring{W}_p^1((a,b))$, тогда $u(a)=0$ и можно написать

$$u(x)=\int_a^x u'(t)\,dt \quad (x\in(a,b)). \tag{24}$$

Пользуясь неравенством Гельдера, найдем

$$\| u \|^p_{L_p((a,b))} = \int_a^b |u(x)|^p dx = \int_a^b \left| \int_a^x u'(t)\,dt \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b (x-a)^{p-1}\left(\int_a^x |u'(t)|^p dt\right) dx \leqslant \int_a^b (x-a)^{p-1} dx \cdot \int_a^b |u'(t)|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant d^p \| u \|^p_{W_p^1((a,b))},$$

что и требовалось.

Заметим, что из неравенства (23), в частности, следует, что норму на $\overset{\circ}{W}{}^l_p(G)$ можно задавать вместо равенств (7) — (9) равенством

$$\| u \|_{W^l_p(G)} = \left(\sum_{|\alpha|=l} \| D^\alpha u \|^p_{L_p(G)} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (u \in \overset{\circ}{W}{}^l_p(G)). \tag{25}$$

Из этих рассуждений явствует, что соотношение (23), а также (25) справедливо не только для функций $u \in W^l_p(G)$, аннулирующихся вместе со всеми своими производными до порядка $l - 1$ на Γ, но и на функциях, у которых эти производные аннулируются, например, лишь в окрестности (на Γ) некоторой точки границы, которую можно соединить отрезком прямой, не выходящей за пределы G, с любой точкой из G.

8. **Понятие обобщенной функции.** Сейчас мы на время прервем рассмотрение соболевских пространств и напомним понятие простейших обобщенных функций—понятие, введенное С. Л. Соболевым и Л. Шварцем. Пусть $G \subseteq E_n$ — ограниченная или нет область с кусочно гладкой границей Γ. Рассмотрим совокупность финитных относительно G и ∞ функций $C_0^\infty(G)$ и введем для них сходимость, считая что $u_n \to u$, если функции $u_n(x)$ аннулируются вне общего компакта, лежащего внутри G, и при любом α $(D^\alpha u_n)(x) \to (D^\alpha u)(x)$ равномерно по x. Так построенное линейное топологическое пространство обозначают $D(G)$. Антилинейный функционал $l(u) = (l, u)$, непрерывный относительно этой сходимости, называется обобщенной функцией*. Совокупность всех обобщенных функций обозначим $D'(G)$. Примером обобщенной функции может служить обычная локально суммируемая функция $l(x)$ $(x \in G)$; более точно это означает следующее: $l(u)$ задается формулой

$$l(u) = \int_G l(x) \overline{u(x)}\, dx \quad (u \in C_0^\infty(G)).$$

Приведем примеры обобщенных функций, не являющихся обычными: пусть $\xi \in G$ фиксирована, положим $l(u) = \overline{u(\xi)}$, $l(u) = \overline{(D_j u)(\xi)}$ $(u \in D(G))$. Первая из этих обобщенных функций носит название δ-функции, сосредоточенной в точке ξ.

Подчеркнем, что равенство обобщенных функций нужно всегда понимать как равенство функционалов: пусть $l_1, l_2 \in D'(G)$, тогда $l_1 = l_2$ в том и только том случае, когда $l_1(u) = l_2(u)$ $(u \in D(G))$.

Рассмотрим операцию дифференцирования обобщенных функций. Нам удобно рассмотреть более общую операцию — взятие дифференциального выражения от обобщенной функции. С этой

* Иногда мы будем рассматривать и линейные функционалы; в остальном определение обобщенной функции остается прежним.

целью рассмотрим общее линейное дифференциальное выражение порядка $r \geqslant 1$

$$(Lu)(x) = (L(x, D)u)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x), \tag{26}$$

где коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^\infty(G)$. Сопряженным (формально) выражением L^+ к L называется выражение

$$(L^+ v)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha(\overline{a_\alpha} v))(x)$$

(его, конечно, можно записать в виде (26)). Выражение $L+$ связано с L равенством $\int_G Lu \cdot \bar{v} dx = \int_G u \overline{L^+ v} dx$, где $u, v \in C^\infty(G)$, причем хотя бы одна из этих функций финитна относительно G и ∞. Наоборот, последнее равенство однозначно определяет $L+$.

Если l — обобщенная функция, то под Ll будем понимать обобщенную функцию, определяемую следующим образом: $(Ll)(u) = l(L^+ u)$ $(u \in D(G) = C_0^\infty(G))$. Ясно, что если l совпадает с обычной функцией из $C^r(G)$, то

$$(Ll)(u) = l(L^+ u) = \int_G l(x) \overline{(L^+ u)(x)} dx = \int_G (Ll)(x) \overline{u(x)} dx$$

$$(u \in C_0^\infty(G)),$$

т. е. Ll — обычная функция, получаемая применением L к $l(x)$.

Таким образом, в смысле теории обобщенных функций любую такую функцию (в частности, любую локально суммируемую функцию) можно неограниченное число раз дифференцировать. Как известно, справедлив следующий факт о структуре обобщенных функций: каждая $l \in D'(G)$, сосредоточенная на компакте, расположенном внутри G представима в виде $l = \sum_{|\alpha| \leqslant p} D^\alpha f_\alpha$, где f_α — некоторые функции из $C(G)$, а p — некоторое число.

При этом под l, сосредоточенной на $F \subseteq G(\bar{F} = F)$, следует понимать l, обладающую следующим свойством: $l(u) = 0$ для любой $u \in C_0^\infty(G)$, аннулирующейся в окрестности F. Пусть $l \in D'(G)$ задана; пересечение всех F, на которых она сосредоточена, называется носителем l. В частности, если $l = l(x)$ — локально суммируемая функция, то ее носитель совпадает с замыканием множества тех $x \in G$, где $l(x) \neq 0$.

Как известно, можно строить обобщенные функции, беря вместо пространства $C_0^\infty(G) = D(G)$ другое пространство Φ функций на G (это пространство носит название пространства основных функций). Во избежание путаницы обобщенные функции из $D'(G)$ будем называть обобщенными в смысле Л. Шварца.

Сейчас уместно напомнить понятие разложения единицы, использующееся в теории обобщенных функций. В дальнейшем это понятие будем применять в аналогичных конструкциях.

Пусть $G \subseteq E_n$ — некоторая область. Предположим, что имеется покрытие этой области не более чем счетной системой окрестностей $U_1, U_2, \ldots \subseteq G$. При этом предполагается, что каждая ограниченная, строго внутренняя подобласть области G пересекается лишь с конечным числом окрестностей U_j. Тогда при помощи известной конструкции может быть построена система функций $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots \in C^\infty(G)$, обладающих следующими свойствами: а) $0 \leqslant \chi_j(x) \leqslant 1$ ($x \in G$; $j = 1, 2, \ldots$); б) функция $\chi_j(x) = 0$ для $x \bar{\in} U_j$ ($j = 1, 2, \ldots$); в) для каждого $x \in G$ $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(x) = 1$. Такая система функций и называется разложением единицы, построенным по покрытию $U_1, U_2, \ldots$. Иногда мы будем говорить о разложении единицы, построенном по любому (не обязательно счетному) покрытию. Под этим понимается следующее: предварительно при помощи леммы Гейне-Бореля выделяем из заданного покрытия счетное покрытие, обладающее описанным выше свойством, а затем по нему строим разложение единицы.

9. Понятие обобщенной в смысле С. Л. Соболева производной. Пусть $u \in L_{1,\text{лок}}(G)$. Говорят, что u имеет обобщенную в смысле С. Л. Соболева производную D^α, если найдется $f \in L_{1,\text{лок}}(G)$ такая, что $D^\alpha u = f$. Здесь $D^\alpha u$ понимается в смысле обобщенных функций Л. Шварца, а равенство $D^\alpha u = f$ — как равенство функционалов. Иными словами, справедливо соотношение

$$(-1)^{|\alpha|} \int_G u \overline{D^\alpha v} dx = (D^\alpha u, v) = \int_G f \bar{v} dx \qquad (v \in C_0^\infty(G)). \tag{27}$$

Таким образом, в отличие от производных в смысле Л. Шварца сейчас требуется, чтобы $D^\alpha u \in L_{1,\text{лок}}(G)$ (при этом $u \in L_{1,\text{лок}}(G)$).

Мы не будем детально останавливаться на свойствах соболевских производных, показывающих, что с этими производными можно во многом обращаться как с обычными. Отметим лишь два свойства, касающиеся локальности в их определении.

Прежде всего из определения (27) явствует, что если $f \in L_{1,\text{лок}}(G)$ — соболевская производная $D^\alpha u$ ($u \in L_{1,\text{лок}}(G)$), то $f(x)$ для $x \in G'$ (G' — фиксированная подобласть G) будет такой же производной от $u(x)$, где $x \in G'$. Далее, пусть G' и G'' — две пересекающиеся области. Рассмотрим $u \in L_{1,\text{лок}}(G' \cup G'')$ и предположим, что $D^\alpha u$ существует отдельно в G' и G''. Тогда $(D^\alpha u)(x)$ для $x \in G' \cap G''$ принимают одинаковые значения и функция из $L_{1,\text{лок}}(G'\cup G'')$ $(D^\alpha u)(x)$ является производной D^α от u в $G'\cup G''$. Это утверждение легко устанавливается посредством разложения единицы.

В случае одномерного пространства ($n=1$, $G=(a, b)$) наличие в смысле С. Л. Соболева производной D^α у функции $u\in L_{1,\text{лок}}((a, b))$ обозначает, что $u\in C^{\alpha-1}((a, b))$ и ее $(\alpha-1)$-я производная $(D^{\alpha-1}u)(x)$ абсолютно непрерывна; соболевская производная $D^\alpha u$ совпадает с производной от этой абсолютно непрерывной функции. Поясним это обстоятельство, ограничиваясь случаем $\alpha=1$. Из (27) следует, что

$$-\int_a^b u\,\bar{v}'\,dx=\int_a^b f\bar{v}\,dx \quad (v\in C_0^\infty((a, b))).$$

Положим $g(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ $(x\in(a, b))$. Ясно, что $-\int_a^b g\,\bar{v}'\,dx=\int_a^b f\bar{v}\,dx$ $(v\in C_0^\infty((a, b)))$. Таким образом,

$$\int_a^b (u-g)\bar{v}'\,dx=0 \quad (v\in C_0^\infty((a, b))).$$

Отсюда по известной лемме вариационного исчисления вытекает, что $u(x)-g(x)=C$ $(x\in(a, b))$. Итак, $u(x)=C+\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ $(x\in(a, b))$, что и доказывает утверждение.

В случае многомерного пространства наличие некоторой соболевской производной D^α у $u(x)\in L_{1,\text{лок}}(G)$ еще, конечно, не влечет ту или иную гладкость $u(x)$. Так, например, легко видеть, что функция $u(x_1, x_2)=\varphi(x_1)+\psi(x_2)$, где $\varphi,\psi\in L_{1,\text{лок}}((-\infty, \infty))$, такова, что для нее существует в смысле С. Л. Соболева производная D_1D_2 $(D_1D_2u=0)$. Вместе с тем свойствами гладкости эта функция не обладает.

10. Операторы осреднения. В п. 11 мы покажем, что функции из соболевских пространств могут быть охарактеризованы посредством соболевских производных. Для этой цели будет полезен аппарат операторов осреднения.

Наиболее простой пример оператора осреднения следующий: перейдем от $f(x)\in L_{1,\text{лок}}((-\infty, \infty))$ к функции

$$(S_\varepsilon f)(x)=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi)\,d\xi \quad (\varepsilon>0;\ x\in(-\infty, \infty)). \tag{28}$$

Ясно, что (28) будет обладать лучшими свойствами гладкости, чем исходная функция $f(x)$. Сглаживание можно усилить посредством следующей конструкции. Заметим, что интеграл в (28) можно переписать в виде $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x-\xi) f(\xi)\, d\xi$, где $\omega_\varepsilon(y) = \frac{1}{2\varepsilon} \varkappa_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(y)$ ($y \in (-\infty, \infty)$); $\varkappa_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ — характеристическая функция интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Введем функцию $\omega_\varepsilon(y) \in C_0^\infty(E_n)$ $(\varepsilon > 0)$, обладающую следующими свойствами: а) $\omega_\varepsilon(y) = 0$ при $|y| \geqslant \varepsilon$; б) $\omega_\varepsilon(y) \geqslant 0$ $(y \in E_n)$; в) $\int\limits_{E_n} \omega_\varepsilon(y) dy = 1$.

Построим по ней оператор осреднения S_ε, полагая

$$(S_\varepsilon f)(x) = \int\limits_{E_n} \omega_\varepsilon(x-\xi) f(\xi)\, d\xi = (\omega_\varepsilon * f)(x) \quad (f \in L_{1,\text{лок}}(E_n);\ x \in E_n) \tag{29}$$

$(\omega_\varepsilon * f$ носит название свертки функций ω_ε и $f)$. В том случае, когда $f(x)$ определена для $x \in G \subseteq E_n$ и входит в L_1 внутри G вплоть до ее кусочно гладкой границы Γ $(f \in L_{1,\text{лок}}(G, \Gamma))$, под $S_\varepsilon f$ следует понимать по-прежнему (29), но $f(x)$ нужно предварительно продолжить нулем на все E_n (продолженная функция будет входить в $L_{1,\text{лок}}(E_n)$). Часто мы будем рассматривать $(S_\varepsilon f)(x)$ лишь для $x \in G$, тогда переход $f \to S_\varepsilon f$ будет некоторым линейным оператором в классе функций от $x \in G$.

Укажем основные свойства операторов осреднения, считая G ограниченной.

а) $(S_\varepsilon f)(x) \in C^\infty(E_n)$. Этот факт непосредственно следует из определения (29).

б) Если $f(x)$ непрерывна в фиксированной точке $x_0 \in E_n$, то $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (S_\varepsilon f)(x_0) = f(x_0)$. Доказательство следует из соотношения:

$$|(S_\varepsilon f)(x_0) - f(x_0)| = \left| \int\limits_{E_n} \omega_\varepsilon(x_0-\xi) f(\xi)\, d\xi - \int\limits_{E_n} \omega_\varepsilon(x_0-\xi) f(x_0)\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{E_n} \omega_\varepsilon(x_0-\xi)\, |f(\xi) - f(x_0)|\, d\xi.$$

При помощи несложных оценок устанавливаются следующие два свойства (в) — г)) оператора S_ε, понимаемого как оператор в классе функций от $x \in G$.

в) Оператор S_ε является непрерывным в пространстве $L_p(G)$ $(p \geqslant 1)$.

г) Если $f \in L_p(G)$ $(p \geqslant 1)$, то $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} S_\varepsilon f = f$ в смысле сходимости в пространстве $L_p(G)$*.

д) Пусть G' — подобласть с кусочно гладкой границей, лежащая строго внутри G. Предположим, что $f \in C^{|\alpha|}(G)$. Тогда справедливо равенство

$$(D^\alpha S_\varepsilon f)(x) = (S_\varepsilon D^\alpha f)(x) \quad (x \in G'),$$

где $0 < \varepsilon < \varrho(G', \Gamma)$.

В самом деле, пользуясь аннуляцией $\omega_\varepsilon(x-\xi)$ по ξ в полоске вблизи Γ при $x \in G'$, найдем интегрированием по частям:

$$(D^\alpha S_\varepsilon f)(x) = D_x^\alpha \int\limits_{E_n} \omega_\varepsilon(x-\xi) f(\xi)\, d\xi = \int\limits_{E_n} D_x^\alpha \omega_\varepsilon(x-\xi) \cdot f(\xi)\, d\xi =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{E_n} D_\xi^\alpha \omega_\varepsilon(x-\xi) \cdot f(\xi)\, d\xi = \int\limits_{E_n} \omega_\varepsilon(x-\xi)(D^\alpha f)(\xi) d\xi = (S_\varepsilon D^\alpha f)(x). \tag{30}$$

е) Утверждение д) справедливо и в том случае, когда вместо включения $f \in C^{|\alpha|}(G)$ известно, что $D^\alpha f$ существует в смысле С. Л. Соболева. В самом деле, нужно провести прежнюю выкладку (30), замечая, что равенство

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_{E_n} D_\xi^\alpha \omega_\varepsilon(x-\xi) f(\xi)\, d\xi = \int\limits_{E_n} \omega_\varepsilon (x - \xi)(D^\alpha f)(\xi)\, d\xi$$

можно написать на основании (27) (нужно считать, что $v(\xi) = \omega_\varepsilon(x-\xi)$.

В заключение этого пункта заметим, что в качестве $\omega_\varepsilon(y)$ можно брать, например, следующую функцию

$$\omega_\varepsilon(y) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{\frac{|y|^2}{|y|^2-\varepsilon^2}}, & |y| < \varepsilon, \\ 0, & |y| \geqslant \varepsilon, \end{cases}$$

где $C_\varepsilon > 0$ подобрана так, чтобы $\int\limits_{E_n} \omega_\varepsilon(y)\, dy = 1$.

11. Второе определение обобщенных в смысле С. Л. Соболева производных и внутреннее описание соболевских пространств. Покажем, что эти производные можно получить посредством замыкания оператора обычного дифференцирования, если это замыкание строить в пространствах, подходящим образом подобранных.

Введем в $L_{1,\text{лок}}(G)$ сходимость: $u_n \to u$, если для каждой ограни-

---

* Это свойство справедливо при произвольном продолжении $f(x)$ вне G в функцию из $L_{p,\text{лок}}(E_n)$.

ченной подобласти G', лежащей строго внутри G, $\| u_n(x)-u(x)\|_{L_1(G')}\to 0$. Рассмотрим в $L_{1,\text{лок}}(G)$ оператор A, полагая $(Au)(x)=(D^\alpha u)(x)$ ($u\in\mathfrak{D}(A)=C^\infty(G)$). Нетрудно видеть, что этот оператор допускает замыкание. Действительно, пусть в $L_{1,\text{лок}}(G)$ $u_n\to 0$ и $Au_n\to h$, тогда для любого $v\in C_0^\infty(G)$

$$\int_G h\bar{v}dx = \lim_{n\to\infty}\int_G Au_n\cdot\bar{v}dx = \lim_{n\to\infty}\int_G D^\alpha u_n\cdot\bar{v}dx =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\lim_{n\to\infty}\int_G u_n\overline{D^\alpha v}dx = 0.$$

Благодаря произвольности v отсюда следует, что $h=0$, а это и показывает, что A допускает замыкание $\bar{A}$.

Справедливо следующее утверждение: *$u\in L_{1,\text{лок}}(G)$ имеет обобщенную в смысле С. Л. Соболева производную D^α тогда и только тогда, когда $u\in\mathfrak{D}(\bar{A})$, причем $D^\alpha u=\bar{A}u$.*

В самом деле, пусть $u\in\mathfrak{D}(\bar{A})$. Тогда существует последовательность $u_n\in C^\infty(G)$ такая, что в $L_{1,\text{лок}}(G)$ $u_n\to u$ и $D^\alpha u_n\to\bar{A}u$. Для любой $v\in G_0^\infty(G)$ имеем

$$(-1)^{|\alpha|}\int_G u_n\overline{D^\alpha v}dx = \int_G D^\alpha u_n\cdot\bar{v}dx.$$

Переходя здесь к пределу при $n\to\infty$ найдем, что (27) справедливо при $f=\bar{A}u$. Итак, для всякой $u\in\mathfrak{D}(\bar{A})$ существует соболевская производная $D^\alpha u=\bar{A}u$.

Наоборот, пусть $u\in L_{1,\text{лок}}(G)$ такова, что существует соболевская производная $D^\alpha u\in L_{1,\text{лок}}(G)$. Покажем, что $u\in\mathfrak{D}(\bar{A})$ и $\bar{A}u=D^\alpha u$. С этой целью построим последовательность функций $u_n\in C^\infty(G)$ следующим образом. Для $x\in G$ таких, что $\varrho(x,\Gamma)\geqslant\frac{2}{n}$, положим $u_n(x)=(S_{\frac{1}{n}}u)(x)$, где S_ε—оператор осреднения, построенный в п. 10, а на остальные $x\in G$ продолжим $u_n(x)$ произвольным образом в функцию класса $C^\infty(G)$. Для ограниченной G', лежащей строго внутри G, согласно свойству г) операторов осреднения имеем при n достаточно большом: $\| u_n-u\|_{L_1(G')}=\| S_{\frac{1}{n}}u-u\|_{L_1(G')}\to 0$. Таким образом, $u_n\to u$ в $L_{1,\text{лок}}(G)$. Далее, согласно свойству е) операторов осреднения при $x\in G'$ и n достаточно большом можно написать:

$(D^\alpha u_n)(x) = (D^\alpha S_{\frac{1}{n}} u)(x) = (S_{\frac{1}{n}} D^\alpha u)(x)$. Воспользовавшись опять свойством г), найдем:

$$\| D^\alpha u_n - D^\alpha u \|_{L_1(G')} = \| S_{\frac{1}{n}} D^\alpha u - D^\alpha u \|_{L_1(G')} \to 0.$$

Из сказанного ясно, что $u \in \mathfrak{D}(\bar{A})$ и $\bar{A}u = D^\alpha u$. Утверждение доказано.

Пусть G ограничена. Рассмотрим в $L_1(G)$ оператор $(Bu)(x) = (D^\alpha u)(x)$, $u \in \mathfrak{D}(B) = C^\infty(G \cup \Gamma)$. Так как сходимость в $L_1(G)$ влечет сходимость в $L_{1,\text{лок}}(G)$, то замыкание $\bar{B}$ оператора B в $L_1(G)$ является частью замыкания соответствующего A в $L_{1,\text{лок}}(G)$. Отсюда следует, что для $u \in \mathfrak{D}(\bar{B})$ существует соболевская производная D^α, причем $D^\alpha u = \bar{B}u$.

Теперь можно дать следующее внутреннее описание пространства $W_p^l(G)$. *Для того чтобы функция $u(x)$ $(x \in G)$ входила в $W_p^l(G)$ $(l = 0, 1, \ldots)$, необходимо и достаточно, чтобы $u \in L_p(G)$ и имела все обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные $D^\alpha u$, $|\alpha| \leqslant l$, причем для каждого такого α $D^\alpha u \in L_p(G)$ (G предполагается ограниченной; ее граница Γ — l раз кусочно непрерывно дифференцируема).*

То, что $u \in W_p^l(G)$ имеет любую производную D^α $(|\alpha| \leqslant l)$, причем $D^\alpha u \in L_p(G)$, почти очевидно. Действительно, согласно определению пространства $W_p^l(G)$, существует последовательность функций $u_n \in C^\infty(G \cup \Gamma)$, сходящаяся в метрике $\|\cdot\|_{W_p^l(G)}$ к u. Благодаря конструкции $\|\cdot\|_{W_p^l(G)}$ (см. (8)) имеем: $\| u_n - u \|_{L_p(G)} \to 0$ и $\| D^\alpha u_n - f \|_{L_p(G)} \to 0$. Ясно, что эти соотношения справедливы и в норме $L_1(G)$, а это означает, что $u \in \mathfrak{D}(\bar{B})$ и $\bar{B}u = f$. Сравнивая со сказанным чуть выше, заключаем: в соболевском смысле $D^\alpha u = f \in L_p(G)$.

Пусть теперь $u \in L_p(G)$ такова, что каждая производная $D^\alpha u$, $|\alpha| \leqslant l$, существует в смысле С. Л. Соболева, причем $D^\alpha u \in L_p(G)$. Подобно случаю наличия обычных производных такую функцию $u(x)$ можно продолжить с сохранением ее свойств на бóльшую область $\tilde{G}$, содержащую строго внутри себя G. Рассмотрим последовательность $u_n(x) = (S_{\frac{1}{n}} u)(x) \in C^\infty(G \cup \Gamma)$. Используя свойства д) и г) операторов осреднения, заключаем:

$$\| D^\alpha u_n - D^\alpha u \|_{L_p(G)} = \| D^\alpha S_{\frac{1}{n}} u - D^\alpha u \|_{L_p(G)} = \| S_{\frac{1}{n}} D^\alpha u - D^\alpha u \|_{L_p(G)} \to 0$$

при любом α, $|\alpha| \leqslant l$. Отсюда следует, что $\|u_n - u\|_{W_p^l(G)} \to 0$, а это влечет включение $u \in W_p^l(G)$. Утверждение доказано.

В заключение приведем одно замечание относительно линейных множеств в $W_p^l(G)$. Подобно тому, как это делалось в п. 7, легко заключить, что совокупность функций $u \in W_p^l(G)$ $(l \geqslant 1)$, удовлетворяющих на Γ соотношениям

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{j\alpha}(x)\,(D^\alpha u)(x) = 0 \qquad (x \in \Gamma;\ j = 1, \ldots, k) \tag{31}$$

$(b_{j\alpha}(x) \in C(\Gamma);\ m_j < l;\ j = 1, \ldots, k)$, образует замкнутое подпространство в $W_p^l(G)$. В самом деле, если $u_n \in W_p^l(G)$ удовлетворяют (31) и $u_n \to u$ в $W_p^l(G)$, то согласно теоремам вложения при $|\alpha| \leqslant l-1$ $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ достаточно хорошо — настолько хорошо, что в (31) можно перейти к пределу и получить это соотношение для предельной функции u.

С другой стороны, равенства (31), в каждом из которых фигурируют производные D^α с $|\alpha| \geqslant l$, причем соответствующие коэффициенты $b_{j\alpha}(x) \neq 0$ $(x \in \Gamma)$, выделяют, вообще говоря, на достаточно гладких функциях линейное множество, плотное в $W_p^l(G)$. Это связано с причинами, тому обстоятельству, что в пространстве $L_p(G)$ условие $u|_\Gamma = 0$ $(u \in C(G \cup \Gamma))$ выделяет линейное множество, плотное в $L_p(G)$.

Глава I

ПРОСТРАНСТВА С НЕГАТИВНОЙ НОРМОЙ И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Построение обобщенных функций обычно производится по следующей схеме: рассматривается некоторое линейное топологическое пространство бесконечно дифференцируемых функций Φ — пространство основных функций. Линейные непрерывные функционалы над Φ составляют сопряженное пространство Φ', элементы которого называются обобщенными функциями. Операции над обобщенными функциями (например, дифференцирование) определяются как сопряженные к соответствующим операциям над основными функциями, где они благодаря гладкости последних хорошо определены. Однако для наших целей является более удобным рассмотрение в качестве Φ некоторого нормированного (и даже гильбертова) пространства конечно дифференцируемых функций, пространство Φ' в этом случае будет состоять из так называемых обобщенных функций конечного порядка. Ниже будет подробно излагаться теория именно таких функций, причем изложение удобно проводить в абстрактном виде.

Наметим простейший пример подобной конструкции. Рассмотрим два гильбертовых пространства: обычное $L_2((a, b))$ и соболевское пространство $W_2^1((a,b))$, являющееся пополнением непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$ относительно скалярного произведения

$$(u, v)_1 = \int_a^b u\bar{v}dx + \int_a^b u'\bar{v}'dx.$$

Всякий линейный непрерывный функционал $l(u)$ над $W_2^1((a, b))$ может быть представлен по теореме Рисса в виде $l(u) = (u, h)_1$, где $h \in W_2^1((a, b))$. Однако весьма удобным является другое представление $l(u)$ — через «исходное» скалярное произведение пространства $L_2((a, b))$. Оно, грубо говоря, выглядит так: $l(u) = \int_a^b u\,\bar{\eta}\,dx$; здесь η — некоторая обобщенная функция. Норма $\|\cdot\|_1$ строится по производным, ее естественно назвать позитивной. Оказывается, что обобщенные функции η также образуют некоторое гильбертово пространство, скалярное произведение в котором определяется интегралами — операциями, обратными к дифференцированию. Поэтому естественно называть норму в этом пространстве негативной. Употребляются также названия «положительная» и «отрицательная» нормы.

§ 1. Общая теория пространств с негативной нормой

1. Позитивная и негативная нормы. Пусть H_0 — некоторое полное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$. Предположим, что в H_0 имеется всюду плотное линейное множество H_+, являющееся полным гильбертовым пространством относительно некоторого другого скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_+$; $\|\cdot\|_+$ норма в H_+. Будем предполагать, что

$$\| u_0 \| \leqslant \| u \|_+ \quad (u \in H_+)^*; \tag{1.1}$$

H_+ называется пространством с позитивной нормой.

Векторы $f \in H_0$ порождают антилинейные функционалы l (т. е. $l(\lambda u) = \bar{\lambda} l(u)$) над H_+, если положить $l(u) = l_f(u) = (f, u)_0$. Эти функционалы непрерывны благодаря (1.1):

$$| l_f(u) | = | (f, u)_0 | \leqslant \| f \|_0 \| u \|_0 \leqslant \| f \|_0 \| u \|_+ \, (u \in H_+).$$

Их норма подсчитывается следующим образом:

$$\| l_f \| = \sup_{u \in H_+} \frac{|(f, u)_0|}{\| u \|_+} \leqslant \| f \|_0 \quad (f \in H_0).$$

Пополнение пространства H_0 по норме $\| f \|_- = \| l_f \|$ носит название пространства с негативной нормой. Нам будет удобно предварительно ввести одну вспомогательную конструкцию и определить негативную норму несколько иным способом. В следующем пункте будет установлена эквивалентность этих определений.

Рассмотрим билинейную форму от $f \in H_0$ и $u \in H_+$: $B(f, u) = (f, u)_0$. Благодаря (1.1) эта билинейная форма непрерывна при изменении f и u в соответствующих пространствах, поэтому ее можно представить либо через скалярное произведение в H_0, либо через скалярное произведение в H_+:

$$(f, u)_0 = B(f, u) = (If, u)_+ \quad (f \in H_0, \, u \in H_+), \tag{1.2}$$

где I — линейный оператор, непрерывно действующий из H_0 в H_+. Обозначим O оператор вложения H_+ в H_0. Тогда (1.2) обозначает, что для любых $f \in H_0$ и $u \in H_+$ $(f, Ou)_0 = (If, u)_+$, т. е операторы O и I взаимно сопряжены. Так как $\| O \| \leqslant 1$ (см. (1.1)), то и $\| I \| \leqslant 1$.

Введем для $f, g \in H_0$ скалярное произведение, полагая

$$(f, g)_- = (If, g)_0 = (If, Ig)_+, \tag{1.3}$$

и произведем пополнение. Полученное гильбертово пространство H_- называется пространством с негативной нормой. Скалярное произведение в нем обозначим $(\cdot, \cdot)_-$, норму — $\|\cdot\|_-$. Так как $\| I \| \leqslant 1$, то $\| f \|_- \leqslant \| f \|_0$ $(f \in H_0)$. Условимся в дальнейшем элементы пространства H_0, которое мы также будем называть пространством с нулевой

---

* Иногда в приложениях вместо неравенства (1.1) появляется неравенство $\|u\|_0 \leqslant C\|u\|_+$ $(C > 0)$. Такое пространство H_+ мы по-прежнему будем называть пространством с позитивной нормой, так как к оценке (1.1) можно перейти путем перенормировки H_+.

нормой, обозначать посредством f, g, ...; элементы H_+ и H_- будем обозначать соответственно через u, v, ... и α, β, ... Итак,

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+, \qquad \|u\|_- \leqslant \|u\|_0 \leqslant \|u\|_+ \quad (u \in H_+). \tag{1.4}$$

Если имеется цепочка (1.4), то говорят, что гильбертово пространство H_0 оснащено пространствами H_+ и H_-.

Согласно (1.3) оператор I изометрически отображает плотное множество из H_- (именно H_0) в множество из H_+. Расширяя этот оператор по непрерывности на все H_-, мы получим оператор $\mathbf{I}$, переводящий H_- в H_+. Область значений $\mathfrak{R}(\mathbf{I})$ оператора $\mathbf{I}$ заполняет все H_+: действительно, $\mathfrak{R}(\mathbf{I})$ замкнута, поэтому, если $\mathfrak{R}(\mathbf{I}) \neq H_+$, то найдется такое $u \in H_+$, что $0 = (\mathbf{I}f, u)_+ = (f, u)_0$ для всех $f \in H_0$, т. е. $u = 0$. Итак, $\mathbf{I}$ является изометрическим оператором, переводящим все H_- на все H_+, т. е. $\mathfrak{D}(\mathbf{I}) = H_-$, $\mathfrak{R}(\mathbf{I}) = H_+$ и $(\alpha, \beta)_- = (\mathbf{I}\alpha, \mathbf{I}\beta)_+$ $(\alpha, \beta \in H_-)$.

Покажем, что для $\alpha \in H_-$ и $u \in H_+$ определено «скалярное произведение» $(\alpha, u)_0$ — билинейная форма, совпадающая при $\alpha \in H_0$ со скалярным произведением в H_0 (мы также будем писать $(u, \alpha)_0$, полагая $(u, \alpha)_0 = \overline{(\alpha, u)}_0$). Для него справедливо неравенство Коши—Буняковского

$$|(\alpha, u)_0| \leqslant \|\alpha\|_- \|u\|_+ \quad (\alpha \in H_-,\ u \in H_+). \tag{1.5}$$

Действительно, пусть $f \in H_0$, тогда при $u \in H_+$ имеем

$$|(f, u)_0| = |(\mathbf{I}f, u)_+| \leqslant \|\mathbf{I}f\|_+ \|u\|_+ = \|f\|_- \|u\|_+; \tag{1.6}$$

переходя здесь к пределу (в H_-) при $f \to \alpha$, получим (1.5).

При помощи предельного перехода из (1.3) и (1.2) легко получить равенства

$$\begin{gathered} (\alpha, \beta)_- = (\alpha, \mathbf{I}\beta)_0 = (\mathbf{I}\alpha, \beta)_0 = (\mathbf{I}\alpha, \mathbf{I}\beta)_+, \\ (\alpha, u)_0 = (\mathbf{I}\alpha, u)_+ \quad (\alpha, \beta \in H_-,\ u \in H_+). \end{gathered} \tag{1.7}$$

2. **Обобщенные векторы**. Будем теперь называть H_+ пространством основных векторов и рассматривать антилинейные непрерывные функционалы $l(u)$ над H_+. В силу (1.5) каждое $\alpha \in H_-$ порождает функционал l_α по формуле $l_\alpha(u) = (\alpha, u)_0$ $(u \in H_+)$. Наоборот, если l — функционал над H_+, то справедливо представление $l(u) = (v_l, u)_+$, где v_l — некоторый элемент из H_+. Из второго равенства (1.7) следует, что $l(u) = (v_l, u)_+ = (\alpha_l, u)_0$, $\alpha_l = \mathbf{I}^{-1} v_l \in H_-$, причем если $l = 0$, то нетрудно видеть, что и $\alpha_l = 0$. Таким образом, соответствие $l \leftrightarrow \alpha$ между функционалами над H_+ и векторами из H_- взаимно однозначно, причем $\|l\| = \|v_l\|_+ = \|\alpha\|_-$ (v_l — элемент из H_+, отвечающий l). Отсюда следует эквивалентность двух определений пространств с негативной нормой, приведенных в п. 1.

Непрерывные функционалы над основным пространством H_+ естественно назвать обобщенными векторами. Итак, H_- — пространство обобщенных векторов. Оно изометрично H_+, удобство от его введения связано с тем, что действие функционала $l(u)$ теперь записывается в «прежнем» скалярном произведении $(\cdot\ \ \cdot)_0$: $l(u) = (\alpha, u)_0$. Векторы из $H_0(H_+)$ мы иногда будем называть обычными (гладкими) векторами. Очевидно, H_+ и H_0 плотны в H_-.

Проиллюстрируем введенные выше понятия на одном примере. Пусть G — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ n-мерного ($n \geqslant 1$) пространства. Положим $H_0 = L_2(G)$ и $H_+ = W_2^1(G)$, где $W_2^1(G)$ — соболевское пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_+ = \int_G u\bar{v}dx + \sum_{j=1}^n \int_G D_ju \cdot \overline{D_jv}dx \quad \left(D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Равенство (1.2), определяющее I, примет вид

$$\int_G f\bar{u}dx = \int_G h\bar{u}dx + \sum_{j=1}^n \int_G D_jh \cdot \overline{D_ju}dx \quad (u \in W_2^1(G),\ f \in L_2(G)), \tag{1.8}$$

где положено $h = If \in W_2^1(G)$. Так как функции u из $W_2^2(G)$, удовлетворяющие условию $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0$ $\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right.$ — дифференцирование по внешней нормали$\Big)$, плотны в $W_2^1(G)$, то для справедливости (1.8) достаточно требовать, чтобы это соотношение выполнялось для таких u; их совокупность обозначим U. Предполагая, что в (1.8) $u \in U$, и интегрируя по частям, найдем

$$\int_G f\bar{u}dx = \int_G h\overline{(-\Delta u + u)}dx \tag{1.9}$$

Определим на U оператор L в $L_2(G)$, полагая $\mathrm{L}u = -\Delta u + u$; тогда (1.9) означает, что $h \in \mathfrak{D}(\mathrm{L}^*)$ и $f = \mathrm{L}^*h$. Вместе с тем известно (см. гл. VI, § 1, п. 3), что оператор L самосопряжен, поэтому $h \in U$ и $f = -\Delta h + h$; таким образом, $If = h = \mathrm{L}^{-1}f$. Оператор L^{-1} является интегральным с достаточно гладким ядром $R(x, y)$ — функцией Грина для выражения $-\Delta u + u$ с граничным условием $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0$, поэтому элементы пространства с негативной нормой получаются посредством пополнения $L_2(G)$ относительно скалярного произведения

$$(f, g)_- = \int_G \int_G R(x, y) f(y) \overline{g(x)} dx dy.$$

3. **Операторы на обобщенных векторах.** Пусть H_0 — пространство с нулевой нормой, H_{+1} — некоторое пространство с позитивной нормой. Обозначим H_{+2} линейное множество из H_{+1}, являющееся пространством с позитивной нормой по отношению к H_{+1}. Ясно, что H_{+2} будет некоторым пространством с позитивной нормой по отношению к H_0. Пусть H_{-1} и H_{-2} — пространства с негативной нормой, построенные по H_0 и соответственно основным пространствам H_{+1} и H_{+2}; $(\cdot, \cdot)_k$ и $\|\cdot\|_k$ — скалярное произведение и норма в H_k. Справедливы соотношения

$$H_{-2} \supseteq H_{-1} \supseteq H_0 \supseteq H_{+1} \supseteq H_{+2}, \; \|u\|_{-2} \leqslant \|u\|_{-1} \leqslant \|u\|_0 \leqslant \|u\|_{+1} \leqslant \|u\|_{+2} \quad (u \in H_{+2}), \tag{1.10}$$

причем каждое H_l плотно в каждом H_k с меньшим индексом ($k < l$). Действительно, часть утверждения, относящаяся к неотрицательным индексам, понятна. Обозначим $\mathbf{I}_k$ оператор $\mathbf{I}$, построенный по H_0 и H_k ($k > 0$). Для $f \in H_0$ имеем

$$\|f\|_{-2}^2 = (\mathbf{I}_2 f, f)_0 \leqslant \|\mathbf{I}_2 f\|_{+1} \|f\|_{-1} \leqslant \|\mathbf{I}_2 f\|_{+2} \|f\|_{-1} = \|f\|_{-2} \|f\|_{-1},$$

откуда $\|f\|_{-2} \leqslant \|f\|_{-1}$. Замыкая H_0 по соответствующим нормам, мы получим теперь включение $H_{-2} \supseteq H_{-1}$. Высказанные соотношения плотности очевидны.

Рассмотрим линейный оператор A, определенный во всем H_k и непрерывно его переводящий в H_l ($k, l \geqslant 0$)*. Существует сопряженный оператор A^+, непрерывно переводящий все H_{-l} в H_{-k} и связанный с A соотношением

$$(\alpha, Au)_0 = (A^+\alpha, u)_0 \quad (\alpha \in H_{-l}, \; u \in H_k). \tag{1.11}$$

Действительно, обозначим A^* обычный сопряженный к A в смысле теории гильбертовых пространств оператор (т. е. оператор, действующий из H_l в H_k и удовлетворяющий равенству $(Au, v)_l = (u, A^*v)_k$ ($u \in H_k$, $v \in H_l$)). Имеем ($\alpha \in H_{-l}$, $u \in H_k$)

$$(\alpha, Au)_0 = (\mathbf{I}_l \alpha, Au)_l = (A^* \mathbf{I}_l \alpha, u)_k = (\mathbf{I}_k^{-1} A^* \mathbf{I}_l \alpha, u)_0 = (A^+\alpha, u)_0,$$

* Ограничение k, $l \geqslant 0$ делается лишь для определенности. Ниже все рассуждения сохраняются при произвольных k и l. В частности, равенство (1.12) остается справедливым, нужно лишь считать $\mathbf{I}_m = \mathbf{I}_{-m}^{-1}$ при $m < 0$.

где положено

$$A^{+} = \mathbf{I}_k^{-1} A^* \mathbf{I}_l. \tag{1.12}$$

Итак, (1.11) и связь A^{+} и A^* установлены; из (1.12) легко заключаем, что $\| A^{+} \| = \| A^* \| = \| A \|$.

Следует иметь в виду, что если $H_0 = L_2(G)$ и A — чистое дифференцирование, то A^{+} уже может не быть таковым. Поясним это на примере предыдущего пункта. Пусть $H_{+1} = H_0 = L_2(G)$, $H_{+2} = W_2^1(G)$, $Au = \frac{\partial u}{\partial \tau}$, где τ — некоторый орт; $\mathfrak{D}(A) = W_2^1(G)$, $\mathfrak{R}(A) \subseteq L_2(G)$. Тогда согласно (1.11) $(A^{+}\alpha, u)_0 = \left(\alpha, \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_0$, $\alpha \in L_2(G)$, $u \in W_2^1(G)$. В частности, пусть $\alpha = v \in W_2^1(G)$, тогда, интегрируя по частям, найдем ($\nu(x)$ — орт внешней нормали)

$$(A^{+}v, u)_0 = \int_G v(x) \overline{\frac{\partial u(x)}{\partial \tau}}\, dx = -\int_G \frac{\partial v(x)}{\partial \tau} \overline{u(x)}\, dx +$$

$$+ \int_\Gamma v(x) \overline{u(x)} \langle \nu(x), \tau \rangle\, dx =$$

$$= \int_G \left(-\frac{\partial v(x)}{\partial \tau} + v(x) \langle \nu(x), \tau \rangle \delta_\Gamma(x) \right) \overline{u(x)}\, dx$$

$$(\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n),$$

где $\delta_\Gamma(x)$ — δ-функция, сосредоточенная на границе Γ и определяемая соотношением $\int_G f(x)\, \delta_\Gamma(x)\, dx = \int_\Gamma f(x)\, dx$. Отсюда следует, что $(A^{+}v)(x) = -\frac{\partial v(x)}{\partial \tau} + v(x) \langle \nu(x), \tau \rangle \delta_\Gamma(x)$ на $v \in W_2^1(G)$. Ясно, что появление здесь δ-функции связано с тем, что в (1.11) производится переброска A на функциях, не удовлетворяющих никаким граничным условиям.

4. Расщепление оператора I. Напомним, что $\mathbf{I}$ изометрически переводит H_- в H_+; сейчас мы покажем, что этот оператор можно расщепить в произведение двух операторов, первый из которых изометрически переводит H_- в H_0, а второй — H_0 в H_+.

Оператор I действует непрерывно из H_0 в H_+. Так как $H_+ \subseteq H_0$, то этот оператор можно рассматривать как действующий в H_0. Введем для него обозначение $\hat{I} : \hat{I} = OI$. Оператор $\hat{I}$, очевидно, непрерывен, неотрицателен и обратим на $\mathfrak{R}(\hat{I})$. Покажем, что $\mathfrak{R}(\hat{I}) = \mathfrak{D}(\hat{I}^{-1})$ плотно в H_0: пусть $h \perp \mathfrak{R}(\hat{I})$, тогда $0 = (h, \hat{I}f)_0 = (Ih, If)_+ = (Ih, f)_0$ при любом $f \in H_0$, т. е. $Ih = 0$, а следовательно, и $h = 0$. Ясно, что $\hat{I}^{-1}$ самосопряжен в H_0 и положителен

Теорема 1.1. *Рассмотрим в пространстве H_0 оператор $D = \sqrt{\hat{I}^{-1}}$. Он является положительным и самосопряженным оператором, для которого $\mathfrak{D}(D) = H_+$, $\mathfrak{R}(D) = H_0$. Соответствие, осуществляемое этим оператором между H_+ и H_0, изометрично:*

$$(u, v)_+ = (Du, Dv)_0 \quad (u, v \in H_+). \tag{1.13}$$

Рассмотрим D как оператор, действующий из H_0 в H_-, и замкнем его по непрерывности; полученный оператор обозначим $\mathbf{D}$. Этот оператор осуществляет изометрическое отображение всего H_0 на все H_-:

$$(f, g)_0 = (\mathbf{D}f, \mathbf{D}g)_- \quad (f, g \in H_0), \tag{1.14}$$

причем

$$\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{D}D. \tag{1.15}$$

Справедливо соотношение

$$(f, Du)_0 = (\mathbf{D}f, u)_0 \quad (f \in H_0, u \in H_+), \tag{1.16}$$

позволяющее рассматривать D и $\mathbf{D}$ как взаимно сопряженные операторы ($\mathbf{D} = D^+$).

Доказательство. По определению $D = \int\limits_0^\infty \sqrt{\lambda}\, dE_\lambda$, где E_λ—разложение единицы, отвечающее $\hat{I}^{-1}$, причем $\mathfrak{D}(D)$ состоит из тех векторов $f \in H_0$, для которых $\int\limits_0^\infty \lambda d(E_\lambda f, f)_0 = (Df, Df)_0 < \infty$. Ясно, что D положителен и самосопряжен. Покажем, что $H_+ \subseteq \mathfrak{D}(D)$. Пусть сначала $v \in \mathfrak{D}(\hat{I}^{-1}) = \mathfrak{R}(I)$; тогда

$$\int\limits_0^\infty \lambda d(E_\lambda v, v)_0 = (\hat{I}^{-1} v, v)_0 = (v, v)_+. \tag{1.17}$$

Но $\mathfrak{R}(I)$ плотно в H_+: если при некотором $w \in H_+$ и всех $f \in H_0$ мы имеем $(If, w)_+ = 0$, то отсюда в силу (1.2) следует, что $w = 0$. Благодаря плотности $\mathfrak{R}(I)$ в H_+ для каждого $u \in H_+$ найдется последовательность $v_n \in \mathfrak{R}(I)$, $v_n \to u$ в H_+. Полагая в (1.17) v_n вместо

v и затем переходя к пределу при $n \to \infty$, найдем $\int\limits_0^\infty \lambda d(E_\lambda u, u)_0 = (u, u)_+ < \infty$. Итак, $H_+ \subseteq \mathfrak{D}(D)$.

Наоборот, пусть $f \in \mathfrak{D}(D)$. Тогда существует последовательность $u_n \in \mathfrak{D}(\hat{I}^{-1}) \subseteq H_+$ такая, что в H_0 $u_n \to f$ и $\int\limits_0^\infty \lambda d(E_\lambda u_n, u_n)_0 \to \int\limits_0^\infty \lambda d(E_\lambda f, f)_0$ (например, $u_n = E(\Delta_n) f$, где Δ_n — расширяющаяся к $(-\infty, \infty)$ последовательность интервалов). В силу (1.17), записанного для $v = u_n$, заключаем, что $(u_n, u_n)_+ \to C < \infty$. Отсюда ясно, что $f \in H_+$. Таким образом, $\mathfrak{D}(D) = H_+$. Наконец, $(Du, Dv)_0 = (\hat{I}^{-1} u, v)_0 = (u, v)_+$ при $u, v \in H_+ = \mathfrak{D}(D)$, т. е. (1.13) установлено.

Перейдем к рассмотрению оператора $\mathbf{D}$. Так как $\mathfrak{D}(D) = H_+$ плотна в H_0, а $\mathfrak{R}(D) = H_0$ плотна в H_-, причем $(Du, Dv)_- = (IDu, Dv)_0 = (u, v)_0$, то замыкание D на все H_0 возможно и приводит к оператору $\mathbf{D}$, изометрически отображающему все H_0 на все H_-. Для доказательства (1.15) достаточно установить, что $D^{-1}\mathbf{D}^{-1}\alpha = \mathbf{I}\alpha$ на всюду плотном в H_- запасе α. Если возьмем $\alpha = f \in H_0$, то $D^{-1}\mathbf{D}^{-1} f = D^{-1} D^{-1} f = \hat{I} f$ и $\mathbf{I} f = I f$, т. е. $D^{-1}\mathbf{D}^{-1} f = \mathbf{I} f$ $(f \in H_0)$; $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{D} D$. Далее, на основании (1.7) имеем

$$(f, Du)_0 = (\mathbf{D} f, \mathbf{D} D u)_- = (\mathbf{D} f, \mathbf{I}^{-1} u)_- = (\mathbf{D} f, u)_0$$

$$(f \in H_0, u \in H_+),$$

т. е. (1.16) также установлено. Теорема доказана.

Равенство (1.15) означает, что мы расщепили $\mathbf{I}^{-1}$. Из него следует, что $\mathbf{I} = D^{-1}\mathbf{D}^{-1}$, или, если ввести оператор $J = D^{-1}$,

$$\mathbf{I} = J\mathbf{J}. \tag{1.18}$$

Здесь $\mathbf{J}$ обозначает $\mathbf{D}^{-1}$; это обозначение уместно, так как оператор $\mathbf{J}$ может быть получен из J (рассматриваемого как оператор из H_- в H_0) посредством операции замыкания по непрерывности. Таким образом, (1.18) является расщеплением $\mathbf{I}$ на изометрические операторы $\mathbf{J}$ и J, обратные соответственно к операторам $\mathbf{D}$ и D, описанным в теореме 1.1. Заменяя в (1.16) f на $\mathbf{J}\alpha$ и u на Jf, получим

$$(\mathbf{J}\alpha, f)_0 = (\alpha, Jf)_0 \, (\alpha \in H_-, f \in H_0), \text{ т. е. } \mathbf{J} = J^+. \tag{1.19}$$

Для удобства читателей выпишем основные свойства введенных в этом параграфе изометрических операторов

$$\begin{tikzcd} H_- \arrow[r, phantom, "\supseteq"] \arrow[r, bend right, "\mathbf{J}"'] \arrow[rr, bend right=60, "\mathbf{I}"'] & H_0 \arrow[r, phantom, "\supseteq"] \arrow[l, bend right, "\mathbf{D}"'] \arrow[r, bend right, "J"'] & H_+ \arrow[l, bend right, "D"'] \arrow[ll, bend right=60, "\mathbf{I}^{-1}"'] \end{tikzcd}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{J}J, \ D = J^{-1}, \ \mathbf{D} = \mathbf{J}^{-1}; \tag{1.20}$$

$$(\mathbf{I}\alpha, \mathbf{I}\beta)_+ = (\alpha, \beta)_-, \ (Jf, Jg)_+ = (f, g)_0, \ (\mathbf{J}\alpha, \mathbf{J}\beta)_0 = (\alpha, \beta)_- =$$
$$= (\alpha, \mathbf{I}\beta)_0 = (\mathbf{I}\alpha, \beta)_0, \ (Du, Dv)_0 = (u, v)_+, \ (\mathbf{D}f, \mathbf{D}g)_- = (f, g)_0$$
$$(\alpha, \beta \in H_-; \ f, g \in H_0; \ u, v \in H_+);$$
$$\mathbf{J} = J^+, \mathbf{D} = D^+, \text{ т. е. } (\mathbf{J}\alpha, f)_0 = (\alpha, Jf)_0, (\mathbf{D}f, u)_0 = (f, Du)_0$$
$$(\alpha \in H_-, f \in H_0, u \in H_+).$$

5. **Одна теорема о непрерывности эрмитовых операторов.** В заключение установим одно интересное свойство эрмитовых операторов.

Теорема 1.2. *Пусть H_k и H_l — два произвольных пространства цепочки (1.10), $k \leqslant l$. Предположим, что в пространстве H_l действует непрерывный оператор A с нормой $\| A \|_l$, являющийся эрмитовым относительно H_k, т. е. $(Au, v)_k = (u, Av)_k$ $(u, v \in H_l)$. Тогда A непрерывен и в пространстве H_k, причем его норма здесь не превосходит $\| A \|_l$.*

Доказательство. Зафиксируем $u \in H_l$, $\| u \|_k = 1$, и обозначим $s_n = (A^n u, A^n u)_k$ $(n = 0, 1, \ldots; s_0 = 1)$. Для произвольного действительного λ имеет место неравенство

$$0 \leqslant (A^{n-1}u + \lambda A^{n+1}u, A^{n-1}u + \lambda A^{n+1}u)_k = s_{n-1} + 2\lambda s_n + \lambda^2 s_{n+1},$$

откуда заключаем, что $s_n^2 \leqslant s_{n-1}s_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как все числа s_n неотрицательны, то из полученного неравенства найдем

$$s_1 \leqslant \frac{s_2}{s_1} \leqslant \frac{s_3}{s_2} \leqslant \ldots$$

Отсюда

$$s_n \geqslant s_1 s_{n-1} \geqslant s_1^2 s_{n-2} \geqslant \ldots \geqslant s_1^n, \ s_1 \leqslant \sqrt[n]{s_n} \ (n = 1, 2, \ldots).$$

С другой стороны,

$$s_n = (A^n u, A^n u)_k \leqslant (A^n u, A^n u)_l \leqslant \| A^n \|_l^2 \| u \|_l^2 \leqslant \| A \|_l^{2n} \| u \|_l^2,$$

поэтому

$$s_1 \leqslant \sqrt[n]{s_n} \leqslant \| A \|_l^2 \sqrt[n]{\| u \|_l^2} \ (n = 1, 2, \ldots; \| u \|_l^2 \geqslant \| u \|_k^2 = 1).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $(Au, Au)_k = s_1 \leqslant \| A \|_l^2$. Итак, при произвольном $u \in H_l$, $\| u \|_k = 1$ имеет место оценка $\| Au \|_k \leqslant \| A \|_l$, откуда $\| Au \|_k \leqslant \| A \|_l \| u \|_k$ $(u \in H_l)$. Ввиду плотности H_l в H_k полученное неравенство доказывает теорему.

Из доказательства ясно, что теорема сохраняется и в том случае, когда H_l — некоторое банахово пространство относительно нормы $\| \cdot \|_l$, плотное в H_k, причем $\| u \|_k \leqslant \| u \|_l$ $(u \in H_l)$.

§ 2. Тензорные произведения и обобщенные ядра

В этом параграфе излагается в общей форме теория обобщенных ядер.

1. Тензорное произведение гильбертовых пространств. Общие понятия. Пусть имеем два полных гильбертовых пространства H' и H'', их элементы будем соответственно обозначать через $f', g', \ldots$ и $f'', g'', \ldots$; построим тензорное произведение H' и H''. Для этого рассмотрим линейную оболочку L формальных произведений $f' \otimes f''$, причем будем считать, что

$$(f' + g') \otimes f'' = f' \otimes f'' + g' \otimes f'', f' \otimes (f'' + g'') = f' \otimes f'' + f' \otimes g'',$$
$$(\lambda f') \otimes f'' = f' \otimes (\lambda f'') = \lambda (f' \otimes f''). \tag{2.1}$$

Введем в L скалярное произведение, полагая его на элементах вида $f' \otimes f''$ равным

$$(f' \otimes f'', g' \otimes g'')_{H' \otimes H''} = (f', g')_{H'} (f'', g'')_{H''} \tag{2.2}$$

и затем распространяя его на другие элементы из L билинейным образом. Пополнение L по этому скалярному произведению называется тензорным произведением H' и H'' и обозначается $H' \otimes H''$.

Проведем более аккуратно намеченные построения, ограничиваясь для простоты случаем сепарабельных H' и H''. Пусть $e_1', e_2', \ldots$ и $e_1'', e_2'', \ldots$ — ортонормированные базисы в пространствах H' и H'' соответственно; $e_j' \otimes e_k''$ — их формальные произведения. Тензорным произведением $H' \otimes H''$ будем называть линейную совокупность всех векторов вида $F = \sum_{j,k=1}^{\infty} F_{jk} e_j' \otimes e_k''$, где комплексные числа F_{jk} удовлетворяют требованию $\sum_{j,k=1}^{\infty} |F_{jk}|^2 < \infty$. Определяя скалярное произведение формулой $(F, G) = \sum_{j,k=1}^{\infty} F_{jk} \bar{G}_{jk}$, мы обратим $H' \otimes H''$ в полное гильбертово пространство; $e_j' \otimes e_k''$ образуют ортонормированный базис этого пространства. Пусть $f' = \sum_{j=1}^{\infty} f_j' e_j'$, $f'' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'' e_k''$ — разложения векторов из H' и H'' по соответствующим ортонормированным базисам, положим $f' \otimes f'' = \sum_{j,k=1}^{\infty} f_j' f_k'' e_j' \otimes e_k''$. Очевидно, так определенное произведение $f' \otimes f''$ удовлетворяет требованиям (2.1) и (2.2). Ясно также, что линейные комбинации элементов вида $f' \otimes f''$ плотны в $H' \otimes H''$. Если

$$f'_n \to f' \text{ (в } H') \text{ и } f''_m \to f'' \text{ (в } H''),$$

то

$$f'_n \otimes f''_m \to f' \otimes f''$$

в $H' \otimes H''$ при $n, m \to \infty$ (т. е. тензорное произведение непрерывно относительно сомножителей). Заметим, наконец, что другой выбор базисов e'_j и e''_k приводит к тензорному произведению, изометрическому $H' \otimes H''$.

Можно определить тензорное произведение $L' \otimes L''$ двух линейных множеств $L' \subseteq H'$ и $L'' \subseteq H''$: это совокупность всех линейных комбинаций произведений $f' \otimes f''$ ($f' \in L', f'' \in L''$). Ясно, что $L' \otimes L''$ плотно в $H' \otimes H''$, если L' плотно в H', а L'' — в H''. Подчеркнем, что при определении $L' \otimes L''$ мы не переходили к замыканию совокупности указанных линейных комбинаций. Таким образом, например, $H' \otimes H''$ имеет двойной смысл в зависимости от того, как рассматривается H' и H''. В дальнейшем смысл $\otimes$, если он не ясен из контекста, будет указываться.

Одним из наиболее простых примеров тензорного произведения служит следующий: $H' = L_2(G')$, где G' — область n'-мерного пространства точек x', $H'' = L_2(G'')$ в аналогичных обозначениях. Под формальным произведением $f' \otimes f''$ будем понимать обычное произведение $f'(x')f''(x'')$ этих функций, оно является функцией точки $(x', x'') \in G' \times G''$. Скалярное произведение (2.2) совпадает со скалярным произведением в $L_2(G' \times G'')$, замыкание в нем линейных комбинаций функций $f'(x')f''(x'')$ ($f' \in L_2(G'), f'' \in L_2(G'')$), очевидно, приведет ко всему $L_2(G' \times G'')$. Итак, $L_2(G') \otimes L_2(G'') = L_2(G' \times G'')$. Другие примеры тензорных произведений будут даны в § 3.

Пусть оператор A' непрерывно действует из гильбертова пространства H' в гильбертово пространство G', аналогично A'' непрерывно действует из H'' в G''. Определим тензорное произведение $A' \otimes A''$ операторов A' и A'' как оператор, действующий из $H' \otimes H''$ в $G' \otimes G''$. Для этого сперва положим на элементах вида $\sum_j f'_j \otimes f''_j$ ($f'_j \in H'$, $f''_j \in H''$, сумма конечна)

$$(A' \otimes A'')\left(\sum_j f'_j \otimes f''_j\right) = \sum_j (A'f'_j) \otimes (A''f''_j). \tag{2.3}$$

Так определенный оператор не зависит от способа представления элемента $\sum_j f'_j \otimes f''_j \in H' \otimes H''$ в виде конечной суммы произведений типа $h' \otimes h''$ ($h' \in H', h'' \in H''$), является непрерывным опе-

ратором из $H' \otimes H''$ в $G' \otimes G''$ и поэтому может быть по непрерывности распространен до непрерывного оператора $A' \otimes A''$, действующего из всего $H' \otimes H''$ в $G' \otimes G''$. При этом

$$\| A' \otimes A'' \| = \| A' \| \| A'' \|. \tag{2.4}$$

Мы опять ограничимся доказательством этого утверждения в сепарабельном случае. Удобно поступить следующим образом: определим сперва $A' \otimes A''$ несколько иным способом сразу на всем $H' \otimes H''$ и покажем его непрерывность. Затем убедимся, что этот оператор на элементах типа $\sum\limits_j f'_j \otimes f''_j$ действует по формуле (2.3).

Пусть e'_j и e''_k $(j, k = 1, 2, \ldots)$ — произвольные ортонормированные базисы в H' и H'' соответственно. Будем интерпретировать элементы $H' \otimes H''$ как векторы $F = \sum\limits_{j,k=1}^{\infty} F_{jk} e'_j \otimes e''_k$ и положим

$$AF = \sum_{j,k=1}^{\infty} F_{jk} (A'e'_j) \otimes (A''e''_k). \tag{2.5}$$

Покажем, что этот ряд сходится в смысле слабой сходимости в $G' \otimes G''$ и оператор A непрерывно действует из $H' \otimes H''$ в $G' \otimes G''$. В самом деле, пусть l'_α и l''_β $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$ — некоторые ортонормированные базисы в G' и G'', $l'_\alpha \otimes l''_\beta$ — ортонормированный базис в $G' \otimes G''$, $U = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{\infty} U_{\alpha\beta} l'_\alpha \otimes l''_\beta \in G' \otimes G''$ произвольно. Обозначим F_k вектор из H' с координатами F_{jk} по базису e'_j, аналогично U_α обозначен вектор из G'' с координатами $U_{\alpha\beta}$ по базису l''_β. Пусть A''^* сопряженный оператор к A'', т. е. $(A''f'', g'')_{G''} = (f'', A''^* g'')_{H''}$ $(f'' \in H''$, $g'' \in G'')$. Обозначая $\sum\limits_{j,k}$ некоторую конечную сумму и считая, что для индексов, не фигурирующих в этой сумме, $F_{jk} = 0$, получим

$$\left| \left(\sum_{j,k} F_{jk} (A'e'_j) \otimes (A''e''_k), U \right)_{G' \otimes G''} \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{j,k} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} F_{jk} \bar{U}_{\alpha\beta} (A'e'_j, l'_\alpha)_{G'} (A''e''_k, l''_\beta)_{G''} \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{j,k} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} (A'e'_j, l'_\alpha)_{G'} F_{jk} \overline{(A''^* l''_\beta, e''_k)_{H''} U_{\alpha\beta}} \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_k \sum_{\alpha=1}^{\infty} (A'F_k, l'_\alpha)_{G'} \overline{(A''^*U_\alpha, e''_k)_{H''}} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \sum_{\alpha=1}^{\infty} |(A'F_k, l'_\alpha)_{G'}|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\infty} |(A''^*U_\alpha, e''_k)_{H''}|^2 =$$

$$= \sum_k \| A'F_k \|^2_{G'} \cdot \sum_{\alpha=1}^{\infty} \| A''^*U_\alpha \|^2_{H''} \leqslant \| A' \|^2 \| A''^* \|^2 \sum_k \| F_k \|^2_{H'} \cdot \sum_{\alpha=1}^{\infty} \| U_\alpha \|^2_{G''} =$$

$$= \| A' \|^2 \| A'' \|^2 \sum_{j,k} | F_{jk} |^2 \cdot \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} | U_{\alpha\beta} |^2.$$

Так как здесь U произвольно, то из полученного неравенства вытекает слабая сходимость в $G' \otimes G''$ ряда (2.5) и оценка $\| AF \|_{G' \otimes G''} \leqslant \leqslant \| A' \| \| A'' \| \| F \|_{H' \otimes H''}$. Следовательно, A непрерывно действует из $H' \otimes H''$ в $G' \otimes G''$, причем

$$\| A \| \leqslant \| A' \| \| A'' \|. \tag{2.6}$$

Подсчитаем A на $F = \sum_\gamma f'_\gamma \otimes f''_\gamma$. Обозначая $f'_{\gamma,j}$ и $f''_{\gamma,k}$ координаты по базисам e'_j и e''_k, получим согласно (2.3)

$$AF = A\left(\sum_{j,k=1}^{\infty} \left(\sum_\gamma f'_{\gamma,j} f''_{\gamma,k} \right) e'_j \otimes e''_k \right) =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{\infty} \left(\sum_\gamma f'_{\gamma,j} f''_{\gamma,k} \right) (A'e'_j) \otimes (A''e''_k) = \sum_\gamma (A'f'_\gamma) \otimes (A''f''_\gamma) = (A' \otimes A'') F.$$

Итак, наш непрерывный и корректно определенный оператор A совпадает с определенным посредством (2.3) оператором $A' \otimes A''$. Это гарантирует правильность определения оператора $A' \otimes A''$ и его непрерывность. Соотношение (2.4) следует из (2.6) и равенства $\| (A' \otimes A'')(f' \otimes f'') \|_{G' \otimes G''} = \| A'f' \|_{G'} \| A''f'' \|_{G''}$, вытекающего из (2.3) и определения нормы в $H' \otimes H''$. Наше утверждение доказано.

Отметим простые свойства тензорного произведения операторов:

$$\begin{gathered} (A' + B') \otimes A'' = A' \otimes A'' + B' \otimes A'', \\ A' \otimes (A'' + B'') = A' \otimes A'' + A' \otimes B'', \\ \lambda(A' \otimes A'') = (\lambda A') \otimes A'' = A' \otimes (\lambda A''), \\ (C' \otimes C'')(A' \otimes A'') = (C'A') \otimes (C''A''), \\ (A' \otimes A'')^* = A'^* \otimes A''^*. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Эти свойства немедленно вытекают из определения (2.3). В частности, четвертое из соотношений (2.7) влечет коммутируемость любых двух операторов вида $E' \otimes A''$ и $A' \otimes E''$, где E', E'' — единичные операторы. Заметим, что $(A' \otimes A'')^{-1} = A'^{-1} \otimes A''^{-1}$.

В дальнейшем мы будем также пользоваться тензорным произведением $A' \otimes A''$ операторов A' и A'' с областями определения $\mathfrak{D}(A')$ и $\mathfrak{D}(A'')$, по крайней мере один из которых неограничен. Примем в качестве $\mathfrak{D}(A' \otimes A'')$ тензорное произведение $\mathfrak{D}(A') \otimes \mathfrak{D}(A'')$ линейных множеств $\mathfrak{D}(A')$ и $\mathfrak{D}(A'')$ и определим $A' \otimes A''$ посредством формулы (2.3), где $f'_j \in \mathfrak{D}(A'), f''_j \in \mathfrak{D}(A'')$. Из сказанного ранее следует, что такое определение корректно (отметим, что в случае непрерывных A' и A'' мы дополнительно еще переходили к расширению по непрерывности).

2. Тензорные произведения пространств с позитивной и негативной нормами. Пусть имеем две цепочки позитивных, нулевых и негативных пространств:

$$H'_- \supseteq H'_0 \supseteq H'_+, \quad H''_- \supseteq H''_0 \supseteq H''_+. \tag{2.8}$$

Тензорно перемножая эти пространства, найдем

$$H'_- \otimes H''_- \supseteq H'_0 \otimes H''_0 \supseteq H'_+ \otimes H''_+.$$

Элементы полученных пространств обычно будем обозначать соответственно $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots$; $F, G, \ldots$ и $U, V, \ldots$; понятия, относящиеся к первой цепочке в (2.8), будем отмечать одним штрихом, ко второй — двумя.

Ясно, что оператор вложения O пространства $H'_+ \otimes H''_+$ в $H'_0 \otimes H''_0$ равен $O' \otimes O''$, и поэтому $\|O\| = \|O'\| \, \|O''\| \leqslant 1$ согласно общему равенству (2.4); следовательно, $\|U\|_{H'_0 \otimes H''_0} = \|OU\|_{H'_0 \otimes H''_0} \leqslant \leqslant \|U\|_{H'_+ \otimes H''_+}$. Учитывая, что $H'_+ \otimes H''_+$ плотно в $H'_0 \otimes H''_0$, мы можем принять $H'_+ \otimes H''_+$ в качестве позитивного пространства по отношению к $H'_0 \otimes H''_0$.

Теорема 2.1. *Примем $\mathscr{H}_0 = H'_0 \otimes H''_0$ в качестве пространства с нулевой нормой и $\mathscr{H}_+ = H'_+ \otimes H''_+$ — в качестве пространства с позитивной нормой. Тогда $H'_- \otimes H''_-$ совпадает с соответствующим негативным пространством $\mathscr{H}_-$. Операторы I, $\mathbf{I}$, D, $\mathbf{D}$, J, $\mathbf{J}$ равны тензорным произведениям соответствующих операторов для первой и второй цепочек в (2.8) (например, $I = I' \otimes I''$).*

Доказательство. Прежде всего отметим, что из равенства

$O = O' \otimes O''$ и общего соотношения $(A' \otimes A'')^* = A'^* \otimes A''^*$ следует

$$I = I' \otimes I''. \tag{2.9}$$

Для построения пространства $\mathcal{H}_-$ нужно замкнуть $H'_0 \otimes H''_0$ по скалярному произведению $(F, G)_- = (IF, G)_{H'_0 \otimes H''_0}$, но так как в $H'_0 \otimes H''_0$ плотны элементы вида $\sum_j f'_j \otimes f''_j$ (сумма конечная), то достаточно по этому скалярному произведению замыкать совокупность таких элементов. Но согласно (2.2)

$$\left(\sum_j f'_j \otimes f''_j, \sum_k g'_k \otimes g''_k\right)_- = \left(\sum_j (I'f'_j) \otimes (I''f''_j), \sum_k g'_k \otimes g''_k\right)_{H'_0 \otimes H''_0} =$$

$$= \sum_{j,k} (I'f'_j, g'_k)_{H'_0} (I''f''_j, g''_k)_{H''_0} = \sum_{j,k} (f'_j, g'_k)_{H'_-} (f''_j, g''_k)_{H''_-} =$$

$$= \left(\sum_j f'_j \otimes f''_j, \sum_k g'_k \otimes g''_k\right)_{H'_- \otimes H''_-},$$

откуда следует, что рассматриваемое замыкание совпадает с замыканием по норме в $H'_- \otimes H''_-$, последнее же дает, очевидно, все $H'_- \otimes H''_-$. Итак,

$$\mathcal{H}_- = H'_- \otimes H''_-. \tag{2.10}$$

Далее, из (2.10) легко следует, что $\mathbf{I} = \mathbf{I}' \otimes \mathbf{I}''$: благодаря (2.9)

$$\mathbf{I}\left(\sum_j f'_j \otimes f''_j\right) = \sum_j (\mathbf{I}'f'_j) \otimes (\mathbf{I}''f''_j) \quad (f'_j \in H'_0, f''_j \in H''_0) \tag{2.11}$$

(сумма конечная). Пусть $f'_{jn} \to \alpha'_j \in H'_-$ при каждом j ($n \to \infty$, сходимость в H'_-), аналогично $f''_{jn} \to \alpha''_j \in H''_-$ в H''_-. Записывая (2.11) для этих последовательностей и переходя к пределу, найдем, что равенство $\mathbf{I} = \mathbf{I}' \otimes \mathbf{I}''$ справедливо на элементах вида $\sum_j \alpha'_j \otimes \alpha''_j$, а значит и всюду. Указанный предельный переход можно совершить благодаря непрерывности тензорного произведения относительно сомножителей, непрерывности операторов $\mathbf{I}, \mathbf{I}'$ и $\mathbf{I}''$ и равенству (2.10).

Для оператора $\hat{I} = OI$, согласно $O = O' \otimes O''$ и (2.9), благодаря общему равенству $(C' \otimes C'')(A' \otimes A'') = (C'A') \otimes (C''A'')$ имеем: $\hat{I} = \hat{I}' \otimes \hat{I}''$. Из этого же общего соотношения заключаем: $J' \otimes J'' = \sqrt{\hat{I}'} \otimes \sqrt{\hat{I}''} = \sqrt{\hat{I}} = J$. Замыкая (подобно случаю оператора $\mathbf{I}$) равенство $J = J' \otimes J''$, найдем $\mathbf{J} = \mathbf{J}' \otimes \mathbf{J}''$. Переходя в последних двух равенствах к обратным операторам, получим аналогичные представления для D и $\mathbf{D}$. Теорема доказана.

Рассмотрим две цепочки пространства типа (1.10):

$$H'_{-2} \supseteq H'_{-1} \supseteq H'_0 \supseteq H'_{+1} \supseteq H'_{+2}, \quad H''_{-2} \supseteq H''_{-1} \supseteq H''_0 \supseteq H''_{+1} \supseteq H''_{+2}.$$

Обозначим $\mathcal{H}_j = H'_j \otimes H''_j$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2$). Такое обозначение корректно: если $\mathcal{H}_0$ принять в качестве пространства с нулевой нормой, то $\mathcal{H}_{+1}$ и $\mathcal{H}_{+2}$ можно рассматривать как пространства с позитивной нормой, причем $\mathcal{H}_{+2}$ плотно в $\mathcal{H}_{+1}$. Соответствующее $\mathcal{H}_{+1} = H'_{+1} \otimes H''_{+1}$ пространство с негативной нормой согласно доказанной теореме будет совпадать с $H'_{-1} \otimes H''_{-1} = \mathcal{H}_{-1}$, аналогичная картина будет и с $\mathcal{H}_{+2}$. Итак, цепочка пространств

$$\mathcal{H}_{-2} \supseteq \mathcal{H}_{-1} \supseteq \mathcal{H}_0 \supseteq \mathcal{H}_{+1} \supseteq \mathcal{H}_{+2}$$

обладает всеми свойствами цепочки (1.10).

Рассмотрим оператор A, действующий непрерывно из всего $\mathcal{H}_k$ в $\mathcal{H}_l$ ($k, l \geqslant 0$); согласно сказанному на стр. 49, существует сопряженный оператор A^+, удовлетворяющий равенству $(\mathrm{A}, AU)_0 = (A^+\mathrm{A}, U)_0$ ($\mathrm{A} \in \mathcal{H}_{-l}, U \in \mathcal{H}_k$). Пусть A' и A'' непрерывно действуют соответственно из H'_k в H'_l и из H''_k в H''_l (k, $l \geqslant 0$), оператор $A = A' \otimes A''$ будет непрерывным из $\mathcal{H}_k$ в $\mathcal{H}_l$. Нетрудно подсчитать, что

$$(A' \otimes A'')^+ = A'^+ \otimes A''^+. \tag{2.12}$$

3. Обобщенные ядра. Предварительно напомним понятия, связанные с обычными ядрами. Пусть Q — некоторое множество. Комплекснозначная функция $K(x, y)$ точки $(x, y) \in Q \times Q$ называется ядром. Ядро называется эрмитовым, если $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ $(x, y \in Q)$, и положительно определенным, если для любого конечного набора точек $x_1, \ldots, x_N \in Q$ и любых комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_N$

$$\sum_{j,k=1}^{N} K(x_j, x_k)\, \xi_k \bar{\xi}_j \geqslant 0.$$

Иными словами последнее условие означает, что любая матрица $\| K(x_j, x_k) \|_1^N$ неотрицательна. Отсюда следует эрмитовость положительно определенного ядра и неравенство $|K(x, y)|^2 \leqslant K(x, x) K(y, y)$ $(x, y \in Q)$.

Можно дать наряду с приведенными «точечными» определениями «интегральные» определения. Пусть Q — локально компактное сепарабельное пространство, dx — некоторая мера, заданная на борелевских множествах из Q, конечная на компактных множествах и положительная на открытых. Функция $K(x, y)$ точки $(x, y) \in Q \times Q$, локально суммируемая относительно меры $dxdy$, также называется ядром. Оно эрмитово, если для любых $u, v \in C(Q)$ с компактными носителями справедливо равенство $B_K(u, v) = B_K(v, u)$ (эрмитовость) для билинейной формы

$$B_K(u, v) = \int\limits_Q \int\limits_Q K(x, y)\, u(y)\, \overline{v(x)}\, dxdy.$$

Эрмитовость ядра, очевидно, эквивалентна равенству: $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ почти для всех $(x, y) \in Q \times Q$. Если для любой рассматриваемой u $B_K(u, u) \geqslant 0$, то ядро $K(x, y)$ называется положительно определенным. В силу неравенства Коши—Буняковского $|B_K(u, v)|^2 \leqslant B_K(u, u)\, B_K(v, v)$, откуда почти для всех $(x, y) \in Q \times Q$ вытекает неравенство $|K(x, y)|^2 \leqslant K(x, x)\, K(y, y)$, если только поведение $K(x, y)$ вблизи диагонали $x = y$ «достаточно хорошее». Нетрудно убедиться, что, например, для непрерывных относительно точки $(x, y) \in Q \times Q$ ядер $K(x, y)$ оба определения положительной определенности — точечное и интегральное — эквивалентны.

Перейдем к обобщению приведенных понятий. Подобно тому, как это делается в теории обобщенных функций Л. Шварца, введем понятие обобщенного ядра, при этом роль пространства основных функций одной переменной будет играть произвольное пространство H_+ с позитивной нормой, в котором введена некоторая инволюция, абстрактно описывающая переход от функции $u(x)$ к $\overline{u(x)}$.

Итак, пусть имеется цепочка пространств

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+. \tag{2.13}$$

Предположим, что в H_0 введена инволюция $f \to \bar{f}$. Будем считать, что H_+ инвариантно по отношению к этой инволюции и $(\bar{u}, \bar{v})_+ = \overline{(u, v)_+}$, иными словами, что $u \to \bar{u}$ является инволюцией и в H_+. Беря изометричный образ оператора инволюции, получим инволюцию в H_-. Точнее, она задается соотношением

$$\alpha \to \bar{\alpha} = \mathbf{I}^{-1}\,(\overline{\mathbf{I}\alpha}) \qquad (\alpha \in H_-). \tag{2.14}$$

То, что соотношение (2.14) — инволюция в H_-, проверяется непосредственно. Существенно, что на H_0 она совпадает с прежней. Действительно,

$$(\overline{If}, u)_+ = (\bar{f}, u)_0 = \overline{(\bar{u}, f)_0} = \overline{(\bar{u}, If)_+} = (\overline{If}, u)_+$$

$$(f \in H_0,\ u \in H_+),$$

т. е. $I\bar{f} = \overline{If}$, что и вызывает совпадение на H_0 инволюции (2.14) с прежней.

Оператор A, действующий из какого-то пространства цепочки (2.13) в другое пространство этой цепочки, называется вещественным, если

$\mathfrak{D}(A)$ инвариантна по отношению к инволюции и $A\bar{\alpha} = \overline{A\alpha}$ ($\alpha \in \mathfrak{D}(A)$). Из равенства (2.14) следует, что $\mathbf{I}$ вещественный. Вещественность $\mathbf{I}$, как нетрудно понять, влечет вещественность D, $\mathbf{D}$, J и $\mathbf{J}$.

Перейдем к определению обобщенного ядра. Пусть имеется цепочка (2.13) пространств с инволюцией. Построим цепочку

$$H_- \otimes H_- \supseteq H_0 \otimes H_0 \supseteq H_+ \otimes H_+.$$

Согласно теореме 2.1 ее можно понимать как оснащение $\mathcal{H}_0 = H_0 \otimes H_0$ пространствами $\mathcal{H}_+ = H_+ \otimes H_+$ и $\mathcal{H}_- = H_- \otimes H_-$. Всякий элемент K из $H_- \otimes H_-$ будем называть обобщенным ядром. Если $K \in H_0 \otimes H_0$ или $K \in H_+ \otimes H_+$, то K будем называть соответственно просто ядром или гладким ядром.

Каждому обобщенному ядру K отвечает по аналогии с формой $\int\limits_Q \int\limits_Q K(x, y)\, u(y)\, \overline{v(x)}\, dx dy$ для обычного ядра $K(x, y)$ билинейная форма B_K:

$$B_K(u, v) = (K, v \otimes \bar{u})_0 \qquad (u, v \in H_+), \tag{2.15}$$

непрерывная относительно сходимости u и v в H_+ (непрерывность следует из того, что $\|v \otimes \bar{u}\|_{H_+ \otimes H_+} = \|v\|_{H_+} \|u\|_{H_+}$). Ясно, что форма B_K полностью определяет ядро K, т.е. функция $(K, U)_0$ ($U \in H_+ \otimes H_+$) определяется функцией $B_K(u, v)$ ($u, v \in H_+$). Однако нужно иметь в виду, что не всякая билинейная форма над H_+ порождается по (2.15) некоторым обобщенным ядром (см. п. 4).

Обобщенное ядро K назовем эрмитовым (положительно определенным), если форма $B_K(u, v)$ эрмитова (положительно определенная). Ясно, что всякое положительно определенное ядро будет автоматически эрмитовым.

Теория обобщенных ядер является частным случаем построений § 1, поэтому общие результаты, полученные в нем, справедливы и для таких ядер. Мы их здесь не будем специально повторять. Отметим лишь следующее важное обстоятельство: пусть $K \in H_0 \otimes H_0$ — обычное ядро, A' и A'' — два оператора, непрерывно действующие из H_+ в H_0. Тогда из (2.12) следует, что существует обобщенное ядро $\Phi \in H_- \otimes H_-$ (именно, $\Phi = (A'^+ \otimes A''^+) K$) такое, что

$$(K, (A' \otimes A'') U)_0 = (\Phi, U)_0 \qquad (U \in H_+ \otimes H_+). \tag{2.16}$$

В случае вещественных операторов A' и A'' соотношение (2.16) удобно записать в терминах билинейных форм. Для этого, полагая в нем $U = v \otimes \bar{u}$, получим эквивалентные (2.16) равенства

$$(K, (A'v) \otimes \overline{(A''u)})_0 = (\Phi, v \otimes \bar{u})_0 \text{ или } B_K(A''u, A'v) = B_\Phi(u, v) \tag{2.17}$$
$$(u, v \in H_+).$$

4. Теорема о ядре. Установим в абстрактном виде теорему Л. Шварца о том, что всякая непрерывная билинейная форма может быть записана посредством обобщенного ядра. Ниже предполагается сепарабельность H_+ и, следовательно, H_0, H_-.

Напомним, что оператор C, действующий из сепарабельного гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, называется оператором Гильберта — Шмидта, если для некоторого (а значит, и для любого) ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots$ пространства H_1 сходится ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|Ce_j\|^2_{H_2}$.* Пусть пространство H_1 вложено в H_2, говорят, что такое вложение квазиядерно, если оператор вложения — оператор Гильберта — Шмидта.

Теорема 2.2. *Пусть имеется цепочка $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ пространств с инволюцией, причем вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно. Тогда всякая непрерывная билинейная форма $B(f, g)$ над пространством H_0 может быть записана посредством обобщенного ядра $\Phi \in H_- \otimes H_-$:*

$$B(u, v) = (\Phi, v \otimes \bar{u})_0 \qquad (u, v \in H_+). \tag{2.18}$$

Это ядро имеет вид $\Phi = (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) K$, где $K \in H_0 \otimes H_0$ — обычное ядро; более того, K выдерживает применение одного из операторов $\mathbf{D} \otimes E$ или $E \otimes \mathbf{D}$: ядра $(\mathbf{D} \otimes E) K$, $(E \otimes \mathbf{D}) K \in H_0 \otimes H_0$, т. е. обычные. Таким образом, равенство (2.18) может быть записано в одной из форм:

$$B(u, v) = ((\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) K, v \otimes \bar{u})_0 = (K, (Dv) \otimes \overline{(Du)})_0 \tag{2.19}$$
$$(u, v \in H_+),$$

$$B(u, g) = ((E \otimes \mathbf{D}) (\mathbf{D} \otimes E) K, g \otimes \bar{u})_0 = ((\mathbf{D} \otimes E) K, g \otimes \overline{(Du)})_0$$
$$(u \in H_+, g \in H_0), \tag{2.20}$$

$$B(f, v) = ((\mathbf{D} \otimes E) (E \otimes \mathbf{D}) K, v \otimes \bar{f})_0 = ((E \otimes \mathbf{D}) K, (Dv) \otimes \bar{f})_0$$
$$(f \in H_0, v \in H_+). \tag{2.21}$$

Обратно, если каждую непрерывную билинейную форму $B(f, g)$ над H_0 можно записать в одном из видов $B(u, g) = (K_1, g \otimes \overline{(Du)})_0$ $(u \in H_+, g \in H_0)$ или $B(f, v) = (K_2, (Dv) \otimes \bar{f})_0$ $(f \in H_0, v \in H_+)$, где K_1, $K_2 \in H_0 \otimes H_0$, то вложение $H_+ \to H_0$ обязательно квазиядерно.

Доказательство основывается на следующем простом факте.

Лемма 2.1. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с инволюцией, C — ограниченный оператор, действующий в нем. Форма $(Cf, g)_H$ может быть записана в виде $(K, g \otimes \bar{f})_{H \otimes H}$ $(f, g \in H)$, где K — некоторый элемент $H \otimes H$, тогда и только тогда, когда C является оператором Гильберта—Шмидта.*

* См. также стр. 320 — 322.

В самом деле, пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированный базис в H, тогда и $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots$ — такой же базис. Векторы $e_j \otimes \bar{e}_k$ составляют ортонормированный базис в $H \otimes H$, поэтому, если равенство

$$(Cf, g)_H = (K, g \otimes \bar{f})_{H \otimes H} \qquad (f, g \in H)$$

имеет место, то

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |(Ce_k, e_j)_H|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |(K, e_j \otimes \bar{e}_k)_{H \otimes H}|^2 = \| K \|^2_{H \otimes H} < \infty$$

и C — оператор Гильберта — Шмидта. Наоборот, пусть C — оператор Гильберта — Шмидта, т. е. $\sum_{j,k=1}^{\infty} |(Ce_k, e_j)_H|^2 < \infty$. Тогда в качестве K можно взять элемент из $H \otimes H$, координатами которого по базису $e_j \otimes \bar{e}_k$ служат числа $(Ce_k, e_j)_H$; очевидно, $(Cf, g)_H = (K, g \otimes \bar{f})_{H \otimes H} (f, g \in H)$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Прежде всего заметим, что *квазиядерность вложения $H_+ \to H_0$ эквивалентна тому, что J, рассматриваемый как оператор в H_0, будет оператором Гильберта — Шмидта (т. е. $\hat{J} = OJ$ — Гильберта — Шмидта).*

Действительно, пусть вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно, поэтому если $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированный базис в H_+, то $\sum_{j=1}^{\infty} \| e_j \|_0^2 < \infty$. Иными словами, $\sum_{j=1}^{\infty} \| \hat{J} l_j \|_0^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \| e_j \|_0^2 < \infty$, где $l_j = De_j$ — ортонормированный базис в H_0, т. е. $\hat{J}$ — оператор Гильберта — Шмидта. Обращая рассуждение, получим квазиядерность $H_+ \to H_0$ из того, что $\hat{J}$ — оператор Гильберта — Шмидта.

Итак, пусть вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно. Форму $B(f, g)$ можно записать в виде $B(f, g) = (Af, g)_0$ $(f, g \in H_0)$, где A — непрерывный оператор в H_0. Положим $C = \hat{J} A \hat{J}$. Оператор C в H_0 есть оператор Гильберта — Шмидта, так как хорошо известно, что даже произведение двух действующих в некотором пространстве ограниченных операторов, из которых один оператор Гильберта — Шмидта, будет оператором Гильберта — Шмидта. Применим лемму 2.1, обозначая через $K \in H_0 \otimes H_0$ соответствующее ядро. Получим для любых $u, v \in H_+$

$$B(u, v) = (Au, v)_0 = (A\hat{J}Du, \hat{J}Dv)_0 = (CDu, Dv)_0 = (K, (Dv) \otimes (\overline{Du}))_0 =$$

$$= (K, (Dv) \otimes (D\bar{u}))_0 = (K, (D \otimes D)(v \otimes \bar{u}))_0 = ((D \otimes D)^+ K, v \otimes \bar{u})_0 =$$
$$= ((D^+ \otimes D^+) K, v \otimes \bar{u})_0 = ((\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) K, v \otimes \bar{u})_0,$$

т. е. (2.19) установлено.

Покажем, что $(\mathbf{D} \otimes E) K \in H_0 \otimes H_0$. Действительно, для $u, v \in H_+$ имеем

$$((\mathbf{D} \otimes E) K, v \otimes \bar{u})_0 = (K, (D \otimes E)(v \otimes \bar{u}))_0 = (K, (Dv) \otimes \bar{u})_0 =$$
$$= (\hat{J} A \hat{J} u, Dv)_0 = (A \hat{J} u, v)_0 = (K_1, v \otimes \bar{u})_0, \tag{2.22}$$

где $K_1 \in H_0 \otimes H_0$ — ядро, построенное согласно лемме 2.1 по оператору Гильберта — Шмидта $A\hat{J}$. Благодаря произвольности u, v из (2.22) следует, что $(\mathbf{D} \otimes E) K = K_1 \in H_0 \otimes H_0$, что и требовалось доказать. Доказательство включения $(E \otimes \mathbf{D}) K \in H_0 \otimes H_0$ аналогично.

Докажем обратное утверждение теоремы. Пусть для любой формы $B(f, g)$ справедливо, например, представление $B(u, g) = (K_1, g \otimes (\overline{Du}))_0$ с $K_1 \in H_0 \otimes H_0$. Полагая $B(f, g) = (f, g)_0$, получим

$$(\hat{J} f, g)_0 = B(\hat{J} f, g) = (K_1, g \otimes (\overline{DJf}))_0 = (K_1, g \otimes \bar{f})_0 \quad (f, g \in H_0).$$

Согласно лемме 2.1, отсюда следует, что $\hat{J}$ — оператор Гильберта — Шмидта, т. е. вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно. Теорема полностью доказана.

Требование наличия инволюции в пространствах цепочки $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ обусловливалось лишь удобным для нас способом построения формы по ядру (см. (2.15)). Без этого предположения, ясно, можно было бы также доказать подобную теорему. Вообще теорема 2.2 является по существу объединением двух простых фактов: леммы 2.1 и того обстоятельства, что произведение двух ограниченных операторов, из которых один — оператор Гильберта — Шмидта, будет оператором Гильберта — Шмидта.

В заключение заметим, что *квазиядерность вложения* $H_+ \to H_0$ *эквивалентна квазиядерности вложения* $H_0 \to H_-$. Это немедленно следует из того, что ортонормированные базисы в пространствах H_+ и H_0 переводятся друг в друга операторами D и J и из свойств изометрии $\mathbf{D}$ и $\mathbf{J}$.

§ 3. Примеры систем обобщенных функций

1. Соболевские пространства. Пусть G — ограниченная область n-мерного пространства E_n с кусочно гладкой границей Γ. Примем в качестве нулевого пространства $L_2(G) = W_2^0(G)$, а в качестве позитивного — соболевское пространство $W_2^l(G)$ $(l = 1, 2, \ldots)$;

соответствующее негативное пространство, состоящее из обобщенных функций, обозначим $W_2^{-l}(G)$. Скалярное произведение и норму в пространстве $W_2^k(G)$ $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ будем обозначать соответственно $(\cdot\,,\,\cdot)_k$ и $\|\cdot\|_k$. Мы получим следующие соотношения (см. (1.10)):

$$\ldots \supseteq W_2^{-2}(G) \supseteq W_2^{-1}(G) \supseteq W_2^0(G) \supseteq W_2^1(G) \supseteq W_2^2(G) \supseteq \ldots,$$
$$\ldots \leqslant \|u\|_{-2} \leqslant \|u\|_{-1} \leqslant \|u\|_0 \leqslant \|u\|_1 \leqslant \|u\|_2 \leqslant \ldots, \qquad (3.1)$$

причем каждое пространство $W_2^l(G)$ плотно в каждом $W_2^k(G)$, если $k < l$ $(k, l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Операторы $I, \mathbf{I}, J, \ldots$, построенные для цепочки $W_2^{-l}(G) \supseteq W_2^0(G) \supseteq W_2^l(G)$, будем отмечать индексом l.

Подобно тому, как это сделано в примере на стр. 48, можно показать, что каждый оператор I_l является интегральным, ядром которого служит функция Грина некоторой краевой задачи для эллиптического дифференциального уравнения порядка $2l$, получающегося при перебрасывании в выражении для скалярного произведения $(u, v)_l$ всех производных на u. На этом пути можно изучать свойства пространств $W_2^{-l}(G)$, однако такой подход громоздок, мы им не будем пользоваться и поступим иначе.

Из теорем вложения (см. стр. 31) следует, что при $l > \frac{n}{2}$ $W_2^l(G) \subset C$ $(C = C(G \cup \Gamma)$ — пространство непрерывных функций на $G \cup \Gamma)$ и соответствие $u \to u(\xi)$ $(u \in W_2^l(G),\ \xi \in G \cup \Gamma)$ непрерывно, поэтому $f(u) = u(\xi)$ является функционалом над $W_2^l(G)$ и может быть записано в терминах $W_2^{-l}(G)$: найдется такое $\delta_\xi \in W_2^{-l}(G)$, что

$$(u, \delta_\xi)_0 = \overline{(\delta_\xi, u)_0} = u(\xi) \qquad (u \in W_2^l(G), \xi \in G \cup \Gamma). \qquad (3.2)$$

Итак, при $l > \frac{n}{2}$ определена и входит в $W_2^{-l}(G)$ обобщенная функция δ_ξ — δ-функция, сосредоточенная в ξ. Для нее справедливо (3.2).

Лемма 3.1. *δ_ξ является непрерывной вектор-функцией от $\xi \in G \cup \Gamma$ со значениями в $W_2^{-l}(G)$ $\left(l > \frac{n}{2}\right)$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор вложения O, действующий из пространства $W_2^l(G)$ в C. Как известно, O вполне непрерывен. Перейдем к сопряженным пространствам. Так как $W_2^l(G) \subset C$ и $\|u\|_C \leqslant A\|u\|_l$, то $W_2^{-l}(G) \supset C'$ и $\|\alpha\|_{-l} \leqslant A\|\alpha\|_{C'}$. Оператор O^*, сопряженный к оператору вложения, действует из C' в $W_2^{-l}(G)$ и относит каждому функционалу из C' его же; так как O вполне непрерывен, то и O^* вполне непрерывен. Пусть теперь $\xi_n \to \xi$ $(\xi_n,$

$\xi \in G \cup \Gamma$), предположим, что $\delta_{\xi_n} \not\to \delta_\xi$ в $W_2^{-l}(G)$. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\delta_{\xi'_n}$ последовательности δ_{ξ_n} такие, что

$$\| \delta_{\xi'_n} - \delta_\xi \|_{-l} \geqslant \varepsilon_0. \tag{3.3}$$

Если δ_y рассматривать как функционал из C', то $\| \delta_y \|_{C'} = 1$. В силу полной непрерывности оператора вложения O^* последовательность $\delta_{\xi'_n}$ предкомпактна в $W_2^{-l}(G)$; выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\delta_{\xi'_{n_k}}$, $\delta_{\xi'_{n_k}} \to \alpha \in W_2^{-l}(G)$. При $u \in W_2^l(G)$ $(\alpha, u)_0 = \lim (\delta_{\xi'_{n_k}}, u)_0 = \lim \overline{u(\xi'_{n_k})} = \overline{u(\xi)} = (\delta_\xi, u)_0$, т. е. $\alpha = \delta_\xi$, а это противоречит (3.3). Лемма доказана.

Теорема 3.1. *При $l > \frac{n}{2}$ оператор $\hat{I}_l$ является интегральным с положительно определенным ядром $K(x, \xi)$, непрерывным относительно $(x, \xi) \in (G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma)$.*

Доказательство. Пусть $f \in L_2(G)$, согласно (1.7) имеем

$$(\hat{I}_l f)(x) = (I_l f, \delta_x)_0 = (f, \mathbf{I}_l \delta_x)_0 = \int_G \overline{(\mathbf{I}_l \delta_x)(\xi)} f(\xi)\, d\xi.$$

Положим $K(x, \xi) = (\mathbf{I}_l \delta_x)(\xi)$. Так как δ_x согласно лемме 3.1 непрерывно зависит от x, а $\mathbf{I}_l$ действует непрерывно из $W_2^{-l}(G)$ в $W_2^l(G)$, то $\mathbf{I}_l \delta_x$ является непрерывной вектор-функцией от $x \in G \cup \Gamma$ со значениями в $W_2^l(G)$. Но так как $\| u \|_l \geqslant \frac{1}{A} \| u \|_C$, то $\mathbf{I}_l \delta_x$ будет подобной функцией и со значениями в C, а это дает требуемую непрерывность $K(x, \xi)$ по (x, ξ). Положительная определенность $K(x, \xi)$ следует из неотрицательности $\hat{I}_l$. Теорема доказана.

Следствие 1. При $l > \frac{n}{2}$ оператор $\hat{I}_l$ имеет конечный след (т. е. для некоторого, а значит и для любого, ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots \in L_2(G)$ Сл. $(\hat{I}_l) = \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{I}_l e_j, e_j)_0 < \infty$)*.

Это вытекает из теоремы и следующего общего факта, доказываемого при помощи теоремы Мерсера: если K — интегральный оператор в $L_2(G)$ (G ограничена), ядро которого $K(x, \xi)$ положительно определено и непрерывно по $(x, \xi) \in (G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma)$, то Сл. $(K) < \infty$.

Следствие 2. При $l > \frac{n}{2}$ оператор $\hat{J}_l$ есть оператор Гильберта — Шмидта, т. е. вложение $W_2^l(G) \to L_2(G)$ квазиядерно.

---

* См. также стр. 320—322.

2. Обобщенные ядра. По цепочке пространств $W_2^k(G)$ в (3.1) построим цепочку тензорных произведений

$$\ldots \supseteq W_2^{-2}(G)\otimes W_2^{-2}(G)\supseteq W_2^{-1}(G)\otimes W_2^{-1}(G)\supseteq L_2(G\times G)\supseteq$$
$$\supseteq W_2^{1}(G)\otimes W_2^{1}(G)\supseteq W_2^{2}(G)\otimes W_2^{2}(G)\supseteq\ldots; \qquad (3.4)$$

здесь учтено, что $L_2(G)\otimes L_2(G)=L_2(G\times G)$ (операция $\otimes$ сейчас — обычное перемножение функций: $f(x)\otimes g(y)=f(x)g(y)$). Каждое пространство $W_2^{-l}(G)\otimes W_2^{-l}(G)$ является негативным пространством по отношению к позитивному пространству $W_2^{l}(G)\otimes W_2^{l}(G)$ и нулевому $L_2(G\times G)$ (теорема 2.1). Элементы из $W_2^{l}(G)\otimes W_2^{l}(G)$ будем называть гладкими, из $L_2(G\times G)$ — обычными и из $W_2^{-l}(G)\otimes W_2^{-l}(G)$—обобщенными ядрами ($l=1,2,\ldots$); обозначать их будем соответственно $U(x,y)$, $V(x,y),\ldots$; $K(x,y)$, $H(x,y),\ldots$ и Φ, $\Psi\ldots$.

Пусть $u(x)\in W_2^{l}(G)$; тогда дифференцирование D^α, $|\alpha|\leqslant l$ $\left(D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n},\ D_j=\frac{\partial}{\partial x_j},\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ |\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n\right)$ применимо к функции $u(x)$ и $D^\alpha u\in W_2^{l-|\alpha|}(G)$. Поэтому $D^\alpha\otimes D^\beta(|\alpha|,|\beta|\leqslant l)$ определен на $W_2^{l}(G)\otimes W_2^{l}(G)$ и переводит это пространство в $W_2^{l-|\alpha|}(G)\otimes W_2^{l-|\beta|}(G)$. Оператор $D^\alpha\otimes D^\beta$ совпадает с произведением конечного числа коммутирующих операторов вида $D_j\otimes E$ или $E\otimes D_j$. Это означает, что для $U(x,y)\in W_2^{l}(G)\otimes W_2^{l}(G)$ существуют и достаточно гладки все производные вида $\dfrac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial y_1^{\beta_1}\ldots\partial y_n^{\beta_n}}U$, причем результат не зависит от порядка дифференцирования.

Выясним связь между пространствами $W_2^k(G)\otimes W_2^k(G)$ и соболевскими пространствами $W_2^m(G\times G)$, построенными на области $G\times G$.

Теорема 3.2. Справедливы следующие включения и неравенства:

$$W_2^{-2l}(G\times G)\supseteq W_2^{-l}(G)\otimes W_2^{-l}(G)\supseteq L_2(G\times G)\supseteq W_2^{l}(G)\otimes W_2^{l}(G)\supseteq W_2^{2l}(G\times G),$$

$$\frac{1}{C}\|U\|_{W_2^{-2l}(G\times G)}\leqslant\|U\|_{W_2^{l}(G)\otimes W_2^{l}(G)}\leqslant\|U\|_{L_2(G\times G)}\leqslant\|U\|_{W_2^{l}(G)\otimes W_2^{l}(G)}\leqslant$$
$$\leqslant C\|U\|_{W_2^{2l}(G\times G)} \qquad (3.5)$$
$$(U\in W_2^{2l}(G\times G);\quad l=1,2,\ldots;\quad C>0),$$

причем каждое из пространств в цепочке (3.5) *плотно в любом, левее его стоящем.*

Доказательство. Прежде всего установим самое правое из неравенств (3.5). Пусть сперва U имеет вид

$$U(x, y) = \sum_j u_j'(x) u_j''(y) \tag{3.6}$$

($u_j', u_j'' \in W_2^{2l}(G)$, сумма конечна). Имеем

$$(U, U)_{W_2^{2l}(G\times G)} \geqslant (U, U)_{L_2(G\times G)} + \sum_{|\alpha|=l} (D_x^\alpha U, D_x^\alpha U)_{L_2(G\times G)} +$$

$$+ \sum_{|\beta|=l} (D_y^\beta U, D_y^\beta U)_{L_2(G\times G)} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=l} (D_x^\alpha D_y^\beta U, D_x^\alpha D_y^\beta U)_{L_2(G\times G)} =$$

$$= \sum_{j,k} \{(u_j', u_k')_{L_2(G)} (u_j'', u_k'')_{L_2(G)} + (u_j'', u_k'')_{L_2(G)} \sum_{|\alpha|=l} (D^\alpha u_j', D^\alpha u_k')_{L_2(G)} +$$

$$+ (u_j', u_k')_{L_2(G)} \sum_{|\beta|=l} (D^\beta u_j'', D^\beta u_k'')_{L_2(G)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|=l} (D^\alpha u_j', D^\alpha u_k')_{L_2(G)} (D^\beta u_j'', D^\beta u_k'')_{L_2(G)}\} =$$

$$= \sum_{j,k} (u_j', u_k')_{W_2^l(G)} (u_j'', u_k'')_{W_2^l(G)} = (U, U)_{W_2^l(G)\otimes W_2^l(G)}.$$

Здесь мы воспользовались выражением для скалярного произведения в W_2^l, содержащим только нулевые и l-е производные (см. стр. 30, (9)); в связи с этим в (3.5) появилась константа C. Итак, на функциях (3.6) справедливо неравенство $\|U\|_{W_2^l(G)\otimes W_2^l(G)} \leqslant C\|U\|_{W_2^{2l}(G\times G)}$. Пусть теперь $U \in W_2^{2l}(G\times G)$ произвольно, существует последовательность U_ν функций вида (3.6), сходящаяся к U в метрике $W_2^{2l}(G\times G)$. Так как U_ν фундаментальна в этой метрике, то благодаря доказанному неравенству U_ν фундаментальна и в метрике $W_2^l(G) \otimes W_2^l(G)$ и поэтому имеет предел в этом пространстве, который можно отождествить с U. На предельной функции наше неравенство сохранится. Таким образом доказана справедливость крайних справа включения и неравенства в (3.5). Плотность $W_2^{2l}(G\times G)$ в $W_2^l(G)\otimes W_2^l(G)$ следует из того, что функциями вида (3.6) можно приблизить любую функцию из $W_2^l(G) \otimes W_2^l(G)$. Остальные утверждения следуют из сказанного на стр. 49. Теорема доказана.

Теорема 3.2 показывает, что обобщенные ядра из $W_2^{-l}(G) \otimes W_2^{-l}(G)$, т. е. функционалы над $W_2^l(G) \otimes W_2^l(G)$ можно рассматривать как функционалы над более простым пространством $W_2^{2l}(G \times G)$. Это в некоторых случаях бывает полезно.

В пространствах $W_2^l(G)$ ($l = 0, 1, \ldots$) имеется естественная инволюция — переход от $u(x)$ к комплексно сопряженной функции $\overline{u}(x)$. Эта инволюция удовлетворяет наложенным в § 2 требованиям, поэтому она расширяется и на негативные пространства $W_2^{-l}(G)$. Ясно, что для рассматриваемых обобщенных ядер справедливы все соотношения, полученные ранее в абстрактном виде.

Сформулируем теперь применительно к нашим пространствам теорему 2.2 о ядре.

Теорема 3.3. *По каждой непрерывной билинейной форме $B(f, g)$ над пространством $L_2(G)$ и $l > \frac{n}{2}$ можно построить ядро $K(x, y)$, непрерывное по совокупности переменных (т. е. $K(x, y) \in C((G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma))$) и выдерживающее по каждой из них оператор $\mathbf{D}_l$ (т. е. $(\mathbf{D}_l \otimes E) K$, $(E \otimes \mathbf{D}_l) K \in L_2(G \times G)$), такое, что справедливо представление*

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_G \int_G K(x, y)(D_l u)(y)\overline{(D_l v)(x)}\,dxdy = \\ &= \int_G \int_G ((\mathbf{D}_l \otimes E) K)(x, y)(D_l u)(y)\overline{v(x)}\,dxdy = \\ &= \int_G \int_G ((E \otimes \mathbf{D}_l) K)(x, y)\, u(y)\overline{(\mathbf{D}_l v)(x)}\,dxdy = \\ &= ((\mathbf{D}_l \otimes \mathbf{D}_l) K, v(x)\overline{u(y)})_0 \quad (u, v \in W_2^l(G)) \end{aligned} \tag{3.7}$$

(*в представлении $B(u, v)$ посредством второго (третьего) интеграла $v(u)$ можно брать произвольной из $L_2(G)$*).

Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 2.2 и следствия 2 теоремы 3.1; в пояснении нуждается лишь непрерывность ядра $K(x, y)$. Согласно доказательству на стр. 64, $K(x, y)$ — ядро оператора $\hat{J}_l A \hat{J}_l$ в $L_2(G)$, где A построен по $B(f, g)$. Подсчитаем это ядро непосредственно. Так как $\hat{J}_l A \hat{J}_l f \in W_2^l(G)$ при $f \in L_2(G)$, то

$$\begin{aligned} (\hat{J}_l A \hat{J}_l f)(x) &= (J_l A \hat{J}_l f, \delta_x)_0 = (A \hat{J}_l f, \mathbf{J}_l \delta_x)_0 = (\hat{J}_l f, A^* \mathbf{J}_l \delta_x)_0 = \\ &= (f, \hat{J}_l A^* \mathbf{J}_l \delta_x)_0 = \int_G \overline{(J_l A^* \mathbf{J}_l \delta_x)(\xi)} f(\xi)\, d\xi, \end{aligned}$$

таким образом, $K(x, \xi) = \overline{(J_l A^* \mathbf{J}_l \delta_x)(\xi)}$. Согласно лемме 3.1 δ_x ($x \in G \cup \Gamma$) — непрерывная вектор-функция со значениями в $W_2^{-l}(G)$, поэтому $J_l A^* \mathbf{J}_l \delta_x$ — непрерывная вектор-функция со значениями в $W_2^l(G)$ (и подавно в $C(G \cup \Gamma)$). Отсюда и следует непрерывность K. Теорема доказана.

Приведем еще одну элементарную теорему о ядре, доказательство которой не зависит от развитой выше теории пространств с негативной нормой. Она существенно слабее теоремы 3.3, так как представление типа (3.7) будет справедливо лишь для финитных функций, однако часто эта теорема все же бывает полезной.

Ниже фигурирует область G, которая может быть и неограниченной (в частности, может совпадать со всем n-мерным пространством E_n). Рассмотрим характеристическую функцию замкнутого параллелепипеда в E_n, образованного координатными гиперплоскостями и параллельными им гиперплоскостями, проходящими через некоторую точку x. Произведение этой функции на характеристическую функцию $\varkappa(\xi)$ области G и на $(-1)^n \operatorname{sign} x_1 \ldots \operatorname{sign} x_n$, где $(x_1, \ldots, x_n) = x$, обозначим через $\omega(x, \xi)$ $(\xi \in G)$. Очевидно, $\omega(x, \cdot) \in L_2(G)$ и непрерывно зависит от $x \in E_n$ в смысле сходимости в $L_2(G)$. Положим

$$\mathrm{D} = D_1 \ldots D_n = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}. \tag{3.8}$$

Теорема 3.4. *Пусть $B(f, g)$ — непрерывная билинейная форма над пространством $L_2(G)$. Для любых $u, v \in C_0^n(G)$ справедливо представление*

$$B(u, v) = \int_G \int_G K(x, y) (\mathrm{D}u)(y) \overline{(\mathrm{D}v)(x)}\, dx dy \tag{3.9}$$

с непрерывным относительно $(x, y) \in E_n \times E_n$ ядром $K(x, y) = (C\omega(y, \cdot), \omega(x, \cdot))_0$, где C — непрерывный оператор в $L_2(G)$, отвечающий $B(f, g)$:

$$(Cf, g)_0 = B(f, g) \; (f, g \in L_2(G)).$$

Здесь $C_0^n(G)$, как обычно, обозначает функции из $C^n(G)$, финитные относительно G и ∞.

Доказательство. Прежде всего установим равенство

$$\int_G (f, \omega(x, \cdot))_0 \overline{(\mathrm{D}u)(x)}\, dx = (f, u)_0 \; (f \in L_2(G), \; u \in C_0^n(G)). \tag{3.10}$$

Продолжая функции f и u нулями вне G и интегрируя по частям, получим

$$\int_G (f, \omega(x, \cdot))_0 \overline{(\mathrm{D}u)(x)}\, dx =$$

$$= (-1)^n \int_{E_n} \left(\int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_n} f(\xi) \varkappa(\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n \right) \overline{(\mathrm{D}u)(x)}\, dx =$$

$$= \int_{E_n} \mathrm{D}_x \left(\int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_n} f(\xi) \varkappa(\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n \right) \overline{u(x)}\, dx = (f, u)_0.$$

Используя (3.10), докажем (3.9):

$$\int_G \int_G (C\omega(y, \cdot), \ \omega(x, \cdot))_0 (\mathrm{D}u)(y) \overline{(\mathrm{D}v)(x)}\, dx dy =$$

$$= \int_G \left\{ \int_G (C\omega(y, \cdot), \ \omega(x, \cdot))_0 \overline{(\mathrm{D}v)(x)}\, dx \right\} (\mathrm{D}u)(y)\, dy =$$

$$= \int_G (C\omega(y, \cdot), \ v)_0 (\mathrm{D}u)(y)\, dy = \overline{\int_G (v, \ C\omega(y, \cdot))_0 \overline{(\mathrm{D}u)(y)}\, dy} =$$

$$= \overline{\int_G (C^* v, \ \omega(y, \cdot))_0 \overline{(\mathrm{D}u)(y)}\, dy} = \overline{(C^* v, u)_0} = \overline{(v, Cu)_0} = (Cu, v)_0.$$

Непрерывность ядра $(C\omega(y, \cdot), \ \omega(x, \cdot))_0$ следует из непрерывной зависимости $\omega(x, \cdot)$ от x как вектор-функции со значениями в $L_2(G)$. Теорема доказана.

Если ядро $K(x, y)$ окажется достаточно гладким, то операторы D в (3.9) можно интегрированием по частям на него перебросить, и мы получим обычное интегральное представление формы $B(u, v) = (Cu, v)_0$:

$$B(u, v) = (Cu, v)_0 = \int_G \int_G (\mathrm{D}_x \mathrm{D}_y K)(x, y)\, u(y)\, \overline{v(x)}\, dx dy. \qquad (3.11)$$

В общем случае производные от $K(x, y)$ существуют только в обобщенном смысле, и поэтому ядро, фигурирующее в (3.11), будет обобщенным (в смысле Л. Шварца).

В приведенной теореме, конечно, вместо дифференциального выражения D вида (3.8) можно было бы брать любое дифференциальное выражение порядка r, обладающее тем свойством, что у формально сопряженного выражения D^+ существует фундаментальное решение $e(x, \xi)$*, для которого $\omega(x, \xi) = e(x, \xi)\, \varkappa(\xi)$ является по ξ элементом из $L_2(G)$, непрерывно зависящим от $x \in E_n$ (только в этом случае u и v в (3.9) нужно брать из $C_0^r(G)$). В самом деле, достаточно лишь установить равенство (3.10) для $u \in C_0^r(G)$ и гладких f. Пользуясь определением фундаментального решения, получим

$$\int_G (f, \omega(x, \cdot))_0 \overline{(\mathrm{D}u)(x)}\, dx = \int_G \mathrm{D}_x^+ \left(\int_G f(\xi)\, e(x, \xi)\, d\xi \right) \overline{u(x)}\, dx =$$

$$= \int_G f(x)\, \overline{u(x)}\, dx = (f, u)_0.$$

---

* Относительно понятия фундаментального решения см. п. 1, § 4. гл. III.

Тождество (3.10) установлено. Соотношение (3.9) выводится из (3.10), как и раньше. Ясно, что при помощи других, чем в (3.8), D все же не удается избавиться от ограничения финитности функций u, v в (3.9).

3. **Соболевские пространства в случае неограниченной области.** Предположим, что область G неограничена. На $l = 1, 2, \ldots$ раз непрерывно дифференцируемых вплоть до границы Γ области G функциях, аннулирующихся в окрестностях ∞, введем скалярное произведение

$$(u, v)_l = \sum_{|\alpha| \leqslant l} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(G)}$$

и произведем по нему пополнение. В результате получим соболевское пространство $W_2^l(G)$. Как и в случае ограниченной G, пространства $W_2^l(G)$ $(l = 1, 2, \ldots)$ образуют цепочку позитивных пространств. Относительно нулевого пространства $W_2^0(G) = L_2(G)$ можно построить негативные пространства $W_2^{-l}(G)$, причем и теперь будут выполняться соотношения (3.1).

Пусть $l > \frac{n}{2}$, тогда функции из $W_2^l(G)$ непрерывны в $G \cup \Gamma$ и в каждой ограниченной части G' области G можно написать в силу теорем вложения неравенство $|u(x)| \leqslant A_{G'} \| u \|_{W_2^l(G')} \leqslant A_{G'} \|u\|_l$ $(x \in G')$. При расширении G' до G константы $A_{G'}$, вообще говоря, возрастают. Поэтому для любого $x \in G$ можно написать оценку вида

$$|u(x)| \leqslant A(x) \| u \|_l \quad (u \in W_2^l(G)), \tag{3.12}$$

где $A(x) \geqslant \delta > 0$ — некоторая, вообще говоря, возрастающая при $x \to \infty$ функция, которую можно считать непрерывной в $G \cup \Gamma$.

Вид этой функции существенно зависит от области G. Мы ее сейчас найдем для наиболее простого случая конической области, т. е. такой области G, которая вместе с каждой точкой x содержит и всю полупрямую tx $(0 \leqslant t < \infty)$ (в частности, G может совпадать со всем E_n). Обозначим G_R пересечение G с шаром $|x| < R$. Для y, входящего в замыкание G_1, можно написать оценку $|u(y)| \leqslant C \| u \|_{W_2^l(G_1)}$ $(C = A_{G_1})$. Подставляя в это неравенство вместо $u(x)$ функцию $u(Rx)$ $(R \geqslant 1)$ и затем делая замену переменных $\eta = R\xi$, получим

$$|u(Ry)|^2 \leqslant C^2 \sum_{|\alpha| \leqslant l} R^{2|\alpha|} \int_{G_1} |(D^\alpha u)(R\xi)|^2 d\xi =$$

$$= C^2 \sum_{|\alpha| \leqslant l} R^{2|\alpha| - n} \int_{G_R} |(D^\alpha u)(\eta)|^2 d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C^2R^{2l-n}\sum_{|\alpha|\leqslant l}\int_{G_R}|(D^\alpha u)(\eta)|^2d\eta\leqslant C^2R^{2l-n}\|u\|_l^2. \qquad (3.13)$$

Пусть теперь $x\in G$, $|x|\geqslant 1$, произвольно, полагая в (3.13) $R=|x|$ и $y=x/|x|$, найдем $|u(x)|\leqslant C|x|^{l-\frac{n}{2}}\|u\|_l$. Отсюда следует, что *в случае конической области G при $l>\frac{n}{2}$ справедлива оценка*

$$|u(x)|\leqslant C(1+|x|^{l-\frac{n}{2}})\|u\|_l \quad (u\in W_2^l(G),\ x\in G). \qquad (3.14)$$

Так как функции из $W_2^l(G)$ при $l>\frac{n}{2}$ непрерывны, то δ_ξ определена на $W_2^l(G)$ посредством равенства (3.2) и входит в $W_2^{-l}(G)$, причем согласно (3.12)

$$\|\delta_\xi\|_{-l}\leqslant A(\xi) \qquad (\xi\in G\cup\Gamma). \qquad (3.15)$$

Нетрудно видеть, что δ_ξ *непрерывно по норме* $W_2^{-l}(G)$ *зависит от* $\xi\in G\cup\Gamma$: пусть $R>|\xi|$, для $u(x)\in W_2^l(G)$ обозначим посредством $u_R(x)$ эту же функцию, рассматриваемую на G_R. Имеем

$$|(u,\ \delta_\xi)_0|=|u(\xi)|=|(u_R,\ \delta_\xi)_0|\leqslant\|\delta_\xi\|_{W_2^{-l}(G_R)}\|u_R\|_{W_2^l(G_R)}\leqslant$$
$$\leqslant\|\delta_\xi\|_{W_2^{-l}(G_R)}\|u\|_l,$$

откуда следует, что $\|\delta_\xi\|_{-l}\leqslant\|\delta_\xi\|_{W_2^{-l}(G_R)}$. Наше утверждение вытекает из этого неравенства и леммы 3.1.

В случае неограниченной G квазиядерность вложения $W_2^l(G)\to\to L_2(G)\left(l>\frac{n}{2}\right)$, вообще говоря, не имеет места; это вызвано тем, что согласно (3.15) $\|\delta_\xi\|_{-l}$ может быть большой при $\xi\to\infty$. Однако мы сейчас покажем, что путем несколько иного введения позитивной нормы можно добиться любой малости $\|\delta_\xi\|_-$ на ∞ и квазиядерности соответствующего вложения.

Пусть $q(x)\geqslant 1$ — фиксированная функция из $C^l(G\cup\Gamma)$. Определим пространство $W_2^{(l,\,q)}(G)$ как замыкание по скалярному произведению $(u,\ v)_{(l,\,q)}=(uq,\ vq)_l$ аннулирующихся в окрестностях ∞ функций из $W_2^l(G)$ $(l=1,2,\ldots)$. В качестве нулевого пространства примем по-прежнему $L_2(G)$; очевидно, $\|u\|_0\leqslant\|u\|_{(l,\,q)}$; негативные пространства будем отмечать индексом $-(l,\ q)$. Согласно (3.12)

$|u(x)q(x)| \leqslant A(x)\|uq\|_l = A(x)\|u\|_{(l,q)}$, откуда $|u(x)| \leqslant \frac{A(x)}{q(x)}\|u\|_{(l,q)}$ $(u \in W_2^{(l,q)}(G),\ x \in G)$. Это неравенство показывает, что

$$\|\delta_\xi\|_{-(l,q)} \leqslant \frac{A(\xi)}{q(\xi)} \quad (\xi \in G \cup \Gamma). \tag{3.16}$$

Ясно также, что δ_ξ *непрерывно по норме* $W_2^{-(l,q)}(G)$ *зависит от* $\xi \in G \cup \Gamma$.

Теорема 3.5. *Пусть* $l > \frac{n}{2}$. *Если* $q(x)$ *такова, что*

$$\int_G \frac{A^2(x)}{q^2(x)}\,dx < \infty, \tag{3.17}$$

что оператор $\hat{J}$ *является оператором Гильберта—Шмидта и, следовательно, вложение* $W_2^{(l,q)}(G) \to L_2(G)$ *квазиядерно. Оператор* $\hat{I}$ *имеет конечный след и непрерывное в* $(G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma)$ *ядро.*

Доказательство. Для $f \in L_2(G)$ имеем

$$(Jf)(x) = (Jf, \delta_x)_0 = (f, \mathbf{J}\delta_x)_0 = \int_G \overline{(\mathbf{J}\delta_x)(\xi)}\, f(\xi)\,d\xi = \int_G K(x,\xi)\, f(\xi)\,d\xi,$$

где $K(x,\xi) = \overline{(\mathbf{J}\delta_x)}(\xi)$. Учитывая (3.16) и (3.17), получим

$$\int_G\int_G |K(x,\xi)|^2 dx\,d\xi = \int_G\left(\int_G |(\mathbf{J}\delta_x)(\xi)|^2 d\xi\right)dx =$$

$$= \int_G \|\delta_x\|^2_{-(l,q)}\,dx \leqslant \int_G \frac{A^2(x)}{q^2(x)}\,dx < \infty,$$

т. е. $\hat{J}$ — оператор Гильберта — Шмидта*. Так как $\hat{I} = \hat{J}^2$, то $\hat{I}$ имеет конечный след. Непрерывность его ядра доказывается так же, как и в теореме 3.1. Теорема доказана.

В заключение отметим, что *теорема 3.3 о ядре справедлива и в случае неограниченной области* G *с любым пространством* $W_2^{(l,q)}(G)$, *где* $l > \frac{n}{2}$ *и* $q(x)$ *удовлетворяет* (3.17). Формулировка теоремы и ее доказательство такие же, как и в случае ограниченной области.

---

* Напомним, что интегральный оператор K с ядром $K(x,\xi)$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(Q, d\mu(x))$, будет оператором Гильберта—Шмидта в том и только том случае, когда $\int_Q\int_Q |K(x,\xi)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(\xi) < \infty$; этот интеграл равен $|K|^2$, см. стр. 320.

Теорема 3.4, как уже говорилось, доказывалась нами без предположения об ограниченности G.

4. Одно обобщение соболевских пространств. Пусть G — ограниченная область; в качестве нулевого пространства H_0 рассмотрим $L_2(G)$, в качестве позитивного H_+ — некоторое замкнутое подпространство $W_2'^l(G)$ пространства $W_2^l(G)$ $(l \geqslant 1)$, плотное в $L_2(G)$ (например, $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ — замыкание в $W_2^l(G)$ всех гладких финитных функций). Соответствующее негативное пространство обозначим $W_2'^{-l}(G)$. Так как $W_2'^l(G) \subseteq W_2^l(G)$, то $W_2'^{-l}(G) \supseteq W_2^{-l}(G)$: если $\alpha \in W_2^{-l}(G)$, то выражение $(\alpha, u)_0$ имеет смысл при $u \in W_2'^l(G)$ и является непрерывным функционалом на этом пространстве, поэтому можно писать $\alpha \in W_2'^{-l}(G)$. Вместе с тем тот же функционал над $W_2'^l(G)$, что и α, порождает любой другой $\alpha' \in W_2^{-l}(G)$ такой, что $(\alpha - \alpha', u)_0 = 0$ для всех $u \in W_2'^l(G)$; отнесем такие α и α' к одному классу эквивалентных элементов. Строго говоря, вместо включения $\alpha \in W_2'^{-l}(G)$ нужно писать включение соответствующего класса в $W_2'^{-l}(G)$. Однако мы, как это часто принято, вместо включения классов будем говорить о включениях представителей этих классов (подобно записи «$f(x) \in L_2(G)$» вместо записи «класс эквивалентных с $f(x)$ функций входит в $L_2(G)$»). Такая договоренность будет употребляться в дальнейшем.

Ясно, что

$$\|\alpha\|_{W_2'^{-l}(G)} \leqslant \|\alpha\|_{-l} \qquad (\alpha \in W_2^{-l}(G)).$$

Аналогичное построение можно провести и в случае неограниченной области G. В качестве H_0 берем $L_2(G)$, в качестве H_+ — замкнутое подпространство $W_2'^{(l,q)}(G)$ $(q(x) \geqslant 1)$ пространства $W_2^{(l,q)}(G)$, плотное в $L_2(G)$. Для соответствующего негативного пространства $W_2'^{-(l,q)}(G)$ имеем $W_2'^{-(l,q)}(G) \supseteq W_2^{-(l,q)}(G)$, $\|\alpha\|_{W_2'^{-(l,q)}(G)} \leqslant \|\alpha\|_{-(l,q)}$ $(\alpha \in W_2^{-(l,q)}(G))$.

На так введенные $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ распространяется большинство построений пп. 1—3. Сейчас уместно отметить полезную связь между нормами типа $\|\cdot\|_{W_2'^{-l}(G)}$ и $\|\cdot\|_{-l}$. Рассмотрение удобно проводить в абстрактном виде.

Пусть имеется цепочка $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ типа (1.4), M_+ — некоторое замкнутое подпространство пространства H_+, плотное в H_0. По позитивному пространству M_+ построим негативное пространство M_-, как было пояснено, в определенном смысле $H_- \subseteq M_-$ и

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supset M_+,$$

$$\|u\|_{M_-} \leqslant \|u\|_- \leqslant \|u\|_0 \leqslant \|u\|_+ = \|u\|_{M_+} \quad (u \in M_+).$$

Справедливо следующее равенство: для каждого $\alpha \in H_-$

$$\|\alpha\|_{M_-} = \inf_{\beta} \|\alpha + \beta\|_-, \tag{3.18}$$

где inf распространяется на подпространство N_- пространства H_-, состоящее из всех $\beta \in H_-$ таких, что $(\beta, u)_0 = 0$, $u \in M_+$ (т. е. N_- — ортогональное дополнение относительно $(\cdot, \cdot)_0$ к M_+). Это утверждение является перефразировкой для рассматриваемого частного случая следующего хорошо известного общего факта (см., например, Бурбаки [2], гл. 4, § 1, стр. 201): пусть B — банахово пространство, B' — сопряженное к нему пространство, M — подпространство B. Тогда сопряженное пространство M' изометрично фактор-пространству B'/N', где N' — подпространство функционалов из B', ортогональных к M.

В заключение обратим внимание на общие построения п. 4, § 1, гл. VIII, где вводится негативное пространство для того случая, когда $H_0 \supseteq H_+$, но скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_0$ в H_0 вырождено (т. е. для некоторых $u \neq 0$ $(u, u)_0 = 0$). Эти построения связаны с приведенными только что конструкциями.

5. **Пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$.** Остановимся более подробно на этих пространствах, упомянутых в предыдущем пункте. Итак, положим $H_0 = L_2(G)$, $H_+ = \overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ ($l = 1, 2, \ldots$, G ограничена). Соответствующее негативное прсстранство обозначим $\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G)$. Пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^k(G)$ удобно изучать при помощи преобразования Фурье, в частности такой подход дает возможность распространить их определение на дробные k.

Обозначим
$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{E_n} f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle} dx$$
$$(\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E_n, \qquad \langle \xi, x\rangle = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n)$$

преобразование Фурье функции $f(x)$. Если f финитна и достаточно гладкая, то интегрированием по частям найдем: $\widetilde{(D^\alpha f)}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \tilde{f}(\xi)$ $(\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n})$. Поэтому, взяв для скалярного произведения $W_2^l(G)$ выражение (9) на стр. 30, получим при помощи равенства Парсеваля:

$$(u, v)_l = (u, v)_0 + \sum_{|\alpha| = l} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0 = \int_{E_n} \left(1 + \sum_{|\alpha| = l} \xi^{2\alpha}\right) \tilde{u}(\xi) \overline{\tilde{v}(\xi)} d\xi,$$

где $\widetilde{w}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$, продолженной нулем вне G. С другой стороны,

$$C_1 |\xi|^{2l} \leqslant \sum_{|\alpha|=l} \xi^{2\alpha} \leqslant C_2 |\xi|^{2l} \qquad (C_1, C_2 > 0;\ \xi \in E_n). \tag{3.19}$$

Действительно, форма $\varphi(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=l} \xi^{2\alpha}/|\xi|^{2l}$ однородна нулевой степени однородности, непрерывная всюду при $\xi \neq 0$. Легко показать, что каждая такая форма ограничена во всем E_n, откуда следует правое неравенство в (3.19). Аналогично устанавливается левое неравенство. Из (3.19) и приведенного выше выражения для $(u, v)_l$ вытекает, что метрику в $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ можно задавать при помощи эквивалентного скалярного произведения

$$(u, v)_k = \int\limits_{E_n} (\varepsilon^{-2} + |\xi|^2)^k \widetilde{u}(\xi) \overline{\widetilde{v}(\xi)} d\xi, \tag{3.20}$$

где $k = l$ и $0 < \varepsilon \leqslant \infty$ — произвольное фиксированное число (при различных ε метрики, определяемые скалярными произведениями (3.20), эквивалентны; значение $\varepsilon = \infty$ допускается в связи с возможностью использовать формулу (25) на стр. 36). Таким образом, $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ можно понимать как совокупность преобразований Фурье функций из $C_0^\infty(G)$, пополненную по метрике (3.20) с $k = l$. Нетрудно видеть, что так как $(u, v)_0 = \int\limits_{E_n} \widetilde{u}(\xi) \overline{\widetilde{v}(\xi)}\, d\xi$, то $(u, v)_{-l}$ задается интегралом (3.20), в котором $k = -l$. Итак, интегралы (3.20) задают скалярное произведение в серии пространств с позитивной ($k > 0$), нулевой ($k = 0$) и негативной ($k < 0$) нормами. Все эти пространства являются пополнениями $\widetilde{C_0^\infty(G)}$ в соответствующих метриках (их также можно рассматривать и в x-представлении как должные пополнения $C_0^\infty(G)$). Выше k может быть произвольным действительным числом; для таких пространств мы сохраняем прежнее обозначение $\overset{\circ}{W}{}_2^k(G)$.

Теорема 3.6. *Пусть* $\varphi(x) \in C_0(E_n)$, $\int\limits_{E_n} \varphi(x)dx \neq 0$, $0 < \varepsilon_0 < \infty$ *фиксированы. Норма* $\| u \|_{-l}$ $(l > 0)$ *топологически эквивалентна норме*

$$\| u \|_{-l}^2 = \int\limits_0^{\varepsilon_0} \| u * \varphi_\varepsilon \|_{L_2(E_n)}^2 \varepsilon^{2l-1} d\varepsilon, \tag{3.21}$$

где $u * \varphi_\varepsilon$ *обозначает свертку функции* u, *продолженной нулем вне* G, *и функции* $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ $(x \in E_n)$.

Доказательство. Делая преобразование Фурье, получим представление: $\| u \|^2_{-l} = \int\limits_{E_n} | \widetilde{u}(\xi) |^2 \left(\int\limits_0^{\varepsilon_0} | \widetilde{\varphi_\varepsilon}(\xi) |^2 \varepsilon^{2l-1} d\varepsilon \right) d\xi$. Сравнивая это выражение с (3.20), видим, что достаточно установить оценку

$$C_1 (\varepsilon_0^{-2} + | \xi |^2)^{-l} \leqslant \int\limits_0^{\varepsilon_0} | \widetilde{\varphi_\varepsilon}(\xi) |^2 \varepsilon^{2l-1} d\varepsilon \leqslant C_2 (\varepsilon_0^{-2} + | \xi |^2)^{-l} \qquad (3.22)$$
$$(C_1,\ C_2 > 0; \quad \xi \in E_n).$$

Проверим правое неравенство. Замечая, что $\widetilde{\varphi_\varepsilon}(\xi) = \widetilde{\varphi}(\varepsilon\xi)$, получим при помощи замены переменных $\delta = \varepsilon | \xi |$

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} | \widetilde{\varphi_\varepsilon}(\xi) |^2 \varepsilon^{2l-1} d\varepsilon = \int\limits_0^{\varepsilon_0} | \widetilde{\varphi}(\varepsilon\xi) |^2 \varepsilon^{2l-1} d\varepsilon =$$
$$= \frac{1}{| \xi |^l} \int\limits_0^{\varepsilon_0|\xi|} \left| \widetilde{\varphi}\left(\delta \frac{\xi}{| \xi |}\right) \right|^2 \delta^{2l-1} d\delta \leqslant \frac{1}{| \xi |^{2l}} \int\limits_0^{\infty} \left| \widetilde{\varphi}\left(\delta \frac{\xi}{| \xi |}\right) \right|^2 \delta^{2l-1} d\delta. \qquad (3.23)$$

Интеграл $\int\limits_0^{\infty} | \widetilde{\varphi}(\delta\eta) |^2 \delta^{2l-1} d\delta$ непрерывно зависит от $\eta = \xi/| \xi |$, меняющегося по единичной сфере, и поэтому ограничен (поясним, что $\widetilde{\varphi}(\xi)$ быстро убывает при $| \xi | \to \infty$, так как $\varphi \in C_0^\infty(G)$). Таким образом, получаем оценку

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} | \widetilde{\varphi_\varepsilon}(\xi) |^2 \varepsilon^{2l-1} d\varepsilon \leqslant C_3 / | \xi |^{2l},$$

которая и влечет правое неравенство в (3.22). Для доказательства левого неравенства заметим, что $\widetilde{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int\limits_{E_n} \varphi(x)\, dx \neq 0$, и поэтому $\widetilde{\varphi}(\xi) \geqslant C_4 > 0$ для $| \xi | \leqslant R$ при некотором $R > 0$. Теперь используя (3.23), получим при $| \xi | \geqslant R/\varepsilon_0$

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} | \widetilde{\varphi_\varepsilon}(\xi) |^2 \varepsilon^{2l-1} d\varepsilon = \frac{1}{| \xi |^{2l}} \int\limits_0^{\varepsilon_0|\xi|} \left| \widetilde{\varphi}\left(\delta \frac{\xi}{| \xi |}\right) \right|^2 \delta^{2l-1} d\delta \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{| \xi |^{2l}} \int\limits_0^{R} \left| \widetilde{\varphi}\left(\delta \frac{\xi}{| \xi |}\right) \right|^2 \delta^{2l-1} d\delta \geqslant \frac{C_5}{| \xi |^{2l}}. \qquad (3.24)$$

При $| \xi | \leqslant R/\varepsilon_0$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ $| \varepsilon\xi | \leqslant R$, поэтому $\int\limits_0^{\varepsilon_0} | \widetilde{\varphi_\varepsilon}(\xi) |^2 \varepsilon^{2l-1} d\varepsilon =$

$= \int\limits_0^{\varepsilon_0} |\widetilde{\varphi}(\varepsilon\xi)|^2 \varepsilon^{2l-1} d\varepsilon \geqslant C_4^2 \int\limits_0^{\varepsilon_0} \varepsilon^{2l-1} d\varepsilon > 0$. Отсюда и из (3.24) вытекает левая оценка в (3 22). Теорема доказана.

Доказанная теорема существенна, так как она дает возможность мало обозримую (в x-представлении) норму $|\cdot|_{-l}(l > 0)$ заменить нормой $\|\cdot\|_{-l}$, просто выражающейся через нулевую. Это позволяет различные оценки для дифференциальных выражений с постоянными коэффициентами, имеющие место в метрике $L_2(G)$, обобщать на метрики $\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G)$. При переходе к переменным коэффициентам полезна оценка

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \| a(u*\varphi_\varepsilon) - (au)*\varphi_\varepsilon \|^2_{L_2(E_n)} \varepsilon^{2l-1} d\varepsilon \leqslant C_1 \| u \|^2_{-l-1} (u \in C_0^\infty(G)), \tag{3.25}$$

которую мы доказывать уже не будем. Заметим, что константы в оценках (3.22) и (3.25) можно выбирать одними и теми же для всех $l \in [\alpha, \beta]$ $(0 < \alpha < \beta < \infty)$.

6. Построение оснащения по заданному оператору. Пусть в гильбертовом пространстве H_0 определен замкнутый оператор T со всюду плотной областью определения $\mathfrak{D}(T)$ такой, что

$$\| Tu \|_0 \geqslant \| u \|_0 \qquad (u \in \mathfrak{D}(T)). \tag{3.26}$$

Очевидно, $\mathfrak{D}(T)$ будет полным гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(u, v)_+ = (Tu, Tv)_0; \tag{3.27}$$

его можно принять в качестве позитивного пространства H_+ и построить затем соответствующее H_-.

Построим по цепочке $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ оператор D; равенства (1.13) и (3.27) показывают, что D и T метрически равные (если T дополнительно был положительным, то, очевидно, $D = T$). На $\mathfrak{R}(T)$ существует и непрерывен T^{-1}; он метрически равен $D^{-1} = \hat{J}$. Таким образом, $\| f \|_- = \| D^{-1} f \|_0$ $(f \in H_0)$. Отсюда и из сказанного на стр. 64 следует, что квазиядерность вложения $H_+ \to H_0$ эквивалентна тому, что оператор T^{-1} — оператор Гильберта — Шмидта. Отметим, что для проверки неравенства (3.26) можно пользоваться тем обстоятельством, что оценка $\| Tu \|_0 \geqslant C \| u \|_0$ $(u \in \mathfrak{D}(T))$ с некоторым $C > 0$ равносильна тому, что уравнение $T^* x = f$ разрешимо при любом $f \in H_0$ и x зависит непрерывно от f (см. стр 95—96).

Рассмотрим пример. Пусть G — ограниченная область n-мерного пространства с кусочно гладкой границей Γ, $H_0 = L_2(G)$. В качестве T возьмем оператор, являющийся замыканием в $L_2(G)$ оператора, определяемого соответствием $u \to \dfrac{\partial^n}{\partial x_1, \ldots \partial x_n} u$ на финитных функциях. Легко проверить выполнение неравенства (3.26). Вложение $H_+ \to H_0$ здесь квазиядерно: это следует из того, что оператор T^{-1} интегральный и имеет вид

$$(T^{-1}f)(x) = \int_G K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{3.28}$$

$$K(x, \xi) = \varkappa_{(-\infty, x_1)}(\xi_1) \ldots \varkappa_{(-\infty, x_n)}(\xi_n) \qquad (f \in \mathfrak{R}(T)),$$

где $\varkappa_{(a,b)}$ — характеристическая функция интервала (a, b). В случае неограниченной G предыдущая конструкция также проходит, однако вложение $H_+ \to H_0$ не будет при $\operatorname{mes} G = \infty$ квазиядерным. Для получения квазиядерного вложения можно рассматривать, например, позитивное скалярное произведение вида $(u, v)_+ = (T(qu), T(qv))_0$, где $q(x)$ — достаточно быстро растущая при $|x| \to \infty$ функция из $C^n(G \cup \Gamma)$ (более подробно о конструкциях операторов T см. § 3, гл. V).

7. **Построение оснащения по заданному негативному пространству.** Мы покажем, что цепочку (1.4) можно строить не только по паре H_0 и H_+, но и по паре H_0 и H_-.

Теорема 3.7. *Пусть имеется полное гильбертово пространство H_0, являющееся плотным множеством в более широком полном гильбертовом пространстве $H_- \supseteq H_0$, причем $\|f\|_- \leqslant \|f\|_0$ и из равенства $\|f\|_- = 0$ следует $f = 0$ $(f \in H_0)$**.

Тогда можно построить позитивное пространство $H_+ \subseteq H_0$ таким образом, что соответствующее негативное пространство будет совпадать с H_-.

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму $B(f, g) = (f, g)_-$; она непрерывно зависит от f, $g \in H_0$ и поэтому может быть представлена в виде $(f, g)_- = (Kf, g)_0$ $(f, g \in H_0)$, где K — непрерывный оператор, действующий в H_0. Так как $\|f\|_- \leqslant \|f\|_0$ и $(f, f)_- \geqslant 0$, то оператор K таков, что $\|K\| \leqslant 1$ и $K \geqslant 0$. Его область значений $\mathfrak{R}(K)$ плотна в H_0: если $0 = (Kf, h)_0 = (f, h)_-$ при всех $f \in H_0$, то $\|h\|_- = 0$ в силу плотности H_0 в H_-, т. е. $h = 0$. На $\mathfrak{R}(K)$ существует обратный оператор K^{-1}: если $Kf = 0$, то $(f, g)_- = (Kf, g)_0 = 0$ при любом $g \in H_0$, т. е. $f = 0$.

Положим $(u, v)_+ = (K^{-1}u, v)_0$ $(u, v \in \mathfrak{R}(K))$. Так как $\|K\| \leqslant 1$, то из спектрального разложения для K следует, что $(K^{-1}u, u)_0 = \|u\|_+^2 \geqslant \|u\|_0^2$ $(u \in \mathfrak{R}(K))$. Отсюда вытекает, что H_+, равное пополнению $\mathfrak{R}(K)$ в $(\cdot, \cdot)_+$, — полное пространство, удовлетворяющее

* Обозначения для норм и скалярных произведений прежние.

всем требованиям позитивного относительно H_0 пространства. Строя теперь оператор I, немедленно найдем, что

$$I = K, \tag{3.29}$$

где K понимается как оператор из H_0 в $\mathfrak{R}(K)$. Негативное пространство, построенное по $H_0 \supseteq H_+$, совпадает с замыканием H_0 по метрике $(If, g)_0 = (Kf, g)_0 = (f, g)_-$, т. е. с заданным H_-. Теорема доказана.

Часто случается, что предположения теоремы выполнены за тем исключением, что из $\|f\|_- = 0$ не следует $f = 0$ для $f \in H_0$. В этом случае рассмотрим линейное множество F в H_0, состоящее из всех f, для которых $\|f\|_- = 0$. Благодаря оценке $\|f\|_- \leqslant \|f\|_0$ оно замкнуто в H_0. Если теперь в теореме вместо H_0 взять ортогональное дополнение F_0 в H_0 к F, то ее предположения уже окажутся выполненными и H_- можно будет рассматривать как негативное пространство относительно нулевого F_0.

Теорема 3.7 позволяет рассматривать важные пространства, построенные по положительно определенным ядрам $K(x, y)$, как негативные. Например, пусть G — ограниченная область n-мерного пространства, Γ—ее граница, $K \in C((G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma))$. Пространство H_K строится как замыкание $L_2(G)$ по скалярному произведению

$$(f, g) = \int_G \int_G K(x, y) f(y) \overline{g(x)}\, dx\, dy.$$

Пространство H_K можно рассматривать как негативное, причем роль нулевого играет $L_2(G)$ или его некоторое подпространство (более подробно см. п. 7, § 3, гл. VIII).

§ 4. Оснащение посредством линейных топологических пространств

Можно строить цепочку типа (1.4), где роль пространства H_+ играет линейное топологическое пространство $\Phi \subseteq H_0$ (включение топологическое), плотное в H_0*. Тогда $\Phi' \supseteq H_0' = H_0$ и мы получим

$$\Phi' \supseteq H_0 \supseteq \Phi. \tag{4.1}$$

Мы сейчас наметим, как для некоторых пространств Φ, сконструированных по гильбертовым пространствам, результаты § 1 и 2

* Относительно терминологии, используемой в этом параграфе, см., например, А. В. Канторович, Г. П. Акилов [1], гл. II, стр. 355—418.

приводят к существенным утверждениям относительно цепочки (4.1).

Пусть Φ — счетно-гильбертовое пространство, т. е. линейное локально выпуклое полное топологическое пространство, топология в котором задается счетной системой норм $\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \ldots$, каждая из которых строится по соответствующему скалярному произведению (окрестностями нуля служат шары вида $\|u\|_n < \varepsilon_n$). Нормы $\|\cdot\|_n$ предполагаются согласованными: если последовательность векторов из Φ фундаментальна по норме $\|\cdot\|_{n+1}$ и сходится к нулю по норме $\|\cdot\|_n$, то она сходится к нулю по норме $\|\cdot\|_{n+1}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Обозначим Φ_n пополнение Φ по норме $\|\cdot\|_n$; тогда $\Phi_1 \supseteq$

$$\supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots, \quad \Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n \quad \text{и} \quad \Phi' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n'.$$

Вместо понятия квазиядерности вложения $\Phi \to H_0$ сейчас удобно ввести понятие ядерности пространства Φ.

Сепарабельное Φ называется ядерным, если для каждого n найдется такое $m > n$, что вложение $\Phi_m \to \Phi_n$ квазиядерно. *Если $H_0 \supseteq \Phi$, причем Φ ядерно, то всегда найдется такое n, зависящее от характера H_0, что вложение $\Phi_n \to H_0$ будет квазиядерным.* Это немедленно следует из определения топологии в Φ, более сильной согласно включению $H_0 \supseteq \Phi$, чем топология H_0. Таким образом, если есть оснащение H_0 типа (4.1) с ядерным Φ, то имеется оснащение типа (1.4) с $H_+ = \Phi_n$ и квазиядерным вложением $H_+ \to H_0$ и можно применять теорию § 1 и 2.

Теорема 2.2 приводит теперь к следующей теореме о ядре. *Пусть $B(u, v)$ — непрерывная билинейная форма, определенная для u, v из ядерного пространства Φ. Тогда справедливы представления* (2.18) — (2.21) *с $H_0 = \Phi_n$ и $H_+ = \Phi_m$, где $m > n$ достаточно большие.*

Действительно, благодаря определению топологии в Φ непрерывность $B(u, v)$ над Φ влечет ее непрерывность над некоторым Φ_n. Полагая $H_0 = \Phi_n$ и выбирая $m > n$ настолько большим, чтобы вложение $\Phi_m = H_+ \to \Phi_n = H_0$ было квазиядерным, сведем вопрос к теореме 2.2.

Аналогичные результаты подобным образом устанавливаются и для более общего случая, когда счетно-нормированное Φ задается полунормами или когда Φ — проективный предел гильбертовых пространств или индуктивный предел ядерных пространств. В заключение заметим, что вложение $H_+ \to H_0$ сепарабельных гильбертовых пространств называется ядерным, если оператор вложения имеет конечный след. Так как произведение двух квазиядерных вложений ядерно, то приведенное определение ядерности Φ можно заменить эквивалентным, требуя ядерность вложения $\Phi_m \to \Phi_n$.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Ниже будут рассматриваться краевые задачи для линейных уравнений в частных производных, т. е. задачи нахождения решения u уравнения

$$Lu = f \tag{*}$$

(f — заданная функция), удовлетворяющего определенным краевым условиям на границе области. В этой главе будут изложены лишь формальные схемы применения функциональных методов к исследованию задачи (*), ряд важных примеров рассматривается в III и IV главах. В самых общих чертах такие применения выглядят следующим образом. Рассматриваемая задача аналогична системе уравнений в конечномерном пространстве вида

$$Au = f, \tag{**}$$

где A — некоторая матрица. Из линейной алгебры известно, что для уравнения (**) справедлива так называемая нормальная разрешимость: оно разрешимо для тех и только тех f, которые ортогональны подпространству решений сопряженной однородной задачи $A^*v = 0$. Таким образом, уравнение (**) разрешимо при любом f, если сопряженная однородная задача имеет лишь нулевые решения, т. е. если для нее справедлива теорема единственности. Это дает основание ожидать, что и для краевой задачи (*) будет иметь место некоторая разрешимость при любом f, если для сопряженной однородной задачи $L^+v = 0$ справедлива теорема единственности гладких решений. Это действительно так, однако полученное решение будет весьма обобщенным. Оно становится «более классическим», если вместо теоремы единственности справедлив более сильный факт — так называемое энергетическое неравенство, т. е. неравенство вида $\|L^+v\|_1 \geqslant C\|v\|_2$ $(C>0)$ с некоторыми нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ (подобные неравенства носят также название неравенств коэрцитивности или априорных неравенств). Во всей этой главе мы будем рассматривать дифференциальные выражения в ограниченной (если противное не будет оговорено) области G n-мерного пространства E_n, ее граница Γ предполагается кусочно гладкой.

§ 1. Общие сведения о дифференциальных выражениях

1. Дифференциальные выражения и граничные условия. Напомним, что для частных производных введены обозначения

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} (j = 1, \ldots, n), \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$
$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n. \tag{1.1}$$

Произвольное линейное дифференциальное выражение порядка r

при помощи (1.1) можно записать в виде

$$Lu = L(x, D)\,u = \sum_{|\alpha|\leqslant r} a_\alpha(x)\,D^\alpha u. \tag{1.2}$$

Комплекснозначные коэффициенты $a_\alpha(x)$ предполагаем достаточно гладкими: во всем дальнейшем, если нет оговорок, считается, что $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(G \cup \Gamma)$; такие условия гладкости назовем обычными*. Иногда будем рассматривать выражения L, коэффициенты которых достаточно гладкие лишь внутри G, а также выражения в неограниченных областях. Сопряженным к L называется дифференциальное выражение

$$L^+u = \sum_{|\alpha|\leqslant r} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(\overline{a_\alpha(x)}\,u\right) = \sum_{|\alpha|\leqslant r} b_\alpha(x)\,D^\alpha u. \tag{1.3}$$

Если коэффициенты L удовлетворяют обычным условиям гладкости, то и коэффициенты $b_\alpha(x)$ выражения L^+ также удовлетворяют таким условиям. Интегрируя по частям, получим для функций $u, v \in W_2^r(G)$, хотя бы одна из которых финитна,

$$(Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0. \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем во всей этой главе $(\cdot,\cdot)_0$ — скалярное произведение в $L_2(G)$. Очевидно, $L^{++} = L$. Мы иногда будем употреблять и сопряженное по Лагранжу выражение $L^\oplus = (\bar{L})^+ = \overline{(L^+)}$, где черта обозначает переход к комплексно сопряженным коэффициентам. Вместо (1.4) получим:

$$\int_G Lu \cdot v\,dx = \int_G uL^\oplus v\,dx.$$

Введем понятие граничных (краевых) условий. Чтобы охватить возможно более общие условия, поступим следующим образом. Рассмотрим пространство $W_2^r(G)$ и его подпространство $\mathring{W}_2^r(G)$ — замыкание финитных функций $W_{2,0}^r(G)$ из $W_2^r(G)$. Всякое подпространство из $W_2^r(G)$, содержащее $\mathring{W}_2^r(G)$, будем называть подпространством функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям (гр), и обозначать $W_2^r(\text{гр})$. Нас пока не будет интересовать конкретный вид тех равенств на границе (например, $u|_\Gamma = 0$), которые выделяют из всех функций пространства $W_2^r(G)$ функции из $W_2^r(\text{гр})$. Отметим, что возможны крайние случаи: $W_2^r(\text{гр}) = \mathring{W}_2^r(G)$ и $W_2^r(\text{гр}) =$

* В ряде рассуждений можно ограничиться меньшей гладкостью.

$= W_2^r(G)$. Последнее граничное условие будем называть снятым. Вообще, если на некотором куске Γ' границы условия (гр) не налагают на функцию $u \in W_2^r(G)$ никаких ограничений, то мы будем говорить, что на Γ' условия сняты и обозначать это так: $u|_{\Gamma'} \sim$.

Пусть $W_2^r(\text{гр})^+$ — совокупность всех функций $v \in W_2^r(G)$, для которых при любом $u \in W_2^r(\text{гр})$ справедливо равенство (1.4). Так как из сходимости $v_n \to v$ в $W_2^r(G)$ следует сходимость $L^+v_n \to L^+v$ в $L_2(G)$, то совокупность $W_2^r(\text{гр})^+$ замкнута в $W_2^r(G)$; она, очевидно, линейна и содержит $\mathring{W}_2^r(G)$. Таким образом, $W_2^r(\text{гр})^+$ является подпространством $W_2^r(G)$, содержащим $\mathring{W}_2^r(G)$, т. е. опять является подпространством функций, удовлетворяющих некоторым граничным условиям $(\text{гр})^+$ (этим оправдывается его обозначение). Граничные условия $(\text{гр})^+$ будем называть сопряженными к (гр); сейчас мы связывали (гр) с выражением L, условия $(\text{гр})^+$ будем, естественно, связывать с L^+.

Если $W_2^r(\text{гр})_1 \subseteq W_2^r(\text{гр})_2$, то $W_2^r(\text{гр})_1^+ \supseteq W_2^r(\text{гр})_2^+$. Далее,

$$W_2^r(\text{гр})^{++} \supseteq W_2^r(\text{гр}), \tag{1.5}$$

при этом нетрудно привести примеры, когда в (1.5) будет строгий знак включения. Вместе с тем всегда $W_2^r(\text{гр})^{+++} = W_2^r(\text{гр})^+$. В самом деле, из (1.5) следует, что $W_2^r(\text{гр})^{+++} \subseteq W_2^r(\text{гр})^+$. Применяя (1.5) к граничному условию $(\text{гр})^+$, найдем $W_2^r(\text{гр})^{+++} \supseteq W_2^r(\text{гр})^+$, что и требовалось. Таким образом, если мы от граничного условия (гр) перейдем к его «замыканию» $(\text{гр})^{++}$, то добьемся выполнения равенства

$$W_2^r(\text{гр})^{++} = W_2^r(\text{гр}). \tag{1.6}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие условия (гр), для которых (1.6) имеет место.

Поясним теперь, что задание некоторого подпространства $W_2^r(\text{гр})$ — это действительно указание определенных соотношений на Γ между нормальными производными функций из $W_2^r(G)$. В самом деле, согласно теоремам вложения (см стр. 31—32) для функций из $W_2^r(G)$ определены на Γ производные до порядка $r-1$. Так, производные по внешней нормали $\dfrac{\partial^m u}{\partial \nu^m}$ при $0 \leqslant m < r - n/2$ входят в $C(\Gamma)$, при $r - n/2 \leqslant m \leqslant r-1$ — в $L_q(\Gamma)$ с $q < \dfrac{2(n-1)}{n-2(r-m)}$. Они непрерывно зависят (по норме пространств $C(\Gamma)$ и $L_q(\Gamma)$ соответственно) от

u, меняющейся в $W_2^r(G)$. Подпространство $\overset{\circ}{W}{}_2^r(G)$ совпадает с совокупностью тех функций из $W_2^r(G)$, для которых все производные до $r-1$ порядка включительно на Γ аннулируются, или, что то же самое, аннулируются все производные $\frac{\partial^m u}{\partial \nu^m}$, $m=0,\ldots,r-1$. Обозначим N ортогональное дополнение в $W_2^r(G)$ к подпространству $\overset{\circ}{W}{}_2^r(G)$:

$$W_2^r(G) = \overset{\circ}{W}{}_2^r(G) \oplus N. \tag{1.7}$$

Подпространство W_2^r(гр) может быть согласно (1.7) разложено на $\overset{\circ}{W}{}_2^r(G) \oplus N$(гр), где N(гр) — компонента в N, которая полностью определяет W_2^r(гр). Вместе с тем каждая функция из N, очевидно, однозначно определяется набором производных

$$u|_\Gamma, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma, \ldots, \left.\frac{\partial^{r-1} u}{\partial \nu^{r-1}}\right|_\Gamma. \tag{1.8}$$

Таким образом, подпространство N(гр) пространства N, а значит и каждое условие (гр), определяется соотношением между производными (1.8). Ясно, что нельзя дать в терминах производных (1.8) эффективное описание всех граничных условий. Однако теперь легко выписывать их примеры: всякое соотношение между (1.8), определяющее линейное множество из $W_2^r(G)$ и выдерживающее при изменении u в $W_2^r(G)$ предельный переход, является некоторым граничным условием. Например, W_2^r(гр) можно определить как совокупность всех функций $u \in W_2^r(G)$, удовлетворяющих равенствам $(B_1(x, D)u)(x) = 0, \ldots, (B_p(x, D)u)(x) = 0 (x \in \Gamma)$, где $B_j(x, D)$ — некоторое линейное дифференциальное выражение порядка $m_j < r$ с достаточно гладкими коэффициентами, определенное на Γ.

Будем говорить, что на некотором куске Γ_0 границы Γ (гр) имеют определенный вид, например, $B_j(x, D)u|_{\Gamma_0} = 0$ $(j=1,\ldots,p)$, если поведение функций из W_2^r (гр) на Γ_0 полностью описывается этими ограничениями и поэтому всякая функция $u \in W_2^r(G)$, $D^\alpha u|_{\Gamma\setminus\Gamma_0} = 0$ $(|\alpha| \leq r-1)$, удовлетворяющая им на Γ_0, входит в W_2^r (гр).

2. Случай дифференциальных выражений второго порядка. Рассмотрим такие выражения более детально. Их удобно записывать в отличном от (1.2) виде:

$$Lu = L(x, D)u = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(x) D_j D_k u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + b(x)u \tag{1.9}$$

$$(b_{jk}(x) = b_{kj}(x); \ \ j, k = 1, \ldots, n);$$

предположения относительно гладкости комплекснозначных коэффициентов обычные. Обозначим $B(x) = \| b_{jk}(x) \|_1^n$.

Для краевых задач существенную роль играет понятие характеристики выражения L. Пусть S — некоторый гладкий кусок поверхности, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — фиксированная точка на нем. Введем в E_n новую ортонормированную систему координат $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, помещая ее начало в точку a и направляя ось ξ_1 по нормали к S. Обозначим $O = \| o_{jk} \|_1^n$ ортогональную матрицу, осуществляющую переход к новой системе. Очевидно,

$$\xi_j = \sum_{p=1}^{n} (x_p - a_p) o_{jp}, \quad D_j u = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_p} o_{pj}, \quad D_j D_k u = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p \partial \xi_q} o_{pj} o_{qk}. \tag{1.10}$$

Подставляя эти выражения в (1.9), найдем, что матрица $\widetilde{B}(x) = \| \widetilde{b}_{pq}(x) \|_1^n$ коэффициентов при вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p \partial \xi_q}$ в нашем выражении будет иметь вид

$$\widetilde{b}_{pq}(x) = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(x) o_{pj} o_{qk}, \quad \text{т. е.} \quad \widetilde{B}(x) = OB(x)O'. \tag{1.11}$$

Коэффициентом при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}$ будет служить $\widetilde{b}_{11} = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk} o_{1j} o_{1k}$; орт $(o_{11}, \ldots, o_{1n})$ направлен по нормали к S в точке a. Отсюда ясно следующее: обозначим через $\nu(x)$ орт нормали (по какую-то сторону) к поверхности S и составим форму

$$\langle B(x)\nu(x), \nu(x) \rangle = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(x) \nu_j(x) \nu_k(x) \quad (x \in S). \tag{1.12}$$

Введем вблизи S криволинейную систему координат $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ так, чтобы координатная линия, по которой отсчитывается φ_1, была ортогональна к S, а линии, по которым отсчитываются $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, — лежали в S. Если форма (1.12) всюду на S отлична от нуля, то тогда эти координаты можно ввести так, чтобы Lu приняло вид $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi_1^2} + Mu$, где M содержит дифференцирование по φ_1 не выше первого порядка. Иными словами, если на S форма (1.12) отлична от нуля, то дифференциальное уравнение $Lu = f$ можно разрешить относительно старшей производной в направлении нормали к S. Хорошо известно, что тогда к задаче Коши для уравнения $Lu = f$ с начальными данными на поверхности S можно применить процедуру Коши — Ковалевской (в случае аналитических коэффициентов и поверхности) и получить локально решение этой задачи.

Говорят, что S образует кусок характеристики, если для всех $x \in S$ $\langle B(x)\nu(x), \nu(x)\rangle = 0$. Условимся называть S куском слабой характеристики, если на нем $\langle B(x)\nu(x), \nu(x)\rangle = 0$, но $B(x)\nu(x) \neq 0$ почти для всех $x \in S$ (в смысле поверхностной меры Лебега), и куском сильной характеристики, если $B(x)\nu(x) = 0$ $(x \in S)$. Ясно, что упомянутую задачу Коши с данными на характеристиках решать, вообще говоря, нельзя. В связи с этим характеристики играют особую роль в теории краевых задач.

Предположим, что на Γ — границе области G — расположен кусок X_c слабой и кусок X_C сильной характеристик. Пусть $X = X_c \cup X_C$. На $\Gamma \setminus X$ форма (1.12) может также обращаться в нуль, однако поверхностная мера множества, где она аннулируется, предполагается равной нулю. Почти везде на $\Gamma \setminus X_C$ существует орт конормали, определяемый равенством

$$\mu(x) = \frac{B(x)\nu(x)}{|B(x)\nu(x)|}, \tag{1.13}$$

$\nu(x)$ — орт внешней нормали.

Под производной по конормали понимается производная в точках $\Gamma \setminus X_C$, вычисленная вдоль орта $\mu(x)$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x) D_j u = \frac{1}{|B(x)\nu(x)|} \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(x) D_j u \cdot \nu_k(x). \tag{1.14}$$

Если при $x \in \Gamma \setminus X_C$ $\langle B(x)\nu(x), \nu(x)\rangle = 0$, то $\mu(x) \perp \nu(x)$, т. е. производная по конормали будет тангенциальной. Такая картина будет всюду на X_c, поэтому $\frac{\partial}{\partial \mu}$ на X_c существует и для функций, определенных только на самой границе. Это позволяет на таких функциях ввести дифференциальное выражение

$$\mathfrak{M}u = |B(x)\nu(x)| \frac{\partial u}{\partial \mu} = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(x) D_j u \cdot \nu_k(x). \tag{1.15}$$

Через $\mathfrak{M}^+$ обозначим сопряженное выражение, т. е. выражение, для которого $\int\limits_{X_c} \mathfrak{M}u\cdot\bar{v}dx = \int\limits_{X_c} u\overline{\mathfrak{M}^+v}dx$ при любых гладких u и v, одна из которых аннулируется в полоске вблизи границы области X_c на поверхности Γ.

Приведем теперь формулы Грина для выражения (1.9). Для достаточно гладких u и v при помощи интегрирования по частям легко получить следующие равенства:

$$\int\limits_G Lu\cdot\bar{v}dx = -\int\limits_G \sum_{j,k=1}^n b_{jk}D_ju\cdot D_k\bar{v}dx +$$

$$+\int\limits_G \sum_{j=1}^n \left(b_j - \sum_{k=1}^n D_kb_{jk}\right) D_ju\cdot\bar{v}dx +$$

$$+\int\limits_G bu\bar{v}dx + \int\limits_\Gamma \sum_{j,k=1}^n b_{jk}D_ju\cdot\bar{v}\nu_k dx,$$

$$\int\limits_G \{Lu\cdot\bar{v} - u\overline{L^+v}\}\, dx =$$

$$= \int\limits_\Gamma \left\{\sum_{j,k=1}^n b_{jk}D_ju\cdot\nu_k\bar{v} - u\sum_{j,k=1}^n b_{jk}D_j\bar{v}\cdot\nu_k\right\}dx +$$

$$+\int\limits_\Gamma \sum_{j=1}^n \left(b_j - \sum_{k=1}^n D_kb_{jk}\right)\nu_ju\bar{v}dx.$$

Вводя обозначение

$$\beta(x) = \sum_{j=1}^n \left(b_j(x) - \sum_{k=1}^n D_kb_{jk}(x)\right)\nu_j(x) \quad (x\in\Gamma) \tag{1.16}$$

и пользуясь производной по конормали, перепишем эти формулы в виде

$$(Lu, v)_0 = -\int\limits_G \sum_{j,k=1}^n b_{jk}D_ju\cdot D_k\bar{v}dx + \int\limits_G \sum_{j=1}^n \left(b_j - \sum_{k=1}^n D_kb_{jk}\right)D_ju\cdot\bar{v}dx +$$

$$+\int\limits_G bu\bar{v}dx + \int\limits_{\Gamma\setminus X_C} |B\nu|\frac{\partial u}{\partial\mu}\bar{v}dx, \tag{1.17}$$

$$(Lu, v)_0 - (u, L^+v)_0 = \int\limits_{\Gamma\setminus X_C} |B\nu| \left\{\frac{\partial u}{\partial\mu}\bar{v} - u\frac{\partial\bar{v}}{\partial\mu}\right\} dx + \int\limits_{\Gamma} \beta u\bar{v}\,dx. \quad (1.18)$$

Равенства (1.17) и (1.18) справедливы во всяком случае для $u, v \in C^2(G \cup \Gamma)$. Аппроксимируя такими функциями функции $W_2^l(G)$ и пользуясь теоремами вложения, легко убедиться, что (1.17) справедливо для $u \in W_2^2(G)$, $v \in W_2^1(G)$, а (1.18) — для $u, v \in W_2^2(G)$.

При помощи (1.18) легко находить сопряженные граничные условия. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть Γ разбита на непересекающиеся куски $\Gamma_\sim$, Γ_0, Γ_{00}, Γ_{000} (некоторые из них могут отсутствовать; $\Gamma = \overline{\Gamma_\sim \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_{00} \cup \Gamma_{000}}$), причем $\Gamma_{00} \cup \Gamma_{000} \subseteq \Gamma\setminus X_C$, $\Gamma_\sim \cap X_c$ расположена на гладком участке границы и находится на положительном расстоянии от $\Gamma_{00} \cup X_C$. Сопряженными к условиям*

$$u|_{\Gamma_\sim} \sim, \quad u|_{\Gamma_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial\mu}\right|_{\Gamma_{00}} = 0, \quad u|_{\Gamma_{000}} = \left.\frac{\partial u}{\partial\mu}\right|_{\Gamma_{000}} = 0 \quad (1.19)$$

будут условия

$$v|_{\Gamma_\sim\setminus X} = \left.\frac{\partial\bar{v}}{\partial\mu}\right|_{\Gamma_\sim\setminus X} = 0, \quad \mathfrak{M}^+v - \overline{\mathfrak{M}}v + \bar{\beta}v|_{\Gamma_\sim\cap X_c} = 0, \quad \bar{\beta}v|_{\Gamma_\sim\cap X_C} = 0,$$
$$v|_{\Gamma_0\setminus X} = 0, \quad -\overline{\mathfrak{M}}v + \bar{\beta}v|_{\Gamma_{00}} = 0, \quad v|_{(\Gamma_0\cap X)\cup\Gamma_{000}} \sim. \quad (1.20)$$

Доказательство теоремы элементарно, хотя и несколько громоздко. Сперва покажем, что, если для некоторой $v \in W_2^2(G)$ $(Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0$ для всех $u \in W_2^2(\text{гр})$, то v удовлетворяет условиям (1.20). Согласно (1.18) и (1.19)

$$0 = \int\limits_{\Gamma\setminus X_C} |B\nu| \left\{\frac{\partial u}{\partial\mu}\bar{v} - u\frac{\partial\bar{v}}{\partial\mu}\right\} dx + \int\limits_{\Gamma}\beta u\bar{v}\,dx = \int\limits_{\Gamma_\sim\setminus X_C} |B\nu| \frac{\partial u}{\partial\mu}\bar{v}\,dx +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma_\sim\setminus X_C} \left\{-|B\nu|\frac{\partial\bar{v}}{\partial\mu} + \beta\bar{v}\right\} u\,dx + \int\limits_{\Gamma_\sim\cap X_C} \beta u\bar{v}\,dx + \int\limits_{\Gamma_0\setminus X_C} |B\nu|\frac{\partial u}{\partial\mu}\bar{v}\,dx +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma_{00}} \left\{-|B\nu|\frac{\partial\bar{v}}{\partial\mu} + \beta\bar{v}\right\} u\,dx. \quad (1.21)$$

Возьмем в (1.21) в качестве u функцию из $W_2^2(\text{гр})$, которая дополнительно аннулируется в некоторой окрестности (в G) множества $\Gamma\setminus(\Gamma_\sim\setminus X_C)$ и на $\Gamma_\sim\setminus X_C$. Воспользуемся следующим общим замечанием: если на некотором куске $S \subseteq \Gamma\setminus X_C$ $u(x) = 0$, то $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial\nu}\nu(x)$ и поэтому

$$|B\nu|\frac{\partial u}{\partial\mu} = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}D_j u\cdot\nu_k = \langle B\nu, \operatorname{grad} u\rangle = \langle B\nu, \nu\rangle\frac{\partial u}{\partial\nu}. \quad (1.22)$$

С учетом (1.22) равенство (1.21) для рассматриваемой u превратится в $\int\limits_{\Gamma_\sim \setminus X_C} \langle B\nu, \nu \rangle \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{v} dx = 0$. Так как нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ функций $u \in W_2^2(G)$, аннулирующихся на $\Gamma_\sim \setminus X_C$, может принимать достаточно произвольные значения, то из последнего равенства следует, что на $\Gamma_\sim \setminus X_C$ $\langle B\nu, \nu \rangle \bar{v} = 0$ и (так как $\langle B\nu, \nu \rangle \neq 0$ на $\Gamma \setminus X$) $v = 0$ на $\Gamma_\sim \setminus X$.

Учитывая это обстоятельство, получим из (1.21) для функций $u \in W_2^2(\text{гр})$, аннулирующихся в окрестности множества $\Gamma \setminus (\Gamma_\sim \setminus X)$, а в остальном произвольных, равенство $\int\limits_{\Gamma_\sim \setminus X} |B\nu|\, u \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu} dx = 0$. Отсюда следует, что $\left.\frac{\partial v}{\partial \mu}\right|_{\Gamma_\sim \setminus X} = 0$. Итак, первое из соотношений (1.20) установлено.

Возьмем теперь в (1.21) $u \in W_2^2(\text{гр})$, аннулирующуюся в окрестности множества $\Gamma \setminus (\Gamma_\sim \setminus X_C)$. Учитывая только что полученные равенства для v, найдем

$$0 = \int\limits_{\Gamma_\sim \cap X_c} |B\nu| \frac{\partial u}{\partial \mu} \bar{v}\, dx + \int\limits_{\Gamma_\sim \cap X_c} \left\{ -|B\nu| \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu} + \beta \bar{v} \right\} u dx;$$

$$0 = \int\limits_{\Gamma_\sim \cap X_c} \{\mathfrak{M}u \cdot \bar{v} - u\mathfrak{M}\bar{v} + \beta u\bar{v}\}\, dx = \int\limits_{\Gamma_\sim \cap X_c} u\, \overline{\{\mathfrak{M}^+ v - \mathfrak{M}v + \bar{\beta} v\}}\, dx. \tag{1.23}$$

Поясним, что последнее равенство получается из предыдущего путем интегрирования по частям по поверхности $\Gamma_\sim \cap X_c$ и справедливо при дополнительном допущении об аннулировании функции u в полоске вблизи границы (на Γ) области $\Gamma_\sim \cap X_c$. Ввиду произвольности u из (1.23) следует второе из соотношений (1.20).

Возьмем в (1.21) $u \in W_2^2(\text{гр})$, равную нулю в окрестности множества $\Gamma \setminus (\Gamma_\sim \cap X_C)$. Благодаря произвольности u на $\Gamma_\sim \cap X_C$ обязательно $\bar{\beta} v|_{\Gamma_\sim \cap X_C} = 0$.

Пусть теперь $u \in W_2^2(\text{гр})$ аннулируется в окрестности множества $\Gamma \setminus (\Gamma_0 \setminus X_C)$. Так как $u = 0$ на $\Gamma_0 \setminus X_C$, то из (1.21), согласно (1.22), получаем

$$\int\limits_{\Gamma_0 \setminus X_C} \langle B\nu, \nu \rangle \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{v} dx = 0.$$

Производная здесь может принимать достаточно произвольные значения, поэтому мы можем заключить, что $v = 0$ на $\Gamma_0 \setminus X$.

Наконец, возьмем в (1.21) $u \in W_2^2(\text{гр})$, равную нулю в окрестности множества $\Gamma \setminus \Gamma_{00}$. Так как u на Γ_{00} может принимать достаточно произвольные значения, то из этого соотношения получим пятое из равенств (1.20).

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что, если $u, v \in W_2^2(G)$ удовлетворяют, соответственно, условиям (1.19) и (1.20), то $(Lu, v)_0 = (u, L^+ v)_0$. Записывая формулу Грина (1.18) и учитывая (1.19), (1.20) и (1.22), получим

$$(Lu, v)_0 - (u, L^+v)_0 = \int\limits_{\Gamma \setminus X_C} |B\nu| \left\{\frac{\partial u}{\partial \mu}\bar{v} - u\frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu}\right\} dx + \int\limits_{\Gamma} \beta u\bar{v}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\sim \setminus X} \left\{|B\nu|\left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\bar{v} - u\frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu}\right) + \beta u\bar{v}\right\} dx + \int\limits_{\Gamma_\sim \cap X_c} \{\mathfrak{M}u\cdot\bar{v} - u\overline{\overline{\mathfrak{M}}v} + \beta u\bar{v}\}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_\sim \cap X_C} \beta u\bar{v}\,dx + \int\limits_{\Gamma_0 \setminus X_C} \langle B\nu, \nu\rangle \frac{\partial u}{\partial \nu}\bar{v}\,dx + \int\limits_{\Gamma_{00}} \overline{\{-\overline{\mathfrak{M}}v + \bar{\beta}v\}}\,u\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\sim \cap X_c} \{\mathfrak{M}u\cdot\bar{v} - u\overline{\overline{\mathfrak{M}}v + \beta u\bar{v}}\}\,dx. \qquad (1.24)$$

Для дифференциального выражения $\mathfrak{M}$ и произвольных достаточно гладких u, v можно написать формулу Грина

$$\int\limits_{\Gamma_\sim \cap X_c} \mathfrak{M}u\cdot\bar{v}\,dx = \int\limits_{\Gamma_\sim \cap X_c} u\overline{\mathfrak{M}^+ v}\,dx + \int\limits_{\gamma} \mathfrak{R}[u, v]\,dx, \qquad (1.25)$$

где γ — граница $\Gamma_\sim \cap X_c$, а $\mathfrak{R}[u, v]$ — некоторое граничное выражение, являющееся билинейной формой от u и v (выражение $\mathfrak{M}$ первого порядка, и поэтому производные в $\mathfrak{R}$ не входят). Для рассматриваемых ранее u и v интеграл по γ в (1.25) равен нулю. Действительно, обозначим γ_1 часть границы γ, примыкающую к $\Gamma \setminus \Gamma_\sim$, и через γ_2 — часть, расположенную внутри $\Gamma_\sim$. В силу первого из равенств (1.20) и удаленности на положительное расстояние $\Gamma_\sim \cap X_c$ от X_C к γ_2 примыкает область, в которой $v = 0$. Аналогично, к γ_1 примыкает область, где $u = 0$ (в силу второго и четвертого условия из (1.19) и предположения $\varrho((\Gamma_\sim \cap X_c), \Gamma_{00} > 0)$. Из теорем вложения вытекает, что $v|_{\gamma_2}$, $u|_{\gamma_1} = 0$; но тогда $\mathfrak{R}[u, v]|_\gamma = 0$, что и требовалось доказать. Теперь из (1.24), (1.25) и второго из равенств (1.20) следует, что $(Lu, v)_0 - (u, L^+v)_0 = 0$. Теорема доказана.

§ 2. Существование решений краевой задачи из пространств $L_2(G)$

Свяжем с дифференциальным выражением (1.2) некоторое операторное уравнение в пространстве $L_2(G)$. Решения этого уравнения будут интерпретироваться как решения соответствующей краевой задачи. Рассмотрение $L_2(G)$ в качестве основного пространства — наиболее простой случай; в дальнейшем будут изучаться подобные вопросы и в других пространствах.

1. Минимальный и максимальный операторы. Рассмотрим выражение (1.2) порядка r с обычными условиями гладкости коэффициентов и определим оператор Λ' в $L_2(G)$ со всюду плотной областью определения, полагая $\Lambda' u = Lu$, $\mathfrak{D}(\Lambda') = C_0^\infty(G)$. Этот оператор допускает замыкание: пусть $u_n \in C_0^\infty(G)$, $u_n \to 0$ и $Lu_n \to h \in L_2(G)$, тогда для любой $v \in C^\infty(G \cup \Gamma)$ $(h, v)_0 = \lim (Lu_n, v)_0 = \lim (u_n, L^+v)_0 = 0$. Таким образом $h = 0$, что и требуется. Обозначим $\Lambda = \overline{\Lambda'}$, этот оператор называется минимальным оператором, порожденным выражением L. Ясно, что $\overset{\circ}{W}{}_2^r(G) \subseteq \mathfrak{D}(\Lambda)$ и для $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^r(G)$ $\Lambda u = Lu$.

Построим минимальный оператор Λ^+ по формально сопряженному выражению L^+ и положим $Л = (\Lambda^+)^*$. Оператор $Л$ носит название максимального оператора, порожденного L.

Нетрудно видеть, что оператор A, определяемый соответствием $u \to Lu$ $(u \in W_2^r(G))$, является, вообще говоря, частью $Л: A \subseteq Л$. Действительно, при $u \in W_2^r(G)$ и $v \in C_0^\infty$ имеем

$$(Au, v)_0 = (Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0 = (u, (\Lambda^+)' v)_0,$$

откуда $A \subseteq ((\Lambda^+)')^* = (\Lambda^+)^* = Л$. Включение $A \subseteq Л$ и поясняет термин «максимальный»: оператор $Л$ во всяком случае определен на гладких функциях, не удовлетворяющих никаким граничным условиям, и совпадает там с действием выражения L. В некоторых случаях мы покажем, что $Л = \overline{A}$ (см. стр. 100—101).

Из сказанного выше явствует, что

$$\Lambda \subseteq Л. \tag{2.1}$$

2. Классическая постановка краевой задачи и существование разрешимых расширений. С уравнением $Lu = f$ и граничным условием (гр), определяемым подпространством W_2^r(гр), естественно связать краевую задачу

$$Lu = f, \quad u \in (\text{гр}). \tag{2.2}$$

С этой точки зрения, например, смешанная задача для волнового уравнения $\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t)$ $(x \in G, t \in (0, T))$ тоже считается краевой. Так, в случае u, закрепленной на границе G, граничные условия имеют вид: $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ на нижнем основании цилиндра $G \times (0, T)$, $u \sim$ на его верхнем основании, $u = 0$ на боковой поверхности. Задача нахождения произвольного решения уравнения $Lu = f$ тоже краевая: граничное условие теперь $u|_\Gamma \sim$.

Идеальным решением задачи (2.2) было бы нахождение функции $u \in W_2^r$(гр), удовлетворяющей уравнение (2.2). Такое решение мы будем называть гладким. Однако при произвольном L оно существует только в исключительных случаях, и поэтому приходится вводить понятие тех или иных обобщенных решений.

Одним из наиболее простых обобщений является следующее. Предположим, что между Λ и Л в (2.1) можно вставить оператор L такой, что L^{-1} определен во всем $L_2(G)$ и непрерывен:

$$\Lambda \subseteq \mathrm{L} \subseteq \text{Л}. \tag{2.3}$$

Тогда под некоторой краевой задачей для уравнения $Lu = f$ можно понимать операторное уравнение

$$\mathrm{L}u = f \in L_2(G), \tag{2.4}$$

а под ее решением — $u = \mathrm{L}^{-1}f$. Принадлежность u к $\mathfrak{D}(\mathrm{L})$ естественно воспринимать как наложение некоторого граничного условия на обобщенные решения уравнения $Lu = f$, правда, не имеющего вид (гр). Ясно, что классическое решение задачи (2.2), если оно существует при всех $f \in L_2(G)$ и непрерывно от них зависит, будет и обобщенным в этом смысле.

Приведенный выше оператор L называется разрешимым расширением оператора Λ. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для того чтобы у L существовало разрешимое расширение, т. е. чтобы существовал оператор* L, *удовлетворяющий* (2.3) *и имеющий непрерывный обратный, определенный во всем $L_2(G)$, необходимо и достаточно выполнение двух энергетических неравенств*

$$\| Lu \|_0 \geqslant C \| u \|_0, \quad \| L^+ v \|_0 \geqslant C \| v \|_0 \quad (C > 0;\ u, v \in C_0^\infty(G)). \tag{2.5}$$

Прежде чем доказывать теорему проведем некоторые общие построения. Пусть в гильбертовом пространстве H действуют операторы A и B. Говорят, что B является правым обратным к A, если $\mathfrak{D}(B) = H$, $\mathfrak{R}(B) \subseteq \mathfrak{D}(A)$ и $ABf = f$ $(f \in H)$.

Лемма 2.1. *Рассмотрим в H замкнутый оператор A со всюду плотной областью определения. Для того чтобы у A существовал ограниченный правый обратный оператор B, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\| A^* v \| \geqslant C \| v \| \quad (C > 0;\ v \in \mathfrak{D}(A^*)). \tag{2.6}$$

Доказательство. Если B существует, то уравнение

$$Au = f \tag{2.7}$$

при любом $f \in H$ разрешимо. Покажем, что этот факт влечет неравенство (2.6). Действительно, обозначим через u_f некоторое решение уравнения (2.7), для любого $v \in \mathfrak{D}(A^*)$ имеем $(f, v) = (Au_f, v) = (u_f, A^*v)$, откуда $|(f, v)| = |(u_f, A^*v)| \leqslant \| u_f \| \| A^*v \|$. Таким образом, при любом $f \in H$ $\left| \left(f, \frac{v}{\| A^* v \|} \right) \right| \leqslant \| u_f \| = C_f$. Согласно известной теореме теории гильбертовых пространств совокупность векторов $\frac{v}{\|A^*v\|}$ $(v \in \mathfrak{D}(A^*))$ ограничена, откуда и следует (2.6).

Установим достаточность. Согласно теореме Неймана AA^* самосопряжен и неотрицателен. В силу (2.6) $(AA^*w, w) = (A^*w, A^*w) \geqslant \geqslant C^2 \|w\|^2 (w \in \mathfrak{D}(AA^*) \subseteq \mathfrak{D}(A^*))$, поэтому существует ограниченный обратный $(AA^*)^{-1}$, определенный на всем H. Положим $Bf = A^*(AA^*)^{-1}f$, так как $\mathfrak{R}(AA^*)^{-1} = \mathfrak{D}(AA^*) \subseteq \mathfrak{D}(A^*)$, то этот оператор имеет смысл для любого $f \in H$. Он замкнут, так как A^* замкнут, а $(AA^*)^{-1}$ ограничен. Следовательно, B ограничен. Вместе с тем ясно, что $AB = E$. Лемма доказана.

Следствие. Для того чтобы $\mathfrak{R}(A) = H$, необходимо и достаточно выполнение неравенства (2.6).

В самом деле, необходимость вытекает из доказательства необходимости в лемме, достаточность — из самой леммы.

Обозначим N подпространство нулей оператора A, т. е. подпространство таких $u \in H$, что $Au = 0$. Если $N \neq 0$, то непрерывный оператор B, найденный в лемме 2.1, определяется неоднозначно, например, свойствами B будет обладать любой оператор вида $B + C$, где C — непрерывный оператор, переводящий все H в N. Ясно, что изменяя C, мы получим все непрерывные операторы, являющиеся правыми обратными к A.

Доказательство теоремы. Пусть справедливы неравенства (2.5); докажем существование L. Применим лемму 2.1, полагая $H = L_2(G)$ и $A = Л$. Тогда $A^* = Л^* = (\Lambda^+)^{**} = \Lambda^+$. Из второго неравенства в (2.5) посредством предельного перехода заключаем, что $\|\Lambda^+ v\|_0 \geqslant C\|v\|_0$ $(v \in \mathfrak{D}(\Lambda^+))$, т. е. (2.6) выполняется, и поэтому условия леммы выполнены. Пусть B — правый обратный к $Л$, P — оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{R}(\Lambda) \subseteq L_2(G)$. Для любого $f \in L_2(G)$ определим непрерывный оператор

$$Tf = \Lambda^{-1}Pf + B(E-P)f; \tag{2.8}$$

(поясним, что на $\mathfrak{R}(\Lambda)$ существует и непрерывен Λ^{-1}, это следует из неравенства $\|\Lambda u\|_0 \geqslant C\|u\|_0 (u \in \mathfrak{D}(\Lambda))$, вытекающего из первой оценки в (2.5)). Положим $\mathfrak{D}(\mathrm{L}) = \mathfrak{R}(T)$. Очевидно, $\mathfrak{D}(\Lambda) \subseteq \mathfrak{D}(\mathrm{L}) \subseteq \subseteq \mathfrak{D}(Л)$ и $Л(Tf) = Pf + (E-P)f = f$ $(f \in L_2(G))$. Таким образом, сужение $Л$ на $\mathfrak{D}(\mathrm{L})$ можно принять в качестве L.

Установим необходимость неравенств (2.5). Благодаря непрерывности L^{-1} $\|Lu\|_0 = \|\mathrm{L}u\|_0 \geqslant C\|u\|_0$ $(u \in C_0^\infty(G) \subset \mathfrak{D}(\mathrm{L}))$. Вторая оценка также имеет место: так как $\mathfrak{R}(\mathrm{L}) = L_2(G)$, то и подавно $\mathfrak{R}(Л) = L_2(G)$. Согласно следствию из леммы 2.1 отсюда вытекает требуемое неравенство $\|\Lambda^+ v\|_0 = \|Л^* v\|_0 \geqslant C\|v\|_0$ $(v \in \mathfrak{D}(\Lambda^+) \supset \supset C_0^\infty(G))$. Теорема доказана.

Таким образом, наличие неравенств (2.5) обеспечивает существование некоторых «граничных условий» — т. е. некоторых $\mathfrak{D}(\mathrm{L})$,— при которых обобщенная краевая задача для уравнения $Lu=f$ разрешима.

3. Почти корректные граничные условия. Из предыдущего видно, что граничные условия, определяющие разрешимое расширение оператора Λ, по существу не связаны с граничными условиями типа (гр). Постараемся все же установить подобные связи.

Рассмотрим выражение L вида (1.2) и некоторое подпространство $W_2^r(\text{гр})$, определяющее (гр). Соответствие $u\to Lu$ $(u\in W_2^r(\text{гр}))$ задает оператор в $L_2(G)$, который мы обозначим $\Lambda'(\text{гр})$. Так как $\Lambda'(\text{гр})\subseteq$ $\subseteq Л$, а $Л$ — замкнут, то $\Lambda'(\text{гр})$ допускает замыкание $\Lambda(\text{гр})$. Этот последний оператор будем называть сильным оператором задачи (2.2). Далее, положим $Л(\text{гр})=(\Lambda^+(\text{гр})^+)^*$, где $\Lambda^+(\text{гр})^+$ обозначает сильный оператор сопряженной задачи

$$L^+v=f,\quad v\in(\text{гр})^+. \tag{2.9}$$

Оператор $Л(\text{гр})$ назовем слабым оператором задачи (2.2). Ясно, что Λ и $Л$ — частные случаи соответственно операторов $\Lambda(\text{гр})$ и $Л(\text{гр})$.

Нетрудно видеть, что *всегда справедливы включения*

$$\Lambda\subseteq\Lambda(\text{гр})\subseteq Л(\text{гр})\subseteq Л. \tag{2.10}$$

В самом деле, очевидно, $\Lambda\subseteq\Lambda(\text{гр})$. Аналогично $\Lambda^+\subseteq\Lambda^+(\text{гр})^+$, откуда $Л=(\Lambda^+)^*\supseteq(\Lambda^+(\text{гр})^+)^*=Л(\text{гр})$. Осталось показать среднее включение. Для $u\in W_2^r(\text{гр})\subseteq\mathfrak{D}(\Lambda(\text{гр}))$ при любом $v\in W_2^r(\text{гр})^+=$ $=\mathfrak{D}(\Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+)$ имеем:

$$(\Lambda(\text{гр})u,v)_0=(Lu,v)_0=(u,L^+v)_0=(u,\Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+v)_0,$$

откуда $\Lambda(\text{гр})\subseteq(\Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+)^*=(\Lambda^+(\text{гр})^+)^*=Л(\text{гр})$.
Утверждение доказано.

Теперь выясним, в каких случаях оператор L из п. 2 можно вставить между $\Lambda(\text{гр})$ и $Л(\text{гр})$.

Теорема 2.2. *Для того чтобы для L и* (гр) *существовало разрешимое расширение* L *такое, что*

$$\Lambda(\text{гр})\subseteq\mathrm{L}\subseteq Л(\text{гр}), \tag{2.11}$$

необходимо и достаточно выполнение двух энергетических неравенств

$$\|Lu\|_0\geqslant C\|u\|_0,\quad \|L^+v\|_0\geqslant C\|v\|_0\quad (C>0;\\ u\in W_2^r(\text{гр}),\ v\in W_2^r(\text{гр})^+). \tag{2.12}$$

Доказательство этой теоремы получаем при помощи леммы 2.1 подобно доказательству предыдущей. Именно, нужно положить $H = L_2(G)$ и $A = Л(гр)$. Тогда $A^* = (Л(гр))^* = (\Lambda^+(гр)^+)^{**} = \Lambda^+(гр)^+$, и поэтому (2.6) вытекает из второй оценки в (2.12). Из первой следует неравенство $\| \Lambda(гр) u\|_0 \geqslant C\|u\|_0$ ($u \in \mathfrak{D}(\Lambda(гр))$), обеспечивающее непрерывность и существование на $\mathfrak{R}(\Lambda(гр))$ оператора $(\Lambda(гр))^{-1}$. Дальнейшая конструкция — такая же, как и на стр. 96. Теорема доказана.

Свяжем с краевой задачей (2.2), где $f \in L_2(G)$, четыре типа решений.

1. Гладкое решение — функция $u \in W_2^r(гр)$, удовлетворяющая равенству $Lu = f$. Иногда будем говорить точнее: r-гладкое решение.

2. Сильное решение — функция $u \in \mathfrak{D}(\Lambda(гр))$, удовлетворяющая равенству $\Lambda(гр) u = f$.

3. Полусильное решение — функция $u \in \mathfrak{D}(\mathrm{L})$, удовлетворяющая равенству $\mathrm{L}u = f$, где L — разрешимый оператор, такой, что $\Lambda(гр) \subseteq \mathrm{L} \subseteq Л(гр)$.

4. Слабое решение — функция $u \in \mathfrak{D}(Л(гр))$, удовлетворяющая равенству $Л(гр) u = f$.

Каждое из этих решений является решением и любого последующего типа, но не наоборот. Выясним, когда существует тот или иной тип решений.

Для существования слабого решения при любом $f \in L_2(G)$ необходимо и достаточно выполнение второго из неравенств (2.12). Действительно, это неравенство эквивалентно оценке $\|\Lambda^+(гр)^+ v\|_0 \geqslant C\|v\|_0$ ($v \in \mathfrak{D}(\Lambda^+(гр)^+)$), которая (так как $\Lambda^+(гр)^+ = (Л(гр))^*$) влечет согласно следствию на стр. 96 разрешимость уравнения $Л(гр) u = f$ при любом $f \in L_2(G)$.

Заметим, что слабое решение можно определить эквивалентным образом: $u \in L_2(G)$ — слабое решение задачи (2.2), если

$$(u, L^+v)_0 = (f, v)_0 \quad (v \in W_2^r(гр)^+). \tag{2.13}$$

Второе неравенство из (2.12) влечет существование слабого решения при любом $f \in L_2(G)$, однако это решение не будет однозначно определяться по f и, тем более, непрерывно от него зависеть. Вместе с тем первое неравенство из (2.12) дает непрерывную зависимость сильного решения от f, но не дает его существования при любом $f \in L_2(G)$. Предположим, что выполняются оба неравенства (2.12)— такие (гр) мы будем называть почти корректными относительно L. Это необходимое и достаточное условие существования при любом $f \in L_2(G)$ полусильного решения (см. теорему 2.2, с другой стороны, в этом случае существует при любой $f \in L_2(G)$ слабое решение и непрерывно от f зависит сильное.

Полусильное решение, конечно, не определяется однозначно по (гр), оно еще зависит от выбора $\mathfrak{D}(\mathrm{L})$, зажатой между $\mathfrak{D}(\Lambda(\text{гр}))$ и $\mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр}))$: $\mathfrak{D}(\Lambda(\text{гр})) \subseteq \mathfrak{D}(\mathrm{L}) \subseteq \mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр}))$. Так как подавно $W_2^r(\text{гр}) \subseteq \subseteq \mathfrak{D}(\mathrm{L}) \subseteq \mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр}))$, то область определения $\mathfrak{D}(\mathrm{L})$ определяется векторами фактор-пространства $\mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр}))/W_2^r(\text{гр})$ (здесь $\mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр}))$ и $W_2^r(\text{гр})$ рассматриваются как линейные множества без топологии). Класс этого фактор-пространства является сдвигом $W_2^r(\text{гр})$ на некоторый вектор $f \in \mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр})) \setminus W_2^r(\text{гр})$. Но любой такой вектор не является достаточно гладким. Точнее, справедливо равенство

$$\mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр})) \cap W_2^r(G) = W_2^r(\text{гр}). \tag{2.14}$$

Действительно, нужно лишь показать, что, если $u \in \mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр})) \cap \cap W_2^r(G)$, то $u \in W_2^r(\text{гр})$. Пусть $v \in C_0^\infty(G)$, тогда

$$(Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0 = (u, \Lambda^+(\text{гр})^+v)_0 = ((\Lambda^+(\text{гр})^+)^* u, v)_0 = $$
$$= (\text{Л}(\text{гр})\, u, v)_0.$$

Благодаря произвольности v отсюда следует, что $Lu = \text{Л}(\text{гр})u$. Теперь положим $v \in W_2^r(\text{гр})^+$. Имеем $(Lu, v)_0 = (\text{Л}(\text{гр})\, u, v)_0 = = (u, \Lambda^+(\text{гр})^+ v)_0 = (u, L^+v)_0$. Так как v произвольно, то это равенство показывает, что $u \in W_2^r(\text{гр})^{++} = W_2^r(\text{гр})$, что и требовалось. Соотношение (2.14) установлено.

Соотношение (2.14), с одной стороны, показывает, что $\mathfrak{D}(\mathrm{L})$ состоит из сдвига W_2^r (гр) на недостаточно гладкие функции и поэтому трудно описываемо, а с другой — что *слабые решения не теряют исходных граничных условий, т. е. если такое решение окажется функцией из $W_2^r(G)$, то оно обязательно удовлетворяет* (гр) — *входит в* W_2^r (гр).

Наконец выясним, когда сильное решение существует при любом $f \in L_2(G)$ и непрерывно от него зависит. О последнем уже говорилось. Для существования u при любом f достаточно, чтобы $L[W_2^r(\text{гр})]$ было плотно в $L_2(G)$, т. е. из того, что $(Lu, v)_0 = 0$ ($u \in W_2^r(\text{гр})$) при некотором $v \in L_2(G)$, должно следовать: $v = 0$. Сопоставляя это с определением (2.13), заключаем, что *сильное решение существует при любом $f \in L_2(G)$ и непрерывно от него зависит в том и только в том случае, когда выполнена первая оценка* (2.12) *и всякое слабое решение v сопряженной однородной задачи* ($\text{Л}(\text{гр})^+ v = = 0$) *равно нулю*. Если Λ' (гр) замкнут, то сильное решение будет гладким.

Таким образом, задача нахождения по заданному L граничных условий, при которых обобщенное решение существует при всех $f \in L_2(G)$ и непрерывно зависит от правой части, выглядит следующим образом: во всяком случае необходимо наличие энергетических оценок (2.5) на финитных функциях. Если они есть, то тогда можно гарантировать существование разрешимого оператора L из теоремы 2.1, т. е. существование некоторых обобщенных граничных условий. Если удастся подобрать такие (гр), что вместо (2.5) будут справедливы оценки (2.12), т. е. подобрать почти корректные условия, то возможен более специальный подбор L — его можно вставить между Λ (гр) и Л (гр) и поэтому функции из $\mathfrak{D}$ (L) удовлетворяют (гр) в слабом смысле, т. е. входят в $\mathfrak{D}$ (Л (гр)). Если удастся доказать, что слабые решения сопряженной однородной задачи равны нулю, то можно положить L $=\Lambda$ (гр). В этом случае граничные условия (гр) естественно называть корректными.

4. Случай вполне непрерывного L^{-1}. Выясним, в каких случаях можно гарантировать выбор операторов L, удовлетворяющих (2.3) или (2.11), таким, чтобы L^{-1} существовал и был вполне непрерывным.

Теорема 2.3. *Для того чтобы можно было выбрать оператор L, удовлетворяющий* (2.3), *и такой, что L^{-1} существует и вполне непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись энергетические неравенства* (2.5), *причем операторы Λ^{-1} и $(\Lambda^{+})^{-1}$ были вполне непрерывными.*

Для аналогичного выбора в случае цепочки (2.11) *требуется дополнительно к неравенствам* (2.12) *полная непрерывность операторов* $(\Lambda(\text{гр}))^{-1}$ *и* $(\Lambda^{+}(\text{гр})^{+})^{-1}$.

Доказательство проведем лишь в случае цепочки (2.3). Согласно (2.8) L можно выбирать так, что $L^{-1}=\Lambda^{-1}P+B(E-P)$, поэтому полная непрерывность L^{-1} будет обеспечена, если установить, что B вполне непрерывен. Из доказательства леммы 2.1 следует, что $B=A^{*}(AA^{*})^{-1}=A^{*}(\sqrt{AA^{*}})^{-1}(\sqrt{AA^{*}})^{-1}$, где $A=$ Л. Как известно, оператор $A^{*}(\sqrt{AA^{*}})^{-1}$ изометричен, поэтому полная непрерывность B будет следовать из полной непрерывности $(\sqrt{AA^{*}})^{-1}$. Так как $A^{*}=\Lambda^{+}$, то для $v\in\mathfrak{D}(\Lambda^{+})$

$$\|\sqrt{AA^{*}}v\|_0=\|A^{*}v\|_0=\|\Lambda^{+}v\|_0,$$

поэтому последняя полная непрерывность следует из полной непрерывности $(\Lambda^{+})^{-1}$, которая предполагается в условии теоремы.

Наоборот, пусть существует L, удовлетворяющий (2.3) и такой, что L^{-1} вполне непрерывен. Из включения $\Lambda\subseteq L$ следует, что и Λ^{-1}вполне непрерывен. Далее, $(L^{-1})^{*}=(L^{*})^{-1}$ также вполне непрерывен, причем $L^{*}\supseteq\Lambda^{+}$, поэтому и $(\Lambda^{+})^{-1}$ вполне непрерывен. Теорема доказана.

5. Другое определение максимального оператора. Согласно сказанному в п. 1, под максимальным оператором в известном отношении естественней понимать отличный от Л оператор. Именно, рассмотрим выражение L вида (1.2), замыкание оператора в $L_2(G)$, определяемого соответствием $u\to Lu$ ($u\in W_2^r(G)$), можно назвать максимальным оператором. Вообще говоря, это определение и определение п. 1 — различны, однако в ряде важных случаев они совпадают (см. стр. 199, 281). Для доказательства их совпадения в этих случаях нам понадобится лемма.

Лемма 2.2. *Будем считать коэффициенты L продолженными с сохранением гладкости на все E_n. Рассмотрим $u \in L_2(G)$ и продолжим ее нулем вне G в функцию $\hat{u}$; пусть $\hat{u}$ такова, что в смысле обобщенных функций Л. Шварца $L^+\hat{u} \in L_2(E_n)$, т. е. найдется $h \in L_2(E_n)$, для которого*

$$(\hat{u}, Lv)_{L_2(E_n)} = (h, v)_{L_2(E_n)} \quad (v \in C_0^\infty(E_n)). \tag{2.15}$$

Если известно, что всякая такая $\hat{u}$ входит в область определения минимального оператора Λ^+, построенного по L^+ на G, то максимальный оператор Л, построенный по L и G, совпадает с замыканием оператора A: $v \to Lv$, $v \in \mathfrak{D}(A) = C^\infty(G \cup \Gamma)$.

Доказательство. Включение $\tilde{A} \subseteq$ Л очевидно, в доказательстве нуждается лишь включение $\tilde{A} \supseteq$ Л или, что то же, $A^* \subseteq \text{Л}^* = \Lambda^+$. Пусть $u_0 \in \mathfrak{D}(A^*)$, тогда найдется $f \in L_2(G)$ такое, что

$$(u_0, Lw)_{L_2(G)} = (f, w)_{L_2(G)} \quad (w \in C^\infty(G \cup \Gamma)).$$

Обозначим посредством $\hat{u}_0$ и $\hat{f}$ продолжения нулем функций u_0 и f с G на все E_n. Тогда из последнего равенства вытекает $(\hat{u}_0, Lv)_{L_2(E_n)} = (\hat{f}, v)_{L_2(E_n)}$ для любой $v \in C_0^\infty(E_n)$ и согласно предположению $u_0 \in \mathfrak{D}(\Lambda^+)$. Итак, $A^* \subseteq \Lambda^+$. Лемма доказана.

§ 3. Обобщенные решения краевых задач

В предыдущем параграфе было введено обобщение понятия решения задачи (2.2), причем и f и u предполагались функциями из $L_2(G)$. Сейчас мы рассмотрим подобное обобщение, в котором f и u будут функциями из пространств вида $W_2^l(G)$ ($l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$). Мы ограничиваемся лишь с целью упрощения изложения этими наиболее характерными и важными пространствами. Легко видеть, что многие из приводимых ниже определений и фактов справедливы и в случае более общих позитивных и негативных пространств. Это существенное замечание, так как при рассмотрении неэллиптических операторов всевозможные энергетические неравенства часто можно доказывать лишь в отличных от соболевских метриках, и поэтому модификация изложенного ниже там является просто необходимой.

Заметим, что вводимое ниже понятие обобщенного решения будет существенно для спектральной теории.

Начнем с близких вопросов, связанных с реализацией общей идеи, высказанной в начале этой главы.

1. Условная разрешимость. Введем такое обобщение понятия разрешимости задачи (2.2), чтобы имела место альтернатива Фредгольма (т. е. была справедлива нормальная разрешимость) и сопряженная задача легко исследовалась. Пусть $f \in W_2^{-r}(G)$, будем говорить, что задача (2.2) условно разрешима, если существует последовательность $u_n \in W_2^r(\text{гр})$ такая, что $Lu_n \to f$ в $W_2^{-r}(G)$. Сама последовательность u_n может ни к чему не сходиться.

Теорема 3.1. *Для того чтобы краевая задача (2.2) с $f \in W_2^{-r}(G)$ была условно разрешима, необходимо и достаточно, чтобы $(f, v)_0 = 0$ для всех решений v уравнения $L^+ v = 0$, входящих в $W_2^r(\text{гр})^+$.*

Доказательство. Условная разрешимость задачи эквивалентна тому, что f входит в замыкание в $W_2^{-r}(G)$ линейной совокупности функций $L[W_2^r(\text{гр})]$. Поэтому теорема равносильна разложению

$$W_2^{-r}(G) = \overline{L[W_2^r(\text{гр})]} \oplus \mathrm{I}_r^{-1} Z, \tag{3.1}$$

где черта указывает такое замыкание, Z — совокупность всех решений из $W_2^r(\text{гр})^+$ уравнения $L^+ v = 0$, а оператор I_r определен на стр. 66 (здесь нужно воспользоваться тем, что $(f, \mathrm{I}_r^{-1} v)_{-r} = (f, v)_0$).

Итак, докажем (3.1). Пусть $\alpha \perp \overline{L[W_2^r(\text{гр})]}$, т. е.

$$0 = (Lu, \alpha)_{-r} = (Lu, \mathrm{I}_r \alpha)_0 \quad (u \in W_2^r(\text{гр})). \tag{3.2}$$

Полагая здесь $u \in C_0^\infty(G)$ и перебрасывая L на $v = \mathrm{I}_r \alpha \in W_2^r(G)$, найдем, что $(u, L^+ v)_0 = 0$. Благодаря плотности $C_0^\infty(G)$ в $L_2(G)$ заключаем, что $L^+ v = 0$. Далее, из (3.2) вытекает, что $(Lu, v)_0 = (u, L^+ v)_0$ при любой $u \in W_2^r(\text{гр})$, т. е. $v \in W_2^r(\text{гр})^+$. Таким образом, $v \in Z$ и $\alpha \in \mathrm{I}_r^{-1} Z$.

Наоборот, каждое $\mathrm{I}_r^{-1} v \; (v \in Z)$ ортогонально в $W_2^{-r}(G)$ к $\overline{L[W_2^r(\text{гр})]}$: при $u \in W_2^r(\text{гр})$ имеем $(Lu, \mathrm{I}_r^{-1} v)_{-r} = (Lu, v)_0 = (u, L^+ v)_0 = 0$. Разложение (3.1), а вместе с ним и теорема доказаны.

Из этой теоремы вытекает, что задача (2.2) условно разрешима при любой $f \in W_2^{-r}(G)$ тогда и только тогда, когда у уравнения $L^+ v = 0$ нет отличных от нуля решений из $W_2^r(\text{гр})^+$, т. е. когда для сопряженной задачи справедлива единственность гладких решений.

2. Некоторые замечания относительно обобщенных функций. Пусть имеется пространство $W_2^{-k}(G)$ $(k \geqslant 0)$, говорим, что $\alpha \in W_2^{-k}(G)$ сосредоточена на множестве A, лежащем в G, если $(\alpha, u)_0 = 0$ для всякой $u \in W_2^k(G)$, аннулирующейся в некоторой окрестности A. Согласно этому определению δ-функция δ_ξ действительно сосредоточена в точке $\xi \in G$. Обозначим $W_{2,0}^{-k}(G)$ линейную совокупность всех обобщенных функций, сосредоточенных на множествах, лежащих строго внутри G. Эта совокупность плотна в $W_2^{-k}(G)$, так как в нее входят все функции из $C_0^\infty(G)$, которые плотны в $L_2(G)$ по метрике $L_2(G)$ и тем более по метрике $W_2^{-k}(G)$.

Через $\widetilde{W}_2^{-k}(G) \subseteq W_2^{-k}(G)$ обозначаем линейную оболочку $W_{2,0}^{-k}(G)$ и $L_2(G)$; в дальнейшем $\widetilde{W}_2^{-k}(G)$ будет служить запасом правых частей f в задаче (2.2).

Лемма 3.1. *Если* $\alpha \in \widetilde{W}_2^{-k}(G)$ *таково, что* $(\alpha, u)_0 = 0$ *для всех* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^k(G)$ (*или даже* $u \in C_0^\infty(G)$), *то* $\alpha = 0$. *Иными словами, функционалы из* $\widetilde{W}_2^{-k}(G) \subseteq W_2^{-k}(G)$ *определяются однозначно своими значениями на* $C_0^\infty(G)$.

Для доказательства достаточно рассмотреть случай равенства $(\alpha, u)_0 = 0$ для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^k(G)$; случай $u \in C_0^\infty(G)$ сводится к первому предельным переходом. Имеем $\alpha = \beta + f$, где $\beta \in W_{2,0}^{-k}(G)$, $f \in L_2(G)$; пусть B — множество, на котором сосредоточено β. Построим следующее разложение единицы (см. стр. 38): $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ — неотрицательные функции из $C^\infty(E_n)$, $\chi_1(\chi_2)$ аннулируется в некоторой окрестности границы Γ (множества B), $\chi_1(x) + \chi_2(x) = 1$ $(x \in E_n)$. Ниже эти функции рассматриваем только на G. Для любого $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^k(G)$ $\chi_2 u \in \overset{\circ}{W}{}_2^k(G)$ и аннулируется в окрестности B, поэтому $0 = (\alpha, \chi_2 u)_0 = (f, \chi_2 u)_0 = \int\limits_G f(x)\chi_2(x)\overline{u(x)}\,dx$; благодаря произвольности u отсюда следует, что в $L_2(G)$ $f\chi_2 = 0$. Пусть теперь $u \in W_2^k(G)$ произвольна. Так как $\chi_1 u \in \overset{\circ}{W}{}_2^k(G)$, то $(\alpha, \chi_1 u)_0 = 0$; так как $\chi_2 u$ аннулируется в окрестности B, то $(\beta, \chi_2 u)_0 = 0$. В результате имеем: $(\alpha, u)_0 = (\alpha, (\chi_1 + \chi_2) u)_0 = (\alpha, \chi_1 u)_0 + (\alpha, \chi_2 u)_0 = \int\limits_G f\chi_2\bar{u}\,dx = 0$ $(u \in W_2^k(G))$, т. е. $\alpha = 0$. Лемма доказана.

Пусть $W'^k_2(G)$ — некоторое подпространство пространства $W_2^k(G)$, содержащее $C_0^\infty(G)$, построим негативное пространство $W_2'^{-k}(G)$ (см. стр. 76). Предположим, что оператор A непрерывно действует из всего $W'^k_2(G)$ в $W_2^l(G)$ $(l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, тогда, подобно сказанному на стр. 49, существует сопряженный оператор A^+, непрерывно переводящий все $W_2^{-l}(G)$ в $W_2'^{-k}(G)$ и такой, что

$$(\alpha, Au)_0 = (A^+\alpha, u)_0 \qquad (\alpha \in W_2^{-l}(G),\ u \in W'^k_2(G)). \tag{3.3}$$

Нам будет полезно строить такие сопряженные операторы $\tilde{A}^+$ к A, чтобы $\tilde{A}^+ W_2^{-l}(G)$ было расположено в $W_2^{-k}(G)$, а не в более широком пространстве $W_2'^{-k}(G)$. Просто взять сужение A^+ на α, для которых $A^+\alpha \in W_2^{-k}(G)$, нельзя, так как подобное $A^+\alpha$ не определяется однозначно из (3.3). Однако, если сузить A^+ на α, для которых $A^+\alpha \in \tilde{W}_2^{-k}(G) \subseteq W_2^{-k}(G)$, то цель будет достигнута (см. лемму 3.1). Это сужение мы и будем обозначать $\tilde{A}^+$. Итак, *под $\tilde{A}^+$ понимается (вообще говоря, не непрерывный) оператор из $W_2^{-l}(G)$ в $W_2^{-k}(G)$, область определения которого составляют такие $\alpha \in W_2^{-l}(G)$, для которых найдется $\beta \in \tilde{W}_2^{-k}(G)$, так что $(\alpha, Au)_0 = (\beta, u)_0$ для всех $u \in W_2'^{k}(G)$; при этом полагаем $\tilde{A}^+\alpha = \beta$. Имеем*

$$(\alpha, Au)_0 = (\tilde{A}^+\alpha, u)_0 \quad (u \in W_2'^{k}(G),\ \alpha \in \mathfrak{D}(\tilde{A}^+)). \tag{3.4}$$

Пусть $l=0$, будем рассматривать оператор A как действующий в пространстве $L_2(G) = W_2^0(G)$ с плотной областью определения $W_2'^{k}(G)$. Ясно, что тогда сопряженный (в $L_2(G)$) оператор является сужением оператора $\tilde{A}^+$ (именно, нужно брать $\beta \in L_2(G)$).

3. Обобщенные решения. Расширим понятие сильного и слабого операторов Λ(гр) и Л(гр) задачи (2.2). Пусть $s > -r$, будем предполагать, что коэффициенты выражения L $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+\max(0,s)}(G \cup \Gamma)$, а (гр) такие, что W_2^r(гр) $\cap\, W_2^{r+s}(G)$ плотно в W_2^r(гр), а $W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+s}(G)$— — в $W_2^r(\text{гр})^+$*.

---

* Легко построить пример (гр), для которого W_2^r(гр) $\cap\, W_2^{r+s}(G)$ при больших $s > 0$ не будет плотно в W_2^r(гр). Пусть $r=2$, W_2^r(гр) состоит из тех $u \in W_2^2(G)$, для которых $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu} - \sigma(x)\, u\right|_\Gamma = 0$. Здесь $\sigma(x)$ — непрерывная, но недостаточно гладкая функция. Множество W_2^2(гр) $\cap\, W_2^{2+s}(G)$ при высоком s состоит из функций u, для которых $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma$ и $u|_\Gamma$ могут быть сколь угодно гладкими (в силу теорем вложения) и удовлетворяют равенству $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \sigma(x)\, u|_\Gamma$. Благодаря негладкости σ это возможно лишь тогда, когда $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0$. Таким образом, W_2^2(гр) $\cap\, W_2^{2+s}(G) = \mathring{W}_2^2(G) \cap W_2^{2+s}(G)$ и неплотно в W_2^2(гр).

Во всем дальнейшем, если противное не оговорено, при рассмотрении гладких функций из W_2^r(гр), $W_2^r(\text{гр})^+$ предполагается, что такие функции плотны в этих подпространствах.

Определим s-сильный оператор Λ_s(гр) задачи (2.2) как оператор, непрерывно действующий из W_2^r(гр) $\cap W_2^{r+s}(G)$ (снабженного топологией пространства $W_2^{\max(r,r+s)}(G)$) в $W_2^s(G)$ по закону: Λ_s(гр)$\,u = Lu$ ($u \in W_2^r$(гр)$\,\cap W_2^{r+s}(G)$).

Действующий из $W_2^{-s}(G)$ в $W_2^{-\max(r,r+s)}(G)$ оператор

$$Л_s(\text{гр}) = \widetilde{(\Lambda_s^+(\text{гр})^+)^+}\ (\mathfrak{D}(Л_s(\text{гр})) \subseteq W_2^{-s}(G),$$

$$\mathfrak{R}(Л_s(\text{гр})) \subseteq \widetilde{W}_2^{-\max(r,r+s)}(G)), \tag{3.5}$$

где $\Lambda_s^+(\text{гр})^+$ — s-сильный оператор сопряженной задачи (2.9), будем называть s-слабым оператором задачи (2.2).

В случае $s = 0$ Λ_0(гр) совпадает с оператором Λ'(гр), рассматриваемым как действующий из W_2^r(гр) в $L_2(G) = W_2^0(G)$. Оператор $Л_0$(гр) является некоторым расширением Л (гр) (см. конец п. 2).

Продолжим список решений задачи (2.2), начатый на стр. 98.

5) $r + s$-гладкое решение, ($s \geqslant 0$) — функция $u \in W_2^r$(гр) $\cap W_2^{r+s}(G)$, удовлетворяющая равенству $Lu = f$, или, что то же, равенству Λ_s(гр)$\,u = f$ (ясно, что нужно предполагать $f \in W_2^s(G)$). В случае $s = 0$ это определение совпадает с 1).

6) — s-обобщенное решение ($-s < r$) — функция $u \in \mathfrak{D}(Л_s(\text{гр})) \subseteq W_2^{-s}(G)$, удовлетворяющая равенству $Л_s$(гр)$\,u = f$. Здесь $f \in \widetilde{W}_2^{-\max(r,r+s)}(G)$. При $s = 0$ и $f \in L_2(G)$ совпадает с 4)*.

Определение — s-обобщенного решения можно сформулировать, очевидно, и иначе: пусть $f \in \widetilde{W}_2^{-\max(r,r+s)}(G)$, тогда $u \in W_2^{-s}(G)$ называется таким решением, если

$$(u, L^+ v)_0 = (f, v)_0\ (v \in W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+s}(G)). \tag{3.6}$$

Ясно, что при $r > -s \geqslant 0$ и $f \in L_2(G)$ — s-обобщенное решение является и слабым. Попытка определять — s-обобщенное решение и при $-s \geqslant r$, как нетрудно понять, приведет к понятию $-s$-гладкого решения (см. в связи с этим теорему 3.2). Нужно еще заметить, что — s-обобщенное решение может, конечно, оказаться и более гладкой функцией, чем функции из $W_2^{-s}(G)$.

Может показаться странным, почему при построении обобщенных решений берется f из $\widetilde{W}_2^{-\max(r,r+s)}(G)$, а не из всего $W_2^{-\max(r,r+s)}(G)$, или что то же самое, почему в определении (3.5) оператора $Л_s$ (гр) нужно было брать волну, а не использовать определение (3.3). Это вызвано следующим обстоятельством.

* В дальнейшем мы часто не будем говорить, какой тип обобщенных решений задачи рассматривается — если это ясно из контекста.

Предположим, что имеется какое-то обобщение понятия решения краевой задачи (2.2), при котором решениями служат обобщенные функции из некоторого пространства $H_- \supseteq W_2^r(G)$. Будем говорить, что при этом обобщении не теряются граничные условия, если из того, что обобщенное решение является функцией из $W_2^r(G)$, следует, что оно входит в W_2^r (гр). Ясно, что только такие обобщения разумны. Справедлива следующая теорема, частный случай которой уже был установлен на стр. 99.

Теорема 3.2. *При построении — s-обобщенных решений задачи* (2.2) *не теряются граничные условия. Вместе с тем, если в определении* (3.6) *брать* $f \in W_2^{-\max(r, r+s)}(G)$, *то такая потеря может произойти.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathfrak{D}(Л_s(\text{гр})) \cap W_2^r(G)$. Полагая в (3.6) $v \in C_0^\infty(G) \subset W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+s}(G)$, получим $(f, v)_0 = (u, L^+ v)_0 = (Lu, v)_0$, т. е $(f - Lu, v)_0 = 0$. Так как $f \in \widetilde{W}_2^{-\max(r, r+s)}(G)$, а $Lu \in L_2(G)$, то $f - Lu \in \widetilde{W}_2^{-\max(r, r+s)}(G)$ и из последнего равенства и леммы 3.1 следует, что $f = Lu$. Теперь (3.6) дает $(u, L^+ v)_0 = (f, v)_0 = (Lu, v)_0$, $v \in W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+s}(G)$. Последнее множество по предположению плотно в $W_2^r(\text{гр})^+$, поэтому после перехода к пределу найдем: $(u, L^+ w)_0 = (Lu, w)_0$, $w \in W_2^r(\text{гр})^+$. Это равенство означает, что $u \in W_2^r(\text{гр})^{++} = W_2^r(\text{гр})$, что и требовалось.

Установим второе утверждение теоремы. Пусть $u \in W_2^r(G) \setminus W_2^r(\text{гр})$ фиксирована. Выражение $l(v) = (u, L^+ v)_0$, очевидно, является антилинейным непрерывным функционалом над $W_2^{\max(r, r+s)}(G)$ и поэтому может быть записано в виде $(u, L^+ v)_0 = (f, v)_0$ $(v \in W_2^{\max(r, r+s)}(G))$, где f — некоторый вектор из $W_2^{-\max(r, r+s)}(G)$. Считая в этом равенстве $v \in W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+s}(G)$, получим, что u удовлетворяет (3.6), входит в $W_2^r(G)$ и не входит в $W_2^r(\text{гр})$, т. е. граничные условия потеряны. Теорема доказана.

Все же иногда нам будет удобно рассматривать u, удовлетворяющее (3.6) при $f \in W_2^{-\max(r, r+s)}(G)$. Такое u можно по-прежнему считать обобщенным решением задачи (2.2), однако нужно помнить о возможной потере граничных условий. Возможен и другой подход к устранению потери граничных условий при переходе к обобщенным решениям: нужно вводить негативные пространства с учетом (гр) (см. в связи с этим теоремы 3.6 и 6.12, гл. III, касающиеся эл липтических уравнений). В общем случае схема излагаться не будет.

4. Существование обобщенных решений. Докажем простую теорему типа теорем 2.1 и 2.2. Ниже предполагается достаточная гладкость коэффициентов L.

Теорема 3.3. *Зафиксируем некоторые* $k, l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ $\ldots, l \leqslant \max(r, r+k)$. *Выполнение неравенства*

$$\| L^+ v \|_k \geqslant C \| v \|_l \quad (C > 0; \quad v \in W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+k}(G)) \tag{3.7}$$

является необходимым и достаточным условием того, что для любого $f \in W_2^{-l}(G)$ *найдется* $u \in W_2^{-k}(G)$ *такое, что*

$$(u, L^+ v)_0 = (f, v)_0 \qquad (v \in W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+k}(G)). \tag{3.8}$$

В частности, из (3.7) *следует существование* $-k$*-обобщенного решения* $(-k < r)$ *задачи* (2.2) *при любой* $f \in \widetilde{W}_2^{-l}(G)$ *или* $-k$*-гладкого — при* $-k \geqslant r$.

Доказательство. Покажем, что из (3.7) следует (3.8). Зафиксируем $f \in W_2^{-l}(G)$ и рассмотрим выражение $(f, v)_0$, где $v \in$ $\in W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+k}(G)$. Согласно (3.7), оно фактически зависит не от v, а от $L^+ v$ и поэтому можно положить $(f, v)_0 = l(L^+ v)$, где l — аддитивный и однородный функционал над линейным множеством $L^+ [W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+k}(G)]$.

Далее имеем

$$| l(L^+ v) | = | (f, v)_0 | \leqslant \| f \|_{-l} \| v \|_l \leqslant \frac{1}{C} \| f \|_{-l} \| L^+ v \|_k,$$

т. е. $l(w)$ — непрерывный функционал над $L^+[W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+k}(G)]$, рассматриваемом как часть $W_2^k(G)$. Продолжая этот функционал по теореме Хана—Банаха на все $W_2^k(G)$, найдем некоторое $u \in W_2^{-k}(G)$ такое, что $(f, v)_0 = l(L^+ v) = (u, L^+ v)_0$ $(v \in W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+k}(G))$, а это и требовалось.

Наоборот, пусть при любом $f \in W_2^{-l}(G)$ найдется $u = u_f \in W_2^{-k}(G)$ такое, что (3.8) справедливо. Из этого равенства получаем

$$| (f, v)_0 | = | (u_f, L^+ v)_0 | \leqslant \| u_f \|_{-k} \| L^+ v \|_k = C_f \| L^+ v \|_k.$$

Иными словами, для любого $f \in W_2^{-l}(G)$

$$\left| \left(\mathbf{I}_l f, \frac{v}{\| L^+ v \|_k} \right)_l \right| \leqslant C_f \; (v \in W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+k}(G)) \tag{3.9}$$

(при $l < 0$ здесь $\mathbf{I}_l = \mathbf{I}_{-l}^{-1}$; $\mathbf{I}_0 = E$). При изменении f вектор $\mathbf{I}_l f$ пробегает все гильбертово пространство $W_2^l(G)$, поэтому из (3.9) следует равномерная ограниченность норм $\left\| \frac{v}{\| L^+ v \|_k} \right\|_l$, т. е. неравенство (3.7). Теорема доказана.

Ясно, что теорема обобщается и на нормы в других по сравнению с $W_2^l(G)$ пространствах. Заметим только, что выполнение неравенства $\| L^+ v \|_0 \geqslant C \| v \|_+$ $(C > 0; v \in W_2^r(\text{гр}))$, где $\|\cdot\|_+$ — норма в позитивном пространстве $H_+ \supseteq W_2^r(\text{гр})^+$, влечет для любого $f \in H_-$ существование такого $u \in L_2(G)$, что $(u, L^+ v)_0 = (f, v)_0$ $(v \in W_2^r(\text{гр})^+)$ (при этом $H_0 = L_2(G)$).

5. Локальное поведение обобщенных функций и локальное удовлетворение уравнению и граничным условиям. Введем простые, однако существенные понятия, которые будут неоднократно использоваться в дальнейшем. Область G с границей Γ и ее подобласти G_j, рассматриваемые ниже, могут быть и неограниченными. Пусть $G_1, G_2 \subseteq G, G_3 \subseteq G_1 \cap G_2$. Будем говорить, что функции (обобщенные или нет) $\alpha \in W_2^{k_1}(G_1)$, $\beta \in W_2^{k_2}(G_2)$ $(k_1, k_2 = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ совпадают внутри G_3, если для любых $u \in C_0^\infty(G_3)$, продолженных нулем на G_1 и G_2, $(\alpha, u)_0 = (\beta, u)_0$. Пусть теперь G_3 и G имеют общую часть границы, γ — кусок на ней. Говорят, что α и β совпадают внутри G_3 вплоть до γ, если $(\alpha, u)_0 = (\beta, u)_0$ для любых $u \in C^\infty(G \cup \Gamma)$, аннулирующихся в окрестностях множества $(G \setminus G_3) \cup (\Gamma \setminus \gamma)$ и бесконечности. В этих определениях, в частности, содержатся определения совпадения обобщенной и обычной функций внутри G_3 и внутри G_3 вплоть до γ.

Пусть $\alpha \in W_2^k(G)$. Будем говорить, что α внутри G входит в W_2^l с $l \geqslant k$, если для каждой ограниченной строго внутренней подобласти G' области G найдется $\beta_{G'} \in W_2^l(G)$ такая, что внутри G' $\alpha = \beta_{G'}$ (здесь $k, l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$). Будем это обозначать так: $\alpha \in W_{2,\text{лок}}^l(G)$.

Лемма 3.2. *Если $\alpha \in W_2^k(G)$ внутри некоторой окрестности $U_x \subset G$ произвольной точки $x \in G$ совпадает с $\beta_x \in W_2^l(U_x)$, то $\alpha \in W_{2,\text{лок}}^l(G)$.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $k, l < 0$. Пусть $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots$ —разложение единицы, построенное по U_ξ $(\xi \in G)$, G'—некоторая ограниченная строго внутренняя подобласть G, N — столь большое число, что $\sum_{j=1}^{N} \chi_j(x)$ равна единице на G'. Определим обобщенную функцию $\beta_{G'} \in W_2^l(G)$ равенством $(\beta_{G'}, u)_0 = \sum_{j=1}^{N} (\beta_{x_j}, \chi_j(x) u(x))_0$, где $u \in W_2^{-l}(G)$ — гладкая функция; ясно, что такое определение корректно. Так как $(\alpha, \chi_j u)_0 = (\beta_{x_j}, \chi_j u)_0$ для $u \in C_0^\infty(G')$, то для этих u имеем: $(\alpha, u)_0 = \left(\alpha, \sum_{j=1}^{N} \chi_j u\right)_0 = \sum_{j=1}^{N} (\alpha, \chi_j u)_0 = (\beta_{G'}, u)_0$, т. е. α внутри G' совпадает с $\beta_{G'} \in W_2^l(G)$. Благодаря произвольности G' α внутри G входит в W_2^l. Лемма доказана.

Аналогично можно ввести более общее определение вхождения в W_2^l внутри G вплоть до куска границы $\gamma \subseteq \Gamma$. Будем говорить, что $\alpha \in W_2^k(G)$ так входит в W_2^l $(l \geqslant k)$, если для каждой ограниченной подобласти $G' \subseteq G$, имеющей общую границу с G лишь строго внутри куска γ, найдется $\beta_{G'} \in W_2^l(G)$ такая, что внутри G' вплоть до общей с G части границы $\alpha = \beta_{G'}$ $(k, l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ (см. рис. 1). Мы это обозначаем: $\alpha \in W_{2,\text{лок}}^l(G, \gamma)$.

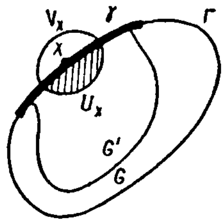


Рис. 1.

Иными словами, $\alpha \in W_2^k(G)$ входит в $W_{2,\text{лок}}^l(G, \gamma)$ $(l \geqslant k,\ 0 \subseteq \gamma \subseteq \Gamma)$, если для каждой подобласти $G' \subseteq G$ указанного вида найдется $\beta_{G'} \in W_2^l(G)$ такая, что $(\alpha, u)_0 = (\beta_{G'}, u)_0$ для всех $u \in C^\infty(G \cup \Gamma)$, аннулирующихся дополнительно в окрестностях множества $G \setminus G'$. В частности, при $l = 0, 1, \ldots$ запись $u \in W_{2,\text{лок}}^l(G, \gamma)$ обозначает, что для любой $G' \subseteq G$ указанного вида $u \in W_2^l(G')$. При $l = 0$ это определение согласуется с определением на стр. 28.

Лемма 3.2 сохраняется и для введенного определения вхождения внутри G вплоть до $\gamma \subseteq \Gamma$, нужно только точки x брать из $G \cup \gamma$, причем, если $x \in \gamma$, то под U_x следует понимать пересечение окрестности в E_n V_x с G, а совпадение α с $\beta_x \in W_2^l(U_x)$ требовать вплоть до $\gamma \cap V_x$. Для $x \in G$ характер совпадения прежний. Доказательство этого варианта леммы 3.2 почти не отличается от приведенного выше доказательства.

Наконец заметим, что в определениях вхождения α в W_2^l можно было считать $\alpha \in W_2^k(G_0)$, где $G_0 \supset G$. Все сказанное выше справедливо и для любых пространств $W_2^{\pm(k,q)}(G)$.

Перейдем к определению локального удовлетворения уравнению $Lu = f$ и граничному условию (гр); будем для простоты считать G ограниченной. Ниже предполагается достаточная гладкость коэффициентов L и плотность в $W_2^r(\text{гр})^+$ множества $W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+s}(G)$ при требуемом $s \geqslant 0$.

Пусть $G_1 \subseteq G$; $k, l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Говорят, что $\alpha \in W_2^k(G_1)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f \in W_2^l(G_1)$ (или является его, вообще говоря, обобщенным решением) внутри G_1, если для любого $v \in C_0^\infty(G_1)$, продолженного нулем на G, справедливо равенство

$$(\alpha, L^+ v)_0 = (f, v)_0. \tag{3.10}$$

Пусть $\gamma \subseteq \Gamma$ — кусок на общей части границы G_1 и G; $f \in W_2^{-\max(r, r+s)}(G_1)$ $(s > -r)$. Функция $\alpha \in W_2^{-s}(G_1)$ удовлетворяет $Lu = f$ внутри G_1 вплоть до γ, где задано граничное условие (гр), если (3.10) справедливо для любых $v \in W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+s}(G)$, аннулирующихся в окрестностях множества $(G \setminus G_1) \cup (\Gamma \setminus \gamma)$.

Ясно, что эти определения согласуются с определением (3.6) обобщенного решения. О (гр) для неограниченной G см. на стр. 219—220.

6. Дифференциальные выражения с ограниченной снизу квадратичной формой. Так мы будем называть выражение L вида (1.2), если существуют $m \in \left[0, \left[\frac{r}{2}\right]\right]$ и граничное условие (гр) такие, что

$$|(Lu, u)_0| \geqslant C \| u \|_m^2 \qquad (C > 0;\ u \in W_2^r(\text{гр})). \tag{3.11}$$

Неравенство (3.11) заведомо будет выполняться, если $(Lu, u)_0 \geqslant C \| u \|_m^2$ или $\operatorname{Re}(Lu, u)_0 \geqslant C \| u \|_m^2$; такие выражения L называются соответственно положительными или имеющими положительную эрмитову часть.

Из (3.11) легко вытекает энергетическое неравенство: $C \| u \|_m^2 \leqslant |(Lu, u)_0| \leqslant \| Lu \|_{-m} \| u \|_m$, откуда

$$\| Lu \|_{-m} \geqslant C \| u \|_m \qquad (C > 0;\ u \in W_2^r(\text{гр})). \tag{3.12}$$

Применяя теорему 3.3, заключаем, что для любого $f \in W_2^{-m}(G)$ найдется такое $u \in W_2^m(G)$, что

$$(u, Lv)_0 = (f, v)_0 \qquad (v \in W_2^r(\text{гр})). \tag{3.13}$$

В частности, для рассматриваемых выражений сопряженная краевая задача (2.9) с любым $f \in \widetilde{W}_2^{-m}(G)$ всегда имеет m-обобщенное решение.

Теорема 3.4. *Пусть имеется выражение L порядка $r = 2m$ с ограниченной снизу квадратичной формой, т. е. выполняется* (3.11). *Будем дополнительно предполагать: а) граничные условия* (гр) *и* (гр)$^+$ *— «близкие»: это означает, что замыкания $W_2^r(\text{гр})$ и $W_2^r(\text{гр})^+$ в пространстве $W_2^m(G)$ совпадают; их мы обозначим $W_2'^m(G)$; б) справедлива оценка*

$$|(Lu, v)_0| \leqslant C_1 \| u \|_m \| v \|_m \qquad (u \in W_2^r(\text{гр}),\ v \in W_2^r(\text{гр})^+). \tag{3.14}$$

Рассмотрим — m-сильный оператор Λ_{-m}(гр) *(действующий по закону* $\Lambda_{-m}(\text{гр})u = Lu$ $(u \in W_2^r(\text{гр})))$ *как оператор из* $W_2'^m(G)$ *в* $W_2'^{-m}(G)$ *и замкнем его. Полученное замыкание обозначим* $\boldsymbol{\Lambda}$ (гр). *Утверждается, что это замыкание существует и является гомеоморфизмом между всем* $W_2'^m(G)$ *и всем* $W_2'^{-m}(G)$. *Для любого* $f \in W_2'^{-m}(G)$

$$((\boldsymbol{\Lambda}(\text{гр}))^{-1} f, L^+ v)_0 = (f, v)_0 \qquad (v \in W_2^r(\text{гр})^+). \tag{3.15}$$

В частности, при $f \in \widetilde{W}_2^{-m}(G) \subseteq W_2^{-m}(G) \subseteq W_2'^{-m}(G)$ *функция* $u = (\boldsymbol{\Lambda}(\text{гр}))^{-1} f \in W_2'^m(G) \subseteq W_2^m(G)$ *является m-обобщенным решением задачи (2.2), непрерывно зависящим от* f: $\| u \|_m \leqslant C_2 \| f \|_{W_2'^{-m}(G)} \leqslant$ $\leqslant C_2 \| f \|_{-m}$.

Доказательство. Билинейная форма $B(u, v) = (Lu, v)_0$ непрерывна при изменении $u \in W_2^r(\text{гр})$, $v \in W_2^r(\text{гр})^+$ в метрике $W_2^m(G)$ (см. (3.14)), следовательно, ее можно распространить по непрерывности в форму от $u, v \in W_2'^m(G)$. Отсюда вытекает, что справедливо представление $(Lu, v)_0 = (Ku, v)_m$ $(u \in W_2^r(\text{гр}),\ v \in W_2^r(\text{гр})^+)$, где K — непрерывный оператор, действующий в $W_2'^m(G)$.

Покажем, что K имеет ограниченный обратный K^{-1}, определенный во всем $W_2'^m(G)$. Прежде всего

$$\| Ku \|_m \geqslant C \| u \|_m \qquad (C > 0;\ u \in W_2'^m(G)). \tag{3.16}$$

Это неравенство достаточно проверить при $u \in W_2^r(\text{гр})$; для таких u оно вытекает из оценки (см. (3.11)): $\| Ku \|_m \| u \|_m \geqslant |(Ku, u)_m| \geqslant$ $\geqslant C \| u \|_m^2$. Для доказательства существования K^{-1}осталось показать, что $\mathfrak{R}(K) = W_2'^m(G)$. Из (3.16) следует, что $\mathfrak{R}(K)$ замкнута в $W_2'^m(G)$. С другой стороны, из (3.11) вытекает оценка $|(Ku, u)_m| \geqslant$ $\geqslant C \| u \|_m^2$ $(u \in W_2'^m(G))$, показывающая, что $\mathfrak{R}(K)$ плотна в $W_2'^m(G)$. Итак $\mathfrak{R}(K) = W_2'^m(G)$.

Далее, имеем $(Ku, v)_m = (Lu, v)_0 = (\mathbf{I} Lu, v)_m$ $(u \in W_2^r(\text{гр}), v \in W_2^r(\text{гр})^+)$, где $\mathbf{I}$ построен по цепочке $W_2'^{-m}(G) \supseteq L_2(G) \supseteq W_2'^m(G)$. Отсюда в силу плотности $W_2^r(\text{гр})^+$ в $W_2'^m(G)$

$$Ku = \mathbf{I} Lu \qquad (u \in W_2^r(\text{гр})). \tag{3.17}$$

Таким образом, Λ_{-m}(гр) — сужение на W_2^r(гр) оператора $\mathbf{I}^{-1} K$, являющегося, очевидно, гомеоморфизмом между $W_2'^m(G)$ и $W_2'^{-m}(G)$. Так как W_2^r(гр) плотно в $W_2'^m(G)$, то, расширяя Λ_{-m}(гр) по непрерывности, придем к оператору $\Gamma^{-1}K = \Lambda$(гр) — требуемому замыканию. Осталось установить соотношение (3.15). Его достаточно доказать для f, плотных в $W_2'^{-m}(G)$, в частности для $f \in L[W_2^r(\text{гр})]$. Имеем при $f = Lu = \Lambda(\text{гр})\,u$ $(u \in W_2^r(\text{гр}))$ $((\Lambda(\text{гр}))^{-1}f, L^+v)_0 = (u, L^+v)_0 = (Lu, v)_0 = (f, v)_0$ $(v \in W_2^r(\text{гр})^+)$, что и требовалось. Теорема доказана.

Заметим, что условия (3.11) и (3.14) благодаря а) эквивалентны условиям

$$|(v, L^+v)_0| \geqslant C\|v\|_m^2, \quad |(u, L^+v)_0| \leqslant C_1\|u\|_m\|v\|_m$$
$$(u \in W_2^r(\text{гр}), v \in W_2^r(\text{гр})^+). \tag{3.18}$$

В самом деле, пусть выполнены (3.11), (3.14) и а), установим оценки (3.18). Вторая из них очевидна, для доказательства первой построим последовательность $u_\nu \in W_2^r$(гр) такую, что $u_\nu \to v$ в $W_2^m(G)$. Получим

$$(v, L^+v)_0 = \lim_{\nu\to\infty}(u_\nu, L^+v)_0 = \lim_{\nu\to\infty}(Lu_\nu, v)_0 =$$
$$= \lim_{\nu\to\infty}(Ku_\nu, v)_m = (Kv, v)_m. \tag{3.19}$$

Как уже отмечалось, из (3.11) вытекает оценка $|(Ku, u)_m| \geqslant C\|u\|_m^2$ $(u \in W_2'^m(G))$. Отсюда и из (3.19) вытекает первое неравенство в (3.18). Точно так же показывается, что (3.18) и а) влекут (3.11) и (3.14). Итак, *в условии теоремы 3.4 оценки* (3.11) *и* (3.14) *можно заменить оценками* (3.18).

Резюмируя, можно сказать, что в теореме 3.4 введено еще одно понятие обобщенных решений задачи (2.2) с $f \in W_2'^{-m}(G)$. Именно, под ее решением понимается

$$u = (\Lambda(\text{гр}))^{-1} f \in W_2'^m(G). \tag{3.20}$$

Можно дать эквивалентное определение. Функция $u \in W_2^m(G)$ *— обобщенное в этом смысле решение рассматриваемой задачи, если* $u \in W_2'^m(G)$ *и является* m*-обобщенным ее решением (т. е.* $(u, L^+v)_0 = (f, v)_0$, $v \in W_2^r(\text{гр})^+$*).*

Нуждается в доказательстве лишь тот факт, что функция u, являющаяся решением (2.2) в смысле второго определения, удовлетворяет (3.20). Пусть $u_\nu \in W_2^r(\text{гр})$, $u_\nu \to u$ в $W_2^m(G)$. Тогда в обозначениях стр. 111 для любого $v \in W_2^r(\text{гр})^+$

$$(\mathbf{I} f, v)_m = (f, v)_0 = (u, L^+ v)_0 = \lim_{\nu\to\infty} (u_\nu, L^+ v)_0 = \lim_{\nu\to\infty} (Lu_\nu, v)_0 =$$
$$= \lim_{\nu\to\infty} (Ku_\nu, v)_m = (Ku, v)_m.$$

Таким образом, $\mathbf{I} f = Ku$, откуда $u = K^{-1}\mathbf{I} f = (\boldsymbol{\Lambda}(\text{гр}))^{-1} f$, что и требовалось.

Как уже говорилось, введение понятия обобщенного решения при произвольном $f \in W_2^{-m}(G)$ (а тем более при $f \in W_2'^{-m}(G)$) имеет некорректности, связанные с возможной потерей граничных условий (хотя это бывает и не всегда — см. стр. 127). Если брать $f \in \widetilde{W}_2^{-m}(G)$, то такой потери не произойдет. Заметим также, что часто уже из того, что u является m-обобщенным решением задачи (2.2), следует включение $u \in W_2'^m(G)$, которое позволяет понимать u как обобщенное решение в указанном только что смысле.

7. Задачи на собственные значения. Рассмотрим дифференциальное выражение $L - \lambda E$, где λ — комплексный параметр, и будем исследовать обобщенную разрешимость задачи

$$Lu - \lambda u = f, \quad u \in (\text{гр}). \tag{3.21}$$

Точная постановка вопроса зависит от вида операторного уравнения, которым заменяется задача (3.21). Воспользуемся оператором и понятием обобщенного решения, введенным в теореме 3.4.

Будем предполагать L таким, что при некотором λ_0 выражение $L - \lambda_0 E$ имеет ограниченную снизу квадратичную форму, точнее, для него выполняется неравенство (3.11) и условия а) и б) теоремы 3.4. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_0 = 0$. Обозначим через A сужение $\boldsymbol{\Lambda}(\text{гр})$ на те $u \in W_2'^m(G) \subseteq W_2^m(G)$, для которых $\boldsymbol{\Lambda}(\text{гр}) u \in L_2(G)$; A рассматривается как оператор в $L_2(G)$. В частности, $W_2^r(\text{гр}) \subset \mathfrak{D}(A)$, поэтому $\mathfrak{D}(A)$ плотна в $L_2(G)$.

Лемма 3.3. *Оператор A^*, сопряженный к A в смысле $L_2(G)$, строится точно так же, как и A, но по L^+ и* (гр)$^+$ *(его построение возможно, так как благодаря эквивалентности условий* (3.11), (3.14), *а) с условиями* (3.18) *и а) их выполнение для L и* (гр) *влечет выполнение для L^+ и* (гр)$^+$).

Доказательство. Наряду с $\boldsymbol{\Lambda}(\text{гр})$ рассмотрим оператор $\boldsymbol{\Lambda}^+(\text{гр})^+$, построенный по L^+ и (гр)$^+$; оба эти оператора непрерывно действуют из $W_2'^m(G)$ в $W_2'^{-m}(G)$. Справедливо равенство

$$(\boldsymbol{\Lambda}(\text{гр})\, u, v)_0 = (u, \boldsymbol{\Lambda}^+(\text{гр})^+ v)_0 \quad (u, v \in W_2'^m(G)), \tag{3.22}$$

его достаточно проверить для $u \in W_2^r(\text{гр})$ и $v \in W_2^r(\text{гр})^+$, но здесь оно очевидно: $(Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0$. Полагая $\Lambda(\text{гр})u = \alpha$, $\Lambda^+(\text{гр})^+v = \beta$, получим из (3.22): $(\alpha, (\Lambda^+(\text{гр})^+)^{-1}\beta)_0 = ((\Lambda(\text{гр}))^{-1}\alpha, \beta)_0$ $(\alpha, \beta \in W_2'^{-m}(G))$. Взяв $\alpha, \beta \in L_2(G)$, найдем $(\alpha, B^{-1}\beta)_0 = (A^{-1}\alpha, \beta)_0$, где B построено по L^+ и $(\text{гр})^+$ так же, как и A — по L и (гр). Таким образом, $B^{-1} = (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, откуда $B = A^*$. Лемма доказана.

Легко видеть, что оператор A^{-1} вполне непрерывен. Действительно, $A^{-1} = O_2(\Lambda(\text{гр}))^{-1}O_1$, где O_1 — оператор вложения $L_2(G)$ в $W_2'^{-m}(G)$, а O_2 — оператор вложения $W_2'^{m}(G)$ в $L_2(G)$. В силу теорем вложения (стр. 31 — 32) операторы O_1 и O_2 вполне непрерывные, а это влечет полную непрерывность A^{-1}. Таким образом, пара уравнений в $L_2(G)$ $(E - \lambda A^{-1})u' = f'$, $(E - \lambda A^{-1*})v' = g'$ будет фредгольмова. Но тогда фредгольмовой будет и пара

$$(A - \lambda E)u = f, \quad (A^* - \lambda E)v = g. \tag{3.23}$$

Благодаря лемме 3.3 фредгольмовость пары (3.23) можно интерпретировать как нормальную разрешимость для обобщенных решений задачи (3.21). Тем самым мы пришли к теореме.

Теорема 3.5. *Предположим, что найдется такое значение λ_0 параметра λ, для которого выражение порядка $2m$ $L - \lambda_0 E$ и граничные условия* (гр) *удовлетворяют соотношениям* (3.11), (3.14) *и а)* (*или* (3.18) *и а)*). *Будем рассматривать ниже решения, обобщенные в том смысле, что они являются m-обобщенными и входят в $W_2'^{m}(G)$.*

Утверждается, что задача (3.21) *с $f \in L_2(G)$ — фредгольмова. Точно это означает следующее. Задача*

$$Lu - \lambda u = 0, \quad u \in (\text{гр}), \tag{3.24}$$

имеет отличные от нуля обобщенные решения (*собственные функции*) *только для счетного числа значений параметра $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots;$ $|\lambda_k| \to \infty)$ — ее собственных чисел. Отвечающее каждому λ_k подпространство обобщенных решений — собственное подпространство — конечномерно. У сопряженной задачи*

$$L^+v - \lambda v = 0, \quad v \in (\text{гр})^+, \tag{3.25}$$

собственные числа равны $\overline{\lambda}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Собственные подпространства для (3.24) *и* (3.25), *отвечающие λ_k* и *$\overline{\lambda}_k$, имеют одинаковую размерность. Задача* (3.21) *разрешима для тех и только тех $f \in L_2(G)$, которые ортогональны к собственному подпространству задачи* (3.25), *отвечающему $\overline{\lambda}$.*

8 **Обобщения.** Конструкции в предыдущих двух пунктах носят общий характер и легко формулируются в абстрактном виде. Такая формулировка полезна при изучении краевых задач для неэллиптических выражений.

Теорема 3.6. *Рассмотрим цепочку $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$. Пусть B — оператор с областью определения $\mathfrak{D}(B) \subseteq H_+$, действующий в пространство H_0 и удовлетворяющий неравенствам*

$$|(Bu, u)_0| \geqslant C_1 \|u\|_+, \ |(Bu, v)_0| \leqslant C_2 \|u\|_+ \|v\|_+ \quad (C_1, C_2 > 0; \ u,v \in \mathfrak{D}(B)). \tag{3.26}$$

Предполагается, что $\mathfrak{D}(B)$ (вообще говоря, неплотное в H_+) плотно в H_0. Пусть $H'_+ \subset H_+$ — замыкание $\mathfrak{D}(B)$ в H_+, H'_- — соответствующее H'_+ и H_0 негативное пространство. Утверждается, что замыкание оператора B рассматриваемого как оператор из H'_+ в H'_-, является гомеоморфизмом между этими пространствами.

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму $B(u, v) = (Bu, v)_0$ ($u, v \in \mathfrak{D}(B)$), непрерывную при изменении u, v в метрике H_+. Расширим ее по непрерывности в непрерывную форму от $u, v \in H'_+$; отсюда вытекает представление $(Bu, v)_0 = (Ku, v)_+$ ($u, v \in \mathfrak{D}(B)$), где K — непрерывный оператор в H'_+. Так же, как и на стр. 111, показывается, что существует ограниченный обратный K^{-1}, определенный во всем H'_+. Рассматривая оператор $\mathbf{I}$ для цепочки $H'_- \supseteq H_0 \supset H'_+$, можем написать: $(Ku, v)_+ = (Bu, v)_0 = (\mathbf{I}Bu, v)_+$ ($u, v \in \mathfrak{D}(B)$), откуда $Ku = \mathbf{I}Bu$ ($u \in \mathfrak{D}(B)$). Таким образом, B — сужение на $\mathfrak{D}(B)$ оператора $\mathbf{I}^{-1}K$, являющегося гомеоморфизмом между H'_+ и H'_-. Отсюда следует теорема.

Обозначим указанное замыкание оператора B через $\mathbf{B}$. Замыкая по непрерывности билинейную форму $(Bu, v)_0$ ($u, v \in \mathfrak{D}(B)$), придем к билинейной форме $(\mathbf{B}u, v)_0$ ($u, v \in H'_+$). Очевидно, всякий антилинейный непрерывный функционал $l(v)$ над H'_+ допускает представление

$$l(v) = (\mathbf{B}u_0, v)_0 \quad (v \in H'_+) \tag{3.27}$$

с некоторым $u_0 \in H'_+$. В частности, если $H_+ = H_0 = H_-$ и $\mathfrak{D}(B) = H_0$, это представление примет вид: $l(g) = (Bf_0, g)_0$ ($g \in H_0$), где $f_0 \in H_0$.

Формулировка теоремы 3.6 несколько отличается от теоремы 3.4 в связи с тем, что теперь нигде не фигурирует аналог L^+. Для полной их идентичности введем оператор B^+, равный сужению на H_+ оператора B^* — обычного сопряженного в H_0 к B, если последний считать действующим в H_0. Будем предполагать, что $\mathfrak{D}(B^+)$ плотна в H_0 и ее замыкание в H_+ совпадает с аналогичным замыканием $\mathfrak{D}(B)$ (т. е. с H'_+). Тогда (3.26) эквивалентно подобным условиям для B^+, а также условиям, в которых вторая оценка имеет вид $|(Bu, v)_0| \leqslant C_2 \|u\|_+ \|v\|_+$ ($u \in \mathfrak{D}(B)$, $v \in \mathfrak{D}(B^+)$). Теперь все остальные результаты пп. 6 и 7 легко формулируются и доказываются.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. Функция Грина.

В этой главе сперва будут исследованы краевые задачи для эллиптических уравнений, а затем рассмотреи важный круг вопросов, связанных с теоремой о том, что всякое обобщенное решение эллиптического уравнения является достаточно гладким. В пятом параграфе исследуется функция Грина эллиптического уравнения. Рассмотрения проводятся для уравнений высокого порядка только в случае нулевых граничных условий, для уравнения второго порядка рассматриваются также и другие условия; кроме того, большей частью мы изучаем лишь сильно эллиптические уравнения. В последнем, шестом, параграфе излагается (частично без полных доказательств) общий случай. Область G, если противное не будет оговорено, предполагается ограниченной, а ее граница Γ — кусочно гладкой.

§ 1. Оценки снизу квадратичной формы на финитных функциях

1. **Определения.** Дифференциальное выражение

$$Lu = L(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leqslant r} a_\alpha(x) D^\alpha u \tag{1.1}$$

с, вообще говоря, комплексными коэффициентами $a_\alpha(x)$, удовлетворяющими обычным предположениям гладкости, называется эллиптическим в точке x, если для всякого вещественного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$ r-линейная форма

$$L_c(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = r} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n} \tag{1.2}$$

отлична от нуля. Так как старшие коэффициенты $L^+(x, D)$ равны $(-1)^r \overline{a_\alpha(x)}$, то выражения $L(x, D)$ и $L^+(x, D)$ одновременно эллиптичны или нет. Ниже будем рассматривать выражения $L = L(x, D)$, эллиптические в $G \cup \Gamma$, т. е. эллиптические в каждой точке $x \in G \cup \Gamma$.

Нетрудно видеть, что *если старшие коэффициенты $a_\alpha(x)$ (т. е. коэффициенты при $|\alpha| = r$) вещественны, то обязательно порядок r четен ($r = 2m$) и для формы* (1.2) *справедлива одна из двух оценок*

$$\sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \geqslant \varepsilon |\xi|^{2m} \text{ или } \leqslant -\varepsilon |\xi|^{2m} \quad (\varepsilon > 0;\ x \in G \cup \Gamma;\ \xi \in E_n) \tag{1.3}$$

(*G предполагается связной*).

В самом деле, функция $L_c(x, \xi)$ непрерывна относительно $(x, \xi) \in (G \cup \Gamma) \times K$ (K обозначает сферу $|\xi| = 1$) и поэтому всюду на этом множестве либо строго положительна, либо строго отрицательна. Если бы r было нечетным, то, заменив ξ на $-\xi$, мы бы получили $L_c(x, -\xi) = -L_c(x, \xi)$, что противоречит знакопостоянству $L_c(x, \xi)$. Итак, $r = 2m$. Пусть, например, $L_c(x, \xi) \geqslant \varepsilon > 0$ $((x, \xi) \in (G \cup \Gamma) \times K)$. Если ξ — произвольный вектор, то $\xi / |\xi| \in K$, и мы имеем благодаря однородности $\varepsilon \leqslant L_c(x, \xi/|\xi|) = L_c(x, \xi)/|\xi|^{2m}$, т. е. получили (1.3). Утверждение доказано.

Обозначим $\operatorname{Re} L$ вещественную часть L — дифференциальное выражение, коэффициентами которого служат вещественные части соответствующих $a_\alpha(x)$. Мы часто будем рассматривать такие L, для которых $\operatorname{Re} L$ имеет тот же порядок, что и L, и эллиптично. Это подкласс класса эллиптических выражений, так как для такого L $\operatorname{Re}\{L_c(x, \xi)\} = \sum\limits_{|\alpha|=r} \operatorname{Re} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \neq 0$ и поэтому тем более $L_c(x, \xi) \neq 0$; порядок L четный: $r = 2m$. Для формы $\operatorname{Re} L_c = (\operatorname{Re} L)_c$ выполняется одна из оценок (1.3), нам удобно в дальнейшем считать, что в случае четного m выполняется первая из оценок, в случае нечетного—вторая. Выражения указанного подкласса называются сильно эллиптическими.

При $n \geqslant 3$ общее эллиптическое выражение также имеет четный порядок $r = 2m$.

Доказательство этого факта удобно отложить до стр. 144 (см. лемму 3.2). Заметим, что при $n = 2$ четность r необязательна, так $Lu = D_1 u + i D_2 u$ эллиптично и имеет первый порядок.

2. **Оценки снизу квадратичной формы.** Докажем следующую теорему, на которой базируется применение к эллиптическим уравнениям общей схемы пп. 6—7, § 3, гл. II.

Теорема 1.1. *Для сильно эллиптического дифференциального выражения L порядка $2m$ выполняется оценка*

$$\operatorname{Re}(Lu, u)_0 \geqslant C \|u\|_m^2 \quad (C > 0;\ u \in \mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G)), \qquad (1.4)$$

если только диаметр области G достаточно мал. С другой стороны, при фиксированной области G всегда можно подобрать столь большую константу $k \geqslant 0$, что

$$\operatorname{Re}(Lu + ku, u)_0 \geqslant C \|u\|_m^2 \quad (C > 0;\ u \in \mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G)). \qquad (1.5)$$

Наоборот, если для выражения L порядка $2m$ в некоторой области G справедливо неравенство (1.4) *на $u \in C_0^\infty(G)$, то L сильно эллиптично в $G \cup \Gamma$.*

Доказательство первой части теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма 1.1. *Пусть коэффициенты b_α постоянны и $Mu = \sum\limits_{|\alpha|=2m} b_\alpha D^\alpha u$ сильно эллиптично. Тогда справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}(Mu,\ u)_0 \geqslant C\,\|u\|_m^2 \quad (u \in C_0^\infty(G)). \tag{1.6}$$

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Фурье функции f:

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int\limits_{E_n} f(x)\, e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx \quad (\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E_n). \tag{1.7}$$

Интегрируя по частям в (1.7) в случае финитной достаточно гладкой f, получим

$$\widetilde{(D^\alpha f)}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \tilde{f}(\xi). \tag{1.8}$$

Для доказательства (1.6) поступим следующим образом. Пусть $u \in C_0^\infty(G)$, продолжая u нулем вне G и используя (1.8), найдем

$$\widetilde{(Mu)}(\xi) = (-1)^m \Big(\sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha \xi^\alpha\Big) \tilde{u}(\xi). \tag{1.9}$$

Согласно (1.3), записанному для $\operatorname{Re} M$,

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} \operatorname{Re} b_\alpha \xi^\alpha \geqslant \varepsilon \Big(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\Big)^m \geqslant \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} (\xi^\alpha)^2 \quad (\xi \in E_n). \tag{1.10}$$

Теперь при помощи равенства Парсеваля, (1.9) и (1.10) получаем:

$$\operatorname{Re}(Mu,\ u)_0 = \operatorname{Re} \int\limits_{E_n} \widetilde{(Mu)}(\xi)\overline{\tilde{u}(\xi)}\, d\xi = (-1)^m \operatorname{Re} \int\limits_{E_n} \Big(\sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha \xi^\alpha\Big) |\tilde{u}(\xi)|^2\, d\xi =$$

$$= (-1)^m \int\limits_{E_n} \Big(\sum_{|\alpha|=2m} \operatorname{Re} b_\alpha \xi^\alpha\Big) |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \geqslant \varepsilon \int\limits_{E_n} \Big(\sum_{|\alpha|=m} (\xi^\alpha)^2\Big) |\tilde{u}(\xi)|^2\, d\xi =$$

$$= \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{E_n} |\xi^\alpha \tilde{u}(\xi)|^2\, d\xi = \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{E_n} |\widetilde{(D^\alpha u)}(\xi)|^2\, d\xi = \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_0^2.$$

Последняя сумма для финитных функций $\geqslant C_1 \|u\|_m^2$ (см. стр. 36). Итак, мы пришли к (1.6). Лемма доказана.

Докажем первую часть теоремы. Установим сперва неравенство

(1.4) для $u \in C_0^\infty(G)$. Пусть $x_0 \in E_n$, будем рассматривать области G достаточно малого диаметра, содержащие эту точку; $L_c(x_0, D)u = \sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x_0) D^\alpha u$. Зафиксируем область G_0, содержащую x_0. Согласно лемме 1.1

$$\operatorname{Re}(L_c(x_0, D)u, u)_{L_2(G_0)} \geqslant C\|u\|^2_{W_2^m(G_0)} \quad (u \in C_0^\infty(G_0)). \tag{1.11}$$

Пусть $u \in C_0^\infty(G)$, $G \subseteq G_0$; перебросим ниже в каждом слагаемом несколько производных при помощи интегрирования по частям на второй сомножитель, переброску будем производить до тех пор, пока каждая из функций u, стоящая под знаком скалярного произведения, не будет дифференцироваться число раз $\leqslant m$. Получим

$$(L(x, D)u, u)_0 - (L_c(x_0, D)u, u)_0 = \left(\sum_{|\alpha|=2m} [a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)] D^\alpha u, u\right)_0 +$$
$$+ \sum_{|\alpha|<2m} (a_\alpha(x) D^\alpha u, u)_0 = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u, D^\beta u)_0,$$

где $b_{\alpha\beta}(x)$ — некоторые производные порядка не выше m от разностей $a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)$ ($|\alpha| = 2m$) или коэффициентов $a_\alpha(x)$ ($|\alpha| < 2m$). В последней сумме слагаемые будут двух типов: вида $([a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)] D^\alpha u, D^\beta u)_0$ с $|\alpha| = |\beta| = m$ и вида $(b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u, D^\beta u)_0$, где по крайней мере одно из чисел $|\alpha|$, $|\beta|$ будет меньше m. Путем выбора достаточно малой области G каждое из первых слагаемых, очевидно, можно оценить сверху выражением $\varepsilon\|u\|_m^2$ с произвольным наперед заданным $\varepsilon > 0$. Вторые слагаемые оцениваются сверху выражениями $C_1\|u\|_{|\alpha|}\|u\|_{|\beta|}$, каждое из которых благодаря оценке $\|u\|_{W_2^k(G)} \leqslant d^{l-k}\|u\|_{W_2^l(G)}$ $(0 \leqslant k < l;\ u \in \mathring{W}_2^l(G))$, где d—диаметр G (см. стр. 35), может быть сделано меньше $dC_1\|u\|_m^2$. Из сказанного ясно, что, выбирая $G \subseteq G_0$ достаточно малого диаметра, можно добиться выполнения неравенства

$$|(L(x, D)u, u)_0 - (L_c(x_0, D)u, u)_0| \leqslant \varepsilon\|u\|_m^2. \tag{1.12}$$

Продолжим нулем $u \in C_0^\infty(G)$ в функцию из $C_0^\infty(G_0)$. Тогда (1.11) даст неравенство $\operatorname{Re}(L(x_0, D)u, u)_0 \geqslant C\|u\|_m^2$ с C, не зависящим от G. Учитывая эту оценку и (1.12), получим

$$\operatorname{Re}(L(x, D)u, u)_0 = \operatorname{Re}(L_c(x_0, D)u, u)_0 + \operatorname{Re}[(L(x, D)u, u)_0 -$$
$$- (L_c(x_0, D)u, u)_0] \geqslant (C - \varepsilon)\|u\|_m^2.$$

Таким образом, при $\varepsilon > 0$ достаточно малом мы пришли к (1.4).

Пусть теперь $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G)$. Так как у $u(x)$ все производные до порядка $m-1$ включительно аннулируются на Γ, то, интегрируя по частям, получим

$$(L(x, D)u, u)_0 = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (f_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u, D^\beta u)_0, \tag{1.13}$$

где $f_{\alpha\beta}$ некоторые во всяком случае непрерывные в $G \cup \Gamma$ коэффициенты. Построим $u_\nu \in C_0^\infty(G)$, $u_\nu \to u$ в $W_2^m(G)$; согласно (1.13), $(L(x, D)u_\nu, u_\nu)_0 \to (L(x, D)u, u)_0$. Для u_ν оценка (1.4) имеет место, но тогда она справедлива и для u.

Перейдем к выводу (1.5). Из доказательства (1.4) ясно, что (1.5) достаточно установить для $u \in C_0^\infty(G)$. Продолжим коэффициенты L за пределы G с сохранением их гладкости и эллиптичности $\operatorname{Re} L$. Согласно доказанной части теоремы для каждого $x \in G \cup \Gamma$ существует окрестность (в E_n) U_x такая, что $\operatorname{Re}(Lu, u)_0 \geqslant C_x \|u\|_m^2$ $(C_x > 0)$ для $u \in C_0^\infty(U_x)$. Построим для каждого $x \in G \cup \Gamma$ окрестность V_x, расположенную строго внутри U_x, и выберем из покрытия $G \cup \Gamma$ окрестностями V_x конечное покрытие $V_{x_1}, \ldots, V_{x_N}$. Получим, что существует константа $C > 0$ такая, что

$$\operatorname{Re}(Lu, u)_0 \geqslant C \|u\|_m^2 \quad (u \in C_0^\infty(U_{x_j});\ j = 1, \ldots, N). \tag{1.14}$$

Построим разложение единицы, отвечающее покрытию $G \cup \Gamma$ окрестностями V_{x_j}, т. е. построим N неотрицательных функций $\chi_j(x) \in C_0^\infty(E_n)$, каждая из которых аннулируется вне V_{x_j}, и таких, что $\sum_{j=1}^N \chi_j(x) = 1$ $(x \in G)$. Пусть $u \in C_0^\infty(G)$, тогда $\sqrt{\chi_j(x)}\, u(x) \in C_0^\infty(U_{x_j})$ и мы согласно (1.14) можем написать: $\operatorname{Re}(L[\sqrt{\chi_j} u], \sqrt{\chi_j} u)_0 \geqslant C \|\sqrt{\chi_j} u\|_m^2$ $(j = 1, \ldots, N)$. Суммируя эти неравенства, найдем

$$\|u\|_m^2 = \Big\|\sum_{j=1}^N \chi_j u\Big\|_m^2 \leqslant \Big(\sum_{j=1}^N \|\chi_j u\|_m\Big)^2 \leqslant N \sum_{j=1}^N \|\chi_j u\|_m^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_1 N \sum_{j=1}^N \|\sqrt{\chi_j} u\|_m^2 \leqslant C_2 \sum_{j=1}^N \operatorname{Re}(L[\sqrt{\chi_j} u], \sqrt{\chi_j} u)_0. \tag{1.15}$$

Очевидно, $L[\sqrt{\chi_j} u] = \sqrt{\chi_j} Lu + \sum_{|\alpha| < 2m-1} b_{j\alpha}(x) D^\alpha u$, где $b_{j\alpha}$ — некоторые достаточно гладкие коэффициенты. Поэтому правую часть (1.15) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname{Re}(L[\sqrt{\chi_j}u], \sqrt{\chi_j}u)_0 = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Re}(\sqrt{\chi_j}Lu, \sqrt{\chi_j}u)_0 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant 2m-1} \operatorname{Re}(b_{j\alpha}(x) D^\alpha u, \sqrt{\chi_j}u)_0 = \operatorname{Re}(Lu, u)_0 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\beta| \leqslant m, |\gamma| \leqslant m-1} \operatorname{Re}(f_{j\beta\gamma}(x) D^\beta u, g_{j\beta\gamma}(x) D^\gamma u)_0, \tag{1.16}$$

где $f_{j\beta\gamma}$ и $g_{j\beta\gamma}$ — некоторые непрерывные в $G \cup \Gamma$ коэффициенты, которые получились при перебрасывании в (1.16) производных с первого сомножителя на второй.

Для дальнейших оценок воспользуемся неравенством Эрлинга — Ниренберга (см. стр. 33): если $0 \leqslant k \leqslant l < s$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $K(\varepsilon) > 0$, что $\|u\|_l^2 \leqslant \varepsilon \|u\|_s^2 + K(\varepsilon)\|u\|_k^2$ для любой гладкой u. Пусть $\delta > 0$, при помощи неравенства $ab \leqslant \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ получим

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\beta| \leqslant m, |\gamma| \leqslant m-1} \operatorname{Re}(f_{j\beta\gamma}(x) D^\beta u, g_{j\beta\gamma}(x) D^\gamma u)_0 \right| \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \|u_m\| \|u\|_{m-1} \leqslant \frac{C_3^2\delta^2}{2} \|u\|_m^2 + \frac{1}{2\delta^2}\|u\|_{m-1}^2 \leqslant \left(\frac{C_3^2\delta^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2\delta^2}\right)\|u\|_m^2 +$$
$$+ \frac{K(\varepsilon)}{2\delta^2}\|u\|_0^2. \tag{1.17}$$

Из 1.15), (1.16) и (1.17) следует:

$$\frac{1}{C_2}\|u\|_m^2 \leqslant \operatorname{Re}(Lu, u)_0 + \left(\frac{C_3^2\delta^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2\delta^2}\right)\|u\|_m^2 + \frac{K(\varepsilon)}{2\delta^2}\|u\|_0^2. \tag{1.18}$$

Выберем сперва $\delta > 0$, а затем $\varepsilon > 0$ столь малыми, чтобы $C_3^2\delta^2/2 + \varepsilon/2\delta^2$ стало меньше $1/C_2$ и перенесем в (1.18) член с $\|u\|_m^2$ в правой части налево. В результате получим требуемую оценку (1.5).

Перейдем к доказательству последней части теоремы. Установим лемму, обратную к лемме 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть выражение* $Mu = \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha D^\alpha u$ *порядка* $2m$ *с постоянными коэффициентами обладает тем свойством, что для* *функций* $u \in C_0^\infty(U)$, *где* $U = G$ *—некоторый шар с центром в нуле, выполняется неравенство* (1.6). *Тогда* $\operatorname{Re} M$ *эллиптично, причем константа* $\varepsilon > 0$ *в* (1.3) *зависит от* C *из* (1.6) *и не зависит от* b_α.

Доказательство. Из неравенства (1.6) следует оценка

$$\operatorname{Re}(Mu,\ u)_0 \geqslant C \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u,\ D^\alpha u)_0 \qquad (u \in C_0^\infty(U)). \tag{1.19}$$

Покажем, что она с одной и той же константой C справедлива для любой $v \in C_0^\infty(E_n)$. В самом деле, при $t > 0$ достаточно большом $u(x) = v(tx) \in C_0^\infty(U)$ и поэтому для нее справедливо (1.19). Так как $(D^\alpha u)(x) = t^{|\alpha|}(D^\alpha v)(tx)$, то при помощи замены переменных получим

$$\operatorname{Re}(Mv,\ v)_{L_2(E_n)} = t^n \operatorname{Re} \int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha (D^\alpha v)(tx)\,\overline{v(tx)}\,dx =$$

$$= t^{n-2m} \operatorname{Re} \int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha (D^\alpha u)(x)\,\overline{u(x)}\,dx \geqslant C t^{n-2m} \sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{E_n} |(D^\alpha u)(x)|^2\,dx =$$

$$= C \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha v,\ D^\alpha v)_{L_2(E_n)}, \tag{1.20}$$

что и требовалось.

Перейдем теперь от $v(x)$ к ее преобразованию Фурье $\tilde{v}(\xi)$. Используя (1.8) и равенство Парсеваля, перепишем (1.20) в виде

$$\int\limits_{E_n} \left[(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} \operatorname{Re} b_\alpha \xi^\alpha\right] |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi \geqslant C \int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} (\xi^\alpha)^2 |\tilde{v}(\xi)|^2\,d\xi,$$

или, полагая $P(\xi) = (-1)^m \sum\limits_{|\alpha|=2m} \operatorname{Re} b_\alpha \xi^\alpha - C \sum\limits_{|\alpha|=m} (\xi^\alpha)^2$, в виде

$$\int\limits_{E_n} P(\xi)\,|\tilde{v}(\xi)|^2\,d\xi \geqslant 0. \tag{1.21}$$

Для доказательства леммы нам достаточно убедиться, что из (1.21), справедливого для преобразования Фурье $\tilde{v}(\xi)$ любой $v \in C_0^\infty(E_n)$, следует неравенство $P(\xi) \geqslant 0$ $(\xi \in E_n)$. Но из анализа известно, что при любом $\xi_0 \in E_n$ существуют последовательности $v_\nu(x)$ гладких финитных функций, для которых $|\tilde{v}_\nu(\xi)|^2$ образуют δ-последовательность, стягивающуюся к ξ_0. Подставляя в (1.21) вместо $\tilde{v}$ функции $\tilde{v}_\nu$ и совершая предельный переход, получим $P(\xi_0) \geqslant 0$. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Зафиксируем точку $x_0 \in G$ и установим эллиптичность $\operatorname{Re} L_c(x_0, D)$. Имеем

$$\operatorname{Re}(L_c(x_0, D)u, u)_0 = \operatorname{Re}(L(x, D)u, u)_0 - \operatorname{Re}[(L(x, D)u, u)_0 - \\ - (L_c(x_0, D)u, u)_0]. \qquad (1.22)$$

Будем рассматривать функции $u \in C_0^\infty(G)$, аннулирующиеся дополнительно вне некоторого малого шара U с центром в x_0. При радиусе шара достаточно малом справедлива оценка (1.12) с малым $\varepsilon > 0$. Отсюда, из (1.22) и (1.4) получаем неравенство $\operatorname{Re}(L_c(x_0, D)u, u)_0 \geqslant \geqslant \frac{C}{2}\|u\|_m^2$ $(u \in C_0^\infty(U))$. Используя лемму 1.2, заключаем, что $\operatorname{Re} L_c(x_0, D)$ эллиптично. Более того, в соответствующих неравенствах (1.3) $\varepsilon > 0$ зависит лишь от C из (1.4) и не зависит от точки $x_0 \in G$. Это показывает, что в этих неравенствах можно перейти к пределу при x_0, уходящей на границу области G. В результате получим, что они справедливы всюду в $G \cup \Gamma$. Итак, $\operatorname{Re} L$ эллиптично в $G \cup \Gamma$. Теорема доказана.

В заключение заметим, что оценка формы $(Lu, v)_0$ сверху тривиальна: из подобного (1.13) представления следует для произвольного L порядка $2m$

$$|(Lu, v)_0| \leqslant C_1\|u\|_m\|v\|_m \qquad (u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G), v \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G)). \quad (1.23)$$

3. **Оценки снизу квадратичной формы, построенной в соболевских пространствах.** Пусть L' и L'' — дифференциальные выражения соответственно порядков r' и r'' с достаточно гладкими коэффициентами $a'_\alpha(x)$ и $a''_\alpha(x)$. Последовательно применим L'' и затем L' : $L'L''u$. Получим дифференциальное выражение $L'L''$ порядка $r' + r''$; его старшей частью, очевидно, будет $\sum\limits_{|\alpha|=r',\ |\beta|=r''} a'_\alpha(x)a''_\beta(x)D^{\alpha+\beta}u$, поэтому соответствующая полилинейная форма примет вид:

$$(L'L'')_c(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=r',\ |\beta|=r''} a'_\alpha(x)a''_\beta(x)\xi^{\alpha+\beta} = \\ = \left(\sum_{|\alpha|=r'} a'_\alpha(x)\xi^\alpha\right)\left(\sum_{|\beta|=r''} a''_\beta(x)\xi^\beta\right) = (L'_c)(x, \xi)(L''_c)(x, \xi). \qquad (1.24)$$

Лемма 1.3. *Дифференциальное выражение порядка $2s$*

$$\Omega u = (-1)^s \sum_{|\alpha|=s} D^\alpha D^\alpha u \qquad (s \geqslant 0) \qquad (1.25)$$

эллиптично. Три выражения L, ΩL и $L^+\Omega L$ одновременно эллиптичны *или нет. Аналогичная картина справедлива для пар* $\operatorname{Re} L$, $\operatorname{Re}(\Omega L)$ *и* L, $\operatorname{Re}(L^+\Omega L)$.

Доказательство. Форма, отвечающая (1.25), имеет вид $\Omega(\xi) = (-1)^s \sum\limits_{|\alpha|=s} (\xi^\alpha)^2$. Поэтому, если $\Omega(\xi) = 0$, то $\xi^\alpha = 0$ для всех $\alpha(|\alpha| = s)$, откуда следует, что $\xi = 0$. Итак, Ω эллиптично. Второе утверждение леммы вытекает из того, что формы для L, ΩL и $L^+\Omega L$ согласно (1.24) имеют вид $\sum\limits_{|\alpha|=r} a_\alpha\xi^\alpha$, $\Omega(\xi)\left(\sum\limits_{|\alpha|=r} a_\alpha\xi^\alpha\right)$, $(-1)^r\Omega(\xi)\left|\sum\limits_{|\alpha|=r} a_\alpha\xi^\alpha\right|^2$. Для дальнейшего обозначим ω_β коэффициент при D^β в выражении (1.25). Формы, отвечающие $\operatorname{Re} L$ и $\operatorname{Re}(\Omega L)$, равны $\sum\limits_{|\alpha|=r} \operatorname{Re} a_\alpha\xi^\alpha$, $\sum\limits_{|\alpha|=r,\ |\beta|=2s} \operatorname{Re}(a_\alpha\omega_\beta)\,\xi^{\alpha+\beta} = \Omega(\xi)\left(\sum\limits_{|\alpha|=r} \operatorname{Re} a_\alpha\xi^\alpha\right)$. Отсюда следует, что $\operatorname{Re} L$ и $\operatorname{Re}(\Omega L)$ одновременно эллиптичны или нет.

Наконец, обозначим $a_\alpha = b_\alpha + ic_\alpha$, где $b_\alpha = \operatorname{Re} a_\alpha$, $c_\alpha = \operatorname{Im} a_\alpha$. Тогда $\operatorname{Re}(\bar a_\alpha a_\gamma) = b_\alpha b_\gamma + c_\alpha c_\gamma$, и поэтому форма, отвечающая $\operatorname{Re}(L^+\Omega L)$, имеет вид:

$$(-1)^r \sum_{\substack{|\alpha|=|\gamma|=r,\\ |\beta|=2s}} \operatorname{Re}(\bar a_\alpha\omega_\beta a_\gamma)\,\xi^{\alpha+\beta+\gamma} = (-1)^r\Omega(\xi) \sum_{|\alpha|=|\gamma|=r} \operatorname{Re}(\bar a_\alpha a_\gamma)\,\xi^{\alpha+\gamma} =$$

$$= (-1)^r\Omega(\xi)\left\{\left(\sum_{|\alpha|=r} b_\alpha\xi^\alpha\right)^2 + \left(\sum_{|\alpha|=r} c_\alpha\xi^\alpha\right)^2\right\} = (-1)^r\,\Omega(\xi)\left|\sum_{|\alpha|=r} a_\alpha\xi^\alpha\right|^2.$$

Из этого равенства вытекает, что L и $\operatorname{Re}(L^+\Omega L)$ одновременно эллиптичны или нет. Лемма доказана.

Теперь нетрудно обобщить результаты теоремы 1.1 на случай квадратичных форм в пространстве $W_2^s(G)$.

Теорема 1.2. *Пусть $s \geqslant 0$ фиксировано, будем рассматривать выражения L порядка $2m$, для которых $a_\alpha(x) \in C^{\max(|\alpha|,\, s)}(G \cup \Gamma)$. Утверждается, что теорема 1.1 остается справедливой, если в ее формулировке скалярные произведения $(\cdot,\cdot)_0$ и нормы $\|\cdot\|_m$ заменить на $(\cdot,\cdot)_s$ и $\|\cdot\|_{m+s}$, а пространство $\mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G)$ — на $\mathring{W}_2^{m+s}(G) \cap W_2^{2m+s}(G)$.*

Доказательство. Установим обобщение оценки (1.4) — неравенство

$$\operatorname{Re}(Lu, u)_s \geqslant C\,\|u\|^2_{m+s} \qquad (C > 0;\ u \in \mathring{W}_2^{m+s}(G) \cap W_2^{2m+s}(G)). \quad (1.26)$$

Как и ранее, его достаточно устанавливать для $u \in C_0^\infty(G)$. Можно также предполагать, что коэффициенты у L сколь угодно гладкие, так как затем нетрудно в полученном неравенстве произвести предельный переход к коэффициентам указанной в теореме гладкости. Благодаря финитности u имеем

$$\operatorname{Re}(Lu, u)_s = \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=s} (D^\alpha Lu, D^\alpha u)_0 = (-1)^s \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=s} (D^\alpha D^\alpha Lu, u)_0 = \\ = \operatorname{Re}(\Omega Lu, u)_0. \tag{1.27}$$

Согласно лемме 1.3 выражение $2(m+s)$-го порядка $\operatorname{Re}(\Omega L)$ эллиптично, применяя оценку (1.4), найдем: $\operatorname{Re}(\Omega Lu, u)_0 \geqslant C \| u \|_{m+s}^2$. Отсюда и из (1.27) вытекает (1.26).

Неравенство

$$\operatorname{Re}(Lu + ku, u)_s \geqslant C \| u \|_{m+s}^2 \quad (C > 0;\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m+s}(G) \cap W_2^{2m+s}(G))$$

(и даже более сильное, в котором $\operatorname{Re}(Lu + ku, u)_s$ заменено на $\operatorname{Re}(Lu, u)_s + k(u, u)_0$) аналогично предыдущему выводится из (1.5). Наоборот, пусть теперь выполняется (1.26) для $u \in C_0^\infty(G)$. Так как $\operatorname{Re}(Lu, u)_s = \operatorname{Re}(\Omega Lu, u)_0$, то из последней части теоремы 1.1 следует, что $\operatorname{Re}(\Omega L)$, а значит и $\operatorname{Re} L$, эллиптично в $G \cup \Gamma$. Теорема доказана.

Из этой теоремы легко вывести энергетические неравенства на финитных функциях.

Следствие. Пусть L эллиптично порядка r и $a_\alpha \in C^{\max(|\alpha|, s)}(G \cup \Gamma)$. При достаточно малом диаметре области G

$$\| Lu \|_s \geqslant C \| u \|_{r+s} \quad (C > 0;\ u \in C_0^\infty(G)). \tag{1.28}$$

Если G фиксирована, то при достаточно большом $k \geqslant 0$

$$\| Lu \|_s^2 + k \| u \|_0^2 \geqslant C_1 \| u \|_{r+s}^2, \quad \| Lu + ku \|_s \geqslant C_2 \| u \|_{r+s} \tag{1.29}$$

$$(C_1,\ C_2 > 0;\ u \in C_0^\infty(G))$$

(для справедливости второго неравенства нужно требовать сильную эллиптичность L). Наоборот, если для L при некотором $s \geqslant 0$ выполняется оценка (1.28), то L эллиптично в $G \cup \Gamma$.

Действительно, установим (1.28). Как и в теореме 1.2, можно предполагать коэффициенты L достаточно гладкими. Имеем для $u \in C_0^\infty(G)$:

$$\| Lu \|_s^2 = \sum_{|\alpha|=s} (D^\alpha Lu,\ D^\alpha Lu)_0 = (-1)^s \sum_{|\alpha|=s} (L^+ D^\alpha D^\alpha Lu,\ u)_0 = \\ = (L^+ \Omega Lu,\ u)_0. \tag{1.30}$$

Так как $\operatorname{Re}(L^+\Omega L)$ эллиптично (лемма 1.3) и порядка $2(r+s)$, то к $L^+\Omega L$ можно применить (1.4) и получить $(L^+\Omega Lu, u)_0 \geqslant \geqslant C\|u\|^2_{r+s}$, что вместе с (1.30) и дает (1.28). Остальные утверждения, за исключением второго неравенства в (1.29), доказываются аналогично.

Выведем это неравенство. Положим $k = k_1 + k_2$ (k_1, $k_2 \geqslant 0$) и подберем k_1 настолько большим, чтобы $\operatorname{Re}(M_{k_1}u, u)_s \geqslant C\|u\|^2_{m+s} \geqslant 0$ ($u \in C_0^\infty(G)$), где $M_{k_1} = L + k_1 E$ (см. теорему 1.2). Теперь

$$\|Lu + ku\|_s^2 = (M_{k_1}u + k_2 u, M_{k_1}u + k_2 u)_s = \|M_{k_1}u\|_s^2 + $$
$$+ k_2 2\operatorname{Re}(M_{k_1}u, u)_s + k_2^2\|u\|_s^2 \geqslant \|M_{k_1}u\|_s^2 + k_2^2\|u\|_s^2.$$

Выбирая k_2 достаточно большим и используя первое из неравенств (1.29), придем ко второму. Следствие установлено.

§ 2. Краевые задачи для сильно эллиптических уравнений. Обобщенные решения

В этом параграфе будут рассмотрены решения указанных задач, являющиеся в два раза меньше дифференцируемыми функциями, чем порядок уравнения.

1. Случай уравнений порядка $2m$ и нулевых граничных условий. Пусть L — сильно эллиптическое выражение порядка $2m$. Будем считать, что коэффициент у L при u настолько положителен, что справедлива оценка $\operatorname{Re}(Lu, u)_0 \geqslant C\|u\|_m^2$ ($C > 0$; $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G)$) (см. теорему 1.1). Эта оценка показывает, что эрмитовая часть выражения L положительна (см. стр. 110), причем соответствующие граничные условия имеют вид:

$$W_2^{2m}(\text{гр}) = \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G),$$

т. е. u вместе со всеми производными порядка $\leqslant m-1$ аннулируется на Γ.

В этом пункте посредством (гр) обозначаем именно такие условия, их будем называть нулевыми*. Нетрудно подсчитать, что $(\text{гр})^+ = (\text{гр})$ (при $m = 1$ это следует из теоремы 1.1, гл. II, в общем случае доказательство аналогично). Так как для $u \in W_2^{2m}(\text{гр}) = W_2^{2m}(\text{гр})^+$ $(Lu, u)_0 = (u, L^+u)_0$, то и эрмитовая часть L^+ положительна, поэтому из (3.12), гл. II, получаем оценку

$$\|L^+v\|_{-m} \geqslant C\|v\|_m \quad (C > 0;\ v \in W_2^{2m}(\text{гр})^+). \tag{2.1}$$

* Их также называют условиями Дирихле.

Отсюда следует (см. теорему 3.3, гл. II), что задача

$$Lu = f, \; D^\alpha u|_\Gamma = 0 \quad (|\alpha| \leqslant m-1) \tag{2.2}$$

имеет m-обобщенное решение $u \in W_2^m(G)$ при любой $f \in \widetilde{W}_2^{-m}(G)$.

Более того, в данном случае легко проверить выполнение условий а) и б) теоремы 3.4, гл. II: условие а) тривиально, так как (гр)$^+$ = (гр), оценка (3.14) следует из (1.23).

Подпространство $W'^m_2(G)$ равно замыканию в метрике $W_2^m(G)$ множества $\mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G)$, т. е. $W'^m_2(G) = \mathring{W}_2^m(G)$. Поэтому $W'^m_2(G) \cap W_2^{2m}(G) = W_2^{2m}$(гр), т. е. при переходе от $\mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G) = \mathfrak{D}(\Lambda_{-m}(\text{гр}))$ к $W'^m_2(G)$ не теряются граничные условия. Это показывает, что корректными будут обобщенные решения задачи (2.2) даже в случае $f \in W'^{-m}_2(G) = \mathring{W}_2^{-m}(G)^*$ (см. стр. 106). Итак, справедлива такая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть L — сильно эллиптическое выражение порядка $2m$. Рассмотрим краевую задачу* (2.2), *она при достаточно положительном коэффициенте при u (или достаточно малом диаметре G) имеет обобщенное (в смысле определения на стр.* 112*) решение $u \in \mathring{W}_2^m(G)$ для любого $f \in W_2^{-m}(G)$. Более того, оператор Λ_{-m}(гр), рассматриваемый как оператор из $\mathring{W}_2^m(G)$ в $W_2^{-m}(G)$, после замыкания является гомеоморфизмом Λ(гр) между $\mathring{W}_2^m(G)$ и $\mathring{W}_2^{-m}(G)$. Обобщенное решение находится по формуле*

$$u = (\Lambda(\text{гр}))^{-1} f \in \mathring{W}_2^m(G) \quad (f \in \mathring{W}_2^{-m}(G)); \tag{2.3}$$

оно однозначно и непрерывно зависит от f.

Ниже будем рассматривать дифференциальные выражения второго порядка; для них часто удобно наряду с обозначениями (1.2) и (1.9), гл. II, применять запись

$$Lu = L(x, D)u = \sum_{j,k=1}^{n} D_j(b_{jk}(x) D_k u) + \sum_{j=1}^{n} p_j(x) D_j u + b(x) u,$$

$$B = B(x) = \| b_{jk}(x) \|_1^n. \tag{2.4}$$

---

* Напомним, что $\mathring{W}_2^{-l}(G)$ обозначает негативное пространство, построенное по $H_+ = \mathring{W}_2^l(G)$ и $H_0 = L_2(G)$ ($l = 1, 2, \ldots$) (см. стр. 77).

Сравнивая это выражение с (1.9), найдем

$$p_j(x) = b_j(x) - \sum_{k=1}^{n} (D_k b_{jk})(x) \quad (j=1, \ldots, n), \quad \beta(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j(x) \nu_j(x), \tag{2.5}$$

где β — функция (1.16), гл. II, фигурирующая в формулах Грина. При переходе в (2.4) к сопряженному выражению L^+u нужно над всеми коэффициентами поставить комплексную черту, предварительно заменив p_j на $-p_j$ и b на $b - \sum_{j=1}^{n} D_j p_j$ (или, иначе, $p_j D_j u$ на $-D_j(p_j u)$). Эта простота перехода и объясняет удобство записи (2.4).

Укажем на некоторые детали в рассмотрениях этого пункта, возникающие в случае сильно эллиптических выражений вида (2.4). Интегрируя в выражении $(u, L^+v)_0$ один раз по частям, получим, что под обобщенным решением задачи с условием $u|_\Gamma = 0$ можно понимать такую функцию $u \in \mathring{W}_2^1(G)$, для которой

$$\int_G \left\{ -\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk} D_j u \cdot D_k \bar{v} + \sum_{j=1}^{n} p_j D_j u \cdot \bar{v} + bu\bar{v} \right\} dx = (f, v)_0 \tag{2.6}$$

$$(f \in \mathring{W}_2^{-1}(G), \quad v \in \mathring{W}_2^1(G)).$$

В случае уравнений с вещественными p_j легко привести условия, обеспечивающие положительность эрмитовой части L. Действительно, из симметрии матрицы $B = \| b_{jk} \|_1^n$ следует для комплексного вектора $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$: $\operatorname{Re} \langle B\zeta, \zeta \rangle = \langle \frac{1}{2}(B + B^*)\zeta, \zeta \rangle = \langle (\operatorname{Re} B)\zeta, \zeta \rangle$, где $\operatorname{Re} B = \| \operatorname{Re} b_{jk} \|_1^n$. Теперь из (1.17), гл. II, получаем для любого $u \in \mathring{W}_2^1(G) \cap W_2^2(G)$, если учесть эллиптичность $\operatorname{Re} L$ и вторую из оценок (1.3):

$$\operatorname{Re}(Lu, u)_0 = -\int_G \sum_{j,k=1}^{n} \operatorname{Re} b_{jk} \cdot D_j u \cdot D_k \bar{u}\, dx + \frac{1}{2} \int_G \sum_{j=1}^{n} p_j D_j |u|^2 dx +$$

$$+ \int_G \operatorname{Re} b \cdot |u|^2 dx \geqslant \varepsilon \int_G \sum_{j=1}^{n} |D_j u|^2 dx + \int_G \left(\operatorname{Re} b - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} D_j p_j \right) |u|^2 dx. \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что оценка $\operatorname{Re}(Lu,\ u)_0 \geqslant C\,\|u\|_1^2$ $(C > 0)$ будет иметь место в том случае, когда

$$\operatorname{Re} b(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(D_j p_j)(x) \geqslant 0 \qquad (x \in G \cup \Gamma). \tag{2.8}$$

В заключение заметим, что для задачи (2.2) всякое m-обобщенное решение является и решением в рассматриваемом сейчас смысле, иными словами, если $(u,\ L^+v)_0 = (f,\ v)_0$ для некоторых $u \in W_2^m(G)$, $f \in \mathring{W}_2^{-m}(G)$ при всех $v \in \mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G)$, то обязательно $u \in \mathring{W}_2^m(G) = W_2'^m(G)$. Ограничимся доказательством при $m = 1$. Используя формулу Грина (1.17), гл. II, найдем

$$(f,\ v)_0 = (u,\ L^+v)_0 = -\int\limits_G \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk} D_j u \cdot D_k \bar{v}\, dx - \int\limits_G u \sum_{j=1}^{n} p_j D_j \bar{v}\, dx +$$
$$+ \int\limits_G \left(b - \sum_{j=1}^{n} D_j p_j\right) u\bar{v}\, dx + \int\limits_\Gamma |B\nu|\, u \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu}\, dx.$$

Отсюда $\left|\int\limits_\Gamma |B\nu|\, u \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \mu}\, dx\right| \leqslant C_1 \|u\|_1 \|v\|_1 + \|f\|_{\mathring{W}_2^{-1}(G)} \|v\|_1 \leqslant C_2 \|v\|_1.$

Вместе с тем среди функций $v \in \mathring{W}_2^1(G) \cap W_2^2(G)$, удовлетворяющих ограничению $\|v\|_1 \leqslant 1$, найдутся функции с достаточно произвольными сколь угодно большими производными $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \mu}\right|_\Gamma$. Для них $\left|\int\limits_\Gamma |B\nu|\, u \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \mu}\, dx\right| \leqslant C_2$, что возможно лишь тогда, когда $u|_\Gamma = 0$, т. е. $u \in \mathring{W}_2^1(G)$. Утверждение доказано.

2. Задачи типа третьей краевой задачи для уравнений второго порядка. Рассмотрим дифференциальное выражение (2.4) с граничным условием

$$|B(x)\nu(x)|\frac{\partial u}{\partial \mu} + Tu + Qu = 0 \qquad (x \in \Gamma). \tag{2.9}$$

Здесь $\dfrac{\partial}{\partial \mu}$ — дифференцирование по конормали; T — линейное дифференциальное выражение первого порядка, определенное на функциях, заданных на Γ, и состоящее из линейной комбинации тангенциальных (т. е. направленных вдоль Г) производных с вещественными коэффициентами из $C^1(\Gamma)$; Q — линейный ограниченный оператор в $L_2(\Gamma)$. Если $T = Q = 0$, то мы получаем условие второй краевой задачи; если $T = 0$, а Q — оператор умножения на ограниченную функцию $\sigma(x)$ — третьей задачи; если $T \neq 0$, а Q — по-прежнему умножение на $\sigma(x)$ — задачи с косой производной. В случае $T \neq 0$ будем требовать от границы Г принадлежность классу C^2.

Итак, W_2^2(гр) состоит из всех функций из $W_2^2(G)$, удовлетворяющих равенству (2.9). Дополнительно предполагаем T и Q такими, что $u \in W_2^2$(гр), рассматриваемые только на Г, образуют плотное множество в $L_2(\Gamma)$*. Аналогично, обозначим через $W_2^2(\text{гр})^+$ совокупность всех функций $v \in W_2^2(G)$, удовлетворяющих соотношению

$$|B(x)\nu(x)|\frac{\partial v}{\partial \bar{\mu}} + T^+v + Q^*v - \overline{\beta(x)}\,v = 0 \ (x \in \Gamma). \tag{2.10}$$

Также предполагаем, что $v \in W_2^2(\text{гр})^+$, рассматриваемые на Г, образуют плотное множество в $L_2(\Gamma)$.

Линейные множества W_2^2(гр) и $W_2^2(\text{гр})^+$ замкнуты в $W_2^2(G)$. Так, если последовательность $u_\nu \in W_2^2(G)$ удовлетворяет (2.9) и сходится в $W_2^2(G)$ к u, то в силу теорем вложения значения $u_\nu|_\Gamma$ также будут настолько хорошо сходиться к $u|_\Gamma$, что в (2.9) можно совершить предельный переход и убедиться, что u удовлетворяет это соотношение. Покажем, что W_2^2(гр) и $W_2^2(\text{гр})^+$ действительно определяют сопряженные друг к другу граничные условия. Действительно, пусть $v \in W_2^2(G)$ таково, что при всех $u \in W_2^2$(гр) $(Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0$. Из (1.18), гл. 2 и (2.9) вытекает

$$0 = \int_\Gamma |B\nu|\left\{\frac{\partial u}{\partial \mu}\bar{v} - u\frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu}\right\}dx + \int_\Gamma \beta u\bar{v}\,dx = \int_\Gamma \left\{-u\,|B\nu|\frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu} + \right.$$

$$\left. + \beta u\bar{v} - Tu\cdot\bar{v} - Qu\cdot\bar{v}\right\}dx = \int_\Gamma u\overline{\left(-|B\nu|\frac{\partial v}{\partial \bar{\mu}} - T^+v - Q^*v + \bar{\beta}v\right)}dx. \tag{2.11}$$

Здесь мы перебросили T с u на v, причем граничные члены не появились, так как Г замкнуто. По предположению $u|_\Gamma$ плотны в $L_2(\Gamma)$, поэтому из (2.11)

---

* Это далеко не всегда так. Пример: $n = 3$, $L = -\Delta$. Граничное условие $\frac{\partial u}{\partial \nu} + Qu = 0$ (*), непрерывный в $L_2(\Gamma)$ оператор Q определяется равенством $(Qu)(x) = q(x)\int_\Gamma u(x)\,dx$, где $q(x)$ — фиксированная функция, входящая в $L_2(\Gamma)$, но не входящая в $L_3(\Gamma)$. Пусть $u \in W_2^2(G)$ удовлетворяет (*), тогда $\frac{\partial u}{\partial \nu} = Cq(x)$ при $C \neq 0$ не входит в $L_3(\Gamma)$, что противоречит теоремам вложения. Итак, $C = 0$, т. е. $\int_\Gamma u\,dx = 0$. Иными словами, 1 ортогональна всем нашим $u|_\Gamma$, т. е. они не плотны в $L_2(\Gamma)$.

следует, что v удовлетворяет (2.10), т. е. $v \in W_2^2(\text{гр})^+$. Аналогично убеждаемся, что $W_2^2(\text{гр})^{++} = W_2^2(\text{гр})$.

Предположим, что L сильно эллиптично и все $p_j(x)$ вещественны. Покажем, что можно дать такие дополнительные ограничения на коэффициенты L и граничное условие, при которых эрмитовая часть L^+ окажется положительной на $W_2^2(\text{гр})^+$. Пусть $v \in W_2^2(\text{гр})^+$, из (1.17), гл. II, и (2.10) подобно (2.7) следует

$$\operatorname{Re}(L^+v, v)_0 = -\int\limits_G \sum_{j,k=1}^n \operatorname{Re} b_{jk} \cdot D_j v \cdot D_k \bar{v}\, dx + \int\limits_G \left(\operatorname{Re} b - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n D_j p_j\right) |v|^2 dx +$$

$$+ \operatorname{Re}\int\limits_\Gamma \left(|B\nu| \frac{\partial v}{\partial \mu} - \frac{1}{2}\beta v\right)\bar{v}\, dx = \int\limits_G \ldots dx + \operatorname{Re}\int\limits_\Gamma \left(-T^+v - Q^*v + \frac{1}{2}\beta v\right)\bar{v}\, dx =$$

$$= \int\limits_G \ldots dx + \operatorname{Re}\int\limits_\Gamma \left(-Tv - Qv + \frac{1}{2}\beta v\right)\bar{v}\, dx. \qquad (2.12)$$

Дифференциальное выражение T можно записать в виде $Tu = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j(s) \frac{\partial u}{\partial s_j}$ ($s \in \Gamma$), где $(s_1, \ldots, s_{n-1})$ — координаты на поверхности Γ; коэффициенты $\gamma_j(s) \in C^1(\Gamma)$ вещественны. Интегрируя по частям и учитывая, что Γ — замкнутая поверхность, получим

$$\operatorname{Re}\int\limits_\Gamma Tv \cdot \bar{v}\, dx = \operatorname{Re}\int\limits_\Gamma \left(\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \frac{\partial v}{\partial s_j}\right)\bar{v}\, ds = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \frac{\partial}{\partial s_j}|v|^2 ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \gamma_j}{\partial s_j}|v|^2 ds. \qquad (2.13)$$

Пусть $Q = Q_1 + iQ_2$—разложение оператора Q на эрмитовые составляющие. Учитывая (2.13), получим из (2.12)

$$\operatorname{Re}(L^+v, v)_0 = -\int\limits_G \sum_{j,k=1}^n \operatorname{Re} b_{jk} \cdot D_j v \cdot D_k \bar{v}\, dx + \int\limits_G \left(\operatorname{Re} b - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n D_j p_j\right)|v|^2 dx +$$

$$+ \int\limits_\Gamma \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \gamma_j}{\partial s_j} + \frac{1}{2}\beta\right)|v|^2 ds - \int\limits_\Gamma Q_1 v \cdot \bar{v}\, ds. \qquad (2.14)$$

Таким образом, если, например, выполнены условия

$$\operatorname{Re} b(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (D_j p_j)(x) > 0 \qquad (x \in G \cup \Gamma),$$

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\gamma_j}{\partial s_j}+\frac{1}{2}\beta\right)|v|^2\,ds-\int\limits_{\Gamma}Q_1v\cdot\bar v\,ds\geqslant 0\qquad (v\in L_2(\Gamma)),\qquad(2.15)$$

причем в первом неравенстве хотя бы в одной точке стоит знак $>$*, то из (2.14) и (1.3) заключаем, что эрмитовая часть L^+ положительна: $\operatorname{Re}(L^+v,\,v)_0\geqslant$ $\geqslant C\|v\|_1^2$ $(C>0;\ v\in W_2^2(\text{гр}^+))$. Это показывает, что справедливо соответствующее энергетическое неравенство для L^+ и $(\text{гр})^+$, и поэтому *задача* $Lu=f$, $u\in(\text{гр})$ *имеет* 1-*обобщенное решение* $u\in W_2^1(G)$ *при любой* $f\in \widetilde{W}_2^{-1}(G)$.

Из (1.17), гл II, при помощи интегрирования по частям и (2.10) следует для любого $u\in W_2^1(G)$ и $v\in W_2^2(\text{гр})^+$

$$(u,\,L^+v)_0=\int\limits_G\left\{-\sum_{j,k=1}^n b_{jk}D_ju\cdot D_k\bar v+\sum_{j=1}^n p_jD_ju\cdot\bar v+bu\bar v\right\}dx+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}u\overline{\left(|B\nu|\frac{\partial v}{\partial\mu}-\beta v\right)}dx=\int\limits_G\{\ldots\}\,dx-\int\limits_{\Gamma}u\overline{T^+v}\,dx-\int\limits_{\Gamma}Qu\cdot\bar v\,dx.\qquad(2.16)$$

Тождество (2.16) позволяет записать условие того, что $u\in W_2^1(G)$ есть 1-обобщенное решение, в виде

$$\int\limits_G\left\{-\sum_{j,k=1}^n b_{jk}D_ju\cdot D_k\bar v+\sum_{j=1}^n p_jD_ju\cdot\bar v+bu\bar v\right\}dx-$$

$$-\int\limits_{\Gamma}u\overline{T^+v}\,dx-\int\limits_{\Gamma}Qu\cdot\bar v\,dx=(f,\,v)_0\qquad(v\in W_2^2(\text{гр})^+).\qquad(2.17)$$

Покажем, что и сейчас выполнены условия а) и б) теоремы 3.4, гл. II. Проверим выполнение б) в форме (3.18), гл. II. Первое из требуемых неравенств уже установлено, второе вытекает из следующей оценки:

$$|(u,\,L^+v)_0|\leqslant C\|u\|_1\|v\|_1\qquad(u\in W_2^1(G),\ v\in W_2^2(\text{гр})^+).\qquad(2.18)$$

Докажем (2.18), пользуясь выражением (2.16) для формы $(u,\,L^+v)_0$. Оценку (2.18) достаточно установить для каждого из трех интегралов в правой части

---

* Без этой оговорки из (2.14) лишь следует оценка формы снизу через $\sum\limits_{j=1}^n\int\limits_G|D_jv|^2\,dx$, а последнее выражение при $v|_\Gamma$ произвольных не эквивалентно $\|v\|_1^2$. В случае же наличия строгого неравенства форма оценивается через $\sum\limits_{j=1}^n\int\limits_G|D_jv|^2dx+\varepsilon\int\limits_{G_1}|v|^2\,dx$ $(\varepsilon>0)$, где G_1 — некоторая подобласть G. Такое выражение эквивалентно $\|v\|_1^2$.

(2.16). Для первого интеграла она очевидна, третий оценивается через $C_1 \| u \|_{L_2(\Gamma)} \| v \|_{L_2(\Gamma)}$ и (2.18) для него следует из теорем вложения. Оценим второй интеграл.

Поступим следующим образом. Рассмотрим n-мерные векторы $\tau^{jk}(x)$ $(j \neq k)$, все координаты которых равны нулю за исключением j-й, равной $\nu_k(x)$, и k-й, равной $-\nu_j(x)$ $(j,\ k = 1, \ldots, n;\ x \in \Gamma)$. Так как $\langle \nu, \tau^{jk} \rangle = 0$, то $\tau^{jk}(x)$ расположены в касательной гиперплоскости к Γ в точке x; легко видеть, что они там образуют полную систему векторов (линейно зависимую). Поэтому рассматриваемое тангенциальное дифференциальное выражение T^+ можно представить (не единственным образом) в виде линейной комбинации производных по направлениям $\tau^{jk}(x)$ с вещественными коэффициентами из $C^1(\Gamma)$:

$$T^+ v = \sum_{j \neq k} \omega_{jk}(x) \frac{\partial v}{\partial \tau^{jk}} = \sum_{j \neq k} \omega_{jk}(x) \left(\nu_k(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} - \nu_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_k} \right).$$

Продолжим произвольным образом $\omega_{jk}(x)$ в область G до вещественных функций из $C^1(G \cup \Gamma)$. При помощи интегрирования по частям получим

$$\int_\Gamma u \overline{T^+ v}\, dx = \int_\Gamma \sum_{j \neq k} u \omega_{jk} \left\{ \nu_k \frac{\partial \bar v}{\partial x_j} - \nu_j \frac{\partial \bar v}{\partial x_k} \right\} dx = \int_G \sum_{j \neq k} \{ D_k (u \omega_{jk} D_j \bar v) -$$

$$- D_j (u \omega_{jk} D_k \bar v) \} dx = \int_G \left\{ \sum_{j \neq k} \omega_{jk} (D_k u \cdot D_j \bar v - D_j u \cdot D_k \bar v) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \neq k} u (D_k \omega_{jk} \cdot D_j \bar v - D_j \omega_{jk} \cdot D_k \bar v) \right\} dx.$$

Из этого равенства и вытекает требуемая оценка. Итак, (2.18) и, следовательно, условие б) выполнены.

Замыкания $W'^1_2(G)$ множеств $W^2_2(\text{гр})$ и $W^2_2(\text{гр})^+$ в метрике $W^1_2(G)$ совпадают со всем $W^1_2(G)$, так как условия (2.9) и (2.10) связывают функцию и первые производные от нее (см. стр. 44). Таким образом, условие а) также выполнено и поэтому для рассматриваемой задачи справедлива теорема 3.4, гл. II.

Наконец, заметим, что так как сейчас $W'^1_2(G) = W^1_2(G)$, то *всякое* 1-*обобщенное решение рассматриваемой задачи будет и обобщенным в смысле стр.* 112. Мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть L — сильно эллиптическое выражение вида* (2.4) *с вещественными $p_j(x)$. Рассмотрим краевую задачу $Lu = f$ с граничными условиями* (2.9). *Если выполняются неравенства* (2.15), *то такая задача имеет* 1-*обобщенное решение $u \in W^1_2(G)$ при любой $f \in \widetilde{W}_2^{-1}(G)$, причем $\| u \|_1 \leq C \| f \|_{-1}$ $(f \in \widetilde{W}_2^{-1}(G))$. То обстоятельство, что $u \in W^1_2(G)$ есть* 1-*обобщенное решение, может быть выражено следующим образом: для любого $v \in W^2_2(G)$, удовлетворяющего* (2.10), *должно выполняться тождество* (2.17).

Так как сейчас $W'^1_2(G) = W^1_2(G)$, то $W'^1_2(G) \cap W^2_2(G) = W^1_2(G)$ — при переходе к $W'^1_2(G)$ действительно теряются граничные условия. Поэтому условие $f \in \widetilde{W}_2^{-1}(G)$ было существенным для корректности понятия обобщенного решения.

3. **Задачи на собственные значения.** Пусть L — сильно эллиптическое выражение порядка $2m$, рассмотрим нулевые краевые условия. Согласно сказанному на стр. 117 при должном подборе параметра λ_0 выражение $L - \lambda_0 E$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5, гл. II, поэтому соответствующая задача будет фредгольмова.

Аналогично рассматриваются выражения и граничные условия, фигурирующие в п. 2, но без предположения о справедливости неравенств (2.15). Покажем, что, считая Γ класса C^1 и выбирая $k \geqslant 0$ достаточно большим, можно добиться выполнения неравенства $\operatorname{Re}((L + kE)^+ v, v)_0 \geqslant C\|v\|_1^2$ $(C > 0;\ v \in W_2^2(\text{гр})^+)$, а это даст возможность применить теорему 3.5, гл. II. В самом деле, положим $k = k_1 + k_2$ $(k_1, k_2 \geqslant 0)$ и выберем сперва k_1 настолько большим, чтобы $k_1 + \operatorname{Re} b(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(D_j p_j)(x) \geqslant 0$ $(x \in G)$. Из (2.14) получим

$$\operatorname{Re}((L + kE)^+ v, v)_0 \geqslant \varepsilon \int_G \sum_{j=1}^{n} |D_j v|^2\, dx + k_2 \int_G |v|^2\, dx +$$

$$+ \int_\Gamma \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial \gamma_j}{\partial s_j} - \frac{1}{2}\beta\right)|v|^2\, ds - \int_\Gamma Q_1 v\cdot\bar{v}\, ds \geqslant \varepsilon \int_G \sum_{j=1}^{n} |D_j v|^2\, dx +$$

$$+ k_2 \int_G |v|^2\, dx - C_1 \int_\Gamma |v|^2\, ds = \varepsilon \|v\|_1^2 + (k_2 - \varepsilon)\|v\|_0^2 -$$

$$- C_1 \int_\Gamma |v|^2\, ds \qquad (C_1 > 0;\ v \in W_2^2(\text{гр})^+). \tag{2.19}$$

Здесь мы воспользовались оценкой: $\int_\Gamma (\ldots)|v|^2\, ds + \int_\Gamma Q_1 v\cdot\bar{v}\, ds \leqslant$ $\leqslant C_1 \int_\Gamma |v|^2\, ds$. Предоставляем читателю убедиться, что в случае дифференцируемой Γ $\int\limits_{\Gamma} |u|^2 ds \leqslant C \|u\|_0 \|u\|_1$ $(u \in W_2^1(G))$. Применяя это неравенство и неравенство $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, найдем: $C_1 \int\limits_{\Gamma} |v|^2 ds \leqslant$ $\leqslant \varepsilon/2 \|v\|_1^2 + C_1^2 C^2/_{2\varepsilon} \|v\|_0^2$ $(v \in W_2^2(\text{гр})+)$. Выбирая $k_2 \geqslant 0$ большим, получим из (2.19): $\operatorname{Re}((L+kE)^+ v, v)_0 \geqslant \varepsilon/2 \|v\|_1^2$, что и требовалось. Итак, теорема 3.5, гл. II, как и в случае нулевых граничных условий, применима. Мы пришли к следующему результату.

Теорема 2.3. *Рассмотрим выражение L и граничные условия, фигурирующие в п.* 1, *но без предположения о достаточной положительности коэффициента при u, или выражение и граничные условия п.* 2 *с Γ класса C^1 без предположения о выполнении соотношений* (2.15). *Тогда краевая задача $Lu - \lambda u = f \in L_2(G)$ $(u \in (\text{гр}))$ фредгольмова, т. е. для нее справедливы результаты теоремы 3.5, гл. II.*

§ 3. Краевые задачи для эллиптических уравнений. Гладкие решения

В этом параграфе в отличие от предыдущего будут находиться решения, дифференцируемые минимум столько раз, каков порядок уравнения.

1. Энергетические неравенства на функциях, удовлетворяющих нулевым граничным условиям. Энергетические неравенства (1.28) и (1.29) (при $s = 0$) не могут быть применены к нахождению решений краевых задач, так как они установлены на слишком узком классе функций — на финитных функциях — и поэтому, согласно теореме 3.3, гл. II, дают лишь существование обобщенного решения со снятыми граничными условиями. Сейчас мы этот класс расширим.

Теорема 3.1. *Пусть $n \geqslant 3$, L — эллиптическое выражение порядка $r = 2m$, $s \geqslant 0$ — некоторое целое число. Предполагается, что коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^{\max(|\alpha|, s)}(G \cup \Gamma)$, граница Γ класса C^{2m+s}. Тогда при $k \geqslant 0$ достаточно большом справедлива оценка*

$$\|Lu\|_s^2 + k\|u\|_0^2 \geqslant C\|u\|_{2m+s}^2 \quad (C > 0;\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m+s}(G)). \quad (3.1)$$

В случае $n = 2$ теорема сохраняется для эллиптических выражений $L(x, D)$, удовлетворяющих следующему дополнительному условию — так называемому условию правильной эллиптичности. Будем предполагать, что порядок $L(x, D)$ четен: $r = 2m$. Пусть $x \in \Gamma$, рассмотрим форму $L_c(x, \xi) = L_c(x, \tau + t\nu(x))$, где $\xi = \tau + t\nu(x)$ —

разложение вектора $\xi \in E_n$ на компоненту $\tau \in E_{n-1}$, параллельную касательной гиперплоскости к Γ в точке x, и на компоненту $t\nu(x)$, где $\nu(x)$ — орт внешней нормали, $-\infty < t < \infty$. Построим алгебраическое степени $2m$ уравнение относительно комплексного ζ: $L_c(x, \tau + \zeta\nu(x)) = 0$; требуется, чтобы для каждых $x \in \Gamma$ и $\tau \in E_{n-1}$, $\tau \neq 0$, это уравнение имело точно m корней внутри верхней и m — внутри нижней полуплоскостей (при подсчете корней учитываются их кратности). В случае $n \geqslant 3$ это условие автоматически следует из эллиптичности, а при $n = 2$ — из сильной эллиптичности (см. лемму 3.2 и следствие из нее).

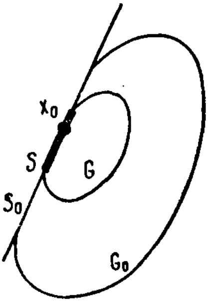


Рис. 2.

Заметим еще, что приведенные в теореме ограничения гладкости завышены — как будет видно из доказательства, можно считать, что $a_\alpha(x) \in C^s\,(G \cup \Gamma)$ $(|\alpha| = 2m)$ и $a_\alpha(x)$ при $|\alpha| < 2m$ имеют ограниченные s-е производные. Подобные ослабления гладкости коэффициентов в дальнейшем не будут выписываться — мы условились рассматривать выражения, для которых заведомо $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}\,(G \cup \Gamma)$ (см. стр. 85).

Перейдем к доказательству. Оно напоминает доказательство первой части теоремы 1.1 и основывается на оценке (1.28) и следующей лемме, которая будет установлена несколько позже.

Лемма 3.1. *В области G, расположенной по одну сторону от некоторой плоскости, содержащей кусок S ее границы*, рассматривается выражение $Mu = \sum\limits_{|\alpha|=2m} b_\alpha D^\alpha u$ с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее требованиям сформулированной теоремы. На классе $W_2^{2m+s}(G;\ (\text{гр})_S,\ 0)$ функций $u \in W_2^{2m+s}(G)$, таких, что $D^\alpha u\,|_S = 0$ $(|\alpha| \leqslant m-1)$, и аннулирующихся в окрестностях $\Gamma \setminus S$ выполняется неравенство*

$$\|Mu\|_s \geqslant C\,\|u\|_{2m+s} \qquad (C > 0). \tag{3.2}$$

Будем доказывать теорему, проводя рассуждения по этапам.

1) Пусть $x_0 \in E_n$; рассмотрим область G указанного в лемме вида, на плоском куске границы которой расположена точка x_0 (см. рис. 2). Если диаметр G достаточно мал, то для выражения

---

* Мы считаем G общей областью с граиицей класса C^{2m+s}, хотя можно было бы ограничиться случаем, когда G — полушар. Подобиое замечаиие можно сделать и относительио лемм 3.4, 3.5 и 3.7.

$L(x, D)$, рассматриваемого в теореме,

$$\|L(x, D)u\|_s \geqslant C_1\|u\|_{2m+s} \quad (C_1 > 0;\ u \in W_2^{2m+s}(G;\ (\text{гр})_S,\ 0)). \tag{3.3}$$

Действительно, применим лемму 3.1 к выражению $M = L_c(x_0, D)$ и некоторой области G_0 ($G \subset G_0$, см. рис. 2). Получим неравенство

$$\|L_c(x_0, D)u\|_{W_2^s(G_0)} \geqslant C\|u\|_{W_2^{2m+s}(G_0)} \quad (C > 0;\ u \in W_2^{2m+s}(G_0;\ (\text{гр})_{S_0},\ 0)). \tag{3.4}$$

Далее, для функций $u \in W_2^{2m+s}(G_0)$, аннулирующихся в окрестностях множества $G_0 \diagdown G$, имеем

$$\|L(x, D)u - L_c(x_0, D)u\|_{W_2^s(G_0)} \leqslant \left\|\sum_{|\alpha|=2m}[a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)]D^\alpha u\right\|_{W_2^s(G_0)} + \\ + \left\|\sum_{|\alpha|<2m} a_\alpha(x)D^\alpha u\right\|_{W_2^s(G_0)} \leqslant \sum_{|\alpha|=2m,\ |\beta|=s}\left\|[a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)]D^{\alpha+\beta}u\right\|_{L_2(G)} + \\ + \sum_{|\gamma|<2m+s}\|b_\gamma(x)D^\gamma u\|_{L_2(G)}. \tag{3.5}$$

Здесь b_γ — некоторые коэффициенты, часть из которых совпадает с производными порядка $1, \ldots, s$ от разностей $a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)$, а часть — с производными порядка $\leqslant s$ от $a_\alpha(x)$; эти коэффициенты ограничены в G_0. Путем выбора достаточно малой области G каждое из первых слагаемых в правой части (3.5), очевидно, можно оценить сверху выражением $\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_{W_2^{2m+s}(G_0)}$ с произвольным наперед заданным $\varepsilon > 0$. Слагаемые второго типа оцениваются сверху через

$$C_2\|u\|_{W_2^{2m+s-1}(G)} \leqslant dC_2\|u\|_{W_2^{2m+s}(G)} = dC_2\|u\|_{W_2^{2m+s}(G_0)},$$

где d — диаметр G (см. стр. 35—36). Выбирая d достаточно малым, получим оценку

$$\|L(x, D)u - L_c(x_0, D)u\|_{W_2^s(G_0)} \leqslant \varepsilon\|u\|_{W_2^{2m+s}(G_0)}.$$

Отсюда и из (3.4) следует неравенство (3.3).

2) Рассмотрим область G, граница которой содержит кусок S класса C^{2m+s}. Если диаметр G достаточно мал, то на функциях $u \in W_2^{2m+s}(G)$, таких, что $D^\alpha u|_S = 0$ ($|\alpha| \leqslant m - 1$), и аннулирующихся в окрестностях $\Gamma \diagdown S$, справедлива оценка (3.3). Это утверждение немедленно сводится к предыдущему при помощи отображения рассматриваемой области на область леммы 3.1, граница которой содержит плоский кусок. Поясним это на примере выражений второго порядка (т. е. $m = 1$).

Обозначим $x' = \varphi(x)$ $2+s$ раз непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм в E_n, переводящий $G \cup \Gamma$ в область указанного вида $G' \cup \Gamma'$, причем S переходит в плоский кусок S', расположенный на границе Γ' области G'. Пусть $x = \varphi^{-1}(x')$ — обратное отображение. Отображение φ порождает линейный оператор T_φ, переводящий функцию $u'(x')$ на G' в функцию на G: $(T_\varphi u')(x) = u'(\varphi(x))$. Ясно, что T_φ является гомеоморфизмом между $W_2^l(G')$ и $W_2^l(G)$ при $0 \leqslant l \leqslant 2+s$. Если обозначить $W_2^{2+s}(G;\ (\text{гр})_S,\ 0)$ аналогичный к введенному ранее класс функций на G, то T_φ будет гомеоморфизмом и между $W_2^{2+s}(G';\ (\text{гр})_{S'},\ 0)$ и $W_2^{2+s}(G;\ (\text{гр})_S,\ 0)$. По выражению L второго порядка на G построим выражение L' на G', полагая на гладких функциях $u'(x')$ $(L'u')(x') = T_\varphi^{-1} L T_\varphi u'$. В частности, производные $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$ перейдут в

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u'(\varphi(x)) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x'_p} \frac{\partial x'_p}{\partial x_j}, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u'(\varphi(x)) = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'_p \partial x'_q} \frac{\partial x'_p}{\partial x_j} \frac{\partial x'_q}{\partial x_k} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x'_p} \frac{\partial^2 x'_p}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$(x = \varphi^{-1}(x')).$$

Таким образом, старшими коэффициентами $b'_{pq}(x')$ у L' будут служить

$$b'_{pq}(x') = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(x) \frac{\partial x'_p}{\partial x_j} \frac{\partial x'_q}{\partial x_k}, \qquad x = \varphi^{-1}(x'). \tag{3.7}$$

Благодаря невырожденности матрицы $\left\| \dfrac{\partial x'_s}{\partial x_t} \right\|_1^n$ L и L' одновременно эллиптичны или нет; так как по условию L эллиптично, то таким же будет и L'. Ясно также, что коэффициенты L' будут достаточно гладкими. При малом диаметре области G диаметр G' также мал; все это дает возможность применить к L' и $W_2^{2+s}(G';\ (\text{гр})_{S'},\ 0)$ результат п. 1). Теперь легко получить требуемое неравенство:

$$\| Lu \|_{W_2^s(G)} = \| T_\varphi L' [T_\varphi^{-1} u] \|_{W_2^s(G)} \geqslant C_2 \| L' [T_\varphi^{-1} u] \|_{W_2^s(G')} \geqslant$$

$$\geqslant C_2 C_1 \| T_\varphi^{-1} u \|_{W_2^{2+s}(G')} \geqslant C_2 C_1 C_3 \| u \|_{W_2^{2+s}(G)}$$

$$(u \in W_2^{2+s}(G;\ (\text{гр})_S,\ 0),\ \ T_\varphi^{-1} u \in W_2^{2+s}(G';\ (\text{гр})_{S'},\ 0)).$$

3) Перейдем к оценкам во всей G. Для каждого $x \in G$ существует расположенная внутри G окрестность U_x, такая, что

$$\| Lu \|_s \geqslant C_x \| u \|_{2m+s} \quad (C_x > 0;\ u \in \overset{\circ}{W}{}_{2,0}^{2m+s}(U_x)); \tag{3.8}$$

это вытекает из следствия на стр. 125. Согласно 2) для любого $x \in \Gamma$ также существует окрестность (в E_n) U_x, такая, что неравенство (3.8) выполняется для функций из $W_2^{2m+s}(U_x \cap G)$, аннулирующихся вместе с производными порядков $\leqslant m-1$ на $\Gamma \cap U_x$ и в окрестности остальной части границы области $U_x \cap G$.

Выберем конечное покрытие из покрытия $G \cup \Gamma$ окрестностями V_x, расположенными строго внутри соответствующих U_x; пусть это будут окрестности $V_{x_1}, \ldots, V_{x_N}$. Построим разложение единицы, состоящее из функций $\chi_1(x), \ldots, \chi_N(x)$ $(x \in E_n)$, каждая из которых аннулируется вне соответствующей V_{x_j}. Имеем $\sum_{j=1}^{N} \chi_j(x) = 1$ в окрестности $G \cup \Gamma$. Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m+s}(G)$, тогда $\chi_j(x)\, u(x)$ аннулируется в окрестности части границы области $U_{x_j} \cap G$, отличной от Γ, а на Γ удовлетворяет нулевым граничным условиям. Поэтому можно написать оценку (3.8):

$$\| L[\chi_j u] \|_s \geqslant C \| \chi_j u \|_{2m+s} \quad (u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m+s}(G);\ j = 1, \ldots, N).$$

Отсюда получаем

$$\| u \|_{2m+s}^2 = \left\| \sum_{j=1}^{N} \chi_j u \right\|_{2m+s}^2 \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{N} \| \chi_j u \|_{2m+s}^2 \leqslant C_2 \sum_{j=1}^{N} \| L[\chi_j u] \|_s^2 =$$

$$= C_2 \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_G | D^\alpha L[\chi_j u] |^2 \, dx \leqslant C_2 \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_G | \chi_j |^2 | D^\alpha L u |^2 \, dx +$$

$$+ \sum_{|\gamma| < 2m+s} \int_G | b_\gamma(x) D^\gamma u |^2 \, dx \leqslant N C_2 \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_G | D^\alpha L u |^2 \, dx + C_3 \| u \|_{2m+s-1}^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_4 (\| Lu \|_s^2 + \| u \|_{2m+s-1}^2) \quad (u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W^{2m+s}(G)). \tag{3.9}$$

4) Пусть G — фиксированная область. Согласно неравенству Эрлинга—Ниренберга для любого $\varepsilon > 0$ найдется $K(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\| u \|_{2m+s-1}^2 \leqslant \varepsilon \| u \|_{2m+s}^2 + K(\varepsilon) \| u \|_0^2.$$

Это неравенство в сочетании с (3.9) приводит к требуемой оценке (3.1).

Для завершения доказательства теоремы нам осталось доказать лемму 3.1. Без ограничения общности можно считать, что уравнение плоскости, о которой идет речь в лемме, имеет вид $x_n = 0$ а G расположена в полупространстве $x_n > 0$. Идейно наиболее прямой и общий путь получения оценки (3.2) заключается в представлении решения уравнения в полупространстве $Mu = f$ с определенными граничными условиями в виде сингулярного интеграла $u(x) = \int\limits_{\xi_n > 0} G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$ и затем оценки этого интеграла $\| u \|_{2m+s} \leqslant C_1 \| f \|_s = C_1 \| Lu \|_s$. Однако на этом пути мы останавливаться не будем, так как его проведение громоздко и требует тонких оценок, и рассмотрим два других метода. Неравенство (3.2) сперва будет установлено для $s = 0$, а затем при помощи одного общего приема из такой оценки мы выведем оценку и для любого $s > 0$.

5) Первый метод — метод интегрирования по частям годится для эллиптических выражений M второго порядка с вещественными коэффициентами. Ниже мы пользуемся записью: $Mu = \sum\limits_{j,k=1}^{n} b_{jk} D_j D_k u$. Для доказательства леммы поступим следующим образом. Интегрированием по частям на функциях $u \in W_2^3(G;\ (\text{гр})_S,\ 0)$ получаем*:

$$
\begin{aligned}
\| Mu \|_0^2 &= \int\limits_G Mu \cdot \overline{Mu}\, dx = \int\limits_G \sum_{j,k,p,q=1}^{n} b_{jk} \bar{b}_{pq} D_j D_k u \cdot D_p D_q \bar{u}\, dx = \\
&= -\int\limits_G \sum_{j,k,p,q=1}^{n} b_{jk} \bar{b}_{pq} D_k u \cdot D_j D_p D_q \bar{u}\, dx + \\
&\quad + \int\limits_S \sum_{j,k,p,q=1}^{n} b_{jk} \bar{b}_{pq} D_k u \cdot D_p D_q \bar{u} \cdot \nu_j\, dx = \\
&= \int\limits_G \sum_{j,k,p,q=1}^{n} b_{jk} \bar{b}_{pq} D_k D_p u \cdot D_j D_q \bar{u}\, dx + \\
&\quad + \int\limits_S \sum_{j,k,p,q=1}^{n} b_{jk} \bar{b}_{pq} D_k u \cdot (D_p D_q \bar{u} \cdot \nu_j - D_j D_q \bar{u} \cdot \nu_p)\, dx. \qquad (3.10
\end{aligned}
$$

Рассмотрим последний интеграл. Благодаря расположению G ор $\nu(x)$ внешней нормали на S равен $(0, \ldots, 0, -1)$, поэтому это

---

* В дальнейшем соотношения (3.10) и (3.11) нам понадобятся и дл комплексных b_{jk}, поэтому при их выводе вещественность коэффициентов н предполагается.

интеграл примет вид

$$-\int_S \left(\sum_{k,p,q=1}^{n} b_{nk}\bar{b}_{pq} D_k u \cdot D_p D_q \bar{u} - \sum_{j,k,q=1}^{n} b_{jk}\bar{b}_{nq} D_k u \cdot D_j D_q \bar{u} \right) dx. \quad (3.11)$$

Но $u(x) = 0$ при $x \in S$, поэтому $D_j u = 0$ ($j \neq n$) и $D_j D_k u = 0$, если одновременно $j \neq n$, $k \neq n$. Подставляя эти значения производных в (3.11) и предполагая вещественность b_{st} ($s, t = 1, \ldots, n$), найдем, что подынтегральное выражение равно нулю. Итак, равенство (3.10), если в нем еще произвести предельный переход от функций класса $W_2^3(G;\ (\text{гр})_S, 0)$ к функциям из $W_2^2(G;\ (\text{гр})_S, 0)$, примет вид

$$\| Mu \|_0^2 = \int_G \sum_{j,k,p,q=1}^{n} b_{jk} b_{pq} D_k D_p u \cdot D_j D_q \bar{u}\, dx \quad (u \in W_2^2(G;\ (\text{гр})_S, 0)). \quad (3.12)$$

По предположению M эллиптично и с вещественными коэффициентами, поэтому согласно (1.3) матрица $\| -b_{jk} \|^n = \| t_{jk} \|_1^n = T$ строго положительно определенна. Хорошо известно, что тогда и тензорное произведение $T \otimes T$ будет строго положительно определенным. Элемент $\tau_{(\mu,\nu)(\sigma,\varrho)}$ матрицы $T \otimes T$ имеет вид $t_{\mu\sigma} t_{\nu\varrho}$, она действует на векторы ζ с координатами $\zeta_{(\sigma,\varrho)}$; условие ее положительной определенности записывается так:

$$\langle (T \otimes T) \zeta, \zeta \rangle = \sum_{\mu,\nu,\sigma,\varrho=1}^{n} t_{\mu\sigma} t_{\nu\varrho} \zeta_{(\sigma,\varrho)} \bar{\zeta}_{(\mu,\nu)} \geqslant \delta \sum_{\mu,\nu=1}^{n} | \zeta_{(\mu,\nu)} |^2 \quad (\delta > 0). \quad (3.13)$$

Положим $\zeta_{(\mu,\nu)} = (D_\mu D_\nu \bar{u})(x)$, тогда благодаря симметрии b_{jk} получим из (3.13):

$$\sum_{j,k,p,q=1}^{n} b_{jk} b_{pq} D_k D_p u \cdot D_j D_q \bar{u} = \sum_{j,k,p,q=1}^{n} t_{kj} t_{pq} \zeta_{(j,q)} \bar{\zeta}_{(k,p)} \geqslant \delta \sum_{j,k=1}^{n} | D_j D_k u |^2. \quad (3.14)$$

Проинтегрируем по G неравенство (3.14) и воспользуемся соотношением (3.12). В результате получим

$$\| Mu \|_0^2 = \int_G \sum_{j,k,p,q=1}^{n} b_{jk} b_{pq} D_k D_p u \cdot D_j D_q \bar{u}\, dx \geqslant \delta \int_G \sum_{j,k=1}^{n} | D_j D_k u |^2 dx \geqslant$$
$$\geqslant C \| u \|_2^2 \quad (u \in W_2^2(G;\ (\text{гр})_S, 0)),$$

т. е. придем к неравенству (3.2) при $s = 0$. Итак, рассматриваемый частный случай леммы доказан.

6) Второй метод — метод преобразования Фурье. Докажем лемму 3.1 в общем случае, используя иной, чем в 5), подход. Рассуждения сейчас будут более громоздкими. Нам удобно точки из E_n обозначать (x, y), где $x=(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $y=x_n$; таким образом, G расположена в полупространстве $y>0$, уравнение $S: y=0$. Так как мы будем многократно оперировать с преобразованиями Фурье, то выражение M порядка $r=2m$ сейчас полезно записать в виде

$$Mu=\sum_{|\tau|+\nu=2m} b_{\tau\nu}\partial^{\tau}\partial_n^{\nu}u;\ \partial^{\tau}=\partial_1^{\tau_1}\ldots\partial_{n-1}^{\tau_{n-1}},\ \partial_j=\frac{1}{i}D_j,\ \tau=(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1});$$

$$\partial_n=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.15}$$

На время доказательства леммы обозначим $C^k(G\cup\Gamma;\ 0)$ класс функций из $C^k(G\cup\Gamma)$ $(k=0, 1, \ldots)$, аннулирующихся в окрестностях $\Gamma\setminus S$; $C^k(G\cup\Gamma;\ (\text{гр})_S,\ 0)$ $(k\geqslant m-1)$ — подкласс класса $C^k(G\cup\Gamma,\ 0)$, состоящий из функций u, для которых $D^{\alpha}u|_S=0$ $(|\alpha|\leqslant m-1)$. Функции, определенные в G, в случае необходимости будем считать продолженными нулем на все E_n. Преобразование Фурье (1.7) в координатах (x, y) выглядит так:

$$\tilde{f}(\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_{E_n} f(x, y)\,e^{-i\langle\xi,x\rangle-i\eta y}\,dx\,dy$$

$$(\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\in E_{n-1},\ \eta\in E_1).$$

Введем также «тангенциальное» преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi)=\frac{i}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_{E_{n-1}} f(x)\,e^{-i\langle\xi,x\rangle}\,dx\qquad(\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\in E_{n-1}).$$

Пусть $u\in C^0(G\cup\Gamma;\ 0)$, во всем дальнейшем $\hat{u}(\xi)$ обозначает $\widehat{u(x,0)}$. При помощи интегрирования по частям легко убедиться в справедливости равенств (ср. (1.8)):

$$\widetilde{(\partial^{\tau}u)}(\xi,\eta)=\xi^{\tau}\tilde{u}(\xi,\eta),\quad \widetilde{(\partial_n u)}(\xi,\eta)=\eta\tilde{u}(\xi,\eta)+\hat{u}(\xi),$$

$$\widetilde{(\partial_n^{\nu}u)}(\xi,\eta)=\eta^{\nu}\tilde{u}(\xi,\eta)+\sum_{s=0}^{\nu-1}\eta^{\nu-s-1}\widehat{(\partial_n^{s}u)}(\xi), \tag{3.16}$$

где $u(x, y)$ — достаточно гладкая функция из $C^0(G\cup\Gamma;\ 0)$.

Пользуясь этими формулами и (3.15), найдем для $u \in C^{2m}(G \cup \Gamma; 0)$:

$$\widetilde{(Mu)}(\xi, \eta) = M(\xi, \eta)\tilde{u}(\xi, \eta) + P_u(\xi, \eta);$$

$$M(\xi, \eta) = \sum_{|\tau|+\nu=2m} b_{\tau\nu}\xi^\tau\eta^\nu, \quad P_u(\xi, \eta) = \tag{3.17}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2m}\sum_{s=0}^{\nu-1}\sum_{|\tau|=2m-\nu} b_{\tau\nu}\xi^\tau\eta^{\nu-s-1}\widehat{(\partial_n^s u)}(\xi).$$

Будем в дальнейшем считать, что $u \in C^{2m}(G \cup \Gamma; (\text{гр})_S, 0) \subset C^{2m}(G \cup \Gamma; 0)$, тогда $(\partial_n^s u)(x, 0) = 0$ для всех $s \leqslant m-1$, и поэтому преобразования Фурье $\widehat{\partial_n^s u}$ этих функций также аннулируются. Таким образом,

$$P_u(\xi, \eta) = \sum_{\nu=m+1}^{2m}\sum_{s=m}^{\nu-1}\sum_{|\tau|=2m-\nu} b_{\tau\nu}\xi^\tau\eta^{\nu-s-1}\widehat{(\partial_n^s u)}(\xi) \quad (u \in C^{2m}(G \cup \Gamma; (\text{гр})_S, 0). \tag{3.18}$$

Пусть $Nu = \sum_{|\tau|+\nu=2m} c_{\tau\nu}\partial^\tau\partial_n^\nu u$ — некоторое другое выражение порядка $r = 2m$ с постоянными коэффициентами, не обязательно эллиптическое. Подобно (3.17) и (3.18) для него можно написать

$$\widetilde{(Nu)}(\xi, \eta) = N(\xi, \eta)\tilde{u}(\xi, \eta) + Q_u(\xi, \eta); \tag{3.19}$$

$$N(\xi, \eta) = \sum_{|\tau|+\nu=2m} c_{\tau\nu}\xi^\tau\eta^\nu, \quad Q_u(\xi, \eta) = \sum_{\nu=m+1}^{2m}\sum_{s=m}^{\nu-1}\sum_{|\tau|=2m-\nu} c_{\tau\nu}\xi^\tau\eta^{\nu-s-1}\widehat{(\partial_n^s u)}(\xi)$$

$$(u \in C^{2m}(G \cup \Gamma; (\text{гр})_S, 0)).$$

На функциях $u \in C^{2m}(G \cup \Gamma; (\text{гр})_S, 0)$ выражение $\sqrt{\sum_{|\alpha|=2m} \|D^\alpha u\|_0^2}$ эквивалентно $\|u\|_{2m}$, поэтому для доказательства (3.2) (с $s = 0$) достаточно убедиться, что при любом N порядка $2m$

$$\|Nu\|_0 \leqslant C\|Mu\|_0 \quad (C > 0;\ u \in C^{2m}(G \cup \Gamma; (\text{гр})_S, 0)). \tag{3.20}$$

Нетрудно доказать (см. ниже лемму 3.2), что благодаря эллиптичности M справедливо неравенство $|N(\xi, \eta)| \leqslant C|M(\xi, \eta)|$ $((\xi, \eta) \in E_n)$, поэтому, если бы выражения $P_u(\xi, \eta)$ и $Q_u(\xi, \eta)$ в (3.17) и (3.19) отсутствовали, то оценка (3.20) вытекала бы из него при помощи равенства Парсеваля (ср. стр. 118). В общем случае достаточно было бы установить неравенство $|\widetilde{(Nu)}(\xi, \eta)|^2 \leqslant C^2|\widetilde{(Mu)}(\xi, \eta)|^2$ $((\xi, \eta) \in E_n)$, однако легко понять, что при фиксированных ξ, η благодаря произвольности чисел $\tilde{u}(\xi, \eta)$, $\widehat{(\partial_\nu^m u)}(\xi), \ldots, \widehat{(\partial_\nu^{2m-1} u)}(\xi)$ ($u \in C^{2m}(G \cup \Gamma$; $(\text{гр})_S$, $0)$) оно не имеет места. Вместе с тем оказывается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{(Nu)}(\xi, \eta)|^2 d\eta \leqslant C^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{(Mu)}(\xi, \eta)|^2 d\eta \quad (\xi \in E_{n-1},\ u \in C^{2m}(G \cup \Gamma;\ (\text{гр})_S, 0)). \tag{3.21}$$

Интегрируя (3.21) по $\xi \in E_{n-1}$ и пользуясь равенством Парсеваля, мы получим (3.20), т. е. докажем лемму. Итак, нам нужно установить (3.21). Приведем сперва две леммы.

Лемма 3.2. *Пусть M и N — определенные выше выражения, порядок r которых заранее не предполагается четным; M эллиптично. Тогда*

$$|N(\xi, \eta)| \leqslant C|M(\xi, \eta)| \quad (C > 0;\ (\xi, \eta) \in E_n). \tag{3.22}$$

Пусть $n \geqslant 3$, тогда порядок M обязательно четен: $r = 2m$. При любом фиксированном $\xi \neq 0$ ($\xi \in E_{n-1}$) уравнение относительно ζ $M(\xi, \zeta) = 0$ имеет m корней в верхней полуплоскости и m — в нижней.

Если M—сильно эллиптично, то вторая часть леммы справедлива и при $n = 2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(\xi, \eta) = N(\xi, \eta)/M(\xi, \eta)$ ($(\xi, \eta) \in E_n$, $(\xi, \eta) \neq 0$). Она однородна, нулевой степени однородности и непрерывна всюду вне 0; ясно, что эти свойства влекут ее ограниченность, т. е. неравенство (3.22).

Пусть $n \geqslant 3$, выясним расположение корней уравнения $M(\xi, \zeta) = 0$. При изменении ξ по дуге, не содержащей 0, количество корней ζ, лежащих в верхней (нижней) полуплоскости, не изменится — в противном случае встретится такое $\xi_0 \neq 0$, что уравнение $M(\xi_0, \zeta) = 0$ будет иметь вещественный корень, а это противоречит эллиптичности M. Так как векторы ξ и $-\xi$ можно соединить дугой, не проходящей через 0 ($n - 1 \geqslant 2$), то количество корней уравнений $M(\xi, \zeta) = 0$ и $M(-\xi, \zeta) = 0$, расположенных в верхней полуплоскости, одинаково. Но так как $M(-\xi, \zeta) = (-1)^r M(\xi, -\zeta)$, то $M(-\xi, \zeta) = 0$ имеет столько же корней в верхней полуплоскости, сколько $M(\xi, \zeta) = 0$ — в нижней. Итак, $M(\xi, \zeta) = 0$ имеет равное количество m корней в верхней и нижней полуплоскостях. Отсюда также следует: $r = 2m$.

Доказательство последнего утверждения леммы предоставляем читателю.

Следствие. При $n \geqslant 3$ эллиптические выражения $L(x, D)$ правильно эллиптичны и, в частности, имеют обязательно четный порядок (нужно положить $M = L(x, D)$, где x — фиксированная точка на Γ, перенести начало координат в x и направить ось y-ов вдоль $\nu(x)$).

Лемма 3.3. *Перепишем формы* $P_u(\xi, \eta)$ *и* $Q_u(\xi, \eta)$ *в виде*

$$P_u(\xi, \eta) = \sum_{\nu=m+1}^{2m} \sum_{s=m}^{\nu-1} \sum_{|\tau|=2m-\nu} b_{\tau\nu}\xi^\tau \eta^{\nu-s-1} |\xi|^{s+1} w_{u,s}(\xi), \quad w_{u,s}(\xi) = \frac{\widehat{(\partial_n^s u)}(\xi)}{|\xi|^{s+1}}; \tag{3.23}$$

$Q_u(\xi, \eta)$ *представляется точно так же, только вместо* $b_{\tau\nu}$ *стоят* $c_{\tau\nu}$. *Предположим, что для каждого* $u \in C^{2m}(G \cup \Gamma;\ (\text{гр})_S,\ 0)$ *справедливо неравенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{(Mu)}(\xi, \eta)|^2 d\eta \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} \Big| |M(\xi, \eta)| \tilde{u}(\xi, \eta) + \sum_{s=m}^{2m-1} v_s(\xi, \eta) w_{u,s}(\xi) \Big|^2 d\eta +$$
$$+ \sum_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk}(\xi) w_{u,k}(\xi) \overline{w_{u,j}(\xi)} \quad (\xi \in E_{n-1},\ \xi \neq 0), \tag{3.24}$$

где $v_s(\xi, \eta)$ — *некоторые непрерывные при* $\xi \neq 0$ *и однородные степени* $2m$ *функции от* $(\xi, \eta) \in E_n$, *а* $H_{jk}(\xi)$ $(\xi \in E_{n-1},\ \xi \neq 0)$ *непрерывны и однородны степени* $4m+1$, *причем для каждого* $\xi \neq 0$ *матрица* $\| H_{jk}(\xi) \|_m^{2m-1}$ *строго положительно определена. Тогда выполняется оценка* (3.20).

Доказательство. Как уже пояснялось, достаточно установить неравенство (3.21). Положим $J_\alpha(\xi, \eta) = |M(\xi, \eta)|^2 - \alpha |N(\xi, \eta)|^2$, где α — некоторое действительное число, которое будет выбрано позже. Учитывая (3.24) и (3.19), легко получим при фиксированном $\xi \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ |\widetilde{(Mu)}(\xi, \eta)|^2 - \alpha |\widetilde{(Nu)}(\xi, \eta)|^2 \} d\eta \geqslant \sum_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk} w_{u,k} \overline{w_{u,j}} +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \{ \| M | \tilde{u} + \textstyle\sum |^2 - \alpha | N\tilde{u} + Q_u |^2 \} d\eta = \displaystyle\sum_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk} w_{u,k} \overline{w_{u,j}} +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \{ J_\alpha |\tilde{u}|^2 + 2\mathrm{Re}[(|M| \overline{\textstyle\sum} - \alpha N \overline{Q_u}) \tilde{u}] + \Big| \textstyle\sum \Big|^2 - \alpha |Q_u|^2 \} d\eta =$$
$$= \sum_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk} w_{u,k} \overline{w_{u,j}} + \int_{-\infty}^{\infty} J_\alpha \left| \tilde{u} + J_\alpha^{-1} \left(|M| \textstyle\sum - \alpha \overline{N} Q_u \right) \right|^2 d\eta -$$
$$- \alpha \int_{-\infty}^{\infty} J_\alpha^{-1} \| M | Q_u - N \textstyle\sum |^2 d\eta \quad (u \in C^{2m}(G \cup \Gamma;\ (\text{гр})_S,\ 0)). \tag{3.25}$$

Покажем, что последние два интеграла действительно существуют при $\alpha \in (-\infty, \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $|N(\xi, \eta)|^2 \leqslant \frac{1}{3\varepsilon}|M(\xi, \eta)|^2$ $((\xi, \eta) \in E_n)$. При $\alpha \leqslant 0$ их сходимость, очевидно, следует из сходимости интеграла в левой части (3.25). При $\alpha \in (0, \varepsilon]$ можно написать $|N(\xi, \eta)|^2 \leqslant \frac{1}{3\alpha}|M(\xi, \eta)|^2$ $((\xi, \eta) \in E_n)$, откуда $J_\alpha = |M|^2 - \alpha|N|^2 \geqslant \frac{1}{2}(|M|^2 + \alpha|N|^2) = \frac{1}{2}J_{-\alpha}$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_\alpha^{-1} \| M | Q_u - N\sum |^2 d\eta \leqslant 2 \int_{-\infty}^{\infty} J_{-\alpha}^{-1} \| M | Q_u - N\sum |^2 d\eta < \infty,$$

т. е. сходится последний интеграл в (3.25). Так как интеграл в левой части (3.25) по-прежнему сходится, то сходится и предпоследний интеграл. Итак, законность преобразования (3.25) установлена.

Из (3.25) получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{|\widetilde{(Mu)}(\xi, \eta)|^2 - \alpha|\widetilde{(Nu)}(\xi, \eta)|^2\} d\eta \geqslant \sum_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk}(\xi) w_{u,k}(\xi)\overline{w_{u,j}(\xi)} -$$

$$- \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\| M(\xi, \eta) | Q_u(\xi, \eta) - N(\xi, \eta) \sum\limits_{s=m}^{2m-1} v_s(\xi, \eta) w_{u,s}(\xi)|^2}{|M(\xi, \eta)|^2 - \alpha|N(\xi, \eta)|^2} d\eta$$

$$(0 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon). \tag{3.26}$$

Согласно (3.23) $Q_u(\xi, \eta)$, так же как и $\sum\limits_{s=m}^{2m-1} v_s(\xi, \eta) w_{u,s}(\xi)$, является линейной комбинацией $w_{u,m}(\xi), \ldots, w_{u,2m-1}(\xi)$ с коэффициентами — однородными степени $2m$ функциями точки (ξ, η). Поэтому, возводя в квадрат числитель в последнем интеграле в (3.26), представим этот интеграл в виде положительно определенной формы $\sum\limits_{j,k=m}^{2m-1} L_{jk}(\xi, \alpha) w_{u,k}(\xi)\overline{w_{u,j}(\xi)}$, где $L_{jk}(\xi, \alpha)$ — непрерывные относительно $(\xi, \alpha) \in E_{n-1} \times [0, \varepsilon]$, $\xi \neq 0$, однородные по ξ степени $4m + 1$

функции (степень однородности повысилась с $4m$ до $4m+1$ благодаря интегрированию по η)*.

Рассмотрим функцию $n+m-1$-мерного вектора $(\xi, \omega) = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \omega_m, \ldots, \omega_{2m-1}) \in E_{n-1} \times C_m$, $\xi \neq 0$, и $\alpha \in [0, \varepsilon]$

$$\varphi(\xi, \omega, \alpha) = \frac{\sum\limits_{j,k=m}^{2m-1} L_{jk}(\xi, \alpha)\omega_k\overline{\omega_j}}{\sum\limits_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk}(\xi)\omega_k\overline{\omega_j}}. \tag{3.27}$$

Так как знаменатель обращается в нуль лишь при $\omega = 0$, а числитель непрерывен при $\xi \neq 0$, то $\varphi(\xi, \omega, \alpha)$ непрерывна по $(\xi, \omega, \alpha) \in ((E_{n-1} \times C_m) \diagdown (\{\xi = 0\} \cup \{\omega = 0\})) \times [0, \varepsilon]$. Кроме того, φ обладает следующим свойством однородности:

$$\varphi(\lambda\xi, \omega, \alpha) = \varphi(\xi, \mu\omega, \alpha) = \varphi(\xi, \omega, \alpha).$$

Отсюда нетрудно заключить, что $\varphi(\xi, \omega, \alpha)$ равномерно по всем переменным ограничена (простейший факт подобного типа был использован при доказательстве предыдущей леммы). Таким образом из (3.27) следует, что при некотором $\delta > 0$

$$\sum_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk}(\xi)\omega_k\overline{\omega_j} \geqslant \delta \sum_{j,k=m}^{2m-1} L_{jk}(\xi, \alpha)\omega_k\overline{\omega_j} \quad (\xi \in E_{n-1}, \omega \in C_m, \alpha \in [0, \varepsilon]).$$

В частности, полагая $\omega_j = w_{u,j}(\xi)$ $(j = m, \ldots, 2m-1)$, получим оценку: $\sum\limits_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk}(\xi) w_{u,k}(\xi)\overline{w_{u,j}(\xi)} \geqslant \delta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots d\eta$ $(\xi \in E_{n-1})$. Возьмем α в (3.26) настолько малым, чтобы $\alpha \leqslant \delta$, тогда правая часть в (3.26) окажется неотрицательной и мы придем к (3.21). Лемма доказана.

Перейдем к доказательству леммы 3.1, для этого согласно лемме 3.3 достаточно установить неравенство (3.24). Пусть $u \in C^{2m}(G \cup \Gamma; (\text{гр})_S, 0)$, $\varepsilon > 0$; обозначим

$$l_{u,j}(\xi) = \varepsilon|\xi|^{2m-j} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^j \overline{P_u(\xi, \eta)}}{\overline{M(\xi, \eta)}} d\eta \tag{3.28}$$

$$(j = 0, \ldots, m-1;\ \xi \in E_{n-1},\ \xi \neq 0)$$

---

* Легко видеть, что если $H(\xi, \eta)$ — однородная функция степени t по (ξ, η), то функция $F(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\xi, \eta)\, d\eta$ (если интеграл существует) будет однородной степени $t+1$ по ξ.

(интеграл существует, так как числитель равен $O(|\eta|^{2m-2})$ при $|\eta|\to\infty$, а знаменатель растет, как $|\eta|^{2m}$). Учитывая, что $\widetilde{\partial_n^j u} = \eta^j\tilde{u}$ $(j=0, \ldots, m-1)$ (см. (3.16), $\widehat{\partial_n^s u}=0$ для $s=0, \ldots, m-1$) получим при помощи (3.17)

$$|\widetilde{(Mu)}(\xi, \eta)|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{m-1} l_{u,j}(\xi)|\xi|^{2m-j-1}\widetilde{\partial_n^j u} = |M\tilde{u}+P_u|^2 -$$

$$-2\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{m-1} l_{u,j}|\xi|^{2m-j-1}\eta^j\tilde{u} = \left|M\tilde{u}+P_u-\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{m-1}\overline{l_{u,j}}|\xi|^{2m-j-1}\eta^j\right|^2 +$$

$$+2\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{m-1} l_{u,j}|\xi|^{2m-j-1}\frac{\eta^j P_u}{M} - \left|\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{m-1} l_{u,j}|\xi|^{2m-j-1}\eta^j\right|^2. \quad (3.29$$

Проинтегрируем тождество (3.29) по $\eta\in(-\infty, \infty)$. Учитывая что $i\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\partial_n^j u}\,d\eta = \pi\widehat{\partial_n^j u}=0$ $(j=0, \ldots, m-1)$*, найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{Mu}|^2 d\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\left|M\tilde{u}+\sum_{s=m}^{2m-1} v_s(\xi, \eta)\,w_{u,s}(\xi)\right|^2 d\eta + \frac{2}{\varepsilon|\xi|}\sum_{j=0}^{m-1}|l_{u,j}|^2 -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{m-1} l_{u,j}|\xi|^{2m-j-1}\eta^j\right|^2 d\eta. \quad (3.3($$

Здесь $v_s(\xi, \eta)$ — функции, которые получились благодаря подстановк выражения (3.23); важно заметить, что они непрерывны (при $\xi\neq($

---

* Справедливо общее равенство: $i\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\xi, \eta)\,d\eta = \pi\hat{u}(\xi)$ $(u\in C^1(G\cup\Gamma;$ 0 Действительно, для суммируемой на оси $(-\infty, \infty)$ кусочно дифференц руемой функции $v(y)$ по формуле обращения интеграла Фурье можно н писать: $v(z+0)+v(z-0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\eta z}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\eta y}v(y)\,dy\,d\eta$ $(-\infty<z<\infty)$. П лагая здесь $z=0$ и $v(y)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_G e^{-i\langle\xi, x\rangle}u(x, y)\,dx$ и учитывая, ч $iv(+0)=\hat{u}$, $v(-0)=0$, получим требуемое соотношение.

и однородны степени $2m$. Интегралы в правой части (3.30) существуют: это следует из сходимости последнего интеграла, в котором подынтегральное выражение при $|\eta| \to \infty$ равно $O(1/|\eta|^{2m+2})$.

Рассмотрим функцию от $n+m-1$-мерного вектора $(\xi, \lambda) = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}) \in E_{n-1} \times C_m$

$$\varphi(\xi, \lambda) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{M(\xi, \eta)} \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j |\xi|^{2m-j-1} \eta^j \right|^2 d\eta}{\frac{2}{|\xi|} \sum\limits_{j=0}^{m-1} |\lambda_j|^2}. \tag{3.31}$$

Она непрерывна по $(\xi, \lambda) \in (E_{n-1} \times C_m) \setminus (\{\xi = 0\} \cup \{\lambda = 0\})$ и однородна нулевой степени однородности по каждому из переменных; поэтому φ ограничена. Отсюда следует оценка числителя в (3.31) через знаменатель, которая позволяет выбрать ε в (3.30) столь малым, чтобы разность последних двух выражений мажорировалась снизу $\frac{\delta}{|\xi|} \sum\limits_{j=0}^{m-1} |l_{u,j}|^2$ с некоторым $\delta > 0$. Выражая $l_{u,j}(\xi)$ в виде линейной комбинации $w_{u,s}(\xi)$, получим из (3.30):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{Mu}|^2 d\eta \geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \widetilde{Mu} + \sum_{s=m}^{2m-1} v_s(\xi, \eta) w_{u,s}(\xi) \right|^2 d\eta + \\ + \sum_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk}(\xi) w_{u,j}(\xi) \overline{w_{u,k}(\xi)}, \tag{3.32}$$

$$\sum_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk}(\xi) w_{u,k}(\xi) \overline{w_{u,j}(\xi)} = \frac{\delta}{|\xi|} \sum_{j=0}^{m-1} |l_{u,j}(\xi)|^2 \quad (\xi \in E_{n-1},\ \xi \neq 0). \tag{3.33}$$

Как следует из (3.28), коэффициенты $H_{jk}(\xi)$ непрерывны по $\xi \neq 0$ и однородны степени $4m+1$. Ясно также, что матрица $\| H_{jk}(\xi) \|_m^{2m-1}$ положительно определена. Предположим, что она строго положительно определена, тогда (3.32) обозначает, что выполнены условия леммы 3.3, и поэтому лемма 3.1 будет доказана.

Итак, пусть при некотором фиксированном $\xi_0 \neq 0$ найдется вектор $(\omega_m, \ldots, \omega_{2m-1})$ такой, что $\sum\limits_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk}(\xi_0) \omega_k \overline{\omega_j} = 0$; требуется доказать, что $\omega_m = \ldots = \omega_{2m-1} = 0$. Подберем так $u \in C^{2m}(G \cup \Gamma; (\text{гр})_S, 0)$, чтобы $w_{u,j}(\xi_0) = \omega_j$ $(j = m, \ldots, 2m-1)$; из (3.33) и (3.28) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^j P_u(\xi_0, \eta)}{M(\xi_0, \eta)} d\eta = 0 \quad (j = 0, \ldots, m-1). \tag{3.34}$$

Согласно лемме 3.2 $M(\xi_0, \eta)$ можно представить в виде произведения двух полиномов степени m: $M(\xi_0, \eta) = P_+(\eta) P_-(\eta)$, где $P_+(P_-)$ построен по корням уравнения $M(\xi_0, \zeta) = 0$ в верхней (нижней) полуплоскости. После возможного сокращения на общие множители можно написать $P_u/M = P_u^*/P_+^* P_-^*$, где полиномы $P_+^*(\eta)$ и $P_-^*(\eta)$ взаимно просты с $P_u^*(\xi_0, \eta)$. Так как $P_u(\xi_0, \eta)$ имел степень $m-1$, а $P_+(\eta)$ и $P_-(\eta)$ — степень m, то P_+^* и P_-^* отличны от констант. Из (3.34) теперь следует, что для любого полинома $Q(\eta)$ степени $< m$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\eta) P_u^*(\xi_0, \eta)}{P_+^*(\eta) P_-^*(\eta)} d\eta = 0$. В частности, положим $Q(\eta) = P_+^*(\eta)(\eta - \alpha)^{-1}$, где α—нуль $P_+^*(\eta)$. Подсчитывая интеграл при помощи вычетов, найдем

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\eta) P_u^*(\xi_0, \eta)}{P_+^*(\eta) P_-^*(\eta)} d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_u^*(\xi_0, \eta)}{(\eta - \alpha) P_-^*(\eta)} d\eta = 2\pi i \, \frac{P_u^*(\xi_0, \alpha)}{P_-^*(\alpha)},$$

т. е. $P_u^*(\xi_0, \alpha) = 0$. Так как α не является нулем $P_u^*(\xi_0, \eta)$, то последнее равенство возможно лишь тогда, когда $P_u^*(\xi_0, \eta) \equiv 0$, т. е. когда $P_u(\xi_0, \eta) \equiv 0$.

Покажем, что полученное тождество влечет соотношение: $w_{u,m}(\xi_0) = \ldots = w_{u,2m-1}(\xi_0) = 0$. Действительно, перепишем (3.23) в виде

$$P_u(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{\nu=j+m+1}^{2m} \sum_{|\tau|=2m-\nu} b_{\tau\nu} \xi^\tau |\xi|^{\nu-j} w_{u,\nu-j-1}(\xi) \right) \eta^j.$$

Так как $P_u(\xi_0, \eta) \equiv 0$, то отсюда

$$\sum_{\nu=j+m+1}^{2m} \sum_{|\tau|=2m-\nu} b_{\tau\nu} \xi_0^\tau |\xi_0|^{\nu-j} w_{u,\nu-j-1}(\xi_0) = 0 \quad (j = 0, \ldots, m-1). \tag{3.35}$$

Положим здесь $j = m-1$, получим $b_{0,2m} |\xi_0|^{m+1} w_{u,m}(\xi_0) = 0$, откуда $w_{u,m}(\xi_0) = 0$, так как $b_{0,2m} \neq 0$. Учитывая это равенство, положим в

(3.35) $j=m-2$; получим $w_{u,m+1}(\xi_0)=0$ и т. д. Итак, $(\omega_m, \ldots, \ldots, \omega_{2m-1})=(w_{u,m}(\xi_0), \ldots, w_{u,2m-1}(\xi_0))=0$, что и требовалось.

Лемма 3.1 при $s=0$ доказана.

7) Докажем лемму 3.1 для $s>0$. Мы установим общий факт: *из оценки* (3.2), *справедливой при* $s=0$, *вытекает такая же оценка для любого* $s>0$. Как уже было видно, достаточно проводить рассмотрения на функциях $u \in C^{2m+s}(G \cup \Gamma; (\text{гр})_S, 0)$. Пусть $u \in C^{2m+1}(G \cup \Gamma; (\text{гр})_S, 0)$, обозначим $u_k^h(x)=\frac{1}{h}(u(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k+h, x_{k+1}, \ldots, x_n)-$ $-u(x_1, \ldots, x_n))$ $(k=1, \ldots, n-1)$; мы считаем, что в точке x_0 помещено начало координат и x_n направлена ортогонально к S. Ясно, что при $|h|$ достаточно малом $u_k^h \in C^{2m+1}(G \cup \Gamma; (\text{гр})_S, 0)$, поэтому для u_k^h можно написать неравенство (3.2) с $s=0$: $\| Mu_k^h \|_0 \geqslant C \| u_k^h \|_{2m}$. Но M с постоянными коэффициентами, поэтому $Mu_k^h=(Mu)_k^h$ и $\| (Mu)_k^h \|_0 \geqslant C \| u_k^h \|_{2m}$. Переходя здесь к пределу при $h \to 0$, получим

$$\| Mu \|_1 \geqslant \| D_k Mu \|_0 \geqslant C \| D_k u \|_{2m} \quad (k=1, \ldots, n-1). \tag{3.36}$$

Установим аналогичную оценку для D_n. С этой целью запишем: $b_{(0,\ldots,0,2m)} D_n^{2m} u = Mu - \sum\limits_{|\tau|+\nu=2m,\ \nu<2m} b_{(\tau,\nu)} D^\tau D_n^\nu u$; из эллиптичности M следует, что $b_{(0,\ldots,0,2m)} \neq 0$. Дифференцируя по x_n выписанное тождество, найдем: $b_{(0,\ldots,0,2m)} D_n^{2m+1} u = D_n Mu - \sum\limits_{|\tau|+\nu=2m,\ \nu<2m} b_{(\tau,\nu)} D^\tau D_n D_n^\nu u$. Отсюда

$$C_1 \| D_n^{2m+1} u \|_0 \leqslant \| D_n Mu \|_0 + C_2 \sum_{|\tau|+\nu=2m,\ \nu<2m} \| D^\tau D_n^{\nu+1} u \|_0$$
$$(C_1 = | b_{(0,\ldots,0,2m)} |). \tag{3.37}$$

Так как каждое выражение $D^\tau D_n^{\nu+1} u$ содержит максимум $2m$ дифференцирований по x_n, то $\| D^\tau D_n^{\nu+1} u \|_0 \leqslant \| D_k u \|_{2m}$ с некоторым $k=0, \ldots, n-1$, зависящим от (τ, ν). Таким образом из (3.37) и (3.36) можно заключить:

$$C_1 \| D_n^{2m+1} u \|_0 \leqslant \| D_n Mu \|_0 + C_3 \sum_{k=0}^{n-1} \| D_k u \|_{2m} \leqslant \| D_n Mu \|_0 +$$
$$+ \frac{C_3}{C} \sum_{k=0}^{n-1} \| D_k Mu \|_0 \leqslant C_4 \| Mu \|_1.$$

Из этого неравенства и (3.36) найдем: $\| Mu \|_1 \geqslant C_5 \sum_{k=0}^{n} \| D_k u \|_{2m} \geqslant$ $\geqslant C_6 \| u \|_{2m+1}$. Итак,

$$\| Mu \|_1 \geqslant C_6 \| u \|_{2m+1} \quad (u \in C^{2m+1}(G \cup \Gamma;\ (\text{гр})_S,\ 0)). \tag{3.38}$$

Повторяя изложенные выше рассуждения с заменой оценки (3.2) ($s = 0$) оценкой (3.38), придем к (3.2) с $s = 2$ и т. д. Итак, лемма 3.1, а значит и теорема 3.1, полностью доказаны.

В заключение заметим, что мы получили неравенство (3.1) со слагаемым $k\|u\|_0^2$. В п. 4 из (3.1) будут получены для сильно эллиптических выражений энергетические неравенства в обычной форме — без этого слагаемого. Случай общих выражений см. в § 6.

2. **Распространение энергетических неравенств на случай негативных норм**. Приведем важное дополнение к результатам п. 1. Ниже сохранены обозначения этого пункта.

Теорема 3.2. *Пусть L — правильно эллиптическое выражение порядка $2m$; $s = -m, \ldots, 0$. Предполагается, что коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^{\max(|\alpha|, |s|)}(G \cup \Gamma)$, граница Γ класса $C^{2m+|s|}$. Тогда при $k \geqslant 0$ достаточно большом справедлива оценка*

$$\| Lu \|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^s(G)} + k \| u \|_0^2 \geqslant C \| u \|^2_{2m+s} \tag{3.39}$$

$$(C > 0;\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G)).$$

(Здесь $\overset{\circ}{W}{}_2^s(G)$ — негативное пространство, построенное по позитивному $\overset{\circ}{W}{}_2^{|s|}(G)$ и нулевому $L_2(G)$).

Доказательство ведется по плану доказательства теоремы 3.1. Ниже положено $\sigma = -s$ ($\sigma = 0, \ldots, m$). Сформулируем сперва две леммы, которые будут установлены позже.

Лемма 3.4. *Пусть $Mu = \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha D^\alpha u$ — выражение с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее требованиям теоремы 3.2. Утверждается, что справедливо неравенство*

$$\| Mu \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)} \geqslant C \| u \|_{2m-\sigma} \quad (C > 0;\ u \in W_{2,0}^{2m}(G);\ \sigma = 0, \ldots, m). \tag{3.40}$$

Лемма 3.5. *В области G такого же вида, как и в лемме 3.1, рассматривается выражение $Mu = \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha D^\alpha u$ с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее требованиям теоремы 3.2. Утверж-*

дается, что имеет место неравенство

$$\|Mu\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)} \geqslant C\|u\|_{2m-\sigma} \quad (C > 0;\ u \in W_2^{2m}(G;\ (\text{гр})_S,\ 0);\ \sigma = 0, \ldots, m). \tag{3.41}$$

Мы покажем, что из этих лемм при помощи процедуры склеивания, подобной описанной на стр. 136—139, можно вывести теорему. Сформулируем сперва три очевидных утверждения относительно пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G)$ $(l = 0, 1, \ldots)$*.

а) Предположим, что $a(x) \in C^l(G \cup \Gamma)$ и определим в $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ оператор A умножения на $\bar{a}$: $(Au)(x) = \overline{a(x)}\,u(x)$ $(u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(G))$. Его норма $\|A\| = \max\limits_{x \in G\cup\Gamma,\ |\alpha| \leqslant l} |(D^\alpha a)(x)|$. Сопряженный оператор A^+, действующий в $\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G)$, называется оператором умножения обобщенных функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G)$ на $a(x)$. Имеем: $\|A^+\| = \|A\|$, на $L_2(G)$ A^+ совпадает с обычным умножением на $a(x)$. Таким образом, в частности,

$$\|af\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G)} \leqslant \max_{x \in G\cup\Gamma,\ |\alpha| \leqslant l} |(D^\alpha a)(x)| \cdot \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G)} \quad (f \in L_2(G),\ a \in C^l(G \cup \Gamma)). \tag{3.42}$$

б) Предположим, что Γ класса C^l. Обозначим $x' = \varphi(x)$ l раз непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм, переводящий G в G', тогда $(T_\varphi u')(x) = u'(\varphi(x))$ является гомеоморфизмом между $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G')$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$. Сопряженный оператор T_φ^+ будет гомеоморфизмом между $\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G')$, совпадающим на $f \in L_2(G)$ с оператором $f(x) \to f(\varphi^{-1}(x'))\left|\dfrac{dx}{dx'}\right|$, где $\left|\dfrac{dx}{dx'}\right|$ — модуль якобиана.

в) Пусть $G_1 \subseteq G_2$, $f \in L_2(G_2)$. Тогда

$$\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G_1)} \leqslant \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G_2)} \tag{3.43}$$

(это следует из неравенства $|(f, u)_{L_2(G_1)}| = |(f, u)_{L_2(G_2)}| \leqslant \leqslant \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G_2)} \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^l(G_2)} = \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G_2)} \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^l(G_1)}$, справедливого для $u \in C_0^\infty(G_1)$, продолженной нулем на G_2).

---

* Первые два факта справедливы и для пространств $W_2^{-l}(G)$; их легко также перефразировать для общих пространств $W_2^{'-l}(G)$.

Лемма 3.6. *Для любого дифференциального выражения N порядка r с обычными условиями гладкости коэффициентов справедлива оценка*

$$\|Nu\|_{\mathring{W}_2^{-l}(G)} \leqslant C \|u\|_{r-l} \quad (l = 0, \ldots, r;\ u \in W_2^r(G)). \tag{3.44}$$

Доказательство. Пусть $v \in C_0^\infty(G)$, $u \in W_2^l(G)$. Перебрасывая l дифференцирований с u на v, получим $(Nu, v)_0 = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant r-l, |\beta| \leqslant l} (c_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u, D^\beta v)_0$, где $c_{\alpha\beta}$ — некоторые коэффициенты. Отсюда $|(Nu, v)_0| \leqslant \leqslant C \|u\|_{r-l} \|v\|_l$. Посредством предельного перехода заключаем, что последнее неравенство справедливо и при $v \in \mathring{W}_2^l(G)$, но тогда из него следует (3.44). Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы.

1′) Рассмотрим точку x_0 и области G, G_0 указанного на рис. 2 вида. Согласно (3.41), примененному к $M = L_c(x_0, D)$, можно написать

$$\|L_c(x_0, D) u\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G_0)} \geqslant C_1 \|u\|_{W_2^{2m-\sigma}(G_0)} \quad (C_1 > 0;\ u \in W_m^{2m}(G_0;\ (\text{гр})_{S_0},\ 0)). \tag{3.45}$$

Для функций $u \in W_2^{2m}(G_0)$, аннулирующихся в окрестностях множества $G_0 \diagdown G$, при помощи (3.43) и (3.44) получим

$$\|L(x, D) u\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G)} - \|L_c(x_0, D) u\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G_0)} \leqslant \|L(x, D) u\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G_0)} -$$
$$- \|L_c(x_0, D) u\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G_0)} \leqslant \|L(x, D) u - L_c(x_0, D) u\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G_0)} \leqslant$$
$$\leqslant \Big\| \sum_{|\alpha|=2m} [a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)] D^\alpha u \Big\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G_0)} + \Big\| \sum_{|\alpha| \leqslant 2m-1} a_\alpha(x) D^\alpha u \Big\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G_0)} \leqslant$$
$$\leqslant \Big\| \sum_{|\alpha'|=\sigma, |\alpha''|=2m-\sigma} D^{\alpha'} ([a_{(\alpha', \alpha'')}(x) - a_{(\alpha', \alpha'')}(x_0)] D^{\alpha''} u) \Big\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G_0)} +$$
$$+ \Big\| \sum_{|\alpha| \leqslant 2m-1} c_\alpha(x) D^\alpha u \Big\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G_0)} + \Big\| \sum_{|\alpha| \leqslant 2m-1} a_\alpha(x) D^\alpha u \Big\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G_0)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|\alpha'|=\sigma, |\alpha''|=2m-\sigma} \|[a_{(\alpha', \alpha'')}(x) - a_{(\alpha', \alpha'')}(x_0)] D^{\alpha''} u\|_{L_2(G)} + C_2 \|u\|_{W_2^{2m-\sigma-1}(G)}. \tag{3.46}$$

Поясним, что выше мы пронесли в выражении $\sum\limits_{|\alpha|=2m} [a_\alpha(x) -$

$-a_\alpha(x_0)]D^\alpha u$ коэффициент $[a_\alpha(x)-a_\alpha(x_0)]$ через σ производных, в связи с этим возникли члены $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2m-1} c_\alpha(x)D^\alpha u$. Учитывая непрерывность $a_{(\alpha',\alpha'')}(x)$ в точке x_0, оценку $\|u\|_{W_2^{2m-\sigma-1}(G)}\leqslant d\|u\|_{W_2^{2m-\sigma}(G)}=$ $=d\|u\|_{W_2^{2m-\sigma}(G_0)}$ (d — диаметр G) и оценки (3.45), (3.46), найдем при достаточно малом d

$$\|L(x, D)u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)}\geqslant C_3\|u\|_{2m-\sigma}\ (C_3>0;\ u\in W_2^{2m}(G;\ (\text{гр})_S,\ 0)). \quad (3.47)$$

Подобным же образом при помощи леммы 3.4 получаем оценку типа (3.47) внутри малой области G; теперь в (3.47) $u\in W_{2,0}^{2m}(G)$.

2′) Следующий этап доказательства — вывод оценки типа (3.47) вблизи криволинейного куска S границы — проводится посредством замены переменных подобно тому, как это сделано на стр. 137 — 139. При этом нужно воспользоваться утверждением б) на стр. 153, выбрав гомеоморфизм $x'=\varphi(x)$, уплощающий кусок S, таким образом, чтобы $\frac{dx}{dx'}=1$. Убедимся, что такой выбор возможен, если только брать в качестве G область, границу которой всякая прямая, параллельная нормали в точке x_0, пересекает максимум в двух точках (см. рис. 3); областей G такого вида вполне достаточно для доказательства теоремы. Поместим начало координат в точке x_0, направив ось Ox_n по нормали к Γ в этой точке. Гомеоморфизм области G в область G', указанную на рисунке, зададим формулами: $x_1'=x_1, \ldots,$ $x_{n-1}'=x_{n-1}$, $x_n'=\varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$, где при фиксированных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ $\varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$ осуществляет сдвиг отрезка типа $[a, b]$ в отрезок $[a', b']$. Т. е. в окрестности точки x_0 $x_n'=\varphi_n(x_1, \ldots, x_n)=x_n-f(x_1, \ldots,$ $x_{n-1})$, где $x_n=f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — уравнение S вблизи x_0. Очевидно $\frac{dx}{dx'}=1$ в G'.

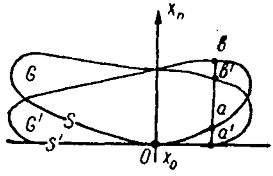


Рис. 3.

3′) Установление неравенства, подобного (3.9), проводится посредством разложения единицы. Пусть это разложение $1=\sum\limits_{j=1}^{N}\chi_j(x)$ выбрано так, как и на стр. 139. Будем иметь оценки

$$\|L[\chi_j u]\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)}\geqslant C\|\chi_j u\|_{2m-\sigma}\qquad (u\in \overset{\circ}{W}{}_2^{m}(G)\cap W_2^{2m}(G);\ j=1, \ldots, N).$$

Из них при помощи (3.42) и (3.44) получим

$$\|u\|^2_{2m-\sigma}=\left\|\sum_{j=1}^{N}\chi_j u\right\|^2_{2m-\sigma}\leqslant C_1\sum_{j=1}^{N}\|\chi_j u\|^2_{2m-\sigma}\leqslant C_2\sum_{j=1}^{N}\|L[\chi_j u]\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)}\leqslant$$

$$\leqslant C_3\sum_{j=1}^{N}\|\chi_j L[u]\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)}+C_3\sum_{j=1}^{N}\left\|\sum_{|\alpha|\leqslant 2m-1}c_{j\alpha}(x)D^\alpha u\right\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)}\leqslant$$

$$\leqslant C_4\left(\|Lu\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)}+\|u\|^2_{2m-\sigma-1}\right)\qquad (u\in\overset{\circ}{W}{}_2^m(G)\cap W_2^{2m}(G)).\quad(3.48)$$

4′) Так как в норме $\|\cdot\|_{2m-\sigma-1}$ $2m-\sigma-1>0$, то возможно применить неравенство Эрлинга — Ниренберга $\|u\|^2_{2m-\sigma-1}\leqslant\varepsilon\|u\|^2_{2m-\sigma}+$ $+K(\varepsilon)\|u\|^2_0$, при помощи которого из (3.48) вытекает (3.39).

6′) Для завершения доказательства теоремы нам осталось убедиться в справедливости лемм 3.4 и 3.5. Прежде всего напомним (см. стр. 78), что $\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)}$ для $f\in L_2(G)$ в терминах преобразований Фурье $\widetilde{f}(\xi)$ записывается так:

$$\|f\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)}=\int_{E_n}\frac{|\widetilde{f}(\xi)|^2}{\Delta^2(\xi)}d\xi,\qquad \Delta(\xi)=\sqrt{\sum_{|\alpha|=\sigma}\xi^{2\alpha}},$$

$$\widetilde{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_G f(x)e^{-i\langle\xi,x\rangle}dx.\qquad(3.49)$$

Лемма 3.4 устанавливается элементарно: неравенство (3.40) достаточно проверить на финитных функциях $u\in C_0^{2m}(G)$, для которых согласно (1.9)

$$\|Mu\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)}=\int_{E_n}|\widetilde{Mu}|^2\Delta^{-2}(\xi)\,d\xi=\int_{E_n}|\widetilde{u}|^2\left|\sum_{|\alpha|=2m}b_\alpha\xi^\alpha\right|^2\Delta^{-2}(\xi)\,d\xi.$$

Составим функцию

$$\varphi(\xi)=\frac{\sum\limits_{|\alpha|=2m-\sigma}\xi^{2\alpha}}{\left|\sum\limits_{|\alpha|=2m}b_\alpha\xi^\alpha\right|^2\Delta^{-2}(\xi)}\qquad(\xi\in E_n,\ \xi\neq0).$$

Она непрерывна и однородна степени 0, поэтому φ ограничена. Таким образом, $\left|\sum\limits_{|\alpha|=2m}b_\alpha\xi^\alpha\right|^2\Delta^{-2}(\xi)$ мажорируется снизу функцией $c\sum\limits_{|\alpha|=2m-\sigma}\xi^{2\alpha}$ и поэтому согласно (1.8)

$$\| Mu \|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)} = \int_{E_n} |\tilde{u}|^2 \left| \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha \xi^\alpha \right|^2 \Delta^{-2}(\xi)\, d\xi \geqslant C \int_{E_n} |\tilde{u}|^2 \sum_{|\alpha|=2m-\sigma} \xi^{2\alpha} d\xi =$$

$$= C \sum_{|\alpha|=2m-\sigma} \| D^\alpha u \|_0^2 \geqslant C_1 \| u \|^2_{2m-\sigma}.$$

Неравенство (3.40) доказано.

Лемма 3.5 гораздо более тонкая, ее доказательство подобно доказательству леммы 3.1 в случае $s=0$, приведенному на стр. 142—151; наметим его. Ниже мы пользуемся обозначениями стр. 142—143, в частности, M имеет вид (3.15); функцию $\Delta(\xi)$ теперь будем записывать в виде $\Delta(\xi, \eta)$, где $\xi \in E_{n-1}$, $\eta \in E_1$. Пусть N —произвольное однородное дифференциальное выражение порядка $2m-\sigma$ с постоянными коэффициентами. Для доказательства неравенства (3.41) достаточно установить оценку $\| Nu \|_0 \leqslant C \| Mu \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)}$ $(C > 0;\ u \in C^{2m}(G \cup \Gamma;$ $(\text{гр})_S, 0))$. Эта оценка вытекает из неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{(Nu)}(\xi, \eta)|^2 d\eta \leqslant C^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{(Mu)}(\xi, \eta)|^2 \Delta^{-2}(\xi, \eta)\, d\eta \qquad (3.50)$$

$$(\xi \in E_{n-1},\ u \in C^{2m}(G \cup \Gamma;\ (\text{гр})_S, 0))$$

— нужно проинтегрировать (3.50) по $\xi \in E_{n-1}$ и воспользоваться выражением (3.49) для нормы $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)}$ и равенством Парсеваля. Итак, будем доказывать (3.50).

Введем обозначения: $\widetilde{(Mu)}^*(\xi, \eta) = \widetilde{(Mu)}(\xi, \eta)\, \Delta^{-1}(\xi, \eta)$, $M^*(\xi, \eta) = M(\xi, \eta)\, \Delta^{-1}(\xi, \eta)$, $P_u^*(\xi, \eta) = P_u(\xi, \eta)\, \Delta^{-1}(\xi, \eta)$ $((\xi, \eta) \neq 0;\ u \in C^{2m}(G \cup \Gamma;$ $(\text{гр})_S, 0))$. Из (3.17) следует:

$$\widetilde{(Mu)}^*(\xi, \eta) = M^*(\xi, \eta)\, \tilde{u}(\xi, \eta) + P_u^*(\xi, \eta). \qquad (3.51)$$

Пусть $Nu = \sum\limits_{|\tau|+\nu=2m-\sigma} c_{\tau\nu} \partial^\tau \partial_n^\nu u$, подобно (3.19) и (3.23) найдем

$$\widetilde{(Nu)}(\xi, \eta) = N(\xi, \eta)\, \tilde{u}(\xi, \eta) + Q_u(\xi, \eta), \qquad N(\xi, \eta) = \sum_{|\tau|+\nu=2m-\sigma} c_{\tau\nu} \xi^\tau \eta^\nu, \qquad (3.52)$$

$$Q_u(\xi, \eta) = \sum_{\nu=m+1}^{2m-\sigma} \sum_{s=m}^{\nu-1} \sum_{|\tau|=2m-\sigma-\nu} c_{\tau\nu} \xi^\tau \eta^{\nu-s-1} |\xi|^{s+1} w_{u,s}(\xi)$$

$$(u \in C^{2m}(G \cup \Gamma;\ (\text{гр})_S, 0))$$

(если $\sigma = m$, то считаем $Q_u = 0$). Заметим, что подобно оценке (3.22) имеем $|N(\xi, \eta)| \leqslant C|M^*(\xi, \eta)|$ ($(\xi, \eta) \in E_n$, $(\xi, \eta) \neq 0$). Далее, справедливо следующее обобщение леммы 3.3: *если для каждого* $u \in C^{2m}(G \cup \Gamma;\ (\text{гр})_S, 0)$ *имеет место неравенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{(Mu)}^*(\xi, \eta)|^2 d\eta \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg| |M^*(\xi, \eta)|^2 \tilde{u}(\xi, \eta) + \sum_{s=m}^{2m-1} v_s^*(\xi, \eta) w_{u,s}(\xi) \Bigg|^2 d\eta + \sum_{j,k=m}^{2m-1} H_{jk}^*(\xi) w_{u,k}(\xi) \overline{w_{u,j}(\xi)} \quad (3.53)$$

$$(\xi \in E_{n-1}, \ \xi \neq 0),$$

в котором $v_s^*(\xi, \eta)$ *непрерывные при* $\xi \neq 0$ *и однородные степени* $2m - \sigma$ *функции от* $(\xi, \eta) \in E_n$, $H_{jk}^*(\xi)$ $(\xi \in E_{n-1}, \xi \neq 0)$ — *непрерывны и однородны степени* $4m - 2\sigma + 1$, *причем для каждого* $\xi \neq 0$ *матрица* $\|H_{jk}^*(\xi)\|_m^{2m-1}$ *строго положительно определенна, то выполняется оценка* (3.50). Доказательство этого факта почти не отличается от доказательства леммы 3.3: нужно воспользоваться представлениями (3.51) и (3.52) вместо (3.17) и (3.19) и учитывать, что Q теперь линейная форма по $w_{u,s}$, коэффициенты которой непрерывны и однородны степени $2m - \sigma$.

Неравенство (3.53) устанавливается подобно выводу (3.24) на стр. 147—151, нужно только полагать

$$l_{u,j}^*(\xi) = \varepsilon |\xi|^{2m-\sigma-j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^j \overline{P_u^*(\xi, \eta)}}{\overline{M^*(\xi, \eta)}} d\eta = |\xi|^{-\sigma} l_{u,j}(\xi)$$

и преобразовывать выражение не (3.29), а $|\widetilde{(Mu)}^*(\xi, \eta)|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=0}^{m-1} l_{u,j}^*(\xi) |\xi|^{2m-\sigma-j-1} \widetilde{\partial_n^j u}$. Лемма 3.5, а вместе с ней и теорема 3.2 доказаны.

3. Энергетические неравенства для других граничных условий. Результаты предыдущих двух пунктов обобщаются на широкий класс граничных условий, связанных с эллиптическими выражениями $L(x, D)$, рассматриваемыми в теоремах 3.1 и 3.2. Это обобщение строится по следующей схеме. Рассматривается граничное условие (гр), для которого W_2^{2m}(гр) состоит из функций $u \in W_2^{2m}(G)$, удовлетворяющих равенствам $B_1(x, D)u = 0, \ldots, B_m(x, D)u = 0$, где $B_j(x, D)$ — некоторые линейные дифференциальные выражения порядка $m_j < 2m$, определенные на Γ (в случае нулевых условий $B_1(x, D)u = u$, $B_2(x, D)u =$

$= \frac{\partial u}{\partial \nu}, \ldots, B_m u = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\Big)$. При некоторых условиях на систему граничных выражений B_j можно установить следующее неравенство, обобщающее неравенство 3.1:

$$\| L(x, D) u \|_s^2 + k \| u \|_0^2 + \sum_{j=1}^{m} \ll B_j(x, D) u \gg^2_{2m-m_j+s-\frac{1}{2}} \geqslant C \| u \|^2_{2m+s} \tag{3.54}$$

$$(C > 0;\ s = 0, 1, \ldots);$$

здесь $\ll \cdot \gg_k$ — некоторые нормы, определенные на функциях, заданных на Γ («граничные нормы»). Замечательным обстоятельством является тот факт, что соотношение (3.54) справедливо для любых $u \in W_2^{2m}(G)$. Если $u \in W_2^{2m}$ (гр), т. е. $B_1 u = \ldots = B_m u = 0$, то (3.54) превращается в энергетическое неравенство обычного вида. Доказательство оценки (3.54) заключается в обобщении рассуждений стр. 136—152. То, что она устанавливается на функциях, не удовлетворяющих граничным условиям, существенно. Например, теперь не возникает при использовании разложения единицы $1 = \sum_{j=1}^{N} \chi_j$ следующей трудности: если $u \in W_2^{2m}$(гр), то $\chi_j u$, вообще говоря, не удовлетворяет (гр) (см. ниже стр. 161). Неравенство (3.54) подобно случаю нулевых граничных условий может быть обобщено и на негативные $\|\cdot\|_s$.

Возникает вопрос — какими должны быть граничные выражения $B_j(x, D)$ $(j = 1, \ldots, m)$, чтобы имело место неравенство (3.54) (говорят, что в этом случае выражения $B_1, \ldots, B_m$ накрывают L). Оказывается, что здесь имеет место следующий принцип локализации: зафиксируем точку $x_0 \in \Gamma$, проведем в ней касательную гиперплоскость $\widetilde{\Gamma}$ к Γ и рассмотрим соответствующее полупространство $\widetilde{G}$, расположенное по одну сторону $\widetilde{\Gamma}$, и в нем выражение $L(x_0, D)$ с системой граничных выражений $B_1(x_0, D), \ldots, B_m(x_0, D)$ на $\widetilde{\Gamma}$ — все коэффициенты здесь постоянны. Пусть $B_j(x_0, D)$ таковы, что на функциях $u \in C^\infty(\widetilde{G})$, аннулирующихся при большом $|x|$, справедлива оценка (3.54), в которой x заменено на x_0. Если такая ситуация выполняется для каждого $x_0 \in \Gamma$, то система $B_1(x, D), \ldots, B_m(x, D)$ накрывает $L(x, D)$.

В связи с громоздкостью упомянутая выше схема полностью излагаться не будет, однако в § 6 мы более подробно остановимся на возникающих здесь вопросах. Сейчас же будет приведен вывод обычных энергетических неравенств (без граничных норм) для сильно эллиптических выражений второго порядка и граничных условий типа третьей краевой задачи. Доказательство основывается на методе интегрирования по частям и достаточно коротко. Вместе с тем нужно отметить, что оно не может рассматриваться как образец для общей конструкции.

Теорема 3.3. *Пусть* L — *сильно эллиптическое выражение второго порядка с обычными условиями гладкости коэффициентов, граница* Γ *класса* C^2, *граничное условие* (гр): $\left.\frac{\partial u}{\partial \mu}+\sigma(x)u\right|_\Gamma=0$, *где* $\sigma\in C^1(\Gamma)$. *Утверждается, что можно подобрать столь большое* $k\geqslant 0$, *что будет выполняться неравенство*

$$\|Lu\|_0^2+k\|u\|_0^2\geqslant C\|u\|_2^2 \qquad (C>0,\ u\in W_2^2(\text{гр})). \tag{3.55}$$

Доказательство. Предположим, что уже доказана такая лемма.

Лемма 3.7. *В области* G, *указанной в лемме* 3.1, *рассматривается сильно эллиптическое выражение* $Mu=\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}D_jD_ku$ *с постоянными коэффициентами. Через* $W_2^2(G;\,(\text{гр})_S,\,0)$ *обозначим класс функций из* $W_2^2(G)$, *удовлетворяющих на* S *условию* $\frac{\partial u}{\partial\mu}+\sigma(x)u=0\ (\sigma\in C^1(S))$, *и аннулирующихся в окрестностях* $\Gamma\setminus S$. *Справедливо неравенство*

$$\|Mu\|_0^2+k\|u\|_0^2\geqslant C\|u\|_2^2 \qquad (C>0;\ u\in W_2^2(G;\,(\text{гр})_S,\,0)). \tag{3.56}$$

Из этой леммы теорема следует при помощи рассуждений, подобных изложенным на стр. 136—139. Наметим их.

1″) Так же, как и там, можно установить оценку

$$\|L(x,D)u\|_0\geqslant C\|u\|_2 \qquad (C>0;\ u\in W_2^2(G;\,(\text{гр})_S,\,0)) \tag{3.57}$$

для области G достаточно малого диаметра d. Действительно, неравенство (3.57) на функциях $u'\in W_2^2(G;\,(\text{гр})_S,\,0)'$, где $W_2^2(G;\,(\text{гр})_S,\,0)'$ построено по $L(x_0,D)$, а не $L(x,D)$, доказывается буквально так же, как и на стр. 136—137. Затем нужно учесть, что каждая функция из $W_2^2(G;\,(\text{гр})_S,\,0)$ может быть приближена в метрике $W_2^2(G)$ функцией из $W_2^2(G;\,(\text{гр})_S,\,0)'$ при $d\to 0$.

2″) Неравенство (3.57) влечет подобное же неравенство и в случае, когда S — дважды непрерывно дифференцируемый, а не плоский кусок границы некоторой области G малого диаметра.

В самом деле, пусть $x'=\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм в E_n, переводящий $G\cup\Gamma$ в $G'\cup\Gamma'$, причем S переходит в плоский кусок S' границы Γ'. Отображение $(T_\varphi u')(x)=u'(\varphi(x))$ является гомеоморфизмом между $W_2^2(G')$ и $W_2^2(G)$. Нетрудно видеть, что T_φ будет гомеоморфизмом и между $W_2^2(G';\,(\text{гр})'_{S'},\,0)$ и $W_2^2(G;\,(\text{гр})_S,\,0)$, где $(\text{гр})'_{S'}$ — граничное условие на S' вида $\frac{\partial u}{\partial\mu'}+\sigma'(x')u=0$ (μ' — конормаль для L' на S', $\sigma'\in C^1(\Gamma')$—некоторая функция). Для доказательства выясним сперва, как орт нормали $\nu(x)$ к S выражается через орт нормали $\nu'(x')$ к S'. Пусть $f'(x')=0$ — уравнение плоского куска S', тогда $f(x)=f'(\varphi(x))=0$ — уравнение для S; $f\in C^2$. Поэтому

$$\nu_k(x)=\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial x_k}=\alpha(x)\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial f'}{\partial x'_q}\frac{\partial x'_q}{\partial x_k}=\beta(x')\sum_{q=1}^{n}\nu'_q(x')\frac{\partial x'_q}{\partial x_k}\qquad (x'=\varphi^{-1}(x)),\tag{3.58}$$

где α и β — некоторые положительные множители из C^1, возникающие благодаря нормировке вектора нормали к орту. Свяжем теперь производные по конормалям $\mu(x)$ для L и $\mu'(x')$ для L'. При помощи первого равенства (3.6), (3.58) и (3.7) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial\mu}=\frac{1}{|B\nu|}\sum_{j,k=1}^{n}b_{jk}(x)\nu_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{\beta(x')}{|B\nu|}\sum_{p,q=1}^{n}\left(\sum_{j,k=1}^{n}b_{jk}(x)\frac{\partial x'_p}{\partial x_j}\frac{\partial x'_q}{\partial x_k}\right)\nu'_q(x')\frac{\partial u}{\partial x'_p}=$$

$$=\frac{\beta(x')}{|B\nu|}\sum_{p,q=1}^{n}b'_{pq}(x')\nu'_q(x')\frac{\partial u}{\partial x'_p}=\gamma(x')\frac{\partial T_\varphi^{-1}u}{\partial\mu'},\tag{3.59}$$

где $\gamma\in C^1(\Gamma')$ — множитель, связанный с нормировкой. Из (3.59) следует, что если u удовлетворяет условию $\left.\frac{\partial u}{\partial\mu}+\sigma(x)u\right|_S=0$, то $T_\varphi^{-1}u$ удовлетворяет условию $\left.\frac{\partial T_\varphi^{-1}u}{\partial\mu'}+\sigma'(x')T_\varphi^{-1}u\right|_{S'}=0$. Из сказанного ясно, что T_φ осуществляет гомеоморфизм между $W_2^2(G';(\text{гр})'_{S'},0)$ и $W_2^2(G;(\text{гр})_S,0)$. Теперь доказательство заканчивается точно так же, как и на стр. 138.

3″) — 4″) Переход к оценкам во всей G осуществляется подобно сказанному на стр. 139 при помощи разложения единицы $1=\sum_{j=1}^{N}\chi_j$, нужно только χ_j вблизи Γ строить таким образом, чтобы из включения $u\in W_2^2(\text{гр})$ следовало включение $\chi_j u\in W_2^2(\text{гр})$. Для этого достаточно выбирать $\chi_j(x)$ постоянными в окрестности Γ в направлении конормалей $\mu(x)$ $(x\in\Gamma)$. Легко видеть, что такое построение $\chi_j(x)$ возможно — конормаль в силу эллиптичности L нигде не имеет тангенциального направления.

5″) Докажем лемму 3.7; для этого несколько видоизменим рассуждения стр. 140—141. Равенство (3.10) сохранится, но последнее слагаемое в нем, т. е. член (3.11), теперь не обращается тождественно в нуль. Преобразуем его, интегрируя по частям по S и учитывая граничное условие $-\sigma u=\frac{\partial u}{\partial\mu}=\frac{1}{|B\nu|}\sum_{j=1}^{n}b_{jn}D_j$,

$$I_M=-\int_S\left(\sum_{k,p,q=1}^{n}b_{nk}\bar b_{pq}D_ku\cdot D_pD_q\bar u-\sum_{j,k,q=1}^{n}b_{jk}\bar b_{nq}D_ku\cdot D_jD_q\bar u\right)dx=$$

$$= -\int\limits_S \left(\sum_{\substack{k,p,q=1\\ p\neq n}}^{n} b_{nk}\bar{b}_{pq} D_k u \cdot D_p D_q \bar{u} - \sum_{\substack{j,k,q=1\\ j\neq n}}^{n} b_{jk}\bar{b}_{nq} D_k u \cdot D_j D_q \bar{u} \right) dx =$$

$$= -2\operatorname{Re} \int\limits_S \sum_{\substack{k,p,q=1\\ p\neq n}}^{n} b_{nk}\bar{b}_{pq} D_k u \cdot D_p D_q \bar{u}\, dx =$$

$$= 2\,|Bv|\operatorname{Re} \int\limits_S \sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq n}}^{n} \sigma u \bar{b}_{pq} D_p D_q \bar{u}\, dx = -2\,|Bv|\operatorname{Re} \int\limits_S \sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq n}}^{n} \bar{b}_{pq} D_p(\sigma u)\cdot D_q \bar{u}\, dx.$$

Продолжая σ гладким образом внутрь G и учитывая неравенство $\int\limits_S |u|^2 dx \leqslant \leqslant C \|u\|_0 \|u\|_1$ и неравенство Эрлинга—Ниренберга, получим далее

$$|I_M| \leqslant C_1 \sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq n}}^{n} \int\limits_S |D_p(\sigma u)\cdot D_q \bar{u}|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq n}}^{n} \left(\int\limits_S |D_p(\sigma u)|^2 dx \int\limits_S |D_q \bar{u}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_2 \|u\|_1 \|u\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2^2\delta^2}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2\delta^2} \|u\|_1^2 \leqslant \left(\frac{C_2^2\delta^2}{2} + \frac{\eta}{2\delta^2} \right) \|u\|_2^2 + \frac{K(\eta)}{2\delta^2} \|u\|_0^2.$$

Выберем сперва $\delta > 0$, а затем $\eta > 0$ достаточно малыми, в результате для любого $\varepsilon > 0$ получим оценку $|I_M| \leqslant \varepsilon \|u\|_2^2 + K_1(\varepsilon) \|u\|_0^2$. Итак,

$$\|Mu\|_0^2 = \int\limits_G \sum_{j,k,p,q=1}^{n} b_{jk}\bar{b}_{pq} D_k D_p u \cdot D_j D_q \bar{u}\, dx + I_M, \tag{3.60}$$

$$|I_M| \leqslant \varepsilon \|u\|_2^2 + K_1(\varepsilon) \|u\|_0^2 \quad (K_1(\varepsilon) > 0,\ u \in W_2^2(G;\ (\text{гр})_S,\ 0)).$$

Аналогичные равенства можно написать и для $\|\overline{M}u\|_0^2$, $\|(\operatorname{Re} M)u\|_0^2$ (черта обозначает переход к комплексно сопряженным коэффициентам в M); для соответствующих слагаемых $I_{\overline{M}}$, $I_{\operatorname{Re} M}$ будут иметь место оценки типа (3.60). Учитывая эти соотношения и равенство

$$\int\limits_G \sum_{j,k,p,q=1}^{n} b_{jk}\bar{b}_{pq} D_k D_p u \cdot D_j D_q \bar{u}\, dx = \int\limits_G \sum_{j,k,p,q=1}^{n} \bar{b}_{jk} b_{pq} D_k D_p u \cdot D_j D_q \bar{u}\, dx,$$

можем написать

$$\| Mu \|_0^2 = \frac{1}{2} (\| Mu \|_0^2 + \| \overline{M}u \|_0^2) + \frac{1}{2} (I_M - I_{\overline{M}}) \geqslant \frac{1}{4} (\| Mu \|_0 + \| \overline{M}u \|_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (I_M - I_{\overline{M}}) \geqslant \left\| \frac{1}{2} (M + \overline{M}) u \right\|_0^2 + \frac{1}{2} (I_M - I_{\overline{M}}) = \| (\operatorname{Re} M) u \|_0^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (I_M - I_{\overline{M}}) = \int\limits_G \sum_{j,k,p,q=1}^{n} (\operatorname{Re} b_{jk}) (\operatorname{Re} b_{pq}) D_k D_p u \cdot D_j D_q \bar{u} \, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} (I_M - I_{\overline{M}}) + I_{\operatorname{Re} M}. \tag{3.61}$$

Интеграл в правой части (3.61) оценивается снизу через $C \| u \|_2^2$ (см. стр. 141), остальные слагаемые этой части оцениваются сверху выражением $\varepsilon \| u \|_2^2 + K_2(\varepsilon) \| u \|_0^2$ ($K_2(\varepsilon) > 0$). Таким образом, при $\varepsilon > 0$ достаточно малом $\| Mu \|_0^2 \geqslant (C - \varepsilon) \| u \|_2^2 - K_2(\varepsilon) \| u \|_0^2$, что и доказывает (3.56). Лемма 3.7, а значит и теорема 3.3 доказаны.

4. Существование гладких решений для сильно эллиптических уравнений. Метод продолжения по параметру. Теоремы 3.1 и 3.3 дают возможность установить для краевых задач существование решений, имеющих гладкость, равную порядку уравнения. Мы сейчас будем пользоваться наиболее простым приемом — так называемым методом продолжения по параметру, который приводит к цели в случае сильно эллиптических выражений и простых граничных условий. Общие подходы будут изложены в § 6.

Из теорем 3.1 и 3.3 вытекает:

Следствие. Пусть L — сильно эллиптическое выражение порядка $2m$, причем выполняются все предположения теоремы 3.1 при $s = 0$. Всегда можно подобрать столь большое $k \geqslant 0$, что будет справедлива оценка

$$\| Lu + ku \|_0 \geqslant C \| u \|_{2m} \qquad (C > 0;\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G)). \tag{3.62}$$

Аналогично, если для сильно эллиптического выражения второго порядка выполняются условия теоремы 3.3 и коэффициенты $p_j(x)$ в записи (2.4) вещественны, то при соответствующем выборе $k \geqslant 0$ и $C > 0$ оценка (3.62) справедлива на функциях $u \in W_2^2$(гр), где (гр) имеет вид: $\left. \frac{\partial u}{\partial \mu} + \sigma(x) u \right|_\Gamma = 0$ ($\sigma \in C^2(\Gamma)$).

В неравенстве (3.62) константы k и C зависят не от конкретного вида коэффициентов $a_\alpha(x)$ выражения L и функции $\sigma(x)$, а лишь от $\max\limits_{x \in G \cup \Gamma,\, |\beta| \leqslant |\alpha|} | D^\beta a_\alpha(x) |$ $(0 \leqslant |\alpha| \leqslant r)^*$, числа $\varepsilon > 0$ в оценках (1.3) и максимума на Γ модуля функции $\sigma(x)$ и ее производной.

* И даже от максимума модуля меньшего количества производных, см. стр. 136.

Доказательство. Установим первое утверждение. Положим $k = k_1 + k_2$ $(k_1, k_2 \geqslant 0)$ и подберем k_1 настолько большим, чтобы $\mathrm{Re}(M_{k_1}u, u)_0 \geqslant C_1 \| u \|_m^2 \geqslant 0$ $(u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G))$, где $M_{k_1} = L + k_1 E$ (см. теорему 1.1). Теперь для рассматриваемых u

$$\| Lu + ku \|_0^2 = (M_{k_1}u + k_2 u, M_{k_1}u + k_2 u)_0 = \| M_{k_1}u \|_0^2 +$$

$$+ k_2 2\mathrm{Re}(M_{k_1}u, u)_0 + k_2^2 \| u \|_0^2 \geqslant \| M_{k_1}u \|_0^2 + k_2^2 \| u \|_0^2. \qquad (3.63)$$

Выбирая k_2 настолько большим, чтобы правая часть в (3.63) стала $\geqslant C_2 \| u \|_{2m}^2$ (см. (3.1)), придем к (3.62).

Для доказательства второго утверждения нужно повторить предыдущие выкладки. Поясним, что выполнение неравенства $\mathrm{Re}(M_{k_1}u, u)_0 \geqslant$ $\geqslant C_1 \| u \|_1^2 \geqslant 0$ $(u \in W_2^2(\text{гр}))$ при достаточно большом $k_1 \geqslant 0$ следует из сказанного на стр. 134, где такое неравенство установлено для сопряженных выражения и условий.

Третье утверждение легко установить, если проанализировать доказательства теорем 3.1 и 3.3 и приведенных только что двух рассуждений. Следствие доказано.

Из доказательства видно, что при дальнейшем увеличении k неравенство (3.62) сохраняется.

Теорема 3.4. *Пусть L — сильно эллиптическое выражение порядка $2m$ с обычными условиями гладкости коэффициентов, Γ предполагается класса C^{2m}. Рассматривается краевая задача с нулевыми граничными условиями:*

$$Lu = f \in L_2(G), \qquad D^\alpha u |_\Gamma = 0 \qquad (|\alpha| \leqslant m - 1). \qquad (3.64)$$

Утверждается, что при достаточно положительном коэффициенте при u в выражении L эта задача имеет $2m$-гладкое решение при любой $f \in L_2(G)$, т. е. найдется $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G)$ такое, что $Lu = f$. Более того, отображение $u \to Lu$ $(u \in W_2^{2m}(\text{гр}) = \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap$ $\cap W_2^{2m}(G)$, $Lu \in L_2(G))$ (т. е. 0-сильный оператор задачи) является гомеоморфизмом между $W_2^{2m}(\text{гр})$ и всем $L_2(G)$.

Рассмотрим выражение L второго порядка указанного вида с дополнительным требованием вещественности коэффициентов $p_j(x)$ в представлении (2.4) и для него задачу

$$Lu = f \in L_2(G), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \mu} + \sigma(x) u \right|_\Gamma = 0 \qquad (\sigma \in C^1(\Gamma)); \quad (3.65)$$

Г *класса* C^2. *Предыдущее утверждение справедливо и для задачи* (3.65).

Предварительно установим одну общую лемму.

Лемма 3.8. *Пусть E' и E'' — два полных банаховых пространства; A_0 и A_1 — линейные непрерывно действующие из E' в E'' операторы, причем A_0 осуществляет гомеоморфизм между E' и E''. Предположим, что существует семейство непрерывно действующих из E' в E'' операторов B_t, которые непрерывно (по норме операторов) зависят от $t \in [0,1]$, соединяют A_0 и A_1 (т. е. $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1$) и таковы, что*

$$\|B_t u\|_{E''} \geqslant \delta \|u\|_{E'} \qquad (u \in E') \tag{3.66}$$

с независящим от t $\delta > 0$. Тогда и A_1 осуществляет гомеоморфизм между E' и E''.

Доказательство. Благодаря равномерной непрерывности B_t по t найдем такое $\eta > 0$, что коль скоро $|t' - t''| < \eta$, то $\|B_{t'} - B_{t''}\| < \delta$. Покажем теперь, что если B_{t_0} — гомеоморфизм между E' и E'', то и B_t, $|t - t_0| < \eta$, будет гомеоморфизмом. Имеем $B_t = B_{t_0} - (B_{t_0} - B_t)$, откуда $B_{t_0}^{-1} B_t = E - B_{t_0}^{-1}(B_{t_0} - B_t)$. Норма оператора $B_{t_0}^{-1}$ согласно (3.66) $\leqslant \frac{1}{\delta}$, поэтому норма действующего в E' оператора $B_{t_0}^{-1}(B_{t_0} - B_t)$ будет $\leqslant \|B_{t_0}^{-1}\| \, \|B_{t_0} - B_t\| < \frac{1}{\delta} \cdot \delta = 1$. Следовательно, оператор в E' $B_{t_0}^{-1} B_t$ имеет непрерывный обратный $(B_{t_0}^{-1} B_t)^{-1}$, но тогда $(B_{t_0}^{-1} B_t)^{-1} B_{t_0}^{-1}$ будет непрерывным обратным к B_t. Существование B_t^{-1} и означает, что B_t осуществляет гомеоморфизм.

Завершение доказательства леммы очевидно: расположим на $[0,1]$ точки $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N = 1$ с меньшим чем η расстоянием между соседними. Так как $B_{t_0} = A_0$ — гомеоморфизм, то шаг за шагом B_{t_1}, $B_{t_2}, \ldots$ будут гомеоморфизмами. В результате получим, что и $A_1 = B_{t_N}$ гомеоморфизм.

Доказательство теоремы для задачи (3.64). Мы можем ограничиться случаем, когда G — шар $|x| < 1$ в n-мерном пространстве, так как, отображая G посредством $2m$ раз непрерывно дифференцируемого гомеоморфизма на такой шар, можно свести задачу к этому случаю (ср. стр. 138)*. Положим $E' = W_2^{2m}$ (гр) $= \mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G)$ (E' топологизировано метрикой $W_2^{2m}(G)$) и $E'' = L_2(G)$. Определим семейство дифференциальных выражений, полагая $L_t = tL + (1 - t)(-\Delta)^m + kE$, где $t \in [0, 1]$, $k \geqslant 0$; L_t сильно эллиптично. Отобра-

* Так можно доказать теорему лишь для областей G, допускающих подобное отображение. В общем случае нужно воспользоваться теоремой 4.6 на стр. 195 (доказательство последней использует теорему 3.4 только для рассмотренных G).

жение $u \to L_t u$ ($u \in E'$) порождает оператор B_t, непрерывно действующий из E' в E'' и непрерывно по норме зависящий от t. Согласно следствию на стр. 163—164 k можно подобрать столь большим, что для L_t будет выполняться (3.62), причем благодаря последнему утверждению следствия такой подбор можно осуществить одновременно для всех $t \in [0, 1]$. Так как $L_1 = L + kE$, $L_0 = (-\Delta)^m + kE$, то для доказательства теоремы с (выражением $L + kE$) достаточно убедиться, что $u \to ((-\Delta)^m + kE)u$ является гомеоморфизмом между $\mathring{W}_2^m(G) \cap \cap W_2^{2m}(G)$ и $L_2(G)$. Для этого осталось лишь установить плотность $((-\Delta)^m + kE)(\mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G))$ в $L_2(G)$; последняя же вытекает из хорошо известного обстоятельства, что в шаре задача $(-\Delta)^m u + + ku = f$, $D^\alpha u|_\Gamma = 0$ ($|\alpha| \leqslant m - 1$), имеет при $f \in C^1(G \cup \Gamma)$ решение из $C^{2m}(G \cup \Gamma)$. Итак, для нулевых условий теорема доказана.

Наметим доказательство в случае задачи (3.65). Как и раньше, сведем вопрос к области G, являющейся шаром $|x| < 1$, и введем дифференциальное выражение $L_t = tL + (1 - t)(-\Delta) + kE$; обозначим $\mu_t(x)$ орт отвечающей ему конормали ($\mu_0(x)$ — орт нормали). Теперь положение осложняется тем, что подпространства $W_2^2(\text{гр})_t$, состоящие из функций из $W_2^2(G)$, удовлетворяющих условию $\left.\frac{\partial u}{\partial \mu_t} + \sigma(x)u\right|_\Gamma = 0$, меняются при изменении $t \in [0,1]$, и поэтому непосредственно применять лемму 3.8 нельзя. Покажем, что можно определить линейный гомеоморфизм F_t пространства $W_2^2(G)$ самого на себя, переводящий $W_2^2(\text{гр})_0$ в $W_2^2(\text{гр})_t$ и непрерывно по норме операторов зависящий от $t \in [0,1]$. Согласно сказанному на стр. 138, дважды непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм $x' = \varphi(x)$ шара $|x| \leqslant 1$ на себя порождает гомеоморфизм $(T_\varphi u)(x) = u(\varphi(x))$ пространства $W_2^2(G)$ на себя. Выберем $\varphi = \varphi_t$ специальным образом. Будем требовать, чтобы это отображение оставляло неподвижными точки на сфере Γ ($|x| = 1$) и переводило каждый диаметр шара $|x| \leqslant 1$ в кривую, которая вблизи точек пересечения y, z этого диаметра с Γ идет по отрезкам прямых в направлении $\mu_t(y)$ и $\mu_t(z)$ соответственно, причем вблизи y $|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)| = |x - y|$ и аналогично вблизи z. Так как $\mu_t(x)$ ни при каком $x \in \Gamma$ не имеет тангенциального направления, то такое построение φ_t возможно. Ясно также, что $\varphi_t(x)$ можно всегда так продолжать с полоски у Γ (где ее поведение определяется векторами $\mu_t(x)$) внутрь шара, чтобы функции, описывающие это отображение, вместе со своими производными по x до второго порядка включительно непрерывно зависели от t. Это приводит к тому, что оператор в $W_2^2(G)$ T_{φ_t} непрерывно по норме зависит от $t \in [0,1]$. Положим $F_t = T_{\varphi_t}^{-1}$, этот оператор будет требуемым, так как, если $\left.\frac{\partial u}{\partial \mu_0} + \sigma(x) u\right|_\Gamma = 0$, то на Γ: $\frac{\partial F_t u}{\partial \mu_t} = \frac{\partial u(x)}{\partial \mu_0} = -\sigma(x) u(x) = -\sigma(x)(F_t u)(x)$.

Пусть теперь $E' = W_2^2(\text{гр})_0$, $E'' = L_2(G)$ и $B_t u = L_t F_t u$ $(u \in E',$ $B_t u \in E'')$. Операторы B_t непрерывно действуют из E' в E''. При $k \geqslant 0$ достаточно большом, как это вытекает из следствия на стр. 163—164, справедливо неравенство $\| (L_t + kE) v \|_0 \geqslant C \| v \|_2$ $(v \in W_2^2(\text{гр})_t$; $k \geqslant 0$ и $C > 0$ можно выбрать от t независящими), что вместе с обратимостью F_t дает оценку (3.66). Легко также проверить непрерывную по норме зависимость B_t от $t \in [0,1]$. Оператор B_0 осуществляет гомеоморфизм между $W_2^2(\text{гр})_0$ и $L_2(G)$, но тогда, согласно лемме 3.8, и $B_1 = (L + kE) F_1$ будет осуществлять такой гомеоморфизм. Иными словами, $u \to (L + kE) u$ является гомеоморфизмом между $W_2^2(\text{гр})$ и $L_2(G)$. Теорема доказана.

5. Задачи на собственные значения. Справедливо следующее существенное дополнение к теореме 2.3.

Теорема 3.5. *Пусть L — сильно эллиптическое выражение порядка $2m$ с обычными предположениями гладкости коэффициентов; Γ кусочно-гладкая. Рассмотрим задачу*

$$Lu - \lambda u = f \in L_2(G), \qquad u \in (\text{гр}), \tag{3.67}$$

где (гр) *имеет вид: а)* $\left. D^\alpha u \right|_\Gamma = 0$ $(|\alpha| \leqslant m - 1)$ *или б)* $\left.\frac{\partial u}{\partial \mu} + \sigma(x) u \right|_\Gamma = 0$ $(m = 1;\ \sigma \in C^1(\Gamma)$; *кроме того дополнительно требуется вещественность коэффициентов* $p_j(x)$ *в представлении* (2.4) *и принадлежность* Γ *класу* C^1*). Ниже* $W_2^{2m}(\text{гр})$ — *подпространство, отвечающее условию а) или б). Ясно, что для задачи* (3.67) *справедлива теорема 2.3.*

Утверждается, что если Γ класса C^{2m}, то решения и собственные функции, фигурирующие в теореме 2.3, входят не в $W_2^m(G)$, а в $W_2^{2m}(\text{гр})$ или $W_2^{2m}(\text{гр})^+$, т. е. являются гладкими. Если λ не является собственным числом задачи (3.67), то отображение $u \to (L - \lambda E) u$ — гомеоморфизм между $W_2^{2m}(\text{гр})$ и $L_2(G)$.

Сперва установим, что при предположениях теоремы справедлива такая лемма.

Лемма 3.9. *Рассмотрим оператор $\Lambda'(\text{гр})$ в $L_2(G)$, определяемый равенством $\Lambda'(\text{гр}) u = Lu$, $u \in \mathfrak{D}(\Lambda'(\text{гр})) = W_2^{2m}(\text{гр})$. Утверждается, что $(\Lambda'(\text{гр}))^*$ имеет вид: $(\Lambda'(\text{гр}))^* u = L^+ u$, $u \in \mathfrak{D}((\Lambda'(\text{гр}))^*) = W_2^{2m}(\text{гр})^+$. Иными словами, сопряженным к 0-сильному оператору задачи*

$Lu = f$, $u \in$ (гр), рассматриваемому как оператор в $L_2(G)$, является 0-сильный оператор сопряженной задачи.

Так как $(C - zE)^* = C^* - \bar{z}E$, то лемму достаточно установить для выражения $L + kE$ с достаточно большим $k \geqslant 0$. Сразу будем считать коэффициент при u настолько положительным, чтобы $u \to Lu$ $(v \to L^+v)$ являлось гомеоморфизмом между W_2^{2m} (гр) и $L_2(G)$ $(W_2^{2m}(\text{гр})^+$ и $L_2(G))$. Если $v \in W_2^{2m}(\text{гр})^+$, то $(\Lambda'(\text{гр})\,u, v)_0 = (Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0$ $(u \in \mathfrak{D}(\Lambda'(\text{гр})))$, где $L^+v \in L_2(G)$, т. е. $W_2^{2m}(\text{гр})^+ \subseteq \mathfrak{D}((\Lambda'(\text{гр}))^*)$ и $\Lambda'(\text{гр}))^* v = L^+v$. Наоборот, пусть $h \in L_2(G)$ таков, что $(\Lambda'(\text{гр})\,u, h)_0 = (u, h^*)_0$ $(u \in \mathfrak{D}(\Lambda'(\text{гр})))$ с некоторым $h^* \in L_2(G)$. Обозначим через $v \in W_2^{2m}(\text{гр})^+$ решение уравнения $L^+v = h^*$. Имеем

$$(Lu, h - v)_0 = (\Lambda'(\text{гр})\,u, h)_0 - (Lu, v)_0 = (u, h^*)_0 - (u, L^+v)_0 = 0$$
$$(u \in W_2^{2m}(\text{гр})).$$

Так как Lu пробегает все $L_2(G)$, то $h = v \in W_2^{2m}(\text{гр})^+$. Итак, $\mathfrak{D}((\Lambda'(\text{гр}))^*) = W_2^{2m}(\text{гр})^+$; лемма доказана.

Из леммы, в частности, следует, что $\Lambda'(\text{гр}) = \Lambda(\text{гр})$.

Доказательство теоремы. Предположим, что $k \geqslant 0$ достаточно большое, тогда оператор $(\Lambda(\text{гр}) + kE)^{-1}$ существует и непрерывно переводит $L_2(G)$ в W_2^{2m} (гр); в силу теорем вложения он является вполне непрерывным оператором из $L_2(G)$ в $L_2(G)$. Следовательно, к уравнению $\Lambda(\text{гр})u - \lambda u = f$ (т. е. $Lu - \lambda u = f \in L_2(G)$, $u \in W_2^{2m}$ (гр)) применима теория Фредгольма; уравнения для собственных функций будут иметь вид $Lu - \lambda u = 0$ $(u \in W_2^{2m}$ (гр)) и $L^+v - \lambda v = 0$ $(v \in W_2^{2m}$ (гр)$^+$). Итак, независимо от теорем 2.3 и 3.5, гл. II, мы доказали фредгольмовость задачи (3.67), рассматриваемой в терминах гладких решений и собственных функций. С другой стороны, каждое собственное значение в смысле упомянутых теорем будет собственным и в гладком смысле и подпространство соответствующих собственных функций совпадает с подпространством обобщенных собственных функций. Действительно, пусть, например, λ_0 — собственное значение в смысле теоремы 2.3 для задачи $L^+v - \lambda v = 0$, $v \in$ (гр)$^+$, $M(N)$ — соответствующее подпространство обобщенных (гладких) собственных функций. Очевидно, $N \subseteq M$. Если $N \subset M$, то задача $Lu - \bar{\lambda}_0 u = f$, $u \in$ (гр), в силу нормальной разрешимости имеет гладкие решения при большем запасе $f \in L_2(G)$, чем обобщенные, что абсурдно. Таким образом, $N = M$, а это и требовалось. Обратное включение спектров очевидно. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть λ не является точкой спектра для задачи (3.67), тогда оператор $R_\lambda = (\Lambda(\text{гр}) - \lambda E)^{-1}$ существует и непрерывно действует из $L_2(G)$ в $L_2(G)$. Для доказательства второго утверждения теоремы нужно показать, что R_λ непрерывно переводит $L_2(G)$ в W_2^{2m} (гр). Но это следует из тождества Гильберта $R_\lambda = R_{-k} + (\lambda + k) R_{-k} R_\lambda$, так как при $k \gg 0$ достаточно большом оператор R_{-k} будет таким. Теорема доказана.

Следствие. Рассмотрим задачу (3.64) с фиксированным L. Если диаметр области G достаточно мал, то результаты первой части теоремы 3.4 справедливы для этой задачи, т. е. 0 не является собственным числом задачи $Lu - \lambda u = f \in L_2(G)$, $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap$ $\cap W_2^{2m}(G)$. Это утверждение вытекает из теорем 2.1 и 3.5.

6. Роль гладкости границы. Покажем на примере, что *в случае кусочно-гладкой границы решение краевой задачи* (3.64) *с* $m = 1$ *может оказаться не принадлежащим* $W_2^2(G)$ (*в* $W_2^1(G)$ *оно существует обязательно — см.* § 2). Действительно, рассмотрим в плоскости круговой сектор $G \cup \Gamma$: $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varkappa\pi$ $(0 < \varkappa < 2$; ϱ и φ — полярные координаты — радиус-вектор и угол) и в нем задачу

$$-\Delta u = -u''_{\varrho\varrho} - \frac{1}{\varrho} u'_\varrho - \frac{1}{\varrho^2} u''_{\varphi\varphi} = \lambda u, \qquad u|_\Gamma = 0. \tag{3.68}$$

Принадлежность решения этой задачи к $W_2^2(G)$ эквивалентна неравенству

$$\int_0^{\varkappa\pi}\int_0^1 (|u''_{\varrho\varrho}|^2 + \ldots)\varrho\, d\varrho\, d\varphi < \infty, \tag{3.69}$$

где точками обозначены остальные производные по ϱ и φ порядка $\leqslant 2$. Разделяя переменные в (3.68), найдем, что нетривиальные решения существуют при собственных значениях $\lambda_\nu > 0$ $(\nu =$ $= 1, 2, \ldots)$ и равны

$$u_{\nu l}(\varrho, \varphi) = \sin\frac{l}{\varkappa}\varphi \cdot J_p(\varrho\sqrt{\lambda_\nu}) \quad \left(p = \frac{l}{\varkappa};\ l = 1, 2, \ldots\right), \tag{3.70}$$

где J_p — функция Бесселя. Значения $\lambda_\nu > 0$ находятся из требования $J_p(\sqrt{\lambda_\nu}) = 0$. Как хорошо известно, функция $J_p(t)$ вблизи $t = 0$ имеет характер t^p, поэтому решение (3.70) не удовлетворяет (3.69), если $p = \dfrac{l}{\varkappa} < 1$. Таким образом, если раствор $\varkappa > 1$, то решения (3.70) при $l = 1$ не входят в $W_2^2(G)$. Пусть u_1 — одно из таких решений, λ_1 — соответствующее значение параметра λ; при произвольном $k \geqslant 0$ решение задачи $-\Delta u + ku = f$ $(u|_\Gamma = 0)$ с $f = (\lambda_1 + k) u_1 \in$ $\in L_2(G)$ равно u_1 и не входит в $W_2^2(G)$. Требуемый пример построен.

7. Теорема о гомеоморфизмах. Докажем важное утверждение, показывающее, грубо говоря, что переход $u \to Lu$ в случае эллиптического L понижает гладкость u ровно на порядок выражения L. Мы сейчас ограничимся сильно эллиптическими L и нулевыми граничными условиями, так как в этом случае нами уже детально исследована в п. 4 краевая задача. Соответствующие результаты для общих эллиптических L и (гр) будут изложены в п. 10, § 6.

Теорема 3.6. *Рассмотрим сильно эллиптическое выражение L порядка $2m$ и задачу $Lu - \lambda u = f \in L_2(G)$, $u \in$ (гр): $D^\alpha u|_\Gamma = 0$ ($|\alpha| \leqslant m-1$); предполагается, что 0 не является ее собственным числом. Пусть Λ_0(гр) — 0-сильный оператор, построенный по L и (гр), т. е. оператор, действующий по закону $u \to Lu$ из $\mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G) = W_2^{2m}$(гр) в $L_2(G)$. Будем считать этот оператор (или его естественное сужение) действующим в одной из следующих пар пространств:*

$$
\begin{aligned}
&1)\ \mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^{2m+s}(G) \to W_2^s(G) && (0 \leqslant s),\\
&2)\ \mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^{2m+s}(G) \to \mathring{W}_2^s(G) && (-m \leqslant s \leqslant 0),\\
&3)\ \mathring{W}_2^{2m+s}(G) \to W_2'^s(G) && (-2m \leqslant s \leqslant -m),\\
&4)\ W_2^{2m+s}(G) \to W_2'^s(G) && (s \leqslant -2m).
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

Здесь $\mathring{W}_2^{-p}(G)$, $W_2'^{-p}(G)$ при $p > 0$ — негативные пространства, построенные по нулевому $L_2(G)$ и позитивным $\mathring{W}_2^p(G)$, $W_2'^p(G) = \mathring{W}_2^m(G) \cap W_2^p(G)$ (всюду пересечения с $W_2^p(G)$, $p \geqslant m$, понимаются как подпространства $W_2^p(G)$).

Утверждается, что замыкание по непрерывности оператора Λ_0(гр), рассматриваемого в некоторой паре (3.71), существует и является гомеоморфизмом между пространствами этой пары (для 1-й пары само сужение Λ_0(гр), т. е. s-сильный оператор Λ_s(гр), служит таким гомеоморфизмом). При этом делаются следующие предположения гладкости: для 1-й и 2-й пар $a_\alpha(x) \in C^{\max(|\alpha|, |s|)}(G \cup \Gamma)$, граница Γ класса $C^{2m+|s|}$, для 3-й и 4-й — $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+|2m+s|}(G \cup \Gamma)$, Γ класса $C^{2m+|2m+s|}$.*

---

* В случае $s = -m$ утверждение, по существу, уже доказано — оно легко следует из теоремы 2.1; ограничения гладкости в этом случае более слабые — такие, как в теореме 2.1.

Из формулировки теоремы видно, что при изменении s от $+\infty$ до $-\infty$ происходит потеря граничных условий у функции u, вместе с тем оператор типа $u \to Lu$ продолжает осуществлять гомеоморфизм. На первый взгляд подобная ситуация противоречива: например, при $s = -2m$ замыкание оператора Λ_0 (гр) переводит гомеоморфно все $L_2(G)$ во все $W_2'^{-2m}(G)$ и неясно, куда переходят функции $u_0 \in W_2^{2m}(G)$ такие, что $Lu_0 = 0$. Дело здесь объясняется тем, что пространства образов могут содержать обобщенные функции, сосредоточенные на Г. Именно в такие функции переходят u_0.

Перейдем к доказательству теоремы. Оно основывается на теоремах 3.1, 3.2 и 3.5. Всюду ниже при $s \leqslant 0$ положено $\sigma = -s \geqslant 0$. Установим прежде всего следующие леммы.

Лемма 3.10. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.6. Тогда справедливы оценки*

$$\| Lu \|_s \geqslant C_s \| u \|_{2m+s} (C_s > 0; \quad u \in W_2'^{2m+s}(G); \quad s = 0, 1, \ldots), \tag{3.72}$$

$$\| Lu \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)} \geqslant C \| u \|_{2m-\sigma}$$

$$(C > 0; \quad u \in W_2'^{2m}(G) = W_2^{2m}(\text{гр}); \quad \sigma = 0, \ldots, m). \tag{3.73}$$

Доказательство. Пусть (3.72) несправедливо, тогда для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдется такое $u_n \in W_2'^{2m+s}(G)$, что $\|Lu_n\|_s < \frac{1}{n} \| u_n \|_{2m+s}$. Нормируя u_n, можем считать, что $\| u_n \|_{2m+s} = 1$ ($n = 1, 2, \ldots$). Так как оператор вложения $W_2^{2m+s}(G) \to L_2(G)$ вполне непрерывен, то из последовательности u_n можно выбрать подпоследовательность $u_{n'}$ такую, что $u_{n'} \to \varphi$ в $L_2(G)$, где φ — некоторая функция из $L_2(G)$. Вместе с тем благодаря неравенству (3.1) и соотношению $\|Lu_{n'}\|_s < \frac{1}{n'} \to 0$ имеем при n', $m' \to \infty$

$$\| u_{n'} - u_{m'} \|_{2m+s}^2 \leqslant \frac{1}{C} \left(\| Lu_{n'} - Lu_{m'} \|_s^2 + k \| u_{n'} - u_{m'} \|_0^2 \right) \to 0.$$

Таким образом, $u_{n'}$ фундаментальна в $W_2^{2m+s}(G)$, поэтому $\varphi \in W_2^{2m+s}(G)$ и в смысле этого пространства $u_{n'} \to \varphi$. Так как $u_{n'} \in W_2'^{2m+s}(G)$, а это множество замкнуто в $W_2^{2m+s}(G)$, то $\varphi \in W_2'^{2m+s}(G)$; кроме того, $\| \varphi \|_{2m+s} = 1$. Далее, в смысле сходимости в $W_2^s(G)$ $L\varphi = \lim Lu_{n'} = 0$, $\varphi \in W_2'^{2m+s}(G) \subset W_2^{2m}(\text{гр})$, $\varphi \neq 0$. Иными словами, φ является гладкой собственной функцией задачи $Lu - \lambda u = 0$, $u \in$ (гр), отвечающей нулевому собственному значению, а это противоречит предположению леммы. Оценка (3.72) доказана.

Докажем неравенство (3.73). Повторяя предыдущие рассуждения и пользуясь оценкой (3.39) вместо (3.1), найдем последовательность $u_{n'} \in W_2^{2m}(\text{гр})$, $\|u_{n'}\|_{2m-\sigma} = 1$, сходящуюся в смысле метрики $W_2^{2m-\sigma}(G)$ к функции $\varphi \in W_2^{2m-\sigma}(G), \varphi \neq 0$; при этом $\| Lu_{n'} \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)} < \frac{1}{n'} \to 0$. Так как $u_{n'} \in W_2^{2m}(\text{гр}) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^m(G)$ и сходимость в $W_2^{2m-\sigma}(G)$ влечет сходимость в $W_2^m(G)$, то и $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G)$. Далее, для любого $v \in W_2^{2m}(\text{гр})^+ = W_2^{2m}(\text{гр})$ имеем: $(\varphi, L^+v)_0 = \lim (u_{n'}, L^+v)_0 = \lim (Lu_{n'}, v)_0$. Но $W_2^{2m}(\text{гр}) = \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m}(G) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^{\sigma}(G)$, поэтому $|(Lu_{n'}, v)_0| \leqslant \| Lu_{n'}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-\sigma}(G)} \| v \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{\sigma}(G)} < \frac{1}{n'} \| v \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{\sigma}(G)} \to 0$. Таким образом, $(\varphi, L^+v)_0 = 0 \; (v \in W_2^{2m}(\text{гр})^+)$, причем $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G), \varphi \neq 0$. Это показывает, что φ является обобщенной (в смысле определения на стр. 114) собственной функцией рассматриваемой задачи. Согласно теореме 3.5 $\varphi \in W_2^{2m}$ (гр), т. е. φ — гладкая собственная функция, а это абсурдно. Неравенство (3.73), а значит и лемма установлены.

Лемма 3.11. *Пусть выполнены условия теоремы 3.6. Существует такое $k \geqslant 0$, что при любом $t \in [0,1]$ имеет место неравенство*

$$\|(tL + (1-t)(-\Delta)^m + kE) u \|_s \geqslant C_s \| u \|_{2m+s} \tag{3.74}$$

$$(C_s > 0; \;\; u \in W_2'^{2m+s}(G); \;\; s = 0, 1, \ldots).$$

Доказательство. Соотношение (3.74) при $s = 0$ справедливо — это вытекает из следствия на стр. 163—164 и сказанного на стр. 166.

Зафиксируем $s > 0$. Так как в (3.1) зависимость k и C от коэффициентов выражения L такая же, как указанная в упомянутом следствии, то существуют $k \geqslant 0$ и $C > 0$ такие, что при любом $t \in [0,1]$

$$\|(tL + (1-t)(-\Delta)^m + kE) u \|_s^2 + k \| u \|_0^2 \geqslant C \| u \|_{2m+s}^2$$

$$(u \in W_2'^{2m+s}(G)).$$

Предположим теперь, что (3.74) не имеет места. Тогда для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдутся такие $u_n \in W_2'^{2m+s}(G)$, $\| u_n \|_{2m+s} = 1$ и $t_n \in [0, 1]$, что $\| (t_nL + (1-t_n)(-\Delta)^m + kE) u_n \|_s < \frac{1}{n} \; (n = 1, 2, \ldots)$.

Благодаря полной непрерывности оператора вложения $W_2^{2m+s}(G) \to$ $\to L_2(G)$ и компактности $[0, 1]$ можно выбрать подпоследовательности $u_{n'}$ и $t_{n'}$ такими, чтобы в $L_2(G)$ $u_{n'} \to \varphi$ и $t_{n'} \to \tau$. Учитывая, что $u_{n'} - u_{m'} \in W_2^{\prime 2m+s}(G)$, получим

$$\|(t_{n'}L - (1 - t_{n'})(-\Delta)^m + kE)\,u_{n'} - (t_{m'}L - (1 - t_{m'})(-\Delta)^m + kE)\,u_{m'}\|_s + \|(t_{m'} - t_{n'})(L + (-\Delta)^m)\,u_{m'}\|_s \geqslant$$
$$\geqslant \|(t_{n'}L - (1 - t_{n'})(-\Delta)^m + kE)(u_{n'} - u_{m'})\|_s \geqslant$$
$$\geqslant (C\,\|u_{n'} - u_{m'}\|^2_{2m+s} - k\,\|u_{n'} - u_{m'}\|^2_0)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.75)$$

Левая часть (3.75) при n', $m' \to \infty$ стремится к нулю: для первого слагаемого это вытекает непосредственно из построения u_n, для второго—из оценки $\|(t_{m'} - t_{n'})(L + (-\Delta)^m)u_m\|_s \leqslant C_1\,|t_{m'} - t_{n'}|\,\|u_{m'}\|_{2m+s} =$ $= C_1\,|t_{m'} - t_{n'}| \to 0$. Поэтому к нулю стремится и правая часть (3.75). Но $\|u_{n'} - u_{m'}\|_0 \to 0$, следовательно и $\|u_{n'} - u_{m'}\|_{2m+s} \to 0$. Итак, $u_{n'}$ фундаментальна в $W_2^{2m+s}(G)$, поэтому $\varphi \in W_2^{\prime 2m+s}(G)$, $\|\varphi\|_{2m+s} = 1$ и $u_{n'} \to \varphi$ в $W_2^{2m+s}(G)$. Благодаря этой сходимости и сходимости $t_{n'} \to \tau$ имеем в $W_2^s(G)$:

$$(t_{n'}L + (1 - t_{n'})(-\Delta)^m + kE)\,u_{n'} \to (\tau L + (1 - \tau)(-\Delta)^m + kE)\,\varphi.$$

С другой стороны, левая часть этого соотношения стремится к 0, поэтому $(\tau L + (1 - \tau)(-\Delta)^m + kE)\,\varphi = 0$, что противоречит (3.74) при $s = 0$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Будем его проводить по этапам.

1) Покажем, что s-сильный оператор Λ_s(гр) является гомеоморфизмом между пространствами 1-й пары. Благодаря неравенству (3.72) и очевидному противоположному неравенству достаточно убедиться, что $\mathfrak{R}(\Lambda_s(\text{гр})) = W_2^s(G)$.

Прежде всего покажем, что область значений оператора $u \to$ $\to (L + kE)\,u$ $(u \in W_2^{\prime 2m+s}(G))$ заполняет все $W_2^s(G)$; здесь k выбрано согласно лемме 3.11.

Доказательство осуществляется при помощи рассуждений, подобных приведенным на стр. 165—166: достаточно рассмотреть случай, когда G совпадает с шаром $|x| < 1$. Затем используется лемма 3.8, где под оператором B_t понимается отображение $u \to (tL + (1 - t)(-\Delta)^m +$ $+ kE)\,u$ пространства $E' = W_2^{\prime 2m+s}(G)$ в пространство $E'' = W_2^s(G)$. Так как хорошо известно, что в шаре задача $(-\Delta)^m u + ku = f$,

$D^\alpha u|_\Gamma = 0$ ($|\alpha| \leqslant m-1$) имеет при достаточно гладких f достаточно гладкие решения, то $\mathfrak{R}(B_0)$ плотно в E'', а значит в силу (3.74) $\mathfrak{R}(B_0) = E''$ и эта лемма применима.

Обозначим A оператор в $W_2^s(G)$, действующий по закону $u \to (L + kE)u$, $\mathfrak{D}(A) = W_2'^{2m+s}(G)$ неплотна (при $s \geqslant 1$) в $W_2^s(G)$, $\mathfrak{R}(A) = W_2^s(G)$. Оператор A^{-1} в силу теорем вложения вполне непрерывен, поэтому $(A^{-1} - \lambda E)^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $\lambda \neq 0$ и отлично от собственного числа оператора A^{-1}. Пусть $(A^{-1} - \lambda E)^{-1}$ существует, тогда существует и $\left(A - \frac{1}{\lambda}E\right)^{-1}$ (легко проверить, что он равен $-\lambda A^{-1}(A^{-1} - \lambda E)^{-1}$), поэтому $\mathfrak{R}\left(A - \frac{1}{\lambda}E\right) = W_2^s(G)$. Так как $\left(A - \frac{1}{\lambda}E\right)u = Lu = \Lambda_s(\text{гр})\,u$ при $\lambda = \frac{1}{k}$, то $\mathfrak{R}(\Lambda_s(\text{гр})) = W_2^s(G)$, если только показать, что это значение λ не является собственным для A^{-1}. Пусть $\varphi \in W_2^s(G)$ ($\varphi \neq 0$) таково, что $A^{-1}\varphi = \frac{1}{k}\varphi$. Тогда $\varphi \in W_2'^{2m+s}(G)$ и мы получаем $\varphi = \frac{1}{k}A\varphi$, т. е. $0 = (A - kE)\varphi = L\varphi$, а это противоречит условию теоремы. Итак, $\mathfrak{R}(\Lambda_s(\text{гр})) = W_2^s(G)$ и 1) доказано.

2) Докажем теорему в случае 4-й пары пространств, считая пока $a_\alpha(x)$ достаточно гладкими. Справедлива оценка

$$C_1\|u\|_{2m-\sigma} \leqslant \|Lu\|_{W_2'^{-\sigma}(G)} \leqslant C_2\|u\|_{2m-\sigma} \tag{3.76}$$
$$(C_1, C_2 > 0;\ u \in W_2'^{2m}(G) = W_2^{2m}(\text{гр})).$$

Установим левое неравенство. Для этого заметим, что результат пункта 1) можно применить к выражению L^+, так как для последнего все условия теоремы выполнены (то, что 0 не является собственным значением, вытекает из фредгольмовости задачи, см. теорему 3.5, гл. II). Таким образом отображение $v \to L^+v$ является гомеоморфизмом между $W_2'^{2m+t}(G)$ и $W_2^t(G)$, где $t = -2m + \sigma \geqslant 0$. Так как $(\text{гр})^+ = (\text{гр})$, то при $u \in W_2'^{2m}(G)$, $v \in W_2'^{\sigma}(G) = W_2'^{2m+t}(G)$

$$|(u, L^+v)_0| = |(Lu, v)_0| \leqslant \|Lu\|_{W_2'^{-\sigma}(G)}\|v\|_{2m+t} \leqslant$$
$$\leqslant C_3\|Lu\|_{W_2'^{-\sigma}(G)}\|L^+v\|_t. \tag{3.77}$$

При изменении v по $W_2'^{\sigma}(G) = W_2'^{2m+t}(G)$ L^+v пробегает все $W_2^t(G)$, поэтому из (3.77) вытекает требуемая оценка $\|u\|_{2m-\sigma} \leqslant C_3\|Lu\|_{W_2'^{-\sigma}(G)}$.

Докажем правое неравенство в (3.76). Пусть по-прежнему $u \in W_2'^{2m}(G), v \in W_2'^{\sigma}(G) = W_2'^{2m+t}(G)$, имеем: $|(Lu,v)_0| = |(u, L^+v)_0| \leqslant \leqslant \|u\|_{-t} \|L^+v\|_t \leqslant C_2 \|u\|_{-t} \|v\|_{2m+t}$. Так как здесь v пробегает все $W_2'^{\sigma}(G)$, то $\|Lu\|_{W_2'^{-\sigma}(G)} \leqslant C_2 \|u\|_{-t}$, что и требовалось.

Рассмотрим оператор Λ_0(гр) как действующий из пространства $W_2^{2m-\sigma}(G)$ в $W_2'^{-\sigma}(G)$; $\mathfrak{D}(\Lambda_0(\text{гр})) = W_2'^{2m}(G)$ плотно в $L_2(G)$ и тем более — в $W_2^{2m-\sigma}(G)\,(2m-\sigma \leqslant 0)$, $\mathfrak{R}(\Lambda_0(\text{гр})) = L_2(G)$ плотно в $W_2'^{-\sigma}(G)$. Благодаря неравенству (3.76) этот оператор можно замкнуть, замыкание, очевидно, будет гомеоморфизмом между $W_2^{2m-\sigma}(G)$ и $W_2'^{-\sigma}(G)$.

Поясним требования на гладкость a_α, налагаемые в теореме. Легко видеть, что если на коэффициенты b_α выражения L^+ накладываются ограничения гладкости типа $b_\alpha \in C^{\max(|\alpha|,p)}(G)\,(p \geqslant 0)$, то для их выполнения наиболее естественно требовать соотношения $a_\alpha \in C^{|\alpha|+p}(G)$. Выше мы использовали тот факт, что $v \to L^+v$ — гомеоморфизм между $W_2'^{2m+t}(G)$ и $W_2^t(G)$. Согласно 1) требования на гладкость: $b_\alpha \in C^{\max(|\alpha|,t)}(G)$, и поэтому $a_\alpha \in C^{|\alpha|+t}(G), t = -2m + +\sigma = |2m+s|$.

3) Докажем теорему для 2-й пары пространств. Сейчас также имеет место оценка (3.76) с заменой $\|\cdot\|_{W_2'^{-\sigma}(G)}$ на $\|\cdot\|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G)}$. Действительно, левое неравенство уже установлено — см. (3.73), а правое неравенство следует из леммы 3.6.

Теперь доказательство заканчивается, как и в пункте 2): рассмотрим оператор Λ_0(гр) как оператор из пространства $W_2'^{2m-\sigma}(G)$ в пространство $\mathring{W}_2^{-\sigma}(G)$; очевидно, $\mathfrak{D}(\Lambda_0(\text{гр})) = W_2'^{2m}(G)$ плотно в $W_2'^{2m-\sigma}(G)$, $\mathfrak{R}(\Lambda_0(\text{гр})) = L_2(G)$ плотно в $\mathring{W}_2^{-\sigma}(G)$. Переходя к замыканию и пользуясь аналогом (3.76), получим требуемое утверждение.

4) Докажем теорему в случае 3-й пары пространств; для этого сперва установим оценку (3.76) с $\sigma = m, \ldots, 2m$. Применим результат пункта 3) к выражению L^+, что, очевидно, возможно. Получим, что оператор $v \to L^+v\,(v \in W_2'^{2m}(G))$ после замыкания является гомеоморфизмом между пространствами $W_2'^{2m+t}(G)$ и $\mathring{W}_2^t(G)$, где $t = -2m + \sigma = -m, \ldots, 0$. Если $u, v \in W_2'^{2m}(G)$, то так как $W_2'^{2m}(G) \subseteq \subseteq W_2'^{\sigma}(G)$

$$|(u, L^+v)_0| = |(Lu, v)_0| \leqslant \|Lu\|_{W_2'^{-\sigma}(G)} \|v\|_\sigma \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \|Lu\|_{W_2'^{-\sigma}(G)} \|L^+v\|_{\mathring{W}_2^t(G)}. \qquad (3.78)$$

Функции L^+v плотны в $\mathring{W}_2^t(G)$, а $u \in W_2'^{2m}(G) \subset \mathring{W}_2^m(G) \subseteq \mathring{W}_2^{-t}(G)$. Поэтому из (3.78) заключаем, что $\|u\|_{-t} \leqslant C_3 \|Lu\|_{W_2'^{-\sigma}(G)}$, т. е. мы пришли к левому неравенству в (3.76) Для получения правого неравенства имеем

$$|(Lu, v)_0| = |(u, L^+v)_0| \leqslant \|u\|_{-t} \|L^+v\|_{\mathring{W}_2^t(G)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \|u\|_{-t} \|v\|_{2m+t} = C_2 \|u\|_{2m-\sigma} \|v\|_\sigma \tag{3.79}$$
$$(u, v \in W_2'^{2m}(G),\ W_2'^{2m}(G) \subset \mathring{W}_2^{-t}(G)).$$

Благодаря плотности $v \in W_2'^{2m}(G)$ в $W_2'^{\sigma}$ из (3.79) следует оценка $\|Lu\|_{W_2'^{-\sigma}(G)} \leqslant C_2 \|u\|_{2m-\sigma}$. Неравенство (3.76) установлено.

Из плотности $\mathfrak{D}(\Lambda_0(\text{гр})) = W_2'^{2m}(G)$ в $\mathring{W}_2^{2m-\sigma}(G)$ и $\mathfrak{R}(\Lambda_0(\text{гр})) = L_2(G)$ в $W_2'^{-\sigma}(G)$ и (3.76) вытекает гомеоморфизм замыкания $\Lambda_0(\text{гр})$. Подсчет гладкости коэффициентов в рассматриваемом случае такой же, как и в 2).

Теорема доказана.

Следствие. Для произвольного сильно эллиптического выражения L с указанными в теореме 3.6 условиями гладкости коэффициентов справедлива теорема 3.6, если только диаметр области G достаточно мал. Этот результат вытекает из следствия на стр. 169.

Как уже говорилось, теорема, подобная доказанной, верна и при других граничных условиях — об этом будет идти речь в § 6. Мы лишь отметим, что для сильно эллиптического выражения L второго порядка с обычными условиями гладкости коэффициентов и граничного условия (гр): $\frac{\partial u}{\partial \mu} + \sigma(x)u|_\Gamma = 0$ $(\sigma \in C^1(\Gamma))$ в случае, если 0 не является собственным значением, ранее были установлены следующие гомеоморфизмы:

1) Оператор $\Lambda_0(\text{гр})$, т. е. оператор $u \to Lu$, $u \in W_2^2(\text{гр})$, $Lu \in L_2(G)$, является гомеоморфизмом между $W_2^2(\text{гр})$ и $L_2(G)$; Γ — класса C^2 (теорема 3.5).

2) Оператор $\Lambda_0(\text{гр})$, рассматриваемый как оператор из $W_2^1(G)$ в $W_2^{-1}(G)$, после замыкания становится гомеоморфизмом между этими пространствами; Γ — класса C^1. Этот результат при достаточно положительном коэффициенте в L у u следует из теоремы 3.4, гл. II; эту теорему можно применять благодаря справедливости неравенства $\operatorname{Re}\ (Lu, u)_0 \geqslant C \|u\|_1^2$ $(u \in W_2^2(\text{гр}))$ (см. стр. 134). Следует также

учесть, что теперь $W_2'^m(G) = W_2^1(G)$ (см. стр. 133). Переход к произвольному случаю, когда 0 — не собственное число, осуществляется при помощи теоремы 2.3 подобно сказанному на стр. 174.

Наконец заметим, что из 1) можно было бы получить гомеоморфизм для сопряженных пространств — подобно случаям 3) и 4) в теореме 3.6.

§ 4. Гладкость решений эллиптических уравнений

В этом параграфе мы докажем одно из основных свойств эллиптических уравнений: каждое обобщенное решение такого уравнения является в достаточной степени гладкой функцией. Более того, можно показать, что в случае аналитических коэффициентов это решение будет даже аналитическим. однако на подобных вопросах мы останавливаться не будем. При исследовании гладкости вплоть до границы мы пока ограничимся сильно эллиптическими уравнениями и нулевыми граничными условиями, так как только для такого случая у нас разработана в достаточной степени техника краевых задач. Общий случай будет рассмотрен в п. 12, § 6. Заметим еще, что во всем параграфе мы не снижаем до минимума запас гладкости коэффициентов, необходимый для справедливости тех или иных утверждений.

1. **Фундаментальные решения.** Пусть L — произвольное дифференциальное выражение вида (1.2), гл. II, с достаточно гладкими коэффициентами. Фундаментальным решением с особенностью в точке $\xi \in G$ для L называется решение $e_\xi \in W_2^{-\sigma}(G)$ уравнения

$$Lu = \delta_\xi \tag{4.1}$$

внутри G (δ_ξ — δ-функция, сосредоточенная в ξ; понятие решения внутри G см. на стр. 109—110). Так как $\delta_\xi \in W_2^{-l}(G)$ при $l > \frac{n}{2}$, то σ должно быть таким, чтобы $r + \sigma > \frac{n}{2}$. Фундаментальное решение определяется неоднозначно. Подобно теореме 3.3, гл. II, легко доказывается, что, если справедливо энергетическое неравенство

$$\| L^+ v \|_\sigma \geqslant C \| v \|_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \qquad (C > 0;\, v \in C_0^\infty(G)), \tag{4.2}$$

то уравнение $Lu = f \in W_2^{-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}(G)$ всегда разрешимо внутри G. В частности, у такого L существует e_ξ.

Согласно теореме 1.2 для эллиптического выражения неравенство (4.2) выполняется, если диаметр G достаточно мал, причем можно положить $\sigma = \max\left([\frac{n}{2}] + 1 - r,\ 0\right)$. Таким образом для эллиптического выражения порядка r с гладкими коэффициентами в достаточно малой области всегда существует фундаментальное решение $e_\xi \in W_2^{-\max\left([\frac{n}{2}]+1-r,0\right)}(G)$. В действительности для таких выражений справедлив более глубокий результат. Оказывается, что e_ξ вне ξ является обычной функцией, имеющей степенную особенность при приближении к ξ. Доказательство этого классического факта трудоемко, и мы ограничимся лишь формулировкой.

Итак, предположим, что у эллиптического выражения L в открытой, вообще говоря, неограниченной области G коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+p}(G)$, где $p \geqslant 1$* (под эллиптичностью в открытой G понимается неравенство нулю формы (1.3) при $x \in G$). При $x \neq \xi$ в некоторой окрестности $W \subseteq G \times G$ ограниченной части диагонали $x = \xi$ существует функция $e(x, \xi)$ — фундаментальное решение в классическом смысле, r раз непрерывно дифференцируемая по каждому из переменных x, ξ при фиксированном другом и обладающая следующими свойствами:

1) Если $v \in C_0^r(V)$, где V такая окрестность, что $V \times V \subseteq W$, то

$$\int\limits_V e(x, \xi)(L^{\oplus} v)(x)\,dx = v(\xi), \quad \int\limits_V e(x, \xi)(Lv)(\xi)\,d\xi = v(x)$$

$$(\xi, x \in V;\ L^{\oplus} = \overline{L^{+}}). \tag{4.3}$$

2) При $x \neq \xi$ существуют и непрерывны относительно $(x, \xi) \in W$ производные $D_x^\alpha D_\xi^\beta e(x, \xi)$ $(|\alpha|, |\beta| \leqslant p)$. Каждая такая производная имеет вид $\dfrac{A(x, \xi)}{|x - \xi|^{n-r+|\alpha|+|\beta|}}$ (при $n - r + |\alpha| + |\beta| > 0$) или $A(x, \xi) \log|x - \xi|$ (при $n - r + |\alpha| + |\beta| = 0$), где $A(x, \xi)$ ограничена. При $n - r + |\alpha| + |\beta| < 0$ производная сама ограничена.

3) Если $f \in C^q(\bar{V})$ $(\bar{V} \times \bar{V} \subset W)$, причем $q \geqslant 1$ и $p \geqslant r + q$, то

$$u(x) = \int\limits_V e(x, \xi) f(\xi)\,d\xi \in C^{q+r-1}(\bar{V}),$$

$$v(\xi) = \int\limits_V e(x, \xi) f(x)\,dx \in C^{q+r-1}(\bar{V});$$

* Если $r = 1$, то нужно дополнительно требовать, чтобы $a_\alpha(x) \in C^{2+p}(G)$ при $|\alpha| = 1$. Выражения первого порядка могут быть эллиптичны лишь в случае невещественных коэффициентов и $n = 2$. Всюду в дальнейшем не будет оговариваться эта дополнительная гладкость для редко встречающегося случая выражений первого порядка.

$$Lu = f, \quad L^{\oplus}v = f. \tag{4.4}$$

Свяжем это классическое фундаментальное решение $e(x, \xi)$ с общим определением e_ξ. По $e(x, \xi)\,(x, \xi \in V;\ V \times V \subseteq W)$ определим функционалы e_ξ и $e_x^{\oplus}$ над $W_2^\sigma(V)\left(\sigma = \max\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1 - r, 0\right)\right)$, полагая

$$(e_\xi, u)_0 = \int\limits_V e(x, \xi)\,\overline{u(x)}\,dx, \quad (e_x^{\oplus}, u)_0 = \int\limits_V e(x, \xi)\,\overline{u(\xi)}\,d\xi \tag{4.5}$$

(ниже будет показано, что определенные посредством (4.5) функционалы непрерывны на $W_2^\sigma(V)$). Тогда из (4.3) следуют равенства $(e_\xi, L^+v)_0 = (\delta_\xi, v)_0, (e_x^{\oplus}, \bar{L}v)_0 = (\delta_x, v)_0\,(v \in C_0^\infty(V))$, т. е. e_ξ и $e_x^{\oplus}$ являются решениями внутри V соответственно уравнений

$$Lu = \delta_\xi, \quad L^{\oplus}u = \delta_x. \tag{4.6}$$

Иными словами, e_ξ и $e_x^{\oplus}$ — фундаментальные решения в $G = V$ для выражений L и $L^{\oplus}$. Заметим, что соотношения (4.4) формально следуют из (4.6); отсюда же и из гладкости $e(x, \xi)$ по каждой из переменных вытекает:

$$L_x[e(x, \xi)] = 0, \; L_\xi^{\oplus}[e(x, \xi)] = 0 \qquad ((x, \xi) \in W, x \neq \xi). \tag{4.7}$$

Покажем, что выражения (4.5) действительно определяют непрерывные функционалы над $W_2^\sigma(V)$. Это вытекает из следующего общего факта: формула

$$l(u) = l_\xi(u) = \int\limits_G \frac{B(x)}{|x - \xi|^{n-q}}\,\overline{u(x)}\,dx$$

(G ограничена, $\xi \in G, q > 0, |B(x)| \leqslant C\,(x \in G)$) определяет линейный непрерывный функционал над $W_2^k(G)$, если $k \geqslant \max\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1 - q, 0\right)$. В самом деле, пусть $q < n$ (в случае $q \geqslant n$ утверждение очевидно). Из неравенства Гельдера следует, что $l(u)$ является непрерывным функционалом над $L_{p'}(G)$, если p таково, что по x $\dfrac{1}{|x - \xi|^{p(n-q)}} \in L_1(G)\ \left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1\right)$, т. е. когда $p < \dfrac{n}{n-q}$ или $p' > \dfrac{n}{q}$. Согласно теоремам вложения $\|u\|_{L_{p'}(G)} \leqslant C_1 \|u\|_{W_2^k(G)}\ \left(k \geqslant 0,\ p' < \dfrac{2n}{n-2k}\right)$; если эта оценка для норм будет выполнена, то $l(u)$ является непрерывным функционалом и над $W_2^k(G)$. Пусть $\dfrac{n}{q} < \dfrac{2n}{n-2k}$, тогда между этими двумя числами можно вставить p' и закончить доказательство; последнее же неравенство эквивалентно оценке $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1 - q$. Утверждение доказано.

Заметим, что норма функционала l_ξ (а значит и $\|e_\xi\|_{-\sigma}, \|e_x^\pm\|_{-\sigma}$) оценивается равномерно по $\xi \in G$ (или $\xi, x \in V$).

2. Гладкость внутри области. Обобщенные решения типа Л. Шварца. Мы сейчас при помощи фундаментального решения установим теорему о гладкости обобщенных решений эллиптического уравнения $Lu = f$. Ввиду важности вопроса будут приведены два изложения — для решений типа Л. Шварца и для решений из пространств с негативной нормой; в п. 5 дан другой подход к установлению гладкости. Отметим, что получаемые ниже результаты носят локальный характер: гладкость решения вблизи некоторой точки зависит от гладкости коэффициентов уравнения вблизи этой точки.

Продолжения функций с части G на все G мы не будем оговаривать, если они ясны из контекста; финитные функции на части G всегда продолжаются нулем на все G.

Рассмотрим область $G \subseteq E_n$ (которая может быть и неограниченной), $g(x)$ и $f(x)$ $(x \in G)$ локально суммируемые функции. Пусть N — линейное дифференциальное выражение порядка $\sigma \geqslant 0$ с коэффициентами $b_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(G)$. Условимся говорить, что обобщенная функция Ng является обобщенным решением уравнения $Lu = f$ внутри $G_1 \subseteq G$, если

$$\int\limits_G g(x)\,\overline{(N^+L^+v)(x)}\,dx = \int\limits_G f(x)\overline{v(x)}\,dx \quad (v \in C_0^\infty(G_1)) \tag{4.8}$$

(предполагается, что $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+\sigma}(G)$).

Из этого определения ясно, что Ng в случае бесконечной дифференцируемости коэффициентов L и N можно понимать как обобщенную функцию типа Л. Шварца, получающуюся применением N к g и удовлетворяющую уравнению $Lu = f$. Известно, что всякая обобщенная функция Л. Шварца может быть получена дифференцированием из непрерывных g; это показывает, что по существу под Ng можно понимать любую обобщенную в смысле Л. Шварца функцию.

Теорема 4.1. *Пусть L — эллиптическое выражение порядка r, коэффициенты которого $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+r+p}(G)$, где $p \geqslant \sigma + 1$, $\sigma \geqslant 0$, а N — произвольное выражение порядка σ с коэффициентами $b_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(G)$. Всякое обобщенное решение Ng внутри G уравнения*

$$Lu = f \in C^q(G) \quad (0 \leqslant q \leqslant p) \tag{4.9}$$

как функционал совпадает с обычной функцией $h(x)$ $(x \in G)$, *также являющейся обобщенным решением уравнения* (4.9) *внутри* G. *Если уравнение однородно, т. е.* $f = 0$, *то* $h \in C^{r+p}(G)$ *и является поэтому гладким решением уравнения* $Lu = 0$. *Если* $f \neq 0$, *то* $h \in C^{r+q-1}(G)$ *и поэтому при* $q = 0$ *является обобщенным, а при* $q \geqslant 1$ — *гладким решением уравнения* (4.9). *Совпадение* Ng *как функционала с* h *означает равенство*

$$\int_G g(x)\overline{(N^+u)(x)}\,dx = \int_G h(x)\overline{u(x)}\,dx \qquad (u \in C_0^\infty(G)). \tag{4.10}$$

Доказательство будет вестись по этапам.

1) Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in G$ и сперва будем проводить рассмотрения вблизи этой точки. Первоначально сведем изучение неоднородного уравнения к однородному. Выберем столь малую окрестность V $(\overline{V} \subset G)$ точки x_0, чтобы $\overline{V} \times \overline{V} \subset W$, где W — окрестность, в которой существует фундаментальное решение $e(x, \xi)$ для L. Положим $\theta(x) = \int_V e(x, \xi) f(\xi)\,d\xi$ $\quad (x \in V)$ и продолжим θ произвольно на G. Из свойства 3) фундаментального решения следует, что при $q \geqslant 1$

$$\theta(x) \in C^{q+r-1}(\overline{V}); \tag{4.11}$$

это соотношение справедливо и при $q = 0$: согласно 2) $(D^\alpha\theta)(x) = \int_V D_x^\alpha e(x, \xi) f(\xi)\,d\xi$ $(|\alpha| \leqslant r-1)$, последний же интеграл непрерывен в $\overline{V}$. Далее в силу (4.3) имеем

$$\int_V \theta(x)\overline{(L^+v)(x)}\,dx = \int_V \left\{\int_V e(x, \xi)\overline{(L^+v)(x)}\,dx\right\} f(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_V \left\{\int_V e(x, \xi)(L^+\bar{v})(x)\,dx\right\} f(\xi)\,d\xi = \int_V f(x)\overline{v(x)}\,dx \qquad (v \in C_0^\infty(V)), \tag{4.12}$$

т. е. $\theta(x)$ является обобщенным (а при $q \geqslant 1$ — гладким) решением уравнения $Lu = f$ внутри V. Из (4.8) и (4.12) следует, что $Ng - \theta$ внутри V удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению $Lu = 0$:

$$\int_V \left\{g(x)\overline{(N^+L^+v)(x)} - \theta(x)\overline{(L^+v)(x)}\right\} dx = 0 \qquad (v \in C_0^\infty(V)). \tag{4.13}$$

2) Покажем теперь, что в случае достаточно малой $U \subset V$ существует такая $w(x) \in C^{r+p}(U)$, что

$$\int_G \left\{ g(x)\, \overline{(N^+v)(x)} - \theta(x)\overline{v(x)} \right\} dx = \int_G w(x)\overline{v(x)}\,dx \qquad (v \in C_0^\infty(U)). \quad (4.14)$$

Для доказательства возьмем в качестве U шар U_R радиуса R с центром в x_0. Радиус R выберем столь малым, чтобы шар U_{2R} с центром в x_0 и радиусом $2R$ строго входил в окрестность V п. 1. Будем считать $e(x, \xi)$ продолженным произвольным образом вне W. Пусть $k(t) \in C^\infty((-\infty, \infty))$ аннулируется при $|t| \geqslant R$ и равна 1 в некоторой окрестности нуля, а $v_0 \in C_0^\infty(U)$. Функция на G

$$v(x) = \int_G \overline{e(\xi, x)}\, k(|\xi - x|)\, v_0(\xi)\, d\xi = \int_{U_{2R}} \overline{e(\xi, x)}\,[k(|\xi - x|) - 1]\, v_0(\xi)\, d\xi + \int_{U_{2R}} \overline{e(\xi, x)}\, v_0(\xi)\, d\xi \quad (4.15)$$

аннулируется вне U_{2R} и поэтому финитна по отношению к V. Она во всяком случае $r + \sigma$ раз непрерывно дифференцируема: для первого интеграла в правой части (4.15) это вытекает из того, что особенность в нем при $x = \xi$ исключена, а $e(\xi, x)$, согласно 2), $r + p \geqslant r + \sigma + 1$ раз непрерывно дифференцируема по x. Для второго интеграла это следует из 3), так как он при сделанных предположениях входит в $C^{r+\sigma}(\overline{U}_{2R})$.

Таким образом, функцию $v(x)$ из (4.15) можно подставить в (4.13) (ясно, что (4.13) справедливо и при $v \in C_0^{r+\sigma}(V)$). Так как, согласно 3),

$$L^+\left[\int_{U_{2R}} \overline{e(\xi, x)}\, v_0(\xi)\, d\xi\right] = \overline{L^{\varpi}\left[\int_{U_{2R}} e(\xi, x)\, \overline{v_0(\xi)}\, d\xi\right]} = v_0(x),$$

то из (4.15) следует

$$(N^+L^+v)(x) = \int_{U_{2R}} N_x^+ L_x^+ \left[\overline{e(\xi, x)}\,[k(|\xi - x|) - 1]\right] v_0(\xi)\, d\xi + (N^+v_0)(x)$$

и аналогичное равенство с заменой N^+ на E. Учитывая эти соотношения и проделывая указанную подстановку, получим

$$0 = \int_G \left\{ g\overline{N^+L^+v} - \theta\,\overline{L^+v} \right\} dx = \int_{U_{2R}} \{\ldots\}\, dx =$$

$$= \int_{U_{2R}} g(x) \overline{\left\{ \int_{U_{2R}} N_x^+ L_x^+ \left[e(\xi, x)\,[k(|\xi - x|) - 1]\right] v_0(\xi)\, d\xi \right\}}\, dx -$$

$$-\int\limits_{U_{2R}} \theta(x) \overline{\left\{\int\limits_{U_{2R}} L_x^+ \left[\overline{e(\xi, x)}\,[k(|\xi - x|) - 1]\right] v_0(\xi)\, d\xi\right\}}\, dx +$$

$$+\int\limits_{U_{2R}} [g(x)\overline{(N^+ v_0)(x)} - \theta(x)\overline{v_0(x)}]\, dx =$$

$$= \int\limits_{U_{2R}} \Big\{ \int\limits_{U_{2R}} g(x) \overline{N_x^+ L_x^+ \left[\overline{e(\xi, x)}\,[k(|\xi - x|) - 1]\right]}\, dx -$$

$$-\int\limits_{U_{2R}} \theta(x) \overline{L_x^+ \left[\overline{e(\xi, x)}\,[k(|\xi - x|) - 1]\right]}\, dx \Big\} \overline{v_0(\xi)}\, d\xi +$$

$$+\int\limits_{U_{2R}} [g\overline{N^+ v_0} - \theta\overline{v_0}]\, dx = -\int\limits_{G} w(\xi)\overline{v_0(\xi)}\, d\xi + \int\limits_{G} [g\overline{N^+ v_0} - \theta\overline{v_0}]\, dx, \quad (4.16)$$

где $w(\xi)$ $(\xi \in U)$ определена равенством $w(\xi) = -\{\ldots\}$. Из 2) и выражения для w следует, что $w \in C^{r+p}(U)$. Итак, мы доказали (4.14) для любой $v = v_0 \in C_0^\infty(U)$.

3) Построим теперь функцию h и установим представление (4.10). Окружим каждую точку $x \in G$ окрестностью O_x, строго внутренней по отношению к $U = U_x$, построенной в 2) при $x_0 = x$. Выделим из покрытия G окрестностями O_x счетное покрытие O_{x_1}, $O_{x_2}, \ldots$ такое, чтобы каждая ограниченная строго внутренняя подобласть G пересекалась лишь с конечным числом этих окрестностей; пусть $1 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \chi_j(x)$ — отвечающее покрытию O_{x_j} разложение единицы. Согласно 1) и 2) построим функции $\theta = \theta_j$ и $w = w_j$ для окрестности $U = U_{x_j}$. Так как для любой $v \in C_0^\infty(G)$ $v\chi_j \in C_0^\infty(U_{x_j})$, то (4.14) справедливо с заменой v на $v\chi_j$. Учитывая это равенство и тот факт, что при фиксированной v лишь конечное число функций $v\chi_j$ отлично от нуля, получим соотношение (4.10):

$$\int\limits_G g\overline{N^+ v}\, dx = \int\limits_G g\overline{N^+\left[\sum_{j=1}^{\infty} v\chi_j\right]}\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_G g\overline{N^+[v\chi_j]}\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_G \theta_j \bar{v}\chi_j\, dx +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_G w_j \bar{v}\chi_j\, dx = \int\limits_G \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\theta_j + w_j)\chi_j\right)\bar{v}\, dx = \int\limits_G h\bar{v}\, dx,$$

$$h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(x)\chi_j(x) + \sum_{j=1}^{\infty} w_j(x)\chi_j(x) \qquad (x \in G).$$

Так как для каждой достаточно малой окрестности x здесь не аннулируется лишь конечное число слагаемых и $\theta_j \in C^{q+r-1}(U_{x_j})$ (см. (4.11)), $w_j \in C^{r+p}(U_{x_j})$, то $\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \chi_j \in C^{q+r-1}(G)$, $\sum_{j=1}^{\infty} w_j \chi_j \in C^{r+p}(G)$. Поэтому, если $f=0$, то в представлении для h фигурирует лишь вторая сумма и $h \in C^{r+p}(G)$. В общем случае $h \in C^{r+q-1}(G)$.

Для завершения доказательства теоремы нам осталось убедиться, что h является обобщенным решением уравнения (4.9), т. е. проверить равенство $\int_G h(x)\, \overline{(L^+v)(x)}\, dx = \int_G f(x)\, \overline{v(x)}\, dx$ $\left(v \in C_0^\infty(G)\right)$. Заменим в (4.10) $u \in C_0^\infty(G)$ на L^+v, где $v \in C_0^\infty(G)$, и воспользуемся (4.8) (при $G_1 = G$). Тогда

$$\int_G h\, \overline{L^+v}\, dx = \int_G g\, \overline{N^+L^+v}\, dx = \int_G f\bar{v}\, dx,$$

что и требовалось. Теорема доказана.

3. **Гладкость внутри области. Решения — обобщенные ядра Л. Шварца.** В дальнейшем часто будет встречаться такое положение, когда обобщенное ядро по каждому переменному удовлетворяет эллиптическому уравнению. Установим сейчас аналог предыдущей теоремы для этого случая, ограничиваясь пока что обобщенными ядрами типа Л. Шварца.

Рассмотрим в двух, возможно и неограниченных, областях G', $G'' \subseteq E_n$ дифференциальные выражения L', N' и L'', N'' соответственно; r', σ' и r'', σ'' — их порядки, L', N' всегда действуют по $x' \in G'$, L'', N'' — по $x'' \in G''$. Ограничения относительно гладкости коэффициентов — аналогичны приведенным в начале п. 2. Пусть $O \subseteq G' \times G''$ — некоторая область, $G(x', x'')$ и $F(x', x'')$ локально суммируемые в O функции. Будем говорить, что обобщенная производная $N'N''G$ является обобщенным решением уравнений $L'_{x'}U = F$, $L''_{x''}U = F$ внутри $O_1 \subseteq O$, если

$$\left.\begin{aligned}
&\iint_O G(x', x'')\, \overline{(\overset{+}{N'_{x'}} \overset{+}{N''_{x''}} \overset{+}{L'_{x'}} V)(x', x'')}\, dx'dx'' = \iint_O F(x', x'')\, \overline{V(x', x'')}\, dx'dx'', \\
&\iint_O G(x', x'')\, \overline{(\overset{+}{N'_{x'}} \overset{+}{N''_{x''}} \overset{+}{L''_{x''}} V)(x', x'')}\, dx'dx'' = \iint_O F(x', x'')\, \overline{V(x', x'')}\, dx'dx''
\end{aligned}\right\} \quad (4.17)$$

$$(V(x', x'') \in C_0^\infty(O_1)).$$

Путем разложения гладкого ядра в билинейный достаточно хорошо сходящийся ряд нетрудно убедиться, что в этом определении равенства (4.17) можно заменить эквивалентными

$$\iint_O G(x', x'')\overline{(N'^{+}L'^{+}v')(x')}\,\overline{(N''^{+}v'')(x'')}\,dx'dx'' = \iint_O F(x', x'')\overline{v'(x')\,v''(x'')}\,dx'dx'', \tag{4.18}$$

$$\iint_O G(x', x'')\overline{(N'^{+}v')(x')}\,\overline{(N''^{+}L''^{+}v'')(x'')}\,dx'dx'' = \iint_O F(x', x'')\overline{v'(x')\,v''(x'')}\,dx'dx'',$$

где $v'(x') \in C_0^\infty(G')$, $v''(x'') \in C_0^\infty(G'')$ таковы, что произведение их носителей лежит внутри O_1.

Теорема 4.2. *Пусть L' — эллиптическое выражение порядка r' с коэффициентами $a'_\alpha(x') \in C^{|\alpha|+r'+p'}(G')$, где $p' \geqslant \sigma'+1$, $\sigma' \geqslant 0$, а N' — произвольное выражение порядка σ' с коэффициентами $b'_\alpha(x') \in C^{|\alpha|}(G')$. Аналогично определяются L'' и N''. Всякое обобщенное решение $N'N''G$ внутри области $O \subseteq G' \times G''$ системы уравнений*

$$L'_{x'}U = F, \qquad L''_{x''}U = F, \tag{4.19}$$

где $F'(x', x'')$ $((x', x'') \in O)$ такова, что существуют и непрерывны по $(x', x'') \in O$ производные $D_{x'}^{\alpha'}D_{x''}^{\alpha''}F$ $(|\alpha'| \leqslant q' \leqslant p', |\alpha''| \leqslant q'' \leqslant p'')$, как функционал совпадает с обычным ядром $H(x', x'')$ $((x', x'') \in O)$, также являющимся обобщенным решением системы (4.19) внутри O. Если $F = 0$, то у H существуют и непрерывно по $(x', x'') \in O$ производные $D_{x'}^{\alpha'}D_{x''}^{\alpha''}H$, где $|\alpha'| \leqslant r'+p'$, $|\alpha''| \leqslant r''+p''$, и поэтому это ядро является гладким решением уравнений $L'_{x'}U = 0$, $L''_{x''}U = 0$. Если $F \neq 0$, то у H существуют и непрерывны по $(x', x'') \in O$ производные вида $D_{x'}^{\alpha'}D_{x''}^{\alpha''}H$, где $|\alpha'| \leqslant q'$, $|\alpha''| \leqslant r''+q''-1$ или $|\alpha'| \leqslant r'+q'-1$, $|\alpha''| \leqslant q''$. Совпадение $N'N''G$ как функционала с H означает равенство

$$\iint_O G(x', x'')\overline{(N'^{+}_{x'}N''^{+}_{x''}V)(x', x'')}\,dx'dx'' = \iint_O H(x', x'')\overline{V(x', x'')}\,dx'dx''$$

$$(V(x', x'') \in C_0^\infty(O)). \tag{4.20}$$

Мы будем устанавливать эквивалентное (4.20) соотношение: для любых $v'(x') \in C_0^\infty(G')$, $v''(x'') \in C_0^\infty(G'')$, произведение носителей которых входит в O,

$$\iint\limits_O G(x', x'')\overline{(N'^{+}v')(x')}\,\overline{(N''^{+}v'')(x'')}\,dx'dx'' =$$

$$= \iint\limits_O H(x', x'')\overline{v'(x')}\,\overline{v''(x'')}\,dx'dx''. \tag{4.21}$$

Доказательство теоремы является развитием доказательства предыдущей, поэтому частично оно будет лишь намечено.

1. Зафиксируем $(x_0', x_0'') \in G' \times G''$ и выберем столь малую окрестность V' (V'') точки x_0' (x_0''), чтобы на $V' \times V'$ ($V'' \times V''$) существовало фундаментальное решение $e'(x', \xi')$ ($e''(x'', \xi'')$) выражения L' (L'') и чтобы $\overline{V' \times V''} \subset O$. Для $(x', x'') \in V' \times V''$ положим $\Theta_1(x', x'') = \int\limits_{V'} e'(x', \xi') F(\xi', x'')\,d\xi'$ и распространим эту функцию произвольно на все O. Из сказанного на стр. 181 и первого из соотношений (4.19) ясно, что она внутри $V' \times V''$ непрерывно выдерживает производные $D_{x'}^{\alpha'} D_{x''}^{\alpha''}$ ($|\alpha'| \leqslant q' + r' - 1$, $|\alpha''| \leqslant q''$) и удовлетворяет равенству

$$\iint\limits_O \{G\overline{N'^{+}L'^{+}v'}\cdot\overline{N''^{+}v''} - \Theta_1\overline{L'^{+}v'}\cdot\overline{v''}\}\,dx'dx'' = 0$$

$$(v' \in C_0^\infty(V'), \qquad v'' \in C_0^\infty(V'')). \tag{4.22}$$

2) Выберем теперь шаровую окрестность $U' = U'_{R'}$ точки x_0' столь малого радиуса R', чтобы подобная окрестность $U'_{2R'}$, имеющая радиус в два раза больший, строго входила в V'. Построим аналогично (4.15) функцию $v'(x') \in C_0^{r'+\sigma'}(V')$ по $v_0'(x') \in C_0^\infty(U')$ и подставим ее в (4.22) ((4.22) справедливо и при $v' \in C_0^{r'+\sigma'}(V')$). Как и при доказательстве теоремы 4.1, получим, что для любых $v_0' \in C_0^\infty(U')$, $v'' \in C_0^\infty(V'')$

$$\iint\limits_O G\overline{N'^{+}v_0'}\cdot\overline{N''^{+}v''}\,dx'dx'' = \iint\limits_O \{K(x', x'')\overline{v_0'}\,\overline{N''^{+}v''} + L(x', x'')\overline{v_0'}\,\overline{v''}\}\,dx'dx'', \tag{4.23}$$

$$K(x', x'') = -\int\limits_{U'_{2R'}} G(\xi', x'')\overline{N_{\xi'}'^{+}L_{\xi'}'^{+}[e'(x', \xi')[k(|x' - \xi'|) - 1]]}\,d\xi',$$

$$L(x', x'') = \int\limits_{U'_{2R'}} \Theta_1(\xi', x'')\overline{L_{\xi'}'^{+}[e'(x', \xi')[k(|x' - \xi'|) - 1]]}\,d\xi' + \Theta_1(x', x'').$$

3) Подставим в (4.23) вместо v'' функцию $\overset{+}{L''}v''$, где $v'' \in C_0^\infty(V'')$. Согласно второму из равенств (4.18) левая часть (4.23) тогда будет равна $\iint\limits_O F\bar{v}_0'\bar{v}''dx'dx''$. Поэтому, если ввести функцию $\Theta_2(x', x'') = \int\limits_{V''} e''(x'', \xi'')F(x', \xi'')d\xi''$ и воспользоваться (4.3), то для $v_0' \in C_0^\infty(U')$ и $v'' \in C_0^\infty(V'')$ найдем

$$\iint\limits_O \{K(x', x'')\bar{v}_0'\overline{\overset{+}{N''}\overset{+}{L''}v''} - (\Theta_2(x', x'') - L(x', x''))\,\bar{v}_0'\overline{\overset{+}{L''}v''}\}\,dx'dx'' = 0.$$

Это равенство подобно (4.13). Построив, как и выше, функцию v'' по $v_0'' \in C_0^\infty(U'')$ (шаровая окрестность $U'' = U''_{R''}$ точки x_0'' столь мала, что $U''_{2R''}$ расположена строго внутри V''), получим

$$\iint\limits_O K(x', x'')\bar{v}_0'\overline{\overset{+}{N''}v_0''}dx'dx'' = \iint\limits_O M(x', x'')\bar{v}_0'\bar{v}_0''dx'dx'',$$

$$M(x', x'') = -\int\limits_{U''_{2R''}} K(x', \xi'')\overline{\overset{+}{N''_{\xi''}}\overset{+}{L''_{\xi''}}[e''(x'', \xi'')][k(|x''-\xi''|)-1]}d\xi'' +$$

$$+\int\limits_{U''_{2R''}} (\Theta_1(x', \xi'') - L(x', \xi''))\,\overline{\overset{+}{L''_{\xi''}}[e''(x'', \xi'')][k(|x''-\xi''|)-1]}\,d\xi'' +$$

$$+\Theta_2(x', x'') - L(x', x'')$$

$$(v_0' \in C_0^\infty(U'), \quad v_0'' \in C_0^\infty(U'')).$$

Подставляя это выражение для интеграла от K в правую часть (4.23) (где v'' заменено на v_0''), найдем для рассматриваемых v_0', v_0''

$$\iint\limits_O G\overline{\overset{+}{N'}v_0'}\cdot\overline{\overset{+}{N''}v_0''}dx'dx'' = \iint\limits_O N(x', x'')\bar{v}_0'\bar{v}_0''dx'dx''$$

$$(v_0' \in C_0^\infty(U'), \quad v_0'' \in C_0^\infty(U'')), \tag{4.24}$$

$$N(x', x'') = \iint\limits_{U'_{2R'}\times U''_{2R''}} G(\xi', \xi'')\overline{\overset{+}{N'_{\xi'}}\overset{+}{L'_{\xi'}}[e'(x', \xi')][k(|x'-\xi'|)-1]}\times$$

$$\times\overline{\overset{+}{N''_{\xi''}}\overset{+}{L''_{\xi''}}[e''(x'', \xi'')][k(|x''-\xi''|)-1]}d\xi'd\xi'' -$$

$$- \iint\limits_{U'_{2R'} \times U''_{2R''}} \Theta_1(\xi', \xi'') \overline{\overset{'+}{L_{\xi'}} [\overline{e'(x', \xi')} [k(|x' - \xi'|) - 1]]} \times$$

$$\times \overline{\overset{''+}{L_{\xi''}} [\overline{e''(x'', \xi'')} [k(|x'' - \xi''|) - 1]]} \, d\xi' d\xi'' +$$

$$+ \int\limits_{U''_{2R''}} (\Theta_2(x', \xi'') - \Theta_1(x', \xi'')) \overline{\overset{''+}{L_{\xi''}} [\overline{e''(x'', \xi'')} [k(|x'' - \xi''|) - 1]]} \, d\xi'' +$$

$$+ \Theta_2(x', x'') \tag{4.25}$$

$$(x' \in U', \ x'' \in U'').$$

Покажем, что у ядра N требуемая для H гладкость. Первый и второй из интегралов (4.25) непрерывно выдерживают производные $D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha''}_{x''}$, где $|\alpha'| \leqslant r' + p'$, $|\alpha''| \leqslant r'' + p''$. Так как по x' $\Theta_2(x', x'')$ входит в $C^{q'}(U')$, а $\Theta_1(x', x'')$ — в $C^{r'+q'-1}(U')$, то третий интеграл непрерывно выдерживает производные $D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha''}_{x''}$, $|\alpha'| \leqslant q'$, $|\alpha''| \leqslant r'' + p''$. Наконец, слагаемое $\Theta_2(x', x'')$ выдерживает производные $D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha''}_{x''}$, $|\alpha'| \leqslant q'$, $|\alpha''| \leqslant r'' + q'' - 1$. Таким образом, если $F = 0$ и, следовательно, $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$, то $D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha''}_{x''} N$ при $|\alpha'| \leqslant r' + p'$, $|\alpha''| \leqslant r'' + p''$ существуют и непрерывны в $U' \times U''$ Если $F \neq 0$, то $D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha''}_{x''} N$ существуют и непрерывны в $U' \times U''$ при $|\alpha'| \leqslant q'$, $|\alpha''| \leqslant r'' + q'' - 1$.

Можно было бы проводить доказательство, строя в 2) не v' по v'_0, а v'' по v''_0 и в 3) v' по v'_0. В результате мы получим (4.24) с некоторым новым ядром $\widetilde{N}$; благодаря произвольности v'_0 и v''_0 $\widetilde{N} = N$. Но аналогично предыдущему при $F \neq 0$ $D^{\alpha'}_{x'} D^{\alpha''}_{x''} \widetilde{N}$ существуют и непрерывны в $U' \times U''$ при $|\alpha'| \leqslant r' + q' - 1$ и $|\alpha''| \leqslant q''$. Этим установлено последнее соотношение гладкости для N.

4) Итак, нами получено (4.24) с требуемыми свойствами гладкости у ядра N, т. е. мы доказали локально (4.21). Для завершения доказательства теоремы следует сконструировать ядро $H(x', x'')$ по ядрам $N(x', x'')$, построенным внутри окрестности каждой точки (x'_0, x''_0) области O. Это делается точно так же, как и в предыдущей теореме — при помощи разложения единицы. Аналогично предыдущему убеждаемся и в том, что H по каждой переменной является обобщенным решением уравнений (4.19). Теорема доказана.

4. Гладкость внутри области. Обобщенные решения — элементы пространства с негативной нормой. Перенесем теоремы пп. 2 и 3 на обобщенные решения указанного типа. Для определенности будем предполагать, что область G ограничена; в случае неограниченной G результаты сохраняются с заменой $W_2^\sigma(G)$ на любое $W_2^{(\sigma,q)}(G)$.

Теорема 4.3. *Пусть L — эллиптическое выражение из теоремы 4.1, $\varphi \in W_2^{-\sigma}(G)$ $(\sigma \geqslant 0)$ удовлетворяет внутри G уравнению $Lu = f$, где $f \in C^q(G)$, $0 \leqslant q \leqslant p$. Тогда φ внутри G совпадает с обычной функцией h, также удовлетворяющей этому уравнению внутри G и имеющей следующий характер гладкости: если уравнение однородно $(f=0)$, то $h \in W_{2,\text{лок}}^{r+p}(G)$ и поэтому является гладким решением; если $f \neq 0$, то $h \in W_{2,\text{лок}}^{r+q-1}(G)$ и при $q = 0$ является обобщенным, а при $q \geqslant 1$ — гладким решением.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1.

1) Пусть $x_0 \in G$, выберем $V \ni x_0$ и построим $\theta(x)$ так же, как и на стр. 181. Будем рассматривать θ как элемент из $W_2^{-\sigma}(G)$, тогда равенство (4.12) означает, что θ удовлетворяет внутри V уравнению $Lu = f$. Обобщенная функция $\psi = \varphi - \theta \in W_2^{-\sigma}(G)$ является решением внутри V однородного уравнения $Lu = 0$:

$$(\psi, L^+ v)_0 = 0 \qquad (v \in C_0^\infty(V)). \tag{4.26}$$

2) Рассмотрим теперь подобно пункту 2) на стр. 181—182 случай однородного уравнения. Пусть U, k, v_0, v такие же, как и там. Имеем

$$(L^+ v)(x) = \int_{U_{2R}} K(x, \xi)\, v_0(\xi)\, d\xi + v_0(x), \tag{4.27}$$

где $K(x, \xi) = L_x^+ [\overline{e(\xi, x)}\,[k(|\xi - x|) - 1]]$; из выражения для K следует, что существуют и непрерывны производные $D_x^\alpha D_\xi^\beta K$, где $|\alpha| < p$, $|\beta| \leqslant r+p$, $p \geqslant \sigma + 1$ $((x, \xi) \in \overline{V} \times \overline{V})$. Продолжим ядро $K(x, \xi)$ произвольным образом с сохранением указанной гладкости на $(G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma)$ и определим оператор A равенством

$$(Au)(x) = \int_G K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi. \tag{4.28}$$

Этот оператор действует непрерывно из $W_2^{-r-p}(G)$ в $W_2^\sigma(G)$, т. е. из сходимости $u_\nu \in L_2(G)$ к 0 в $W_2^{-r-p}(G)$ следует сходимость $Au_\nu \to 0$ в $W_2^\sigma(G)$: если $|\alpha| \leqslant \sigma$, то

$$|(D^\alpha Au_\nu)(x)| = \left| \int_G (D_x^\alpha K)(x, \xi)\, u_\nu(\xi)\, d\xi \right| = |(u_\nu, \overline{D_x^\alpha K(x, \cdot)})_0| \leqslant$$

$$\leqslant \|\overline{(D_x^\alpha K)(x, \cdot)}\|_{r+p} \|u_\nu\|_{-r-p} \leqslant C \|u_\nu\|_{-r-p} \qquad (x \in G),$$

откуда $D^\alpha Au_\nu \to 0$ $(|\alpha| \leqslant \sigma)$ равномерно по $x \in G$, а значит и $\|Au_\nu\|_\sigma \to 0$. Поэтому A^+ действует непрерывно из $W_2^{-\sigma}(G)$ в $W_2^{r+p}(G)$. Подставляя (4.15) в (4.26) и пользуясь (4.27) и (4.28), получим аналогичное (4.14) равенство

$$0=(\psi, L^{+}v)_0=(\psi, Av_0)_0+(\psi, v_0)=(A^{+}\psi, v_0)_0+(\psi, v_0)_0;$$

$$(\psi, v_0)=(w, v_0)_0 \qquad (w=-A^{+}\psi \in W_2^{r+p}(G); \qquad v_0 \in C_0^{\infty}(U)). \qquad (4.29)$$

3) Из равенств $\psi=\varphi-\theta$ и (4.29) следует, что для каждого $x_0 \in G$ существует такая достаточно малая окрестность U_{x_0}, что $(\varphi, v)_0=(\theta+w, v)_0$ ($v \in C_0^{\infty}(U_{x_0})$), причем $\theta \in C^{q+r-1}(\bar{U}_{x_0}) \subset W_2^{q+r-1}(U_{x_0})$ (см. (4.11)), $w \in W_2^{r+p}(G)$. Теперь доказательство заканчивается точно так же, как и на стр. 183—184; см. также лемму 3.2, гл. II.

Модернизируя доказательство теоремы 4.2, подобно тому как это делалось в предыдущей теореме, можно установить следующее утверждение (ниже G' и G'' для простоты ограничены).

Теорема 4.4. *Пусть L', L'', O, F такие же, как в теореме 4.2. Предположим, что $\Phi \in W_2^{-\sigma'}(G') \otimes W^{-\sigma''}(G'')$ $(\sigma', \sigma'' \geqslant 0)$ удовлетворяет внутри O системе уравнений (4.19), т. е.*

$$(\Phi, (L'^{+}v')(x')\,v''(x''))_{L_2(G'\times G'')}=(F(x', x''), v'(x')\,v''(x''))_{L_2(G'\times G'')},$$

$$(\Phi, v'(x')\,(L''^{+}v'')(x''))_{L_2(G'\times G'')}=(F(x', x''), v'(x')\,v''(x''))_{L_2(G'\times G'')} \qquad (4.30)$$

($v' \in C_0^{\infty}(G')$, $v'' \in C_0^{\infty}(G'')$; произведение носителей v' и v'' лежит внутри O).

Тогда Φ совпадает внутри O с обычным ядром $H(x', x'')$ ($(x', x'') \in O$), также являющимся обобщенным решением системы (4.19) внутри O и имеющим следующий характер гладкости: если $F=0$, то в каждой строго внутренней подобласти $OH \in W_2^{r'+p'} \otimes W_2^{r''+p''}$; если $F \neq 0$, то в каждой такой подобласти

$$H \in (W_2^{q'} \otimes W_2^{r''+q''-1}) \cup (W_2^{r'+q'-1} \otimes W_2^{q''}).$$

Совпадение Φ внутри O с H означает равенство

$$(\Phi, V)_{L_2(G'\times G'')}=(H, V)_{L_2(G'\times G'')} \ (V \in C_0^{\infty}(O)). \qquad (4.31)$$

5. Другой подход. Гладкость внутри области. Приведем другую методику доказательства гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений — с использованием результатов по краевым задачам. Этот подход позволяет исследовать гладкость вплоть до границы (для ясности изложения мы пока ограничимся исследованием внутри G); кроме того, теперь охватывается случай обобщенных правых частей и результаты выглядят более симметрично. Уже говорилось, что в дальнейшем в этом параграфе будем рассматривать лишь сильно эллиптические уравнения, более сложный общий случай см. в п. 12, § 6. Как и в п. 4, G в этом и следующем пунктах предполагается для определенности ограниченной.

Теорема 4.5. *Пусть выражение L порядка $2m$ сильно эллиптично; его коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+p}(G)$, где $p \geqslant 0$ — некоторое число. Предположим, что функция $\varphi \in W_2^s(G)$ $(s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ внутри G является обобщенным решением уравнения $Lu = f$, где $f \in W_{2,\text{лок}}^{s-2m}(G)$.*

Если в действительности $f \in W_{2,\text{лок}}^t(G)$ с $t > s - 2m$ произвольного знака и коэффициенты $a_\alpha(x)$ достаточно гладкие, то и φ внутри G будет более гладким; при большом запасе гладкости коэффициентов $\varphi \in W_{2,\text{лок}}^{t+2m}(G)$. Сформулируем этот результат более точно: 1) пусть $p < m$, тогда можно рассматривать $\varphi \in W_2^s(G)$, где $s \in [-p, p)$; утверждается, что автоматически $\varphi \in W_{2,\text{лок}}^{\min(t+2m,p)}(G)$; 2) пусть $p \geqslant m$, можно брать $s \in [-p, p+2m)$, тогда $\varphi \in W_{2.\text{лок}}^{\min(t+2m,p+2m)}(G)$.

Раньше, чем доказывать теорему, напомним некоторые общие понятия (см. стр. 153). Рассмотрим цепочку $W_2^{-l}(G) \supseteq L_2(G) \supseteq W_2^l(G)$. Пусть $a(x) \in C^l(G \cup \Gamma)$, определим произведение $\alpha \in W_2^{-l}(G)$ на $a(x)$ как обобщенную функцию $a\alpha$ из $W_2^{-l}(G)$, которая действует по закону $(a\alpha, u)_0 = (\alpha, \overline{a(x)}\, u(x))_0 (u \in W_2^l(G))$. Такое определение корректно: оператор умножения $u(x) \to \overline{a(x)}\, u(x)$ непрерывен в $W_2^l(G)$, а переход $\alpha \to a\alpha$ — сопряженный оператор к нему. Пусть $a(x)$ аннулируется вне области $G_1 \subseteq G$ с кусочно гладкой границей, тогда $a\alpha$ можно рассматривать как элемент из $W_2^{-l}(G_1)$, действующий на $u \in W_2^l(G_1)$ по закону $(a\alpha, u)_0 = (\alpha, \bar{a}u)_0$ — это равенство имеет смысл, так как $\bar{a}u$ входит в $W_2^l(G)$ и непрерывно зависит от $u \in W_2^l(G_1)$. Такое истолкование $a\alpha$ будет встречаться дальше без особых оговорок.

Доказательство. При проведении доказательства будем пользоваться теоремой 3.6 применительно к сопряженному выражению L^+. Переход от требований гладкости на коэффициенты L к подобным требованиям относительно L^+ в случае 1-й и 2-й пар пространств из (3.71) осуществляется так, как это указано на стр. 175. Этим объясняются приводимые ниже ограничения гладкости.

Установим теорему локально. Пусть $x_0 \in G$, обозначим U шар с центром x_0 достаточно малого радиуса, $V \supset U$ — шар с тем же центром большего радиуса. Будем предполагать, что радиус V выбран столь малым, что V расположен строго внутри G и задача $L^+u = f$ в области V с нулевыми граничными условиями будет разрешима в том смысле, что для нее выполняется теорема 3.6 с s, $|s| \leqslant N$, где N—некоторое достаточно большое число (его выбор будет ясен из дальнейшего). Пусть $\chi(x)$ — неотрицательная функция из $C^\infty(E_n)$, аннулирующаяся в окрестности множества $E_n \setminus V$. Всюду ниже при $s \leqslant 0$ положено $\sigma = -s \geqslant 0$.

1) Покажем, что если $\varphi \in W_2^s(G) = W_2^{-\sigma}(G)$ $(s < 0)$ удовлетворяет внутри G уравнению $Lu = f$, где $f \in W_{2,\text{лок}}^t(G)$ с $t > s - 2m$ произвольного знака, то $\chi\varphi \in W_2^{s+1}(V)$.

В самом деле, пусть $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(V) \cap W_2^{2m+\sigma}(V)$, тогда $v(x) = \chi(x)w(x) \in W_{2,0}^{2m+\sigma}(G)$ и ее можно подставить в (3.10), гл. II. Получим

$$(\varphi, L^+[\chi w])_0 = (f, \chi w)_0 \qquad (w \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(V) \cap W_2^{2m+\sigma}(V)). \tag{4.32}$$

Но

$$(L^+[\chi w])(x) = \chi(x)(L^+w)(x) + (M_\chi w)(x), \tag{4.33}$$

где M_χ — дифференциальное выражение порядка $2m-1$; оно имеет настолько гладкие коэффициенты, что оператор $A: v \to M_\chi v$ непрерывно отображает $W_2^{2m+\sigma-1}(V)$ в $W_2^\sigma(V)$. Пусть A^+ — сопряженный к нему оператор, тогда $(\alpha, M_\chi v)_0 = (\alpha, Av)_0 = (A^+\alpha, v)_0$ при любых $\alpha \in W_2^{-\sigma}(V)$, $v \in W_2^{2m+\sigma-1}(V)$; здесь $A^+\alpha \in W_2^{-2m-\sigma+1}(V)$. В частности, $(\varphi, M_\chi w)_0 = (\psi, w)_0$, где $\psi = A^+\varphi$ $\quad (w \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(V) \cap W_2^{2m+\sigma}(V) \subset W_2^{2m+\sigma-1}(V))$. Подставляя (4.33) в (4.32) и пользуясь полученным соотношением, найдем

$$\begin{gathered}(\chi\varphi, L^+w)_0 = (\varphi, \chi L^+w)_0 = (f, \chi w)_0 - (\varphi, M_\chi w)_0 = \\ = (\chi f - \psi, w)_0 = (\theta, w)_0 \\ (w \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(V) \cap W_2^{2m+\sigma}(V)),\end{gathered} \tag{4.34}$$

где $\theta = \chi f - \psi \in W_2^{-2m-\sigma+1}(V)$. Благодаря тому, что отображение $w \to L^+w$ является гомеоморфизмом между $\overset{\circ}{W}{}_2^m(V) \cap W_2^{2m+\sigma-1}(V)$ и $W_2^{\sigma-1}(V)$, можно написать

$$|(\theta, w)_0| \leqslant \|\theta\|_{-2m-\sigma+1} \|w\|_{2m+\sigma-1} \leqslant C\|\theta\|_{-2m-\sigma+1} \|L^+w\|_{\sigma-1}$$
$$(w \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(V) \cap W_2^{2m+\sigma-1}(V)).$$

Подобно доказательству теоремы 3.3, гл. II, отсюда следует, что $(\theta, w)_0 = (\mu, L^+w)_0$, $\mu \in W^{-\sigma+1}(V)$. Из этого равенства и из (4.34) вытекает $(\chi\varphi, L^+w)_0 = (\mu, L^+w)_0$ $(w \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(V) \cap W_2^{2m+\sigma}(V))$, но так как L^+w пробегает все $W_2^\sigma(V)$, то $\chi\varphi = \mu \in W_2^{-\sigma+1}(V)$, что и требовалось.

Как легко проследить, для проведения этого доказательства достаточно требовать, чтобы $a_\alpha \in C^{|\alpha|+|s|}(G)$.

2) Пусть $u \in W_2^s(V)$ $(s \geqslant 0)$, $w \in W_2^{2m}(V)$; интегрируя по частям, получаем

$$(u, M_\chi w)_0 = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m-1} (u, c_\alpha(x) D^\alpha w)_0 = \sum_{|\alpha| \leqslant s,\ |\beta| \leqslant 2m-s-1} (D^\alpha u, c_{\alpha\beta}(x) D^\beta w)_0 \tag{4.35}$$

(здесь не появлялись поверхностные интегралы, так как c_α вместе со всеми своими производными аннулируется на границе V благодаря наличию множителя χ). Таким образом, если $s \geqslant 2m-1$, то для рассматриваемых u и w

$$(u, M_\chi w)_0 = (\psi, w)_0, \tag{4.36}$$

где $\psi \in W_2^{-2m+s+1}(V)$. Покажем, что (4.36) справедливо и при $0 \leqslant s \leqslant 2m-1$. Зафиксируем индексы α и β ($|\alpha| \leqslant s$, $|\beta| \leqslant 2m-s-1$) и рассмотрим оператор $A_{\alpha\beta}: v \to c_{\alpha\beta}(x) D^\beta v$, непрерывно отображающий $W_2^{2m-s-1}(V)$ в $L_2(V)$; $A_{\alpha\beta}^+$ действует из $L_2(V)$ в $W_2^{-2m+s+1}(V)$. Имеем, в частности,

$$(D^\alpha u, c_{\alpha\beta} D^\beta w)_0 = (D^\alpha u, A_{\alpha\beta} w)_0 = (A_{\alpha\beta}^+ D^\alpha u, w)_0 \quad (u \in W_2^s(V), w \in W_2^{2m}(V)),$$

подставляя эти выражения в (4.35), получим (4.36), где положено

$$\psi = \sum_{|\alpha| \leqslant s,\ |\beta| \leqslant 2m-s-1} A_{\alpha\beta}^+ D^\alpha u \in W_2^{-2m+s+1}(V).$$

Ниже мы убедимся, что 1) справедливо и для $s \geqslant 0$. Для этого пока установим аналог (4.34): повторяя рассуждения при доказательстве 1) и пользуясь (4.36), получим

$$(\chi\varphi, L^+ w)_0 = (\theta, w)_0 \, (w \in \mathring{W}_2^m(V) \cap W_2^{2m}(U), \theta = \chi f - \psi \in W_2^{-2m+s+1}(V)). \tag{4.37}$$

3) Установим 1) при $0 \leqslant s < m$; по-прежнему считаем, что $f \in W_{2,\text{лок}}^t(G)$ с $t > s - 2m$. Отображение $w \to L^+ w$ $(w \in \mathring{W}_2^m(V) \cap W_2^{2m}(V))$ после замыкания является гомеоморфизмом между $\mathring{W}_2^m(V) \cap W_2^{2m-s-1}(V)$ и $\mathring{W}_2^{-s-1}(V)$, поэтому

$$|(\theta, w)_0| \leqslant \|\theta\|_{-2m+s+1} \|w\|_{2m-s-1} \leqslant C \|\theta\|_{-2m+s+1} \|L^+ w\|_{\mathring{W}_2^{-s-1}(V)} \tag{4.38}$$
$$(w \in \mathring{W}_2^m(V) \cap W_2^{2m}(V)).$$

Отсюда опять подобно теореме 3.3, гл. II, следует, что для таких w $(\theta, w)_0 = (\mu, L^+w)_0$, $\mu \in \overset{\circ}{W}{}_2^{s+1}(V)$. Сравнивая это равенство с (4.37), заключаем, что $(\chi\varphi, L^+w)_0 = (\mu, L^+w)_0$ $(w \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(V) \cap W_2^{2m}(V))$; но L^+w описывают все $L_2(V)$, поэтому $\chi\varphi = \mu \in \overset{\circ}{W}{}_2^{s+1}(V)$, что и требовалось. Для проведения рассуждения 3) достаточно требовать, чтобы $a_\alpha \in C^{|\alpha|+s+1}(G)$.

Аналогично рассматриваются случаи 4) $m \leqslant s < 2m$ и 5) $s \geqslant 2m$, нужно лишь в оценке (4.38) использовать пространства последних двух пар в (3.71). Условия на гладкость коэффициентов в этих случаях имеют вид: $a_\alpha \in C^{|\alpha|+|2m-s-1|}(G)$.

Теперь мы можем доказать теорему в локальной формулировке: пусть $\varphi \in W_2^s(G)$ является решением внутри G рассматриваемого уравнения, тогда $\varphi \in W_{2,\text{лок}}^{\min(t+2m,p)}(U)$ $(p < m,\ \ s \in [-p, p))$ или $\varphi \in W_{2,\text{лок}}^{\min(t+2m,p+2m)}(U)$ $(p \geqslant m,\ s \in [-p, p+2m))$.

Пусть $s < 0$; будем считать пока, что t большое положительное. Применяя 1), найдем, что $\chi\varphi \in W_2^{s+1}(V)$. Возьмем в качестве χ функцию, которая дополнительно равна 1 в области V', расположенной строго внутри V и такой, что $\overline{U} \subset V'$. Из доказанного следует, что $\varphi \in W_{2,\text{лок}}^{s+1}(V')$ и удовлетворяет уравнению $Lu = f$. Если $s+1 < 0$, то опять применяем 1), только с заменой V на строго внутреннюю подобласть $V_1 \supset \overline{U}$ области V'; если $s+1 = 0$ — применяем 3). Получим, что $\chi\varphi \in W_2^{s+2}(V_1)$. Опять ~~в~~ качестве χ берем функцию, дополнительно равную 1 в области $V_1' \supset \overline{U}$, расположенной строго внутри V_1. Продолжим рассуждение с заменой V_1 на V_2 и т. д. Если мы придем к тому, что $\chi\varphi \in W_2^m$*, то дальше пользуемся процедурой 4), если дойдем до включения $\chi\varphi \in W_2^{2m}$, то используем 5). Этот процесс повышения гладкости φ может оборваться лишь в связи с недостаточной гладкостью коэффициентов. Ясно также, что его можно было бы начинать и с $s \geqslant 0$. Выясним, какого повышения гладкости можно добиться описанным способом.

Пусть $p < m$, тогда процедуру 1) можно начать с $s = -p$ и продолжать до $s = -1$, последний шаг даст, что $\chi\varphi \in W_2^0 = L_2$. Затем используем процедуру 3), последний шаг можно проделать при $s = p-1$ и он даст $\chi\varphi \in W_2^{s+1} = W_2^p$, т. е. $\varphi \in W_{2,\text{лок}}^p$. Пусть теперь $p \geqslant m$, тогда можно посредством 1) и 3) прийти к $\chi\varphi \in W_2^m$, затем

---

* Для упрощения записи дальше не указывается область в обозначениях пространств.

применить 4), а затем и 5). Последний шаг можно проделать при $|2m-s-1|=p$, т. е. при $-2m+s+1=p$. В результате получим $\chi\varphi \in W_2^{s+1}=W_2^{p+2m}$. Таким образом, $\varphi \in W_{2,\text{лок}}^{p+2m}$.

Если t не большое положительное, то остановка процесса повышения произойдет раньше — последнее s, которое можно еще повысить, удовлетворяет равенству $t=s-2m+1$, в результате получим вхождение в $W_2^{s+1}=W_2^{t+2m}$.

Теорема в локальной формулировке доказана. Во всей G она следует из доказанного и леммы 3.2, гл. II.

6. Гладкость вплоть до границы. Покажем, что методика предыдущего пункта позволяет устанавливать гладкость обобщенных решений вплоть до границы области. В основном рассмотрим случай нулевых граничных условий, для которых мы можем сформулировать сейчас наиболее законченные результаты. Общий случай будет рассмотрен в п. 12, § 6. Ниже используются определения стр. 109—110.

Теорема 4.6. *Пусть выражение L порядка $2m$ сильно эллиптично, его коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+p}(G \cup \Gamma_0)$, где $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ кусок класса C^{2m+p} $(p \geqslant 0)$. Предположим, что функция $\varphi \in W_2^s(G)$ $(s=\ldots,-1,\ 0,\ 1,\ldots)$ удовлетворяет уравнению $Lu=f$ внутри G вплоть до куска границы Γ_0, где заданы нулевые граничные условия (т. е. $D^\alpha u|_{\Gamma_0}=0$, $|\alpha| \leqslant m-1$). Здесь $f \in W_{2,\text{лок}}^{s-2m}(G,\Gamma_0)$, т. е. входит в W_2^{s-2m} внутри G вплоть до Γ_0. Удовлетворение уравнению означает, что*

$$(\varphi, L^+v)_0=(f,v)_0 \tag{4.39}$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m+\max(-s,0)}(G)$, дополнительно аннулирующихся в окрестностях множества $\Gamma \setminus \Gamma_0$.

Предположим, что в действительности функция $f \in W_{2,\text{лок}}^t(G,\Gamma_0)$, где $t>s-2m$ произвольного знака. Тогда: 1) при $p<m$ и $s \in [-p,p)$ автоматически заключаем, что $\varphi \in W_{2,\text{лок}}^{\min(t+2m,p)}(G,\Gamma_0)$; 2) при $p \geqslant m$ и $s \in [-p,p+2m)$ — что $\varphi \in W_{2,\text{лок}}^{\min(t+2m,p+2m)}(G,\Gamma_0)$. Более того, если $\min$ окажется положительным, то φ (точнее, функция, с которой φ совпадает) вместе с некоторым количеством производных аннулируется на Γ_0. Именно, в случае 1) $D^\alpha\varphi|_{\Gamma_0}=0$, $|\alpha| \leqslant \min(t+2m,p)-1$; в случае 2) $D^\alpha\varphi|_{\Gamma_0}=0$, $|\alpha| \leqslant \min(t+2m,m)-1$.

Доказательство теоремы является развитием рассуждений на стр. 191—195 и опирается на теорему 3.6, наметим его. Пусть x_0—внутренняя точка куска Γ_0, U—шар с центром x_0 достаточно малого радиуса, область $V \subset G$ с достаточно гладкой границей γ охватывает $U \cap G$ так, как указано на рис. 4. Предполагается, что диаметр V настолько мал, что задача $L^+u=f$ в V с нулевыми граничными условиями разрешима: выполнена теорема 3.6 с достаточно большими $|s|$. Функция $\chi(x) \in C^\infty(E_n)$ неотрицательна и аннулируется в окрестности множества $G \setminus V$. Мы сейчас выясним, как выглядят этапы 1) — 5) предыдущего доказательства.

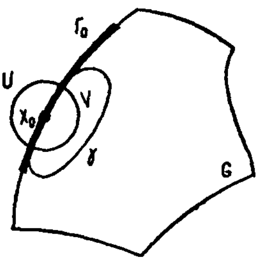


Рис. 4.

1) Пусть $s<0$, $\sigma=-s$, если $\varphi \in W_2^s(G)=W_2^{-\sigma}(G)$ удовлетворяет в смысле определения (4.39) уравнению $Lu=f$ с $f \in W^t_{2.\text{лок}}(G, \gamma \cap \Gamma_0)$ $(t>-\sigma-2m)$, то

$$\chi\varphi \in W_2^{-\sigma+1}(V). \tag{4.40}$$

Доказательство этого факта ничем не отличается от приведенного на стр. 192—193. Как и там, необходимая гладкость коэффициентов такова: $a_\alpha \in C^{|\alpha|+|s|}(G)$; кусок Γ_0 границы, очевидно, должен быть класса $C^{2m+|s|}$.

2) При попытке доказательства равенства (4.36) возникают существенные трудности, связанные с тем, что $\chi(x)$ вблизи Γ_0 не обязана обращаться в нуль и свободно перебрасывать производные в (4.35) нельзя. Поэтому теперь 2) выглядит следующим образом: пусть $u \in W_2^s(V)$ $(s>0)$ и такова, что при $|\alpha| \leqslant \min(s-1, m-1)$ $D^\alpha u$ аннулируется на части Γ_0' границы V, лежащей внутри Γ_0. Тогда заведомо

$$(u, M_\chi w)_0 = (\psi, w)_0 \quad (w \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(V) \cap W_2^{2m}(V)), \tag{4.41}$$

где $\psi \in W_2^{-2m+s+1}(V)$; при $s=0$ равенство (4.41) справедливо для любой $u \in L_2(V)$. В такой формулировке это утверждение доказывается точно так же, как раньше. Установим теперь (4.40) при $s \geqslant 0$.

3′) Пусть $s=0$. Равенство (4.41) справедливо для любой $u \in L_2(V)$, поэтому доказательство 3) на стр. 193—194 проходит и мы получаем (4.40). Отметим, что функция μ, с которой совпадает $\chi\varphi$, согласно конструкции входит в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(V)$.

3″) Пусть $0<s<m$. Включение $\chi\varphi \in W_2^{s+1}(V)$ справедливо для $\varphi \in W_2^s(G)$ дополнительно таких, что $D^\alpha\varphi|_{\Gamma_0'}=0$ при $|\alpha| \leqslant s-1$; функция $\chi\varphi$ совпадает с $\mu \in \overset{\circ}{W}{}_2^{s+1}(V)$. Действительно, (4.41) теперь можно писать для $u=\varphi$, и поэтому доказательство 3) на стр. 193—194

переносится; μ по построению входит в $\overset{\circ}{W}{}_2^{s+1}(V)$. Для проведения пунктов 3') и 3") необходимо, чтобы $a_\alpha \in C^{|\alpha|+s+1}(G)$; Γ_0 должна быть класса C^{2m+s+1}.

4) Пусть $m \leqslant s < 2m$. Включение $\chi\varphi \in W_2^{s+1}(V)$ справедливо для $\varphi \in W_2^s(G)$ дополнительно таких, что $D^\alpha\varphi|_{\Gamma_0'} = 0$ при $|\alpha| \leqslant m-1$; функция $\chi\varphi$ совпадает с $\mu \in W_2^{\prime s+1}(V)$. В самом деле, опять можно писать (4.41), и поэтому прежнее доказательство переносится. Оценка (4.38) согласно гомеоморфизму между 3-й парой пространств в (3.71) будет выглядеть так:

$$|(\theta, w)_0| \leqslant \|\theta\|_{-2m+s+1} \|w\|_{2m-s-1} \leqslant C \|\theta\|_{-2m+s+1} \|L^+w\|_{W_2^{\prime -s-1}(V)}$$

$$(w \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(V) \cap W_2^{2m}(V)).$$

Следовательно, выражение $(\theta, w)_0$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал над L^+w, меняющимися по плотному в силу теоремы 3.6 множеству в $W_2^{\prime -s-1}(V)$. Этот функционал представим в виде

$$(\theta, w)_0 = (\mu, L^+w)_0, \quad \mu \in W_2^{\prime s+1}(V) = \overset{\circ}{W}{}_2^m(V) \cap W_2^{s+1}(V) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^m(G).$$

Отсюда и следует утверждение 4). Требуемые ограничения гладкости: $a_\alpha \in C^{|\alpha|+|2m-s-1|}(G)$, Γ_0 класса $C^{2m+|2m-s-1|}$.

5) Случай $s \geqslant 2m$ исследуется аналогично 4); ограничения гладкости такие же, как и там.

Теперь легко доказать теорему в локальной форме: пусть $\varphi \in W_2^s(G)$ является решением в описанном в теореме смысле уравнения $Lu = f$. Тогда $\varphi \in W_{2,\text{лок}}^{\min(t+2m, p)}(U \cap G, \gamma \cap \Gamma_0)$ $(p < m,\ s \in [-p, p))$ или $\varphi \in W_{2,\text{лок}}^{\min(t+2m, p+2m)}(U \cap G, \gamma \cap \Gamma_0)$ $(p \geqslant m,\ s \in [-p, p+2m))$, причем имеет место указанная в теореме аннуляция φ и ее производных на $\gamma \cap \Gamma_0$. Доказательство этого факта проводится точно так же, как и доказательство на стр. 194—195, нужно только области вида V_j, V_j' сжимать в области такого же вида, скользя по границе Γ_0. То, что решение φ (начиная со случая 3") должно по предположению аннулироваться вместе с некоторым количеством производных на Γ_0', процессу доказательства не помешает — предыдущий шаг обеспечивает в точности требуемую аннуляцию для $\chi\varphi$.

Переход к общей формулировке осуществляется при помощи локальной формулировки теоремы 4.5 и варианта леммы 3.2, гл. II, указанного на стр. 109. Теорема доказана.

В заключение сформулируем простейший результат этого типа для граничного условия $\left.\frac{\partial u}{\partial \mu}+\sigma(x)u\right|_{\Gamma_0}=0$ $(\sigma \in C^1(\Gamma_0))$; доказательство опирается на гомеоморфизмы 1) и 2), указанные в конце п. 7, § 3, и на гомеоморфизм, сопряженный к 1) (он там не выписывался).

Теорема 4.7. *Пусть выражение L второго порядка сильно эллиптично, $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(G \cup \Gamma)$. На Γ расположен кусок Γ_0 класса C^2, где задано граничное условие* (гр):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mu}+\sigma(x)u\right|_{\Gamma_0}=0 \qquad (\sigma \in C^1(\Gamma_0));$$

вблизи Γ_0 коэффициенты $p_j(x)$ выражения L в представлении (2.4) *предполагаются вещественными. Предположим, что функция $\varphi \in W_2^{-1}(G)$ удовлетворяет уравнению $Lu=f \in W^t_{2,\text{лок}}(G,\Gamma_0)$ $(t=-1,0)$ внутри G вплоть до куска Γ_0. Тогда $\varphi \in W^{t+2}_{2,\text{лок}}(G,\Gamma_0)$ и при $t=0$ удовлетворяет на Γ_0 рассматриваемому граничному условию.*

Теорема устанавливается посредством рассуждений, подобных приведенным на стр. 191—198. Отметим одну трудность. Для рассматриваемого граничного условия при уменьшении диаметра области V задача $Lu=f$, $u \in$ (гр), может продолжать оставаться неразрешимой при любой f. Поэтому поступаем так: пусть $f \in W_2^{-1}(V)$, тогда $\varphi \in W_2^{-1}(V)$ является решением уравнения $Lu+\lambda u=f+\lambda\varphi \in W_2^{-1}(V)$ при любом значении λ. Подбирая λ достаточно положительным, добьемся, что для выражения $Lu+\lambda u$ с соответствующим граничным условием на границе V справедливы утверждения о гомеоморфизме, сформулированные в конце п. 7, § 3. Это дает возможность установить, что $\varphi \in W^1_{2,\text{лок}}(G,\Gamma_0)$. В случае $f \in L_2(V)$ $f+\lambda\varphi \in W_2^{-1}(V)$, поэтому предыдущее рассуждение дает: $\varphi \in W_2^1(V) \subset L_2(V)$. Теперь $f+\lambda\varphi \in L_2(V)$, повторяя рассуждения, получим, что $\varphi \in W^2_{2,\text{лок}}(G,\Gamma_0)$.

7. **Применение к краевым задачам и задачам на собственные значения.** Применение теорем 4.1, 4.3, 4.5—4.7 к краевым задачам ясно: если u является обобщенным решением уравнения $Lu=f$ в области G (ограниченной или нет) в том смысле, что

$$(u, L^+v)_0=(f, v)_0 \tag{4.42}$$

для достаточно большого запаса функций, финитных относительно G и ∞, то в случае эллиптичности или сильной эллиптичности порядок обобщенности решения в окрестности внутренней точки $x_0 \in G$ можно, вообще говоря, уменьшить, если f и коэффициенты $a_\alpha(x)$ выражения L вблизи x_0 достаточно гладки. Если равенство (4.42) имеет место не только для финитных v, а и для v, удовлетворяющих тем или иным однородным граничным условиям вблизи участка границы, то такое улучшение гладкости решения можно произвести и в окрестности точки $x_0 \in \Gamma_0$, если дополнительно к гладкости f и $a_\alpha(x)$ вблизи x_0 известна гладкость Γ_0. Всегда при повышении гладкости f, $a_\alpha(x)$ и Γ_0 повышается гладкость u.

Подобная ситуация имеет место и для собственных функций, т. е. обобщенных решений задачи $Lu - \lambda u = 0$, $u \in$ (гр). Так как улучшения гладкости, которые дают выражения $L - \lambda E$ и L одинаковы, то характер гладкости обобщенной собственной функции определяется гладкостью коэффициентов выражения L и гладкостью участков границы.

8. **Минимальный и максимальный операторы, порожденные сильно эллиптическим выражением.** Сейчас легко выяснить структуру областей определения этих операторов. Ниже все рассмотрения ведутся в пространстве $L_2(G)$; G ограничена.

Теорема 4.8. *Пусть L — сильно эллиптическое выражение порядка $2m$ с обычными условиями гладкости коэффициентов $a_\alpha(x)$; Γ кусочно-гладкая. Утверждается: 1) область определения минимального оператора Λ совпадает с $\overset{\circ}{W}{}_2^{2m}(G)$; 2) максимальный оператор Л совпадает с замыканием оператора $u \to Lu$ $(u \in C^\infty(G \cup \Gamma))$, при этом предполагается, что $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+m}(G \cup \Gamma)$.*

Доказательство 1) вытекает из второго неравенства в (1.29) (при $s = 0$) и того очевидного обстоятельства, что области определения минимальных операторов, построенных по L и $L + kE$, совпадают.

Для доказательства второй части воспользуемся леммой 2.2, гл.II. Продолжим коэффициенты L на все E_n так, чтобы сохранилась сильная эллиптичность и их гладкость. Равенство (2.15), гл. II, показывает, что внутри некоторой фиксированной ограниченной области G', строго содержащей внутри себя G, $L^+\hat{u} = h \in L_2(G')$. Согласно теореме 4.5 (при $s = 0$, $t = 0$, $p = m$) $\hat{u} \in W^{2m}_{2,\text{лок}}(G')$; вместе с тем $\hat{u}(x) = 0$, $x \in G' \setminus G$. Отсюда следует, что на Γ все производные от u порядка $\leqslant 2m - 1$ аннулируются, т. е. $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2m}(G) = \mathfrak{D}(\Lambda^+)$. Итак, предположения леммы выполнены; $Л = \bar{A}$. Теорема доказана.

Отметим, что $\mathfrak{D}(Л)$ не совпадает с $W_2^r(G)$. Так, пусть $G \subset E_3$, $L = \Delta = L^+$. Функция $u(x) = \dfrac{1}{|x - x_0|}$, где $x_0 \in \Gamma$, входит в $\mathfrak{D}(Л)$: для любой $v \in C_0^\infty(G)$ имеем $\left(\Delta v, \dfrac{1}{|x - x_0|}\right)_0 = \left(v, \Delta_x \dfrac{1}{|x - x_0|}\right)_0 = (v, 0)_0$, т. е $u \in \mathfrak{D}((\Lambda^+)')^* = \mathfrak{D}(Л)$ и $Лu = 0$. Вместе с тем очевидно $u \,\overline{\in}\, W_2^2(G)$.

§ 5. Функция Грина

Рассмотрим обобщенное решение задачи $Lu = f$, $u \in$ (гр), как действие некоторого оператора на f. В случае эллиптических уравнений этот оператор, как правило, непрерывно действует в L_2. Мы сейчас покажем, что он является интегральным — его ядро носит название функции Грина — и изучим свойства этой функции, а также установим некоторые смежные результаты. При изучении поведения на границе области функции Грина мы будем пользоваться теоремой 4.6 и поэтому вынуждены ограничиться сильно эллиптическими выражениями и нулевыми граничными условиями. Вместе с тем изложение будет вестись так, что читатель без труда сформулирует соответствующие утверждения для общих эллиптических уравнений и условий, если воспользуется результатами п. 12, § 6, о повышении гладкости. Ниже G считается ограниченной, случай неограниченной G будет рассмотрен в последнем пункте.

1. Существование и свойства функции Грина внутри области. Докажем следующую общую теорему.

Теорема 5. 1. *Пусть L — эллиптическое выражение порядка r, коэффициенты которого $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+r+p}(G)$; здесь $p \geqslant n+1$. Предположим, что существует оператор R, непрерывно действующий в $L_2(G)$ и такой, что Rf и R^*f при любом $f \in L_2(G)$ являются обобщенными решениями внутри G соответственно уравнений $Lu = f$ и $L^+u = f$. Утверждается, что справедливо интегральное представление*

$$(Ru, v)_0 = \int_G \int_G R(x, y)\, u(y) \overline{v(x)}\, dx dy \qquad (u, v \in C_0(G)). \tag{5.1}$$

Ядро $R(x, y)$ $(x, y \in G; x \neq y)$ обладает следующими свойствами:
1) у него существуют и непрерывны относительно $(x, y) \in G \times G$, $x \neq y$ все производные вида $D_x^\alpha D_y^\beta R$ $(|\alpha|, |\beta| \leqslant r+p)$;
2) по x и y справедливы равенства

$$(L_x R)(x, y) = \delta_y, \qquad (L_y^\oplus R)(x, y) = \delta_x; \tag{5.2}$$

3) при $|x-y|$ достаточно малом

$$R(x, y) = e(x, y) + r(x, y), \tag{5.3}$$

где $e(x, y)$ — фундаментальное решение для выражения L, а $r(x, y)$ — указанное число раз непрерывно дифференцируемая функция по $(x, y) \in G \times G$ (таким образом, при $x = y$ $R(x, y)$ имеет особенность вида $\frac{1}{|x-y|^{n-r}}$, если $n > r$, вида $\log|x-y|$, если $n = r$, и ограничено, если $n < r$).

Доказательство. Согласно теореме 3.4, гл. I, для $(Ru, v)_0 = B(u, v)$ справедливо представление

$$(Ru, v)_0 = \int_G \int_G K(x, y)(\mathrm{D}u)(y)\overline{(\mathrm{D}v)}(x)\,dx\,dy$$

$$(K(x, y) \in C(E_n \times E_n); \quad \mathrm{D} = D_1, \ldots, D_n; \quad u, v \in C_0^n(G)). \tag{5.4}$$

Обозначим $O = (G \times G) \setminus \Omega$, где Ω — совокупность точек $(x, x) \in E_n \times E_n$. Покажем, что обобщенное ядро типа Л. Шварца $\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y K$ удовлетворяет внутри O уравнениям

$$L_x U = 0, \quad L_y^{\oplus} U = 0 \tag{5.5}$$

в смысле определения (4.17). Будем пользоваться эквивалентным определением (4.18). Пусть $v', v'' \in C_0^\infty(G)$ таковы, что произведение их носителей лежит внутри O и поэтому носители не пересекаются; при помощи (5.4) и равенства $\mathrm{D}^+ = (-1)^n \mathrm{D}$ получим требуемое соотношение:

$$\int_G \int_G K(x, y)\overline{(\mathrm{D}^+ L^+ v')(x)}\,\overline{(\mathrm{D}^+ v'')(y)}\,dx\,dy = (R\bar{v}'', L^+ v')_0 = (\bar{v}'', v')_0 = 0,$$

$$\int_G \int_G K(x, y)\overline{(\mathrm{D}^+ v')(x)}\,\overline{(\mathrm{D}^+ \bar{L} v'')(y)}\,dx\,dy = (RL\bar{v}'', v')_0 = \overline{(R^* v', L\bar{v}'')_0} =$$

$$= \overline{(v', \bar{v}'')_0} = (\bar{v}'', v')_0 = 0. \tag{5.6}$$

Применяя теорему 4.2, найдем функцию $R(x, y)$, $(x, y) \in O$, обладающую указанными в 1) свойствами гладкости, удовлетворяющую равенствам (5.2) (так как сейчас $x \neq y$, то $\delta_y = \delta_x = 0$) и совпадающую внутри O с $\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y K$ как функционал:

$$\int_G \int_G R(x, y)\overline{V(x, y)}\,dx\,dy = \int_G \int_G K(x, y)\overline{(\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y V)(x, y)}\,dx\,dy \quad (V \in C_0^\infty(O)). \tag{5.7}$$

Обозначим через $W \subseteq G \times G$ окрестность множества $\Omega \cap (G \times G)$, в которой существует фундаментальное решение $e(x, y)$. Функция $e(x, y)$ суммируема внутри W (см. 2) на стр. 178) и поэтому может рассматриваться как обобщенная функция T Л. Шварца над $C_0^\infty(W)$. Покажем, что она удовлетворяет внутри W уравнениям

$$L_x U = Д, \quad L_y^{\oplus} U = Д, \tag{5.8}$$

где обобщенная функция Д над $C_0^\infty(W)$ определяется равенством $(Д, U) = \int_G \overline{U(x, x)}\,dx$ $(U \in C_0^\infty(W))$. В самом деле, пусть $v', v'' \in C_0^\infty(G)$

таковы, что произведение их носителей лежит внутри W; используя свойства 1) фундаментального решения, найдем требуемые равенства:

$$\int\limits_W\int e(x, y)\overline{(L+v')(x)\, v''(y)}\, dxdy = (\bar{v}'', v')_0 = (Д, v'(x)\, v''(y)),$$

$$\int\limits_W\int e(x, y)\, \overline{v'(x)}\, \overline{(Lv'')(y)}\, dxdy = (\bar{v}'', v')_0 = (Д, v'(x)\, v''(y)).$$

С другой стороны D_xD_yK также удовлетворяет внутри W уравнениям (5.8) — это следует из соотношений (5.6), если в них взять v', v'' с произведением носителей, лежащим внутри W. Поэтому $D_xD_yK - T$ внутри W удовлетворяет уравнениям (5.5) и к ней применима теорема 4.2. Согласно этой теореме найдется достаточно гладкая функция $r(x, y)$ $((x, y) \in W)$ такая, что

$$\int\limits_W\int K(x, y)\overline{(D_xD_yV)(x, y)}\, dxdy - \int\limits_W\int e(x, y)\overline{V(x, y)}\, dxdy =$$

$$= \int\limits_W\int r(x, y)\overline{V(x, y)}\, dxdy \quad (V \in C_0^\infty(W)). \tag{5.9}$$

Возьмем теперь $V(x, y)$, дополнительно аннулирующуюся в окрестности диагонали Ω. Для такой функции справедливы оба соотношения (5.7) и (5.9), откуда $\int\limits_W\int R\bar{V}dxdy = \int\limits_W\int(e+r)\bar{V}dxdy$, что влечет (5.3).

Докажем равенство (5.1). Предварительно установим, что (5.7) справедливо при любой $V \in C_0^\infty(G \times G)$. Для доказательства представим V в виде $V = V_1 + V_2$, где $V_1 \in C_0^\infty(G \times G)$ и дополнительно аннулируется в некоторой окрестности диагонали Ω, а $V_2 \in C_0^\infty(G\times G)$ и аннулируется вне строго внутренней подобласти области W. Используя (5.7), (5.9) и (5.3), получим (5.7) для $V \in C_0^\infty(G \times G)$:

$$\int\limits_G\int\limits_G K\overline{D_xD_yV}\, dxdy = \int\limits_G\int\limits_G K\overline{D_xD_yV_1}dxdy + \int\limits_W\int K\overline{D_xD_yV_2}dxdy =$$

$$= \int\limits_G\int\limits_G R\bar{V}_1dxdy + \int\limits_W\int (e+r)\bar{V}_2dxdy = \int\limits_G\int\limits_G R\overline{(V_1+V_2)}\, dxdy =$$

$$= \int\limits_C\int\limits_G R\bar{V}dxdy.$$

Полагая теперь в доказанном соотношении $V(x, y) = v(x)\overline{u(y)}$ $(u, v \in C_0^\infty(G))$, при помощи (5.4) найдем, что (5.1) справедливо при указанных u, v, а значит и при $u, v \in C_0(G)$.

Нам осталось установить равенство (5.2) для любых $x, y \in G$. Пусть $v', v'' \in C_0^\infty(G)$, согласно (5.1) имеем

$$\int_G \int_G R(x, y) \overline{(L^+v')(x)}\, \overline{v''(y)}\, dx dy = (R\overline{v''}, L^+v')_0 = (\overline{v''}, v')_0 = $$
$$= \int_G \overline{v''(y)}\, \overline{v'(y)}\, dy.$$

Благодаря произвольности v'' отсюда следует

$$\int_G R(x, y)\overline{(L^+v')(x)}\, dx = \overline{v'(y)}\ (v' \in C_0^\infty(G); y \in G), \quad \text{т. е.} \quad L_x R = \delta_y.$$

Аналогично устанавливается второе из равенств (5.2). Теорема доказана.

Рассмотрим задачу с параметром λ (L эллиптическое)

$$Lu - \lambda u = f \in L_2(G), \quad u \in (\text{гр}), \tag{5.10}$$

удовлетворяющую условиям теоремы 3.5, гл. II. Решение этой задачи при λ, отличном от собственных значений λ_k, существует и имеет вид $u = (A - \lambda E)^{-1} f \in W_2^m(G) \subset L_2(G)$, где A — оператор, построенный на стр. 113. Так как согласно лемме 3.3, гл. II, $(A - \lambda E)^{-1*} f$ решает сопряженную задачу, то, применяя доказанную только что теорему, заключаем, что наше решение имеет вид

$$u(x) = \int_G R(x, y; \lambda) f(y)\, dy \quad (f \in C_0(G) \subset L_2(G); x \in G). \tag{5.11}$$

Ядро $R(x, y; \lambda)$ ($x, y \in G$) *при каждом* $\lambda \neq \lambda_k$ *существует и обладает свойствами* 1) — 3) *теоремы 5.1, оно называется функцией Грина задачи* (5.10) (*или ядром резольвенты* $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$). Из упомянутой леммы 3.3 следует, что $\overline{R(y, x; \bar{\lambda})}$ является функцией Грина сопряженной задачи. В частности, функция Грина существует для задач с нулевыми граничными условиями или условиями типа третьей краевой задачи (см. теоремы 2.1—2.3).

2. **Существование и свойства функции Грина вплоть до границы области.** Рассмотрим опять выражение L и оператор R теоремы 5.1; будем дополнительно предполагать, что Rf и R^*f при любом $f \in L_2(G)$ являются обобщенными решениями соответственно задач $Lu = f$, $u \in (\text{гр})$, и $L^+v = f$, $v \in (\text{гр})^+$, здесь (гр) — некоторые граничные условия. Пусть $l = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, применим к форме $B(u, v) = (Ru, v)_0$ теорему 3.3, гл. I. Согласно этой теореме найдется обобщенное ядро $\mathrm{R} \in W_2^{-l}(G) \otimes W_2^{-l}(G)$ такое, что для любых $u, v \in W_2^l(G)$

справедливо равенство

$$(Ru, v)_0 = (\mathrm{R}, v(x)\overline{u(y)})_0^*. \qquad (5.12)$$

Ясно, что внутри $G \times G$ это ядро совпадает с $R(x, y)$ и поэтому там достаточно гладко — совпадение следует из равенства (см. (5.1)): $(\mathrm{R}, v'(x)v''(y))_0 = (R\bar{v}'', v')_0 = \int\limits_G \int\limits_G R(x, y)\overline{v''(y)}\,\overline{v'(x)}\,dxdy = (R(x, y), v'(x)v''(y))_0$ $(v', v'' \in C_0^\infty(G))$. Вместе с тем во всей $(G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma)$ R не перестает быть, вообще говоря, обобщенным.

Естественно, что R по x и y удовлетворяет граничным условиям. Однако это удовлетворение в связи с обобщенностью R нужно понимать должным образом, аналогичным определению, по существу принятому нами для функций на G: обобщенная функция $\alpha \in W_2^{-\sigma}(G)$ $(\sigma \geqslant 0)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f \in W_2^{-r-\sigma}(G)$ и граничному условию (гр), если справедливо равенство $(\alpha, L^+v)_0 = (f, v)_0$ не только на $v \in C_0^\infty(G)$, но и на $v \in W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+\sigma}(G)$ (см. стр. 105).

Произведем необходимые построения. Обозначим, как и раньше, через Д обобщенную функцию из $W_2^{-l}(G) \otimes W_2^{-l}(G)$, определенную соотношением $(Д, U)_0 = \int\limits_G \overline{U(x, x)}\,dx$ $(U \in W_2^l(G) \otimes W_2^l(G))$. Такое определение корректно: для $u \in W_2^l(G)$ $|u(x)| \leqslant C\|u\|_l$ равномерно по $x \in G$, поэтому при $U(x, y) = u'(x)u''(y)$ $(u', u'' \in W_2^l(G))$:

$$\left|\int\limits_G \overline{U(x,x)}\,dx\right| \leqslant C_1\|u'\|_l\|u''\|_l = C_1\|U\|_{W_2^l(G)\otimes W_2^l(G)};$$

эта оценка затем распространяется на все $U \in W_2^l(G) \otimes W_2^l(G)$ при помощи утверждения на стр. 55—56.

Из (5.2) и (5.12) следует, что внутри $G \times G$ R удовлетворяет уравнениям (5.8). Мы сейчас покажем, что R удовлетворяет этим уравнениям не только внутри $G \times G$, но с некоторым граничным условием и во всей $(G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma)$. Рассмотрим условие $(\text{гр})_x$ для области $G \times G$, которое описывается подпространством $W_2^r(\text{гр}) \otimes W_2^r(G)$ пространства $W_2^r(G) \otimes W_2^r(G)$, и условие $(\text{гр})_y^\oplus$, описывающееся подпространством $W_2^r(G) \otimes \overline{W_2^r(\text{гр})^+}$ (черта обозначает переход к комплексному сопряжению). Тогда

$$(\mathrm{R}, (L_x^+V)(x, y))_0 = (Д, V(x, y))_0 \; (V \in (W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+l}(G)) \otimes W_2^{\max(r,l)}(G)), \qquad (5.13)$$

---

* В действительности R более гладко, чем элементы пространства $W_2^{-l}(G) \otimes W_2^{-l}(G)$ (см (3.7) или (2.20), (2.21), гл. II). Поэтому ограничения на гладкость функций из позитивных пространств в (5.12) и (5.13) могут быть по одной из переменных x или y снижены.

$$(\mathrm{R}, (\overline{L}_y V)(x, y))_0 = (\text{Д}, V(x, y))_0 (V \in W_2^{\max(r,l)}(G) \otimes \overline{(W_2^r(\text{гр}) \cap W_2^{r+l}(G))},$$

т. е. (5.8) выполняется с условиями соответственно $(\text{гр})_x$ и $(\text{гр})_y^{\oplus}$.

Докажем, например, первое из равенств (5.13). Достаточно рассмотреть $V(x, y) = v'(x) v''(y)$, $v' \in W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+l}(G)$, $v'' \in W_2^{\max(r,l)}(G)$; пользуясь (5.12) и тем, что Rf является обобщенным решением задачи $Lu = f$, $u \in (\text{гр})$, получим

$$(\mathrm{R}, (L_x^+ V)(x, y))_0 = (\mathrm{R}, (L^+ v')(x) v''(y))_0 = (R\bar{v}'', L^+ v')_0 =$$
$$= (\bar{v}'', v')_0 = (\text{Д}, v'(x) v''(y))_0.$$

Все сказанное можно резюмировать в виде следующей теоремы.

Теорема 5.2. *Пусть L и R такие же, как в теореме 5.1, $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+r+p}(G \cup \Gamma)$, причем дополнительно известно, что Rf и R^*f при любом $f \in L_2(G)$ являются обобщенными решениями соответственно задач $Lu = f$, $u \in$ (гр), и $L^+ v = f$, $v \in (\text{гр})^+$ ((гр) — некоторые граничные условия). Тогда существует обобщенное ядро $\mathrm{R} \in W_2^{-l}(G) \otimes W_2^{-l}(G)$, где $l = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ такое, что $(Ru, v)_0 = (\mathrm{R}, v(x) \overline{u(y)})_0$ для любых $u, v \in W_2^l(G)$. Внутри области $G \times G$ это ядро совпадает с ядром $R(x, y)$, описанным в теореме 5.1, и поэтому там достаточно гладко. По переменному x оно удовлетворяет граничному условию* (гр), *по переменному y — условию* $(\text{гр})^+$ — *это означает, что выполняются соотношения* (5.13).

Ясно, что благодаря лемме 3.3, гл. II, функцию Грина задачи (5.10) можно определить во всей области $(G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma)$ как обобщенное ядро $\mathrm{R}_\lambda \in W_2^{-l}(G) \otimes W_2^{-l}(G)$, фигурирующее в представлении (5.12), записанном для оператора $R = (A - \lambda E)^{-1}$. Внутри $G \times G$ это ядро совпадает с $R(x, y; \lambda)$. *Для ядра R_λ при каждом $\lambda \neq \lambda_k$ справедлива теорема 5.2.*

3. Принятие функцией Грина граничных условий в классическом смысле. Первый подход. Покажем, что в случае «хороших» граничных условий при достаточной гладкости коэффициентов и границы функция Грина является достаточно гладкой вплоть до границы и удовлетворяет по каждому из переменных этим условиям. Будет приведено три взаимно дополняющих подхода к этому вопросу. Они изложены, соответственно, в пунктах 3, 4 и 5. Первый подход дает гладкость ядра сразу как функции двух переменных и весьма прост, однако он годится для не очень широкого класса задач. Два других подхода изучают $R(x, y)$ по каждому переменному в отдельности. В пунктах 6 и 7 приведены некоторые дополнения.

Применим один искусственный прием. Рассмотрим дифференциальное выражение M относительно $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$, действующее по закону $(MU)(x, y) = (L_x U)(x, y) + (L_y^{*} U)(x, y)$. Если L имеет порядок $2m$ и сильно эллиптично, то M также сильно эллиптично и порядка $2m$ — это следует из того, что для векторов $(\xi, \eta) \in E_{2n}$ $(\xi, \eta \in E_n)$ $(\operatorname{Re} M)_c((x, y), (\xi, \eta)) = (\operatorname{Re} L)_c(x, \xi) + (\operatorname{Re} L)_c(y, \eta)$.

Пусть теперь L порядка $r = 2m$ и оператор R такие, как в теореме 5.2; R — ядро из $W_2^{-l}(G) \otimes W_2^{-l}(G)$, отвечающее R. Будем рассматривать обобщенные ядра из $W_2^{-l}(G) \otimes W_2^{-l}(G)$ как обобщенные функции из $W_2^{-2l}(G \times G)$ (см. теорему 3.2, гл. I); из того, что ядро R удовлетворяет внутри $G \times G$ уравнениям (5.8), вытекает, что $\mathrm{R} \in W_2^{-2l}(G \times G)$ является обобщенным решением внутри $G \times G$ уравнения

$$MU = 2Д \in W_2^{-2l}(G \times G). \tag{5.14}$$

Более того, нетрудно показать, что это уравнение удовлетворяется вплоть до границы; применяя теперь теорему 4.6 к M и R, получим необходимую гладкость R вплоть до границы.

В самом деле, границей области $G \times G$ служит множество $S = (\Gamma \times (G \cup \Gamma)) \cup ((G \cup \Gamma) \times \Gamma)$. Пусть $\Gamma_1 (\Gamma_2)$ — кусок на границе $\Gamma, G_1 \subseteq G$ $(G_2 \subseteq G)$ — подобласть, примыкающая к Γ по $\Gamma_1 (\Gamma_2)$. Предположим, что расстояние между G_1 и G_2 положительно; Γ_1, Γ_2 могут быть и пустыми. Множество $S_0 = (\Gamma_1 \times G_2) \cup (G_1 \times \Gamma_2)$ является куском на $2n-1$-мерной поверхности S; если Γ_1 и Γ_2 были $2m + q$ $(q \geqslant m, n + 2)$ раз непрерывно дифференцируемыми кусками, то S_0 будет куском с той же гладкостью. Пусть в некоторой окрестности множеств $G_1 \cup \Gamma_1$ и $G_2 \cup \Gamma_2$ выражение L сильно эллиптично и коэффициенты $a_\alpha \in C^{|\alpha|+q}$. Тогда в $2n$-мерной окрестности множества S_0 выражение M также сильно эллиптично и его коэффициенты b_α будут иметь гладкость $C^{|\alpha|+q}$.

Предположим теперь, что (гр) на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ нулевые: функции из W_2^{2m}(гр) на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ выделены условием $D^\alpha u|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0$ $(|\alpha| \leqslant m - 1)$. Тогда оба соотношения (5.13) выполняются для функций $V(x, y) \in W^{2m+n+2}(G \times G)$, все производные которых (по x, y и смешанные) до порядка $m-1$ включительно аннулируются на S_0 и которые сами аннулируются в $2n$-мерных окрестностях замыкания области $(G \times G) \setminus (G_1 \times G_2)$. Это вытекает из того, что любую такую функцию можно аппроксимировать вместе с достаточным количеством производных в требуемой метрике функциями классов $\overline{(W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+l}(G)) \otimes W_2^{\max(r,l)}(G)}$ и $\overline{W_2^{\max(r,l)}(G) \otimes (W_2^r(\text{гр}) \cap W_2^{r+l}(G))}$, для которых (5.13) выполняются (поясним, что $\mathrm{R} \in W_2^{-l}(G) \otimes W_2^{-l}(G) \subset W_2^{-2l}(G \times G)$, где $l = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$; поэтому $(\mathrm{R}, U)_0$ имеет смысл для $U \in W_2^{n+2}(G \times G)$, так как $2l \leqslant n + 2$).

Так как $M^+ = L_x^+ + \bar{L}_y$, то из (5.13) для указанных V следует: $(\mathrm{R}, M^+V)_0 = (2Д, V)_0$. Расстояние между G_1 и G_2, как говорилось, положительно, поэтому $G_1 \times G_2$ находится на положительном расстоянии от диагонали $x = y$ области $G \times G$. Следовательно, в окрестности этой диагонали $V = 0$ и, так как Д сосредоточено на диагонали, $(Д, V)_0 = 0$. Таким образом, сейчас $(\mathrm{R}, M^+V)_0 = 0$. Применяя теорему 4.6 (с q вместо p), заключаем, что R внутри $G_1 \times G_2$ вплоть до куска S_0 границы этой области входит в класс W_2^{2m+q} (т. е. $\mathrm{R} \in W_{2,\text{лок}}^{2m+q}(G_1 \times G_2, S_0))$ и удовлетворяет на S_0 нулевым граничным условиям. Применение этой теоремы возможно: $q \geqslant m$ и $s = -2l \in [-q, q+2m)$ $(-2l \geqslant -(n+2) \geqslant -q)$. Мы пришли к следующей теореме.

Теорема 5.3. *Рассмотрим выражение L порядка $r = 2m$, R и (гр) — такие же, как в теоремах 5.1 и 5.2. Пусть G_1 и G_2 — некоторые подобласти G, находящиеся на положительном расстоянии и примыкающие к Γ соответственно по кускам Γ_1 и Γ_2. Граничные условия на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ нулевые: $D^\alpha u|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0$ $(|\alpha| \leqslant m-1)$. Если Γ_1 и Γ_2 класса C^{2m+q} $(q \geqslant m, n+2)$, в $G_1 \cup \Gamma_1$ и $G_2 \cup \Gamma_2$ L сильно эллиптично и коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+q}(G_i \cup \Gamma_i)$ $(i = 1, 2)$, то*

$$R(\cdot, \cdot) \in W_{2,\text{лок}}^{2m+q}(G_1 \times G_2, (\Gamma_1 \times G_2) \cup (G_1 \times \Gamma_2)),$$

т. е. ядро $R(x, y)$ входит внутри $G_1 \times G_2$ вплоть до части $(\Gamma_1 \times G_2) \cup (G_1 \times \Gamma_2)$ границы этой области в класс W_2^{2m+q} по переменной (x, y). Удовлетворяются граничные условия:

$$(D_x^\alpha R)(x, y)\big|_{x \in \Gamma_1, y \in G_2} = 0, \quad (D_y^\beta R)(x, y)\big|_{x \in G_1, y \in \Gamma_2} = 0 \quad (|\alpha|, |\beta| \leqslant m-1).$$

Изложенная выше методика исследования гладкости $R(x, y)$ может быть перенесена и на некоторые другие граничные условия (например, типа $\left.\frac{\partial u}{\partial \mu} + \sigma(x) u\right|_\Gamma = 0$ для уравнений второго порядка). Подчеркнем, что сильная эллиптичность L существенна: она обеспечивала сильную эллиптичность M (это требование на L может быть несколько ослаблено путем построения более общего выражения M, именно, можно положить $(MU)(x, y) = A(x, y)(L_x U)(x, y) + B(x, y)(L_y^{\oplus} U)(x, y)$, где A и B — подбираемые коэффициенты).

4. Дифференциальные выражения высокого порядка. Второй подход. Изложим один прием, пригодный для выражений порядка $r > \frac{n}{2}$ и не зависящий от вида (гр).

Теорема 5.4. *Предположим, что выполнены условия только теоремы 5.1, причем выражение L высокого порядка: $r > \frac{n}{2}$. В этом* *случае ядро $R(x, y)$ при фиксированном $x \in G$ ($y \in G$) входит в $L_2(G)$ по y (по x), т. е. является ядром Карлемана. Для любых $x \in G$ и $f \in L_2(G)$ можно написать*

$$(Rf)(x) = \int\limits_G R(x, y) f(y)\, dy, \quad (R^*f)(x) = \int\limits_G \overline{R(y, x)} f(y)\, dy. \tag{5.15}$$

Более того, интегралы

$$\int\limits_G |R(x, y)|^2 dy, \quad \int\limits_G |R(x, y)|^2 dx \tag{5.16}$$

ограничены, когда x и y меняются строго внутри G.

Доказательство основывается на следующей лемме.

Лемма 5.1. *Пусть внутри некоторого шара $O \subset G$ радиуса r функция $g \in L_2(O)$ является обобщенным решением уравнения $Lu = f \in L_2(O)$ с рассматриваемым L. Если радиус r достаточно мал, то для $x \in O_{\frac{r}{2}}$ ($O_{\frac{r}{2}}$ — шар с тем же центром, что и у O, но с радиусом в два раза меньшим) справедливо представление*

$$g(x) = \int\limits_O A(x, \xi) g(\xi)\, d\xi + \int\limits_O B(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{5.17}$$

где ядра $A(x, \xi)$ и $B(x, \xi)$ ($x, \xi \in O$) входят по ξ в $L_2(O)$, причем их нормы ограничены равномерно по $x \in O_{\frac{r}{2}}$.

Доказательство вытекает из соотношения (4.16). В самом деле, будем считать $N = E$ и положим $O = U_{2R}$. Так как в (4.16) $v_0 \in C_0^\infty(O_{\frac{r}{2}})$ произвольна, то это соотношение эквивалентно равенству

$$\int\limits_O (g(x) - \theta(x))\, \overline{L_x^+[\overline{e(\xi, x)}[k(|\xi - x|) - 1]]}\, dx + g(\xi) - \theta(\xi) = 0 \tag{5.18}$$

$$(\xi \in O_{\frac{r}{2}}),$$

где $\theta(x) = \int\limits_O e(x, \eta) f(\eta)\, d\eta$ (поясним, что так как в нашем случае $e(x, \eta)$ входит в L_2 по η, то выкладки стр. 181—183 можно производить не только для $f \in C$, но и для $f \in L_2$). Подставляя выражение для θ в (5.18) и меняя обозначения переменных, получим представление (5.17), где

$$A(x, \xi) = -\overline{L_\xi^+[\overline{e(x, \xi)}[k(|x - \xi|) - 1]]}, \quad B(x, \xi) = e(x, \xi) +$$
$$+ \int\limits_O e(\eta, \xi)\, \overline{L_\eta^+[\overline{e(x, \eta)}[k(|x - \eta|) - 1]]}\, d\eta.$$

Свойства ядер A и B вытекают из свойств фундаментальных решений. Лемма доказана.

Теперь нетрудно доказать теорему. Функция $(Rf)(x)$ ($f \in L_2(G)$) по предположению, является обобщенным решением уравнения

$Lu = f$ и поэтому достаточно гладкая внутри G. Рассмотрим некоторую окрестность $O \subset G$, для которой справедлива лемма; на $f \in L_2(G)$ определим линейный функционал l_x, полагая $l_x(f) = (Rf)(x)$ $(x \in O_{\frac{r}{2}})$. Он непрерывен и его нормы равномерно по $x \in O_{\frac{r}{2}}$ ограничены, так как, записав для $g = Rf$ представление леммы, получим

$$|(Rf)(x)|^2 \leqslant 2\left|\int_O A(x, \xi)(Rf)(\xi)\,d\xi\right|^2 + 2\left|\int_O B(x, \xi) f(\xi)\,d\xi\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_O |A(x, \xi)|^2 d\xi \cdot \|Rf\|^2_{L_2(O)} + 2\int_O |B(x, \xi)|^2 d\xi \cdot \|f\|^2_{L_2(O)} \leqslant C_1 \|Rf\|^2_{L_2(G)} +$$

$$+ C_2 \|f\|^2_{L_2(G)} \leqslant C_3 \|f\|^2_{L_2(G)} \quad (x \in O_{\frac{r}{2}}).$$

По теореме Рисса справедливо представление $(Rf)(x) = l_x(f) = \int_G h_x(y) f(y)\,dy$, где $\|h_x\|_{L_2(G)} \leqslant C$ для $x \in O_{\frac{r}{2}}$. Вместе с тем из (5.1) следует, что

$$(Ru)(x) = \int_G R(x, y)\, u(y)\, dy \qquad (u \in C_0(G)); \tag{5.19}$$

из этих двух представлений заключаем: $R(x, y) = h_x(y)$, поэтому $\int_G |R(x, y)|^2 \, dy \leqslant C^2 (x \in O_{\frac{r}{2}})$. Отсюда же вытекает первое из равенств (5.15). Так как окрестность O можно брать вокруг любой внутренней точки G, то из доказанного легко следует ограниченность первого из интегралов (5.16) по x, меняющемуся строго внутри G. Аналогично доказывается часть теоремы, связанная со вторым из равенств (5.15). Теорема доказана.

Замечание. При несоблюдении условия $r > \frac{n}{2}$ подобную теорему также можно сформулировать, если пользоваться вместо пространств L_2 пространствами L_p (p должно быть так подобрано, чтобы $A(x, \cdot)$, $B(x, \cdot) \in L_p$). На этих вопросах мы не будем останавливаться.

Пусть дополнительно выполняются условия теоремы 5.2, удовлетворение ядром R граничных условий — по x (гр) и по y (гр)$^{\oplus}$ — теперь выглядит следующим образом: *при фиксированном* $y \in G$ $(x \in G)$ $R(x, y)$ *по другому переменному является обобщенным решением из* $L_2(G)$ *задачи* $Lu = \delta_y$, $u \in$ (гр) $(L^{\oplus} v = \delta_x,\ v \in (\text{гр})^{+})$, *т.е.*

$$\begin{aligned} &(R(x, y), (L^{+}v)(x))_0 = \overline{v(y)} \ (v \in W_2^r(\text{гр})^{+}), \\ &(R(x, y), (\overline{L}v)(y))_0 = \overline{v(x)} \quad (v \in \overline{W_2^r(\text{гр})}). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Таким образом, если (гр) *и* (гр)$^+$ *таковы, что справедлива теорема типа 4.6, то из* (5.20) *можно заключить:* $R(x, y)$ *при фиксированном одном переменном из* G *будет гладкой вплоть до границы по второму.*

Докажем, например, первое соотношение. Пусть $u \in C_0(G)$, благодаря второму из равенств (5.16) получим

$$\int_G (R(x, y), (L^+v)(x))_0 u(y)\,dy = \int_G\int_G R(x, y)\,\overline{(L^+v)(x)}\,u(y)\,dx\,dy =$$
$$= \overline{\int_G\int_G \overline{R(x, y)}\,(L^+v)(x)\,\overline{u(y)}\,dx\,dy} = \overline{\int_G (R^*L^+v)(y)\,\overline{u(y)}\,dy} =$$
$$= (Ru, L^+v)_0 = (u, v)_0.$$

Так как u произвольно, а $(R(x, y), (L^+v)(x))_0 = \overline{(R^*L^+v)(y)}$ непрерывно по $y \in G$, то отсюда следует требуемое.

Подчеркнем, что сама по себе теорема 5.4 не дает возможности что-либо сказать о поведении ядра $R(x, y)$, когда x и y, находясь на расстоянии $\geqslant C > 0$ друг от друга, одновременно приближаются к границе. Например, даже неясна сходимость интеграла $\int_{G_1}\int_{G_2} |R(x, y)|^2\,dx\,dy$, где G_1, G_2 — подобласти G, примыкающие к границе Γ по находящимся на положительном расстоянии друг от друга кускам.

5. Третий подход. Мы сейчас изложим более сильный, чем в предыдущем пункте, метод исследования гладкости по каждому из переменных в отдельности.

Теорема 5.5. *Пусть выполнены условия теорем 5.1 и 5.2,* G_0 — *некоторая подобласть* G, *примыкающая к* Γ *по куску* Γ_0; $q > \frac{n}{2}$ — r *целое неотрицательное число. Предположим дополнительно, что* L, Γ_0 *и граничные условия* (гр) *таковы, что в* G_0 *имеет место следующая теорема о повышении гладкости: пусть* $G_0' \subseteq G_0$ — *произвольная подобласть, примыкающая к* Γ *по куску* $\Gamma_0' \subseteq \Gamma_0$. *Из того, что* $u \in W_2^{-q}(G_0')$ *удовлетворяет уравнение* $Lu = f \in W_2^q(G_0')$ *внутри* G_0' *вплоть до* Γ_0', *автоматически следует включение* $u \in W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0', \Gamma_0')$. *То же верно для* L^+ *и* (гр)$^+$.

Тогда для любого фиксированного $x \in G_0$ $(y \in G_0)$ *справедливо включение*

$$R(x, \cdot) \in W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0 \setminus \{x\}, \Gamma_0) \quad (R(\cdot, y) \in W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0 \setminus \{y\}, \Gamma_0)), \tag{5.21}$$

причем функция $R(x, \cdot)$ $(R(\cdot, y))$ *внутри* $G_0 \setminus \{x\}$ $(G_0 \setminus \{y\})$ *удовлетворяет уравнению* $L^{\oplus}u = 0$ $(Lu = 0)$ *и удовлетворяет граничным ус-*

ловиям (гр)$^{\oplus}$ ((гр)) *на* Γ_0 *в том смысле, что*

$$(R(x,\cdot), \bar{L}v)_0 = 0 \qquad ((R(\cdot,y), L^+v)_0 = 0) \tag{5.22}$$

для всех $v \in \overline{W_2^r(\text{гр})}$ $(v \in W_2^r(\text{гр})^+)$, *дополнительно аннулирующихся в окрестностях множества* $G \setminus G_0$.

Поясним сразу, что благодаря гладкости R (5.22) означает по существу удовлетворение граничным условиям в обычном смысле. Установим сперва одну лемму типа леммы 5.1. Идея доказательства этой леммы будет использована и в дальнейшем.

Лемма 5.2. *Пусть* L — *некоторое выражение в области* G, (гр) — *заданные граничные условия и* R — *непрерывно действующий в* $L_2(G)$ *оператор такой, что* Rf *при любом* $f \in L_2(G)$ *является обобщенным решением задачи* $Lu = f$, $u \in$ (гр). *Пусть подобласть* $G_0 \subseteq G$ *примыкает к* Γ *по куску* Γ_0 *и существует такое* $q = 0, 1, \ldots$, *что всякая* $u \in L_2(G)$, *удовлетворяющая уравнению и* (гр) *внутри* G_0 *вплоть до* Γ_0, *входит в* $W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0, \Gamma_0)$, *если только* $f \in W_2^q(G)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\| Rf \|_{W_2^{r+q}(\widetilde{G}_0)} \leqslant C_{\widetilde{G}_0} \| f \|_{W_2^q(G)} \quad (f \in W_2^q(G)), \tag{5.23}$$

где $\widetilde{G}_0$ — *любая подобласть* G_0, *имеющая общую границу* $\widetilde{\Gamma}_0$ *с* G_0 *лишь строго внутри куска* Γ_0.

Доказательство. При любом $f \in W_2^q(G)$ функция Rf, рассматриваемая лишь на G_0, удовлетворяет уравнение $Lu = f$ и (гр) внутри G_0 вплоть до Γ_0. Поэтому согласно предположению леммы $Rf \in W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0, \Gamma_0)$, откуда $Rf \in W_2^{r+q}(\widetilde{G}_0)$. Таким образом, мы имеем линейное отображение $f \to Rf$, определенное на векторах полного пространства $W_2^q(G)$ и действующее в $W_2^{r+q}(\widetilde{G}_0)$. Оно замкнуто: пусть $f_n \to f$ в $W_2^q(G)$ и $Rf_n \to g$ в $W_2^{r+q}(\widetilde{G}_0)$. Так как подавно $f_n \to f$ в $L_2(G)$, а R непрерывно действует в $L_2(G)$, то $Rf_n \to Rf$ в $L_2(G)$ и, тем более, в $L_2(\widetilde{G}_0)$. С другой стороны, $Rf_n \to g$, поэтому $g = Rf$ и замкнутость установлена. Но замкнутое отображение всего полного пространства в другое пространство обязательно непрерывно. Это и приводит к неравенству (5.23). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Из нашего предположения о наличии теоремы о повышении гладкости вытекает, что условия леммы 5.2 выполнены: нужно применить эту теорему при $G_0' = G_0$ и $\Gamma_0' = \Gamma_0$, заметив, что $f(x) \in W_2^q(G)$ при $x \in G_0$ входит в $W_2^q(G_0)$. Таким образом, справедлива оценка (5.23). Так как $r + q > \frac{n}{2}$, то, согласно теоремам вложения, $Rf \in C(\widetilde{\widetilde{G}}_0)$ и $|(Rf)(x)| \leqslant C \| Rf \|_{W_2^{r+q}(\widetilde{G}_0)}$

($x \in \tilde{\tilde{G}}_0$). Рассмотрим на $f \in W_2^q(G)$ однородный и аддитивный функционал $l_x(f) = (Rf)(x)$ $(x \in \tilde{G}_0)$; так как $|l_x(f)| = |(Rf)(x)| \leqslant C\|Rf\|_{W_2^{r+q}(\tilde{G}_0)} \leqslant$ $\leqslant CC_{\tilde{G}_0}\|f\|_{W_2^q(G)}$, то этот функционал непрерывен. Поэтому существует $\eta_x \in W_2^{-q}(G)$ такое, что

$$(Rf)(x) = l_x(f) = \overline{(\eta_x, \bar{f})_0} \quad (f \in W_2^q(G), x \in \tilde{G}_0). \tag{5.24}$$

Пусть $v \in W_2^r(\text{гр}) \cap W_2^{r+q}(G)$ дополнительно аннулируется в окрестностях точки x и множества $G \setminus G_0$; полагая в (5.24) $f = Lv$, получим $\overline{(\eta_x, \overline{Lv})_0} = (RLv)(x) = v(x) = 0$. Равенство $(\eta_x, \overline{Lv})_0 = 0$ показывает, что η_x (рассматриваемое как элемент из $W_2^{-q}(G_0 \setminus \{x\})$), удовлетворяет уравнению $L^+u = 0$ и $(\text{гр})^+$ внутри $G_0 \setminus \{x\}$ вплоть до куска Γ_0 границы и поэтому согласно предположению теоремы входит в $W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0 \setminus \{x\}, \Gamma_0)$. Иными словами, выбросим из $\tilde{G}_0$ некоторую замкнутую окрестность точки x и обозначим полученное множество $\tilde{\tilde{G}}_0$. Тогда найдется функция $h_x(y) \in W_2^{r+q}(\tilde{\tilde{G}}_0)$ (зависящая от $\tilde{\tilde{G}}_0$) такая, что $(h_x, u)_0 = (\eta_x, u)$ для всех $u \in W_2^q(G)$, аннулирующихся в окрестностях множества $G \setminus \tilde{\tilde{G}}_0$. Учитывая (5.1) и (5.24), получим для указанных u, дополнительно аннулирующихся вблизи Γ:

$$\int_G R(x, y)\, u(y)\, dy = (Ru)(x) = \overline{(h_x, \bar{u})_0} = \int_G \overline{h_x(y)}\, u(y)\, dy. \tag{5.25}$$

Отсюда следует, что при $y \in \tilde{\tilde{G}}_0$ $R(x, y) = \overline{h_x(y)} \in W_2^{r+q}(\tilde{\tilde{G}}_0)$ $(x \in \tilde{G}_0)$. Это доказывает первое из соотношений (5.21), так как $\tilde{\tilde{G}}_0$ примыкает к Γ и сколь угодно точно аппроксимирует $G_0 \setminus \{x\}$.

Первое из равенств (5.22) вытекает из того, что $\overline{R(x, \cdot)} = h_x(\cdot) =$ $= \eta_x$, а, как было показано, $(\eta_x, Lw)_0 = 0$ для $w \in W_2^r(\text{гр}) \cap W_2^{r+q}(G)$, аннулирующихся в окрестностях x и $G \setminus G_0$. Таким образом $(\overline{R(x, \cdot)}, Lw)_0 = \overline{(R(x, \cdot), \overline{L}\bar{w})_0} = 0$; приближая такими w функции v из (5.22), придем к требуемому. Ясно также, что из доказанного соотношения следует равенство $(L_y^+ R)(x, y) = 0$.

Заключения теоремы о $R(x, y)$ как функции от x устанавливаются аналогично. Теорема доказана.

Из доказательства этой теоремы вытекает следствие.

Следствие 1. Пусть L высокого порядка: $r > \frac{n}{2}$ и выполнены предположения теоремы 5.5 при $q = 0$. Тогда интегралы (5.16) ра номерно ограничены при $x, y \in G_0'$, где G_0' — любая подобласть области G_0, имеющая общую границу с G_0 лишь по куску, лежащему строго внутри Γ_0.

В самом деле, теперь $\eta_x \in L_2(G)$, причем, так как $|l_x(f)| \leqslant \leqslant CC_{\widetilde{G}_0} \|f\|_{L_2(G)}$ для всех $x \in \widetilde{G}_0$, то $\|\eta_x\|_{L_2(G)}$ равномерно ограничена при $x \in \widetilde{G}_0$. Из (5.15) и (5.24) следует

$$\int\limits_G R(x, y) f(y)\, dy = (Rf)(x) = \overline{(\eta_x, \bar{f})_0} = \int\limits_G \overline{\eta_x(y)} f(y)\, dy \quad (f \in L_2(G)).$$

Отсюда $R(x, \cdot) = \overline{\eta_x(\cdot)}$ и поэтому $\|R(x, \cdot)\|_{L_2(G)} = \|\bar{\eta}_x\|_{L_2(G)} = \|\eta_x\|_{L_2(G)} \leqslant C_1$ $(x \in \widetilde{G}_0)$. Для первого интеграла в (5.16) утверждение доказано, так как можно считать, что $G_0' = \widetilde{G}_0$; второй рассматривается аналогично.

Сформулируем теперь более конкретные результаты о гладкости $R(x, y)$, вытекающие из теоремы 5.5 и теорем о повышении гладкости п. 6, § 4. Как уже указывалось для общих эллиптических L и (гр), соответствующие результаты можно легко сформулировать, если воспользоваться теоремами о повышении гладкости из п. 12, § 6. Применяя теорему 4.6, придем к следующему утверждению.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теорем 5.1 и 5.2; G_0 — некоторая подобласть G, примыкающая к Γ по куску Γ_0; целое $q > \frac{n}{2} - 2m$, $m - 1$. Предположим, что Γ_0 класса C^{2m+q} и L сильно эллиптично в $G_0 \cup \Gamma_0$, причем коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+q}(G_0 \cup \Gamma_0)$. На Γ_0 (гр) нулевые: $D^\alpha u|_{\Gamma_0} = 0$ $(|\alpha| \leqslant m - 1)$.

Тогда для любого фиксированного $x \in G_0$ $(y \in G_0)$ справедливо включение (5.21), причем функция $R(x, \cdot)$ $(R(\cdot, y))$ внутри $G_0 \setminus \{x\}$ $(G_0 \setminus \{y\})$ удовлетворяет уравнение $L^+ u = 0$ $(Lu = 0)$. На Γ_0 эта функция в обычном смысле удовлетворяет нулевые граничные условия, т. е.

$$(D_y^\beta R)(x, y)|_{y \in \Gamma_0} = 0 \ (|\beta| \leqslant m - 1) \quad ((D_x^\alpha R)(x, y)|_{x \in \Gamma_0} = 0 \ (|\alpha| \leqslant m - 1)). \tag{5.26}$$

Поясним, что здесь теорема 4.6 применялась при $p = t = q$, имелся в виду случай 2). Условия (5.26) очевидно эквивалентны (5.22). Непосредственно из следствия 1 вытекает следствие 3.

Следствие 3. При $2m > \frac{n}{2}$ и предположениях следствия 2 с $q = m$ интегралы (5.16) равиомерно ограничены при x, y, указанных в следствии 1.

При $r=2$ и $n=3$ к теореме 5.5 применима теорема 4.7, так как теперь можно считать $q=0$ и требуемое повышение гладкости обеспечивается последней теоремой. В результате мы исследуем поведение $R(x, y)$ вблизи границы в случае условия вида $\frac{\partial u}{\partial \mu}+$ $+\sigma(x) u|_{\Gamma_0}=0$ $(\sigma \in C^1(\Gamma_0))$. Утверждение легко сформулировать, мы этого делать не будем,

6. **Поведение ядра $R(x, y)$ при x или y, расположенных на границе.** В этом случае метод п. 3 не подходит: в окрестности $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ граница области $G \times G$ негладкая, и поэтому применение теоремы 4.6 здесь некорректно (на усовершенствовании подобных теорем мы останавливаться не будем). Только что изложенный метод также непосредственно не удается провести, так как равенство (5.25) незаконно при $x \in \Gamma$. Все же сейчас мы получим некоторые результаты, комбинируя предыдущие подходы. Расстояние между x и y предполагается $\geqslant C>0$. Установим несколько полезных равенств.

Из (5.1) непосредственно вытекает представление

$$(Ru)(x)=\int_G R(x, y) u(y) d y \quad (u \in C_0(G),\ x \in G). \tag{5.27}$$

Пусть $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$; L вблизи Γ_0 и (гр) на Γ_0 таковы, что выполняются предположения теоремы 5.5. Тогда (5.27) имеет место для любой $u \in W_2^q(G)$, аннулирующейся в n-мерной окрестности части $\Gamma \setminus \Gamma_0$ границы. В самом деле, докажем сперва (5.27) для такой $u=u_2$, аннулирующейся дополнительно в окрестности точки x. Если воспользоваться обозначениями стр. 212, то достаточно считать, что $u_2 \in W_2^q(G)$ и аннулируется в окрестности множества $G \setminus \tilde{\tilde{G}}_0$. Но тогда (5.27) следует из (5.24), где f заменено на u_2, и равенств $(\eta_x, u_2)_0=(h_x, u_2)_0$, $\overline{h_x(y)}=R(x, y)$ $(y \in \tilde{\tilde{G}}_0)$ (см. стр. 212). В общем случае для доказательства (5.27) представим $u \in W_2^q(G)$, аннулирующееся в n-мерной окрестности $\Gamma \setminus \Gamma_0$, в виде: $u=u_1+u_2$, где $u_1 \in C_0(G)$, а u_2 описано выше. Так как для каждого слагаемого (5.27) имеет место, то оно имеет место и для u. Утверждение доказано.

До сих пор соотношение (5.27) устанавливалось для $x \in G$, покажем, что в некоторых случаях оно справедливо и для $x \in \Gamma$.

Лемма 5.3. *Пусть* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, L *и* (гр) *на* Γ_0 *таковы, что выполняется одно из условий: а) для любой подобласти* $G_0 \subset G$, *примыкающей к* Γ *по* Γ_0, *и любой подобласти* $G_2 \subset G$, *находящейся на положительном расстоянии от* G_0, *выполнены требования теоремы*

5.3 (с $G_1 = G_0$); б) в некоторой подобласти $G_0 \subset G$, примыкающей к Γ по Γ_0, выполнены требования теоремы 5.5 и $r > \frac{n}{2}$. Тогда для каждого $y \in G$ существует $\lim\limits_{x \to x_0} R(x, y) = R(x_0, y)$ $(x_0 \in \Gamma_0)$ и

$$(Ru)(x_0) = \int\limits_G R(x_0, y)\, u(y)\, dy \quad (u \in W^q_{2,0}(G),\ x_0 \in \Gamma_0) \tag{5.28}$$

(здесь q — число, фигурирующее в условиях теорем 5.3 и 5.5).

Доказательство. Случай а). Зафиксируем $u \in C_0(G)$ и выберем G_0 и G_2 такими, чтобы $u = 0$ в окрестности $G \setminus G_2$. Согласно теореме 5.3 $R(\cdot,\cdot) \in W^{2m+q}_{2,\text{лок}}(G_0 \times G_2,\ \Gamma_0 \times G_2)$. Возьмем $G_0' \subset G$ так, чтобы G_0' и G_0 имели общую границу лишь по куску $\Gamma_0' \ni x_0$, расположенному строго внутри Γ_0; G_2' выберем строго внутри G_2 и так, чтобы $u = 0$ вне G_2'. Тогда $R(\cdot,\cdot) \in W_2^{2m+q}(G_0' \times G_2')$. Так как $2m + q > n$, то $|R(x, y)| \leqslant C \| R(\cdot,\cdot)\|_{W_2^{2m+q}(G_0' \times G_2')} = C_1 < \infty$ $(x \in G_0',\ y \in G_2')$. Эта оценка позволяет перейти к пределу под знаком интеграла в (5.27), и мы получим

$$\lim_{x \to x_0} (Ru)(x) = \lim_{x \to x_0} \int\limits_G R(x, y)\, u(y)\, dy = \int\limits_G R(x_0, y)\, u(y)\, dy.$$

С другой стороны, благодаря теореме 4.6 $Ru \in W_2^{2m+q}(G_0')$ при $u \in W^q_{2,0}(G)$, и поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} (Ru)(x) = (Ru)(x_0)$. Отсюда и следует (5.28).

Случай б). Пусть G_0 и G_0' такие же, как и выше. Благодаря следствию 1 $\| R(x,\cdot)\, u(\cdot)\|_{L_2(G)} \leqslant C < \infty$ $(x \in G_0')$ и поэтому в (5.27) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $x \to x_0$. Так как и теперь $(Ru)(x) \underset{x \to x_0}{\to} (Ru)(x_0)$, то мы опять придем к (5.28). Лемма доказана.

Теорема 5.6. *Пусть выполнены предположения теорем 5.1 и 5.2; $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, L и* (гр) *на Γ_0 таковы, что имеет место одно из условий: а) для любой подобласти $G_0 \subset G$, примыкающей к Γ по Γ_0, и любой подобласти $G_2 \subset G$, находящейся на положительном расстоянии от G_0, выполнены требования теоремы 5.3; б) $r > \frac{n}{2}$ и в некоторой подобласти $G_0 \subset G$, примыкающей к Γ по Γ_0, выполнено предположение о повышении гладкости, фигурирующее в теореме 5.5, при любом $q = 0, 1, \ldots$.*

Тогда для любого фиксированного $x \in G_0 \cup \Gamma_0$ $(y \in G_0 \cup \Gamma_0)$

$$R(x, \cdot) \in W^{r+q}_{2,\text{лок}}(G_0 \setminus \{x\},\quad \Gamma_0 \setminus \{x\})$$

$$(R(\cdot, y) \in W^{r+q}_{2,\text{лок}}(G_0 \setminus \{y\},\quad \Gamma_0 \setminus \{y\})) \tag{5.29}$$

и имеют место остальные утверждения теоремы 5.5 (с тем изменением, что (гр)+ ((гр)) *удовлетворяются на* $\Gamma_0 \setminus \{x\}$ ($\Gamma_0 \setminus \{y\}$)*—это означает, что* v *в (5.22) должно дополнительно аннулироваться в окрестностях точки* x (y)).

Доказательство теперь может быть проведено почти точно так же, как и доказательство теоремы 5.5: нужно лишь в определении l_x считать $x \in \widetilde{G}_0 \cup \widetilde{\Gamma}_0$ ($\widetilde{\Gamma}_0$ — кусок границы $\widetilde{G}_0$, примыкающий к Γ_0). Тогда все останется без изменения за исключением лишь того, что η_x удовлетворяет уравнению $L^+u = 0$ и (гр)+ внутри $G_0 \setminus \{x\} = G_0'$ вплоть до $\Gamma_0 \setminus \{x\} = \Gamma_0'$ (а не Γ_0). Наконец, в силу (5.28) равенство (5.25) можно теперь писать и для $x \in \widetilde{\Gamma}_0$.

Предоставляем читателю сформулировать на основании теоремы 5.6 условия следствия 2 таким образом, чтобы получить вместо (5.21) включение (5.29). Легко также сформулировать соответствующие факты для граничного условия вида $\frac{\partial u}{\partial \mu} + \sigma(x)u \,|_{\Gamma_0} = 0$ и общих L и (гр), фигурирующих в п. 12, § 6.

Результаты пунктов 3—6 естественным образом применяются к исследованию функции Грина $R(x, y; \lambda)$. Формулировать полученные таким образом факты излишне.

7. Произведение резольвент. Для целей спектральной теории понадобятся некоторые из результатов пп. 1—6 для того случая, когда роль R играет произведение $R_{\lambda_1} \ldots R_{\lambda_N}$. В связи с этим мы предпримем некоторые общие рассмотрения.

Пусть $L_1, \ldots, L_N$ — дифференциальные выражения соответственно порядков $r_1, \ldots, r_N$ в G, их коэффициенты будем считать входящими в $C^\varrho(G \cup \Gamma)$, $\varrho = r_1 + \ldots + r_N$. Тогда $L = L_1 \ldots L_N$ — выражение порядка ϱ, коэффициенты которого заведомо удовлетворяют обычным требованиям гладкости. Пусть с L_j связаны (гр)$_j$, $W_2^{r_j}$ (гр)$_j$ — соответствующее подпространство пространства $W_2^{r_j}(G)$ $(j = 1, \ldots, N)$. Определим W_2^ϱ (гр) как совокупность функций u из $W_2^\varrho(G)$, для которых $L_2 \ldots L_N u \in W_2^{r_1}$ (гр)$_1$, $L_3 \ldots L_N u \in W_2^{r_2}$ (гр)$_2, \ldots, u \in W_2^{r_N}$ (гр)$_N$. Очевидно W_2^ϱ (гр) — подпространство пространства $W_2^\varrho(G)$, содержащее $W_{2,0}^\varrho(G)$, и поэтому введение (гр) корректно. Легко видеть, что $L^+ = L_N^+ \ldots L_1^+$ и W_2^ϱ (гр)$^+$ определяются по произведению $L_N^+ \ldots L_1^+$ и $W_2^{r_N}$ (гр)$_N^+, \ldots, W_1^{r_1}$ (гр)$_1^+$ описанным только что образом; (гр)$^{++}$= = (гр).

Предположим, что выражения $L_1, \ldots, L_N$ эллиптические и их коэффициенты входят в $C^{2\varrho+p}(G \cup \Gamma)$ $(p \geqslant n+1)$. Тогда и L эллиптично, причем заведомо его коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+\varrho+p}(G \cup \Gamma)$. Пусть R_j — непрерывный оператор в $L_2(G)$, связанный с L_j и (гр)$_j$ так же, как и в теореме 5.2 $(j = 1, \ldots, N)$. Положим $R = R_N \ldots R_1$; R связано с L и (гр) таким же образом. В самом деле, для $f \in L_2(G)$ и $v \in W_2^\varrho$ (гр)$^+$ имеем

$$(Rf, L^+v)_0 = (R_N \ldots R_1 f, L_N^+ \ldots L_1^+ v)_0 = (R_{N-1} \ldots R_1 f, \\ L_{N-1}^+ \ldots L_1^+ v)_0 = \ldots = (f, v)_0,$$

т. е. Rf — обобщенное решение задачи $Lu = f$, $u \in$ (гр). Аналогично рассматривается R^*f. Итак, к L, (гр) и R применимы теоремы 5.1 и 5.2, откуда следует: существует ядро $\mathrm{R} \in W_2^{-l}(G) \otimes W_2^{-l}(G)$ $\left(l = \left|\frac{n}{2}\right| + 1\right)$ такое, что $(Ru, v)_0 = (\mathrm{R}, v(x)\overline{u(y)})_0$ $(u, v \in W_2^l(G))$.

Внутри области $G \times G$ это ядро совпадает с обычным ядром $R(x, y)$ $(x, y \in G)$, гладким при $x \neq y$ (существуют и непрерывны относительно $(x, y) \in G \times G$, $x \neq y$, все производные $D_x^\alpha D_y^\beta R$ $(|\alpha|, |\beta| \leqslant \varrho + p)$) и имеющим при $x = y$ особенность фундаментального решения эллиптического выражения L порядка ϱ. Ядро R удовлетворяет соотношениям вида (5.13).

Применяя к построенным сейчас L, (гр) и R теорему 5.4, заключаем, что для соответствующего ядра $R(x, y)$ интегралы (5.16) ограничены при x, изменяющемся внутри G (в случае $\varrho > \frac{n}{2}$). Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.7. *Рассмотрим в области G описанные только что эллиптические выражения $L_1, \ldots, L_N$ порядков $r_1, \ldots, r_N$; $\varrho = r_1 + \ldots + r_N$, причем $\varrho > \frac{n}{2}$. Пусть G_0 — некоторая подобласть G, примыкающая к Γ по куску Γ_0. Предположим, что для каждого L_j в G_0 справедливо утверждение о повышении гладкости, сформулированное в условии теоремы 5.5, причем $q = r_1 + \ldots + r_{j-1}$ $(j = 2, \ldots, N)$ и $q = 0$ при $j = 1$. Обозначим G_0' любую подобласть области G_0, имеющую общую границу с G_0 лишь по куску, лежащему строго внутри Γ_0.*

Утверждается, что вектор-функция $R(x, \cdot)$ $(R(\cdot, y))$ от $x \in \overline{G_0'}$ $(y \in \overline{G_0'})$ со значением в $L_2(G)$ слабо непрерывно дифференцируема до порядка $\varrho - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$ включительно, причем все эти производные ограничены.

Доказательство основывается на следующем факте.

Лемма 5.4. *При любых $f \in L_2(G)$ и ϱ функция $Rf \in W_2^\varrho(G_0')$.*

Доказательство. Построим последовательность областей $G_0' = \widetilde{G}_0^{(N)} \subset \widetilde{G}_0^{(N-1)} \subset \ldots \subset \widetilde{G}_0^{(1)} \subset \widetilde{G}_0^{(0)} = G_0$, в которой каждая область входит в правее ее стоящую так же, как G_0' входила в G_0; $\Gamma_0' = \widetilde{\Gamma}_0^{(N)} \subset \widetilde{\Gamma}_0^{(N-1)} \subset \ldots \subset \widetilde{\Gamma}_0^{(1)} \subset \widetilde{\Gamma}_0^{(0)} = \Gamma_0$ — последовательность кусков соответствующих границ, расположенных на Γ. Так как $R_1 f$ является, по предположению, обобщенным решением задачи $L_1 u = f$, $u \in (\text{гр})_1$, то можно сказать, что $R_1 f \in L_2(\widetilde{G}_0^{(0)})$ удовлетворяет уравнению $L_1 u = f \in L_2(\widetilde{G}_0^{(0)})$ внутри $\widetilde{G}_0^{(0)}$ вплоть до $\widetilde{\Gamma}_0^{(0)}$. Поэтому $R_1 f \in W_{2,\,\text{лок}}^{r_1}(\widetilde{G}_0^{(0)}, \widetilde{\Gamma}_0^{(0)})$ и, следовательно, $R_1 f \in W_2^{r_1}(\widetilde{G}_0^{(1)})$. Далее, $R_2 R_1 f$ является обобщенным решением задачи $L_2 u = R_1 f$, $u \in (\text{гр})_2$; можно сказать, что $R_2 R_1 f \in W_2^{-r_1}(\widetilde{G}_0^{(1)})$ удовлетворяет уравнение $L_2 u = R_1 f \in W_2^{r_1}(\widetilde{G}_0^{(1)})$ внутри $\widetilde{G}_0^{(1)}$ вплоть до $\widetilde{\Gamma}_0^{(1)}$. Поэтому $R_2 R_1 f \in W_{2,\,\text{лок}}^{r_1+r_2}(\widetilde{G}_0^{(1)}, \ldots)$ и, следовательно, $R_2 R_1 f \in W_2^{r_1+r_2}(\widetilde{G}_0^{(2)})$. Рассматриваем $R_3 R_2 R_1 f$ и продолжаем наш процесс. В результате получим: $Rf = R_N \ldots R_1 f \in W_2^{r_1+\ldots+r_N}(\widetilde{G}_0^{(N)}) = W_2^{\varrho}(G_0')$, что и требовалось. Лемма доказана.

Из этого утверждения, повторяя доказательство леммы 5.2, получаем неравенство

$$\| Rf \|_{W_2^{\varrho}(G_0')} \leqslant C_{G_0'} \| f \|_{L_2(G)} \quad (f \in L_2(G)). \tag{5.30}$$

Так как $\varrho > \frac{n}{2}$, то при помощи теорем вложения и (5.30) найдем:

$$Rf \in C^{\varrho - \left[\frac{n}{2}\right] - 1}(\overline{G_0'}), \quad |(D^{\alpha} Rf)(x)| \leqslant C_1 \| Rf \|_{W_2^{\varrho}(G_0')} \leqslant C_2 \| f \|_{L_2(G)} \tag{5.31}$$
$$\left(f \in L_2(G),\ |\alpha| \leqslant \varrho - \left[\frac{n}{2}\right] - 1,\ x \in \overline{G_0'}\right).$$

Неравенство (5.31) с $\alpha = 0$ показывает, что при фиксированном функционал $l_x(f) = (Rf)(x)$ непрерывен на $L_2(G)$ и поэтому допускае представление $(Rf)(x) = l_x(f) = \overline{(h_x, f)_0}$ $(h_x \in L_2(G))$. Так как при лю бом $f \in L_2(G)$ $(h_x, f)_0 = \overline{(Rf)(x)} \in C^{\varrho - \left[\frac{n}{2}\right] - 1}(\overline{G_0'})$, то вектор-функция h слабо дифференцируема, причем $(D_x^{\alpha} h_x, f)_0 = D_x^{\alpha}(h_x, f)_0 = (D^{\alpha} Rf)($ $\left(|\alpha| \leqslant \varrho - \left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)$. Из (5.31) теперь следует, что для указанны α $\| D_x^{\alpha} h_x \|_0 \leqslant C_2$ $(x \in \overline{G_0'})$. С другой стороны, благодаря (5.2 $h_x = R(x, \cdot)$; это и доказывает утверждение теоремы относителы $R(x, \cdot)$. Переходя к рассмотрениям сопряженных выражений, (гр) операторов, точно так же исследуем $R(\cdot\,, y)$. Теорема доказана.

Из теоремы 4.6 вытекает следствие.

Следствие 1. Утверждение теоремы 5.7 справедливо, если эллиптические выражения $L_1, \ldots, L_N$, введенные на стр. 216, дополнительно сильно эллиптичны в $G_0 \cup \Gamma_0$, а (гр) на Γ_0 нулевые и Γ_0 достаточно гладкое.

Из изложенного при $L_1 = \ldots = L_N = L$ вытекает другое следствие.

Следствие 2. Пусть R_λ — резольвента, введенная на стр. 203, $r = 2m$—порядок выражения $L, N = 1, 2, \ldots$ столь велико, что $Nr > \frac{n}{2}$. Предположим, что коэффициенты L входят в $C^{2Nr+p}(G \cup \Gamma)$ $(p \geqslant n+1)$ и существует подобласть G_0 области G $(0 \subseteq G_0 \subseteq G)$, примыкающая к Γ по куску Γ_0 класса $C^{\max(Nr,\, r+m)}$ такая, что в $G_0 \cup \Gamma_0$ L сильно эллиптично, причем на Γ_0 (гр) нулевые.

Тогда каждое произведение $R = R_{\lambda_1} \ldots R_{\lambda_N}$ является интегральным оператором с ядром $R(x, y)$ $(x, y \in G)$ таким, что интегралы (5.16) ограничены, когда x и y меняются строго внутри G. Эти интегралы остаются ограниченными и в том случае, когда $x, y \in \overline{G_0'}$, где G_0' — произвольная подобласть G_0, имеющая общую границу с G_0 лишь по куску, лежащему строго внутри Γ_0. При $x \neq y$ ядро $R(x, y)$ достаточно гладкое: существуют и непрерывны по $(x, y) \in G \times G$ все производные вида $D_x^\alpha D_y^\beta R$ $(|\alpha|, |\beta| \leqslant Nr + \varrho)$. Вектор-функции от x, y со значением в $L_2(G)$ $R(x, \cdot)$ и $R(\cdot, y)$ слабо непрерывно дифференцируемы до порядка $Nr - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$ включительно, причем все эти производные ограничены.

Мы не будем останавливаться на формулировках следствий из теоремы 5.7 применительно к граничным условиям типа третьей краевой задачи и общим эллиптическим L и (гр) из п. 12, § 6.

8. **Случай неограниченной области. Понятие граничного условия для такой области.** Для спектральной теории нам понадобится перенесение результатов этого параграфа, относящихся к изучению оператора R, на случай неограниченной G. Такое перенесение легко произвести. Прежде всего заметим, что теорема 5.1 сохраняется в той же формулировке и с тем же доказательством.

Введем понятие граничных условий (гр) для неограниченной G. Условия удобно вводить «финитные», не налагающие ограничений на поведение функции на ∞ — это оправдывает следующую конструкцию. Рассмотрим соболевское пространство $W_2^r(G) = W_2^{(r,\, q)}(G)$, где $q(x) = 1$ $(x \in G)$. Обозначим $\mathring{W}_2^r(G)$ замыкание в $W_2^r(G)$ класса $C_0^\infty(G)$

финитных по отношению к G и на ∞ функций. Каждое подпространство W_2^r (гр) пространства $W_2^r(G)$, охватывающее $\mathring{W}_2^r(G)$, определяет некоторое граничное условие (гр). Пусть L — дифференциальное выражение порядка r с обычными предположениями гладкости: $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(G \cup \Gamma)$ (на ∞ никаких ограничений нет); L^+ — формально сопряженное выражение. Сопряженные граничные условия $(\text{гр})^+$ определяются подпространством $W_2^r(\text{гр})^+$ пространства $W_2^r(G)$, состоящим из всех тех функций $v \in W_2^r(G)$, для которых $(Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0$ при любой $u \in W_2^r$ (гр), дополнительно финитной на ∞. Финитность u на ∞ и обозначает, что при оперировании с (гр) нас поведение на ∞ функций из W_2^r (гр), по существу, не интересует. Во всем дальнейшем рассматриваются только такие граничные условия (гр), для которых $(\text{гр})^{++} = (\text{гр})$. Если $g(x)$ $(x \in G)$ совпадает для x вблизи Γ с некоторой $u(x) \in W_2^r$ (гр), то мы будем говорить, что и $g(x)$ удовлетворяет (гр).

Обобщенная функция $u \in W_2^{-(\sigma, q_1)}(G)$ $(\sigma \geqslant 0;\ q_1(x) \geqslant 1)$ по определению удовлетворяет уравнение $Lu = f \in W_2^{-(r+\sigma, q_2)}(G)$ $(q_2(x) \geqslant 1)$ и граничное условие (гр), если $(u, L^+v)_0 = (f, v)_0$ для всех $v \in W_2^r(\text{гр})^+ \cap$ $\cap\, W_2^{r+\sigma}(G)$ и финитных на ∞ (предполагается, что $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+\sigma}(G \cup \Gamma)$ и $W_2^r(\text{гр}) \cap W_{2,0}^{r+\sigma}(E_n)$ плотно среди функций $W_2^r(\text{гр}) \cap W_{2,0}^r(E_n)$ в смысле сходимости: $v_n \to 0$, если носители v_n расположены в общем шаре U и $v_n \to 0$ в $W_2^r(G \cap U)$; ср. стр. 104). Удовлетворение этому уравнению внутри G вплоть до куска $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ обозначает выполнение предыдущего равенства, но только для v, дополнительно аннулирующихся в окрестностях множества $\Gamma \setminus \Gamma_0$.

Отметим, что и сейчас, и ранее на стр. 85—86, при определении (гр) имеется одна трудность: если u удовлетворяет (гр) на всей Γ что понимать под удовлетворением этим условиям на части Γ? Наши (гр), вообще говоря, не носят локального характера, и поэтому такой вопрос смысла не имеет. Формализовать понятие локальности мы не будем, так как в конкретных случаях условий, задающихся равенствами нулю некоторых дифференциальных выражений на Γ, всегда можно выйти из положения таким же образом как и в теореме 5.5 — равенства (5.22) в случае нулевых условий приводят к равенствам (5.26). В связи со сказанным мы не будем и в общем виде определять, что означает для неограниченной G принятие (гр) функциями, не малыми на ∞.

Теперь ясно, что благодаря справедливости теоремы 3.3, гл. I, неограниченной области (см. стр. 75) *теорема 5.2 в той же формулировке сохраняется для такой G, нужно лишь $W_2^l(G)$ заменить* *на* $W_2^{(l,\,q)}(G)$ *с* $l > \frac{n}{2}$ *и* $q(x) \geqslant 1$, *удовлетворяющим* (3.17), *гл.* I. *Таким образом сейчас* $\mathrm{R} \in W_2^{-(l,\,q)}(G) \otimes W_2^{-(l,\,q)}(G)$. *Удовлетворение* R *граничным условиям* $(\text{гр})_x$ *и* $(\text{гр})_y^{(+)}$ *обозначает выполнение тех же соотношений (5.13) для* $V(x, y)$, *соответственно входящих в* $(W_2^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+l}(G)) \otimes W_2^{\max(r,l)}(G)$ *и* $W_2^{\max(r,l)}(G) \otimes (W_2^r(\text{гр}) \cap W_2^{r+l}(G))$ *и финитных на бесконечности как функции точки* (x, y).

Так как теорема 5.3 — факт локальный, то и она сохраняется для случая неограниченной G (G_1, G_2, а также G_0 в последующих теоремах нужно считать ограниченными). Очевидно, справедливы и теоремы 5.4—5.7 и следствия к ним — нужно лишь иметь в виду, что интегралы (5.16) ограничены, если x и y меняются в ограниченных подобластях G, удовлетворяющих условиям этих теорем (сами интегралы распространяются по всей G!). *Итак, все теоремы 5.3—5.7 с указанными выше изменениями в формулировках справедливы для неограниченной* G.

§ 6. Краевые задачи и гладкость обобщенных решений вплоть до границы для эллиптических уравнений в случае общих граничных условий

В этом параграфе мы изложим для общих граничных условий результаты типа § 3 о разрешимости краевых задач и типа § 4 о локальной гладкости обобщенных решений вплоть до границы области. Подходы здесь часто будут отличны от прежних методов (особенно это относится к § 3), однако их мы будем частично лишь намечать — в связи с громоздкостью изложения. Впрочем следует подчеркнуть, что доказательства большинства излагаемых ниже фактов нетрудно восстанавливаются по намеченной канве. Исключение составляют «трудно восстанавливаемые» доказательства теорем 6.1 (необходимость), 6. 4 и лемм 6.1 и 6.4. Ссылки на их доказательства будут приведены в «Литературных указаниях».

Касаться обобщения результатов § 5 мы не будем, так как изложение там велось в такой форме, которая позволяет без труда их обобщить, если воспользоваться приводимыми ниже теоремами.

1. Вид дифференциальных выражений и граничных условий. Энергетические неравенства. Пусть G — ограниченная область пространства E_n с достаточно гладкой границей Г. В G задано эллиптическое дифференциальное выражение L порядка $2m$

$$Lu = L(x, \partial)\,u = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x)\,\partial^\alpha u, \qquad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}, \qquad \partial_j = \frac{1}{i} D_j \tag{6.1}$$

$$(j = 1, \ldots, n)^*.$$

---

* В этом параграфе удобно использование ∂^α вместо D^α.

Как известно, условие эллиптичности означает, что при любом вещественном векторе $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$ форма $L_c(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ отлична от нуля при $x \in G \cup \Gamma$.

Напомним сказанное на стр. 135—136, 144. Пусть $x \in \Gamma$ фиксирована; зафиксируем вектор $\tau \in E_{n-1}$, параллельный касательной гиперплоскости к Γ в точке x, и рассмотрим полином от комплексного числа ζ : $P(\zeta) = L_c(x, \tau + \zeta\nu(x))$ ($\nu(x)$ — орт внешней нормали в точке x). Из эллиптичности L следует, что $P(\zeta)$ не имеет вещественных корней. В дальнейшем будут рассматриваться такие выражения L, для которых при любом $\tau \neq 0$ полином $P(\zeta)$ имеет m корней внутри верхней и m — внутри нижней полуплоскостей. Эти выражения L назывались правильно эллиптическими. Как мы знаем, при $n \geqslant 3$ всякое эллиптическое выражение правильно эллиптично, а при $n = 2$ во всяком случае сильно эллиптические выражения правильно эллиптичны. Вместе с L и L^+ правильно эллиптично. В дальнейшем будем употреблять разложение

$$P(\zeta) = P_+(\zeta)P_-(\zeta),$$

где $P_+(\zeta)$ ($P_-(\zeta)$) — полином степени m, построенный по корням $P(\zeta)$, лежащим в верхней (нижней) полуплоскости.

Зададим на поверхности Γ граничные дифференциальные выражения, определяющие (гр) (см. стр. 158—159). Именно, положим

$$B_j u = B_j(x, \partial)u = \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{j\alpha}(x)\partial^\alpha u \qquad (m_j < 2m;\ j = 1, \ldots, m), \tag{6.2}$$

где $b_{j\alpha}(x)$ — достаточно гладкие коэффициенты, определенные для $x \in \Gamma$ (во всяком случае предполагается: $b_{j\alpha}(x) \in C(\Gamma)$ ($j = 1, \ldots, m$)). Выражение (6.2) можно вычислять для гладкой функции u, заданной в окрестности Γ. Как и для L, образуем полилинейную форму $B_{j,c}(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m_j} b_{j\alpha}(x)\xi^\alpha$ ($x \in \Gamma$; $\xi \in E_n$) и построим полином типа $P(\zeta)$: $Q_j(\zeta) = B_{j,c}(x, \tau + \zeta\nu(x))$ ($x \in \Gamma$ и $\tau \in E_{n-1}$ фиксированы).

Оказывается, что условия накрывания, о которых шла речь на стр. 159, можно выразить алгебраическим образом. Так, будем говорить, что система граничных выражений (6.2) накрывает выражение L, если в любой точке $x \in \Gamma$ для любых $\tau \in E_{n-1}$, $\tau \neq 0$, полиномы $Q_1(\zeta), \ldots, Q_m(\zeta)$ линейно независимы по модулю полинома $P_+(\zeta)$, т. е. равенство

$$\sum_{j=1}^{m} C_j Q_j(\zeta) = C(\zeta)P_+(\zeta), \tag{6.3}$$

где $C_1, \ldots, C_m$ — комплексные константы, а $C(\zeta)$ — полином, возможно лишь при $C_1 = \ldots = C_m = 0$.*

В этом параграфе мы, в основном, будем рассматривать неоднородную краевую задачу

$$(Lu)(x) = f(x) \qquad (x \in G), \tag{6.4}$$

---

* Легко видеть, что в этом определении можно $P_+(\zeta)$ заменить на $P_-(\zeta)$ (ср. с доказательством леммы 3.2).

$$(B_j u)(x) = \varphi_j(x) \qquad (x \in \Gamma;\ j = 1, \ldots, m), \tag{6.5}$$

где выражение L правильно эллиптично, а система $\{B_j\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ его накрывает. Такую задачу условимся называть эллиптической.

Как уже говорилось на стр. 159, энергетические неравенства можно устанавливать для произвольных функций в $G \cup \Gamma$, не удовлетворяющих обязательно однородным (гр), при этом в неравенствах будут фигурировать некоторые нормы функций, определенных на Γ — т. н. граничные нормы. Введем сейчас некоторые пространства функций, определенных на Γ, и соответствующие граничные нормы.

Предположим, что граница Γ области G принадлежит классу C^l, где $l > 0$ целое. Обозначим $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ линейное множество функций $\varphi(x)$, определенных на Γ и являющихся значениями на Γ функций пространства $W_2^l(G)$. Это множество превращается в полное нормированное пространство, если определить норму соотношением

$$\langle\!\langle \varphi \rangle\!\rangle_{l-\frac{1}{2}} = \langle\!\langle \varphi \rangle\!\rangle_{W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf \| u \|_l, \tag{6.6}$$

где inf распространяется на все функции $u \in W_2^l(G)$, совпадающие с $\varphi(x)$ на Γ. Ясно, что при $k > l$ $W_2^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma) \subseteq W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $\langle\!\langle \varphi \rangle\!\rangle_{l-\frac{1}{2}} \leqslant \langle\!\langle \varphi \rangle\!\rangle_{k-\frac{1}{2}}$ $(\varphi \in W_2^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ и $W_2^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ образует плотную часть $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Зафиксируем $C > 1$, очевидно для любого $\varphi \in W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ можно найти такое $u \in W_2^l(\Gamma)$, что будет выполняться неравенство

$$C^{-1} \| u \|_l \leqslant \langle\!\langle \varphi \rangle\!\rangle_{l-\frac{1}{2}} \leqslant C \| u \|_l. \tag{6.7}$$

Нетрудно видеть, что в действительности $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ является гильбертовым пространством. В самом деле, приведенное определение можно перефразировать следующим образом: в $W_2^l(G)$ рассматривается подпространство M, состоящее из всех функций, равных нулю на Γ. Тогда $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ совпадает с фактор-пространством $W_2^l(G)/M$. Но $W_2^l(G)$ — гильбертово, поэтому $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma) = W_2^l(G)/M$ совпадает с ортогональным дополнением в $W_2^l(G)$ к M, т. е. оно гильбертово. Скалярное произведение в $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ будем обозначать посредством $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{l-\frac{1}{2}}$. Заметим, что можно дать и внутреннее описание пространства $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ как соболевского пространства типа W_2^k, в котором k — максимальный порядок производных — дробный (ср. со стр. 77—78). На этом определении мы останавливаться не будем, так как оно не понадобится для формулировок результатов (хотя и существенно для некоторых доказательств).

Сформулируем теперь основное для развиваемой теории энергетическое неравенство.

Теорема 6.1. *Пусть коэффициенты выражений L и B_j имеют следующую гладкость: $a_\alpha(x) \in C^s(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m_j+s}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, где $s \geqslant 0$ целое; поверхность Γ класса C^{2m+s}. В том и только том случае, когда задача* (6.4) — (6.5) *эллиптическая, существует такая константа $C > 0$, что*

$$\| Lu \|_s^2 + \| u \|_0^2 + \sum_{j=1}^{m} \ll B_j u \gg^2_{2m-m_j+s-\frac{1}{2}} \geqslant C \| u \|^2_{2m+s}$$

$$(u \in W_2^{2m+s}(G)). \tag{6.8}$$

Доказательство достаточности в теореме 6.1 проводится подобно доказательству теоремы 3.1 переходом от локальных рассуждений. По существу, основную трудность составляет установление следующей леммы, касающейся выражений с постоянными коэффициентами и аналогичной лемме 3.1.

Лемма 6.1. *Пусть $G_\delta (\delta > 0)$ — полушар $|x| < \delta$, $x_n > 0$. В G_δ рассматриваются однородные выражения типа* (6.1) *и* (6.2) *с постоянными коэффициентами:*

$$Lu = \sum_{|\tau|+\nu=2m} a_{\tau\nu} \partial^\tau \partial_n^\nu u, \qquad B_j u = \sum_{|\tau|+\nu=2m-1} b_{j,\tau\nu} \partial^\tau \partial_n^\nu u \quad (j = 1, \ldots, m); \tag{6.9}$$

здесь $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ и D^τ обозначает дифференцирование в тангенциальном (относительно границы $x_n = 0$) направлении. Если выражение L правильно эллиптично, а система $\{B_j\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ его накрывает, то при $s \geqslant 0$ целом выполняется неравенство (6.8) *на классе функций $W_2^{2m+s}(G_\delta; 0)$, состоящем из всех функций из $W_2^{2m+s}(G_\delta)$, дополнительно аннулирующихся в окрестностях границы $|x| = \delta$ области G_δ. Граничные нормы в* (6.8) *сейчас построены по некоторой области $G'_\delta \supset G_\delta$ с достаточно гладкой границей, содержащей кусок $x_n = 0$, $|x| < \delta$, границы G_δ.*

На стр. 140 говорилось, что доказательство леммы 3.1 в случае L произвольного порядка может быть проведено двумя способами: при помощи представления решения посредством сингулярного интеграла и при помощи преобразования Фурье. Оба метода пригодны и для доказательства леммы 6.1, причем, как и ранее, достаточно ограничиться случаем $s = 0$: подобно сказанному на стр. 151—152 можно показать, что из оценки (6.8) при $s=0$ следует оценка и при $s > 0$. Еще раз наметим это последнее рассуждение.

Ясно, что лемму 6.1 достаточно доказывать для функции $u \in C^{2m+s}(\bar{G}_\delta; 0) = W_2^{2m+s}(G_\delta; 0) \cap C^{2m+s}(\bar{G}_\delta)$, так как затем можно посредством предельного перехода перейти к $u \in W_2^{2m+s}(G_\delta; 0)$. Пусть она верна при $s = 0$, чтобы ее доказать для $s = 1$, поступим так. Рассмотрим $u \in C^{2m+1}(\bar{G}_\delta; 0)$ и разделенную разность в касательном направлении: $u_k^h(x) = \frac{1}{ih}(u(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \ldots x_n)) - u(x_1, \ldots, x_n)$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Если $|h|$ достаточно мало, то и $u_k^h \in C^{2m+1}(\bar{G}_\delta; 0)$. Поэтому к u_k^h можно применить уже доказанное неравенство т. е. (6.8) с $s=0$. Перейдя затем к пределу при $h \to 0$, получаем

$$\| L\partial_k u \|_0^2 + \| \partial_k u \|_0^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle B_j \partial_k u \rangle\rangle^2_{2m-m_j-\frac{1}{2}} \geqslant C \| \partial_k u \|^2_{2m}. \qquad (6.10)$$

Так как в силу эллиптичности L $a_{(0,\ldots,0,2m)} \neq 0$, то из соотношения $Lu = \sum\limits_{|\tau|+\nu=2m} a_{\tau\nu}\partial^\tau \partial_n^\nu u$ следует

$$\partial_n^{2m+1} u = \frac{1}{a_{(0,\ldots,0,2m)}} \left(\partial_n Lu - \sum_{\substack{|\tau|+\nu=2m \\ \nu<2m}} a_{\tau\nu} \partial^\tau \partial_n^{\nu+1} u \right),$$

$$\| \partial_n^{2m+1} u \|_0 \leqslant C_1 \left(\| \partial_n Lu \|_0 + \sum_{\substack{|\tau|+\nu=2m \\ \nu<2m}} \| \partial^\tau \partial_n^{\nu+1} u \|_0 \right). \qquad (6.11)$$

Из (6.10) и (6.11) при помощи неравенства Эрлинга — Ниренберга заключаем, что (6.8) справедливо при $s=1$. Последовательно применяя эти рассуждения, получим (6.8) для любого натурального s. Утверждение доказано.

Несколько видоизменяя приведенное доказательство, нетрудно установить следующий факт: если $u \in W_2^{2m}(G_\delta; 0)$, но $f = Lu \in W_2^s(G_\delta)$, $\varphi_j = B_j u \in W_2^{2m-m_j+s-\frac{1}{2}}(G'_\delta)$ $(j=1,\ldots,m)$, где $s=0, 1, \ldots$, а G'_δ — область, фигурировавшая в условии леммы 6.1, то и $u \in W_2^{2m+s}(G_\delta; 0)$. Это позволяет следующим образом изменить формулировку достаточности в теореме 6.1: *если* $u \in W_2^{2m}(G)$, $Lu \in W_2^s(G)$, $B_j u \in W_2^{2m-m_j+s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j=1,\ldots,m)$, *то* $u \in W_2^{2m+s}(G)$ *и справедливо неравенство* (6.8). Таким образом, мы получили некоторое утверждение о повышении гладкости. Оно, конечно, справедливо и в локальной формулировке.

2. Оператор, отвечающий неоднородной краевой задаче. Будем считать, что коэффициенты выражений (6.1) и (6.2) имеют гладкость: $a_\alpha(x) \in C(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m_j}(\Gamma)$ $(j=1,\ldots,m)$, а Γ класса C^{2m}. Построим оператор $\mathfrak{L}$, непрерывно (см. (6.7)) действующий из $W_2^{2m}(G)$ в ортогональную сумму

$$K_{\left(0,\, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)} = L_2(G) \oplus \sum_{j=1}^{m} W_2^{2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

по закону:

$$\mathfrak{L}u = (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u), \qquad u \in W_2^{2m}(G).$$

Таким образом, задача (6.4) — (6.5) при f и φ_j $(j=1,\ldots,m)$ из соответствующих пространств может быть записана так:

$$\mathfrak{L}u = F \quad \left(u \in W_2^{2m}(G), \quad F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)} \right).$$

Обозначим через N ядро оператора $\mathfrak{L}$, т. е. подпространство решений из $W_2^{2m}(G)$ задачи (6.4) — (6.5) с $f=0$, $\varphi_1=0, \ldots, \varphi_m=0$. Установим несколько лемм, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 6.2. *Ядро N оператора $\mathfrak{L}$ конечномерно.*

Действительно, из (6.8) следует, что для $u \in N$ $\|u\|_{2m} \leqslant C_1 \|u\|_0$. Обозначим $w = \frac{u}{\|u\|_0}$ $(u \in N)$. Тогда $\|w\|_0 = 1$ и $\|w\|_{2m} \leqslant C_1$, откуда по теоремам вложения множество всех w предкомпактно в $L_2(G)$. Таким образом, подпространство N имеет в норме $L_2(G)$ предкомпактный шар, поэтому N конечномерно. Лемма доказана.

Заметим, что по определению N — подпространство $W_2^{2m}(G)$, но вследствие конечномерности оно замкнуто и в $L_2(G)$. Положим $H_{2m} = W_2^{2m}(G) \ominus N$, где $\ominus$ обозначает ортогональное вычитание в $L_2(G)$. Легко видеть, что H_{2m} — подпространство $W_2^{2m}(G)$. Каждый элемент $u \in W_2^{2m}(G)$ можно единственным образом представить в виде

$$u = u' \dotplus u'', \qquad u' \in N, \qquad u'' \in H_{2m}. \tag{6.12}$$

Таким образом, в $W_2^{2m}(G)$ можно определить операторы (косого) проектирования P_N и $P_{\perp N}$, полагая $P_N u = u'$, $P_{\perp N} u = u''$ $(u \in W_2^{2m}(G))$; $P_N \dotplus P_{\perp N} = E$. Полезно отметить, что эти операторы непрерывны в метрике $W_2^{2m}(G)$. В этом достаточно убедиться, например, для P_N. Так как (6.12) — ортогональное разложение в $L_2(G)$ и N — конечномерно, можем написать:

$$\|P_N u\|_{2m} = \|u'\|_{2m} \leqslant C_1 \|u'\|_0 \leqslant C_1 \|u\|_0 \leqslant C_2 \|u\|_{2m} \qquad (u \in W_2^{2m}(G)),$$

что и требовалось.

Следующая лемма объединяет несколько связанных фактов.

Лемма 6.3. *Пусть задача* (6.4) — (6.5) *эллиптична и пусть* $a_\alpha(x) \in C(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m_j}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, Γ *класса* C^{2m}. *Тогда*

а) *Существует такая константа* $C > 0$, *что*

$$C^{-1} \|u\|_{2m}^2 \leqslant \|Lu\|_0^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j u \rangle\!\rangle^2_{2m-m_j-\frac{1}{2}} \leqslant C \|u\|_{2m}^2 \tag{6.13}$$
$$(u \in H_{2m}).$$

б) *Оператор $\mathfrak{L}$, рассматриваемый как оператор из $L_2(G)$ в $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ замкнут.*

в) *Область значений оператора $\mathfrak{L}$ замкнута в $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$.*

г) *Если $\mathfrak{L}u = F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, причем дополнительно*

$$F \in K_{\left(s, 2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)} = W_2^s(G) \oplus \sum_{j=1}^{m} W_2^{2m-m_j+s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \subseteq K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$$

и Γ поверхность класса C^{2m+s}, где $s \geqslant 0$ целое, то $u \in W_2^{2m+s}(G)$.

Доказательство проведем для каждого из утверждений.

а) Установление неравенства (6.13) подобно рассуждениям, приведенным на стр. 171 — 173. Именно, допустим, что левое неравенство в (6.13) не имеет место. Тогда можно найти последовательность $u_n \in H_{2m}$ такую, что $\|u_n\|_{2m}=1$, $\|Lu_n\|_0^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle\!\langle B_j u_n \rangle\!\rangle^2_{2m-m_j-\frac{1}{2}} \to 0$. Из теорем вложения следует, что существует подпоследовательиость $u_{n'}$, для которой $\|u_{n'} - u_{m'}\|_0 \to 0$ при n', $m' \to \infty$. В сплу неравенства (6.8) (с $s=0$) имеем:

$$C\|u_{n'} - u_{m'}\|^2_{2m} \leqslant \|L(u_{n'} - u_{m'})\|_0^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j(u_{n'} - u_{m'})\rangle\!\rangle^2_{2m-m_j-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \|u_{n'} - u_{m'}\|_0^2 \underset{n',\, m' \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому существует элемент $\varphi \in W_2^{2m}(G)$ такой, что $\|u_{n'} - \varphi\|_{2m} \to 0$; так как H_{2m} замкнуто в $W_2^{2m}(G)$, то $\varphi \in H_{2m}$. С другой стороны, из $\|Lu_n\|_0^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j u_n \rangle\!\rangle^2_{2m-m_j-\frac{1}{2}} \to 0$ следует, что $\varphi \in N$. Поэтому $\varphi = 0$. Вместе с тем $\|\varphi\|_{2m} = \lim \|u_n\|_{2m} = 1$. Мы пришли к противоречию. Правое неравенство в (6.13) очевидно.

б) Пусть $u_n \to u$ в $L_2(G)$ и $\mathfrak{L}u_n \to (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ в $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. Тогда последовательности u_n и $\mathfrak{L}u_n$ будут фундаментальными соответственно в $L_2(G)$ и $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. Из неравенства (6.8) (для $s=0$) следует, что u_n фундаментальна в $W_2^{2m}(G)$. Поэтому $u_n \to u$ в $W_2^{2m}(G)$ и $\mathfrak{L}u = \lim \mathfrak{L}u_n = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$.

в) Обозначим через $\mathfrak{L}_0$ сужение оператора $\mathfrak{L}$ на H_{2m}. Из представления (6.12) следует, что области значений операторов $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_0$ совпадают: $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{L}_0)$. С другой стороны, неравенство (6.13) означает, что на $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}_0)$ определен обратный оператор $\mathfrak{L}_0^{-1}$, который непрерывно действует из $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ в $W_2^{2m}(G)$. Таким образом, $\mathfrak{L}_0$ осуществляет гомеоморфизм между H_{2m} и $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}_0) = \mathfrak{R}(\mathfrak{L})$, что свидетельствует о замкнутости последнего множества в $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$.

г) Это утверждение непосредственно следует из сказанного в конце п. 1. Лемма полностью доказана.

Сформулируем следствие из нее, которое можно воспринимать как аналог теоремы 3.6 о гомеоморфизмах в случае 1), правда, без полного описания области значений оператора.

Следствие. Если выполнены требования гладкости, фигурирующие в г), то сужение $\mathfrak{L}_s$ оператора $\mathfrak{L}$ на $H_{2m+s} = H_{2m} \cap W_2^{2m+s}(G) = W_2^{2m+s}(G) \ominus N$ устанавливает гомеоморфизм между H_{2m+s} и $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}_s)=\mathfrak{R}(\mathfrak{L})\cap K_{\left(s,\,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$ — по пространством пространства $K_{\left(s,\,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$ ($s\geqslant 0$ целое).

Действительно, при $s=0$ утверждение вытекает из а), а при $s>0$ — из і неравенства $\|Lu\|_s^2+\sum_{j=1}^{m}\langle\!\langle B_ju\rangle\!\rangle^2_{2m-m_j+s-\frac{1}{2}}\leqslant C\|u\|^2_{2m+s}$ $(u\in H_{2m+s})$ и те ремы о непрерывности обратного оператора к непрерывному оператору, осущес вляющему взаимно однозначное отображение между полными пространствами.

3. **Нётеровость эллиптической задачи.** Пусть B — некоторое банахо пространство, M — его подпространство. Коразмерностью M называі размерность фактор-пространства B/M. Если B — гильбертово, то кор змерность M совпадает с размерностью его ортогонального дополнения.

Сейчас мы будем исследовать коразмерность $\mathfrak{R}(\mathfrak{L})$ в $K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ (і помним, что $\mathfrak{R}(\mathfrak{L})$ замкнуто в $K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$, см. лемму 6.2, в)). Приведем «аі литическое» определение коразмерности в этом случае. Нетрудно видеть, ч $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(l>0)$ можно рассматривать как позитивное пространство относите но нулевого $L_2(\Gamma)$, пусть $W_2^{-\left(l-\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)$ — соответствующее негативное простра ство. Скалярные произведения и нормы обозначаем: $\langle\cdot,\cdot\rangle_{l-\frac{1}{2}}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $\langle\cdot,\cdot\rangle_{-\left(l-\frac{1}{2}\right)}$ и $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle_{l-\frac{1}{2}}$, $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle_0$, $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle_{-\left(l-\frac{1}{2}\right)}$. Рассматривая $K_{\left(0,2m-m_j-\right.}$ как позитивное пространство относительно нулевого $L_2(G)\oplus L_2(\Gamma)\oplus\ldots\oplus L_2($ ($L_2(\Gamma)$ повторяется m раз), получим цепочку

$$L_2(G)\oplus\sum_{j=1}^{m}W_2^{-\left(2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)\supseteq L_2(G)\oplus L_2(\Gamma)\oplus\ldots\oplus L_2(\Gamma)\supseteq$$

$$\supseteq L_2(G)\oplus\sum_{j=1}^{m}W_2^{2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)=K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}. \qquad (6.1$$

Теперь то обстоятельство, что $\mathfrak{R}(\mathfrak{L})$ имеет в $K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ конечную кор мерность q, можно, очевидно, сформулировать следующим образом: существует линейно независимых векторов

$$A^{(k)}=(a^{(k)},\alpha_1^{(k)},\ldots,\alpha_m^{(k)})\in L_2(G)\oplus\sum_{j=1}^{m}W_2^{-\left(2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)\ (k=1,\ldots,\text{п}$$

таких, что $F=(f,\varphi_1,\ldots,\varphi_m)\in K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ принадлежит $\mathfrak{R}(\mathfrak{L})$ тогда и то ко тогда, когда

$$[F, \mathrm{A}^{(k)}]_0 = (f, a^{(k)})_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, \alpha_j^{(k)} \rangle_0 = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q). \tag{6.15}$$

Здесь посредством $[.,.]_0$ записывается «скалярное произведение» обобщенных и основных векторов цепочки (6.14).

Оказывается, коразмерность $\mathfrak{R}(\mathfrak{L})$ в $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ действительно конечна.

Лемма 6.4. *Пусть задача* (6.4)—(6.5) *эллиптична и пусть* $a_\alpha(x) \in C(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m_j}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, *а* Γ *класса* C^{2m}. *Тогда коразмерность* $\mathfrak{R}(\mathfrak{L})$ в $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ *конечна.*

Мы изложим лишь идею доказательства этой важной леммы. Пусть T — некоторый оператор, непрерывно действующий из $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ в $W_2^{2m}(G)$. Тогда $\mathfrak{L}T$ будет непрерывно действовать в $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. Предположим теперь, что оператор T таков, что $\mathfrak{L}T = E + S$, где S вполне непрерывен в $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. Тогда $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}T)$ будет иметь конечную коразмерность, а так как $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}) \supset \mathfrak{R}(\mathfrak{L}T)$, то коразмерность $\mathfrak{R}(\mathfrak{L})$ тем более конечна. Итак, доказательство леммы сводится к построению оператора T—так называемого регуляризатора.

Это построение проводится локально, причем существенно используются формулы, с помощью которых, как говорилось, могут быть доказаны леммы 3.1 и 6.1 (именно, формулы, представляющие решение задачи (6.4)—(6.5) в полупространстве G через $f(x)$ $(x \in G)$ и $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ $(x \in \Gamma)$; Γ — гиперплоскость). Наметим его.

Пусть V_k — некоторая фиксированная окрестность, расположенная внутри G. Строим сперва вспомогательный оператор T_k, действующий из $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ в $W_2^{2m}(V_k)$ таким образом, чтобы для любого $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$

$$\| T_k F \|_{W_2^{2m}(V_k)} \leqslant C \| F \|_{K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}}, \tag{6.16}$$

$$(L(T_k F))(x) = f(x) + (L'(T_k F))(x) \qquad (x \in V_k),$$

где L' — дифференциальное выражение порядка $< 2m$. Если V_k примыкает к куску Γ_k границы Γ, то T_k строим по-прежнему как оператор, действующий из $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ в $W_2^{2m}(V_k)$, так, чтобы помимо соотношений (6.16) выполнялось еще равенство

$$(B_j(T_k F))(x) = \varphi_j(x) + (B_j'(T_k F))(x) \tag{6.17}$$

$$(x \in \Gamma_k;\ j = 1, \ldots, m),$$

где B_j' — дифференциальное выражение порядка $< m_j$.

Можно показать, что если $V_k \subset G$ достаточно малая окрестность (примыкающая к Г или нет), то действительно можно построить оператор T_k со свойствами (6.16) — (6.17). Его построение для случая, когда L и $B_j (j = 1, \ldots, m)$ — однородные выражения с постоянными коэффициентами, а Γk — кусок гиперплоскости, непосредственно следует из упоминавшихся формул представления: в этом случае T_k будет просто локально обратным оператором, т. е. в (6.16) и (6.17) выражения L' и B'_j заменятся нулями. В общем случае построение T_k проводится методом последовательных приближений.

Образуем теперь конечное покрытие G окрестностями $V_1, \ldots, V_N$, для каждой из которых построен соответствующий оператор T_k; $1 = \sum_{k=1}^{N} \chi_k(x)$ $(x \in G \cup \Gamma)$— отвечающее этому покрытию разложение единицы. Легко проверить, что требуемым оператором T будет служить оператор $(TF)(x) = \sum_{k=1}^{N} \chi_k(x)(T_k F)(x)$.

Будем говорить, что краевая задача (6.4)—(6.5) нётерова, если построенный по ней оператор $\mathfrak{L}$, действующий из пространства $W_2^{2m}(G)$ в пространство $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$, обладает следующими свойствами:

а) ядро оператора $\mathfrak{L}$ конечномерно;

б) область значений $\mathfrak{R}(\mathfrak{L})$ замкнута в $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$;

в) коразмерность подпространства $\mathfrak{R}(\mathfrak{L})$ в $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ конечна*.

Таким образом, нётеровость означает разрешимость при любом $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ с «конечными дефектами». Если p обозначает размерность ядра оператора $\mathfrak{L}$, а q — коразмерность подпространства $\mathfrak{R}(\mathfrak{L})$, то разность $p - q$ носит название индекса задачи. Обобщая понятие фредгольмовости, приведенное в теореме 3.5, гл. II, задачу (6.4)—(6.5) называют фредгольмовой, если ее индекс равен 0. На большом круге вопросов, связанных с его подсчетом, мы останавливаться не будем. Из лемм 6.2, 6.3 в) и 6.4 следует

***Теорема* 6.2.** *Эллиптическая задача* (6.4) — (6.5) *нётерова, если только выполняются следующие предположения гладкости*: $a_\alpha(x) \in C(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m_j}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, Г *класса* C^{2m}.

4. Сопряженная задача в случае однородных (гр). Будем изучать задачу, сопряженную к эллиптической граничной задаче (6.4) — (6.5) с однородными граничными условиями; сейчас, естественно предполагается, что L удовлетворяет обычным требованиям гладкости. Через W_2^{2m} (гр) обозначим множество функций $u \in W_2^{2m}(G)$, для которых $(B_j u)(x) = 0$ $(x \in \Gamma;$ $j = 1, \ldots, m)$. Из теорем вложения следует, что если Г— поверхность класса C^{2m}, то W_2^{2m} (гр) —подпространство пространства $W_2^{2m}(G)$ и поэтому такое введение (гр) корректно с точки зрения п. 1, § 1, гл. II. Обычным образом определим (гр)$^+$; выполнение равенства (гр)$^{++}$=(гр) сейчас не обязательно.

---

* Оператор, действующий из одного банахова пространства в другое и обладающий свойствами а) — в), называется также Ф-оператором.

Рассмотрим краевые задачи

$$Lu = f, \quad u \in (\text{гр}); \tag{6.18}$$

$$L^+ v = g, \quad v \in (\text{гр})^+. \tag{6.19}$$

Пусть $g \in W_2^{-2m}(G)$; слабым (точнее, 0-обобщенным) решением задачи (6.19) называется такое $v \in L_2(G)$, что для любого $u \in W_2^{2m}$ (гр) выполняется равенство $(v, \ Lu)_0 = (g, \ u)_0$. Это определение (если считать $(\text{гр})^{++} = (\text{гр})$) согласуется с определениями п. 3, § 3, гл. II; при этом возможна потеря граничных условий. Несложно доказывается такая теорема.

Теорема 6.3. *Пусть задача* (6.4)—(6.5) *эллиптична, причем* $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m_j}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, Γ *класса* C^{2m}. *Если* $g \in W_2^{-2m}(G)$ *таково, что* $(g, N)_0 = 0$ $(N$ — *ядро оператора* $\mathfrak{L})$, *то существует слабое решение задачи* (6.19). *Ясно, что и обратно: если для* $g \in W_2^{-2m}(G)$ *существует слабое решение задачи* (6.19), *то* $(g, N)_0 = 0$.

Доказательство нетрудно свести к абстрактной формулировке теоремы 3.3, гл. II (см. конец п. 4, § 3, гл. II), однако еще проще его провести непосредственно. Мы остановимся на этом втором пути, тем более, что будет приведена некоторая полезная модификация рассуждений стр. 107.

Итак, из неравенства (6.13) следует, что определенную для $u, v \in W_2^{2m}(G)$ билинейную форму

$$B(u, v) = (Lu, Lv)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, B_j v \rangle_{2m - m_j - \frac{1}{2}} \tag{6.20}$$

можно принять в качестве нового скалярного произведения в H_{2m}, эквивалентного $(\cdot, \cdot)_{2m}$. Рассмотрим антилинейный непрерывный функционал $l(u'') = (g, u'')_0$ над $u'' \in H_{2m}$. Его можно записать посредством скалярного произведения (6.20): $(g, u'')_0 = B(w, u'')$ $(u'' \in H_{2m})$, где w — некоторый элемент из H_{2m}. Последнее равенство справедливо не только для $u'' \in H_{2m}$, но и для $u \in W_2^{2m}(G)$: представляя u согласно (6.12) в виде $u = u' + u''$, где $u' \in N$ и $u'' \in H_{2m}$, получим благодаря условию $(g, u')_0 = 0$ и $\mathfrak{L}u' = 0$

$$\begin{aligned} B(w, u) = (Lw, Lu)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j w, B_j u \rangle_{2m - m_j - \frac{1}{2}} = \\ = B(w, u'') = (g, u'')_0 = (g, u)_0. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Обозначим $v = Lw \in L_2(G)$ и будем считать $u \in W_2^{2m}$ (гр). Теперь $B_j u = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ и равенство (6.21) дает $(v, Lu)_0 = (g, u)_0$. Таким образом, v — искомое слабое решение. Теорема доказана.

Оказывается, что если коэффициенты дифференциальных выражений и Γ будут достаточно гладкими, то найденное сейчас слабое решение при более гладкой g будет более гладким. Этот результат вытекает из следующей общей теоремы, доказательство которой основывается на технике, близкой к изложенной на стр. 224—225, 151—152.

Теорема 6.4. *Пусть задача* (6.4)—(6.5) *эллиптична, причем* $a_\alpha(x) \in C^{2m + \max(|\alpha|, s)}(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{2m+s-1}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, Γ *класса* C^{4m+s} *и* $g \in W_2^s(G)$ $(s \geqslant 0$ *целое*). *Определим билинейную форму* $B(u, v)$ *для* $u, v \in W_2^{2m}(G)$ *посредством равенства* (6.20). *Если* $w \in W_2^{2m}(G)$ *таково, что при*

любом $u \in W_2^{2m}(G)$
$$B(w, u) = (g, u)_0, \tag{6.22}$$
то автоматически $w \in W_2^{4m+s}(G)$.

Следствие 1. Пусть выполнены предположения теорем 6.3, 6.4 и $(g, N)_0 = 0$. Тогда существующее согласно теореме 6.3 слабое решение v задачи (6.19) входит в $W_2^{2m+s}(G)$.

В самом деле, $v = Lw$, причем w удовлетворяет (6.21). Сравнивая это равенство с (6.22), заключаем, что $w \in W_2^{4m+s}(G)$, откуда $v \in W_2^{2m+s}(G)$.

Следствие 2. Если в теореме 6.4 условие (6.22) заменить условием $B(w, w) = 0$, то $w \in W_2^{4m+s}(G)$. В частности, $N \subset W_2^{2m+s}(G)$.

Действительно, билинейная форма (6.20) на $W_2^{2m}(G)$ положительно определена, поэтому равенство $B(w, w) = 0$ влечет равенство $B(w, u) = 0$ ($u \in W_2^{2m}(G)$). Таким образом, справедливо (6.22) с $g = 0$, откуда и вытекает утверждение.

Из леммы 6.3 в) следует, что множество $L(W_2^{2m}(\text{гр}))$ замкнуто в $L_2(G)$, а из леммы 6.4 — что размерность ортогонального дополнения в $L_2(G)$ к нему конечна. Но это ортогональное дополнение совпадает с M^+ — множеством слабых решений задачи (6.19) с $g = 0$. Обозначим N^+ ядро оператора типа $\mathfrak{L}$, но построенного не по L, а по L^+. Иными словами, N^+— совокупность решений $v \in W_2^{2m}(\text{гр})+$ задачи (6.19) с $g = 0$. Ясно, что $N^+ \subseteq M^+$ и поэтому N^+ *также конечномерно* (этот результат не следует тривиально заменой L на L^+ из сказанного в п. 2, так как $(\text{гр})^+$ не будут, вообще говоря, описываться дифференциальными выражениями типа (6.2)).

В дальнейшем (п. 6) будет показано, что при некотором дополнительном условии (условии нормальности) на систему граничных выражений (6.2) справедливо равенство
$$N^+ = M^+. \tag{6.23}$$

Сейчас уместно сделать одно замечание к следствию 1.

Предположим, что выполнены условия следствия 1 при $s = 0$ *и справедливо* (6.23). *Тогда всякое слабое решение задачи* (6.19) *с* $g \in L_2(G)$ (*а не только построенное согласно теореме 6.3*) *входит в* $W_2^{2m}(G)$.

Убедимся прежде всего, что слабое решение указанной задачи (6.19), ортогональное в $L_2(G)$ к M^+ — единственно. Действительно, если существуют два таких решения, то их разность $w \in L_2(G)$ удовлетворяет равенствам
$$(w, Lu)_0 = 0 \quad (u \in W_2^{2m}(\text{гр})), \quad (w, M^+)_0 = 0. \tag{6.24}$$

Но ортогональное (в $L_2(G)$) дополнение к M^+ совпадает с множеством $L(W_2^{2m}(\text{гр}))$, так как последнее замкнуто. Поэтому из второго равенства в (6.24) следует, что $w = Lu_0$, где $u_0 \in W_2^{2m}(\text{гр})$. Полагая в первом из равенства (6.24) $u = u_0$, получим: $(w, w)_0 = 0$, т. е. $w = 0$, что и требовалось.

Пусть теперь $v \in L_2(G)$ — произвольное слабое решение задачи (6.19) с $g \in L_2(G)$, т. е. $(v, Lu)_0 = (g, u)_0$ $(u \in W_2^{2m}(\text{гр}))$. Представим v в виде $v = v' + v''$, где $v' \in M^+$, а v'' ортогонально в $L_2(G)$ к M^+. Так как согласно определению M^+ $(v', Lu)_0 = 0$ $(u \in W_2^{2m}(\text{гр}))$, то v'' также слабое решение (6.19).

Аналогичное разбиение $v_0 = v_0' + v_0''$ произведем со слабым решением v_0 задачи (6.19), полученным согласно теореме 6.3. По доказанному $v'' = v_0'' = v_0 - v_0'$. Таким образом, $v = v' + v_0 - v_0'$. Согласно следствию 1 $v_0 \in W_2^{2m}(G)$; благодаря (6.23) v', $v_0' \in M^+ = N^+ \subset W_2^{2m}(G)$. Таким образом, и $v \in W_2^{2m}(G)$, что и требовалось доказать.

5. **Нормальные системы граничных выражений.** Как уже говорилось, сопряженные граничные условия к (гр), построенным по (6.2), не будут вообще говоря, порождаться выражениями типа (6.2). Это вносит известную асимметрию в изложение и делает результаты менее полными. Сейчас мы изучим класс (гр), лишенных этого недостатка.

Систему граничных выражений (6.2) называют нормальной, если: а) $m_j \neq m_l$ при любых $j \neq l$; б) для каждого $x \in \Gamma$ $B_{j,c}(x, \nu(x)) \neq 0$ ($j = 1, \ldots, m$; $\nu(x)$ — орт внешней нормали к Γ в точке x)*.

Будем считать, что Γ — поверхность класса C^{l-1}, $l - 1 \geqslant 0$. Тогда для каждой точки $x \in \Gamma$ существует ее окрестность U в E_n такая, что $\Gamma \cap U$ можно взаимно однозначно отобразить на касательную гиперплоскость в точке x, причем как само отображение, так и обратное, $l - 1$ раз непрерывно дифференцируемы. Будем считать, что точка x является началом координат, а уравнение касательной гиперплоскости в этой точке есть $x_n = 0$. Кусок поверхности $\Gamma \cap U$ представим уравнением вида $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, где $\psi(0, \ldots, 0) = 0$, $\psi \in C^{l-1}$. Тогда преобразование типа, указанного на стр. 155,

$$\begin{aligned} x_k' &= x_k \quad (k = 1, \ldots, n-1), \\ x_n' &= x_n - \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{aligned} \tag{6.25}$$

отображает $\overline{G \cap U}$ в полушар $\overline{G}_\delta$ ($|x'| \leqslant \delta$, $x_n' \geqslant 0$). После такого преобразования любое граничное выражение $B(x, \partial)$ типа (6.2) порядка $l - 1$ перейдет в выражение

$$B'(x', \partial') = \sum_{s=1}^{l} T_s(x', \partial')\, \partial_n'^{\,s-1} \qquad \left(\partial_n' = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n'}\right), \tag{6.26}$$

где $T_s(x', \partial')$ — выражение в частных производных порядка $\leqslant l - s$ по переменным $x_1', \ldots, x_{n-1}'$. Иными словами, производная $\dfrac{\partial}{\partial x_n'}$ направлена по нормали к границе $x_n' = 0$ области G_δ, а остальные производные, фигурирующие в $T_s(x', \partial')$ — тангенциальные. Если $B(x, \partial)$ принадлежит нормальной системе, то из условия б) следует, что функция $T_l(x', 0) \neq 0$.

Систему m нормальных граничных выражений (6.2) называют системой Дирихле порядка m, если все порядки m_j этих выражений ниже m. Если $B_1, \ldots, B_m$ — такая система, то после их надлежащей перенумерации можно считать, что порядок B_j равен $j - 1$. В дальнейшем такое соглашение всегда будет считаться выполненным.

Лемма 6.5. *Пусть* (6.2) — *система Дирихле, причем* $b_{j\alpha}(x) \in C^{m-j+1}(\Gamma)$ ($j = 1, \ldots, m$); Γ — *класса* C^m. *Если на* Γ *задана любая система функций*

* Аналогично вводится понятие нормальности на куске $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$, *причем* $\varphi_j(x) \in W_2^{m-j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, *то можно найти такую функцию* $u \in W_2^m(G)$, *чтобы* $(B_ju)(x) = \varphi_j(x)(x \in \Gamma;\ j = 1, \ldots, m)$. *Отображение* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \to u$ *непрерывно действует из* $\bigoplus \sum\limits_{j=1}^{m} W_2^{m-j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *в* $W_2^m(G)$.

Наметим доказательство. Ясно, что его достаточно проводить локально, причем вблизи плоского куска границы (нужно воспользоваться разложением единицы и преобразованием (6.25)). Это позволяет считать G полупространством $x_n' > 0$ и рассматривать финитные при $|x'| \to \infty$ функции.

Предположим теперь, что B_j имеют специальный вид: $B_j = \partial_n'^{j-1}$ $(j = 1, \ldots, m)$. В этом случае лемма доказывается в теории пространств $W_2^l(G)$ с дробным l при помощи преобразования Фурье по $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. В общем случае поступаем следующим образом. Из треугольной системы (см. (6.26))

$$B_j(x', \partial') = \sum_{s=1}^{j} T_{js}(x', \partial')\, \partial_n'^{s-1} \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{6.27}$$

можно последовательно выразить $\partial_n'^{j-1}$ через $B_1, \ldots, B_m$:

$$\partial_n'^{j-1} = \sum_{s=1}^{j} \widehat{T}_{js}(x', \partial')\, B_s(x', \partial') \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{6.28}$$

где $\widehat{T}_{js}(x', \partial')$ — подобные $T_{js}(x', \partial')$ выражения. Порядки T_{js} и $\widehat{T}_{js}$ не выше $j - s$; $T_{jj}(x', 0)$, $\widehat{T}_{jj}(x', 0) \neq 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Пусть теперь нужно найти функцию $u \in W_2^m(G)$ таким образом, чтобы $(B_ju)(x) = \varphi_j(x)$ $(x \in \Gamma;\ j = 1, \ldots, m)$. Благодаря (6.27) и (6.28) достаточно найти u, удовлетворяющую на Γ равенствам $\partial_n'^{j-1}u = \sum\limits_{s=1}^{j} \widehat{T}_{js}(x', \partial')\, \varphi_s \in W_2^{m-j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Таким образом, вопрос сведен к специальному случаю, что и доказывает лемму.

Теорема 6.5. *Пусть выражение* (6.1) *эллиптично, а система граничных выражений* (6.2) *нормальна. Предположим что* $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m-m_j-1,\, m_j)}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$ *и* Γ *класса* C^{2m}. *Тогда можно найти такую нормальную систему типа* (6.2)

$$B_j'v = B_j'(x, \partial)v = \sum_{|\alpha| \leq m_j'} b_{j\alpha}'(x)\, \partial^\alpha v \qquad (m_j' < 2m;\ j = 1, \ldots, m), \tag{6.29}$$

что $W_2^{2m}(\text{гр})^+$ *состоит из тех и только тех* $v \in W_2^{2m}(G)$, *для которых* $(B_j'v)(x) = 0$ $(x \in \Gamma;\ j = 1, \ldots, m)$. *При этом* $W_2^{2m}(\text{гр})^{++} = W_2^{2m}(\text{гр})$.

Наметим доказательство. Дополним произвольным образом систему $\{B_j\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ до системы Дирихле порядка $2m$ (это возможно, так как порядки выражений $B_1, \ldots, B_m$ меньше $2m$). В полученной системе введем естественную нумерацию (чтобы j-е выражение имело порядок $j - 1$). Таким образом, наши исходные выражения приобретут обозначения: $B_{m_1+1}, \ldots, B_{m_m+1}$. Посредством преобразования (6.25) можно перейти к полушару G_δ и выражениям типа (6.26); будем сразу считать, что B_j имеют вид (6.26). Отметим также, что сейчас справедливы равенства (6.27) и (6.28), в которых m заменено на $2m$.

Пусть $u \in W_2^{2m}(G_\delta)$, запишем выражение L в виде

$$Lu = \sum_{|\tau|+\nu \leqslant 2m} a_{\tau\nu}(x)\, \partial^\tau \partial_n^\nu u, \qquad \partial^\tau = \partial_1^{\tau_1} \dots \partial_{n-1}^{\tau_{n-1}} \tag{6.30}$$

(штрихи в обозначениях точек и производных мы опускаем). Рассмотрим $v \in W_2^{2m}(G_\delta)$, аннулирующуюся в окрестности границы $|x| = \delta$ области G_δ. Перебрасывая в выражении $(Lu, v)_0$ интегрированием по частям тангенциальные производные на v, получим:

$$(Lu, v)_0 - (u, L^+ v)_0 = \sum_{\nu=0}^{2m} \sum_{s=1}^{\nu} \int_{S_\delta} \partial_n^{s-1} u \cdot \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} \partial_n^{\nu-s} \partial^\tau (\overline{a_{\tau\nu} v})\, dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{2m} \int_{S_\delta} \partial_n^{s-1} u \cdot \sum_{\substack{|\tau|+\nu \leqslant 2m, \\ \nu \geqslant s}} \partial_n^{\nu-s} \partial^\tau (\overline{a_{\tau\nu} v})\, dx,$$

где S_δ — плоская часть границы области G_δ.

Учитывая (6.28) (где m заменено на $2m$), получим отсюда

$$(Lu, v)_0 - (u, L^+ v)_0 = \sum_{s=1}^{2m} \sum_{t=1}^{s} \int_{S_\delta} \widehat{T}_{st} B_t u \cdot \overline{N_s v}\, dx =$$

$$= \sum_{t=1}^{2m} \int_{S_\delta} B_t u \cdot \overline{\sum_{s=t}^{2m} \widehat{T}_{st}^{+} N_s v}\, dx = \sum_{t=1}^{2m} \langle B_t u, B'_{2m-t+1} v \rangle_0. \tag{6.31}$$

Здесь обозначено

$$N_s v = \sum_{\nu=s}^{2m} \sum_{|\tau|+\nu \leqslant 2m} \partial_n^{\nu-s} \partial^\tau (\overline{a_{\tau\nu}} v) \qquad (s = 1, \dots, 2m),$$

$$B'_{2m-t+1} v = \sum_{s=t}^{2m} \widehat{T}_{st}^{+} N_s v \qquad (t = 1, \dots, 2m);$$

$\widehat{T}_{st}^{+}$ — формально сопряженное к выражению $\widehat{T}_{st}$, составленному только из тангенциальных производных.

Легко проверить, что порядок выражения B'_{2m-t+1} равен $2m-t$, а коэффициентом при ∂_n^{2m-t} у него служит $\widehat{T}_{tt}^{+}(x, 0)\, \overline{a_{(0,\dots,0,2m)}(x)} = \overline{\widehat{T}_{tt}(x, 0) a_{(0,\dots,0,2m)}(x)}$. Этот коэффициент отличен от нуля, так как $\widehat{T}_{tt}(x, 0) \neq 0$, а $a_{(0,\dots,0,2m)}(x) \neq 0$ вследствие эллиптичности. Таким образом, система граничных выражений $\{B'_{2m-t+1}\}$ $(t = 1, \dots, 2m)$ является системой Дирихле порядка $2m$.

Теперь вспомним, что $\{B_t\}$ при $t = m_1 + 1, \ldots, m_m + 1$ совпадает с исходной системой граничных выражений. Тогда из (6.31) при помощи леммы 6.5 (в которой m заменено на $2m$) вытекает, что $\{B'_{2m-t+1}\}$ для остальных значений индекса образует систему граничных выражений, определяющую (гр)$^+$. При этом $W_2^{2m}(\text{гр})^{++} = W_2^{2m}$ (гр) (ср. с доказательством теоремы 1.1, гл. II). Эту систему после изменения нумерации мы и примем в качестве (6.29). Полученная система будет нормальной, так как она является частью системы Дирихле. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, каким требованиям гладкости удовлетворяют коэффициенты выражений (6.29) в зависимости от предполагаемой гладкости коэффициентов исходных выражений (6.2) (ясно, что рост гладкости (6.2) вызывает рост и (6.29)). Мы их формулировать не будем, так как в дальнейшем более симметрично и удобно налагать ограничения гладкости как на граничные выражения, определяющие (гр), так и на подобные выражения, определяющие (гр)$^+$.

В дальнейшем нам понадобится формула Грина, которая была попутно получена при доказательстве теоремы. Именно, из (6.31) вытекает следующий факт. *Пусть L эллиптично и выполняются требования гладкости теоремы 6.5. Тогда для любых $u, v \in W_2^{2m}$ (G) справедливо равенство*:

$$(Lu, v)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, C'_j v \rangle_0 = (u, L^+ v)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j u, B'_j v \rangle_0. \tag{6.32}$$

Здесь $\{B_j\}$, $\{B'_j\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ — *граничные выражения соответственно порядков* $m_j < 2m$ *и* $m'_j < 2m$, *определяющие* (гр) *и* (гр)$^+$; *выражения типа* (6.2) $\{C'_j\}$ *и* $\{C_j\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ *имеют соответственно порядок* $l'_j = 2m - m_j - 1$ *и* $l_j = 2m - m'_j - 1$ *и дополняют системы* $\{B'_j\}$ *и* $\{B_j\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ *до систем Дирихле порядка* $2m$ (подчеркнем, что в определении $\{B'_j\}$, $\{C_j\}$ и $\{C'_j\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ имеется неоднозначность).

Для возможности применения доказанной теоремы существенна такая теорема:

Теорема 6.6. *Пусть выражение* (6.1) *правильно эллиптично, а системы* (6.2) *и существующая в силу теоремы 6.5* (6.29) *определяют* (гр) *и* (гр)$+$. *Предположим, что выполнены следующие предположения гладкости*: $a_\alpha(x) \in C^{2m+|\alpha|}(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m-1, 2m-m_j)}(\Gamma)$, $b'_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m'_j}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, Γ *класса* C^{4m}. *Если исходная система граничных выражений* (6.2) *накрывает* L, *то* (6.29) *накрывает* L^+.

Прямая проверка этой теоремы громоздка и мы наметим другой путь ее доказательства. Именно, будет показано, что для $L+$ и выражений (6.29) справедливо энергетическое неравенство (6.8). Согласно теореме 6.1 отсюда следует требуемое накрывание.

Пусть $\mathfrak{L}$ — оператор, построенный по задаче (6.4) — (6.5), N — его ядро. Рассмотрим задачу (6.19), где $g \in L_2(G)$, $(g, N)_0 = 0$. В силу теоремы 6.3 существует ее слабое решение $v \in L_2(G)$, которое благодаря следствию 1 на стр. 232 входит в $W_2^{2m}(G)$, а значит и в $W_2^{2m}(\text{гр})^+$. Пусть N^+ — ядро, построенное по L^+ и (6.29) (см. стр. 226). $H_{2m}(\text{гр})^+ = W_2^{2m}(\text{гр})^+ \ominus N^+$ (ортогональное вычитание в $L_2(G)$; в $H_{2m}(\text{гр})^+$ метрика $(\cdot, \cdot)_{2m}$). Теперь ясно, что оператор $w'' \to L^+ w''$, $w'' \in H_{2m}(\text{гр})^+$ переводит непрерывно и взаимно однозначно все это пространство во все $L_2(G)\ominus N$. Но тогда обратный оператор непрерывен, т. е.

$$\| L^+ w'' \|_0 \geqslant C_1 \| w'' \|_{2m} \qquad (C_1 > 0;\ w'' \in H_{2m}(\text{гр})^+). \tag{6.33}$$

В силу сказанного на стр. 232 N^+ конечномерно. Применяя разложение типа (6.12), легко заключаем, что из (6.33) следует оценка

$$\| L^+ w \|_0^2 + \| w \|_0^2 \geqslant C_2 \| w \|_{2m}^2 \qquad (C_2 > 0;\ w \in W_2^{2m}(\text{гр})^+). \tag{6.34}$$

Рассмотрим теперь произвольное $v \in W_2^{2m}(G)$. Дополним систему $\{B_j'\}$ ($j = 1, \ldots, m$) до системы Дирихле порядка $2m$ и применим лемму 6.5 (где m заменено на $2m$). При этом в качестве $\varphi_k''(x)$ для индекса k, отвечающего некоторому B_j' исходной системы, возьмем $(B_j'v)(x) \in W_2^{2m-m_j'-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, а в качестве $\varphi_k(x)$ для k, отвечающего добавленному граничному выражению, возьмем 0. В результате построим функцию $v_0 \in W_2^{2m}(G)$ такую, что $(B_j'v_0)(x) = (B_j'v)(x)$ ($x \in \Gamma$; $j = 1, \ldots, m$) и

$$\| v_0 \|_{2m}^2 \leqslant C_3 \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j'v \rangle\!\rangle^2_{2m-m_j'-\frac{1}{2}}, \tag{6.35}$$

где $C_3 > 0$ от выбора v не зависит. Обозначим $w = v - v_0 \in W_2^{2m}(\text{гр})^+$, тогда $v = w + v_0$. Используя оценки (6.34) и (6.35), найдем:

$$\| v \|_{2m}^2 \leqslant 2\left(\| w \|_{2m}^2 + \| v_0 \|_{2m}^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left(\| L^+ w \|_0^2 + \| w \|_0^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j'v \rangle\!\rangle^2_{2m-m_j'-\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= C_4 \left(\| L^+ v - L^+ v_0 \|_0^2 + \| v - v_0 \|_0^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j'v \rangle\!\rangle^2_{2m-m_j'-\frac{1}{2}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \left(\| L^+ v \|_0^2 + \| v \|_0^2 + \| v_0 \|_{2m}^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j'v \rangle\!\rangle^2_{2m-m_j'-\frac{1}{2}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \left(\| L^+ v \|_0^2 + \| v \|_0^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j'v \rangle\!\rangle^2_{2m-m_j'-\frac{1}{2}} \right).$$

Итак, мы установили требуемую оценку типа (6.8), что и доказывает теорему.

В случае нормальных систем граничных условий можно наряду с задачей (6.4) — (6.5) рассматривать следующую задачу:

$$(L^+ v)(x) = g(x) \qquad (x \in G), \tag{6.36}$$

$$(B_j'v)(x) = \psi_j(x) \qquad (x \in \Gamma;\ j = 1, \ldots, m), \tag{6.37}$$

которую мы условимся называть сопряженной относительно (6.4) — (6.5). При соответствующих допущениях гладкости для (6.36) — (6.37) справедливы все предыдущие результаты.

В дальнейшем будет использоваться ряд определений пространств и операторов, связанных с задачей (6.4) — (6.5) и введенных ранее, и аналогичных определений, относящихся к задаче (6.36) — (6.37). Для удобства читателей выпишем сейчас все эти определения. Всюду ниже $s \geqslant 0$ целое.

а) *Исходная задача* (6.4) — (6.5). Отвечающие ей однородные граничные условия обозначались (гр). В связи с задачей (6.4) — (6.5) были введены пространства:

$$K_{\left(s, 2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)} = W_2^s(G) \oplus \sum_{j=1}^{m} W_2^{2m-m_j+s-\frac{1}{2}}(\Gamma). \tag{6.38}$$

Предположим, что $a_\alpha(x) \in C(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m_j}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, Γ класса C^{2m}. Строился оператор $\mathfrak{L}$, непрерывно действующий из $W_2^{2m}(G)$ в $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ по закону

$$\mathfrak{L}u = (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u) \qquad u \in W_2^{2m}(G). \tag{6.39}$$

Через N было обозначено ядро оператора $\mathfrak{L}$ — конечномерное подпространство $W_2^{2m}(G)$, определяемое равенством $\mathfrak{L}(N) = 0$. В случае достаточной гладкости коэффициентов и Γ $N \subset W_2^{2m+s}(G)$ (см. следствие 2 на стр. 232). Далее, вводились подпространства пространства $W_2^{2m+s}(G)$

$$H_{2m+s} = W_2^{2m+s}(G) \ominus N = H_{2m} \cap W_2^{2m+s}(G) \tag{6.40}$$

$(s = 0, 1, \ldots$; ортогональное вычитание в $L_2(G))$.

Так как N конечномерно, то имеет место разложение $W_2^{2m+s}(G)$ в прямую сумму:

$$W_2^{2m+s}(G) = N \dotplus H_{2m+s}, \tag{6.41}$$

причем операторы косого проектирования P_N и $P_{\perp N}$ на N и H_{2m+s}, определяемые разложением (6.41), непрерывны в $W_2^{2m+s}(G)$*. Ясно, что с увеличением s происходит лишь сужение этих операторов, поэтому их обозначения не зависят от s.

Рассматривались сужения $\mathfrak{L}_s$ оператора $\mathfrak{L}$ на H_{2m+s}; эти операторы действовали из H_{2m+s} (снабженного, ясно, метрикой $W_2^{2m+s}(G)$) в $K_{\left(s, 2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$.

При этом дополнительно считалось, что $a_\alpha(x) \in C^s(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m_j+s}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, Γ класса C^s.

б) *Сопряженная задача* (6.36) — (6.37). Для существования L^+ требуются обычные ограничения гладкости L $(a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(G \cup \Gamma))$. Для существования граничных выражений (6.29), фигурирующих в (6.37), тре-

---

* На стр. 226 последние факты установлены при $s = 0$, рассуждения для $s > 0$ аналогичны.

буется дополнительно нормальность системы граничных выражений (6.2) и гладкость их коэффициентов вида $b_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m-m_j-1, m_j)}(\Gamma)$ $(j=1, \ldots, m)$. При возрастании к $+\infty$ гладкости $b_{j\alpha}(x)$, $a_\alpha(x)$ и Γ гладкость коэффициентов в (6.29) также возрастает к $+\infty$. Однородные граничные условия, отвечающие (6.36) — (6.37), естественно обозначаются $(\text{гр})^+$. В связи с этой задачей вводятся пространства

$$K_{\left(s, 2m-m_j'+s-\frac{1}{2}\right)} = W_2^s(G) \oplus \sum_{j=1}^{m} W_2^{2m-m_j'+s-\frac{1}{2}}(\Gamma). \tag{6.42}$$

Дополнительно считая $b'_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m_j'}(\Gamma)$, $(j=1, \ldots, m)$, вводим оператор $\mathfrak{L}^+$, непрерывно действующий из $W_2^{2m}(G)$ в $K_{\left(0, 2m-m_j'-\frac{1}{2}\right)}$ по закону

$$\mathfrak{L}^+ v = (L^+ v, B_1' v, \ldots, B_m' v), \qquad v \in W_2^{2m}(G). \tag{6.43}$$

$N^+ \subset W_2^{2m}(G)$ обозначает ядро оператора $\mathfrak{L}^+$, оно конечномерно. Аналогично сказанному в а) вводятся пространства H^+_{2m+s}, разложения типа (6.41), операторы P_{N^+}, $P_{\perp N^+}$, $\mathfrak{L}_s^+$—нужно в определениях а) заменить N на N^+ и требовать гладкость: $a_\alpha(x) \in C^s(G \cup \Gamma)$, $b'_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m_j'+s}(\Gamma)$ $(j=1, \ldots, m)$, Γ класса C^∞.

Теперь на основании теоремы 6.6 можно высказать следующее утверждение. *Пусть дополнительно к условиям, указанным в б), выполняются следующие предположения гладкости:* $a_\alpha(x) \in C^{2m+|\alpha|}$ $(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m-1, 2m-m_j)}(\Gamma)$, $b'_{j\alpha}(x) \in C^{2m-m_j'}(\Gamma)$ $(j=1, \ldots, m)$, Γ *класса* C^{4m}. *Если система* (6.2) *накрывает* L, *то система* (6.29) *накрывает* L^+, *так что задача* (6.36)—(6.37) *эллиптична и для нее справедливо все, сказанное в пп. 1—4, с заменой определений а) определениями б). Кроме того, нужно иметь в виду, что система* (6.29) *нормальна.*

В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно нормальные системы (гр).

6. Разрешимость краевой задачи в случае нормальной системы однородных (гр). Просто доказывается

Лемма 6.6. *Предположим, что задача* (6.4) — (6.5) *эллиптична, причем система* (6.2) *нормальна и выполнены следующие ограничения гладкости:* $a_\alpha(x) \in C^{2m+|\alpha|}$ $(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m-1, 2m-m_j)}(\Gamma)$, $b'_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m-1, 2m-m_j')}(\Gamma)$ $(j=1, \ldots, m)$, Γ *класса* C^{4m}. *Тогда множество* M^+ *слабых решений задачи* $L^+ v = 0$, $v \in (\text{гр})^+$, *совпадает с* N^+ *и поэтому всякое слабое решение задачи* $L^+ v = g \in L_2(G)$, $v \in (\text{гр})^+$, *входит в* $W_2^{2m}(G)$.

В самом деле, согласно сказанному на стр. 232, для доказательства леммы достаточно установить включение $M^+ \subseteq N^+$. Предположим противное и найдем $h \in M^+ \subseteq L_2(G)$, $h \overline{\in} N^+$, а затем разложим $h = h' + h''$, где $h' \in N^+ \subseteq W_2^{2m}(\text{гр})^+$ и $h'' \perp N^+$ (в $L_2(G)$). Для каждого $u \in W_2^{2m}(\text{гр})$ имеем:

$$(h'', Lu)_0 = (h - h', Lu)_0 = (h, Lu)_0 - (h', Lu)_0 = -(h', Lu)_0 = -(L^+ h', u)_0 = 0,$$

т. е. и $h'' \in M^+$. (6.44)

С другой стороны, так как $h'' \perp N^+$, то согласно теореме 6.3 и следствию 1 на стр. 232 найдется такое $u_0 \in W_2^{2m}$ (гр), что $h'' = Lu_0$. Подставляя это равенство в (6.44) и полагая затем там $u = u_0$, получим: $(Lu_0, Lu_0)_0 = 0$, т. е. $0 = Lu_0 = h''$. Итак, $h = h' \in N^+$, что абсурдно. Лемма доказана.

Резюмируем ряд полученных фактов в виде теоремы о разрешимости.

Теорема 6.7. *Предположим, что задача* (6.4)—(6.5) *эллиптична, причем система* (6.2) *нормальна и выполнены следующие ограничения гладкости:*

$$a_\alpha(x) \in C^{2m+\max(|\alpha|,s)}(G \cup \Gamma), b_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m+s-1,2m-m_j)}(\Gamma), b'_{j\alpha}(x) \in$$

$$\in C^{\max(2m+s-1,2m-m_j)}(G \cup \Gamma) \ (j = 1, \ldots, m), \ \Gamma \text{ класса } C^{4m+s} \ (s \geqslant 0 \text{ целое}).$$

Тогда ядро N конечномерно, входит в $W_2^{2m+s}(G)$ и совпадает с совокупностью M слабых решений задачи $Lu = 0$, $u \in$ (гр).

Сужение 0-сильного оператора Λ_0 (гр) задачи (6.4) — (6.5) (*т. е. оператора $u \to Lu$, $u \in W_2^{2m}$ (гр)) на*

$$H_{2m+s}(\text{гр}) = (W_2^{2m}(\text{гр}) \cap W_2^{2m+s}(G)) \ominus N \tag{6.45}$$

осуществляет гомеоморфизм между пространством (6.45) *с метрикой* $(\cdot,\cdot)_{2m+s}$ *и пространством* $H_s^+ = W_2^s(G) \ominus N^+$ *с метрикой* $(\cdot\ ,\ \cdot)_s$ (*ортогональные вычитания в* $L_2(G)$).

Аналогичные утверждения с заменой M и N на M^+ и N^+ имеют место и для оператора Λ_s (гр)$^+$ *задачи* (6.36) — (6.37) (*автоматически эта задача эллиптична, а система* (6.29) *нормальна*).

Нуждается лишь в некотором пояснении сказанное относительно гомеоморфизма, осуществляемого сужением оператора Λ_0 (гр). Именно, гомеоморфизм между H_{2m+s} (гр) и $\mathfrak{R}(\Lambda_0(\text{гр})) \cap W_2^s(G)$ (с метрикой $(\cdot\ ,\ \cdot)_s$) следует из леммы 6.3 г). Вместе с тем согласно теореме 6.3 $\mathfrak{R}(\Lambda_0(\text{гр})) = L_2(G) \ominus N^+$. Учитывая, что $\mathfrak{R}(\Lambda_0(\text{гр})) \cap W_2^s(G) = (L_2(G) \ominus N^+) \cap W_2^s(G) = W_2^s(G) \ominus N^+ = H_s^+$, получаем требуемое доказательство.

Заметим, что если интересоваться лишь одной из задач (6.4) — (6.5) или (6.36) — (6.37), то ограничения гладкости в теореме 6.7 можно несколько снизить.

Приведенная теорема является обобщением теоремы 3.6 I) на случай общих однородных (гр) и наличия дефектов. Мы сейчас не будем устанавливать гомеоморфизмы типа остальных в теореме 3.6 (хотя это и можно было бы сделать), а изучим подобные вопросы сперва в случае неоднородных (гр).

Заметим также, что развитая теория существенно использовала теорему 6.6, доказательство которой, в частности, опиралось на лемму 6.4— построение регуляризатора. Вместе с тем теорему 6.6, как уже говорилось, можно установить непосредственно. При таком пути теорема 6.2 (для нормальных систем условий) становится следствием теоремы 6.7.

7. **Разрешимость краевой задачи в случае нормальной системы неоднородных граничных условий.** В этом пункте мы займемся детализацией теоремы 6.2 для нормальных систем (6.2) и некоторыми вспомогательными фактами. Будет получена теорема, обобщающая теорему 6.7 на неоднородные граничные условия. Прежде всего докажем результат типа леммы 6.6; приводимое доказательство реализует известный прием сведения задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными.

Лемма 6.7. *Пусть выполнены предположения леммы 6.6. Для того чтобы задача*

$$\mathfrak{L}u = F = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_m) \in K_{\left(0, 2m - m_j - \frac{1}{2}\right)} \qquad (u \in W_2^{2m}(G)) \tag{6.46}$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$[F, (v, C_1'v, \dots, C_m'v)]_0 = (f, v)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, C_j'v \rangle_0 = 0 \quad (v \in N^+). \tag{6.47}$$

Аналогично, для разрешимости задачи

$$\mathfrak{L}^+v = G = (g, \psi_1, \dots, \psi_m) \in K_{\left(0, 2m - m_j' - \frac{1}{2}\right)} \quad (v \in W_2^{2m}(G)) \tag{6.48}$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$[G, (u, C_1u, \dots, C_mu)]_0 = (g, u)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle \psi_j, C_ju \rangle_0 = 0 \, (u \in N) \tag{6.49}$$

(в (6.47) *и* (6.49) *выражения C_j и C_j' — те же, что фигурируют в формуле Грина* (6.32)).

В дальнейшем условия (6.47) и (6.49) будем сокращенно записывать в виде: $[F, N+\dots]_0 = 0$ и $[G, N\dots]_0 = 0$.

Доказательство. Мы ограничимся рассмотрением задачи (6.46), т. е. задачи (6.4) — (6.5). По лемме 6.5 существует функция $u_0 \in W_2^{2m}(G)$, такая, что $B_ju_0 = \varphi_j$ $(j = 1, \dots, m)$. Обозначим $w = u - u_0$. Тогда разрешимость задачи (6.4) — (6.5) эквивалентна разрешимости задачи

$$(Lw)(x) = f(x) - (Lu_0)(x) \qquad (x \in G), \tag{6.50}$$

$$(B_jw)(x) = 0 \qquad (x \in \Gamma;\ j = 1, \dots, m) \tag{6.51}$$

с однородными граничными условиями. При помощи теоремы 6.7 с $s = 0$ (или леммы 6.6) заключаем, что задача (6.50) — (6.51) разрешима тогда и только тогда, когда

$$(f - Lu_0, v)_0 = (f, v)_0 - (Lu_0, v)_0 = 0 \qquad (v \in N^+). \tag{6.52}$$

Преобразуем теперь $(Lu_0, v)_0$ по формуле Грина (6.32) и учтем, что $L^+v = 0$, $B_j'v|_\Gamma = 0$ $(j = 1, \dots, m)$. Условие разрешимости (6.52) перейдет в условие (6.47). Лемма доказана.

Докажем сейчас несколько «проекционных» лемм, касающихся построения разложений типа (6.12). Всюду в них предполагается достаточная гладкость коэффициентов и границы Г.

Лемма 6.8. *Каждый элемент $F = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_m) \in K_{\left(0, 2m - m_j - \frac{1}{2}\right)}$ можно единственным образом представить в виде*

$$F = (v', 0, \dots, 0) + F'', v' \in N^+, F'' \in K_{\left(0, 2m - m_j - \frac{1}{2}\right)}, \; [F'', N^+\dots]_0 = 0. \tag{6.53}$$

Операторы косого проектирования $Q_{N^+}F=(v', 0, \ldots, 0)$ *и* $Q_{\perp N^+}F=F''$ *непрерывны в* $K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$.

Доказательство. Рассмотрим N^+ как гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$. Пусть $F\in K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ фиксировано, вследствие конечномерности N^+ получим при любом $v\in N^+$

$$|l(v)|=|[F, (v, C_1'v, \ldots, C_m'v)]_0|=|(f, v)_0+\sum_{j=1}^{m}\langle \varphi_j, C_j'v\rangle_0|\leqslant$$

$$\leqslant C_1\|v\|_{2m}\leqslant C_2\|v\|_0.$$

Отсюда по теореме Рисса существует элемент $v'\in N^+$, такой, что

$$[F, (v, C_1'v, \ldots, C_m'v)]_0=(v', v)_0 \qquad (v\in N^+). \tag{6.54}$$

Обозначим теперь $F''=F-(v', 0, \ldots, 0)$; из (6.54) непосредственно следует, что $[F'', N^+\ldots]_0=0$. Разложение (6.53) получено. Легко видеть, что оно прямое: в противном случае нашелся бы $\neq 0$ элемент $(v', 0, \ldots, 0)$ $(v'\in N^+)$ типа F''; для него, в частности, имели бы $(v', v')_0=[(v', 0, \ldots, 0), (v', C_1'v', \ldots$ $\ldots, C_m'v')]_0=0$, что абсурдно.

Осталось доказать непрерывность, например, оператора $Q_{N^+}F$. Имеем согласно (6.54) и конечномерности N^+:

$$\|Q_{N^+}F\|_{K\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}=\|(v', 0, \ldots, 0)\|_{K\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}=\|v'\|_0=$$

$$=\sup_{v'\in N^+}\frac{|(v', v)_0|}{\|v\|_0}=\sup_{v\in N^+}\frac{|[F, (v, C_1'v, \ldots, C_m'v)]_0|}{\|v\|_0}\leqslant C_1\|F\|_{K\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left(F\in K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}\right),$$

что и требовалось. Лемма доказана.

При достаточных предположениях гладкости $N^+\subset W_2^{2m+s}(G)$ $(s>0$ целое). Поэтому, если разлагать $F=(f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)\in K_{\left(s,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}\subset K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ согласно (6.53), то $F''=(f-v', \varphi_1, \ldots, \varphi_m)\in K_{\left(s,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$, т. е. (6.53) будет разложением в прямую сумму в пространстве $K_{\left(s,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$. Благодаря конечномерности $(N^+, 0, \ldots, 0)$ операторы $Q_{N^+}F$ и $Q_{\perp N^+}F$ будут непрерывными, если их рассматривать и как операторы в $K_{\left(s,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$.

Аналог леммы 6.8 справедлив и для негативных пространств.

Лемма 6.9. *Пусть* $\sigma > 0$ *цело. Каждый элемент*

$$A = (a, a_1, \dots, a_m) \in K_{\left(-\sigma, -\left(\sigma - l'_j - \frac{1}{2}\right)\right)} = W_2^{-\sigma}(G) \oplus \sum_{j=1}^{m} W_2^{-\left(\sigma - l'_j - \frac{1}{2}\right)}(\Gamma)^*$$

можно единственным образом представить в виде

$$A = (v', 0, \dots, 0) + A'', \quad v' \in N^+, \quad A'' \in K_{\left(-\sigma, -\left(\sigma - l'_j - \frac{1}{2}\right)\right)}, \quad [A'', N^+ \dots]_0 = 0. \tag{6.55}$$

Здесь $l'_j = 2m - m_j - 1$ — *порядок выражений* $C'_j (i = 1, \dots, m)$, *а* $[A'', N^+ \dots]_0 = 0$ *обозначает выполнение соотношения:*

$$[A'', (v, C'_1 v, \dots, C'_m v)]_0 = [(a'', a''_1, \dots, a''_m), (v, C'_1 v, \dots, C'_m v)]_0 =$$

$$= (a'', v)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle a''_j, C'_j v \rangle_0 = 0 \qquad (v \in N^+).$$

Операторы косого проектирования $Q_{N^+} A = (v', 0, \dots, 0)$ *и* $Q_{\perp N^+} A = A''$ *непрерывны в* $K_{\left(-\sigma, -\left(\sigma - l'_j - \frac{1}{2}\right)\right)}$.

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $\sigma \geqslant 2m$. Пусть $v \in W_2^{\sigma}(G)$. Если считать коэффициенты выражения C'_j продолженными гладким образом внутрь G, то $C'_j v \in W_2^{\sigma - l'_j}(G)$. Поэтому $C'_j v|_{\Gamma} \in W_2^{\sigma - l'_j - \frac{1}{2}}(\Gamma)$ и $\langle a_j, C'_j v \rangle_0$ при $a_j \in W_2^{-\left(\sigma - l'_j - \frac{1}{2}\right)}(\Gamma)$ имеет смысл. Более того, согласно (6.7)

$$|\langle a_j, C'_j v \rangle_0| \leqslant \langle\!\langle a_j \rangle\!\rangle_{-\left(\sigma - l'_j - \frac{1}{2}\right)} \langle\!\langle C'_j v \rangle\!\rangle_{\sigma - l'_j - \frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \langle\!\langle a_j \rangle\!\rangle_{-\left(\sigma - l'_j - \frac{1}{2}\right)} \| C'_j v \|_{\sigma - l'_j} \leqslant C_2 \langle\!\langle a_j \rangle\!\rangle_{-\left(\sigma - l'_j - \frac{1}{2}\right)} \| v \|_{\sigma}. \tag{6.56}$$

При достаточных предположениях гладкости $N^+ \subset W_2^{\sigma}(G)$. Поэтому при рассматриваемом зафиксированном A и $v \in N^+$ выражение $l(v) = [A, (v, C'_1 v, \dots, C'_m v)]_0$ имеет смысл и благодаря (6.56) допускает оценку: $|l(v)| \leqslant C_3 \| v \|_{\sigma} \leqslant C_4 \| v \|_0 \qquad (v \in N^+)$. В дальнейшем повторяем рассуждение при

---

* Определение $W_2^{-\left(k - \frac{1}{2}\right)}(\Gamma) \quad (k > 0)$ см. на стр. 228.

доказательстве леммы (6.8): рассматриваем N^+, снабженное метрикой $(\cdot,\cdot)_0$, представляем $l(v)$ по теореме Рисса и т. д.

Исследование случая $0<\sigma<2m$ теперь почти очевидно: так как $K_{\left(-\tau,-\left(\tau-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)} \supset K_{\left(-\sigma,-\left(\sigma-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ при $\tau>\sigma$, а разложение (6.55) в пространстве $K_{\left(-\tau,-\left(\tau-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ для $\tau\geqslant 2m$ уже определено, то оно будет определено и в $K_{\left(-\sigma,-\left(\sigma-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (нужно заметить, что $(v', 0, \ldots, 0)\in K_{\left(-\sigma,-\left(\sigma-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ для $v'\in N^+$). Непрерывность операторов Q_{N^+} и $Q_{\perp N^+}$ в $K_{\left(-\sigma,-\left(\sigma-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ следует из конечномерности $(N^+, 0, \ldots, 0)$.

Лемма доказана.

В процессе доказательства леммы мы по существу уже объяснили то обстоятельство, что Q_{N^+} и $Q_{\perp N^+}$, определенные в пространстве $K_{\left(-\sigma,-\left(\sigma-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$, с уменьшением σ просто сужаются (отметим, что $K_{\left(-\sigma,-\left(\sigma-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ для $\sigma=0$ совпадает с $K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$, так как $l'_j=2m-m_j-1$). В дальнейшем удобно считать, что Q_{N^+} и $Q_{\perp N^+}$ построены при $\sigma\geqslant 0$ достаточно большом и производятся рассмотрения их некоторых сужений.

Конечно, леммы, аналогичные двум доказанным, справедливы и при замене N^+ на N и $K_{\left(-\sigma,-\left(\sigma-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ на $K_{\left(-\sigma,-\left(\sigma-l_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ $(\sigma\geqslant 0)$, где $l_j=2m-m_j-1$ — порядок выражения C_j $(j=1,\ldots,m)$. Соответствующие операторы проектирования будем обозначать Q_N и $Q_{\perp N}$.

Наконец докажем еще одну лемму, обобщающую разложение (6.41) на пространства $W_2^{2m+s}(G)$ с любым целым $2m+s$.

Лемма 6.10. *Каждый элемент $u\in W_2^l(G)$ $(l=\ldots,-1,0,1,\ldots$ фиксировано) можно единственным образом представить в виде*

$$u=u'+u'', \qquad u'\in N,\ (u'', N)_0=0. \tag{6.57}$$

Операторы косого проектирования $P_N u=u'$ и $P_{\perp N}u=u''$ $(u\in W_2^l(G))$ непрерывны в $W_2^l(G)$.

Эта лемма в случае $l=2m+s$, $s\geqslant 0$, уже пояснялась (см. стр. 226 238). Аналогично она устанавливается и при $l\geqslant 0$. Предположим теперь что $l=-\sigma<0$. Рассуждение будет близким к доказательству лемм 6.8—6.9

Рассмотрим N как гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$. Пусть $u\in W_2^{-\sigma}(G)$ фиксировано, вследствие конечномерности N получим при любом $w\in N$

$$|(u, w)_0|\leqslant \|u\|_{-\sigma}\|w\|_{\sigma}\leqslant C_1\|u\|_{-\sigma}\|w\|_0.$$

По теореме Рисса заключаем, что существует элемент $u'\in N$, такой, что

$(u, w)_0 = (u', w)_0$ $(w \in N)$. Положив $u - u' = u''$, получаем разложение (6.57). Ясно, что оно прямое.

Далее, благодаря непрерывности P_N в $L_2(G)$ и конечномерности N имеем

$$\| P_N u \|_{-\sigma} \leqslant \| P_N u \|_0 \leqslant \| u \|_0 \leqslant C_2 \| u \|_{-\sigma} \qquad (u \in L_2(G));$$

непрерывность P_N следует из плотности $L_2(G)$ в $W_2^{-\sigma}(G)$.
Лемма доказана.

Пусть операторы проектирования P_N и $P_{\perp N}$ построены при некотором $l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$; аналогичные операторы, построенные при $k > l$, очевидно будут сужениями этих. Поэтому, как и в случае операторов типа Q, можно считать, что P_N и $P_{\perp N}$ построены при некотором достаточно отрицательном l, а затем производить рассмотрение их сужений.

Ясно, что лемма типа 6.10 справедлива и при замене N на $N+$; соответствующие операторы по-прежнему обозначаем P_{N+} и $P_{\perp N+}$.

Из лемм 6.7 и 6.8 и следствия на стр. 227—228 вытекает следующая теорема о разрешимости.

Теорема 6.8. *Предположим, что выполнены условия теоремы 6.7, $s \geqslant 0$ целое. Сужение $\mathfrak{L}_s$ оператора $\mathfrak{L}$ на*

$$H_{2m+s} = P_{\perp N} W_2^{2m+s}(G) = W_2^{2m+s}(G) \ominus N \tag{6.58}$$

ортогональное вычитание в $L_2(G)$) осуществляет гомеоморфизм между пространством (6.58) с метрикой $(\cdot,\cdot)_{2m+s}$ и пространством $Q_{\perp N+} K_{\left(s, 2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$ с метрикой $(\cdot,\cdot)_{K\left(s, 2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$

Аналогичное утверждение имеет место и для оператора $\mathfrak{L}^+$, связанного с сопряженной задачей (6.36) — (6.37), при этом N и $K_{\left(s, 2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$ должны быть заменены на N^+ и $K_{\left(s, 2m-m_j'+s-\frac{1}{2}\right)}$.

8. **Теорема о гомеоморфизмах в случае неоднородных граничных условий.** Сейчас мы докажем аналог теоремы 3.6 о гомеоморфизмах; случай однородных граничных условий будет рассмотрен в п. 10. Прежде всего введем нормы и пространства, которые будут фигурировать в теореме о гомеоморфизмах.

Зафиксируем $l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ и обозначим через $\widetilde{W}_2^l(G)$ пополнение пространства $W_2^{\max(l, 2m)}(G)$ по норме

$$|||u|||_l^2 = \| u \|_l^2 + \sum_{j=1}^{2m} \left\langle\!\left\langle \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} u \right\rangle\!\right\rangle^2_{l-j+\frac{1}{2}}, \tag{6.59}$$

где $\nu = \nu(x)$ — орт внешней нормали; Γ предполагается класса $C^{\max(l, 2m)}$. Если $l > 2m$, то согласно (6.7) при $j = 1, \ldots 2m$

$$\left\langle\!\left\langle \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} u \right\rangle\!\right\rangle_{l-j+\frac{1}{2}} \leqslant C_1 \sum_{|\alpha| = j-1} \| D^\alpha u \|_{l-j+1} \leqslant C_2 \| u \|_l$$

и поэтому $|||u|||_l \leqslant C_3 \| u \|_l$; таким образом, в этом случае нормы $|||\cdot|||_l$, $\|\cdot\|_l$

эквивалентны и $\widetilde{W}_2^l(G) = W_2^l(G)$. Если $l < 2m$, то такой эквивалентности нет* и в силу неравенства $\| u \|_l \leqslant ||| u |||_l$ $(u \in W_2^{\max(l,2m)}(G))$ при пополнении мы придем к включению $\widetilde{W}_2^l(G) \subset W_2^l(G)$. Ясно, что в любом случае $\widetilde{W}_2^l(G)$ является гильбертовым пространством. Очевидно

$$\ldots \supseteq \widetilde{W}_2^{-1}(G) \supseteq \widetilde{W}_2^0(G) \supseteq \widetilde{W}_2^1(G) \supseteq \ldots, \tag{6.60}$$

$$\ldots \leqslant ||| u |||_{-1} \leqslant ||| u |||_0 \leqslant ||| u |||_1 \leqslant \ldots,$$

причем каждое $\widetilde{W}_2^l(G)$ плотно в $\widetilde{W}_2^k(G)$ при $k < l$ (заметим, что (6.60) не является цепочкой позитивных и негативных пространств).

Целесообразность введения нормы (6.59) объясняется следующей леммой, близкой к лемме 3.6.

Лемма 6.11. *Пусть N — произвольное выражение порядка $r \leqslant 2m$ с достаточно гладкими коэффициентами*; Γ *класса* $C^{\max(l,2m)}$. *Тогда*

$$\| Nu \|_{l-r} \leqslant C_l ||| u |||_l \quad (u \in W_2^{\max(l,2m)}(G);\ l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots). \tag{6.61}$$

Аналогично, для произвольного граничного выражения B порядка $r \leqslant 2m-1$ с достаточно гладкими коэффициентами и указанной Γ *имеем*

$$\langle\!\langle Bu \rangle\!\rangle_{l-r-\frac{1}{2}} \leqslant C_l ||| u |||_l \qquad (u \in W_2^{\max(l,2m)}(G);\ l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots). \tag{6.62}$$

Доказательство. Установим (6.61). Если $l \geqslant r$, то это неравенство очевидно. Пусть $l < r$. По определению негативной нормы как нормы функционала имеем

$$\| Nu \|_{l-r} = \sup_{v \in W_2^{r-l}(G)} \frac{|(Nu, v)_0|}{\| v \|_{r-l}}. \tag{6.63}$$

В случае $l \geqslant 0$ перебросим в выражении $(Nu, v)_0$, интегрированием по частям $r - l$ дифференцирований с u на v. Полученные интегралы по области G оценятся через $C_1 \| u \|_l \| v \|_{r-l}$. Появившиеся интегралы по поверхности Γ оценятся через $C_2 \left(\| u \|_l + \sum_{j=l+1}^{r} \langle\!\langle \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} u \rangle\!\rangle_{l-j+\frac{1}{2}} \right) \| v \|_{r-l}$**. Подставляя эти оценки в (6.63), придем к (6.61).

---

* Действительно, в противном случае на гладких u можно было бы написать

$$\langle\!\langle \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} u \rangle\!\rangle_{l-j+\frac{1}{2}} \leqslant C \| u \|_l \qquad (j = 1, \ldots, 2m).$$

Полагая $l = 1$, $j = 2$, получим $\langle\!\langle \frac{\partial u}{\partial \nu} \rangle\!\rangle_{-\frac{1}{2}} \leqslant C \| u \|_1$. Поэтому для гладких u, v имели бы $\left| \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{v} dx \right| \leqslant \langle\!\langle \frac{\partial u}{\partial \nu} \rangle\!\rangle_{-\frac{1}{2}} \langle\!\langle v \rangle\!\rangle_{\frac{1}{2}} \leqslant C \| u \|_1 \| v \|_1$, что абсурдно.

** В связи с техникой этой и дальнейших оценок см. также доказательство более сложной леммы 6.14.

В случае $l<0$ в выражении $(Nu, v)_0$ перебросим все дифференцирования на v. Интегралы по области G теперь оценятся так: $|(u, N^+v)_0| \leqslant \|u\|_l \|N^+v\|_{-l} \leqslant C_1 \|u\|_l \|v\|_{r-l}$; подобно случаю $l \geqslant 0$ будут оцениваться интегралы по Γ и мы снова придем к (6.61).

Оценка (6.62) устанавливается аналогично. Именно, снова нужно рассмотреть лишь случай $l<r$. При помощи (6.7) получим

$$\langle\!\langle Bu \rangle\!\rangle_{l-r-\frac{1}{2}} = \sup_{v \in W_2^{r-l+\frac{1}{2}}(\Gamma)} \frac{|\langle Bu, v\rangle_0|}{\langle\!\langle v \rangle\!\rangle_{r-l+\frac{1}{2}}} \leqslant C_1 \sup_{v \in W_2^{r-l+1}(G)} \frac{|\langle Bu, v\rangle_0|}{\|v\|_{r-l+1}}. \tag{6.64}$$

В выражении $\langle Bu, v\rangle_0$ перебросим часть тангенциальных производных ∂_k с u на v. В результате придется оценивать интегралы вида $\int\limits_\Gamma c_{\tau j\sigma}(x)\, \partial^\tau \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} u \times$ $\times \overline{\partial^\sigma v}\, dx$, где $j=1, \ldots, r+1 \leqslant 2m$, $|\tau|+|\sigma| \leqslant r-j+1$. При $j>l$ переброску сделаем так, чтобы $\tau=0$; требуемая оценка вытекает из (6.64) и неравенства

$$\left| \int\limits_\Gamma c_{0j\sigma}(x) \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} u \cdot \overline{\partial^\sigma v}\, dx \right| \leqslant C_2 \langle\!\langle \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} u \rangle\!\rangle_{l-j+\frac{1}{2}} \langle\!\langle \partial^\sigma v \rangle\!\rangle_{j-l-\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant C_3 |||u|||_l \sum_{|\alpha| \leqslant r-j+1} \|D^\alpha v\|_{j-l} \leqslant C_4 |||u|||_l \|v\|_{r-l+1}.$$

При $j \leqslant l$ переброску сделаем так, чтобы $|\sigma| \leqslant r-l$ и затем оценим интеграл по Γ через интегралы по G. Лемма доказана.

При гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическим оператором, пространствами образов будут служить пространства типа $Q_{\perp N^+} K_{\left(s, 2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$. Остановимся на пространствах, которые будут играть роль прообразов.

Так как для любого $l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ $\widetilde{W}_2^l(G) \subseteq W_2^l(G)$ и $N, N^+ \subset \widetilde{W}_2^l(G)$ (при достаточно сильных предположениях гладкости), то операторы проектирования $P_N, P_{\perp N}, P_{N^+}$ и $P_{\perp N^+}$ можно рассматривать действующими в $\widetilde{W}_2^l(G)$. Благодаря конечномерности N и N^+ они будут непрерывны в пространстве $\widetilde{W}_2^l(G)$. Оказывается, роль прообразов и будут играть пространства типа $P_{\perp N}\widetilde{W}_2^l(G)$.

В соответствии с (6.40) и (6.58) обозначим

$$\widetilde{H}_l = P_{\perp N}\widetilde{W}_2^l(G) = \widetilde{W}_2^l(G) \ominus N, \ \widetilde{H}_l^+ = P_{\perp N^+}\widetilde{W}_2^l(G) = \widetilde{W}_2^l(G) \ominus N^+ \tag{6.65}$$
$$(l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots),$$

причем $\widetilde{H}_l$ и $\widetilde{H}_l^+$ снабжены метрикой $|||\cdot|||_l$; при $l \geqslant 2m$ $\widetilde{H}_l = H_l$, $\widetilde{H}_l^+ = H_l^+$. Согласно (6.60)

$$\ldots \supseteq \widetilde{H}_{-1} \supseteq \widetilde{H}_0 \supseteq \widetilde{H}_1 \supseteq \ldots, \qquad \ldots \supseteq \widetilde{H}_{-1}^+ \supseteq \widetilde{H}_0^+ \supseteq \widetilde{H}_1^+ \supseteq \ldots \tag{6.66}$$

и каждое пространство $\widetilde{H}_l$ $(\widetilde{H}_l^+)$ плотно в $\widetilde{H}_k$ $(\widetilde{H}_k^+)$ при $k<l$ (нужно учесть конечномерность N и N^+).

Введем аналогичное обозначение и для пространств образов. Именно, положим

$$K_s = Q_{\perp N} K_{\left(s, 2m - m'_j + s - \frac{1}{2}\right)}, \quad K_s^+ = Q_{\perp N^+} K_{\left(s, 2m - m_j + s - \frac{1}{2}\right)} \qquad (6.67)$$

$$(s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots).$$

Метрика в $K^{\bullet}_{\cdot}$ введена как метрика соответствующего $K_{(\cdot,\cdot)}$ $\left(\text{мы употребляем следующее общее обозначение: } K_{\left(s, t_j - \frac{1}{2}\right)} = W_2^s(G) \oplus \sum_{j=1}^{m} W_2^{t_j - \frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$.

Отметим, что

$$K_{\left(s, 2m - m'_j + s - \frac{1}{2}\right)} = K_{\left(s, s + l_j + \frac{1}{2}\right)}, \quad K_{\left(s, 2m - m_j + s - \frac{1}{2}\right)} = K_{\left(s, s + l'_j + \frac{1}{2}\right)}$$

$$(s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots),$$

где $l_j = 2m - m'_j - 1$, $l'_j = 2m - m_j - 1$ — порядки выражений C_j и $\overset{\bullet}{C}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ из формулы Грина (6.32).

Ясно, что и сейчас справедливы соотношения типа (6.66)

$$\ldots \supseteq K_{-1} \supseteq K_0 \supseteq K_1 \supseteq \ldots, \ldots \supseteq K_{-1}^+ \supseteq K_0^+ \supseteq K_1^+ \supseteq \ldots, \qquad (6.68)$$

$$\ldots \leqslant \|u\|_{K_{-1}} \leqslant \|u\|_{K_0} \leqslant \|u\|_{K_1} \leqslant \ldots, \ldots \leqslant \|u\|_{K_{-1}^+} \leqslant \|u\|_{K_0^+} \leqslant \|u\|_{K_1^+} \leqslant \ldots$$

и аналогичные заключения о плотности.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.9. *Пусть задача* (6.4) — (6.5) *эллиптична, причем система* (6.2) *нормальна и выполнены некоторые предположения гладкости, сформулированные ниже.*

Рассмотрим пару пространств $\widetilde{H}_{2m+s}$ *и* K_s^+ $(s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, *введенных в* (6.65) *и* (6.67), *и оператор* $\mathfrak{L}$, *связанный с задачей* (6.4) — (6.5), *т. е. оператор, действующий из* $W_2^{2m}(G)$ *в* $L_2(G) \oplus \sum_{j=1}^{m} W_2^{2m - m_j - \frac{1}{2}}(\Gamma)$ *по закону:* $\mathfrak{L}u = (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u)$. *При* $s \geqslant 0$ *сужение* $\mathfrak{L}_s$ *этого оператора на* $\widetilde{H}_{2m+s}$ *устанавливает гомеоморфизм между* $\widetilde{H}_{2m+s}$ *и* K_s^+; *при* $s < 0$ *такой гомеоморфизм устанавливает замыкание по непрерывности (оно существует) оператора* $\mathfrak{L}_0$, *рассматриваемого как оператор из* $\widetilde{H}_{2m+s}$ *в* K_s^+.

Аналогичное утверждение справедливо и относительно оператора $\mathfrak{L}^+$, *связанного с сопряженной задачей. Парой гомеоморфных пространств теперь служат* $\widetilde{H}^+_{2m+s}$ *и* K_s $(s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$.

Предположения гладкости: 1) при $s \geqslant 0$ $a_\alpha(x) \in C^{2m + \max(|\alpha|, s)}$ $(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m + s - 1, 2m - m_j)}(\Gamma)$, $b'_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m + s - 1, 2m - m'_j)}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, Γ *класса* C^{4m+s}; *2) при* $-2m \leqslant s \leqslant 0$ — *такие же, как и в 1) с заменой* s *на* 0 *и, кроме того,* $c_{j\alpha}(x) \in C^{2m - l_j}(\Gamma)$, $c'_{j\alpha}(x) \in C^{2m - l'_j}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$;

3) при $s \leqslant -2m$ — такие же, как и в 1), но с заменой s на $|2m + s|$ и, кроме того, $c_{j\alpha}(x) \in C^{|s|-l_j}(\Gamma), c'_{j\alpha}(x) \in C^{|s|-l'_j}(\Gamma)$ $(j = 1, \dots, m)$ (здесь $c_{j\alpha}(x)$ и $c'_{j\alpha}(x)$ — коэффициенты дифференциальных выражений C_j и C'_j соответственно).

Доказательство. 1) При $s \geqslant 0$, как мы знаем, $\widetilde{W}_2^{2m+s}(G) = W_2^{2m+s}(G)$ и $\widetilde{H}_{2m+s}$ совпадает с (6.58). Поэтому теорема в этом случае совпадает с теоремой 6.8. Дальнейшие рассуждения будем проводить лишь для $\mathfrak{L}$.

2) Докажем теорему при $-2m \leqslant s \leqslant 0$ Оператор $\mathfrak{L}_0$ осуществляет гомеоморфизм между $\widetilde{H}_{2m}$ и K_0^+, поэтому $\mathfrak{L}_0^{-1}$ существует и непрерывно действует из K_0^+ в $\widetilde{H}_{2m}$. Определим на векторах $F \in K_0^+$ оператор S, полагая

$$SF = (\mathfrak{L}_0^{-1}F, C_1(\mathfrak{L}_0^{-1}F), \dots, C_m(\mathfrak{L}_0^{-1}F)). \tag{6.69}$$

Очевидно $SF \in K_{\left(2m, 2m-l_j-\frac{1}{2}\right)}$, причем S является непрерывным оператором из $K_0^+ = Q_{\perp N}+K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ в $K_{\left(2m, 2m-l_j-\frac{1}{2}\right)}$. Следовательно, оператор $SQ_{\perp N}+$ непрерывно действует из всего $K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ в $K_{\left(2m, 2m-l_j-\frac{1}{2}\right)}$.

Совершенно аналогично определим оператор S^+: оператор $\mathfrak{L}_0^+$—сужение $\mathfrak{L}^+$ на $\widetilde{H}_{2m}^+$ — осуществляет гомеоморфизм между $\widetilde{H}_{2m}^+$ и K_0, поэтому $(\mathfrak{L}_0^+)^{-1}$ непрерывно действует из K_0 в $\widetilde{H}_{2m}^+$ и можно для $G \in K_0$ положить

$$S^+G = ((\mathfrak{L}_0^+)^{-1}G, G'_1((\mathfrak{L}_0^+)^{-1}G), \dots, C'_m((\mathfrak{L}_0^+)^{-1}G)). \tag{6.70}$$

Теперь $S^+G \in K_{\left(2m, 2m-l'_j-\frac{1}{2}\right)}$ и S^+ действует непрерывно из K_0 в $K_{\left(2m, 2m-l'_j-\frac{1}{2}\right)}$, а значит $S^+Q_{\perp N}$ — непрерывно из всего $K_{\left(0, 2m-m'_j-\frac{1}{2}\right)}$ в $K_{\left(2m, 2m-l'_j-\frac{1}{2}\right)}$.

Учитывая (6.69), (6.70) и формулу Грина (6.32), найдем при $F \in K_{\left(0, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$, $G \in K_{\left(0, 2m-m'_j-\frac{1}{2}\right)}$

$$[SQ_{\perp N}+F, Q_{\perp N}G]_0 =$$

$$= [(\mathfrak{L}_0^{-1}Q_{\perp N}+F, C_1(\mathfrak{L}_0^{-1}Q_{\perp N}+F), \dots, C_m(\mathfrak{L}_0^{-1}Q_{\perp N}+F)), \mathfrak{L}^+(\mathfrak{L}_0^+)^{-1}Q_{\perp N}G]_0 =$$

$$= [(\mathfrak{L}_0^{-1}Q_{\perp N}+F, C_1(\mathfrak{L}_0^{-1}Q_{\perp N}+F), \dots, C_m(\mathfrak{L}_0^{-1}Q_{\perp N}+F)), \tag{6.71}$$

$$(L^+(\mathfrak{L}_0^+)^{-1}Q_{\perp N}G, B'_1(\mathfrak{L}_0^+)^{-1}Q_{\perp N}G, \dots, B'_m(\mathfrak{L}_0^+)^{-1}Q_{\perp N}G)]_0 =$$

$$= (\mathfrak{L}_0^{-1} Q_{\perp N}{+}F, L^{+} (\mathfrak{L}_0^{+})^{-1} Q_{\perp N} G)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j \mathfrak{L}_0^{-1} Q_{\perp N}{+}F, B_j' (\mathfrak{L}_0^{+})^{-1} Q_{\perp N} G \rangle_0 =$$

$$= (L \mathfrak{L}_0^{-1} Q_{\perp N}{+}F, (\mathfrak{L}_0^{+})^{-1} Q_{\perp N} G)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j \mathfrak{L}_0^{-1} Q_{\perp N}{+}F, C_j' (\mathfrak{L}_0^{+})^{-1} Q_{\perp N} G \rangle_0 =$$

$$= [Q_{\perp N}{+}F, S^{+} Q_{\perp N} G]_0.$$

Обозначим $Q_N G = (v, 0, \ldots, 0)$ $(Lv = 0)$. Так как $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}_0^{-1}) = \widetilde{H}_{2m} \perp N$, то

$$[SQ_{\perp N}{+}F, Q_N G]_0 = (\mathfrak{L}_0^{-1} Q_{\perp N}{+}F, v)_0 = 0. \tag{6.72}$$

При помощи (6.72) и аналогичного равенства $[Q_N{+}F, S^{+} Q_{\perp N} G]_0 = 0$ получим из (6.71) следующее соотношение, которое будет использовано в дальнейшем:

$$[SQ_{\perp N}{+}F, G]_0 = [F, S^{+} Q_{\perp N} G]_0 \ \left(F \in K_{\left(0, 2m - m_j - \frac{1}{2}\right)}, \ G \in K_{\left(0, 2m - m_j' - \frac{1}{2}\right)}\right). \tag{6.73}$$

Итак, оператор $S^{+} Q_{\perp N}$ непрерывно действует из всего $K_{\left(0, 2m - m_j' - \frac{1}{2}\right)}$ в $K_{\left(2m, 2m - l_j' - \frac{1}{2}\right)}$. Сопряженными к этим пространствам относительно «скалярного произведения» $[\cdot, \cdot]_0$ будут соответственно $K_{\left(0, -\left(2m - m_j' - \frac{1}{2}\right)\right)}$ и $K_{\left(-2m, -\left(2m - l_j' - \frac{1}{2}\right)\right)}$ (в связи с этим см. (6.14) и сказанное на стр. 241). Построим сопряженный оператор $\widetilde{SQ}_{\perp N}{+}$ к $S^{+} Q_{\perp N}$ относительно $[\cdot, \cdot]_0$, он, очевидно, будет непрерывно действовать из всего $K_{\left(-2m, -\left(2m - l_j' - \frac{1}{2}\right)\right)}$ в $K_{\left(0, -\left(2m - m_j' - \frac{1}{2}\right)\right)}$. Сравним $\widetilde{SQ}_{\perp N}{+}$ с оператором $SQ_{\perp N}{+}$. Последний действует непрерывно из всего $K_{\left(0, 2m - m_j - \frac{1}{2}\right)} \subseteq K_{\left(-2m, -\left(2m - l_j' - \frac{1}{2}\right)\right)}$ $\Big(0 > -2m,$ $2m - m_j - \frac{1}{2} > -\left(2m - l_j' - \frac{1}{2}\right) = -m_j - \frac{1}{2}\Big)$ в $K_{\left(2m, 2m - l_j - \frac{1}{2}\right)} \subseteq$ $\subseteq K_{\left(0, -\left(2m - m_j' - \frac{1}{2}\right)\right)}$ $\left(2m > 0, 2m - l_j - \frac{1}{2} = m_j' + \frac{1}{2} > -\left(2m - m_j' - \frac{1}{2}\right)\right)$, поэтому может оказаться, что $\widetilde{SQ}_{\perp N}{+}$ является расширением $SQ_{\perp N}{+}$.

Действительно, это будет так: оператор $\widetilde{SQ}_{\perp N}+$ определяется из равенства

$$[A, S^+Q_{\perp N}G]_0 = [\widetilde{SQ}_{\perp N}+A, G]_0 \ (G \in K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)},\ A \in K_{\left(-2m,-\left(2m-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}). \tag{6.74}$$

полагая $A = F \in K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ и сравнивая (6.74) с (6.73), получим $\widetilde{SQ}_{\perp N}+F = SQ_{\perp N}+F$.

Таким образом, оператор $\widetilde{SQ}_{\perp N}+$ непрерывно действует в следующих парах простравств:

$$K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)} \to K_{\left(2m,2m-l_j-\frac{1}{2}\right)}, \tag{6.75}$$

$$K_{\left(-2m,-m_j-\frac{1}{2}\right)} = K_{\left(-2m,-\left(2m-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)} \to K_{\left(0,-\left(2m-m_j-\frac{1}{2}\right)\right)} = K_{\left(0,-l_j-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left(\mathfrak{D}(\widetilde{SQ}_{\perp N}+) = K_{\left(-2m,-m_j-\frac{1}{2}\right)}\right).$$

Позже, в п. 9, будет доказана так называемая интерполяционная теорема, из которой следует, что $\widetilde{SQ}_{\perp N}+$ действует непрерывно и в «промежуточных» к (6.75) пространствах, именно

$$K_{\left(s,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)} \to K_{\left(2m+s,2m-l_j+s-\frac{1}{2}\right)}, \ -2m \leqslant s \leqslant 0. \tag{6.76}$$

Закончим доказательство, предположив (6.76) имеющим место

Итак, справедливо неравенство

$$\| \widetilde{SQ}_{\perp N}+F \|_{K_{\left(2m+s,2m-l_j+s-\frac{1}{2}\right)}} \leqslant C_1 \| F \|_{K_{\left(s,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}} \tag{6.77}$$

$$(F \in K_{\left(s,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)};\ -2m \leqslant s \leqslant 0).$$

Пусть $u \in \widetilde{H}_{2m}$, тогда $F = \mathfrak{L}_0 u = (Lu, B_1 u, \dots, B_m u) \in K_0^+ \subseteq K_{\left(s,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$, $F = Q_{\perp N}+F$. Подставляя это F в (6.77) и учитывая, что теперь $\widetilde{SQ}_{\perp N}+F = SQ_{\perp N}+F$, и (6.69), получим

$$\| u \|^2_{2m+s} + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle C_j u \rangle\rangle^2_{2m-l_j+s-\frac{1}{2}} \leqslant C_1^2 \left(\| Lu \|_s^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle B_j u \rangle\rangle^2_{2m-m_j+s-\frac{1}{2}} \right) \tag{6.78}$$

$$(u \in \widetilde{H}_{2m},\ -2m \leqslant s \leqslant 0).$$

Перейдем теперь в левой части неравенства (6.78) к норме $|||\cdot|||_{2m+s}$. Для этого напомним, что $2m$ граничных дифференциальных выражений $B_1, \dots, B_m$; $C_1, \dots, C_m$ образуют систему Дирихле порядка $2m$. Введем для них новое обозначение $A_1, \dots, A_{2m}$, при этом считается, что выражение A_j имеет порядок $j-1$. Из (6.28) следует, что в каждой точке $x \in \Gamma$ имеет место представление

$$\frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} = \sum_{k=1}^{j} \widehat{T}_{jk}(x, \partial) A_k \qquad (j = 1, \dots, 2m),$$

где $\widehat{T}_{jk}(x, \partial)$ — дифференциальные выражения, содержащие лишь тангенциальные производные, причем порядка $\leqslant j-k$. Поэтому при $u \in W_2^{2m}(G)$

$$\left\langle\!\left\langle \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} u \right\rangle\!\right\rangle_{2m-j+s-\frac{1}{2}} = \left\langle\!\left\langle \sum_{k=1}^{j} \widehat{T}_{jk}(x, \partial) A_k u \right\rangle\!\right\rangle_{2m-j+s-\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\langle\!\left\langle \sum_{k=1}^{j} \widehat{T}_{jk}(x, \partial) A_k u \right\rangle\!\right\rangle_{2m-j+s-\frac{1}{2}} \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{j} \langle\!\langle A_k u \rangle\!\rangle_{2m-k+s-\frac{1}{2}}$$

$$(j = 1, \dots, 2m; \ -2m \leqslant s \leqslant 0).$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{2m} \left\langle\!\left\langle \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} u \right\rangle\!\right\rangle^2_{2m+s-j+\frac{1}{2}} \leqslant C_3 \sum_{j=1}^{2m} \langle\!\langle A_j u \rangle\!\rangle^2_{2m+s-j+\frac{1}{2}} =$$

$$= C_3 \left(\sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j u \rangle\!\rangle^2_{2m+s-m_j-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle C_j u \rangle\!\rangle^2_{2m+s-l_j-\frac{1}{2}} \right) \quad (-2m \leqslant s \leqslant 0). \tag{6.79}$$

Из (6.78) и (6.79) вытекает требуемое неравенство:

$$|||u|||^2_{2m+s} \leqslant C_4 \left(\|Lu\|_s^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j u \rangle\!\rangle^2_{2m-m_j+s-\frac{1}{2}} \right) \tag{6.80}$$

$$(u \in H_{2m}; \ -2m \leqslant s \leqslant 0).$$

С помощью леммы 6.11 заключаем, что имеет место и противоположное неравенство (даже при $u \in W_2^{2m}(G)$)

$$\|Lu\|_s^2 + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j u \rangle\!\rangle^2_{2m-m_j+s-\frac{1}{2}} \leqslant C_5 |||u|||^2_{2m+s} \quad (-2m \leqslant s \leqslant 0). \tag{6.81}$$

Неравенства (6.80) и (6.81) приводят к оценке:

$$\frac{1}{C_4}|||u|||^2_{2m+s} \leqslant \|\mathfrak{L}_0 u\|^2_{K_{\left(s,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}} \leqslant C_5|||u|||^2_{2m+s} \quad (u \in \widetilde{H}_{2m}),$$

которая показывает, что замыкание по непрерывности $\mathfrak{L}_0$, рассматриваемого как оператор из $\widetilde{H}_{2m+s}$ в K_s^+ $(-2m \leqslant s \leqslant 0)$ существует и осуществляет гомеоморфизм между этими пространствами.

3) Наметим доказательство в случае $s \leqslant -2m$. Сейчас рассуждения аналогичны предыдущему — переход к сопряжению (интерполяционная теорема уже не нужна). Пусть $\sigma = -s \geqslant 2m$, определим оператор $S^+_{\sigma-2m}$ подобно (6.70), но с заменой $\mathfrak{L}_0^+$ на $\mathfrak{L}^+_{\sigma-2m}$, он непрерывно действует из $K_{\sigma-2m}$ в $\widetilde{H}^+_\sigma$. Оператор $S^+_{\sigma-2m}Q_{\perp N}$ действует непрерывно из всего $K_{\left(\sigma-2m,\sigma-m_j'-\frac{1}{2}\right)}$ в $K_{\left(\sigma,\sigma-l_j'-\frac{1}{2}\right)}$.

Сопряженный в смысле $[\cdot,\cdot]_0$ к $S^+_{\sigma-2m}Q_{\perp N}$ оператор действует непрерывно из всего $K_{\left(-\sigma,-\left(\sigma-l_j'-\frac{1}{2}\right)\right)} = K_{\left(s,2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$ в $K_{\left(-\sigma,-\left(\sigma-m_j'-\frac{1}{2}\right)\right)} = K_{\left(2m+s,2m-l_j+s-\frac{1}{2}\right)}$. Легко понять, что по-прежнему он является некоторым (более далеким, чем раньше) расширением оператора $SQ_{\perp N^+}$; для него мы сохраняем обозначение $\widetilde{SQ}_{\perp N^+}$. Таким образом, и сейчас справедливо неравенство (6.77) с рассматриваемым s. Теперь остается повторить рассуждения, следующие в 2) после (6.77)

Теорема доказана.

9. **Интерполяционная теорема.** Изложим некоторые общие рассмотрения, из которых, в частности, будет вытекать пропущенная часть доказательства теоремы 6.9 (непрерывность отображения (6.76)).

Пусть H_0 — некоторое гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{H_0}$ и нормой $\|\cdot\|_{H_0}$. Рассмотрим в H_0 неограниченный положительный оператор A с областью определения $\mathfrak{D}(A)$ такой, что $\|u\|_{H_0} \leqslant \|Au\|_{H_0}$ $(u \in \mathfrak{D}(A))$. Область определения $\mathfrak{D}(A^\alpha)$ $(\alpha > 0)$ является гильбертовым пространством H_α относительно скалярного произведения $(u, v)_{H_\alpha} = (A^\alpha u, A^\alpha v)_{H_0}$. Очевидно, H_α можно принять в качестве позитивного пространства, нулевым будем считать H_0. Из сказанного в п. 6, § 3, гл. I, следует, что соответствующее негативное пространство $H_{-\alpha}$ можно получить как пополнение H_0 по скалярному произведению $(f, g)_{H_{-\alpha}} = (A^{-\alpha}f, A^{-\alpha}g)_{H_0}$; роль операторов D и $\mathbf{D}$ для цепочки $H_{-\alpha} \supseteq H_0 \supseteq H_\alpha$ будут играть соответственно оператор A^α и замыкание по непрерывности A^α, рассматриваемого как оператор из H_0 в $H_{-\alpha}$. Так построенное семейство $\{H_\alpha\}$ $(\alpha \in (-\infty,\infty))$ гильбертовых пространств называют гильбертовой шкалой пространств.

Пусть E_λ — разложение единицы оператора A, тогда

$$(u, v)_{H_\alpha} = \int_1^\infty \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, v)_{H_0}, \quad \|u\|^2_{H_\alpha} = \int_1^\infty \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u)_{H_0} \tag{6.82}$$

$$(\alpha \in (-\infty, \infty);\ u, v \in H_{\max(\alpha,0)}).$$

Из (6.82) ясно, что при $\alpha < \beta$ $(\alpha, \beta \in (-\infty, \infty))$ $H_\alpha \supseteq H_\beta$ и $\| u \|_{H_\alpha} \leqslant \| u \|_{H_\beta}$ $(u \in H_\beta)$; при этом H_β плотно в H_α. Понятно также, что $\bigcap\limits_{\alpha \geqslant 0} H_\alpha$ непусто и даже плотно в H_0 — в это пересечение входит, например, каждый вектор вида $E(\Delta) f$, где Δ — конечный интервал, а $f \in H_0$. Если $u \in \bigcap\limits_{\alpha \geqslant 0} H_\alpha$, то при любом $N \in (-\infty, \infty)$ $\int\limits_1^\infty \lambda^{2N} d(E_\lambda u, u)_{H_0} < \infty$ и поэтому для любых $\alpha, \beta \in (-\infty, \infty)$ $A^\alpha u \in H_\beta$.

Теорема 6.10. *Пусть* $\{H'_\alpha\}$ и $\{H''_\alpha\}$ — *две гильбертовые шкалы,* B — *линейный оператор, непрерывно действующий из* $H'_{\alpha'}$ *в* $H''_{\alpha''}$ *и из* $H'_{\beta'}$ *в* $H''_{\beta''}$ *при фиксированных* $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ $(\alpha' \quad \beta', \alpha'' < \beta'')$. *Тогда* B *непрерывно действует и из* $H'_{\gamma'(\mu)}$ *в* $H''_{\gamma''(\mu)}$, *где* $\gamma'(\mu) = (1-\mu)\alpha' + \mu\beta'$ $\gamma''(\mu) = (1-\mu)\alpha'' + \mu\beta''$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть имеем

$$\| Bu \|_{H''_{\alpha''}} \leqslant C_{\alpha', \alpha''} \| u \|_{H'_{\alpha'}}, \quad \| Bv \|_{H''_{\beta''}} \leqslant C_{\beta', \beta''} \| v \|_{H'_{\beta'}} \quad (u \in H'_{\alpha'}, v \in H'_{\beta'}). \tag{6.83}$$

Зафиксируем $u_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \geqslant 0} H'_\alpha$ и $v_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \geqslant 0} H''_\alpha$ и рассмотрим функцию комплексного переменного $z = \sigma + i\tau$, меняющегося во всей плоскости:

$$F(z) = (BA'^{z(\beta'-\alpha')} u_0, \ A''^{\bar{z}(\alpha''-\beta'')} v_0)_{H_0}; \tag{6.84}$$

здесь A' и A'' — операторы типа A, отвечающие шкалам $\{H'_\alpha\}$ и $\{H''_\alpha\}$.

Поясним, что «скалярное произведение» (6.84) имеет смысл. Так как $u_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \geqslant 0} H'_\alpha$, то $A'^{z(\beta'-\alpha')} u_0$ вместе с $A'^{\sigma(\beta'-\alpha')} u_0$ входит в любое H'_α, в частности в $H'_{\alpha'}$; аналогично $A''^{\bar{z}(\alpha''-\beta'')} v_0 \in H''_{-\alpha''}$. Осталось заметить, что B действует из $H'_{\alpha'}$ в $H''_{\alpha''}$. Более того, учитывая (6.83) и (6.82), получим:

$$|F(z)| \leqslant \| BA'^{z(\beta'-\alpha')} u_0 \|_{H''_{\alpha''}} \| A''^{\bar{z}(\alpha''-\beta'')} v_0 \|_{H''_{-\alpha''}} \leqslant$$
$$\leqslant C_{\alpha', \alpha''} \| A'^{z(\beta'-\alpha')} u_0 \|_{H'_{\alpha'}} \| A''^{\bar{z}(\alpha''-\beta'')} v_0 \|_{H''_{-\alpha''}} =$$
$$= C_{\alpha', \alpha''} \| A'^{\sigma(\beta'-\alpha')} u_0 \|_{H'_{\alpha'}} \| A''^{\sigma(\alpha''-\beta'')} v_0 \|_{H''_{-\alpha''}} = C_{\alpha', \alpha''} \| u_0 \|_{H'_{\gamma'(\sigma)}} \| v_0 \|_{H''_{-\gamma''(\sigma)}}. \tag{6.85}$$

Аналогично найдем

$$|F(z)| \leqslant \| BA'^{z(\beta'-\alpha')} u_0 \|_{H''_{\beta''}} \| A''^{\bar{z}(\alpha''-\beta'')} v_0 \|_{H''_{-\beta''}} \leqslant$$
$$\leqslant C_{\beta', \beta''} \| A'^{z(\beta'-\alpha')} u_0 \|_{H'_{\beta'}} \| A''^{\bar{z}(\alpha''-\beta'')} v_0 \|_{H''_{-\beta''}} =$$
$$= C_{\beta', \beta''} \| u_0 \|_{H'_{-\sigma\alpha' + (1+\sigma)\beta'}} \| v_0 \|_{H''_{\sigma\alpha'' + (-1-\sigma)\beta''}}. \tag{6.86}$$

Положим в (6.85) $\sigma=\mu$, а в (6.86) $\sigma=\mu-1$. Получим

$$|F(\mu+i\tau)|\leqslant C_{\alpha',\alpha''}\|u_0\|_{H'_{\gamma'(\mu)}}\|v_0\|_{H''_{-\gamma''(\mu)}},$$

$$|F(\mu-1+i\tau)|\leqslant C_{\beta',\beta''}\|u_0\|_{H'_{\gamma'(\mu)}}\|v_0\|_{H''_{-\gamma''(\mu)}} \tag{6.87}$$

$$(\tau\in(-\infty,\infty)).$$

Воспользуемся теперь теоремой о трех прямых (см., например, Привалов И. И. [1], гл. 3, § 17, стр. 72): если $f(z)$ — аналитическая ограниченная функция внутри полосы $a<\sigma<b$, то верхняя граница $\log|f(z)|$ на любой прямой $\sigma+i\tau\,(-\infty<\tau<\infty)$ есть выпуклая функция относительно σ. Полагая $f(z)=F(z)$, получим при помощи (6.87)

$$|(Bu_0,v_0)_{H_0}|=|F(0)|=e^{\log|F(0)|}\leqslant\exp\{\mu\sup_\tau\log|F(\mu-1+i\tau)|+$$

$$+(1-\mu)\sup_\tau\log|F(\mu+i\tau)|\}=(\sup_\tau|F(\mu-1+i\tau)|)^{\mu}(\sup_\tau|F(\mu+i\tau)|)^{1-\mu}\leqslant$$

$$\leqslant C^{1-\mu}_{\alpha',\alpha''}C^{\mu}_{\beta',\beta''}\|u_0\|_{H'_{\gamma'(\mu)}}\|v_0\|_{H''_{-\gamma''(\mu)}}.$$

В силу плотности v_0 в $H''_{-\gamma''(\mu)}$ отсюда следует, что $\|Bu_0\|_{H''_{\gamma''(\mu)}}\leqslant$ $\leqslant C^{1-\mu}_{\alpha',\alpha''}C^{\mu}_{\beta',\beta''}\|u_0\|_{H'_{\gamma'(\mu)}}$. Благодаря плотности u_0 в $H'_{\gamma'(\mu)}$ окончательно получаем:

$$\|Bu\|_{H''_{\gamma''(\mu)}}\leqslant C^{1-\mu}_{\alpha',\alpha''}C^{\mu}_{\beta',\beta''}\|u\|_{H'_{\gamma'(\mu)}}\qquad(u\in H'_{\gamma'(\mu)};\ 0\leqslant\mu\leqslant1). \tag{6.88}$$

Теорема доказана.

Заметим, что мы установили несколько большее, чем утверждалось: если справедливы оценки (6.83), то справедлива оценка (6.88), т. е. получена оценка нормы оператора B как действующего из $H'_{\gamma'(\mu)}$ в $H''_{\gamma''(\mu)}$.

Для нужного нам применения теоремы 6.10 следует убедиться, что каждую из цепочек пространств $K_{(s,\,2m-m_j+s-\frac{1}{2})}$ $(s=-2m,\ldots,0)$ и $K_{(2m+s,\,2m-l_j+s-\frac{1}{2})}$ $(s=-2m,\ldots,0)$ (см. (6.76)) можно рассматривать как часть некоторой зависящей от цепочки гильбертовой шкалы пространств. Так как пространства $K(\cdot,\cdot)$ строятся как ортогональные суммы гильбертовых пространств типа W_2^l, то включение в шкалы пространств, очевидно, достаточно проверить лишь для этих W_2^l(A для суммы равно ортогональной сумме операторов A для слагаемых). Ниже мы будем проводить рассмотрение лишь с теми индексами l, которые нам нужны (т. е. с целыми и целыми плюс $\frac{1}{2}$). Рассмотрение общих дробных индексов l также возможно и проходит в том же плане, однако на нем мы не останавливаемся, так как не были приведены определения соответствующих W_2^l. Заметим, что если все же такое рассмотрение проделать, то тогда можно было бы получить оценку типа (6.80) для всех $s\in[-2m,0]$, однако противоположную более простую оценку типа (6.81) в этом случае получить не удается.

Итак, рассмотрим сперва пространства $W_2^l(G)$.

Лемма 6.12. *Зафиксируем целое $\sigma>0$. Существует гильбертова шкала $\{H_\alpha\}$ $(\alpha\in(-\infty,\infty))$ такая, что $H_l=W_2^l(G)\,(l=-\sigma,\ldots,\sigma)$ (точнее, нормы пространств H_l и $W_2^l(G)$ эквивалентны).*

Доказательство. Мы построим гильбертову шкалу $\{H_\alpha\}$ такую, что

$H_{\frac{l}{\sigma}} = W_2^l(G)$ $(l = -\sigma, \ldots, \sigma)$; для перехода к требуемой шкале следует оператор A заменить на A^σ. Положим $H_0 = L_2(G)$, $H_1 = W_2^\sigma(G)$ и примем H_0 в качестве нулевого, а H_1 — позитивного пространств. Рассмотрим соответствующий оператор D $(\mathfrak{D}(D) = H_1)$ и построим шкалу $\{H_\alpha\}$, полагая $A = D$. Убедимся что она искомая. Достаточно проверить лишь равенства $H_{\frac{l}{\sigma}} = W_2^l(G)$ при $l = 0, \ldots, \sigma$, так как для отрицательных l как $H_{\frac{l}{\sigma}}$, так и $W_2^l(G)$, строятся при помощи одинаковой процедуры — перехода к негативным пространствам.

Рассмотрим сперва аналогичный вопрос для того случая, когда пространства $W_2^l(G)$ заменены на $\mathring{W}_2^l(E_n)$ $(l = 0, \ldots, \sigma)$; соответствующую шкалу обозначим $\{H'_\alpha\}$. Как говорилось на стр. 78, скалярное произведение в $\mathring{W}_2^l(E_n)$ можно задавать посредством интеграла

$$(u, v)_{\mathring{W}_2^l(E_n)} = \int_{E_n} (1 + |\xi|^2)^l \tilde{u}(\xi)\overline{\tilde{v}(\xi)}\, d\xi, \tag{6.89}$$

где $\tilde{w}(\xi)$ обозначает преобразование Фурье функции $w(x)$. Таким образом, при $u \in \mathring{W}_2^\sigma(E_n)$

$$\widetilde{(Au)}(\xi) = \widetilde{(Du)}(\xi) = \sqrt{(1 + |\xi|^2)^\sigma}\, \tilde{u}(\xi), \widetilde{(A^{\frac{l}{\sigma}} u)}(\xi) = \left(\sqrt{(1 + |\xi|^2)^\sigma}\right)^{\frac{l}{\sigma}} \tilde{u}(\xi) =$$

$$= \sqrt{(1 + |\xi|^2)^l}\, \tilde{u}(\xi) \qquad (l = 0, \ldots, \sigma).$$

Сравнивая с (6.89), заключаем, что $(\cdot, \cdot)_{H'_{\frac{l}{\sigma}}} = (\cdot, \cdot)_{\mathring{W}_2^l(E_n)}$. Это и дает равенства

$$H_{\frac{l}{\sigma}} = \mathring{W}_2^l(E_n) \qquad (l = 0, \ldots, \sigma).$$

Возвратимся к пространствам $W_2^l(G)$. Несложно доказывается, что каждую функцию $u \in W_2^l(G)$ можно продолжить в функцию $Tu \in \mathring{W}_2^l(E_n)$ $(l = 0, \ldots, \sigma)$ причем оператор продолжения T будет удовлетворять неравенствам

$$C_1 \| u \|_{W_2^l(G)} \leqslant \| Tu \|_{\mathring{W}_2^l(E_n)} \leqslant C_2 \| u \|_{W_2^l(G)} \tag{6.90}$$

$$(u \in W_2^l(G);\ l = 0, \ldots, \sigma).$$

Правое неравенство в (6.90) при $l = 0, \sigma$ можно записать в виде $\| Tu \|_{H'_0} \leqslant C_2 \| u \|_{H_0}$ $(u \in H_0)$, $\| Tu \|_{H'_1} \leqslant C_2 \| u \|_{H_1}$ $(u \in H_1)$. Применяя к T теорему 6.10, заключаем, что справедливо неравенство $\| Tu \|_{\mathring{W}_2^l(E_n)} = \| Tu \|_{H'_{\frac{l}{\sigma}}} \leqslant C_2 \| u \|_{H_{\frac{l}{\sigma}}}$ $(u \in W_2^\sigma(G);\ l = 0, \ldots, \sigma)$.

Учитывая левое неравенство в (6.90), найдем

$$\| u \|_{W_2^l(G)} \leqslant C_3 \| u \|_{H_{\frac{l}{\sigma}}} \quad (u \in W_2^\sigma(G);\ l = 0, \dots, \sigma). \tag{6.91}$$

Докажем противоположную оценку. Обозначим через S оператор, ставящий в соответствие функции $v(x) \in \mathring{W}_2^l(E_n)$ эту же функцию, рассматриваемую для $x \in G$. Очевидно, имеем: $\| Sv \|_{W_2^l(G)} \leqslant \| v \|_{\mathring{W}_2^l(E_n)}$ $(v \in \mathring{W}_2^l(E_n);\ l = 0, \dots, \sigma)$. Записывая эту оценку при $l = 0, \sigma$ и применяя затем теорему 6.10, получим: $\| Sv \|_{H_{\frac{l}{\sigma}}} \leqslant \| v \|_{H'_{\frac{l}{\sigma}}} = \| v \|_{\mathring{W}_2^l(E_n)}$ $(v \in \mathring{W}_2^\sigma(E_n);\ l = 0, \dots, \sigma)$. Заменяя здесь v на Tu $(u \in W_2^\sigma(G))$ и пользуясь (6.90), придем к оценке

$$\| u \|_{H_{\frac{l}{\sigma}}} \leqslant C_2 \| u \|_{W_2^l(G)} \quad (u \in W_2^\sigma(G);\ l = 0, \dots, \sigma). \tag{6.92}$$

Неравенства (6.91) и (6.92) показывают, что нормы $\| \cdot \|_{H_{\frac{l}{\sigma}}}$ и $\| \cdot \|_{W_2^l(G)}$ $(l = 0, \dots, \sigma)$ эквивалентны. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь пространства $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(l = \dots, -1, 0, 1, \dots)$.

Лемма 6.13. *Справедливо утверждение леммы* 6.12 *с заменой* $W_2^l(G)$ *на* $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(l = -\sigma + 1, \dots, \sigma)$.

Доказательство. По-прежнему достаточно сконструировать гильбертову шкалу $\{H_\alpha\}$ такую, что $H_{\left(l-\frac{1}{2}\right)/\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)} = H_{\frac{2l-1}{2\sigma-1}} = W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ при указанных l. Эту шкалу построим по пространству $H_0 = L_2(\Gamma)$ и оператору $A = D$ в нем где D порожден нулевым пространством $H_0 = L_2(\Gamma)$ и позитивным $H_1 = W^{\sigma-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Как и прежде, совпадение пространств достаточно установить при $l = 1, \dots, \sigma$.

Доказательство равенства $H_{\frac{2l-1}{2\sigma-1}} = W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(l = 1, \dots, \sigma)$ проводится посредством рассуждения, примененного в случае леммы 6.12, причем теперь роль пространств $\mathring{W}_2^l(E_n)$ играют пространства $W_2^l(G)$, а роль $H'_{\frac{l}{\sigma}}$ — построенные при доказательстве леммы 6.12 пространства $H_{\frac{l}{\sigma}}$. Именно, обозначим Tu фигурирующее в оценке (6.7) продолжение $u \in W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ в $Tu \in W_2^l(G)$; теперь ее можно переписать в виде, подобном (6.90):

$$C_1 \ll u \gg_{W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant \| Tu \|_{W_2^l(G)} \leqslant C_2 \ll u \gg_{W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad (u \in W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma);\ l = 1, \ldots, \sigma). \tag{6.93}$$

С помощью теоремы 6.10 из правой оценки в (6.93) при $l = 1, \sigma$ вытекает неравенство $\| Tu \|_{W_2^l(G)} = \| Tu \|_{H'_{\frac{l}{\sigma}}} \leqslant C_2 \| u \|_{H_{\frac{2l-1}{2\sigma-1}}}$ $(u \in W_2^{\sigma-\frac{1}{2}}(\Gamma);\ l=1, \ldots, \sigma)$.

Учитывая левое неравенство в (6.93), находим:

$$\ll u \gg_{W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant C_3 \| u \|_{H_{\frac{2l-1}{2\sigma-1}}} \quad (u \in W_2^{\sigma-\frac{1}{2}}(\Gamma);\ l = 1, \ldots, \sigma).$$

Подобно лемме 6.12 устанавливается и противоположное неравенство; роль S играет оператор, относящий $u \in W_2^l(G)$ ту же функцию, рассматриваемую на Γ (входящую в $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$).

Лемма доказана.

Как уже было пояснено, из лемм 6.12 и 6.13 следует, что существуют гильбертовы шкалы $\{H'_\alpha\}$ и $\{H''_\alpha\}$ такие, что $K_{\left(s, 2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)} = H'_s$ и $K_{\left(2m+s, 2m-l_j+s-\frac{1}{2}\right)} = H''_s$ $(s = -2m, \ldots, 0)$. Применяя теперь теорему 6.10 к этим шкалам и оператору $B = \widetilde{SQ}_{\perp N^+}$, заключаем, что $\widetilde{SQ}_{\perp N^+}$ *действует непрерывно из всего* $K_{\left(s, 2m-m_j+s-\frac{1}{2}\right)}$ *в* $K_{\left(2m+s, 2m-l_j+s-\frac{1}{2}\right)}$.

10. **Теорема о гомеоморфизмах в случае однородных граничных условий.** Рассмотрим оператор, порожденный задачей (6.4) — (6.5) и осуществляющий согласно теореме 6.9 гомеоморфизм между $\widetilde{H}_{2m+s}$ и K_s^+ $(s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Сузим этот оператор на функции, удовлетворяющие однородным (гр). Более точно это означает следующее: при $s \geqslant 0$ рассматривается оператор Λ_s (гр), совпадающий со сужением $\mathfrak{L}_s$ на W_2^{2m} (гр), а при $s < 0$—оператор, являющийся замыканием по непрерывности Λ_0 (гр) как оператора, действующего из $\widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ в $W_2^s(G)$. Ясно, что описанное сейчас сужение будет гомеоморфизмом, областью значений которого служит $W_2^s(G) \ominus N$ (ортогональное вычитание в $L_2(G)$, т. е. $\alpha \in W_2^s(G) \ominus \ominus N$ тогда и только тогда, когда $(\alpha, N)_0 = 0$). Аналогичный факт справедлив и относительно сопряженной задачи.

Приведем сейчас другую теорему о гомеоморфизмах для однородных (гр), которая в случае нулевых (гр) совпадает с теоремой 3.6. Мы ее не будем выводить из описанного только что факта, а дадим независимое доказательство. Предварительно дополним общие рассмотрения п. 9.

Рассмотрим некоторую гильбертову шкалу $\{H_\alpha\}$. Пусть H_r $(r > 0)$ — фиксированное пространство этой шкалы, а N и N^+ — конечномерные подпространства H_r; $H_0 \ominus N, H_0 \ominus N^+$ — ортогональные дополнения к ним в H_0. Предположим, что задан непрерывный относительно метрики $\|\cdot\|_{H_0}$ оператор B, действующий из всего $H_0 \ominus N^+$ в плотную часть $H_0 \ominus N^*$. Обычный сопряженный к B оператор B^* действует из всего $H_0 \ominus N$ в $H_0 \ominus N^+$. Дополнительно будем считать, что $\mathfrak{R}(B)$, $\mathfrak{R}(B^*) \subseteq H_r$. Замыкания $\mathfrak{R}(B)$ и $\mathfrak{R}(B^*)$ в метрике H_s $(0 \leqslant s \leqslant r)$ будем обозначать соответственно через $H_s(\text{гр})$ и $H_s(\text{гр})^+$. Пространство $H_s(\text{гр})$ плотно в $H_0 \ominus N$ в метрике $\|\cdot\|_{H_0}$ и $\|u\|_{H_0} \leqslant \|u\|_{H_s(\text{гр})}$ $(u \in H_s(\text{гр}))$, поэтому $H_0 \ominus N$ можно принять в качестве нулевого, а $H_s(\text{гр})$ — позитивного пространств. Соответствующее негативное пространство обозначим $H_{-s}(\text{гр})$. Аналогично введем $H_{-s}(\text{гр})^+$.

Теорема 6.11. *Если выполнены неравенства*

$$\|Bf\|_{H_r} \leqslant C_1 \|f\|_{H_0} \quad (f \in H_0 \ominus N^+), \; \|B^*g\|_{H_r} \leqslant C_2 \|g\|_{H_0} \quad (g \in H_0 \ominus N), \tag{6.94}$$

то при $\lambda \in [-r, 0]$ *справедлива оценка*

$$\|Bf\|_{H_{r+\lambda}} \leqslant C_3 \|f\|_{H_\lambda(\text{гр})^+} \qquad (f \in H_0 \ominus N^+). \tag{6.95}$$

Доказательство. Рассмотрим сперва случай отсутствия дефекта: $N = N^+ = 0$. Построим оператор $\widetilde{B}$, сопряженный к B^* в смысле $(\cdot, \cdot)_{H_0}$, т. е. положим $\widetilde{B} = B^{*+}$; $\widetilde{B}$ действует непрерывно из H_{-r} в H_0. Этот оператор является некоторым расширением оператора B: если $f \in H_0$, то для любого $g \in H_0$ имеем $(\widetilde{B}f, g)_{H_0} = (f, B^*g)_{H_0} = (Bf, g)_{H_0}$, т. е. $\widetilde{B}f = Bf$. Так как норма B^* не превосходила C_2, то такой же будет и норма $B^{*+} = \widetilde{B}$:

$$\|\widetilde{B}\alpha\|_{H_0} \leqslant C_2 \|\alpha\|_{H_{-r}} \qquad (\alpha \in H_{-r}). \tag{6.96}$$

Первое из неравенств (6.94) можно переписать в виде $\|\widetilde{B}f\|_{H_r} \leqslant C_1 \|f\|_{H_0}$ $(f \in H_0)$. Теперь учтем (6.96) и применим к $\widetilde{B}$ интерполяционную теорему 6.10 $\left(\text{сейчас } \{H'_\alpha\} = \{H''_\alpha\} = \{H_\alpha\},\ \mu = -\dfrac{\lambda}{r}\right)$, получим:

$$\|\widetilde{B}\alpha\|_{H_{r+\lambda}} \leqslant C_1^{1+\frac{\lambda}{r}} C_2^{-\frac{\lambda}{r}} \|\alpha\|_{H_\lambda} \quad (\alpha \in H_\lambda;\ \lambda \in [-r, 0]). \tag{6.97}$$

Перейдем от неравенства (6.97) к неравенству (6.95). Обозначим через V_- подпространство пространства H_λ, состоящее из всех β таких, что $(\beta, v)_{H_0} = 0$ $(v \in H_{-\lambda}(\text{гр})^+)$. Оператор $\widetilde{B}$ аннулируется на V_-: для $\beta \in V_-$ и $u \in H_0$ $(\widetilde{B}\beta, u)_{H_0} = (\beta, B^*u)_{H_0} = 0$, так как согласно определению $H_{-\lambda}(\text{гр})^+$ $B^*u \in H_{-\lambda}(\text{гр})^+$.

* В дальнейшем роль B будет играть обратный оператор к $\Lambda_0(\text{гр})$; этим объясняются вводимые ниже обозначения.

Согласно (6.97) мы можем написать:

$$\|\tilde{B}\alpha\|_{H_{r+\lambda}} = \|\tilde{B}(\alpha \dotplus \beta)\|_{H_{r+\lambda}} \leqslant C_1^{1+\frac{\lambda}{r}} C_2^{-\frac{\lambda}{r}} \|\alpha \dotplus \beta\|_{H_\lambda} \tag{6.98}$$

$$(\alpha \in H_\lambda;\ \beta \in V_-;\ \lambda \in [-r, 0]).$$

Воспользуемся теперь формулой (3.18), гл. I, для подсчета $\|\cdot\|_{H_\lambda(\text{гр})^+}$:

$$\|\alpha\|_{H_\lambda(\text{гр})^+} = \inf_{\beta \in V_-} \|\alpha \dotplus \beta\|_{H_\lambda} \quad (\alpha \in H_\lambda).$$

Переходя в правой части (6.98) к inf по $\beta \in V_-$, получим неравенство, из которого и следует (6.95):

$$\|\tilde{B}\alpha\|_{H_{r+\lambda}} \leqslant C_1^{1+\frac{\lambda}{r}} C_2^{-\frac{\lambda}{r}} \|\alpha\|_{H_\lambda(\text{гр})^+} \quad (\alpha \in H_\lambda).$$

Наметим теперь доказательство в общем случае наличия дефекта. Оператор B^* можно рассматривать как действующий из всего $H_0 \ominus N$ в H_r. Беря сопряженный к нему оператор в смысле $(\cdot, \cdot)_{H_0}$, получим оператор $\tilde{B} = B^{*+}$ действующий из всего H_{-r} в $H_0 \ominus N$ и являющийся расширением B. Для $\hat{L}$ по-прежнему можно написать неравенство (6.96).

Введем оператор $P_{\perp N^+}$ ортогонального проектирования в H_0 на $H_0 \ominus N^+$ и построим его расширение на H_{-r} так, как это описано в лемме 6.10; расширение также обозначаем $P_{\perp N^+}$. Первое из неравенств (6.94) и неравенств (6.96) можно переписать в виде:

$$\|BP_{\perp N^+} f\|_{H_r} \leqslant C_1 \|P_{\perp N^+} f\|_{H_0} \leqslant C_1 \|f\|_{H_0} \quad (f \in H_0),$$

$$\|\tilde{B}P_{\perp N^+} \alpha\|_{H_0} \leqslant C_2 \|P_{\perp N^+} \alpha\|_{H_{-r}} \leqslant C_4 \|\alpha\|_{H_{-r}} \quad (\alpha \in H_{-r}).$$

Полученные два неравенства позволяют применить к оператору $BP_{\perp N^+}$ интер поляционную теорему 6.10 и получить оценку

$$\|\tilde{B}P_{\perp N^+} \alpha\|_{H_{r+\lambda}} \leqslant C_1^{1+\frac{\lambda}{r}} C_4^{-\frac{\lambda}{r}} \|\alpha\|_{H_\lambda} \quad (\alpha \in H_\lambda;\ \lambda \in [-r, 0]).$$

Для $\alpha \in H_\lambda \ominus N^+$ (ортогональное вычитание в H_0) последняя оценка перепи шется в виде, аналогичном (6.97):

$$\|\tilde{B}\alpha\|_{H_{r+\lambda}} \leqslant C_1^{1+\frac{\lambda}{r}} C_4^{-\frac{\lambda}{r}} \|\alpha\|_{H_\lambda} \quad (\alpha \in H_\lambda \ominus N^+;\ \lambda \in [-r, 0]).$$

Дальнейший переход к оценке (6.95) аналогичен случаю отсутствия дефекта.

Теорема доказана.

Опишем общую схему применения теоремы 6.11 к правильно эллиптически выражениям L порядка $r = 2m$ с достаточно гладкими коэффициентами. Буде в качестве шкалы $\{H_\alpha\}$ рассматривать шкалу, построенную в лемме 6.12 пр $\sigma = 2m$; таким образом, $H_l = W_2^l(G)$ и можно считать $(\cdot, \cdot)_{H_l} = (\cdot, \cdot)_l$, $\|\cdot\|_{H_l} =$

$=\|\cdot\|_l$ $(l=-2m,\ldots,2m)$. Рассмотрим оператор Λ_0 (гр), порожденный L и некоторыми (гр); Λ_0 (гр) действует непрерывно из W_2^{2m} (гр) в $L_2(G)$. Будем считать, что Λ_0 (гр) действует в $L_2(G)$ и обозначим этот оператор через A. Предположим, что выполнены следующие условия:

а) сопряженный к A в $L_2(G)$ оператор A^* строится таким же образом, как и A, но с заменой (гр) на (гр)$^+$;

б) подпространства N и N^+ решений соответственно уравнений $Au=0$ и $A^*v=0$ конечномерны;

в) имеют место неравенства

$$\|Au\|_0 \geqslant C_1\|u\|_{2m} \quad (u\in W_2^{2m}(\text{гр})\ominus N),$$
$$\|A^*v\|_0 \geqslant C_2\|v\|_{2m} \quad (v\in W_2^{2m}(\text{гр})^+\ominus N^+);$$

г) множества значений A на W_2^{2m} (гр) $\ominus N$ и A^* на W_2^{2m} (гр)$^+\ominus N^+$ совпадают соответственно с $L_2(G)\ominus N^+$ и $L_2(G)\ominus N$ (все ортогональные вычитания в смысле $L_2(G)$).

Теперь можно обозначить $B=A^{-1}$, где A^{-1} понимается как обратный оператор из $L_2(G)\ominus N^+$ в W_2^{2m} (гр). Тогда $B^*=A^{*-1}$ и все требования, налагавшиеся в теореме 6.11, будут выполнены. В результате мы получим для B оценку (6.95), которая эквивалентна неравенству

$$\|Lu\|_{H_\lambda(\text{гр})^+} \geqslant C^{-1}\|u\|_{2m+\lambda} \qquad (u\in W_2^{2m}(\text{гр});\quad \lambda\in[-2m,0]). \tag{6.99}$$

В дальнейшем будет показано (лемма 6.14), что при целых $\lambda\in[-2m,0]$ справедливо и противоположное (6.99) неравенство, таким образом мы получим оценку

$$C^{-1}\|u\|_{2m+s}\leqslant\|Lu\|_{H_s(\text{гр})^+}\leqslant C\|u\|_{2m+s}\ (u\in W_2^{2m}(\text{гр});\ s=-2m,\ldots,0). \tag{6.100}$$

Эта оценка приводит к «среднему набору» гомеоморфизмов, осуществляемых замыканием оператора Λ_0 (гр).

Доказательство наличия гомеоморфизмов при $s>0$ уже было получено (см. теорему 6.7). Доказательство при $s<-2m$ осуществляется обычным переходом к сопряжению (см. теорему 3.6 в случае 4) или теорему 6.9 для $s>-2m$).

Убедимся теперь, что при достаточных предположениях гладкости выполняются требования а) — г), если только считать систему граничных условий нормальной*.

Требование а). Пусть оператор B построен так же, как и A, но с заменой (гр) на (гр)$^+$. Ясно, что $B\subseteq A^*$. Установим обратное включение. Пусть $f\in\mathfrak{D}(A^*)$; т. е. $(Lu,f)_0=(u,A^*f)_0$ для всех $u\in W_2^{2m}$ (гр). Взяв здесь $u\in N$, получим, что $A^*f\perp N$ в $L_2(G)$. Согласно теореме 6.7 найдется $v\in W_2^{2m}$ (гр)$^+$ такое, что $L^+v=$ $=A^*f$; таким образом, $(Lu,f-v)_0=(Lu,f)_0-(Lu,v)_0=(u,A^*f)_0-(u,L^+v)_0=0$ $u\in W_2^{2m}$ (гр)). Иными словами, $w=f-v\in L_2(G)$ является слабым решением задачи $L^+v=0$, $v\in$ (гр)$^+$. Благодаря теореме 6.7 w является гладким решением этой задачи, т. е. $w\in W_2^{2m}$ (гр)$^+$ и $L^+w=0$. Итак, $f=v+w\in W_2^{2m}$ (гр) и $L^+f=A^*f$. Иными словами, $A^*\subset B$. Утверждение доказано.

* Ср. это доказательство с доказательством леммы 3.9.

Удовлетворение требований б), в) и г) следует из теоремы 6.7.

Намеченное доказательство легко приводит к следующей теореме.

Теорема 6.12. *Пусть задача* (6.4) — (6.5) *эллиптична, причем система* (6.2) *нормальна и выполнены некоторые предположения гладкости, сформулированные ниже. Введем следующие пространства (ортогональное вычитание в смысле* $L_2(G)$, s — *целое):*

а) $0 \leqslant s$, $H_{2m+s}(\text{гр}) = W_2^{2m}(\text{гр}) \cap W_2^{2m+s}(G) \ominus N$ *(метрика* $(\cdot,\cdot)_{2m+s}$*)*;

б) $-2m \leqslant s < 0$, $H_{2m+s}(\text{гр})$ — *замыкание в* $W_2^{2m+s}(G)$ *множеств* $W_2^{2m}(\text{гр}) \ominus N$;

в) $s < -2m$, $H_{2m+s}(\text{гр})$ — *негативное пространство относительно нулевог* $L_2(G) \ominus N$ *и позитивного* $H_{-(2m+s)}(\text{гр})$;

г) $0 \leqslant s$, $H_s = W_2^s(G) \ominus N$ *(метрика* $(.,.)_s$*)*;

д) $s < 0$, H_s — *негативное пространство относительно нулевого* $L_2(G) \ominus N$ *и позитивного* H_{-s}.

Аналогичные пространства $H_s(\text{гр})^+$ *и* H_s^+ *вводятся по* $(\text{гр})^+$ *и* N^+.

Рассмотрим 0-*сильный оператор* $\Lambda_0(\text{гр})$, *построенный по* L *и* (гр) (*т. е. оператор* $u \to Lu$, $u \in W_2^{2m}(\text{гр})$). *Тогда:*

1) *при* $s \geqslant 0$ *сужение* $\Lambda_0(\text{гр})$ *на* $H_{2m+s}(\text{гр})$ *осуществляет гомеоморфизм между* $H_{2m+s}(\text{гр})$ *и* H_s^+;

2) *при* $-2m \leqslant s < 0$ $\Lambda_0(\text{гр})$, *рассматриваемый как оператор из* $H_{2m+s}(\text{гр})$ *в* $H_s(\text{гр})^+$, *допускает замыкание по непрерывности и это замыкание осуществляет гомеоморфизм между* $H_{2m+s}(\text{гр})$ *и* $H_s(\text{гр})^+$;

3) *при* $s < -2m$ $\Lambda_0(\text{гр})$, *рассматриваемый как оператор из* H_{2m+s} *в* $H_s(\text{гр})^+$, *допускает замыкание по непрерывности и это замыкание осуществляет гомеоморфизм между* H_{2m+s} *и* $H_s(\text{гр})^+$.

Предположения гладкости: для случая 1) $a_\alpha(x) \in C^{2m+\max(|\alpha|,s)}(G \cup \Gamma)$, $b_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m+s-1,2m-m_j)}(\Gamma)$, $b'_{j\alpha}(x) \in C^{\max(2m+s-1,2m-m'_j)}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, Γ *класса* C^{4m+s}; *для случая 2) (3)) выполнены предыдущие ограничения с заменой* s *на* 0 $(|2m+s|)$.

Легко видеть, что теорема 3.6 является частным случаем приведенной теоремы (правда, если отвлечься от ограничений гладкости, которые в теореме 3.6 ниже благодаря другому способу доказательства разрешимости краевой задачи). Действительно, предположим, что $(\text{гр}) = (\text{гр})^+$ нулевые и $N = N^+ =$ Тогда $H_s = W_2^s(G)$ $(s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, $H_{2m+s}(\text{гр}) = \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m+s}(G)$ $(s = -m, -m+1, \ldots)$, $H_{2m+s}(\text{гр}) = \overset{\circ}{W}{}_2^{2m+s}(G)$ $(s = -2m, \ldots, -m-1)$. При $s = \ldots, -2m-2, -2m-1$ $H_{2m+s}(\text{гр})$ совпадает с негативным пространством относительно нулевого $L_2(G)$ и позитивного $H_{-(2m+s)}(\text{гр})$. Поэтому $H_l(\text{гр}) = \overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ $(l = -m, \ldots, -1)$ и $H_l(\text{гр}) = W_2'^{l}(G)$ $(l = \ldots, -m-2, -m-$ где $W_2'^{-l}(G) = H_{-l}(\text{гр}) = \overset{\circ}{W}{}_2^m(G) \cap W_2^{2m+s}(G)$.

Для доказательства теоремы 6.12 нам осталось установить следующую лемму.

Лемма 6.14. *Пусть выполнены предположения теоремы 6.12 в случае 2). Тогда справедливо неравенство*

$$\| Lu \|_{H_s(\text{гр})^+} \leqslant C \| u \|_{2m+s} \quad (u \in W_2^{2m}(\text{гр});\ s = -2m, \ldots, 0). \tag{6.101}$$

Доказательство. В дальнейшем положим $\sigma = -s = 0, \ldots, 2m$. По определению негативной нормы имеем:

$$\| Lu \|_{H_{-\sigma}(\text{гр})^+} = \sup_{v \in H_\sigma(\text{гр})^+} \frac{|(Lu, v)_0|}{\| v \|_\sigma} = \sup_{v \in W_2^{2m}(\text{гр})^+ \oplus N^+} \frac{|(Lu, v)_0|}{\| v \|_\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{v \in W_2^{2m}(\text{гр})^+} \frac{|(Lu, v)_0|}{\| v \|_\sigma}. \tag{6.102}$$

Перебросим в выражении $(Lu, v)_0$ интегрированием по частям σ дифференцирований с u на v. Полученные интегралы по G оценятся сверху через $C_1 \| u \|_{2m-\sigma} \| v \|_\sigma$; рассмотрим оставшиеся интегралы по Γ. Если мы покажем, что и эти интегралы оценятся через $C_2 \| u \|_{2m-\sigma} \| v \|_\sigma$, то из (6.102) будет следовать (6.101). Сейчас мы проведем такую оценку.

Чтобы найти вид этих интегралов по Γ, воспользуемся рассуждениями и обозначениями п. 5. Пусть x — произвольная точка на Γ. Посредством разложения единицы можно свести рассмотрение к тому случаю, когда v аннулируется вне некоторой окрестности (в E_n) точки x; считаем, что $x = 0$. Затем можно произвести «спрямление» типа (6.25) и перейти к функции $v \in W_2^{2m}(G_\delta)$, аннулирующейся вблизи полусферы $|x| = \delta$, $x_n \geqslant 0$ (C_δ — полушар $|x| < \delta$, $x_n > 0$). Используя обозначение (6.30), получим:

$$(Lu, v)_0 = \Big(\sum_{|\tau| + \nu \leqslant 2m} a_{\tau\nu}(x)\, \partial^\tau \partial_n^\nu u, v \Big)_0 = \sum_{\nu=0}^{2m} \Big(\partial_n^\nu u, \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} \partial^\tau (\overline{a_{\tau\nu} v}) \Big)_0 =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2m-\sigma} \Big(\partial_n^\nu u, \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} \partial^\tau (\overline{a_{\tau\nu}} v) \Big)_0 + \sum_{\nu=2m-\sigma+1}^{2m} \Big(\partial_n^\nu u, \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} \partial^\tau (\overline{a_{\tau\nu}} v) \Big)_0. \tag{6.103}$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что тангенциальные производные ∂^τ можно свободно перебрасывать на v интегрированием по частям и интегралы по Γ не будут появляться (v аннулируется вблизи $|x| = \delta$, $x_n \geqslant 0$). Перебрасывая должным образом такие производные, получим, что для первой суммы в правой части (6.103) справедлива оценка: $\Big| \sum_{\nu=0}^{2m-\sigma} \ldots \Big| \leqslant C_3 \| u \|_{2m-\sigma} \| v \|_\sigma$.

Рассмотрим теперь вторую сумму. Перебросим в каждом ее слагаемом столько производных ∂_n с u на v, чтобы их осталось ровно $2m - \sigma$. Как уже пояснялось, нужно оценить лишь появившиеся при переброске интегралы по Г. Они будут иметь вид:

$$\sum_{\nu=2m-\sigma+1}^{2m}\ \sum_{k=2m-\sigma+1}^{\nu}\int_\Gamma \partial_n^{k-1}u\cdot\sum_{|\tau|\leqslant 2m-\nu}\partial_n^{\nu-k}\partial^\tau(a_{\tau\nu}\bar v)\,dx=$$

$$=\sum_{k=2m-\sigma+1}^{2m}\ \sum_{\nu=k}^{2m}\int_\Gamma \partial_n^{k-1}u\cdot\sum_{|\tau|\leqslant 2m-\nu}\partial_n^{\nu-k}\partial^\tau(a_{\tau\nu}\bar v)\,dx=\sum_{k=2m-\sigma+1}^{2m}\int_\Gamma \partial_n^{k-1}u\cdot\overline{N_k v}\,dx=$$

$$=\sum_{k=2m-\sigma+1}^{2m}\int_\Gamma\sum_{t=1}^{k}\widehat{T}_{kt}B_t u\cdot\overline{N_k v}\,dx=\sum_{k=2m-\sigma+1}^{2m}\ \sum_{t=1}^{k}\int_\Gamma B_t u\cdot\overline{\widehat{T}^+_{kt}N_k v}\,dx=$$

$$=\sum_{k=2m-\sigma+1}^{2m}\left(\sum_{t=1}^{2m-\sigma}\ldots+\sum_{t=2m-\sigma+1}^{k}\ldots\right)=\sum_{k=m-\sigma+1}^{2m}\ \sum_{t=1}^{2m-\sigma}\ldots+$$

$$+\sum_{t=2m-\sigma+1}^{2m}\ \sum_{k=t}^{2m}\ldots=\sum_{k=2m-\sigma+1}^{2m}\ \sum_{t=1}^{2m-\sigma}\int_\Gamma B_t u\cdot\overline{\widehat{T}^+_{kt}N_k v}\,dx+ \tag{6.104}$$

$$+\sum_{t=2m-\sigma+1}^{2m}\int_\Gamma B_t u\cdot\overline{B'_{2m-t+1}v}\,dx.$$

Поясним проведенные выкладки. Мы, как и на стр. 235, обозначили

$$N_k v=\sum_{\nu=k}^{2m}\ \sum_{|\tau|+\nu\leqslant 2m}\partial^{\nu-k}\partial^\tau(\overline{a_{\tau\nu}}\,v)\qquad (k=1,\ldots,2m),$$

затем воспользовались представлением (6.28), перебросили $\widehat{T}_{kt}$ с u на v ($\widehat{T}_{kt}$ состоит из тангенциальных производных) и использовали выражение B_0' через $\widehat{T}^+\cdot, N.$ (см. стр. 235).

До сих пор мы не налагали ограничения на u и v на плоском куске границы полушара G_δ. Предположим теперь, что $u\in W_2^{2m}$ (гр), $v\in W_2^{2m}$ (гр)$^+$. Тогда $B_t u\cdot B'_{2m-t+1}v=0$ $(t=2m-\sigma+1,\ldots,2m)$ и для оценки (6.104) придется лишь оценивать интеграл

$$\int_\gamma B_t u\cdot\overline{\widehat{T}^+_{kt}N_k v}\,dx\qquad (u,v\in W_2^{2m}(G_\delta);\ t=1,\ldots,2m-\sigma; \tag{6.105}$$
$$k=2m-\sigma+1,\ldots,2m),$$

распространенный на плоскую часть γ границы G_δ. Для достаточно гладких функций $f(x)$, $g(x)$ $(x\in\overline{G}_\delta)$, одна из которых аннулируется вблизи полусферы $|x|=\delta$, $x_n\geqslant 0$, можно написать

$$\int_\gamma fg\,dx=-i\int_{G_\delta}(\partial_n f\cdot g+f\partial_n g)\,dx.$$

Поэтому если предварительно продолжить коэффициенты B_t и $\widehat{T}^{+}_{kt}$ гладким образом внутрь G_δ, то при помощи этой формулы получим

$$\left|\int\limits_{\gamma} B_t u\cdot\overline{\widehat{T}^{+}_{kt} N_k v}dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{G_\delta} \partial_n (B_t u)\cdot\overline{\widehat{T}^{+}_{kt} N_k v}dx\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{G_\delta} B_t u\cdot\partial_n\overline{(\widehat{T}^{+}_{kt} N_k v)}dx\right| (t=1,\ldots,2m-\sigma;\ k=2m-\sigma+1,\ldots,2m). \quad (6.106)$$

Если теперь учесть, что порядок выражения B_t есть $t-1$, выражения N_k — $2m-k$, тангенциального выражения $\widehat{T}^{+}_{kt}$ — $k-t$, а также то, что переброска тангенциальных производных не приводит к внеинтегральным членам, то интегралы в правой части (6.106) оценятся через $C_4\| u \|_{2m-\sigma}\|v\|_\sigma$. Итак, требуемая оценка интегралов по Г получена. Лемма доказана.

Итак, теорема 6.12 о гомеоморфизмах полностью доказана.

В заключение заметим, что негативные пространства типа в) и д), фигурирующие в условии этой теоремы, можно интерпретировать несколько иначе. Приведем такую интерпретацию в абстрактном виде. Пусть имеется цепочка $H_-\supseteq H_0\supseteq H_+$, N — конечномерное подпространство H_+. Рассмотрим подпространства $H_-\ominus N$, $H_0\ominus N$ и $H_+\ominus N$ (всюду — ортогональное вычитание в H_0, ср. с леммой 6.10). Тогда утверждается, что *негативное пространство, построенное по нулевому $H_0\ominus N$ и позитивному $H_+\ominus N$* *, *изометрично подпространству $H_-\ominus N$*. Это, по существу, перефразировка сказанного на стр. 77: рассматриваемое негативное пространство совпадает с фактор-пространством H_-/N_-, где N_- — подпространство таких $\alpha\in H_-$, что $(\alpha, H_+\ominus N)_0=0$. Учитывая конечномерность N, заключаем, что $N_-=N$ и $H_-/N_-\doteq H_-\ominus N$.

11. Гладкость вплоть до границы сильных обобщенных решений эллиптических уравнений. В этом и следующем пунктах мы аналогично пп. 5 и 6, § 4, применим теоремы о гомеоморфизмах для исследования гладкости решений в случае общих граничных условий; как и ранее, рассмотрение будет вестись локально. Более законченные результаты получаются при применении теоремы 6.9, а не 6.12. Это связано с тем обстоятельством, что для (гр), отличных от нулевых, из включений $u(x)\in W_2^{2m}$ (гр), $\chi(x)\in C^\infty(E_n)$ еще не следует включение $\chi(x)u(x)\in W_2^{2m}$ (гр). Мы и будем излагать только это применение. Наконец заметим, что приводимые ниже утверждения содержат и некоторую дополнительную информацию о гладкости внутри области: в частности, мы получим результаты не типа теорем 4.1 и 4.3, а типа теоремы 4.5, но для общих эллиптических выражений.

Будем изучать эллиптическую задачу (6.4) — (6.5) с достаточно гладкими коэффициентами выражений L и B_j и границей Г. Согласно лемме 6.11 справедливы оценки

$$\| Lu \|_s \leqslant C_s |||u|||_{2m+s},\qquad \langle\langle B_j u\rangle\rangle_{s-\frac{1}{2}} \leqslant C_s |||u|||_{2m+s}$$

$$(C_s>0;\ u\in W_2^{\max(2m+s,2m)}(G);\qquad s=\ldots,-1,0,1,\ldots;\ j=1,\ldots,m).$$

* Именно такого типа пространства в) и д).

Таким образом. оператор $u \to Lu$, $u \in W_2^{\max(2m+s,2m)}(G)$, если его рассматривать как оператор из пространства $\widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ в пространство $W_2^s(G)$, является непрерывным. Замыкание по непрерывности этого оператора обозначим $\mathbf{L}_s$*. Аналогично обозначим $\mathbf{B}_{j,s}$ $(j=1,\ldots,m)$ замыкание по непрерывности оператора $u \to B_j u$, $u \in W_2^{\max(2m+s,2m)}(G)$, действующего из $\widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ в $W_2^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f \in W_2^{s-2m}(G),\ B_j u = \varphi_j \in W_2^{s-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \qquad (j=1,\ldots,m) \tag{6.107}$$

с некоторым $s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Под сильным обобщенным решением этой задачи будем понимать $u \in \widetilde{W}_2^s(G)$ такое, что

$$\mathbf{L}_{s-2m} u = f, \qquad \mathbf{B}_{j,s-m_j} u = \varphi_j \qquad (j=1,\ldots,m). \tag{6.108}$$

Просто доказывается следующая теорема.

Теорема 6.13. Пусть $u \in \widetilde{W}_2^s(G)$ $(s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ — *сильное обобщенное решение задачи* (6.107) *с более гладкими, чем в* (6.107), *правыми частями:* $f \in W_2^{s+1-2m}(G)$, $\varphi_j \in W_2^{s+1-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j=1,\ldots,m)$. *Тогда* $u \in \widetilde{W}_2^{s+1}(G)$.

При этом предполагается, что выполнены условия теоремы 6.9 как для s, замененного на $s-2m$, так и для s, замененного на $s+1-2m$.

Доказательство. Можно написать разложение: $u = u' + u''$, где $u' = P_N u \in N$, $u'' = P_{\perp N} u \in \widetilde{H}_s$ (см. стр. 247). Очевидно, из (6.108) вытекают равенства

$$\mathbf{L}_{s-2m} u'' = f, \qquad \mathbf{B}_{j,s-m_j} u'' = \varphi_j \qquad (j=1,\ldots,m). \tag{6.109}$$

Обозначим $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in K_{\left(s+1-2m,\, s-m_j+\frac{1}{2}\right)} \subset K_{\left(s-2m,\, s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. Равенства (6.109) можно переписать в виде $\overline{\mathfrak{L}}_0 u'' = F$, где под $\overline{\mathfrak{L}}_0$ следует понимать сужение (при $s-2m \geqslant 0$) или замыкание по непрерывности (при $s-2m < 0$) оператора $\mathfrak{L}_0$, который рассматривается как действующий из $\widetilde{W}_2^s(G)$ в $K_{\left(s-2m,\, s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. В силу теоремы 6.9 $[F, N^+ \ldots]_0 = 0$, поэтому также $F \in Q_{\perp N} + K_{\left(s+1-2m,\, s-m_j+\frac{1}{2}\right)} = K_{s+1}^+$. Опять в силу теоремы 6.9 найдется $u''' \in \widetilde{H}_{s+1}$, которое соответствующим гомеоморфизмом переводится в F. Но $\widetilde{H}_{s+1} \subset \widetilde{H}_s$, поэтому этот последний гомеоморфизм является сужением гомеоморфизма $\overline{\mathfrak{L}}_0$, переводящего F в u''. Отсюда следует, что $u''' = u''$. Итак, $u = u' + u'' = u' + u''' \in \widetilde{W}_2^{s+1}(G)$ $(u' \in N \subset \widetilde{W}_2^{s+1}(G))$. Теорема доказана.

---

* Аналогичное обозначение $\mathbf{N}_s$ введем и для замыкания оператора $u \to Nu$, $u \in W_2^{\max(r+s,r)}(G)$, где N—произвольное выражение порядка r.

Перейдем к локальной формулировке результата типа этой теоремы. Функцию $\chi(x)$, фигурирующую в следующей лемме, будем называть допустимой.

Лемма 6.15. *Предположим, что Γ достаточно гладкая, Γ_0 — некоторый кусок Γ, к которому примыкает подобласть G_0 области G. Пусть $\chi(x) \in C^\infty(G \cup \Gamma)$ аннулируется в некоторой окрестности множества $G \setminus G_0$ и $\frac{\partial \chi}{\partial \nu} = 0$ вблизи Γ_0 (ν — направление внешней нормали $\nu(x)$ ($x \in \Gamma_0$), снесенное в некоторую окрестность Γ_0). Тогда, если $u \in \widetilde{W}_2^l(G)$, то $\chi(x) u(x) \in \widetilde{W}_2^l(G_0)$; оператор $u \to \chi u$ непрерывно действует из $\widetilde{W}_2^l(G)$ в $\widetilde{W}_2^l(G_0)$ ($l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$).*

Поясним формулировку. Это пояснение одновременно и приведет к доказательству леммы. Включение $\chi(x) u(x) \in \widetilde{W}_2^l(G_0)$ обозначает, что

$$\chi(x) u(x) \in W_2^l(G_0), \qquad \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} (\chi(x) u(x)) \in W_2^{l-j+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0) \tag{6.110}$$
$$(j = 1, \ldots, 2m),$$

где $\widetilde{\Gamma}_0$ — полная граница области G_0. Первое из равенств (6.110) при $l \geqslant 0$ очевидно; при $l < 0$ его можно понимать в смысле, объяснением на стр. 153 (см. сноску), сейчас оно также имеет место. Второе из равенств (6.110) (j фиксировано) при $l - j \geqslant 0$ понятно. При $l - j < 0$ его нужно понимать (согласно определению пространства $\widetilde{W}_2^l(G)$ как пополнения по норме (6.59) гладких функций) следующим образом: пусть последовательность гладких функций $u_n(x)$ ($x \in G$; $n = 1, 2, \ldots$) сходится в норме $|||\cdot|||_{\widetilde{W}_2^l(G)}$ к элементу u, тогда $\frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} (\chi(x) u_n(x))$ фундаментальна в норме $W_2^{l-j+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0)$. Но благодаря условию $\frac{\partial \chi}{\partial \nu} = 0$ вблизи Γ_0 и аннулированию χ в окрестности $G \setminus G_0$ $\frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} (\chi(x) u_n(x)) = \chi(x) \frac{\partial^{j-1} u_n(x)}{\partial \nu^{j-1}}$ ($x \in \Gamma_0$). Последовательность $\frac{\partial^{j-1} u_n(x)}{\partial \nu^{j-1}}$ фундаментальна в $W_2^{l-j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, так как по условию $u \in \widetilde{W}_2^l(G)$. Тогда и $\chi(x) \frac{\partial^{j-1} u_n(x)}{\partial \nu^{j-1}}$ фундаментальна в $W_2^{l-j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, а значит — благодаря виду $\chi(x)$ — и в $W_2^{l-j+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0)$. Это следует из непрерывности оператора умножения на гладкую функцию в негативном пространстве $W_2^{l-j+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0) = W_2^{-\left(j-l-\frac{1}{2}\right)}(\widetilde{\Gamma}_0)$, последняя же доказывается точно так же, как и на стр. 153. Из сказанного также ясна непрерывность оператора $u \to \chi u$. Лемма доказана.

Теорема 6.14. *Пусть в области G с достаточно гладкой границей Γ рассматривается эллиптическая задача* (6.107), *$u \in \widetilde{W}_2^s(G)$ — некоторое ее сильное обобщенное решение ($s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ фиксировано). Предположим, что на Γ расположен кусок Γ_0, к которому примыкает некоторая подобласть $G_0 \subseteq G$*

причем f и φ_j более гладкие на G_0 и Γ_0: для любой допустимой функции $\chi(x)$ соответственно $\chi f \in W_2^{s+1-2m}(G_0)$ и $\chi\varphi_j \in W_2^{s+1-m_j-\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0)$ ($j=1,\ldots,m$; $\widetilde{\Gamma}_0$ — полная граница G_0). Тогда утверждается, что и $\chi u \in \widetilde{W}_2^{s+1}(G_0)$.

При этом предполагается, что L в $G_0 \cup \Gamma_0$ правильно эллиптично, система граничных выражений нормальна на куске Γ_0 и там накрывает L, и выполнены ограничения гладкости теоремы 6.9 с заменой s как на $s-2m$, так и на $s+1-2m$ и с заменой $G \cup \Gamma$ на $G_0 \cup \Gamma_0$ и Γ на Γ_0.

Прежде, чем доказывать теорему, заметим, что ее, конечно, можно было бы сформулировать в форме с повышением гладкости более чем на 1 и с локальным вхождением f, φ_j и u в соответствующие пространства вместо умножения этих функций на χ. Такая формулировка более походила бы на теоремы 4.5 и 4.6.

Доказательство. Зафиксируем $\chi(x)$ и чуть сожмем область G_0, скользя по поверхности Γ. Полученную область обозначим G_0', очевидно, условия нашей теоремы будут выполнены, если мы заменим G_0 на G_0'. Ясно, что сжимать G_0 можно было так, чтобы G_0' оказалась областью с границей Γ_0', удовлетворяющей условиям теоремы 6.9 с заменой s как на $s-2m$, так и на $s+1-2m$. Рассмотрим $L(x,\partial)$ лишь для $x \in G_0'$, сейчас условия теоремы 6.9 (с указанным s). на коэффициенты $L(x,\partial)$ в области G_0' будут выполнены. Далее, продолжим все выражения $B_j(x,\partial)$, $B_j'(x,\partial)$, $C_j(x,\partial)$ и $C_j'(x,\partial)$ с Γ_0 на оставшуюся часть границы Γ_0' области G_0' так, чтобы и остальные условия теоремы 6.9 оказались выполненными. Обозначим операторы $\mathbf{L}_{s-2m}$ и $\mathbf{B}_{j,s-m_j}$, построенные для области G_0', через $\mathbf{L}_{s-2m,G_0'}$ и $\mathbf{B}_{j,s-m_j,G_0'}$.

Для достаточно гладкой $u_n(x)$ ($x \in G$) имеем

$$\begin{aligned}(L[\chi u_n])(x) &= \chi(x)(Lu_n)(x)+(M_\chi u_n)(x) \qquad (x\in G),\\ (B_j[\chi u_n])(x) &= \chi(x)(B_ju_n)(x)+(N_{j,\chi}u_n)(x) \qquad (x\in\Gamma;\ j=1,\ldots,m).\end{aligned} \tag{6.111}$$

Здесь M_χ и $N_{j,\chi}$ — дифференциальные выражения порядков $2m-1$ и m_j-1 соответственно, коэффициенты которых аннулируются в области, где $\chi\equiv 0$. Пусть теперь $u \in \widetilde{W}_2^s(G)$, аппроксимируем ее в метрике $\widetilde{W}_2^s(G)$ гладкими u_n. При помощи лемм 6.15 и 6.11 получим из (6.111):

$$\mathbf{L}_{s-2m,G_0'}[\chi u] = \chi\mathbf{L}_{s-2m}u+\mathbf{M}_{\chi,s-2m}u = \chi f+\mathbf{M}_{\chi,s-2m}u = f' \in W_2^{s+1-2m}(G_0'),$$

$$\mathbf{B}_{j,s-m_j,G_0'}[\chi u] = \chi\mathbf{B}_{j,s-2m}u+\mathbf{N}_{j,\chi,s-2m}u = \chi\varphi_j+\mathbf{N}_{j,\chi,s-2m}u =$$

$$= \varphi_j' \in W_2^{s+1-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma_0') \quad (j=1,\ldots,m).$$

Применяя теорему 6.13 в области G_0', получим: $\chi u \in \widetilde{W}_2^{s+1}(G_0')$. Благодаря характеру аннулирования χ можно написать: $\chi u \in \widetilde{W}_2^{s+1}(G_0)$. Теорема доказана.

12. Гладкость вплоть до границы обобщенных решений эллиптических уравнений. Обобщенные решения предыдущего пункта были типа сильных и не согласовывались с определением (4.39). Сейчас мы устраним этот разрыв.

Рассмотрим задачу (6.107) с фиксированным $s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Функцию $u \in \widetilde{W}_2^s(G)$ будем называть слабым обобщенным решением задачи (6.107), если для всех $v \in W_2^{2m+\max(-s,0)}(G)$

$$(u, L^+v)_0 + \sum_{j=0}^{m} \langle C_j u, B_j' v\rangle_0 = (f, v)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, C_j' v\rangle_0 \tag{6.112}$$

(коэффициенты выражений L^+, B_j', C_j' и C_j предполагаются достаточно гладкими).

Из формулы Грина (6.32) легко следует, что если $s \geqslant 2m$, то слабое обобщенное решение будет гладким (из $W_2^s(G)$) решением задачи. Так как сильное обобщенное решение получается процедурой замыкания с гладких решений, то ясно, что сильное обобщенное решение будет и слабым. Оказывается, справедлив и обратный факт.

Лемма 6.16. *Пусть выполнены предположения теоремы 6.9 с заменой s на $s - 2m$. Тогда слабое обобщенное решение задачи* (6.107) *будет и сильным обобщенным решением этой задачи.*

Доказательство. Пусть $u \in \widetilde{W}_2^s(G)$ — слабое обобщенное решение задачи (6.107). Как и при доказательстве теоремы 6.13, представим u в виде: $u = u' + u''$, где $u' = P_N u \in N$, $u'' = P_{\perp N} u \in \widetilde{H}_s$. Так как $\mathfrak{L}u' = 0$, то

$$(u', L^+v)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j u', B_j' v\rangle_0 = 0 \qquad (v \in W_2^{2m+\max(-s,0)}(G))$$

и равенство (6.112) будет удовлетворяться, если в него вместо u подставить u''. Из (6.112) следует, что $[(f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m), N^+]_0 = 0$. Поэтому по теореме 6.9 существует сильное обобщенное решение $u''' \in \widetilde{H}_s$ задачи (6.107). Так как сильное обобщенное решение является также слабым, то

$$(u'' - u''', L^+v)_0 + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j(u'' - u'''), B_j' v\rangle_0 = 0 \qquad (v \in W_2^{2m+\max(-s,0)}(G)). \tag{6.113}$$

Положим в (6.113) $v \in W_2^{2m}(\text{гр})^+ \cap W_2^{2m+\max(-s,0)}(G)$, т. е. будем считать $B_j'v = 0$ ($j = 1, \ldots, m$). Тогда в силу теоремы 6.7 L^+v будут пробегать $H_{\max(-s,0)} = W_2^{\max(-s,0)}(G) \ominus N$ и $(u'' - u''', L^+v)_0 = 0$. Так как u'', u''' ортогональны к N, то отсюда следует, что $u'' = u'''$. Итак, $u = u' + u'''$, откуда следует, что u вместе с u''' будет сильным обобщенным решением задачи (6.107). Лемма доказана.

Следствие. Теоремы 6.13 и 6.14 остаются справедливыми при замене сильного обобщенного решения задачи (6.107) слабым.

Перейдем к рассмотрению однородных граничных условий. Если в равенстве (6.112) положить $\varphi_j = 0$ ($j = 1, \ldots, m$), то мы получим определение слабого обобщенного решения задачи (6.107) с однородными (гр). Это определение все же будет отличаться от (4.39) и мы его модернизируем.

В соответствии со сказанным на стр. 262 введем следующие пространства (ниже s — целое): при $s \geqslant 0$ $W_2^{2m+s}(\text{гр})^+ = W_2^{2m}(\text{гр})^+ \cap W_2^{2m+s}(G)$ (метрика $(\cdot,\cdot)_{2m+s}$); при $-2m \leqslant s < 0$ $W_2^{2m+s}(\text{гр})^+$ — замыкание $W_2^{2m}(\text{гр})^+$ в $W_2^{2m+s}(G)$; при $s < -2m$ $W_2^{2m+s}(\text{гр})^+$ — негативное пространство относительно нулевого $L_2(G)$ и позитивного $W_2^{-(2m+s)}(\text{гр})^+$. Иными словами, $W_2^l(\text{гр})^+$ совпадает с $H_l(\text{гр})^+$, построенном при предположеинии $N^+ = 0$.

Функцию $u \in W_2^s(G)$ $(s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ будем называть обобщенным решением задачи

$$Lu = f \in W_2^{\min(s-2m, 0)}(\text{гр})^+, \qquad u \in (\text{гр}), \tag{6.114}$$

если для всех $v \in W_2^{2m+\max(-s,0)}(\text{гр})^+$ выполняется равенство

$$(u, L^+v)_0 = (f, v)_0 \tag{6.115}$$

(коэффициенты L^+ предполагаются достаточно гладкими). Ясно, что из определения (6.112) (с $\varphi_j = 0$; $j = 1, \ldots, m$) следует приведенное определеиие. Докажем обратное.

Лемма 6.17. *Пусть $u \in W_2^s(G)$ $(s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ — обобщенное решение задачи (6.114) в только что определенном смысле. Если $f \in W_2^{s-2m}(G)$, то $u \in \widetilde{W}_2^s(G)$ и удовлетворяет соотношению (6.112) с $\varphi_j = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, т. е. является слабым обобщенным (а значит и сильным) решением задачи (6.107). При этом предполагается, что выполнены условия теоремы 6.9 с заменой s на $s - 2m$.*

Доказательство. Представим u в виде:

$$u = u' \dotplus u'', \qquad u' = P_N u \in N, \qquad u'' = P_{\perp N} u \in \widetilde{H}_s. \tag{6.116}$$

Ясно, что $(u'', L^+v)_0 = (f, v)_0$ для v из (6.115). Из (6.115) следует, что $[(f, 0, \ldots, 0), N^+ \ldots]_0 = 0$, поэтому из теоремы 6.9 вытекает, что существует $u''' \in \widetilde{H}_s$, удовлетворяющее соотношению (6.112) с $\varphi_j = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, а значит и соотношению (6.115) В дальнейшем, подобно лемме 6.16, убеждаемся, что $u'' = u'''$. Теперь утверждение следует из представления (6.116). Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что к обобщенным решениям задачи (6.114) можно применять теоремы 6.13 и 6.14. В частности, из доказанной теоремы вытекает следующая теорема.

Теорема 6.15. *Пусть в области G с достаточно гладкой границей Γ рассматривается задача (6.114) с $f \in W_2^{s-2m}(G)$, $u \in W_2^s(G)$ — ее обобщенное решение $(s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Предположим, что на Γ расположен кусок Γ_0, к которому примыкает некоторая подобласть $G_0 \subseteq G$, причем f более гладкое на G_0: для любой допустимой функции $\chi(x)$ $\chi f \in W_2^{s+1-2m}(G_0)$. Тогда и $\chi u \in \widetilde{W}_2^{s+1}(G_0)$.*

При этом предполагается, что L в $G_0 \cup \Gamma_0$ правильно эллиптично, система граничных выражений нормальна на куске Γ_0 и там накрывает L, и выполнены ограничения гладкости теоремы 6.9 с заменой s как на $s - 2m$, так и на $s \dotplus 1 - 2m$, и с заменой $G \cup \Gamma$ на $G_0 \cup \Gamma_0$ и Γ на Γ_0.

Ясно, что при $s + 1 \geqslant 2m$ функция u должна удовлетворять (гр). Установим результат в этом направлении, ограничиваясь для простоты формулировкой во всей G. Правую часть в (6.114) мы будем считать «более обобщенной», чем в теореме 6.15, и пользоваться теоремой о гомеоморфизмах 6.12.

Теорема 6.16. *Пусть выполнены предположения теоремы 6.9 с заменой s как на $s-2m$, так и на $s+1-2m$ ($s=\ldots,-1,0,1,\ldots$ — фиксировано). Пусть $u\in W_2^s(G)$ — обобщенное решение задачи* (6.114), *где*

$$f\in\begin{cases}W_2^{s-2m+1}(\text{гр})^+, & s-2m+1<0,\\ W_2^{s-2m+1}(G), & s-2m+1\geqslant 0.\end{cases}$$

Тогда

$$u\in\begin{cases}W_2^{s+1}(\text{гр}), & s+1>0.\\ W_2^{s+1}(G), & s+1\leqslant 0^*.\end{cases}$$

Доказательство. Представим u в виде (6.116). Очевидно, $(u'',L^+v)_0=(f,v)_0$ $(v\in W_2^{2m+\max(-s,0)}(\text{гр})^+$ и $(f,N^+)_0=0$. Так как $(f,N^+)_0=0$, то по теореме 6.12 существует элемент

$$u'''\in\begin{cases}W_2^{s+1}(\text{гр}), & s+1>0,\\ W_2^{s+1}(G), & s+1\leqslant 0,\end{cases}\qquad (u''',N)_0=0,$$

такой, который переводится соответствующим гомеоморфизмом в f. Ясно, что $(u''',L^+v)_0=(f,v)_0$ $(v\in W_2^{2m+\max(-s,0)}(\text{гр})^+)$, откуда $(u''-u''',L^+v)_0=0$ для указанных v. Так как L^+v пробегает все $H_{\max(-s,0)}=W_2^{\max(-s,0)}(G)\ominus N$, а u'', u''' ортогональны N, то u'' как функционал совпадает с u'''. Из (6.116) теперь следует утверждение. Теорема доказана.

Приведенные теоремы о гладкости вполне заменяют теорему 4.6 и их с успехом можно применять к изучению вблизи границы функции Грина, собственных функций и т. д. в случае общих (гр), порожденных нормальной системой дифференциальных выражений на Γ, накрывающих L. При применении этих теорем в неограниченной области удобно ввести понятие удовлетворения уравнению и (гр) локально. Подобное изменение определения (6.115) в духе сказанного на стр. 219 — 220 и формулировку соответствующих результатов легко может произвести читатель.

---

* При $s+1\leqslant 0$ это включение означает следующее: существует элемент $u_0\in W_2^{s+1}(G)$ такой, что $(u,w)_0=(u_0,w)_0$ $(w\in W_2^{-s}(G))$, т. е. как функционал u совпадает с $u_0\in W_2^{s+1}(G)$.

Глава IV

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. ДРУГИЕ ТИПЫ УРАВНЕНИЙ

Содержание этой главы по существу сводится к рассмотрению ряда примеров «неклассических» задач, связанных с неэллиптическими уравнениями, для которых удается установить энергетические неравенства и получить на основании гл. II некоторые результаты об их обобщенной разрешимости. Эти примеры следует рассматривать как иллюстрации к схемам гл. II. «Классичностью» выделяется § 3, где рассмотрены уравнения смешанного типа. Мы почти не будем касаться трудного и недостаточно исследованного вопроса о гладкости найденных обобщенных решений. Ниже, если противное не оговаривается, рассмотрения ведутся в ограниченной области G с кусочно-гладкой границей Γ.

§ 1. Общие дифференциальные выражения с постоянными коэффициентами

Такие выражения обладают рядом важных свойств, основное из которых заключается в том, что для них всегда существуют разрешимые расширения минимального оператора. В этом параграфе мы установим этот факт, а также некоторые связанные с ним результаты.

1. Основное энергетическое неравенство. Дифференциальные выражения с постоянными коэффициентами удобно записывать в виде

$$Lu = L(\partial)\,u = \sum_{|\alpha|\leqslant r} a_\alpha \partial^\alpha u, \quad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_n^{\alpha_n}, \quad \partial_j = \frac{1}{i}D_j \tag{1.1}$$

$$(j = 1, \ldots, n).$$

При такой записи

$$L^+ u = \sum_{|\alpha|\leqslant r} \bar{a}_\alpha \partial^\alpha u = \bar{L}u. \tag{1.2}$$

С выражением $L(\partial)$ свяжем полином $L(\zeta)$ от n комплексных переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, полагая

$$L(\zeta) = \sum_{|\alpha|\leqslant r} a_\alpha \zeta^\alpha, \qquad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n), \qquad \zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1}\ldots\zeta_n^{\alpha_n} \tag{1.3}$$

Наоборот, всякому полиному $L(\zeta)$ отвечает после замены ζ_j на ∂_j дифференциальное выражение вида (1.1). Преобразование Фурье от $L(\partial)u$ имеет вид $\widetilde{(L(\partial)u)}(\xi) = L(\xi)\,\tilde{u}(\xi) \quad (u \in C_0^\infty(E_n))$.

Рассмотрим полином

$$L^{(\alpha)}(\zeta) = D^\alpha L(\zeta) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\zeta_1^{\alpha_1}\ldots\partial\zeta_n^{\alpha_n}} L(\zeta), \tag{1.4}$$

отвечающее ему дифференциальное выражение обозначим $L^{(\alpha)}(\partial)\,u = L^{(\alpha)}\,u$. Справедлива формула Лейбница

$$L[uv] = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\, \partial^{\alpha} v \cdot L^{(\alpha)} u \qquad (\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!) \tag{1.5}$$

(суммирование производится по всевозможным α). Для ее доказательства заметим, что $L(\partial)\,[uv] = L(\partial_u + \partial_v)\,[uv]$, причем последнее выражение имеет следующий смысл: в $L(\partial)$ производные ∂_j заменяются суммами $\partial_{j,u} + \partial_{j,v}$ коммутирующих величин и затем $L(\partial)$ расписывается по степеням $\partial_{j,u}$ и $\partial_{j,v}$. При действии полученного выражения на uv на u действуют лишь производные с индексом u, на v — с v. Из этого правила подсчета $L(\partial)\,[uv]$ тождество (1.5) следует немедленно, если воспользоваться разложением по формуле Тейлора:

$$L(\zeta + \eta) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\, \eta^{\alpha} L^{(\alpha)}(\xi).$$

Теорема 1.1. *Пусть L и M — два дифференциальных выражения с постоянными коэффициентами вида (1.1), G — некоторая фиксированная ограниченная область. Для того чтобы было справедливо неравенство*

$$\| Lu \|_0 \geqslant C\, \| Mu \|_0 \qquad (C > 0;\ u \in C_0^{\infty}(G)), \tag{1.6}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\sum\limits_{\alpha} | M^{(\alpha)}(\xi) |^2}{\sum\limits_{\alpha} | L^{(\alpha)}(\xi) |^2} \leqslant C_1 \qquad (C_1 > 0;\ \xi \in E_n). \tag{1.7}$$

Как будет следовать из доказательства, для выполнения неравенства (1.6) *достаточно, чтобы вместо* (1.7) *выполнялась формально более слабая оценка*

$$\frac{| M(\xi) |^2}{\sum\limits_{\alpha} | L^{(\alpha)}(\xi) |^2} \leqslant C_2 \qquad (C_2 > 0;\ \xi \in E_n). \tag{1.8}$$

Доказательство достаточности основывается на следующей лемме, идея вывода которой будет использована и в дальнейшем.

Лемма 1.1. *Для любой производной $L^{(\alpha)}(\zeta)$ от $L(\zeta)$ существует такая константа $C > 0$, что*

$$\| Lu \|_0 \geqslant C\, \| L^{(\alpha)} u \|_0 \qquad (u \in C_0^{\infty}(G)). \tag{1.9}$$

Доказательство. Его достаточно провести для того случая, когда $L^{(\alpha)}(\zeta) = D_k L(\zeta)$, так как для получения общего неравенства (1.9) следует несколько раз проитерировать полученную оценку. Ниже мы обозначаем $L^{[k]}(\zeta) = D_k L(\zeta)$. Учитывая (1.2) и равенство $\overline{L^{[k]}} = \bar{L}^{[k]}$, получим посредством интегрирования по частям и формулы (1.5) (ниже $u \in C_0^\infty(G)$)

$$\int_G x_k Lu\cdot\overline{L^{[k]}u}\,dx = \int_G u\overline{\overline{L}[x_kL^{[k]}u]}dx = \int_G ux_k\overline{\overline{L}[L^{[k]}u]}\,dx + \tag{1.10}$$

$$+\frac{1}{i}\int_G u\overline{\overline{L^{[k]}}[L^{[k]}u]}dx = \int_G ux_k\overline{L^{[k]}[\overline{L}u]}\,dx + \frac{1}{i}\int_G |L^{[k]}u|^2\,dx =$$

$$= \int_G \overline{L^{[k]}}[ux_k]\cdot\overline{\overline{L}u}dx + \frac{1}{i}\int_G |L^{[k]}u|^2dx = \int_G x_k\overline{L^{[k]}}u\cdot\overline{\overline{L}u}dx +$$

$$+\frac{1}{i}\int_G \overline{L^{[k][k]}}u\cdot\overline{\overline{L}u}dx + \frac{1}{i}\int_G |L^{[k]}u|^2\,dx.$$

Отсюда

$$\int_G |L^{[k]}u|^2\,dx = i\int_G x_kLu\cdot\overline{L^{[k]}u}dx - i\int_G x_k\overline{L^{[k]}}u\cdot\overline{\overline{L}u}dx - \int_G \overline{L^{[k][k]}}u\cdot\overline{\overline{L}u}dx \leqslant$$

$$\leqslant C\{\|Lu\|_0\|L^{[k]}u\|_0+\|\overline{L}u\|_0\|\overline{L^{[k]}}u\|_0+\|\overline{L}u\|_0\|\overline{L^{[k][k]}}u\|_0\}. \tag{1.11}$$

Но для любого выражения $Nu=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant r}c_\alpha\partial^\alpha u$ типа (1.1) посредством интегрирования по частям получаем при $u\in C_0^\infty(G)$

$$\|Nu\|_0^2=\int_G\Big|\sum_{|\alpha|\leqslant r}c_\alpha\partial^\alpha u\Big|^2dx=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant r}c_\alpha\bar{c}_\beta\int_G\partial^\alpha u\cdot\overline{\partial^\beta u}dx=$$

$$=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant r}c_\alpha\bar{c}_\beta\int_G\partial^\beta\partial^\alpha u\cdot\bar{u}dx=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant r}c_\alpha\bar{c}_\beta\int_G\partial^\alpha\partial^\beta u\cdot\bar{u}dx=$$

$$=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant r}c_\alpha\bar{c}_\beta\int_G\partial^\beta u\cdot\overline{\partial^\alpha u}dx=\|\overline{N}u\|_0^2,$$

т. е. $\|Nu\|_0=\|\overline{N}u\|_0$ $(u\in C_0^\infty(G))$. Поэтому (1.11) можно переписать в виде

$$\|L^{[k]}u\|_0^2\leqslant C\|Lu\|_0(2\|L^{[k]}u\|_0+\|L^{[k][k]}u\|_0). \tag{1.12}$$

Если порядок выражения L равен $r=1$, то $L^{[k][k]}=0$ и неравенство (1.12) после сокращения на $\|L^{[k]}u\|_0$ дает требуемое неравенство $\|L^{[k]}u\|_0\leqslant C_1\|Lu\|_0$. Пусть теперь эта оценка доказана для всех выражений порядка $<r$, докажем ее для L порядка r. Так как $L^{[k]}$ порядка $r-1$, то для него согласно предположению имеем $\|L^{[k][k]}u\|_0\leqslant C_2\|L^{[k]}u\|_0$. Подставляя эту оценку в (1.12), получим $\|L^{[k]}u\|_0^2\leqslant C(2+C_2)\|Lu\|_0\|L^{[k]}u\|_0$, откуда и следует требуемое. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству достаточности в теореме. Будем считать функции из $C_0^\infty(G)$ продолженными нулем на все E_n. Используя равенство Парсеваля для преобразования Фурье н оценки (1.8), (1.9), получнм при $u \in C_0^\infty(G)$

$$\|Mu\|_0^2 = \int_G |Mu|^2 dx = \int_{E_n} |\widetilde{(Mu)}(\xi)|^2 d\xi = \int_{E_n} |M(\xi)|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_\alpha \int_{E_n} |L^{(\alpha)}(\xi)|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi = C_2 \sum_\alpha \|L^{(\alpha)}u\|_0^2 \leqslant C_3 \|Lu\|_0^2,$$

что н требовалось.

Докажем необходимость. Пусть $\psi \in C_0^\infty(G)$ такова, что ее преобразование Фурье всюду отлнчно от нуля, положим $u(x) = \psi(x) e^{i(x,\xi)}$, где $\xi \in E_n$ фнксирован Прнменяя (1.5), найдем $Lu = e^{i(x,\xi)} \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \psi \cdot L^{(\alpha)}(\xi)$. Аналогично подсчнтаем Mu н подставнм этн выраження в возведенное в квадрат неравенство (1.6). Получнм

$$C^2 \sum_{\alpha,\beta} M^{(\alpha)}(\xi) \overline{M^{(\beta)}(\xi)}\, \psi_{\alpha\beta} \leqslant \sum_{\alpha,\beta} L^{(\alpha)}(\xi) \overline{L^{(\beta)}(\xi)}\, \psi_{\alpha\beta}, \tag{1.13}$$

где обозначено $\psi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha!\beta!} \int_G \partial^\alpha \psi \cdot \overline{\partial^\beta \psi}\, dx.$

Индексы α н β пробегают некоторое конечное множество значеннй (пусть, например, $0 \leqslant |\alpha|, |\beta| \leqslant m$), поэтому $\psi_{\alpha\beta}$ можно считать коэффнциентамн некоторой квадратнчной формы $\Psi(t)$, прнчем переменной в этой форме служнт набор комплексных чнсел $t_\alpha(|\alpha| \leqslant m)$. Эта форма строго положнтельно определена: нспользуя равенство Парсеваля, получаем

$$\Psi(t) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \psi_{\alpha\beta} t_\alpha \bar{t}_\beta = \int_G \Big| \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{1}{\alpha!} t_\alpha \partial^\alpha \psi \Big|^2 dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{1}{\alpha!} t_\alpha \xi^\alpha \Big|^2 |\tilde{\psi}(\xi)|^2 d\xi \geqslant 0,$$

причем равенство нулю может быть лнпь тогда, когда для всех ξ $\sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{1}{\alpha!} t_\alpha \xi^\alpha = 0$, т. е. когда все $t_\alpha = 0$. Следовательно, значення $\Psi(t)$ ограничены снизу длнной вектора t; кроме того, она очевндно ограннчена сверху. Таким образом, имеем $C_1 \sum_{|\alpha| \leqslant m} |t_\alpha|^2 \leqslant \sum_{\alpha,\beta} \psi_{\alpha\beta} t_\alpha \bar{t}_\beta \leqslant C_2 \sum_{|\alpha| \leqslant m} |t_\alpha|^2$. Из этого неравенства н (1.13) следует

$$C_1 \sum_{|\alpha| \leqslant m} |M^{(\alpha)}(\xi)|^2 \leqslant \sum_{\alpha,\beta} \psi_{\alpha\beta} M^{(\alpha)}(\xi) \overline{M^{(\beta)}(\xi)} \leqslant \frac{1}{C^2} \sum_{\alpha,\beta} \psi_{\alpha\beta} L^{(\alpha)}(\xi) \overline{L^{(\beta)}(\xi)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2}{C^2} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |L^{(\alpha)}(\xi)|^2,$$

т. е. мы пришли к оценке (1.7). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть выполнено условие (1.7), тогда для любого $s \in (-\infty, \infty)$ справедливо неравенство

$$\| Lu \|_{\mathring{W}_2^s(G)} \geqslant C_s \| Mu \|_{\mathring{W}_2^s(G)} \quad (C_s > 0;\ u \in C_0^\infty(G)). \tag{1.14}$$

Константа C_s в (1.14) может быть взята одна и та же для всех $s \in [a, \infty)$.

Докажем сперва неравенство (1.14) при $s = -\sigma < 0$. Для этого воспользуемся теоремой 3.6, гл. I, в которой в качестве $\varphi(x)$ взята функция из $C_0^\infty(E_n)$, аннулирующаяся при $|x| \geqslant 1$. Теперь $\varphi_\varepsilon(x)$ $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ равна нулю для $|x| \geqslant \varepsilon_0$ и поэтому $u*\varphi_\varepsilon$ при $u \in C_0^\infty(G)$ входит в $C_0^\infty(G')$, где G' — некоторая ограниченная область, содержащая строго внутри себя G. Из (1.7) согласно теореме 1.1 следует неравенство $\| Lv \|_{L_2(G')} \geqslant C \| Mv \|_{L_2(G')}$ $(v \in C_0^\infty(G'))$. В частности,

$$\| L[u*\varphi_\varepsilon] \|_{L_2(G')} \geqslant C \| M[u*\varphi_\varepsilon] \|_{L_2(G')} (u \in C_0^\infty(G)).$$

Для дифференциального выражения P с постоянными коэффициентами очевидно $P(f*g) = (Pf)*g$, поэтому из последнего неравенства и (3.21), гл. I, следует: $\| Lu \|_{-\sigma} \geqslant C \| Mu \|_{-\sigma}$. Это неравенство эквивалентно оценке

$$\| Lu \|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G)} \geqslant C_1 \| Mu \|_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G)} \quad (u \in C_0^\infty(G)), \tag{1.15}$$

где C_1 может быть взята одна и та же для всех $-\sigma \in [c, d]$, $-\infty < c < d < 0$. Итак, (1.14) при $s < 0$ установлено (правда, зависимость C_s от s еще не имеет указанного вида).

Теперь будем считать, что $c < -1 < d < 0$. Заменяя в (1.15) u на $D^\alpha u$ $(u \in C_0^\infty(G))$, возводя в квадрат и суммируя, получим

$$\sum_{|\alpha| \leqslant t} \| D^\alpha Lu \|^2_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G)} = \sum_{|\alpha| \leqslant t} \| LD^\alpha u \|^2_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G)} \geqslant C_1^2 \sum_{|\alpha| \leqslant t} \| MD^\alpha u \|^2_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G)} =$$

$$= C_1^2 \sum_{|\alpha| \leqslant t} \| D^\alpha Mu \|^2_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G)} \quad (t = 1, 2, \ldots). \tag{1.16}$$

Переходя к преобразованиям Фурье, легко обнаружить, что выражение $\left(\sum_{|\alpha| \leqslant t} \| D^\alpha v \|^2_{\mathring{W}_2^{-\sigma}(G)} \right)^{\frac{1}{2}}$ $(v \in C_0^\infty(G))$ эквивалентно норме $\| v \|_{\mathring{W}_2^{t-\sigma}(G)}$ (ср. стр. 78). Из (1.16) в силу этого обстоятельства заключаем, что следствие 1 действительно имеет место.

Следствие 2. Для любого выражения L с постоянными коэффициентами всегда справедливы энергетические неравенства

$$\| Lu \|_0 \geqslant C \| u \|_+ \left(C > 0;\ \| u \|_+^2 = \sum_\alpha \| L^{(\alpha)} u \|_0^2,\ u \in C_0^\infty(G) \right), \tag{1.17}$$

$$\| Lu \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^s(G)} \geqslant C_s \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^s(G)} \quad (C_s > 0;\ s \in (-\infty, \infty);\ u \in C_0^\infty(G)) \tag{1.18}$$

(зависимость C_s от s такая же, как и в следствии 1).

В самом деле, неравенство (1.17) непосредственно вытекает из (1.9). Нужно лишь заметить, что норма $\| \cdot \|_+$ действительно позитивная, т. е. что $\|u\|_+ \geqslant C_1 \|u\|_0$, — это следует из того, что последовательным дифференцированием по ζ всегда можно перейти от полинома $L(\zeta)$ к полиному, кратному единице. Неравенство (1.18) — частный случай (1.14): достаточно положить $M = E$.

Неравенства (1.17) и (1.18) останутся справедливыми, если заменить L на L^+. Отсюда, в частности, вытекают два факта.

Следствие 3. Пусть L — произвольное выражение порядка r с постоянными коэффициентами. Уравнение $Lu = f$ всегда разрешимо внутри G. Точнее это означает следующее: для любого $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^s(G)$ найдется $u \in W_2^s(G)$ $(s \in (-\infty, \infty))$ такое, что будет выполняться соотношение

$$(u, L^+v)_0 = (f, v)_0 \quad (v \in C_0^\infty(G);\ s < r), \qquad Lu = f \ (s \geqslant r). \tag{1.19}$$

Действительно, согласно (1.18) справедливо неравенство $\| L^+v \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-s}(G)} \geqslant C \| v \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-s}(G)}$ $(v \in C_0^\infty(G))$. Подобно сказанному на стр. 107, рассмотрим $(f, v)_0 = l(L^+v)$ $(v \in C_0^\infty(G))$, это выражение является непрерывным функционалом над L^+v, меняющимся в метрике $\overset{\circ}{W}{}_2^{-s}(G)$: $| l(L^+v) | = | (f, v)_0 | \leqslant \| f \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^s(G)} \times \| v \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-s}(G)} \leqslant \frac{1}{C} \| f \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^s(G)} \| L^+v \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-s}(G)}$. При помощи теоремы Хана—Банаха получаем первое из соотношений (1.19) при любом s. Для $s \geqslant r$ из него вытекает второе равенство в (1.19).

Следствие 4. Для выражений с постоянными коэффициентами всегда существуют разрешимые расширения.

Это вытекает из теоремы 2.1, гл. II, и (1.17).

Последние два следствия показывают, что уравнение $Lu = f$ для выражения с постоянными коэффициентами всегда разрешимо. В случае переменных коэффициентов этого, вообще говоря, уже не будет.

Из (1.17) получаем, что $\| Lu \|_0 \geqslant C \| u \|_0$ $(C > 0;\ u \in C_0^\infty(G))$. Заменяя здесь u на $D^\alpha u$ при $|\alpha| \leqslant \sigma$ найдем: $\| Lu \|_\sigma \geqslant C \| u \|_\sigma$ $(C > 0;\ u \in C_0^\infty(G);\ \sigma = 0, 1, \ldots)$. Такое же неравенство можно написать и для L^+. Отсюда и из сказанного в п. 1, § 4, гл. III, вытекает

Следствие 5. Для выражения с постоянными коэффициентами всегда существует фундаментальное решение

$$e_\xi \in W_2^{-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}(G) \quad (\xi \in G).$$

Подобное же утверждение вытекает и непосредственно из следствия 3. Мы не будем заниматься аналитическими представлениями найденного e_ξ. В связи с этим см. Г. Е. Шилов [1].

2. Структура области определения минимального оператора. Рассмотрим минимальный оператор Λ, построенный по выражению L порядка r с постоянными коэффициентами. Справедлива следующая теорема, показывающая, что функции из $\mathfrak{D}(\Lambda)$ характеризуются своими локальными свойствами.

Теорема 1.2. *Пусть $u\in\mathfrak{D}(\Lambda)$, $\chi\in C^r(G\cup\Gamma)$, тогда $\chi(x)u(x)\in\mathfrak{D}(\Lambda)$. В частности (при χ, аннулирующихся вне окрестности), это обозначает, что включение $u\in\mathfrak{D}(\Lambda)$ влечет и «локальное включение» и в $\mathfrak{D}(\Lambda)$. Наоборот, пусть $u\in L_2(G)$ такова, что для каждой точки из $G\cup\Gamma$ существует окрестность U и функция $v_U\in\mathfrak{D}(\Lambda)$ такие, что на $U\cap G$ $u(x)=v_U(x)$. Тогда $u\in\mathfrak{D}(\Lambda)$.*

Доказательство. Установим первое утверждение. Пусть $u\in\mathfrak{D}(\Lambda)$; $u_\nu\in C_0^\infty(G)$ такие, что в $L_2(G)$ $u_\nu\to u$ и $Lu_\nu\to\Lambda u$. Благодаря оценке (1.9) при любом α последовательность $L^{(\alpha)}u_\nu$ фундаментальна в $L_2(G)$, но тогда согласно (1.5) $L[\chi u_\nu]=\sum\limits_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha\chi\cdot L^{(\alpha)}u_\nu$ также фундаментальна; кроме того, $\chi u_\nu\to\chi u$. Это показывает, что $\chi u\in\mathfrak{D}(\Lambda)$.

Докажем второе утверждение. Пусть $x_0\in G\cup\Gamma$, U_{x_0} — окрестность U, фигурирующая в условии теоремы и построенная по x_0. Из покрытия $G\cup\Gamma$ окрестностями U_{x_0} выберем конечное покрытие $U_{x_1},\ldots,U_{x_N}$. Пусть $\chi_1,\ldots,\chi_N$ — разложение единицы, построенное по этому покрытию, т. е. $\chi_j\in C^\infty(E_n)$, неотрицательны, аннулируются вне U_{x_j} и таковы, что $\sum\limits_{j=1}^N\chi_j(x)=1$ $(x\in G)$. Имеем $u=\sum\limits_{j=1}^N\chi_ju=\sum\limits_{j=1}^N\chi_jv_{U_{x_j}}$, причем каждое из слагаемых $\chi_jv_{U_{x_j}}\in\mathfrak{D}(\Lambda)$ согласно доказанному выше. Итак, $u\in\mathfrak{D}(\Lambda)$, что и требовалось. Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Пусть $Л$ — максимальный оператор, построенный по нашему выражению L. Если $u\in\mathfrak{D}(Л)$ аннулируется в полоске вблизи границы Γ, то $u\in\mathfrak{D}(\Lambda)$.*

Доказательство. Пусть $\omega_\varepsilon(y)\in C_0^\infty(E_n)$ $(\varepsilon>0)$ — функция, определенная на стр. 40. Обозначим $u_\varepsilon(x)=(S_\varepsilon u)(x)=(\omega_\varepsilon * u)(x)$; как известно, $u_\varepsilon\to u$ в $L_2(G)$ при $\varepsilon\to0$. Ясно, что при ε достаточно малом $u_\varepsilon\in C_0^\infty(G)$, поэтому теорема будет доказана, если показать, что последовательность Lu_ε фундаментальна в $L_2(G)$. При $x\in G$ и малом ε $\omega_\varepsilon(y-x)$ по y входит в $C_0^\infty(G)$, вспоминая определение максимального оператора, получим

$$(Lu_\varepsilon)(x)=\int\limits_G L_x[\omega_\varepsilon(y-x)]\,u(y)\,dy=\int\limits_G\overline{L_y^+[\omega_\varepsilon(y-x)]}\,u(y)\,dy=$$

$$=\int\limits_G\omega_\varepsilon(y-x)(Лu)(y)\,dy=((Лu)*\omega_\varepsilon)(x).$$

Отсюда вытекает, что $Lu_\varepsilon\to Лu$ в $L_2(G)$, а это и требовалось.

Теорема доказана.

При исследовании структуры области определения минимального оператора возникает естественный вопрос — какие производные можно брать от функций из $\mathfrak{D}(\Lambda)$? Ответ на него по существу был дан теоремой 1.1: если дифференциальное выражение M с постоянными коэффициентами таково, что выполняется неравенство (1.8), то справедлива оценка (1.6), откуда следует, что

$$\mathfrak{D}(\Lambda) \subset \mathfrak{D}(\mathrm{M}) \tag{1.20}$$

(М — минимальный оператор, построенный по M), т. е. выражение M в понятном смысле можно применять к функциям из $\mathfrak{D}(\Lambda)$.

Наоборот, если справедливо включение (1.20), то имеет место неравенство (1.7). Для доказательства воспользуемся следующим рассуждением, аналогичным проведенному на стр. 211. Рассмотрим множество $\mathfrak{D}(\Lambda)$, снабженное нормой $\|u\|_1 = \|\Lambda u\|_0$; так как справедливо неравенство $\|\Lambda u\|_0 \geqslant C\|u\|_0$ $(u \in \mathfrak{D}(\Lambda))$ (вытекающее из неравенства $\|Lu\|_0 \geqslant C\|u\|_0$, $u \in C_0^\infty(G)$), то $\mathfrak{D}(\Lambda)$ в этой норме является полным пространством H. Соответствие $u \to Mu$, как нетрудно убедиться, будет замкнутым линейным оператором из H в $L_2(G)$, определенным на всем H, но тогда, как известно, оно непрерывно, т. е. $\|Mu\|_0 \leqslant C_1\|u\|_1 = C_1\|\Lambda u\|_0 (u \in \mathfrak{D}(\Lambda))$. Отсюда вытекает (1.6), а значит, в силу теоремы 1.1, и (1.7). Резюмируя, мы получим следующее утверждение: *для того чтобы к функциям из $\mathfrak{D}(\Lambda)$ можно было применять выражение M с постоянными коэффициентами (т. е. чтобы имело место включение* (1.20)), *необходимо и достаточно выполнение неравенства* (1.7).

В некоторых случаях $\mathrm{M}u$ при любой $u \in \mathfrak{D}(\Lambda)$ будет непрерывной функцией на $G \cup \Gamma$ (естественно, после исправления на множестве меры 0). Выясним, при каких условиях на L и M это будет иметь место.

Теорема 1.4. *Если*

$$\int_{E_n} \frac{|M(\xi)|^2}{\sum_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi)|^2} d\xi < \infty, \tag{1.21}$$

то $\mathfrak{D}(\Lambda) \subset \mathfrak{D}(\mathrm{M})$ и $\mathrm{M}u$ для каждой $u \in \mathfrak{D}(\Lambda)$ непрерывна на $G \cup \Gamma$ и аннулируется на Γ. Наоборот, если для каждого $u \in \mathfrak{D}(\Lambda)$ функция $\mathrm{M}u$ определена (т. е. $\mathfrak{D}(\mathrm{M}) \supset \mathfrak{D}(\Lambda)$) и непрерывна в фиксированной окрестности некоторой точки из $\bar{G}$, то справедливо (1.21).

Доказательство. Покажем, что выполнение условия (1.21) влечет непрерывность $\mathrm{M}u$ и ее аннуляцию на Γ. Для этого достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$\max_{x \in G \cup \Gamma} |(Mu)(x)| \leqslant C \|Lu\|_0 \quad (u \in C_0^\infty(G)). \tag{1.22}$$

Используя преобразование Фурье и затем оценку (1.9), найдем

$$|(Mu)(x)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{E_n} M(\xi) \tilde{u}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi \right|^2 \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \frac{|M(\xi)|^2}{\sum_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi)|^2} d\xi \times$$

$$\times \int_{E_n} \sum_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi)|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant C \sum_\alpha \|L^{(\alpha)} u\|_0^2 \leqslant C_1 \|Lu\|_0^2 \quad (u \in C_0^\infty(G)),$$

что и требовалось.

Вторая часть теоремы доказывается более сложно. Без потери общности можно предположить, что $0 \in G$ и Mu непрерывна в замыкании окрестности $U \ni 0$; из условий теоремы вытекает справедливость оценки

$$|(Mu)(0)| \leqslant C \| Lu \|_0 \quad (u \in C_0^\infty(G)). \tag{1.23}$$

Действительно, рассмотрим пространство H — линейное множество $\mathfrak{D}(\Lambda)$, снабженное нормой $\|u\|_1 = \|\Lambda u\|_0$; как уже отмечалось, оно полное. Соответствие $u \to (Mu)(x)$ $(u \in H)$ определяет линейный оператор, действующий из всего H в пространство $C(\overline{U})$. Этот оператор замкнут. В самом деле, пусть в H $u_\nu \to v$ и в $C(\overline{U})$ $Mu_\nu \to f$. В нашем случае неравенство (1.6), а значит и неравенство $\| \Lambda u \|_0 \geqslant C \| Mu \|_0$ $(u \in \mathfrak{D}(\Lambda))$, справедливы (так как выполнено (1.20)). Поэтому в $L_2(G)$ $Mu_\nu \to Mv$. Так как в $C(\overline{U})$ $Mu_\nu \to f$, то $Mv = f$. Замкнутость нашего оператора установлена; так как он определен во всем H, то он непрерывен. Отсюда вытекает (1.23).

Пусть $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(E_n)$ произвольна, рассмотрим функцию

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{E_n} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\sum_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi)|^2}} e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi$$

и положим $u = \chi v$, где $\chi(x) \in C_0^\infty(G)$ и равна 1 в окрестности 0. Очевидно $u \in C_0^\infty(G)$ и поэтому ее можно подставить в (1.23). Замечая, что $(Mu)(0) = (Mv)(0)$ и $Lu = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \chi \cdot L^{(\alpha)} v$, найдем

$$\left| \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{E_n} \frac{M(\xi)}{\sqrt{\sum_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi)^2|}} \varphi(\xi)\, d\xi \right|^2 = |(Mv)(0)|^2 = |(Mu)(0)|^2 \leqslant C^2 \| Lu \|_0^2 =$$

$$= C^2 \left\| \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \chi \cdot L^{(\alpha)} v \right\|_0^2 \leqslant C_1 \sum_\alpha \| L^{(\alpha)} v \|_0^2 =$$

$$= C_1 \sum_\alpha \left\| \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{E_n} \frac{L^{(\alpha)}(\xi)\varphi(\xi)}{\sqrt{\sum_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi)|^2}} e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi \right\|_0^2 = C_1 \int_{E_n} |\varphi(\xi)|^2 d\xi.$$

Так как в полученном неравенстве φ пробегает плотное множество в $L_2(E_n)$, то из него следует суммируемость с квадратом $M(\xi) \Big/ \sqrt{\sum_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi)|^2}$, т. е. (1.21). Теорема доказана.

Таким образом, если $(\sum_\alpha |L_{(\alpha)}(\xi)|^2)^{-1} \in L_2(E_n)$, то функции из $\mathfrak{D}(\Lambda)$ непрерывны и поэтому их можно рассматривать на многообразиях низших размерностей, расположенных в $G \cup \Gamma$. Последний вопрос естественно ставить независимо: пусть имеется некоторое выражение, изучаются условия на многообразия, при которых на них существуют значения функций из $\mathfrak{D}(\Lambda)$ (и даже их производных). На относящихся сюда результатах мы останавливаться не будем.

3. **Область определения максимального оператора.** Справедлив следующий важный факт.

Теорема 1.5. *Для выражения L с постоянными коэффициентами максимальный оператор Л совпадает с замыканием в $L_2(G)$ оператора, определяемого соответствием $u \to Lu$ $(u \in C^\infty (G \cup \Gamma))$*.*

Доказательство, как и в случае сильно эллиптических выражений, основывается на лемме 2.2, гл. II. Чтобы ее применить, достаточно установить следующее: пусть $u \in L_2(E_n)$ таково, что в смысле обобщенных функций $Lu \in L_2(E_n)$ (т. е. существует $h \in L_2(E_n)$, для которого $(u, L^+ v)_{L_2(E_n)} = (h, v)_{L_2(E_n)}$ $(v \in C_0^\infty(E_n))$). Если u аннулируется вне G, то сужение u на G входит в $\mathfrak{D}(\Lambda)$. Для доказательства покроем $G \cup \Gamma$ конечным числом столь мелких окрестностей $U_1, \ldots, U_N$, чтобы для каждой U_j существовала последовательность таких сдвигов на векторы $\varrho_\nu^{(j)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots;$ $|\varrho_\nu^{(j)}| \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0)$, что каждый сдвиг переводит множество $U_j \cap G$ строго внутрь G $(\overline{(U_j \cap G) + \varrho_\nu^{(j)}} \subset G)$. По системе $U_1, \ldots, U_N$ построим разложение единицы $\chi_1, \ldots, \chi_N: \chi_j \in C_0^\infty(U_j)$, $\sum_{j=1}^N \chi_j(x) = 1$ в окрестности $G \cup \Gamma$. Покажем, что

$$u^{(j)}(x) = \chi_j(x)\, u(x) \in \mathfrak{D}(Л) \quad (j = 1, \ldots, N). \tag{1.24}$$

В самом деле, пусть G' — ограниченная область, содержащая G строго внутри себя. Из того, что $Lu \in L_2(E_n)$, следует включение $u \in \mathfrak{D}(Л')$, где $Л'$ — максимальный оператор, построенный по L и G'. Применяя теорему 1.3, заключаем, что $u \in \mathfrak{D}(\Lambda')$, где Λ' — соответствующий $Л'$ минимальный оператор. Используя теорему 1.2, найдем, что $\chi_j u \in \mathfrak{D}(\Lambda') \subseteq \mathfrak{D}(Л')$. Но если некоторое $h \in \mathfrak{D}(Л')$, то его сужение на G, очевидно, входит в $\mathfrak{D}(Л)$. Поэтому включение $\chi_j u \in \mathfrak{D}(Л')$ влечет (1.24). Рассмотрим на G функции $v_\nu^{(j)}(x) = u^{(j)}(x - \varrho_\nu^{(j)})$ $(x \in E_n)$. Легко видеть, что $v_\nu^{(j)} \in \mathfrak{D}(Л)$ и $(Л v_\nu^{(j)})(x) = (Л u^{(j)})(x - \varrho_\nu^{(j)})$; при $\nu \to \infty$ в $L_2(G)$ $v_\nu^{(j)} \to u^{(j)}$, $Л v_\nu^{(j)} \to Л u^{(j)}$ Вместе с тем каждая $v_\nu^{(j)}$ аннулируется в полоске вблизи Γ и поэтому согласно теореме 1.3 входит в $\mathfrak{D}(\Lambda)$. Таким образом, последние два предельных перехода обозначают, что $u^{(j)} \in \mathfrak{D}(\Lambda)$, а значит и $u = \sum_{j=1}^N u^{(j)} \in \mathfrak{D}(\Lambda)$. Утверждение, а вместе с ним и теорема доказаны.

4. **Полная непрерывность оператора, обратного к минимальному.** Пусть L и M — выражения с постоянными коэффициентами; Λ и M — соответствующие минимальные операторы. Предположим, что $\mathfrak{D}(\mathrm{M}) \supseteq \mathfrak{D}(\Lambda)$ и выясним, при каких условиях оператор $\mathrm{M}\Lambda^{-1}$ вполне непрерывен — иными словами, когда вполне непрерывно отображение в $L_2(G)$

$$Lu \to Mu \quad (u \in C_0^\infty(G)). \tag{1.25}$$

---

* Граница области G должна быть настолько регулярной, чтобы выполнялось описанное ниже условие со сдвигами на $\varrho_\nu^{(j)}$.

Согласно (1.17) для выражения N с постоянными коэффициентами нормы $\|Nu\|_0$ и $\|u\|_{+,N}=\left(\sum_\alpha \|N^{(\alpha)}u\|_0^2\right)^{\frac{1}{2}}$ на $C_0^\infty(G)'$ эквивалентны, поэтому полная непрерывность отображения (1.25) равносильна полной непрерывности операторов вложения из пространства с нормой $\|u\|_{+,L}$ в пространство с нормой $\|u\|_{+,M}$ $(u\in C_0^\infty(G))$.

Теорема 1.6. *Для того чтобы отображение* (1.25) *было вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы для вещественных* ξ

$$\frac{\sum\limits_\alpha |M^{(\alpha)}(\xi)|^2}{\sum\limits_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi)|^2} \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.26}$$

Доказательство. Установим сперва достаточность: если (1.26) выполнено, то из последовательности функций $u_\nu\in C_0^\infty(G)$ таких, что $\|Lu_\nu\|_0\leqslant 1$, можно выбрать подпоследовательность $u_{\nu'}$, для которой $Mu_{\nu'}$ будет сходящейся в $L_2(G)$. В силу равенства Парсеваля достаточно устанавливать предкомпактность в $L_2(E_n)$ последовательности $\widetilde{(Mu_\nu)}(\xi)=M(\xi)\tilde{u}_\nu(\xi)$. Так как эти функции являются преобразованиями Фурье функций Mu_ν, аннулирующихся вне компакта и равномерно ограниченных в норме $L_2(G)$ ($\|Mu\|_0\leqslant C\|Lu\|_0$ $(u\in C_0^\infty(G))$ благодаря (1.26) и теореме 1.1), то они равномерно ограничены, равностепенно непрерывны и равны 0 на ∞. Применяя теорему Арцела, выберем подпоследовательность $\widetilde{(Mu_{\nu'})}(\xi)$, сходящуюся равномерно по $\xi\in E_n$.

Для завершения доказательства нам осталось показать, что $\widetilde{Mu_{\nu'}}$ фундаментальна и в норме $L_2(E_n)$. Пусть $\varepsilon>0$ задано, согласно (1.26) найдем такое $R>0$, что при $|\xi|>R$ $|M(\xi)|^2\leqslant\sum\limits_\alpha|M^{(\alpha)}(\xi)|^2<\varepsilon\sum\limits_\alpha|L^{(\alpha)}(\xi)|^2$. При помощи этого неравенства и (1.9) получим

$$\int\limits_{E_n}|\widetilde{Mu_{\nu'}}-\widetilde{Mu_{\mu'}}|^2d\xi=\int\limits_{|\xi|\leqslant R}|\widetilde{Mu_{\nu'}}-\widetilde{Mu_{\mu'}}|^2\,d\xi+\int\limits_{|\xi|>R}|M(\xi)|^2\,|\tilde{u}_{\nu'}-\tilde{u}_{\mu'}|^2d\xi<$$

$$<\int\limits_{|\xi|\leqslant R}\ldots+\varepsilon\int\limits_{E_n}\sum_\alpha|L^{(\alpha)}(\xi)|^2\,|\tilde{u}_{\nu'}-\tilde{u}_{\mu'}|^2d\xi=\int\limits_{|\xi|\leqslant R}\ldots+$$

$$+\varepsilon\sum_\alpha\|L^{(\alpha)}(u_{\nu'}-u_{\mu'})\|_0^2\leqslant\int\limits_{|\xi|\leqslant R}\ldots+\varepsilon C_1\|L(u_{\nu'}-u_{\mu'})\|_0^2\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{|\xi|\leqslant R}|\widetilde{Mu_{\nu'}}-\widetilde{Mu_{\mu'}}|^2d\xi+4\varepsilon C_1,$$

откуда и следует требуемая фундаментальность.

Докажем необходимость условия (1.26). Достаточно убедиться, что если последовательность $\xi_\nu\to\infty$ такова, что частное в (1.26) имеет предел (конечный или бесконечный), то этот предел равен нулю. Выбирая, если понадобится, из ξ_ν подпоследовательность, можем считать, что $\xi_\nu - \xi_\mu \to \infty$ при $\nu, \mu \to \infty$ $(\nu \neq \mu)$.

Пусть $\psi \in C_0^\infty(G)$ такова, что ее преобразование Фурье всюду отлично от нуля. Рассмотрим последовательность функций

$$u_\nu(x) = \psi(x)\frac{e^{i\langle x,\xi_\nu\rangle}}{\sqrt{\sum\limits_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi_\nu)|^2}} \in C_0^\infty(G),$$

согласно формуле Лейбница (1.5)

$$(Lu_\nu)(x) = \frac{e^{i\langle x,\xi_\nu\rangle}}{\sqrt{\sum\limits_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi_\nu)|^2}} \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha\psi\cdot L^{(\alpha)}(\xi_\nu), \tag{1.27}$$

и поэтому $\| Lu_\nu \|_0 \leqslant C$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, благодаря полной непрерывности отображения (1.25) некоторая подпоследовательность $Mu_{\nu'}$ сходится в $L_2(G)$. Пользуясь равенством, аналогичным (1.27), получим при $\nu', \mu' \to \infty$

$$\| Mu_{\nu'} \|_0^2 + \| Mu_{\mu'} \|_0^2 - 2\mathrm{Re}\,(Mu_{\nu'}, Mu_{\mu'})_0 = \| Mu_{\nu'} - Mu_{\mu'} \|_0^2 \to 0,$$

$$2\mathrm{Re}\,(Mu_{\nu'}, Mu_{\mu'})_0 = 2\mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha,\beta}\frac{M^{(\alpha)}(\xi_{\nu'})}{\sqrt{\sum\limits_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi_{\nu'})|^2}} \times\right.$$

$$\left.\times\frac{\overline{M^{(\beta)}(\xi_{\mu'})}}{\sqrt{\sum\limits_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi_{\mu'})|^2}}\frac{1}{\alpha!\beta!}\int\limits_G \partial^\alpha\psi\cdot\overline{\partial^\beta\psi}\cdot e^{i\langle x,\xi_{\nu'}-\xi_{\mu'}\rangle}\,dx\right\}.$$

Последний интеграл при $\nu', \mu' \to \infty$ стремится к нулю как преобразование Фурье суммируемой функции; множители перед ним ограничены в силу оценки (1.7), которая согласно теореме 1.1 заведомо имеет место — ведь отображение (1.25) не только непрерывно, а даже вполне непрерывно. Поэтому $2\mathrm{Re}\,(Mu_{\nu'}, Mu_{\mu'})_0 \to 0$ и, следовательно, $\|Mu_{\nu'}\|_0 \to 0$. Вводя $\psi_{\alpha\beta}$ так же, как и на стр. 275 получим

$$\| Mu_{\nu'} \|_0^2 = \frac{1}{\sum\limits_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi_{\nu'})|^2}\sum_{\alpha,\beta} M^{\alpha}(\xi_{\nu'})\,\overline{M^{(\beta)}(\xi_{\nu'})}\,\psi_{\alpha\beta}. \tag{1.28}$$

Как было установлено на стр. 275, форма с коэффициентами $\psi_{\alpha\beta}$ строго положительно определенная, следовательно числитель в (1.28) не меньше $\varepsilon \sum\limits_{\alpha,\beta} |M^{(\alpha)}(\xi_{\nu'})|^2$ $(\varepsilon > 0)$. Итак,

$$\frac{\sum\limits_{\alpha} | M^{(\alpha)} (\xi_{\nu'}) |^2}{\sum\limits_{\alpha} | L^{(\alpha)}(\xi_{\nu'}) |^2} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \| Mu_{\nu'} \|_0^2 \underset{\nu' \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

что и требовалось. Теорема доказана.

В частности, из этой теоремы получаем важное для рассмотрений типа п. 4, § 2, гл. II, следствие.

Следствие. Для того чтобы оператор Λ^{-1} был вполне непрерывным (или для того чтобы вполне непрерывным был оператор вложения пространства $C_0^\infty(G)$ с нормой $\| u \|_{+,L}$ в $L_2(G)$), необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\sum_{\alpha} | L^{(\alpha)} (\xi) |^2 \underset{|\xi| \to \infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{1.29}$$

Постараемся записать проще условие (1.29), с этой целью введем одно общее понятие. Рассмотрим полином $P(\xi)$ вида (1.3) от вещественного вектора $\xi \in E_n$; подпространство $C(P)$ векторов $\eta \in E_n$, каждый из которых обладает тем свойством, что для любого вещественного t

$$P(\xi + t\eta) = P(\xi) \quad (\xi \in E_n), \tag{1.30}$$

будем называть подпространством линейности полинома P (поясним, что совокупность всех векторов, удовлетворяющих (1.30) при любых $\xi \in E_n$ и $t \in (-\infty, \infty)$, действительно образует подпространство). Заметим сразу, что если $P = \sum\limits_{k=0}^{r} P_k$ — разложение полинома на однородные части (P_k имеет степень k), то нахождение $C(P)$ сводится немедленно к нахождению $C(P_k)$ $(k = 0, \ldots, r)$, так как справедливо равенство

$$C(P) = \bigcap_{k=0}^{r} C(P_k). \tag{1.31}$$

Докажем (1.31). Включение $\bigcap\limits_{k=0}^{r} C(P_k) \subseteq C(P)$ очевидно; пусть теперь $\eta \in C(P)$, т. е. справедливо (1.30). Заменим в (1.30) ξ и t на $\varepsilon\xi$ и εt, где ε — некоторый скалярный параметр, и приравняем коэффициенты при степенях ε. В результате получим равенства $P_k(\xi + t\eta) = P_k(\xi)$, т. е. $\eta \in C(P_k)$ $(k = 0, \ldots, r)$. Итак, $C(P) \subseteq \bigcap\limits_{k=0}^{r} C(P_k)$. Соотношение (1.31) установлено.

Полином $P(\xi)$ называется полным, если его подпространство линейности состоит только из нуля, т. е. иными словами, если он действительно зависит от всех n переменных.

Теорема 1.7. *Соотношение (1.29) выполняется тогда и только тогда, когда полином $L(\xi)$ полный.*

Доказательство. Предположим, что $L(\xi)$ не полный, тогда найдется вектор $\eta \neq 0$ такой, что $L(\xi + t\eta) = L(\xi)$ для всех $\xi \in E_n$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Дифференцируя это равенство по ξ, получим $L^{(\alpha)}(\xi + t\eta) = L^{(\alpha)}(\xi)$, откуда

$\sum\limits_{\alpha} |L^{(\alpha)}(\xi+t\eta)|^2=\sum\limits_{\alpha}|L^{(\alpha)}(\xi)|^2$. В частности, $\sum\limits_{\alpha} L^{(\alpha)}(t\eta)^2=\sum\limits_{\alpha}|L^{(\alpha)}(0)|^2\not\to\infty$ при $|t|\to\infty$. Итак, из (1.29) следует полнота $L(\xi)$.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Сперва установим следующее: пусть $P(\xi)$ — однородный полином степени r такой, что для некоторого $\eta\in E_n$ все $P^{(\alpha)}(\eta)=0$ при $|\alpha|=r-1$. Утверждается, что $\eta\in C(P)$. Для доказательства воспользуемся индукцией по степени полиномов. При $r=1$ утверждение очевидно, предположим, что оно справедливо для степеней $\leqslant r-1$. Пусть $P(\xi)$ степени r, тогда $\frac{\partial}{\partial\xi_k}P$ степени $r-1$ и таков, что $\left(D^\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_k}P\right)(\eta)=0$ для $|\alpha|=r-2$. Согласно предположению индукции $\left(\frac{\partial}{\partial\xi_k}P\right)(\xi+t\eta)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_k}P\right)(\xi)$ ($\xi\in E_n$; $t\in(-\infty,\infty)$; $k=1, 2, \ldots$). Следовательно $P(\xi+t\eta)-P(\xi)$ от ξ не зависит и поэтому имеет вид

$$P(\xi+t\eta)-P(\xi)=P(t\eta)=t^rP(\eta). \tag{1.32}$$

Полагая здесь $t=1$ и $\xi=\eta$, найдем: $2^rP(\eta)=P(2\eta)=2P(\eta)$. Таким образом, $P(\eta)=0$ и из (1.32) следует, что $P(\xi+t\eta)=P(\xi)$, т. е. $\eta\in C(P)$. Утверждение доказано.

Продолжим доказательство теоремы. Введем одно полезное определение. Будем говорить, что некоторое множество из E_n ограничено по mod H, где H — подпространство E_n, если проекция этого множества на ортогональное дополнение к H ограничена. Легко понять, что если $H=\bigcap\limits_{k=1}^{m}H_k$ где H_k — подпространства E_n, то ограниченность множества по mod H эквивалентна его ограниченностям по mod H_k ($k=1, \ldots, m$).

Вместо утверждения теоремы докажем следующий общий факт.

Лемма 1.2. *Пусть $P(\xi)$ — произвольный полином. Множество π_t тех $\xi\in E_n$, которые удовлетворяют неравенству*

$$\sum_{\alpha}|P^{(\alpha)}(\xi)|^2\leqslant t, \tag{1.33}$$

где t — фиксированная константа, всегда ограничено по mod $C(P)$.

Соотношение (1.29) для полных полиномов отсюда немедленно следует, так как теперь $C(P)=0$ и π_t просто ограничено, т. е. нет таких точек $\xi=\xi_\nu\to\infty$, для которых сумма в (1.29) была бы ограниченной по ν.

Доказательство ведется индукцией по степени полиномов. Лемма при $r=1$ очевидна; пусть она справедлива для степеней $\leqslant r$. Рассмотрим полином P степени r; благодаря (1.31) достаточно доказывать ограниченность π_t по mod $C(P_k)$ ($k=0, \ldots, r$). Прежде всего убедимся в его ограниченности по mod $C(P_r)$. Она будет следовать из ограниченности по mod $C(P_r)$ более широкого множества — совокупности всех точек $\xi\in E_n$, удовлетворяющих оценке $\sum\limits_{|\alpha|=r-1}|P^{(\alpha)}(\xi)|^2\leqslant t$. Но $P^{(\alpha)}(\xi)$ и $P_r^{(\alpha)}(\xi)$ ($|\alpha|=r-1$) отличаются друг от друга только на постоянное слагаемое, поэтому ограниченность по mod $C(P_r)$ последнего множества эквивалентна такой же ограниченности множества $\xi\in E_n$, для которых

$$\sum_{|\alpha|=r-1} |P_r^{(\alpha)}(\xi)|^2 \leqslant t. \tag{1.34}$$

Выражения $P_r^{(\alpha)}(\xi)$ ($|\alpha| = r-1$) — линейные формы на E_n. Согласно утверждению, доказанному перед леммой, отвечающие им гиперплоскости имеют общее пересечение лишь в $C(P_r)$, поэтому ξ, которые удовлетворяют (1.34), могут уходить на ∞ только вдоль $C(P_r)$. Иными словами, множество ξ, удовлетворяющих (1.34), ограничено по $\mathrm{mod}\, C(P_r)$, а это влечет такую же ограниченность и π_t.

Рассмотрим полином $R(\xi) = P(\xi) - P_r(\xi) = \sum_{k=0}^{r-1} P_k(\xi)$. Он имеет степень $r-1$, P_k — его группы однородных слагаемых. Поэтому, согласно предположению индукции, совокупность $\varrho_{t'}$ векторов ξ, для которых $\sum_\alpha |R^{(\alpha)}(\xi)|^2 \leqslant t'$, ограничена по $\mathrm{mod}\, C(P_k)$ ($k = 0, \ldots, r-1$). Если нам удастся показать, что $\varrho_{t'}$ при достаточно большом t' будет охватывать π_t, то и π_t окажется ограниченным и утверждение будет доказано. Итак, осталось показать, что на π_t $\sum_\alpha |R^{(\alpha)}(\xi)|^2$ ограничена. Имеем

$$\left(\sum_\alpha |R^{(\alpha)}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\xi) - P_r^{(\alpha)}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_\alpha |P_r^{(\alpha)}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.35}$$

Предпоследняя сумма ограничена на π_t, последняя также ограничена: так как π_t ограничено по $\mathrm{mod}\, C(P_r)$, то точки этого множества могут уходить на ∞ лишь вдоль $C(P_r)$; в этом же направлении как P_r, так и все $P_r^{(\alpha)}$ не меняются согласно определению $C(P_r)$. Таким образом, выражение (1.35) ограничено по π_t. Лемма, а вместе с ней и теорема 1.7 полностью доказаны.

Замечание. Из доказательства теоремы легко заметить, что для полного полинома в действительности выполняется более сильное, чем (1.29), соотношение: существует такое $\gamma > 0$, что

$$\sum_\alpha |L^{(\alpha)}(\xi)|^2 \geqslant C(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^\gamma \quad (C > 0;\ \xi \in E_n). \tag{1.36}$$

§ 2. Задача типа Дирихле для дифференциальных выражений второго порядка с постоянными коэффициентами

Для таких выражений согласно общим результатам § 1 справедливо энергетическое неравенство на финитных функциях и поэтому существуют разрешимые расширения. Сейчас мы покажем, что возможно получить оба неравенства (2.12), гл. II, для условия $u|_\Gamma = 0$ и специально подобранных областей G. Пусть их выводы подсказывает доказательство оценки (1.9): проведем преобразования, аналогичные описанным на стр. 274, считая, что u не финитна и дописывая всюду интегралы по Γ, где они появляются. Для того чтобы получить неравенство на большем, чем финитные, классе функций, будем выбирать так Γ и накладывать такие граничные условия на u, чтобы все эти интегралы аннулировались или стали дефинитными знака, не мешающего проведению оценки. В результате получим искомые условия, зависящие как от L, так и от Γ. Подобную процедуру обычно нужно модернизировать для каждого отдельного класса уравнений.

1. **Методика получения энергетических неравенств.** Установим некоторые тождества. Ниже $A(x)$ вещественная, а $u(x)$ — комплексная достаточно гладкие функции; интегрируя по частям, поменяем местами u и $\bar{u}$, причем интегрирование будем проводить так, чтобы избежать появления третьих производных:

$$\int_G AD_j^2u\cdot D_k\bar{u}dx = -\int_G D_ju\cdot D_k\bar{u}\cdot D_jAdx - \int_G D_ju\cdot D_jD_k\bar{u}\cdot Adx +$$

$$+\int_\Gamma D_ju\cdot D_k\bar{u}\cdot A\nu_jdx = -\int_G D_ju\cdot D_k\bar{u}\cdot D_jAdx + \int_G |D_ju|^2D_kAdx +$$

$$+\int_G D_kD_ju\cdot D_j\bar{u}\cdot Adx - \int_\Gamma |D_ju|^2A\nu_kdx + \int_\Gamma D_ju\cdot D_k\bar{u}\cdot A\nu_jdx =$$

$$= -2\mathrm{Re}\int_G D_ju\cdot D_k\bar{u}\cdot D_jAdx + \int_G |D_ju|^2D_kAdx - \int_G D_ku\cdot D_j^2\bar{u}\cdot Adx -$$

$$-\int_\Gamma |D_ju|^2A\nu_kdx + 2\mathrm{Re}\int_\Gamma D_ju\cdot D_k\bar{u}\cdot A\nu_jdx.$$

Отсюда и из аналогичных, но более простых, соотношений получим

$$2\mathrm{Re}\int_G AD_j^2u\cdot D_k\bar{u}dx = \int_G |D_ju|^2D_kAdx - 2\mathrm{Re}\int_G D_ju\cdot D_k\bar{u}\cdot D_jAdx -$$

$$-\int_\Gamma |D_ju|^2A\nu_kdx + 2\mathrm{Re}\int_\Gamma D_ju\cdot D_k\bar{u}\cdot A\nu_jdx \quad (j,\ k = 1, \ldots, n); \tag{2.1}$$

$$2\mathrm{Re}\int_G AD_j^2u\cdot\bar{u}dx = -2\int_G A|D_ju|^2dx + \int_G |u|^2D_j^2Adx +$$

$$+2\mathrm{Re}\int_\Gamma AD_ju\cdot\bar{u}\nu_jdx - \int_\Gamma |u|^2D_jA\cdot\nu_jdx \quad (j = 1, \ldots, n); \tag{2.2}$$

$$2\mathrm{Re}\int_G AD_ju\cdot\bar{u}dx = -\int_G |u|^2D_jAdx + \int_\Gamma |u|^2A\nu_jdx \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{2.3}$$

Ниже мы будем пользоваться равенствами (2.1) — (2.3) в случае, когда $u|_\Gamma = 0$. Для такой u интегралы по Γ в (2.2) — (2.3) вообще исчезнут, а сумма интегралов по Г в (2.1) примет вид

$$\int_{\Gamma} |N_u|^2 A\nu_i^2\nu_k dx, \tag{2.4}$$

где N_u — нормирующий множитель, такой что $(D_j u)(x) = N_u(x)\nu_j(x)$ $(x \in \Gamma)$.

Рассмотрим общее дифференциальное выражение L второго порядка с вещественными постоянными коэффициентами; граничное условие: $u|_{\Gamma} = 0$. Поворотом системы координат L можно привести к виду

$$Lu = \sum_{j=1}^{n} c_j D_j^2 u + \sum_{j=1}^{n} b_j D_j u + bu. \tag{2.5}$$

Пусть $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ и $A(x)$ — вещественные достаточно гладкие функции, $u|_{\Gamma} = 0$. Пользуясь равенствами (2.1) — (2.4), легко найдем

$$2\operatorname{Re}\int_G Lu\left(\sum_{k=1}^{n} A_k D_k \bar{u} + A\bar{u}\right)dx = \int_G \left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(\sum_{k=1}^{n} D_k A_k - 2D_j A_j - 2A\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2b_j A_j\right]|D_j u|^2 + \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}(-c_j D_j A_k - c_k D_k A_j + b_j A_k + b_k A_j) D_j u \cdot D_k \bar{u}\right\} dx +$$

$$+ \int_G \left\{\sum_{j=1}^{n}(c_j D_j^2 A - b_j D_j A - bD_j A_j) + 2bA\right\}|u|^2 dx +$$

$$+ \int_{\Gamma} |N_u|^2 \left(\sum_{k=1}^{n} A_k \nu_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \nu_j^2\right) dx. \tag{2.6}$$

Предположим, что удалось так подобрать функции $A_1, \ldots, A_n$ и A, что при каждом $x \in G \cup \Gamma$ квадратичная форма (относительно ζ)

$$\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(\sum_{k=1}^{n} D_k A_k - 2D_j A_j - 2A\right) + 2b_j A_j\right]|\zeta_j|^2 + \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}(-c_j D_j A_k -$$

$$- c_k D_k A_j + b_j A_k + b_k A_j)\zeta_j \bar{\zeta}_k \tag{2.7}$$

строго положительно определена и выполняются неравенства

$$\sum_{j=1}^{n}(c_j D_j^2 A - b_j D_j A - bD_j A_j) + 2bA \geqslant 0 \quad (x \in G);$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k \nu_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \nu_j^2\right) \geqslant 0 \quad (x \in \Gamma). \tag{2.8}$$

Тогда из (2.6) следует оценка

$$2\mathrm{Re}\int\limits_G Lu\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} A_k D_k \bar{u} + A\bar{u}\right)dx \geqslant C_1\int\limits_G \sum_{j=1}^{n} |D_j u|^2 dx \geqslant C_2 \| u \|_1^2\ (C_1,\ C_2 > 0) \quad (2.9)$$

(напомним, что так как $u|_\Gamma = 0$, то $\int\limits_G \sum\limits_{j=1}^{n} |D_j u|^2 dx$ эквивалентно $\| u \|_1^2$). Оценивая (2.9) слева через $C_3 \|Lu\|_0 \| u \|_1$, придем к неравенству

$$\| Lu \|_0 \geqslant C \| u \|_1 \quad (C > 0;\ u \in \mathring{W}_2^1(G) \cap W_2^2(G)). \qquad (2.10)$$

Итак, если существуют вещественные функции $A_j(x) \in W_2^1(G)$ $(j = 1, \ldots, n)$ и $A(x) \in W_2^2(G)$ такие, что при каждом $x \in G \cup \Gamma$ квадратичная форма (2.7) строго положительно определена и выполняются неравенства (2.8), то верно (2.10).

Возникает следующая задача: имеется выражение (2.5), требуется так подобрать область G, чтобы для нее выполнялось неравенство (2.10). На основании предыдущего ее можно решать следующим образом. Подбираем функции $A_k(x)$ и $A(x)$ так, чтобы форма (2.7) была строго положительно определенной и выполнялось первое из неравенств (2.8). Теперь ищем решения $f(x)$ уравнения $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k(x) D_k f = 0$. На поверхностях $f(x) = h \in (-\infty, \infty)$ второе из соотношений (2.8) переходит в равенство; деформируя должным образом эти поверхности, мы перейдем к достаточно богатому семейству поверхностей, на которых выполняется второе из неравенств (2.8). Если из конечного числа таких поверхностей можно образовать границу некоторой ограниченной области G, то G и будет искомой. Ясно, что такая конструкция, если она приводит к цели, дает целые семейства областей G, в которых справедливы неравенства (2.10).

2. Существование областей, в которых разрешима задача типа Дирихле. Покажем, что для любого выражения вида (2.5) существуют семейства областей, в которых задача $Lu = f \in L_2(G)$, $u|_\Gamma = 0$, имеет слабое решение $u \in L_2(G)$ при любой правой части, а сильное решение единственно. Точнее, будет доказана почти корректность граничного условия $u|_\Gamma = 0$ для L в этих областях.

Теорема 2.1. *Пусть L — произвольное дифференциальное выражение с постоянными вещественными коэффициентами вида* (2.5); *предполагается, что все $c_j \neq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Существуют такие ограниченные области $G \subset E_n$ с кусочно гладкой границей Γ, не содержащей кусков характеристик выражения* (2.5), *для которых справедливы энергетические неравенства*

$$\| Lu \|_0 \geqslant C \| u \|_1, \quad \| L^+ v \|_0 \geqslant C \| v \|_1^* \quad (C>0;\ u,\ v \in \mathring{W}_2^1(G) \cap W_2^2(G)). \qquad (2.11)$$

Малые деформации Γ приводят к областям с границами без кусков характеристик, для которых неравенства (2.11) *остаются справедливыми* (*понятие малой деформации будет описано ниже*). *Так как Γ не содержит кусков характеристик, то нулевые условия будут сопряжены сами себе* (*см. теорему 1.1, гл. II*) *и поэтому неравенства* (2.11) *действительно означают почти корректность рассматриваемой задачи.*

Доказательство сводится к конкретному построению требуемых областей G; естественно, что такие области неединственны. Мы счи-

---

* Из этого неравенства следует существование обобщенного решения и при $f \in W_2^{-1}(G)$ (см. теорему 3.3, гл. II).

таем, что p коэффициентов $c_1, \ldots, c_p$ положительны и q коэффициентов $c_{p+1}, \ldots, c_n$ $(p+q=n)$ — отрицательны. Интерес представляет только случай, когда $p, q > 0$, так как в противном случае L эллиптично и утверждение теоремы следует из результатов § 3, гл. III. Без ограничения общности можно считать $c_1 = \ldots = c_p = 1$, $c_{p+1} = \ldots = c_n = -1$. Положим $A_k(x) = -x_k (k = 1, \ldots, p)$, $A_k(x) = x_k (k = p+1, \ldots, n)$, $A(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sign} b - p + q)$; первое из соотношений (2.8), очевидно, выполняется. Имеем

$$c_j\left(\sum_{k=1}^{n} D_kA_k - 2D_jA_j - 2A\right) = \begin{cases} -p+q+2-2A = 2-\operatorname{sign} b > 0 \ (j=1,\ldots,p), \\ p-q+2+2A = 2+\operatorname{sign} b > 0 \ (j=p+1,\ldots,n). \end{cases} \tag{2.12}$$

Располагая G в шаре U достаточно малого радиуса с центром в начале координат, добьемся, что каждая из величин $|b_jA_k(x)|$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ станет достаточно малой. Так как $D_jA_k = 0$ $(j \neq k)$, то, принимая во внимание (2.12), можем выбрать столь малый радиус шара U, чтобы форма (2.7) была строго положительной для $x \in G \cup \Gamma$.

Перейдем к подбору границы области G, обеспечивающему выполнение второго неравенства (2.8); ее мы будем располагать в достаточной близости к началу координат. Уравнение $\sum_{k=1}^{n} A_kD_kf = 0$ приобретает вид: $-x_1D_1f - \ldots - x_pD_pf + x_{p+1}D_{p+1}f + \ldots + x_nD_nf = 0$. Для нахождения его решений составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx_1}{-x_1} = \ldots = \frac{dx_p}{-x_p} = \frac{dx_{p+1}}{x_{p+1}} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n}$. Будем комбинировать эти уравнения так, чтобы в каждом из них в знаменателе был один минус и один плюс, причем составим минимальное количество таких уравнений, требуя лишь, чтобы каждое из переменных $x_1, \ldots, x_n$ попало хотя бы в одно из них (этот процесс, вообще говоря, неединственен). Получим, например, N уравнений вида

$$\frac{dx_1}{-x_1} = \frac{dx_{p+1}}{x_{p+1}}, \quad \frac{dx_2}{-x_2} = \frac{dx_{p+2}}{x_{p+2}}, \ldots \tag{2.13}$$

(если $p \neq q$, то среди уравнений, обозначенных точками, будет повторение переменных). Интегрируя (2.13), найдем, что в качестве f могут быть взяты функции x_1x_{p+1}, x_2x_{p+2}, ... Таким образом, поверхности $f(x) = h$ примут вид $x_1x_{p+1} = h_1$, $x_2x_{p+2} = h_2$ .... Этими поверхностями нельзя ограничить ограниченную область в E_n, мы их деформируем. Рассмотрим, например, в плоскости x_1Ox_{p+1} четыре ветви гипербол вида $x_1x_{p+1} = h_1$ (см. рис. 5) и замкнем их отрезками кривых AA_1, AA_2, BB_1, ... Эти кривые произвольны, важно лишь, что углы между касательными к ним и соответствующими осями по модулю не больше $\frac{\pi}{4}$ и не меньше модулей аналогичных углов для гипербол $x_1x_{p+1} = h_1$, проходящих через рассматриваемые точки (см. рис. 5). В результате получим ограниченную область $\widetilde{G}_1$ в плоскости x_1Ox_{p+1}; рассмотрим цилиндр $G_1 = \widetilde{G}_1 \times E_{n-2}$, где E_{n-2} обозначает пространство размерности $n-2$, натянутое на все координатные оси, за исключением Ox_1 и Ox_{p+1}. Аналогично построим цилиндры $G_2, \ldots, G_N$ и положим $G = \bigcap_{\alpha=1}^{N} G_\alpha$; G является ограниченной областью с границей, состоящей из конечного числа кусков гладких поверхностей. В пояснении нуждается лишь ограниченность G — она следует из того, что для точек G_1 координаты x_1, x_{p+1} ограничены, для точек G_2 — x_2, x_{p+2} ограничены и т. д., причем согласно конструкции мы все координаты переберем.

Выбирая константы h в уравнениях гипербол достаточно малыми по модулю и точки типа A, B, C, D достаточно близкими к O, добьемся, что диаметр G будет достаточно мал и форма (2.7) окажется строго положительной для $x \in G \cup \Gamma$. Покажем, что второе из соотношений (2.8) также выполняется. Пусть $x = x^0$ является внутренней точкой некоторого гладкого куска, расположенного на Γ; будем считать, например, что x^0 лежит на боковой поверхности цилиндра G_1. Если x^0 расположена на $(A_2B_1) \times E_{n-2}$, $(B_2C_1) \times \times E_{n-2}, \ldots$, то согласно построению $\sum_{k=1}^{n} A_k(x^0)\nu_k(x^0) = 0$. Осталось рассмотреть случаи, когда x^0 лежит на $(AA_2)\times E_{n-2}$, $(BB_1)\times E_{n-2}, \ldots$; рассматриваются они аналогично. Для определенности будем считать, что $x^0 \in (CC_1)\times E_{n-2}$; $\tilde{x}^0$ обозначает точку (x_1^0, x_{p+1}^0) плоскости x_1Ox_{p+1}. Орт нормали $\nu(x^0) = \nu$ лежит в ней, поэтому второе неравенство в (2.8) приобретает вид

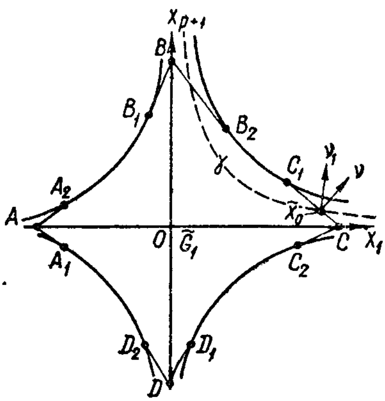


Рис. 5.

$$(-x_1^0\nu_1 + x_{p+1}^0\nu_{p+1})(\nu_1^2 - \nu_{p+1}^2) \geqslant 0. \tag{2.14}$$

Покажем, что оно действительно имеет место. Проведем через $\tilde{x^0}$ гиперболу γ вида $x_1x_{p+1}=h$, пусть ν'—орт нормали к ней (см. рис. 5). Ясно, что $\nu_1 \geqslant \nu_1' > 0$, $\nu_{p+1}' \geqslant \nu_{p+1} > 0$, поэтому $-x_1^0\nu_1 + x_{p+1}^0\nu_{p+1} \leqslant -x_1^0\nu_1' + x_{p+1}^0\nu_{p+1}' = 0$. Вместе с тем $\nu_1^2 - \nu_{p+1}^2 \leqslant 0$, следовательно, неравенство (2.14) справедливо. Итак, (2.8) выполняется и поэтому справедливо первое из неравенств (2.11). Для построенной области G имеет место также и второе неравенство (2.11) — это следует из того, что старшие члены L и L^+ одинаковы.

Из доказательства оценок (2.11) легко усмотреть, что они справедливы и в случае области G', близкой к G. При этом *G' мы называем близкой к G, если ее граница Γ' близка к Γ в смысле равномерной близости функций, задающих поверхность, вместе с первыми их производными. Кроме того, вблизи $n-2$-мерных граней, порождаемых точками типа A, $B, \ldots$, граница Γ' имеет такой же вид, как и Γ.* Для рассмотрения областей G' придется вместо прежних функций $A_k(x)$ воспользоваться функциями $A_k(x)+\varepsilon_k(x)$, где $\varepsilon_k(x)$ достаточно гладкие, аннулирующиеся в окрестностях упомянутых

n — 2-мерных граней. При достаточной малости $|\varepsilon_k(x)|$ и $|D_j\varepsilon_k(x)|$ форма (2.7) останется положительно определенной, а неравенства (2.8) — выполненными и мы придем к прежним оценкам.

Нам осталось заметить, что построенные области G не содержат кусков характеристик выражения L. Теорема доказана.

3. Рассмотрение задачи типа Дирихле посредством разделения переменных*. Установим простые общие факты. Пусть L — формально самосопряженное сильно эллиптическое выражение второго порядка с обычнымн условиями гладкости коэффициентов, рассматриваемое в ограниченной области G, граница которой Γ класса C^2. Согласно лемме 3.9, гл. III, оператор $Au = Lu$, $u \in \mathfrak{D}(A) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \cap W_2^2(G)$ самосопряжен в $L_2(G)$. Этот оператор имеет счетное число собственных функций $\varphi_k(x)$, отвечающих собственным числам $\lambda_k (k = 1, 2, \ldots)$, при этом $\varphi_k \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ $W_2^2(G)$, λ_k вещественны и $\to +\infty$ (см. теорему 3.5, гл. III). Позже мы покажем, что система $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ полна в $L_2(G)$ (см. стр. 421).

Рассмотрим теперь $G = G' \times G'' \subseteq E_n$, где G' (G'') — ограниченная область пространства E_p точек $(x_1, \ldots, x_p)$ (E_q точек $(x_{p+1}, \ldots, x_n)$, $p + q = n$; $p, q \geqslant 1$) с границей класса C^2. В G' и G'' определим соответственно эллиптические выражения L' и L'' указанного выше вида и положим

$$Lu = L'u - L''u + c(x)\, u, \tag{2.15}$$

$c(x)$ — ограниченная вещественная функция. Очевидно, L — формально самосопряжено и ультрагиперболично. Свяжем с L нулевое граничное условие (гр): $u|_\Gamma = 0$ и построим сильный оператор задачи Λ (гр) — замыкание в $L_2(G)$ оператора $u \to Lu$ $(u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \cap W_2^2(G))$.

Теорема 2.2. Оператор Λ (гр) *самосопряжен; таким образом слабый оператор* Л (гр) *совпадает с сильным.*

Доказательство. Известно, что самосопряженность оператора B эквивалентна самосопряженности $B + C$, $\|C\| < \infty$, $C^* = C$ **. Так как оператор $(Cu)(x) = c(x)\, u(x)$ ограничен в $L_2(G)$, то доказательство достаточно провести для случая $c(x) = 0$. Построим по L' и L'' в G' и G'' операторы, аналогичные A; пусть $\varphi'_\mu(x_1, \ldots, x_p)$ и $\varphi''_\nu(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots)$ — полные наборы их ортонормированных собственных функций, отвечающих собственным числам λ'_μ и λ''_ν. Эти функции входят в $W_2^2(G')$ и $W_2^2(G'')$ и аннулируются на границах G' и G''. Система функций $\varphi_{\mu\nu}(x) = \varphi'_\mu(x_1, \ldots, x_p)\varphi''_\nu(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ ортонормирована и полна в $L_2(G)$, поэтому для любой $f \in L_2(G)$ и невещественного z ряд

$$u(x) = \sum_{\mu, \nu = 1}^{\infty} \frac{f_{\mu\nu}}{\lambda'_\mu - \lambda''_\nu - z}\, \varphi_{\mu\nu}(x), \quad f_{\mu\nu} = \int_G f(x)\, \overline{\varphi_{\mu\nu}(x)}\, dx, \tag{2.16}$$

сходится в $L_2(G)$. Легко видеть, что

$$u \in \mathfrak{D}(\Lambda(\text{гр})), \quad \Lambda(\text{гр})\, u - zu = f. \tag{2.17}$$

Действительно, функция $u_{MN}(x)$, отличающаяся от $u(x)$ тем, что в (2.16) суммирование производится до $\mu = M$, $\nu = N$, входит в $\mathfrak{D}(\Lambda(\text{гр}))$ и такова, что

---

* Общую точку зрения на разделение переменных см. в § 4, гл. VI.

** См. следствие из леммы 1.2, гл. VI.

$Lu_{MN} - zu_{MN} = \sum\limits_{\mu, \nu=1}^{M, N} f_{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}(x)$. Переходя здесь к пределу при $M, N \to \infty$, придем к (2.17). Таким образом, уравнение Λ (гр) $u - zu = f$ разрешимо при любом $f \in L_2(G)$, а это и указывает иа самосопряженность Λ (гр). Теорема доказана.

Из (2.16) следует, что уравнение Λ (гр) $u - zu = f$ при любом $f \in L_2(G)$ разрешимо для тех и только тех z, для которых $|\lambda'_\mu - \lambda''_\nu - z| \geqslant \varepsilon$ ($\mu, \nu = 1, 2, \ldots$), при некотором $\varepsilon > 0$; в этом случае $\| u \|_0 \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_0$. Иными словами, *спектр оператора* Λ (гр) (*при* $c(x) \equiv 0$) *состоит из замыкания множества чисел*

$$\lambda'_\mu - \lambda''_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots). \tag{2.18}$$

Вне спектра решение этого уравнения задается формулой (2.16). Из (2.16) также следует характер гладкости такого решения: если $f_{\mu\nu}$ достаточно быстро убывают, то $u(x)$ будет гладкой. Ясно также, что уравнение Λ (гр) $u - zu = f$ может иметь решение (при определенных f) и в случае принадлежности z спектру оператора Λ (гр): при z вида $\lambda'_{\mu_0} - \lambda''_{\nu_0}$, в некоторой окрестиости которого нет чисел $\lambda'_\mu - \lambda''_\nu \neq z$, f должна быть ортогональна ко всем $\varphi_{\mu\nu}$, $\lambda'_\mu - \lambda''_\nu = z$. При z, являющемся пределом для $\lambda'_\mu - \lambda''_\nu$ и не совпадающим ни с одним из них, соответствующие коэффициенты Фурье $f_{\mu\nu}$ должны столь быстро убывать, чтобы обеспечить сходимость ряда (2.16); если же $z = \lambda'_{\mu_0} - \lambda''_{\nu_0}$ и является пределом $\lambda'_\mu - \lambda''_\nu$, то нужно дополнительно потребовать ортогональность f ко всем $\varphi_{\mu\nu}$, для которых $\lambda'_\mu - \lambda''_\nu = z$.

Итак, если z не принадлежит спектру оператора Λ (гр), порожденного выражением (2.15), то краевая задача

$$Lu - zu = f \in L_2(G), \quad u|_\Gamma = 0, \tag{2.19}$$

всегда имеет слабое решение из $L_2(G)$, одновременно являющееся и сильным; поэтому оио непрерывно зависит от f: $\| u \|_0 \leqslant C \| f \|_0$ ($f \in L_2(G)$) (поясним, что сильный и слабый операторы, построенные по $L - zE$, совпадают с Λ (гр) $- zE$ и Л (гр) $- zE$ соответственно).

Рассмотрим дифференциальное выражение колебания струны—частный случай (2.15): $Lu = -D_1^2 u + D_2^2 u$. Область $G = (0, l_1) \times (0, l_2)$ $(0 < l_1, l_2 < \infty)$, $u|_\Gamma = 0$. Согласно предыдущему Λ (гр) самосопряжен, его спектр в силу (2.18) состоит из замыкания множества чисел вида

$$\pi^2 \left(\frac{\mu^2}{l_1^2} - \frac{\nu^2}{l_2^2} \right) \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots). \tag{2.20}$$

Выясним, в каких случаях оператор Λ (гр) обратим в $L_2(G)$, т. е. в каких случаях 0 не является точкой спектра и задача $Lu = f \in L_2(G)$, $u|_\Gamma = 0$, разрешима в указанном только что смысле. Нетрудно доказать следующее утверждение: *ес и* $\alpha = \frac{l_2}{l_1}$ *иррационально и разлагается в цепную дробь вида*

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

$\left(a_0 = [\alpha],\ a_1 = \left[\frac{1}{\alpha - a_0}\right] \text{ и т. д. }\right)$, *в которой числа* $a_0, a_1, \ldots$ *ограничены, то* 0 *не является точкой спектра оператора* Λ (гр). *Во всех остальных случаях* 0 *входит в спектр*

Согласно (2.20) для доказательства нужно изучить возможность приближения 0 числами вида $\alpha^2\mu^2 - \nu^2$ ($\mu, \nu = 1, 2, \ldots$). Если α рационально, то $\alpha^2 q^2 - p^2 = 0$, где натуральные p и q такие, что $\alpha = \frac{p}{q}$. Пусть теперь α иррационально. Известно (см., например, А. Я. Хинчин [1], теорема 23, стр. 50—51), что если для данного α числа a_j неограничены, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется бесконечное множество натуральных p, q таких, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q^2}$; если же числа a_j ограничены, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех натуральных p, q $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{q^2}$. Поэтому во втором случае получаем

$$|\alpha^2\mu^2 - \nu^2| = \mu^2 \left|\alpha + \frac{\nu}{\mu}\right| \left|\alpha - \frac{\nu}{\mu}\right| \geqslant \mu^2\alpha \cdot \frac{\varepsilon_0}{\mu^2} = \alpha\varepsilon_0 > 0,$$

т. е. 0 не принадлежит к спектру. В первом случае по данному $\varepsilon > 0$ найдем такие μ, ν, чтобы $\left|\alpha - \frac{\nu}{\mu}\right| < \frac{\varepsilon}{\mu^2}$. Тогда $\frac{\nu}{\mu} < \alpha + \frac{\varepsilon}{\mu^2}$ и мы получим

$$|\alpha^2\mu^2 - \nu^2| = \mu^2 \left|\alpha + \frac{\nu}{\mu}\right| \left|\alpha - \frac{\nu}{\mu}\right| < \mu^2 \left(2\alpha + \frac{\varepsilon}{\mu^2}\right) \frac{\varepsilon}{\mu^2} \leqslant (2\alpha + \varepsilon)\,\varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Таким образом, для нашей задачи имеет место следующая ситуация: существует плотное на положительной полуоси множество отношений $\frac{l_2}{l_1}$ (например, квадратические иррациональности — для них a_j ограничены), при которых задача разрешима в $L_2(G)$ при любой $f \in L_2(G)$ и ее решение непрерывно зависит от f. Вместе с тем, чуть меняя отношение $\frac{l_2}{l_1}$, мы всегда можем прийти к неразрешимому случаю, иными словами, разрешимость задачи неустойчива по отношению к малым изменениям области.

Пусть $\frac{l_2}{l_1}$ таково, что 0 не является точкой спектра. Тогда решение $u(x)$ рассматриваемой задачи (2.19) восстанавливается по формуле (2.16), где положено $z = 0$ и $\varphi_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin\frac{\pi\mu x_1}{l_1} \cdot \sin\frac{\pi\nu x_2}{l_2}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \ldots$). Если при некотором k $f(x) \in W_2^k(G)$ и аннулируется вместе с производными до порядка $k-1$ включительно на Γ, то интегрируя выражение для $f_{\mu\nu}$ (см. (2.16)) по частям, найдем, что $f_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu^{k_1}\nu^{k_2}} g_{\mu\nu}^{(k_1, k_2)}$, $\sum_{\mu, \nu=1}^{\infty} |g_{\mu\nu}^{(k_1, k_2)}|^2 < \infty$, где k_1, k_2 — любые фиксированные натуральные числа такие, что $k_1 + k_2 = k$. Учитывая это обстоятельство, легко видеть, что ряд (2.16), записанный для нашей $u(x)$, можно дифференцировать почленно; поэтому теперь также и $u \in W_2^k(G)$. Таким образом, при $k \geqslant 2$ найденное нами решение является гладким решением задачи.

Пусть $\frac{l_2}{l_1} = \alpha$ иррационально и таково, что 0 является точкой спектра, но все же это отношение достаточно плохо аппроксимируется рациональными числами — существуют $d > 2$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{q^d}$ $(p, \ q = 1, 2, \ldots)$, (например, α — алгебраическое число степени > 2). Тогда при достаточной гладкости f и аннуляции ее производных на Γ решение нашей задачи все же будет существовать и даже будет достаточно гладким. Это вытекает из оценки

$$|\lambda'_\mu - \lambda''_\nu| = \frac{\pi^2}{l_2^2}|\alpha^2\mu^2 - \nu^2| = \frac{\pi^2\mu^2}{l_2^2}\left|\alpha + \frac{\nu}{\mu}\right|\left|\alpha - \frac{\nu}{\mu}\right| \geqslant \frac{\pi^2}{l_1 l_2}\frac{\varepsilon_0}{\mu^{d-2}},$$

так как теперь убывание знаменателя в (2.16) можно забить достаточно сильным убыванием числителя $f_{\mu\nu}$, если только предыдущее требование относительно f выполнено при достаточно большом k.

Наконец, если $\frac{l_2}{l_1} = \alpha$ рационально, то 0 является точкой спектра. Однако теперь легко убедиться, что спектр дискретен и поэтому согласно предыдущему решение задачи будет существовать, если f окажется ортогональным к собственным функциям $\sin\frac{\pi\mu x_1}{l_1}\cdot\sin\frac{\pi\nu x_2}{l_2}$ $\left(\mu = mq, \ \nu = mp, \text{ где } m = 1, 2, \ldots; \ \alpha = \frac{p}{q}\right)$.

4. Задача типа Дирихле для уравнения колебания струны. Другие области, исследование гладкости решения. Будем по-прежнему рассматривать задачу

$$Lu = D_1^2 u - D_2^2 u = f \in L_2(G), \quad u|_\Gamma = 0. \tag{2.21}$$

Из сопоставления результатов пп. 2 и 3 видно, что хотя в прямоугольниках $G = (0, l_1) \times (0, l_2)$ ее слабая разрешимость неустойчива по отношению к малым возмущениям области, существуют области, где такая устойчивость имеется. Например, можно взять область рис. 5 (при $x_{p+1} = x_2$), причем ее размеры могут быть произвольными, так как уменьшение диаметра было вызвано лишь наличием первых производных в общем выражении (2.5) (см. стр. 290). Приведем еще один пример подобных областей.

Положим $A_1(x) = -x_1$, $A_2(x) = 0$ (см. стр. 289); уравнение для f приобретет вид $-x_1 D_1 f = 0$ и кривыми $f(x) = h$ будут прямые $x_2 = h$. Область G можно образовать так, как это указано на рис. 6: требуется, чтобы орт $\nu(x)$ на всей границе удовлетворял неравенствам $|\nu_1(x)| \leqslant |\nu_2(x)|$ и $x_1\nu_1(x) \geqslant 0$. В этом случае (2.7) примет вид $|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2$, первое из неравенств (2.8) очевидно выполняется, для второго имеем $-x_1\nu_1(x)\,(\nu_1^2(x) - \nu_2^2(x)) \geqslant 0$. Таким образом, *в этой области справедливо энергетическое неравенство* (2.10).

Исследуем гладкость слабого решения задачи (2.21) (если оно существует) в произвольной области G, ограниченной замкнутой кусочно гладкой кривой Γ, не содержащей кусков характеристик $x_1 \pm x_2 = C$. Удобно перейти в плоскости x_1Ox_2 к системе координат $\xi_1 O \xi_2$, направленной вдоль характеристик (см. рис. 6). Делая замену переменных, перейдем от задачи (2.21) к задаче

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\xi_2} = f(\xi) \in L_2(G), \quad u|_\Gamma = 0 \quad (\xi = (\xi_1, \xi_2)). \tag{2.22}$$

Теорема 2.3. *Слабое решение $u(\xi) \in L_2(G)$ задачи (2.22) имеет вид*

$$u(\xi) = \int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2} f(\eta)\,d\eta + \omega(\xi). \tag{2.23}$$

Здесь $f \in L_2(G)$ продолжена с G на всю плоскость нулем, а $\omega(\xi)$ — функция, которая в каждой части G с границей, пересекающейся прямыми $\xi_1 = C_1$, $\xi_2 = C_2$ максимум в двух точках, представима в виде $\varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2)$; φ и ψ входят в $L_2(\Delta)$ для соответствующих интервалов Δ.

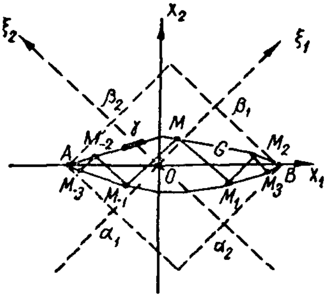


Рис. 6.

Значения функций вида (2.23) определены на границе Γ нашей области. Утверждается, что для слабого решения u задачи (2.22) эти значения равны нулю.

Если граница самой G пересекается характеристиками $\xi_1 = C_1$, $\xi_2 = C_2$ максимум в двух точках, то представление $\omega(\xi) = \varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2)$ единственно с точностью до аддитивных констант. В общем случае G следует разбить на конечное число подобластей $O_1, \ldots, O_N$ требуемого вида и подобное представление будет свое для каждой подобласти; функции φ и ψ теперь зависят от разбиения. Так, в случае области рис. 6 представление единственно и $\varphi \in L_2((\alpha_1, \beta_1))$, $\psi \in L_2((\alpha_2, \beta_2))$.

Установим прежде всего две леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $Q = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2)$ — прямоугольник, описанный вокруг некоторой области G (см. рис. 6), и последовательность $u_n(\xi_1, \xi_2) = \varphi_n(\xi_1) + \psi_n(\xi_2)$, $\varphi_n \in L_2((\alpha_1, \beta_1))$, $\psi_n \in L_2((\alpha_2, \beta_2))$ сходится в смысле $L_2(G)$ к функции $u(\xi_1, \xi_2)$. Тогда $u(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2)$, где $\varphi \in L_2((\alpha_1, \beta_1))$, $\psi \in L_2((\alpha_2, \beta_2))$, причем справедливы неравенства*

$$\|\varphi\|_{L_2((\alpha_1, \beta_1))} \leqslant C\|u\|_{L_2(G)}, \quad \|\psi\|_{L_2((\alpha_2, \beta_2))} \leqslant C\|u\|_{L_2(G)} \tag{2.24}$$

с константой C, зависящей лишь от области G

Доказательство можно свести к случаю $\varphi_n \in C^2([\alpha_1, \beta_1])$, $\psi_n \in C^2([\alpha_2, \beta_2])$. Действительно, пусть $\varphi'_n \in C^2([\alpha_1, \beta_1])$ и $\psi'_n \in C^2([\alpha_2, \beta_2])$ таковы, что

$$\|\varphi_n - \varphi'_n\|_{L_2((\alpha_1, \beta_1))} < \frac{1}{n}, \quad \|\psi_n - \psi'_n\|_{L_2((\alpha_2, \beta_2))} < \frac{1}{n}; \quad u'_n(\xi_1, \xi_2) = \varphi'_n(\xi_1) + \psi'_n(\xi_2).$$

Тогда $\|u_n - u'_n\|_{L_2(Q)} \to 0$ и поэтому подавно в $L_2(G)$ $u'_n \to u$. Итак, сразу можно ограничиться гладкими φ_n и ψ_n.

Убедимся, что u_n фундаментальна в смысле метрики $L_2(Q)$. Для этого достаточно проверить фундаментальность u_n в $L_2(O)$, где O — небольшая область, примыкающая к G. Пусть некоторая функция $u(x)$ удовлетворяет в Q уравнению

$Lu = D_1^2 u - D_2^2 u = 0$, тогда, как известно, она имеет вид (см. рис. 7):

$$u(x) = \frac{u(A') + u(D')}{2} + \frac{1}{2}\int_{A'}^{D'} (D_2 u)(y)\,dy.$$

Проинтегрируем это равенство по координате x_2 точки A'. Обозначая через $C_1, C_2, \ldots$ некоторые постоянные, получим

$$u(x) = C_1\left(\int_A^B + \int_D^C\right) u(s)\,ds +$$

$$+ C_2 \iint_{ABCD} (D_2 u)(y)\,dy =$$

$$= C_3\left(\int_A^B + \int_D^C\right) u(s)\,ds +$$

$$+ C_2\left(\int_B^C - \int_A^D\right) u(s)\,ds;$$

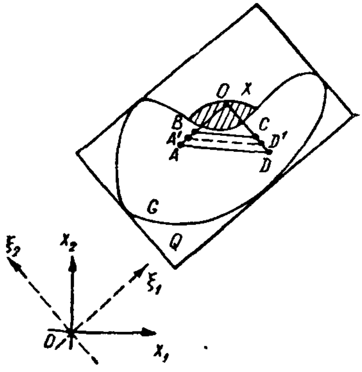


Рис. 7.

$$|u(x)|^2 \leqslant C_4\left(\int_A^B + \int_D^C\right)|u(s)|^2 ds + C_5\left(\int_B^C + \int_A^D\right)|u(s)|^2 ds.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по $x \in O$, причем O будем брать настолько малой, чтобы при изменении x по O трапеция $ABCD$ не выходила за пределы G. Продолжая оценку, получим

$$\|u\|_{L_2(O)} \leqslant C\,\|u\|_{L_2(G)}. \tag{2.25}$$

Так как $u_n - u_m$ удовлетворяют в Q уравнение $Lu = 0$, то на основании (2.25) заключаем, что $\|u_n - u_m\|_{L_2(O)} \to 0$. Итак, u_n фундаментальна в $L_2(Q)$.

Обозначим через $v \in L_2(Q)$ предел u_n в $L_2(Q)$; очевидно, $v(\xi) = u(\xi)$ при $\xi \in G$. Положим

$$\widehat{\varphi}_n(\xi_1) = \varphi_n(\xi_1) - \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\varphi_n(\xi_1)\,d\xi_1, \quad \widehat{\psi}_n(\xi_2) = \psi_n(\xi_2) + \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\varphi_n(\xi_1)\,d\xi_1,$$

имеем по-прежнему $u_n(\xi) = \widehat{\varphi}_n(\xi_1) + \widehat{\psi}_n(\xi_2)$. Покажем, что в смысле слабой сходимости в $L_2((\alpha_1, \beta_1))$ существует $\lim \widehat{\varphi}_n$. Действительно, пусть $f \in L_2((\alpha_1, \beta_1))$ произвольна, $\widehat{f}(\xi_1) = f(\xi_1) - \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\xi_1)\,d\xi_1$. Имеем

$$(\beta_2-\alpha_2)\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\widehat{\varphi}_n f\,d\xi_1=(\beta_2-\alpha_2)\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\widehat{\varphi}_n\widehat{f}\,d\xi_1=$$
$$=\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}(\widehat{\varphi}_n(\xi_1)\dotplus\check{\psi}_n(\xi_2))\,\widehat{f}(\xi_1)\,d\xi_1d\xi_2=$$
$$=\int_Q u_n(\xi)\,\widehat{f}(\xi_1)\,d\xi_1d\xi_2\to\int_Q v(\xi)\,\widehat{f}(\xi_1)\,d\xi_1d\xi_2, \tag{2.26}$$

что и требовалось; положим $\varphi=\lim\widehat{\varphi}_n\in L_2((\alpha_1,\beta_1))$. Существует также слабый предел $\lim\check{\psi}_n$ в $L_2((\alpha_2,\beta_2))$: для любой $f\in L_2((\alpha_2,\beta_2))$ имеем

$$(\beta_1-\alpha_1)\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\check{\psi}_n f\,d\xi_2=\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}(\widehat{\varphi}_n(\xi_1)\dotplus\check{\psi}_n(\xi_2))\,f(\xi_2)\,d\xi_1d\xi_2=$$
$$=\int_Q u_n(\xi)\,f(\xi_2)\,d\xi_1d\xi_2\to\int_Q v(\xi)\,f(\xi_2)\,d\xi_1d\xi_2. \tag{2.27}$$

Положим $\psi=\lim\check{\psi}_n\in L_2((\alpha_2,\beta_2))$.

Покажем, что $v(\xi)=\varphi(\xi_1)\dotplus\psi(\xi_2)$. Пусть $g\in L_2(Q)$; учитывая, что однократные интегралы от g входят по другой переменной в соответствующее L_2, найдем

$$\int_Q u_n g\,d\xi=\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\widehat{\varphi}_n(\xi_1)\left(\int_{\alpha_2}^{\beta_2}g(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2\right)d\xi_1+\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\check{\psi}_n(\xi_2)\left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1}g(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\right)d\xi_2\to$$
$$\to\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\varphi(\xi_1)\left(\int_{\alpha_2}^{\beta_2}g(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2\right)d\xi_1\,+$$
$$\dotplus\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\psi(\xi_2)\left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1}g(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\right)d\xi_2=\int_Q(\varphi\dotplus\psi)\,g\,d\xi.$$

Вместе с тем $\int\limits_Q u_n g\,d\xi\to\int\limits_Q vg\,d\xi$, откуда ввиду произвольности g имеем $v=\varphi\dotplus\psi$.

Для окончания доказательства леммы нужно установить неравенства (2.24). Из (2.26) и (2.27) легко получаем оценки

$$\|\varphi\|_{L_2((\alpha_1,\beta_1))}\leqslant C_1\|v\|_{L_2(Q)},\quad \|\psi\|_{L_2((\alpha_2,\beta_2))}\leqslant C_1\|v\|_{L_2(Q)}, \tag{2.28}$$

где C_1 зависит лишь от размеров Q. Для больших n $\|v\|_{L_2(Q)}\leqslant 2\|u_n\|_{L_2(Q)}$. Неравенство (2.25) показывает, что можно писать оценку $\|u_n\|_{L_2(Q)}\leqslant C_2\|u_n\|_{L_2(G)}$, причем константа C_2 существенно зависит от формы границы области G. Из (2.28), последних двух неравенств и стремления $u_n\to u$ в $L_2(G)$ и вытекают оценки (2.24). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказательства неравенств (2.24) ясно, что если имеется последовательность областей G_ν рассматриваемого вида, которые, расширяясь, сходятся к предельной области G, причем границы сходятся в равномерной метрике, то константа C в (2.24) может быть выбрана одна и та же для всех G_ν.

Лемма 2.2. *Пусть область G обладает тем свойством, что всякая прямая $\xi_1 = C_1$, $\xi_2 = C_2$ пересекает ее границу максимум в двух точках. Утверждается, что функция $u \in C^2(G \cup \Gamma)$, удовлетворяющая внутри G уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\xi_2}=0$, имеет вид (см. рис. 6):*

$$u(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2), \quad \varphi \in C([\alpha_1, \beta_1]), \quad \psi \in C([\alpha_2, \beta_2]). \tag{2.29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\xi_2 = \chi(\xi_1) \in C([\alpha_1, \beta_1])$ — уравнение нижней (относительно системы $\xi_1 O \xi_2$) части границы области G. Интегрируя равенство $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\right)(\xi_1^0, \xi_2) = 0$ по ξ_2 в пределах от $\chi(\xi_1^0)$ до ξ_2^0 (здесь $(\xi_1^0, \xi_2^0) \in G$), получим $\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\right)(\xi_1^0, \xi_2^0) - f(\xi_1^0) = 0$, где $f(\xi_1^0) = \left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\right)(\xi_1^0, \chi(\xi_1^0)) \in C([\alpha_1, \beta_1])$. Положим $v(\xi_1, \xi_2^0) = u(\xi_1, \xi_2^0) - \int\limits_{\alpha_1}^{\xi_1} f(t)\,dt$ $((\xi_1, \xi_2^0) \in G)$, при фиксированном ξ_2^0 в соответствующем интервале изменения ξ_1 $\left(\frac{\partial v}{\partial\xi_1}\right)(\xi_1, \xi_2^0) = 0$. Обозначим $\xi_1 = \varkappa(\xi_2) \in C([\alpha_2, \beta_2])$ уравнение левой (относительно $\xi_1 O \xi_2$) части границы области G; интегрируя последнее равенство по ξ_1 в пределах от $\varkappa(\xi_2^0)$ до ξ_1^0, найдем $v(\xi_1^0, \xi_2^0) - v(\varkappa(\xi_2^0), \xi_2^0) = 0$. Таким образом,

$$u(\xi_1^0, \xi_2^0) = v(\xi_1^0, \xi_2^0) + \int\limits_{\alpha_1}^{\xi_1^0} f(t)\,dt = \int\limits_{\alpha_1}^{\xi_1^0} f(t)\,dt + v(\varkappa(\xi_2^0), \xi_2^0).$$

Представление (2.29) получено. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству первой части теоремы — представления (2.23). *Это представление следует уже из того, что $u \in L_2(G)$ является решением уравнения* (2.22) *внутри G.* Действительно, пусть O — часть G, о которой идет речь в формулировке теоремы; установим вид функции $\omega(\xi)$ в O. Из (2.21) следует: $(u, Lv)_0 = (f, v)_0$, $v \in C_0^2(O)$. Аналогичное равенство, как легко подсчитать, имеет место и при замене u интегралом из (2.23), поэтому

$$(\omega, Lv)_0 = 0 \quad (v \in C_0^2(O)). \tag{2.30}$$

Обозначим через S_ε $(\varepsilon > 0)$ оператор осреднения, построенный по функции $\omega_\varepsilon(y)$, дополнительно четной (см. стр. 40). Пусть $\delta > 0$ фиксировано, O_δ—подобласть O, состоящая из точек $\xi \in O$ таких, что $\varrho(\xi, \gamma) > \delta$, где γ — граница O. Если $w \in C(O)$ отлична от нуля лишь при $\xi \in O_\delta$, то $v = S_\varepsilon w \in C_0^\infty(O)$ при ε достаточно малом. Подставляя эту функцию в (2.30) и пользуясь свойствами операторов осреднения, получим

$$0 = (\omega, L[S_\varepsilon w])_0 = (\omega, S_\varepsilon L w)_0 = (S_\varepsilon\omega, Lw)_0 = (L[S_\varepsilon\omega], w)_0$$

(поясним, что $S_\varepsilon^* = S_\varepsilon$, благодаря четности $\omega_\varepsilon(y)$). Ввиду произвольности w отсюда следует, что $(L[S_\varepsilon\omega])(\xi) = 0$ для $\xi \in O_\delta$ и всех достаточно малых ε; функция $S_\varepsilon\omega \in C^\infty(\overline{O}_\delta)$. При $\delta > 0$ достаточно малом граница области O_δ будет пересекаться всякой прямой, параллельной осям ξ_1 и ξ_2, максимум в двух точках, но тогда согласно лемме 2.2 гладкое решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\xi_2}=0$ $(\xi \in O_\delta)$ восстанавливается по формуле (2.29). Таким образом, $(S_\varepsilon\omega)(\xi) = \varphi_\varepsilon(\xi_1) + \psi_\varepsilon(\xi_2)$ с непрерывными φ_ε и ψ_ε. Перейдем теперь к пределу при $\varepsilon \to 0$. Так как $\omega \in L_2(O)$, то $S_\varepsilon\omega \to \omega$ в смысле $L_2(O_\delta)$, т. е. $\varphi_\varepsilon(\xi_1) + \psi_\varepsilon(\xi_2)$ в $L_2(O_\delta)$ имеет предел. Согласно лемме 2.1, этот предел будет вида $\varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2)$, где $\varphi \in L_2((\alpha_1^{(\delta)}, \beta_1^{(\delta)}))$, $\psi \in L_2((\alpha_2^{(\delta)}, \beta_2^{(\delta)}))$; $(\alpha_1^{(\delta)}, \beta_1^{(\delta)})$ и $(\alpha_2^{(\delta)}, \beta_2^{(\delta)})$ определяются областью O_δ. Таким образом,

$$\omega(\xi) = \varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2) \quad (\xi \in O_\delta),$$

$$\|\varphi\|_{L_2((\alpha_1^{(\delta)}, \beta_1^{(\delta)}))} \leqslant C\|\omega\|_{L_2(O_\delta)}, \quad \|\psi\|_{L_2((\alpha_2^{(\delta)}, \beta_2^{(\delta)}))} \leqslant C\|\omega\|_{L_2(O_\delta)}. \tag{2.31}$$

Пусть теперь $\delta \to 0$. Нетрудно видеть, что функции φ и ψ будут лишь доопределяться на более широкие интервалы, чем исходные $(\alpha_1^{(\delta)}, \beta_1^{(\delta)})$ и $(\alpha_2^{(\delta)}, \beta_2^{(\delta)})$. В результате мы получим верхнее из соотношений (2.31) для всех $\xi \in O$. Функции φ и ψ будут входить в L_2 на интервалах, отвечающих O: это следует из замечания к лемме 2.1 и неравенств (2.31), при этом нужно учесть, что функция $\omega \in L_2(O)$. Итак, представление (2.23) доказано.

Перейдем к доказательству второй части. Интеграл в (2.23) непрерывен по ξ и поэтому имеет значения на Γ. Функция $\omega(\xi)$ локально равна $\varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2)$, где φ, $\psi \in L_2$; на каждой кусочно гладкой кривой, не содержащей кусков прямых $\xi_1 = C_1$, $\xi_2 = C_2$, она почти везде определена. Таким образом, каждая функция типа (2.23) имеет почти всюду на Γ значения. Покажем, что если такая функция — слабое решение задачи (2.22), то $u|_\Gamma = 0$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.3. *Пусть $u(\xi)$ — функция вида (2.23). Для любой $v \in \mathring{W}_2^1(G) \cap W_2^2(G)$, аннулирующейся дополнительно в окрестности каждой точки границы, в которой касательной служит характеристика, справедливо равенство*

$$(\omega, Lv)_0 = \int_\Gamma \omega \frac{\partial v}{\partial\mu} dx, \tag{2.32}$$

где $\mu = (\nu_1, -\nu_2)$ — орт конормали выражения L.

Поясним, что функция $\omega(\xi)$ локально имеет вид $\varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2)$, где φ и ψ входят в L_2, поэтому ω на всяком участке Γ, отстоящем на положительное расстояние от точек P_k с касательными, параллельными осям ξ_1 или ξ_2, также суммируема с квадратом. Это показывает, что интеграл в (2.32) имеет смысл.

Доказательство леммы. Пусть O_j — подобласти, упоминающиеся на стр. 296, γ_j — их границы; построим N бесконечно дифференцируемых функций $\chi_j(x) \geqslant 0$ $(x \in E_2)$, каждая из которых аннулируется в $G \setminus O_j$ и в окрестности части границы $\gamma_j \setminus \Gamma$, так чтобы $\sum_{j=1}^N \chi_j(x) = 1$ $(x \in G)$. Так как $v(x) =$

$=\sum_{j=1}^{N} v(x)\chi_j(x)$, то для доказательства равенства (2.32) достаточно убедиться в справедливости соотношения

$$(\omega, Lv)_{L_2(O_j)} = \int_{\gamma_j} \omega \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu}\, dx, \tag{2.33}$$

где $v \in W_2^2(O_j)$, $v|_\Gamma = 0$ — любая аннулирующаяся в окрестности $\gamma_j \setminus \Gamma$ и в окрестности точек P_k функция. Мы ограничимся рассмотрением более сложного случая, когда $\gamma_j \cap \Gamma$ непустое. В области O_j $\omega(\xi) = \varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2)$, поэтому (2.33) можно переписать в виде

$$(\varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2), Lv)_{L_2(O_j)} = \int_{(\gamma_j \cap \Gamma)\setminus\Delta} (\varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2)) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu}\, dx; \tag{2.34}$$

здесь Δ — совокупность интервалов на $\gamma_j \cap \Gamma$, получающихся от пересечения окрестностей точек P_k с $\gamma_j \cap \Gamma$. Установим (2.34). Для этого построим такие последовательности гладких $\varphi_n(\xi_1)$ и $\psi_n(\xi_2)$, чтобы $\varphi_n \to \varphi$ в $L_2((\alpha_1, \beta_1))$ и $\psi_n \to \psi$ в $L_2((\alpha_2, \beta_2))$ ($(\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2)$ — минимальный прямоугольник, охватывающий O_j). Равенство (2.34) с заменой φ на φ_n и ψ на ψ_n очевидно—оно вытекает из формулы Грина. Запишем (2.34) для φ_n и ψ_n и перейдем к пределу при $n \to \infty$. Этот предельный переход возможен, так как $\varphi_n + \psi_n \to \varphi + \psi$ как в $L_2(O_j)$, так и в $L_2((\gamma_j \cap \Gamma) \setminus \Delta)$. В результате получим (2.34) для φ и ψ. Лемма доказана.

Доказательство теоремы (окончание). Пусть u — слабое решение задачи (2.22); обозначая $w(\xi)$ интеграл в (2.23), получим $u = w + \omega$. При помощи (2.32) и формулы Грина найдем

$$(u, Lv)_0 - (f, v)_0 = (w, Lv)_0 - (f, v)_0 + (\omega, Lv)_0 =$$

$$= (Lw, v)_0 - (f, v)_0 + \int_\Gamma w \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu}\, dx + \int_\Gamma \omega \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu}\, dx = \int_\Gamma u \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mu}\, dx, \tag{2.35}$$

где $v \in W_2^2(G)$ произвольна за исключением того, что $v|_\Gamma = 0$ и аннулируется в сколь угодно малых окрестностях точек P_k. Так как $\left.\frac{\partial v}{\partial \mu}\right|_\Gamma$ вне этих окрестностей принимает достаточно произвольные значения, а $(u, Lv)_0 - (f, v)_0 = 0$, то из (2.35) следует, что $u|_\Gamma = 0$. Теорема доказана.

Во всяком случае для областей, граница которых не содержит ни одной точки с касательной, параллельной осям ξ_1 или ξ_2 (например, G на рис. 6), любая функция u вида (2.23), аннулирующаяся на Γ, является слабым решением задачи (2.22)—это непосредственно вытекает из тождества (2.35).

Итак, мы выяснили характер гладкости слабых решений задачи (2.22). Выше было показано, что имеются области, для которых слабое решение существует при любой $f \in L_2(G)$ и есть устойчивость относительно изменений границ. Возникает вопрос, не будут ли эти решения и сильными. В случае задачи (2.22) $L^+ = L$, $(\text{гр})^+ = (\text{гр})$ и $\|Lu\|_0 \geqslant C\|u\|_0$ ($u \in W_2^2(\text{гр})$), поэтому $Л(\text{гр}) = \Lambda(\text{гр})$ в том и только в том случае, когда слабые решения задачи $Lu=0$, $u|_\Gamma=0$ единственны (это вытекает из сказанного на стр. 98—99). При помощи теоремы 2.3 нетрудно установить, что *в примерах областей, описанных на стр.* 295, *такой единственности не будет и поэтому* Λ (гр) $\subset$ Л (гр). Легко также понять, что функции из $\mathfrak{D}(\Lambda$ (гр)) не будут входить в W_2^2 (гр), следовательно Λ'(гр) $\subset$ Λ(гр).

Установим неединственность слабых решений, ограничиваясь случаем области рис. 6. Пусть M — некоторая точка на ее границе, отличная от A и B, построим по M последовательность точек M_1, M_2, . . .; M_{-1}, M_{-2}, . . . так, как указано на рисунке. Рассмотрим интервал (α_1, β_1) и отнесем M счетное множество ξ_1-координат точек $M_j : M \to \Xi_{1,M}$. В результате получим разбиение интервала (α_1, β_1) в объединении счетных классов $\Xi_{1,M}$. Аналогично рассматривая ξ_2-координаты точек M_j, получим разбиение интервала (α_2, β_2) на объединение классов $\Xi_{2,M}$. Пусть $\varphi(\xi_1)$— ступенчатая измеримая функция на (α_1, β_1), множества постоянства которой состоят целиком из классов типа $\Xi_{1,M}$, а $\psi(\xi_2)$—аналогичная функция на интервале (α_2, β_2). Пусть φ принимает по крайней мере два различных значения и $\psi(\xi_2) = -\varphi(\xi_1)$ в случае, когда $\xi_1 \in \Xi_{1,M}$ и ξ_2 входит в класс $\Xi_{2,M}$, порожденный той же точкой M; из рис. 6 видно, что такие функции легко строятся. Тогда $\omega(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2) \not\equiv 0$ при $(\xi_1, \xi_2) \in G$ и $\omega(\xi_1, \xi_2)|_\Gamma = 0$. Согласно теореме 2.3 и сделанному выше замечанию к ней $\omega(\xi_1, \xi_2)$ является отличным от нуля слабым решением задачи $Lu = 0$, $u|_\Gamma = 0$, что и требовалось.

Нетрудно понять, что подпространство Z всех слабых решений рассматриваемой задачи (т. е. совокупность нулей оператора Л (гр)) существенно меняется при малых изменениях границы, изменение Z влечет изменение оператора L теоремы 2.2, гл. II. Поэтому, хотя мы сумели установить слабую разрешимость задачи (2.22), устойчивую по отношению к малым изменениям границы, мы не сможем обеспечить выбор единственного и непрерывно зависящего от f решения путем наложения простых дополнительных условий, общих для всех близких областей. По-видимому, подобная ситуация возникает и в случае общей теоремы 2.1.

5. Более сильные теоремы единственности. Условная разрешимость. Для области рис. 6 из энергетического неравенства естественно вытекает теорема единственности гладких решений: если $u \in W_2^2(G)$, $u|_\Gamma = 0$ и $Lu = 0$, то $u(x) = 0 (x \in G)$. В действительности для справедливости теоремы единственности необязательно, чтобы u аннулировалось на всей Γ. Покажем это: убедимся, что *если* $u \in W_2^2(G)$, $u|_{\Gamma\setminus\gamma} = 0$ (*см. рис.* 6; γ *должна иметь достаточно малую длину*) *и* $Lu = 0$, *то* $u(x) = 0$ $(x \in G)$. Действительно, из доказательства леммы 2.2 видно, что она справедлива и в случае $u \in W_2^2(G)$, поэтому имеет место представление (2.29). Так как $u|_{\Gamma\setminus\gamma} = 0$, то легко понять, что $\varphi(\xi_1)$ сохраняет одно и то же значение на всем классе $\Xi_{1,M}$, если только $M \in \Gamma\setminus(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j)$, $\gamma_0 = \gamma$, а $\psi(\xi_2)$ сохраняет одно и то же значение для всего $\Xi_{2,M}$, причем $\psi(\xi_2) = -\varphi(\xi_1)$, если $\xi_2 \in \Xi_{2,M}$, $\xi_1 \in \Xi_{1,M}$. Для любого класса $\Xi_{1,M}$ точки α_1 и β_1 являются предельными, поэтому в силу непрерывности φ на $[\alpha_1, \beta_1]$ $\varphi(\xi_1) = \varphi(\alpha_1) = \varphi(\beta_1) = C$ для координат ξ_1 указанных точек M. Аналогично для координат ξ_2 этих точек $\psi(\xi_2) = \psi(\alpha_2) = \psi(\beta_2) = -C$. Подобным же образом двигаясь от точки $M \in \Gamma\setminus\gamma$ лишь в сторону точки A или в сторону точки B заключаем, что вообще $\varphi(\xi_1) = C$ $(\xi_1 \in [\alpha_1, \beta_1])$ и $\psi(\xi_2) = -C$ $(\xi_2 \in [\alpha_2, \beta_2])$. Итак, $u(\xi) = \varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2) = C - C = 0$ $(\xi \in G)$. Единственность доказана.

Согласно теореме 1.1, гл. II, сопряженными условиями к условиям $u|_{\Gamma\setminus\gamma}=0$, $u|_{\gamma}\sim$, будут $v|_{\Gamma\setminus\gamma}=0$, $v|_{\gamma}=\left.\frac{\partial v}{\partial\mu}\right|_{\gamma}=0$. Применяя теорему 3.1 этой же главы, заключаем, что *задача* $Lu=f$, $u|_{\Gamma}=0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial\mu}\right|_{\gamma}=0$, *условно разрешима при любой* $f\in W_2^{-2}(G)$. Ясно, что рассуждения этого пункта могут быть обобщены и на области более сложной конфигурации, чем изображенная на рис. 6.

§ 3. Уравнения смешанного типа

В этом параграфе мы покажем, как методика выяснения разумных постановок краевых задач, намеченная в начале § 2, может быть использована для уравнений с переменными коэффициентами. Будут изучаться уравнения смешанного типа, т. е. уравнения эллиптические в одной части пространства и гиперболические — в другой. Рассматриваются лишь простейшие уравнения и постановки задач, однако эти рассмотрения могут быть во многом перенесены и на более сложные случаи. Применяемую ниже технику можно рассматривать как развитие т. н. abc-метода доказательства теорем единственности для таких уравнений.

1. **Вид дифференциального выражения.** Пусть G — область в плоскости (x_1, x_2), ограниченная замкнутой кусочно гладкой кривой Γ и пересекающая ось Ox_1; $-h < x_2 < H$ $(-h=\inf\limits_{x\in G} x_2,\ H=\sup\limits_{x\in G} x_2)$—полоса, в которой расположена эта область. Рассмотрим в G дифференциальное выражение, для простоты с вещественными коэффициентами, вида

$$Lu=\sum_{j,k=1}^{2} D_j(b_{jk}(x)\,D_ku)+\sum_{j=1}^{2} p_j(x)\,D_ju+p(x)\,u. \tag{3.1}$$

Предположим, что L в области $G_э=G\cap\{x_2>0\}$ эллиптично в том смысле, что при некотором $\varepsilon>0$ $\sum\limits_{j,k=1}^{2} b_{jk}(x)\,\xi_j\xi_k\geq\varepsilon\,|\,\xi_2\,|^2$; кроме того, пусть $p(x)-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{2}(D_jp_j)(x)\leqslant 0$ $(x\in C_э)$*; коэффициенты $b_{jk}(x)$, $p_j(x)\in C^1(\overline{G}_э)$, $p(x)\in C(\overline{G}_э)$. При переходе x в гиперболическую область $G_г=G\cap\{x_2<0\}$ коэффициенты L непрерывно переходят в коэффициенты гиперболического выражения

$$k(x_2)\,D_1^2+D_2^2. \tag{3.2}$$

Здесь $k(x_2)$ непрерывна в $[-h,0]$ и непрерывно дифференцируема в $[-h,0)$, причем $k(x_2)<0$, $k'(x_2)>0$ в $[-h,0)$, $\lim\limits_{x_2\to 0}\frac{k(x_2)}{k'(x_2)}=0$ и $(k/k')'$ суммируема в $[-h,0]$.

Рассматриваемое выражение L носит название выражения Чаплыгина, если оно и в эллиптической части $G_э$ имеет вид (4.2) с $k(x_2)>0$; соответствующее уравнение $Lu=0$ играет важную роль в трансзвуковой газоди-

* В этом параграфе удобно отказаться от договоренности относительно выбора знака формы для эллиптического выражения, принятой на стр. 117.

намике. Выражение Чаплыгина превращается в так называемое выражение Трикоми, если $k(x_2) = x_2$.

Найдем характеристики выражения L в гиперболической области G_Γ. Для орта $\nu(x)$ нормали к характеристике имеем

$$k(x_2)\nu_1^2(x) + \nu_2^2(x) = 0. \tag{3.3}$$

Если $x_2 = x_2(x_1)$ — уравнение характеристики, то (dx_1, dx_2) — вектор вдоль ее касательной, а $(-dx_2, dx_1)$ — вдоль нормали. Подставляя координаты последнего вектора в (3.3), получим дифференциальное уравнение характеристик: $k(x_2)(dx_2)^2 + (dx_1)^2 = 0$, т. е. $dx_1 = \pm\sqrt{-k(x_2)}\,dx_2$. Интегрируя это уравнение, получим два семейства характеристик:

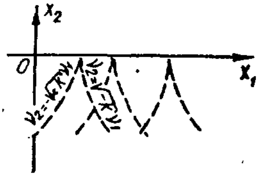


Рис. 8.

$$x_1 = \pm\int_0^{x_2}\sqrt{-k(t)}\,dt + C. \tag{3.4}$$

Производная $\dfrac{dx_1}{dx_2} = \pm\sqrt{-k(x_2)}$ нигде не обращается в ∞, поэтому касательная к характеристике нигде не идет параллельно оси Ox_1, т. е. $\nu_1(x) \neq 0$. Таким образом, $B(x)\nu(x) = (k(x_2)\nu_1(x), \nu_2(x)) \neq 0$ $(x_2 < 0)$, т. е. характеристики слабые; при $x_2 = 0$ имеется вырождение: $B(x_1, 0)\nu(x_1, 0) = 0$. Вид характеристик указан на рис. 8.

Нашей ближайшей целью будет установление энергетических неравенств для некоторых краевых задач, связанных с выражением (3.1) — (3.2). Согласно сказанному на стр. 287 для получения этих неравенств рассмотрим интеграл

$$2\,\mathrm{Re}\int_G (Lu)(x)\overline{(a(x)D_1u + b(x)D_2u + c(x)u)}\,dx \qquad (u \in W_2^2(G)) \tag{3.5}$$

с достаточно гладкими вещественными функциями a, b и c переменной $x \in G$ и путем интегрирования по частям и специального выбора этих функций постараемся выделить из него дефинитные слагаемые. Рассмотрения основываются на одном тождестве для выражения (3.2), получающемся путем непосредственного применения равенств (2.1) и (2.2). Пусть $G' \subseteq G$ — некоторая подобласть G, Γ' — ее граница, тождество имеет вид

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Re}\int_{G'}(kD_1^2u + D_2^2u)\overline{(aD_1u + bD_2u + cu)}\,dx = \int_{G'}\{(-kD_1a + D_2(kb) - 2kc)|D_1u|^2 -\\ - 2\,\mathrm{Re}\,(kD_1b + D_2a)\,D_1u\cdot\overline{D_2u} + (D_1a - D_2b - 2c)\,|D_2u|^2\}\,dx + \int_{G'}(kD_1^2c +\\ + D_2^2c)\,|u|^2dx + \int_{\Gamma'}\{-k(-a\nu_1 + b\nu_2)\,|D_1u|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(-kb\nu_1 - a\nu_2)D_1u\cdot\overline{D_2u} +\\ + (-a\nu_1 + b\nu_2)\,|D_2u|^2\}\,dx + 2\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma'}c\,(k\nu_1D_1u + \nu_2D_2u)\,\overline{u}\,dx -\\ - \int_{\Gamma'}(k\nu_1D_1c + \nu_2D_2c)\,|u|^2dx\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$(u \in W_2^2(G')).$$

2. **Вывод энергетических неравенств.** Мы сейчас будем доказывать энергетические неравенства для выражения (3.1) — (3.2), используя в $G_г$ тождество (3.6), а в $G_э$ — обычную оценку эллиптического выражения по форме. Положим

$$q(x_2) = -\frac{4k(x_2)}{k'(x_2)} > 0 \; (-h \leqslant x_2 < 0, \; q(0) = 0), \; a = \sqrt{-k}qc, \; b = -qc. \quad (3.7)$$

Примем в (3.6) $G' = G_г$ и подставим туда указанные выражения для a и b. Замечая, что $k(0) = q(0) = 0$, после простого подсчета найдем ($\Gamma_г = \Gamma \cap \{x_2 < 0\}$, $\Gamma_{ср} = G \cap \{x_2 = 0\}$):

$$2\,\mathrm{Re}\int_{G_г} Lu\cdot\overline{(aD_1u + bD_2u + cu)}\,dx = 2\,\mathrm{Re}\int_{G_г} Lu\cdot c\,\overline{[q(\sqrt{-k}D_1u - D_2u) + u]}\,dx =$$
$$= \int_{G_г} (\sqrt{-k}qD_1c + D_2(qc) - 2c)\,|\sqrt{-k}D_1u - D_2u|^2 dx +$$
$$+ \int_{G_г} (kD_1^2c + D_2^2c)\,|u|^2\,dx - \int_{\Gamma_г} qc(\sqrt{-k}\nu_1 + \nu_2)\,|\sqrt{-k}D_1u - D_2u|^2 dx +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_г} c\,(k\nu_1D_1u + \nu_2D_2u)\,\bar{u}dx - \int_{\Gamma_г} (k\nu_1D_1c + \nu_2D_2c)\,|u|^2\,dx +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_{ср}} c(x_1, 0)\,D_2u\cdot\bar{u}dx - \int_{\Gamma_{ср}} (D_2c)(x_1, 0)\,|u|^2dx \quad (3.8)$$
$$(u \in W_2^2(G_г)).$$

В $G_э$ для функций $u \in W_2^2(G_э)$, $u|_{\Gamma_э} = 0$ ($\Gamma_э = \Gamma \cap \{x_2 > 0\}$) обычным образом получаем (ср., стр. 128)

$$2\,\mathrm{Re}\int_{G_э} Lu\cdot\bar{u}dx = -2\int_{G_э}\sum_{j,k=1}^{2} b_{jk}D_ku\cdot D_j\bar{u}dx + \int_{G_э}\Big(2p - \sum_{j=1}^{2} D_jp_j\Big)\,|u|^2dx -$$
$$- 2\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_{ср}} D_2u\cdot\bar{u}dx. \quad (3.9)$$

Пусть $c(x_1, 0) = c(0)$ постоянно, умножая (3.9) на $c(0)$ и складывая с (3.8), получим ($\varkappa_E(x)$ — характеристическая функция множества E):

$$2\,\mathrm{Re}\int_{G} Lu\cdot\overline{\{\varkappa_{G_г}c\,[q(\sqrt{-k}\,D_1u - D_2u) + u] + \varkappa_{G_э}c(0)\,u\}}\,dx =$$
$$= -2c(0)\int_{G_э}\sum_{j,k=1}^{2} b_{jk}D_ku\cdot D_j\bar{u}dx + \int_{G_г} (\sqrt{-k}qD_1c + D_2(qc) - 2c)\,|\sqrt{-k}D_1u -$$
$$- D_2u|^2dx + c(0)\int_{G_э}\Big(2p - \sum_{j=1}^{2} D_jp_j\Big)\,|u|^2dx + \int_{G_г} (kD_1^2c + D_2^2c)\,|u|^2dx -$$

$$-\int_{\Gamma_{\text{ср}}} (D_2c)(x_1, 0)\,|u|^2 dx + I_{\Gamma_\text{г}}, \tag{3.10}$$

где обозначено

$$I_{\Gamma_\text{г}} = -\int_{\Gamma_\text{г}} qc(\sqrt{-k}\nu_1 + \nu_2)\,|\sqrt{-k}D_1u - D_2u|^2 dx + 2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_\text{г}} c\,(k\nu_1 D_1 u +$$
$$+ \nu_2 D_2 u)\bar{u}dx - \int_{\Gamma_\text{г}} (k\nu_1 D_1 c + \nu_2 D_2 c)\,|u|^2 dx. \tag{3.11}$$

Предположим, что нам удалось так выбрать $\Gamma_\text{г}$, граничные условия для u на $\Gamma_\text{г}$ и вещественную функцию $c(x)$ $(x \in \bar{G}_\text{г})$, что

$$I_{\Gamma_\text{г}} \geqslant 0; \tag{3.12}$$

$$c(0) < 0,\ (D_2c)(x_1, 0) \leqslant 0\ ((x_1, 0) \in \Gamma_{\text{ср}}),\ \sqrt{-k}qD_1c + D_2(qc) - 2c \geqslant \delta > 0 (x \in G_\text{г}),$$
$$kD_1^2c + D_2^2c \geqslant 0 \quad (x \in G_\text{г}). \tag{3.13}$$

В отношении гладкости $c(x)$, как видно из проведенных выкладок, достаточно требовать ее дважды непрерывную кусочную дифференцируемость. Покажем, что при этих предположениях и некоторых дополнительных ограничениях леммы 3.1 справедливо энергетическое неравенство. Действительно, в этой лемме мы убедимся, что при широких граничных условиях на u выполняется оценка

$$\int_{G_\text{э}} \sum_{j,k=1}^{2} b_{jk} D_k u \cdot D_j \bar{u} dx + \int_{G_\text{г}} |\sqrt{-k}D_1u - D_2u|^2 dx \geqslant C\int_G |u|^2 dx. \tag{3.14}$$

Если ввести позитивную норму равенством

$$\|u\|^2_{+,\text{л}} = \int_G |u|^2 dx + \int_{G_\text{э}} \sum_{i,k=1}^{2} b_{jk} D_k u \cdot D_j \bar{u} dx + \int_{G_\text{г}} |\sqrt{-k}D_1u - D_2u|^2 dx \tag{3.15}$$
$$(u \in W_2^1(G)),$$

то на функциях $u \in W_2^2(G)$, удовлетворяющих требуемым граничным условиям, справедлива вытекающая из (3.10) оценка:

$$C_1\|Lu\|_0 \|u\|_{+,\text{л}} \geqslant$$
$$\geqslant \left|2\operatorname{Re}\int_G Lu \cdot \overline{\{\varkappa_{G_\text{г}}[qc(\sqrt{-k}D_1u - D_2u) + cu] + \varkappa_{G_\text{э}} c(0)u\}}\,dx\right| \geqslant C_2\|u\|^2_{+,\text{л}},$$

т. е. $\|Lu\|_0 \geqslant C_3\|u\|_{+,\text{л}}$. Итак, *если границу* $\Gamma_\text{г}$, *граничные условия* (гр) *на ней и* c *можно выбрать так, чтобы выполнялись оценки* (3.12) *и* (3.13) *и имела место на* W_2^2 (гр) *оценка* (3.14), *то справедливо энергетическое неравенство*

$$\|Lu\|_0 \geq C\|u\|_{+,\text{л}} \quad (u \in W_2^2(\text{гр})). \tag{3.16}$$

Возможный выбор $\Gamma_г$ и граничных условий на нем мы выясним несколько ниже. Сейчас же покажем, что само неравенство (3.14) выполняется при достаточно общих предположениях. Именно, справедлива

Лемма 3.1. *Пусть Γ — произвольная кусочно гладкая кривая, $u_{\Gamma_э} = 0$ и u аннулируется на всех тех участках кривой $\Gamma_г$, которые являются «верхними» по отношению к семейству характеристик вида $\nu_2 = \sqrt{-k}\nu_1$ (участки γ_1, γ_2, γ_3 на рис. 9). Для функций $u \in W_2^1(G)$, удовлетворяющих таким граничным условиям, справедлива оценка* (3.14).

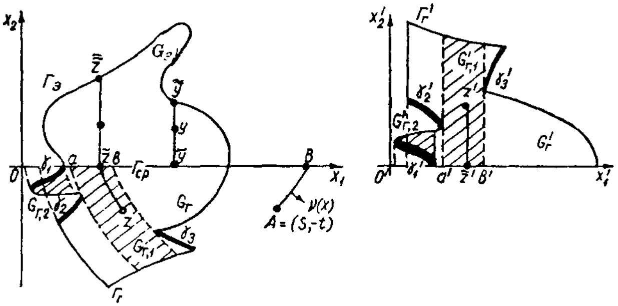


Рис. 9.

Доказательство. Прежде всего заметим, что справедлива оценка

$$\int_{G_э} |D_2 u|^2 dx \geqslant C_1 \int_{G_э} |u|^2 dx \quad (u \in W_2^1(G_э),\ u|_{\Gamma_э} = 0). \tag{3.17}$$

Действительно, пусть $y \in G_э$ произвольна, $(\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}})$ — максимальный расположенный полностью на $G_э$ интервал вертикальной прямой, проходящей через точку y (см. рис. 9). Интегрируя $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ по $(y, \tilde{\tilde{y}})$ и замечая, что $u(\tilde{\tilde{y}}) = 0$, получим

$$-u(y) = \int_y^{\tilde{\tilde{y}}} \frac{\partial u}{\partial x_2} dx. \text{ Отсюда}$$

$$\int_{\tilde{y}}^{\tilde{\tilde{y}}} |u(y)|^2 dy = \int_{\tilde{y}}^{\tilde{\tilde{y}}} \left| \int_y^{\tilde{\tilde{y}}} D_2 u\, dx \right|^2 dy \leqslant H \int_{\tilde{y}}^{\tilde{\tilde{y}}} \int_y^{\tilde{\tilde{y}}} |D_2 u|^2 dx\, dy \leqslant C_2 \int_{\tilde{y}}^{\tilde{\tilde{y}}} |D_2 u|^2 dx.$$

Так как это неравенство справедливо для каждого интервала $(\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}})$, то, интегрируя по всем таким интервалам, получим (3.17).

Установим теперь оценку

$$\int_{G_э} |D_2 u|^2 dx + \int_{G_г} |\sqrt{-k} D_1 u - D_2 u|^2 dx \geqslant C_1 \int_{G_г} |u|^2 dx, \tag{3.18}$$

справедливую для всех функций $u \in W_2^1(G)$, удовлетворяющих указанным в лемме граничным условиям. С этой целью перейдем в полуплоскости $x_2 \leqslant 0$ к новым координатам, понимая под координатами точки z (см. рис. 9) x_1-ю координату точки $\tilde{z}$ (эту координату мы обозначаем x_1') и длину x_2' дуги $\widetilde{z}z$. На рис. 9 справа указан образ области G_Γ при таком переходе. Так как уравнение дуги $\widetilde{z}z$ $x_1 = -\int\limits_0^{x_2} \sqrt{-k}\,dt + x_1' = K(x_2) + x_1'$, то, вычисляя ее длину, получим следующие формулы перехода:

$$x_1' = x_1 - K(x_2), \qquad x_1 = x_1' + K(\Psi(x_2')), \tag{3.19}$$

$$x_2' = \int\limits_{x_2}^{0} \sqrt{1-k}\,dt = \Phi(x_2), \qquad x_2 = \Psi(x_2');$$

$$\left|\frac{dx'}{dx}\right| = |\Phi'(x_2)| = \sqrt{1-k(x_2)}.$$

Здесь Ψ обозначает обратную к монотонной функции Φ; $\frac{dx'}{dx}$ — якобиан перехода от переменных $x' = (x_1', x_2')$ к переменным $x=(x_1, x_2)$; очевидно, в ограниченной области $1 \leqslant \left|\frac{dx'}{dx}\right| \leqslant C < \infty$. Так как $K' = -\sqrt{-k}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x_2'} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_2'} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_2'} = -\Psi'(x_2')\left(\sqrt{-k(x_2)}\,\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -\Psi'(x_2')\,\mathfrak{M}u. \tag{3.20}$$

Выведем теперь оценку (3.18), в которой область G_Γ заменена областью $G_{\Gamma,1}$ (см. рис. 9). Проинтегрируем по интервалу $(\tilde{z}', z')$ производную $\frac{\partial u}{\partial x_2'}$; получим

$$u(z') - u(\tilde{z}') = \int\limits_{\tilde{z}'}^{z'} \frac{\partial u}{\partial x_2'}\,dx_2', \text{ откуда}$$

$$|u(z')|^2 \leqslant 2|u(\tilde{z}')|^2 + 2\left|\int\limits_{\tilde{z}'}^{z'} \frac{\partial u}{\partial x_2'}\,dx_2'\right|^2 \leqslant 2|u(\tilde{z}')|^2 + C_2\int\limits_{\tilde{z}'}^{z'}\left|\frac{\partial u}{\partial x_2'}\right|^2 dx_2'.$$

Пользуясь соотношениями (3.19) и (3.20), найдем

$$\int\limits_{G_{\Gamma,1}} |u|^2 dx = \int\limits_{G'_{\Gamma,1}} |u|^2 \left|\frac{dx}{dx'}\right| dx' \leqslant C_3 \int\limits_{G'_{\Gamma,1}} |u|^2 dx' \leqslant C_4 \int\limits_{a'}^{b'} |u(z_1', 0)|^2 dz_1' +$$

$$+ C_2C_3 \int\limits_{G'_{\text{г},1}} \int\limits_{\tilde{z}'}^{z'} \left| \frac{\partial u}{\partial x'_2} \right|^2 dx'_2 dz' \leqslant C_4 \int\limits_{a'}^{b'} \ldots + C_5 \int\limits_{G'_{\text{г},1}} \left| \frac{\partial u}{\partial x'_2} \right|^2 dz' = C_4 \int\limits_{a'}^{b'} \ldots +$$

$$+ C_5 \int\limits_{G'_{\text{г},1}} |\Psi'(z'_2)|^2 |\mathfrak{M}u|^2 dz' \leqslant C_4 \int\limits_{a'}^{b'} \ldots + C_6 \int\limits_{G'_{\text{г},1}} |\mathfrak{M}u|^2 dz' =$$

$$= C_4 \int\limits_{a'}^{b'} \ldots + C_6 \int\limits_{G_{\text{г},1}} |\mathfrak{M}u|^2 \left| \frac{dx'}{dx} \right| dx \leqslant C_4 \int\limits_{a'}^{b'} |u(z'_1, 0)|^2 dz'_1 + C_7 \int\limits_{G_{\text{г},1}} |\mathfrak{M}u|^2 dx. \quad (3.21)$$

Оценим первый интеграл в правой части (3.21). Прежде всего заметим, что при $x'_2 = 0$, $x'_1 = x_1$, поэтому этот интеграл равен $\int\limits_a^b |u(x_1, 0)|^2 dx_1$. Интегрируя $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ по $(\tilde{z}, \tilde{\tilde{z}})$ и замечая, что $u(\tilde{\tilde{z}}) = 0$, получим

$$-u(\tilde{z}) = \int\limits_{\tilde{z}}^{\tilde{\tilde{z}}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)(z_1, x_2)\, dx_2, \quad |u(z_1, 0)|^2 = |u(\tilde{z})|^2 \leqslant C_8 \int\limits_{\tilde{z}}^{\tilde{\tilde{z}}} |D_2 u|^2 dx.$$

Интегрируя последнее неравенство по z_1 в пределах от a до b, найдем

$$\int\limits_a^b |u(z_1, 0)|^2 dz_1 \leqslant C_8 \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\tilde{z}}^{\tilde{\tilde{z}}} |D_2 u|^2 dx \right) dz_1 \leqslant C_8 \int\limits_{G_э} |D_2 u|^2 dx.$$

Подставляя эту оценку в (3.21), мы придем к (3.18), где $G_\text{г}$ заменено на $G_{\text{г},1}$. Аналогично устанавливается (3.18) с заменой $G_\text{г}$ на $G_{\text{г},2}$ (см. рис. 9), причем здесь ситуация будет даже проще, так как в (3.21) интеграл $\int\limits_{a'}^{b'} |u(z'_1, 0)|^2 dz'_1$ отсутствует — функция $u(x)$ аннулируется при $x \in \gamma_1$. Разбивая область $G_\text{г}$ на подобласти типа $G_{\text{г},1}$ и $G_{\text{г},2}$ получая для них оценки (3.18) и складывая эти оценки, получим (3.18) в требуемом виде.

Складывая (3.17) и (3.18), найдем

$$\int\limits_{G_э} |D_2 u|^2 dx + \int\limits_{G_\text{г}} |\sqrt{-k}\, D_1 u - D_2 u|^2 dx \geqslant C \int\limits_G |u|^2 dx. \quad (3.22)$$

Из предположений на стр. 303 относительно вида L следует, что $\sum\limits_{j,k=1}^{2} b_{jk}\zeta_j\bar{\zeta}_k >$

$\geqslant \varepsilon\,|\zeta_2|^2$, а отсюда вытекает неравенство

$$\int\limits_{G_э}\sum_{j,k=1}^{2} b_{jk}D_k u\cdot D_j\bar{u}dx \geqslant \varepsilon\int\limits_{G_э}|D_2u|^2dx \quad (u\in W_2^1(G_э)).$$

Оценка (3.22) и последнее неравенство приводят к неравенству (3.14). Лемма доказана.

Сделаем еще одну общую рекомендацию в отношении получения неравенства (3.12).

Пусть X — *кусок характеристики типа AB (см. рис. 9). Если на* X

$$-kD_1c + \sqrt{-k}D_2c + D_2(\sqrt{-k}c) \geqslant 0, \tag{3.23}$$

то выражение

$$J_X = 2\operatorname{Re}\int\limits_X c(k\nu_1D_1u + \nu_2D_2u)\bar{u}dx - \int\limits_X (k\nu_1D_1c + \nu_2D_2c)\,|u|^2dx \tag{3.24}$$

(*орт* $\nu(x)$ *направлен так, как указано на рис.* 9) *неотрицательно для таких* $u(x)$, *что* $u(A) = 0$.

Действительно, легко подсчитать, что $\nu(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-k}}, -\frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{1-k}}\right)$, поэтому если ввести функцию $U(x_2) = u\left(\int\limits_0^{x_2}\sqrt{-k}dt + C, x_2\right)$ $(-h \leqslant x_2 \leqslant 0)$, где $\left(\int\limits_0^{x_2}\sqrt{-k}dt + C, x_2\right)$ — точка на AB, то

$$\frac{dU(x_2)}{dx_2} = \sqrt{-k}D_1u + D_2u = -\frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{-k}}(k\nu_1D_1u + \nu_2D_2u). \tag{3.25}$$

Учитывая это соотношение и равенства $dx = \sqrt{1-k}dx_2$ $(x\in X)$, $k(0)=0$, $U(-t) = u(A) = 0$, получим интегрированием по частям

$$J_X = -2\operatorname{Re}\int\limits_{-t}^{0}\frac{dU}{dx_2}\bar{U}\sqrt{-k}c\,dx_2 + \int\limits_{-t}^{0}(-kD_1c + \sqrt{-k}D_2c)\,|U|^2dx_2 =$$

$$= -\int\limits_{-t}^{0}\frac{d}{dx_2}|U|^2\cdot\sqrt{-k}c\,dx_2 + \int\limits_{-t}^{0}(-kD_1c + \sqrt{-k}D_2c)\,|U|^2dx_2 =$$

$$= \int\limits_{-t}^{0}(D_2(\sqrt{-k}\,c) - kD_1c + \sqrt{-k}D_2c)\,|U|^2dx_2.$$

Условие (3.23) влечет неотрицательность последнего интеграла. Утверждение доказано.

3. Некоторые постановки краевых задач. Мы сейчас укажем простейшие граничные условия, при которых выполняется энергетическое неравенство (3.16) и разумны постановки краевых задач. На функцию $k(x_2)$ нам придется налагать еще некоторые дополнительные требования; сейчас предположим, что выполняется простейшее из них—так называемое условие Франкля:

$$2\left(\frac{k(x_2)}{k'(x_2)}\right)' + 1 \geqslant \delta > 0 \ (\text{т. е. } q'(x_2) \leqslant 2 - \delta), \ -h \leqslant x_2 < 0. \tag{3.26}$$

Условия на дугу $\Gamma_э$ самые обшие — ее кусочная гладкость.

I. Задача Трикоми. Область G имеет вид, указанный на рис. 10. Граница $\Gamma_г$ состоит из двух частей: $\Gamma_л$ и $\Gamma_п$, каждая из которых является характеристикой нашего выражения. Граничные условия:

$$u|_{\Gamma_э \cup \Gamma_л} = 0, \quad u|_{\Gamma_п} \sim. \tag{3.27}$$

Для этих граничных условий справедливо неравенство (3.16). В самом деле, для них имеет место лемма 3.1. Далее, в понятных обозначениях $I_{\Gamma_г} = I_{\Gamma_л} + I_{\Gamma_п}$; покажем, что $I_{\Gamma_г} \geqslant 0$, если только требовать выполнение (3.23). Так как $u|_{\Gamma_л} = 0$, то последние два интеграла в выражении для $I_{\Gamma_л}$ аннулируются; первый интеграл также аннулируется, так как на $\Gamma_л$ $D_1u = \lambda\nu_1$, $D_2u = \lambda\nu_2$ и поэтому $|\sqrt{-k}D_1u - D_2u| = |\lambda|\,|\sqrt{-k}\,\nu_1 - \nu_2| = 0$. В выражении для $I_{\Gamma_п}$ первый интеграл равен нулю, так как $(\sqrt{-k}\,\nu_1 + \nu_2)|_{\Gamma_п} = 0$; сумма последних двух будет неотрицательна благодаря (3.23).

Итак, для справедливости (3.16) нужно суметь найти такую функцию $c(x)$ $(x \in G)$, чтобы выполнялись неравенства (3.13) и (3.23). Благодаря предположению (3.26) в качестве такой функции можно взять $c(x) \equiv -1$.

II. Обобщенная задача Трикоми. Область G указана на рис. 11. Здесь $\Gamma_{1,л}, \Gamma_{1,п}, \ldots, \Gamma_{N,л}, \Gamma_{N,п}$ — дуги характеристик ($N \geqslant 1$, на рисунке $N = 3$); $\gamma_л$ и $\gamma_п$ — две дуги, имеющие соответственно уравнения $x_2 = \varphi_л(x_1)$ и $x_2 = \varphi_п(x_1)$, где $\varphi_л' \geqslant 0$, $\varphi_л' < (-k)^{-\frac{1}{2}}$; $\varphi_п' \leqslant 0$, $|\varphi_п'| < (-k)^{-\frac{1}{2}}$. Одна или обе из дуг $\gamma_л$, $\gamma_п$ могут отсутствовать. Граничные условия:

$$u|_{\Gamma_э \cup \Gamma_{1,л} \cup \ldots \cup \Gamma_{N,л} \cup \gamma_л \cup \gamma_п} = 0, \tag{3.28}$$

$$u|_{\Gamma_{1,п} \cup \ldots \cup \Gamma_{N,п}} \sim.$$

Для рассматриваемых граничных условий также имеет место (3.16). Убеждаемся в этом точно таким же образом, как и в случае задачи *I*. Отличие составляют интегралы $I_{\gamma_л}, I_{\gamma_п}$, но они будут неотрицательны. В самом деле, например, для $I_{\gamma_л}$ в выражении типа (3.11) благодаря условию $u|_{\gamma_л} = 0$ сохраняется лишь первый интеграл, но так как на $\gamma_л$ $\sqrt{-k}\,\nu_1 + \nu_2 > 0$, то при $c(x) \equiv -1$ этот интеграл имеет знак $+$.

Рассмотрим сопряженные к *I* и *II* задачи. *Граничные условия, сопряженные к* (3.27) *и* (3.28), *имеют соответственно вид*

$$v|_{\Gamma_э \cup \Gamma_п} = 0, \quad v|_{\Gamma_л} \sim \quad \text{и} \quad v|_{\Gamma_э \cup \Gamma_{1,п} \cup \ldots \cup \Gamma_{N,п} \cup \gamma_л \cup \gamma_п} = 0, \quad v|_{\Gamma_{1,л} \cup \ldots \cup \Gamma_{N,л}} \sim. \tag{3.29}$$

Убедимся, например, в этом для более простого случая условий (3.27). Согласно общей теореме 1.1, гл. II, сопряженными условиями будут $v|_{\Gamma_э} = 0$, $v|_{\Gamma_л} \sim$, $(\mathfrak{M}^+ v - \overline{\mathfrak{M}} v)|_{\Gamma_п} = 0$, где $\mathfrak{M}$ построено по выражению (3.2) и характеристике $\Gamma_п$. Подсчитаем $\mathfrak{M}$. По функции $v(x_1, x_2)$, определенной на $\Gamma_п$, построим так, как

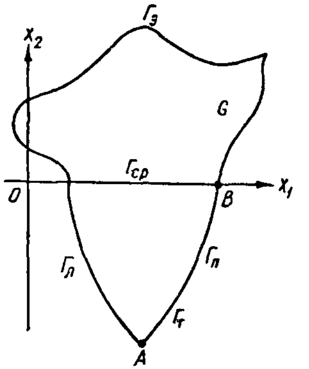


Рис. 10.

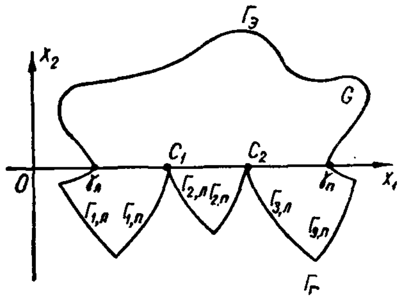


Рис. 11.

это сделано на стр. 310, функцию $V(x_2)$ $(-h \leqslant x_2 < 0)$. Учитывая выражение для $\mathfrak{M}$ ((1.15), гл. II) и равенство (3.25), получим

$$\mathfrak{M}v = kD_1 v \cdot \nu_1 + D_2 v \cdot \nu_2 = -\frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{1-k}} (\sqrt{-k} D_1 v + D_2 v) = -\frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{1-k}} \frac{d}{dx_2} V. \quad (3.30)$$

Так как $dx = \sqrt{1-k}\, dx_2$, то $\int\limits_{\Gamma_п} \mathfrak{M} v \cdot \bar{v} dx = -\int\limits_{-h}^{0} \sqrt{-k} V'(x_2) \overline{V(x_2)}\, dx_2$, откуда ясно, что

$$\mathfrak{M}^+ v = \frac{1}{\sqrt{1-k}} \frac{d}{dx_2} (\sqrt{-k} V). \quad (3.31)$$

Из (3.30) и (3.31) следует, что условие $(\mathfrak{M}^+ v - \overline{\mathfrak{M}} v)|_{\Gamma_п} = 0$ эквивалентно равенству $(\sqrt{-k} V)' + \sqrt{-k} V' = 0$; отсюда $V' + \frac{k'}{4k} V = 0$ $(-h \leqslant x_2 < 0)$. Общим решением последнего уравнения будет $V(x_2) = C(-k(x_2))^{-\frac{1}{4}}$; так как $|v(B)| < \infty$, то $|V(0)| < \infty$ и поэтому $C = 0$. Итак, $V(x_2) = 0$ $(-h \leqslant x_2 \leqslant 0)$, т. е. $v|_{\Gamma_п} = 0$ и первые из условий (3.29) действительно сопряжены к (3.27). Утверждение доказано.

Таким образом, для перехода от задач $I - II$ к сопряженным следует лишь поменять ролями дуги типа $\Gamma_л$ и типа $\Gamma_п$. Выражение L^+ по-прежнему будет иметь вид, указанный на стр. 303. Это показывает, что для L^+ и $(\text{гр})^+$ справедливо энергетическое неравенство типа (3.16), в котором лишь $\|v\|_+$ вычисляется посредством симметричного к (3.15) соотношения:

$$\| v \|^2_{+,\text{п}} = \int_G |v|^2 dx + \int_{G_э} \sum_{j,k=1}^{2} b_{jk} D_k v \cdot D_j \bar{v} dx + \int_{G_г} |\sqrt{-k} D_1 v + D_2 v|^2 dx. \quad (3.32)$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема 3.1. *В случае задачи Трикоми (обычной и обобщенной) при выполнении условия Франкля* (3.26) *справедливы оба энергетические неравенства*

$$\| Lu \|_0 \geqslant C \| u \|_{+,\text{л}} \ (C > 0;\ u \in W_2^2\,(\text{гр})),\ \| L^+ v \|_0 \geqslant C \| v \|_{+,\text{п}} (C>0; v \in W_2^2(\text{гр})^+)$$

где позитивные нормы определяются соотношениями (3.15) *и* (3.32). *Таким образом, рассматриваемая задача* $Lu = f$, $u \in$ (гр), *почти корректна и слабо разрешима при любом* $f \in L_2(G)$.

Более того, существует обобщенное решение этой задачи и при f *из пространства с негативной нормой, построенной по позитивной норме* $\|\cdot\|_{+,\text{п}}$ *и нулевой норме пространства* $L_2(G)$.

4. **Обобщения.** Покажем теперь, как можно заменить условие Франкля (3.26) менее жестким ограничением; полностью избавиться от подобных условий не удается (если не налагать на форму $\Gamma_э$ специальных требований, см. п. 5). Прежде всего убедимся, что *энергетическое неравенство* (3.16) *остается справедливым, если второе из условий* (3.12) *заменить менее ограничительным*

$$(D_2 c)(x_1, 0) < -\frac{2\varepsilon}{H} c(0) \quad ((x_1, 0) \in \bar{\Gamma}_{\text{ср}}) \quad (3.33)$$

(*здесь* $\varepsilon > 0$ *то же, что и фигурирующее на стр.* 303 *при оценке формы для* L).

Действительно, $\int_{G_э} \sum_{j,k=1}^{2} b_{jk} D_k u \cdot D_j \bar{u} dx \geqslant \varepsilon \int_{G_э} |D_2 u|^2 dx$. Вместе с тем в обозначениях рис. 9 для такой u, что $u|_{\Gamma_э} = 0$,

$$\int_{\Gamma_{\text{ср}}} |u(\tilde{y})|^2 d\tilde{y} = \int_{\Gamma_{\text{ср}}} \left| \int_{\tilde{y}}^{\tilde{\tilde{y}}} (D_2 u)(y)\, dy \right|^2 d\tilde{y} \leqslant \int_{\Gamma_{\text{ср}}} \left(|\tilde{\tilde{y}} - \tilde{y}| \int_{\tilde{y}}^{\tilde{\tilde{y}}} |D_2 u|^2 dy \right) d\tilde{y} \leqslant$$

$$\leqslant H \int_{G_э} |D_2 u|^2 dx.$$

Таким образом,

$$\int_{G_э} \sum_{j,k=1}^{2} b_{jk} D_k u \cdot D_j \bar{u} dx \geqslant \frac{\varepsilon}{H} \int_{\Gamma_{\text{ср}}} |u(\tilde{y})|^2 d\tilde{y} \quad (u|_{\Gamma_э} = 0). \quad (3.34)$$

Учитывая это неравенство, перепишем (3.10) следующим образом ($c(0) < 0$, $2 > \varepsilon_1 > 0$):

$$2\,\text{Re} \int_G Lu \cdot \overline{\{\varkappa_{G_г} c\, [q \sqrt{-k} D_1 u - D_2 u) + u] + \varkappa_{G_э} c(0)\, u\}}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant -\varepsilon_1 c(0)\int\limits_{G_э}\sum_{j,k=1}^{2} b_{jk}D_k u\cdot D_j\bar{u}dx+\int\limits_{G_г}(\sqrt{-k}qD_1c+D_2(qc)-2c)\,|\sqrt{-k}D_1u-$$

$$-D_2u|^2dx+c(0)\int\limits_{G_э}\Big(2p-\sum_{j=1}^{2}D_jp_j\Big)|u|^2dx+\int\limits_{G_г}(kD_1^2c+D_2^2c)|u|^2dx+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_{ср}}\Big[-(2-\varepsilon_1)\frac{\varepsilon}{H}c(0)-(D_2c)(x_1,0)\Big]|u|^2dx+I_{\Gamma_г}. \tag{3.35}$$

Из условия (3.33) вытекает, что при $\varepsilon_1>0$ достаточно малом $-(2-\varepsilon_1)\frac{\varepsilon}{H}c(0)-$ $-(D_2c)(x_1,0)\geqslant 0$ на $\Gamma_{ср}$. Зафиксируем такое ε_1, интеграл $\int\limits_{\Gamma_{ср}}\ldots dx$ в (3.35) тогда можно отбросить без нарушения знака неравенства. Выбирая затем c так, чтобы соблюдались остальные соотношения (3.12) — (3.13), и производя точно такие оценки, как на стр. 306, мы придем к неравенству (3.16). Утверждение доказано.

Теорема 3.2. *Результаты теоремы 3.1 сохраняются, если условие Франкля (3.26) заменено следующим: а) функция $k(x_2)$ трижды непрерывно дифференцируема на $[-h, 0)$ и $k''(x_2)$ ограничена вблизи 0; б) множество тех x_2, где $2(k/k')'+1<0$, состоит из конечного числа интервалов на $[-h, 0)$ и на каждом таком интервале $k'''(x_2)\leqslant 0$.*

Доказательство. Согласно сказанному на стр. 311 оно сводится к построению требуемой функции c; ее мы будем строить как функцию лишь переменной x_2. Приведем сперва одну вспомогательную конструкцию. Пусть $[\alpha,\beta]\subset$ $\subset[-h, 0)$ таков, что внутри него $q'(x_2)>2$ (т. е. $2(k/k')'+1<0$) и $q'(\beta)=$ $=2$. Построим функцию $c(x_2)$ пока лишь на $[\alpha,\beta]$, полагая

$$c(x_2)=-e^{\int\limits_{x_2}^{\beta}\frac{q'(t)-\lambda}{q(t)}dt}, \tag{3.36}$$

где константа $\lambda<2$. Эта функция при $2-\lambda=\eta$ достаточно малом удовлетворяет третьему и четвертому условиям из (3.13) и неравенству (3.23).

В самом деле, для функции $c(x)=c(x_2)$ условия (3.13), в которых второе заменено на (3.33), и (3.23) имеют вид

$$c(0)<0,\ c'(0)<-\frac{2\varepsilon}{H}c(0),\ (qc)'-2c\geqslant\delta>0,\ c''\geqslant 0, \tag{3.37}$$

$$2\sqrt{-k}c'-\frac{k'}{2\sqrt{-k}}c\geqslant 0\ (\text{или } qc'-c\geqslant 0),\quad -h\leqslant x_2<0.$$

Нас интересуют последние три из них на сегменте $[\alpha,\beta]$. Дифференцируя (3.36), получим

$$c'(x_2)=e^{\int\limits_{x_2}^{\beta}\frac{q'-\lambda}{q}dt}\ \frac{q'(x_2)-\lambda}{q(x_2)}>0. \tag{3.38}$$

Так как $c(x_2)<0$ $(x_2\in[\alpha,\beta])$, то и $qc'-c\geqslant 0$. Далее, $(qc')-2c=$

$= \exp\left(\int\limits_{x_2}^{\beta} \frac{q'-\lambda}{q}\,dt\right)(2-\lambda) > 2-\lambda = \eta > 0$. Наконец, проверим четвертое из условий (3.37). Вычисляя c'', найдем

$$c'' = \frac{1}{q^2}\, e^{\int\limits_{x_2}^{\beta} \frac{q'-\lambda}{q}dt} (-2q'^2 + qq'' + 3q'\lambda - \lambda^2).$$

Нужно установить неотрицательность на $[\alpha, \beta]$ последней скобки. Так как $q' \geqslant 2$, то $-2q'^2 + qq'' + 3q'\lambda - \lambda^2 \geqslant -2q'^2 + qq'' + 8 - 2\eta - \eta^2$. Поэтому если

$$-2q'^2 + qq'' + 8 > 0 \quad (x_2 \in [\alpha, \beta]), \tag{3.39}$$

то, подбирая η достаточно малым, получим $c'' \geqslant 0$. Подставляя в (3.39) выражение (3.7) для q и учитывая, что $k' > 0$, перепишем это неравенство в виде $-k'^3 + 2kk'k'' - \frac{2}{3}k^2k''' > 0$. На $[\alpha, \beta]$ $2(k/k')' + 1 \leqslant 0$, т. е. $-3k'^2 + 2kk'' \geqslant 0$. При помощи этого неравенства и соотношений $k' > 0$, $k''' \leqslant 0$ найдем

$$-k'^3 + 2kk'k'' - \frac{2}{3}k^2k''' > -3k'^3 + 2kk'k'' - \frac{2}{3}k^2k''' \geqslant 0.$$

Итак, (3.39), а вместе с ним и оценка $c'' \geqslant 0$, установлены.

Покажем теперь, что если выполнены предположения теоремы, то существует дважды кусочно непрерывно дифференцируемая функция $c(x_2)$ $(-h \leqslant x_2 \leqslant 0)$, удовлетворяющая требованиям (3.37). Обозначим $[\alpha_1, \beta_1], \ldots, [\alpha_m, \beta_m]$ максимальные по длине отрезки оси Ox_2, внутри которых $q' > 2$. Так как $2(k/k')' + 1 = \frac{1}{k'^2}(3k'^2 - 2kk'')$, $k(0) = 0$ и k'' вблизи 0 ограничена, то вблизи нуля $2(k/k')' + 1 > 0$, т. е. там $q' < 2$. Таким образом, наши отрезки располагаются левее нуля; будем считать $-h \leqslant \alpha_m < \beta_m < \alpha_{m-1} < \ldots < \alpha_1 < \beta_1 < 0$. Очевидно, $q'(\alpha_j) = q'(\beta_j) = 2$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Определим функцию $c(x_2)$ на $[\alpha_1, \beta_1]$ равенством (3.36), полагая $[\alpha, \beta] = [\alpha_1, \beta_1]$. Имеем $c(\beta_1) = -1$; $c'(\beta_1) = \frac{2-\lambda}{q(\beta_1)} > 0$ (см. (3.38)) и поэтому при λ, достаточно близком к 2, $c'(\beta_1)$ может быть сделана сколь угодно малой. Сделаем $c'(\beta_1)$ настолько малым, чтобы c можно было продолжить на $(\beta_1, 0]$ с сохранением свойств $c' > 0$ и $c'' \geqslant 0$ так, что $c(0) < 0$, $c'(0) < -\frac{2\varepsilon}{H}c(0)$. Далее, определим c на $[\alpha_2, \beta_2]$ посредством (3.36), приписывая перед этим интегралом некоторый множитель $\mu > 0$ и полагая $[\alpha, \beta] = [\alpha_2, \beta_2]$. Ясно, что, опять подбирая здесь λ достаточно близким к 2 и варьируя $\mu > 0$, можно суметь продолжить c на интервал (β_2, α_1) так, чтобы $c' > 0$, $c'' \geqslant 0$ и сохранились на $[\alpha_2, 0]$ требуемые свойства гладкости. Затем c определяем на $[\alpha_3, \beta_3]$ и т. д.; левее α_m c продолжаем произвольно с сохранением неравенств $c' > 0$ и $c'' \geqslant 0$. Покажем, что так построенная $c(x_2)$ удовлетворяет требованиям (3.37). Действительно, нужно рассмотреть лишь случай, когда $x_2 \in [\alpha_j, \beta_j]$ $(j = 1, \ldots, m)$, $x_2 \neq 0$. Так как $c < 0$, $c' > 0$ и $c'' \geqslant 0$, то четвертое и пятое условия (3.37) выполняются. Далее, согласно построению вне отрезков $[\alpha_j, \beta_j]$ $q' \leqslant 2$, поэтому $(qc)' - 2c = qc' + (q' - 2)c \geqslant qc'$; последнее же выражение вне малой окрестности 0 всегда $\geqslant \delta > 0$. Вблизи нуля $qc' \geqslant 0$, но там $q' < 2$, поэтому и здесь $qc' + (q'-2)c \geqslant$ $\geqslant (q'-2)c > 0$. Итак, построенное c удовлетворяет (3.37). Теорема доказана.

Сделаем еще следующее замечание. Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1, и обозначим $(-\sigma, 0]$ максимальный полуинтервал, где имеет место неравенство $q' < 2$. Согласно этой теореме энергетические неравенства справедливы в случае $h < \sigma$. На самом же деле они справедливы и при h, несколько большем σ. В этом легко убедиться, если положить $c(x_2) = x_2 - a$, где $a > \frac{H}{2\varepsilon}$ фиксированное; для такой функции выполняются условия (3.37).

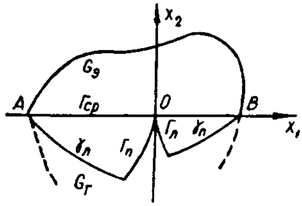


Рис. 12.

5. **Модификация методики получения энергетических неравенств. Задача Франкля.** Связь (3.7) между функциями a, b и c не во всех задачах приводит к цели и тогда эти функции приходится выбирать иначе, при этом часто появляются дополнительные ограничения на $Г_э$.

В качестве иллюстрации мы рассмотрим так называемую задачу Франкля для выражения Чаплыгина (3.2); предполагается $k(x_2) \in C^1([-h, H])$, $k'(x_2) > 0$ $(x_2 \in [-h, H], x_2 \neq 0)$, и, естественно, при переходе через 0 $k(x_2)$ меняет знак с $-$ на $+$. Выражение рассматривается в области, изображенной на рис. 12. Здесь $Г_п$ и $Г_л$ — дуги характеристик; $\gamma_л$ и $\gamma_п$ — две дуги, имеющие соответственно уравнения $x_2 = \varphi_л(x_1)$ и $x_2 = \varphi_п(x_1)$, где $\varphi_л' \leqslant 0$, $|\varphi_л'| < (-k)^{-\frac{1}{2}}$ и $\varphi_п' \geqslant 0$, $\varphi_п' < (-k)^{-\frac{1}{2}}$. Одна из дуг $\gamma_л$, $\gamma_п$ может отсутствовать, тогда отвечающая ей точка A или B совмещается с O. Дуга $Г_э$ предполагается кусочно гладкой и такой, что $x_1\nu_1(x) + x_2\nu_2(x) \geqslant 0$ $(x \in Г_э)$ (условие звездности). Граничные условия

$$u|_{Г_э \cup \gamma_л \cup \gamma_п} = 0, \quad u|_{Г_п \cup Г_л} \sim. \tag{3.40}$$

Пользуясь теоремой 1.1, гл. II, и приведенными на стр. 312 рассуждениями, легко усмотреть, что сопряженные условия к (3.40) имеют вид

$$v|_Г = 0. \tag{3.41}$$

Прежде всего покажем, что в случае условий (3.41) справедливо некоторое энергетическое неравенство. Введем позитивные относительно $H_0 = L_2(G)$ нормы

$$\|u\|_{+1}^2 = \int_G \frac{1}{|k|}|u|^2 dx, \quad \|u\|_{+2}^2 = \int_G |u|^2 dx + \int_G (|k|\,|D_1 u|^2 + |D_2 u|^2)\,dx, \tag{3.42}$$

причем первая из них вводится сперва для функций из $L_2(G)$, аннулирующихся вблизи $Г_{ср}$, а затем производится пополнение; так полученное пространство обозначаем H_{+1}. Позитивное пространство, отвечающее норме $\|\cdot\|_{+2}$, обозначаем H_{+2}. Утверждается, что *для функций* $u \in W_2^2(G)$, *удовлетворяющих условию* (3.41) *и таких, что* $Lu \in H_{+1}$, справедливо неравенство

$$\|Lu\|_{+1} \geqslant C\,\|u\|_{+2}. \tag{3.43}$$

Прежде всего сделаем одно общее замечание. Рассмотрим четвертый интеграл в (3.6), распространенный по некоторому куску $Г_0$ границы, на котором $u = 0$. Легко подсчитать, что он приобретет вид (ср. (2.6)):

$$\int\limits_{\Gamma_0} |N_u|^2 (a\nu_1 + b\nu_2)(k\nu_1^2 + \nu_2^2)\, dx, \tag{3.44}$$

где N_u — нормирующий множитель, введенный на стр. 288.

Положим теперь в тождестве (3.6) $G' = G$, $a = x_1$, $b = \max\{0, x_2\}$ и $c = -\frac{1}{4}$; $u|_\Gamma = 0$. Используя (3.44), получим

$$2\operatorname{Re}\int\limits_G Lu\cdot\overline{\left(x_1D_1u + bD_2u - \frac{1}{4}u\right)}\, dx = \int\limits_{G_э}\left\{\left(\frac{1}{2}k + k'x_2\right)|D_1u|^2 + \frac{1}{2}|D_2u|^2\right\}dx +$$

$$+\int\limits_{G_г}\left\{\left(-\frac{1}{2}k\right)|D_1u|^2 + \frac{3}{2}|D_2u|^2\right\}dx + \int\limits_{\Gamma_э}|N_u|^2(x_1\nu_1 + x_2\nu_2)(k\nu_1^2 + \nu_2^2)\, dx +$$

$$+\int\limits_{\Gamma_г}|N_u|^2 x_1\nu_1(k\nu_1^2 + \nu_2^2)\, dx. \tag{3.45}$$

Здесь нужно пояснить, что несмотря на излом $b(x_2)$ при $x_2 = 0$ интегралы по $\Gamma_{ср}$ в (3.45) не появляются — в этом легко убедиться, если записать (3.45) отдельно для $G_э$ и $G_г$ и результаты сложить.

Согласно предположению $(x_1\nu_1 + x_2\nu_2)|_{\Gamma_э} \geqslant 0$, поэтому $\int\limits_{\Gamma_э}\ldots dx \geqslant 0$. Далее, $(k\nu_1^2 + \nu_2^2)|_{\Gamma_н\cup\Gamma_л} = 0$, $(k\nu_1^2 + \nu_2^2)|_{\gamma_л\cup\gamma_п} \geqslant 0$ и $x_1\nu_1|_{\gamma_л\cup\gamma_п} \geqslant 0$, следовательно, и $\int\limits_{\Gamma_г}\ldots dx \geqslant 0$. При $x_2 > 0$ $k'x_2 > 0$, поэтому можно написать

$$\int\limits_{G_э}\left\{\left(\frac{1}{2}k + k'x_2\right)|D_1u|^2 + \frac{1}{2}|D_2u|^2\right\}dx + \int\limits_{G_г}\left\{\left(-\frac{1}{2}k\right)|D_1u|^2 + \frac{3}{2}|D_2u|^2\right\}dx \geqslant$$

$$\geqslant C\int\limits_G (|k||D_1u|^2 + |D_2u|^2)\, dx.$$

Учитывая полученные оценки интегралов и оценивая (3.45), найдем

$$C\int\limits_G (|k||D_1u|^2 + |D_2u|^2)\, dx \leqslant 2\left|\int\limits_G Lu\cdot\overline{\left(x_1D_1u + bD_2u - \frac{1}{4}u\right)}\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int\limits_G \frac{1}{|k|}|Lu|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_G |k|\left|x_1D_1u + bD_2u - \frac{1}{4}u\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_1\|Lu\|_{+1}\|u\|_{+2}. \tag{3.46}$$

С другой стороны, очевидно,

$$\int\limits_{G_э} (k \mid D_1 u \mid^2 + \mid D_2 u \mid^2)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{G_г} \mid \sqrt{-k} D_1 u - D_2 u \mid^2 dx \leqslant C_2 \int\limits_G (\mid k \mid \mid D_1 u \mid^2 + \mid D_2 u \mid^2) dx.$$

Левая часть этого неравенства оценивается снизу по лемме 3.1 (лемма применима для рассматриваемых k), в результате получим $\int\limits_G \mid u \mid^2 dx \leqslant C_3 \int\limits_G (\mid k \mid \mid D_1 u \mid^2 + \mid D_2 u \mid^2)\, dx$. Это показывает, что первый интеграл в (3.46) может быть оценен снизу через $\| u \|^2_{+2}$. Сокращая полученное неравенство на $\| u \|_{+2}$, придем к (3.43). Утверждение доказано.

Неравенство (3.43) влечет некоторую слабую разрешимость задачи Франкля — это вытекает из общих рассмотрений типа приведенных на стр. 107—108. Соответствующий результат мы сформулируем ниже, в теореме 3.3.

Энергетическое неравенство для исходных граничных условий (3.40) доказать не удается, однако теорема единственности гладких решений и в этом случае справедлива. Действительно, пусть $u \in W_2^2(G)$ такова, что $Lu=0$ и удовлетворяет условиям (3.40). Применим тождество (3.6), полагая $G' = G$, $a = x_1$, $b = \max\{0, x_2\}$ и $c = 0$. Учитывая (3.44), получим

$$0 = \int\limits_{G_э} k' x_2 \mid D_1 u \mid^2 dx + \int\limits_{G_г} \{(-k) \mid D_1 u \mid^2 + \mid D_2 u \mid^2\}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_э} \mid N_u \mid^2 (x_1 \nu_1 + x_2 \nu_2)\, (k \nu_1^2 + \nu_2^2)\, dx + \int\limits_{\gamma_л \cup \gamma_п} \mid N_u \mid^2 x_1 \nu_1 (k \nu_1^2 + \nu_2^2)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_п} (-x_1 \nu_1) \mid \sqrt{-k} D_1 u + D_2 u \mid^2 dx + \int\limits_{\Gamma_л} (-x_1 \nu_1) \mid \sqrt{-k} D_1 u - D_2 u \mid^2 dx. \tag{3.47}$$

Так же как и ранее, $\int\limits_{\Gamma_э} \ldots dx \geqslant 0$, $\int\limits_{\gamma_л \cup \gamma_п} \ldots dx \geqslant 0$. Далее, очевидно, $-x_1 \nu_1 |_{\Gamma_п \cup \Gamma_л} \geqslant 0$, поэтому последние два интеграла в (3.47) также неотрицательны. Таким образом,

$$0 \geqslant \int\limits_{G_э} k' x_2 \mid D_1 u \mid^2 dx + \int\limits_{G_г} \{(-k) \mid D_1 u \mid^2 + \mid D_2 u \mid^2\}\, dx,$$

т. е. в $G_э$ $D_1 u = 0$ и в $G_г$ $D_1 u = D_2 u = 0$. Благодаря граничным условиям (3.40) отсюда следует, что $u = 0$ в G. Утверждение доказано.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы. В ней посредством H_{-k} обозначается негативное пространство, построенное по $H_0 = L_2(G)$ и $H_k (k = 1, 2)$. Ясно, что H_{-1} совпадает с пространством L_2 с весом $|k|$ ($\| f \|^2_{-1} = \int\limits_G \mid k \mid \mid f \mid^2 dx$).

Теорема 3.3. *Пусть* (гр) — *граничные условия* (3.40) *задачи Франкля. Всякая функция* $u \in W_2^2$ (гр), *для которой* $Lu = 0$, *равна нулю. Для сопряженных граничных условий* (гр)$^+$ (*имеющих вид* (3.41)) *справедливо энергетическое неравенство*

$$\| Lv \|_{+1} \geqslant C \| v \|_{+2} \qquad (C > 0;\ v \in W_2^2 (\text{гр})^+,\ Lv \in H_{+1}). \qquad (3.48)$$

Задача Франкля $Lu = f$, $u \in$ (гр) *имеет слабое решение* $u \in H_{-1}$ *при любом* $f \in H_{-2}$, *т. е. существует* $u \in H_{-1}$ *такое, что*

$$(u, Lv)_0 = (f, v)_0 \qquad (v \in W_2^2 (\text{гр})^+,\ Lv \in H_{+1}). \qquad (3.49)$$

Для задачи Франкля могут быть получены и более точные по сравнению с (3.48) оценки; можно было бы подобным образом изучать и другие задачи — на этих вопросах мы не останавливаемся. Заметим лишь, что доказанная единственность гладких решений с условием (3.40) позволяет утверждать на основании теоремы 3.1, гл. II, условную разрешимость задачи $Lu = f$, $u|_\Gamma = 0$ при любой $f \in W_2^{-2}(G)$.

Глава V

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Всякий самосопряженный оператор в конечномерном гильбертовом пространстве имеет полную систему собственных векторов. В связи с этим появляется естественное желание получить подобный результат для самосопряженных операторов в произвольном гильбертовом пространстве H. Однако простые примеры показывают, что не у всякого самосопряженного оператора A, действующего в H, такая система существует, и поэтому в прямой форме получить обобщение конечномерной теоремы нельзя.

В качестве подобного примера можно взять оператор умножения A на независимую переменную в пространстве $L_2((0,1))$. Собственная функция $\varphi(x)$, отвечающая собственному значению λ, теперь удовлетворяет равенству $(A\varphi)(x) = x\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$. Решением этого уравнения служит δ_λ — δ-функция, сосредоточенная в точке $x = \lambda$. Так как $\delta_\lambda \overline{\in} L_2((0,1))$, то у оператора умножения нет собственных функций. Вместе с тем этот пример показывает, что хотя обычных собственных функций у A нет, но у него имеются собственные функции, являющиеся обобщенными.

Оказывается, что подобная ситуация имеет место в общем случае сепарабельного гильбертова пространства H (предположение сепарабельности существенно). Точнее, пусть имеется оснащение $\Phi' \supseteq H \supseteq \Phi$. Тогда при некоторых дополнительных предположениях относительно такого оснащения всякий самосопряженный оператор A в H имеет среди элементов из Φ' полную систему собственных векторов. Желательно, чтобы пространство Φ' было как можно «ближе» к H (в конечномерном случае $\Phi' = H = \Phi$), поэтому в качестве Φ следует выбирать пространство, которое возможно полнее исчерпывает H.

§ 1. Процедура дифференцирования разложения единицы

1. Некоторые сведения об операторах Гильберта — Шмидта. Как уже говорилось на стр. 63, оператор A, действующий из сепарабельного гильбертова пространства H_1 в гильбертово H_2, называется оператором Гильберта — Шмидта, если для некоторого (а значит и для любого) ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots$ пространства H_1 сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \| Ae_j \|_{H_2}^2$. Можно показать, что оператор Гильберта—Шмидта обязательно вполне непрерывен. Положим

$$|A|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \| Ae_j \|_{H_2}^2; \qquad (1.1)$$

число $|A|$ носит название гильбертовой нормы оператора A. Просто проверить, что $|\lambda A| = |\lambda||A|$, $|A+B| \leqslant |A| + |B|$, $\|A\| \leqslant |A|$.

Если H_2 сепарабельно и B действует непрерывно из него в H_3, то BA действует из H_1 в H_3 и является оператором Гильберта—Шмидта, причем, очевидно, справедливо первое из неравенств

$$|BA| \leqslant \|B\| |A|, \quad |AB| \leqslant |A| \|B\|. \tag{1.2}$$

Во втором неравенстве предполагается, что B действует непрерывно из H_1 в H_2, A — из H_2 в H_3, все пространства сепарабельны. Это неравенство следует из первого неравенства и следующего замечания: если оператор Гильберта — Шмидта C действует из сепарабельного H_1 в сепарабельное H_2, то C^* также оператор Гильберта — Шмидта и $|C^*| = |C|$. Для доказательства заметим, что если $l_1, l_2, \ldots$ — базис в H_2, то

$$|C|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |(Ce_j, l_k)_{H_2}|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |(e_j, C^* l_k)_{H_1}|^2 = |C^*|^2.$$

Будем рассматривать теперь операторы, действующие в одном сепарабельном гильбертовом пространстве H; пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированный базис в H. Неотрицательный оператор A имеет конечный след, если

$$\text{Сл. } (A) = \sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j) < \infty. \tag{1.3}$$

Легко убедиться, что определение Сл. (A), как и гильбертовой нормы, не зависит от выбора ортонормированного базиса. *Для неотрицательного A и ограниченного B справедливы неравенства*

$$|A| \leqslant \text{Сл. } (A), \quad \text{Сл. } (B^*AB) \leqslant \|A\| |B|^2,$$
$$\text{Сл. } (B^*AB) \leqslant \|B\|^2 \text{ Сл. } (A). \tag{1.4}$$

Доказательство. Первое неравенство вытекает из выражения

$$|A|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |(Ae_k, e_j)|^2 \tag{1.5}$$

и следующей из неотрицательности A оценки $|(Ae_k, e_j)|^2 \leqslant (Ae_k, e_k)(Ae_j, e_j)$. Доказательство второго:

$$\text{Сл. } (B^*AB) = \sum_{j=1}^{\infty} (B^*ABe_j, e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (ABe_j, Be_j) \leqslant$$
$$\leqslant \|A\| \sum_{j=1}^{\infty} \|Be_j\|^2 = \|A\| |B|^2.$$

Для доказательства третьего неравенства выберем в качестве $e_1, e_2, \ldots$ ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора A. Тогда $a_{jk} = a_{jj}\delta_{jk}$, где $a_{jk} = (Ae_k, e_j)$, и мы получим ($b_{jk} = (Be_k, e_j)$):

$$\text{Сл. } (B^*AB) = \sum_{j=1}^{\infty} (B^*ABe_j, e_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_{kj} a_{kk} b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kk} \left(\sum_{j=1}^{\infty} | b_{kj} |^2 \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{kk} \| B^*e_k \|^2 \leqslant \| B^* \|^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{kk} = \| B \|^2 \text{ Сл. } (A).$$

2. **Дифференцирование операторной меры.** Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\Theta(\Delta)$ — функция борелевских множеств на вещественной оси, значениями которой служат ограниченные операторы в H. Функция $\Theta(\Delta)$ носит название неотрицательной операторной меры, если она на пустом множестве равна нулю, операторы $\Theta(\Delta)$ неотрицательны и выполняется требование слабой абсолютной аддитивности: для непересекающихся Δ_j в смысле слабой сходимости

$$\Theta\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \Theta(\Delta_j). \tag{1.6}$$

Предположим, что мера Θ имеет локально ограниченный след: для ограниченных Δ Сл. $(\Theta(\Delta)) < \infty$. Нетрудно проверить, что $\varrho(\Delta) =$ $=$ Сл. $(\Theta(\Delta))$ будет обычной неотрицательной мерой, определенной на произвольных борелевских Δ (при этом для неограниченного Δ, естественно, полагаем $\varrho(\Delta) = \lim\limits_{n \to \infty} \varrho(\Delta \cap (-n, n)) \leqslant \infty$).

Теорема 1.1. Для ϱ-почти всех λ существует операторная функция $\Psi(\lambda) \geqslant 0$, $\|\Psi(\lambda)\| \leqslant$ Сл. $(\Psi(\lambda)) = 1$, такая, что для любого борелевского Δ

$$\Theta(\Delta) = \int_{\Delta} \Psi(\lambda)\, d\varrho(\lambda). \tag{1.7}$$

Функция $\Psi(\lambda)$ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ϱ-меры. Почти в каждой точке λ функцию $\Psi(\lambda)$ можно получить как слабый предел последовательности операторов $\frac{1}{\varrho(\Delta_\nu)}\Theta(\Delta_\nu)$, где Δ_ν — некоторая последовательность ин-

тервалов, стягивающихся к λ. *Интеграл сходится по норме (и даже по гильбертовой норме) операторов для* Δ *таких, что* $\varrho(\Delta) < \infty$.

Доказательство. Числовая мера $(\Theta(\Delta) f, g)$ $(f, g \in H)$ абсолютно непрерывна относительно ϱ, так как, если $\varrho(\Delta) = 0$, то и $|(\Theta(\Delta) e_k, e_j)|^2 \leqslant (\Theta(\Delta) e_k, e_k)(\Theta(\Delta) e_j, e_j) \leqslant \varrho^2(\Delta) = 0$, т. е. $\Theta(\Delta) = 0$. Поэтому по теореме Радона—Никодима (см. стр. 20—21) справедливо представление

$$(\Theta(\Delta) f, g) = \int_\Delta \Psi_{f, g}(\lambda)\, d\varrho(\lambda), \tag{1.8}$$

где функция $\Psi_{f, g}(\lambda)$ определена на множестве $\Lambda_{f, g}$ полной меры, суммируема и может быть получена как предел $\Psi_{f, g}(\lambda) = \lim \frac{1}{\varrho(\Delta_\nu)}(\Theta(\Delta_\nu) f, g)$, где Δ_ν — последовательность интервалов некоторого разбиения оси, содержащих точку λ, и стягивающихся к ней. Пусть R — некоторое счетное плотное в H множество. Положим $\Lambda = \bigcap\limits_{f, g \in R} \Lambda_{f, g}$, это множество тоже полной меры; для $\lambda \in \Lambda$ существует предел $\left(\frac{\Theta(\Delta_\nu)}{\varrho(\Delta_\nu)} f, g\right)$ при любых $f, g \in R$. Покажем, что при $\lambda \in \Lambda$ последовательность операторов $\frac{\Theta(\Delta_\nu)}{\varrho(\Delta_\nu)}$ слабо сходится к некоторому предельному оператору $\Psi(\lambda)$. Для этого достаточно убедиться, что $\left\|\frac{\Theta(\Delta_\nu)}{\varrho(\Delta_\nu)}\right\|$ ограничены. Мы установим более сильное неравенство $\left|\frac{\Theta(\Delta_\nu)}{\varrho(\Delta_\nu)}\right| \leqslant 1$, из которого также будет следовать, что $|\Psi(\lambda)| \leqslant 1$. Требуемое неравенство вытекает из оценки

$$|\Theta(\Delta_\nu)|^2 = \sum_{j, k=1}^{\infty} |(\Theta(\Delta_\nu) e_k, e_j)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j, k=1}^{\infty} (\Theta(\Delta_\nu) e_k, e_k)(\Theta(\Delta_\nu) e_j, e_j) = \varrho^2(\Delta_\nu).$$

Оператор $\Psi(\lambda)$ неотрицателен как слабый предел неотрицательных операторов. Далее, при $\lambda \in \Lambda$ и $f, g \in R$ $\Psi_{f, g}(\lambda) = (\Psi(\lambda) f, g)$, поэтому из (1.8) следует, что

$$(\Theta(\Delta) f, g) = \int_\Delta (\Psi(\lambda) f, g)\, d\varrho(\lambda) \quad (f, g \in R).$$

Так как $\|\Psi(\lambda)\| \leqslant |\Psi(\lambda)| \leqslant 1$, то полученное равенство при помощи предельного перехода распространяется на любые $f, g \in H$. Но тогда это означает, что справедливо (1.7).

Покажем, что ϱ-почти везде Сл. $(\Psi(\lambda)) = 1$. Пусть $e_1, e_2 \ldots$ — некоторый ортонормированный базис в H; используя (1.7) и теорему Фубини, получим для любого Δ

$$\int_\Delta d\varrho(\lambda) = \varrho(\Delta) = \text{Сл.}\,(\Theta(\Delta)) = \sum_{j=1}^{\infty} (\Theta(\Delta) e_j, e_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_\Delta (\Psi(\lambda) e_j, e_j)\, d\varrho(\lambda) = \int_\Delta \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\Psi(\lambda) e_j, e_j) \right) d\varrho(\lambda),$$

что и доказывает утверждение.

Пусть наряду с (1.7) имеет место аналогичное представление с функцией $\Psi_1(\lambda)$. Так как для любого борелевского Δ $\int_\Delta (\Psi(\lambda\; f, g)\, d\varrho(\lambda) = \int_\Delta (\Psi_1(\lambda) f, g)\, d\varrho(\lambda)$, то при фиксированных f, g $(\Psi(\lambda) f, g) = (\Psi_1(\lambda) f, g)$ ϱ-почти везде. Отсюда благодаря сепарабельности H легко следует, что и $\Psi(\lambda) = \Psi_1(\lambda)$ почти везде.

Всюду выше мы понимали интеграл (1.7) в слабом смысле. Однако в действительности в случае $\varrho(\Delta) < \infty$ он сходится в смысле гильбертовой нормы операторов — из неравенства $|\Psi(\lambda)| \leqslant 1$ следует оценка $\int_\Delta |\Psi(\lambda)|\, d\varrho(\lambda) \leqslant \varrho(\Delta) < \infty$. Теорема доказана.

Ниже, опираясь на теорему 1.1, мы построим теорию разложений по обобщенным собственным векторам. Для некоторых вопросов этой теории будет полезна также теорема о дифференцировании «незнакопостоянной» операторной меры. Пусть B_1, B_2 — сепарабельные банаховы пространства, B_2' — сопряженное пространство антилинейных непрерывных функционалов l над B_2:(l, f) $(f \in B_2)$. Рассмотрим функцию $\Theta(\Delta)$ борелевских множеств Δ на вещественной оси, значениями которой являются ограниченные операторы, действующие из B_1 в B_2'. Такая функция носит название операторной меры, если она равна нулю на пустом множестве и абсолютно аддитивна: справедливо равенство (1.6) со слабо сходящимся рядом. Вариацией Θ на борелевском множестве Δ называется число

$$\varrho(\Delta) = \operatorname*{Var}_\Delta \Theta = \sup \sum_j \|\Theta(\Delta_j)\|, \tag{1.9}$$

где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся Δ_j, расположенных на Δ. Предположим, что Θ имеет локально ограниченную вариацию: $\varrho(\Delta) < \infty$ для ограниченных Δ. Легко проверить, что на произвольных борелевских Δ $\varrho(\Delta)$ является неотрицательной мерой, при этом на неограниченном Δ как и ранее полагаем $\varrho(\Delta) = \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(\Delta \cap (-n, n)) \leqslant \infty$.

Теорема 1.2. *Для ϱ-почти всех λ существует операторная функция $\Psi(\lambda)$ ($\Psi(\lambda)$ действует из B_1 в B_2'), $\|\Psi(\lambda)\| = 1$, такая, что справедливо представление* (1.7) *и верны остальные заключения теоремы 1.1 (за исключением сходимости в гильбертовой норме интеграла* (1.7); *его сходимость имеет место в смысле обычной нормы операторов).*

Доказательство можно проводить по схеме доказательства теоремы 1.1: мера $(\Theta(\Delta) f, g)$ $(f \in B_1, g \in B_2)$ абсолютно непрерывна относительно $\varrho(\Delta)$, поэтому согласно теореме Радона—Никодима можно написать представление (1.8). Далее повторяются предыдущие рассуждения, при этом нужно пользоваться оценкой $\left\| \dfrac{\Theta(\Delta_\nu)}{\varrho(\Delta_\nu)} \right\| \leqslant 1$, справедливой благодаря определению (1.9). Из этой оценки следует, что $\| \Psi(\lambda) \| \leqslant 1$. Покажем, что ϱ-почти везде $\| \Psi(\lambda) \| = 1$. Действительно, предполагая противное, найдем $q < 1$ и Δ, $\varrho(\Delta) > 0$, такие, что $\| \Psi(\lambda) \| \leqslant q$ $(\lambda \in \Delta)$. Тогда для конечного числа непересекающихся Δ_j, расположенных на Δ, имеем благодаря (1.7)

$$\sum_j \| \Theta(\Delta_j) \| = \sum_j \left\| \int_{\Delta_j} \Psi(\lambda)\, d\varrho(\lambda) \right\| \leqslant \sum_j \int_{\Delta_j} \| \Psi(\lambda) \|\, d\varrho(\lambda) \leqslant q\varrho(\Delta).$$

Переходя слева в этом неравенстве к sup, получим $\varrho(\Delta) \leqslant q\varrho(\Delta)$, что абсурдно. Итак, можно считать, что $\| \Psi(\lambda) \| = 1$. Теорема доказана.

Заметим, что обе доказанные теоремы подобным же образом формулируются и устанавливаются в многомерном случае: $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ точка q-мерного пространства (роль Δ_ν теперь играют некоторые параллелепипеды, см. стр. 21). Они справедливы и для мер, заданных на подмножествах абстрактного пространства с тем лишь изменением, что нельзя написать соотношение вида $\dfrac{1}{\varrho(\Delta_\nu)} \Theta(\Delta_\nu) \to \Psi(\lambda)$; доказательства теперь несколько усложняются.

Теоремам 1.1 и 1.2 легко придать форму, подобную обычной теореме Радона—Никодима. Именно, операторную меру $\Theta(\Delta)$ будем называть абсолютно непрерывной относительно неотрицательной скалярной меры $\mu(\Delta)$, если из равенства $\mu(\Delta) = 0$ следует $\Theta(\Delta) = 0$. Тогда такую меру $\Theta(\Delta)$, удовлетворяющую дополнительному условию локальной ограниченности Сл. $(\Theta(\Delta))$ или $\underset{\Delta}{\mathrm{Var}}\, \Theta$, можно продифференцировать по $\mu(\Delta)$ и выразить посредством интеграла от производной. Это немедленно вытекает из (1.7), если заметить, что $\varrho(\Delta) = \text{Сл.}\ (\Theta(\Delta))$, $\underset{\Delta}{\mathrm{Var}}\,\Theta$ абсолютно непрерывна относительно $\mu(\Delta)$.

3. Теорема о разложении. Пусть A — некоторый самосопряженный в H оператор, $E(\Delta)$ — его разложение единицы. Если λ_0—точка дискретного спектра, то скачок $E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0}$ является проекционным оператором на собственное подпространство, отвечающее λ_0. В общем случае роль проекционного оператора, естественно, должна играть производная $\dfrac{dE_\lambda}{d\varrho(\lambda)}$ по некоторой мере ϱ. Однако к операторной мере $E(\Delta)$ непосредственно нельзя применить теорему 1.1 (или 1.2), так как Сл. $(E(\Delta))$ (или $\underset{\Delta}{\mathrm{Var}}\,E$) не будет локально ограниченным. Однако можно поступить следующим образом. Выберем в H некоторый неограниченный оператор T с плотной областью определения $\mathfrak{D}(T)$, для которого существует во всем H левый обратный T^{-1} (т. е. $T^{-1}T = E$), являющийся оператором Гильберта — Шмидта. Рассмотрим операторную неотрицательную меру

$$\Theta(\Delta) = T^{-1*}E(\Delta)\,T^{-1}. \tag{1.10}$$

Благодаря второму из неравенств (1.4) имеем для любого борелевского $\Delta \subseteq (-\infty, \infty)$: $\varrho(\Delta) = \text{Сл.}\ (\Theta(\Delta)) \leqslant \| E(\Delta) \| \, | T^{-1} |^2 = | T^{-1} |^2 < \infty$. Таким образом, к мере (1.10) уже можно применить теорему 1.1, и мы получим для $f, g \in \mathfrak{D}(T)$ и любого борелевского Δ

$$(E(\Delta) f, g) = (E(\Delta)\, T^{-1}Tf,\ T^{-1}Tg) = (T^{-1*}E\,(\Delta)T^{-1}Tf,\ Tg) =$$

$$= (\Theta(\Delta)\, Tf,\ Tg) = \int\limits_\Delta (\Psi(\lambda)\, Tf,\ Tg)\, d\varrho(\lambda).$$

Если бы $\Psi(\lambda)$ был построен по $\Theta(\Delta) = E(\Delta)$, то это был бы проекционный оператор на собственное подпространство, отвечающее собственному числу λ. В нашем случае роль проекционного оператора должно играть, вообще говоря, лишенное смысла выражение $T^*\Psi(\lambda)\,T$; векторы $T^*\Psi(\lambda)\,Tf$ при любом f должны быть собственными и поэтому при любом $u \in \mathfrak{D}(A)$

$$(T^*\Psi(\lambda)\,Tf,\quad (A - \lambda E)\,u) = ((A - \lambda E)\,T^*\Psi(\lambda)\,Tf,\ u) = 0. \tag{1.11}$$

Оказывается, что несмотря на приблизительность последней формулировки в полученную ситуацию можно вложить точный смысл и записать аналог равенства (1.11) (см. ниже, равенство (1.14)). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть $E(\Delta)$ — разложение единицы, отвечающее самосопряженному оператору A, действующему в сепарабельном* *гильбертовом пространстве H, а T — произвольный неограниченный оператор с плотной областью определения $\mathfrak{D}(T)$, для которого существует левый обратный оператор T^{-1} (т. е. $T^{-1}T = E$), определенный во всем H и являющийся оператором Гильберта — Шмидта. Тогда при любом борелевском Δ справедливо равенство Парсеваля*

$$(E(\Delta)f, g) = \int_{\Delta} (\Psi(\lambda)Tf, Tg)\, d\varrho(\lambda) \quad (f, g \in \mathfrak{D}(T)), \tag{1.12}$$

где $d\varrho(\lambda)$ —некоторая неотрицательная конечная ($\varrho((-\infty, \infty)) < \infty$) мера, определенная на борелевских множествах на оси, а $\Psi(\lambda)$— определенная ϱ-почти везде операторная функция, значениями которой служат операторы в H, причем

$$\Psi(\lambda) \geqslant 0, \quad \|\Psi(\lambda)\| \leqslant \text{Сл.}\,(\Psi(\lambda)) = 1. \tag{1.13}$$

Грубо говоря, оператор $T^*\Psi(\lambda)T$ является проекционным на собственное подпространство, отвечающее λ. Точно это означает следующее: для каждого счетного семейства векторов $u \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(T)$ таких, что u $Au \in \mathfrak{D}(T)$, справедливо ϱ-почти для всех λ равенство

$$\Psi(\lambda)T(A - \lambda E)u = 0. \tag{1.14}$$

Эта теорема является основной в теории разложений по обобщенным собственным векторам самосопряженного оператора. В ее формулировке пока что не фигурирует понятие обобщенного собственного вектора — элемента некоторого пространства с негативной нормой; такая интерпретация теоремы легко может быть получена, это будет сделано в следующем параграфе.

Доказательство равенства Парсеваля (1.12) уже проведено, соотношения (1.13) непосредственно следуют из теоремы 1.1. Остается убедиться в справедливости (1.14). Пусть U — некоторое счетное множество векторов $u \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(T)$ таких, что и $Au \in \mathfrak{D}(T)$; R—плотное в H счетное множество. Согласно теореме 1.1 для $u \in U$, $f \in R$ имеем

$$(\Psi(\lambda)T(A - \lambda E)u, f) = \lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{\Theta(\Delta_\nu)}{\varrho(\Delta_\nu)} T(A - \lambda E)u, f \right) =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\varrho(\Delta_\nu)} (T^{-1^*}E(\Delta_\nu)(A - \lambda E)u, f) =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\varrho(\Delta_\nu)} (E(\Delta_\nu)(A - \lambda E)u, T^{-1}f) =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\varrho(\Delta_\nu)} \int\limits_{\Delta_\nu} (\mu - \lambda)\, d\,(E_\mu u,\ T^{-1}f). \tag{1.15}$$

Мера $\omega(\Delta) = (E(\Delta)\,u,\ T^{-1}f)$ абсолютно непрерывна относительно $\varrho(\Delta)$. В самом деле, если $\varrho(\Delta) = 0$, то и $\Theta(\Delta) = 0$ (см. стр. 323), а значит для $g, h \in \mathfrak{D}(T)$ имеем $(E(\Delta)\,g,\ h) = (\Theta(\Delta)\,Tg,\ Th) = 0$. Так как $\mathfrak{D}(T)$ плотно в H, то отсюда следует равенство $E(\Delta) = 0$, что и вызывает абсолютную непрерывность ω.

Из ее абсолютной непрерывности следует, что предел в правой части равенства (1.15) на множестве $\mathrm{M}_{u,f}$ полной меры равен нулю:

$$\frac{1}{\varrho(\Delta_\nu)} \left| \int\limits_{\Delta_\nu} (\mu - \lambda)\, d\,(E_\mu u,\ T^{-1}f) \right| = \frac{1}{\varrho(\Delta_\nu)} \left| \int\limits_{\Delta_\nu} (\mu - \lambda)\, \frac{d\omega}{d\varrho}\, d\varrho(\lambda) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\mu\in\Delta_\nu} |\mu - \lambda|\, \frac{1}{\varrho(\Delta_\nu)} \int\limits_{\Delta_\nu} \left| \frac{d\omega}{d\varrho} \right| d\varrho(\lambda) \to 0$$

для тех λ, для которых $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{1}{\varrho(\Delta_\nu)} \displaystyle\int\limits_{\Delta_\nu} \left| \frac{d\omega}{d\varrho} \right| d\varrho(\lambda)$ конечен. Но тогда на множестве полной меры $\mathrm{M} = \bigcap\limits_{u\in U,\ f\in R} \mathrm{M}_{u,f}$ он равен нулю и при любых $u \in U$, $f \in R$. При фиксированном $u \in U$ $(\Psi(\lambda)\, T(A - \lambda E)u,\ f) = 0$ для каждого $f \in R$, благодаря плотности R в H отсюда следует (1.14). Теорема доказана.

Равенство Парсеваля (1.12) легко записать (неединственным образом) в эквивалентной форме, содержащей „индивидуальные“ собственные векторы, а не оператор $\Psi(\lambda)$. Для этого обозначим через $\omega_\alpha(\lambda)$ $(\alpha = 1, \ldots, N_\lambda \leqslant \infty)$ полный набор ортонормированных собственных векторов вполне непрерывного неотрицательного оператора $\Psi(\lambda)$ (λ фиксировано), отвечающих собственным значениям $\nu_\alpha(\lambda) > 0$, и положим $\psi_\alpha(\lambda) = \sqrt{\nu_\alpha(\lambda)}\,\omega_\alpha(\lambda)$. Разлагая $(\Psi(\lambda)\,Tf,\ Tg)$ в билинейный ряд по $\psi_\alpha(\lambda)$, получим

$$(\Psi(\lambda)\,Tf,\ Tg) = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \overline{(\psi_\alpha(\lambda),\ Tf)}\,(\psi_\alpha(\lambda),\ Tg). \tag{1.16}$$

Подставляя разложение (1.16) в (1.12), придем к доказательству основной части следующей теоремы.

Теорема 1.4. *Для любых* $f, g \in \mathfrak{D}(T)$ *и борелевского* Δ *справедливо равенство Парсеваля в форме:*

$$(E(\Delta) f, g) = \int\limits_{\Delta} \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \overline{(\psi_\alpha(\lambda), Tf)} (\psi_\alpha(\lambda), Tg)\, d\varrho(\lambda) \quad (N_\lambda \leqslant \infty). \quad (1.17)$$

Здесь $\psi_\alpha(\lambda)$ — *ортогональные векторы в* H, *для которых* $T^*\psi_\alpha(\lambda)$ *является собственным вектором оператора* A, *отвечающим собственному числу* λ *в том смысле, что для каждого* u, *фигурирующего в теореме 1.3,*

$$(\psi_\alpha(\lambda), \ T(A - \lambda E) u) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, N_\lambda); \qquad (1.18)$$

при этом

$$\sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \| \psi_\alpha(\lambda) \|^2 = 1. \qquad (1.19)$$

Наоборот, если имеет место равенство Парсеваля в форме (1.17) *с ортогональными векторами* $\psi_\alpha(\lambda)$, *удовлетворяющими* (1.18) *и* (1.19), *то оно имеет место и в форме* (1.12).

Закончим доказательство теоремы. Равенство (1.14) эквивалентно соотношению

$$(\Psi(\lambda) f, \ T(A - \lambda E) u) = (f, \ \Psi(\lambda)\, T(A - \lambda E) u) = 0 \ (f \in H, \ u \in U). \qquad (1.20)$$

Полагая в (1.20) $f = \psi_\alpha(\lambda)$, придем к (1.18). Далее

$$\sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \| \psi_\alpha(\lambda) \|^2 = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \nu_\alpha(\lambda) = \text{Сл.}\ (\Psi(\lambda)) = 1.$$

Докажем вторую часть. Пусть $\omega_\alpha(\lambda)$ — нормированные векторы $\psi_\alpha(\lambda)$ (т. е. $\psi_\alpha(\lambda) = \| \psi_\alpha(\lambda) \| \omega_\alpha(\lambda)$). Определим неотрицательный оператор $\Psi(\lambda)$, полагая

$$(\Psi(\lambda) f, g) = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \overline{(\psi_\alpha(\lambda), f)} (\psi_\alpha(\lambda), g) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \| \psi_\alpha(\lambda) \|^2 \overline{(\omega_\alpha(\lambda), f)} (\omega_\alpha(\lambda), g)$$

$$(f, g \in H)$$

(благодаря (1.19) последний ряд сходится). Так определенный оператор непрерывен, более того, Сл. $(\Psi(\lambda)) = 1$. Действительно, дополним ортонормированную последовательность $\omega_\alpha(\lambda)$ до ортонормированного базиса e_α в H. Тогда $(\Psi(\lambda)e_\alpha, e_\alpha) = 0$ для всех α за тем исключением, когда e_α совпадает с некоторым $\omega_\gamma(\lambda)$; в этом случае $(\Psi(\lambda)e_\alpha, e_\alpha) = \|\psi_\gamma(\lambda)\|^2$. Согласно (1.19)

$$\text{Сл.}\,(\Psi(\lambda)) = \sum_{\alpha=1}^{\infty}(\Psi(\lambda)e_\alpha, e_\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{N_\lambda}\|\psi_\alpha(\lambda)\|^2 = 1\,.$$

Из определения оператора $\Psi(\lambda)$ следует, что равенство (1.17) влечет (1.12). Осталось проверить (1.14). Это соотношение эквивалентно (1.20), для установления же последнего следует разложить f по базису e_α и воспользоваться определением $\Psi(\lambda)$ и (1.18). Теорема доказана.

В заключение этого пункта запишем посредством $\Psi(\lambda)$ функцию оператора A. Итак, пусть $F(\lambda)$ — некоторая комплекснозначная измеримая по Борелю функция на спектре A. Оператор $F(A)$ определяется посредством равенства

$$F(A)f = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,dE_\lambda f \tag{1.21}$$

на всех тех векторах f, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2 d(E_\lambda f, f) < \infty;$$

они образуют область определения $\mathfrak{D}(F(A))$ оператора $F(A)$. Умножая (1.21) скалярно на g и пользуясь (1.12), можем написать

$$(F(A)f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)(\Psi(\lambda)Tf, Tg)\,d\varrho(\lambda)\ (f \in \mathfrak{D}(F(A))\cap\mathfrak{D}(T),\ g\in\mathfrak{D}(T)). \tag{1.22}$$

Аналогично можно использовать и представление (1.17).

4. Обратная теорема. В предыдущем пункте мы доказали равенство Парсеваля, предполагая, что T^{-1} имеет конечную гильбертову норму. Мы сейчас покажем, что это предположение относительно T существенно, если мы желаем с его помощью строить разложения для любого самосопряженного оператора в H. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. *Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H определен неограниченный оператор T со всюду плотной областью определения $\mathfrak{D}(T)$, для которого существует ограниченный обратный T^{-1}. Если для любого самосопряженного оператора* *в H справедливо равенство Парсеваля* (1.12), *в котором $d\varrho(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера, а $\Psi(\lambda)$ — определенное ϱ-почти для всех λ семейство равномерно ограниченных ($\|\Psi(\lambda)\| \leqslant C < \infty$) операторов, то T^{-1} является оператором Гильберта — Шмидта.*

Доказательство. Заменяя в (1.12) f и g соответственно на $T^{-1}f_1$ и $T^{-1}g_1 (f_1, g_1 \in H)$ и учитывая, что по предположению T^{-1} — двусторонний обратный, получим $T^{-1*}E(\Delta)T^{-1} = \int\limits_{\Delta} \Psi(\lambda)d\varrho(\lambda)$. Для любой конечной системы непересекающихся борелевских множеств Δ_j на оси имеем

$$\sum_j \|T^{-1*}E(\Delta_j)T^{-1}\| \leqslant \sum_j \int\limits_{\Delta_j} \|\Psi(\lambda)\| d\varrho(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant C\varrho(\bigcup_j \Delta_j) \leqslant C\varrho((-\infty, \infty)),$$

т. е. $\underset{(-\infty, \infty)}{\mathrm{Var}}(T^{-1*}E(\Delta)T^{-1}) < \infty$. Таким образом, теорема будет доказана, если доказать следующий общий факт: *пусть ограниченный оператор C в H таков, что $\underset{(-\infty, \infty)}{\mathrm{Var}}(C^*E(\Delta)C) < \infty$ для любого разложения единицы $E(\Delta)$. Тогда C обязательно Гильберта—Шмидта.*

При доказательстве этого утверждения мы будем пользоваться следующим просто проверяемым замечанием: если ограниченный оператор A в H задается в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots$ матрицей вида $\|a_{jk}\|_1^\infty = \|\bar{\alpha}_j\alpha_k\|_1^\infty$, то $\|A\| = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 = |A|$.

Рассмотрим теперь некоторый ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots$ в H и последовательность различных вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Определим разложение единицы E_λ равенством $E_\lambda = \sum\limits_{\lambda_j < \lambda} P_j$, где P_j — оператор ортогонального проектирования на направление вектора e_j. Обозначая $\|c_{jk}\|_1^\infty$ матрицу оператора C в базисе $e_1, e_2, \ldots$, найдем, что матрица $\|d_{jk}\|_1^\infty$ оператора $C^*P_{j_0}C$ в этом базисе имеет вид: $\|d_{jk}\|_1^\infty = \|\overline{c_{j_0j}}c_{j_0k}\|_1^\infty$. Согласно приведенному выше замечанию $\|C^*P_{j_0}C\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_{j_0k}|^2$. Отсюда

$$\infty > \underset{(-\infty, \infty)}{\mathrm{Var}}(C^*E(\Delta)C) = \sum_{j=1}^{\infty} \|C^*P_jC\| = \sum_{j, k=1}^{\infty} |c_{jk}|^2,$$

т. е. оператор C — Гильберта — Шмидта. Теорема доказана.

Если у T существует лишь левый обратный T^{-1}, то из (1.12) еще не следует $\|T^{-1}\| < \infty$ в силу произвольности значений этого оператора на ортогональном дополнении к $\mathfrak{R}(T)$. Вместе с тем из приведенного доказательства легко усмотреть, что если предполагать замкнутость T и рассматривать T^{-1} как оператор из гильбертова пространства $H_1 = \mathfrak{R}(T)$ в H, то он будет Гильберта-Шмидта, если выполняется (1.12).

5. Обобщения. Теоремы 1.3 и 1.4 можно перенести на более широкие классы операторов A, чем самосопряженные. Такое перенесение не представляет труда и существенно будет использоваться в дальнейшем. Мы рассмотрим четыре класса операторов A.

а) Пусть A — эрмитов оператор в H, а E_λ — его обобщенное разложение единицы, т. е. $E_\lambda = P\widetilde{E}_\lambda P$, где $\widetilde{E}_\lambda$— обычное разложение единицы в некотором более широком гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$, а P — оператор ортогонального проектирования $\widetilde{H}$ на H. К операторной неотрицательной мере $E(\Delta)$ можно применить все рассуждения стр. 326—330; теоремы 1.3 и 1.4 сохраняются без всякого изменения формулировок для эрмитова оператора A и обобщенного разложения единицы E_λ.

б) Пусть A — нормальный оператор в H, т. е. замкнутый оператор с плотной областью определения, для которого $A^*A = AA^*$. По A можно построить разложение единицы $E(\Delta)$, являющееся неотрицательной операторной мерой, определенной на борелевских множествах комплексной плоскости. Все наши построения переносятся на такую $E(\Delta)$, нужно только пользоваться замечанием в конце п. 2 и заменять одинарные интегралы двойными, а λ считать комплексным. Подобно а) можно также рассматривать операторы, допускающие нормальные расширения как в H, так и с выходом в более широкое пространство $\widetilde{H}$.

в) Пусть в H действует q самосопряженных операторов $A_1, \ldots, A_q$ с разложениями единицы $E^{(1)}_{\lambda_1}, \ldots, E^{(q)}_{\lambda_q}$. Операторы A_j называются коммутирующими, если коммутируют при любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ их разложения единицы. В этом случае можно построить q-мерное разложение единицы — операторную меру $E(\Delta)$, где Δ—борелевские множества q-мерного пространства E_q точек $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$, обладающую свойствами, аналогичными свойствам обычного разложения единицы (неотрицательность: $E(\Delta) \geqslant 0$, ортогональность: $E(\Delta')E(\Delta'') = E(\Delta' \cap \Delta'')$), при этом для каждых $f, g \in H$ и ограниченного Δ справедливы равенства

$$(E(\Delta)f, g) = \int\limits_{\Delta} d(E_\lambda f, g), \qquad (A_j E(\Delta) f, g) = \int\limits_{\Delta} \lambda_j d(E_\lambda f, g) (j = 1, \ldots, q). \tag{1.23}$$

Пользуясь замечанием в конце п. 2, можно продифференцировать меру (1.10) (построенную по $E(\Delta)$) по $\varrho(\Delta) = \text{Сл.}\ (\Theta(\Delta))$ и получить операторную функцию $\Psi(\lambda)$ $(\lambda \in E_q)$. Соотношения (1.12) и (1.13), очевидно, сохранятся, только в первом из них интеграл будет q-мерным. Соотношение (1.14) заменится q соотношениями

$$\Psi(\lambda) T (A_j - \lambda_j E) u = 0 \qquad (j = 1, \ldots, q), \tag{1.24}$$

которые получаются точно так же, как и (1.14), только нужно пользоваться вторым равенством из (1.23). В (1.24) u пробегает некоторое счетное множество U_j векторов, такое, что $U_j \subseteq \mathfrak{D}(A_j) \cap \mathfrak{D}(T)$ и $A_j U_j \subseteq \mathfrak{D}(T)$.

Теорема 1.4 также сохраняется в прежней формулировке, лишь векторы $\psi_\alpha(\lambda)$ зависят от $\lambda \in E_q$ и равенства (1.18) приобретают вид:

$$(\psi_\alpha(\lambda), T (A_j - \lambda_j E) u) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, N_\lambda;\ u \in U_j;\ j = 1, \ldots, q). \tag{1.25}$$

г) Пусть в H действуют q эрмитовых операторов $A_1, \ldots, A_q$ с плотными областями определения, которые допускают коммутирующие в смысле в) самосопряженные расширения $\widetilde{A}_1 \supseteq A_1, \ldots, \widetilde{A}_q \supseteq A_q$, вообще говоря, с выходом в более широкое пространство $\widetilde{H} \supseteq H$. Обозначим $\widetilde{E}(\Delta)$ q-мерное разложение единицы, отвечающее $\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_q$, и введем q-мерное обобщенное разложение единицы $E(\Delta)$, полагая $E(\Delta) = P\widetilde{E}(\Delta) P$, где P — оператор ортогонального проектирования $\widetilde{H}$ на H. Операторная мера $E(\Delta)$ обладает, очевидно, всеми свойствами q-мерного разложения единицы за исключением ортогональности. Так как для A_j и $E(\Delta)$ справедливы соотношения (1.23), то все сказанное в в) может быть повторено без изменения формулировок для эрмитовых операторов $A_1, \ldots, A_q$ и их q-мерного обобщенного разложения единицы $E(\Delta)$.

§ 2. Разложение по обобщенным собственным векторам

1. Запись теоремы о разложении в терминах обобщенных векторов. Замечательным обстоятельством является тот факт, что формальным выражениям типа $T^*\Psi(\lambda)T$, $T^*\psi_\alpha(\lambda)$ п. 3, § 1, немедленно придается точный смысл, если воспользоваться понятием обобщенных векторов, изученных в гл. I.

Пусть $H_0 = H$ — сепарабельное гильбертово пространство, в котором действует самосопряженный оператор A; будем строить разложение по обобщенным собственным векторам этого оператора.

Всегда можно предполагать, что H_0 оснащено сепарабельными гильбертовыми пространствами H_+ и H_- с позитивной и негативной нормами:

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+. \tag{2.1}$$

Будем считать, что вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно (см. стр. 63), в остальном выбор H_+ произвольный.

Проведем построение п. 3, § 1, беря в качестве T оператор D, определенный на стр. 51 и рассматриваемый как оператор в H_0. Это возможно, так как $T^{-1} = \hat{J}$, а последний оператор благодаря квазиядерности вложения $H_+ \to H_0$ является оператором Гильберта — Шмидта (см. стр. 64). Используя равенство (1.16), гл. I, можно написать

$$(\Psi(\lambda) Du,\ Dv)_0 = (\mathbf{D}\Psi(\lambda) Du, v)_0 \, (u, v \in H_+ = \mathfrak{D}(D)). \tag{2.2}$$

Оператор $P(\lambda) = \mathbf{D}\Psi(\lambda) D$ при фиксированном λ действует из H_+ в H_- и является оператором Гильберта — Шмидта — последнее вытекает из того, что произведение двух непрерывных операторов, из которых один Гильберта — Шмидта, будет также таковым. Более того, из (1.2), оценки $|\Psi(\lambda)| \leqslant 1$ и изометричности D и $\mathbf{D}$ следует, что

$$|P(\lambda)| = |\mathbf{D}\Psi(\lambda) D| \leqslant \|\mathbf{D}\| \, |\Psi(\lambda)| \, \|D\| = |\Psi(\lambda)| \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Область значений $\mathfrak{R}(P(\lambda))$ является, вообще говоря, незамкнутым линейным множеством в H_-; ее естественно называть обобщенным собственным подпространством, отвечающим точке спектра λ. Оператор $P(\lambda)$ «проектирует» H_+ на это подпространство, причем «проектирование» в известном смысле ортогонально: если $u \in H_+$ таково, что $(\mathfrak{R}(P(\lambda)), u)_0 = 0$, то $P(\lambda) u = 0$. Действительно, для любого $v \in H_+$ согласно (1.16), гл. I, и самосопряженности $\Psi(\lambda)$ имеем

$$(P(\lambda) u, v)_0 = (\mathbf{D}\Psi(\lambda) Du, v)_0 = (\Psi(\lambda) Du,\ Dv)_0 = (Du,\ \Psi(\lambda) Dv)_0 =$$
$$= (u, \mathbf{D}\Psi(\lambda) Dv)_0 = (u, P(\lambda) v)_0 = 0.$$

Учитывая (2.2), равенство Парсеваля (1.12) можно записать в виде

$$(E(\Delta) u, v)_0 = \int_\Delta (P(\lambda) u, v)_0 \, d\varrho(\lambda) \qquad (u, v \in H_+),$$

т. е. во всяком случае в смысле слабой сходимости интеграла

$$E(\Delta) = \int_\Delta P(\lambda) \, d\varrho(\lambda). \tag{2.4}$$

В действительности благодаря оценке (2.3) и конечности ϱ этот интеграл сходится в смысле гильбертовой нормы операторов (действующих из H_+ в H_-). Равенство Парсеваля (2.4) теперь напоминает по форме конечномерный случай — оператор проектирования $E(\Delta)$ разлагается на континуальную сумму элементарных операторов «проектирования» $P(\lambda)$.

Перепишем теперь в терминах обобщенных векторов равенство Парсеваля в форме (1.17). Благодаря (1.16), гл. I, имеем

$$(\psi_\alpha(\lambda), Du)_0 = (\varphi_\alpha(\lambda), u)_0, \quad \varphi_\alpha(\lambda) = \mathbf{D}\psi_\alpha(\lambda) \in H_-$$
$$(u \in H_+;\ \alpha = 1, \ldots, N_\lambda). \tag{2.5}$$

Обобщенный вектор $\varphi_\alpha(\lambda)$ является «индивидуальным обобщенным собственным вектором», отвечающим значению λ. Векторы $\varphi_\alpha(\lambda)$, как $\mathbf{D}$-образы $\psi_\alpha(\lambda)$, образуют ортогональный (в метрике H_-) базис в, вообще говоря, незамкнутом линейном множестве $\mathfrak{R}(P(\lambda))$. Отнесем каждому $u \in H_+$ его «преобразование Фурье» — вектор вида

$$\widetilde{u}(\lambda) = (u_1(\lambda),\ u_2(\lambda), \ldots),\ u_\alpha(\lambda) = (\varphi_\alpha(\lambda), u)_0\ (\alpha = 1, \ldots, N_\lambda).$$

Вектор $\widetilde{u}(\lambda)$ определен ϱ-почти для всех λ, при каждом λ он состоит из N_λ координат. Равенство (1.17) приобретает вид

$$(E(\Delta)u, v)_0 = \int_\Delta \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \overline{u_\alpha(\lambda)}\, v_\alpha(\lambda)\, d\varrho(\lambda) \qquad (u, v \in H_+). \tag{2.6}$$

Ясно, что и равенство (1.22) можно записать в терминах $P(\lambda)$ и $\varphi_\alpha(\lambda)$.

Может создаться впечатление, что результаты этого пункта — специальный случай (при $T = D$) результатов п. 3, § 1. Однако на стр. 80 показано, что H_0 можно оснастить по произвольному оператору T, фигурирующему в п. 3, § 1 (с несущественным дополнительным ограничением: $\|T^{-1}\| \leqslant 1$). В этом случае D метрически равен T, и описанная выше конструкция по существу совпадает с общей конструкцией § 1.

В следующем пункте мы более детально остановимся на понятии обобщенного собственного вектора, после чего изложенные факты будут подытожены в виде теоремы.

2. Понятие обобщенного собственного вектора. Выясним, в каком смысле векторы из $\mathfrak{R}(P(\lambda))$ являются обобщенными собственными для оператора A. Если на A не налагать дополнительных ограничений, то ничего большего, чем соотношения типа (1.14) или (1.20), сказать нельзя. Однако часто встречается следующая ситуация, которую мы опишем в общем случае несамосопряженного A.

Пусть в гильбертовом оснащенном пространстве $H_0(H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+)$ действует некоторый оператор A с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$. Будем говорить, что A допускает продолжение оснащения, если существует линейное плотное в H_+ топологическое пространство Д $\subseteq H_+$ (включение топологическое), входящее в $\mathfrak{D}(A^*)$ и переводящееся оператором A^* непрерывно в H_+. Вектор $\varphi \in H_-$ называется обобщенным собственным вектором оператора A, отвечающим собственному числу λ, если

$$(\varphi, (A^* - \bar{\lambda}E)\,u)_0 = 0 \qquad (u \in \text{Д}). \tag{2.7}$$

Для эрмитова оператора A такого, что Д $\subseteq \mathfrak{D}(A)$ непрерывно им переводится в H_+, в соотношении (2.7) благодаря включению $A^* \supseteq A$ можно заменить A^* на A.

Если φ является обычным вектором из $\mathfrak{D}(A)$, то он будет удовлетворять равенству $A\varphi = \lambda\varphi$, т. е. будет обычным собственным вектором. В самом деле, согласно (2.7):

$$(A\varphi - \lambda\varphi, u)_0 = (\varphi, (A^* - \bar{\lambda}E)\,u)_0 = 0 \qquad (u \in \text{Д});$$

так как Д очевидно плотно в H_0, то отсюда следует, что $A\varphi - \lambda\varphi = 0$.

Приведенное определение обобщенного собственного вектора существенно зависит от выбора H_+ и Д. Если Д сужать, то количество собственных векторов будет увеличиваться: зафиксируем λ, при настолько узком Д, что $(A^* - \bar{\lambda}E)$ Д неплотно в H_+, можно будет найти $w \in H_+$, ортогональное в H_+ к $(A^* - \bar{\lambda}E)$ Д. Тогда $(\mathrm{I}^{-1}w, (A^* - \bar{\lambda}E)\,u)_0 = (w, (A^* - \lambda E)\,u)_+ = 0$ $(u \in \text{Д})$, т. е $\varphi = \mathrm{I}^{-1}w$ — обобщенный вектор, отвечающий собственному значению λ. Ясно, что можно построить примеры, когда у самосопряженного оператора будут обобщенные собственные векторы, отвечающие невещественным λ.

Нетрудно понять, что приведенная выше конструкция по существу связана с некоторым расширением оператора A. Действительно, так как Д $\subseteq H_+$, то Д$' \supseteq H'_+ = H_-$, и мы получаем цепочку

$$\text{Д}' \supseteq H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq \text{Д}, \tag{2.8}$$

обобщающую цепочку (1.10), гл. I, в том отношении, что Д не гильбертово пространство, а линейное топологическое. Однако повторяя рассуждения стр. 49—50, легко убедиться, что для каждого оператора C, непрерывно действующего из Д в H_+, существует оператор C^+, непрерывно действующий из H_- в Д$'$ и связанный с C соотношением

$$(C^+\alpha, u)_0 = (\alpha, Cu)_0 \qquad (\alpha \in H_-,\ u \in \text{Д}). \tag{2.9}$$

По рассмотренному выше оператору A построим теперь оператор $\widetilde{A}=A^{*+}$, действующий непрерывно из H_- в Д'. На $\mathfrak{D}(A)$ он совпадает с $A:(\widetilde{A}f, u)_0=(A^{*+}f, u)_0=(f, A^*u)_0=(Af, u)_0$ ($f\in\mathfrak{D}(A)$, $u\in$ Д $\subseteq\mathfrak{D}(A^*)$), т. е. $\widetilde{A}\supseteq A$. Теперь определение обобщенного собственного вектора (2.7) эквивалентно равенству

$$\widetilde{A}\varphi=\lambda\varphi. \tag{2.10}$$

В предыдущих определениях играет роль по существу то обстоятельство, что A^*, действующий в гильбертовом пространстве H_0, можно сузить настолько, что после сужения $\mathfrak{D}(A^*)\subseteq H_+$, $\mathfrak{D}(A^*)$ плотна в H_+ и $\mathfrak{R}(A^*)\subseteq H_+$. Предположим, что такое сужение можно произвести, тогда $\mathfrak{D}(A^*)$ превращается в топологическое (и даже гильбертово, вообще говоря, неполное) пространство Д $=$ Д$_+$, если ввести скалярное произведение $(u, v)_{Д_+}=(u, v)_+ + (A^*u, A^*v)_+$ ($u, v\in\mathfrak{D}(A^*)=$ Д$_+$). Очевидно, все наложенные ранее требования на Д теперь выполняются; можно полагать Д$'$ = Д$_-$. Из сказанного, в частности, следует, что на стр. 336 можно было бы считать Д всегда гильбертовым пространством.

Перейдем к приложению этих понятий к теореме о разложении. *Всюду ниже мы предполагаем, что Д сепарабельно.*

Лемма 2.1. *Пусть самосопряженный оператор A, рассматриваемый в п.* 1, *допускает продолжение оснащения* (2.1). *Тогда каждый вектор из $\mathfrak{R}(P(\lambda))$ является обобщенным собственным вектором, отвечающим собственному числу λ.*

Доказательство. Пусть $\varphi\in\mathfrak{R}(P(\lambda))$, т. е. $\varphi=P(\lambda)v=\mathbf{D}\Psi(\lambda)Dv$. Выберем в качестве счетного семейства, фигурирующего в теореме 1.3, счетное всюду плотное в Д множество U. Тогда благодаря (1.14) для каждого $u\in U$

$$(\varphi, (A-\lambda E)u)_0=(\mathbf{D}\Psi(\lambda)Dv, (A-\lambda E)u)_0=$$
$$=(\Psi(\lambda)Dv, D(A-\lambda E)u)_0=(Dv, \Psi(\lambda)D(A-\lambda E)u)_0=0. \tag{2.11}$$

Отображение $u\to(A-\lambda E)u$ непрерывно из Д в H_+, поэтому приближая векторами u любой вектор из Д, получим, что (2.11) справедливо для любого $u\in$ Д. Лемма доказана.

Выясним, как будут выглядеть построения предыдущего пункта и аналоги этой леммы для обобщений, намеченных в п. 5, § 1. В случае а) (эрмитов оператор, E_λ — обобщенное разложение единицы) все формулировки, очевидно, прежние. Более подробно рассмотрим случай б), когда оператор A — нормальный. Теперь $E(\Delta)$ — неотрицательная операторная мера на борелевских множествах комплексной плоскости, поэтому функция $\Psi(\lambda)$, получающаяся дифференцированием $T^{-1*}E(\Delta)T^{-1}$ по $\varrho(\Delta) = \text{Сл.}\ (T^{-1*}E(\Delta)T^{-1})$, является функцией комплексного переменного λ, значениями которой служат неотрицательные операторы Гильберта — Шмидта, действующие в H. Повторяя построения п. 1, мы придем к операторной функции $P(\lambda) = \mathrm{D}\Psi(\lambda)D$, значения которой — операторы Гильберта — Шмидта, действующие из H_+ в H_-. Опишем $\mathfrak{R}(P(\lambda))$ подобно лемме 2.1. Повторяя рассуждения стр. 327 — 328, в которых роль Δ_ν играют открытые прямоугольники в плоскости, стягивающиеся к λ, мы получим соотношение (1.14). Подобно (2.11) это соотношение приводит к равенству $(\varphi, (A - \lambda E)u)_0 = 0$ ($u \in Д_2$) для каждого $\varphi \in \mathfrak{R}(P(\lambda))$. Здесь $Д_2 \subseteq \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(A^{**})$, причем предполагается, что A^* допускает продолжение оснащения. Это равенство показывает, что φ является обобщенным собственным вектором оператора A^*, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$.

Вместе с тем φ является и обобщенным собственным вектором оператора A, отвечающим λ. Действительно, можно наряду с равенством типа (1.14) вывести для A равенство $\Psi(\lambda)T(A^* - \bar{\lambda}E)u = 0$ ($u \in U$). Для этого нужно поступать так же, как и на стр. 327—328, и пользоваться только тем, что $A^* = \int_{E_2} \bar{\mu}\,dE_\mu$. Приведенное равенство при понятных предположениях влечет требуемое соотношение $(\varphi, (A^* - \bar{\lambda}E)u)_0 = 0$ ($u \in Д_1$), где $Д_1 \subseteq \mathfrak{D}(A^*)$. Итак, $\varphi \in \mathfrak{R}(P(\lambda))$ является общим обобщенным собственным вектором для A и для A^*:

$$\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi, \quad \tilde{A^*}\varphi = \bar{\lambda}\varphi \quad (\tilde{A} = A^{*+},\ \tilde{A^*} = A^+).$$

Топологические пространства $Д_1$ и $Д_2$, вообще говоря, различны, хотя в большинстве случаев их можно выбирать совпадающими.

Рассмотрим случай в), когда имеется q коммутирующих самосопряженных операторов $A_1, \ldots, A_q$ (такая ситуация может рассматриваться как обобщение случая б), если положено $A_1 = \frac{1}{2}(A + iA^*)$, $A_2 = \frac{1}{2i}(A - iA^*)$). Здесь опять повторяются рассуждения п. 1. В результате мы найдем операторную функцию $P(\lambda) = \mathrm{D}\Psi(\lambda)D$, определенную ϱ-почти для всех $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$. Предположим, что каждый из операторов A_j допускает продолжение оснащения со своим пространством $Д_j$ (в частности, все $Д_j$ могут совпадать). Теперь аналог леммы 2.1 звучит, очевидно, следующим образом: каждый вектор $\varphi \in \mathfrak{R}(P(\lambda))$ является общим собственным вектором системы операторов $A_1, \ldots, A_q$, т. е. справедливы равенства

$$(\varphi, (A_j - \lambda_j E)u)_0 = 0 \quad (u \in Д_j;\ j = 1, \ldots, q),$$

или эквивалентные им равенства

$$\widetilde{A}_j\varphi = \lambda_j\varphi \qquad (\widetilde{A}_j = A_j^{\ +};\ j = 1, \ldots, q).$$

3. **Формулировки теорем о разложении по обобщенным собственным векторам.** Мы сейчас резюмируем результаты двух последних пунктов. *Всюду до конца этого параграфа будем предполагать сепарабельными все встречающиеся пространства.*

Теорема 2.1. *Пусть имеется оснащение*

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \tag{2.12}$$

гильбертова пространства H_0, причем вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно. Для любого самосопряженного оператора A, действующего в H_0, существуют неотрицательная конечная мера $d\varrho(\lambda)$, определенная на борелевских множествах вещественной оси, и определенная ϱ-почти всюду операторная функция $P(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, значениями которой служат операторы Гильберта — Шмидта, действующие из H_+ в H_-, причем

$$|P(\lambda)| \leqslant 1, \qquad (P(\lambda)u, u)_0 \geqslant 0 \quad (u \in H_+)^* \tag{2.13}$$

такие, что справедливо равенство Парсеваля: для любого борелевского Δ разложение единицы $E(\Delta)$, отвечающее A, представимо в виде сходящегося по гильбертовой норме операторов интеграла

$$E(\Delta) = \int_\Delta P(\lambda)\, d\varrho(\lambda). \tag{2.14}$$

Пусть оператор A допускает продолжение оснащения (2.12), *т. е. существует линейное топологическое пространство $Д \subseteq H_+$, плотное в H_+, входящее в $\mathfrak{D}(A)$ и переводящееся оператором A непрерывно в H_+. Тогда $\mathfrak{R}(P(\lambda))$ состоит из обобщенных собственных векторов, отвечающих собственному значению λ.*

Если имеется произвольное оснащение (2.12), *для которого при любом самосопряженном операторе A в H_0 существуют $\varrho(\Delta)$ и $P(\lambda)$ с описанными выше свойствами, то вложение $H_+ \to H_0$ обязательно квазиядерно.*

---

* Более того, $P(\lambda)$ имеет конечный след, равный 1, т. е. для любого ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots$ в H_+ Сл. $(P(\lambda)) = \sum_{j=1}^{\infty}(P(\lambda)e_j, e_j)_0 = 1$. Это свойство $P(\lambda)$ просто следует из равенства Сл. $(\Psi(\lambda)) = 1$; в дальнейшем определеннем следа для операторов, действующих из H_+ в H_-, мы пользоваться не будем.

В пояснении нуждается лишь последнее утверждение теоремы. Рассмотрим связанные с цепочкой (2.12) операторы J и $\mathbf{J}$; так как эти операторы изометрически переводят соответственно H_0 в H_+ и H_- в H_0, то оператор $\Phi(\lambda) = \mathbf{J}P(\lambda)J$ является оператором Гильберта — Шмидта в пространстве H_0, причем $\|\Phi(\lambda)\| \leqslant 1$. Если рассматривать J как самосопряженный оператор $\hat{J}$, действующий в H_0, то, учитывая, что и $E(\Delta)$ действует в H_0, можно написать $\mathbf{J}E(\Delta)J = \hat{J}E(\Delta)\hat{J}$. Теперь из (2.14) после умножения на $\mathbf{J}$ и J следует

$$\hat{J}E(\Delta)\hat{J} = \int_\Delta \Phi(\lambda)\,d\varrho(\lambda), \qquad \|\Phi(\lambda)\| \leqslant 1.$$

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 1.5, получим, что $\operatorname*{Var}_{(-\infty,\infty)} (\hat{J}E(\Delta)\hat{J}) < \infty$. Применяя утверждение, изложенное на стр. 331, теперь замечаем, что $\hat{J}$ — Гильберта-Шмидта, т. е. вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно, а это и требовалось.

Из (2.14), в частности, вытекают следующие равенства:

$$E(\Delta)u = \int_\Delta P(\lambda)u\,d\varrho(\lambda), \qquad u = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)u\,d\varrho(\lambda),$$

$$(u, v)_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (P(\lambda)u, v)_0\,d\varrho(\lambda) \qquad (u, v \in H_+). \tag{2.15}$$

Представление (1.22) для функции $F(A)$ выглядит теперь так:

$$(F(A)u, v)_0 = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)(P(\lambda)u, v)_0\,d\varrho(\lambda) \qquad (u \in \mathfrak{D}(F(A)) \cap H_+, v \in H_+). \tag{2.16}$$

Мера $d\varrho(\lambda)$ носит название спектральной меры оператора A, она сосредоточена, очевидно, на его спектре. Оператор $P(\lambda)$ будем называть оператором обобщенного проектирования на обобщенное собственное подпространство $\mathfrak{R}(P(\lambda))$, отвечающее λ. Так как $P(\lambda)\,d\varrho(\lambda) = \frac{1}{M(\lambda)}P(\lambda)M(\lambda)\,d\varrho(\lambda)$, где $M(\lambda)$ — любая неотрицательная ϱ-локально суммируемая ϱ-почти всюду отличная от нуля функция, то удобно спектральной мерой и оператором обобщенного проектирования называть также $\varrho_1(\Delta) = \int_\Delta M(\lambda)\,d\varrho(\lambda)$ и $P_1(\lambda) = \frac{1}{M(\lambda)}P(\lambda)$. Иными словами, эти понятия нами определены с точностью до множителей. Мера $d\varrho_1(\lambda)$ полностью характеризуется тем, что она абсолютно непрерывна относительно $d\varrho(\lambda)$ и $d\varrho(\lambda)$ абсолютно непрерывна относительно $d\varrho_1(\lambda)$, т. е. тем, что они — эквивалентные меры.

Если наряду с (2.14) имеется представление $E(\Delta) = \int\limits_{\Delta} P_1(\lambda)\, d\varrho_1(\lambda)$, где $P_1(\lambda)$ непрерывно действует из H_+ в H_-, а $d\varrho_1(\lambda)$ сосредоточена на спектре A, то $d\varrho(\lambda)$ будет абсолютно непрерывной относительно $d\varrho_1(\lambda)$. Если дополнительно и $d\varrho_1(\lambda)$ абсолютно непрерывна относительно $d\varrho(\lambda)$, то можно считать $d\varrho_1(\lambda) = M(\lambda)\, d\varrho(\lambda)$ и $P_1(\lambda) = \frac{1}{M(\lambda)} P(\lambda)$ спектральной мерой и оператором обобщенного проектирования. Будем иногда употреблять эти термины и в случае $d\varrho_1(\lambda)$, не являющейся абсолютно непрерывной относительно $d\varrho(\lambda)$.

Так как $|P(\lambda)| \leqslant 1$, то оператору $P(\lambda)$ отвечает обобщенное, вообще говоря, ядро Φ_λ—так называемое обобщенное спектральное ядро. Ядро $\Xi_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \Phi_\mu d\varrho(\mu)$ отвечает оператору $E_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} P(\mu)\, d\varrho(\mu)$ и носит название (обобщенной) спектральной функции. Подробнее об этих понятиях см. на стр. 351—352, 356, 364.

Сформулируем теперь аналог теоремы 1.4.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы (вместе с условием, что A допускает продолжение оснащения). Тогда в обобщенном собственном подпространстве $\mathfrak{R}(P(\lambda))$ можно выбрать (неединственным образом) систему ортогональных (в смысле H_-) обобщенных собственных векторов $\varphi_\alpha(\lambda)(\alpha = 1, \ldots, N_\lambda \leqslant \infty)$ оператора A, отвечающих λ, так что*

$$\sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \| \varphi_\alpha(\lambda) \|_-^2 = 1 \tag{2.17}$$

и равенство Парсеваля записывается в форме

$$(E(\Delta)u, v)_0 = \int\limits_{\Delta} \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \overline{u_\alpha(\lambda)}\, v_\alpha(\lambda)\, d\varrho(\lambda) \qquad (u, v \in H_+); \tag{2.18}$$

$$\tilde{u}(\lambda) = (u_1(\lambda), u_2(\lambda), \ldots), \quad u_\alpha(\lambda) = (\varphi_\alpha(\lambda), u)_0\, (\alpha = 1, \ldots, N_\lambda) \tag{2.19}$$

— «преобразование Фурье» вектора $u \in H_+$.

Наоборот, если имеется равенство Парсеваля в форме (2.18) *с описанными выше векторами $\varphi_\alpha(\lambda)$, то оно имеет место и в форме* (2.14).

Здесь следует лишь пояснить, что последнее утверждение вытекает из последней части теоремы 1.4, так как векторы $\psi_\alpha(\lambda) = \mathrm{J}\varphi_\alpha(\lambda)$ будут обладать всеми требуемыми в этой теореме свойствами.

Из (1.16) очевидно вытекает, что ϱ-почти везде

$$(P(\lambda)u, v)_0 = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \overline{u_\alpha(\lambda)}\, v_\alpha(\lambda) \qquad (u, v \in H_+). \tag{2.20}$$

Подставляя это выражение в (2.15) и (2.16), мы получим запись соответствующих равенств в терминах преобразования Фурье. Заметим, что N_λ равно размерности обобщенного собственного подпространства, отвечающего точке спектра λ, и называется кратностью λ. Кратность, естественно, может изменяться от точки к точке. Если $N_\lambda = 1$, то точка λ называется однократной, если ϱ-почти все λ однократны, то равенства (2.17) — (2.20) существенно упрощаются: суммы заменяются одним слагаемым.

Теорема 2.2 благодаря неединственности построений, вообще говоря, менее удобна, чем теорема 2.1. Однако в одном отношении она полезна — она дает возможность писать равенство Парсеваля и для обычных векторов u, v. Поясним это. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\infty; d\varrho(\lambda)) = L_2(l_2([1, \infty)); (-\infty, \infty), d\varrho(\lambda))$ вектор-функций $\widetilde{f}(\lambda) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots)\,(-\infty < \lambda < \infty)$ со скалярным произведением

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g})_{L_2(\infty;\, d\varrho(\lambda))} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_\alpha(\lambda)\, \overline{g_\alpha(\lambda)}\, d\varrho(\lambda)$$

(подробнее на стр. 564—565). Будем ниже называть преобразованием Фурье и в случае $N_\lambda < \infty$ бесконечный вектор вида $\widetilde{u}(\lambda) = (u_1(\lambda), \ldots, u_{N_\lambda}(\lambda), 0, 0, \ldots)$, такое соглашение ничего не изменит в предыдущих формулах. Теперь для каждого $u \in H_+$ $\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\infty} |u_\alpha(\lambda)|^2 d\varrho(\lambda) < \infty$, поэтому $\widetilde{u}(\lambda) \in L_2(\infty; d\varrho(\lambda))$. Равенство (2.18) при $\Delta = (-\infty, \infty)$ в терминах пространства $L_2(\infty; d\varrho(\lambda))$ запишется в виде

$$(u, v)_0 = (\widetilde{v}, \widetilde{u})_{L_2(\infty;\, d\varrho(\lambda))}.$$

Его можно по непрерывности распространить и на $u, v \in H_0$, при этом под преобразованием Фурье $\widetilde{f}(\lambda)$ вектора $f \in H_0$ следует понимать вектор из $L_2(\infty; d\varrho(\lambda))$, являющийся пределом в $L_2(\infty; d\varrho(\lambda))$ $\widetilde{u}_n(\lambda)$, где $H_+ \ni u_n \to f$ в H_0. В результате мы получим следующее равенство Парсеваля:

$$(f, g)_0 = (\widetilde{g}, \widetilde{f})_{L_2(\infty;\, d\varrho(\lambda))} \quad (f, g \in H_0). \tag{2.21}$$

Ясно, что Фурье-образы $\tilde{f}(\lambda)$ векторов $f \in H_0$, вообще говоря, не заполняют все $L_2(\infty; d\varrho(\lambda))$. Например, это будет так, когда $N_\lambda \leqslant C < \infty$ для ϱ-почти всех λ.

Сформулируем для удобства в виде теорем те обобщения, которые намечены в п. 5, § 1, и в конце предыдущего пункта.

Теорема 2.3. *Пусть в оснащенном гильбертовом пространстве H_0 действует эрмитов оператор A, $E(\Delta)$ — некоторое его обобщенное разложение единицы. Теоремы 2.1 и 2.2 сохраняются и в этом случае без всякого изменения формулировок.*

Теорема 2.4. *Пусть имеется цепочка* (2.12), *причем вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно. Для любого нормального оператора A, действующего в H_0, существуют неотрицательная конечная мера $\varrho(\Delta)$, определенная на борелевских множествах комплексной плоскости C_1, и определенная ϱ-почти везде операторная функция $P(\lambda)$ $(\lambda \in C_1)$ такие, что имеют место соотношения* (2.13) *и* (2.14).

Пусть операторы A и A^* допускают продолжения оснащения (2.12), *т. е. существуют линейные топологические пространства Д$_1$, Д$_2 \subseteq H_+$, плотные в H_+, входящие соответственно в $\mathfrak{D}(A^*)$ и $\mathfrak{D}(A)$ и переводящиеся операторами A^* и A непрерывно в H_+. Тогда $\mathfrak{R}(P(\lambda))$ состоит из обобщенных собственных векторов φ, общих для A и A^*, т. е. выполняются соотношения*

$$(\varphi, (A^* - \bar{\lambda}E)u)_0 = 0 \quad (u \in Д_1), \quad (\varphi, (A - \lambda E)u)_0 = 0 \quad (u \in Д_2). \tag{2.22}$$

Иными словами, для расширений $\tilde{A} = A^{*+}$ и $\tilde{A}^* = A^+$ соответственно операторов A и A^* справедливы равенства

$$\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi, \quad \tilde{A}^*\varphi = \bar{\lambda}\varphi. \tag{2.23}$$

Теорема 2.2 переносится без изменения формулировки, нужно только λ считать комплексным (точнее, меняющимся по спектру A, так как $\varrho(\Delta)$, очевидно, сосредоточена на спектре).

Теорема 2.5. *Пусть имеется цепочка* (2.12), *причем вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно. Для любого коммутирующего семейства самосопряженных операторов $A_1, \ldots, A_q$, действующих в H_0, существует неотрицательная конечная мера $\varrho(\Delta)$, определенная на борелевских множествах q-мерного пространства E_q, и определенная ϱ-почти везде операторная функция $P(\lambda)$ $(\lambda \in E_q)$ такие, что имеют место соотношения* (2.13) *и* (2.14).

Пусть каждый из самосопряженных операторов A_j допускает продолжение оснащения (2.12) *с некоторым Д $=$ Д$_j$ $(j = 1, \ldots, q)$. Тогда $\mathfrak{R}(P(\lambda))$ состоит из обобщенных собственных векторов φ, общих для системы операторов $A_1, \ldots, A_q$, т. е. выполняются соотношения*

$$(\varphi, (A_j - \lambda_j E)u)_0 = 0 \qquad (u \in Д_j;\ j = 1, \ldots, q). \tag{2.24}$$

Иными словами, для расширений $\widetilde{A}_j = A_j^+$ *операторов* A_j *справедливы равенства*

$$\widetilde{A}_j\varphi = \lambda_j\varphi \qquad (j = 1, \ldots, q). \tag{2.25}$$

Теорема 2.2 переносится без изменения формулировки, нужно только λ *считать точкой пространства* E_q.

Теорема 2.6. *Пусть в оснащенном гильбертовом пространстве* H_0 *действует система эрмитовых операторов* $A_1, \ldots, A_q$, *которые допускают расширения до коммутирующих самосопряженных операторов,* $E(\Delta)$ *— отвечающее этой системе* q*-мерное обобщенное разложение единицы. Теорема 2.5 сохраняется для этого случая без изменения формулировки.*

Равенства типа (2.15)—(2.16) легко записываются для теорем 2.3—2.6; мы будем также пользоваться определениями спектральной меры и оператора обобщенного проектирования, вводимыми естественным образом для рассматриваемых обобщений. Ясно также, что в этих случаях может быть введено преобразование Фурье для векторов из H_0 — нужно пользоваться пространством типа $L_2(\infty; d\varrho(\lambda))$, где λ — точка многомерного пространства.

Итак, мы для важных классов операторов построили разложение по обобщенным собственным векторам. Как показывает последняя часть теоремы 2.1, пространство H_- обобщенных векторов выбрано нами максимально близким к H_0.

В заключение сделаем следующее замечание относительно теоремы 2.1. Оператор $E(\Delta)$ можно рассматривать как действующий из H_+ в H_-.

Так как $E(\Delta)$ переводит непрерывно H_0 в H_0, а вложения H_+ в H_0 и H_0 в H_- квазиядерны, то $E(\Delta)$ будет заведомо оператором Гильберта—Шмидта из H_+ в H_-. Формула (2.14) показывает, что существует его производная $\frac{dE_\lambda}{d\varrho(\lambda)} = P(\lambda)$, понимаемая как производная по норме операторов Гильберта—Шмидта. Аналогичное замечание можно сделать и относительно теорем 2.3 — 2.6.

4. Другое доказательство теорем предыдущего пункта. Наметим другой подход к теоремам 2.1 — 2.6, использующий спектральную теорему в форме Неймана. Мы ограничимся лишь выводом равенства (2.18), из которого можно получить и основные из остальных утверждений. Согласно теореме Неймана по каждому самосопряженному оператору A, действующему в сепарабельном гильбертовом пространстве H_0, можно построить некоторое подпространство L_0 пространства $L_2(\infty; d\varrho(\lambda))$, унитарно эквивалентное $H_0 (f \leftrightarrow \widetilde{f}(\lambda)$, где $f \in H_0$, $\widetilde{f}(\lambda) = (\widetilde{f}_1(\lambda), \widetilde{f}_2(\lambda), \ldots) \in L_0 \subseteq L_2(\infty; d\varrho(\lambda))$ так, что образ

$\widetilde{A}$ оператора A будет иметь диагональный вид. Иными словами,

$$(E(\Delta) f, g)_0 = (\widetilde{E}(\Delta) \widetilde{f}(\lambda), \widetilde{g}(\lambda))_{L_2(\infty;\, d\varrho(\lambda))} =$$

$$= \int\limits_{\Delta} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \widetilde{f}_\alpha(\lambda) \overline{\widetilde{g}_\alpha(\lambda)}\, d\varrho(\lambda) \qquad (f, g \in H_0,\ E(\Delta) \leftrightarrow \widetilde{E}(\Delta)). \quad (2.26)$$

Пусть имеется оснащение (2.12) пространства H_0 с квазиядерным вложением $H_+ \to H_0$. Покажем, что для всех λ, за исключением, быть может, некоторого множества нулевой ϱ-меры, справедливо при любом $u \in H_+$ представление

$$\widetilde{u}_\alpha(\lambda) = \overline{(\varphi_\alpha(\lambda), u)_0} = \overline{(\omega_\alpha(\lambda), u)_+} = (u, \omega_\alpha(\lambda))_+ \quad (\alpha = 1, 2, \ldots), \quad (2.27)$$

где векторы $\varphi_\alpha(\lambda) \in H_-$, $\omega_\alpha(\lambda) = \mathrm{I}\varphi_\alpha(\lambda) \in H_+$. Для доказательства обозначим O оператор вложения H_+ в H_0, V — унитарный оператор перехода от H_0 к L_0. Тогда $\widetilde{u}(\lambda) = VOu$. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированный базис в H_+; для любого $u \in H_+$ имеем

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_j)_+ e_j; \qquad \widetilde{u}_\alpha(\lambda) = (VOu)_\alpha(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_j)_+ (VOe_j)_\alpha(\lambda) \quad (2.28)$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Оператор VO как произведение ограниченного оператора V и оператора Гильберта—Шмидта O будет оператором Гильберта—Шмидта, поэтому

$$\infty > \sum_{j=1}^{\infty} \| VOe_j \|^2_{L_2(\infty;\, d\varrho(\lambda))} = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\infty} |(VOe_j)_\alpha(\lambda)|^2\, d\varrho(\lambda) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |(VOe_j)_\alpha(\lambda)|^2\, d\varrho(\lambda).$$

Таким образом, для каждого α последний интеграл сходится и поэтому $\sum_{j=1}^{\infty} |(VOe_j)_\alpha(\lambda)|^2 < \infty$ для всех $\lambda \overline{\in} \Lambda_\alpha$, $\varrho(\Lambda_\alpha) = 0$. При $\lambda \overline{\in} \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \Lambda_\alpha$ $\left(\varrho\left(\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \Lambda_\alpha\right) = 0\right)$ последний ряд сходится для любого α. Для таких λ вектор

$$\omega_\alpha(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} (VOe_j)_\alpha(\lambda)\, e_j$$

определен и входит в H_+, поэтому благодаря (2.28)

$$\widetilde{u}_\alpha(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_j)_+ (VOe_j)_\alpha(\lambda) = \left(u, \sum_{j=1}^{\infty} (VOe_j)_\alpha(\lambda)\, e_j\right)_+ = (u, \mathfrak{w}_\alpha(\lambda))_+.$$

Равенство (2.27) установлено.

Положим $u_\alpha(\lambda) = \overline{\widetilde{u}_\alpha(\lambda)} = (\varphi_\alpha(\lambda), u)_0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots; u \in H_+)$. Тогда (2.26) приведет к равенству

$$(E(\Delta)\, u, v)_0 = \int_\Delta \sum_{\alpha=1}^{\infty} \overline{u_\alpha(\lambda)}\, v_\alpha(\lambda)\, d\varrho(\lambda) \quad (u, v \in H_+).$$

Таким образом, мы получили (2.18), правда, без интерпретации векторов $\varphi_\alpha(\lambda)$ как обобщенных собственных. Такое истолкование $\varphi_\alpha(\lambda)$ легко дать благодаря тому, что $\widetilde{A}$ — оператор умножения на λ; на этом мы останавливаться не будем.

Хотя указанный подход к предыдущим результатам и очень прост, прежние рассуждения представляются более естественными. В них однообразной процедурой дифференцирования E_λ получается весь комплекс вопросов, связанных с теорией разложения, в том числе и сама теорема Неймана (см. также следующие параграфы).

5. Вид предыдущих результатов в случае оснащения гильбертова пространства ядерными. Иногда бывает удобной несколько отличная от предыдущей схема построения разложений по обобщенным собственным векторам. Мы ее сейчас изложим. Предположим, что гильбертово пространство H_0 оснащено линейным топологическим пространством Φ и сопряженным к нему пространством Φ', т. е. H_0 содержит плотное линейное множество Φ, само являющееся полным линейным топологическим пространством относительно некоторой новой топологии, более сильной, чем топология H_0 (т. е. $H_0 \supseteq \Phi$, включение топологическое). Тогда $\Phi' \supseteq H_0$ и мы получаем цепочку

$$\Phi' \supseteq H_0 \supseteq \Phi. \tag{2.29}$$

Пусть в H_0 действует некоторый оператор A такой, что для сопряженнсго оператора A^* $\Phi \subseteq \mathfrak{D}(A^*)$, $A^*\Phi \subseteq \Phi$ и A^* на Φ непрерывен. Будем рассматривать A^* как оператор в Φ и построим к нему сопряженный $A^{*\prime}$. Легко видеть, что $\widetilde{A} = A^{*\prime}$ является некоторым расширением оператора A, непрерывно переводящим пространство Φ' в Φ'. Под обобщенным собственным вектором оператора A, отвечающим собственному числу λ, будем теперь понимать вектор $\varphi \in \Phi'$ такой, что

$$\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi. \tag{2.30}$$

Если A является эрмитовым и таким, что $\Phi \subseteq \mathfrak{D}(A)$, $A\Phi \subseteq \Phi$ и A на Φ непрерывен, то в (2.30) A^* можно заменить на A.

Напомним (см. стр. 83), что счетно-гильбертово пространство Φ, являющееся пересечением гильбертовых пространств Φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, называется ядерным, если для каждого n найдется такое $m > n$, что вложение $\Phi_m \to \Phi_n$ квазиядерно. Мы сейчас будем рассматривать оснащение (2.29) с ядерным Φ.

Можно рассматривать следующую схему. *Предположим, что имеется оснащение* (2.29) *с ядерным* Φ. *В* H_0 *действует некоторый самосопряженный оператор* A, *для которого* Φ *инвариантно и* A *на* Φ *непрерывен. Спрашивается, можно ли утверждать, что у* A *имеется полная система обобщенных собственных векторов из* Φ', *т. е. система, по которой можно строить разложения* (2.18)—(2.19) *с* $u, v \in \Phi$? *Легко видеть, что предыдущие результаты сразу дают положительный ответ на этот вопрос.*

Действительно, так как топология Φ сильнее топологии H_0, то каждая окрестность H_0 содержит окрестность Φ. Поэтому в шаре $\| f \|_0 < 1$ найдется некоторая окрестность пространства Φ, т. е. шар вида $\| u - a \|_n < \varepsilon$ при некоторых $a \in \Phi$, $\varepsilon > 0$ и $n > 0$. Благодаря линейности пространств это означает, что Φ_n вложено в H_0 непрерывно. Всегда найдется такой номер $m > n$, что Φ_m вкладывается в Φ_n квазиядерно, поэтому вложение $\Phi_m \to H_0$ также будет квазиядерным как суперпозиция квазиядерного и непрерывного вложений. Примем Φ_m в качестве H_+ (возможно, после некоторой перенормировки: умножая все нормы на константу, следует добиться неравенства $\| u \|_0 \leqslant \| u \|_m$ $(u \in \Phi_m)$). Тогда мы получим цепочку вида (2.12) с квазиядерным вложением $H_+ \to H_0$.

Оператор A переводит непрерывно Φ в Φ, а значит и Φ в $\Phi_m = H_+$, так как топология Φ_m слабее топологии Φ. Таким образом, A допускает продолжение оснащения, причем $Д = \Phi$. Итак, все требования теорем 2.1 и 2.2 выполнены. Собственные векторы $\varphi_\alpha(\lambda)$ из теоремы 2.2 входят в $H_- = \Phi'_m \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi'_n = \Phi'$, они и будут искомыми.

Ясно, что результаты, изложенные на стр. 339—341, более точные, чем только что установленный. Вместе с тем теорема о разложении, приведенная выше, часто оказывается более удобной, так как в ней фигурирует одно и то же ядерное пространство Φ — каково бы ни было гильбертово H_0, содержащее топологически Φ. Достаточно произвольный самосопряженный оператор A, действующий в H_0, имеет среди векторов из Φ' полную систему собственных

Можно было бы распространить приведенную только что схему и на случай индуктивных пределов ядерных счетно-гильбертовых пространств. Понятно также, как формулировать остальные теоремы п. 3 в случае оснащения (2.29) с ядерным Ф.

§ 3. Разложение по обобщенным собственным функциям операторов, действующих в пространстве $L_2(G)$

1. **Вид позитивного пространства.** Пусть самосопряженный оператор A (или один из операторов, рассмотренных в п. 5, § 1) действует в $H_0 = L_2(G)$, где G — ограниченная или нет область n-мерного пространства E_n, Γ — ее граница. Согласно теореме 2.1, пространство $H_+ \subseteq H_0$ должно быть таким, чтобы вложение $H_+ \to H_0$ было квазиядерным. Укажем некоторые удобные выборы H_+.

а) Пусть G — ограниченная область. Тогда можно положить $H_+ = w_2^l(G)$, где $l > \frac{n}{2}$. Согласно следствию 2 на стр. 67 вложение $H_+ \to H_0$ будет квазиядерным. Если G неограничена, то в качестве H_+ можно взять пространство $W_2^{(l,\, q)}(G)\left(l > \frac{n}{2}\right)$ со скалярным произведением $(u, v)_{(l,\, q)} = (uq, vq)_{W_2^l(G)}$, где $q(x) \geqslant 1$ такая функция в области G, что

$$\int\limits_G \frac{A^2(x)}{q^2(x)}\, dx < \infty. \tag{3.1}$$

Здесь $A(x)$ $(x \in G)$ — функция, фигурирующая в оценке $|u(x)| \leqslant A(x)\,\|u\|_{W_2^l(G)}$ $(u \in W_2^l(G))$ (см. стр. 73—75). В случае конической области G $A(x) = C(1 + |x|^{l - \frac{n}{2}})$, интеграл (3.1) будет сходиться, если положить $q(x) = 1 + |x|^{l+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$. Поэтому для такой области $H_+ = W_2^{(l,\, 1+|x|^{l+\varepsilon})}(G)\left(l > \frac{n}{2},\ \varepsilon > 0\right)$.

Ниже мы увидим, что можно оценивать на ∞ интегралы от собственных функций. Для этих целей удобен другой выбор позитивного пространства H_+, или, что то же самое, оператора T. Напомним сперва сказанное на стр. 71—72.

Пусть $x \in E_n$, рассмотрим $\omega(x, \xi)$ и положим

$$\mathrm{D}u = D_1 \ldots D_n u, \qquad \mathrm{D}^+ = (-1)^n \mathrm{D}. \tag{3.2}$$

Легко проверить, что для локально суммируемой в E_n функции $f(x)$ и $u(x) \in C_0^n(E_n)$ справедливы равенства

$$\mathrm{D}_x \int_{E_n} \omega(x, \xi) f(\xi)\, d\xi = f(x), \qquad \int_{E_n} \omega(x, \xi) (\mathrm{D}^+ u)(x)\, dx = u(\xi),$$
$$\int_{E_n} \omega(x, \xi) (\mathrm{D}u)(\xi)\, d\xi = u(x) \tag{3.3}$$

(для справедливости последнего из них нужно предполагать, что носитель u лежит внутри первого координатного октанта $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$).

б) Пусть G такая, что ее можно сдвинуть внутрь первого октанта; мы сразу будем считать, что G там расположена. Положим $(Tu)(x) = D[q(x)u(x)]$, $u \in \mathfrak{D}(T) = C_0^n(G)$, где $q(x) = (1+|x_1|)^{1+\varepsilon} \ldots (1+|x_n|)^{1+\varepsilon} (\varepsilon > 0)$ (в случае ограниченной G множитель q излишний). Тогда согласно последней из формул (3.3) левый обратный T^{-1} имеет вид

$$(T^{-1}f)(x) = \int_G K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \qquad K(x, \xi) = \frac{1}{q(x)} \omega(x, \xi)\ (x, \xi \in G);$$

$$\int_G \int_G |K(x, \xi)|^2\, dx d\xi \leqslant \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{1}{q^2(x)} \omega(x, \xi)\, dx d\xi =$$
$$= \left(\int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^{2+2\varepsilon}}\, dt \right)^n < \infty. \tag{3.4}$$

Таким образом, T^{-1} является оператором Гильберта—Шмидта, и поэтому T можно использовать для построения разложений (конструкция такого оператора T была намечена еще на стр. 80—81).

в) Рассмотрим общий случай: $G \subseteq E_n$. Так как теперь неприменима, вообще говоря, последняя из формул (3.3), то предыдущее построение T сейчас не годится. Мы его модифицируем. Положим $(Tu)(x) = q(x)(\mathrm{D}^+u)(x)$, $u \in \mathfrak{D}(T) = C_0^n(G)$, где $q(x)$ имеет такой же вид, как и в б). Воспользовавшись второй из формул (3.3), найдем, что левый обратный T^{-1} является интегральным оператором:

$$(T^{-1}f)(x) = \int_G K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \qquad K(x, \xi) = \frac{1}{q(\xi)} \omega(\xi, x) \quad (x, \xi \in G). \tag{3.5}$$

Аналогично (3.4) убеждаемся, что T^{-1}—оператор Гильберта—Шмидта и поэтому указанный выбор T возможен.

Ясно, что выбор D вида (3.2) для построения T неединственен. Например, в качестве D можно было брать эллиптическое выражение порядка $r > \frac{n}{2}$, в качестве $\omega(x, \xi)$ — его фундаментальное решение. Тогда $\omega(x, \xi)$ локально суммируемо с квадратом по (x, ξ), а равенства (3.3) следуют из формул (4.3) и (4.4) на стр. 178—179.

2. **Формулировка теорем о разложении.** Конечно, при любом из пространств H_+, построенных выше, справедливы теоремы о разложении, приведенные в п. 3 предыдущего параграфа. Однако иногда бывают полезны эти результаты в форме теорем типа 1.3 и 1.4, в которых T имеет вид в) или б) предыдущего пункта. Рассмотрим случай в), G — любая область.

Оператор $\Psi(\lambda)$, фигурирующий в (1.12), является оператором Гильберта—Шмидта, причем $|\Psi(\lambda)| \leqslant 1$ ϱ-почти везде. Поэтому он интегральный:

$$(\Psi(\lambda) f)(x) = \int_G \hat{\Psi}(x, y; \lambda) f(y)\, dy, \quad \int_G\int_G |\hat{\Psi}(x, y; \lambda)|^2\, dx dy = \\ = |\Psi(\lambda)|^2 \leqslant 1. \tag{3.6}$$

Используем теперь то, что Сл. $(\Psi(\lambda)) = 1$. Любой оператор B с конечным следом представим в виде $B = CC^*$, где C — оператор Гильберта—Шмидта. Если эти операторы действуют в пространстве $L_2(G)$, то $B(x, y) = \int_G C(x, \xi)\overline{C(y, \xi)}\, d\xi$, где $B(x, y)$ и $C(x, y)$ — ядра операторов B и C.

Так как $C(x, y) \in L_2(G \times G, dx\, dy)$, то $B(x, x)$ определено почти для всех $x \in G$, неотрицательно и $\int_G B(x, x)\, dx =$ Сл. (B). Используя это обстоятельство, заключаем, что почти для всех $x \in G$ $\hat{\Psi}(x, x; \lambda) \geqslant 0$ и

$$\int_G \hat{\Psi}(x, x; \lambda)\, dx = 1. \tag{3.7}$$

Благодаря положительной определенности ядра $\hat{\Psi}(x, y; \lambda)$ имеем почти для всех $(x, y) \in G \times G$ (см. стр. 61):

$$|\hat{\Psi}(x, y; \lambda)|^2 \leqslant \hat{\Psi}(x, x; \lambda)\, \hat{\Psi}(y, y; \lambda).$$

Учитывая, что $T = q\mathrm{D}^+ = (-1)^n q\mathrm{D}$, получаем при помощи (3.6) и (3.7):

$$(\Psi(\lambda) Tu, Tv)_0 = \int\limits_G \int\limits_G \Psi(x, y; \lambda) (\mathrm{D}u)(y) \overline{(\mathrm{D}v)(x)}\, dx dy \quad (u, v \in C_0^n(G));$$

$$\Psi(x, y; \lambda) = q(x) q(y) \hat{\Psi}(x, y; \lambda) \quad (x, y \in G), \quad \int\limits_G \int\limits_G \frac{|\Psi(x, y; \lambda)|^2}{q^2(x) q^2(y)}\, dx dy \leqslant 1,$$

$$\int\limits_G \frac{\Psi(x, x; \lambda)}{q^2(x)}\, dx = 1. \tag{3.8}$$

Положительно определенное ядро $\Psi(x, y; \lambda)$ будем называть проинтегрированным спектральным ядром. Равенство Парсеваля (1.12) перепишется так:

$$(E(\Delta) u, v)_0 = \int\limits_\Delta \left\{ \int\limits_G \int\limits_G \Psi(x, y; \lambda) (\mathrm{D}u)(y) \overline{(\mathrm{D}v)(x)}\, dx dy \right\} d\varrho(\lambda) \tag{3.9}$$

$$(u, v \in C_0^n(G)).$$

Векторы $\psi_\alpha(\lambda) = \hat{\psi}_\alpha(x; \lambda)$ теперь являются функциями из $L_2(G)$. Учитывая вид T и (1.19), получим

$$(\psi_\alpha, Tu)_0 = \int\limits_G \psi_\alpha(x; \lambda) \overline{(\mathrm{D}u)(x)}\, dx \qquad (u \in C_0^n(G)); \tag{3.10}$$

$$\psi_\alpha(x; \lambda) = (-1)^n q(x) \hat{\psi}_\alpha(x; \lambda) \; (x \in G); \quad \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \int\limits_G \frac{|\psi_\alpha(x; \lambda)|^2}{q^2(x)}\, dx = 1, \tag{3.11}$$

причем последнее равенство выполняется ϱ-почти везде. Функции $\psi_\alpha(x; \lambda)$ — проинтегрированные собственные функции. Итак, *для самосопряженного оператора в* $L_2(G)$ *справедливы теоремы 1.3 и 1.4, в которых* (1.12) *имеет вид* (3.9), $(\psi_\alpha, Tu)_0$ *подсчитывается при помощи* (3.10), *оценки* (1.13) и (1.19) *имеют вид* (3.8) *и* (3.11).

Приведенные выше формулы удобно интерпретировать при помощи обобщенных функций типа Л. Шварца — непрерывных функционалов $\alpha \in D'(G)$ над линейным топологическим пространством $D(G) = C_0^\infty(G)$, где сходимость $u_n(x) \to 0$ означает расположение носителей функций $u_n(x)$ в одном общем компакте внутри G и равномерную вместе со всеми производными сходимость этих функций к нулю. Перебрасывая в (3.9) и (3.10) D на первый сомножитель, получим обобщенное ядро $\Phi_\lambda = D_x D_y \Psi(x, y; \lambda) \in D'(G) \otimes D'(G)$ — спектральное ядро—и обобщенную функцию $\varphi_\alpha(\lambda) = (-1)^n D\psi_\alpha(x; \lambda) \in D'(G)$ — собственную функцию. Очевидно, эти понятия совпадают с точностью до определений обобщенных функций с понятиями, введенными на стр. 341, 335.

Пусть оператор A допускает продолжение оснащения с Д $= D(G)$, тогда равенство (1.18) справедливо для всех $u \in C_0^\infty(G)$ и означает, что $\varphi_\alpha(\lambda)$ является обобщенной собственной функцией для A в смысле теории Л. Шварца: $A\varphi_\alpha(\lambda) = \lambda\varphi_\alpha(\lambda)$. Аналогично из (1.14) и и эрмитовости $\Psi(\lambda)$ устанавливаются равенства $A_x\Phi_\lambda = \lambda\Phi_\lambda$, $A_y\overline{\Phi}_\lambda = \lambda\overline{\Phi}_\lambda$.

Случай б) рассматривается подобным же образом, только в построениях операции D и умножения на $q(x)$ поменяются местами. Формулы мы не будем выписывать. Конструкции пространств типа б) и в) дают, как мы позже убедимся, оценки роста, однако они не могут описать поведение собственных функций вблизи границы области, так как функции из этих пространств аннулируются вблизи границы. С этой точки зрения существенно построение а).

Ясно, что все сказанное выше переносится и на обобщения, рассмотренные в п. 5, § 1, и в теоремах 2.3—2.6.

В заключение отметим, что равенство Парсеваля (3.8) можно было бы доказывать и иначе. Именно, представим согласно теореме 3.4, гл. I, оператор $E(\Delta)$ в виде

$$(E(\Delta)u, v)_0 = \int_G \int_G \Theta(x, y; \Delta)(Du)(y)\overline{(Dv)(x)}\,dx\,dy \qquad (u, v \in C_0^n(G)),$$

где $\Theta(x, y; \Delta) = (E(\Delta)\omega(y, \cdot), \omega(x, \cdot))_0$ — непрерывное в $(G \cup \Gamma) \times$ $\times (G \cup \Gamma)$ ядро. Дальше будем дифференцировать при фиксированных x, y меру $\Theta(x, y; \Delta)$ по некоторой подходящей мере $\varrho(\Delta)$*. Эта производная будет существовать ϱ-почти везде. Если удастся показать, что она существует ϱ-почти везде независимо от выбора x, y (их континуум), то эта производная и будет равна $\Psi(x, y; \lambda)$. Такую независимость можно установить при помощи рассуждений, подобных проведенным при доказательстве теоремы 1.1, мы их приводить не будем (см. также лемму 3.1, гл. VI).

Если воспользоваться теоремой 3.3, гл. I, то так можно проводить доказательство и в случае H_+ вида а), а если применять абстрактную теорему 2.2, гл. I, то и в случае общих пространств H_0.

---

* Например, можно положить $\varrho(\Delta) = \int_G \frac{\Theta(x, x; \Delta)}{p(x)}\,dx$, где $p(x) \geqslant 1$ $(x \in G)$ такова, что обеспечивается сходимость этого интеграла.

3. Структура обобщенных собственных функций. Подчеркнем еще раз, какой характер обобщенности имеют собственные функции оператора в $L_2(G)$, $G \subseteq E_n$. В случае выбора H_+ типа а) и ограниченной области обобщенные функции входят в $W_2^{-l}(G)$ при $l > \frac{n}{2}$, в случае неограниченной конической области они входят в $W_2^{-(l, 1+|x|^{l+\varepsilon})}(G)$ $(\varepsilon > 0)$, что можно интерпретировать как ограниченность полиномом $C(1+|x|^{l+\varepsilon})$ роста собственной функции и некоторых интегралов от нее на ∞.

Более отчетливо последнее обстоятельство видно, если выбирать H_+ типа в). Спектральное ядро теперь имеет вид $\Phi_\lambda = \mathrm{D}_x\mathrm{D}_y\Psi(x, y; \lambda)$, а собственная функция — вид $\varphi_\alpha(\lambda) = (-1)^n \mathrm{D}\psi_\alpha(x; \lambda)$ (производные берутся в смысле Л. Шварца), причем ϱ-почти везде

$$\int_G\int_G \frac{|\psi(x, y; \lambda)|^2}{q^2(x)\, q^2(y)}\, dx dy \leqslant 1, \qquad \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \int_G \frac{|\psi_\alpha(x; \lambda)|^2}{q^2(x)}\, dx = 1 \qquad (3.12)$$

$$(q(x) = (1+|x_1|)^{1+\varepsilon} \ldots (1+|x_n|)^{1+\varepsilon},\ \varepsilon > 0).$$

Если G расположена внутри октанта $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$, то можно выбирать H_+ типа б). Спектральное ядро и собственные функции имеют вид $\Phi_\lambda = q(x)\, q(y)\, \mathrm{D}_x\mathrm{D}_y\hat{\Psi}(x, y; \lambda)$, $\varphi_\alpha(\lambda) = (-1)^n q(x)\, \mathrm{D}\hat{\psi}_\alpha(x; \lambda)$, где ϱ-почти всюду

$$\int_G\int_G |\hat{\Psi}(x, y; \lambda)|^2\, dx dy \leqslant 1, \qquad \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \int_G |\hat{\psi}_\alpha(x; \lambda)|^2\, dx = 1; \qquad (3.13)$$

$q(x)$ прежнее, производные понимаются в смысле Л. Шварца.

4. Операторы в пространстве $L_2(G)$ с весом. Будем рассматривать разложение по собственным функциям операторов, действующих в пространстве $H_0 = L_2(G, p dx)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2(G, p dx)} = \int_G f(x)\, \overline{g(x)}\, p(x)\, dx = (f\sqrt{p}, g\sqrt{p})_{L_2(G)}. \qquad (3.14)$$

Здесь $p(x) \geqslant 1$ — достаточно гладкая функция внутри G, которая, вообще говоря, неограничена при подходе к границе G.

Вопрос сводится на основании общих предложений § 1—2 к выбору пространства $H_+ \subseteq H_0$ такого, что вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно. Этот выбор может быть осуществлен на основании следующего простого соображения: *пусть* $\mathfrak{H} \subset L_2(G)$ — *позитивное прос-*

транство относительно нулевого $L_2(G)$ такое, что вложение $\mathfrak{H} \to L_2(G)$ квазиядерно. Определим скалярное произведение в H_+, полагая

$$(u, v)_+ = (u\sqrt{p}, v\sqrt{p})_{\mathfrak{H}}. \qquad (3.15)$$

Оказывается, что вложение $H_+ \to L_2(G, pdx)$ квазиядерно. В самом деле, пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированный базис в H_+, тогда $e_1\sqrt{p}, e_2\sqrt{p}, \ldots$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$. Имеем $\sum_{j=1}^{\infty} \| e_j \|^2_{L_2(G, pdx)} = \sum_{j=1}^{\infty} \| e_j \sqrt{p} \|^2_{L_2(G)}$, последний ряд сходится на основании квазиядерности вложения $\mathfrak{H} \to L_2(G)$. Но тогда и вложение $H_+ \to L_2(G, pdx)$ квазиядерно (см. в связи с этим рассуждение на стр. 64).

Выбирая в качестве $\mathfrak{H}$ одно из пространств а) — в), получим согласно (3.15) конструкцию H_+.

§ 4. Разложение по собственным функциям карлемановских операторов

1. Одно общее замечание. Пусть в гильбертовом пространстве H действует оператор T с плотной областью определения $\mathfrak{D}(T)$, имеющий левый обратный T^{-1}. Как было показано в § 1, конечность гильбертовой нормы T^{-1} является достаточным и (если T^{-1} — обычный обратный) необходимым условием того, что такой оператор можно использовать для построения разложений по собственным векторам произвольного самосопряженного оператора A. Однако при фиксированном A выбор T более свободен: проследив доказательства теорем 1.3 и 1.4, убеждаемся, что *нужно лишь требовать, чтобы при ограниченных Δ* Сл. $(T^{-1*}E(\Delta)T^{-1})$ *был конечен. Для его конечности достаточно, чтобы существовала непрерывная ограниченная отличная от нуля функция $\gamma(\lambda)$, определенная на спектре A, такая, что* $|\gamma(A)T^{-1}| < \infty$. В самом деле, для любого ограниченного Δ существует такое $\varepsilon_\Delta > 0$, что характеристическая функция $\varkappa_\Delta(\lambda) \leqslant \varepsilon_\Delta |\gamma(\lambda)|^2$ на спектре A. Отсюда

$$E(\Delta) \leqslant \varepsilon_\Delta \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|^2 dE_\lambda = \varepsilon_\Delta (\gamma(A))^* \gamma(A),$$

поэтому

$$\text{Сл.}\,(T^{-1*}E(\Delta)T^{-1}) \leqslant \varepsilon_\Delta \,\text{Сл.}\, T^{-1*}(\gamma(A))^* \gamma(A) T^{-1}) = \\ = \varepsilon_\Delta |\gamma(A)T^{-1}| < \infty,$$

что и доказывает утверждение.

Это же замечание, в частности, можно сделать и относительно построений § 2: если оператор J, связанный с цепочкой $H_- \supseteq H_0 = H \supseteq H_+$, таков, что $\| \gamma(A)\hat{J} \| < \infty$, то разложение по собственным векторам A можно строить, используя эту цепочку.

Отметим, что в качестве функции $\gamma(\lambda)$ обычно удобно использовать функции $\frac{1}{\lambda^N - z}$ или $\left(\frac{1}{\lambda - z}\right)^N$, где N — некоторое достаточно большое натуральное число, $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Замечания, подобные приведенным, можно сделать и для обобщений, намеченных в п. 5, § 1, и в теоремах 2.3—2.6. На эти обобщения могут быть перенесены и дальнейшие построения § 4.

2. Определение карлемановского оператора и теорема о разложении. Будем рассматривать операторы, действующие в гильбертовом пространстве $H_0 = L_2(Q, dx)$. Здесь Q — локально компактное сепарабельное пространство, dx — неотрицательная мера на борелевских множествах из Q, конечная на компактных множествах и положительная на открытых. Самосопряженный оператор A назовем карлемановским, если существует ограниченная непрерывная отличная от нуля функция $\gamma(\lambda)$, определенная на спектре A, такая, что оператор $\gamma(A)$ является интегральным оператором, для ядра $C(x, y)$ $(x, y \in Q)$ которого почти при каждом y

$$\int_Q |C(x, y)|^2 dx < \infty \quad \left((\gamma(A) f)(x) = \int_Q C(x, y) f(y)\, dy,\ f \in L_2(Q, dx) \right). \tag{4.1}$$

Мы сейчас покажем, что обобщенные собственные функции рассматриваемого оператора будут обычными функциями, правда, не входящими в $L_2(Q, dx)$. С этой целью построим оснащение пространства $H_0 = L_2(Q, dx)$, полагая $H_+ = L_2(Q, p\,dx)$, где $p(x) \geqslant 1 (x \in Q)$— некоторая измеримая по Борелю функция. Так как для $f \in H_0$ и $u \in H_+$ $(f, u)_0 = \left(\frac{1}{p} f, u\right)_+$, то $(If)(x) = \frac{1}{p(x)} f(x)$. Поэтому $(f, g)_- = (If, g)_0 = \left(\frac{1}{p} f, g\right)_0$ $(f, g \in H_0)$, т. е. $H_- = L_2\left(Q, \frac{1}{p} dx\right)$. Оператор J равен квадратному корню из I, понимаемому как оператор в H_0, т. е.

$$(Jf)(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} f(x) \qquad (f \in H_0).$$

Пусть имеется карлемановский оператор A, подберем так функцию $p(x) \geqslant 1$, чтобы

$$\int_Q \int_Q |C(x, y)|^2 \frac{1}{p(y)} dxdy < \infty. \tag{4.2}$$

Ядро $C(x, y) \frac{1}{\sqrt{p(y)}}$ является ядром оператора $\gamma(A)\hat{J}$, условие (4.2) означает, что это оператор Гильберта—Шмидта. Учитывая сказанное в п. 1, заключаем, что для построения разложений по собственным функциям A можно воспользоваться цепочкой

$$L_2\left(Q, \frac{1}{p} dx\right) \supseteq L_2(Q, dx) \supseteq L_2(Q, pdx). \tag{4.3}$$

Таким образом, собственные функции карлемановского оператора — обычные функции из $L_2\left(Q, \frac{1}{p} dx\right)$.

Более полно разложения по собственным функциям описываются следующей теоремой.

Теорема 4.1. *Пусть A—самосопряженный карлемановский оператор, $p(x) \geqslant 1 (x \in Q)$ — измеримая по Борелю функция такая, что сходится интеграл (4.2). Тогда для разложения по собственным функциям оператора A можно использовать цепочку (4.3) и поэтому каждая обобщенная собственная функция будет обычной функцией из $L_2\left(Q, \frac{1}{p} dx\right)$.*

Оператор обобщенного проектирования на обобщенное собственное подпространство $P(\lambda)$ является интегральным оператором:

$$(P(\lambda) u)(x) = \int_Q \Phi(x, y; \lambda) u(y) dy \quad (u \in L_2(Q, pdx)). \tag{4.4}$$

Положительно определенное ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ — спектральное ядро A — ϱ-почти для всех λ удовлетворяет оценке

$$\int_Q \int_Q \frac{|\Phi(x, y; \lambda)|^2}{p(x) p(y)} dxdy \leqslant 1 \left(\text{точнее: } \int_Q \frac{\Phi(x, x; \lambda)}{p(x)} dx = 1\right). \tag{4.5}$$

Интегральным же оператором является любая функция $F(A)$, где $F(\lambda)$ ограничена на спектре A и финитна на ∞, причем ядро $K(x, y)$ этого оператора представимо в виде абсолютно сходящегося почти для каждого (x, y) относительно меры $dxdy$ интеграла

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, \Phi(x, y; \lambda)\, d\varrho(\lambda); \quad \int_Q \int_Q \frac{|K(x, y)|^2}{p(x)\, p(y)}\, dx dy < \infty. \tag{4.6}$$

Доказательство. Первые утверждения теоремы уже были пояснены. Покажем, что $P(\lambda)$ — интегральный оператор. Так как $P(\lambda) = \mathrm{D}\Psi(\lambda) D$, то согласно (2.2) $(P(\lambda) u, v)_0 = (\Psi(\lambda) Du, Dv)_0$ $(u, v \in H_+)$. Оператор $D = J^{-1}$ является оператором умножения на $\sqrt{p(x)}$, поэтому обозначая $\hat{\Psi}(x, y; \lambda)$ ядро оператора $\Psi(\lambda)$, получим

$$(P(\lambda) u, v)_0 = \int_Q \int_Q \hat{\Psi}(x, y; \lambda) \sqrt{p(x)\, p(y)}\, u(y) \overline{v(x)}\, dx dy =$$

$$= \int_Q \int_Q \Phi(x, y; \lambda)\, u(y) \overline{v(x)} dx dy; \quad \Phi(x, y; \lambda) = \sqrt{p(x)\, p(y)}\, \hat{\Psi}(x, y; \lambda)$$

$$(x, y \in Q;\ u, v \in L_2(Q, pdx)). \tag{4.7}$$

Так как $\int_Q \int_Q |\hat{\Psi}(x, y; \lambda)|^2 dx dy = \|\Psi(\lambda)\| \leqslant 1$, то из (4.7) следует оценка (4.5). Соотношение $\int_Q \frac{\Phi(x, x; \lambda)}{p(x)} dx = 1$ вытекает из равенства Сл. $(\Psi(\lambda)) = 1$.

Далее, учитывая (4.5), при помощи неравенства Коши—Буняковского получим

$$\int_Q \int_Q \frac{1}{p(x)\, p(y)} \left(\int_{-N}^{N} |F(\lambda)\, \Phi(x, y; \lambda)|\, d\varrho(\lambda) \right)^2 dx dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-N}^{N} |F(\lambda)|^2 d\varrho(\lambda) \cdot \int_Q \int_Q \frac{1}{p(x)\, p(y)} \int_{-N}^{N} |\Phi(x, y; \lambda)|^2 d\varrho(\lambda)\, dx dy \leqslant$$

$$\leqslant \varrho([-N, N]) \int_{-N}^{N} |F(\lambda)|^2 d\varrho(\lambda) < \infty \quad (0 < N < \infty).$$

Отсюда и из финитности $F(\lambda)$ следует требуемая сходимость первого из интегралов (4.6) и существование второго. То, что $K(x, y)$ — ядро оператора $F(A)$, следует из общего равенства (2.16). Теорема доказана.

Из (4.5), в частности, следует, что *спектральное ядро* $\Phi(x, y; \lambda)$ *как функция точки* $(x, y; \lambda) \in Q \times Q \times E_1$ *локально суммируема с квадратом относительно меры* $dxdyd\varrho(\lambda)$*.

Выделим индивидуальные собственные функции. Согласно общей схеме на стр. 328 разложим ядро $\hat{\Psi}(x, y; \lambda)$ оператора $\Psi(\lambda)$ в билинейный ряд по его собственным функциям: $\hat{\Psi}(x, y; \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \psi_\alpha(x; \lambda)\overline{\psi_\alpha(y; \lambda)}$. Этот ряд сходится в смысле сходимости в $L_2(Q \times Q, dxdy)$. Умножим его на $\sqrt{p(x)p(y)}$. Учитывая что $\sqrt{p(x)}\psi_\alpha(x; \lambda) = \mathrm{D}\psi_\alpha(x; \lambda) = \varphi_\alpha(x; \lambda)$ является обобщенной собственной функцией из $L_2\left(Q, \frac{1}{p} dx\right)$ оператора A, получим разложение спектрального ядра по собственным функциям:

$$\Phi(x, y; \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \varphi_\alpha(x; \lambda)\overline{\varphi_\alpha(y; \lambda)} \quad (x, y \in Q). \tag{4.8}$$

Ряд (4.8) сходится в смысле метрики $L_2\left(Q \times Q, \frac{1}{p(x)p(y)} dxdy\right)$.

Равенство (4.8), конечно, и сразу можно было бы получить, разлагая ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ по его собственным функциям. Преобразование Фурье (2.19) функции $u \in L_2(Q, pdx)$ в случае карлемановского оператора подсчитываем, очевидно, по формуле:

$$\tilde{u}(\lambda) = (u_1(\lambda), u_2(\lambda), \ldots), \quad u_\alpha(\lambda) = \int_Q \varphi_\alpha(x; \lambda)\overline{u(x)}dx \; (\alpha = 1, \ldots, N_\lambda). \tag{4.9}$$

В заключение заметим, что спектральные мера и ядро несущественно изменяются при варьировании $\gamma(\lambda)$ и $p(x)$. В самом деле, пусть $\gamma_1(\lambda)$ — функция типа $\gamma(\lambda)$, $p_1(x)$ — вес, построенный по $\gamma_1(\lambda)$; $d\varrho_1(\lambda)$ и $\Phi_1(x, y; \lambda)$ — соответствующие спектральные мера и ядро. Очевидно ϱ и ϱ_1 абсолютно непрерывны одна относительно другой, пусть, например, $d\varrho_1(\lambda) = M(\lambda)\, d\varrho(\lambda)$. Тогда для любых борелевских множеств P', P'' и Δ с компактным замыканием

$$\int_{P'}\int_{P''}\int_{\Delta} \Phi(x, y; \lambda)\, dxdyd\varrho(\lambda) = (E(\Delta)\varkappa_{P''}, \varkappa_{P'})_0 =$$

$$= \int_{P'}\int_{P''}\int_{\Delta} \Phi_1(x, y; \lambda)\, dxdyd\varrho_1(\lambda) = \int_{P'}\int_{P''}\int_{\Delta} \Phi_1(x, y; \lambda)\, M(\lambda)\, dxdyd\varrho(\lambda),$$

* Предоставляем читателю доказать, что функция $\Phi(x, y; \lambda)$ точки $(x, y; \lambda) \in Q \times Q \times E_1$ измерима по Борелю.

откуда $M(\lambda)\Phi_1(x, y; \lambda) = \Phi(x, y; \lambda)$ почти для всех $(x, y; \lambda)$ относительно меры $dx\,dy\,d\varrho(\lambda)$.

3. **Случай непрерывного спектрального ядра.** Сейчас можно детализировать предыдущие результаты.

Теорема 4.2. *Пусть спектральное ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ при фиксированном λ непрерывно относительно $(x, y) \in Q \times Q$. Тогда каждая из собственных функций $\varphi_\alpha(x; \lambda)$ почти для всех x совпадает с непрерывной функцией и после переопределения на множестве нулевой меры может считаться непрерывной. Ряд (4.8) сходится абсолютно и равномерно по (x, y) на каждом компакте из $Q \times Q$.*

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из следующей общей леммы.

Лемма 4.1. *Пусть $K(x, y)$ $(x, y \in Q)$ — положительно определенное непрерывное относительно $(x, y) \in Q \times Q$ ядро. Предположим, что в смысле сходимости в любом $L_2(P \times P, dx\,dy)$ $(P \subseteq Q$ — компакт) имеет место представление*

$$K(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_\alpha(x)\overline{\varphi_\alpha(y)}, \tag{4.10}$$

где $\varphi_\alpha(x)$ локально суммируемы с квадратом. Утверждается, что $\varphi_\alpha(x)$ почти всюду совпадают с непрерывными функциями и поэтому после переопределения на множествах меры нуль становятся непрерывными. Ряд (4.10) сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте из $Q \times Q$.

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение $\int_P K(x, y)\chi(y)\,dy = \nu\chi(x)$ с непрерывным положительно определенным ядром. Пусть $\chi_\beta(x)$ $(\beta = 1, 2, \ldots; x \in P)$ — полная ортонормированная система его собственных функций, отвечающих собственным числам $\nu_\beta > 0$. Эти функции непрерывны и, в силу теоремы Мерсера, справедливо разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$K(x, y) = \sum_{\beta=1}^{\infty} \nu_\beta \chi_\beta(x)\overline{\chi_\beta(y)} \qquad (x, y \in P). \tag{4.11}$$

Положим

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}\sqrt{\nu_\beta}\,\chi_\beta(x) \qquad (x \in P), \tag{4.12}$$

где $a_{\alpha\beta}\sqrt{\nu_\beta} = \int\limits_P \varphi_\alpha(x)\overline{\chi_\beta(x)}\,dx$. Покажем, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно. Умножая (4.10) на $\overline{\chi_\beta(x)}\chi_\gamma(y)$ и интегрируя по $P\times P$, получим

$$\sqrt{\nu_\beta\nu_\gamma}\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}\bar{a}_{\alpha\gamma} = \int\limits_P\int\limits_P K(x, y)\overline{\chi_\beta(x)}\chi_\gamma(y)\,dx\,dy =$$
$$= \nu_\gamma\int\limits_P \chi_\gamma(x)\overline{\chi_\beta(x)}\,dx = \nu_\gamma\delta_{\gamma\beta},$$

т. е. $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty}\bar{a}_{\alpha\beta}a_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$. На финитных последовательностях $f\in l_2([1,\infty))$ положим $(Af)_\alpha = \sum\limits_{\beta=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}f_\beta$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$; так определенный линейный оператор A изометричен: $(Af, Ag) = (f, g)$. По непрерывности A можно распространить на все $l_2([1,\infty))$, и он по-прежнему будет изображаться матрицей $\|a_{\alpha\beta}\|_1^\infty$ и оставаться изометричным. Таким образом, мы приходим к следующему соотношению (оно будет использовано в дальнейшем):

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\sum_{\beta=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}f_\beta\cdot\overline{\sum_{\gamma=1}^{\infty} a_{\alpha\gamma}g_\gamma}\right) = \sum_{\beta=1}^{\infty} f_\beta\bar{g}_\beta \quad (f, g\in l_2([1,\infty))). \tag{4.13}$$

Так как норма изометрического оператора равна единице, то $\|A^*\| = \|A\| = 1$, откуда вытекает

$$\sum_{\beta=1}^{\infty}|a_{\alpha\beta}|^2 \leqslant 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots). \tag{4.14}$$

С другой стороны, из разложения (4.11) при $x = y$ следует, что ряд $\sum\limits_{\beta=1}^{\infty}|\sqrt{\nu_\beta}\chi_\beta(x)|^2$ сходится равномерно. Отсюда и из (4.14) при помощи неравенства Коши—Буняковского заключаем, что ряд (4.12) сходится равномерно и абсолютно.

Таким образом, функция $\psi_\alpha(x)$ непрерывна. Положим $r_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) - \psi_\alpha(x)$ $(x\in P)$ и покажем, что $r_\alpha(x) = 0$ почти всюду. Так как $r_\alpha(x)$ ортогональна ко всем $\chi_\beta(x)$, то, пользуясь (4.10) и (4.11), получим:

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty}\left|\int_P \varphi_\gamma(x)\overline{r_\alpha(x)}dx\right|^2=\int_P\int_P K(x,y)\overline{r_\alpha(x)}r_\alpha(y)\,dxdy=$$
$$=\sum_{\beta=1}^{\infty}\nu_\beta\left|\int_P \chi_\beta(x)\,r_\alpha(x)\,dx\right|^2=0,$$

откуда $\int_P \varphi_\alpha(x)\overline{r_\alpha(x)}dx=0$. Далее, так как $r_\alpha(x)$ ортогональна к $\psi_\alpha(x)$ (см. (4.12)), то имеем

$$0=\int_P \varphi_\alpha(x)\overline{r_\alpha(x)}\,dx=\int_P[\varphi_\alpha(x)-\psi_\alpha(x)]\overline{r_\alpha(x)}dx=\int_P|r_\alpha(x)|^2dx,$$

т. е. $r_\alpha(x)=0$ почти везде в P. Учитывая произвольность P, заключаем, что функции $\varphi_\alpha(x)$ почти всюду совпадают с непрерывными функциями.

Произведем переопределение и будем считать функции $\varphi_\alpha(x)$ непрерывными. Покажем, что ряд (4.10) сходится абсолютно и равномерно. Выше мы убедились, что

$$\varphi_\alpha(x)=\psi_\alpha(x)=\sum_{\beta=1}^{\infty}a_{\alpha\beta}\sqrt{\nu_\beta}\,\chi_\beta(x)\qquad(x\in P).$$

Из соотношения (4.13) при $f_\beta=\sqrt{\nu_\beta}\,\chi_\beta(x)$, $g_\beta=\sqrt{\nu_\beta}\,\chi_\beta(y)\in l_2([1,\infty))$ и (4.11) следует

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\varphi_\alpha(x)\overline{\varphi_\alpha(y)}=\sum_{\beta=1}^{\infty}\nu_\beta\chi_\beta(x)\overline{\chi_\beta(y)}=K(x,y)\qquad(x,y\in P).$$

Ввиду произвольности P, полученное равенство показывает, что ряд (4.10) точечно сходится к $K(x,y)$ $(x,y\in Q)$. Эта сходимость — равномерная на каждом компакте $P\times P$. В самом деле, $\sum_{\alpha=1}^{\infty}|\varphi_\alpha(x)|^2=K(x,x)\in C(P)$, применяя теорему Дини, заключаем, что последний ряд, а значит и ряд (4.10), сходятся равномерно и абсолютно при $(x,y)\in P\times P$. Лемма, а значит и теорема, доказаны.

Ясно, что установленная теорема справедлива для любого разложения типа (4.10), независимо от способа его получения.

Теорема 4.3. *Предположим, что интеграл* (4.1) *является локально ограниченной функцией* $y\in Q$, *а* $\Phi(x,\ y;\ \lambda)$ ϱ*-почти для каждого* λ *непрерывно относительно* $(x,\ y)\in Q\times Q$. *Тогда для каждой* $F(\lambda)$ *такой, что* $|F(\lambda)|\leqslant C|\gamma(\lambda)|^2$ *на спектре* A; *первый из интегралов* (4.6) *представляет ядро оператора* $F(A)$, *он абсо-*

лютно сходится при любых x, y и является локально ограниченной функцией $(x, y) \in Q \times Q$.

Этот интеграл будет непрерывно зависеть от $(x, y) \in Q \times Q$, если дополнительно предположить, что ядро оператора $(\gamma(A))^*\gamma(A)$ непрерывно на $Q \times Q$.

Доказательство. Установим первую часть теоремы. Достаточно убедиться в сходимости и локальной ограниченности интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|^2 |\Phi(x, y; \lambda)| \, d\varrho(\lambda). \tag{4.15}$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|^2 \left\{\int_Q \int_Q \Phi(x, y; \lambda) u(y) \overline{v(x)} \, dx dy\right\} d\varrho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|^2 (\Psi(\lambda) Du,$$

$$Dv)_0 \, d\varrho(\lambda) = ((\gamma(A))^* \gamma(A) u, v)_0 = \int_Q \int_Q \left\{\int_Q \overline{C(\xi, x)} C(\xi, y) \, d\xi\right\} u(y) \overline{v(x)} dx dy. \tag{4.16}$$

Пусть $P \subseteq Q$—некоторый компакт, по предположению $\int_Q |C(x, y)|^2 dx \leqslant$ $\leqslant C_P < \infty$ $(y \in P)$, поэтому при $x, y \in P$ в силу неравенства Коши—Буняковского $\left|\int_Q \overline{C(\xi, x)} C(\xi, y) \, d\xi\right| \leqslant C_P$. Положим в (4.16) $u = v = \chi_\nu$, где $\chi_\nu(x)$ — характеристическая функция шара радиуса $\frac{1}{\nu}$ с центром в точке s, деленная на его объем ($\nu = 1, 2, \ldots$); так как интеграл (4.1) локально ограничен, то $p(x)$ можно выбирать локально ограниченной и поэтому $\chi_\nu \in L_2(Q, p dx)$). Точка s лежит в некоторой строго внутренней части P' компакта P. После такой подстановки последний интеграл в (4.16) оценится через C_P равномерно по ν и мы получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|^2 \left|\int_Q \int_Q \Phi(x, y; \lambda) \chi_\nu(y) \chi_\nu(x) \, dx dy\right| d\varrho(\lambda) \leqslant C_P \; (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{4.17}$$

Перейдем здесь к пределу при $\nu \to \infty$. Благодаря непрерывности $\Phi(x, y; \lambda)$ по (x, y) внутренний интеграл (4.17) стремится к $\Phi(s, s; \lambda)$ и неотрицателен в силу положительной определенности ядра $\Phi(x, y; \lambda)$. Применяя лемму Фату, найдем $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|^2 \Phi(s, s; \lambda) \, d\varrho(\lambda) \leqslant C_P$ $(s \in P')$.

Сходимость и локальная ограниченность интеграла (4.15) вытекает теперь из полученной оценки, неравенства $|\Phi(x, y; \lambda)|^2 \leqslant \Phi(x, x; \lambda)\Phi(y, y; \lambda)$ и неравенства Коши — Буняковского. Первая часть теоремы доказана.

Вторая ее часть будет установлена при помощи следующей леммы.

Лемма 4.2. *Пусть для каждых $x, y \in Q$ определены обычные положительно определенные ядра $K(x, y)$ и $L(x, y)$, причем $K \leqslant L$ (т. е. ядро $L(x, y) - K(x, y)$ также положительно определено). Тогда из непрерывности по $(x, y) \in Q \times Q$ ядра $L(x, y)$ следует такая же непрерывность ядра $K(x, y)$.*

Доказательство. Приведем важную в теории положительно определенных ядер конструкцию. Пусть $F(x, y)$ — такое ядро, определенное при любых $x, y \in Q$. Отнесем каждой точке $x \in Q$ формальный вектор e_x и рассмотрим конечные суммы $\xi = \sum_j \xi_j e_{x_j}$, где x_j — некоторые точки из Q, а ξ_j — комплексные числа; эти суммы образуют векторное пространство, если считать $\xi + \eta = \sum_j (\xi_j + \eta_j) e_{x_j}$ (точки x, фигурирующие в выражениях для ξ и η, можно объединить в одну последовательность точек x_j), $\lambda\xi = \sum_j \lambda\xi_j e_{x_j}$. Определим для векторов ξ скалярное произведение, полагая

$$(\xi, \eta)_F = \sum_{j,k} F(x_j, x_k)\, \xi_k \bar{\eta}_j. \tag{4.18}$$

Отождествляя с нулем векторы ξ, для которых $(\xi, \xi)_F = 0$, получим некоторое, вообще говоря, неполное гильбертово пространство $\mathfrak{H}_F$. В дальнейшем, говоря о векторах e_x, ξ и т. д., мы будем понимать классы эквивалентных элементов, отвечающих этим векторам. Заметим, что из (4.18) следует равенство

$$F(x, y) = (e_y, e_x)_F \quad (x, y \in Q). \tag{4.19}$$

С его помощью легко убеждаемся, что непрерывность ядра $F(x, y)$ относительно $(x, y) \in Q \times Q$ и непрерывность по $x \in Q$ вектор-функции $e_x \in \mathfrak{H}_F$ — эквивалентные понятия.

Перейдем к доказательству леммы. Построим пространства $\mathfrak{H}_K$ и $\mathfrak{H}_L$, так как $K \leqslant L$, то для каждой комбинации $\sum_j \xi_j e_{x_j} = \xi$ $(\xi, \xi)_K \leqslant (\xi, \xi)_L$. Отсюда следует, что после отождествления можно считать справедливыми включение $\mathfrak{H}_L \subseteq \mathfrak{H}_K$ и неравенство $\|\xi\|_K \leqslant \|\xi\|_L$ $(\xi \in \mathfrak{H}_L)$. Благодаря непрерывности $L(x, y)$ e_x непрерывно по норме $\|\cdot\|_L$ зависит от $x \in Q$, в силу приведенного неравенства e_x будет непрерывно зависеть и по норме $\|\cdot\|_K$ пространства $\mathfrak{H}_K$. Но тогда ядро $K(x, y)$ непрерывно относительно $(x, y) \in Q\times Q$. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Представим $F(\lambda)$ в виде

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) - F_2(\lambda) + i(F_3(\lambda) - F_4(\lambda)), \tag{4.20}$$

где $F_1(\lambda) = \max(\operatorname{Re} F(\lambda), 0)$, $F_2(\lambda) = -\min(\operatorname{Re} F(\lambda), 0)$; $F_3(\lambda)$ и $F_4(\lambda)$ вводятся аналогично по $\operatorname{Im} F(\lambda)$. Разложению (4.20) отвечает разложение $F(A) = F_1(A) - F_2(A) + i(F_3(A) - F_4(A))$, поэтому для доказательства непрерывности ядра оператора $F(A)$ достаточно установить непрерывность ядер каждого из операторов $F_j(A)$. Докажем ее для $F_1(A)$. Так как $0 \leqslant F_1(\lambda) \leqslant |F(\lambda)| \leqslant C|\gamma(\lambda)|^2$, то

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)\,\Phi(x, y; \lambda)\,d\varrho(\lambda) \leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|^2\,\Phi(x, y; \lambda)\,d\varrho(\lambda). \tag{4.21}$$

Левый интеграл в (4.21) представляет ядро оператора $F_1(A)$, правый—оператора $(\gamma(A))^*\gamma(A)$. По условию последнее ядро непрерывно на $Q\times Q$, поэтому согласно лемме 4.2 и неравенству (4.21) и ядро оператора $F_1(A)$ непрерывно. Теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е. Если интеграл (4.1) является локально ограниченной функцией $y \in Q$, а $\Phi(x, y; \lambda)$ ϱ-почти для каждого λ непрерывно относительно $(x, y) \in Q \times Q$, то для каждого ограниченного борелевского Δ оператор $E(\Delta)$ является интегральным с локально ограниченным ядром (спектральной функцией оператора A), представимым в виде абсолютно сходящегося для каждых x, $y \in Q$ интеграла:

$$\Xi(x, y; \Delta) = \int_{\Delta} \Phi(x, y; \lambda)\,d\varrho(\lambda). \tag{4.22}$$

Если дополнительно $(\gamma(A))^*\gamma(A)$ является интегральным оператором с непрерывным на $Q\times Q$ ядром, то и спектральная функция непрерывна относительно $(x, y) \in Q\times Q$.

4. Случай дискретного пространства Q. Благодаря предполагаемой сепарабельности Q это пространство состоит из счетного числа точек, меру dx каждой из которых без ограничения общности можно считать равной единице. Нумеруя точки Q числами 1, 2, . . ., получим, что $H_0 = L_2(Q, dx)$ совпадает с пространством последовательностей $l_2([1, \infty))$. В пространстве $l_2([1, \infty))$ каждый самосопряженный оператор A является карлемановским: можно положить $\gamma(A) = E$, его ядром (теперь естественно говорить — матрицей) служит $C(j, k) = = C_{jk} = \delta_{jk}$. В связи с этим *результаты пп. 1 — 3 верны для любого самосопряженного оператора в пространстве* $l_2([1, \infty))$.

Условие (4.2) превращается в условие $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j} < \infty$, поэтому в качестве $p_j \geqslant 1$ можно, например, взять $p_j = j^{1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$). Цепочка (4.3) превращается в цепочку

$$l_2\left([1, \infty), \frac{1}{p_j}\right) \supseteq l_2([1, \infty)) \supseteq l_2([1, \infty), p_j), \tag{4.23}$$

где $l_2([1,\infty), m_j)$ ($m_j > 0$; $j = 1, 2, \ldots$) обозначает пространство $l_2([1, \infty))$ с весом m_j: в нем скалярное произведение определяется равенством $(f, g)_{l_2([1,\infty), m_j)} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \bar{g}_j m_j$. Таким образом, каждый обобщенный собственный вектор является обычным вектором из $l_2\left([1, \infty), \frac{1}{p_j}\right)$. Оператор обобщенного проектирования $P(\lambda)$ является матричным, его матрица $\Phi_{jk}(\lambda)$ — спектральное ядро оператора A — положительно определенная и обладает свойством: ϱ-почти для всех λ

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{|\Phi_{jk}(\lambda)|^2}{p_j p_k} \leqslant 1 \left(\text{точнее: } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_{jj}(\lambda)}{p_j} = 1\right). \tag{4.24}$$

Любая функция $F(A)$, где $F(\lambda)$ ограничена на спектре A — матричный оператор с матрицей K_{jk}, представимой в виде абсолютно сходящегося интеграла

$$K_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, \Phi_{jk}(\lambda)\, d\varrho(\lambda); \qquad \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{|K_{jk}|^2}{p_j p_k} < \infty. \tag{4.25}$$

§ 5. Оценки роста собственных функций на бесконечности

Результаты предыдущих двух параграфов приводят к оценкам поведения на ∞ собственных функций операторов, действующих в L_2. Мы сейчас их изложим, ограничиваясь случаем самосопряженных операторов; переход к более общим классам операторов, для которых справедливы теоремы 2.3—2.6 о разложении, не представляет труда. Для простоты выкладок поведение на ∞ оценивается посредством степенных функций, однако из доказательств видно, что при желании можно дать более точные оценки (это же относится и к § 3, 4 — фигурирующие в них функции $q(x)$ и $p(x)$ могут иметь на ∞ более тонкое поведение, чем степенное).

Эти оценки роста на ∞ являются следствием того, что обобщенные собственные функции входят в пространство H_{-}, которое в случае $H_0 = L_2$ состоит из функций, имеющих определенную структуру на ∞. Оценки особенно просто выглядят в случае $H_0 = l_2$. Учитывая (4.24), а также (2.17) и равенство $H_{-} = l_2\left([1, \infty), \frac{1}{p_j}\right)$, получим: зафиксируем $\varepsilon > 0$, ϱ-почти для каждого λ

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{|\Phi_{jk}(\lambda)|^2}{j^{1+\varepsilon}k^{1+\varepsilon}} \leqslant 1, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\varphi_j(\lambda)|^2}{j^{1+\varepsilon}} = 1; \tag{5.1}$$

здесь $\varphi_j(\lambda)$ — обобщенный собственный вектор (выше мы считали $p_j = j^{1+\varepsilon}$). Из (5.1), во всяком случае, вытекает, что для ϱ-почти всех λ

$$\Phi_{jk}(\lambda) \underset{j,k\to\infty}{=} O(j^{\frac{1}{2}+\delta} k^{\frac{1}{2}+\delta}), \qquad \varphi_j(\lambda) \underset{j\to\infty}{=} O(j^{\frac{1}{2}+\delta}) \qquad (\delta > 0). \tag{5.2}$$

В случае недискретного Q положение тоньше. Ниже мы для простоты ограничимся случаем пространства L_2 во всем E_n.

1. Оценки неопределенных интегралов от собственных функций в $L_2(E_n)$. Эти оценки будут получены для операторов, имеющих обычные собственные функции.

Теорема 5.1. *Пусть у самосопряженного оператора A, действующего в $L_2(E_1)$, собственные функции $\varphi_\alpha(\lambda)$, получаемые посредством конструкции в) (стр. 349), являются обычными: для любой $u \in C_0^\infty(E_1)$ $(\varphi_\alpha(\lambda), u)_0 = (\varphi_\alpha(x; \lambda), u)_0$, где $\varphi_\alpha(x;\lambda)$ локально суммируема по x. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, тогда ϱ-почти все собственные функции $\varphi_\alpha(x; \lambda)$ удовлетворяют оценке*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}} \left| \int_0^x \varphi_\alpha(\xi; \lambda)\, d\xi \right|^2 dx < \infty, \tag{5.3}$$

показывающей, что неопределенные интегралы $\int_0^x \varphi_\alpha(\xi;\lambda)\,d\xi$ растут на ∞, грубо говоря, не быстрее $|x|^{\frac{1}{2}+\delta}$ $(\delta > 0)$.

Доказательство. Сейчас $\mathrm{D} = \frac{d}{dx}$, поэтому, интегрируя по частям, получим для любой $u \in C_0^\infty(E_1)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\alpha(x;\lambda)\overline{u'(x)}dx = (\psi_\alpha(x;\lambda), u')_0 = (\varphi_\alpha(\lambda), u)_0 = (\varphi_\alpha(x;\lambda), u)_0 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)}\, d_x \left(\int_0^x \varphi_\alpha(\xi;\lambda)\, d\xi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\int_0^x \varphi_\alpha(\xi;\lambda)\, d\xi\right)\overline{u'(x)}\, dx. \quad (5.4)$$

Отсюда

$$\psi_\alpha(x;\lambda) = -\int_0^x \varphi_\alpha(\xi;\lambda)d\xi + C \quad (x \in E_1). \quad (5.5)$$

Из (3.12) вытекает, что ϱ-почти для каждого λ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi_\alpha(x;\lambda)|^2}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}dx <$ $< \infty$. Так как исследуемый интеграл отличается от $\psi_\alpha(x;\lambda)$ лишь на константу, то из сходимости интеграла для $\psi_\alpha(x;\lambda)$ следует (5.3). Теорема доказана.

Ясно ,что такую же теорему можно сфомулировать и для пространства $L_2((0, \infty))$. В этом случае можно также воспользоваться конструкцией б) оператора T (стр. 349). Тогда при помощи (3.13) вместо (5.3) получим оценку

$$\int_0^{\infty} \left| \int_0^x \frac{\varphi_\alpha(\xi;\lambda)}{(1+|\xi|)^{1+\varepsilon}} d\xi - C(\alpha,\lambda) \right|^2 dx < \infty, \quad (5.6)$$

где $C(\alpha,\lambda)$ — некоторая константа.

Аналогичные результаты для пространств $L_2(G)$, $G \subseteq E_n$, при $n \geqslant 2$ получить не удается, так как тогда из равенства, подобного (5.4), вытекает равенство типа (5.5), в котором константа C заменена решением $C(x)$ уравнения $\mathrm{D}u = 0$. Интеграл $\int_{E_n} \frac{C(x)\,dx}{(1+|x_1|)^{2+\varepsilon}\ldots(1+|x_n|)^{2+\varepsilon}}$ может оказаться расходящимся (например, при $n=2$ $C(x) = f(x_1) + g(x_2)$, где f и g произвольны) и поэтому из оценки $\int_{E_n} \frac{|\psi_\alpha(x;\lambda)|^2\,dx}{(1+|x_1|)^{2+\varepsilon}\ldots(1+|x_n|)^{2+\varepsilon}} < \infty$ не следует аналогичная оценка, в которой $\psi_\alpha(x;\lambda)$ заменена интегралом $\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_n} \varphi_\alpha(\xi;\lambda)\,d\xi$. Однако если дополнительно потребовать карлемановость A, то оценки типа (5.3) и (5.6) можно получить и в многомерном случае.

Теорема 5.2. *Рассмотрим карлемановский самосопряженный оператор A, действующий в пространстве $L_2(E_n)$; предполагается, что интеграл* (4.1) *локально ограничен по $y \in E_n$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ спектральное ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ и собственные функции $\varphi_\alpha(x; \lambda)$ ϱ-почти для всех λ удовлетворяют оценкам*

$$\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n}\left|\int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}\int\limits_0^{y_1}\cdots\int\limits_0^{y_n}\Phi(\xi, \eta; \lambda)\,d\xi d\eta\right|^2\frac{dxdy}{(1+|x|)^{2n+\varepsilon}(1+|y|)^{2n+\varepsilon}} < \infty,$$

$$\int\limits_{E_n}\left|\int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}\varphi_\alpha(\xi; \lambda)\,d\xi\right|^2\frac{dx}{(1+|x|)^{2n+\varepsilon}} < \infty. \tag{5.7}$$

Доказательство первой оценки основывается на следующей лемме.

Лемма 5.1. *При предположениях теоремы для проинтегрированного спектрального ядра $\Psi(x, y; \lambda)$ справедливо почти для всех $(x, y; \lambda) \in E_n \times E_n \times E_1$ относительно меры $dxdyd\varrho(\lambda)$ равенство*

$$\Psi(x, y; \lambda)\,M(\lambda) = \int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}\int\limits_0^{y_1}\cdots\int\limits_0^{y_n}\Phi(\xi, \eta; \lambda)\,d\xi d\eta, \tag{5.8}$$

где $M(\lambda)$ — некоторая ϱ-почти всюду конечная и положительная функция.

Доказательство. Пусть $f, g \in C_0(E_n)$, Δ — ограниченное борелевское множество. Преобразуем выражение $(\Theta(\Delta) f, g)_0 = (T^{-1*} E(\Delta) T^{-1} f, g)_0 = (E(\Delta) T^{-1} f, T^{-1} g)_0$, учитывая вид (3.5) оператора T^{-1} и теорему 4.1. Так как интеграл (4.1) локально ограничен, то функция $p(x)$, вводимая посредством (4.2), также может быть взята локально ограниченной и поэтому благодаря (4.5) $\Phi(x, y; \lambda)$ локально суммируема с квадратом по $(x, y; \lambda) \in E_n \times E_n \times E_1$ относительно меры $dxdyd\varrho(\lambda)$. Это дает возможность произвести следующие выкладки:

$$(\Theta(\Delta) f, g)_0 = \int\limits_{E_n}\left(E(\Delta)\int\limits_{E_n}\frac{\omega(\xi, \cdot)}{q(\xi)}f(\xi)\,d\xi\right)(x)\int\limits_{E_n}\frac{\omega(\eta, x)}{q(\eta)}\overline{g(\eta)}\,d\eta dx =$$

$$= \int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n}(E(\Delta)\,\omega(\xi, \cdot), \omega(\eta, \cdot))_0\frac{f(\xi)\overline{g(\eta)}}{q(\xi)\,q(\eta)}\,d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n}\left\{\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n}\int\limits_{\Delta}\Phi(\eta', \xi'; \lambda)\,\omega(\xi, \xi')\,\omega(\eta, \eta')\,d\xi' d\eta' d\varrho(\lambda)\right\} \times \tag{5.9}$$

$$\times \frac{f(\xi)\,\overline{g(\eta)}}{q(\xi)\,q(\eta)}\,d\xi d\eta = \int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n}\int\limits_{\Delta}\left\{\frac{1}{q(x)\,q(y)}\int\limits_0^{x_1}\dots\int\limits_0^{x_n}\int\limits_0^{y_1}\dots\int\limits_0^{y_n}\Phi(\xi, \eta; \lambda)\,d\xi d\eta\right\} \times$$

$$\times f(y)\,\overline{g(x)}\,dx dy\,d\varrho(\lambda).$$

С другой стороны, используя построение разложений, описанное в п. 2, § 3, получим $\Theta(\Delta) = \int\limits_{\Delta}\Psi(\lambda)\,d\varrho_1(\lambda)$; $\varrho_1(\Delta)$ — фигурирующая там спектральная мера. Очевидно, $\varrho(\Delta)$ и $\varrho_1(\Delta)$ абсолютно непрерывны одна относительно другой, поэтому, обозначая $d\varrho_1(\lambda)/d\varrho(\lambda) = M(\lambda)$, найдем $\Theta(\Delta) = \int\limits_{\Delta}\Psi(\lambda)\,M(\lambda)\,d\varrho(\lambda)$. Учитывая (3.6), получаем

$$(\Theta(\Delta)f, g)_0 = \int\limits_{\Delta}\left\{\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n}\hat{\Psi}(x, y; \lambda)\,f(y)\,\overline{g(x)}\,dx dy\right\}M(\lambda)\,d\varrho(\lambda). \tag{5.10}$$

Сравнивая (5.9) и (5.10) благодаря произвольности f, g и Δ найдем, что почти для всех $(x, y; \lambda)$

$$\hat{\Psi}(x, y; \lambda)\,M(\lambda) = \frac{1}{q(x)\,q(y)}\int\limits_0^{x_1}\dots\int\limits_0^{x_n}\int\limits_0^{y_1}\dots\int\limits_0^{y_n}\Phi(\xi, \eta; \lambda)\,d\xi d\eta.$$

Так как $\Psi = q(x)\,q(y)\,\hat{\Psi}$, то отсюда вытекает (5.8). Лемма доказана.

Теперь первое из неравенств (5.7) следует из (3.8) (где положено $q^2(x) = (1 + |x_1|)^{2+\frac{\varepsilon}{n}}\dots(1 + |x_n|)^{2+\frac{\varepsilon}{n}}$), (5.8) и оценки $q(x) \leqslant (1 + |x|)^{2n+\varepsilon}$. Для доказательства второго нам понадобится следующая общая лемма

Лемма 5.2. *Пусть для каждых x, y из некоторого пространства Q определено положительно определенное ядро $K(x, y)$. Предположим, что имеет место сходящееся при любых $x, y \in Q$ разложение*

$$K(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\psi_\alpha(x)\,\overline{\psi_\alpha(y)}, \tag{5.11}$$

где функции $\psi_\alpha(x)$ обладают тем свойством, что из равенства $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha\psi_\alpha(x) = 0$ $(x \in Q)$, $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty}|a_\alpha|^2 < \infty$, следует: $a_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \dots)$.

Если имеется еще одно сходящееся для каждых $x, y \in Q$ *разложение* $K(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_\alpha(x)\overline{\varphi_\alpha(y)}$, *то*

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^{\infty} u_{\alpha\beta}\psi_\beta(x), \quad \sum_{\beta=1}^{\infty} |u_{\alpha\beta}|^2 \leqslant 1 \ (x \in Q;\ \alpha = 1, 2, \ldots). \quad (5.12)$$

Доказательство. Полагая в (5.11) $y = x$, заключаем, что вектор $(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots) \in l_2([1, \infty))$; обозначим его через s_x. Аналогично введем вектор $t_x = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots) \in l_2([1, \infty))$. Линейные комбинации векторов $s_x (x \in Q)$ плотны в $l_2([1, \infty))$, так как из того, что $(a, s_x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \overline{\psi_\alpha(x)} = 0$ $(a = (a_1, a_2, \ldots) \in l_2([1, \infty)))$, в силу предположения следует, что $a = 0$. Поставим в соответствие каждому вектору s_x вектор t_x и распространим это соответствие линейным образом на линейные комбинации s_x. Полученный линейный оператор U определен на всюду плотном множестве в $l_2([1, \infty))$ и в силу равенства $(s_x, s_y) = K(x, y) = (t_x, t_y) = (Us_x, Us_y)$ обладает свойством изометричности. Таким образом, U может быть распространен до изометрического оператора, определенного на всем $l_2([1, \infty))$. Обозначим матрицу этого оператора в базисе $\delta_\alpha = (\delta_{\alpha 1}, \delta_{\alpha 2}, \ldots)$ через $\|u_{\alpha\beta}\|_1^\infty$; получим

$$\varphi_\alpha(x) = (t_x, \delta_\alpha) = (Us_x, \delta_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{\infty} u_{\alpha\beta}(s_x, \delta_\beta) = \sum_{\beta=1}^{\infty} u_{\alpha\beta}\psi_\beta(x).$$

Так как $\|U\| = 1$, то $\|U^*\| = \|U\| = 1$; отсюда следует, что $\sum_{\beta=1}^{\infty} |u_{\alpha\beta}|^2 \leqslant 1$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Для определенности будем считать $N_\lambda = \infty$. Согласно общей схеме § 1 функции $\hat{\psi}_\alpha(x; \lambda)$, фигурирующие на стр. 351, ортогональны в $L_2(E_n)$ и дают сходящееся в $L_2(E_n \times E_n)$ разложение $\hat{\Psi}(x, y; \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \hat{\psi}_\alpha(x; \lambda)\overline{\hat{\psi}_\alpha(y; \lambda)}$. Поэтому разложение

$$\Psi(x, y; \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \psi_\alpha(x; \lambda)\overline{\psi_\alpha(y; \lambda)} \quad (5.13)$$

сходится в смысле $L_2\left(E_n \times E_n, \frac{1}{q(x)q(y)}\,dx\,dy\right)$ $(q^2(x) = (1 + |x_1|)^{2+\frac{\varepsilon}{n}} \ldots$

$\ldots (1+|x_n|)^{2+\frac{\varepsilon}{n}}$, в частности, оно сходится в смысле L_2 относительно $dxdy$ на любом компакте. С другой стороны, согласно (5.8), $\Psi(x, y; \lambda)$ непрерывно относительно $(x, y) \in E_n \times E_n$. Применяя лемму 4.1, заключаем, что функции $\psi_\alpha(x; \lambda)$ можно считать непрерывными по $x \in E_n$, а ряд (5.13) сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте. Далее, если $a \in l_2([1, \infty))$ и $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \psi_\alpha(x; \lambda) = 0$ $(x \in Q)$, то из ортогональности функций $\psi_\alpha(x; \lambda)$ в пространстве $L_2\left(E_n, \frac{1}{q^2} dx\right)$ следует, что $a = 0$. Итак, ядро $K(x, y) = \Psi(x, y; \lambda)$ и функции $\psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x; \lambda)$ обладают свойствами, требуемыми в лемме 5.2.

Рассмотрим теперь разложение $\Phi(x, y; \lambda)$ в билинейный ряд по $\varphi_\alpha(x; \lambda)$: $\Phi(x, y; \lambda) = \sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_\alpha(x; \lambda) \overline{\varphi_\alpha(y; \lambda)}$. Интегрируя это разложение и пользуясь (5.8), получим сходящийся для каждых $x, y \in E_n$ ряд

$$\Psi(x, y; \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_\alpha(x) \overline{\varphi_\alpha(y)}, \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{M(\lambda)}} \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} \varphi_\alpha(\xi; \lambda) \, d\xi \tag{5.14}$$

$$(x, y \in E_n; \alpha = 1, 2, \ldots).$$

Применяя лемму 5.2, заключаем, что имеет место (5.12), где $\psi_\beta(x) = \psi_\beta(x; \lambda)$. Поэтому, учитывая ортогональность функций $\psi_\beta(x; \lambda)$ относительно $L_2\left(E_n, \frac{1}{q^2} dx\right)$ и оценку $\int\limits_{E_n} |\psi_\beta(x; \lambda)|^2 \frac{dx}{q^2(x)} \leqslant 1$ (см. (3.11)), получим

$$\int_{E_n} |\varphi_\alpha(x)|^2 \frac{dx}{q^2(x)} = \int_{E_n} \left| \sum_{\beta=1}^{\infty} u_{\alpha\beta} \psi_\beta(x; \lambda) \right|^2 \frac{dx}{q^2(x)} =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\infty} |u_{\alpha\beta}|^2 \int_{E_n} |\psi_\beta(x; \lambda)|^2 \frac{dx}{q^2(x)} \leqslant \sum_{\beta=1}^{\infty} |u_{\alpha\beta}|^2 \leqslant 1 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Это неравенство вместе с (5.14) приводит ко второй из оценок (5.7).

Заметим, что во всех приведенных выше рассуждениях λ нужно было брать из некоторого множества полной ϱ-меры.

Теорема полностью доказана.

2. Оценки осредненных собственных функций карлемановского оператора в $L_2(E_n)$. Докажем следующую теорему.

Теорема 5.3. *Рассмотрим оператор A такой же, как в теореме 5.2. Пусть ε, δ', $\delta'' > 0$ фиксированы, тогда ϱ-почти для всех λ справедливы оценки*

$$\int\limits_{|x-\xi''|<\delta''}\int\limits_{|\xi''-\xi'|<\delta'}\int\limits_{|y-\eta''|<\delta''}\int\limits_{|\eta''-\eta'|<\delta'} \Phi(\xi',\eta';\lambda)\,d\xi'd\eta'd\xi''d\eta'' \underset{|x|,|y|\to\infty}{=} O\left(|x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}|y|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}\right), \tag{5.15}$$

$$\int\limits_{|x-\xi''|<\delta''}\int\limits_{|\xi''-\xi'|<\delta'} \varphi_\alpha(\xi';\lambda)\,d\xi'd\xi'' \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(|x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}\right) \quad (\alpha=1,\ldots,N_\lambda).$$

Для доказательства понадобится лемма.

Лемма 5.3. *Обозначим J_δ интегральный самосопряженный оператор в $L_2(E_n)$ с ядром $\chi_\delta(x,y)=\varkappa_{(0,\delta)}(|x-y|)$ $(\delta>0)$, где $\varkappa_{(0,\delta)}$ — характеристическая функция интервала $(0,\delta)$. Для любого ограниченного в $L_2(E_n)$ оператора C оператор $J_\delta CJ_\delta$ интегральный с непрерывным по $(x,y)\in E_n\times E_n$ и ограниченным ядром $K(x,y)=(C\chi_\delta(\cdot,y),\chi_\delta(\cdot,x))_0$.*

Доказательство. Ядро $K(x,y)$ непрерывно, так как $\chi_\delta(\cdot,x)$ является непрерывной вектор-функцией от x со значениями в $L_2(E_n)$. Оно ограничено: $|(C\chi_\delta(\cdot,y),\chi_\delta(\cdot,x))_0|\leqslant\|C\|\,\|\chi_\delta(\cdot,y)\|_0\|\chi_\delta(\cdot,x)\|_0\leqslant Cm^2$, где m — мера шара $|x|<\delta$. Для финитных ограниченных f,g имеем

$$\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n}K(x,y)f(y)\overline{g(x)}\,dxdy=\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n}(C\chi_\delta(\cdot,y),\chi_\delta(\cdot,x))_0 f(y)\overline{g(x)}\,dxdy=$$

$$=\left(C\int\limits_{E_n}\chi_\delta(\cdot,y)f(y)\,dy,\int\limits_{E_n}\chi(\cdot,x)g(x)\,dx\right)_0=(CJ_\delta f,J_\delta g)_0=(J_\delta CJ_\delta f,g)_0 \tag{5.16}$$

(эти выкладки корректны, так как интеграл типа $\int\limits_{E_n}\chi_\delta(\cdot,y)f(y)\,dy$ можно понимать как интеграл от вектор-функции со значениями в $L_2(E_n)$). Равенство (5.16) и доказывает лемму.

Перейдем к доказательству теоремы. Обозначим F интегральный оператор с ядром $F(x, y) = \dfrac{\chi_{\delta''}(x, y)}{(1+|y|)^{\frac{n}{2}+\varepsilon}}$. Так как

$$\int\limits_{E_n} |(Ff)(x)|^2\,dx = \int\limits_{E_n}\left|\int\limits_{|x-\xi|<\delta''} \frac{f(\xi)}{(1+|\xi|)^{\frac{n}{2}+\varepsilon}}\,d\xi\right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{E_n} \frac{1}{(1+|x|-\delta'')^{n+2\varepsilon}}\left(\int\limits_{|x-\xi|<\delta''} |f(\xi)|\,d\xi\right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^2_{L_1(E_n)} \int\limits_{E_n} \frac{dx}{(1+|x|-\delta'')^{n+2\varepsilon}}, \tag{5.17}$$

то F можно рассматривать как непрерывно действующий из пространства $L_1(E_n)$ в $L_2(E_n)$. Сопряженный оператор F^*, задающийся ядром $F^*(x, y) = \overline{F(y, x)} = F(y, x)$, будет непрерывно действовать из $L_2(E_n)$ в $L_1(E_n)' = M(E_n)$ ($M(E_n)$ — пространство в существенном ограниченных функций на E_n, $\|f\|_{M(E_n)} = \operatorname*{vraimax}_{x\in E_n} |f(x)|$). Пусть $E(\Delta)$ — разложение единицы оператора A, произведение $\Theta(\Delta) = F^* J_{\delta'} E(\Delta) J_{\delta'} F$ непрерывно действует из $L_1(E_n)$ в $M(E_n)$ и является операторной мерой по Δ. Покажем ограниченность сильной $\operatorname{Var}\Theta$ на всей оси $(-\infty, \infty)$.

Обозначим $P_\Delta(x, y) = (E(\Delta)\chi_{\delta'}(\cdot, y), \chi_{\delta'}(\cdot, x))_0$ ядро оператора $J_{\delta'}E(\Delta)J_{\delta'}$ (см. лемму 5.3). Оно положительно определено, $P_\Delta(x, x) \leqslant C_1$ $(x \in E_n)$, при фиксированном x $P_\Delta(x, x)$ является мерой по Δ. Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ не пересекаются. Так как $\Theta(\Delta)$ действует из $L_1(E_n)$ в $M(E_n)$, то норма этого интегрального оператора равна sup модуля его ядра. Обозначая $p(x) = (1+|x|)^{n+2\varepsilon}$, получим

$$\sum_{j=1}^N \|\Theta(\Delta_j)\| = \sum_{j=1}^N \sup_{x,y}\left|\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n} F(\xi, x) P_{\Delta_j}(\xi, \eta) F(\eta, y)\,d\xi d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^N \sup_{x,y}\left\{\int\limits_{E_n} F(\xi, x)\sqrt{P_{\Delta_j}(\xi, \xi)}\,d\xi \cdot \int\limits_{E_n} F(\eta, y)\sqrt{P_{\Delta_j}(\eta, \eta)}\,d\eta\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^N \sup_x \left\{\int\limits_{E_n} F(\xi, x)\sqrt{P_{\Delta_j}(\xi, \xi)}\,d\xi\right\}^2 \leqslant \sum_{j=1}^N \sup_x \int\limits_{E_n} F^2(\xi, x)\, p(\xi)\,d\xi \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} \frac{P_{\Delta_j}(\xi,\xi)}{p(\xi)}\,d\xi = \sup_x \int\limits_{E_n} F^2(\xi,x)\,p(\xi)\,d\xi \cdot \int\limits_{E_n} \frac{P_{\bigcup\limits_{j=1}^{N}\Delta_j}(\xi,\xi)}{p(\xi)}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int\limits_{E_n} \frac{d\xi}{p(\xi)} \cdot \sup_x \left\{ \frac{1}{(1+|x|)^{n+2\varepsilon}} \int\limits_{|x-\xi|<\delta''} (1+|\xi|)^{n+2\varepsilon}\,d\xi \right\} = C_2. \quad (5.18)$$

В этой оценке C_2 не зависит от выбора Δ_j на $(-\infty,\infty)$, поэтому $\operatorname*{Var}\limits_{(-\infty,\infty)} \Theta < \infty$.

Воспользуемся теоремой 1.2 и продифференцируем $\Theta(\Delta)$ по $\sigma(\Delta) = \operatorname*{Var}\limits_{\Delta}\Theta$. Полученная производная $\Psi(\lambda)$ является оператором, непрерывно действующим из $L_1(E_n)$ в $M(E_n)$, причем $\Theta(\Delta) = \int\limits_{\Delta}\Psi(\lambda)d\sigma(\lambda)$. Если $\varrho(\Delta) = 0$, то $E(\Delta) = 0$, откуда $\Theta(\Delta') = 0$ для всех $\Delta' \subseteq \Delta$, т. е. $0 = \operatorname*{Var}\limits_{\Delta}\Theta = \sigma(\Delta)$. Таким образом, $\sigma(\Delta)$ абсолютно непрерывна относительно $\varrho(\Delta)$; обозначая $d\sigma(\lambda)/d\varrho(\lambda) = R(\lambda)$, получим

$$\Theta(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \Psi(\lambda) R(\lambda)\,d\varrho(\lambda). \quad (5.19)$$

До сих пор мы нигде не пользовались сходимостью интеграла (4.1). Так как по предположению он локально ограничен, то $\Phi(x, y; \lambda)$ локально суммируема с квадратом относительно меры $dx\,dy\,d\varrho(\lambda)$, а оператор $E(\Delta)$ — интегральный с ядром $\Xi(x, y; \Delta) = \int\limits_{\Delta}\Phi(x, y; \lambda)\times$ $\times\, d\varrho(\lambda)$ (см. теорему 4.1). Поэтому $\Theta(\Delta)$ также интегральный с ядром $\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n} F(\xi'', x) F(\eta'', y) \int\limits_{|\xi''-\xi'|<\delta'} \int\limits_{|\eta''-\eta'|<\delta'} \left\{ \int\limits_{\Delta} \Phi(\xi', \eta'; \lambda)\,d\varrho(\lambda) \right\} d\xi' d\eta' d\xi'' d\eta''$.

Принимая во внимание локальную суммируемость $\Phi(x, y; \lambda)$ по $(x, y; \lambda)$, (5.19) и произвольность Δ получаем для финитных ограниченных f, g:

$$\int\limits_{\Delta} R(\lambda)(\Psi(\lambda) f, g)_0\,d\varrho(\lambda) = (\Theta(\Delta) f, g)_0 =$$

$$= \int\limits_{\Delta} R(\lambda) \int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n} S(x, y; \lambda) f(y)\overline{g(x)}\,dx\,dy\,d\varrho(\lambda), \quad (5.20)$$

$$S(x, y; \lambda) =$$

$$= \frac{1}{R(\lambda)} \int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n} F(\xi'', x) F(\eta'', y) \int\limits_{|\xi''-\xi'|<\delta'} \int\limits_{|\eta''-\eta'|<\delta'} \times \Phi(\xi', \eta'; \lambda) d\xi' d\eta' d\xi'' d\eta'',$$

т. е. $S(x, y; \lambda)$ является ядром оператора $\Psi(\lambda)$, непрерывно действующего из $L_1(E_n)$ в $M(E_n)$. Но тогда это ядро в существенном ограничено; учитывая это и вид $F(x, y)$, получаем из (5.20) первое из соотношений (5.15).

Для получения второго подставим в полученную только что оценку выражение (4.8) для $\Phi(\xi', \eta'; \lambda)$, поменяем порядок суммирования и интегрирования и положим затем $y = x$. В результате получим

$$\sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \Bigl| \int\limits_{|x-\xi''|<\delta''} \int\limits_{|\xi''-\xi'|<\delta'} \varphi_\alpha(\xi'; \lambda)\, d\xi' d\xi'' \Bigr|^2 \underset{|x|\to\infty}{=} O(|x|^{n+2\varepsilon}), \tag{5.21}$$

откуда и следует вторая из оценок (5.15). Теорема доказана.

Характерной особенностью оценок в теоремах 5.2 и 5.3 является то, что они справедливы для любых карлемановских операторов, независимо от поведения по y интеграла (4.1). Сейчас мы при помощи простого рассуждения получим другие оценки, уже учитывающие это поведение.

Из неравенства в (4.5) (см. также (4.7)) следует, что ϱ-почти для всех λ

$$\Phi(x, y; \lambda) = \sqrt{p(x)\,p(y)}\, \widehat{\Psi}(x, y; \lambda)\ (x, y \in E_n); \quad \int\limits_{E_n} \int\limits_{E_n} |\widehat{\Psi}(x, y; \lambda)|^2 dx dy \leqslant 1. \tag{5.22}$$

Пусть $\delta > 0$ фиксировано; при помощи неравенства Коши—Буняковского из (5.22) заключаем:

$$\Bigl| \int\limits_{|x-\xi|<\delta} \int\limits_{|y-\eta|<\delta} \Phi(\xi, \eta; \lambda)\, d\xi d\eta \Bigr| \leqslant \sqrt{\int\limits_{|x-\xi|<\delta} p(\xi)\, d\xi} \times$$

$$\times \sqrt{\int\limits_{|y-\eta|<\delta} p(\eta)\, d\eta} \sqrt{\int\limits_{|x-\xi|<\delta} \int\limits_{|y-\eta|<\delta} |\widehat{\Psi}(\xi, \eta; \lambda)|^2\, d\xi d\eta} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_{|x-\xi|<\delta} p(\xi)\, d\xi} \sqrt{\int\limits_{|y-\eta|<\delta} p(\eta)\, d\eta} \cdot \underset{|x|, |y|\to\infty}{o(1)}. \tag{5.23}$$

Аналогично для индивидуальных собственных функций $\varphi_\alpha(x; \lambda)$ рассматриваемого оператора включение $\varphi_\alpha(\cdot\,; \lambda) \in L_2\left(E_n, \frac{1}{p}\, dx\right)$ приводит к оценке

$$\int\limits_{|x-\xi|<\delta} \varphi_\alpha(\xi; \lambda)\, d\xi = \sqrt{\int\limits_{|x-\xi|<\delta} p(\xi)\, d\xi} \cdot \underset{|x|\to\infty}{o(1)}\ (\alpha = 1, \ldots, N_\lambda). \tag{5.24}$$

Из (5.23) и (5.24) вытекает такая теорема.

Теорема 5.4. *Рассмотрим оператор A такой же, как в теореме 5.2, и обозначим*

$$C(y) = \int_{E_n} |C(x, y)|^2 \, dx \quad (y \in E_n),$$

где $C(x, y)$ — ядро оператора $\gamma(A)$. Зафиксируем $\varepsilon, \delta > 0$; ϱ-почти всюду справедливы оценки

$$\int_{|x-\xi|<\delta} \int_{|y-\eta|<\delta} \Phi(\xi, \eta; \lambda) \, d\xi d\eta \underset{|x|, |y| \to \infty}{=} O\left(\sqrt{\widetilde{C}(x)} \, |x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon} \sqrt{\widetilde{C}(y)} \, |y|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}\right), \tag{5.25}$$

$$\int_{|x-\xi|<\delta} \varphi_\alpha(\xi; \lambda) \, d\xi \underset{|x| \to \infty}{=} O\left(\sqrt{\widetilde{C}(x)} \, |x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}\right) (\alpha = 1, \ldots, N_\lambda),$$

где $\widetilde{C}(x) = \sup\limits_{|x-\xi|<\delta} (1 + C(\xi))$.

Действительно, положим $p(y) = (1 + C(y))(1 + |y|)^{n+2\varepsilon}$ $(y \in E_n)$. Это возможно, так как интеграл (4.2) будет сходиться. Подставляя такое p в (5.23) и (5.24), приходим к (5.25). Теорема доказана.

Ясно, что подобным же образом из (5.22) и включения $\varphi_\alpha(\cdot; \lambda) \in L_2\left(E_n, \frac{1}{p} dx\right)$ можно было бы получить и оценки на ∞ интегралов

$$\int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} \int_0^{y_1} \cdots \int_0^{y_n} \Phi(\xi, \eta; \lambda) \, d\xi d\eta, \quad \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} \varphi_\alpha(\xi; \lambda) \, d\xi.$$

На этих оценках мы останавливаться не будем.

3. Оценки собственных функций карлемановского оператора в $L_2(Q, dx)$. Ясно, что некоторые соотношения § 4 можно воспринимать как такого рода оценки: по-прежнему обозначим

$$C(y) = \int_Q |C(x, y)|^2 \, dx \quad (y \in Q), \tag{5.26}$$

где $C(x, y)$ — ядро оператора $\gamma(A)$, и зафиксируем произвольную $p(x) \geqslant 1$ такую, что

$$\int_Q \frac{C(y)}{p(y)} \, dy < \infty. \tag{5.27}$$

Тогда для ϱ-почти всех λ справедливы соотношения

$$\int_Q \int_Q \frac{|\Phi(x, y; \lambda)|^2}{p(x)\,p(y)}\,dx\,dy \leqslant 1, \quad \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \int_Q \frac{|\varphi_\alpha(x; y)|^2}{p(x)}\,dx = 1, \tag{5.28}$$

в известном отношении характеризующие поведение $\Phi(x, y; \lambda)$ и $\varphi_\alpha(x; \lambda)$ на ∞. С другой стороны, мы сейчас покажем, что при одном дополнительном ограничении из (5.28) могут быть получены и оценки по модулю.

Теорема 5.5. *Пусть A—самосопряженный карлемановский оператор в пространстве $L_2(Q, dx)$, для которого функция* (5.26) *локально ограничена. Построим локально ограниченную $p(y)$, удовлетворяющую* (5.27), *и предположим, что интеграл*

$$\int_Q |C(x, y)|^2\,p(y)\,dy = B(x) \quad (x \in Q) \tag{5.29}$$

локально суммируем. Тогда ϱ-почти для каждого λ имеют место оценки:

$$|\Phi(x, y; \lambda)| \leqslant \frac{1}{|\gamma(\lambda)|^2}\sqrt{B(x)\,B(y)}, \quad \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} |\varphi_\alpha(x; \lambda)|^2 \leqslant \frac{1}{|\gamma(\lambda)|^2} B(x). \tag{5.30}$$

Первая из них справедлива почти для всех (x, y); вторая справедлива при дополнительном предположении о непрерывности $\Phi(x, y; \lambda)$ по (x, y) ϱ-почти для всех λ.

Доказательство. Покажем, что почти для всех (x, y) справедливо равенство

$$\int_Q \int_Q C(x, \xi)\,\overline{C(y, \eta)}\,\Phi(\xi, \eta; \lambda)\,d\xi\,d\eta = |\gamma(\lambda)|^2\,\Phi(x, y; \lambda), \tag{5.31}$$

по существу совпадающее с тем фактом, что собственная функция оператора A является собственной и для $(\gamma(A))^*\,\gamma(A)$.

Используя неравенство Коши—Буняковского и (5.28), получим

$$\int_Q \int_Q |C(x, \xi)\,\overline{C(y, \eta)}\,\Phi(\xi, \eta; \lambda)|\,d\xi\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_Q \int_Q |C(x, \xi)\,\overline{C(y, \eta)}|^2\,p(\xi)\,p(\eta)\,d\xi\,d\eta\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(\int\limits_Q\int\limits_Q \frac{|\Phi(\xi,\eta;\lambda)|^2}{p(\xi)\,p(\eta)}\,d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{B(x)\,B(y)}, \qquad (5.32)$$

откуда, в частности, вытекает абсолютная сходимость почти при всех $(x, y) \in Q \times Q$ интеграла в левой части (5.31). Далее покажем, что для финитной $f \in L_2(Q, dx) = H_0$ $(\gamma(A))^* f \in L_2(Q, p dx) = H_+$. Действительно, пусть f аннулируется вне компакта Q_0. Тогда

$$\int\limits_Q |((\gamma(A))^* f)(\xi)|^2 p(\xi)\,d\xi = \int\limits_Q \left|\int\limits_{Q_0} \overline{C(x,\xi)}\, f(x)\,dx\right|^2 p(\xi)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^2 \int\limits_Q\int\limits_{Q_0} |C(x,\xi)|^2\,dx\,p(\xi)\,d\xi = \|f\|^2 \int\limits_{Q_0} B(x)\,dx < \infty.$$

На $u, v \in L_2(Q, pdx)$ имеем $(P(\lambda)\,u, v)_0 = \int\limits_Q\int\limits_Q \Phi(\xi,\eta;\lambda)\,u(\eta)\,\overline{v(\xi)}\,d\xi d\eta$.

Поэтому для финитных $f, g \in L_2(Q, dx)$ и ограниченных Δ получим

$$(\gamma(A)\,E(\Delta)\,(\gamma(A))^* f, g)_0 = (E(\Delta)\,(\gamma(A))^* f, (\gamma(A))^* g)_0 =$$

$$= \int\limits_\Delta (P(\lambda)\,(\gamma(A))^* f, (\gamma(A))^* g)_0\,d\varrho(\lambda) =$$

$$= \int\limits_\Delta\int\limits_Q\int\limits_Q \Phi(\xi,\eta;\lambda) \int\limits_Q \overline{C(y,\eta)}\,f(y)\,dy \cdot \overline{\int\limits_Q \overline{C(x,\xi)}\,g(x)\,dx}\,d\xi d\eta d\varrho(\lambda) =$$

$$= \int\limits_\Delta\int\limits_Q\int\limits_Q \left\{\int\limits_Q\int\limits_Q C(x,\xi)\,\overline{C(y,\eta)}\,\Phi(\xi,\eta;\lambda)\,d\xi d\eta\right\} f(y)\,\overline{g(x)}\,dx dy d\varrho(\lambda). \qquad (5.33)$$

С другой стороны, согласно теореме 4.1, $\gamma(A)\,E(\Delta)\,(\gamma(A))^*$ является интегральным оператором с ядром $\int\limits_\Delta |\gamma(\lambda)|^2\,\Phi(x, y;\lambda)\,d\varrho(\lambda)$. Отсюда

$$(\gamma(A)\,E(\Delta)\,(\gamma(A))^* f, g)_0 = \int\limits_\Delta\int\limits_Q\int\limits_Q |\gamma(\lambda)|^2\,\Phi(x,y;\lambda)\,f(y)\,\overline{g(x)}\,dx dy d\varrho(\lambda).$$

Сравнивая это равенство с (5.33), благодаря произвольности f, g и Δ получим (5.31).

Из (5.31) и (5.32) следует первая из оценок (5.30). Для вывода второй из первой предполагаем, что $\Phi(x, y; \lambda)$ непрерывно по (x, y), подставляем в первую оценку билинейное разложение $\Phi(x, y; \lambda)$ и полагаем $y = x$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что на первый взгляд может показаться, что неравенства (5.28) влекут более сильные оценки, чем (5.30). Например, пусть $C(y) \leqslant C < \infty$, тогда в качестве $\frac{1}{p(y)}$ может быть взята произвольная неотрицательная функция из $L_1(Q, dx)$. Благодаря сходимости интеграла $\int\limits_Q \frac{|\varphi_a(x;\lambda)|^2}{p(x)}\,dx$ (см. (5.28)) отсюда, естественно, должна следовать ограниченность $\varphi_a(x;\lambda)$ по x. Однако это рассуждение некорректно, так как $\Phi(x, y; \lambda)$, а значит и $\varphi_a(x;\lambda)$, существуют ϱ-почти для всех λ и то множество, где существования, вообще говоря, нет, зависит от p, так как p определяет оператор T, а значит и меру $\varrho(\Delta) = \text{Сл.}\,(\mathrm{T}^{-1*}E(\Delta)\,T^{-1})$.

Глава VI

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этой главе будет изложена теория разложений по собственным функциям (обобщенным и обычным) для дифференциальных операторов в пространстве $L_2(G)$. После выяснения вопросов самосопряженности для таких операторов мы перейдем к детальному построению спектральной теории эллиптических операторов, исследуя поведение разложений вплоть до границы области. Будут также изложены общие результаты по спектральному анализу неэллиптических операторов, они иллюстрируются отдельными примерами. В последнем параграфе намечается спектральная теория обыкновенных дифференциальных операторов. Ниже, если противное не оговаривается, под областью G понимается, вообще говоря, неограниченная область с кусочно гладкой границей Γ.

§ 1. Дифференциальные операторы в неограниченной области

В этом параграфе мы перенесем некоторые понятия гл. II на случай неограниченной G. Мы не будем останавливаться на разрешимости краевых задач в неограниченной области (хотя подобную теорию можно строить, используя методику энергетических неравенств), а исследуем более специальный вопрос о самосопряженности операторов в $L_2(G)$, порождаемых формально самосопряженными выражениями и граничными условиями. Вопрос по существу обозначает получение равенств типа Λ(гр) $=$ Л(гр) и сложен по своей природе. Для эллиптических операторов имеется большое число результатов в этом направлении, выясняющих самосопряженность в зависимости от поведения коэффициентов выражения на ∞. Эти результаты будут отражены весьма неполно, вместе с тем будут изложены некоторые общие подходы и факты для неэллиптических операторов. Ниже, если противное не оговорено, все операторы считаются действующими в $H_0 = L_2(G)$, $G \subseteq E_n$.

1. Минимальный, максимальный, сильный и слабый операторы для неограниченной области. Пусть в неограниченной G рассматривается выражение L порядка r с обычными предположениями гладкости коэффициентов. Напомним (см. стр. 219—220), что класс функций, удовлетворяющих некоторым (гр), определяется как подпространство $W_2^r(\text{гр}) \subseteq W_2^r(G) = W_2^{(r,q)}(G)\,(q(x) = 1, x \in G)$, содержащее $\mathring{W}_2^r(G)$ — замыкание в $W_2^r(G)$ класса $C_0^\infty(G)$ финитных относительно G и ∞ функций. Так как (гр) мы понимаем без учета поведения на ∞, то

$W_2^r(\text{гр})^+$ строится как подпространство $W_2^r(G)$, состоящее из всех v, для которых $(Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0$ при любой $u \in W_2^r(\text{гр})$, финитной на ∞. Рассматриваются лишь такие (гр), для которых $(\text{гр})^{++} = (\text{гр})$.

Минимальный оператор Λ определим подобно случаю ограниченной G (см. стр. 93—94): полагаем $\Lambda' u = Lu$, $\mathfrak{D}(\Lambda') = \overset{\circ}{C}{}^\infty(G)$. Легко доказывается, что Λ' допускает замыкание, тогда по определению $\Lambda = \overline{\Lambda'}$. Нетрудно показать, что каждая функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^r(G) \cap W_{2,0}^r(E_n)$ (т. е. $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^r(G)$ и финитна на ∞) входит в $\mathfrak{D}(\Lambda)$, причем $\Lambda u = Lu$.

Пусть Λ^+ — минимальный оператор, построенный по L^+, тогда максимальный оператор Л определяется как $(\Lambda^+)^*$. Рассмотрим функции $u \in L_2(G)$, входящие при любом $R > 0$ в $W_2^r(G_R)$, где G_R — пересечение G с шаром $|x| < R$. Оператор $Au = Lu$, определяемый на этих функциях, дополнительно таких, что $Lu \in L_2(G)$, будет, вообще говоря, частью Л: при $v \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(G) = \mathfrak{D}((\Lambda^+)')$ $(Au, v)_0 = (Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0 = (u, (\Lambda^+)'v)_0$, откуда $A \subseteq ((\Lambda^+)')^* = (\Lambda^+)^* = $ Л.

Предположим, что на Γ заданы некоторые (гр). Определим Λ' (гр) равенством $\Lambda'(\text{гр})\, u = Lu$, $\mathfrak{D}(\Lambda'(\text{гр})) = W_2^r(\text{гр}) \cap W_{2,0}^r(E_n)$ (т. е. $u \in W_2^r(\text{гр})$ и финитна на ∞). Очевидно, $\Lambda'(\text{гр}) \subseteq$ Л и поэтому существует $\overline{\Lambda'(\text{гр})} = \Lambda(\text{гр})$ — сильный оператор. По определению слабый оператор Л(гр) $= (\Lambda^+(\text{гр})^+)^*$. Очевидно,

$$\Lambda \subseteq \Lambda(\text{гр}) \subseteq \text{Л}(\text{гр}) \subseteq \text{Л}. \tag{1.1}$$

Как и в случае ограниченной G, Λ и некоторое сужение Л — частные случаи операторов Λ(гр) и Л(гр).

2. **Локальная структура области определения максимального и слабого операторов в случае эллиптического выражения.** В этом и следующих пунктах мы будем подобно § 4—5, гл. III, формулировать результаты лишь в простейших случаях (сильно эллиптические выражения, нулевые или типа третьей краевой задачи граничные условия), предоставляя читателю общие формулировки. Пусть L — выражение порядка $r = 2m$ с обычными условиями гладкости коэффициентов. Предположим, что в некоторой подобласти $G_0 \subseteq G$ выражение L эллиптично. Гладкость $u \in \mathfrak{D}$(Л) внутри G_0 легко выясняется при помощи теорем § 4 и § 6, гл. III. Так, имеет место теорема.

Теорема 1.1. *Пусть коэффициенты L $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+p}(G_0)$, $p \geq m$. Тогда всякая функция из $\mathfrak{D}$(Л) на G_0 входит в $W_{2,\text{лок}}^{2m}(G_0)$.*

В самом деле, если $g \in \mathfrak{D}$(Л), то $(g, L^+v)_0 = (f, v)_0$ с некоторой

$f \in L_2(G)$ $(v \in C_0^\infty(G_0))$. Иными словами, можно сказать: $g \in L_2(G_0)$ внутри G_0 удовлетворяет уравнение $Lu = f \in L_2(G_0)$. Согласно теореме 4.5, гл. III, $g \in W_{2,\text{лок}}^{2m}(G_0)$, что и требовалось.

Гладкость функций из $\mathfrak{D}$ (Л (гр)), и тем более из $\mathfrak{D}$ (Л), вплоть до общей границы Γ_0 областей G_0 и G, вообще говоря, не имеет места. Так, пусть $G_0 = G$ ограничена, $W_2^r(\text{гр}) = W_2^r(G)$. Тогда $\mathfrak{D}$ (Л (гр)) $= \mathfrak{D}$ (Л), а $\mathfrak{D}$ (Л) не исчерпывается полностью пространством $W_2^r(G)$ (пример был приведен на стр. 199 в конце п. 8). Подобная гладкость будет для L, Γ_0 и (гр), для которых имеют место теоремы о локальном повышении гладкости вплоть до Γ_0. В частности, справедлива теорема.

Теорема 1.2. *Пусть Γ_0 — ограниченный кусок границы Γ, к которому примыкает ограниченная подобласть $G_0 \subseteq G$. Тогда: 1) если L сильно эллиптично порядка $2m$ в $G_0 \cup \Gamma_0$ и его коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+p}(G_0 \cup \Gamma_0)$ $(p \geqslant m)$, кусок Γ_0 класса C^{2m+p} и условия* (гр) *здесь нулевые* $(D^\alpha u|_{\Gamma_0} = 0, |\alpha| \leqslant m-1)$, *то всякая функция из* $\mathfrak{D}$ (Л (гр)) *на $G_0 \cup \Gamma_0$ входит в $W_{2,\text{лок}}^{2m}(G_0, \Gamma_0)$ и удовлетворяет на Γ_0 нулевые условия; 2) если L сильно эллиптично второго порядка в $G_0 \cup \Gamma_0$, $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(G_0 \cup \Gamma_0)$ и коэффициенты $p_j(x)$ в представлении (2.4), гл. III, вещественны, кусок Γ_0 класса C^2 и условия* (гр) *здесь имеют вид:* $\dfrac{\partial u}{\partial \mu} + \sigma(x) u|_{\Gamma_0} = 0 (\sigma \in C^1(\Gamma_0))$, *то всякая функция из* $\mathfrak{D}$ (Л (гр)) *на $G_0 \cup \Gamma_0$ входит в $W_{2,\text{лок}}^{2}(G_0, \Gamma_0)$ и удовлетворяет на Γ_0 рассматриваемому* (гр).

Докажем утверждение в случае 1). Если $g \in \mathfrak{D}$ (Л (гр)), то $(g, L^+v)_0 = (f, v)_0$ с $f \in L_2(G)$ для всех $v \in W_2^{2m}(\text{гр})^+ \cap W_{2,0}^{2m}(E_n)$. В частности, $(g, L^+v)_{L_2(G_0)} = (f, v)_{L_2(G_0)}$ для всех $v \in W_2^{2m}(\text{гр})$, аннулирующихся в окрестностях множества $G \setminus G_0$, т. е. $g \in L_2(G_0)$ внутри G_0 вплоть до Γ_0 удовлетворяет уравнение $Lu = f \in L_2(G_0)$. Согласно теореме 4.6, гл. III. $g \in W_{2,\text{лок}}^{2m}(G_0, \Gamma_0)$ и удовлетворяет (гр) на Γ_0, а это и требовалось. Доказательство в случае 2) такое же, нужно только воспользоваться теоремой 4.7, гл. III. Теорема доказана.

Поясним важность теоремы 1.2 сперва в случае ограниченной G. Пусть $G_0 = G$ и удовлетворяются требования теоремы, тогда $\mathfrak{D}$ (Л (гр)) $= W_2^r(\text{гр}) = \mathfrak{D}(\Lambda'(\text{гр}))$. Но $\Lambda'(\text{гр}) \subseteq$ Л (гр), поэтому теперь $\Lambda'(\text{гр}) =$ Л (гр) $= (\Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+)^*$.

Это, с одной стороны, показывает замкнутость $\Lambda'(\text{гр})$, а с другой — дает правило вычисления $((\Lambda^+(\text{гр})^+)')^*$. Ясно, что условия теоремы выполняются и для L^+, $(\text{гр})^+ = (\text{гр})$. Поэтому $\Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+$ также замкнут. Итак, мы получили следующее утверждение.

Следствие 1*. Пусть выполнены требования теоремы 1.2, причем G ограничена и $G_0 = G$. Тогда $\Lambda'(\text{гр})$, $\Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+$ замкнуты (и поэтому равны соответственно $\Lambda(\text{гр})$ и $\Lambda^+(\text{гр})^+$) и

$$(\Lambda'(\text{гр}))^* = \Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+, \quad (\Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+)^* = \Lambda'(\text{гр}). \tag{1.2}$$

В случае неограниченной G подобные соотношения, вообще говоря, не имеют места (так, уже нельзя утверждать, что $\mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр})) = W_2^r(\text{гр})$). Однако последние рассуждения показывают, что при указанных в теореме 1.2 L, Γ и (гр) тяжесть доказательства равенств типа (1.2) связана с поведением L, Γ и (гр) на ∞ Заметим, что без дополнительных ограничений на ∞ эти равенства несправедливы. В связи с этим полезно другое следствие.

Следствие 2. Пусть выполнены требования теоремы 1 2, причем G_0 — любая ограниченная подобласть G; G неограничена. Тогда $\text{Л}(\text{гр})\, u = Lu\, (u \in \mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр})))$, а $\mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр}))$ состоит из функций из $W^r_{2,\text{лок}}(G, \Gamma) \cap L_2(G)$, удовлетворяющих (гр) и таких, что $Lu \in L_2(G)$.

В самом деле, пусть u имеет указанный вид. Для любой $v \in \mathfrak{D}(\Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+) = W_2^r(\text{гр})^+ \cap W^r_{2,0}(E_n)$ имеем $(\Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+ v, u)_0 = (L^+ v, u)_0 = (v, Lu)_0$, т. е. $u \in (\Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+)^* = \text{Л}(\text{гр})$ и $\text{Л}(\text{гр})\, u = Lu$. Наоборот, пусть $u \in \mathfrak{D}(\text{Л}(\text{гр}))$. Согласно теореме 1.2, $u \in W^r_{2,\text{лок}}(G, \Gamma)$ и удовлетворяет (гр), поэтому для введенной $v\ (Lu, v)_0 = (u, L^+ v)_0 = (u, \Lambda^{+\prime}(\text{гр})^+ v)_0 = (\text{Л}(\text{гр})\, u, v)_0$, т. е. $Lu = \text{Л}(\text{гр})\, u \in L_2(G)$. Следствие установлено.

Как уже говорилось, теорема 1.2 и следствия справедливы для общих эллиптических L и более общих (гр). Так, достаточно выполнение следующего предположения о повышении гладкости. *Из того, что $u \in L_2(G_0)$ удовлетворяет уравнение $Lu = f \in L_2(G_0)$ внутри G_0 вплоть до Γ_0, следует: $u \in W^r_{2,\text{лок}}(G_0, \Gamma_0)$ и удовлетворяет* (гр) *на* Γ_0 (G_0 и Γ_0 — такие же, как и в теореме 1.2, (гр) задаются посредством дифференциальных выражений B, на Γ и поэтому имеют локальный характер). Из сказанного в п. 12, § 6, ясно, при каких ограничениях на L и (гр) это предположение выполняется.

3. Самосопряженность оператора, порожденного формально самосопряженным эллиптическим выражением в ограниченной области. Пусть $L = L^+$ — такое выражение порядка r с обычными требованиями гладкости коэффициентов, определенное в ограниченной области G; $(\text{гр}) = (\text{гр})^+$ — некоторые формально самосопряженные граничные условия. Построим в $L_2(G)$ оператор $\Lambda'(\text{гр}) = Lu$, $u \in \mathfrak{D}(\Lambda'(\text{гр})) = W_2^r(\text{гр})$. Очевидно, $\Lambda'(\text{гр})$ эрмитов. Из следствия 1 предыдущего пункта вытекает следующая теорема.

*Это следствие — несколько другая форма леммы 3.9, гл. III.

Теорема 1.3. *Пусть в ограниченной области G задано сильно эллиптическое выражение $L = L^+$ порядка $r = 2m$, коэффициенты которого $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+p}(G \cup \Gamma)$ $(p \geqslant m)$. Граница Γ предполагается класса C^{2m+p} и* (гр) *на Γ нулевые $(D^\alpha u|_\Gamma = 0, |\alpha| \leqslant m - 1)$. Тогда оператор Λ'* (гр) $= \Lambda$ (гр) *является самосопряженным.*

Если $L = L^+$ — сильно эллиптическое выражение второго порядка, $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(G \cup \Gamma)$, Γ класса C^2 и (гр) *имеют вид: $\frac{\partial u}{\partial \mu} + \sigma(x) u|_\Gamma = 0$ $(\sigma \in C^1(\Gamma)$ и вещественна), то Λ'* (гр) $= \Lambda$ (гр) *также является самосопряженным.*

Поясним, что в формулировке второй части теоремы отсутствует условие вещественности $p_j(x)$ и требуется вещественность $\sigma(x)$ в связи с формальной самосопряженностью L и (гр). Ясно, что теорема сохраняется и для (гр), упомянутых в конце п. 2.

4. Вопрос о самосопряженности в случае неограниченной области. Пусть в неограниченной области G задано формально самосопряженное эллиптическое выражение L порядка r с обычными предположениями гладкости коэффициентов $a_\alpha(x)$; на Γ определены (гр) = (гр)$^+$. Построим соответствующий сильный оператор Λ (гр) — замыкание оператора Λ' (гр) $u = Lu$, $\mathfrak{D}(\Lambda'$ (гр)$) = W_2^r$(гр) $\cap W_{2,0}^r(E_n)$. Оператор Λ' (гр), а значит и Λ (гр) — эрмитов. Однако даже при гладких a_α и Γ Λ (гр) не будет, вообще говоря, самосопряжен — как уже говорилось в п. 2 здесь существенно поведение L, Γ и (гр) на ∞. Поэтому при построении разложений по собственным функциям в дальнейшем будут фигурировать самосопряженные расширения Λ (гр).

Мы не ставим своей целью получение критериев самосопряженности оператора Λ(гр) и сейчас лишь покажем, что изменение L, Γ и (гр) «в конечном» не влияют на его самосопряженность (все же некоторые такие критерии будут приведены в пп. 5—7). Рассуждения полезно проводить для общих (гр).

Лемма 1.1. *Пусть для $L = L^+$ и* (гр) = (гр)$^+$ *выполнено предположение о повышении гладкости, указанное в конце п.2, при любой ограниченной подобласти $G_0 \subset G$; G неограничена. Для того чтобы оператор Λ* (гр) *был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы для любых $u, v \in W_{2,\text{лок}}^r(G, \Gamma) \cap L_2(G)$, удовлетворяющих* (гр) *и таких, что $Lu, Lv \in L_2(G)$, выполнялось равенство*

$$(Lu, v)_0 = (u, Lv)_0. \tag{1.3}$$

В самом деле, согласно следствию 2 из теоремы 1.2, соотношение (1.3) означает, что $(Л\,(\text{гр})\,u, v)_0 = (u, Л\,(\text{гр})\,v)_0$ $(u, v\mathfrak{D}\,(Л\,(\text{гр})))$, т. е. оно эквивалентно эрмитовости $\Lambda^*(\text{гр}) = \text{Л}(\text{гр})$. Эрмитовость же $\Lambda^*(\text{гр})$ — необходимое и достаточное условие самосопряженности $\Lambda(\text{гр})$. Лемма доказана.

Теорема 1.4. *Пусть в неограниченной области $G_j \subseteq E_n$ задано эллиптическое выражение $L_j = L_j^+$ с обычными предположениями гладкости коэффициентов, на границе Γ_j определено* $(\text{гр})_j = (\text{гр})_j^+$ $(j = 1, 2)$. *Предположим, что при $j = 1, 2$ выполняется для любой $G_0 \subset G_j$ утверждение о повышении гладкости, сформулированное в конце п 2. Пусть существует такой шар $U \subseteq E_n$, что $G_1 \cap (E_n \setminus U) = G_2 \cap (E_n \setminus U)$ и на этой области L_1 и L_2 совпадают; на куске границы $\Gamma_1 \cap (E_n \setminus U) = \Gamma_2 \cap (E_n \setminus U)$ совпадают* $(\text{гр})_1$ *и* $(\text{гр})_2$. *Тогда* $\Lambda_1(\text{гр})_1$ *и* $\Lambda_2(\text{гр})_2$ *одновременно самосопряжены или нет.*

Доказательство. Подобно случаю выражений второго порядка для любого L порядка r в ограниченной G с $a_\alpha \in C^{|\alpha|}(G \cup \Gamma)$ можно написать формулу Грина (ср. (1.18), гл. II):

$$\int_G Lu \cdot \bar{v}\,dx - \int_G u\overline{L^+ v}\,dx = \int_\Gamma \mathfrak{R}[u, v]\,dx \quad (u, v \in W_2^r(G)), \tag{1.4}$$

где $\mathfrak{R}[u, v]$ — некоторая билинейная форма от $D^\alpha u|_\Gamma$ и $D^\alpha v|_\Gamma (|\alpha| \leqslant r - 1)$, получающаяся при интегрировании по частям. Коэффициенты этой формы зависят от коэффициентов L лишь вблизи Γ.

Обозначим G_R пересечение G из леммы 1.1 с шаром $|x| \leqslant R$, Γ_R — кусок границы G_R, отличной от Γ. Используя (1.4), найдем, что (1.3) эквивалентно соотношению

$$\lim_{R\to\infty} \int_{G_R} (Lu \cdot \bar{v} - u\overline{Lv})\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \mathfrak{R}[u, v]\,dx = 0, \tag{1.5}$$

из которого, как легко понять, и следует теорема.

5. Самосопряженность оператора, порожденного формально самосопряженным дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами в пространстве $L_2(E_n)$. В этом и следующем пункте мы рассмотрим вопросы самосопряженности для некоторых выражений, не предполагающихся обязательно эллиптическими. Пусть

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant r} a_\alpha \partial^\alpha u, \quad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}, \quad \partial_j = \frac{1}{i} D_j \; (j = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

имеет постоянные коэффициенты (сейчас удобно пользоваться обозначениями ∂_j). Так как $L^+ = \overline{L}$, то условие формальной самосопряженности L заключается в вещественности a_α.

Теорема 1.5. *Минимальный оператор, порожденный в $L_2(E_n)$ выражением (1.6) с постоянными вещественными коэффициентами, всегда самосопряжен. Его спектр состоит из множества значений полинома $L(\xi) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant r} a_\alpha \xi^\alpha$ $(\xi \in E_n)$.*

Предварительно напомним некоторые сведения о пространстве S (см., например, И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [1], гл. I, § 2, стр. 31—32). Так называется совокупность функций $u(x) \in C^\infty(E_n)$, убывающих вместе с производными быстрее любой степени: $|x^\alpha (D^\beta u)(x)| \leqslant C_{\alpha\beta} < \infty$ $(x \in E_n)$ для любых векторов α, β с целыми неотрицательными координатами. Сходимость в S вводится следующим образом: последовательность $u_\nu \to 0$, если справедлива оценка $|x^{\alpha_0} (D^{\beta_0} u_\nu)(x)| \leqslant C_{\alpha_0\beta_0} < \infty$ $(x \in E_n;\ \nu = 1, 2, \ldots)$ при некоторых α_0, β_0 с $C_{\alpha_0\beta_0}$, не зависящей от ν, и если $u_\nu(x) \to 0$ равномерно в любой ограниченной области вместе с каждой своей производной. Нетрудно показать, что $C_0^\infty(E_n)$ плотно в S. При обычном преобразовании Фурье функции из S $(S \subset L_2(E_n))$ переходят опять в функции из S, откуда $\widetilde{S} = S$.

Доказательство теоремы. Минимальный оператор Λ является замыканием в $L_2(E_n)$ оператора $\Lambda' u = Lu$, где $u \in \mathfrak{D}(\Lambda') = C_0^\infty(E_n)$. Переходя от функций $u(x)$ к их преобразованиям Фурье $\widetilde{u}(\xi)$, получим, что Фурье-образом оператора Λ' служит оператор $\widetilde{\Lambda}'$ в $L_2(E_n)$, определенный на $\mathfrak{D}(\widetilde{\Lambda}') = \widetilde{C_0^\infty(E_n)}$ равенством $(\widetilde{\Lambda' u})(\xi) = L(\xi)\widetilde{u}(\xi)$. Фурье-образ $\widetilde{\Lambda}$ оператора Λ определяется как замыкание оператора $\widetilde{\Lambda}'$. В этом смысле $\widetilde{\Lambda}$ является оператором умножения на полином $L(\xi)$.

В пространстве $L_2(E_n)$ функций от x определим оператор $\Lambda'' \supset \Lambda'$: $\Lambda'' u = Lu$, $u \in \mathfrak{D}(\Lambda'') = S \supset C_0^\infty(E_n)$. Очевидно, $\mathfrak{R}(\Lambda'') \subseteq S$. Из плотности $C_0^\infty(E_n)$ в S следует, что $\Lambda'' \subset \overline{\Lambda}' = \Lambda$. Поэтому $\overline{\Lambda}'' = \Lambda$. Фурье—образ $\widetilde{\Lambda}''$ оператора Λ'' будет совпадать с оператором умножения на полином $L(\xi)$, определенным на S, т. е. $(\widetilde{\Lambda'' u})(\xi) = L(\xi)\widetilde{u}(\xi)$, $\widetilde{u} \in S$; $\mathfrak{R}(\widetilde{\Lambda}'') \subseteq S$. $\widetilde{\Lambda}$ можно рассматривать как замыкание оператора $\widetilde{\Lambda}''$.

Для завершения доказательства достаточно убедиться, что при $z \,\overline{\in}\, \{L(\xi),\ \xi \in E_n\}$ $\mathfrak{R}(\widetilde{\Lambda}'' - zE) = S$ и $\|(\widetilde{\Lambda}'' - zE)u\|_0 \geqslant \varepsilon \|u\|_0$ $(\varepsilon > 0;$ $u \in S)$. Первое соотношение вытекает из того обстоятельства, что функцию из S можно делить на отличный от нуля полином и в результате мы опять получим функцию из S. Второе — следствие элементарной оценки. Теорема доказана.

Заметим, что изложенная при ее доказательстве интерпретация оператора Λ (точнее, его Фурье-образа) как замыкания оператора умножения на $L(\xi)$, определенного на S, полезна сама по себе.

6. **Самосопряженность операторов, «близких» к самосопряженным.** Мы изложим прежде всего одну простую методику доказательства самосопряженности операторов, действующих в общем гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Пусть A и B — два произвольных оператора в H. Под $A \dotplus B$ будем понимать оператор, определенный равенством $(A+B)f = Af \dotplus Bf$ для $f \in \mathfrak{D}(A+B) = \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, а под AB — оператор, определенный равенством $(AB)f = A(Bf)$ для всех тех $f \in \mathfrak{D}(B)$, для которых $Bf \in \mathfrak{D}(A)$ (эти f составляют $\mathfrak{D}(AB)$). Известны следующие простые соотношения:

а) если $\mathfrak{D}(A \dotplus B)$ плотна в H, то $(A \dotplus B)^* \supseteq A^* + B^*$;

б) если $\mathfrak{D}(AB)$ плотна в H, то $(AB)^* \supseteq B^*A^*$;

в) если $\mathfrak{D}(A)$ плотна в H, то $(A + zE)^* = A^* \dotplus \bar{z}E$.

Для полноты изложения приведем доказательство еще одной хорошо известной леммы.

Лемма 1.2. *Пусть $\mathfrak{D}(A)$ плотна в H, а C — ограниченный оператор, определенный во всем H. Тогда*

$$(A + C)^* = A^* \dotplus C^*, \qquad (CA)^* = A^*C^*. \tag{1.7}$$

Доказательство. Согласно а) $(A \dotplus C)^* \supseteq A^* \dotplus C^*$; установим противоположное включение. Пусть $f \in \mathfrak{D}((A+C)^*)$, тогда для любого $g \in \mathfrak{D}(A \dotplus C) = \mathfrak{D}(A)$ $((A \dotplus C)g, f) = (g, (A \dotplus C)^* f)$; с другой стороны, $((A \dotplus C)g, f) = (Ag, f) + (Cg, f) = (Ag, f) \dotplus (g, C^*f)$. Поэтому $(Ag, f) = (g, (A+C)^*f) - (g, C^*f) = (g, (A+C)^*f - C^*f)$ для всех $g \in \mathfrak{D}(A)$, откуда следует: $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ и $A^*f = (A \dotplus C)^* f - C^*f$. Иными словами, $\mathfrak{D}((A \dotplus C)^*) \subseteq \mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{D}(A^* + C^*)$ и $(A + C)^* f = A^*f \dotplus C^*f$ $(f \in \mathfrak{D}((A \dotplus C)^*)$, т. е. $(A \dotplus C)^* \subseteq A^* \dotplus C^*$. Первое равенство в (1.7) установлено.

Докажем второе. Согласно б) $(CA)^* \supseteq A^*C^*$; установим противоположное включение. Пусть $f \in \mathfrak{D}((CA)^*)$, тогда для любого $g \in \mathfrak{D}(CA) = \mathfrak{D}(A)$ $((CA)g, f) = (g, (CA)^* f)$; с другой стороны, $((CA)g, f) = (Ag, C^*f)$. Поэтому $(Ag, C^*f) = (g, (CA)^*f)$ для всех $g \in \mathfrak{D}(A)$, откуда следует: $C^*f \in D(A^*)$ и $A^*(C^*f) = (CA)^*f$. Иными словами, $\mathfrak{D}((CA)^*) \subseteq \mathfrak{D}(A^*C^*)$ и $(CA)^*f = A^*C^*f$ $(f \in \mathfrak{D}((CA)^*))$, т. е. $(CA)^* \subseteq A^*C^*$. Второе равенство в (1.7), а вместе с ним и лемма доказаны.

Следствие. Если A и C — самосопряженные операторы, причем C ограничен, то и $A \dotplus C$ самосопряжен.

Проверка самосопряженности может быть проведена на основании следующей леммы.

Лемма 1.3. *Пусть A и B — два оператора в H, причем $\mathfrak{D}(A)$ плотна в H, $\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(B)$ и $A \dotplus B$ эрмитов. Если при некотором невещественном z существует ограниченный оператор $(A - zE)^{-1}$, определенный во всем H, и*

$$\|Bf\| \leqslant \alpha \|(A - zE)f\| \qquad (0 \leqslant \alpha < 1; f \in \mathfrak{D}(A)), \tag{1.8}$$

то замыкание оператора $A + B$ самосопряжено.

Доказательство. Из (1.8) следует, что оператор $C = B(A - zE)^{-1}$ определен во всем H, непрерывен и $\|C\| \leqslant \alpha < 1$. Далее, из существования $(A - zE)^{-1}$

вытекает, что нулевое подпространство оператора $(A-zE)^*$ состоит только из нуля. При помощи в) и второго равенства в (1.7) найдем:

$$(A+B)^* = ((A-zE) \dotplus B + zE)^* = ((A-zE) \dotplus B)^* + \bar{z}E = ((E \dotplus C)\times$$

$$\times (A-zE))^* + \bar{z}E = (A-zE)^*(E+C)^* + \bar{z}E = (A-zE)^*(E+C^*) + \bar{z}E. \quad (1.9)$$

Пусть $\varphi \in H$ таково, что $(A \dotplus B)^*\varphi = \bar{z}\varphi$. Согласно (1.9) $(A-zE)^*(E \dotplus C^*)\varphi=0$, откуда $(E+C^*)\varphi=0$. Но $\|C^*\| = \|C\| < 1$, поэтому и $\varphi = 0$. Итак, у $(A+B)^*$ нет невещественных собственных чисел, т. е. замыкание $A+B$ самосопряжено. Лемма доказана.

Будем говорить, что полином $Q(\xi)$ подчинен полиному $P(\xi)$ соответственно сильно или слабо, если для $\xi \in E_n$ выполнены равенства

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{|Q(\xi)|}{1+|P(\xi)|} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{|\xi|\to\infty} \int\limits_{|\xi-\eta|<1} \frac{|Q(\eta)|^2}{1+|P(\eta)|^2}\,d\eta = 0. \quad (1.10)$$

Ясно, что из сильного подчинения следует слабое. Если Q подчинен P хотя бы слабо, то степень Q меньше степени P.

Теорема 1.6. *Пусть формально самосопряженное удовлетворяющее обычным требованиям гладкости коэффициентов дифференциальное выражение L имеет вид*

$$Lu = L_0 u + c_1(x) L_1 u + \ldots + c_q(x) L_q u, \quad (1.11)$$

где $L_0, \ldots, L_q$ — выражения с постоянными коэффициентами типа (1.6); *коэффициенты L_0 предполагаются вещественными. Каждый из полиномов $L_j(\xi)$ $(j = 1, \ldots, q)$ подчинен полиному $L_0(\xi)$, причем если подчинение сильное, то соответствующий коэффициент $c_j(x)$ ограничен в E_n, а если слабое, то все производные $D^\alpha c_j$ $(|\alpha| \leqslant n+1)$ входят в $L_1(E_n)$.*

При сделанных предположениях минимальный оператор, порожденный в $L_2(E_n)$ выражением L, самосопряжен.

Доказательство. Обозначим Λ, Λ_0 и B—минимальные операторы, порожденные выражениями L, L_0 и $\sum_{j=1}^{q} c_j(x) L_j$. Согласно теореме 1.5 Λ_0 самосопряжен, поэтому при любом невещественном z $(\Lambda_0-zE)^{-1}$ существует. Предположим, что мы доказали неравенство

$$\left\|\sum_{j=1}^{q} c_j L_j u\right\|_0 \leqslant \alpha \|(L_0 - zE)u\|_0 \qquad (0 \leqslant \alpha < 1;\ u \in C_0^\infty(E_n)) \quad (1.12)$$

при некотором невещественном z. Из него следует, что $\mathfrak{D}(\Lambda_0) \subseteq \mathfrak{D}(B)$ и выполняются остальные требования леммы 1.3 при $A = \Lambda_0$ и указанном B. Таким образом, тогда замыкание $\Lambda_0 + B$, совпадающее с Λ, самосопряжено, и теорема будет доказана.

Для справедливости (1.12) достаточно убедиться, что при каждом $j=1,\ldots,q$ для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\tau_\varepsilon > 0$, что

$$\|c_j L_j u\|_0 \leqslant \varepsilon \|(L_0 - i\tau E)u\|_0 \qquad (u \in C_0^\infty(E_n);\ \tau > \tau_\varepsilon). \quad (1.13)$$

Если $L_j(\xi)$ сильно подчинен $L_0(\xi)$, то проверка (1.13) совсем простая: используя преобразование Фурье $u \to \tilde{u}$, получим

$$\|c_j L_j u\|_0 \leqslant C \| L_j u\|_0 = C \left(\int_{E_n} |L_j(\xi)|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.14}$$

$$(C = \sup_{x \in E_n} |c_j(x)|).$$

Правая часть в (1.13) равна аналогичному (1.14) интегралу, в котором только $L_j(\xi)$ заменено на $L_0(\xi) - i\tau$. Но согласно (1.10) при $|\xi| \geqslant R$, где $R > 0$ достаточно большое, и $\tau \geqslant 1$ $|L_j(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{C} |L_0(\xi) - i\tau|$. При $|\xi| < R$ можно добиться выполнения последнего неравенства за счет увеличения τ. Итак, $|L_j(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{C} |L_0(\xi) - i\tau|$ $(\xi \in E_n)$ при $\tau > \tau_\varepsilon > 0$. Отсюда, очевидно, и следует (1.13).

Пусть теперь $L_j(\xi)$ слабо подчинен $L_0(\xi)$. Записывая сначала (1.13) для $u \in S$, а затем, переходя к преобразованию Фурье, найдем, что (1.13) эквивалентно соотношению $\left\| A \frac{L_j(\xi)}{L_0(\xi) - i\tau} \right\| \underset{\tau \to +\infty}{\to} 0$, где A — оператор свертки с $\tilde{c}_j(\xi)$, а $\frac{L_j(\xi)}{L_0(\xi) - i\tau}$ — оператор умножения на последнюю функцию (операторы рассматриваются в пространстве $L_2(E_n)$). Переходя к сопряженному оператору, получим, что нужно доказать стремление к 0 при $\tau \to +\infty$ нормы следующего интегрального оператора в $L_2(E_n)$:

$$(K_\tau f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{E_n} \frac{\overline{L_j(\xi)}}{L_0(\xi) + i\tau} \overline{\tilde{c}_j(\eta - \xi)} f(\eta)\, d\eta \qquad (f \in L_2(E_n)). \tag{1.15}$$

Обозначая $l(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \frac{\overline{L_j(\xi)}}{L_0(\xi) + i\tau}$ и учитывая, что благодаря виду c_j $|\tilde{c}_j(\xi)| \leqslant C_1 (1 + |\xi|^{n+1})^{-1}$ $(\xi \in E_n)$, получим:

$$\|K_\tau f\|^2_{L_2(E_n)} = \int_{E_n} \left| l(\xi) \int_{E_n} \overline{\tilde{c}_j(\eta - \xi) f(\eta)}\, d\eta \right|^2 d\xi \leqslant \int_{E_n} \left(|l(\xi)|^2 \cdot \int_{E_n} |\tilde{c}_j(\eta - \xi)|\, d\eta \times \right.$$

$$\left. \times \int_{E_n} |\tilde{c}_j(\eta - \xi)|\, |f(\eta)|^2 d\eta \right) d\xi \leqslant C_2 \int_{E_n} \left(\int_{E_n} |l(\xi)|^2 |\tilde{c}_j(\eta - \xi)|\, d\xi \right) |f(\eta)|^2 d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sup_{\eta \in E_n} \left(\int_{E_n} |l(\xi)|^2 |\tilde{c}_j(\eta - \xi)|\, d\xi \right) \cdot \|f\|^2_{L_2(E_n)} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sup_{\eta \in E_n} \left(\int_{E_n} \frac{|l(\xi)|^2}{1 + |\eta - \xi|^{n+1}}\, d\xi \right) \cdot \|f\|^2_{L_2(E_n)},$$

откуда

$$\| K_\tau \|^2 \leqslant C_3 \sup_{\eta \in E_n} \left(\int\limits_{E_n} \frac{| l(\xi) |^2}{1 + | \xi - \eta |^{n+1}} d\xi \right).$$

Но $(1 + | \xi |^{n+1})^{-1} \leqslant C_4 \int\limits_{|t|<1} (1 + | \xi - t |^{n+1})^{-1} dt \; (\xi \in E_n)$, поэтому при любом $\eta \in E_n$

$$\int\limits_{E_n} \frac{| l(\xi) |^2}{1 + | \xi - \eta |^{n+1}} d\xi \leqslant C_4 \int\limits_{E_n} \int\limits_{|t|<1} \frac{| l(\xi) |^2}{1 + | \xi - \eta - t |^{n+1}} dt d\xi =$$

$$= C_4 \int\limits_{E_n} \left(\frac{1}{1 + | s |^{n+1}} \int\limits_{|t|<1} | l(\eta + t + s) |^2 dt \right) ds \leqslant C_5 \sup_{s \in E_n} \int\limits_{|t|<1} | l(s + t) |^2 dt =$$

$$= C_6 \sup_{s \in E_n} \int\limits_{|t|<1} \frac{| L_j(s + t) |^2}{| L_0(s + t) |^2 + \tau^2} dt.$$

Таким образом, $\| K_\tau \|^2 \leqslant C_3 C_6 \sup\limits_{s \in E_n} \int\limits_{|\xi - s| < 1} \frac{| L_j(\xi) |^2}{| L_0(\xi) |^2 + \tau^2} d\xi$. Благодаря определению (1.10) слабого подчинения последнее выражение может быть сделано сколь угодно малым за счет увеличения τ. Итак, $\| K_\tau \| \underset{\tau \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Теорема доказана.

Из следствия к лемме 1.2 вытекает, что если L удовлетворяет условиям доказанной теоремы, то и выражение $Lu + c(x)u$, где $c(x) \in C(E_n)$ вещественна и ограничена, порождает минимальный оператор, самосопряженный в $L_2(E_n)$.

Мы не будем приводить возможные примеры к теореме 1.6 и ограничимся лишь следующим. *Пусть*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant r} a_\alpha(x) D^\alpha u \tag{1.16}$$

формально самосопряженное эллиптическое выражение, определенное в E_n, коэффициенты которого удовлетворяют обычным предположениям гладкости. Если старшие коэффициенты a_α ($|\alpha| = r$) постоянны, а остальные $a_\alpha(x)$ ограничены, то соответствующий минимальный оператор Λ самосопряжен в $L_2(E_n)$.

В самом деле, из равенства $L^+ = L$ следует, что a_α ($|\alpha| = r$) вещественны. Но тогда согласно (1.3), гл. III, r четно ($r = 2m$) и $\left| \sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha \xi^\alpha \right| \geqslant \varepsilon | \xi |^{2m}$ ($\varepsilon > 0$; $\xi \in E_n$). Положим $L_0 = \sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$, $L_\alpha = D^\alpha$ ($|\alpha| < 2m$). Выражение L запишется в виде (1.11), причем $L_j(\xi)$ будут сильно подчинены $L_0(\xi)$, а $c_j(x)$ ограничены. Таким образом, наше утверждение действительно вытекает из теоремы 1.6.

Можно показать, но на этом мы останавливаться не будем, что самосопряженность Λ имеет место и в случае, когда старшие коэффициенты (1.16) не постоянны, а ограничены.

Заметим еще следующее. Можно показать, что интегральный оператор (1.15) вполне непрерывен, если только производные $D^{\alpha}c_j$ входят в $L_1(E_n)$ для всех $|\alpha| \leqslant \max(n+1, r_j)$, где r_j — порядок выражения L_j. Отсюда легко заключить, что *предельный спектр* минимального оператора Λ в $L_2(E_n)$, отвечающего* (1.11), *совпадает с множеством значений полинома* $L_0(\xi)$ ($\xi \in E_n$), *если только все* $L_j(\xi)$ ($j = 1, \ldots, q$) *слабо подчинены* $L_0(\xi)$, *а* $c_j(x)$ *имеют указанное сейчас поведение на* ∞.

В частности, *предельный спектр оператора* Λ, *отвечающего* $Lu = L_0u + c(x)u$, *будет совпадать с множеством значений* $L_0(\xi)$ ($\xi \in E_n$), *если только* 1 *слабо подчинена полиному* $L_0(\xi)$ *и* $D^{\alpha}c \in L_1(E_n)$ *для* $|\alpha| \leqslant n+1$.

Если $L_0 = -\Delta$ (т. е. L — выражение Шредингера), то 1, очевидно, сильно, а значит и слабо, подчинена $(-\Delta)(\xi) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$, поэтому при указанном поведении $c(x)$ предельный спектр оператора Λ Шредингера совпадает с полуосью $[0, \infty)$ (в действительности, ограничения на $c(x)$ могут быть несколько ослаблены). Вместе с тем, если L_0 не эллиптическое, то 1 не будет, вообще говоря, сильно подчинена $L_0(\xi)$ (например, 1 не подчинена сильно полиному $L_0(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2$, отвечающему $L_0 = -D_1^2 + D_2^2$). В связи с этим возникает вопрос о том, в каких случаях 1 будет слабо подчинена $L_0(\xi)$. Оказывается, что если $L_0(\xi)$ — полный полином (т. е. полином, фактически зависящий от всех переменных, см. стр. 284), то 1 ему слабо подчинена, и наоборот.

В заключение приведем пример самосопряженного оператора, где проверка самосопряженности основывается непосредственно на лемме 1.2. Другие примеры были приведены также раньше, в п. 3, § 2, гл. IV.

Рассмотрим в $E_n (n \geqslant 1)$ формально самосопряженное выражение

$$Lu = ia(x)D_1u + \left(b(x) + \frac{i}{2}(D_1a)(x)\right)u,$$

где $a(x) \in C^1(E_n)$, $b(x) \in C(E_n)$ вещественны; пусть Λ — соответствующий минимальный оператор в $L_2(E_n)$. Если $a(x)$, $(D_1a)(x)$ и $b(x)$ ограничены в E_n и $|a(x)| \geqslant \varepsilon > 0$, $x \in E_n$, то Λ самосопряжен.

Действительно, обозначим через Λ_0 минимальный оператор, порожденный выражением iD_1, а через A и B—операторы умножения на $a(x)$ и $b(x) + \frac{i}{2}(D_1a)(x)$ соответственно. Согласно теореме 1.5, Λ_0 самосопряжен; A и B ограничены, причем A самосопряжен, а B^* — оператор умножения на $b(x) - \frac{i}{2}(D_1a)(x)$. Так как $\Lambda \supseteq A\Lambda_0 + B$, то в силу (1.7) имеем: $\Lambda^* \subseteq (A\Lambda_0 + B)^* = (A\Lambda_0)^* + B^* = \Lambda_0A + B^* \subseteq \Lambda$, откуда $\Lambda^* = \Lambda$.

7. Самосопряженность операторов и единственность решений задачи Коши. Сейчас мы приведем подход к исследованию самосопряженности операторов, отличный от подхода п. 6. Изложение удобнее проводить для операторов в общем гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$.

* Напомним, что точка λ принадлежит предельному спектру оператора A по определению тогда, когда существует ограниченная непредкомпактная последовательность $f_n \in \mathfrak{D}(A)$ такая, что $(A - \lambda E)f_n \to 0$.

Пусть в H действует оператор S со всюду плотной областью определения $\mathfrak{D}(S)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение ($r = 1, 2, \ldots$):

$$\frac{d^r u}{dt^r} - S^* u = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty). \tag{1.17}$$

Под слабым решением уравнения (1.17) понимают вектор-функцию $u(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ со значениями в H, r раз слабо дифференцируемую по t и удовлетворяющую равенству

$$\frac{d^r}{dt^r}(u(t), f) - (u(t), Sf) = \left(\frac{d^r u(t)}{dt^r}, f\right) - (u(t), Sf) = 0 \tag{1.18}$$

$$(f \in \mathfrak{D}(S),\ 0 \leqslant t < \infty).$$

Будем говорить, что для уравнения (1.17) имеет место единственность слабых решений задачи Коши, если каждое слабое решение $u(t)$ такое, что $\left(\dfrac{d^\alpha u}{dt^\alpha}\right)(0) = 0$ $(\alpha = 0, \ldots, r-1)$, аннулируется при всех $t > 0$.

Теорема 1.7. *Пусть A — эрмитов оператор с равными дефектными числами, действующий в пространстве H. Замыкание этого оператора самосопряжено, если выполнено одно из следующих требований:*

1) *для обоих уравнений*

$$\frac{du}{dt} \pm (iA)^* u = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{1.19}$$

имеет место единственность слабых решений задачи Коши.

2) *оператор A полуограничен сверху (т. е. $(Af, f) \leqslant a\|f\|^2$, $f \in \mathfrak{D}(A)$, $a < +\infty$) и для уравнений*

$$\frac{du}{dt} - A^* u = 0 \ (0 \leqslant t < \infty) \text{ или } \frac{d^2 u}{dt^2} - A^* u = 0 \ (0 \leqslant t < \infty) \tag{1.20}$$

имеет место единственность слабых решений задачи Коши.

Обратно, если замыкание оператора A самосопряжено то слабые решения задачи Коши для уравнений (1.19) —(1.20) *единственны (причем в случае* 2) *даже не нужно предполагать полуограниченность A).*

Доказательство в случае 1). Пусть замыкание A несамосопряжено, тогда у A имеются два различных обычных разложения единицы E'_λ и E''_λ. Для любого $g \in \mathfrak{D}(A)$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E'_\lambda g, g)$ сходится и поэтому вектор-функция

$$u'(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE'_\lambda g \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{1.21}$$

будет сильно один раз дифференцируемой и $\dfrac{du'(t)}{dt} = i\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{i\lambda t} dE'_\lambda g.$

Легко видеть, что она будет слабым решением уравнения (1.19) со знаком —. Действительно, для $f \in \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(iA)$ имеем:

$$\frac{d}{dt}(u'(t), f) - (u'(t), iAf) = \left(\frac{du'(t)}{dt}, f\right) - (u'(t), iAf) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda e^{i\lambda t} d(E'_\lambda g, f) - \int_{-\infty}^{\infty} ie^{i\lambda t} d(E'_\lambda g, Af) = 0,$$

так как $d(E'_\lambda g, Af) = d\displaystyle\int_{-\infty}^{\lambda} \mu d(E'_\mu g, f) = \lambda d(E'_\lambda g, f)$.

Аналогично, функция $u''(t)$, построенная согласно (1.21) по E''_λ, будет слабым решением этого же уравнения; $u'(0) = u''(0) = g$. Таким образом, и $u(t) = u'(t) - u''(t)$ — слабое решение этого уравнения, причем $u(0) = 0$. Согласно предположению $u(t) = 0$ при $t \geqslant 0$, откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d((E'_\lambda - E''_\lambda) g, h) = 0 \; (g \in \mathfrak{D}(A); h \in H; 0 \leqslant t < \infty). \quad (1.22)$$

Рассмотрим теперь уравнение (1.19) со знаком $+$. Произведем в нем замену переменных $t = -\tau$, в результате получим уравнение $\dfrac{du}{d\tau} - (iA)^* u = 0$ при $\tau \leqslant 0$, для которого имеет место единственность слабых решений задачи Коши. Повторяя для него предыдущие рассуждения, прийдем к соотношению (1.22) при $t \in (-\infty, 0]$. Таким образом, если ввести в функцию ограниченной вариации $\omega(\lambda) = ((E'_\lambda - E''_\lambda) g, h)$, то по доказанному $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\omega(\lambda) = 0$ для всех $t \in (-\infty, \infty)$. Согласно теореме единственности для преобразования Фурье — Стилтьеса отсюда следует, что $d\omega(\lambda) = 0$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, т. е. $((E'_\lambda - E''_\lambda) g, h) = 0$ $(g \in \mathfrak{D}(A), h \in H)$. Благодаря плотности $\mathfrak{D}(A)$ в H заключаем: $E'_\lambda = E''_\lambda$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, что невозможно. Утверждение доказано.

Рассмотрим 2) в случае первого из уравнений (1.20). Опять предположим, что замыкание A несамосопряжено. Так как A полуограничен сверху числом a, то, как известно, существуют два его различных самосопряженных расширения в H A' и A'', полуограниченные сверху числом $b \geqslant a$. Пусть E'_λ и E''_λ — отвечающие им разложения единицы. Вместо функций типа (1.21) построим

$$u'(t) = \int_{-\infty}^{b} e^{\lambda t} dE'_\lambda g \qquad (0 \leqslant t < \infty), \tag{1.23}$$

где $g \in H$, и аналогичную функцию $u''(t)$ — по E''_λ. Так как $b < +\infty$, то интеграл (1.23) существует и достаточно регулярен по t; как и ранее, легко убеждаемся, что $u'(t)$ является слабым решением первого из уравнений (1.20). То же можно сказать и о $u''(t)$. Из предполагаемой единственности решений задачи Коши для этого уравнения следует, что $\int_{-\infty}^{b} e^{\lambda t} d\omega(\lambda) = 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$, где функция ограниченной вариации $\omega(\lambda) = ((E'_\lambda - E''_\lambda) g, h)$ $(h \in H)$. Благодаря теореме единственности для преобразований Лапласа—Стилтьеса заключаем, что $d\omega(\lambda) = 0$, т. е. $E'_\lambda = E''_\lambda$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, это абсурдно.

Наконец, рассмотрим 2) в случае второго уравнения (1.20). Легко видеть, что если выполнены условия теоремы для оператора A, то они выполнены и для любого оператора $A - kE$, $k \in (-\infty, \infty)$, самосопряженность замыкания которого эквивалентна самосопряженности замыкания A. Поэтому сразу можно считать $a < 0$.

Пусть E'_λ и E''_λ построены так же, как и в случае первого уравнения в (1.20), при $b = 0$. Введем функцию

$$u'(t) = \int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{-\lambda}\, t\, dE'_\lambda g_0 + \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin\sqrt{-\lambda}\, t}{\sqrt{-\lambda}} dE'_\lambda g_1 \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{1.24}$$

где $g \in \mathfrak{D}(A)$, $g_1 \in \mathfrak{D}(\sqrt{-A})$. Аналогичную функцию $u''(t)$ построим по E''_λ. Очевидно, в сильном смысле

$$\frac{d^2 u'(t)}{dt^2} = \int_{-\infty}^{0} \lambda \cos\sqrt{-\lambda}\, t\, dE'_\lambda g_0 + \int_{-\infty}^{0} \lambda \frac{\sin\sqrt{-\lambda}\, t}{\sqrt{-\lambda}} dE'_\lambda g_1 \quad (0 \leqslant t < \infty); \tag{1.25}$$

существование этих интегралов вытекает из того, что благодаря включениям $g_0 \in \mathfrak{D}(A)$, $g_1 \in \mathfrak{D}(\sqrt{-A})$ имеем: $\int_{-\infty}^{0} \lambda^2 d(E'_\lambda g_0, g_0)$

$\int\limits_{-\infty}^{0} |\lambda|\, d(E'_\lambda g_1, g_1) < \infty$. Из (1.25) легко заключаем, что (1.24) служит слабым решением второго уравнения в (1.20), удовлетворяющим начальным условиям: $u'(0) = g_0$, $\left(\frac{du'}{dt}\right)(0) = g_1$. Поэтому $u(t) = u'(t) - u''(t)$ будет также подобным решением, причем $u(0) = \left(\frac{du}{dt}\right)(0) = 0$; согласно предполагаемой единственности слабых решений задачи Коши $u(t) = 0$ для $t \geqslant 0$.

Обозначим $\omega(\lambda) = ((E'_\lambda - E''_\lambda) g, h)$, где $g \in \mathfrak{D}(A)$, $h \in H$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{-\lambda}\, t\, d\omega(\lambda) = 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{0} \sin\sqrt{-\lambda}\, t\, d\omega(\lambda) = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{1.26}$$

В самом деле, первое из этих равенств вытекает из соотношения $u(t) = 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$, если $u'(t)$ и $u''(t)$ строить по $g_0 = g \in \mathfrak{D}(A)$, $g_1 = 0$. Для получения второго следует положить $g_0 = 0$ и $g_1 = \sqrt{-A}\, g \in \mathfrak{D}(\sqrt{-A})$, тогда

$$0 = (u(t), h) = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sin\sqrt{-\lambda}\, t}{\sqrt{-\lambda}}\, d((E'_\lambda - E''_\lambda) g_1, h) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \sin\sqrt{-\lambda}\, t\, d((E'_\lambda - E''_\lambda) g, h) = \int\limits_{-\infty}^{0} \sin\sqrt{-\lambda}\, t\, d\omega(\lambda).$$

Итак, (1.26) имеет место. Поэтому $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\sqrt{-\lambda}t} d\omega(\lambda) = 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$, откуда следует равенство $d\omega(\lambda) = 0$, т. е. $E'_\lambda = E''_\lambda$ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Мы опять пришли к абсурду.

Таким образом, первая часть теоремы доказана. Перейдем к доказательству ее второй части — установлению единственности решений уравнений (1.19) и (1.20) при предположении о самосопряженности замыкания A. Докажем две леммы, первая из которых будет использоваться и в дальнейшем.

Пусть Q — некоторый оператор в H с областью определения $\mathfrak{D}(Q)$ (возможно, даже неплотной в H). Сильным решением уравнения

$$\frac{d^r u}{dt^r} - Qu = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty; r = 1, 2, \ldots) \tag{1.27}$$

называют r раз сильно дифференцируемую вектор-функцию $u(t)(0 \leqslant t < \infty)$, такую, что для каждого t $u(t) \in \mathfrak{D}(Q)$ и $\frac{d^r u(t)}{dt^r} - Q(u(t)) = 0$. Ясно, что сильное решение уравнения (1.17) будет одновременно его слабым решением. Наоборот, если слабое решение $u(t)$ уравнения (1.17) таково, что вектор-функция $u(t)$ r раз сильно дифференцируема и для каждого t $u(t) \in \mathfrak{D}(S^*)$, то $u(t)$ будет и сильным решением этого уравнения.

Лемма 1.4. *Рассмотрим уравнение* (1.17). *Пусть существует плотное* в H *линейное множество* Φ *такое, что при любых* $t_0 > 0$ *и* $\varphi_0, \ldots, \varphi_{r-1} \in \Phi$ *найдется сильное решение* $\varphi(t)$ *уравнения*

$$\frac{d^r\varphi}{dt^r} - (-1)^r S\varphi = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0), \tag{1.28}$$

удовлетворяющее условиям: $\left(\frac{d^\alpha\varphi}{dt^\alpha}\right)(t_0) = \varphi_\alpha$ $(\alpha = 0, \ldots, r-1)$. *Тогда слабые решения задачи Коши для уравнения* (1.17) *единственны.*

Доказательство леммы основывается на формуле интегрирования по частям для вектор-функции со значениями в H. Выведем ее. Пусть $v(t)$ и $\psi(t)$ соответственно слабо и сильно дифференцируемые вектор-функции на сегменте $[0, T]$. Покажем сперва, что $(v(t), \psi(t))$ дифференцируема на $[0, T]$ и

$$\frac{d}{dt}(v(t), \psi(t)) = \left(\frac{dv(t)}{dt}, \psi(t)\right) + \left(v(t), \frac{d\psi(t)}{dt}\right) \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{1.29}$$

Имеем

$$\frac{1}{h}[(v(t+h), \psi(t+h)) - (v(t), \psi(t))] = \left(v(t+h), \frac{1}{h}[\psi(t+h) - \psi(t)]\right) + \left(\frac{1}{h}[v(t+h) - v(t)], \psi(t)\right) \quad (h \neq 0).$$

При $h \to 0$ $v(t+h) \to v(t)$ слабо (слабо дифференцируемая функция будет и слабо непрерывной), поэтому первое слагаемое стремится к $\left(v(t), \frac{d\psi(t)}{dt}\right)$. Второе слагаемое, очевидно, стремится к $\left(\frac{dv(t)}{dt}, \psi(t)\right)$, откуда и следует (1.29). Беря от обеих частей этого равенства интеграл $\int_0^T \ldots dt$, получим требуемую формулу:

$$\int_0^T \left(\frac{dv(t)}{dt}, \psi(t)\right) dt = (v(T), \psi(T)) - (v(0), \psi(0)) - \\ - \int_0^T \left(v(t), \frac{d\psi(t)}{dt}\right) dt. \tag{1.30}$$

Перейдем к доказательству самой леммы. Пусть $u(t)$ — слабое решение уравнения (1.17), удовлетворяющее условиям $\left(\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha}\right)(0) = 0$ $(\alpha = 0, \ldots, r-1)$; $t_0 > 0$. Рассмотрим $\varphi(t)$, фигурирующую в формулировке леммы. Несколько раз используя формулу (1.30) при $T = t_0$, получим

$$\int_0^{t_0} \left(\frac{d^r u(t)}{dt^r}, \varphi(t)\right) dt = \left(\left(\frac{d^{r-1}u}{dt^{r-1}}\right)(t_0), \varphi(t_0)\right) - \left(\left(\frac{d^{r-1}u}{dt^{r-1}}\right)(0), \varphi(0)\right) - \\ - \int_0^{t_0} \left(\frac{d^{r-1}u(t)}{dt^{r-1}}, \frac{d\varphi(t)}{dt}\right) dt = \left(\left(\frac{d^{r-1}u}{dt^{r-1}}\right)(t_0), \varphi_0\right) - \\ - \left(\left(\frac{d^{r-2}u}{dt^{r-2}}\right)(t_0), \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)(t_0)\right) + \left(\left(\frac{d^{r-2}u}{dt^{r-2}}\right)(0), \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)(0)\right) + \\ + \int_0^{t_0} \left(\frac{d^{r-2}u(t)}{dt^{r-2}}, \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}\right) dt = \ldots = \left(\left(\frac{d^{r-1}u}{dt^{r-1}}\right)(t_0), \varphi_0\right) - \\ - \left(\left(\frac{d^{r-2}u}{dt^{r-2}}\right)(t_0), \varphi_1\right) + \ldots + (-1)^{r+1}(u(t_0), \varphi_{r-1}) - \\ - (-1)^{r+1} \int_0^{t_0} \left(u(t), \frac{d^r\varphi(t)}{dt^r}\right) dt.$$

Отсюда при помощи (1.18) (где положено $f = \varphi(t)$) и (1.30) найдем

$$\left(\left(\frac{d^{r-1}u}{dt^{r-1}}\right)(t_0), \varphi_0\right) - \left(\left(\frac{d^{r-2}u}{dt^{r-2}}\right)(t_0), \varphi_1\right) + \ldots + (-1)^{r+1}(u(t_0), \varphi_{r-1}) =$$

$$= \int_0^{t_0} \left[\left(\frac{d^r u(t)}{dt^r}, \varphi(t) \right) + (-1)^{r+1} \left(u(t), \frac{d^r \varphi(t)}{dt^r} \right) \right] dt =$$

$$= \int_0^{t_0} [(u(t), S(\varphi(t))) - (u(t), S(\varphi(t)))] \, dt = 0.$$

Благодаря произвольности $\varphi_0, \ldots, \varphi_{r-1} \in \Phi$ и плотности Φ в H из этого равенства следует, что $u(t_0) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть $S = \zeta B$, где B — самосопряженный оператор, а ζ — комплексное число. При таком S уравнение* (1.28) *имеет сильное решение $\varphi(t)$, удовлетворяющее условиям леммы* 1.4. *В качестве Φ нужно взять $\bigcup_{\Delta} E(\Delta)H$, где E_λ — разложение единицы, отвечающее B, а объединение берется по всем конечным интервалам.*

Доказательство. Обозначим $\chi_\alpha(t; \lambda)$ $(\alpha = 0, \ldots, r-1)$ фундаментальную систему решений уравнения $\frac{d^r u}{dt^r} - (-1)^r \zeta \lambda u = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$, удовлетворяющую условиям: $\left(\frac{d^\alpha \chi_\beta}{dt^\alpha} \right)(t_0) = \delta_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta = 0, \ldots, r-1)$. Тогда можно положить

$$\varphi(t) = \sum_{\alpha=0}^{r-1} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_\alpha(t; \lambda) \, dE_\lambda \varphi_\alpha \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0; \quad \varphi_0, \ldots, \varphi_{r-1} \in \Phi = \bigcup_{\Delta} E(\Delta)H). \tag{1.31}$$

В (1.31) интегралы фактически распространяются по конечным интервалам, поэтому $\varphi(t)$ будет r раз сильно дифференцируема и при каждом t $\varphi(t) \in \mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(S)$. Удовлетворение уравнению (1.28) легко проверяется (подобно тому, как это сделано на стр. 393). Ясно также, что $\varphi(t)$ удовлетворяет требуемым условиям в точке $t = t_0$. Лемма доказана.

Из лемм 1.4 и 1.5 вытекает следующее утверждение, более общее, чем сформулированное во второй части теоремы 1.7: *пусть A — эрмитовый оператор в H, замыкание которого самосопряжено; ζ — произвольное комплексное число. Тогда слабые решения задачи Коши (если они существуют) для уравнения*

$$\frac{d^r u}{dt^r} - \bar{\zeta} A^* u = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty; r = 1, 2, \ldots) \tag{1.32}$$

будут единственными.

В самом деле, если $u(t)$ — слабое решение уравнения (1.32), то оно будет слабым решением подобного уравнения, в котором A заменен на $\bar{A}$. Теперь остается применить леммы 1.4 и 1.5, в которых положено $S=\zeta\bar{A}$, $B=\bar{A}$. Утверждение, а вместе с ним и теорема доказаны.

Заметим, что в первой части теоремы можно было не требовать равенства дефектных чисел оператора A; несколько усложняя приведенное доказательство, получим, что требование пункта 1) приводит к максимальности замыкания оператора A (см. в связи с этим утверждения п. 2, § 2, гл VIII). В этой же части можно было бы также установить результаты и применительно к уравнениям (1.32), обобщающим уравнения (1.19) — (1.20). На формулировках мы не останавливаемся.

Применение результатов типа теоремы 1.7,1), будет дано в п. 2, § 2, гл. VIII. При помощи теоремы 1.7 2), относящейся к первому из уравнений (1.20), можно установить самосопряженность дифференциальных эллиптических операторов, подобных рассмотренным в п. 6 (стр. 390); для этого дополнительно нужно привлечь известные теоремы единственности решений задачи Коши для параболических уравнений. Эти результаты мы излагать не будем и ограничимся лишь получением аналогичных фактов при помощи рассмотрения второго из уравнений (1.20).

Теорема 1.8 *Рассмотрим в E_n эллиптическое формально самосопряженное выражение L второго порядка с вещественными коэффициентами $a_\alpha(x) \in C^{2+\left[\frac{n}{2}\right]}(E_n)$. Если это выражение полуограничено снизу на финитных функциях, т. е. $(Lu, u)_0 \geq C\|u\|_0^2$ $(u \in C_0^\infty(E_n))$ с некоторым $C > -\infty$, то соответствующий минимальный оператор Λ самосопряжен в $L_2(E_n)$.*

Доказательство. Нам удобно перед выражением, фигурирующим в условии теоремы, поставить знак — и уже его обозначать через L; достаточно доказывать самосопряженность соответствующего оператора Λ. Рассмотрим в пространстве $(x, t) \in E_n \times (-\infty, \infty)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - L_x[u(x,t)] = 0. \tag{1.33}$$

Оно будет гиперболическим*: всякая прямая в вещественном пространстве $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, проходящая через начало координат, пересекает

* Используемые ниже факты о гиперболических уравнениях см., например, в книге И. Г. Петровского [1], гл. 2, § 16, стр. 131—133 (ср. также п. 9, § 2).

поверхность $1 - \sum\limits_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha = 0$ в двух различных точках (при каждом фиксированном $x \in E_n$). Это следует из неравенства (1.3), гл. III: $\sum\limits_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geqslant \varepsilon(x)|\xi|^2$, где $\varepsilon(x) > 0$ $(x \in E_n)$.

Зафиксируем $t_0 > 0$. Известно, что если задать при $t = t_0$ произвольные функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x) \in C^{3+\left[\frac{n}{2}\right]}(E_n)$, то найдется решение $u(x,t) \in C^2(E_n \times (-\infty, t_0])$ уравнения (1.33) такое, что $u(x, t_0) = \varphi_0(x)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x, t_0) = \varphi_1(x)$ $(x \in E_n)$. В каждой точке (x,t) это решение зависит лишь от значений $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ для x, меняющихся в ограниченной области, вырезаемой из гиперплоскости $t = t_0$ пространства $E_n \times (-\infty, \infty)$ характеристическим конусом с вершиной в точке (x,t), построенным по уравнению (1.33). Если φ_0 и φ_1 финитны, то и $u(x,t)$ для каждого $t \leqslant t_0$ будет финитным.

Теперь легко завершить доказательство теоремы. Рассмотрим второе из уравнений (1.20), где $H = L_2(E_n)$ и $A = \Lambda'$ (т. е. $\Lambda' f = Lf$, $f \in \mathfrak{D}(\Lambda') = C_0^\infty(E_n)$); оператор Λ' полуограничен сверху, $a = -C$. Для этого уравнения будет иметь место единственность слабых решений задачи Коши. Действительно, применим лемму 1.4, беря в качестве (1.28) уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \Lambda'\varphi = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0) \tag{1.34}$$

и считая $\Phi = C_0^\infty(E_n)$. Описанные выше решения $u(x, t)$ уравнения (1.33) при $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$ можно интерпретировать как сильные решения $\varphi(t)$ уравнения (1.34) — благодаря тому, что $u(x, t)$ для каждого t финитна по x. Итак, требуемые сильные решения уравнения (1.34) существуют, поэтому имеет место высказанная единственность, а значит, согласно теореме 1.7, 2) замыкание Λ', т. е. оператор Λ самосопряжен. Теорема доказана.

Комбинируя эту теорему с теоремой 1.4, можно доказать самосопряженность оператора Λ (гр) типа теоремы 1.8, но рассматриваемого вне замкнутой поверхности, где заданы формально самосопряженные (гр), обеспечивающие повышение гладкости, указанное в конце п. 2. Результат легко может сформулировать читатель.

В заключение заметим, что идея доказательства теоремы 1.8 иногда может быть проведена и в случае неполуограниченного L. Так, для выражения Шредингера можно воспользоваться связями, приведенными в теореме 2.9, и затем применить теорему единственности типа, указанного на стр. 698. Ограничения на коэффициент $c(x)$, обеспечивающие применение теоремы единственности, и приводят к достаточным условиям самосопряженности Λ.

§ 2. Спектральная теория самосопряженных эллиптических операторов

Эта теория будет строиться в так называемом сингулярном случае, когда область $G \subseteq E_n$ неограничена. Упрощения в случае ограниченной G (регулярный случай) указываются в п. 6. Как и ранее, все операторы рассматриваются в пространстве $H_0 = L_2(G)$ (если не будет оговорено противное). Мы не будем формулировать результаты для общих (гр), описывающихся граничными выражениями. Это легко может сделать читатель при помощи рассмотрений § 6, гл. III.

1. Спектральная теория внутри области. Рассмотрим в неограниченной области G формально самосопряженное эллиптическое выражение $L = L^+$ порядка r с обычными условиями гладкости коэффициентов: $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(G \cup \Gamma)$; на Γ определены формально самосопряженные условия (гр) $=$ (гр)$^+$ посредством $W_2^r(\text{гр}) \subset W_2^r(G)$. Как уже говорилось в § 1, сильный оператор Λ (гр) является эрмитовым замкнутым оператором в $L_2(G)$. Пусть A — некоторое его самосопряженное расширение в $L_2(G)$ или с выходом в более широкое пространство $\widetilde{L_2(G)}$, $E(\Delta)$ — соответствующее A обычное или обобщенное разложение единицы. Сейчас мы построим спектральное разложение, порожденное $E(\Delta)$. В этом пункте исследуются его свойства внутри G, поэтому характер (гр) здесь не играет роли.

Пусть $\gamma(\lambda)$ — непрерывная ограниченная функция на спектре A, обобщенная функция $\gamma(A)$ оператора A определяется посредством интеграла $\gamma(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)\, dE_\lambda$. Иными словами, если P—оператор ортогонального проектирования $\widetilde{L_2(G)}$ на $L_2(G)$, то $\gamma(A) = P\widetilde{\gamma(A)}P$, где $\widetilde{\gamma(A)}$— функция от A, являющаяся оператором в $\widetilde{L_2(G)}$. Как указывалось на стр. 355, все утверждения § 4, гл. V остаются верными при замене самосопряженного оператора A в $L_2(G)$ таким же оператором в $\widetilde{L_2(G)}$; роль $\gamma(A)$ (стр. 355) должна играть обобщенная функция оператора A. Применение результатов этого параграфа к нашему случаю основывается на следующей лемме.

Лемма. 2.1. *Предположим, что коэффициенты выражения* L $a_\alpha(x) \in C^{2r+n+p}(G)$, $p \geqslant n+1$. *Тогда обобщенная функция* $\gamma(A)$ *оператора* A, *где* $\gamma(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^N - z}$, $N = \left|\dfrac{n}{2r}\right| + 1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, *является интегральным оператором с достаточно гладким ядром* $C(x, y)$

$(D_x^\alpha D_y^\beta C$ $(|\alpha|,\ |\beta| \leqslant Nr+p)$ существуют и непрерывны относительно $(x,\ y)\in G\times G,\ x\neq y)$, для которого интегралы

$$\int\limits_G |C(x,\ y)|^2 dy,\quad \int\limits_G |C(x,\ y)|^2 dx \tag{2.1}$$

ограничены при $x,\ y$, меняющихся строго внутри G и ограниченных.

Доказательство. Так как $2r+n+p\geqslant 2Nr+p=$ $=2r\left(\left[\frac{n}{2r}\right]+1\right)+p$, то заведомо $a_\alpha\in C^{2Nr+p}(G)$. Поэтому выражение L^N имеет смысл и его коэффициенты $b_\alpha\in C^{|\alpha|+Nr+p}(G)$. Покажем, что при любом $f\in L_2(G)$ $\gamma(A)f$ и $(\gamma(A))^*f$ будут обобщенными решениями внутри G соответственно уравнений $(L^N-zE)u=f$ и $(L^N-zE)^+u=f$, т. е. для любой $v\in C_0^\infty(G)$

$$(\gamma(A)f,\ (L^N-zE)^+v)_0=(f,\ v)_0,\quad ((\gamma(A))^*f,\ (L^N-zE)v)_0=(f,\ v)_0. \tag{2.2}$$

В самом деле, $\gamma(A)=P\widetilde{R}_zP$, где $\widetilde{R}_z$—резольвента (в $\widetilde{L_2(G)}$) оператора A^N. Поэтому, так как $(L^N)^+=(L^+)^N=L^N$,

$$(\gamma(A)f,\ (L^N-zE)^+v)_0=(\widetilde{R}_zf,\ (L^N-\bar{z}E)v)_{\widetilde{L_2(G)}}=$$
$$=(f,\ \widetilde{R}_{\bar{z}}(A^N-\bar{z}E)v)_{\widetilde{L_2(G)}}=(f,\ v)_{\widetilde{L_2(G)}}=(f,\ v)_0.$$

Аналогично устанавливается второе равенство в (2.2):

$$((\gamma(A))^*f,\ (L^N-zE)v)_0=(f,\ \gamma(A)(L^N-zE)v)_0=$$
$$=(f,\ \widetilde{R}_z(L^N-zE)v)_{\widetilde{L_2(G)}}=(f,\ \widetilde{R}_z(A^N-zE)v)_{\widetilde{L_2(G)}}=(f,v)_{\widetilde{L_2(G)}}=(f,\ v)_0.$$

Применяя теорему 5.1, гл. III, где L заменено на L^N-zE и R на $\gamma(A)$, получим, что $\gamma(A)$ — интегральный оператор, ядро которого имеет указанную гладкость. Так как L^N-zE имеет порядок $Nr>\frac{n}{2}$, то применима теорема 5.4, гл. III, в силу которой интегралы (2.1) требуемым образом ограничены. Лемма доказана.

Эта лемма доказывает, что A является карлемановским оператором в пространстве $L_2(G)=L_2(G,\ dx)$ $(G\subseteq E_n$ — локально компактно), поэтому законно применение результатов § 4, гл. V. Подберем так функцию $p(y)\geqslant 1$ из $C^\infty(G)$, чтобы

$$\int\limits_G\int\limits_G |C(x,\ y)|^2\frac{1}{p(y)}dxdy<\infty; \tag{2.3}$$

$p(x)$ может расти к ∞ при приближении x к Γ и к ∞. Тогда разложения по собственным функциям A можно строить, используя цепочку $H_{-} \supseteq H_0 \supseteq H_{+}$ вида

$$L_2\left(G, \frac{1}{p}\,dx\right) \supseteq L_2(G) \supseteq L_2(G,\ p dx). \tag{2.4}$$

Оператор A допускает продолжение оснащения: в качестве Д возьмем $W^r_{2,0}(G) \subset W^r_2(\text{гр}) \cap W^r_{2,0}(E_n) \subset \mathfrak{D}(A)$ с топологией, определяемой, например, скалярным произведением $(u,\ v)_Д = (u,\ v)_+ + (Au,\ Av)_+$. Так как $W^r_{2,0}(G)$ плотно в $L_2(G,\ pdx)$ и оператор A непрерывно действует из Д в $L_2(G,\ pdx)$, то такой выбор законен. Таким образом, под обобщенной собственной функцией φ оператора A, отвечающей вещественному собственному значению λ, следует понимать обычную функцию $\varphi(x) \in L_2\left(G, \frac{1}{p}\,dx\right)$ такую, что при каждом $v \in W^r_{2,0}(G)$

$$(\varphi,\ (L - \lambda E)\,v)_0 = 0. \tag{2.5}$$

Нетрудно показать, что спектральное ядро $\Phi = \Phi(x,\ y;\ \lambda) \in \in L_2\left(G \times G,\ \frac{1}{p(x)\,p(y)}\,dxdy\right)$ является по каждому из переменных обобщенным решением внутри G уравнений

$$L_x\Phi = \lambda\Phi,\ \overline{L_y}\Phi = \lambda\Phi,\ \text{т. е. } (\Phi,\ ((L^+ - \lambda E)\,v')\,(x)\,v''(y))_0 = 0,$$
$$(\Phi,\ v'(x)\,((L^{\oplus} - \lambda E)\,v'')\,(y))_0 = 0\ (v',\, v'' \in C_0^\infty(G)). \tag{2.6}$$

Действительно, так как $P(\lambda)\,\bar{v}''$ — обобщенная собственная функция, то $(P(\lambda)\bar{v}'',\ (L^+ - \lambda E)\,v')_0 = 0$. Используя (4.4), гл. V, получаем

$$(\Phi(x,\ y;\ \lambda),\ ((L^+ - \lambda E)\,v')\,(x)\,v''(y))_0 = \iint_{G\,G} \Phi(x,\ y;\ \lambda) \times$$
$$\times\ \overline{((L^+ - \lambda E)\,v')\,(x)\,v''(y)}\,dxdy = (P(\lambda)\,\bar{v}'',\ (L^+ - \lambda E)\,v')_0 = 0,$$

что доказывает первое из равенств (2.6). Второе равенство получается из первого благодаря соотношению: $\overline{\Phi(y,\ x;\ \lambda)} = \Phi(x,\ y;\ \lambda)$.

Лемма 2.2. *Предположим, что коэффициенты выражения* L $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+r+p'}(G)$, $p' \geqslant 1$. *Тогда каждая обобщенная собственная функция* $\varphi \in L_2\left(G, \frac{1}{p}\,dx\right)$ *оператора* A *входит в* $C^{r+p'}(G)$. *Спектральное ядро также достаточно гладкое: у него существу-*

ют и непрерывны по $(x, y) \in G \times G$ *все производные вида* $D_x^\alpha D_y^\beta \Phi_\lambda$, *где* $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant r + p'$.

Эта лемма непосредственно вытекает из теорем 4.1 и 4.2, гл. III.

Леммы 2.1 и 2.2 показывают, что в нашем случае справедливы все результаты § 4, гл. V (остается открытым лишь вопрос относительно последнего утверждения теоремы 4.3 и следствия из нее). Мы приходим к следующей основной теореме спектральной теории эллиптических операторов.

Теорема 2.1. *Рассмотрим в, вообще говоря, неограниченной области* G *формально самосопряженное эллиптическое выражение* L *порядка* r *с коэффициентами* $a_\alpha(x) \in C^{2r+n+p}(G \cup \Gamma)$, $p \geqslant n+1$; *на* Γ *заданы формально самосопряженные граничные условия* (гр) $=$(гр)$^+$ *посредством* $W_2^r(\text{гр}) \subset W_2^r(G)$. *Замыкание оператора, определяемого соответствием* $u \to Lu$ $(u \in W_2^r(\text{гр}) \cap W_{2,0}^r(E_n))$, *эрмитово; пусть* A *— его самосопряженное расширение (в* $L_2(G)$ *или с выходом в более широкое пространство),* E_λ *— соответствующее обобщенное (вообще говоря) разложение единицы.*

Существует функция $p(x) \in C^\infty(G)$, $p(x) \geqslant 1$ *(возможно, растущая при приближении* x *к* Γ и ∞*) такая, что для разложения по собственным функциям оператора* A *годится цепочка* (2.4).

Оператор обобщенного проектирования на обобщенное собственное подпространство $P(\lambda)$ *(определенный* ϱ*-почти для всех* λ*) является интегральным оператором:*

$$(P(\lambda)u)(x) = \int_G \Phi(x, y; \lambda)\, u(y)\, dy \quad (u \in L_2(G, p\,dx)). \tag{2.7}$$

Положительно определенное ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ $(x, y \in G)$ *называется спектральным ядром оператора* A, *оно входит в* $L_2\left(G \times G, \frac{1}{p(x)\,p(y)}dx\,dy\right)$, *причем* $\|\Phi(\cdot\,,\cdot\,;\lambda)\|_{L_2\left(G\times G, \frac{1}{p(x)p(y)}dx\,dy\right)} \leqslant 1$ $\left(\text{*точнее:*} \int_G \frac{\Phi(x, x; \lambda)}{p(x)}dx = 1\right)$.

Кроме того, оно достаточно гладко (существуют и непрерывны по $(x, y) \in G \times G$ *все производные вида* $D_x^\alpha D_y^\beta \Phi$; $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant r + n + p$*) и является собственной функцией по каждой из переменных:*

$$L_x\Phi(x, y; \lambda) = \lambda\Phi(x, y; \lambda),\quad \overline{L}_y\Phi(x, y; \lambda) = \lambda\Phi(x, y; \lambda) \tag{2.8}$$
$$(x, y \in G).$$

Интегральным оператором является также любая обобщенная функция $F(A) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, dE_\lambda$, *где* $|F(\lambda)| \leqslant \frac{C}{\lambda^{2N}+1}$, $N = \left[\frac{n}{2r}\right] + 1$, *на* *спектре A. Ядро $K(x, y)$ этого оператора представимо в виде абсолютно сходящегося для каждых $x, y \in G$ интеграла*

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\Phi(x, y; \lambda)\, d\varrho(\lambda); \tag{2.9}$$

и представляет собой локально ограниченную функцию $(x, y) \in G \times G$.

Каждая обобщенная собственная функция $\varphi \in L_2\left(G, \frac{1}{p}dx\right)$ оператора A достаточно гладкая: $\varphi \in C^{r+n+p}(G)$. Разложение спектрального ядра по собственным функциям

$$\Phi(x, y; \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \varphi_\alpha(x; \lambda)\overline{\varphi_\alpha(y; \lambda)} \quad (x, y \in G) \tag{2.10}$$

сходится в смысле метрики $L_2\left(G \times G, \frac{1}{p(x)\,p(y)}\,dxdy\right)$. В каждой строго внутренней ограниченной подобласти из $G \times G$ ряд (2.10) сходится абсолютно и равномерно. Более того, его можно почленно дифференцировать — брать производные вида $D_x^\alpha D_y^\beta$, где $|\alpha|, |\beta| \leqslant r + n + p$ — причем после дифференцирования ряд (2.10) будет по-прежнему абсолютно и равномерно сходиться в указанных подобластях.

Полезно подчеркнуть, что $p(x)$ выбирается из единственного требования: при ограничениях теоремы доказывается, что оператор $\gamma(A) = \int_{-\infty}^{\infty}(\lambda^N - z)^{-1} dE_\lambda \quad \left(N = \left[\frac{n}{2r}\right] + 1,\ \operatorname{Im} z \neq 0\right)$ — интегральный с ядром Карлемана $C(x, y)$. Функция $p(x)$ такова, что при некотором z сходится интеграл (2.3), причем $1 \leqslant p(x) \in C^\infty(G)$.

В теореме нужно установить лишь возможность дифференцировать ряд (2.10). Такая возможность вытекает из следующей общей леммы, примененной несколько раз:

Лемма 2.3. *Пусть $K(x, y)$ — положительно определенное непрерывное относительно $(x, y) \in G \times G$ ядро, представимое в виде сходящегося в каждой точке $x, y \in G$ ряда*

$$K(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_\alpha(x)\overline{\varphi_\alpha(y)} \quad (x, y \in G). \tag{2.11}$$

Если существует и непрерывна по $(x, y) \in G \times G$ производная

$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_j} K(x, y)$, *то для каждого* α *существует и непрерывна производная* $\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_\alpha(x)$ *и при вычислении* $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_j} K(x, y)$ *ряд* (2.11) *можно дифференцировать почленно. Продифференцированный ряд сходится абсолютно и равномерно во всякой ограниченной строго внутренней подобласти области* $G \times G$.

Доказательство. Полагая в (2.11) $x = y$, заключаем, что вектор $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots) \in l_2([1, \infty))$; обозначим его через e_x. Из существования и непрерывности $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_j} K(x, y)$ и равенства $(e_x, e_y) = K(x, y)$ легко следует существование и сильная непрерывность сильной производной $\frac{\partial}{\partial x_j} e_x$. Обозначим через δ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ ортонормированную систему векторов из $l_2([1, \infty))$ вида $\delta_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \ldots)$; очевидно, $\varphi_\alpha(x) = (e_x, \delta_\alpha)$. Из сказанного выше вытекает существование и непрерывность производной $\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_\alpha(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(e_x, \delta_\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} e_x, \delta_\alpha\right)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$. Далее, имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_j} K(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_j}(e_x, e_y) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} e_x, \frac{\partial}{\partial y_j} e_y\right) =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} e_x, \delta_\alpha\right) \overline{\left(\frac{\partial}{\partial y_j} e_y, \delta_\alpha\right)} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_\alpha(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \overline{\varphi_\alpha(y)} \quad (x, y \in G). \tag{2.12}$$

Нам осталось убедиться в абсолютной и равномерной во всякой ограниченной строго внутренней подобласти области $G \times G$ сходимости ряда (2.12). Так как $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_j} K(x, y)$ — положительно определенное непрерывное ядро, а разложение (2.12) имеет место для любой (x, y), то в этом убеждаемся при помощи теоремы Дини точно так же, как и на стр. 361 при доказательстве леммы 4.1, гл. V. Лемма доказана.

Сделаем одно дополнение к доказанной теореме, относящееся к гладкости ядра $K(x, y)$ оператора $F(A)$. Мы ограничимся сильно эллиптическими L, хотя подобные результаты можно доказывать и в общем случае (см. замечание в конце п. 4 на стр. 420).

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения теоремы 2.1 с* p *достаточно большим, причем* L *сильно эллиптично. Если*

$|F(\lambda)| \leqslant \dfrac{C}{|\lambda|^{2N+t}+1}$ $\left(N = \left[\dfrac{n}{2r}\right] + 1;\ t = 0,\ 1, \ldots\right)$ *на спектре* A, *то ядро* $K(x, y)$ *оператора* $F(A)$ *входит в* $W^{rt}_{2,\text{лок}}(G \times G)$.

Доказательство. Коэффициенты выражения L достаточно гладкие, поэтому L^t имеет смысл и его коэффициенты также достаточно гладкие. Пусть v', $v'' \in C_0^\infty(G)$.

Имеем благодаря (2.8)

$$(K(x, y),\ ((L^t)^+ v')(x)\, v''(y))_0 = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \left(\int_G \int_G \Phi(x, y;\ \lambda)\, \overline{((L^+)^t v')(x)} \times \right.$$

$$\left. \times\, \overline{v''(y)}\, dx dy \right) d\varrho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \left(\int_G \int_G \lambda \Phi(x, y;\ \lambda) \times \right.$$

$$\left. \times\, \overline{((L^+)^{t-1} v')(x)}\, \overline{v''(y)}\, dx dy \right) d\varrho(\lambda) = \ldots =$$

$$= \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^t F(\lambda)\, \Phi(x, y;\ \lambda)\, d\varrho(\lambda) \right),\ v'(x)\, v''(y) \right)_0. \qquad (2.13)$$

На основании теоремы 2.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^t F(\lambda)\, \Phi(x, y;\ \lambda)\, d\varrho(\lambda) = M(x, y) \in L_{2,\text{лок}}(G \times G).$$

Равенство (2.13) показывает, что K является обобщенным решением внутри $G \times G$ уравнения $L_x^t K = M$. Аналогично убедимся, что внутри $G \times G$ $\overline{L}_y^t K = M$. Таким образом, $(L_x^t + \overline{L}_y^t)\, K = 2M \in L_{2,\text{лок}}(G \times G)$. Выражение L^t, а значит и $L_x^t + \overline{L}_y^t$ — сильно эллиптично и порядка rt (см. стр. 205—206), поэтому согласно теореме 4.5, гл III, $K \in W^{rt}_{2,\text{лок}}(G \times G)$. Теорема доказана.

2. **Спектральная теория вплоть до границы.** Выясним поведение спектрального ядра, собственных функций, разложений типа (2.10) и т. п. при приближении к границе, на которой заданы достаточно хорошие граничные условия. Как и неоднократно ранее мы ограничимся простейшими случаями, предоставляя читателю формулировки результатов для общих эллиптических L и общих (гр). Ниже рассматриваются самосопряженные расширения оператора Λ (гр) лишь в пространстве $L_2(G)$; это ограничение существенно.

Предположим, что выполняются условия теоремы 2.1; $r = 2m$. Дополнительно будем считать, что существует ограниченная подобласть $G_0 \subseteq G$, примыкающая к Γ по достаточно гладкому куску Γ_0, в которой L сильно эллиптично, а на Γ_0 (гр) нулевые (мы рассматриваем G_0, а не всю G, чтобы подчеркнуть локальность результатов). Пусть A—самосопряженное расширение оператора Λ (гр) в $L_2(G)$. Для резольвенты R_z этого расширения, очевидно, справедливо следствие 2 из теоремы 5.7, гл. III: R_z^N является интегральным оператором с ядром $R(x, y)$ $(x, y \in G)$, для которого интегралы (2.1) ограничены при x, y, меняющихся строго внутри G и ограниченных. Эти интегралы ограничены и в случае, когда x, $y \in \overline{G_0'}$, где G_0' — произвольная подобласть G_0, имеющая общую границу с G_0 лишь по куску Γ_0', лежащему строго внутри Γ_0. Кроме того, имеют место указанные в следствии 2 свойства гладкости $R(x, y)$.

Будем применять построения § 4, гл. V, считая $Q = G \cup \Gamma_0$ и $\gamma(A) = R_z^N$ *. Ограниченность второго из интегралов (2.1) при $y \in \overline{G_0'}$ позволяет выбрать $p(y) \geqslant 1$, удовлетворяющую (2.3), из пространства $C^\infty(G \cup \Gamma_0)$. Таким образом, функции из $L_2\left(G, \frac{1}{p} dx\right)$ суммируемы с квадратом вблизи каждого куска Γ_0'. В качестве Д следует брать совокупность функций u из $W_2^r(G)$, аннулирующихся в окрестностях $\Gamma \setminus \Gamma_0$ и ∞, а на Γ_0 принимающих нулевые граничные условия: $D^\alpha u|_{\Gamma_0} = 0$ $(|\alpha| \leqslant m - 1)$. Теперь $\varphi(x)$ и $\Phi(x, y; \lambda)$ будут удовлетворять соответствующим уравнениям вплоть до Γ_0, причем они вблизи каждого куска Γ_0' суммируемы с квадратом. Применяя теорему 4.6, гл. III, заключаем, что они гладкие вплоть до Γ_0' и принимают там нулевые условия. Все это позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1; $r = 2m$. Предположим, что существует ограниченная подобласть $G_0 \subseteq G$, примыкающая к Γ по куску Γ_0 класса C^{2m+q} $\left(q \geqslant m, \frac{n}{2}\right)$, такая, что L в $G_0 \cup \Gamma_0$ сильно эллиптично, причем коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+q}(G_0 \cup \Gamma_0)$ и* (гр) *на Γ_0 нулевые: $D^\alpha u|_{\Gamma_0} = 0$ $(|\alpha| \leqslant m - 1)$. В качестве A берется самосопряженное расширение в $L_2(G)$.*

Утверждается, что в этом случае функцию $p(x)$ можно взять

---

* Как указывалось на стр. 358—359, $\Phi(x, y; \lambda)$ и $d\varrho(\lambda)$ по существу не изменяются при изменении вида функции $\gamma(\lambda)$. Поэтому то, что сейчас $\gamma(\lambda) = (\lambda - z)^{-N}$ и отличается от $\gamma(\lambda)$ из п. 1, несущественно.

из $C^\infty(G\cup\Gamma_0)$ *и поэтому всякая* $u\in L_2\left(G,\ \frac{1}{p}\,dx\right)$ *входит в* $L_{2,\text{лок}}(G_0,\ \Gamma_0)$, *а* $U\in L_2\left(G\times G,\ \frac{1}{p(x)\,p(y)}\,dxdy\right)$ — *в* $L_{2,\text{лок}}(G\times G,\ ((G_0\cup\Gamma_0)\times\Gamma_0)\cup\cup(\Gamma_0\times(G_0\cup\Gamma_0)))$.

Спектральное ядро $\Phi(x,\ y;\ \lambda)$ *при фиксированном* $x\in G$ $(y\in G)$ *входит в* $W_{2,\text{лок}}^{2m+q}(G_0,\ \Gamma_0)$ *и на* Γ_0 *удовлетворяет нулевым условиям:*

$$\begin{gathered}(D_y^\beta\Phi)(x,\ y;\ \lambda)\big|_{y\in\Gamma_0}=0,\ |\beta|\leqslant m-1\\ ((D_x^\alpha\Phi)(x,\ y;\ \lambda)|_{x\in\Gamma_0}=0,\ |\alpha|\leqslant m-1).\end{gathered}\tag{2.14}$$

Таким же свойством обладает и каждая обобщенная собственная функция $\varphi\in L_2(G,\ \frac{1}{p}dx)$. *Разложение* (2.10) *спектрального ядра по собственным функциям сходится абсолютно и равномерно в каждой ограниченной подобласти области* $G\times G$, *примыкающей к ее границе лишь строго внутри куска* $((G_0\cup\Gamma_0)\times\Gamma_0)\cup(\Gamma_0\times(G_0\cup\Gamma_0))$.

Доказательство теоремы очевидно вытекает из сказанного ранее. Поясним лишь некоторые моменты. Применение следствия 2 сейчас законно: $N=\left[\frac{n}{2r}\right]+1,\ Nr>\frac{n}{2}$; далее $2r+n+p\geqslant\geqslant 2Nr+p$ и $a_\alpha\in C^{2r+n+p}(G\cup\Gamma)$ имеют требуемую гладкость; Γ_0 $2m+q$ раз непрерывно дифференцируемо, так как $q\geqslant\frac{n}{2}\geqslant\geqslant r\left[\frac{n}{2r}\right]=(N-1)r$, то $2m+q\geqslant Nr$ и Γ_0 достаточно гладко. Характер сходимости разложения (2.10) обеспечивается теоремой 4.2, гл. V.

Для получения теоремы типа 2.3, в которой нулевые условия на Γ_0 заменены общими, необходимо требовать, чтобы для этих условий выполнялась теорема 5.7, гл. III с $L_1=\ldots=L_N=L-zE$. Такая теорема, как пояснялось ранее, может быть доказана при помощи результатов п. 12, § 6, гл. III, о повышении гладкости. Они же обеспечат гладкость $\varphi(x)$ и $\Phi(x,\ y;\ \lambda)$ вплоть до Γ_0. В качестве Д теперь следует брать класс функций из W_2^r (гр), аннулирующихся в окрестностях $\Gamma\setminus\Gamma_0$ и ∞.

Сформулируем еще аналог теоремы 2.3 для граничных условий типа третьей краевой задачи, который может быть получен без применения общих результатов § 6, гл. III.

Теорема 2.4. *Пусть при* $r=2$ *и* $n=2,3$ *выполнены условия теоремы 2.1 в следующей ослабленной форме:* $a_\alpha(x)\in C^{|\alpha|+2+p}(G\cup\Gamma)$, $p\geqslant n+1$. *Тогда все ее заключения верны — нужно только при указании гладкости* $\Phi(x,\ y;\lambda)$ *и* $\varphi(x)$ *и дифференцировании* (2.10) $r+n+p$ *заменить на* $2+p$. *Теперь* $N=1$ *и* $\gamma(A)$ *совпадает с обобщенной резольвентой.*

Предположим дополнительно, что существует ограниченная подобласть $G_0\subseteq G$, *примыкающая к* Γ *по куску* Γ_0 *класса* C^2, *такая, что в* $G_0\cup\Gamma_0$

L сильно эллиптично. На Γ_0 (гр) *типа третьей краевой задачи:* $\left.\frac{\partial u}{\partial \mu}+\sigma(x)\,u\right|_{\Gamma_0}=0$, *где $\sigma\in C^1(\Gamma_0)$ и вещественна. Оператор A — самосопряженное расширение в $L_2(G)$. Тогда справедливы все заключения теоремы 2.3 с тем изменением, что классы $W^{2m+q}_{2,\text{лок}}(G_0, \Gamma_0)$ должны быть заменены классами $W^2_{2,\text{лок}}(G_0, \Gamma_0)$, а нулевые* (гр) — *указанными выше условиями.*

Путь доказательства этой теоремы такой же, как и теорем 2.1 и 2.3. Поясним лишь некоторые особенности. При доказательстве первой части нужно пользоваться непосредственно теоремами 5.1 и 5.4, гл. III, так как сейчас $r>\frac{n}{2}$. Поэтому снижается запас гладкости коэффициентов. При доказательстве второй части пользуемся сказанным в конце п. 5, § 5, гл. III, относительно вида теоремы 5.5 этой главы для задачи типа третьей краевой. Ограничение вещественности связано с требованием (гр) = (гр)$^+$; коэффициенты $p_j(x)$ в представлении (2.4), гл. III, для выражения L равны нулю — это следствие равенства $L=L^+$. При исследовании гладкости вплоть до Γ_0 функций $\Phi(x, y; \lambda)$ и $\varphi(x)$ нужно применять, естественно, теорему 4.7, гл. III.

3. Поведение спектрального ядра как функции точки (x, y) вблизи границы $G\times G$ для сильно эллиптических выражений. В п. 2 при изучении $\Phi(x, y; \lambda)$ вблизи куска $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ одна из точек $x, y\in G$ фиксировалась и рассматривалось поведение этой функции относительно второй точки. Вместе с тем, применяя методику п. 3, § 5, гл. III, легко сделать некоторые заключения о $\Phi(x, y; \lambda)$ сразу как функции от (x, y).

В самом деле, пусть ограниченные подобласти G_1, $G_2\subseteq G$ примыкают к Γ по кускам Γ_1 и Γ_2 соответственно, G_1 и G_2 могут пересекаться. Предположим, что в $G_1\cup\Gamma_1$ и $G_2\cup\Gamma_2$ L сильно эллиптично и с достаточно гладкими коэффициентами, тогда $M=L_x+\bar{L}_y$ сильно эллиптично в $(G_1\cup\Gamma_1)\times(G_2\cup\Gamma_2)$ и имеет там достаточно гладкие коэффициенты. Пусть на Γ_1 и Γ_2 заданы нулевые (гр), теорема 2.2 показывает, что $p(x)$ вблизи Γ_1 и Γ_2 ограничена и поэтому $\Phi\in L_{2,\text{лок}}(G_1\times G_2, ((G_1\cup\Gamma_1)\times\Gamma_2)\cup(\Gamma_1\times(G_2\cup\Gamma_2)))$. Вместе с тем, очевидно, $M\Phi=2\lambda\Phi$ в $G_1\times G_2$ вплоть до указанного сейчас куска границы $G_1\times G_2$, общей с границей $G\times G$. Это дает возможность вне угловых точек этого куска, т. е. вне $\Gamma_1\times\Gamma_2$, применять теорему 4.6, гл. III, что обеспечивает гладкость Φ. Эти соображения приводят к следующей теореме.

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1; $r=2m$. Предположим, что существуют две ограниченные (возможно, пересекающиеся) подобласти $G_1, G_2\subseteq G$, примыкающие к Γ по кускам Γ_1 и Γ_2 класса $C^{2m+q}\left(q\geqslant m, \frac{n}{2}\right)$, такие, что L сильно эллиптично в $G_j\cup\Gamma_j$ и $a_\alpha(x)\in C^{|\alpha|+q}(G_j\cup\Gamma_j)$ $(j=1, 2)$. На $\Gamma_1\cup\Gamma_2$* (гр) *нулевые. Оператор A — самосопряженное расширение в $L_2(G)$.*

Утверждается, что спектральное ядро

$$\Phi(\cdot,\cdot;\ \lambda)\in W_{2,\text{лок}}^{2m+q}(G_1\times G_2,\ (\Gamma_1\times G_2)\cup(G_1\times\Gamma_2))$$

и удовлетворяет по каждой из переменных x, y нулевым граничным условиям, т. е. выполняются соотношения (2.14)*, где* Γ_0 *заменено на* $\Gamma_1\cup\Gamma_2$.

Подобная теорема может быть получена и для L и (гр), рассмотренных в конце п. 2. Формулировать результаты мы не будем.

4. Поведение спектрального ядра при x и y, одновременно стремящихся к границе. Этот вопрос, естественно, не может быть исследован подходом п. 2. Методика п. 3 даже в случае сильно эллиптического L непосредственно также неприменима, так как дело сводится к исследованию функции $\Phi(x,\ y;\ \lambda)$ как функции точки $(x,\ y)$ вблизи $\Gamma_1\times\Gamma_2$ — негладкой части границы области $G_1\times G_2$. Вместе с тем вопрос достаточно важен — для ряда задач нужно гарантировать хотя бы непрерывность $\Phi(x,\ y;\ \lambda)$ при $x,\ y\to\Gamma$. Сейчас будет изложен один прием, позволяющий провести подобное изучение. Мы ограничимся случаем, когда G — внешность некоторой замкнутой достаточно гладкой поверхности Γ. Рассуждения будут проводиться для сильно эллиптических L и нулевых (гр), однако в такой форме, что их легко обобщить на другие L и (гр), для которых справедливы теоремы п. 12, § 6, гл. III, о повышении гладкости.

Рассмотрим формально самосопряженное эллиптическое выражение L порядка $r=2m$ с коэффициентами $a_\alpha(x)\in C^{2Nr+p'}(G\cup\Gamma)$ $(p'\geqslant n+1)$, где $Nr>\frac{n}{2}$. Предположим, что L и Γ таковы, что выполнено следующее утверждение о повышении гладкости: пусть произвольная ограниченная область $G_0'\subseteq G$ примыкает к Γ по куску Γ_0'. Из того, что $u\in W_2^{-q}(G_0')$ удовлетворяет уравнению $(L-zE)u=f\in W_2^q(G_0')$ внутри G_0' вплоть до Γ_0', следует: $u\in W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0',\ \Gamma_0')$, $D^\alpha u|_{\Gamma_0'}=0$ $(|\alpha|\leqslant m-1)$. Здесь $q=0,\ \ldots,\ (N-1)r$; z — произвольное комплексное число. Рассмотрим некоторое самосопряженное расширение A в $L_2(G)$ оператора Λ(гр), пусть R_z — его резольвента. Как вытекает из теорем 1.1 и 1.2, всякая $u\in\mathfrak{D}(A)$ входит на любой ограниченной части G в W_2^r и удовлетворяет (гр), при этом $Au=Lu$. Наоборот, всякая u подобного вида, финитная на ∞, входит в $\mathfrak{D}(A)$.

Зафиксируем невещественное z и введем оператор $R=R_z^N$. Очевидно, к R и $L_1=\ldots=L_N=L-zE$ применима теорема 5.7, гл. III. Пусть $R(x,\ y)$ $(x,\ y\in G)$ — ядро оператора R. Так как теперь в теореме 5.7 G_0' — произвольная ограниченная подобласть G, то вектор-функция от y со значениями в $L_2(G)$ $R(\cdot,\ y)$ слабо непрерывно дифференцируема до порядка $Nr-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ включительно для любого $y\in G\cup\Gamma$.

Далее, согласно лемме 5.4, гл. III, при $f\in L_2(G)$ $Rf\in W_2^{Nr}(G_0')$; опять благодаря произвольности G_0' Rf входит в W_2^{Nr} на любой ограниченной части G. Согласно (5.15), гл. III,

$$(Rf)(x)=\int_G R(x, y)f(y)\,dy \quad (f\in L_2(G));$$

при $j=0, \ldots, N$ имеем

$$(L-zE)_x^j\int_G R(x, y)f(y)\,dy=(L-zE)_x^j(Rf)(x)=$$
$$=(L-zE)_x^{j-1}((A-zE)R_zR_z^{N-1}f)(x)=(L-zE)_x^{j-1}(R_z^{N-1}f)(x)=$$
$$=\ldots=(R_z^{N-j}f)(x). \tag{2.15}$$

Очевидно, функция (2.15) при $j<N$ входит на любой ограниченной части G в $W_2^{(N-j)r}$ и удовлетворяет (гр), а при $j=N$ она равна $f(x)$.

Обозначим U некоторую ограниченную подобласть области G, примыкающую ко всей границе Γ («полоска» вблизи Γ). Пусть $h(x)\in C^\infty(G\cup\Gamma)$ неотрицательна, равна 1 в U и аннулируется при $|x|\geqslant d$, где $d>0$ достаточно большое фиксированное число. Покажем, что *для каждой функции* $u\in C_0(U)$ *(продолженной нулем на все* G*) справедливо представление*

$$u(x)=\int_G (L-zE)_x^N[R(x, y)(1-h(x))]u(y)\,dy+$$
$$+(L-zE)_x^N\int_G R(x, y)h(x)u(y)\,dy \quad (x\in G). \tag{2.16}$$

В самом деле, убедимся, что выражения в (2.16) имеют смысл. В первом интеграле фактически y изменяется в подобласти, расположенной строго внутри U, а $1-h(x)$ отлична от нуля лишь вне U. Поэтому особенность ядра $R(x, y)$ при $x=y$ исключена и применение $(L-zE)_x^N$ законно. Второй интеграл, как следует из гладкости интеграла $\int_G R(x, y)u(y)\,dy$, также достаточно гладкий. После этих замечаний можем написать, учитывая (2.15), при $j=N$:

$$\int_G (L-zE)_x^N[R(x, y)(1-h(x))]u(y)\,dy+(L-zE)_x^N\times$$
$$\times\int_G R(x, y)h(x)u(y)\,dy=(L-zE)_x^N\int_G R(x, y)u(y)\,dy=u(x) \quad (x\in G).$$

Обозначим

$$A_1(x, y) = (L - zE)_x^N [R(x, y)(1 - h(x))], \qquad A_2(x, y) = R(x, y) h(x)$$
$$(x \in G,\ y \in U). \tag{2.17}$$

Сразу заметим, что эти функции аннулируются при $|x| \geqslant d$. Для A_2 это очевидно, для A_1—следует из соотношения (5.2), гл. III: так как $h(x) = 0$, то $A_1(x, y) = (L - zE)_x^N R(x, y) = 0$.

Пусть $\varphi(x) \in W_{2,\text{лок}}^r(G, \Gamma)$ *удовлетворяет* (гр) *и является собственной функцией:* $(L\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)\ (x \in G)$. *Обозначим* G_d *пересечение* G *с шаром* $|x| < d$. *Справедливо представление:*

$$\varphi(y) = \int_{G_d} \overline{(A_1(x, y) + (\lambda - \bar z)^N A_2(x, y))}\, \varphi(x)\, dx \quad (y \in U). \tag{2.18}$$

Действительно, пусть $u \in C_0(U)$. Имеем, учитывая (2.16),

$$\int_G \int_G A_1(x, y) \overline{\varphi(x)} u(y)\, dx dy + (\lambda - z)^N \int_G \int_G A_2(x, y) \overline{\varphi(x)} u(y)\, dx dy =$$
$$= \int_G \int_G A_1 \ldots + (\lambda - z)^{N-1} \int_G \left(\int_G A_2(x, y) u(y)\, dy \right) \overline{((L - \bar z E)\varphi)(x)}\, dx =$$
$$= \int_G \int_G A_1 \ldots + (\lambda - z)^{N-2} \int_G (L - zE)_x \left(\int_G A_2(x, y) u(y)\, dy \right) \times$$
$$\times \overline{((L - \bar z E)\varphi)(x)}\, dx = \ldots = \int_G \int_G A_1 \ldots +$$
$$+ \int_G (L - zE)_x^N \left(\int_G A_2(x, y) u(y)\, dy \right) \cdot \overline{\varphi(x)}\, dx = \int_G \left(\int_G A_1(x, y) u(y)\, dy + \right.$$
$$\left. + (L - zE)_x^N \int_G A_2(x, y) u(y)\, dy \right) \overline{\varphi(x)}\, dx = \int_G u(x) \overline{\varphi(x)}\, dx. \tag{2.19}$$

Поясним, что выше мы на каждом шагу перебрасывали $L - \bar z E$ с φ на

$$(L - zE)_x^j \left(\int_G A_2(x, y) u(y)\, dy \right) = (L - zE)_x^j \left[h(x) \int_G R(x, y) u(y)\, dy \right]$$
$$(j = 0, \ldots, N - 1). \tag{2.20}$$

Эта операция законна, так как φ и каждый из интегралов (2.20) достаточно гладок и удовлетворяет (гр) — последнее на основании (2.15) и того, что $h(x)=1$ вблизи Γ. Благодаря произвольности u из (2.19) вытекает (2.18).

Рассмотрим спектральное ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ нашей задачи, будем считать, что оно по каждому переменному входит в $W^r_{2,\text{лок}}(G, \Gamma)$ и удовлетворяет (гр). Так как $L_x\Phi=\lambda\Phi$, $L_y\overline{\Phi}=\lambda\overline{\Phi}$ (см. (2.8)), то, используя по каждому из переменных равенство (2.18) и аналогичное равенство для $\overline{\varphi}$, найдем

$$\Phi(x, y; \lambda)=\int_{G_d}\int_{G_d}\overline{(A_1(\xi, x)+(\lambda-\bar{z})^N\overline{A_2(\xi, x)})}(A_1(\eta, y)+$$

$$+(\lambda-z)^N A_2(\eta, y))\,\Phi(\xi, \eta; \lambda)\,d\xi d\eta \qquad (2.21)$$

$$(x, y\in U).$$

Полученное представление (2.21) дает подход к исследованию гладкости $\Phi(x, y; \lambda)$ вплоть до $x, y\in\Gamma$: в нем это ядро выражается через ядра (2.17), если удастся доказать их достаточную регулярность, то регулярным будет и Φ.

Из слабой дифференцируемости $R(\cdot, y)$ как вектор-функции со значениями в $L_2(G)$ и равенства $A_2(x, y)=h(x)R(x, y)$ $(h(x)=0$ при $|x|\geqslant d)$ вытекает, что вектор-функция $A_2(\cdot, y)$ со значениями в $L_2(G_d)$ слабо непрерывно дифференцируема до порядка $Nr-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ при $y\in U\cup\Gamma$.

Установим такую же гладкость и $A_1(\cdot, y)$. Зафиксируем $y\in U$, так как $1-h(x)=0$ $(x\in U)$, то в выражении (2.17) для $A_1(x, y)$ особенность исключена и поэтому $A_1(x, y)$ как функция от $x\in G$ — достаточно гладкая, аннулирующаяся при $x\in U$ и $|x|\geqslant d$. Следовательно, для $g\in L_2(G_d)$ интеграл $\int_{G_d} A_1(x, y)\overline{g(x)}\,dx=(A_1(\cdot, y), g)_{L_2(G_d)}$ существует. Покажем, что он входит в $L_2(U)$. Действительно, пусть $u\in C_0(U)$, тогда благодаря оценке $\|Rf\|_{W_2^{Nr}(G_d)}\leqslant C_1\|f\|_{L_2(G)}$ $(f\in L_2(G))$, вытекающей из (5.30), гл. III, имеем

$$\left|\int_U (A_1(\cdot, y), g)_{L_2(G_d)}u(y)\,dy\right|=\left|\int_{G_d}\overline{g(x)}\,(L-zE)_x^N\,[(Ru)(x)(1-h(x))]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|g\|_{L_2(G_d)}\,\|(L-zE)_x^N\,[(Ru)(x)(1-h(x))]\|_{L_2(G_d)}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\|g\|_{L_2(G_d)}\,\|Ru\|_{W_2^{Nr}(G_d)}\leqslant C_1C_2\|g\|_{L_2(G_d)}\,\|u\|_{L_2(G)}=$$

$$= C_1 C_2 \| g \|_{L_2(G_d)} \| u \|_{L_2(U)}, \tag{2.22}$$

откуда и следует утверждение.

Итак, вектор-функция $A_1(\cdot, y)$ $(y \in U)$ со значениями в $L_2(G_d)$ такова, что для любой $g \in L_2(G_d)$ $(A_1(\cdot, y), g)_{L_2(G_d)} \in L_2(U)$. Нашей целью будет доказательство того, что $(A_1(\cdot, y), g)_{L_2(G_d)} \in W_2^{Nr}(U')$, где $U' \subset U$ — некоторая меньшая полоска вблизи Г. На основании теорем вложения отсюда будет следовать, что $(A_1(\cdot, y), g)_{L_2(G_d)} \in C^{Nr - \left[\frac{n}{2}\right] - 1}(U')$, т. е. требуемая гладкость вектор-функции $A_1(\cdot, y)$.

Покажем, что $\psi(y) = \overline{(A_1(\cdot, y), g)}_{L_2(G_d)}$ является обобщенным решением из $L_2(U)$ уравнения $(L - \bar{z}E)^N u = 0$ внутри U вплоть до Г. При этом на границе $\Gamma \cup \gamma$ полоски U задаются (гр)$_1$, определяемые по (гр) следующим образом (см. стр. 216): W_2^{Nr}(гр)$_1$ состоит из всех функций $u \in W_2^{Nr}(U)$, для которых $(L - zE)^j u \in W_2^r(\text{гр}) \cap W_2^r(U)$ $(j = 0, \ldots, N - 1)$. Очевидно, (гр)$_1^+$ на Г имеют прежний вид. Итак, для $v \in W_2^{Nr}$(гр)$_1$, аннулирующейся в окрестности γ и продолженной нулем на G, имеем

$$(\psi, (L - zE)^N v)_{L_2(U)} = \int_U \left(\int_{G_d} \overline{(L - zE)_x^N [R(x, y)(1 - h(x))] g(x)\, dx} \right) \times$$

$$\times \overline{((L - zE)^N v)(y)}\, dy =$$

$$= \int_{G_d} g(x) \overline{(L - zE)_x^N \left[(1 - h(x)) \int_G R(x, y)((L - zE)^N v)(y)\, dy \right]} dx =$$

$$= \int_{G_d} g(x) \overline{(L - zE)_x^N [(1 - h(x))(R(L - zE)^N v)(x)]}\, dx =$$

$$= \int_{G_d} g(x) \overline{(L - zE)_x^N [(1 - h(x))(R_z^N (A - zE)^N v)(x)]}\, dx =$$

$$= \int_{G_d} g(x) \overline{(L - zE)_x^N [(1 - h(x)) v(x)]}\, dx = 0.$$

Поясним, что выше менялся порядок интегрирования в выражении $\int_U \left(\int_{G_d} \overline{A_1(x, y)}\, g(x)\, dx \right) f(y)\, dy$ $(f \in L_2(U),\ g \in L_2(G_d))$; законность этой перемены легко следует из оценки (2.22). Далее, так как все

$(L-zE)^j v \in \mathfrak{D}(A)$ $(j=0, \ldots, N-1)$, то действительно $(L-zE)^N v = (A-zE)^N v$.

Теперь требуемая гладкость $A_1(\cdot, y)$ вытекает из следующей общей леммы.

Лемма 2.4. *Пусть некоторое* $\psi \in L_2(U)$ *является обобщенным решением уравнения* $(L-\bar{z}E)^N u = 0$ *внутри* U *вплоть до* Γ, *где заданы определенные выше* (гр)$_1$. *Тогда* $\psi \in W_2^{Nr}(U')$ $(U' \subset U$ *— полоска вблизи* Γ), *причем* ψ *на* Γ *удовлетворяет* (гр)$_1$.

Доказательство. Для любой $v \in W_2^{Nr}$ (гр)$_1$, аннулирующейся в окрестности $G \setminus U$, имеем $(\psi, (L-zE)^N v)_{L_2(U)} = 0$. При $f \in L_2(G)$ функция $Rf = R_z^N f$, очевидно, удовлетворяет (гр)$_1$ на Γ, поэтому выше можно положить $v(x) = \chi(x)(Rf)(x)$, где $\chi \in C^\infty(G \cup \Gamma)$, равна 1 вблизи Γ, 0 — в окрестности $G \setminus U$ и неотрицательна. Получим

$$0 = (\psi, (L-zE)^N(\chi Rf))_{L_2(U)} = (\psi, \chi(L-zE)^N Rf)_{L_2(U)} + \\ + (\psi, M_\chi Rf)_{L_2(U)} = (\chi\psi, f)_{L_2(U)} + (\psi, M_\chi Rf)_{L_2(U)}. \tag{2.23}$$

Здесь M_χ — дифференциальное выражение порядка $Nr-1$, получившееся от пронесения χ сквозь $(L-zE)^N$. Положим в (2.23) $f = (L-zE)w$, где $w \in W_2^r(U)$ аннулируется в окрестности $G \setminus U$, удовлетворяет (гр) на Γ и продолжена нулем на G. Получим:

$$0 = (\chi\psi, (L-zE)w)_{L_2(U)} + (\psi, M_\chi R_z^{N-1} w)_{L_2(U)}. \tag{2.24}$$

Рассмотрим подпространство H пространства $W_2^{r-1}(U)$, состоящее из функций u таких, что $D^\alpha u|_\gamma = 0$ $(|\alpha| \leqslant r-2)$. Продолжим эти функции нулем на все G, каждая из продолженных u будет входить в $W_2^{r-1}(G) \cap L_2(G)$. Подобно тому, как доказана лемма 5.4, гл. III, легко установить, что $R_z^{N-1} u \in W_2^{(N-1)r+r-1}(U) = W_2^{Nr-1}(U)$. Отображение $H \ni u \to R_z^{N-1} u \in W_2^{Nr-1}(U)$ определено на полном пространстве H и замкнуто, поэтому оно непрерывно (ср. с доказательством леммы 5.2, гл. III): $\| R_z^{N-1} u \|_{W_2^{Nr-1}(U)} \leqslant C \| u \|_{W_2^{r-1}(U)}$ $(u \in H)$. Но тогда непрерывен и оператор B, действующий из H в $L_2(U)$ по закону: $Bu = M_\chi R_z^{N-1} u$. Пусть $\widetilde{B}$ — некоторое расширение B до непрерывного оператора из всего $W_2^{r-1}(U)$ в $L_2(U)$, $\widetilde{B}^+$ действует из $L_2(U)$ в $W_2^{-(r-1)}(U)$, причем

$$(\widetilde{B}^+ f, u)_{L_2(U)} = (f, \widetilde{B}u)_{L_2(U)} = (f, Bu)_{L_2(U)} = (f, M_\chi R_z^{N-1} u)_{L_2(U)} \\ (f \in L_2(U),\ u \in H).$$

В частности, полагая $\alpha = -\widetilde{B}^{+}\psi \in W_2^{-r+1}(U)$ и $u = w$, можем переписать (2.24) в виде

$$(\chi\psi, (L - zE)\,w)_{L_2(U)} = (\alpha, w)_{L_2(U)}. \tag{2.25}$$

Соотношение (2.25) означает, что $\chi\psi \in L_2(U)$ удовлетворяет уравнению $(L - zE)\,u = \alpha \in W_2^{-r+1}(U)$ внутри U вплоть до Γ, где заданы нулевые (гр). Согласно теореме 4.6, гл. III, $\chi\psi \in W_2^1(U)$ и $\chi\psi|_{\Gamma \cup \gamma} = 0$ *. В частности, $\psi \in W_2^1(U_1)$, где $U_1 \subset U$—несколько более узкая полоска вблизи Γ, и $\psi|_{\Gamma} = 0$.

Запишем равенство (2.23) с новой $\chi = \chi_1$, аннулирующейся не в окрестности $G \setminus U$, а в окрестности $G \setminus U_1$:

$$0 = (\chi_1\psi, f)_{L_2(U_1)} + (\psi, M_{\chi_1}Rf)_{L_2(U_1)} = (\chi_1\psi, f)_{L_2(U_1)} + (\psi_1, M_{\chi_1}^{(1)}Rf)_{L_2(U_1)}. \tag{2.26}$$

Выше мы выделили некоторые первые производные в M_{χ_1} и перебросили их на ψ. Такая переброска законна, так как $\psi \in W_2^1(U_1)$, $\psi|_{\Gamma} = 0$ и χ_1, входящее коэффициентом в M_{χ_1}, аннулируется в окрестности $G \setminus U_1$. Производя достаточное количество перебросок, можно добиться, что от M_{χ_1} останется указанное в (2.26) выражение $M_{\chi_1}^{(1)}$ порядка $r - 2$; продифференцированное ψ обозначаем $\psi_1 \in L_2(U_1)$.

Теперь опять можно повторить проведенное ранее рассуждение, исходя вместо (2.23) из (2.26). Мы придем к соотношению типа (2.25), но с $\alpha \in W_2^{-r+2}(U_1)$, потому что $M_{\chi_1}^{(1)}$ порядка $r - 2$. При помощи теоремы 4.6, гл. III, найдем, что $\psi \in W_2^2(U_2)$, $U_2 \subset U_1$. Опять переходим от (2.23) к (2.26), снимая с M_{χ_2} уже производные второго порядка; полученное $M_{\chi_2}^{(2)}$ будет порядка $r - 3$. Повторяя рассуждения, получим, что $\psi \in W_2^3(U_3)$, $U_3 \subset U_2$. Продолжая этот процесс, в результате найдем, что $\psi \in W_2^r(U_r)$ $(U_r \subset U_{r-1} \subset \ldots \subset U_1 \subset U)$ и удовлетворяет (гр) на Γ.

В начале доказательства мы имели: $(\psi, (L - zE)^N v)_{L_2(U)} = 0$ для любой $v \in W_2^{Nr}(\text{гр})_1$, аннулирующейся в окрестностях $G \setminus U$. Ясно, что выше можно заменить U на U_r. Затем перебросим $L - zE$ на ψ — в силу свойств ψ это законно. Получим: $((L - zE)\,\psi,$

---

* До сих пор мы применяли утверждение о повышении гладкости, сформулированное на стр. 411. Сейчас и ниже применяются более тонкие факты. Это нужно иметь в виду при перенесении результатов иа общие (гр).

$(L-zE)^{N-1}v)_{L_2(U_r)}=0$ для любой $v\in W_2^{(N-1)r}(\text{гр})_1$, аннулирующейся в окрестностях $G\setminus U_r$. Повторяя проведенное доказательство с заменой ψ на $(L-zE)\psi\in L_2(U_r)$, найдем: $(L-zE)\psi\in W_2^r(U_{2r})$ $(U_{2r}\subset U_{2r-1}\subset\ldots\subset U_{r+1}\subset U_r)$ и удовлетворяет (гр) на Г. Продолжая процесс переброски $L-zE$, очевидно, придем к доказательству леммы.

Итак, требуемая гладкость $A_1(\cdot,y)$ установлена. Из гладкости $A_1(\cdot,y)$ и $A_2(\cdot,y)$ вытекает, что вектор-функция от $y\in U\cup\Gamma$ со значениями в $L_2(G_d)$ $g_y=A_1(\cdot,y)+(\lambda-z)^N A_2(\cdot,y)$ будет слабо непрерывно дифференцируема до порядка $Nr-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ включительно. Такую же гладкость будет иметь и вектор-функция $f_x=\overline{A_1(\cdot,x)}+(\lambda-\bar z)^N\overline{A_2(\cdot,x)}=\bar g_x$ $(x\in U\cup\Gamma)$.

Лемма 2.5. *Пусть H — некоторое гильбертово пространство, G — область (или область с частью границы) из E_n, f_x и g_x слабо непрерывно дифференцируемые вектор-функции от $x\in G$ со значениями в H (существуют и непрерывны производные $D^\alpha f_x$, $D^\alpha g_x$, $|\alpha|\leqslant k$). Тогда $f_x\otimes g_y$ будет слабо непрерывно дифференцируемая вектор-функция от $(x,y)\in G\times G$ со значениями в $H\otimes H$ — существуют и непрерывны производные $D_x^\alpha D_y^\beta(f_x\otimes g_y)$, где $|\alpha|$, $|\beta|\leqslant k$.*

Доказательство. Так как $D_x^\alpha D_y^\beta(f_x\otimes g_y)=(D_x^\alpha f_x)\otimes(D_y^\beta g_y)$, то все сводится к доказательству непрерывности вектор-функции $f_x\otimes g_y$, если f_x и g_y непрерывны. На элементах вида $\sum_{j=1}^N u_j\otimes v_j\in H\otimes H$ имеем:

$$\left(f_x\otimes g_y,\sum_{j=1}^N u_j\otimes v_j\right)_{H\otimes H}=\sum_{j=1}^N (f_x,u_j)_H(g_y,v_j)_H,$$

последнее выражение, очевидно, непрерывно зависит от $(x,y)\in G\times G$. Так как суммы $\sum_{j=1}^N u_j\otimes v_j$ плотны в $H\otimes H$, то для доказательства непрерывности $f_x\otimes g_y$ осталось заметить, что эта вектор-функция в силу равенства $\|f_x\otimes g_y\|_{H\otimes H}=\|f_x\|_H\|g_y\|_H$ ограничена на каждом компакте из $G\times G$. Лемма доказана.

Эта лемма немедленно применяется к нашему случаю: согласно теореме 2.3 функция $\Phi(x,y;\lambda)$ от (x,y) интегрируема с квадратом в каждой ограниченной части $G\times G$, в частности, $\overline{\Phi(\cdot,\cdot;\lambda)}\in L_2(G_d\times G_d)=L_2(G_d)\otimes L_2(G_d)$. Поэтому, учитывая указанную гладкость $g_y=A_1(\cdot,y)+(\lambda-z)^N A_2(\cdot,y)$ и $f_x=\bar g_x$ и представление (2.21), заключаем, что производные $(D_x^\alpha D_y^\beta \Phi)(x, y; \lambda)$ $\left(|\alpha|, |\beta| \leqslant Nr - \left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)$ существуют и непрерывны по $(x, y) \in (U \cup \Gamma) \times (U \cup \Gamma)$, а значит и по $(x, y) \in (G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma)$. Мы, по существу, пришли к следующей теореме.

Теорема 2.6. *Пусть Γ—замкнутая поверхность класса C^{2m+q} $\left(q \geqslant m, \frac{n}{2}\right)$, G — внешность этой поверхности. Предположим, что выполнены условия теорем 2.1 и 2.3 во всей области G.*

В этом случае существуют и непрерывны по $(x, y) \in (G \cup \Gamma) \times \times (G \cup \Gamma)$ все производные вида $(D_x^\alpha D_y^\beta \Phi)(x, y; \lambda)$, где

$$|\alpha|, |\beta| \leqslant r\left\{\min\left(\left[\frac{q}{r}\right], \left[\frac{p-1}{2r}\right]\right) + 1\right\} - \left[\frac{n}{2}\right] - 1 = M(r, n, p, q) \geqslant 0.$$

Разложение (2.10) сходится абсолютно и равномерно в каждой ограниченной части $G \times G$, причем его можно почленно дифференцировать без нарушения этой сходимости; именно, брать указанные только что производные.

Доказательство теоремы сводится к некоторой детализации проведенных рассуждений. Положим в них $N = \min\left(\left[\frac{q}{r}\right], \left[\frac{p-1}{2r}\right]\right) + 1$ и покажем, что такой выбор законен. По предположению теоремы 2.1 $a_\alpha \in C^{2r+n+p}(G \cup \Gamma)$ $(p \geqslant n+1)$, но $2r+n+p \geqslant \geqslant 2\left(\left[\frac{p-1}{2r}\right] + 1\right)r + n + 1$, поэтому $2r + n + p = 2Nr + p'$ $(p' \geqslant n+1)$, т. е. a_α имеют требуемую на стр. 211 гладкость. Далее, для справедливости необходимого для теоремы 5.7, гл. III, утверждения о повышении гладкости в случае нулевых (гр) достаточно требовать, чтобы $2m + q = r + q \geqslant Nr$ (см. следствие 2 этой теоремы). Но $r + q \geqslant \left(\left[\frac{q}{r}\right] + 1\right) r$ и, следовательно, это условие выполняется. Наконец, так как $p \geqslant n+1$ и $q \geqslant \frac{n}{2}$, то легко убедиться, что $Nr \geqslant \frac{n}{2}$. Все это показывает, что сделанный выбор N допустим. Последнее утверждение теоремы — о дифференцируемости разложения (2.10) — вытекает из доказанной дифференцируемости $\Phi(x, y; \lambda)$ и леммы 2.3, если только заметить, что эта лемма справедлива и в случае, когда G заменена на $G \cup \Gamma$. Теорема полностью доказана.

Следствие. Пусть предположения теоремы таковы, что $M(r, n, p, q) \geqslant m - 1$. Тогда выполнено граничное условие вида:

$$(D_x^\alpha D_y^\beta \Phi)(x, y; \lambda)\big|_{x,y \in \Gamma} = 0 \quad (|\alpha|, |\beta| \leqslant m-1). \tag{2.27}$$

В самом деле, согласно (2.14), имеем: $(D_y^\beta \Phi)(x, y; \lambda)\big|_{y \in \Gamma} = 0$ при $x \in G$ и $|\beta| \leqslant m-1$. Это равенство можно продифференцировать по x внутри G: $(D_x^\alpha D_y^\beta \Phi)(x, y; \lambda)\big|_{y \in \Gamma} = 0$ $(x \in G)$. Переходя здесь к пределу при $x \to \Gamma$ — этот переход обеспечивается доказанной теоремой — получим (2.27).

Из доказательства видно, что теорема 2.6 справедлива для широкого класса (гр). Ее общую формулировку мы предоставляем читателю, а сейчас лишь приведем ее для условий типа третьей краевой задачи и $n = 2{,}3$ $(r = 2)$. В этом случае роль теорем 2.1 и 2.3 играет теорема 2.4, а вместо теоремы 4.6, гл. III, следует пользоваться теоремой 4.7 этой же главы. Повышение гладкости, упомянутое в сноске на стр. 417, будет обеспечено. Теперь $N = 1$, $Nr - \left[\frac{n}{2}\right] - 1 = 0$ и соответствующий результат выглядит так. *Пусть выполнены предположения теоремы 2.4, причем* $G_0 = G$. *Тогда* $\Phi(x, y; \lambda)$ *непрерывна относительно* $(x, y) \in (G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma)$ *и разложение* (2.10) *сходится абсолютно и равномерно в каждой ограниченной части* $G \times G$. Для большей гладкости Φ и справедливости соотношения типа (2.27) нужно потребовать большую гладкость Γ, коэффициентов L и $\sigma(x)$.

В заключение сделаем следующее замечание. Пусть $F(\lambda)$ такая, как в теореме 2.1. Тогда $F(A)$ существует и является интегральным оператором с ядром (2.9). Умножая (2.21) на $F(\lambda)$ и интегрируя по $d\varrho(\lambda)$, получим

$$K(x, y) = \int\limits_{G_d}\int\limits_{G_d} \overline{(A_1(\xi, x)} + (\lambda - \bar{z})^N \overline{A_2(\xi, x)})(A_1(\eta, y) +$$
$$+ (\lambda - z)^N A_2(\eta, y)) K(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \qquad (x, y \in U).$$

Отсюда, как и выше, можно сделать заключения о гладкости $K(x, y)$ как функции точки (x, y) (внутри $G \times G$ и вплоть до границы). Формулировки мы предоставляем читателю.

5. Другое построение спектральной теории самосопряженных эллиптических операторов. Пусть имеется такая же ситуация, как и в п. 1: по формально самосопряженному эллиптическому выражению L и (гр) $=$ (гр)$^+$ построен оператор A — некоторое самосопряженное расширение Λ(гр). Строить разложение по обобщенным собственным функциям A можно при помощи общих конструкций

§ 3, гл. V. Так, можно задать $l > \frac{n}{2}$ и в качестве цепочки $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ принять $W_2^{-(l,q)}(G) \supseteq L_2(G) \supseteq W_2^{(l,q)}(G)$, где $q(x) \geqslant 1$ настолько быстро растет при $|x| \to \infty$, что вложение $W_2^{(l,q)}(G) \to L_2(G)$ квазиядерно. Для A мы получим существование оператора $P(\lambda)$, полного набора обобщенных собственных функций из $W_2^{-(l,q)}(G)$ и т. д.

Предположим, что коэффициенты L $a_\alpha \in C^{|\alpha|+l}(G \cup \Gamma)$. В этом случае каждый вектор $\varphi \in \mathfrak{R}(P(\lambda)) \subseteq W_2^{-(l,q)}(G)$ можно истолковывать как обобщенное решение уравнения $Lu - \lambda u = 0$ с (гр) на Г. Действительно, теперь A допускает продолжение оснащения. В качестве Д можно выбрать $W_2^r(\text{гр}) \cap W_{2,0}^{r+l}(E_n)$; топологию можно определить, например, следующим образом: $v_n \to 0$, если носители v_n расположены в общем шаре U и $v_n \to 0$ в $W_2^{r+l}(G \cap U)$ Согласно лемме 2.1, гл. V, φ удовлетворяет соотношению

$$(\varphi, (A - \lambda E) v)_0 = 0, \quad \text{т. е.} \quad (\varphi, (L - \lambda E) v)_0 = 0 \; (v \in W_2^r(\text{гр}) \cap W_{2,0}^{r+l}(E_n)). \tag{2.28}$$

Иными словами, (2.28) показывает, что φ является обобщенным решением уравнения $Lu - \lambda u = 0$ вплоть до Г, входящим в $W_{2,\text{лок}}^{-l}(G, \Gamma)$ (дополнительно нужно предполагать плотность $W_2^r(\text{гр}) \cap W_{2,0}^{r+l}(E_n)$ среди функций $W_2^r(\text{гр}) \cap W_{2,0}^r(E_n)$ в смысле сходимости: $v_n \to 0$, если носители v_n расположены в общем шаре U и $v_n \to 0$ в $W_2^r(G \cap U)$; см. стр. 220).

Учитывая теоремы о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений, получим, что φ, удовлетворяющая (2.28), является достаточно гладкой функцией. Это показывает, что в соответствующих формулах § 2 и 3, гл. V, вместо обобщенных $\varphi_\alpha(x)$ будут стоять гладкие функции, т. е. мы получим разложения по обычным собственным функциям. Однако для исследования характера сходимости, свойств ядра $\Phi(x, y; \lambda)$ и т. п. высказанные отображения не являются достаточными и нам придется в той или иной форме повторять рассуждения пп. 1—4 и § 4, гл. V — доказывать карлемановость A и делать отсюда соответствующие выводы.

Ясно, что выше можно было бы воспользоваться и другими цепочками $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$, фигурирующими в § 3, гл. V.

6. Случай ограниченной области. Формулировки и доказательства теорем 2.1—2.5 в этом случае несколько упрощаются, не имеет смысла их приводить. Напомним лишь, что спектр теперь дискретный и уходящий на ∞ (см. теоремы 3.5, гл. II и 2.3, 3.5, гл. III). Существенно упрощается доказательство теоремы 2.6, так как теперь не нужно «срезывать» $R(x, y)$ при помощи функции

$h(x)$ — ведь $\Phi(x, y; \lambda)$ сейчас входит во все $L_2(G \times G)$. Равенство (2.16) следует заменить очевидным: $u(x) = (L - zE)^N \int\limits_G R(x, y) u(y) dy$ ($u \in L_2(G)$); основное соотношение (2.21) заменяется представлением

$$\Phi(x, y; \lambda) = |\lambda - z|^{2N} \int\limits_G \int\limits_G \overline{R(\xi, x)}\, R(\eta, y)\, \Phi(\xi, \eta; \lambda)\, d\xi d\eta \quad (x, y \in G).$$

7. Поведение на ∞ собственных функций. Для разложений по собственным функциям самосопряженных эллиптических операторов в неограниченной G справедливы оценки роста, полученные в § 5, гл. V, для общих карлемановских операторов. Так, верны теоремы 5.2 и 5.3 этой главы без всякого уточнения формулировок (поясним, что локальная ограниченность интеграла (4.1), гл. V, в нашем случае всегда имеет место; см. лемму 2.1). Ясно, что теорема 5.4 также верна, причем, поведение функции $C(y)$ на ∞ часто удается изучить. Ниже мы проведем такое изучение для оператора Шредингера, это позволит также для него проверить условия теоремы 5.5, гл. V.

8. Примеры. Мы не будем останавливаться на хорошо известных примерах разложений по собственным функциям в ограниченной области, конструирующихся посредством разделения переменных, и приведем лишь два примера в неограниченной области. Некоторые дополнительные примеры см. также в п. 4, § 4.

а) *Выражение Лапласа в* E_n. Построим спектральную теорию оператора, порожденного выражением

$$L = -\Delta = -D_1^2 - \ldots - D_n^2 \tag{2.29}$$

во всем пространстве E_n ($n \geqslant 2$). Пусть Λ — минимальный оператор, отвечающий (2.29), т. е. замыкание оператора $u \to -\Delta u$ ($u \in C_0^\infty(E_n)$). Как известно (см. теорему 1.5), Λ самосопряжен и его спектр заполняет полуось $[0, \infty)$ — область значений функции $L(\xi) = |\xi|^2$ ($\xi \in E_n$). Прежде всего найдем вид ядра $R(x, y; z)$ резольвенты оператора Λ; его существование следует из сказанного в пп. 1 и 8, § 5, гл. III.

Так как Δ имеет постоянные коэффициенты, то для нахождения $R(x, y; z)$ естественно пользоваться обычным преобразованием Фурье $u(x) \to \tilde{u}(\xi)$. Для $f \in C_0(E_n)$ $R_z f \in L_2(E_n) \cap W^2_{2,\text{лок}}(E_n)$ (см. теорему 1.1) и $((-\Delta - zE) R_z f)(x) = f(x)$ ($x \in E_n$). Отсюда

$$\begin{gathered} (|\xi|^2 - z)\widetilde{(R_z f)}(\xi) = \widetilde{((-\Delta - zE) R_z f)}(\xi) = \tilde{f}(\xi), \\ \widetilde{(R_z f)}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2 - z}\tilde{f}(\xi) \qquad (\xi \in E_n;\ z \overline{\in} [0, \infty)). \end{gathered} \tag{2.30}$$

Поэтому

$$(R_z f)(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int\limits_{E_n} \widetilde{(R_z f)}(\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi = \int\limits_{E_n} R(x-y\,;\,z)\, f(y)\, dy;$$

$$R(x;\, z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \widetilde{\left(\frac{1}{|\xi|^2 - z}\right)}(x) \qquad (x \in E_n;\ z \overline{\in} [0, \infty)).$$

Таким образом,

$$R(x,\, y;\, z) = R(x-y;\, z),\ \ R(x;\, z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{E_n} \frac{e^{i\langle x,\xi\rangle}}{|\xi|^2 - z}\, d\xi \qquad (2.31)$$

$$(x,\, y \in E_n;\ \ z \overline{\in} [0, \infty)).$$

Пусть $n \geqslant 3$. Вычислим последний интеграл, переходя в нем к сферическим координатам $\varrho = |\xi|$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, где угол φ_1 равен углу между векторами ξ и x. Принимая во внимание, что поверхность сферы единичного радиуса в E_q равна $\Omega_q = \dfrac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}$, получим

$$R(x;\ z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i|x|\varrho\cos\varphi_1}}{\varrho^2 - z} \times$$

$$\times\, \varrho^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-2}\, d\varrho\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \frac{e^{i|x|\varrho\cos\varphi_1}}{\varrho^2 - z}\, \varrho^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1\, d\varrho\, d\varphi_1. \qquad (2.32)$$

Но известно, что

$$\int\limits_0^\pi e^{i|x|\varrho\cos\varphi_1} \sin^{n-2}\varphi_1\, d\varphi_1 = 2^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(|x|\varrho)}{(|x|\varrho)^{\frac{n}{2}-1}}; \qquad (2.33)$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\varrho^{\frac{n}{2}}}{\varrho^2 + \zeta} J_{\frac{n}{2}-1}(|x|\varrho)\, d\varrho = (\sqrt{\zeta})^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\zeta}\, |x|),$$

где K_q — цилиндрическая функция мнимого аргумента, $\zeta > 0$*. Аналитически продолжая последнее равенство по ζ, заключаем, что оно справедливо для любого ζ из комплексной плоскости с разрезом вдоль полуоси $(-\infty, 0]$. Сделаем замену $\zeta = -z$, тогда $\sqrt{\zeta} = -i\sqrt{z}$; здесь z меняется в комплексной плоскости с разрезом вдоль $[0, \infty)$, под $\sqrt{z}$ понимается ветвь корня, равная $i\sqrt{\sigma}$ при $z = -\sigma < 0$, т. е. положительная на положительной полуоси.

В результате получим формулу:

$$\int_0^\infty \frac{\varrho^{\frac{n}{2}}}{\varrho^2 - z} J_{\frac{n}{2}-1}(|x|\varrho)\,d\varrho = (-i\sqrt{z})^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(-i\sqrt{z}\,|x|) \tag{2.34}$$

$$(z \bar{\in} [0, \infty)).$$

Подставляя (2.33) и (2.34) в (2.32) и пользуясь (2.31), окончательно найдем:

$$R(x, y; z) = R(x-y; z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(-\frac{i\sqrt{z}}{|x-y|}\right)^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(-i\sqrt{z}\,|x-y|) \tag{2.35}$$

$$(x, y \in E_n;\ z \bar{\in} [0, \infty)).$$

В случае $n = 2$ вычисления производятся аналогично; мы придем к той же формуле (2.35):

$$R(x, y; z) = \frac{1}{2\pi} K_0(-i\sqrt{z}\,|x-y|) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{i}{\sqrt{z}\,|x-y|} + \ldots \tag{2.36}$$

$$(x, y \in E_2;\ z \bar{\in} [0, \infty))$$

(здесь разложение написано при малых $|x-y|$).

Отметим случай $n = 3$. Благодаря равенству $K_{\frac{1}{2}}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2s}}\, e^{-s}$ из (2.35) следует:

---

* См., например, И. М. Рыжик, И. С. Градштейн [1], формула 6.412, 6, стр. 345 и формула 4.412, 2, стр. 260.

$$R(x, y; z) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{i\sqrt{z}|x-y|}}{|x-y|} \quad (x, y \in E_3;\ z \overline{\in} [0, \infty)). \tag{2.37}$$

Зная выражение (2.35) для ядра резольвенты, легко найти спектральное ядро. Для этого мы воспользуемся общей формулой, выражающей разложение единицы E_λ самосопряженного оператора через его резольвенту R_z:

$$E(\Delta) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta + i\varepsilon} (R_z - R_{\bar{z}})\, dz, \tag{2.38}$$

предел понимается в слабом смысле. Пусть $f, g \in C_0(E_n)$, из (2.38) и (2.35) следует

$$(E(\Delta) f, g)_0 = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta + i\varepsilon} ((R_z - R_{\bar{z}}) f, g)_0\, dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta + i\varepsilon} ((R_z - R_z^*) f, g)_0\, dz = \tag{2.39}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Delta + i\varepsilon} \left\{ \int\limits_{E_n} \int\limits_{E_n} \operatorname{Im} R(x, y; z) f(y) \overline{g(x)}\, dx dy \right\} dz.$$

Здесь мы воспользовались тем, что ядром оператора R_z^* будет служить $\overline{R(y, x; z)}$, равное $\overline{R(x, y; z)}$ в силу симметрии относительно x, y функции (2.35).

Благодаря достаточной регулярности ядра (2.35) в (2.39) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Вычислим этот предел. Пользуясь выражением $K_p(s) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi}{2} pi} H_p^{(1)}(is)$ функции K_p через цилиндрическую функцию Ганкеля $H_p^{(1)}$, найдем

$$\operatorname{Im} R(x, y; z) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}-1}} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\sqrt{z}}{|x-y|} \right)^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1} (\sqrt{z}\, |x-y|) \right]$$

$$(x, y \in E_n;\ z \overline{\in} [0, \infty)).$$

При спуске z с верхней полуплоскости на полуось $(-\infty, 0)$ $\operatorname{Im} R(x, y; z)$ будет, очевидно, стремиться к 0; при спуске z к точке

$\lambda \in (0, \infty)$ получим:

$$\lim_{z \to \lambda + i0} \operatorname{Im} R(x, y; z) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}-1}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{|x-y|} \right)^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}-1} (\sqrt{\lambda}|x-y|) \tag{2.40}$$

(напомним, что $H_p^{(1)}(s) = J_p(s) + iN_p(s)$, причем функции $J_p(s)$ и $N_p(s)$ вещественны при $s > 0$). С помощью (2.40) получим из (2.39):

$$(E(\Delta) f, g)_0 = \int\limits_{\Delta \cap (0, \infty)} \left\{ \int\limits_{E_n} \int\limits_{E_n} \Phi(x, y; \lambda) f(y) \overline{g(x)} dx dy \right\} d\lambda \tag{2.41}$$

$$(f, g \in C_0(E_n)),$$

$$\Phi(x, y; \lambda) = \Phi(x-y; \lambda) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{|x-y|} \right)^{\frac{n}{2}-1} \times$$

$$\times J_{\frac{n}{2}-1} (\sqrt{\lambda}|x-y|) \quad (x, y \in E_n;\ \lambda > 0),$$

$$d\varrho(\lambda) = \begin{cases} d\lambda & \text{при } \lambda > 0, \\ 0 & \text{при } \lambda \leqslant 0. \end{cases}$$

В частности, для $n = 3$

$$\Phi(x, y; \lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\sin(\sqrt{\lambda}|x-y|)}{|x-y|} \quad (x, y \in E_3;\ \lambda > 0). \tag{2.42}$$

Заметим, что равенство Парсеваля (2.41) при $\Delta = (-\infty, \infty)$ является по существу равенством Парсеваля при разложении в обычный n-кратный интеграл Фурье, если в последнем перейти к сферическим координатам.

Остановимся на поведении интегралов вида (2.1), где $C(x, y)$ — ядро оператора $\gamma(\Lambda)$; $\gamma(\lambda) = \frac{1}{\lambda^N - z}$, $N = \left[\frac{n}{4}\right] + 1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ (для $n = 2, 3$ $\gamma(\Lambda) = R_z$). Как и выше, получим, что эти ядра зависят от разности: $C(x, y) = C(x-y)$, $C(\cdot) \in L_2(E_n)$. Поэтому рассматриваемые интегралы постоянны. Отсюда следует, что в качестве $p(x)$ в утверждениях п. 1 для нашего случая может быть взята любая функция $p(x) \geqslant 1$ $(x \in E_n)$ такая, что $\int\limits_{E_n} \frac{dx}{p(x)} < \infty$. Например, можно положить $p(x) = (1 + |x|)^{n+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

б) Выражение Шредингера. Оно имеет вид

$$Lu = -\Delta u + c(x) u, \tag{2.43}$$

где $c(x)$ вещественна; ясно, что L формально самосопряжено. Сейчас, конечно, применимы все результаты § 1 и § 2. Детализируем некоторые из них. Пусть Λ — минимальный оператор, порожденный выражением (2.43), рассматриваемым во всем E_n $(n \geqslant 2)$. Применяя общую теорему 1.8, заключаем, что если L полуограничено снизу на $C_0^\infty(E_n)$, то Λ самосопряжен; при этом следует считать $c(x) \in C^{2+\left[\frac{n}{2}\right]}(E_n)$. Во всяком случае при $n = 2, 3$ этот запас гладкости можно несколько понизить, например, считать $c(x) \in C^2(E_n)$. Последнее следует из того, что при таком $c(x)$ можно установить необходимую для доказательства теоремы 1.8 разрешимость задачи Коши для уравнения (1.33), имеющего сейчас вид $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + c(x) u = 0$ (см. следующий пункт).

Далее, полуограниченность L будет заведомо иметь место, если $c(x) \geqslant C > -\infty$ $(x \in E_n)$: $(-\Delta u + c(x)u, u)_0 = -(\Delta u, u)_0 + (c(x)u, u)_0 \geqslant C \| u \|_0^2$ $(u \in C_0^\infty(E_n))$. Поэтому при $c(x) \geqslant C > -\infty$ $(x \in E_n)$ Λ самосопряжен и его спектр расположен на $[C, \infty)$.

Дальнейшая детализация результатов, связанная с оценкой интегралов (2.1), будет проведена в п. 10 после того, как в следующем пункте будут изложены некоторые сведения о гиперболических уравнениях.

9. Некоторые факты относительно гиперболических уравнений. Приведем некоторые формулы для решений гиперболических уравнений, имеющие самостоятельный интерес и полезные при изучении уравнения Шредингера.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$, $t \in (-\infty, \infty)$, $p = (x, t) \in E_n \times (-\infty, \infty)$, $u = u(p)$. Положим

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - D_1^2 u - \ldots - D_n^2 u,$$

$$\Gamma(p, q) = \sqrt{(t-\tau)^2 - (x_1 - y_1)^2 - \ldots - (x_n - y_n)^2} \tag{2.44}$$

$$(p = (x, t),\ q = (y, \tau) \in E_n \times (-\infty, \infty))$$

(т. е. $\Gamma(p, q)$ является лоренцовым расстоянием между точками p и q). Обозначим через K_p внутренность нижней полы конуса $\Gamma^2(p, q) = 0$ $(p = (x, t),\ t > 0)$, ограниченной снизу плоскостью $t = 0$. Для точек $p, q \in E_n \times [0, \infty)$ будем писать $q < p$, если $q \in K_p$ и $q \leqslant p$, если $q \in \overline{K}_p$. Обозначим $\hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})$ класс функций $u(p) \in C(\overline{K}_{p_0})$, для которых при каждом t производные $(D_1^\alpha u)(x, t), \ldots, (D_n^\alpha u)(x, t)$ $(\alpha = 1, 2)$ существуют и входят в $C(\overline{K}_{p_0})$.

Остановимся сперва на случае $n = 2$.

Теорема 2.7. *Пусть $u(x, t) \in C^2(\overline{K}_{p_0})$ — некоторое решение уравнения*

$$\square u - a(x, t)\, u = f(x, t) \quad (a, f \in \hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})); \tag{2.45}$$

здесь $p_0 = (x_0, t_0) \in E_2 \times (0, \infty)$ фиксировано. Тогда решение из класса $C^2(\overline{K}_{p_0})$ возмущенного уравнения

$$\square v - [a(x, t) + \alpha(x, t)]\, v = f(x, t) + \varphi(x, t) \quad (\alpha, \varphi \in \hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})), \tag{2.46}$$

удовлетворяющее условиям $v(x, 0) = u(x, 0)$, $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)(x, 0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x, 0)$ $(|x - x_0| < t_0)$, существует и имеет вид

$$v(p) = u(p) + \int\limits_{q \prec p} T(p, q)\, [\alpha(q)\, u(q) + \varphi(q)]\, dq. \tag{2.47}$$

Здесь ядро $T(p, q)$ таково, что $T(p, q)\, \Gamma(p, q)$ непрерывно относительно (p, q) $(q \leqslant p \leqslant p_0)$. Если при $a' \geqslant 0$

$$a' \leqslant a(p) + \alpha(p) \leqslant a'' \quad (p \leqslant p_0), \tag{2.48}$$

то

$$\sqrt{a'}\, \Omega(\sqrt{a'}\, \Gamma(p, q)) \leqslant T(p, q) \leqslant \sqrt{a''}\, \Omega(\sqrt{a''}\, \Gamma(p, q)) \quad (q < p \leqslant p_0); \tag{2.49}$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{2\pi s} \operatorname{ch} s$$

(выполнение одной из оценок в (2.48) влечет соответствующую оценку (2.49)).

Предварительно установим следующую лемму.

Лемма 2.6. *Если $\mu(p) \in \hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})$, то*

$$g(p) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{q \prec p} \frac{\mu(q)}{\Gamma(p, q)}\, dq \quad (p \leqslant p_0) \tag{2.50}$$

входит в $C^2(\overline{K}_{p_0})$, удовлетворяет уравнению $(\square g)(p) = \mu(p)$ $(p \prec p_0)$ и начальным условиям: $g(x, 0) = 0$, $\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)(x, 0) = 0$ $(|x - x_0| < t_0)$.

Доказательство. Введем цилиндрические координаты с началом в точке $(x, 0)$ $(p = (x, t))$. Тогда $q = (y, \tau) = (y_1, y_2, \tau) = (x_1 + \varrho \cos \varphi, x_2 + \varrho \sin \varphi, \tau)$

и формула (2.50) примет вид

$$g(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left[\int_0^{t-\tau}\frac{\varrho M(x;\varrho,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\varrho^2}}\,d\varrho\right]d\tau, \tag{2.51}$$

$$M(x;\varrho,\tau)=\int_0^{2\pi}\mu(x_1+\varrho\cos\varphi,\,x_2+\varrho\sin\varphi,\,\tau)\,d\varphi;$$

$M(x;\varrho,\tau)$ дважды непрерывно дифференцируема по x_1, x_2 и ϱ.

Установим дифференцируемость $g(x,t)$ по t и вычислим $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$. С этой целью проинтегрируем в (2.51) внутренний интеграл по частям:

$$g(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left[M(x;0,\tau)(t-\tau)+\int_0^{t-\tau}\sqrt{(t-\tau)^2-\varrho^2}\left(\frac{\partial M}{\partial\varrho}\right)(x;\varrho,\tau)\,d\varrho\right]d\tau.$$

Дифференцируя это выражение по t, а затем интегрируя по частям, найдем:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left[M(x;0,\tau)+\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\tau)\left(\frac{\partial M}{\partial\varrho}\right)(x;\varrho,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\varrho^2}}\,d\varrho\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left[M(x;0,\tau)+(t-\tau)\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial\varrho}\right)(x;t-\tau,\tau)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^{t-\tau}\arcsin\frac{\varrho}{t-\tau}\cdot\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\varrho^2}\right)(x;\varrho,\tau)\,d\varrho\right)\right]d\tau. \tag{2.52}$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)(x,t)=\frac{1}{2\pi}M(x;0,t)+\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial\varrho}\right)(x;t-\tau,\tau)-\right.$$

$$\left.-\int_0^{t-\tau}\arcsin\frac{\varrho}{t-\tau}\cdot\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\varrho^2}\right)(x;\varrho,\tau)\,d\varrho+\int_0^{t-\tau}\frac{\varrho\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\varrho^2}\right)(x;\varrho,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\varrho^2}}\,d\varrho\right]d\tau=$$

$$=\mu(p)+\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left[\int_0^{t-\tau}\frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^2-\varrho^2}}\left(\left(\frac{\partial M}{\partial\varrho}\right)(x;\varrho,\tau)+\right.\right.$$

$$+\varrho\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\varrho^2}\right)\Big)(x;\varrho,\tau)\Big)d\varrho\Bigg]d\tau.$$

Дифференцируя выражение (2.51) для M по ϱ, а затем интегрируя по частям, легко найдем, что $\left(\frac{\partial M}{\partial\varrho}\right)(x;\varrho,\tau)+\varrho\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\varrho^2}\right)(x;\varrho,\tau)=\varrho\,((D_1^2+D_2^2)\,M)\,(x;\varrho,\tau)$. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)(x,t)=\mu(\varrho)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\varrho\left(\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2}\right)(x;\varrho,\tau)+\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2}\right)(x;\varrho,\tau)\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\varrho^2}}\,d\varrho\right]d\tau. \tag{2.53}$$

Дифференцируя непосредственно выражение (2.51) для g по x_1 и x_2 и сравнивая результат с (2.53), получим, что $(\square g)(p)=\mu(p)$.

Непрерывность $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$, $D_1^2 g$ и $D_2^2 g$ по $(x,t)\in\overline{K_{p_0}}$ вытекает из найденных выше выражений для этих производных и следующего просто проверяемого общего замечания (ср. с доказательством непрерывности интеграла (2.64)): если $f(x;\varrho,\tau)$ непрерывна по x и ограничена по всем переменным, то

$$\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\varrho f(x;\varrho,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\varrho^2}}\,d\varrho\right]d\tau=F(x,t)\in C(\overline{K}_{p_0}). \tag{2.54}$$

Осталось заметить, что из (2.51) и (2.52) следует: $g(x,0)=0$, $\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)(x,0)=0$ $(|x-x_0|<t_0)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Будем искать решение v в виде

$$v(p)=u(p)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{q\prec p}\frac{\mu(q)}{\Gamma(p,q)}\,dq\qquad(p\prec p_0), \tag{2.55}$$

где функция $\mu\in\hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})$ подлежит определению. Применяя к (2.55) выражение $\square-(a+\alpha)E$ и пользуясь леммой 2.6, получим

$$\square v-(a+\alpha)v=(\square-aE)v-\alpha v=(\square-aE)\left(u+\frac{1}{2\pi}\int\ldots\right)-$$

$$-\alpha u-\frac{\alpha}{2\pi}\int\ldots=f+(\square-aE)\left(\frac{1}{2\pi}\int\ldots\right)-\alpha u-\frac{\alpha}{2\pi}\int\ldots=$$

$$=f(p)+\mu(p)-\alpha(p)\,u(p)-\frac{1}{2\pi}[a(p)+\alpha(p)]\int\limits_{q\prec p}\frac{\mu(q)}{\Gamma(p,q)}\,dq.$$

Следовательно, для того чтобы функция вида (2.55) была решением уравнения (2.46), достаточно взять в качестве $\mu(p)$ решение уравнения

$$\mu(p) = \alpha(p)\,u(p) + \varphi(p) + \frac{1}{2\pi}\,[a(p) + \alpha(p)] \int\limits_{q \prec p} \frac{\mu(q)}{\Gamma(p, q)}\,dq \qquad (p \preccurlyeq p_0), \tag{2.56}$$

являющееся функцией класса $\hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})$. Это уравнение удобно переписать в форме

$$\mu(p) = h(p) + (AB\mu)(p);$$

$$h(p) = \alpha(p)\,u(p) + \varphi(p), \qquad (Ag)(p) = [a(p) + \alpha(p)]\,g(p) = A(p)\,g(p),$$

$$(Bg)(p) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{q \prec p} \frac{g(q)}{\Gamma(p, q)}\,dq \qquad (p \prec p_0). \tag{2.57}$$

Уравнение (2.57) будем рассматривать в пространстве $M(K_{p_0})$ ограниченных функций на K_{p_0} с равномерной нормой $\|\cdot\|$. Формальное его решение имеет вид

$$\mu(p) = \sum_{j=0}^{\infty} ((AB)^j h)(p),$$

$$((AB)^j h)(p) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{s_1 \prec p} \frac{A(p)}{\Gamma(p, s_1)}\,((AB)^{j-1} h)(s_1)\,ds_1 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{s_2 \prec s_1 \prec p} \frac{A(p)\,A(s_1)}{\Gamma(p, s_1)\,\Gamma(s_1, s_2)}\,((AB)^{j-2} h)(s_2)\,ds_2 ds_1 = \ldots =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^j} \iint \cdots \iint\limits_{s_j \prec s_{j-1} \prec \ldots \prec s_2 \prec s_1 \prec p} \frac{A(p)\,A(s_1) \ldots A(s_{j-2})\,A(s_{j-1})}{\Gamma(p, s_1)\,\Gamma(s_1, s_2) \ldots \Gamma(s_{j-2}, s_{j-1})\,\Gamma(s_{j-1}, s_j)} \times$$

$$\times\, h(s_j)\,ds_j ds_{j-1} \ldots ds_2 ds_1 =$$

$$= \int\limits_{s_j \prec p_0} \left[\frac{1}{(2\pi)^j} \int \cdots \int\limits_{s_j \prec s_{j-1} \prec \ldots \prec s_2 \prec s_1 \prec p} \frac{A(p) \ldots A(s_{j-1})}{\Gamma(p, s_1) \ldots \Gamma(s_{j-1}, s_j)}\,ds_{j-1} \ldots ds_1 \right] h(s_j)\,ds_j$$

$$(p \prec p_0;\ j = 1, 2, \ldots). \tag{2.58}$$

Для доказательства сходимости ряда (2.58) воспользуемся следующей формулой (M. Riesz [1], стр. 31—33):

$$\int\limits_{q \prec s \prec p} \Gamma^{\beta-n-1}(p, s)\,\Gamma^{\gamma-n-1}(s, q)\,ds = \frac{C(\beta)\,C(\gamma)}{C(\beta+\gamma)}\,\Gamma^{\beta+\gamma-n-1}(p, q), \tag{2.59}$$

$$C(\beta) = \pi^{\frac{n-1}{2}}\,2^{\beta-1}\,\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-n+1}{2}\right) \qquad (\beta, \gamma > n-1);$$

она выписана для общего случая пространства E_n.

Применяя несколько раз эту формулу при $n=2$, получим

$$\int\limits_{q\prec s_N\prec\ldots\prec s_1\prec p}\cdots\int\frac{ds_1\ldots ds_N}{\Gamma(q,s_N)\ldots\Gamma(s_1,p)}=\frac{(2\pi)^N}{(2N)!}\Gamma^{2N-1}(p,q)\tag{2.60}$$

$$(N=1,2,\ldots).$$

Оценим $\|(AB)^j\|$. Учитывая, что норма интегрального оператора $(Kf)(p)=\int\limits_{q\prec p_0}K(p,q)f(q)\,dq$ в пространстве $M(K_{p_0})$ равна $\sup\limits_{p\prec p_0}\int\limits_{q\prec p_0}|K(p,q)|\,dq$, получим при помощи (2.60):

$$\|(AB)^j\|=\sup_{p\prec p_0}\int\limits_{s_j\prec p_0}\left|\frac{1}{(2\pi)^j}\int\limits_{s_j\prec s_{j-1}\prec\ldots\prec s_1\prec p}\cdots\int\frac{A(p)\ldots A(s_{j-1})}{\Gamma(p,s_1)\ldots\Gamma(s_{j-1},s_j)}ds_{j-1}\ldots ds_1\right|ds_j\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{C}{2\pi}\right)^j\sup_{p\prec p_0}\int\limits_{s_j\prec p_0}\left(\int\limits_{s_j\prec s_{j-1}\prec\ldots\prec s_1\prec p}\cdots\int\frac{ds_{j-1}\ldots ds_1}{\Gamma(p,s_1)\ldots\Gamma(s_{j-1},s_j)}\right)ds_j=$$

$$=\left(\frac{C}{2\pi}\right)^j\sup_{p\prec p_0}\int\limits_{s_j\prec p_0}\left(\frac{(2\pi)^{j-1}}{(2j-2)!}\Gamma^{2j-3}(s_j,p)\right)ds_j\leqslant\frac{C^jC_1^{2j-2}}{2\pi(2j-2)!}\sup_{p\prec p_0}\int\limits_{s_j\prec p_0}\frac{ds_j}{\Gamma(s_j,p)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_2^j}{(2j-2)!}\qquad(j=1,2,\ldots;\ C=\sup_{p\prec p_0}|A(p)|).\tag{2.61}$$

Поэтому ряд (2.58) сходится по норме пространства $M(K_{p_0})$.

Из замечания о непрерывности интеграла (2.54) последовательно заключаем, что ABh, $(AB)^2h$ и т. д. входят в $C(\overline{K}_{p_0})$. Так как ряд (2.58) сходится равномерно, то и $\mu\in C(\overline{K}_{p_0})$. Для доказательства включения $\mu\in\widehat{C}^2(\overline{K}_{p_0})$ нужно установить существование первых и вторых непрерывных производных по x_1 и x_2 от $\mu(x,t)$. Покажем, например, что $D_1^2\mu\in C(\overline{K}_{p_0})$.

Прежде всего заметим, что на достаточно гладких w D_1 и B коммутируют: $D_1Bw=BD_1w$. Действительно, записывая действие B в виде интеграла (2.51), получим:

$$(D_1Bw)(x,t)=D_1\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^{t-\tau}\left(\int\limits_0^{2\pi}w(x_1+\varrho\cos\varphi,x_2+\varrho\sin\varphi,\tau)\,d\varphi\right)\frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{(t-\tau)^2-\varrho^2}}\right]d\tau=$$

$$=\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^{t-\tau}\left(\int\limits_0^{2\pi}(D_1w)(x_1+\varrho\cos\varphi,x_2+\varrho\sin\varphi,\tau)\,d\varphi\right)\frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{(t-\tau)^2-\varrho^2}}\right]d\tau=$$

$$=(BD_1w)(x,t)\qquad((x,t)\leqslant p_0).$$

Будем теперь подсчитывать $D_1(AB)^jw$, пронося D_1 за знаки интегралов.

В результате, очевидно, получим сумму следующих слагаемых: $(AB)^j(D_1w)$ и j выражений вида $\underbrace{(AB)\ldots(AB)}_{j\text{ раз}}w$, в каждом из которых один оператор A заменен оператором умножения на $(D_1A)(x, t)$. Подсчитаем $D_1^2(AB)^jw = D_1(D_1(AB)^jw)$, аналогично пронося D_1 в каждом из указанных $j+1$ слагаемых. Получим сумму $(j+1)^2$ слагаемых вида $\underbrace{(AB)\ldots(AB)}_{j\text{ раз}}w$, в каждом из которых A, A и w или w заменены на D_1A, D_1^2A, D_1w, D_1^2w, причем так, что сумма порядков производных в каждом слагаемом равна 2. Оценивая затем $\|D_1^2(AB)^jw\|$ подобно (2.61), получим:

$$\|D_1^2(AB)^jw\| \leqslant (j+1)^2\frac{C_3^j}{(2j-2)!}(\|w\| + \|D_1w\| + \|D_1^2w\|)$$

$$(j = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $w \in \hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})$, из леммы 2.6 вытекает, что такая гладкость w достаточна для проведенных только что выкладок. Поэтому полученная оценка справедлива при $w=h=\alpha u+\varphi \in \hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})$, а из нее следует, что ряд $\mu(x,t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}((AB)^jh)(x, t)$ можно дважды почленно продифференцировать по x_1 и полученный ряд будет равномерно сходиться при $(x, t) \leqslant p_0$. Каждое слагаемое $D_1^2(AB)^jh$ в силу леммы 2.6 входит в $C(\overline{K}_{p_0})$, поэтому и $D_1^2\mu \in C(\overline{K}_{p_0})$, что и требовалось.

Итак, найденное решение μ уравнения (2.46) входит в класс $\hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})$, поэтому v вида (2.55) действительно удовлетворяет уравнение (2.46) и входит в $C^2(\overline{K}_{p_0})$. Как установлено в лемме 2.6, интеграл (2.50) удовлетворяет нулевым условиям Коши при $t = 0$, поэтому условия Коши для v и u совпадают.

Построим ядро $T(p, q)$. Для этого просуммируем ядра в (2.58):

$$\mu(q) = \sum_{j=0}^{\infty}((AB)^jh)(q) = h(q) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{s_j\prec p_0}\left[\frac{1}{(2\pi)^j}\int\limits_{s_j\prec s_{j-1}\prec\ldots\prec s_1\prec q}\cdots\int\frac{A(q)\ldots A(s_{j-1})}{\Gamma(q, s_1)\ldots\Gamma(s_{j-1}, s_j)}ds_{j-1}\ldots ds_1\right]h(s_j)\,ds_j =$$

$$= h(q) + \int\limits_{s_j\prec p_0}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^j}\int\limits_{s_j\prec s_{j-1}\prec\ldots\prec s_1\prec q}\cdots\int\frac{A(q)\ldots A(s_{j-1})}{\Gamma(q, s_1)\ldots\Gamma(s_{j-1}, s_j)}ds_{j-1}\ldots ds_1\right]h(s_j)\,ds_j. \tag{2.62}$$

Подставляя (2.62) в (2.55), найдем, что v имеет вид (2.47), где положено

$$T(p, s) = \frac{1}{2\pi\Gamma(p, s)} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{j+1}}\int\limits_{s\prec s_j\prec\ldots\prec s_1\prec p}\cdots\int\frac{A(s_1)\ldots A(s_j)}{\Gamma(p, s_1)\ldots\Gamma(s_j, s)}ds_j\ldots ds_1 \tag{2.63}$$

Член f_j с индексом j этого ряда мажорируется по модулю сверху выражением $\frac{1}{(2j)!} C^j\Gamma^{2j-1}(p, s)$ $(C = \sup\limits_{p \prec p_0} |A(p)|)$ (см. формулу (2.60)), поэтому ряд равномерно по $s \prec p \leqslant p_0$ сходится и проводившиеся выше перестановки суммирования и интегрирования законны. Далее, оценка (2.48) приводит к неравенствам $\frac{1}{(2j)!} a'^j\Gamma^{2j-1}(p, s) \leqslant f_j \leqslant \frac{1}{(2j)!} a''^j\Gamma^{2j-1}(p, s)$, суммирование которых дает (2.49).

Нам осталось проверить непрерывность ядра $T(p, q)\,\Gamma(p, q)$ относительно (p, q) $(q \leqslant p \leqslant p_0)$. Из выражения (2.63) для T и равномерной сходимости ряда в нем ясно, что достаточно убедиться в следующем: *пусть $f(p, q, s)$ $(q \leqslant s \leqslant p \leqslant p_0)$ непрерывна по (p, q) и ограничена по всем переменным, тогда интеграл*

$$\int\limits_{q \prec s \prec p} \frac{f(p, q, s)}{\Gamma(p, s)\,\Gamma(s, q)}\, ds = F(p, q) \tag{2.64}$$

непрерывен по (p, q). Доказывается это предельным переходом под знаком интеграла. Такой переход возможен, так как на основании (2.59) имеем при некотором $\delta > 1$ $\left(\text{например, при } \delta = \frac{3}{2}\right)$ равномерно по (p, q) $(q \leqslant p \leqslant p_0)$

$$\int\limits_{q \prec s \prec p} \left| \frac{f(p, q, s)}{\Gamma(p, s)\,\Gamma(s, q)} \right|^{\delta} ds \leqslant C \int\limits_{q \prec s \prec p} \frac{ds}{\Gamma^{\frac{3}{2}}(p, s)\,\Gamma^{\frac{3}{2}}(s, q)} = C_1.$$

Теорема доказана.

Выведем некоторые соотношения для ядра $T(p, q)$ из (2.47). Положим

$$T_{a+\alpha}(p, q) = \begin{cases} T(p, q) & \text{при } q < p, \\ 0 & \text{при } q \,\bar{\in}\, K_p \end{cases} \quad (p, q \in E_2 \times [0, \infty)) \tag{2.65}$$

(ядро $T(p, q)$, как следует из (2.63), зависит лишь от суммы $a(p) + \alpha(p) = A(p)$). Формула (2.47) перепишется в виде

$$v(p) = u(p) + \int\limits_{E_2 \times [0, \infty)} T_{a+\alpha}(p, q)\,[\alpha(q)\,u(q) + \varphi(q)]\,dq \quad (p \leqslant p_0). \tag{2.66}$$

Рассмотрим начальные условия $u(x, 0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x, 0) = 0$ $(|x - x_0| < t_0)$ и положим $a = f = 0$. Тогда (после замены α на a и φ на f) получим: *решение уравнения $\Box u - a(x, t)\,u = f(x, t)$, где $a, f \in \hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})$, удовлетворяющее при $t = 0$ нулевым условиям Коши, существует, входит в $C^2(\overline{K}_{p_0})$ и имеет вид:*

$$u(p) = \int\limits_{E_2 \times [0, \infty)} T_a(p, q)\,f(q)\,dq = \int\limits_{q \prec p} T_a(p, q)\,f(q)\,dq \quad (p \leqslant p_0) \tag{2.67}$$

$$\left(T_0(p, q) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\Gamma(p, q)}, \quad q < p\right).$$

Подставляя (2.67) в (2.66) и полагая $\varphi = 0$, найдем следующее выражение для удовлетворяющего нулевым условиям решения $v \in C^2(\overline{K}_{p_0})$ уравнения (2.46):

$$v(p) = u(p) + \int\limits_{E_2\times[0,\infty)} T_{a+\alpha}(p, s)\,\alpha(s)\,u(s)\,ds = \tag{2.68}$$
$$= \int\limits_{E_2\times[0,\infty)} \left[T_a(p, q) + \int\limits_{E_2\times[0,\infty)} T_{a+\alpha}(p, s)\,\alpha(s)\,T_a(s, q)\,ds\right] f(q)\,dq.$$

С другой стороны, согласно (2.67) получим:

$$v(p) = \int\limits_{E_2\times[0,\infty)} T_{a+\alpha}(p, q)\,f(q)\,dq. \tag{2.69}$$

Благодаря единственности решения задачи Коши правые части в (2.68) и (2.69) совпадают при любом $f \in \hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})$.
Поэтому

$$T_{a+\alpha}(p, q) = T_a(p, q) + \int\limits_{E_2\times[0,\infty)} T_{a+\alpha}(p, s)\,\alpha(s)\,T_a(s, q)\,ds = \tag{2.70}$$
$$= T_a(p, q) + \int\limits_{q\prec s\prec p} T_{a+\alpha}(p, s)\,\alpha(s)\,T_a(s, q)\,ds \quad (p, q \leqslant p_0;\ a, \alpha \in \hat{C}^2(\overline{K}_{p_0})).$$

Итерируя (2.70), получаем представление $T_{a+\alpha}$ в виде ряда:

$$T_{a+\alpha}(p, q) = T_a(p, q) + \int\limits_{q\prec s_1\prec p} T_a(p, s_1)\,\alpha(s_1)\,T_a(s_1, q)\,ds_1 + \tag{2.71}$$
$$+ \iint\limits_{q\prec s_1\prec s_2\prec p} T_a(p, s_1)\,\alpha(s_1)\,T_a(s_1, s_2)\,\alpha(s_2)\,T_a(s_2, q)\,ds_1 ds_2 + \ldots \quad (p, q \leqslant p_0)$$

Из оценки (2.49) для T_a и формулы (2.60) следует, что этот ряд равномерно сходится.

Опишем кратко ситуацию в случае произвольной размерности $n \geqslant 2$. Введем интегральный оператор I^β (β — комплексное):

$$(I^\beta\mu)(p) = \frac{1}{C(\beta)} \int\limits_{q\prec p} \Gamma^{\beta-n-1}(p, q)\,\mu(q)\,dq \qquad (p \in E_n\times[0, \infty)); \tag{2.72}$$

для существования интеграла (2.72) нужно предполагать, что $\operatorname{Re}\beta > n-1$. Из формулы (2.59) следует, что операторы I^β обладают полугрупповым свойством

$$I^\beta I^\gamma = I^{\beta+\gamma}\ (\operatorname{Re}\beta, \operatorname{Re}\gamma > n-1).$$

Подобно лемме 2.6 можно показать, что при достаточной гладкости μ $\Box I^{\beta+2}\mu = I^\beta\mu$ ($\operatorname{Re}\beta > n-1$). Оказывается, что это равенство аналитически продолжается и на полуплоскость $\operatorname{Re}\beta > 0$, причем после предельного перехода $\beta \to 0$ получаем: $\Box\, I^2\mu = I^0\mu = \mu$. В случае $n=2$ $2 > n-1$, поэтому $I^2\mu$ подсчитывается непосредственно при помощи формулы (2.72) и совпадает с $B\mu$ в обозначениях стр. 431. Если $n=3$, то $I^2\mu$ подсчитывается как $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} I^{2+\varepsilon}\mu$; здесь выражение для I^2 более сложное — появляется обобщенное ядро $T_0(p,q)$, сосредоточенное на конусе K_p. При $n>3$ для подсчета $I^2\mu$ необходимо предварительное аналитическое продолжение.

Приведенные только что утверждения могут заменить лемму 2.6 при попытке доказательства аналога теоремы 2.7 для $n>2$. Именно, можно поступать так. Берется формальная схема доказательства этой теоремы, тогда, согласно (2.63), $T(p,q)$ является ядром оператора $\sum\limits_{j=0}^{\infty} I^2(AI^2)^j$. Строим теперь ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} I^{\beta_0}(AI^{\beta_1}\ldots AI^{\beta_j})$, где $\operatorname{Re}\beta_k > n-1$ $(k=0,1,\ldots)$. Этот ряд хорошо сходится и представляет оператор с ядром, структура которого просто выясняется посредством рассуждений, аналогичных проведенным в случае $n=2$. Затем в полученном ядре $T(p,q;\beta_0,\beta_1,\ldots)$ производится переход $\beta_j\to 2$ для получения искомого ядра $T(p,q)$. При $n=3$ нужно просто перейти к пределу; такой переход возможен и действительно приводит к аналогу теоремы 2.7.

При $n>3$ необходимо аналитическое продолжение; на этом случае останавливаться не будем.

Сформулируем такой аналог в случае $n=3$.

Теорема 2.8. *В случае $n=3$ теорема 2.7 сохраняется в той же формулировке за исключением следующих моментов: 1) дополнительно считается, что $a(x,t)+\alpha(x,t)$ для каждого x непрерывно дифференцируема по t; 2) представление (2.47) приобретает вид:*

$$v(p) = u(p) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-y|<t} \frac{\alpha(y,t-|x-y|)\,u(y,t-|x-y|)+\varphi(y,t-|x-y|)}{|x-y|}\,dy + \int\limits_{q\prec p} T_{\text{рег}}(p,q)\,[\alpha(q)\,u(q)+\varphi(q)]\,dq \qquad (p=(x,t),\ q=(y,\tau)), \tag{2.73}$$

т. е. ядро $T(p,q)$ состоит из двух слагаемых: сосредоточенного на K_p сингулярного $T_{\text{синг}}$ и регулярного $T_{\text{рег}}(p,q)$, 3) оценка (2.49) приобретает вид

$$a'\Omega(\sqrt{a'}\,\Gamma(p,q)) \leqslant T_{\text{рег}}(p,q) \leqslant a''\Omega(\sqrt{a''}\,\Gamma(p,q)) \quad (q\prec p \leqslant p_0); \tag{2.74}$$

$$\Omega(s) = \frac{i}{4\pi s} J_{-1}(is).$$

Если ввести аналогично (2.65) по $T_{\text{рег}}$ ядра $T_{a+\alpha}$, то можно получить соотношения типа (2.66) — (2.71); в них лишь будут добавляться члены с сингулярными слагаемыми.

В заключение заметим, что построения этого пункта сохраняются, если функции класса $\hat{C}^2(\overline{K_{p_0}})$ не типа C^2, а имеют достаточно слабые разрывы производных. Например, можно считать, что $\hat{C}^2(\overline{K_{p_0}})$ состоит из функций $u(p) \in C(\overline{K_{p_0}})$, для которых при каждом t производные $(D_1^\alpha u)(x, t), \ldots, (D_n^\alpha u)(x, t)$ $(\alpha = 1,2)$ вне плоскости $x_1 = 0$ существуют и непрерывны вплоть до границы области и этой плоскости.

10. Выражение Шредингера. Дальнейшее изучение. По-прежнему будем рассматривать выражение (2.43) во всем E_n. Пусть сперва $n = 2$. Согласно (2.67), решение $u(x, t)$ задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + c(x) u = g(x), \quad u(x, 0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x, 0) = 0 \tag{2.75}$$

$$(x \in E_2;\ t \in [0, \infty))$$

входит в $C^2(E_2 \times [0, \infty))$ и запишется в виде

$$u(x, t) = \int_{E_2} W_{-c}(x, t;\ y) g(y)\, dy, \tag{2.76}$$

$$W_{-c}(x, t;\ y) = \int_0^\infty T_{-c}((x, t), (y, \tau))\, d\tau = \int_0^{t-|x-y|} T_{-c}((x, t), (y, \tau))\, d\tau$$

$$(x, y \in E_2;\ t \in [0, \infty)).$$

Ядро $W_{-c}(x, t;\ y)$, очевидно, аннулируется при $|x - y| > t$. Установим некоторые факты относительно ядер T_{-c} и W_{-c}.

Лемма 2.7. *Имеет место оценка*

$$|T_{-c}(p_0, q) - \frac{1}{2\pi\Gamma(p_0, q)} \operatorname{ch}(\sqrt{-c(x_0)}\, \Gamma(p_0, q))| \leqslant \tag{2.77}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi\Gamma(p_0, q)} (\operatorname{ch}(\sqrt{c_-(x_0) + \omega(x_0, t_0)}\, \Gamma(p_0, q)) -$$

$$- \operatorname{ch}(\sqrt{c_-(x_0)}\, \Gamma(p_0, q))) \quad (q < p_0 = (x_0, t_0) \in E_2 \times (0, \infty)),$$

где $c_-(x_0)=\max(-c(x_0), 0)$, *а* $\omega(x_0, \delta)$ *обозначает модуль непрерывности функции* $c(x)$ *в точке* x_0.

Доказательство. Зафиксируем $x_0\in E_2$ и положим $-c(x)=$ $=a+\alpha(x)$, где $a=-c(x_0)$, $\alpha(x)=c(x_0)-c(x)$; $|\alpha(x)|\leqslant\omega(x_0, t_0)$ для x из шара $|x_0-x|\leqslant t_0$. Из (2.60) следует, что независимо от знака a

$$T_a(p, q)=\frac{1}{2\pi\Gamma(p, q)}\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,\Gamma(p, q))\quad(q<p;\quad a=\mathrm{const}).\tag{2.78}$$

На основании равенств (2.71) и (2.78) при $c(x_0)\leqslant 0$ имеем:

$$\begin{aligned}&\left|T_{-c}(p_0, q)-\frac{1}{2\pi\Gamma(p_0, q)}\operatorname{ch}(\sqrt{-c(x_0)}\,\Gamma(p_0, q))\right|=|T_{a+\alpha}(p_0, q)-\\&-T_a(p_0, q)|\leqslant\int\limits_{q<s_1<p_0}|T_a(p_0, s_1)||\alpha(s_1)||T_a(s_1, q)|\,ds_1+\\&+\ldots\leqslant\int\limits_{q<s_1<p_0}T_a(p_0, s_1)\,\omega(x_0, t_0)\,T_a(s_1, q)\,ds_1+\ldots=\\&=T_a(p_0, q)+\int\limits_{q<s_1<p_0}T_a(p_0, s_1)\,\omega(x_0, t_0)\,T_a(s_1, q)\,ds_1+\ldots-T_a(p_0, q)=\\&=T_{a+\omega(x_0, t_0)}(p_0, q)-T_a(p_0, q)=\\&=\frac{1}{2\pi\Gamma(p_0, q)}(\operatorname{ch}(\sqrt{a+\omega(x_0, t_0)}\,\Gamma(p_0, q))-\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,\Gamma(p_0, q))),\end{aligned}\tag{2.79}$$

т. е. (2.77). В случае $c(x_0)>0$ $a<0$ и

$$|T_a(p_0, q)|=\frac{1}{2\pi\Gamma(p_0, q)}|\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,\Gamma(p_0, q))|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi\Gamma(p_0, q)}=T_0(p_0, q).$$

Поэтому окончание оценки (2.79) (начиная со второго знака $\leqslant$) изменится: вместо a нужно будет писать 0. В результате мы опять придем к (2.77). Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Пусть* $c(x)$, $c_-(x)$ *и* $\omega(x_0, t_0)$ *такие же, как в лемме 2.7. Ядро* $W_{-c}(x, t; y)$ *непрерывно зависит от точки* $(x, t, y)\in E_2\times[0, \infty)\times E_2$ *в области* $|x-y|>0$, *аннулируется при* $|x-y|\geqslant t$ *и входит в* $L_2(E_n)$ *по* x *и* y. *Для него справедливо* *неравенство*

$$|W_{-c}(x_0, t_0; y) - W_{-c(x_0)}(x_0, t_0; y)| \leqslant W_{c_-(x_0)+\omega(x_0,t_0)}(x_0, t_0; y) - \\ - W_{c_-(x_0)}(x_0, t_0; y) \quad ((x_0, t_0, y) \in E_2 \times [0, \infty) \times E_2). \tag{2.80}$$

Доказательство. Из теоремы 2.7 вытекает, что при каждом фиксированном τ $T_{-c}((x, t), (y, \tau)) \to T_{-c}((x_0, t_0), (y_0, \tau))$, если $(x, t, y) \to (x_0, t_0, y_0)$, причем $|x_0 - y_0| < t_0 - \tau$. Поэтому, согласно определению (2.76) ядра W_{-c}, для доказательства непрерывности этого ядра в точке (x_0, t_0, y_0), где $0 < |x_0 - y_0| < t_0$, достаточно показать, что в (2.76) можно перейти к пределу под знаком интеграла, а для этого достаточно, например, показать, что $\int\limits_0^\infty |T_{-c}((x, t), (y, \tau))|^{\frac{3}{2}} d\tau \leqslant C < \infty$ равномерно по (x, t, y), достаточно близким к (x_0, t_0, y_0) (заметим, что все $T_{-c}((x, t), (y, \tau))$ аннулируются вне некоторого конечного интервала изменения τ). В силу ограниченности ядра $T_{-c}(p, q)\,\Gamma(p, q)$ при изменении (p, q) в ограниченной области (см. теорему 2.7) имеем при некотором $\eta > 0$

$$\int\limits_0^\infty |T_{-c}((x, t), (y, \tau))|^{\frac{3}{2}} d\tau \leqslant C_1 \int\limits_0^{t-|x-y|} \frac{d\tau}{[(t-\tau)^2 - |x-y|^2]^{\frac{3}{4}}} < \\ < \frac{C_1}{\eta^{\frac{3}{4}}} \int\limits_0^{t-|x-y|} \frac{d\tau}{[t-\tau-|x-y|]^{\frac{3}{4}}} \leqslant C_2 < \infty,$$

что и требовалось. Итак, непрерывность $W_{-c}(x, t; y)$ в области $0 < |x - y| < t$ установлена.

Для доказательства высказанной непрерывности ядра W_{-c} осталось показать, что $W_{-c}(x, t; y) \to 0$, если $(x, t, y) \to (x_0, t_0, y_0)$, причем $|x - y| \to t \geqslant \eta > 0$. Это соотношение вытекает из следующего неравенства, справедливого в силу ограниченности $T_{-c}(p, q)\,\Gamma(p, q)$ в ограниченной области изменения (p, q):

$$|W_{-c}(x, t; y)| \leqslant C \int\limits_0^{t-|x-y|} \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |x-y|^2}} = \\ = C[\log(t + \sqrt{t^2 - |x-y|^2}) - \log|x-y|] \underset{|x-y| \to t}{\to} 0. \tag{2.81}$$

Из (2.81) следуют также включения $W_{-c}(\cdot, t; y)$, $W_{-c}(x, t; \cdot) \in L_2(E_2)$ $(y, x \in E_2;\ t \in [0, \infty))$.

Неравенство (2.80) вытекает посредством интегрирования из (2.77). Лемма доказана.

При помощи этой леммы может быть доказана

Теорема 2.9. *Рассмотрим полуограниченное снизу на $C_0^\infty(E_2)$ двумерное выражение Шредингера* (2.43), $c(x) \in C^2(E_2)$. *Как доказано* (*п.* 8, *б*)), *соответствующий минимальный оператор* Λ *полуограничен снизу и самосопряжен.*

Утверждается, что существующий при каждом $t \geqslant 0$ *ограниченный оператор* $2\Lambda^{-1}\sin^2\frac{\sqrt{\Lambda}}{2}t$* *будет интегральным с карлемановским ядром* $C_t(x, y) = W_{-c}(x, t; y)$ $(x, y \in E_2)$. *Это ядро непрерывно зависит от точки* $(x, t, y) \in E_2 \times [0, \infty) \times E_2$ *в области* $|x-y| > 0$ *и аннулируется при* $|x-y| \geqslant t$, *для него справедлива оценка:*

$$|C_t(x, y)| \leqslant \frac{3}{2\pi} e^{t\sqrt{c_-(x) + \omega(x, t)}} \log\frac{2t}{|x-y|} \tag{2.82}$$

$$(x, y \in E_2;\ |x-y| \leqslant t;\quad 0 \leqslant t < \infty)$$

(*здесь* $c_-(x) = \max(-c(x), 0)$, $\omega(x, \delta)$ — *модуль непрерывности функции* c *в точке* x)**.

Предварительно сделаем одно общее замечание. Примем обозначения п. 7, § 1, и рассмотрим слабые решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + S^*u = g(t) \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{2.83}$$

где $g(t)$ — вектор-функция со значениями в H, сильно непрерывная по $t \in [0, \infty)$ (определение слабого решения для (2.83) отличается от определения (1.18) тем, что в этом равенстве справа вместо 0 должно стоять $(g(t), f)$, а S нужно заменить на $-S$). Пусть S — эрмитовый полуограниченный снизу числом C оператор (т. е. $(Sf, f) \geqslant C\|f\|^2$, $f \in \mathfrak{D}(S)$), E_λ — разложение единицы, отвечающее некоторому его самосопряженному полуограниченному снизу тем

* Так мы обозначаем оператор $F(\Lambda)$, отвечающий целой функции $F(\lambda) = 2\lambda^{-1}\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t$.

** Полуограниченность снизу выражения (2.43) можно и не требовать. В этом случае некоторое усложнение рассуждений стр. 440—442 приведет к доказательству того, что неограниченный оператор $2A^{-1}\sin^2\frac{\sqrt{A}}{2}t$ (A — самосопряженное расширение Λ) — интегральный с карлемановским ядром, удовлетворяющим оценке (2.82). Основным дополнительным моментом является проверка включения $C_0^\infty(E_2) \subset \mathfrak{D}\left(2A^{-1}\sin^2\frac{\sqrt{A}}{2}t\right)$.

же C расширению A. Пусть при каждом $t\in[0,\infty)$ $g(t)\in\mathfrak{D}(\sqrt{A})$. Как и на стр. 398, легко проверяется, что вектор-функция

$$u(t)=\int_0^t\left(\int_C^\infty\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(t-\tau)\,dE_\lambda\right)g(\tau)\,d\tau\quad(0\leqslant t<\infty)\tag{2.84}$$

является слабым решением уравнения (2.83), удовлетворяющим условиям: $u(0)=\left(\frac{du}{dt}\right)(0)=0$. Если $g(t)=g$ от t не зависит, то (2.84) перепишется в виде:

$$u(t)=\int_C^\infty\left(\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(t-\tau)\,d\tau\right)dE_\lambda g=\int_C^\infty\frac{2}{\lambda}\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t\,dE_\lambda g=$$

$$=\left(2A^{-1}\sin^2\frac{\sqrt{A}}{2}t\right)g\quad(0\leqslant t<\infty).\tag{2.85}$$

Если замыкание $\bar{S}$ оператора S самосопряжено, то слабое решение уравнения (2.83) в силу теоремы 1.7, 2), определяется однозначно и поэтому имеет вид (2.84) или (2.85), где $A=\bar{S}$.

Доказательство теоремы. Пусть $g(x)\in C_0^\infty(E_2)\subset\subset\mathfrak{D}(\Lambda)\subseteq\mathfrak{D}(\sqrt{\Lambda})$, тогда, согласно (2.76), решение $u(x,t)$ задачи Коши (2.75) будет для каждого t финитным по x. Следовательно, $u(x,t)$ можно рассматривать как вектор-функцию $u(t)$ со значениями в $L_2(E_2)$, удовлетворяющую уравнению $\frac{d^2u}{dt^2}+\Lambda u=g$ в сильном, а значит и слабом, смысле. Кроме того, $u(0)=\left(\frac{du}{dt}\right)(0)=0$. Записывая для $u(t)$ формулу (2.85), получим:

$$\int_{E_2}W_{-c}(x,t;y)\,g(y)\,dy=u(x,t)=\left(2\Lambda^{-1}\sin^2\frac{\sqrt{\Lambda}}{2}t\right)g$$
$$(g\in C_0^\infty(E_2),\ (0\leqslant t<\infty).$$

Это равенство предельным переходом может быть распространено на произвольные $g\in L_2(E_2)$. Оно показывает, что оператор $2\Lambda^{-1}\sin^2\frac{\sqrt{\Lambda}}{2}t$ имеет ядро $C_t(x,y)=W_{-c}(x,t;y)$.

Ряд свойств ядра C_t установлен в лемме 2.8. Убедимся сейчас в справедливости оценки (2.82). При помощи (2.80) и (2.81) получаем для $|x_0 - y| \leqslant t_0$:

$$|C_t(x_0, y)| \leqslant |W_{-c(x_0)}(x_0, t_0; y)| + W_{c_-(x_0)+\omega(x_0,t_0)}(x_0, t_0; y) + W_{c_-(x_0)}(x_0, t_0; y) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2\pi} \int\limits_0^{t_0-|x_0-y|} \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{c_-(x_0)+\omega(x_0,t_0)}\,\Gamma((x_0,t_0),(y,\tau))\right)}{\Gamma((x_0,t_0),(y,\tau))}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2\pi} \int\limits_0^{t_0-|x_0-y|} \frac{\exp\left(\sqrt{c_-(x_0)+\omega(x_0,t_0)}\cdot\sqrt{(t_0-\tau)^2-|x_0-y|^2}\right)}{\sqrt{(t_0-\tau)^2-|x_0-y|^2}}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2\pi} e^{t_0\sqrt{c_-(x_0)+\omega(x_0,t_0)}} \int\limits_0^{t_0-|x_0-y|} \frac{d\tau}{\sqrt{(t_0-\tau)^2-|x_0-y|^2}} =$$

$$= \frac{3}{2\pi} e^{t_0\sqrt{c_-(x_0)+\omega(x_0,t_0)}} \log \frac{t_0+\sqrt{t_0^2-|x_0-y|^2}}{|x_0-y|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2\pi} e^{t_0\sqrt{c_-(x_0)+\omega(x_0,t_0)}} \log \frac{2t_0}{|x_0-y|},$$

т. е. (2.82). О суммируемости с квадратом $C_t(x, y)$ по каждой из переменных x и y уже говорилось в лемме 2.8. Теорема доказана.

В случае $n = 3$ можно установить аналогичные результаты. Так, согласно теореме 2.8 решение задачи типа (2.75) с $-c = a(x, t)$ и $g = g(x, t)$ имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-y|<t} \frac{g(y, t-|x-y|)}{|x-y|}\, dy + \int\limits_{q \prec p} T_{\text{рег}}(p, q)\, g(q)\, dq =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-y|<t} \frac{g(y, t-|x-y|)}{|x-y|}\, dy + \int\limits_{E_3\times[0,\infty)} T_a(p, q)\, g(q)\, dq \quad (p = (x, t),\ q = (y, \tau)), \tag{2.86}$$

где $T_{a+\alpha}(p, q)$ определяется по ядру $T_{\text{рег}}(p, q)$, фигурирующему в теореме 2.8, посредством (2.65). Для уравнения (2.75) с независящими от t коэффициентом и g формула (2.86) перепишется так:

$$u(x, t) = \int\limits_{E_3} W_{-c}(x, t; y)\, g(y)\, dy, \tag{2.87}$$

$$W_{-c}(x, t; y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} + \int\limits_0^{t-|x-y|} T_{-c}((x, t), (y, \tau))\, d\tau \text{ при } |x-y| \leqslant t,\ W_{-c}(x, t; y) = 0$$

при $|x-y| > t$

$$(x, y \in E_3;\ t \in [0, \infty)).$$

Аналог (2.78) примет вид

$$T_a(p, q) = \frac{i\sqrt{a}}{4\pi\Gamma(p, q)} J_{-1}(i\sqrt{a}\Gamma(p, q)) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{a}{4}\right)^j\frac{\Gamma^{2(j-1)}(p, q)}{(j-1)!\,j!} \tag{2.88}$$

$$(q \prec p; \qquad a = \mathrm{const}).$$

Сейчас также можно доказать леммы, аналогичные леммам 2.7 и 2.8, при этом удобно применить подход, упоминавшийся на стр. 436: вместо ядра $T(p, q)$ оператора $\sum_{j=0}^{\infty} I^2(AI^2)^j$ рассматривается ядро $T(p, q; \beta_0, \beta_1, \ldots)$ оператора $\sum_{j=0}^{\infty} I^{\beta_0}(AI^{\beta_1}\ldots AI^{\beta_j})$ $(\beta_0, \beta_1, \ldots > 2)$. Оно может быть изображено посредством суммы хорошо сходящегося ряда типа (2.63). При $A(p) = a = \mathrm{const} < 0$ этот ряд знакопеременный с монотонно убывающими по абсолютной величине членами, поэтому и сейчас справедливо неравенство

$$|T_a(p_0, q; \beta_0, \beta_1, \ldots)| \leqslant |T_0(p_0, q; \beta_0, \beta_1, \ldots)| \qquad (q \prec p_0) \tag{2.89}$$

(T_a определяется подобно (2.65)). Будем проводить доказательство оценки типа (2.77), заменив ядра $T_{-c}(p_0, q)$ на ядра $T_{-c}(p_0, q; \beta_0, \beta_1, \ldots)$; благодаря неравенству (2.89) оно будет проходить так же, как и на стр. 438. После этого установим остальные факты, изложенные на стр. 438—440, по-прежнему для ядер с $\beta_0, \beta_1, \ldots > 2$, а затем перейдем к пределу при $\beta_0, \beta_1, \ldots \to 2$. На этом пути может быть доказана оценка, заменяющая (2.82):

$$|W_{-c}(x_0, t_0; y)| \leqslant \frac{3}{4\pi}\frac{1}{|x_0 - y|} + 3\int_0^{t_0 - |x_0 - y|} T_{c_-(x_0) + \omega(x_0, t_0)}((x_0, t_0), (y, \tau))\, d\tau =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left(\frac{1}{|x_0 - y|} + i\sqrt{c_-(x_0) + \omega(x_0, t_0)} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{t_0 - |x_0 - y|} \frac{J_{-1}\left(i\sqrt{c_-(x_0) + \omega(x_0, t_0)}\cdot\sqrt{(t_0 - \tau)^2 - |x_0 - y|^2}\right)}{\sqrt{(t_0 - \tau)^2 - |x_0 - y|^2}}\, d\tau\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{4\pi}\left(\frac{1}{|x_0 - y|} + i\sqrt{c_-(x_0) + \omega(x_0, t_0)}\, J_{-1}\left(it_0\sqrt{c_-(x_0) + \omega(x_0, t_0)}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{t_0 - |x_0 - y|} \frac{d\tau}{\sqrt{(t_0 - \tau)^2 - |x_0 - y|^2}}\right) \leqslant \frac{3}{4\pi}\left(\frac{1}{|x_0 - y|} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{c_-(x_0) + \omega(x_0, t_0)}\, e^{t_0\sqrt{c_-(x_0) + \omega(x_0, t_0)}} \log\frac{2t_0}{|x_0 - y|}\right)$$

$$(|x_0 - y| \leqslant t_0)$$

(мы воспользовались неравенством $|J_{-1}(is)| \leqslant e^s$ $(s \geqslant 0)$ и обозначениями, аналогичными введенным в лемме 2.7). Теперь уже легко понять, что имеет место

Теорема 2.10. *В случае трехмерного выражения Шредингера справедлива теорема 2.9 в той же формулировке, только с заменой E_2 на E_3 и оценки* (2.82) *на оценку*

$$|C_t(x, y)| \leqslant \frac{3}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-y|} + \sqrt{c_-(x)+\omega(x, t)}\, e^{t\sqrt{c_-(x)+\omega(x,t)}} \log\frac{2t}{|x-y|}\right) \tag{2.90}$$

$$(x, y \in E_3;\ |x-y| \leqslant t;\ 0 \leqslant t < \infty).$$

Аналог теоремы 2.9 справедлив и в n-мерном случае $(n > 3)$, однако он выглядит более сложно; соответствующую формулировку мы приводить не будем.

Перейдем к некоторым применениям теорем 2.9 и 2.10 в спектральной теории; всюду ниже мы считаем $n = 2,3$ и рассматриваем полуограниченное снизу выражение Шредингера. При фиксированном $t > 0$ функция $\gamma(\lambda) = \frac{2}{\lambda}\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ обращается в 0 в точках $\lambda_m = \left(\frac{2\pi m}{t}\right)^2$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и поэтому непосредственно неприменима для построений § 4—5, гл. V, и § 2 этой главы. Однако если положить

$$\gamma(\lambda) = \gamma_{t,\tau}(\lambda) = \frac{2}{\lambda}\left[\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(t-\tau) + \sin^2\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t\right] \quad (-\infty < \lambda < \infty), \tag{2.91}$$

где $\tau \in (0, t)$ достаточно мало, то $\gamma(\lambda)$ будет ограничена на спектре Λ и отлична от нуля, что делает ее пригодной для наших целей.

Из теорем 2.9 и 2.10 следует, что $\gamma(\Lambda)$ — интегральный оператор, ядро которого $C(x, y) = C_{t,\tau}(x, y)$ аннулируется при $|x-y| \geqslant t$ и удовлетворяет оценкам (2.82) и (2.90) соответственно (их правые части нужно умножить на 2). Функция $\gamma(\lambda)$ вещественна, поэтому $\gamma(\Lambda)$ самосопряжен и ядро $C(x, y)$ эрмитово. Следовательно, можно написать и оценки

$$|C(x, y)| \leqslant \frac{3}{\pi} e^{t\sqrt{c_-(y)+\omega(y,t)}} \log\frac{2t}{|x-y|} \quad (n = 2;\ |x-y| \leqslant t), \tag{2.92}$$

$$|C(x, y)| \leqslant \frac{3}{2\pi}\left(\frac{1}{|x-y|} + \sqrt{c_-(y)+\omega(y, t)}\, e^{t\sqrt{c_-(y)+\omega(y,t)}} \log\frac{2t}{|x-y|}\right)$$

$$(n = 3;\ |x-y| \leqslant t).$$

Возводя (2.92) в квадрат и интегрируя по x, найдем:

$$\int\limits_{E_n} |C(x,y)|^2 dx \leqslant \begin{cases} Ce^{2t\sqrt{c_-(y)+\omega(y,t)}} & (n=2;\ y \in E_2), \\ C(c_-(y)+\omega(y,t))\,e^{2t\sqrt{c_-(y)+\omega(y,t)}} & (n=3;\ y \in E_3). \end{cases}$$

Отсюда следует: *для любого* $\varkappa > 0$ *можно подобрать такую функцию* $\gamma(\lambda)$ *вида* (2.91), *т.е. столь малое* $t > 0$, *что при некотором* $C_\varkappa > 0$ *будет иметь место оценка*

$$C(y) = \int\limits_{E_n} |C(x,y)|^2 dx \leqslant C_\varkappa e^{\varkappa\sqrt{c_-(y)+\omega(y,\varkappa)}} \qquad (y \in E_n;\ n = 2, 3). \quad (2.93)$$

Из (2.93) вытекает, что в качестве функции $p(x)$, удовлетворяющей условию (4.2), гл. V, можно взять

$$p(x) = (1+|x|)^{n+\varepsilon} e^{\varkappa\sqrt{c_-(x)+\omega(x,\varkappa)}} \qquad (\varepsilon > 0;\ x \in E_n;\ n = 2, 3). \quad (2.94)$$

Теперь легко получить оценку для функции $B(x)$ из теоремы 5.5, гл. V. В самом деле, подбирая $t \in (0, \varkappa)$ достаточно малым при помощи (2.92) в случае, например, $n = 2$ найдем:

$$B(x) = \int\limits_{E_2} |C(x,y)|^2 p(y)\, dy \leqslant C \int\limits_{|x-y|<t} e^{3\varkappa\sqrt{c_-(y)+\omega(y,\varkappa)}} \left(\log\frac{1}{|x-y|}\right)^2 \times$$

$$\times (1+|y|)^{n+\varepsilon} dy \leqslant Ce^{3\varkappa\sqrt{c_-(x)+2\omega(x,2\varkappa)}} (1+|x|+t)^{n+\varepsilon} \int\limits_{|x-y|<t} \left(\log\frac{1}{|x-y|}\right)^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant C_1 e^{3\sqrt{2}\,\varkappa\sqrt{c_-(x)+\omega(x,2\varkappa)}} (1+|x|)^{n+\varepsilon} \qquad (x \in E_n)$$

(оценив c_- в близкой к x точке через $c_-(x) + \omega(x, \varkappa)$ и воспользовавшись соотношением: $\sup\limits_{|x-y|<\varkappa} \omega(y,\varkappa) \leqslant \omega(x, 2\varkappa)$). Эта же оценка справедлива и при $n = 3$. Отсюда легко получаем: *для любых* ε, $\varkappa > 0$ *можно подобрать такую функцию* $\gamma(\lambda)$ *вида* (2.91), *что при некотором* $C_{\varepsilon,\varkappa} > 0$

$$B(x) \leqslant C_{\varepsilon,\varkappa} (1+|x|)^{n+\varepsilon} e^{\varkappa\sqrt{c_-(x)+\omega(x,\varkappa)}} \qquad (x \in E_n;\ n = 2, 3). \quad (2.95)$$

Вспоминая, что спектральное ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ не зависит от выбора функции $\gamma(\lambda)$ (см. стр. 358—359) и применяя теорему 5.5, гл. V, придем на основании (2.95) к следующему утверждению.

Теорема 2.11. *Рассмотрим во всем пространстве* $E_n (n = 2,3)$ *выражение Шредингера* (2.43), *дополнительно полуограниченное снизу на* $C_0^\infty(E_n)$; $c(x) \in C^2(E_n)$. *Как пояснялось, минимальный оператор* Λ, *построенный по* L *и* $G = E_n$, *будет самосопряженным.*

Пусть $\Phi(x, y; \lambda)$ — отвечающее Λ спектральное ядро, $\varphi_\alpha(x; \lambda)$ ($\alpha = 1, \ldots, N_\lambda$) — индивидуальные собственные функции, а $d\varrho(\lambda)$ — спектральная плотность. При любых $\varepsilon, \varkappa > 0$ справедливы ϱ-почти для каждого λ оценки:

$$\Phi(x, y; \lambda) \underset{|x|,|y|\to\infty}{=} O\left(|x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon} |y|^{\frac{n}{2}+\varepsilon} e^{\varkappa\sqrt{c_-(x)+\omega(x,\varkappa)+c_-(y)+\omega(y,\varkappa)}}\right), \quad (2.96)$$

$$\varphi_\alpha(x; \lambda) \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(|x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon} e^{\varkappa\sqrt{c_-(x)+\omega(x,\varkappa)}}\right) \quad (\alpha = 1, \ldots, N_\lambda;\ n = 2, 3),$$

где $c_-(x) = \max(-c(x), 0)$, а $\omega(x, \delta)$ — модуль непрерывности функции c в точке x.

*Если коэффициент $c(x)$ полуограничен снизу ($c(x) \geqslant C > -\infty$, $x \in E_n$) и равномерно непрерывен, то правые части в (2.96), очевидно, заменятся на $O(|x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon} |y|^{\frac{n}{2}+\varepsilon})$ и $O(|x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon})$.**

Физические соображения подсказывали, что в случае полуограниченного снизу $c(x)$ ϱ-почти все собственные функции оператора Шредингера должны быть ограниченными на ∞. Теорема 2.11 утверждает некоторый близкий результат. Однако перейти в общем случае от оценок (2.96) к ограниченности на ∞ $\Phi(x, y, \lambda)$ и $\varphi_\alpha(x; \lambda)$ нельзя (можно построить пример даже одномерного выражения Шредингера с ограниченным гладким $c(x)$, для которого подобной ограниченности не будет).

В связи с теоремой полезно убедиться, что *существуют полуограниченные снизу на $C_0^\infty(E_n)$ выражения Шредингера, у которых* $\inf_{x\in E_n} c(x) = -\infty$. Ограничимся случаем $n = 2$ и введем в E_2 полярную систему координат ($\varrho = |x|, \varphi$). Учитывая, что $\Delta = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ и производя интегрирование по частям, найдем

$$(Lu, u)_0 = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \left(\left|\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right|^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left|\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|^2 + c(x)|u|^2\right)\varrho\, d\varrho\, d\varphi = I_{c(x)}(u, u) \quad (u \in C_0^2(E_2)). \quad (2.97)$$

Подставим в интеграл $I_1(u, u) = I_{c(x)\equiv 1}(u, u)$ $u(x) = f(\varrho)v(x)$, где $v \in C_0^2(E_2)$, а $f \in C^4([0, \infty))$ вещественна и ограничена константой $C < \infty$. При помощи интегрирования по частям и равенства (2.97) получим

$$0 \leqslant I_1(fv, fv) = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \left(f^2\left|\frac{\partial v}{\partial\varrho}\right|^2 + \frac{f^2}{\varrho^2}\left|\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right|^2 + (f^2 + f'^2)|v|^2 + ff'\frac{\partial}{\partial\varrho}|v|^2\right)\varrho\, d\varrho\, d\varphi =$$

* Как и в случае теорем 2.9 и 2.10 можно освободиться от требования полуограниченности снизу выражения (2.43) (см. сноску на стр. 440) и получить оценки (2.96) для самосопряженного $A \supseteq \Lambda$. Рассуждения стр. 444—445 остаются прежними, нужно только заметить, что требуемые результаты § 4—5, гл. V, сохраняются для рассматриваемого неограниченного $\gamma(A)$.

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left(f^2\left|\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right|^2+\frac{f^2}{\varrho^2}\left|\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right|^2+\left(-ff''-\frac{ff'}{\varrho}+f^2\right)|v|^2\right)\varrho d\varrho d\varphi \leqslant C^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varrho^2}\left|\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right|^2+\frac{f}{C^2}\left(-f''-\frac{f'}{\varrho}+f\right)|v|^2\right)\varrho d\varrho d\varphi = l_{c(x)}(v, v) = (Lv, v)_0,$$

$$c(x)=\frac{f}{C^2}\left(-f''-\frac{f'}{\varrho}+f\right).$$

Отсюда следует, что требуемый пример будет построен, если удастся подобрать функцию $f(\varrho)$, дополнительно обладающую тем свойством, что $\inf\limits_{\varrho\in[0,\infty)} f\left(-f''-\frac{f'}{\varrho}+f\right)=-\infty$. Положим, например, $f(\varrho)=2+\sin\varrho^3$. Тогда для $\varrho_n=(2\pi n)^{\frac{1}{3}}$ $(n=1, 2, \ldots)$ будем иметь: $\left(f\left(-f''-\frac{f'}{\varrho}+f\right)\right)(\varrho_n)=-18\,(2\pi n)^{\frac{1}{3}}+4\to-\infty$, что и требовалось.

Как и теоремы 2.9—2.10, оценки типа (2.96) верны и в случае $n \geqslant 3$. Далее, заметим, что для установления оценок типа (2.92)—(2.93) могут быть подобно сказанному в п. 7, § 1, привлечены параболические уравнения. Так, может быть установлен следующий результат (см., например, И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [3], гл. 4, § 9, стр. 249—261). Рассмотрим в E_n эллиптическое формально самосопряженное дифференциальное выражение порядка r с вещественными коэффициентами $a_\alpha(x)$, которые, помимо общих требований гладкости теоремы 2.1, удовлетворяют следующему условию: *при* $|\alpha|=r$ *производные* $(D^\beta a_\alpha)(x)$, $|\beta|\leqslant r$, *а при* $|\alpha|<r$ — *производные* $(D^\beta a_\alpha)(x)$, $|\beta|\leqslant 1$, *ограничены во всем* E_n. Утверждается, что при $N=\left|\frac{n}{2r}\right|+1$ и невещественном z резольвента R_z соответствующего оператора Λ (он самосопряжен, см. стр. 390) такова, что R_z^N является интегральным оператором, для ядра $C(x, y)$ которого справедлива оценка

$$|C(x, y)| \leqslant \frac{A}{|x-y|^{n-Nr}}e^{-B|x-y|} \quad (A, B>0;\ x, y\in E_n,\ x\neq y). \tag{2.98}$$

Так как $Nr>\frac{n}{2}$, то $n-Nr<\frac{n}{2}$. Это позволяет из (4.98) сделать заключение:

$$C(y)=\int\limits_{E_n}|C(x, y)|^2dx\leqslant C<\infty \quad (y\in E_n). \tag{2.99}$$

При помощи теоремы 5.5, гл. V, из оценок (2.98) и (2.99) подобно тому, как это было сделано выше, вытекает следующее утверждение: *для спектрального ядра* $\Phi(x, y; \lambda)$ *и собственных функций* $\varphi_\alpha(x; \lambda)$ *рассматриваемого эллиптического выражения справедливы оценки* (2.96), *в которых экспоненциалы заменены единицей.*

Заметим, что оценку вида (2.98) можно установить при помощи принципа максимума и для выражения Шредингера с полуограниченным снизу (а не ограниченным) коэффициентом $c(x)$. Это в комбинации с теоремой 5.5, гл. 5 дает несколько другой путь получения последней части теоремы 2.11 и ее уточнения (не требуется равномерной непрерывности $c(x)$).

§ 3. Спектральная теория общих самосопряженных дифференциальных операторов

Сейчас мы рассмотрим разложение по собственным функциям оператора в $H_0 = L_2(G)$ ($G \subseteq E_n$ ограничена или нет), порожденного формально самосопряженными L и (гр). Помимо некоторой детализации общих фактов § 3, гл. V, будут рассмотрены специальные случаи L.

1. **Построение разложения по обобщенным собственным функциям.** Пусть в G рассматривается формально самосопряженное дифференциальное выражение L с обычными предположениями гладкости коэффициентов, на Γ заданы формально самосопряженные (гр). Построим в $L_2(G)$ сильный оператор Λ (гр); очевидно, он эрмитов и замкнут. Как и в п. 1, § 2, обозначим через A некоторое его самосопряженное расширение — в $L_2(G)$ или с выходом в более широкое пространство, $E(\Delta)$ — соответствующее разложение единицы (обычное или обобщенное).

К оператору A применимы, конечно, общие построения § 3, гл. V, причем в качестве цепочки $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ можно брать любую из цепочек а) — в) (стр. 348—350). В случае в) равенство Парсеваля приобретает вид

$$(E(\Delta)u, v)_0 = \int\limits_\Delta \left\{ \int\limits_G \int\limits_G \Psi(x, y; \lambda) (\mathrm{D}u)(y) \overline{(\mathrm{D}v)(x)}\, dx dy \right\} d\varrho(\lambda) =$$

$$= \int\limits_\Delta (\Phi_\lambda, v(x) \overline{u(y)})_0\, d\varrho(\lambda) \quad (u, v \in C_0^\infty(G);\ \mathrm{D} = D_1 \ldots D_n), \qquad (3.1)$$

где Φ_λ — обобщенное в смысле Л. Шварца ядро, равное $\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y\,\Psi(x, y; \lambda)$. Уже говорилось, что это ядро носит название (обобщенного) спектрального ядра. Обычное положительно определенное ядро $\Psi(x, y; \lambda)$ — проинтегрированное спектральное ядро — удовлетворяет ϱ-почти для всех λ соотношениям (3.7), гл. V.

Как и ранее, вводятся проинтегрированные собственные функции $\psi_\alpha(x;\ \lambda)$ и обобщенные (в смысле Л. Шварца) собственные функции $\varphi_\alpha(\lambda) = (-1)^n \mathrm{D}\ \psi_\alpha(x;\ \lambda)$.

Единственный новый по сравнению с результатами § 3, гл. V, факт состоит в том, что Φ_λ по каждому из переменных x и y и $\varphi_\alpha(x)$ являются внутри G обобщенными решениями дифференциального уравнения типа $Lu - \lambda u = 0$. Точнее, это означает выполнение равенств

$$\int\limits_G \psi_\alpha(x;\lambda)\overline{(\mathrm{D}(Lu-\lambda u))(x)}\,dx = 0,\quad \int\limits_G \Psi(x,y;\lambda)\overline{(\mathrm{D}(Lu-\lambda u))(x)}\,dx = 0$$
$$(u \in C_0^\infty(G);\ \alpha = 1,\ldots,N_\lambda;\ y \in G) \tag{3.2}$$

и симметричного к последнему равенства относительно y (при этом дополнительно предполагается, что коэффициенты $a_\alpha(x)$ выражения L во всяком случае входят в $C^n(G)$). Соотношения (3.2) просто вытекают из равенств (1.14) и (1.18), гл. V.

Ясно, что приведенная конструкция с цепочкой в) не улавливает поведения обобщенных собственных функций и спектральной функции вблизи Г. Для того чтобы описать удовлетворение этими функциями (гр) в обобщенном смысле, нужно пользоваться цепочкой а). Повторять соответствующую схему мы не будем, тем более, что она была изложена в п. 5, § 2 (все сказанное там, за исключением предпоследнего абзаца, верно и для общих L).

2. **Дифференциальные выражения с постоянными коэффициентами в пространстве $L_2(E_n)$***. Рассмотрим выражение

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha \partial^\alpha u,\ \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_n^{\alpha_n},\ \partial_j = \frac{1}{i}D_j\ \ (j = 1,\ldots,n) \tag{3.3}$$

с постоянными вещественными коэффициентами. Как мы знаем (см. п. 5, § 1), соответствующий минимальный оператор Λ в пространстве $L_2(E_n)$ самосопряжен. Выясним вид разложений п. 1 для этого оператора, предварительно рассмотрев некоторые подобные вопросы для Фурье-образа $\widetilde{\Lambda}$, совпадающего с замыканием в $L_2(E_n)$ оператора умножения на $L(\xi) = \sum\limits_{|\alpha| \leq r} a_\alpha \xi^\alpha\ (\xi \in E_n)$.

Итак, в пространстве $L_2(E_n)$ функций $\widetilde{f}(\xi)$ рассматривается эрмитов оператор $\widetilde{u}(\xi) \to L(\xi)\widetilde{u}(\xi)\ (u \in S)$, его замыкание обозначаем $\widetilde{\Lambda}$ (из плотности $C_0^\infty(E_n)$ в S следует, что $\widetilde{\Lambda}$ совпадает с замыканием и бо-

* Один пример такого выражения уже рассматривался ранее, см. пример а), п. 8, § 2.

лее узкого оператора $\tilde{u}(\xi) \to L(\xi)\tilde{u}(\xi), \tilde{u} \in C_0^\infty(E_n))$. Оператор $\tilde{\Lambda}$ самосопряжен, его спектр совпадает с множеством значений полинома $L(\xi)$ $(\xi \in E_n)$, а резольвента $\tilde{R}_z = (\tilde{\Lambda} - zE)^{-1}$ — оператор умножения на $\frac{1}{L(\xi) - z}$. Пусть $\tilde{E}(\Delta)$ — разложение единицы, отвечающее $\tilde{\Lambda}$. Очевидно, $\tilde{E}(\Delta)$ — оператор умножения на характеристическую функцию $e_\Delta(\xi)$ полного прообраза множества Δ при отображении $\xi \to L(\xi)$ пространства E_n на E_1.

Роль оператора обобщенного проектирования $\tilde{P}(\lambda)$, естественно, должен играть «оператор умножения на δ-функцию, сосредоточенную на поверхности L_λ с уравнением $L(\xi) = \lambda$», т. е. оператор перехода от функции $\tilde{f}(\xi) \in L_2(E_n)$ к функции

$$(\tilde{P}(\lambda)\tilde{f})(\xi) = \begin{cases} \tilde{f}(\xi) & \text{при } \xi \in L_\lambda, \\ 0 & \text{при } \xi \,\overline{\in}\, L_\lambda. \end{cases}$$

Для получения полной системы обобщенных собственных функций, отвечающих λ, нужно взять полную систему функций на поверхности L_λ и затем каждую из них продолжить нулем на все E_n. Ясно, что сказанное сейчас является лишь интуитивным соображением, для обоснования которого следует ввести должным образом цепочку $H_- \supseteq H_0 = L_2(E_n) \supseteq H_+$. Мы это сделаем позже, так как построение такой цепочки полезно увязать с цепочками п. 1, возникающими при изучении исходного оператора Λ. С этой целью напомним некоторые сведения о преобразованиях Фурье обобщенных функций с основным пространством S (см., например, И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [2], гл. 3, § 1—3, стр. 152—186).

Рассмотрим S с указанной на стр. 386 сходимостью как основное пространство функций; пространство S' антилинейных непрерывных функционалов $l(u) = (l, u)_0$ над S образует пространство обобщенных функций. Как уже говорилось, S инвариантно относительно преобразования Фурье: $\tilde{S} = S$. Это позволяет определить преобразование Фурье $\tilde{l}$ обобщенной функции l посредством «равенства Парсеваля» $(\tilde{l}, \tilde{u})_0 = (l, u)_0$ как функционал над тем же пространством S. В случае, если l — обычная суммируемая функция, точнее $(l, u)_0 = \int\limits_{E_n} l(x)\overline{u(x)}\,dx$ $(u \in S)$, где $l(x) \in L_1(E_n)$, то $\tilde{l}$ — обычное ее преобразование Фурье $\tilde{l}(x)$, т.е. $(\tilde{l}, \tilde{u})_0 = \int\limits_{E_n} \tilde{l}(x)\overline{\tilde{u}(x)}\,dx$ $(\tilde{u} \in S)$. Обратное преобразование Фурье $\sim$ определяется, естественно, как $\tilde{\tilde{l}} = l$. Обозначим $\tilde{A}$ непрерывный оператор умножения в $L_2(E_n)$ на некоторую ограниченную функцию $\tilde{a}(\xi)$: $(\tilde{A}\tilde{f})(\xi) = \tilde{a}(\xi)\tilde{f}(\xi)$ $(\tilde{f} \in L_2(E_n))$. Его Фурье-прообраз $Af = \widetilde{\tilde{A}\tilde{f}}$, очевидно, совпадает с оператором свертки с обобщенной функцией $a = \tilde{\tilde{a}}$ — Фурье-прообразом функции $\tilde{a}$. Если $\tilde{a}$ достаточно «хорошая», то a будет обычной функцией и оператор свертки имеет вид

$$(Af)(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{E_n} a(x-y) f(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{E_n} a(y) f(x-y)\,dy. \quad (3.4)$$

В общем случае в соответствии со вторым из интегралов (3.4) нужно положить для $u \in S$ $(Au)(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} (a, \overline{u(x-\cdot)})_0$ $(x \in E_n)$, а затем распространить A на все $L_2(E_n)$ по непрерывности (заметим, что если $u(\cdot) \in S$, то и $u(x-\cdot) \in S$ при любом $x \in E_n$).

Используя преобразование Фурье и сказанное относительно оператора $\tilde{\Lambda}$, заключаем, что резольвента R_z и разложение единицы $E(\Delta)$ оператора Λ имеют вид:

$$\begin{gathered} (R_z u)(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \left(\widetilde{\frac{1}{L(\cdot)-z}}, \overline{u(x-\cdot)} \right)_0, \\ (E(\Delta)u(x)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} (\check{e}_\Delta, \overline{u(x-\cdot)})_0 \quad (x \in E_n,\ u \in S). \end{gathered} \quad (3.5)$$

В случае существования выписываемых ниже интегралов можно заключить, что R_z и $E(\Delta)$ — интегральные операторы с ядрами, зависящими от разности $x-y$:

$$R(x, y; z) = R(x-y; z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \frac{e^{i(x-y,\xi)}}{L(\xi)-z}\,d\xi,$$

$$\Xi(x, y; \Delta) = \Xi(x-y; \Delta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{L(\xi)\in\Delta} e^{i(x-y,\xi)}\,d\xi \quad (x, y \in E_n). \quad (3.6)$$

Перейдем к конструкции обобщенных собственных функций для Λ. Мы изложим обе указанные в п. 1 схемы — с цепочкой в) и цепочкой а). Предварительно сделаем некоторые общие замечания относительно построения разложений типа (3.1), примыкающие к сказанному в конце п. 2, § 3, гл. V. В обозначениях этого параграфа справедлива

Лемма 3.1. *Пусть $\varrho_1(\Delta)$ — сосредоточенная на спектре оператора A неотрицательная мера, относительно которой абсолютно непрерывна каждая из мер $\Theta(x, y; \Delta) = (E(\Delta)\,\omega(y, \cdot), \omega(x, \cdot))$, $(x, y \in G)$. Тогда $\varrho_1(\Delta)$ можно принять в качестве спектральной меры, а $\Psi_1(x, y; \lambda) = \dfrac{d\Theta(x, y; \lambda)}{d\varrho_1(\lambda)}$ — в качестве проинтегрированного спектрального ядра.*

Доказательство. Проверим, что для ядра $\Psi(x, y; \lambda)$ из (3.1) имеет место равенство

$$\int_\Delta \Psi(x, y; \lambda)\, d\varrho(\lambda) = \Theta(x, y; \Delta) \qquad (x, y \in G). \tag{3.7}$$

В самом деле, согласно сказанному в пп. 1 и 2, § 3, гл. V $\Psi(x, y; \lambda) = q(x)\, q(y)\, \widehat{\Psi}(x, y; \lambda)$, где $\widehat{\Psi}(x y; \lambda)$ — ядро оператора $\Psi(\lambda) = \dfrac{d}{d\varrho(\lambda)} T^{-1*} E_\lambda T^{-1}$; оператор T^{-1} имеет вид (3.5), гл. V. Пусть $u, v \in C_0^\infty(G)$, тогда

$$(T^{-1*} E(\Delta)\, T^{-1} u, v)_0 = (E(\Delta)\, T^{-1} u, T^{-1} v)_0 = \left(E(\Delta) \int_G \frac{1}{q(y)}\, \omega(y, \cdot)\, u(y)\, dy, \int_G \frac{1}{q(x)}\, \omega(x, \cdot)\, v(x)\, dx\right)_0 = \int_G \int_G (E(\Delta)\, \omega(y, \cdot), \omega(x, \cdot))_0 \frac{u(y)\, \overline{v(x)}}{q(y)\, q(x)}\, dx dy. \tag{3.8}$$

С другой стороны,

$$(T^{-1*} E(\Delta)\, T^{-1} u, v)_0 = \left(\int_\Delta \Psi(\lambda)\, d\varrho(\lambda)\, u, v\right)_0 = \\ = \int_G \int_G \left(\int_\Delta \frac{\Psi(x, y; \lambda)}{q(x)\, q(y)}\, d\varrho(\lambda)\right) u(y)\, \overline{v(x)}\, dx dy. \tag{3.9}$$

Сравнивая (3.8) и (3.9), приходим к (3.7).

Дифференцируя в (3.7) $\Theta(x, y; \Delta)$ по $\varrho_1(\Delta)$, получим:

$$\int_\Delta \Psi(x, y; \lambda)\, d\varrho(\lambda) = \int_\Delta \Psi_1(x, y; \lambda)\, d\varrho_1(\lambda) \qquad (x, y \in G). \tag{3.10}$$

Отсюда и из сказанного на стр. 340—341 легко следует лемма (поясним, что спектральная мера $\varrho_1(\Delta)$ может оказаться не абсолютно непрерывной относительно $\varrho(\Delta) = \text{Сл.}\ (T^{-1*} E(\Delta)\, T^{-1})$).

Теперь можно найти $\Psi(x, y; \lambda)$ и $d\varrho(\lambda)$ для оператора Λ. Так ка сейчас $G = E_n$, то

$$\omega(x, t) = (-1)^n \operatorname{sign}(x_1 \ldots x_n) \prod_{j=1}^{n} \varkappa_{(0, x_j)}(t_j) \qquad (x, t \in E_n). \quad (3.11)$$

где $\varkappa_{(a,b)}$ — характеристическая функция интервала (a, b). Беря от (3.11) преобразование Фурье по t, получим

$$\widetilde{(\omega(x, .))}(\xi) = \frac{i^n}{\sqrt{(2\pi)^n}} \operatorname{sign}(x_1 \ldots x_n) \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - e^{-ix_j\xi_j}}{\xi_j} \qquad (x, \xi \in E_n). \quad (3.12)$$

Используя вид оператора $\widetilde{E}(\Delta)$ и (3.12), при помощи равенства Парсеваля найдем

$$\Theta(x, y; \Delta) = (E(\Delta)\omega(y, .), \omega(x, .))_0 = (\widetilde{E}(\Delta)\widetilde{\omega}(y, .), \widetilde{\omega}(x, .))_0 =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}(x_1, \ldots x_n y_1 \ldots y_n)}{(2\pi)^n} \int\limits_{L(\xi) \in \Delta} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\xi_j^2} (1 - e^{ix_j\xi_j})(1 - e^{-iy_j\xi_j}) d\xi \; (x, y \in E_n). \quad (3.13)$$

Несколько ниже (см. лемму 3.2) мы убедимся, что мера, определяемая последним интегралом, абсолютно непрерывна относительно лебеговой меры $d\lambda$ (если только $L(\xi) \neq \text{const}$). Применяя лемму 3.1, приходим к следующей формуле:

$$\Psi(x, y; \lambda) =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}(x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_n)}{(2\pi)^n} \frac{d}{d\lambda} \int\limits_{L(\xi) < \lambda} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\xi_j^2} (1 - e^{ix_j\xi_j})(1 - e^{-iy_j\xi_j}) d\xi$$

$$(x, y \in E_n). \quad (3.14)$$

Если поверхность $L(\xi) = \lambda$ не имеет особых точек, т. е. на ней $(\operatorname{grad} L)(\xi) = ((D_1 L)(\xi), \ldots, (D_n L)(\xi)) \neq 0$, то, как известно (см., например, И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [1], гл. 3, § 1, стр. 272—274), существует дифференциальная форма n — 1-го порядка

$$\sigma_\lambda = \sum a_{j_1, \ldots, j_{n-1}} d\xi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\xi_{j_{n-1}}$$

такая, что $dL \wedge \sigma_\lambda = d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n$, где dL—дифференциал функции $L(\xi)$, $\wedge$ обозначает внешнее произведение форм, $d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n$ — элемент объема. Теперь производная (3.14) запишется в виде n—1-мерного интеграла

$$\Psi(x, y; \lambda) =$$
$$= \frac{\operatorname{sign}(x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_n)}{(2\pi)^n} \int\limits_{L(\xi)=\lambda} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\xi_j^2}(1 - e^{ix_j\xi_j})(1 - e^{-iy_j\xi_j})\,\sigma_\lambda \quad (3.15)$$
$$(x, y \in E_n).$$

Рассматривать случай наличия особых точек на поверхности $L(\xi) = \lambda$ не имеет смысла, так как нетрудно доказать (см. лемму 3.3), что такое положение будет иметь место лишь для множества λ нулевой лебеговой меры, а $\Psi(x, y; \lambda)$ определена почти для всех λ. Мы пришли к следующему утверждению:

Теорема 3.1. *Для оператора Λ, порожденного в $L_2(E_n)$ выражением* (3.3) *порядка* $\geqslant 1$, *спектральная мера совпадает с мерой Лебега на спектре Λ (т. е. на множестве значений полинома $L(\xi)$ $(\xi \in E_n)$). Проинтегрированное спектральное ядро $\Psi(x, y; \lambda)$ имеет вид* (3.15), *где n — 1-мерный интеграл определен почти для всех λ в смысле этой меры.*

Отметим, что в случае разделения переменных в следующем параграфе будет указан простой способ подсчета $\Psi(x, y; \lambda)$. Для получения из формул (3.14) и (3.15) соответствующих формул относительно оператора $\widetilde{\Lambda}$, очевидно, нужно рассмотреть ядро $\widehat{\Psi}(x, y; \lambda) = \dfrac{1}{q(x)q(y)}\Psi(x, y; \lambda)$ и взять его Фурье-образ; здесь $q(x) = (1 + |x_1|)^{1+\varepsilon} \ldots (1 + |x_n|)^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ (или какая-либо другая функция, пригодная для конструкции в § 3, гл. V).

Приведем теперь пропущенные леммы 3.2 и 3.3.

Лемма 3.2. *Пусть $f(\xi) \in L_1(E_n)$, а $Q(\xi) \not\equiv \text{const}$ — некоторый полином с вещественными коэффициентами. Определенная на борелевских множествах вещественной оси мера*

$$\theta(\Delta) = \int\limits_{Q(\xi)\in\Delta} f(\xi)\,d\xi \qquad (3.16)$$

абсолютно непрерывна относительно лебеговой меры.

Доказательство. Из суммируемости $f(\xi)$ по всему E_n следует, что интеграл (3.16) действительно определяет меру. Пусть Δ_0 имеет нулевую лебегову меру, нужно показать, что и $\theta(\Delta_0) = 0$. Для этого достаточно убедиться, что полный прообраз Ξ_n множества Δ_0 при отображении $\xi \to Q(\xi)$ пространства E_n в E_1 имеет нулевую n-мерную меру Лебега μ_n. Это утверждение в случае $n = 1$ очевидно, для его доказательства в общем случае проведем индукцию по размерности n.

Пусть для полиномов переменной $\eta \in E_{n-1}$ утверждение доказано. Рассмотрим полином $Q(\xi) \not\equiv \text{const}$, где $\xi \in E_n$. Положим $\xi = (\eta, \xi_n)$, $\eta = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in E_{n-1}$. Если $Q(\xi)$ фактически от ξ_n не зависит, т. е. $Q(\xi) = P(\eta)$, где P—полином $n-1$ переменных, то $\Xi_n = \Xi'_{n-1} \times E_1$, где Ξ'_{n-1} — прообраз Δ_0 при отображении $\eta \to P(\eta)$ пространства E_{n-1} в E_1. Так как по предположению индукции $\mu_{n-1}(\Xi'_{n-1}) = 0$, то и $\mu_n(\Xi_n) = 0$.

Пусть теперь $Q(\xi)$ зависит от ξ_n. Покажем, что можно выбрать такой номер $j = n$, $n-1$, что существует лишь максимум конечное число значений переменной ξ_j, при которых $Q(\xi)$ как полином переменной $\eta = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ или $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, \xi_n)$ соответственно тождественно равен некоторым постоянным. В самом деле, предположим, что существует бесконечное множество $\xi_n^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ значений ξ_n, таких что $Q(\eta, \xi_n^{(\alpha)}) = C^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ для всех $\eta \in E_{n-1}$. В этом случае для каждого фиксированного ξ_{n-1} $Q(\xi)$ как полином от $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, \xi_n)$ отличен от тождественной постоянной, т. е. можно принять $j = n-1$. Действительно, если при некотором $\xi_{n-1} = t$ $Q(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, t, \xi_n) \equiv \text{const}$, то, подставляя сюда $\xi_n = \xi_n^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$, найдем, что все $C^{(\alpha)}$ равны. Но тогда для каждого фиксированного η полином $Q(\eta, \xi_n)$ от одной переменной ξ_n принимает в бесконечном числе точек равные значения, т. е. он не зависит от ξ_n, что противоречит нашему допущению. Итак, возможность выбора j установлена. Пусть, например, $j = n$.

Зафиксируем $\xi_n = t$ и рассмотрим сечение соответствующей гиперплоскостью множества Ξ_n, т. е. множество таких $\eta \in E_{n-1}$, что $(\eta, t) \in \Xi_n$. Это сечение — полный прообраз Δ_0 при отображении $\eta \to Q(\eta, t)$ пространства E_{n-1} в E_1. Так как почти для каждого t полином $Q(\eta, t) \not\equiv \text{const}$, то согласно предположению индукции мера μ_{n-1} соответствующего сечения равна нулю. Но известно, что если мера почти каждого сечения равна нулю, то и само множество имеет нулевую меру. Итак, $\mu_n(\Xi_n) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $Q(\xi) \not\equiv \text{const}$ — некоторый полином с вещественными коэффициентами, λ — точка множества значений $Q(\xi)$ $(\xi \in E_n)$. Для почти каждого λ в смысле лебеговой меры поверхность $Q(\xi) = \lambda$ не содержит особых точек.*

Доказательство. При фиксированном λ множество особых точек поверхности $Q(\xi) = \lambda$ совпадает с множеством вещественных решений $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ системы $n+1$ уравнений

$$Q(\xi) = \lambda, (D_1 Q)(\xi) = 0, \ldots, (D_n Q)(\xi) = 0. \tag{3.17}$$

Обозначим через N множество решений из E_n системы уравнений $(D_1 Q)(\xi) = 0, \ldots, (D_n Q)(\xi) = 0$ или, что то же самое, одного уравнения $P(\xi) = (D_1 Q)^2(\xi) + \ldots + (D_n Q)^2(\xi) = 0$. Легко видеть, что совокупность вещественных нулей произвольного полинома $P(\xi)$ с вещественными коэффициентами состоит максимум из счетного (и даже конечного) числа связных компонент, причем любые две точки одной и той же компоненты можно соединить не выходя из нее кусочно гладкой кривой. Поэтому $N = \bigcup_{j=1}^{m} N_j$, $m \leqslant \infty$, где N_j — связная компонента решений из E_n системы $(D_1 Q)(\xi) = 0, \ldots, (D_n Q)(\xi) = 0$.

Легко видеть, что на каждом N_j полином $Q(\xi)$ принимает постоянное значение. Действительно, пусть $\xi, \eta \in N_j$, а $\varphi(t) \in E_n$ $(t \in [0, 1]$; $\varphi(0) = \xi, \varphi(1) = \eta)$ — соединяющая эти точки кусочно один раз непрерывно дифференцируемая кривая, расположенная в N_j. Положим $f(t) = Q(\varphi(t))$ $(t \in [0, 1])$ тогда для всех $t \in [0, 1]$, где нет излома $\varphi(t)$.

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (D_j Q)(\varphi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} = 0.$$

Отсюда следует, что $f(t) \equiv \text{const}$, т. е. $Q(\xi) = Q(\eta)$.

Из сказанного вытекает, что полином $Q(\xi)$ для $\xi \in N$ принимает максимум счетное число различных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Поэтому если $\lambda \neq \lambda_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, то система уравнений (3.17) не будет разрешима, что и доказывает лемму.

Перейдем к построению разложений по обобщенным собственным функциям оператора Λ с помощью цепочки а). Согласно сказанному на стр. 348, можно взять $H_+ = W_2^{(l, 1+|x|^{l+\varepsilon})}(E_n)$ $(\varepsilon > 0)$, где $l > \frac{n}{2}$. В дальнейшем будет удобно интерпретировать элементы из H_- как обобщенные функции из пространства S'. Это можно сделать, так как, очевидно, всегда топологически $W_2^{(l, 1+|x|^m)}(E_n) \supset$ $\supset S$ $(l = 0, 1, \ldots; m \geqslant 0)$, причем S плотно в $W_2^{(l, 1+|x|^m)}(E_n)$. Итак.

$$S' \supset H_- \supset H_0 = L_2(E_n) \supset H_+ \supset S. \tag{3.18}$$

Рассмотрим преобразование Фурье обобщенных функций из S'. Так как $\widetilde{S'} = S'$, $\widetilde{H}_0 = H_0$ и $\widetilde{S} = S$, то под воздействием этого преобразования цепочка (3.18) перейдет в

$$S' \supset \widetilde{H}_- \supset H_0 = L_2(E_n) \supset \widetilde{H}_+ \supset S. \tag{3.19}$$

Очевидно, вложение $\widetilde{H}_+ \to H_0$ также будет квазиядерным, поэтому цепочка (3.19) годится для построения разложений по обобщенным собственным функциям оператора $\widetilde{\Lambda}$.

Построим сперва разложение для $\widetilde{\Lambda}$ $(L(\xi) \neq \text{const})$. Так как спектральная мера по существу не зависит от выбора цепочек вида $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$, то согласно теореме 3.1 можно считать $d\varrho(\lambda) = d\lambda$. Рассмотрим оператор $\widetilde{E}(\Delta)$ как действующий из $\widetilde{H}_+$ в $\widetilde{H}_-$, согласно замечанию на стр. 344 существует производная $\frac{d\widetilde{E}_\lambda}{d\lambda} = \widetilde{P}(\lambda)$ в смысле нормы операторов Гильберта—Шмидта из $\widetilde{H}_+$ в $\widetilde{H}_-$. Благодаря (3.19) отсюда следует, что при $u \in S$ существует производная $\frac{d\widetilde{E}_\lambda u}{d\lambda}$ в смысле обобщенных функций из S' и она равна $\widetilde{P}(\lambda) u \in \widetilde{H}_- \subset S'$, т. е. для любой $v \in S$ $\frac{d}{d\lambda}(\widetilde{E}_\lambda u, v)_0 = (\widetilde{P}(\lambda) u, v)_0$. Учитывая вид $\widetilde{E}_\lambda$, перепишем это равенство так:

$$(\widetilde{P}(\lambda) u, v)_0 = \frac{d}{d\lambda} \int\limits_{L(\xi) < \lambda} u(\xi) \overline{v(\xi)}\, d\xi \qquad (u, v \in S). \tag{3.20}$$

Если поверхность L_λ с уравнением $L(\xi)=\lambda$ не имеет особых точек, то подобно (3.15) равенство (3.20) можно записать так:

$$(\widetilde{P}(\lambda)u, v)_0 = \int\limits_{L(\xi)=\lambda} u(\xi)\overline{v(\xi)}\,\sigma_\lambda \qquad (u, v \in S). \tag{3.21}$$

В связи с использованием записи (3.15) и (3.21) удобно напомнить понятие δ-функции, сосредоточенной на поверхности. Сперва несколько его обобщая, произведем следующее построение. Пусть $L(\xi)\in C^\infty(E_n)$ фиксирована. Предположим, что для каждой $u\in S$ существует в слабом смысле производная $\frac{d}{d\lambda}\int\limits_{L(\xi)<\lambda}\overline{u(\xi)}\,d\xi$, которая, следовательно, является антилинейным непрерывным функционалом над S, т. е. элементом из S'. Обозначим его на время $\delta(L_\lambda)$:

$$(\delta(L_\lambda), u)_0 = \frac{d}{d\lambda}\int\limits_{L(\xi)<\lambda}\overline{u(\xi)}\,d\xi \qquad (u\in S). \tag{3.22}$$

В том случае, когда на поверхности L_λ ($L(\xi)=\lambda$) нет особых точек ($(\operatorname{grad} L)(\xi)\neq \neq 0$ на L_λ), производная в (3.22) подсчитывается и определение приобретает обычный вид:

$$(\delta(L_\lambda), u)_0 = \int\limits_{L(\xi)=\lambda}\overline{u(\xi)}\,\sigma_\lambda \qquad (u\in S), \tag{3.23}$$

где σ_λ — дифференциальная форма $n-1$-го порядка, удовлетворяющая соотношению $dL\wedge\sigma_\lambda = d\xi_1\wedge\ldots\wedge d\xi_n$. Функционал $\delta(L_\lambda)\in S'$, определяемый равенством (3.23), и называется δ-функцией, сосредоточенной на поверхности L_λ.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть $P(\lambda)$ и $\widetilde{P}(\lambda)$ —обобщенные операторы проектирования, построенные по оператору Λ теоремы 3.1 и его Фурье-образу $\widetilde{\Lambda}$ соответственно. Обозначим L_λ поверхность с уравнением $L(\xi)=\lambda$. Тогда почти для каждого λ в смысле лебеговой меры существует δ-функция $\delta(L_\lambda)$ и*

$$(\widetilde{P}(\lambda)u, v)_0 = (\delta(L_\lambda), \bar{u}v)_0,$$
$$(P(\lambda)u, v)_0 = (\widetilde{P}(\lambda)\tilde{u}, \tilde{v})_0 = (\delta(L_\lambda), \bar{\tilde{u}}\,\tilde{v})_0 \qquad (u, v\in S). \tag{3.24}$$

Из равенства $(P(\lambda)u, v)_0 = (\delta(L_\lambda), \bar{\tilde{u}}\,\tilde{v})_0$ следует, что в случае существования выписываемого ниже выражения оператор $P(\lambda)$ является интегральным с зависящим от разности ядром—спектральным ядром

$$\Phi(x, y; \lambda) = \Phi(x-y; \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{d}{d\lambda}\int\limits_{L(\xi)<\lambda} e^{i\langle x-y, \xi\rangle}\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{L(\xi)=\lambda} e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\,\sigma_\lambda.$$
$$(x, y\in E_n). \tag{3.25}$$

В заключение заметим, что в терминах δ-функции $\delta(L_\lambda)$ формула (3.15) для проинтегрированного спектрального ядра может быть переписана в виде

$$\Psi(x, y; \lambda) = \frac{\operatorname{sign}(x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_n)}{(2\pi)^n} \left(\delta(L_\lambda), \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\xi_j^2} (1 - e^{-ix_j\xi_j})(1 - e^{iy_j\xi_j})\right)_0$$

$$(x, y \in E_n).$$

3. Случай карлемановских операторов. Нетрудно написать условие на $L(\xi)$, эквивалентное карлемановости оператора, рассмотренного в предыдущем пункте. Именно, *для карлемановости оператора Λ необходимо и достаточно, чтобы существовала ограниченная непрерывная отличная от нуля функция $\gamma(\lambda)$, определенная на области значений полинома $L(\xi)$ ($\xi \in E_n$), такая, что*

$$\int_{E_n} |\gamma(L(\xi))|^2 d\xi < \infty. \tag{3.26}$$

В самом деле, если $F(\lambda)$ ограничена на $\{L(\xi), \xi \in E_n\}$, то $F(\widetilde{\Lambda})$, очевидно, равен оператору умножения на $F(L(\xi))$. Поэтому $F(\Lambda)$ совпадает с оператором свертки с (обобщенной) функцией $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} (\widetilde{F(L(\xi))})(x)$.

Если $\gamma(\lambda)$ такова, что имеет место (3.26), то $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} (\widetilde{\gamma(L(\xi))})(x) \in$ $\in L_2(E_n)$ и указанный оператор свертки будет интегральным с ядром

$$K(x, y) = K(x - y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} (\widetilde{\gamma(L(\xi))})(x - y) \tag{3.27}$$

$$(x, y \in E_n).$$

Имеем:

$$\int_{E_n} |K(x, y)|^2 dx = \int_{E_n} |K(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} |(\widetilde{\gamma(L(\xi))})(x)|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} |\gamma(L(\xi))|^2 d\xi = C < \infty \quad (y \in E_n), \tag{3.28}$$

т. е. Λ карлемановский. Обращая рассуждения, получим, что карлемановость Λ влечет (3.26). Утверждение доказано.

На карлемановские операторы Λ, конечно, распространяются общие факты, установленные в § 4, гл. V, в частности, спектральная функция теперь будет обычной функцией. При этом нужнс иметь в виду, что согласно (3.28) $\int\limits_{E_n} |K(x, y)|^2 dx = C\ (y \in E_n)$ и поэтому в качестве $p(x)$ может быть взята, например, $(1 + |x|)^{n+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

Ядро (3.27) оператора $\gamma(\Lambda)$ не будет, вообще говоря, непрерывным относительно $(x, y) \in E_n \times E_n$. Однако уже *ядро оператора* $(\gamma(\Lambda))^*\gamma(\Lambda) = |\gamma|^2(\Lambda)$ *входит в* $C(E_n \times E_n)$: положим $\gamma_1(\lambda) = |\gamma(\lambda)|^2$, так как $\gamma(\lambda)$ ограничено, то из (3.26) следует такая же оценка с заменой γ на γ_1. Это дает возможность для ядра $K_1(x, y)$ оператора $\gamma_1(\Lambda) = (\gamma(\Lambda))^*\gamma(\Lambda)$ написать представление типа (3.27): $K_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} (\widetilde{\gamma_1(L(\xi))})(x - y)(x, y \in E_n)$. Но $\gamma_1(L(\xi)) = |\gamma(L(\xi))|^2 \in L_1(E_n)$ (см. (3.26)), поэтому $(\widetilde{\gamma_1(L(\xi))})(x)$ $(x \in E_n)$ непрерывна, что и доказывает утверждение.

Отсюда, в частности, следует, что если L таково, что при некотором γ выполняется условие (3.26), то всегда можно так подобрать новое γ, что $\gamma(\Lambda)$ будет интегральным оператором с ядром из $C(E_n \times E_n)$.

Выражение L вида (3.3) с вещественными постоянными коэффициентами будем называть сильно карлемановским, если $|L(\xi)| \underset{|\xi| \to \infty}{\to} \infty$. Справедлива

Теорема 3.3. *Пусть L — сильно карлемановское выражение, а $F(\lambda)$ $(\lambda \in (-\infty, \infty))$ — ограниченная функция, убывающая при $|\lambda| \to \infty$ на спектре Λ быстрее любой степени (т. е. $|\lambda^N F(\lambda)| \leqslant C_N < \infty$ на спектре $\Lambda, N = 0, 1, \ldots$). Тогда $F(\lambda)$ является интегральным оператором с ядром $K(x, y) = K(x - y)$ $(x, y \in E_n)$, где $K(\cdot) \in C^\infty(E_n)$, причем при любом α $(D^\alpha K)(\cdot) \in L_2(E_n)$.*

Таким образом, Λ — карлемановский оператор. Дополнительно утверждается, что его спектральное ядро $\Phi(x, y; \lambda) \in C^\infty(E_n \times E_n)$ почти для каждого λ (относительно меры Лебега) и имеет вид (3.25)

Доказательство. Используем следующее утверждение (см. Е. А. Горин [1], § 3, стр. 105): пусть $Q(\xi)$ — полином с вещественными коэффициентами от $\xi \in E_n$, тогда при $r \to \infty$

$$\min_{|\xi| = r} |Q(\xi)| = ar^b(1 + o(1)),$$

где $a \geqslant 0$ и $b \in (-\infty, \infty)$ — некоторые числа, причем b рационально. Отсюда заключаем, что для сильно карлемановского выражения L существуют R, C_1, $b > 0$ такие, что

$$|L(\xi)| \geqslant C_1 |\xi|^b, \quad |\xi| \geqslant R. \tag{3.29}$$

Благодаря виду $F(\lambda)$ для любого $N \geqslant 0$ найдется $C_2 > 0$ такое, что $|F(\lambda)| \leqslant C_2(1 + |\lambda|^N)^{-1}$ на спектре Λ. Поэтому из (3.29) следует, что при некотором $C_3 > 0$

$$|F(L(\xi))| \leqslant C_3(1 + |\xi|^{bN})^{-1} \quad (\xi \in E_n).$$

Беря N достаточно большим, убеждаемся в сходимости интегралов

$$\int\limits_{E_n} |\xi^\alpha F(L(\xi))|\, d\xi, \quad \int\limits_{E_n} |\xi^\alpha F(L(\xi))|^2 d\xi$$

$$(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n);\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0, 1, \ldots).$$

Как уже говорилось, $F(\Lambda)$ является оператором свертки с функцией $K(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} (\widetilde{F(L(\xi))})(x)$ $(x \in E_n)$. Сходимость первого из указанных интегралов влечет включение $K(x) \in C^\infty(E_n)$, а второго—включения $(D^\alpha K)(x) \in L_2(E_n)$.

Для доказательства второй части теоремы нужно заметить, что благодаря условию $|L(\xi)| \underset{|\xi|\to\infty}{\to} \infty$ каждая из поверхностей в E_n $L(\xi) = \lambda$ ограничена. Учитывая лемму 3.3, заключаем, что интеграл $\int\limits_{L(\xi)=\lambda} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} \sigma_\lambda$ почти для каждого λ имеет смысл и существует; он как функция (x, y) входит в $C^\infty(E_n \times E_n)$. Теперь осталось применить формулу (3.25). Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что если $F(\lambda)$ на спектре Λ ограничена и убывает там при $|\lambda| \to \infty$ не медленней фиксированной достаточно высокой степени $\frac{1}{|\lambda|^N}$ $(N \geqslant 0)$, то $F(\Lambda)$ будет интегральным оператором, для которого $K(x) \in C^{l(N)}(E_n)$ и $(D^\alpha K)(x) \in L_2(E_n)$ $(|\alpha| \leqslant l(N))$, где $l(N) = 0, 1, \ldots$ зависит от N, причем $l(N) \to \infty$ при $N \to \infty$.

Теорема 3.3 показывает, что к Λ, построенным по сильно карлемановским выражениям L, применимы все теоремы § 4, гл. V. Более того, при помощи леммы 2.3 предыдущего параграфа заключаем, что индивидуальные собственные функции $\varphi_\alpha(x; \lambda)$ входят в $C^\infty(E_n)$ и разложение $\Phi(x, y; \lambda) = \sum\limits_{\alpha=1}^{N_\lambda} \varphi_\alpha(x; \lambda)\overline{\varphi_\alpha(y; \lambda)}$ $(x, y \in E_n)$ можно дифференцировать по x и y.

В заключение заметим, что *если L — сильно карлемановское выражение, то оператор Λ полуограничен сверху или снизу* (*за исключением случая $n = 1$ и нечетного порядка L*). В самом деле, пусть $n \geqslant 2$. В этом случае дополнение к любому шару $|\xi| < R$ в E_n связано и поэтому если полином $L(\xi)$ принимает при больших $|\xi|$

как положительные, так и отрицательные значения, то он имеет нули ξ со сколь угодно большой длиной $|\xi|$. Однако это противоречит предположению, что $L(\xi) \underset{|\xi|\to\infty}{\to} \infty$. Итак, существует $R > 0$ такое, что при $|\xi| \geqslant R$, например, $L(\xi) > 0$. Тогда найдется $C > -\infty$ такое, что $L(\xi) \geqslant C$ $(\xi \in E_n)$. Применяя равенство Парсеваля, получим

$$(\Lambda u, u)_0 = (Lu, u)_0 = \int_{E_n} L(\xi)\,|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \geqslant C \int_{E_n} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi = C\,\|u\|_0^2$$

$$(u \in C_0^\infty(E_n)),$$

что и требовалось. Аналогично рассматривается случай $n = 1$.

4. **Гипоэллиптические выражения.** Результаты предыдущего пункта касались оператора Λ, построенного по L в пространстве $L_2(G)$, где $G = E_n$. Сейчас мы рассмотрим один важный класс выражений с постоянными коэффициентами, для которых, в частности, подобные результаты справедливы при любой $G \subseteq E$. Этот класс вводится независимо от спектральной теории; приведем требуемые определения.

Рассмотрим пространство $D'(G)$ $(G \subseteq E_n)$ обобщенных функций Л. Шварца — антилинейных непрерывных функционалов $(\alpha, u)_0$ над пространством $D(G) = C_0^\infty(G)$, где введена должным образом сходимость ($u_n \to 0$, если носители функций $u_n(x)$ расположены в одном общем компакте внутри G и эти функции вместе со всеми своими производными равномерно стремятся к нулю). Пусть L — некоторое выражение вида (3.3) с постоянными, вообще говоря, комплексными коэффициентами; $\varphi \in D'(G)$ называется обобщенным решением (внутри G) уравнения $Lu = f \in D'(G)$, если $(\varphi, L^+ v)_0 = (f, v)_0$ $(v \in D(G))$.

Выражение L называется гипоэллиптическим, если каждое решение $\varphi \in D'(G)$ уравнения $Lu = 0$ является бесконечно дифференцируемой функцией, т. е. $(\varphi, v)_0 = (h, v)_0 = \int_G h(x)\overline{v(x)}\,dx$ $(v \in D(G))$, где $h(x) \in C^\infty(G)$. Оказывается,* что понятие гипоэллиптичности L не зависит от области G и может быть выражено в терминах полинома $L(\xi)$. Приведем несколько условий, необходимых и достаточных для гипоэллиптичности L.

а) При любом $\theta \in E_n$

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{L(\xi + \theta)}{L(\xi)} = 1.$$

---

* По поводу излагаемых ниже фактов см. L. Hörmander [1], гл. 3, 3.3—3.6, стр. 87—108, и Г. Е. Шилов [1]. В дальнейшем нам понадобится лишь часть приведенных результатов. Именно, критерий б) гипоэллиптичности и при исследовании гладкости спектрального ядра $\Phi(x, y; \lambda)$ как функции точки (x, y) — характеристика гипоэллиптичности посредством структуры $\mathfrak{D}$(Л). Остальные результаты приведены лишь для некоторой полноты изложения. Отметим также, что формально понятие гипоэллиптичности применимо и в случае выражений с переменными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, однако на соответствующих результатах мы останавливаться не будем.

б) Для любой производной D^α, $\alpha \neq 0$,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{(D^\alpha L)(\xi)}{L(\xi)} = 0. \tag{3.30}$$

При этом для гипоэллиптичности L достаточно, чтобы (3.30) выполнялось лишь для всех первых производных (т. е. при $|\alpha| = 1$).

в) Рассмотрим $\xi + i\eta \in C_n$, тогда $|L(\xi + i\eta)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, причем сходимость равномерная по η, если $|\eta| \leqslant C$.

г) Комплексные нули $\zeta = \xi + i\eta$ полинома $L(\zeta)$ расположены в такой области пространства C_n, что при $|\xi| \to \infty$ и $|\eta| \to \infty$. Если L гипоэллиптично, то эта область обязательно имеет вид $|\eta| \geqslant C_1 |\xi|^h + C_2$, где C_1, $h > 0$ и $C_2 \in (-\infty, \infty)$ — некоторые постоянные.

Сделаем еще некоторые замечания. Для гипоэллиптичности L достаточно, чтобы были бесконечно дифференцируемыми лишь обобщенные решения уравнения $Lu = 0$, входящие внутри G в L_2.

Гипоэллиптичность тесно связана со свойствами фундаментального решения e_ξ с особенностью в точке $\xi \in G$ выражения L (определение e_ξ см. в п. 1, § 4, гл. III; его существование для выражений с постоянными коэффициентами см. в п. 1, § 1, гл. IV, следствие 5 теоремы 1.1). Оказывается, что для гипоэллиптичности L необходимо и достаточно, чтобы такое решение e_ξ являлось обычной функцией из C^∞ вне точки $\xi \in G$ (благодаря постоянству коэффициентов у L достаточно выполнение этого условия при одном $\xi \in G$; необходимость очевидным образом следует из определений, а достаточность устанавливается при помощи рассуждения, близкого к изложенному на стр. 181—184). Заметим, что суммируемость e_ξ в окрестности точки ξ в общем случае гипоэллиптического L неясна.

Наконец, гипоэллиптичность существенно связана со структурой области определения $\mathfrak{D}(Л)$ максимального оператора $Л$, построенного по L в $L_2(G)$ ($G \subseteq E_n$ ограничена или нет). Именно, будем рассматривать только полные полиномы $L(\xi)$ (см. стр. 284; в силу соотношения $|L(\xi)| \underset{|\xi|\to\infty}{\to} \infty$ в гипоэллиптическом случае $L(\xi)$ обязательно полон). Тогда для гипоэллиптичности L необходимо и достаточно выполнение следующего свойства: для любых $f(x) \in \mathfrak{D}(Л)$ и $\chi(x) \in C_0^\infty(G)$ функция $\chi(x) f(x) \in \mathfrak{D}(Л)$, а значит входит и в $\mathfrak{D}(\Lambda)$, в силу теоремы 1.3, гл. IV. Это свойство, очевидно, показывает, что локальная структура областей определения минимального и максимального операторов в гипоэллиптическом случае одинакова (в связи с этим гипоэллиптические выражения были первоначально названы локальными).

Перейдем к построению спектральной теории самосопряженных операторов, порожденных формально самосопряженными гипоэллиптическими выражениями L вида (3.3) в пространстве $L_2(G)$, $G \subseteq E_n$. Из в) (или б)) следует, что для такого выражения $|L(\xi)| \underset{|\xi|\to\infty}{\to} \infty$, т. е. что оно сильно карлемановское* и поэтому к нему применимы все результаты п. 3 относительно оператора Λ, построенного в пространстве $L_2(E_n)$.

* Отметим, что существуют сильно карлемановские выражения, не являющиеся гипоэллиптическими. Пример: $L = D_1^4 D_2^4 - D_1^2 - D_2^2$, тогда $L(\xi) = \xi_1^4\xi_2^4 + \xi_1^2 + \xi_2^2 \underset{|\xi|\to\infty}{\to} \infty$. Вместе с тем $\dfrac{(D_1L)(\xi)}{L(\xi)} = \dfrac{4\xi_1^3\xi_2^4 + 2\xi_1}{\xi_1^4\xi_2^4 + \xi_1^2 + \xi_2^2}$, полагая здесь $\xi_1 = 1$, убеждаемся, что это отношение не стремится к нулю при $|\xi| \to \infty$. Согласно б) L не является гипоэллиптическим.

Итак, пусть $G \subset E_n$ ограничена кусочно гладкой границей Γ, Λ — минимальный оператор, отвечающий L в $L_2(G)$. Будем считать, что $n \geqslant 2$. Точно так же как в конце предыдущего пункта, доказывается, что Λ — *полуограниченный (снизу или сверху) оператор*. Следовательно, у него равные дефектные числа и он имеет самосопряженные расширения в $L_2(G)$. Пусть A — одно из них, $E(\Delta)$ — соответствующее разложение единицы. Будем строить разложение по собственным функциям, порожденное $E(\Delta)$ (несколько видоизменяя рассмотрения, можно было бы исследовать и случай самосопряженных расширений Λ с выходом в более широкое пространство). Схема построения сейчас, естественно, будет отлична от схемы пп. 2 и 3 и близка изложению п. 1 и п. 4, § 2. Заметим, что так как теория краевых задач для гипоэллиптических уравнений разработана недостаточно, нам в дальнейшем придется ограничиться спектральной теорией внутри области.

Лемма 3.4. *Построенный оператор A является карлемановским. Более точно: пусть R_z ($\operatorname{Im} z \neq 0$) — резольвента A; $N = 0, 1, \ldots$ — достаточно большое. Оператор $R = R_z^N$ является интегральным с ядром $R(x, y)$ ($x, y \in G$), для которого интегралы*

$$\int_G |R(x, y)|^2 dy, \quad \int_G |R(x, y)|^2 dx \tag{3.31}$$

ограничены при x, y, меняющихся строго внутри G и ограниченных. Вектор-функции $R(x, .)$, $R(. , y)$ ($x, y \in G$) со значениями в пространстве $L_2(G)$ слабо непрерывно дифференцируемы до некоторого порядка $l(N) = 0, 1, \ldots$, причем $l(N) \to \infty$ при $N \to \infty$.

Доказательство. Построим по L минимальный оператор в пространстве $L_2(E_n)$, обозначим его Λ_0; положим $J = (\Lambda_0 - zE)^{-N}$. Согласно замечанию к теореме 3.3 оператор J при достаточно большом $N = 0, 1, \ldots$ будет интегральным, пусть $J(x, y) = J(x - y)$ $(x, y \in E_n)$ — его ядро; $J(x) \in C^{l(N)}(E_n)$, $(D^\alpha J)(x) \in L_2(E_n)$ $(|\alpha| \leqslant l(N))$ с некоторым $l(N) = 0, 1, \ldots$. Это $l(N)$ и будет фигурирующим в условии леммы.

Пусть $f \in L_2(G)$, будем считать функции из $L_2(G)$ продолженными нулем вне G. Оператор $(Sf)(x) = (Rf)(x) - (Jf)(x)$ $(x \in G)$ является, очевидно, непрерывным в $L_2(G)$ Легко видеть, что Sf служит обобщенным решением уравнения $(L - zE)^N u = 0$ внутри G: для $v \in C_0^\infty(G)$ имеем

$$(Sf, (L - \bar{z}E)^N v)_0 = (R_z^N f, (A - \bar{z}E)^N v)_0 - ((\Lambda_0 - zE)^{-N} f,$$

$$(\Lambda_0 - \bar{z}E)^N v)_{L_2(E_n)} = (f, v)_0 - (f, v)_{L_2(E_n)} = 0.$$

При помощи критерия б) элементарно проверяется, что из гипоэллиптичности L следует гипоэллиптичность и $(L - zE)^N$. Поэтому $Sf \in C^\infty(G)$. Далее, из свойств ядра $J(x - y)$ следует, что производные $D^\alpha Jf$ $(|\alpha| \leqslant l(N))$ существуют и входят в $C(E_n)$. Таким образом, $Rf = Jf + Sf \in C^{l(N)}(G)$.

Далее пользуемся рассуждением типа леммы 5.2, гл. III. Именно, пусть $\tilde{G}$ — расположенная строго внутри G ограниченная подобласть. Рассмотрим отображение $f \to (Rf)(x)$ $(x \in \tilde{\tilde{G}})$ полного пространства $L_2(G)$ в пространство в $C^{l(N)}(\tilde{\tilde{G}})$. Из непрерывности оператора R в $L_2(G)$ следует замкнутость этого отображения, а значит и его непрерывность. Итак.

$$\| Rf \|_{C^{l(N)}(\tilde{G})} \leqslant C \| f \|_{L_2(G)} \quad (f \in L_2(G)). \tag{3.32}$$

Теперь доказательство леммы завершается обычным приемом (ср. с доказательствами теорем 5.5 и 5.7, гл. III): рассмотрим однородный и аддитивный функционалы на $L_2(G)$ $l_x(f)=(Rf)(x)$ $(x\in\widetilde{\overline{G}})$, благодаря (3.32) он непрерывен и поэтому допускает представление $(Rf)(x)=l_x(f)=$ $=\int\limits_G h_x(y)f(y)\,dy$, где $h_x(\cdot)\in L_2(G)$. Положим $R(x,y)=h_x(y)$ $(x\in\widetilde{\overline{G}},\ y\in G)$. требуемая оценка первого из интегралов (3.31) следует из (3.32). Гладкость вектор-функции $R(x,\cdot)$ вытекает из гладкости $(Rf)(x)=l_x(f)=(R(x,\cdot),f)_0$ $(f\in L_2(G))$

Ограниченность второго из интегралов (3.31) и свойства функции $R(\cdot,y)$ сводятся к уже проведенным рассмотрениям благодаря равенству $R^*=(R_z^N)^*=$ $=R_{\bar z}^N$. Лемма доказана

Таким образом, к рассматриваемому оператору A применимы результаты § 4, гл. V, об общих карлемановских операторах. В частности, его спектральное ядро $\Phi(x,y;\lambda)$ $(x,y\in G)$ будет обычным ядром. При фиксированном y $\Phi(\cdot,y;\lambda)\in C^\infty(G)$, так как эта функция является обобщенным решением однородного гипоэллиптического уравнения $(L-\lambda E)u=0$; аналогично $\Phi(x,\cdot;\lambda)\in C^\infty(G)$.

Исследуем поведение $\Phi(x,y;\lambda)$ как функции точки (x,y). Это удобнее всего сделать с помощью подхода, изложенного в п. 4, § 2, при изучении гладкости вплоть до границы спектрального ядра эллиптического оператора. Так как теперь нас интересует лишь гладкость внутри области, то изложение будет в некотором отношении проще. Прежде всего заметим, что справедлива.

Лемма 3.5. *Ядро $R(x,y)$ $(x,y\in G)$, фигурирующее в лемме* 3.4, *при $x\neq y$ будет бесконечно дифференцируемой функцией по каждой из переменных, причем*

$$((L-zE)_x^N R)(x,y)=\delta_y,\quad ((L^{\oplus}-zE)_y^N R)(x,y)=\delta_x. \tag{3.33}$$

Доказательство. Первое из равенств (3.33) означает, что при любом $v\in C_0^\infty(G)$

$$(R(\cdot,y),(L-\bar zE)^N v)_0=\overline{v(y)}\quad (y\in G), \tag{3.34}$$

или, что то же самое, при любых $u,v\in C_0^\infty(G)$

$$\int\limits_G (R(\cdot,y),(L-\bar zE)^N v)_0\,u(y)\,dy=\int\limits_G u(y)\,\overline{v(y)}\,dy. \tag{3.35}$$

Меняя порядок интегрирования (это возможно благодаря лемме 3.4), получим (3.35):

$$\int\limits_G (R(\cdot,y),(L-\bar zE)^N v)_0\,u(y)\,dy=(R_z^N u,(A-\bar zE)^N v)_0=(u,v)_0.$$

Итак, (3.34) доказано. Беря в этом отношении $v\in C_0^\infty(G)$, аннулирующуюся дополнительно в окрестности точки y, найдем, что $R(x,y)$ по $x\in G\setminus\{y\}$ удовлетворяет однородному гипоэллиптическому уравнению $(L-zE)^N u=0$ и поэтому входит в $C^\infty(G\setminus\{y\})$.

Свойства $R(x, y)$ относительно y устанавливаются аналогично. Лемма доказана.

Эта лемма, в частности, показывает, что особенности ядра $R(x, y)$ сосредоточены на диагонали $x = y$.

Рассмотрим некоторую ограниченную подобласть U, расположенную строго внутри G, и выберем несколько большую ограниченную область $V \subset G$, содержащую U строго внутри себя. Пусть $h(x) \in C_0^\infty(G)$ равна 1 в U и аннулируется вне V. *Для каждой функции* $u \in C_0(U)$ (*продолженной нулем на все* G) *справедливо представление типа* (2.16):

$$u(x) = \int_G (L - zE)_x^N [R(x, y)(1 - h(x))] u(y)\, dy \dotplus$$

$$\dotplus \mathrm{M}\left(\int_G R(x, y) h(x) u(y)\, dy\right) \quad (x \in G), \tag{3.36}$$

где M — *минимальный оператор, порожденный в* $L_2(G)$ *выражением* $M = (L - zE)^N$ (поясним, что $\int_G R(x, y) u(y)\, dy$ входит лишь в $C^{l(N)}(G)$ и при $l(N) < Nr$ применять к этому интегралу выражение $(L - zE)^N$ непосредственно подобно (2.16) нельзя).

Докажем (3.36). Прежде всего заметим, что в первом интеграле в (3.36) особенность ядра $R(x, y)$ исключена и поэтому он имеет смысл. Имеет смысл и второе слагаемое: $\int_G R(x, y) u(y)\, dy = (R_z^N u)(x) \in \mathfrak{D}((A - zE)^N) \subseteq \mathfrak{D}(M)$ (M — максимальный оператор в $L_2(G)$, построенный по M), $h(x) \in C_0^\infty(G)$, поэтому произведение этих двух функций в силу гипоэллиптичности $(L - zE)^N$ входит в $\mathfrak{D}(\mathrm{M})$.

Так как $R_z^N u \in \mathfrak{D}((A - zE)^N)$, $hR_z^N u \in \mathfrak{D}(\mathrm{M}) \subseteq \mathfrak{D}((A - zE)^N)$, то и $f = (1 - h) R_z^N u \in \mathfrak{D}((A - zE)^N)$. Но функция f входит в $C^\infty(G)$, поэтому оператор $(A - zE)^N$, являющийся сужением M, на ней совпадает с $Mf = (L - zE)^N f$. Итак,

$$u = (A - zE)^N R_z^N u = (A - zE)^N ((1 - h) R_z^N u) \dotplus (A - zE)^N (hR_z^N u) =$$

$$= (L - zE)^N ((1 - h) R_z^N u) \dotplus \mathrm{M}(hR_z^N u),$$

т. е. равенство (3.36) доказано.

Как и на стр. 413, положим

$$A_1(x, y) = (L - zE)_x^N [R(x, y)(1 - h(x))], \quad A_2(x, y) = R(x, y) h(x) \tag{3.37}$$

$$(x \in G,\ y \in U);$$

эти функции аннулируются при $x \in G \setminus V$. *Пусть* $\varphi \in C^\infty(G)$ *такова, что* $(L\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$ $(x \in G)$. *Тогда*

$$\varphi(y) = \int_V \overline{(A_1(x, y) \dotplus (\lambda - \bar{z})^N A_2(x, y))}\, \varphi(x)\, dx \quad (y \in U). \tag{3.38}$$

Действительно, пусть $u \in C_0(U)$. Учитывая (3.36), получим

$$\int_G \int_G A_1(x, y) \overline{\varphi(x)} u(y)\, dx dy + (\lambda - z)^N \int_G \int_G A_2(x, y) \overline{\varphi(x)} u(y)\, dx dy =$$

$$= \int_G \int_G A_1 \ldots + \int_G \left(\int_G A_2(x, y) u(y)\, dy \right) \overline{((L - \bar{z}E)^N \varphi)(x)}\, dx = \tag{3.39}$$

$$= \int_G \left(\int_G A_1(x, y) u(y)\, dy + M \int_G A_2(x, y) u(y)\, dy \right) \overline{\varphi(x)}\, dx = \int_G u(x) \overline{\varphi(x)}\, dx$$

(нетрудно обосновать произведенную переброску выражения $(L - \bar{z}E)^N$ с φ на $\int_G A_2(x, y) u(y)\, dy$). Благодаря произвольности u в (3.39) заключаем, что (3.38) справедливо.

Теперь при помощи (3.38) получаем следующее представление для спектрального ядра $\Phi(x, y; \lambda)$, аналогичное (2.21):

$$\Phi(x, y; \lambda) = \int_V \int_V \overline{(A_1(\xi, x) + (\lambda - \bar{z})^N A_2(\xi, x))} (A_1(\eta, y) + $$
$$+ (\lambda - z)^N A_2(\eta, y))\ \Phi(\xi, \eta; \lambda)\, d\xi d\eta \qquad (x, y \in U). \tag{3.40}$$

Это представление дает возможность легко исследовать гладкость $\Phi(x, y; \lambda)$ относительно $(x, y) \in U \times U$. Схема исследования такая же, как и на стр. 414—419, и мы ее лишь наметим. Как вытекает из леммы 3.4 и (3.37), вектор-функция $A_2(\cdot, y)$ $(y \in U)$ со значениями в пространстве $L_2(V)$ слабо непрерывно дифференцируема до порядка $l(N)$. Можно показать, что и аналогичная вектор-функция $A_1(\cdot, y)$ $(y \in U)$ бесконечно дифференцируема. Образуя $g_y = A_1(\cdot, y) + (\lambda - z)^N A_2(\cdot, y)$ и $f_x = g_x$ и учитывая, что $\Phi(\cdot, \cdot; \lambda) \in L_2(V \times V) = L_2(V) \otimes L_2(V)$, при помощи леммы 2.5 заключаем: производные $(D_x^\alpha D_y^\beta \Phi)(x, y; \lambda)$ $(|\alpha|, |\beta| \leqslant l(N))$ существуют и непрерывны относительно $(x, y) \in U \times U$.

Поясним, почему $A_1(x, y)$ можно рассматривать как гладкую вектор-функцию $A_1(\cdot, y)$ со значениями в $L_2(V)$. Для каждого $y \in U$ $A_1(\cdot, y) \in C_0^\infty(G)$ а поэтому $A_1(\cdot, y) \in L_2(V)$. Пусть $g \in L_2(V)$, легко видеть, что $\int_V \overline{A_1(x, y)}\, g(x)\, dx$ $(y \in U)$ является обобщенным решением гипоэллиптического уравнения $(L - \bar{z}E)^N u = 0$ внутри U (ср. с выкладками на стр. 415). Отсюда и следует гладкость этого интеграла, т. е. слабая гладкость $A_1(\cdot, y)$.

Итак, производные $(D_x^\alpha D_y^\beta \Phi)(x, y; \lambda)$ $(|\alpha|, |\beta| \leqslant l(N))$ существуют и непрерывны относительно $(x, y) \in U \times U$. При $N \to \infty$ $l(N) \to \infty$ и U — произвольная ограниченная подобласть, расположенная строго внутри G. Поэтому можно сказать, что $\Phi(\cdot, \cdot; \lambda) \in C^\infty(G \times G)$. Мы пришли к следующей теореме (ниже нужно использовать также лемму 2.3).

Теорема 3.4. *Рассмотрим в, вообще говоря, неограниченной области G гипоэллиптическое выражение (3.3) с постоянными вещественными коэффициентами, пусть Λ — соответствующий минимальный оператор, A —*

некоторое его самосопряженное расширение в $L_2(G)$, а E_λ—соответствующее разложение единицы.

Утверждается, что для этого E_λ справедливы все заключения теоремы 2.1 со следующими поправками: а) спектральное ядро и собственные функции бесконечно дифференцируемы, т. е. $\Phi(\cdot, \cdot; \lambda) \in C^\infty(G \times G)$, $\varphi_\alpha(\cdot; \lambda) \in C^\infty(G)$; б) разложение (2.10) можно дифференцировать по $x, y \in G$ неограниченное количество раз без нарушения вида сходимости; в) функция $F(\lambda)$ на спектре A должна быть ограниченной и убывающей при $|\lambda| \to \infty$ быстрее любой степени (точнее, не медленней некоторой фиксированной достаточно высокой степени $\frac{1}{|\lambda|^N}$ ($N \gg 0$) такой, как указано в замечании к теореме 3.3).

Как и в эллиптическом случае, представление (3.40) дает возможность исследовать гладкость ядра $K(x, y)$ оператора $F(A)$ относительно $(x, y) \in G \times G$. См. в связи с этим сказанное в конце п. 4, § 2.

5. О примерах разложений. Ряд формул, выписанных в п. 2, дает возможность подсчитать резольвенту, разложение единицы, проинтегрированное спектральное ядро и спектральное ядро (обобщенное или нет) для конкретных примеров дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, действующих в пространстве $L_2(E_n)$. Такими формулами являются формулы (3.6), (3.15), (3.24) — (3.23) и (3.25). Мы не будем приводить подобные довольно трудоемкие подсчеты (один из них был изложен в п. 8, § 2, пример а)); вместе с тем в следующем параграфе будет продемонстрировано применение метода разделения переменных для этих целей.

В заключение заметим, что один пример разложений по собственным функциям неэллиптического оператора в ограниченной области был приведен в п. 3. § 2, гл. IV.

§ 4. Разделение переменных

Часто в задаче на собственные значения можно произвести разделение переменных. Возникает вопрос, как писать разложения по собственным функциям, если подобные разложения для операторов, получаемых после разделения переменных, известны. Ниже мы дадим ответ на этот вопрос, при этом будет удобно основные рассмотрения проводить для общих гильбертовых пространств.

1. Разделение переменных для операторов в гильбертовом пространстве. Рассмотрим два гильбертовых пространства H' и H'' и их тензорное произведение $H' \otimes H''$. Пусть в H' действует оператор A' с областью определения $\mathfrak{D}(A')$, а в H'' — A'' с $\mathfrak{D}(A'')$ Построим оператор A в $H' \otimes H''$, полагая

$$A = A' \otimes E'' + E' \otimes A'', \quad \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(A') \otimes \mathfrak{D}(A''), \tag{4.1}$$

где E' и E'' — единичные операторы в пространствах H' и H'' соответственно. Как обычно, мы предполагаем, что области определения $\mathfrak{D}(A')$ и $\mathfrak{D}(A'')$ плотны в H' и H'', поэтому $\mathfrak{D}(A)$ плотна в $H' \otimes H''$. Об операторе A будем говорить, что он допускает разделение переменных. Ясно, что это понятие связано с дифференциальными операторами, порожденными выражениями вида

$$(Lu)(x) = (L'_{x_1,\ldots,x_m}u)(x) + (L''_{x_{m+1},\ldots,x_n}u)(x)$$

$$(x = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

где L' и L'' — выражения соответственно от переменных $x_1, \ldots, x_m$ и $x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Если A' и A'' эрмитовы, то $A' \otimes E''$ и $E' \otimes A''$, а значит и A, эрмитовы ($\mathfrak{D}(A' \otimes E'') = \mathfrak{D}(A') \otimes H''$, $\mathfrak{D}(E' \otimes A'') = H' \otimes \mathfrak{D}(A'')$). Действительно, рассмотрим, например, оператор $A' \otimes E''$. Имеем при $f, g \in \mathfrak{D}(A' \otimes E'') = \mathfrak{D}(A') \otimes H''$, т. е. при

$$f = \sum_j f'_j \otimes f''_j, \quad g = \sum_k g'_k \otimes g''_k \quad (f'_j, g'_k \in \mathfrak{D}(A'); \quad f''_j, g''_k \in H'')$$

(здесь и ниже, в пп. 1 и 2, подобные суммы конечны):

$$((A' \otimes E'')f, g) = \left(\sum_j (A'f'_j) \otimes f''_j, \quad \sum_k g'_k \otimes g''_k\right) =$$

$$= \sum_{j,k} (A'f'_j, g'_k)(f''_j, g''_k) = \sum_{j,k} (f'_j, A'g'_k)(f''_j, g''_k) = (f, (A' \otimes E'')g)^*,$$

что и требовалось.

Теорема 4.1. *Пусть A' и A''—эрмитовы операторы, E'_λ и E''_λ— отвечающие им некоторые обычные разложения единицы. Тогда семейство операторов $E_\lambda(-\infty < \lambda < \infty)$, действующих в $H' \otimes H''$ и определяемых формулой*

$$(E_\lambda(f' \otimes f''), g' \otimes g'') = \int_{-\infty}^{\infty} (E'_{\lambda-\mu}f', g')\, d_\mu (E''_\mu f'', g'') \tag{4.2}$$

$$(f', g' \in H'; \quad f'', g'' \in H''),$$

является одним из обычных разложений единицы эрмитова оператора A (поясним, что E_λ, определенное посредством (4.2), нужно расширить сперва билинейным образом, а затем по непрерывности, на все $H' \otimes H''$).

* Мы опускаем в п. 1 индексы пространств в обозначениях скалярных произведений и норм.

Доказательство. Определим на линейной оболочке L формальных произведений $f' \otimes f''$ билинейную форму B_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$, полагая

$$B_\lambda(f, g) = B_\lambda\left(\sum_j f'_j \otimes f''_j, \ \sum_k g'_k \otimes g''_k\right) = \sum_{j,k} B_\lambda(f'_j \otimes f''_j, \ g'_k \otimes g''_k) =$$

$$= \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} (E'_{\lambda-\mu} f'_j, \ g'_k)\, d_\mu (E''_\mu f''_j, \ g''_k)$$

$$\left(f = \sum_j f'_j \otimes f''_j, \ g = \sum_k g'_k \otimes g''_k \in L\right);$$

нетрудно видеть (ср., стр.55—57), что такое определение корректно. При $\lambda_1 < \lambda_2$

$$B_{\lambda_1}(f, f) \leqslant B_{\lambda_2}(f, f) \quad (f \in L). \tag{4.3}$$

В самом деле, обозначим $[\lambda_1 - \mu, \ \lambda_2 - \mu) = \delta_\mu$, тогда

$$B_{\lambda_2}(f, f) - B_{\lambda_1}(f, f) = \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} (E'(\delta_\mu) f'_j, f'_k) d_\mu (E''_\mu f''_j, f''_k) \quad \left(f = \sum_j f'_j \otimes f''_j\right).$$

Для того чтобы установить неотрицательность последней суммы, достаточно убедиться, что подобное выражение с заменой интеграла интегральной суммой неотрицательно, т. е. достаточно проверить неотрицательность суммы вида:

$$\sum_{j,k} \sum_{l=1}^{N} (E'(\delta_{\mu_l}) f'_j, \ f'_k)(E''(\Delta_l) f''_j, \ f''_k) =$$

$$= \sum_{l=1}^{N} \left[\sum_{j,k} (E'(\delta_{\mu_l}) f'_j, \ f'_k)(E''(\Delta_l) f''_j, \ f''_k)\right],$$

где $(-\infty, \infty) = \bigcup_{l=1}^{N} \Delta_l$ — некоторое разбиение оси на полузамкнутые интервалы Δ_l; $\mu_l \in \Delta_l$. Но каждое выражение в квадратных скобках неотрицательно, так как конечномерные матрицы $\|a_{jk}\| = \|(E'(\delta_{\mu_l}) f'_j, \ f'_k)\|$ и $\|b_{jk}\| = \|(E''(\Delta_l) f''_j, \ f''_k)\|$ положительно определенные, а значит в силу известной теоремы такой же будет и матрица $\|a_{jk} b_{jk}\|$. Итак, неравенство (4.3) установлено.

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\lambda \to +\infty} B_\lambda(f, f) = (f, f) \quad (f \in L). \tag{4.4}$$

Действительно, так как $\|E'_\nu\| = 1$, то ниже можно перейти к пределу под знаком интеграла, и мы получим:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} B_\lambda(f'\otimes f'', g'\otimes g'') = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(E'_{\lambda-\mu}f', g')\,d_\mu(E''_\mu f'', g'') =$$

$$= (f', g')(f'', g'') = (f'\otimes f'', g'\otimes g'') \tag{4.5}$$

$$(f', g'\in H';\quad f'', g''\in H''),$$

что и доказывает (4.4).

Из (4.3) и (4.4) следует, что $B_\lambda(f, f)\leqslant(f, f)$ $(f\in L)$. Из определения B_λ непосредственно вытекает, что эта форма эрмитова, поэтому последнее неравенство влечет за собой ограниченность B_λ. Таким образом, существует ограниченный эрмитов оператор E_λ, действующий в $H'\otimes H''$, такой, что $(E_\lambda f, g) = B_\lambda(f, g)$ $(f, g\in L)$.

Для доказательства теоремы нужно убедиться что семейство ограниченных эрмитовых операторов $E_\lambda(-\infty<\lambda<\infty)$ является разложением единицы для оператора A. Прежде всего покажем, что E_λ — ортогональный проектор; для этого достаточно проверить равенство $E_\lambda^2 = E_\lambda$. Построим последовательность разбиений оси $(-\infty, \infty)$ на конечное число интервалов $\Delta_l^{(N)}$ типа $[a, b)$ (в N-м разбиении N интервалов) таким образом, чтобы

$$(E_\lambda(f'\otimes f''), g'\otimes g'') = \int_{-\infty}^{\infty}(E'_{\lambda-\mu}f', g')\,d_\mu(E''_\mu f'', g'') =$$

$$= \lim(E_\lambda^{(N)}(f'\otimes f''), g'\otimes g''),$$

$$E_\lambda^{(N)}(f'\otimes f'') = \sum_{l=1}^{N}(E'_{\lambda-\mu_l^{(N)}}f')\otimes(E''(\Delta_l^{(N)})f''), \tag{4.6}$$

где $\mu_l^{(N)}$ — левый конец интервала $\Delta_l^{(N)}$, а $f', g'\in H'$ и $f'', g''\in H''$ — произвольные. Каждый оператор $E_\lambda^{(N)}$ — проекционный, так как он, очевидно, эрмитов и удовлетворяет соотношению

$$E_\lambda^{(N)2}(f'\otimes f'') = \sum_{l=1}^{N}E_\lambda^{(N)}((E'_{\lambda-\mu_l^{(N)}}f')\otimes(E''(\Delta_l^{(N)})f'')) =$$

$$= \sum_{l,\,k=1}^{N}(E'_{\lambda-\mu_k^{(N)}}E'_{\lambda-\mu_l^{(N)}}f')\otimes(E''(\Delta_k^{(N)})E''(\Delta_l^{(N)})f'') = E_\lambda^{(N)}(f'\otimes f''),$$

т. е. $E_\lambda^{(N)2} = E_\lambda^{(N)}$. Таким образом, $\|E_\lambda^{(N)}\| = 1$ (если $E_\lambda^{(N)}\neq 0$). Далее, из (4.6) следует, что при продолжении разбиения $(E_\lambda^{(N)}f, g)\to$

$\to (E_\lambda f, g)$ $(f, g \in L)$. Так как $\| E_\lambda^{(N)} \| \leqslant 1$, то $E_\lambda^{(N)} \to E_\lambda$ в смысле слабой сходимости операторов. Кроме того,

$$(E_\lambda E_\lambda^{(N)} (f' \otimes f''), g' \otimes g'') = \sum_{l=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} (E'_{\lambda-\mu} E'_{\lambda-\mu_l^{(N)}} f',$$

$$g') \, d_\mu (E''_\mu E'' (\Delta_l^{(N)}) f'', g'') = \sum_{l=1}^{N} \int_{\Delta_l^{(N)}} (E'_{\lambda-\mu} E'_{\lambda-\mu_l^{(N)}} f', g') \, d_\mu (E''_\mu f'', g'') =$$

$$= \sum_{l=1}^{N} \int_{\Delta_l^{(N)}} (E'_{\lambda-\mu} f', g') \, d_\mu (E''_\mu f'', g'') = (E_\lambda (f' \otimes f''), g' \otimes g''),$$

т. е $E_\lambda E_\lambda^{(N)} = E_\lambda$. Так как $E_\lambda^{(N)}$ слабо сходится к E_λ, то отсюда заключаем, что $E_\lambda^2 = E_\lambda$, т. е. E_λ — ортогональный проектор.

Из (4.3) вытекает, что $E_{\lambda_1} \leqslant E_{\lambda_2}$ при $\lambda_1 < \lambda_2$. Отсюда и из того, что операторы E_λ — проекционные, как известно, следует равенство $E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\min(\lambda_1, \lambda_2)}$. Для доказательства того, что E_λ — некоторое разложение единицы, осталось заметить, что выполняются условия нормировки. Из (4.5) вытекает, что $E_{+\infty} = E$; подобно выводу (4.5) легко найдем, что и $E_{-\infty} = 0$, $E_{\lambda-0} = E_\lambda$.

Осталось показать, что разложение единицы E_λ является разложением единицы оператора A. Для этого достаточно проверить равенство

$$(A (f' \otimes f''), g' \otimes g'') = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_\lambda (E_\lambda (f' \otimes f''), g' \otimes g'')$$

$$(f', g' \in H'; \quad f'', g'' \in H'').$$

Имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_\lambda (E_\lambda (f' \otimes f''), g' \otimes g'') = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (E'_{\lambda-\mu} f', g') \, d_\mu (E''_\mu f'', g'') \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_\lambda \, (E'_{\lambda-\mu} f', g') \right\} d_\mu (E''_\mu f'', g'') =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \nu) \, d_\nu \, (E'_\nu f', g') \right\} d_\mu \, (E''_\mu f'', g'') =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d_\nu (E'_\nu f', g') \right\} d_\mu (E''_\mu f'', g'') +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\nu d_\nu (E'_\nu f', g')\right\} d_\mu (E''_\mu f'', g'') =$$
$$= (f', g')(A''f'', g'') + (A'f', g')(f'', g'') =$$
$$= ([(A'f')\otimes f'' + f'\otimes (A''f'')], g'\otimes g'') = (A(f'\otimes f''), g'\otimes g''),$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Заметим, что можно просто написать некоторые разложения единицы, отвечающие эрмитовым операторам $A'\otimes E''$ и $E'\otimes A''$. Именно такими разложениями служат семейства операторов $E'_\lambda\otimes E''$, $E'\otimes E''_\lambda$ (мы используем обозначения теоремы 4.1). Доказательство этого факта нетрудно получить, учитывая свойства тензорного произведения операторов (см. формулы (2.7), гл. I). При помощи разложений единицы $E'_\lambda\otimes E''$ и $E'\otimes E''_\lambda$ формулу (4.2), очевидно, можно переписать в виде слабого интеграла

$$E_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}(E'_{\lambda-\mu}\otimes E'')\, d_\mu (E'\otimes E''_\mu) \tag{4.7}$$

(определение такого интеграла подобно определению в п. 3, § 2, гл. VII).

Обозначим B', B самосопряженные операторы соответственно в H', $H'\otimes H''$, отвечающие разложениям единицы E'_λ, E_λ. Пусть $F(\lambda)$ — некоторая измеримая по Борелю ограниченная функция, согласно (4.7) имеем

$$F(B) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, dE_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(E'_{\lambda-\mu}\otimes E'')\, d_\mu (E'\otimes E''_\mu)\right\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, d_\lambda E'_{\lambda-\mu}\right)\otimes E''\right) d_\mu (E'\otimes E''_\mu).$$

Но $\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, dE'_{\lambda-\mu} = F(B'+\mu E')$, так как вообще если E_λ — разложение единицы некоторого оператора A, то $E_{\lambda-\lambda_0}$ — разложение единицы оператора $A+\lambda_0 E$. Таким образом мы получаем формулу

$$F(B) = \int_{-\infty}^{\infty}(F(B'+\mu E')\otimes E'')\, d_\mu (E'\otimes E''_\mu). \tag{4.8}$$

Интегралы в (4.7) и (4.8) сходятся по существу в некотором сильном смысле. Поясним это лишь для интеграла (4.8) в случае непрерывной $F(\lambda)$. Тогда для любого $f \in H' \otimes H''$ в смысле сходимости в $H' \otimes H''$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F(B' + \mu E') \otimes E'')\, d_\mu (E' \otimes E''_\mu) f =$$

$$= \lim \sum_{l=1}^{N} (F(B' + \mu_l E') \otimes E'') (E' \otimes E''(\Delta_l)) f =$$

$$= \lim \sum_{l=1}^{N} (F(B' + \mu_l E') \otimes E''(\Delta_l)) f, \tag{4.9}$$

где $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ — некоторое разбиение оси $(-\infty, \infty)$ на интервалы вида $[a, b)$, $\mu_l \in \Delta_l$; предел берется при продолжении разбиения. Соотношение (4.9) легко доказывается при помощи обычных рассуждений, применяемых при исследовании сходимости интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} G(\mu) dE_\mu$, где E_λ — некоторое разложение единицы, а $G(\mu)$ — скалярная функция. Наличие в (4.8) вместо скалярной функции $G(\mu)$ операторной $F(B' + \mu E') \otimes E''$ не меняет рассуждений, так как эта функция коммутирует с операторной мерой $E' \otimes E''(\Delta)$.

В частности, обозначая R'_z, R_z резольвенты операторов B', B, получим из (4.8) в смысле сильной сходимости формулу

$$R_z = \int_{-\infty}^{\infty} (R'_{z-\mu} \otimes E'')\, d_\mu (E' \otimes E''_\mu) \quad (\operatorname{Im} z \neq 0). \tag{4.10}$$

Предположим, что операторы A' и A'' самосопряжены. Легко видеть, что тогда и замыкания операторов $A' \otimes E''$ и $E' \otimes A''$ самосопряжены. Так, при $\operatorname{Im} z \neq 0$

$$(A' \otimes E'' - zE)(f' \otimes f'') = ((A' - zE') \otimes E'')(f' \otimes f'') =$$

$$= ((A' - zE') f') \otimes f'' \qquad (f' \in \mathfrak{D}(A'),\ f'' \in \mathfrak{D}(A''))$$

и поэтому $\mathfrak{R}(A' \otimes E'' - zE)$ плотно в $H' \otimes H''$, т. е. $\overline{A' \otimes E''}$ самосопряжено.

Справедлива менее тривиальная лемма.

Лемма 4.1. *Если операторы A' и A'' самосопряжены, то и замыкание оператора A самосопряжено.*

Доказательство. Пусть B — самосопряженное расширение, о котором шла речь выше, R_z — его резольвента. Для доказательства леммы достаточно убедиться, что при $\operatorname{Im} z \neq 0$ $R_z(f' \otimes f'')$ для

$f' \in \mathfrak{D}(A')$, $f'' \in \mathfrak{D}(A'')$ принадлежит области определения замыкания A. Заменяя интеграл (4.10) интегральной суммой, получим согласно (4.9)

$$R_z(f' \otimes f'') = \lim \sum_{l=1}^{N} (R'_{z-\mu_l} \otimes E''(\Delta_l))(f' \otimes f'') =$$

$$= \lim \sum_{l=1}^{N} (R'_{z-\mu_l} f') \otimes (E''(\Delta_l) f''),$$

причем $\sum_{l=1}^{N} (R'_{z-\mu_l} f') \otimes (E''(\Delta_l) f'') \in \mathfrak{D}(A') \otimes \mathfrak{D}(A'') = \mathfrak{D}(A)$.

Кроме того,

$$A\Big(\sum_{l=1}^{N} (R'_{z-\mu_l} f') \otimes (E''(\Delta_l) f'')\Big) = \sum_{l=1}^{N} (R'_{z-\mu_l} \otimes E''(\Delta_l)) A(f' \otimes f''),$$

и поэтому благодаря (4.9) последнее выражение сходится (к $R_z A(f' \otimes f'')$) в $H' \otimes H''$. Итак, действительно $R_z(f' \otimes f'') \in \mathfrak{D}(\bar{A})$. Лемма доказана

Из этой леммы и теоремы 4.1 вытекает

Теорема 4.2. *Если A' и A'' самосопряжены, то самосопряжено замыкание A и разложение единицы этого оператора, функция от него и резольвента пишутся согласно формулам* (4.7) (*т. е.* (4.2)), (4.8) *и* (4.10).

Ясно, что в лемме 4.1 и теореме 4.2 достаточно было считать самосопряженными лишь замыкания операторов A' и A''. Если хотя бы одно из этих замыканий несамосопряжено, то самосопряженное расширение B оператора A, строящееся согласно разложению единицы (4.7), будем называть разделенным. Пусть дефектные числа каждого из операторов A' и A'' одинаковы, перебирая в (4.7) всевозможные E'_λ и E''_λ, мы получим всевозможные разделенные самосопряженные расширения A. Можно показать, что множество всех разделенных самосопряженных расширений A будет, вообще говоря, у́же, чем множество всех самосопряженных расширений A в $H' \otimes H''$. Подобный пример, по существу, построен в п. 6, § 4 гл. VII: спектральная матрица (4.33), гл. VII, отвечающая разделенному расширению L, зависит от меньшего числа параметров определяющих расширение, чем спектральная матрица общего самосопряженного расширения L в $l_2(\Pi)$, которая может зависеть от произвольного оператора на операторной окружности, см. стр. 589.

Докажем еще, что *спектр $S(B)$ разделенного самосопряженного расширения оператора A совпадает с замыканием алгебраической* *суммы спектров* $S(B')$ *и* $S(B'')$ *самосопряженных операторов* B' *и* B'', *отвечающих* E'_λ *и* E''_λ: $S(B)=\overline{S(B')+S(B'')}$ (т. е. $\lambda\in S(B)$ тогда и только тогда, когда λ является пределом чисел $\lambda'+\lambda''$, где $\lambda'\in S(B')$, $\lambda''\in S(B'')$).

Доказательство вытекает из следующего просто устанавливаемого замечания: если $\sigma'(\lambda)$ и $\sigma''(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ — неубывающие ограниченные функции, то множество точек роста неубывающей ограниченной функции

$$\sigma(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma'(\lambda-\mu)\,d\sigma''(\mu)\qquad(-\infty<\lambda<\infty)\tag{4.11}$$

совпадает с замыканием алгебраической суммы множеств точек роста функций $\sigma'(\lambda)$ и $\sigma''(\lambda)$. Действительно, обозначим $S(B',f')$, $S(B'',f'')$ и $S(B,f'\otimes f'')$ множества точек роста функций $(E'_\lambda f',f')$, $(E''_\lambda f'',f'')$ и $(E_\lambda(f'\otimes f''),f'\otimes f'')$ соответственно ($f'\in H'$, $f''\in H''$). Очевидно,

$$S(B')=\bigcup_{f'\in H'}S(B',f'),\quad S(B'')=\bigcup_{f''\in H''}S(B'',f''),$$

$$S(B)=\bigcup_{f'\in H',\,f''\in H''}S(B,f'\otimes f'')$$

(напомним, что линейная оболочка векторов $f'\otimes f''$ плотна в $H'\otimes H''$). Полагая в (4.2) $g'=f'$, $g''=f''$ и сравнивая полученное равенство с (4.11), заключаем с помощью высказанного замечания, что $S(B,f'\otimes f'')=\overline{S(B',f')+S(B'',f'')}$ при любых $f'\in H'$, $f''\in H''$. Переходя в этих равенствах к объединениям по $f'\in H'$, $f''\in H''$, легко получим: $S(B)=\overline{S(B')+S(B'')}$, что и требовалось.

Из доказанного вытекает, в частности, что *формула* (4.10) *справедлива для любой регулярной точки* z *оператора* B, так как если $z\,\overline{\in}\,S(B)$, то $z-\mu\,\overline{\in}\,S(B')$ при $\mu\in S(B'')$.

Сделаем последнее замечание. Всюду выше мы рассматривали лишь обычные разложения единицы и самосопряженные расширения в H', H'' и $H'\otimes H''$. Вместе с тем из приведенных фактов нетрудно сделать выводы о связях между обобщенными разложениями единицы, отвечающими операторам A', A'' и A.

2. **Разложение по обобщенным собственным векторам.** Мы его будем строить для оператора A вида (4.1), где A' и A'' эрмитовы и действуют в некоторых сепарабельных гильбертовых пространствах H'_0 и H''_0. Из сказанного в п. 1 и гл. V ясно, что по существу достаточно рассмотреть случай самосопряженных A', A'' и, следовательно, замыкания A; ниже будет предполагаться это допущение.

Ясно, что сейчас оснащение пространства $H_0' \otimes H_0''$, в котором действует A, удобно выбрать специальным образом. Рассмотрим цепочки

$$H'_- \supseteq H'_0 \supseteq H'_+, \qquad H''_- \supseteq H''_0 \supseteq H''_+ \tag{4.12}$$

с квазиядерными вложениями $H'_+ \to H'_0$ и $H''_+ \to H''_0$. Перемножая (4.12), получим цепочку (см. п. 2, § 2, гл. I)

$$H'_- \otimes H''_- \supseteq H'_0 \otimes H''_0 \supseteq H'_+ \otimes H''_+. \tag{4.13}$$

Очевидно, тензорное произведение двух операторов Гильберта—Шмидта будет снова оператором Гильберта—Шмидта. Так как оператор вложения $H'_+ \otimes H''_+ \to H'_0 \otimes H''_0$ равен тензорному произведению операторов вложения $H'_+ \to H'_0$ и $H''_+ \to H''_0$, то в результате заключаем, что вложение $H'_+ \otimes H''_+ \to H'_0 \otimes H''_0$ квазиядерно. Для построения разложения по обобщенным собственным векторам $\bar{A}$ мы и будем пользоваться цепочкой (4.13).

Как известно, выбор спектральной меры особой роли не играет. Все же сейчас ее удобно строить обычным образом как след операторов типа (1.10), гл. V. Если так выбранные спектральные меры операторов A', A'' и $\bar{A}$ обозначить $d\varrho'(\lambda)$, $d\varrho''(\lambda)$ и $d\varrho(\lambda)$, то нетрудно убедиться, что ϱ будет равна свертке ϱ' и ϱ'':

$$\varrho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho'(\lambda - \mu)\, d\varrho''(\mu) = (\varrho' * \varrho'')(\lambda)\,^*. \tag{4.14}$$

В самом деле, пусть J', J'' и J — операторы типа J, связанные соответственно с цепочками (4.12) и (4.13). Тогда (см. теорему 2.1, гл. I) $J = J' \otimes J''$. Рассмотрим их как операторы $\hat{J}'$, $\hat{J}''$ и $\hat{J}$, действующие в пространствах H'_0, H''_0 и $H'_0 \otimes H''_0$. Согласно общей схеме, п. 1, § 2, гл. V, имеем: $\varrho'(\Delta) = \text{Сл.}\,(\hat{J}'E'(\Delta)\hat{J}')$, $\varrho''(\Delta) = \text{Сл.}\,(\hat{J}''E''(\Delta)\hat{J}'')$, $\varrho(\Delta) = \text{Сл.}\,(\hat{J}E(\Delta)\hat{J})$. Выберем в H'_0 и H''_0 некоторые ортонормированные базисы $e'_1, e'_2, \ldots$ и $e''_1, e''_2, \ldots$, тогда $e'_j \otimes e''_k$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$ будет ортонормированным базисом в $H'_0 \otimes H''_0$. Используя (4.2), получим:

$$\varrho(\lambda) = \text{Сл.}\,(\hat{J}E_\lambda\hat{J}) = \sum_{j,\,k=1}^{\infty} ((\hat{J}' \otimes \hat{J}'')E_\lambda(\hat{J}' \otimes \hat{J}'')(e'_j \otimes e''_k),\, e'_j \otimes e''_k)_{H'_0 \otimes H''_0} =$$

* Из этой формулы еще раз следует равенство $S(B) = \overline{S(B') \dotplus S(B'')}$, установленное в конце п. 1.

$$= \sum_{j,k=1}^{\infty} (E_\lambda((\hat{J}'e_j') \otimes (\hat{J}''e_k'')), (\hat{J}'e_j') \otimes (\hat{J}''e_k''))_{H_0'\otimes H_0''} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (E'_{\lambda-\mu}\hat{J}'e_j', \hat{J}'e_j')_{H_0'} d_\mu (E''_\mu \hat{J}''e_k'', \hat{J}''e_k'')_{H_0''} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho'(\lambda-\mu)\, d_\mu (E''_\mu \hat{J}''e_k'', \hat{J}''e_k'')_{H_0''} = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho'(\lambda-\mu)\, d\varrho''(\mu),$$

что и требовалось.

Обозначим $P'(\lambda)$ и $P''(\lambda)$—операторы обобщенного проектирования, отвечающие A' и A''; эти операторы являются операторами Гильберта — Шмидта (и даже с конечным следом), действующими соответственно из H'_+ в H'_- и из H''_+ в H''_-. Нетрудно доказать следующую формулу:

$$E_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\lambda-\mu} P'(\nu) \otimes P''(\mu)\, d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu) =$$

$$= \int_{\nu+\mu<\lambda} P'(\nu) \otimes P''(\mu)\, d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu), \tag{4.15}$$

где интеграл сходится в смысле гильбертовой нормы операторов, действующих из $H'_+ \otimes H''_+$ в $H'_- \otimes H''_-$.

В самом деле, очевидно, $|A \otimes B| = |A||B|$, поэтому $|P'(\nu) \otimes \otimes P''(\mu)| = |P'(\nu)||P''(\mu)| \leqslant 1$ и так как мера $d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu)$ конечна, то интеграл (4.15) действительно сходится в указанном смысле. Далее, благодаря (4.2) и (2.15), гл. V, имеем при $u', v' \in H'_+$; $u'', v'' \in H''_+$

$$(E_\lambda(u' \otimes u''), v' \otimes v'')_{H_0'\otimes H_0''} = \int_{-\infty}^{\infty} (E'_{\lambda-\mu}u', v')_{H_0'} d_\mu (E''_\mu u'', v'')_{H_0''} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\lambda-\mu} (P'(\nu)u', v')_{H_0'} (P''(\mu)u'', v'')_{H_0''} d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu) =$$

$$= \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\lambda-\mu} P'(\nu) \otimes P''(\mu)\, d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu) \right) (u' \otimes u''), v' \otimes v'' \right)_{H_0'\otimes H_0''},$$

откуда и следует равенство (4.15).

Будем рассматривать E_λ как оператор, действующий из $H'_+ \otimes H''_+$ в $H'_- \otimes H''_-$, тогда согласно замечанию в конце п. 3, § 2, гл. V, существует ϱ-почти для всех λ производная $\frac{dE_\lambda}{d\varrho(\lambda)}$, равная оператору обобщенного проектирования $P(\lambda)$, отвечающему $\bar{A}$. Итак, мы доказали формулу:

$$P(\lambda) = \frac{d}{d\varrho(\lambda)} \int\limits_{\nu+\mu<\lambda} P'(\nu) \otimes P''(\mu)\, d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu). \tag{4.16}$$

Формулы (4.8) и (4.10) также полезно переписать с применением операторов обобщенного проектирования. Для этого нужно заметить, что всякий непрерывный оператор C, действующий в H_0', если его рассматривать как действующий из H_+' в H_-', будет Гильберта — Шмидта (благодаря квазиядерности вложений $H_+' \to H_0'$ и $H_0' \to H_-'$). Поэтому $F(A' + \mu E') \otimes P''(\mu)$ является оператором Гильберта — Шмидта из $H_+' \otimes H_+''$ в $H_-' \otimes H_-''$, причем

$$\begin{aligned} |F(A' + \mu E') \otimes P''(\mu)| &= |F(A' + \mu E')|\,|P''(\mu)| \leqslant |F(A' + \mu E')| = \\ &= |S'F(A' + \mu E')\,O'| \leqslant \|S'F(A' + \mu E')\|\,|O'| \leqslant \\ &\leqslant |S'F(A' + \mu E')|\,|O'| \leqslant |S'|\,\|F(A' + \mu E')\|\,|O'| \leqslant C < \infty \end{aligned}$$

равномерно по $\mu \in (-\infty, \infty)$ (мы воспользовались свойствами гильбертовской нормы, приведенными на стр. 321, O', S' — соответствующие операторы вложения). Теперь подобно выводу (4.15) при помощи (4.8) и (4.10) легко заключить, что

$$F(\bar{A}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(A' + \mu E') \otimes P''(\mu)\, d\varrho''(\mu), \tag{4.17}$$

$$R_z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R'_{z-\mu} \otimes P''(\mu)\, d\varrho''(\mu) \qquad (z \,\bar{\in}\, S(\bar{A}))$$

(интегралы сходятся в смысле гильбертовой нормы операторов, действующих из $H_+' \otimes H_+''$ в $H_-' \otimes H_-''$).

Наконец, пользуясь (2.16), гл. V, можно (4.17) записать так (сходимость интегралов прежняя):

$$\begin{gathered} F(\bar{A}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\nu + \mu)\, P'(\nu) \otimes P''(\mu)\, d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu), \\ R_z = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu + \mu - z} P'(\nu) \otimes P''(\mu)\, d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu) \qquad (z \,\bar{\in}\, S(\bar{A})). \end{gathered} \tag{4.18}$$

Все сказанное в этом пункте резюмируем в виде следующей теоремы.

Теорема 4.3. *Пусть A' и A'' — самосопряженные операторы в пространствах H_0' и H_0''; следовательно, замыкание A самосопряжено в $H_0' \otimes H_0''$. Будем рассматривать разложение по обобщенным собственным векторам операторов A', A'' и $\bar{A}$, используя цепочки* (4.12) *и* (4.13), *где вложения $H_+' \to H_0'$ и $H_+'' \to H_0''$ квазиядерны. Пусть E_λ', E_λ'', E_λ и $d\varrho'(\lambda)$, $d\varrho''(\lambda)$, $d\varrho(\lambda)$ — разложения единицы и спектральные меры (построенные как следы) операторов A', A'', $\bar{A}$; $P'(\lambda)$, $P''(\lambda)$, $P(\lambda)$ — соответствующие операторы обобщенного проектирования.*

Тогда справедливы формулы (4.14) — (4.18), *причем интегралы в* (4.15) — (4.18) *сходятся по гильбертовой норме операторов действующих из $H_+' \otimes H_+''$ в $H_-' \otimes H_-''$, а производная в* (4.16) *существует ϱ-почти для всех λ в смысле такой нормы. Поясним, что в* (4.17) — (4.18) $F(\lambda)$ — *произвольная измеримая по Борелю ограниченная функция, а R_z' и R_z — резольвенты операторов A' и $\bar{A}$.*

Установим сейчас интересную формулу, детализирующую структуру производной (4.16). Для вывода этой формулы нам по существу придется воспользоваться соображениями типа примененных на стр. 453—454 и связанных с введением формы σ_λ (сейчас $L(\nu, \mu) = \nu + \mu$). Однако теперь роль лебеговой меры $d\xi_1 \ldots d\xi_n$ играет абстрактная мера $d\varrho'(\nu) d\varrho''(\mu)$, поэтому положение несколько осложняется и нам придется сперва напомнить некоторые факты теории интегрирования (см. N. Bourbaki [1], стр. 57—63).

Рассмотрим два локально компактные сепарабельные пространства Q и Λ, пусть $\lambda = L(x)$ ($x \in Q$, $\lambda \in \Lambda$) — некоторое непрерывное отображение Q на все Λ. Пусть на борелевских множествах пространства Q определена некоторая конечная мера $\sigma(\Delta)$. По L можно построить L-образ $(L\sigma)(\Delta)$ этой меры, понимая под $L\sigma$ конечную меру, определенную на борелевских множествах пространства Λ и связанную с σ равенством

$$\int_\Lambda f(\lambda)\, d(L\sigma)(\lambda) = \int_Q f(L(x))\, d\sigma(x), \tag{4.19}$$

где $f(\lambda)$ — произвольная функция на Λ, непрерывная и имеющая конечный предел на ∞. Существование меры $L\sigma$ немедленно следует из теоремы об общем виде линейного непрерывного функционала на пространстве непрерывных функций на компакте: правая часть в (4.19) определяет такой функционал на $C(\Lambda \cup \infty)$, где $\Lambda \cup \infty$ — компактизация Λ путем присоединения формальной бесконечно удаленной точки ∞.

Факт, который мы будем использовать, заключается в следующем. Обозначим L_λ полный прообраз точки λ при отображении $x \to L(x)$ («поверхность в Q с уравнением $L(x) = \lambda$»). Утверждается, что на борелевских множествах из Q существует семейство конечных мер $\sigma_\lambda(\Delta)$ $(\lambda \in \Lambda)$, обладающее следующими свойствами: а) каждая мера $\sigma_\lambda(\Delta)$ сосредоточена на L_λ; б) для любой функции $g(x) \in L_1(Q, d\sigma(x))$ справедливо равенство

$$\int_Q g(x)\, d\sigma(x) = \int_\Lambda \left(\int_{L_\lambda} g(x)\, d\sigma_\lambda(x) \right) d(L\sigma)(\lambda). \tag{4.20}$$

Предположим, что $\Lambda = (-\infty, \infty)$, и заменим в (4.20) $g(x)$ на суммируемую относительно $d\sigma(x)$ функцию $\varkappa_{(-\infty,\lambda)}(L(x))\, g(x)$, где $\varkappa_{(-\infty,\lambda)}$ — характеристическая функция интервала $(-\infty, \lambda)$, а $g \in L_1(Q, d\sigma(x))$.
Получим

$$\int_{L(x)<\lambda} g(x)\, d\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\lambda} \left(\int_{L_\mu} g(x)\, d\sigma_\mu(x) \right) d(L\sigma)(\mu).$$

Отсюда заключаем, что $L\sigma$-почти для всех λ справедлива формула

$$\frac{d}{d(L\sigma)(\lambda)} \int_{L(x)<\lambda} g(x)\, d\sigma(x) = \int_{L_\lambda} g(x)\, d\sigma_\lambda(x) \quad (g \in L_1(Q, d\sigma(x))). \tag{4.21}$$

Используем эту формулу для подсчета производной (4.16). С этой целью положим $Q = E_2$, $x = (\nu, \mu)$, $L(x) = \nu + \mu$, $d\sigma(x) = d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu)$. Найдем $L\sigma$. Согласно (4.19) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(L\sigma)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu + \mu)\, d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varrho'(\lambda - \mu)\, d\varrho''(\mu) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(\varrho' * \varrho'')(\lambda),$$

откуда благодаря произвольности $f(\lambda)$ вытекает, что $L\sigma = \varrho' * \varrho''$. Учитывая (4.14), найдем: $L\sigma = \varrho$.

Пусть $U, V \in H'_+ \otimes H''_+$, из (4.16) при помощи (4.21) теперь получим

$$(P(\lambda) U, V)_{H'_0 \otimes H''_0} = \frac{d}{d\varrho(\lambda)} \int_{\nu+\mu<\lambda} ((P'(\nu) \otimes P''(\mu)) U,$$

$$V)_{H'_0 \otimes H''_0}\, d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu) = \int_{\nu+\mu=\lambda} ((P'(\nu) \otimes P''(\mu)) U, V)_{H'_0 \otimes H''_0}\, d\varrho_\lambda(\nu, \mu), \tag{4.22}$$

где $d\varrho_\lambda(\nu, \mu)$ обозначает конечную меру $d\sigma_\lambda(\nu, \mu)$. Равенство (4.22) можно переписать в виде

$$P(\lambda) = \int\limits_{\nu+\mu=\lambda} P'(\nu)\otimes P''(\mu)\, d\varrho_\lambda(\nu, \mu), \tag{4.23}$$

причем этот интеграл сходится не только слабо, но и по гильбертовой норме операторов: благодаря конечности меры $d\varrho_\lambda(\nu,\mu)$. Итак, мы пришли к следующей теореме

Теорема 4.4. *На борелевских множествах плоскости* (ν, μ) ϱ-*почти для каждого* $\lambda\in(-\infty, \infty)$ *существует конечная мера* $d\varrho_\lambda(\nu,\mu)$, *сосредоточенная на прямой* $\nu+\mu=\lambda$, *такая, что справедливо представление* (4.23), *в котором интеграл сходится по гильбертовой норме операторов, действующих из* $H'_+\otimes H''_+$ *в* $H'_-\otimes H''_-$.

Часто бывает, что спектральная мера не задана как след некоторого оператора типа (1.10), гл. V (или это неизвестно). Обсудим некоторые вопросы, здесь возникающие. Прежде всего, можно ли теперь пользоваться формулой (4.14) для подсчета $d\varrho(\lambda)$? Оказывается, что *если* $d\varrho'(\lambda)$ *и* $d\varrho''(\lambda)$ — *произвольным образом определенные спектральные меры операторов* A' *и* A'', *являющиеся конечными мерами, то формула* (4.14) *дает спектральную меру оператора* $\bar{A}$. Из определения спектральной меры на стр. 341 явствует, что для доказательства утверждения достаточно установить следующее: пусть на борелевских множествах на оси заданы конечные меры ϱ'_1, ϱ''_1 и ϱ', ϱ'', причем ϱ'_1 (ϱ''_1) абсолютно непрерывна относительно ϱ' (ϱ''). Тогда $\varrho'_1*\varrho''_1$ абсолютно непрерывна относительно $\varrho'*\varrho''$. Этот факт вытекает из формулы (4.21). Действительно, обозначим $M'(\lambda) = \dfrac{d\varrho'_1(\lambda)}{d\varrho'(\lambda)}$, $M''(\lambda) = \dfrac{d\varrho''_1(\lambda)}{d\varrho''(\lambda)}$ и положим в (4.21) $Q=E_2$, $x=(\nu, \mu)$, $L(x)=\nu+\mu$, $d\sigma(x)=d\varrho'(\nu)d\varrho''(\mu)$, $g(x)=M'(\nu)M'(\mu)$. Как мы знаем, $L\sigma=\varrho'*\varrho''$. Существование производной в (4.21) обозначает, что относительно $\varrho'*\varrho''$ абсолютно непрерывна мера, определяемая неубывающей функцией от λ

$$\int\limits_{\nu+\mu<\lambda} M'(\nu)M''(\mu)\, d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu) = \int\limits_{\nu+\mu<\lambda} d\varrho'_1(\nu)\, d\varrho''_1(\mu) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varrho'_1(\lambda-\mu)\, d\varrho''_1(\mu) = (\varrho'_1*\varrho''_1)(\lambda),$$

что и требовалось. Утверждение доказано.

Таким образом, при подсчете спектральной меры $d\varrho(\lambda)$ оператора $\bar{A}$ можно поступать следующим образом: заданные спектральные меры $d\varrho'(\lambda)$ и $d\varrho''(\lambda)$ преобразуем к спектральным мерам $d\varrho'_1(\lambda)$ и $d\varrho''_1(\lambda)$, являющимся конечными мерами. Затем строим свертку $\varrho_1'*\varrho_1''$, в качестве $d\varrho(\lambda)$ можно взять любую меру, эквивалентную $d(\varrho_1'*\varrho_1'')$.

В равенствах (4.15) — (4.18) *всюду под спектральными мерами можно понимать произвольные спектральные меры (изменив должным образом операторы обобщенного проектирования).* Это очевидно, так как в (4.15) —(4.18) фигурируют лишь произведения $P'(\lambda)\,d\varrho'(\lambda)$, $P''(\lambda)\,d\varrho(\lambda)$ и $P(\lambda)\,d\varrho(\lambda)$, инвариантные относительно преобразования спектральных мер. *Равенство* (4.23) *также верно для этих измененных операторов обобщенного проектирования, при этом возникнет новая мера* $d\varrho_\lambda(\nu,\mu)$ *с прежними свойствами, но, возможно, бесконечная.* Действительно, пусть $P_1'(\lambda) = \frac{1}{M'(\lambda)}P'(\lambda)$, $P_1''(\lambda) = \frac{1}{M''(\lambda)}P''(\lambda)$ и $P_1(\lambda) = \frac{1}{M(\lambda)}P(\lambda)$ — измененные операторы проектирования. Выражая отсюда $P'(\lambda)$, $P''(\lambda)$ и $P(\lambda)$ через $P_1'(\lambda)$, $P_1''(\lambda)$ и $P_1(\lambda)$ и подставляя их в (4.23), получим такое же равенство относительно $P_1'(\lambda)$, $P_1''(\lambda)$ и $P_1(\lambda)$, где роль $d\varrho_\lambda(\nu,\mu)$ будет играть

$$\frac{M'(\nu)\,M''(\mu)}{M(\lambda)}\,d\varrho_\lambda(\nu,\mu). \tag{4.24}$$

Для применения развитой теории существенно уметь подсчитывать меру $d\varrho_\lambda(\nu,\mu)$ в (4.23). Конечно, можно было бы просто проводить дифференцирование в (4.16) по принятой спектральной мере $d\varrho(\lambda)$ оператора $\bar{A}$, однако технически это обычно громоздко. Мы поступим следующим образом. Прежде всего заметим, что при любом выборе спектральных мер справедлива формула

$$\frac{d}{d\varrho(\lambda)}\int\limits_{\nu+\mu<\lambda} g(\nu,\mu)\,d\varrho'(\nu)\,d\varrho''(\mu) = \int\limits_{\nu+\mu=\lambda} g(\nu,\mu)\,d\varrho_\lambda(\nu,\mu) \tag{4.25}$$

$$(g\in L_1(E_2,\ d\varrho'(\nu)\,d\varrho''(\mu))).$$

Действительно, пусть сперва спектральные меры выбираются как следы. Тогда (4.25) непосредственно вытекает из (4.21), если воспользоваться выбором Q, L и т. д., указанным при выводе (4.23). В общем случае нужно подставить в доказанный уже частный случай (4.25) $d\varrho'(\nu) = \frac{1}{M'(\nu)}\,d\varrho_1'(\nu)$, $d\varrho''(\mu) = \frac{1}{M''(\mu)}\,d\varrho_1''(\mu)$ и $d\varrho(\lambda) = \frac{1}{M(\lambda)}\,d\varrho_1(\lambda)$ и воспользоваться тем, что роль $d\varrho_\lambda(\nu,\mu)$ теперь играет (4.24).

Интеграл в правой части (4.25) можно переписать в виде

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda-\mu,\mu)\, d_\mu\varrho_\lambda\ (\lambda-\mu,\ \mu)$. Полагая в (4.25) $g(\nu,\ \mu)=\operatorname{sign}\tau\cdot\varkappa_{[0,\tau)}(\mu)$ $(\tau\in(-\infty,\ \infty))$, где при $\tau<0$ под $[0,\ \tau)$ понимается $[\tau,\ 0)$, получим формулу:

$$\varrho_\lambda(\lambda-\tau,\ \tau)-\varrho_\lambda(\lambda,\ 0)=\operatorname{sign}\tau\cdot\frac{d}{d\varrho(\lambda)}\int\limits_{\substack{\nu+\mu<\lambda,\\ \mu\in[0,\tau)}} d\varrho'(\nu)d\varrho''(\mu)$$
$$(\lambda,\ \tau\in(-\infty,\ \infty)). \tag{4.26}$$

Итак, *при произвольных спектральных мерах справедливо представление* (4.23), *которое мы запишем в виде*

$$P(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} P'(\lambda-\mu)\otimes P''(\mu)\, d_\mu\varrho_\lambda(\lambda-\mu,\ \mu). \tag{4.27}$$

Мера $d_\mu\varrho_\lambda(\lambda-\mu,\ \mu)$ *определена* ϱ-*почти для каждого* λ *посредством формулы* (4.26).

Сделаем еще некоторые замечания.

В формулах (4.15) — (4.18) и (4.23), (4.27) можно было бы перейти к записи посредством индивидуальных обобщенных собственных векторов и преобразованиям Фурье по ним, применив представление типа (2.20), гл. V. Соответствующих равенств и формулировок мы приводить не будем и предоставим их читателю. Отметим, что равенство (4.23) при этом перейдет в обобщение хорошо известного в случае дискретного спектра факта, утверждающего, что для построения полной системы собственных векторов оператора нужно брать линейные комбинации тензорных произведений таких векторов для A' и для A''.

Мы также нигде не говорили о выборе линейного топологического пространства Д для $\tilde{A}$ в случае возможности продолжения оснащения. Ясно, что если такая возможность есть для A' и A'' соответственно с пространствами Д$'$ и Д$''$, то она будет иметься и для $\tilde{A}$ с пространством Д $=$ Д$'\otimes$ Д$''$.

Наконец заметим, что можно было бы развивать теорию пп. 1 и 2, рассматривая другие, чем (4.1), конструкции оператора A по A' и A''. Например, считать $A=A'\otimes A''$ рассматривать большее число элементарных операторов $A',\ A'',\ \ldots$, «действующих по различным переменным», и т. д. Здесь, естественно, нужно пользоваться аналогией с построениями п. 2, § 3.

3. Разделение переменных в пространствах L_2. Часто разделение переменных производится для случая $H_0'=L_2(Q',\ dx')$, $H_0''=L_2(Q'',\ dx'')$. Здесь Q' — локально компактное сепарабельное пространство, dx' — неотрицательная мера на борелевских множествах из Q', конечная на компактных множествах и положительная на открытых; Q'' и dx'' имеют аналогичный смысл. Теперь $H_0'\otimes H_0''=L_2(Q'\times Q'',\ dx'dx'')$. По-прежнему для простоты считаем, что A' и A'' — самосопряженные.

Обычная ситуация: операторы A' и A'' — карлемановские, $\bar{A}$ может не быть карлемановским. Обозначая понятным образом спектральные ядра, получим из (4.16), (4.23), (4.27):

$$\Phi((x',x''),(y',y'');\lambda)=\frac{d}{d\varrho(\lambda)}\int\limits_{\nu+\mu<\lambda}\Phi'(x',y';\nu)\Phi''(x'',y'';\mu)\times$$

$$\times\,d\varrho'(\nu)\,d\varrho''(\mu)=\int\limits_{\nu+\mu=\lambda}\Phi'(x',y';\nu)\Phi''(x'',y'';\mu)\,d\varrho_\lambda(\nu,\mu)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi'(x',y';\lambda-\mu)\Phi''(x'',y'';\mu)\,d_\mu\varrho_\lambda(\lambda-\mu,\mu)\qquad(4.28)$$

$$(x',y'\in Q';\ x'',y''\in Q'').$$

Заметим, что интегралы в (4.28) сходятся в некотором обобщенном смысле, поэтому $\Phi((x',x''),(y',y'');\lambda)$ может быть и обобщенной функцией. Подобные же представления получаем из формул (4.15), (4.17), (4.18).

В случае пространств L_2 по мере Лебега ($H_0'=L_2(G',dx')$, $H_0''=L_2(G'',dx'')$) весьма просто пишется ядро $\Theta(x,y;\lambda)$ (см. стр. 352). Именно, так как $\omega((x',x''),\cdot)=\omega(x',\cdot)\,\omega(x'',\cdot)=\omega(x',\cdot)\otimes\omega(x'',\cdot)$, то благодаря (4.2) в понятных обозначениях

$$\Theta((x',x''),(y',y'');\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Theta'(x',y';\lambda-\mu)\,d_\mu\Theta''(x'',y'';\mu)\quad(4.29)$$

$$(x',y'\in G';\ x'',y''\in G'').$$

Дальнейшую подобную детализацию формул пп. 1 и 2 мы проводить уже не будем, частично она будет указана в примерах следующих двух пунктов.

4. Примеры. Эллиптические выражения. Ограничимся менее известным случаем задач в неограниченной области.

а) *Выражение Лапласа в полупространстве.* Пусть G — полупространство $\xi>0$ пространства E_{n+1} точек $(x,\xi)=(x_1,\dots,x_n,\xi)$, рассмотрим в G $n+1$-мерное выражение Лапласа (2.29) с граничным условием $\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)(x,0)=0$ $(x\in E_n)$. Ясно, что в $L_2(G)$ соответствующий сильный оператор Λ(гр) будет эрмитовым. Его можно рассматривать как получаемый разделением переменных. Действительно, пусть $A' = \Lambda_n$ — минимальный оператор, порожденный в $H'_0 = L_2(E_n)$ n-мерным выражением Лапласа, а $A'' = \Lambda_1$(гр) — сильный оператор, порожденный выражением $-\frac{d^2}{d\xi^2}$ и граничным условием $\left(\frac{du}{d\xi}\right)(0)=0$ в пространстве $L_2((0, \infty))$ функций $f(\xi)$. Тогда $L_2(G) = L_2(E_n) \otimes \otimes L_2((0, \infty)) = H'_0 \otimes H''_0$, а Λ(гр) совпадает с оператором $\overline{A}$.

Как указывалось в п. 8, § 2, оператор Λ_n самосопряжен; нетрудно также доказать (см. п. 3, § 5), что и Λ_1(гр) самосопряжен. Следовательно и Λ(гр) такой. Его спектральные характеристики можно найти при помощи теорем 4.3 — 4.4, так как Λ_n хорошо изучен, а спектральное ядро Λ_1(гр) имеет вид (см. п. 3, § 5):

$$\Phi''(\xi, \eta; \lambda)\, d\varrho''(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \cos\sqrt{\lambda}\xi \cdot \cos\sqrt{\lambda}\eta \dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}, & \lambda > 0, \\ & (\xi, \eta \in (0, \infty)). \\ 0, & \lambda \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.30}$$

Согласно п. 1 спектр оператора Λ(гр) совпадает с $[0, \infty)$. Далее, его спектральная мера имеет вид

$$d\varrho(\lambda) = \begin{cases} d\lambda, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda \leqslant 0. \end{cases} \tag{4.31}$$

Действительно, примем $d\varrho'(\lambda) = d\varrho''(\lambda) = M(\lambda)\, d\lambda$, где $M(\lambda) \in C((-\infty, \infty)) \cap L_1((-\infty, \infty), d\lambda)$ аннулируется при $\lambda \leqslant 0$ и положительна при $\lambda > 0$. Подсчитывая $d\varrho(\lambda)$ с помощью (4.14), найдем, что $d\varrho(\lambda) = N(\lambda)\, d\lambda$, где $N(\lambda)$ такого же типа, как и $M(\lambda)$. Это говорит о справедливости (4.31).

Таким образом, можно считать $d\varrho'(\lambda) = d\varrho''(\lambda) = d\varrho(\lambda)$ определенными посредством (4.31). Вычислим $d_\tau \varrho_\lambda(\lambda - \tau, \tau)$ при помощи формулы (4.26). Очевидно, для $\lambda < 0$ интеграл в ней аннулируется, а для $\lambda \geqslant 0$

$$\int\limits_{\substack{\nu+\mu<\lambda, \\ \mu\in[0, \tau)}} d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2}{2}, & \tau \in [\lambda, \infty), \\ \lambda\tau - \dfrac{\tau^2}{2}, & \tau \in [0, \lambda), \\ 0, & \tau \in (-\infty, 0); \end{cases}$$

$$d_\tau \varrho_\lambda(\lambda - \tau, \tau) = \begin{cases} d\tau, & \tau \in (0, \lambda), \\ 0, & \tau \overline{\in} (0, \lambda). \end{cases} \tag{4.32}$$

Пользуясь формулой (4.28) и учитывая вид (2.41), (4.30) спектральных ядер операторов $A' = \Lambda_n$, $A'' = \Lambda(\text{гр})$, получим для спектрального ядра оператора $\Lambda(\text{гр})$ выражение

$$\Phi((x, \xi), (y, \eta); \lambda) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}+1} |x-y|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\lambda \frac{(\sqrt{\lambda-\mu})^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{\mu}} J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda-\mu}\,|x-y|) \times$$
$$\times \cos\sqrt{\mu}\xi \cdot \cos\sqrt{\mu}\eta \; d\eta \tag{4.33}$$
$$(x, y \in E_n;\ \xi, \eta \in (0, \infty);\ \lambda > 0).$$

Для подсчета ядра резольвенты $R((x, \xi), (y, \eta); z)$ оператора $\Lambda(\text{гр})$ можно воспользоваться формулой (4.17), которая после перехода к ядрам, очевидно, приобретет вид

$$R((x', x''), (y', y''); z) = \int_{-\infty}^{\infty} R'(x', y'; z-\mu)\, \Phi''(x'', y''; \mu)\, d\varrho''(\mu) \tag{4.34}$$
$$(z \overline{\in} S(\bar{A})).$$

Подставляя сюда (2.35), (4.30) и учитывая вид $d\varrho''(\lambda)$, получим

$$R((x, \xi), (y, \eta); z) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}+1} |x-y|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty \frac{(-i\sqrt{z-\mu})^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{\mu}} \times$$
$$\times K_{\frac{n}{2}-1}(-i\sqrt{z-\mu}\,|x-y|) \cos\sqrt{\mu}\,\xi \cdot \cos\sqrt{\mu}\,\eta\, d\mu$$
$$(x, y \in E_n;\ \xi, \eta \in (0, \infty);\ z \overline{\in} [0, \infty)). \tag{4.35}$$

При помощи (4.17) и (4.30) (или (4.18) и (4.33)) можно написать выражение для любой ограниченной функции $F(\Lambda(\text{гр}))$ от оператора $\Lambda(\text{гр})$. Полезно отметить, что если функция $F(\Lambda_n + \mu E')$ достаточно изучена, например, это интегральный оператор с известным ядром, то (4.17) дает простое представление ядра (возможно, обобщенного) оператора $F(\Lambda(\text{гр}))$ через это ядро (подобная ситуация, например, будет для функции $F(\lambda) = \frac{2}{\lambda} \sin^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{2} t$, см. п. 10, § 2). Ясно, что на этом пути можно получить формулы для решения смешанной задачи для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - D_1^2 u - \ldots - D_n^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = g(x, \xi, t), \tag{4.36}$$

$$u(x, \xi, 0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x, \xi, 0) = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)(x, 0, t) = 0$$

$$(x \in E_n, \ \xi \in (0, \infty), \ t \in [0, \infty))$$

(нужно воспользоваться представлением (2.84)). Мы ограничимся этими общими замечаниями.

Выше мы исследовали лишь случай граничного условия $\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)(x, 0) = 0$ $(x \in E_n)$. Можно было бы, конечно, рассмотреть и более общее условие

$$\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)(x, 0) + \beta u(x, 0) = 0 \ (x \in E_n; \ \operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \beta = 0; \ \alpha^2 + \beta^2 > 0); \tag{4.37}$$

представления (4.33) и (4.35) несколько усложнились бы из-за более сложного, чем (4.30), вида $\Phi''(\xi, \eta; \lambda)$.

Наконец, следует учитывать, что в формуле (4.34) и аналогичной для подсчета $F(\Lambda(\text{гр}))$ можно поменять местами роль операторов Λ_n и $\Lambda_1(\text{гр})$.

б) *Выражение Лапласа в плоском слое.* Пусть G — слой $0 < \xi < l < \infty$ пространства E_{n+1} точек $(x, \xi) = (x_1, \ldots, x_n, \xi)$. В G рассмотрим $n+1$-мерное выражение Лапласа с граничными условиями $u(x, 0) = u(x, l) = 0$ $(x \in E_n)$, $\Lambda(\text{гр})$ — соответствующий сильный оператор. Сейчас $\Lambda(\text{гр}) = \bar{A}$, где $A' = \Lambda_n$ прежний оператор, действующий в $H_0' = L_2(E_n)$, а $A'' = \Lambda_1(\text{гр})$ — сильный оператор в пространстве $H_0'' = L_2((0, l))$ функций от ξ, порожденный выражением $-\frac{d^2}{d\xi^2}$ и граничными условиями $u(0) = u(l) = 0$; $H_0' \otimes H_0'' = L_2(G)$. Этот пример интересен тем, что оператор A' сингулярен, а A''—регулярен.

Сейчас построение спектральной теории проходит аналогично примеру а), нужно лишь вместо формулы (4.30) пользоваться следующим элементарно подсчитываемым равенством

$$\Phi''(\xi, \eta; \lambda)\, d\varrho''(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{l} \sin\frac{j\pi}{l}\xi \cdot \sin\frac{j\pi}{l}\eta, & \lambda = \lambda_j = \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2, \\ 0, & \lambda \neq \lambda_j \ (j = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{4.38}$$

Согласно п. 1 спектр оператора Λ (гр) совпадает с $\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \infty\right)$, так что в отличие от а) $(\Lambda\,(\text{гр}))^{-1}$ существует.

В качестве $\varrho''(\lambda)$ можно взять любую кусочно-постоянную неубывающую функцию со скачками, расположенными в точках $\lambda_j = \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Будем считать каждый из этих скачков равным 1. При помощи процедуры, описанной в п. 2, легко обнаружить, что можно положить

$$d\varrho(\lambda) = \begin{cases} d\lambda, & \lambda > \left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \\ 0, & \lambda \leqslant \left(\frac{\pi}{l}\right)^2. \end{cases} \tag{4.39}$$

Найдем $d_\tau \varrho_\lambda(\lambda - \tau, \tau)$. Вычисляя интеграл в (4.26), получим, что для $\lambda < \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ он аннулируется, а для $\lambda \geqslant \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$

$$\int\limits_{\substack{\nu+\mu<\lambda,\\ \mu\in[0,\tau)}} d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu) = \begin{cases} \sum\limits_{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \leqslant \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 < \lambda} \left(\lambda - \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2\right), & \tau \in [\lambda, \infty), \\ \sum\limits_{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \leqslant \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 < \tau} \left(\lambda - \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2\right), & \tau \in \left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \lambda\right), \\ 0, & \tau \in \left(-\infty, \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right). \end{cases}$$

Беря производную $\frac{d}{d\lambda}$, обнаружим, что мера $d_\tau \varrho_\lambda(\lambda - \tau, \tau)$ дискретна и сосредоточена в точках $\left(\frac{j\pi}{l}\right)^2$ $(j = 1, 2, \ldots)$, расположенных на $\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \lambda\right)$. В каждой из этих точек ее значение равно 1. При помощи (4.28) и (2.41), (4.38) теперь получаем:

$$\Phi((x, \xi), (y, \eta); \lambda) =$$

$$= \frac{1}{l(2\pi)^{\frac{n}{2}} |x-y|^{\frac{n}{2}-1}} \sum_{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \leqslant \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 < \lambda} \left(\sqrt{\lambda - \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \times$$

$$\times J_{\frac{n}{2}-1}\left(\sqrt{\lambda-\left(\frac{j\pi}{l}\right)^2}\,|x-y|\right)\sin\frac{j\pi}{l}\xi\cdot\sin\frac{j\pi}{l}\eta$$

$$(x,\ y\in E_n;\ \xi,\ \eta\in(0,\ l);\ \lambda>0). \tag{4.40}$$

Аналогично (4.35) найдем:

$$R((x,\ \xi),\ (y,\ \eta);\ z)=$$

$$=\frac{1}{l2^{\frac{n}{2}-1}\pi^{\frac{n}{2}}|x-y|^{\frac{n}{2}-1}}\sum_{j=1}^{\infty}\left(-i\sqrt{z-\left(\frac{j\pi}{l}\right)^2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\times$$

$$\times K_{\frac{n}{2}-1}\left(-i\sqrt{z-\left(\frac{j\pi}{l}\right)^2}\,|x-y|\right)\sin\frac{j\pi}{l}\xi\cdot\sin\frac{j\pi}{l}\eta \tag{4.41}$$

$$\left(x,\ y\in E_n;\ \xi,\ \eta\in(0,\ l);\ z\bar{\in}\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2,\ \infty\right)\right).$$

Ясно, что сейчас справедливо все сказанное в конце примера а) относительно подсчета $F(\Lambda\ (\text{гр}))$ и решения смешанных задач, подобных (4.36) (но с граничными условиями $u(x,\ 0,\ t)=u(x,\ l,\ t)=0$ $(x\in E_n,\ t\in[0,\ \infty))$). Можно было бы также рассмотреть случай более общих условий в точках $\xi=0,\ l$, именно условий типа (4.37).

в) Из примеров а) и б) ясно, как строить разложение по собственным функциям выражения Лапласа, рассматриваемого в области $G=G'\times G''\times G'''$, где G' — произведение некоторого конечного числа конечных интервалов, G'' — произведение конечного числа полуосей, а G''' — m-мерное пространство. На границе G должны быть заданы «распадающиеся» граничные условия типа (4.37). Приводить формулы не имеет смысла.

Если проводить разделение переменных для выражения Лапласа, рассматриваемого во всем E_n, представляя E_n в виде $E_{n'}\times E_{n''}$ $(n'+n''=n)$, то формулы типа (4.28) и (4.34) перейдут в некоторые соотношения между цилиндрическими функциями. Соображения о решении смешанной задачи, высказанные в а) и б), теперь могут оказаться полезными при построении решений задачи Коши для уравнений с постоянными коэффициентами. Проиллюстрируем это на примере задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-D_1^2u-\ldots-D_n^2u+cu=g(x,\ t),\\ u(x,\ 0)=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x,\ 0)=0\ \ (x\in E_n;\ t\in[0,\ \infty))\end{gathered} \tag{4.42}$$

($c\in(-\infty,\ \infty)$ — постоянная), ограничиваясь лишь указанием формальной схемы. Мы покажем, как из формулы для решения (4.42) вытекает аналогичная формула с заменой n на $n+1$.

По-прежнему будем обозначать $(x, \xi) \in E_{n+1}$, $x \in E_n$, $\xi \in E_1$; положим $H_0' = L_2(E_n)$, $H_0'' = L_2(E_1)$, $H_0' \otimes H_0'' = L_2(E_{n+1})$. Пусть Λ_n, Λ_1 и Λ_{n+1} — минимальные операторы, порожденные во всем пространстве n, 1 и $n+1$-мерным выраженнем Лапласа, взятым со знаком минус. Тогда, согласно (2.84), решение $u(x, \xi, t)$ $n+1$-мерной задачи (4.42) с правой частью $g(x, \xi, t)$ имеет вид

$$u(x, \xi, t) = \int_0^t (\sqrt{\Lambda_{n+1}+cE})^{-1} \sin \sqrt{\Lambda_{n+1}+cE}\,(t-\tau)\, g(\cdot, \cdot, \tau)\, d\tau. \tag{4.43}$$

Предположим, что аналогичная n-мерная формула может быть записана в виде

$$u(x, t) = \int_0^t (\sqrt{\Lambda_n+cE'})^{-1} \sin \sqrt{\Lambda_n+cE'}\,(t-\tau)\, g(\cdot, \tau)\, d\tau =$$

$$= (T_c^{(n)}(x, t;\ \cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot))_{L_2(E_n \times (0, \infty))}, \tag{4.44}$$

где $T_c^{(n)}(x, t; y, \tau)$ — некоторое обобщенное ядро типа ядер, фигурирующих в теоремах 2.7 и 2.8. Из первой формулы (4.17) вытекает, что

$$(\sqrt{\Lambda_{n+1}+cE})^{-1} \sin \sqrt{\Lambda_{n+1}+cE}\,(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{\Lambda_n+(c+\mu)E'})^{-1} \times$$

$$\times \sin \sqrt{\Lambda_n+(c+\mu)E'}\,(t-\tau)) \otimes P''(\mu)\, d\varrho''(\mu).$$

Применяя это равенство к $g(y, \eta, \tau)$, интегрируя его затем по τ в пределах от 0 до t и меняя порядок интегрирования, получим благодаря (4.43) и (4.44):

$$u(x, \xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^t ((\sqrt{\Lambda_n+(c+\mu)E'})^{-1} \sin \sqrt{\Lambda_n+(c+\mu)}\,E'\,(t-\tau)\Big)_y \times$$

$$\times (P_\eta''(\mu)\, g(y, \eta, \tau))\, d\tau\, d\varrho''(\mu) = \tag{4.45}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(T_{c+\mu}^{(n)}(x, t; y, \tau), P_\eta''(\mu)\, g(y, \eta, \tau)\Big)_{L_2(E_n \times (0, \infty))} d\varrho''(\mu).$$

Спектральные ядро и мера для Λ_1 — минимального оператора, порожденного $-\frac{d^2}{d\xi^2}$ в $L_2(E_1)$—задаются равенством

$$\Phi''(\xi, \eta; \lambda)\, d\varrho''(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \cos \sqrt{\lambda}\,(\xi-\eta)\, \dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}, & \lambda > 0, \\ 0 & \lambda \leqslant 0 \end{cases} \quad (\xi, \eta \in E_1), \tag{4.46}$$

являющимся частным случаем (2.41) при $n = 1$ (см. стр. 505). Поэтому, переходя в (4.45) к ядрам, получим, что решение (4.43) может быть подобно (4.44) записано посредством обобщениого ядра $T_c^{(n+1)}(x, \xi, t; y, \eta, \tau)$, имеющего вид:

$$T_c^{(n+1)}(x, \xi, t; y, \eta, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty T_{c+\mu}^{(n)}(x, t; y, \tau)\cos\sqrt{\mu}(\xi-\eta)\frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} \qquad (4.47)$$

Это и есть требуемая формула. Полагая здесь $n = 2$ и учитывая вид ядра $T_c^{(2)}(x, t; y, \tau)$, равного, согласно (2.78), $T_{-c}((x, t), (y, \tau))$ при $(y, \tau) < (x, t)$ и 0 для остальных (y, τ), легко получим: $T_c^{(3)} = T_{\text{синг}} + T_{\text{рег}}$, где сингулярное ядро $T_{\text{синг}}$ указаио в теореме 2.8, а регулярное $T_{\text{рег}}$ имеет вид (2.88). Дальнейшее последовательное применение (4.47) приведет к обобщенным ядрам, дающим решение задачи (4.42) при $n=4, 5, \ldots$, о построении которых посредством аналитического продолжения говорилось на стр. 435—436. Таким образом, при повышеиии размериости пространства все сводится к последовательному вычислеиию одномериых косииус-преобразований Фурье по μ некоторых обобщенных фуикций, зависящих от μ как от параметра. Приведеииая сейчас схема, конечно, есть ие что иное, как решение задачи Коши (4.42) при помощи разложения в обычиый n-кратный интеграл Фурье с указаиием некоторой процедуры вычислеиия встречающихся интегралов.

г) *Выражение Шредингера в случае радиальной симметрии.* Обычиое разделение перемеиных в выражении (2.43) с $c(x)$, зависящим только от $|x|$, приводит к более сложиому оператору, чем (4.1).

Имеино, пусть H_0' и H_0'' — некоторые гильбертовы пространства, A', C' — эрмитовые операторы с общей областью определения $\mathfrak{D}(A')$, действующие в H_0', A'' — эрмитов оператор в H_0''. Возникающий прн разделении переменных оператор в $H_0' \otimes H_0''$, как мы ниже убедимся, имеет вид

$$A = A' \otimes E'' \dotplus C' \otimes A'', \quad \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(A') \otimes \mathfrak{D}(A''). \qquad (4.48)$$

Очевндно, A эрмитов. Огранннчимся беглым построением спектральной теорин оператора A в простейшем случае, который, однако, будет достаточен для наших целей. Так, будем считать, что A'' самосопряжен н имеет дискретный спектр $\mu_0, \mu_1, \ldots$, причем собственное подпространство $H_0''^{(l)}$, отвечающее μ_l $(l = 0, 1, \ldots)$, конечномерно.

Обозначим $P''(\mu_l)$ ортогональный проектор на $H_0''^{(l)}$, тогда

$$E'' = \oplus\sum_{l=0}^\infty P''(\mu_l), \quad H_0'' = \oplus\sum_{l=0}^\infty H_0''^{(l)}, \quad H_0' \otimes H_0'' = \oplus\sum_{l=0}^\infty H_0 \otimes H_0''^{(l)} \qquad (4.49)$$

(все суммы ортогональные). Пусть $A^{(l)}$ — сужение оператора A на $\mathfrak{D}(A^{(l)}) = \mathfrak{D}(A') \otimes H_0''^{(l)} \subset \mathfrak{D}(A)$; $A^{(l)}$ — эрмитов оператор в пространстве $H_0' \otimes H_0''^{(l)}$. Будем предполагать, что при $l = 1, 2, \ldots$ каждый такой оператор имеет равные дефектные числа, и обозначим $E_\lambda^{(l)}$ некоторое его разложение единицы. Согласно последнему равенству в (4.49) семейство операторов

$$E_\lambda = \oplus\sum_{l=0}^\infty E_\lambda^{(l)}(E' \otimes P''(\mu_l)) \qquad (4.50)$$

будет некоторым разложением единицы для A; спектр соответствующего самосопряженного расширения A совпадает с замыканием объединения спектров всех $A^{(l)}$, а его резольвента R_z имеет вид

$$R_z = \oplus \sum_{l=0}^{\infty} R_z^{(l)} (E' \otimes P'' (\mu_l)). \tag{4.51}$$

Выясним более детально вид операторов $A^{(l)}$, $E_\lambda^{(l)}$ и $R_z^{(l)}$. Так как $A''P''(\mu_l) = \mu_l P''(\mu_l)$, то согласно (4.48)

$$A^{(l)} = A' \otimes P''(\mu_l) \dotplus C' \otimes (\mu_l P''(\mu_l)) = (A' \dotplus \mu_l C') \otimes P''(\mu_l). \tag{4.52}$$

Учитывая замечание на стр. 472 и формулы (2.7), гл. I, получим

$$E_\lambda^{(l)} = E_\lambda'^{(l)} \otimes P''(\mu_l), \quad R_z^{(l)} = R_z'^{(l)} \otimes P''(\mu_l), \tag{4.53}$$

где $E_\lambda'^{(l)}$ и $R_z'^{(l)}$ — соответствующие разложение единицы и резольвента эрмитова оператора $A' \dotplus \mu_l C'$ в пространстве H_0'. Если замыкание оператора $A' \dotplus \mu_l C'$ самосопряжено в H_0', то, очевидно, благодаря (4.52) самосопряжено в $H_0' \otimes H_0''^{(l)}$ и замыкание $A^{(l)}$. Если самосопряженность имеет место для каждого $l = 0, 1, \ldots$, то из (4.51) следует, что и замыкание A самосопряжено. Нетрудно также обратить это утверждение: если хотя бы для одного l $\overline{A' \dotplus \mu_l C'}$ несамосопряжено в H_0', то и $\overline{A}$ несамосопряжено.

Пусть $H_-' \supseteq H_0' \supseteq H_+'$ — некоторая цепочка, для которой вложение $H_+' \to H_0'$ квазиядерно. Ее можно использовать при разложении по обобщенным собственным векторам оператора $A' \dotplus \mu_l C'$: $dE_\lambda'^{(l)} = P'^{(l)}(\lambda)\, d\varrho'^{(l)}(\lambda)$. При разложении, связанном с оператором $A^{(l)}$, можно благодаря конечномерности $H_0''^{(l)}$ пользоваться цепочкой $H_-' \otimes H_0''^{(l)} \supseteq H_0' \otimes H_0''^{(l)} \supseteq H_+' \otimes H_0''^{(l)}$. Тогда

$$P^{(l)}(\lambda)\, d\varrho(\lambda) = P'^{(l)}(\lambda) \otimes P''(\mu_l)\, d\varrho(\lambda),$$

где $d\varrho(\lambda)$ — спектральная мера для $A' \dotplus \mu_l C'$, которую мы выбрали независимой от $l = 0, 1, \ldots$ (это, очевидно, возможно). Теперь разложение по обобщенным собственным векторам оператора A, отвечающее (4.50), примет вид

$$P(\lambda)\, d\varrho(\lambda) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} P'^{(l)}(\lambda) \otimes P''(\mu_l) \right) d\varrho(\lambda). \tag{4.54}$$

Здесь ряд сходится в смысле гильбертовой нормы операторов, действующих из $H_+' \otimes H_+''$ в $H_-' \otimes H_-''$, где цепочка $H_-'' \supseteq H_0'' \supseteq H_+''$ подобрана так, чтобы вложение $H_+'' \to H_0''$ было квазиядерным.

На этом мы закончим изложение общих соображений, связанных с оператором (4.48), и перейдем собственно к примеру, ограничиваясь трехмерным случаем.

Введем в E_3 сферические координаты $\varrho = |x|$, θ, φ. Рассматриваемое во всем E_3 выражение Шредингера имеет вид

$$Lu = -\Delta u \dotplus c(\varrho)\, u \quad (c \in C^2([0, \infty))). \tag{4.55}$$

Переходя в (4.55) к сферическим координатам, получим

$$(Lu)(\varrho, \theta, \varphi) = \tag{4.56}$$

$$= -\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right) + c(\varrho)u + \frac{1}{\varrho^2}\left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

Построим по (4.55) — (4.56) в пространстве $L_2(E_3)$ минимальный оператор Λ и покажем, что его «незначительное» сужение может быть записано в форме (4.48).

Действительно

$$(f, g)_{L_2(E_3)} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\varrho, \theta, \varphi)\, \overline{g(\varrho, \theta, \varphi)}\, \varrho^2 \sin\theta\, d\varrho\, d\theta\, d\varphi,$$

поэтому $L_2(E_3) = L_2((0, \infty), \varrho^2 d\varrho) \otimes L_2(K)$, где $L_2(K)$ — пространство функций $f(\theta, \varphi)$ на единичной сфере K, суммируемых с квадратом относительно лебеговой меры $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ на ней. Положим $H_0' = L_2((0, \infty), \varrho^2 d\varrho)$, $H_0'' = L_2(K)$, $H_0' \otimes H_0'' = L_2(E_3)$. Введем эрмитовые операторы A' и C' в H_0' соотношениями $u \to -\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right) + c(\varrho)u$ и $u \to \frac{1}{\varrho^2}u$ $(u \in \mathfrak{D}(A') = \mathfrak{D}(C') = C_0^\infty((0\ \ \infty)))$. Построим A''. Для этого рассмотрим на дважды непрерывно дифференцируемых функциях $u(\theta, \varphi)$ на сфере K действующий в $H_0'' = L_2(K)$ оператор

$$u \to -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Он, очевидно, эрмитов; его замыкание обозначим A''. По введенным A', C' и A'' образуем, согласно (4.48), оператор A. Благодаря (4.56) A будет некоторым сужением Λ, что и требовалось.

Как хорошо известно (см., например, А. Н. Тихонов, А. А. Самарский [1], Дополнение, ч. 2, § 2, стр. 633—645), оператор A'' самосопряжен и имеет дискретный спектр с конечномерными собственными подпространствами. Его собственные значения $\mu_l = l(l+1)$ $(l = 0, 1, \ldots)$, каждому μ_l отвечает собственное подпространство $H_0''^{(l)}$ размерности $2l+1$. В $H_0''^{(l)}$ можно выбрать ортонормированный базис, состоящий из $2l+1$ сферических функций

$$Y_l^{(k)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi\varepsilon_k}\cdot\frac{(l-k)!}{(l+k)!}}\, P_l^{(k)}(\cos\theta)\cdot \begin{cases} \cos k\varphi, & k = -l, \ldots, 0, \\ \sin k\varphi, & k = 1, \ldots, l \end{cases} \tag{4.57}$$

$$(0 \leqslant \theta < \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi),$$

где $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_k = 1$ при $k \neq 0$, а $P_l^{(k)}(s)$ — присоединенные функции Лежандра. Таким образом, ортогональным проектором в $L_2(K)$ на $H_0''^{(l)}$ служит интегральный оператор с ядром

$$K^{(l)}((\theta, \varphi), (\theta', \varphi')) = \sum_{k=-l}^{l} Y_l^{(k)}(\theta, \varphi)\, Y_l^{(k)}(\theta', \varphi') \quad ((\theta, \varphi), (\theta', \varphi') \in K). \tag{4.58}$$

Роль $A' + \mu_l C'$ сейчас играют определенные на $C_0^\infty((0, \infty))$ операторы

$$(A' + \mu_l C')\, u = -\frac{1}{\varrho^2}\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2 \frac{du}{d\varrho}\right) + c(\varrho)\, u + \frac{l(l+1)}{\varrho^2} u \tag{4.59}$$

$$(l = 0, 1, \ldots),$$

действующие в пространстве $H_0' = L_2((0, \infty), \varrho^2 d\varrho)$. Будем для простоты считать $c(\varrho)$ ограниченной на $[0, \infty)$. Тогда в силу леммы 1.2 самосопряженность $\overline{A' + \mu_l C'}$ эквивалентна самосопряженности замыкания оператора (4.59), где положено $c(\varrho) \equiv 0$. Как известно (М. А. Наймарк [2], гл. 7, § 24, стр. 313—314), она будет иметь место при $l \geqslant 1$. В случае $l = 0$ $\overline{A' + \mu_0 C'}$ несамосопряжен (так как в противном случае было бы самосопряжено замыкание в $L_2(E_3)$ оператора $u \to Lu$, определенного на $u \in C_0^\infty(E_3)$, дополнительно аннулирующихся в окрестностях 0). Однако если расширить $A' + \mu_0 C'$ посредством (4.59) на все функции из $C^\infty([0, \infty))$, финитные только на ∞, а затем произвести замыкание, то так полученный оператор, как несложно убедиться, уже будет самосопряженным. В связи с этим мы в дальнейшем считаем, что оператор $A' + \mu_0 C'$ определен той же формулой (4.59) при $l = 0$, но на $C^\infty([0, \infty)) \cap C_0^\infty((-\infty, \infty))$.

Теперь, пользуясь формулами (4.51) и (4.53), легко написать выражение ядра резольвенты $R((\varrho, \theta, \varphi), (\varrho', \theta', \varphi'); z)$ оператора Λ через ядра $R^{(l)}(\varrho, \varrho'; z)$ резольвент операторов (4.59). Действительно, из (4.51) и (4.53) получаем: $R_z = \oplus \sum_{l=0}^{\infty} R_z'^{(l)} \otimes P''(\mu_l)$. Переходя здесь к ядрам и используя (4.58), найдем:

$$R((\varrho, \theta, \varphi), (\varrho', \theta', \varphi'); z) = \sum_{l=0}^{\infty} R'^{(l)}(\varrho, \varrho'; z) \sum_{k=-l}^{l} Y_l^{(k)}(\theta, \varphi)\, Y_l^{(k)}(\theta', \varphi').$$

Меняя порядок суммирования, пользуясь видом (4.57) функций $Y_l^{(k)}$ и применяя формулу сложения для полиномов Лежандра $P_l(s)$ (см., например, И. М. Рыжик, И. С. Градштейн [1], формула 6.794, стр. 392), после простых подсчетов получим

$$R((\varrho, \theta, \varphi), (\varrho', \theta', \varphi'); z) = \tag{4.60}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) R'^{(l)}(\varrho, \varrho'; z)\, P_l(\cos\theta \cdot \cos\theta' - \sin\theta \cdot \sin\theta' \cdot \cos(\varphi - \varphi'))$$

$$((\varrho, \theta, \varphi), (\varrho', \theta', \varphi') \in E_3; \quad (\varrho, \theta, \varphi) \neq (\varrho', \theta', \varphi'); \quad \operatorname{Im} z \neq 0).$$

Равенство (4.60) можно переписать в терминах ядер резольвент операторов типа (4.59), но действующих в пространстве $L_2((0, \infty), d\varrho)$, а не $L_2((0, \infty), \varrho^2 d\varrho)$. С этой целью заметим, что отображение $f(\varrho) \to \varrho f(\varrho)$ является изометрическим оператором, переводящим все $L_2((0, \infty), \varrho^2\, d\varrho)$ во все $L_2((0, \infty), d\varrho)$. Оператор (4.59) при этом перейдет в действующий в $L_2((0, \infty), d\varrho)$ оператор

$$u \to -\frac{d^2 u}{d\varrho^2} + c(\varrho)\, u + \frac{l(l+1)}{\varrho^2} u \quad (l = 0, 1, \ldots), \tag{4.61}$$

определенный при $l \geqslant 1$ на $C_0^\infty((0, \infty))$, а при $l = 0$ — на $C^\infty([0, \infty)) \cap$ $\cap\, C_0^\infty((-\infty, \infty))$. Если в (4.60) в качестве $R'^{(l)}(\varrho, \varrho'; z)$ считать ядра резольвенты оператора (4.61), то для справедливости (4.60) перед знаком суммы нужно поставить множитель $\frac{1}{\varrho\varrho'}$.

Мы не будем останавливаться на выводе при помощи (4.54) аналогичного (4.60) представления ядра $\Phi((\varrho, \theta, \varphi), (\varrho', \theta', \varphi'); \lambda)$.

5. Примеры. Неэллиптические выражения. Как уже отмечалось, один из подобных примеров разложения по собственным функциям, строящийся разделением переменных, приводился в п. 3,§ 2, гл. IV. Сейчас мы изложим три примера в неограниченной области, именно, во всем E_n. Если угодно, их можно воспринимать как некоторую методику подсчета интегралов (3.25) и (3.6) для специальных L.

а) *Ультрагиперболическое выражение в* E_n. Пусть $n = n' + n''$ $(n', n'' \geqslant 1)$, тогда $E_n = E_{n'} \times E_{n''}$, $L_2(E_n) = L_2(E_{n'}) \otimes L_2(E_{n''})$. Точки $x \in E_n$ будем обозначать $x = (x', x'') = (x'_1, \ldots, x'_{n'}, x''_1, \ldots, x''_{n''})$. Рассмотрим в $L_2(E_n)$ минимальный оператор Λ, порожденный ультрагиперболическим выражением

$$Lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n'}'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1''^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n''}''^2}.$$

Положим $H_0' = L_2(E_{n'})$, $H_0'' = L_2(E_{n''})$ и определим в H_0' оператор A' как минимальный оператор Λ', порожденный n'-мерным выражением $-\Delta$, а в H_0'' аналогично определим $A'' = -\Lambda''$, Λ'' порожден n''-мерным выражением $-\Delta$. Очевидно, $\Lambda = \overline{A}$, где A построен по A' и A'' согласно (4.1). Все операторы A', A'' и Λ самосопряжены.

Спектральные ядро и мера оператора A' задаются формулой (2.41). Спектральная мера для A'' $d\varrho''(\lambda) = d\lambda$ при $\lambda < 0$ и $d\varrho''(\lambda) = 0$ при $\lambda \geqslant 0$; спектральное ядро получается из (2.41) заменой λ на $-\lambda$.

Таким образом, согласно равенству $S(\overline{A}) = \overline{S(A') + S(A'')}$, спектр Λ заполняет всю ось. В качестве спектральной меры для Λ можно принять $d\varrho(\lambda) = d\lambda$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — это следует, например, из теоремы 3.1.

Подсчитаем спектральное ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ оператора Λ, пользуясь формулой (4.28). Предварительно вычислим при помощи (4.26) меру $d_\tau \varrho_\lambda(\lambda - \tau, \tau)$. Имеем

$$\text{для } \lambda < 0 \quad \int\limits_{\substack{\nu + \mu < \lambda,\\ \mu \in [0, \tau)}} d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu) = \begin{cases} 0, & \tau \in [\lambda, \infty), \\ \dfrac{(-\tau + \lambda)^2}{2}, & \tau \in (-\infty, \lambda); \end{cases}$$

$$\text{для } \lambda \geqslant 0 \quad \int\limits_{\substack{\nu+\mu<\lambda, \\ \mu\in[0,\tau)}} d\varrho'(\nu)\, d\varrho''(\mu) = \begin{cases} 0, \tau \in [0, \infty), \\ -\lambda\tau + \dfrac{\tau^2}{2}, \quad \tau \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Отсюда легко заключить, что $d_\tau \varrho_\lambda(\lambda - \tau, \tau) = d\tau$ при $\tau \in (-\infty, \min(\lambda, 0))$ и равно 0 при $\tau \in [\min(\lambda, 0), \infty)$. Теперь получаем требуемое выражение:

$$\Phi((x', x''), (y', y''); \lambda) =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+2}\pi^{\frac{n}{2}}|x'-y'|^{\frac{n'}{2}-1}|x''-y''|^{\frac{n''}{2}-1}} \int\limits_{-\infty}^{\min(\lambda,0)} (\sqrt{\lambda-\mu})^{\frac{n'}{2}-1} \times$$

$$\times (\sqrt{-\mu})^{\frac{n''}{2}-1} J_{\frac{n'}{2}-1}(\sqrt{\lambda-\mu}\,|x'-y'|)\, J_{\frac{n''}{2}-1}(\sqrt{-\mu}\,|x''-y''|)\, d\mu. \tag{4.62}$$

Интеграл в (4.62) в обычном смысле расходится; его нужно понимать в смысле той же сходимости, которая фигурирует в формуле (4.23) (см. теорему 4.4). Во всяком случае он будет сходиться в смысле обобщенных функций Л. Шварца от переменной $(x, y) \in E_{2n}$. Таким образом, спектральное ядро (4.62) будет обобщенным ядром.

При помощи (4.34), (2.35) и выражения для $\Phi''(x'', y''; \lambda)$ легко написать формулу для ядра резольвенты оператора Λ. Заметим также, что сейчас удобно применить и формулу (4.29), выражающую по существу эквивалентное (4.62) равенство.

б) *Волновое выражение в* E_2. Рассмотрим в $L_2(E_2)$ минимальный оператор Λ, порожденный выражением

$$Lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Это — частный случай примера а) ($n' = n'' = 1$). Приведем некоторую детализацию подсчетов. Учитывая, что (4.46) — частный случай (2.41) при $n = 1$, можем положить в (4.62) $n' = n'' = 1$. Получим

$$\Phi(x, y; \lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\min(\lambda,0)} \frac{1}{\sqrt{-\mu\,(\lambda-\mu)}} \cos\sqrt{\lambda-\mu}\,(x_1 - y_1) \times$$

$$\times \cos\sqrt{-\mu}\,(x_2 - y_2)\, d\mu,$$

где интеграл сходится, например, в смысле обобщенных функций Л. Шварца в E_4.

Для получения ядра резольвенты $R'(x_1, y_1; z)$ минимального оператора, порожденного в $L_2(E_1)$ выражением $-\frac{d^2}{dx_1^2}$, нужно положить в (2.35) $n = 1$ (см. п. 3, § 5):

$$R'(x_1, y_1; z) = R'(x_1 - y_1; z) = \frac{i}{2\sqrt{z}} e^{i\sqrt{z}|x_1-y_1|} \quad (x_1, y_1 \in E_1;\ z \overline{\in} [0, \infty)). \tag{4.63}$$

При помощи (4.34), (4.63) и (4.46) находим представление для ядра $R(x, y; z)$ резольвенты нашего оператора Λ:

$$R(x, y; z) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{-\mu(z-\mu)}} e^{i\sqrt{z-\mu}|x_1-y_1|} \cos\sqrt{-\mu}(x_2 - y_2)\, d\mu$$

$$(x, y \in E_2;\ x \neq y;\ \operatorname{Im} z \neq 0). \tag{4.64}$$

Здесь интеграл сходится, поэтому ядро $R(x, y; z)$ является обычным. Интеграл (4.64) можно выразить через цилиндрические функции от гиперболического расстояния $\Gamma(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}$ (см., например, И. М. Рыжик, И. С. Градштейн [1], формула 4.419, 8, стр. 262). Однако этого мы делать не будем.

Заметим, что в силу соотношения $S(\Lambda) = \overline{S(A') + S(A'')}$ спектр оператора Λ в случае разделения переменных для ультрагиперболического выражения L, как правило, содержит 0 : $S(A')$ неотрицательно, $S(A'')$ неположительно. Легко понять, что если один из операторов A' и A'' рассматривается во всем пространстве E_n, то обязательно $0 \in S(\Lambda)$. В случае ограниченных областей возможны случаи, когда $0 \overline{\in} S(\Lambda)$ (см. п. 3, § 2, гл. IV), однако для них не будет устойчивости при изменении области. Для получения «более устойчивых» соотношений $0 \overline{\in} S(\Lambda)$ следует сделать оператор A' несамосопряженным с невещественным спектром (посредством изменения L или (гр)).

в) *Нестационарное выражение Шредингера в* E_2. Аналогично примерам б) и а) может быть рассмотрен минимальный оператор Λ, порожденный в $L_2(E_2)$ выражением

$$Lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + i\frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Здесь происходит разделение переменных, причем оператор A' такой же, как и в б), а A'' совпадает с минимальным оператором в $L_2(E_1)$, порожденным выражением $i\frac{d}{dx_2}$, т. е. с оператором, который индуцирует обычное преобразование Фурье (см. п. 3, § 5). Используя спектральный анализ операторов A' и A'', можно исследовать Λ.

§ 5. О спектральной теории самосопряженных дифференциальных операторов в обычных производных

В этом параграфе мы лишь наметим, как спектральная теория таких операторов вкладывается в общую схему построений гл. V и VI. Мы ни в какой мере не претендуем на полноту изложения и отсылаем читателя к книгам: М. А. Наймарк [2], Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман [1], E. C. Titchmarsh [1], Б. М. Левитан [1], N. Dunford, J. Schwartz [2]. Ниже не будут приводиться, за редкими исключениями, точные формулировки и доказательства.

1. **Построение спектрального ядра.** Будем рассматривать дифференциальное выражение в обычных производных

$$Lu = \sum_{\alpha \leqslant r} a_\alpha(x) D^\alpha u \quad \left(Du = \frac{du}{dx}\right) \tag{5.1}$$

в интервале $G = (a, b) \subseteq (-\infty, \infty)$; коэффициенты $a_\alpha(x)$ предполагаются достаточно гладкими.

Для обобщенных решений уравнения $Lu = f$ можно доказать теоремы о гладкости внутри G типа теорем 4.1—4.4 § 4, гл. III. Это связано с тем, что для выражения (5.1) просто строится при помощи решения задачи Коши фундаментальное решение $e(x, \xi)$ $(x, \xi \in G)$, обладающее свойствами, аналогичными свойствам 1) — 3) на стр. 178—179. Если $a_\alpha \in C^{\alpha+p}(G)$ с $p \geqslant 0$, то свойство 1) читается так же, а 2) и 3) приобретают вид:

При $x \neq \xi$ существуют и непрерывны все производные $(D_x^\alpha D_\xi^\beta e)(x, \xi)$ $(\alpha, \beta \leqslant r+p)$. Каждая такая производная ограничена при $x = \xi$.

Если $f \in C^q(\overline{V})$ $(\overline{V} \subset G)$, причем $q \geqslant 0$, $p \geqslant q$, то интегралы (4.4), гл. III, входят в $C^{q+r}(\overline{V})$ и удовлетворяют указанным уравнениям.

Для выражения (5.1) справедливы также результаты о гладкости обобщенных решений вплоть до границы области. Ситуация здесь будет значительно более простой, чем для эллиптических выражений. Действительно, обобщенные решения внутри G уравнения $Lu = f$ (f достаточно регулярна) будут гладкими внутри $G = (a, b)$. В связи с возможностью решать задачу Коши для уравнения $Lu=f$ каждое такое решение можно однозначно продолжить до гладкого решения в $\overline{G}$ — если только считать $a_\alpha(x)$ достаточно гладкими в $\overline{G}$.

Таким образом, *в рассматриваемом случае всякое обобщенное решение внутри G будет гладким вплоть до границы.* Поэтому вся довольно сложная техника исследования гладкости обобщенных решений вплоть до границы области здесь отпадает. Изложение этих фактов, основывающееся на возможности решать задачу Коши и даже формально не привлекающее понятие фундаментального решения, содержится, например, в указанной уже книге М. А. Наймарка (М. А. Наймарк [2], гл. 5, § 17, стр. 153—164).

Теперь уже ясно, что при помощи построений типа изложенных в § 2 легко развить спектральную теорию формально самосопряженных выражений (5.1). Здесь возможен как подход пп. 1—2, так и подход п. 5. Спектральное ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ ϱ-почти для каждого λ окажется достаточно гладкой относительно (x, y) и удовлетворяющей по каждой из переменных x и y заданным граничным условиям. Теоремы о разложении можно будет сформулировать в форме теорем 2.1, 2.3, считая при этом $n = 1$.

2. **Понятие спектральной матрицы.** Для обыкновенных дифференциальных выражений разложение по собственным функциям обычно записывают в иной форме, чем только что указывалось. Именно, поступим следующим образом. Обозначим через $\chi_0(x; \lambda), \ldots$ $\ldots, \chi_{r-1}(x; \lambda)$ фундаментальную систему решений уравнения $Lu - \lambda u = 0$ $(x \in G)$, удовлетворяющих начальным условиям вида

$$\left(\frac{d^k}{dx^k}\chi_j\right)(x; \lambda)\bigg|_{x=c} = \delta_{jk} \qquad (j, k = 0, \ldots, r-1), \tag{5.2}$$

где c — некоторая точка G. Каждое решение u уравнения $Lu - \lambda u = 0$ выражается через $\chi_j(x; \lambda)$ по формуле: $u(x) = \sum\limits_{j=0}^{r-1}\left(\dfrac{d^j u}{dx^j}\right)(c)\,\chi_j(x; \lambda)$ $(x \in G)$. Спектральное ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ удовлетворяет уравнениям (см. (2.8)):

$$L_x\Phi(x, y; \lambda) = \lambda\Phi(x, y; \lambda), \qquad \overline{L}_y\Phi(x, y; \lambda) = \lambda\Phi(x, y; \lambda) \quad (x, y \in G). \tag{5.3}$$

Применяя дважды эту формулу, получим представление

$$\Phi(x, y; \lambda) = \sum_{j=0}^{r-1}\left(\frac{\partial^j\Phi}{\partial x^j}\right)(c, y; \lambda)\,\chi_j(x; \lambda) =$$

$$= \sum_{j,k=0}^{r-1}\left(\frac{\partial^{j+k}\Phi}{\partial x^j\partial y^k}\right)(c, c; \lambda)\,\chi_j(x; \lambda)\,\overline{\chi_k(y; \lambda)} \tag{5.4}$$

$$(x, y \in G).$$

Подставляя это представление в равенство

$$(E(\Delta)u, v)_0 = \int_\Delta (P(\lambda)u, v)_0\, d\varrho(\lambda) = \int_\Delta \left\{\int_G \int_G \Phi(x, y; \lambda)\, u(y)\overline{v(x)}\,dx\,dy\right\} d\varrho(\lambda)$$

$$(u, v \in C_0(G)),$$

получим

$$(E(\Delta)u, v)_0 =$$

$$= \int_\Delta \left\{\sum_{j,k=0}^{r-1} \left(\frac{\partial^{j+k}\Phi}{\partial x^j \partial y^k}\right)(c, c; \lambda) \int_G u(y)\overline{\chi_k(y; \lambda)}\,dy\, \overline{\int_G v(x)\overline{\chi_j(x; \lambda)}\,dx}\right\} d\varrho(\lambda) =$$

$$= \int_\Delta \left\{\sum_{j,k=0}^{r-1} \widetilde{u}_k(\lambda)\overline{\widetilde{v}_j(\lambda)}\,d\sigma_{jk}(\lambda)\right\}, \tag{5.5}$$

$$\widetilde{u}_k(\lambda) = \int_G u(x)\overline{\chi_k(x; \lambda)}\,dx, \qquad d\sigma_{jk}(\lambda) = \left(\frac{\partial^{j+k}\Phi}{\partial x^j \partial y^k}\right)(c, c; \lambda)\, d\varrho(\lambda)$$

$$(j,\ k = 0, \ldots, r-1).$$

Таким образом, *каждой функции $u \in C_0(G)$ можно поставить в соответствие ее преобразование Фурье — r-мерную вектор-функцию*

$$\widetilde{u}(\lambda) = (\widetilde{u}_0(\lambda), \ldots, \widetilde{u}_{r-1}(\lambda)), \quad \widetilde{u}_k(\lambda) = \int_G u(x)\,\overline{\chi_k(x; \lambda)}\,dx$$

$$(k = 0, \ldots, r-1), \tag{5.6}$$

при этом равенство Парсеваля приобретет вид

$$(E(\Delta)u, v)_0 = \int_\Delta \left\{\sum_{j,k=0}^{r-1} \widetilde{u}_k(\lambda)\,\overline{\widetilde{v}_j(\lambda)}\,d\sigma_{jk}(\lambda)\right\} (u, v \in C_0(G))^*. \tag{5.7}$$

Матрица $\|d\sigma_{jk}(\lambda)\|_0^{r-1}$ носит название спектральной, она, очевидно выражается через значения производных в точке c от ядра $\Xi(x, y; \lambda)$

---

* Преобразование Фурье (5.6), конечно, отличается от преобразования Фурье (2.19), гл. V. В отличие от последнего каждая функция $\widetilde{u}_k(\lambda)$ ($k=0,\ldots$ $\ldots, r-1$) — целая относительно λ, так как такой функцией, как хорошо известно, будет решение $\chi_k(x; \lambda)$. Аналитичность зависимости от λ вектора $\widetilde{u}(\lambda)$ — важное преимущество преобразования (5.6) по сравнению с (2.19), гл. V.

оператора E_λ, т. е. от соответствующей спектральной функции:

$$d\sigma_{jk}(\lambda) = \left(\frac{\partial^{j+k}\Phi}{\partial x^j \partial y^k}\right)(c, c; \lambda)\, d\varrho(\lambda) = \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k} d_\lambda \Xi(c, c; \lambda). \qquad (5.8)$$

Матрица $\| d\sigma_{jk}(\lambda)\|_0^{r-1}$, точнее $\| \sigma_{jk}(\Delta)\|_0^{r-1}$ — положительно определенная. Это вытекает из следующей общей леммы, которая будет использована и в дальнейшем.

Лемма 5.1. *Рассмотрим при фиксированном $\lambda \in (-\infty, \infty)$ некоторое ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ $(x, y \in G)$. Предположим, что существуют и непрерывны относительно $(x, y) \in G \times G$ производные $\left(\frac{\partial^{j+k}\Phi}{\partial x^j \partial y^k}\right)(x, y; \lambda)$ $(j, k = 0, \ldots, r)$, причем удовлетворяются уравнения (5.3). Если $\Phi(x, y; \lambda)$ $(x, y \in G)$ положительно определено, то при любом $c \in G$ матрица*

$$\left\| \left(\frac{\partial^{j+k}\Phi}{\partial x^j \partial y^k}\right)(c, c; \lambda) \right\|_{j,k=0}^{r-1}$$

также положительно определенная.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для ядра Φ справедливо представление (5.4), где фундаментальная система решений $\chi_j(x; \lambda)$ удовлетворяет условиям (5.2). Подыщем теперь r точек $x_\alpha \in G$ $(\alpha = 0, \ldots, r-1)$ таким образом, чтобы матрица $\|\chi_j(x_\alpha; \lambda)\|_{j,\alpha=0}^{r-1}$ была невырожденной. Тогда каждый вектор $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{r-1}) \in C_r$ можно представить в виде $\xi_j = \sum_{\alpha=0}^{r-1} c_\alpha \chi_j(x_\alpha; \lambda)$ $(j = 0, \ldots, r-1)$. Используя это представление и равенство (5.4), получим

$$\sum_{j,k=0}^{r-1} \left(\frac{\partial^{j+k}\Phi}{\partial x^j \partial y^k}\right)(c, c; \lambda)\, \xi_k \bar{\xi}_j = \sum_{j,k=0}^{r-1} \left(\frac{\partial^{j+k}\Phi}{\partial x^j \partial y^k}\right)(c, c; \lambda) \times$$

$$\times \left\{\sum_{\alpha,\beta=0}^{r-1} c_\beta \bar{c}_\alpha \chi_k(x_\beta; \lambda)\, \overline{\chi_j(x_\alpha; \lambda)}\right\} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{r-1} c_\beta \bar{c}_\alpha \left\{\sum_{j,k=0}^{r-1} \left(\frac{\partial^{j+k}\Phi}{\partial x^j \partial y^k}\right)(c, c; \lambda) \times\right.$$

$$\left. \times \chi_k(x_\beta; \lambda)\, \overline{\chi_j(x_\alpha; \lambda)}\right\} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{r-1} \Phi(x_\beta, x_\alpha; \lambda)\, c_\beta \bar{c}_\alpha \geqslant 0,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

До сих пор мы воспринимали интеграл в (5.7) как формальную запись преобразования, осуществленного в (5.5). Однако после доказательства положительной определенности матрицы $\| d\sigma_{jk}(\lambda) \|_0^{r-1}$ этот интеграл можно понимать как интеграл относительно неотрицательной операторной меры — понятие и свойства таких интегралов будут изложены в п. 3, § 2, гл. VII. Это дает возможность в равенстве (5.7) перейти к произвольным функциям u, $v \in L_2(G)$, подобный переход описан в указанном месте гл. VII. Вместо термина «спектральная матрица» также иногда употребляют «операторная спектральная мера».

В общем случае равенство Парсеваля (5.7) нельзя подвергнуть дальнейшей детализации. Однако если нам известно, что строится разложение по собственным функциям, отвечающее самосопряженному расширению, порожденному некоторыми заданными граничными условиями (гр), то возможно следующее упрощение. Можно в качестве функций системы $\chi_j(x; \lambda)$ брать решения уравнения $Lu - \lambda u = 0$ $(x \in G)$, удовлетворяющие условиям (гр) (всем или части из них), добиваясь, чтобы через эту систему выражалось не любое решение нашего уравнения, а только удовлетворяющее рассматриваемым граничным условиям. Таким образом, количество функций $\chi_j(x; \lambda)$ теперь будет меньше r. Спектральное ядро $\Phi(x, y; \lambda)$ удовлетворяет по x и y условиям (гр), поэтому его подобно (5.4) можно выразить билинейным образом через полученную систему решений. Итак, в этом случае равенство Парсеваля записывается в форме (5.7), но спектральная матрица будет иметь порядок, меньший r.

Остановимся еще на одном вопросе. Уже говорилось, что для дифференциального выражения (5.1) можно доказать аналог теорем 4.2 и 4.4, гл. III о гладкости обобщенных ядер, удовлетворяющих по каждому из переменных соответствующим уравнениям; ход рассуждений при этом остается прежний, но сами они значительно упрощаются. Нам подобный аналог будет необходим и в дальнейшем, в гл. VIII, где будет вестись аккуратное изложение. Поэтому сейчас мы приведем точную формулировку требуемого результата.

Теорема 5.1. *Рассмотрим на интервале G' выражение L' вида* (5.1) *порядка r' с коэффициентами $a'_\alpha(x') \in C^{\alpha+p'}(G')$, $p' \geqslant \sigma' \geqslant 0$. Аналогично на G'' определяется L''. Предположим, что $\Phi \in W_2^{-\sigma'}(G') \otimes W_2^{-\sigma''}(G'')$ удовлетворяет внутри $O \subseteq G' \times G''$ системе уравнений*

$$L'_{x'} U = F, \qquad L''_{x''} U = F, \tag{5.9}$$

где $F(x', x'')$ $((x', x'') \in O)$ такова, что существуют и непрерывны по $(x', x'') \in O$ производные $D_{x'}^{\alpha'} D_{x''}^{\alpha''} F$ при $\alpha' \leqslant q'$ и $\alpha'' \leqslant q''$. Иными словами, должны выполняться соотношения (4.30), *гл. III.*

Тогда Φ *совпадает внутри* O *с обычным ядром* $H(x', x'')$ $((x', x'') \in O)$, *также являющимся обобщенным решением системы* (5.9) *внутри* O *и имеющим следующий характер гладкости: если* $F = 0$, *то производные* $D_{x'}^{\alpha'} D_{x''}^{\alpha''} H$ *при* $\alpha' \leqslant r' + p'$, $\alpha'' \leqslant r'' + p''$ *существуют и непрерывны по* $(x', x'') \in O$; *если* $F \neq 0$, *то подобные производные существуют при* $\alpha' \leqslant r' + \min(p', q')$, $\alpha'' \leqslant r'' + \min(p'', q'')$.

Заметим, что эта теорема легко обобщается и на случай большего чем 2 количества дифференциальных выражений вида (5.1).

3. **О дальнейших результатах и примерах.** На обыкновенные дифференциальные выражения переносятся остальные результаты по спектральному анализу, изложенные в предыдущих параграфах этой главы. Путь доказательств при этом остается прежним, но сами формулировки и доказательства, как правило, значительно упрощаются. К таким результатам относятся теоремы о структуре дифференциальных операторов, порожденных (5.1), и их самосопряженности, установленные в § 1. К ним также относятся теоремы § 5, гл. V о поведении на ∞ собственных функций, упоминавшиеся в п. 7, § 2. В одномерном случае справедливы и теоремы п. 10, § 2 об уравнении Шредингера, которое, как известно, теперь носит название уравнения Штурма—Лиувилля. Заметим, что в случае $n = 1$ теорему 2.11 при предположении полуограниченности снизу $c(x)$ можно доказать иначе, при этом равномерную непрерывность $c(x)$ можно не предполагать*. Известную информацию об операторах, порожденных (5.1), дают и общие факты § 4.

Упомянем еще о простейших примерах разложений по собственным функциям для выражения (5.1), которыми мы уже пользовались в пп. 4 и 5, § 4.

а) *Выражение* $-i\dfrac{d}{dx}$ *в* E_1. Соответствующий ему минимальный оператор Λ (в $L_2(E_1)$) служит простейшим примером сингулярного самосопряженного дифференциального оператора. Разложение по собственным функциям приводит к классическому одномерному преобразованию Фурье. Построим такое разложение, не опираясь на преобразование Фурье.

Оператор Λ самосопряжен: пусть $\varphi \in L_2(E_1)$ такова, что $\Lambda^*\varphi = \bar{z}\varphi$ ($\operatorname{Im} z \neq 0$). Тогда для $v \in C_0^\infty(E_1)$ $(-iv' - zv, \varphi)_0 = 0$, т. е. φ является обобщенным, а значит и гладким решением уравнения $iu' - \bar{z}u = 0$. Поэтому $\varphi(x) = Ce^{-i\bar{z}x} \in L_2(E_1)$, что возможно лишь при $C = 0$. Итак, $\varphi = 0$ и $\Lambda^* = \Lambda$.

Найдем резольвенту R_z оператора Λ. Пусть $\operatorname{Im} z > 0$, $f \in C_0^\infty(E_1)$.

---

* В последнее время это удалось сделать и в случае произвольного n (см. «Литературные указания», стр. 764).

Решение уравнения $(\Lambda - zE)u = f$ эквивалентно нахождению решения дифференциального уравнения $-iu' - zu = f$, входящего в $L_2(E_1)$. Находя это решение, получим:

$$(R_z f)(x) = u(x) = ie^{izx} \int_{-\infty}^{x} e^{-izy} f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} i\varkappa_{(-\infty,x)}(y)\, e^{iz(x-y)} f(y)\,dy \quad (x \in E_1),$$

где $\varkappa_{(a,b)}$ — характеристическая функция интервала (a, b). Итак, ядро резольвенты имеет вид:

$$R(x, y; z) = R(x - y; z) = \begin{cases} i\varkappa_{(-\infty,x)}(y)\, e^{iz(x-y)}, & \operatorname{Im} z > 0, \\ -i\varkappa_{(x,+\infty)}(y)\, e^{iz(x-y)}, & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

$$(x, y \in E_1)^* \tag{5.10}$$

(формула при $\operatorname{Im} z < 0$ вытекает из соотношения $R_z = R_{\bar z}^*$).

Для нахождения спектрального ядра воспользуемся первыми двумя равенствами из (2.39) (последнее равенство сейчас несправедливо). Подсчитывая при помощи (5.10) интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta + i\varepsilon} ((R_z - R_z^*) f, g)_0\, dz$ и переходя затем к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим

$$\Phi(x, y; \lambda)\, d\varrho(\lambda) = \Phi(x - y; \lambda)\, d\varrho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} e^{i\lambda(x-y)}\, d\lambda$$
$$(-\infty < \lambda < \infty;\ x, y \in E_1).$$

Итак, изложенное, если угодно, можно считать построением теории обычного одномерного интеграла Фурье. Для построения n-мерного интеграла Фурье нужно воспользоваться теоремой 2.5, гл. V о разложении по общим собственным векторам системы коммутирующих самосопряженных операторов. Роль таких операторов должны играть в пространстве $L_2(E_n)$ минимальные операторы, порожденные выражениями $-iD_1, \ldots, -iD_n$.

б) *Выражение* $-\frac{d^2}{dx^2}$ *в* E_1. Разложение по собственным функциям соответствующего минимального оператора в $L_2(E_1)$ строится так же, как и в примере а), п. 8, § 2, только подсчеты будут более эле-

---

* Заметим также, что $R(x - y; z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x-y)\xi}}{\xi - z}\, d\xi$, что соответствует (3.6).

ментарными. В результате мы получим формулы, которые совпадают с (2.35) и (2.41) при $n=1$. Именно

$$R(x, y; z)=R(x-y; z)=\frac{i}{2\sqrt{z}} e^{i\sqrt{z}|x-y|} \qquad (x, y \in E_1;\ z \bar{\in} [0, \infty)),$$

$$\Phi(x, y; \lambda)\, d\varrho(\lambda)=\Phi(x-y; \lambda)\, d\varrho(\lambda)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} \cos \sqrt{\lambda}(x-y) \dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}, & \lambda>0, \\ 0, & \lambda \leqslant 0\end{cases} \quad (x, y \in E_1).$$

Выпишем спектральную матрицу, полагая $c=0$ в формулах п. 2. Сейчас $\chi_0(x; \lambda)=\cos \sqrt{\lambda} x$, $\chi_1(x; \lambda)=\dfrac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$ $(\lambda>0;\ x \in E_1)$. Согласно (5.8), при $\lambda>0$

$$\| d\sigma_{jk}(\lambda) \|_0^1=\frac{1}{2\pi}\begin{Vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda}\end{Vmatrix} d\lambda .$$

в) *Выражение* $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ *в* $(0, \infty)$. Сейчас нужно задать в 0 некоторые граничные условия, которые вместе с условием $u=0$ на ∞ были бы формально самосопряженными. Их общий вид: $\alpha u'(0)+ +\beta u(0)=0$ $(\operatorname{Im} \alpha=\operatorname{Im} \beta=0,\ \alpha^2+\beta^2>0)$. Построим соответствующий сильный оператор Λ(гр). Нетрудно показать, например, подобно примеру а), что он будет самосопряженным. Мы не будем подсчитывать для него $R(x, y; z)$ и $\Phi(x, y; \lambda)$ и ограничимся лишь тем, что для граничного условия $u'(0)=0$ укажем вид Φ:

$$\Phi(x, y; \lambda)\, d\varrho(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} \cos \sqrt{\lambda} x \cdot \cos \sqrt{\lambda} y \dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}, & \lambda>0, \\ 0, & \lambda \leqslant 0\end{cases}$$
$$(x, y \in(0, \infty)).$$

Эта формула, например, может быть получена из равенства Парсеваля в примере б), если в нем рассмотреть лишь четные функции.

Рассматриваемый пример иллюстрирует сказанное в п. 2 об уменьшении порядка спектральной матрицы. Именно, сейчас можно положить $\chi_0(x; \lambda)=\cos \sqrt{\lambda} x$ $(\lambda>0;\ x \in(0, \infty))$; спектральная матрица будет одномерна: $d\sigma_{00}(\lambda)=\dfrac{d\lambda}{\pi \sqrt{\lambda}}$ при $\lambda>0$.

Глава VII

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этой главе рассматривается спектральная теория простейших неограниченных самосопряженных операторов — разностных. Излагаются как классические результаты по теории якобиевых матриц, так и спектральная теория операторов в частных разностях. Последнюю удобно строить на основании спектральной теории якобиевых матриц с операторными коэффициентами; такая теория излагается в § 2. Результаты главы тесно связаны с результатами § 5, гл. VIII.

§ 1. Разностные операторы второго порядка на полуоси (якобиевы матрицы)

1. Разностные выражения и операторы. В этом параграфе мы будем рассматривать разностный аналог дифференциального выражения Штурма — Лиувилля. Не ограничивая общности, можно считать, что коэффициенты выражения L определены для всех целочисленных значений индекса j. Оно имеет вид

$$(Lu)_j = a_{j-1}u_{j-1} + a_j u_{j+1} + b_j u_j \quad (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots), \tag{1.1}$$

где a_j, b_j — заданные коэффициенты, $u = (u_j) = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots)$ — последовательность, на которую L действует. Предполагается, что $a_j > 0$, $\operatorname{Im} b_j = 0$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Покажем, что (1.1) действительно является разностным аналогом выражения Штурма—Лиувилля вида $\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x)$. Для этого введем в рассмотрение левую и правую разности первого порядка

$$(\Delta_л u)_j = u_j - u_{j-1}, \quad (\Delta_п u)_j = u_{j+1} - u_j \quad (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots). \tag{1.2}$$

Тогда искомый аналог имеет вид

$$\begin{gathered}(\Delta_л[a(\Delta_п u)])_j + q_j u_j = a_j(u_{j+1} - u_j) - a_{j-1}(u_j - u_{j-1}) + q_j u_j = \\ = a_{j-1}u_{j-1} + a_j u_{j+1} + b_j u_j, \quad b_j = -a_{j-1} - a_j + q_j \\ (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots).\end{gathered} \tag{1.3}$$

Запись выражения (1.1) в форме (1.3) будет иногда использоваться.

При помощи простого подсчета легко убедиться в справедливости следующей формулы Грина:

$$\sum_{j=k}^{l} [(Lu)_j\bar{v}_j - u_j\overline{(Lv)_j}] = a_l(u_{l+1}\bar{v}_l - u_l\bar{v}_{l+1}) -$$
$$- a_{k-1}(u_k\bar{v}_{k-1} - u_{k-1}\bar{v}_k) \quad (k, l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots; \quad k < l). \quad (1.4)$$

Перейдем к построению операторов, связанных с выражением L. В этом параграфе (за исключением последнего пункта) мы ограничимся случаем, возникающим в классической степенной проблеме моментов; он аналогичен задаче для уравнения Штурма—Лиувилля на полуоси $(0, \infty)$ с граничным условием $u(0) = 0$. Рассмотрения будут проходить в гильбертовом пространстве $l_2([0, \infty)) = H_0$, состоящем из последовательностей $u = (u_0, u_1, \ldots)$, $(u, v) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j\bar{v}_j$. Определим оператор L', полагая на совокупности $l_{2,0}([0, \infty))$ финитных на ∞ последовательностей u $(\mathrm{L}'u)_j = (Lu)_j$, причем при подсчете $(Lu)_0$ считаем, что $u_{-1} = 0$ (это условие играет роль граничного условия $u(0) = 0$). При помощи формулы Грина (1.4) легко заключить, что L' эрмитов. Через L обозначим замыкание оператора L'; L мы будем называть оператором, порожденным L.

Легко показать, что *область определения сопряженного оператора* L^* *состоит из тех* $v \in l_2([0, \infty))$, *для которых* $Lv \in l_2([0, \infty))$, *причем* $(\mathrm{L}^*v)_j = (Lv)_j$ (*как и раньше, при подсчете* $(Lv)_0$ *принимается* $v_{-1} = 0$). Действительно, пусть $v \in \mathfrak{D}(\mathrm{L}^*)$, тогда $(Lu, v)_0 = (u, \mathrm{L}^*v)_0$ для всех $u \in l_{2,0}([0, \infty))$. С другой стороны, при помощи (1.4) $(Lu, v)_0 = (u, Lv)_0$. Таким образом, $(u, \mathrm{L}^*v)_0 = (u, Lv)_0$ $(u \in l_{2,0}([0, \infty)))$, откуда $Lv = \mathrm{L}^*v \in l_2([0, \infty))$. Итак, если $v \in \mathfrak{D}(\mathrm{L}^*)$, то $Lv \in l_2([0, \infty))$ и $\mathrm{L}^*v = Lv$. Обратное соотношение вытекает из формулы Грина.

Вообще говоря, $\mathrm{L}^* \neq \mathrm{L}$. В дальнейшем мы будем подробно останавливаться на вопросах самосопряженности оператора L. Сейчас лишь заметим, что дефектные числа L одинаковы — это следует из того, что L вещественен (благодаря вещественности коэффициентов L) относительно инволюции $u = (u_j) \to \bar{u} = (\bar{u}_j)$.

Во всем § 1 при подсчете $(Lu)_0$ принимаем, что $u_{-1} = 0$. Тогда переход от u к Lu можно изобразить как действие на вектор $u = (u_0, u_1, \ldots)$ матрицы

$$J = \begin{Vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix} \quad (a_j > 0, \ \operatorname{Im} b_j = 0; \quad j = 0, 1, \ldots). \quad (1.5)$$

Матрицы такой структуры носят название якобиевых. Результаты этого параграфа можно рассматривать как теорию таких матриц.

2. Полиномы первого рода. Критерии самосопряженности оператора L. Прежде всего введем одно важное понятие. Рассмотрим уравнение

$$(Lu)_j = a_{j-1}u_{j-1} + a_j u_{j+1} + b_j u_j = zu_j \quad (j = 0, 1, \ldots), \tag{1.6}$$

где z — некоторое комплексное число. Его можно рассматривать, как рекуррентное соотношение для нахождения u_{j+1} по u_j и u_{j-1}; так как $a_j \neq 0$, то это соотношение всегда разрешимо. Положим $u_{-1}=0$, $u_0 = 1$ и определим u_j при $j \geqslant 1$. Ясно, что u_j будет полиномом степени j относительно z $\left(\text{так, например, } u_1 = \frac{1}{a_0}(z - b_0)\right)$; обозначим $u_j = P_j(z)$. Эти полиномы называются полиномами первого рода, порожденными L. Итак,

$$(LP(z))_j = zP_j(z) \quad (j = 0, 1, \ldots); \quad P_{-1}(z) = 0, \quad P_0(z) = 1. \tag{1.7}$$

Благодаря вещественности a_j, b_j коэффициенты полиномов $P_j(z)$ вещественны; как легко убедиться, положительность a_j приводит к тому, что коэффициент при z^j в $P_j(z)$ всегда положителен. Разностное уравнение (1.6) — второго порядка, поэтому оно имеет два линейно независимых решения. Второе решение, нормированное определенным образом, будет введено в дальнейшем.

Пусть $\operatorname{Im} z \neq 0$, обозначим $N_{\bar z}$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{R}(\mathrm{L} - \bar z E)$, т. е. дефектное подпространство оператора L. Это подпространство совпадает с подпространством решений уравнения $\mathrm{L}^*\varphi = z\varphi$ или, благодаря виду L^*, с подпространством решений разностного уравнения $(Lu)_j = zu_j$, $u_{-1} = 0$, входящих в $l_2([0, \infty))$. Каждое решение такого уравнения представимо в виде $u_j = u_0 P_j(z)$, поэтому дефектное подпространство максимум одномерно, причем оно будет непустым тогда и только тогда, когда $(u_j) = (u_0 P_j(z)) \in l_2([0, \infty))$, т. е. когда $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2 < \infty$. Учитывая эти замечания, инвариантность дефектных чисел и их равенство для рассматриваемого оператора, приходим к следующему утверждению:

Теорема 1.1. *Оператор* L *имеет индекс дефекта* (0, 0) *или* (1, 1). *Первый случай характеризуется тем, что ряд* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2$ *расходится для всех невещественных* z, *второй — что этот ряд сходится.*

Во втором случае дефектное подпространство $N_{\bar z}$, *ортогональное к* $\mathfrak{R}(\mathrm{L} - \bar z E)$, *натянуто на вектор* $(P_0(z), P_1(z), \ldots)$.

Из теоремы следует, что для самосопряженности оператора L необходимо, чтобы ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2$ расходился при всех невещественных z, и достаточно, чтобы он расходился хотя бы при одном таком z. Можно дать в терминах коэффициентов a_j, b_j достаточные условия расходимости или сходимости такого ряда, т. е. условия самосопряженности или несамосопряженности L. Некоторые из этих условий мы сейчас приведем. Прежде всего установим одну элементарную теорему.

Теорема 1.2. *Если коэффициенты a_j и b_j ограничены, то оператор* L *ограничен и, следовательно, самосопряжен.*

Доказательство. Пусть $|a_j|, |b_j| \leqslant C$ $(j = 0, 1, \ldots)$, тогда по неравенству треугольника

$$\|\mathrm{L}u\|_0 = \|Lu\|_0 = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |a_{j-1}u_{j-1} + a_j u_{j+1} + b_j u_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |a_{j-1}u_{j-1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j u_{j+1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j u_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\Big(\sum_{j=0}^{\infty} |u_{j-1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |u_{j+1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \|u\|_0\Big) \leqslant 3C\|u\|_0,$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Если b_j произвольны, а a_j таковы, что*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{a_j} = \infty, \tag{1.8}$$

то оператор L *самосопряжен.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что (1.8) влечет расходимость ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2$ при некотором невещественном z. Используя формулу Грина (1.4), найдем

$$(z - \bar{z})\sum_{j=0}^{n} P_j(z)\overline{P_j(z)} = \sum_{j=0}^{n} \{(L[P(z)])_j\overline{P_j(z)} - P_j(z)\overline{(L[P(z)])_j}\} =$$

$$= a_n(P_{n+1}(z)\overline{P_n(z)} - P_n(z)\overline{P_{n+1}(z)}) \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Отсюда

$$\sum_{j=0}^{n} |P_j(z)|^2 = \frac{a_n}{z-\bar{z}} (P_{n+1}(z)\overline{P_n(z)} - P_n(z)\overline{P_{n+1}(z)}) \tag{1.9}$$

$$(n = 0, 1, \ldots).$$

Так как $P_0(z) = 1$, то, оценивая (1.9) по модулю, получим

$$1 \leqslant \frac{a_n}{|z-\bar{z}|} (|P_{n+1}(z)||P_n(z)| + |P_n(z)||P_{n+1}(z)|) =$$

$$= \frac{2a_n}{|z-\bar{z}|} |P_n(z)||P_{n+1}(z)|,$$

откуда $\frac{1}{a_n} \leqslant C|P_n(z)||P_{n+1}(z)|$. Далее

$$\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)||P_{n+1}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)|^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |P_{n+1}(z)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < C \sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)|^2,$$

т. е. $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)|^2 = \infty$. Теорема доказана.

Теорема 1.4. *Если* $a_{j-1} + a_j + b_j \leqslant C < \infty$ $(j = 0, 1, \ldots)$, *то оператор* L *полуограничен сверху на финитных последовательностях (т. е.* $(\mathrm{L}u, u)_0 \leqslant C(u, u)_0$, $u \in l_{2,0}([0, \infty))$) *и самосопряжен.*

Доказательство. Мы будем пользоваться следующей легко проверяемой формулой «суммирования по частям»:

$$\sum_{j=k}^{l} (\Delta_\text{л} u)_j v_j = -u_{k-1}v_k + u_l v_{l+1} - \sum_{j=k}^{l} u_j (\Delta_\text{п} v)_j$$

$$(k, l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots; \quad k < l). \tag{1.10}$$

Пусть $u \in l_{2,0}([0, \infty))$, взяв N достаточно большим, при помощи (1.10) найдем $(u_{-1} = 0)$:

$$(\Delta_\text{л}[a.(\Delta_\text{п} u).], u)_0 = \sum_{j=0}^{N} (\Delta_\text{л}[a.(\Delta_\text{п} u).])_j \bar{u}_j =$$

$$= -a_{-1}(u_0 - u_{-1})\bar{u}_0 - \sum_{j=0}^{N} a_j (\Delta_п u)_j \overline{(\Delta_п u)_j} =$$
$$= -a_{-1}|u_0|^2 - \sum_{j=0}^{N} a_j |(\Delta_п u)_j|^2 \leqslant 0. \quad (1.11)$$

Воспользуемся записью выражения L в виде (1.3). Так как $q_j = a_{j-1} + a_j + b_j \leqslant C$, то благодаря (1.11) для $u \in l_{2,0}([0, \infty))$ имеем:

$$(Lu, u)_0 = (\Delta_л [a_. (\Delta_п u)_.], u)_0 + \sum_{j=0}^{\infty} q_j |u_j|^2 \leqslant C \sum_{j=0}^{\infty} |u_j|^2 = C(u, u)_0.$$

Полуограниченность L установлена.

Для доказательства теоремы нужно установить, что $\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2 = \infty$ при некотором невещественном z. Позже независимо мы покажем (см. стр. 527), что для полиномов $P_j(z)$ справедлива оценка $|P_j(x+iy)| \geqslant |P_j(x)|$ $(-\infty < x,\ y < \infty)$, поэтому расходимость требуемого ряда будет доказана, если показать, что $\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(x)|^2 = \infty$ при некотором вещественном x. Воспользуемся следующим простым фактом: решения разностных уравнений $(\Delta_л u)_j = f_j$, $(\Delta_п u)_j = f_j$ $(j = 0, 1, \ldots)$ имеют соответственно вид

$$u_n = u_0 + \sum_{j=1}^{n} f_j, \quad v_n = v_0 + \sum_{j=0}^{n-1} f_j \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (1.12)$$

Применяя первую из формул (1.12) к соотношению $(\Delta_л [a_. (\Delta_п P(z))])_j = (z - a_{j-1} - a_j - b_j) P_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots;\ P_0(z) = 1)$ (см. (1.7) и (1.3)), получим $a_k (\Delta_п P(z))_k = a_0 (\Delta_п P(z))_0 + \sum_{j=1}^{k} (z - a_{j-1} - a_j - b_j) P_j(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Так как $a_0(\Delta_п P(z))_0 = z - a_0 - b_0$, то полученное равенство можно переписать в виде $a_k (\Delta_п P(z))_k = \sum_{j=0}^{k} (z - a_{j-1} - a_j - b_j) P_j(z)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, если только считать $a_{-1} = 0$. Отсюда при помощи второй из формул (1.12) получим

$$P_n(z) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k} \sum_{j=0}^{k} (z - a_{j-1} - a_j - b_j) P_j(z) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$
$$(1.13)$$

Возьмем теперь $z=x$ вещественным $\geqslant C$. Тогда $z-a_{j-1}-a_j-b_j\geqslant 0$ и из (1.13) последовательно найдем: $P_0(x)=1$, $P_1(x)\geqslant 1$, $P_2(x)\geqslant 1,\ldots$. Таким образом, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|P_j(x)|^2=\infty$, что и требовалось. Теорема доказана.

Следствие. Если $a_{j-1}+a_j-b_j\leqslant C<\infty$ $(j=0,1,\ldots)$, то оператор L самосопряжен.

Действительно, полиномы $\widehat{P}_j(z)=(-1)^{j-1}P_j(-z)$ $(j=0,1,\ldots)$ удовлетворяют соотношению $a_{j-1}\widehat{P}_{j-1}(z)+a_j\widehat{P}_{j+1}(z)-b_j\widehat{P}_j(z)=z\widehat{P}_j(z)$ $(j=0,1,\ldots;\ \widehat{P}_0(z)=1)$, т. е. являются полиномами первого рода для выражения $(\widehat{L}u)_j=a_{j-1}u_{j-1}+a_ju_{j+1}-b_ju_j$. Согласно теореме 1.4 условие $a_{j-1}+a_j-b_j\leqslant C$ влечет расходимость ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\widehat{P}_j(z)|^2$, что эквивалентно соотношению $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|P_j(-z)|^2=\infty$, которое приводит к самосопряженности L.

Условие $a_{j-1}+a_j+b_j\leqslant C<\infty$ $(j=0,1,\ldots)$ не является необходимым для полуограниченности сверху оператора L. Кроме того, полуограниченность L не влечет, вообще говоря, его самосопряженность*. Это поясняет следующий пример. Пусть L — выражение вида (1.1), неположительное на $l_{2,0}([0,\infty))$ (т. е. $(Lu,u)_0\leqslant 0$, $u\in l_{2,0}([0,\infty))$). Обозначим $(P_0(z),P_1(z),\ldots)$ отвечающую ему последовательность полиномов первого рода; решение уравнения $(Lu)_j=zu_j$ $(j=1,2,\ldots)$ с начальными условиями $u_0=0$, $u_1=\dfrac{1}{a_0}$ обозначим $\left(Q_0(z)=0,\ Q_1(z)=\dfrac{1}{a_0},\ Q_2(z),\ldots\right)$ $(Q_j(z)$ — т. н. полиномы второго рода, см. стр. 526). Построим последовательность $d_0=d_1=1$, $d_2, d_3,\ldots\geqslant 1$ столь быстро растущей, чтобы $\left(\dfrac{P_0(z)}{d_0},\dfrac{P_1(z)}{d_1},\ldots\right)$ и $\left(\dfrac{Q_0(z)}{d_0},\dfrac{Q_1(z)}{d_1},\ldots\right)$ при $z=0$ входили в $l_2([0,\infty))$. Пусть D — диагональная матрица с элементами $d_0, d_1,\ldots$ на диагонали; положим $M=DLD$. Выражение M имеет вид (1.1), оно, очевидно, неположительно на $l_{2,0}([0,\infty))$. Вместе с тем полиномы $\dfrac{P_j(z)}{d_j}$ и $\dfrac{Q_j(z)}{d_j}$ $(j=0,1,\ldots)$ служат полиномами первого и второго рода для M, причем в точке $z=0$ они образуют последовательности, входящие по построению в $l_2([0,\infty))$.

* Ср. с теоремами 1.7 и 1.8, гл. VI.

Ниже будет показано (см. стр. 546), что такая ситуация влечет несамосопряженность оператора, отвечающего разностному выражению M.

Сейчас мы докажем теорему противоположного к предыдущим характера: она дает условие того, что L будет несамосопряжен.

Теорема 1.5. *Предположим, что* $|b_j| \leqslant C$ $(j = 0, 1, \ldots)$, *начиная с некоторого* j $a_{j-1}a_{j+1} \leqslant a_j^2$ *и*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{a_j} < \infty. \tag{1.14}$$

Тогда оператор L *несамосопряжен.*

Доказательство. Зафиксируем невещественное z. Согласно (1.14) для доказательства соотношения $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2 < \infty$, а значит и теоремы, достаточно установить оценку

$$\sqrt{a_j}\,|P_j(z)| \leqslant A < \infty \quad (j = 0, 1, \ldots). \tag{1.15}$$

Предположим, что справедливы неравенства $\sqrt{a_j}\,|P_j(z)| \leqslant A_n$ $(j = 0, \ldots, n)$, и подберем константу A_{n+1} на основании A_n; при этом мы считаем $n \geqslant n_0$, где $a_{j-1}a_{j+1} \leqslant a_j^2$ $(j = n_0, n_0 + 1, \ldots)$. Так как $P_{n+1}(z) = \frac{1}{a_n}(z - b_n)P_n(z) - \frac{a_{n-1}}{a_n}P_{n-1}(z)$, то $(C_1 = C + |z|)$

$$\sqrt{a_{n+1}}\,|P_{n+1}(z)| \leqslant \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{a_n}|z - b_n|\,|P_n(z)| + \frac{\sqrt{a_{n+1}a_{n-1}}}{a_n}|P_{n-1}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant C_1\frac{\sqrt{a_{n+1}a_{n-1}}}{a_n}\,\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}a_n}}\sqrt{a_n}\,|P_n(z)| + \frac{\sqrt{a_{n+1}a_{n-1}}}{a_n}\sqrt{a_{n-1}}\,|P_{n-1}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant A_n\left(1 + \frac{C_1}{\sqrt{a_{n-1}a_n}}\right).$$

Положим $A_{n+1} = A_n\left(1 + \frac{C_1}{\sqrt{a_{n-1}a_n}}\right)$. Таким образом, имеем $A_n =$

$$= A_{n_0}\prod_{j=n_0}^{n-1}\left(1 + \frac{C_1}{\sqrt{a_{j-1}a_j}}\right) \leqslant A_{n_0}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + \frac{C_1}{\sqrt{a_{j-1}a_j}}\right) = A \; (n > n_0).$$

Если последнее произведение сходится, то $A < \infty$ и (1.15) доказано. Но сходимость действительно имеет место, так как в силу (1.14)

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a_{j-1}a_j}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_{j-1}}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_j}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Теорема доказана.

3. Разложение по собственным функциям. Мы сейчас построим такое разложение для самосопряженного расширения (в $l_2([0, \infty))$ или с выходом в более широкое пространство) оператора L. Будет приведено три подхода к вопросу. Прежде всего остановимся на построении, вытекающем из общих результатов главы V и аналогичном проведенному на стр. 500—501. Пусть $E(\Delta)$, вообще говоря, обобщенное разложение единицы, отвечающее L. Так как L действует в $l_2([0, \infty))$, то к этому оператору применимы результаты стр. 364—365. Имеем

$$E(\Delta) = \int_{\Delta} P(\lambda)\, d\varrho(\lambda), \tag{1.16}$$

где $P(\lambda)$ — оператор обобщенного проектирования, действующий из пространства $l_2([0, \infty), p_j)$ в $l_2\left([0, \infty), \frac{1}{p_j}\right)$; здесь $p_j \geqslant 1$ таковы, что $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j} < \infty$. Оператор $P(\lambda)$ является матричным, матрица $\| \Phi_{jk}(\lambda) \|_0^{\infty}$ которого положительно определена и удовлетворяет условию: ϱ-почти для всех λ

$$\sum_{j,\, k=0}^{\infty} \frac{|\Phi_{jk}(\lambda)|^2}{p_j p_k} \leqslant 1. \tag{1.17}$$

Лемма 1.1. *Справедливо представление*

$$\Phi_{jk}(\lambda) = P_j(\lambda) P_k(\lambda) \Phi_{00}(\lambda) \quad (j,\ k = 0,\ 1, \ldots). \tag{1.18}$$

Доказательство. Каждый вектор $\varphi \in \mathfrak{R}(P(\lambda))$ является обобщенным собственным вектором, отвечающим собственному числу λ. Это означает (см. стр. 336), что $(\varphi, (\mathrm{L}^* - \lambda E)u)_0 = 0$ для всех $u \in l_{2,0}([0, \infty))$, иными словами $(\varphi, (L - \lambda E)u)_0 = 0$ ($u \in l_{2,0}([0, \infty))$, $u_{-1} = 0$). Используя формулу Грина (1.4), получим $0 = (\varphi, (L - \lambda E)u)_0 = ((L - \lambda E)\varphi, u)_0 - a_{-1}\bar{\varphi}_{-1}\bar{u}_0$, т. е. $a_{-1}\bar{\varphi}_{-1}\bar{u}_0 = ((L - \lambda E)\varphi, u)_0$. Благодаря произвольности u последнее соотношение возможно лишь тогда, когда $((L - \lambda E)\varphi)_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и $a_0\varphi_1 + (b_0 - \lambda)\varphi_0 = 0$. Иными словами, можно считать, что $((L - \lambda E)\varphi)_j = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$ и $\varphi_{-1} = 0$ Поэтому $\varphi_j = \varphi_0 P_j(\lambda)$ $(j = 0, 1, \ldots)$.

В частности, при фиксированном k вектор $(\Phi_{0k}(\lambda), \Phi_{1k}(\lambda), \ldots) = P(\lambda)\delta_k \in \mathfrak{R}(P(\lambda))$ $(\delta_k = (\delta_{0k}, \delta_{1k}, \ldots))$, поэтому $\Phi_{jk}(\lambda) = \Phi_{0k}(\lambda) P_j(\lambda)$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Далее, $\overline{\Phi_{0k}(\lambda)} = \Phi_{k0}(\lambda) \in \mathfrak{R}(P(\lambda))$, отсюда $\overline{\Phi_{0k}(\lambda)} = \overline{\Phi_{00}(\lambda) P_k(\lambda)}$. Благодаря вещественности $P_k(\lambda)$ $\Phi_{0k}(\lambda) = \Phi_{00}(\lambda) P_k(\lambda)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Подставляя это равенство в полученное выражение для $\Phi_{jk}(\lambda)$, придем к (1.18). Лемма доказана.

Обозначим $d\sigma(\lambda) = \Phi_{00}(\lambda)\, d\varrho(\lambda)$, так как $\Phi_{00}(\lambda) \geqslant 0$, то $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная мера. Подставляя (1.18) в (1.16), получим основную формулу:

$$E(\Delta)_{jk} = (E(\Delta)\delta_k,\ \delta_j)_0 = \int_\Delta P_j(\lambda) P_k(\lambda)\, d\sigma(\lambda) \tag{1.19}$$

$$(j,\ k = 0, 1, \ldots).$$

Здесь, как и ранее, $\delta_k = (\delta_{0k}, \delta_{1k}, \ldots)$ $(k = 0, 1, \ldots)$; такое обозначение «δ-последовательности» мы сохраним во всем дальнейшем. Из (1.19) следует, что

$$\sigma(\Delta) = (E(\Delta)\delta_0,\ \delta_0)_0. \tag{1.20}$$

В этом параграфе удобно спектральной мерой называть не $d\varrho(\lambda)$, а $d\sigma(\lambda)$. Ясно, что эти две меры абсолютно непрерывны одна относительно другой. Из (1.19) следует, что полиномы $P_j(\lambda)$ образуют ортонормированную систему относительно $d\sigma(\lambda)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(\lambda) P_k(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \delta_{jk} \quad (j,\ k = 0, 1, \ldots). \tag{1.21}$$

Запишем равенство Парсеваля. С этой целью введем для финитных последовательностей u преобразование Фурье, полагая

$$\tilde{u}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j P_j(z) \quad (u \in l_{2,0}([0, \infty))). \tag{1.22}$$

Используя формулу (1.19), получим требуемое равенство:

$$(E(\Delta) u,\ v)_0 = \int_\Delta \tilde{u}(\lambda) \overline{\tilde{v}(\lambda)}\, d\sigma(\lambda) \quad (u,\ v \in l_{2,0}([0, \infty))). \tag{1.23}$$

Отметим, что введенное сейчас преобразование Фурье, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, существенно отличается от аналогичных понятий на стр. 341: сейчас имеется аналитическая (даже полиномиальная) зависимость $\tilde{u}(\lambda)$ от λ. Из (1.22) и (1.23), очевидно, следует, что спектр в нашем случае полностью однократный. Подытожим приведенные результаты в виде теоремы.

Теорема 1.6. *Пусть $E(\Delta)$ — некоторое разложение единицы (обычное или обобщенное), отвечающее оператору* L. *Построим меру $\sigma(\Delta) = (E(\Delta)\delta_0,\ \delta_0)_0$ — спектральную меру; относительно нее поли-*

номы $P_j(\lambda)$ $(j=0, 1, \ldots)$ *образуют ортонормированную систему. Разложение по собственным функциям, отвечающее* $E(\Delta)$, *записывается посредством формул* (1.23) *и* (1.22).

Таким образом, из решений $P_j(\lambda)$ разностного уравнения $(LP(\lambda))_j = \lambda P_j(\lambda)$ $(j=0, 1, \ldots;\ P_{-1}(\lambda)=0)$ в качестве собственных функций (точнее, последовательностей) отбираются те решения, для которых λ расположено на спектре соответствующего расширения. Из (1.17) и (1.18) следует, что σ-почти для всех λ такие последовательности $(P_0(\lambda), P_1(\lambda), \ldots)$ удовлетворяют оценке роста

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|P_j(\lambda)|^2}{p_j} < \infty, \tag{1.24}$$

где $p_j \geqslant 0$, $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j} < \infty$ (множество λ, для которых выполняется (1.24), зависит от выбора p_j). Впрочем, оценка (1.24) может быть получена при помощи простых рассуждений непосредственно из соотношений ортогональности (1.21).

Приведем теперь два доказательства теоремы 1.6, не использующие общую теорию разложений по собственным векторам. Первое из них основывается на следующей лемме.

Лемма 1.2. *Предположим, что имеется последовательность функций ограниченной вариации* $f(\lambda) = (f_0(\lambda), f_1(\lambda), \ldots)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, *таких что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m\, |df_j(\lambda)| < \infty \quad (m, j = 0, 1, \ldots), \quad (Lf(\lambda))_j = \int_{-\infty}^{\lambda} \mu\, df_j(\mu)$$

$$(j = 0, 1, \ldots;\ f_{-1}(\lambda) = 0).$$

Тогда справедливо представление

$$f_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} P_j(\mu)\, df_0(\mu) \quad (j = 0, 1, \ldots). \tag{1.25}$$

Доказательство. Образуем последовательность $g_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} P_j(\mu)\, df_0(\mu)$ $(j = 0, 1, \ldots;\ g_0(\lambda) = f_0(\lambda))$. Тогда

$$(Lg(\lambda))_j = \int_{-\infty}^{\lambda} (LP(\mu))_j\, df_0(\mu) = \int_{-\infty}^{\lambda} \mu P_j(\mu)\, df_0(\mu) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda} \mu d\left(\int_{-\infty}^{\mu} P_j(\nu)\, df_0(\nu)\right) = \int_{-\infty}^{\lambda} \mu dg_j(\mu) \quad (j = 0, 1, \ldots; \ g_{-1}(\lambda) = 0).$$

Таким образом, разности $h_j(\lambda) = f_j(\lambda) - g_j(\lambda)$ удовлетворяют равенству $(Lh(\lambda))_j = \int_{-\infty}^{\lambda} \mu dh_j(\mu)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ и условиям $h_{-1}(\lambda) = h_0(\lambda) = 0$, отсюда последовательно находим: $0 = h_1(\lambda) = h_2(\lambda) = \ldots$. Таким образом, $f_j(\lambda) = g_j(\lambda)$ $(j = 0, 1, \ldots)$, что и доказывает лемму.

Для доказательства теоремы достаточно установить равенство (1.19). Заметим, что при фиксированном k функции $f_j(\lambda) = (E_\lambda\delta_k, \delta_j)_0 = (E_\lambda\delta_k)_j$ удовлетворяют условиям леммы, так как

$$(Lf(\lambda))_j = (L[E_\lambda\delta_k])_j = (\mathrm{L}E_\lambda\delta_k)_j =$$
$$= \int_{-\infty}^{\lambda} \mu d(E_\mu\delta_k)_j = \int_{-\infty}^{\lambda} \mu df_j(\mu) \quad (j = 0, 1, \ldots).$$

Поэтому справедливо представление

$$(E_\lambda\delta_k, \delta_j)_0 = \int_{-\infty}^{\lambda} P_j(\mu)\, d_\mu(E_\mu\delta_k, \delta_0)_0 \quad (j, k = 0, 1, \ldots). \tag{1.26}$$

Далее

$$(E_\mu\delta_k, \delta_0)_0 = (\delta_k, E_\mu\delta_0)_0 = \overline{(E_\mu\delta_0, \delta_k)_0} = \overline{\int_{-\infty}^{\mu} P_k(\nu)\, d_\nu (E_\nu\delta_0, \delta_0)_0} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\mu} P_k(\nu)\, d_\nu (E_\nu\delta_0, \delta_0)_0 \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Подставляя это выражение в (1.26), получим

$$(E_\lambda\delta_k, \delta_j)_0 = \int_{-\infty}^{\lambda} P_j(\mu) P_k(\mu)\, d_\mu (E_\mu\delta_0, \delta_0)_0 \quad (j, k = 0, 1, \ldots).$$

Равенство (1.19), а значит и теорема, установлены.

Приведем еще одно непосредственное доказательство теоремы 1.6. Выясним прежде всего, как действует оператор L на вектор δ_j. Имеем для любой $u \in l_{2,0}([0, \infty))$

$$(u, \mathrm{L}\delta_j)_0 = (\mathrm{L}u, \delta_j)_0 = (\mathrm{L}u)_j = (Lu)_j = a_{j-1}u_{j-1} + a_ju_{j+1} +$$
$$+ b_ju_j = (u, a_{j-1}\delta_{j-1} + a_j\delta_{j+1} + b_j\delta_j)_0.$$

Благодаря произвольности u

$$\mathrm{L}\delta_j = a_{j-1}\delta_{j-1} + a_j\delta_{j+1} + b_j\delta_j \quad (j = 0, 1, \ldots), \tag{1.27}$$

причем и здесь нужно считать $\delta_{-1} = 0$. Формула (1.27) показывает, что $\mathrm{L}\delta_j$ опять финитна и, следовательно, входит в $\mathfrak{D}(\mathrm{L})$. Таким образом, δ_j входит в область определения любой степени L^n $(n = 0, 1, \ldots)$.

Равенство (1.27) можно рассматривать как рекуррентное соотношение для нахождения δ_j. Так, при $j = 0$ получим $a_0\delta_1 + b_0\delta_0 = \mathrm{L}\delta_0 (\delta_{-1} = 0)$, откуда $\delta_1 = \frac{1}{a_0}(\mathrm{L} - b_0 E)\delta_0 = P_1(\mathrm{L})\delta_0$. Затем, очевидно, найдем $\delta_2 = P_2(\mathrm{L})\delta_0$ и т. д. Итак,

$$\delta_j = P_j(\mathrm{L})\delta_0 \quad (j = 0, 1, \ldots). \tag{1.28}$$

Теперь легко установить (1.19):

$$(E(\Delta)\delta_k, \delta_j)_0 = (E(\Delta)P_k(\mathrm{L})\delta_0, P_j(\mathrm{L})\delta_0)_0 = (P_j(\mathrm{L})E(\Delta)P_k(\mathrm{L})\delta_0, \delta_0)_0 = \int_\Delta P_j(\lambda)P_k(\lambda)\,d(E_\lambda\delta_0, \delta_0)_0 \quad (j, k = 0, 1, \ldots).$$

Теорема доказана.

4. Изучение преобразований Фурье. Полиномы $P_j(\lambda)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ ортонормированы и поэтому линейно независимы кроме того, каждый из них точно степени j. Это показывает, что они образуют базис в пространстве полиномов, т. е. любой полином от λ может быть выражен в виде конечной линейной комбинации $P_j(\lambda)$. Поэтому из (1.22) следует, что совокупность преобразований Фурье всех финитных последовательностей дает совокупность всех полиномов от λ.

Так как $P_j(\lambda) \in L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ (см. (1.21)), то любой полином входит в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$; иначе говоря, спектральная мера всегда такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m\, d\sigma(\lambda) < \infty \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{1.29}$$

Вместе с тем совокупность всех полиномов не обязательно плотна в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$; критерий плотности будет дан ниже.

Укажем еще одно важное свойство спектральной меры — *множество точек роста функции $\sigma(\lambda)$ бесконечно*. Действительно предположим противное — пусть это множество Λ конечно. Построим отличный от тождественного нуля полином $P(\lambda)$ достаточно высокой степени, аннулирующийся в каждой точке из Λ. Разложим $P(\lambda)$ по системе $P_j(\lambda)$: $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} c_j P_j(\lambda)$, тогда $c_j = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda) P_j(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = 0$ $(j = 0, \ldots, N)$, т. е. $P(\lambda) \equiv 0$, что абсурдно. Доказанное свойство может быть сформулировано еще следующим образом: *если полином $P(\lambda)$ таков, что* $\int_{-\infty}^{\infty} |P(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) = 0$, *то* $P(\lambda) \equiv 0$.

Соответствие $u \to \widetilde{u}(\lambda)$ является взаимно однозначным соответствием между финитными последовательностями и их преобразованиями Фурье — некоторыми полиномами от λ, понимаемыми, как элементы пространства $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$. В силу равенства Парсеваля

$$(u, v)_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}(\lambda) \overline{\widetilde{v}(\lambda)}\, d\sigma(\lambda) \tag{1.30}$$

(см. (1.23), $\Delta = (-\infty, \infty)$) это соответствие — изометрия между частями $l_2([0, \infty))$ и $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$. Продолжая ее по непрерывности, мы получим изометрию между всем $l_2([0, \infty))$ и, вообще говоря, частью $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$, совпадающей с замыканием в этом пространстве совокупности всех полиномов. Обозначим это замыкание $\widetilde{l_2([0, \infty))}$. Пусть $u \in l_2([0, \infty))$ отвечает некоторое $\widetilde{u}(\lambda) \in \widetilde{l_2([0, \infty))}$, ясно, что $\widetilde{u}(\lambda)$ подсчитывается по u посредством той же формулы (1.22), только ряд теперь будет бесконечным и сходящимся в смысле $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$. Итак, мы распространили понятие преобразования Фурье на случай произвольных последовательностей $u \in l_2([0, \infty))$.

Оператор L при переходе от $l_2([0, \infty))$ к $\widetilde{l_2([0, \infty))}$ переходит в оператор умножения на λ в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$. Точнее, оператор L всегда определен на $l_{2,0}([0, \infty))$; его образ $\widetilde{\mathrm{L}}$ на образе этого множества (совокупности всех полиномов) действует как умножение на λ: благодаря (1.4)

$$\widetilde{(\mathrm{L}u)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (Lu)_j P_j(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j (LP(\lambda))_j = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} u_j P_j(\lambda) = \lambda \widetilde{u}(\lambda)$$

$$(u \in l_{2,0}([0, \infty)); \; u_{-1} = 0).$$

Полностью L является замыканием с $l_{2,0}([0, \infty))$ этого оператора, поэтому $\widetilde{\mathrm{L}}$ равен замыканию оператора умножения на λ, определенного сперва на совокупности полиномов.

Теорема 1.7. *Для того чтобы совокупность всех полиномов от λ была плотна в пространстве $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$, необходи-*

мо и достаточно, чтобы $d\sigma(\lambda)$ была порождена обычным разложением единицы. Такие спектральные меры будем называть ортогональными.

Доказательство. Пусть $\sigma(\Delta) = (E(\Delta)\delta_0, \delta_0)_0$, где $E(\Delta)$ — обычное разложение единицы, установим плотность полиномов в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$. Обозначим $A \supseteq \mathrm{L}$ самосопряженное расширение в $l_2([0, \infty))$ оператора L, отвечающее $E(\Delta)$; $R_z(\operatorname{Im} z \neq 0)$ — его резольвента. Пусть $u \in l_{2,0}([0, \infty))$; так как $R_z u \in \mathfrak{D}(A) \subseteq l_2([0, \infty))$, то можно найти (при фиксированном z) такое $v \in l_{2,0}([0, \infty))$, что $\| R_z u - v \|_0 < \varepsilon$. Переходя по изометрии от пространства $l_2([0, \infty))$ к пространству $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$, получим, что для каждого полинома $\tilde{u}(\lambda)$ найдется полином $\tilde{v}(\lambda)$ такой, что $\left\| \frac{\tilde{u}(\lambda)}{\lambda - z} - \tilde{v}(\lambda) \right\|_{L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))} < \varepsilon$. Ввиду произвольности ε это означает, что любую функцию $\frac{\tilde{u}(\lambda)}{\lambda - z}$ можно аппроксимировать полиномом, т. е. $\frac{\tilde{u}(\lambda)}{\lambda - z} \in \widetilde{l_2([0, \infty))}$ для любого полинома $\tilde{u}(\lambda)$.

Теперь легко закончить доказательство достаточности. Пусть $h(\lambda) \in L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ ортогональна к $\widetilde{l_2([0, \infty))}$. Тогда для любого невещественного z $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} h(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = 0$ $(u = \delta_0, \tilde{u}(\lambda) = 1)$. Как известно из теории преобразований Стилтьеса, это означает, что мера $\eta(\Delta) = \int\limits_{\Delta} h(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = 0$, т. е. $h(\lambda) = 0$ почти всюду. Итак, $\widetilde{l_2([0, \infty))} = L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$, что и требовалось.

Установим необходимость. Пусть $\widetilde{l_2([0, \infty))} = L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$, нужно показать, что $d\sigma(\lambda)$ порождена некоторым самосопряженным расширением A оператора L в $l_2([0, \infty))$. Перейдем по изометрии от $l_2([0, \infty))$ к $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$, оператор L перейдет в оператор $\tilde{\mathrm{L}}$ умножения на λ, определенный сперва на полиномах, а затем подвергнутый процедуре замыкания. Обозначим через $\tilde{A}$ обычный оператор умножения на λ в пространстве $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$; он самосопряжен, $\tilde{\mathrm{L}} \subseteq \tilde{A}$ и $\sigma(\Delta) = (\tilde{E}(\Delta) 1, 1)_{L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))}$, где $\tilde{E}(\Delta)$ — разложение единицы, отвечающее $\tilde{A}$ и совпадающее с оператором умножения на характеристическую функцию. Так как $L_2((-\infty, \infty),$

$d\sigma(\lambda)) = \widetilde{l_2([0, \infty))}$, то можно путем обратной изометрии перейти от $\tilde{A}$ к оператору A в пространстве $l_2([0, \infty))$. Очевидно, это и будет самосопряженный оператор, являющийся расширением L и порождающий $d\sigma(\lambda)$. Теорема доказана.

При помощи этой теоремы может быть доказана

Теорема 1.8. *Пусть спектральная мера такова, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \sigma'(\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda > -\infty. \tag{1.31}$$

Тогда она порождена обобщенным разложением единицы, т. е. неортогональна.

Доказательство. Используем следующую теорему (см., например, Н. И. Ахиезер [2, гл. 2, стр. 112]): для плотности в $L_p((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ линейной оболочки функций $e^{i\alpha\lambda}$ $(0 \leqslant \alpha < \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \log \sigma'(\lambda) \cdot (1+\lambda^2)^{-1}\, d\lambda = -\infty$ (здесь $d\sigma(\lambda)$ — произвольная неотрицательная конечная мера на оси). Согласно этой теореме в связи с (1.31) найдется функция $0 \neq h(\lambda) \in L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ такая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{i\alpha\lambda} d\sigma(\lambda) = 0$ $(0 \leqslant \alpha < \infty)$. Дифференцируя этот интеграл по α и затем полагая $\alpha = 0$, найдем: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\lambda^j d\sigma(\lambda) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Это показывает, что полиномы неплотны в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ и поэтому, благодаря теореме 1.7, $d\sigma(\lambda)$ порождена обобщенным разложением единицы. Теорема доказана.

До сих пор спектральную меру мы определяли как меру $\sigma(\Delta) = (E(\Delta)\delta_0, \delta_0)_0$. Покажем, что она может быть описана внутренним образом.

Теорема 1.9. *Пусть $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера на оси $(-\infty, \infty)$ такая, что существуют интегралы (1.29). Если для любых финитных последовательностей u, v и их преобразований Фурье $\tilde{u}(\lambda)$, $\tilde{v}(\lambda)$ (определенных посредством (1.22)) справедливо равенство Парсеваля (1.30) (или, что то же самое, имеет место соотношение ортогональности (1.21)), то $d\sigma(\lambda)$ является спектральной мерой, т. е. существует, вообще говоря, обобщенное разложение единицы $E(\Delta)$, построенное по самосопряженному расширению L, такое, что $\sigma(\Delta) = (E(\Delta)\delta_0, \delta_0)_0$.*

Доказательство теоремы почти очевидно: благодаря наличию равенства Парсеваля, точно так же, как и раньше, можно установить изометрию между $l_2([0,\infty))$ и $\widetilde{l_2([0,\infty))} \subseteq L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))$, при которой оператор L переходит в оператор $\widetilde{\mathrm{L}}$ умножения на λ, равный замыканию оператора умножения на λ, определенного на полиномах. Используя этот изоморфизм, мы исходную задачу сводим к задаче построения самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора $\widetilde{\mathrm{L}}$ такого, что $\sigma(\Delta) = (\widetilde{E}(\Delta)1, 1)_{L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))}$, где $\widetilde{E}(\Delta)$ — разложение единицы $\widetilde{A}$. Но в качестве $\widetilde{A}$ может быть взят самосопряженный оператор обычного умножения на λ в $L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))$. Если $\widetilde{l_2([0,\infty))} = L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))$, то полученное расширение отвечает расширению L без выхода из $l_2([0,\infty))$, в случае $\widetilde{l_2([0,\infty))} \subset L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))$ — расширению с выходом. Теорема доказана.

Так как теперь можно определить спектральную меру при помощи равенства Парсеваля (1.30) независимо от теории операторов, то становится содержательным следующее следствие доказанной теоремы.

Следствие. У разностного выражения существует единственная спектральная мера тогда и только тогда, когда оператор L самосопряжен.

Действительно, благодаря равенству (1.23) между спектральными мерами и обобщенными разложениями единицы имеется взаимно однозначное соответствие, откуда и следует утверждаемое.

В дальнейшем условимся говорить, что разностное выражение (или якобиева матрица) определено или нет, если оператор L самосопряжен или нет.

Зафиксируем разностное выражение L и рассмотрим совокупность Σ всех спектральных мер, отвечающих этому выражению. В неопределенном случае Σ состоит более чем из одной точки. Нетрудно убедиться, что Σ выпукло, т. е. что если $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, то $\sigma(\Delta) = \mu_1\sigma_1(\Delta) + \mu_2\sigma_2(\Delta)$ $(\mu_1+\mu_2=1;\ \mu_1,\mu_2 \geqslant 0)$ также входит в Σ. Действительно, если для σ_1 и σ_2 справедливо равенство Парсеваля (1.30), то оно будет справедливо и для σ. Крайними спектральными мерами называют крайние точки множества Σ, т. е. меры $\sigma \in \Sigma$, которые не представими в виде $\sigma(\Delta) = \mu_1\sigma_1(\Delta + \mu_2\sigma_2(\Delta)$ $(\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma;\ \mu_1+\mu_2=1;\ \mu_1,\mu_2 > 0)$. Если рассматривается определенное выражение L, то единственная спектральная мера будет крайней. Позже мы докажем (см. стр. 538), что каждая ортогональная спектральная мера будет крайней (однако этим не исчерпываются все крайние меры).

Теорема 1.10. *Для того чтобы совокупность всех полиномов от λ была плотна в пространстве $L_1((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))$, необходимо и достаточно, чтобы $d\sigma(\lambda)$ была крайней спектральной мерой.*

Установим сперва следующую общую лемму.

Лемма 1.3. *Две неотрицательные меры на оси* $d\sigma_1(\lambda)$ *и* $d\sigma_2(\lambda)$, *удовлетворяющие условию* (1.29), *входят в один класс* Σ *тогда и только тогда, когда для любого полинома* $P(\lambda)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, d\sigma_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, d\sigma_2(\lambda). \tag{1.32}$$

Доказательство. Если (1.32) имеет место и для $d\sigma_1(\lambda)$ выполнено равенство Парсеваля (1.30), то оно выполнено и для $d\sigma_2(\lambda)$, так как $\overline{\widetilde{u}(\lambda)\widetilde{v}(\lambda)}$ ($u, v \in l_{2,0}([0, \infty))$ — полином. Наоборот, пусть для $d\sigma_1(\lambda)$ и $d\sigma_2(\lambda)$ справедливо (1.30) с одним и тем же L. Тогда $P_j(\lambda)$ ортонормированы в каждом из пространств $L_2((-\infty, \infty), d\sigma_1(\lambda))$ и $L_2((-\infty, \infty), d\sigma_2(\lambda))$. Раскладывая $P(\lambda)$ по $P_j(\lambda)$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, d\sigma_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{N} c_j P_j(\lambda)\right) d\sigma_1(\lambda) = c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, d\sigma_2(\lambda).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Докажем сперва, что если $d\sigma(\lambda)$ не крайняя, то совокупность полиномов неплотна в $L_1((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$. В самом деле, пусть $\sigma(\Delta) = \mu_1\sigma_1(\Delta) + \mu_2\sigma_2(\Delta)$ ($\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$; $\mu_1 + \mu_2 = 1$; $\mu_1, \mu_2 > 0$). Так как $\sigma_j(\Delta) \leqslant \frac{1}{\mu_j}\sigma(\Delta)$, то $d\sigma_j(\lambda)$ абсолютно непрерывна относительно $d\sigma(\lambda)$ и $\varphi_j(\lambda) = \frac{d\sigma_j(\lambda)}{d\sigma(\lambda)} \leqslant \mu_j$ ($j = 1, 2$).

Согласно лемме 1.3 для любого полинома $P(\lambda)$ $\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\varphi_1(\lambda)\, d\sigma(\lambda) =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, d\sigma_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, d\sigma_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\varphi_2(\lambda)\, d\sigma(\lambda)$, т. е. ограниченная функция $\psi(\lambda) = \varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda)$, не равная σ-почти всюду нулю, такова, что $\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\psi(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = 0$ для любого $P(\lambda)$. Это означает, что есть ненулевой функционал над $L_1((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$, аннулирующийся на всех полиномах, т. е. совокупность последних неплотна в $L_1((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$.

Наоборот, пусть полиномы неплотны в $L_1((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$, тогда найдется ограниченная единицей не равная σ-почти везде нулю функция $\psi(\lambda)$ такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\psi(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = 0$ для любого полинома $P(\lambda)$. Построим неотрицательные меры $d\sigma_1(\lambda)=(1+\psi(\lambda))\,d\sigma(\lambda)$, $d\sigma_2(\lambda)=(1-\psi(\lambda))\,d\sigma(\lambda)$; они, очевидно, удовлетворяют (1.29) и таковы, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\,d\sigma_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\,d\sigma_2(\lambda)$ для любого $P(\lambda)$. Согласно лемме 1.3 $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, где Σ — выпуклое множество спектральных мер, отвечающих L. Вместе с тем $\sigma_1 \neq \sigma_2$ и $\sigma = \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2$, т. е. σ не является крайней спектральной мерой. Теорема доказана.

5. **Обратная задача спектрального анализа.** До сих пор мы рассматривали прямую задачу: по данному выражению L строили спектральное разложение, однако естественно поставить и обратный вопрос — можно ли по спектральным данным восстановить вид L. Мы покажем, что такое восстановление возможно, причем в качестве спектральных данных следует взять спектральную меру. Более того, оказывается, что совокупность всевозможных спектральных мер легко описать.

Нам понадобится выражение коэффициентов разностного выражения через полиномы $P_j(\lambda)$. Так как $a_{j-1}P_{j-1}(\lambda) + a_jP_{j+1}(\lambda) + b_jP_j(\lambda) = \lambda P_j(\lambda)$ $(j = 0, 1, \ldots; P_{-1}(\lambda) = 0)$, то умножая это равенство скалярно в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ на $P_k(\lambda)$ и пользуясь соотношениями ортогональности (1.21), получим

$$a_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda P_j(\lambda) P_{j+1}(\lambda)\,d\sigma(\lambda),\quad b_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda P_j^2(\lambda)\,d\sigma(\lambda) \qquad (1.33)$$

$$(j = 0, 1, \ldots).$$

Пусть теперь на оси $(-\infty, \infty)$ задана неотрицательная мера $d\sigma(\lambda)$, такая, что все интегралы (1.29) сходятся, $\sigma((-\infty, \infty)) = 1$ и $\sigma(\lambda)$ имеет бесконечное число точек роста. Покажем, что она является спектральной мерой некоторого разностного выражения L. С этой целью рассмотрим пространство $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ и в нем систему функций $1, \lambda, \lambda^2, \ldots$. Ортогонализируем эту последовательность обычным процессом: положим $P_0(\lambda) \equiv 1$; среди векторов $c_1 \cdot 1 + c_2\lambda$ выберем орт, ортогональный к подпространству, натянутому на 1; среди векторов $c_1 \cdot 1 + c_2\lambda + c_3\lambda^2$ выберем орт, ортогональный к подпространству, натянутому на 1 и λ и т. д. Этот процесс выбора ортов неоднозначен, однако если мы будем ограничиваться вещественными скалярами c_j и требовать, чтобы у каждого орта — полинома некоторой степени — старший коэффициент был положительным, то он, очевидно, становится однозначным. Процесс будет бесконечным, так как равенство нулю некоторого полинома в норме $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ влечет тождественное равенство его нулю благодаря наличию бесконечного числа точек роста у $\sigma(\lambda)$. Итак, в результате получим ортонормированную последовательность вещественных полиномов $P_0(\lambda) = 1$, $P_1(\lambda)$, ..., причем каждый $P_j(\lambda)$ имеет степень j и старший его коэффициент положителен.

По полиномам $P_j(\lambda)$ построим числа a_j, b_j посредством равенств (1.33). Легко понять, что $a_j > 0$ ($j=0, 1, \ldots$). Действительно, $\lambda P_j(\lambda)$ — полином степени $j+1$ с положительным старшим коэффициентом, поэтому в представлении $\lambda P_j(\lambda) = c_{j+1}P_{j+1}(\lambda) + \ldots + c_0P_0(\lambda)$ $c_{j+1} > 0$, но, очевидно, $c_{j+1} = a_j$. Итак, числа a_j, b_j ($j = 0, 1, \ldots$) можно взять в качестве коэффициентов некоторого разностного выражения L.

Покажем, что $P_j(\lambda)$ являются полиномами первого рода для построенного выражения L, т. е. покажем, что $\lambda P_j(\lambda) = a_{j-1}P_{j-1}(\lambda) + a_jP_{j+1}(\lambda) + b_jP_j(\lambda)$ ($j = 0, 1, \ldots; P_{-1}(\lambda) = 0$, $P_0(\lambda) = 1$). Для доказательства достаточно убедиться, что в разложении полинома $j+1$-й степени $\lambda P_j(\lambda)$ по $P_0(\lambda), \ldots, P_{j+1}(\lambda)$ коэффициенты при $P_0(\lambda), \ldots, P_{j-2}(\lambda)$ отсутствуют, т. е. что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda P_j(\lambda) P_k(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = 0$ при $0 \leqslant k \leqslant j-2$. Но $\lambda P_k(\lambda)$ — полином максимум $j-1$-й степени, поэтому $P_j(\lambda)$ ему ортогонален, что и требуется.

Итак, мера $d\sigma(\lambda)$ обладает тем свойством, что полиномы первого рода, отвечающие построенному выражению L, будут ортонормированы относительно нее. Отсюда следует выполнение равенства Парсеваля (1.30) на финитных u и v, т. е. $d\sigma(\lambda)$ является спектральной мерой для L. Итак, мы получили следующую теорему.

Теорема 1.11. *Пусть $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная мера на оси $(-\infty, \infty)$, для которой $\sigma(\lambda)$ имеет бесконечное число точек роста и удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\lambda) = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^n\, d\sigma(\lambda) < \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.34}$$

Тогда эта мера обязательно является спектральной мерой некоторого разностного выражения. Коэффициенты этого выражения однозначно определяются по $d\sigma(\lambda)$ при помощи формул (1.33), *где $P_0(\lambda)$, $P_1(\lambda)$, ... — ортонормированная система полиномов, построенная посредством ортогонализации в пространстве $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ из системы степеней* $1, \lambda, \lambda^2, \ldots$.

Доказанная теорема показывает, что результаты этого параграфа можно воспринимать как некоторые факты относительно ортонормированных полиномов, построенных по описанной только что мере $d\sigma(\lambda)$.

6. Полиномы второго рода. Резольвента. Рассмотрим разностное уравнение $(Lu)_j = zu_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ с начальными данными $u_0=0$, $u_1 = \frac{1}{a_0}$. Пусть $\left(Q_1(z) = \frac{1}{a_0}, Q_2(z), \ldots\right)$ — решение этой задачи Коши; легко понять, что $Q_j(z)$ будет полиномом $j-1$-й степени с вещественными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом. Полиномы $Q_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots;\ Q_0(z) = 0)$ называются полиномами второго рода, порожденными L. Ясно, что $P(z)=(P_1(z), P_2(z), \ldots)$ и $Q(z) = (Q_1(z), Q_2(z), \ldots)$ — линейно независимая система решений уравнения $(Lu)_j = zu_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Полиномы $Q_j(z)$ и $P_j(z)$ связаны интересной зависимостью. Покажем, что

$$Q_j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(\lambda) - P_j(z)}{\lambda - z}\, d\sigma(\lambda) \qquad (j = 0, 1, \ldots). \tag{1.35}$$

Действительно, последовательность $u_j = \int_{-\infty}^{\infty} (P_j(\lambda)-P_j(z))(\lambda-z)^{-1} d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$(Lu)_j = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(LP(\lambda))_j - (LP(z))_j}{\lambda - z}\, d\sigma(\lambda) = z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(\lambda) - P_j(z)}{\lambda - z}\, d\sigma(\lambda) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} P_j(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = zu_j \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

(последний интеграл аннулируется благодаря (1.21)). Кроме того,

$$u_0 = 0 \quad \text{и} \quad u_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a_0}(\lambda - b_0) - \frac{1}{a_0}(z - b_0)\right)(\lambda - z)^{-1}\, d\sigma(\lambda) = \frac{1}{a_0};$$

поэтому $u_j = Q_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Соотношение (1.35) установлено.

Отметим, что полиномы $Q_j(\lambda)$ также ортогональны относительно некоторой новой меры $d\hat{\sigma}(\lambda)$ на оси $(-\infty, \infty)$. Действительно, $a_0 Q_j(z)$ можно рассматривать как полиномы первого рода сдвинутого разностного выражения $\hat{L}$ с коэффициентами $\hat{a}_j = a_{j+1}$, $\hat{b}_j = b_{j+1}$

($j = -1, 0, \ldots$); поэтому в качестве $d\hat{\sigma}(\lambda)$ можно взять спектральную меру, отвечающую $\hat{L}$.

Нам понадобится следующая общая лемма.

Лемма 1.4. *Пусть $R_0(\lambda)$, $R_1(\lambda)$, . . . — произвольная последовательность вещественных полиномов степеней 0, 1, . . ., ортогональных на $(-\infty, \infty)$ относительно некоторой меры $d\sigma(\lambda)$, удовлетворяющей требованиям теоремы 1.11. Тогда все нули этих полиномов вещественны и различны.*

Доказательство. Пусть некоторый полином $R_n(\lambda)$ имеет менее n вещественных различных нулей. Обозначим $\lambda_1 < \ldots < \lambda_m$ только те его вещественные нули, при переходе через которые $R_n(\lambda)$ меняет знак; $m < n$. Построим полином $P(\lambda)$ степени m с нулями $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, меняя знак перед этим полиномом, добьемся, что $\operatorname{sign} P(\lambda) = \operatorname{sign} R_n(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Тогда, с одной стороны, $P(\lambda)$ можно представить в виде линейной комбинации $\sum_{j=0}^{m} c_j R_j(\lambda)$ и поэтому $\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda) R_n(\lambda) d\sigma(\lambda) = 0$, а с другой — это равенство благодаря конструкции $P(\lambda)$ невозможно. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Следствие. Для полиномов $R_j(z)$ справедливы оценки

$$|R_j(x + iy')| \leqslant |R_j(x + iy'')|, \quad |y'| \leqslant |y''| \qquad (j = 0, 1, \ldots). \tag{1.36}$$

Это неравенство немедленно вытекает из представления $R_j(z) = a \prod_{\alpha=1}^{j} (z - \lambda_\alpha)$, где λ_α — вещественные нули полинома $R_j(z)$.

В частности, *нули полиномов первого и второго рода все вещественны; для этих полиномов имеют место оценки* (1.36).

Перейдем к рассмотрению резольвенты, связанной с L. Пусть A — некоторое самосопряженное расширение оператора L, вообще говоря, с выходом в более широкое, чем $l_2([0, \infty))$ пространство $\widetilde{H}_0$; обозначим через $\widetilde{E}_\lambda$ и $\widetilde{R}_z$ соответствующие разложения единицы и резольвенту оператора A в $\widetilde{H}_0$ и через E_λ и R_z — обобщенные разложение единицы и резольвенту Если P — проекционный оператор $\widetilde{H}_0$ на $l_2([0, \infty))$, то $E_\lambda = P\widetilde{E}_\lambda P$ и $R_z = P\widetilde{R}_z P$. Так как $R_z = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - z)^{-1} dE_\lambda$, то в силу (1.19) матрица оператора R_z в базисе $\delta_0, \delta_1, \ldots$ имеет вид:

$$R_{z;jk} = (R_z \delta_k, \delta_j)_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(\lambda) P_k(\lambda)}{\lambda - z} d\sigma(\lambda) \qquad (j, k = 0, 1, \ldots). \tag{1.37}$$

В дальнейшем существенную роль будет играть голоморфная вн спектра A функция

$$m(z) = R_{z;00} = (R_z\delta_0, \delta_0)_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} \tag{1.38}$$

— преобразование Стилтьеса спектральной меры. Как хорошо извест но, $\sigma(\Delta)$ однозначно восстанавливается при помощи формулы обра щения по $m(z)$. Выведем одно важное соотношение в том случае когда $d\sigma(\lambda)$ ортогональна, т. е. построена по обычному разложени единицы. Согласно (1.37) и (1.35)

$$(R_z\delta_0)_j = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(\lambda)}{\lambda - z} d\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(\lambda) - P_j(z)}{\lambda - z} d\sigma(\lambda) +$$

$$+ P_j(z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} = Q_j(z) + m(z) P_j(z) \qquad (j = 0, 1, \ldots). \tag{1.39}$$

Так как сейчас R_z — обычная резольвента, то справедливо тождеств Гильберта $R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$. При помощи него и (1.39) най дем:

$$\frac{\overline{m(\zeta)} - m(z)}{\bar\zeta - z} = \left(\frac{R_{\bar\zeta} - R_z}{\bar\zeta - z}\delta_0, \delta_0\right)_0 = (R_{\bar\zeta} R_z \delta_0, \delta_0)_0 = (R_\zeta^* R_z \delta_0, \delta_0)_0 =$$

$$= (R_z\delta_0, R_\zeta\delta_0)_0 = \sum_{j=0}^{\infty} (R_z\delta_0)_j \overline{(R_\zeta\delta_0)_j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (Q_j(z) + m(z) P_j(z)) \overline{(Q_j(\zeta) + m(\zeta) P_j(\zeta))}.$$

Итак, для любых регулярных ζ и z

$$\frac{\overline{m(\zeta)} - m(z)}{\bar\zeta - z} = \sum_{j=0}^{\infty} (Q_j(z) + m(z) P_j(z)) \overline{(Q_j(\zeta) + m(\zeta) P_j(\zeta))} \qquad (\bar\zeta \neq z) \tag{1.40}$$

Полагая здесь $\zeta = z$, получим

$$\frac{\overline{m(z)} - m(z)}{\bar z - z} = \sum_{j=0}^{\infty} |Q_j(z) + m(z) P_j(z)|^2 \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0). \tag{1.41}$$

Посмотрим, как будет выглядеть соотношение типа (1.41) в случае, когда $d\sigma(\lambda)$ построено по обобщенному разложению единицы. Теперь будем пользоваться тождеством Гильберта $\widetilde{R}_\mu - \widetilde{R}_\lambda = (\mu - \lambda)\widetilde{R}_\mu\widetilde{R}_\lambda$ и считать $\zeta = z$. Тогда

$$\frac{\overline{m(z)} - m(z)}{\bar{z} - z} = \left(\frac{R_{\bar{z}} - R_z}{\bar{z} - z}\delta_0, \delta_0\right)_0 = \left(\frac{\widetilde{R}_{\bar{z}} - \widetilde{R}_z}{\bar{z} - z}\delta_0, \delta_0\right)_0 =$$

$$= (\widetilde{R}_{\bar{z}}\widetilde{R}_z\delta_0, \delta_0)_0 = (\widetilde{R}_z^*\widetilde{R}_z\delta_0, \delta_0)_{\widetilde{H}_0} = (\widetilde{R}_z\delta_0, \widetilde{R}_z\delta_0)_{\widetilde{H}_0} \geqslant (P\widetilde{R}_z\delta_0, P\widetilde{R}_z\delta_0)_0 =$$

$$= (R_z\delta_0, R_z\delta_0)_0 = \sum_{j=0}^{\infty} |Q_j(z) + m(z)P_j(z)|^2.$$

Итак, *если* $d\sigma(\lambda)$ *ортогональна, то справедливо соотношение* (1.41). *Если* $d\sigma(\lambda)$ *неортогональна, то справедливо* (1.41), *в котором знак* $=$ *заменен знаком* $\geqslant$.

Соотношение (1.41) иногда дает возможность находить $m(z)$, а значит, и $d\sigma(\lambda)$, по заданному L. Действительно, пусть имеет место определенный случай; предположим, что нам удалось найти такую функцию $f(z)$ ($\operatorname{Im} z \neq 0$), что последовательность $Q_j(z) + f(z)P_j(z) \in l_2([0, \infty))$ при каждом невещественном z. Тогда $m(z) = f(z)$. В самом деле, пусть $m(z_0) \neq f(z_0)$. Так как согласно (1.41) $Q_j(z_0) + m(z_0)P_j(z_0) \in l_2([0,\infty))$ и $Q_j(z_0) + f(z_0)P_j(z_0) \in l_2([0, \infty))$, то и разность этих последовательностей $(m(z_0) - f(z_0))P_j(z_0) \in l_2([0, \infty))$, т. е. $P_j(z_0) \in l_2([0, \infty))$, а это невозможно благодаря определенности L. Пример подобного нахождения, но уже для задачи на всей оси, будет дан на стр. 595—596.

7. Неопределенный случай. Описание ортогональных спектральных мер. Будем считать, что для выражения L имеет место неопределенный случай. Оказывается, что совокупность всех спектральных мер, отвечающих L, может быть описана; сейчас мы опишем лишь ее часть — меры, указанные в заглавии. Предварительно установим некоторые вспомогательные факты.

Для невещественного z, как уже говорилось, ряд $\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2$ сходится. В действительности справедлив более сильный факт.

Лемма 1.5. *В неопределенном случае ряды* $\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2$ *и* $\sum_{j=0}^{\infty} |Q_j(z)|^2$ *сходятся при любом* z, *причем их сходимость равномерная в каждой ограниченной части комплексной плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим $m(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\lambda-z)^{-1}\,d\sigma(\lambda)$, отвечающую обычному разложению единицы; она удовлетворяет (1.41). Так как левая часть этого равенства непрерывна всюду вне вещественной оси $(-\infty,\infty)$, то согласно теореме Дини ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|Q_j(z)+m(z)P_j(z)|^2$ сходится равномерно в каждой ограниченной области, находящейся на положительном расстоянии от $(-\infty,\infty)$.

Пусть $d\sigma_1(\lambda)$ отличная от $d\sigma(\lambda)$ спектральная мера для L, $m_1(z)$ — соответствующая ей функция (1.38). Так как $m_1(z)\not\equiv m(z)$, то равенство $m_1(z)=m(z)$ возможно лишь на некоторой последовательности $z_1, z_2, \ldots$, предельные точки которой могут быть расположены лишь на $(-\infty,\infty)$. Покажем, что в каждой ограниченной области G комплексной плоскости, находящейся на положительном расстоянии от $(-\infty,\infty)$ и от точек z_j, ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|P_j(z)|^2$ сходится равномерно.

Действительно, оба ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|Q_j(z)+m(z)P_j(z)|^2$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|Q_j(z)+m_1(z)P_j(z)|^2$ сходятся в G равномерно, но тогда так же сходится и $|m(z)-m_1(z)|^2\sum\limits_{j=0}^{\infty}|P_j(z)|^2=\sum\limits_{j=0}^{\infty}|(Q_j(z)+m(z)P_j(z))-(Q_j(z)+m_1(z)P_j(z))|^2$, откуда следует требуемое.

Благодаря оценке (1.36) ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|P_j(x+iy')|^2$ мажорируется рядом $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|P_j(x+iy'')|^2$, где $|y''|\geqslant|y'|$, поэтому из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|P_j(z)|^2$ в области G следует его равномерная сходимость в любой области, указанной в лемме. Наконец, из равномерной сходимости рядов $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|Q_j(z)+m(z)P_j(z)|^2$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|P_j(z)|^2$ в ограниченной области, находящейся на положительном расстоянии от $(-\infty,\infty)$, следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|Q_j(z)|^2$ в этой области. Учитывая оценку (1.36), получим такую же сходимость этого ряда в области, указанной в лемме. Лемма доказана.

Зафиксируем невещественное z и будем рассматривать точки $m(z)$, меняя всевозможным образом $d\sigma(\lambda)$, отвечающие обычным разложениям единицы. Оказывается, что подобно случаю уравнения Штурма — Лиувилля все эти точки лежат на некоторой окружности, так называемой окружности Вейля — Гамбургера. Для доказательства напомним, что уравнение относительно комплексной переменной w

$$a|w|^2+b\bar{w}+\bar{b}w+c=0 \quad (a>0,\ \operatorname{Im} c=0,\ |b|^2-ac>0) \tag{1.42}$$

изображает окружность, центр O и радиус R которой подсчитываются по формулам

$$O=-\frac{b}{a},\quad R^2=\frac{1}{a^2}(|b|^2-ac). \tag{1.43}$$

После простых преобразований, законных в силу леммы 1.5, равенство (1.41) можно переписать в виде

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}|P_j(z)|^2\right)|m(z)|^2+\left(\frac{1}{z-\bar{z}}+\sum_{j=0}^{\infty}\overline{P_j(z)}\,Q_j(z)\right)\overline{m(z)}+$$
$$+\overline{\left(\frac{1}{z-\bar{z}}+\sum_{j=0}^{\infty}\overline{P_j(z)}\,Q_j(z)\right)}m(z)+\sum_{j=0}^{\infty}|Q_j(z)|^2=0. \tag{1.44}$$

Это соотношение типа (1.42) (заметим, что неравенство $|b|^2-ac>0$ выполняется автоматически, если известно, что существует точка w, удовлетворяющая уравнению (1.42)). Таким образом, все значения $m(z)$ действительно лежат на некоторой окружности. Мы сейчас покажем, что они заполняют всю окружность.

Рассмотрим преобразование Кэли оператора $\mathrm{L}: U_z=(\mathrm{L}-\bar{z}E)(\mathrm{L}-zE)^{-1}$. Этот оператор изометрически отображает все $\Re(\mathrm{L}-zE)$ на все $\Re(\mathrm{L}-\bar{z}E)$. Построим изометрический оператор X, переводящий все дефектное подпространство N_z на все $N_{\bar{z}}$. Ортогональная сумма $V_z=U_z\oplus X$ будет преобразованием Кэли самосопряженного расширения A в $l_2([0,\infty))$ оператора L; перебирая всевозможные X, получим все такие расширения. Напомним, что дефектное подпространство N_z одномерно и натянуто на вектор $(P_0(\bar{z}), P_1(\bar{z}), \ldots)$.

Разложим вектор δ_0 по ортогональным составляющим $\Re(\mathrm{L}-zE)$ и N_z:

$$\delta_0=e_z+\iota_z \quad (e_z\in\Re(\mathrm{L}-zE),\ \iota_z\in N_z). \tag{1.45}$$

Подсчитаем $\|i_z\|_0$. Обозначая через ϱ расстояние, можно написать: $\|i_z\|_0^2 = \varrho^2(\delta_0, \mathfrak{R}(\mathrm{L} - zE)) = \varrho^2(\delta_0, (L - zE)\, l_{2,0}([0, \infty)))$. Последнее равенство написано на том основании, что в $\mathfrak{R}(\mathrm{L} - zE)$ плотно множество $(L - zE)\, l_{2,0}([0, \infty))$. Перейдем теперь к преобразованию Фурье. Так как $\widetilde{\delta_0} = 1$, а $\widetilde{(L - zE)\, l_{2,0}([0, \infty))}$ состоит из всевозможных полиномов вида $(\lambda - z) P(\lambda)$, где $P(\lambda)$ — произвольный полином, то

$$\|i_z\|_0^2 = \varrho^2(\delta_0, (L - zE)\, l_{2,0}([0, \infty))) = \varrho^2(\widetilde{\delta_0}, \widetilde{(L - zE)\, l_{2,0}([0, \infty))}) =$$

$$= \varrho^2_{P(z)=0}(1, P(\lambda)) = \inf_{P(z)=0} \| 1 - P(\lambda) \|^2_{L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))} =$$

$$= \inf_{P(z)=1} \| P(\lambda) \|^2_{L_2((-\infty,\infty) d\sigma(\lambda))}.$$

Вычислим последний inf. Произвольный полином $P(\lambda)$ с условием $P(z) = 1$ имеет вид $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(\lambda) \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(z) \right)^{-1}$, где последовательность коэффициентов c_j финитна. Поэтому при помощи неравенства Коши — Буняковского получаем

$$\| P(\lambda) \|^2_{L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(\lambda)}{\sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(z)} \right|^2 d\sigma(\lambda) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2}{\left| \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(z) \right|^2} \geqslant \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2}.$$

С другой стороны, полагая $c_j = \overline{P_j(z)}$ $(j = 0, \ldots, N)$, $c_j = 0$ $(j \geqslant N + 1)$, найдем: $\| P(\lambda) \|^2_{L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))} = \left(\sum_{j=0}^{N} |P_j(z)|^2 \right)^{-1}$. Таким образом,

$$\| i_z \|_0^2 = \inf_{P(z)=1} \| P(\lambda) \|^2_{L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2}. \tag{1.46}$$

В частности, (1.46) показывает, что $\| i_z \|_0 \neq 0$. Если $\delta_0 = l_{\bar z} + i_{\bar z}$ — разложение δ_0 согласно представлению $l_2([0, \infty)) = \mathfrak{R}(\mathrm{L} - \bar{z}E) \oplus N_{\bar z}$, то $\| i_{\bar z} \|_0 = \| i_z \|_0$.

Пусть A^0 — некоторое фиксированное самосопряженное расширение в $l_2([0, \infty))$ оператора L, а A — подобное произвольное расширение. Обозначим их преобразования Кэли соответственно V_z^0 и V_z. Так как V_z^0 и V_z на $\mathfrak{R}(\mathrm{L}-zE)$ действуют одинаково, то при некотором $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$
\begin{gathered}
V_z\delta_0 = V_z e_z + V_z i_z = V_z^0 e_z + e^{i\varphi} V_z^0 i_z;\\
(V_z\delta_0, \delta_0)_0 = (V_z^0 e_z + e^{i\varphi} V_z^0 i_z,\ e_{\bar z} + i_{\bar z})_0 = (V_z^0 e_z, e_{\bar z})_0 + e^{i\varphi}(V_z^0 i_z, i_{\bar z})_0.
\end{gathered} \tag{1.47}
$$

Выберем теперь изометрический оператор, переводящий N_z в $N_{\bar z}$ и определяющий оператор V_z^0, специальным образом: положим $V_z^0 i_z = i_{\bar z}$. Тогда (1.47) примет вид: $(V_z\delta_0, \delta_0)_0 = (V_z^0 e_z, e_{\bar z})_0 + e^{i\varphi}\| i_{\bar z}\|_0^2 = (V_z^0 e_z, e_{\bar z})_0 + e^{i\varphi}\| i_z\|_0^2$. Но $V_z = (A-\bar zE)(A-zE)^{-1} = E + (z-\bar z)R_z$, поэтому $(V_z\delta_0, \delta_0)_0 = 1 + (z-\bar z)\, m(z)$. Таким образом, $1 + (z-\bar z) m(z) = (V_z^0 e_z, e_{\bar z})_0 + e^{i\varphi}\| i_z\|_0^2$, откуда

$$
m(z) = \frac{1}{z-\bar z}\left[(V_z^0 e_z, e_{\bar z})_0 - 1 + e^{i\varphi}\| i_z\|_0^2\right]. \tag{1.48}
$$

Заставляя φ меняться по $[0, 2\pi)$, мы получим всевозможные изометрические операторы, отображающие N_z на $N_{\bar z}$; оператор A тогда будет пробегать все самосопряженные расширения L в $l_2([0, \infty))$. Согласно (1.48) точка $m(z)$ будет при этом описывать некоторую окружность, совпадающую, очевидно, с окружностью (1.44). Ее центр и радиус могут быть подсчитаны при помощи формул (1.43), однако для радиуса более удобно вытекающее из (1.48) и (1.46) выражение: $R = \dfrac{\| i_z\|_0^2}{|z-\bar z|} = \left(|z-\bar z| \sum\limits_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2\right)^{-1}$. Мы пришли к первой части следующей теоремы.

Теорема 1.12. *Пусть для выражения L имеет место неопределенный случай. Зафиксируем невещественное z и рассмотрим точку* $m(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}$, *где* $d\sigma(\lambda)$ — *ортогональная спектральная мера. Перебирая всевозможные такие меры, получим, что точка* $m(z)$ *описывает некоторую окружность* K_z — *так называемая окружность Вейля — Гамбургера, — центр и радиус которой подсчитываются по формулам:*

$$
O(z) = -\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2}\left(\frac{1}{z-\bar z} + \sum_{j=0}^{\infty} \overline{P_j(z)}\, Q_j(z)\right),
$$

$$R(z) = \frac{1}{|z-\bar{z}| \sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2}. \tag{1.49}$$

Если L определенно, то окружность (1.49) вырождается в точку Вейля — Гамбургера.

Точки w окружности Вейля — Гамбургера находятся во взаимно однозначном соответствии с ортогональными спектральными мерами $d\sigma(\lambda)$ (а значит, в силу (1.19) — и с самими разложениями единицы). Именно, каждой $d\sigma(\lambda)$ отвечает точка $w_\sigma = m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}$. Наоборот, каждой $w \in K_z$ отвечает $d\sigma(\lambda)$, преобразование Стилтьеса которой подсчитывается по формуле

$$m(\zeta) = \frac{E_0(\zeta, z)w + E_1(\zeta, z)}{D_0(\zeta, z)w + D_1(\zeta, z)}, \tag{1.50}$$

где $E_0(\zeta, z)$, $E_1(\zeta, z)$, $D_0(\zeta, z)$ и $D_1(\zeta, z)$ — целые функции по каждой переменной при фиксированной другой, выражающиеся рядами

$$E_0(\zeta, z) = 1 + (\zeta - z)\sum_{j=0}^{\infty} Q_j(\zeta)P_j(z), \quad E_1(\zeta, z) = (\zeta - z)\sum_{j=0}^{\infty} Q_j(\zeta)Q_j(z), \tag{1.51}$$

$$D_0(\zeta, z) = -(\zeta - z)\sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta)P_j(z), \quad D_1(\zeta, z) = 1 - (\zeta - z)\sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta)Q_j(z).$$

Доказательство второй части теоремы. Заменим в (1.40) ζ на $\bar{\zeta}$ и из этого равенства найдем $m(\zeta)$. Получим

$$m(\zeta) = \frac{E_0(\zeta, z)m(z) + E_1(\zeta, z)}{D_0(\zeta, z)m(z) + D_1(\zeta, z)}, \tag{1.52}$$

где E_0, E_1, D_0, D_1 имеют вид (1.51) (сходимость рядов (1.51) и свойства аналитичности вытекают из леммы 1.5). Соотношение (1.52) показывает, что если нам известна $m(z)$ в одной точке, то она известна всюду; из него очевидным образом и следует теорема.

Замечание. Окружность Вейля — Гамбургера K_z расположена целиком внутри верхней полуплоскости, если $\operatorname{Im} z > 0$, и нижней — если $\operatorname{Im} z < 0$. Это вытекает из того, что точка $m(z)$, если перебирать все ортогональные спектральные меры, описывает всю K_z:

вместе с тем

$$\operatorname{Im} m(z) = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} = y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2} \quad (z = x + iy).$$

Следствие. В неопределенном случае спектр самосопряженного расширения оператора L в пространстве $l_2([0, \infty))$ всегда дискретен и не имеет предельных точек на конечном расстоянии.

В самом деле, из (1.50) следует, что $m(\zeta)$ мероморфная функция, а это эквивалентно указанному характеру спектра.

Формула (1.50), дающая выражение функций $m(\zeta)$ по точкам w на окружности Вейля — Гамбургера, может быть упрощена, если в ней сделать предельный переход, спуская z на вещественную ось. Прежде всего установим некоторые свойства функций (1.51).

Лемма 1.6. *Для произвольных комплексных ζ и z справедливы соотношения:*

$$E_0(z, \zeta) = D_1(\zeta, z),\ E_1(z, \zeta) = -E_1(\zeta, z),\ D_0(z, \zeta) = -D_0(\zeta, z); \tag{1.53}$$

$$E_0(\zeta, z) D_1(\zeta, z) - E_1(\zeta, z) D_0(\zeta, z) = 1. \tag{1.54}$$

Доказательство. Равенства (1.53) следуют из (1.51). Докажем (1.54). С этой целью рассмотрим функции $E_0^{(N)}(\zeta, z)$, $E_1^{(N)}(\zeta, z)$, $D_0^{(N)}(\zeta, z)$ и $D_1^{(N)}(\zeta, z)$, которые определяются подобно (1.51), только суммы распространяются не до ∞, а до N. При помощи формулы Грина (1.4) нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
E_0^{(N)}(\zeta, z) &= a_N (Q_{N+1}(\zeta) P_N(z) - Q_N(\zeta) P_{N+1}(z)),\\
E_1^{(N)}(\zeta, z) &= a_N (Q_{N+1}(\zeta) Q_N(z) - Q_N(\zeta) Q_{N+1}(z)),\\
D_0^{(N)}(\zeta, z) &= a_N (P_N(\zeta) P_{N+1}(z) - P_{N+1}(\zeta) P_N(z)),\\
D_1^{(N)}(\zeta, z) &= a_N (P_N(\zeta) Q_{N+1}(z) - P_{N+1}(\zeta) Q_N(z)).
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Действительно, например,

$$E_0^{(N)}(\zeta, z) = 1 + (\zeta - z) \sum_{j=0}^{N} Q_j(\zeta) P_j(z) = 1 + \sum_{j=0}^{N} [(LQ(\zeta))_j P_j(z) -$$

$$- Q_j(\zeta)(LP(z))_j] = a_N (Q_{N+1}(\zeta) P_N(z) - Q_N(\zeta) P_{N+1}(z)).$$

Полагая в первом из равенств (1.55) $\zeta = z$, получим следующий разностный аналог формулы Лиувилля—Остроградского:

$$P_N(z)Q_{N+1}(z)-P_{N+1}(z)Q_N(z)=\frac{1}{a_N}\quad (N=0,\ 1,\ \ldots). \tag{1.56}$$

Используя выражения (1.55) и тождество (1.56), нетрудно подсчитать, что

$$E_0^{(N)}(\zeta,\ z)D_1^{(N)}(\zeta,\ z)-E_1^{(N)}(\zeta,\ z)D_0^{(N)}(\zeta,\ z)=1\ (N=0,\ 1,\ \ldots). \tag{1.57}$$

Совершая здесь предельный переход при $N\to\infty$, получим (1.54). Лемма доказана.

Рассмотрим невырожденное в силу (1.54) дробно-линейное преобразование $w\to v$

$$v=\frac{E_0(\zeta,\ z)w+E_1(\zeta,\ z)}{D_0(\zeta,\ z)w+D_1(\zeta,\ z)} \tag{1.58}$$

(ζ и z фиксированы) и покажем, что *оно переводит*: 1) *при* $\operatorname{Im}\zeta$, $\operatorname{Im}z\neq 0$ *окружность* K_z *в* K_ζ; 2) *при* $\operatorname{Im}\zeta=0$, $\operatorname{Im}z\neq 0$ — K_z *в ось* $[-\infty,\ \infty]$; 3) *при* $\operatorname{Im}\zeta\neq 0$, $\operatorname{Im}z=0$ — $[-\infty,\ \infty]$ *в* K_ζ; 4) *при* $\operatorname{Im}\zeta=\operatorname{Im}z=0$ — $[-\infty,\ \infty]$ *в* $[-\infty,\ \infty]$.

Действительно, случай 1) следует из (1.52) и того, что при переборе всех $d\sigma(\lambda)$ точка $m(p)$ описывает всю K_p. Рассмотрим случай 2). Прежде всего заметим, что благодаря мероморфности функции $m(z)$ при спуске z на ось $(-\infty,\ \infty)$ $m(z)$ имеет либо конечный вещественный предел, либо стремится к ∞. Перейдем теперь к пределу в (1.52), спуская на вещественную ось ζ ($\zeta\to\xi$); такой предельный переход совершим для трех различных $d\sigma(\lambda)$. В результате мы получим, что три различных точки на K_z вида $m(z)$ переходят посредством преобразования (1.58) (где ζ заменено ξ) в точки на $[-\infty,\ \infty]$. Следовательно, это преобразование переводит K_z в $[-\infty,\ \infty]$. В случае 3) (когда $z=x\in(-\infty,\ \infty)$) обратим преобразование (1.58) и воспользуемся (1.53); получим, что оно имеет вид $w=\dfrac{E_0(x,\ \zeta)v+E_1(x,\ \zeta)}{D_0(x,\ \zeta)v+D_1(x,\ \zeta)}$ и поэтому согласно 2) отображает K_ζ в $[-\infty,\ \infty]$. Но тогда исходное преобразование переводит $[-\infty,\ \infty]$ в K_z. Наконец, в случае 4) $[-\infty,\ \infty]$ переходит в $[-\infty,\ \infty]$ благодаря вещественности коэффициентов (1.58).

Теперь легко доказать следующую теорему.

Теорема 1.13. *Зафиксируем вещественное x. Ортогональные спектральные меры находятся во взаимно однозначном соответствии с точками t вещественной оси (включая $t=\infty$). Соответствие устанавливается формулой*

$$m(\zeta)=\frac{E_0(\zeta,\ x)t+E_1(\zeta,\ x)}{D_0(\zeta,\ x)t+D_1(\zeta,\ x)}\quad (\operatorname{Im}\zeta\neq 0). \tag{1.59}$$

Доказательство. Перейдем в (1.52) к пределу, считая, что $z \to x \in (-\infty, \infty)$. Тогда и $m(z) \to t$; в результате получим (1.59). При этом возможные значения t будут пробегать $[-\infty, \infty]$, так как если переходить в (1.52) к пределу при $\zeta \to x$, то они будут образом K_z и согласно рассмотрениям на стр. 536 (случай 2) заполнят $[-\infty, \infty]$. Каждое t из (1.59) определяется однозначно по $m(\zeta)$ благодаря обратимости преобразования. Теорема доказана.

8. **Неопределенный случай. Описание неортогональных спектральных мер.** При исследовании таких мер теоремы 1.12 и 1.13 нужно дополнить следующим образом.

Теорема 1.14. *Зафиксируем невещественное z и рассмотрим все голоморфные функции $w(\zeta)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta > 0$, отображающие эту полуплоскость внутрь круга K_z. Неортогональные спектральные меры находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями $w(\zeta)$. Соответствие устанавливается посредством формулы* (1.50), *где число w заменено на $w(\zeta)$; ζ берется из верхней полуплоскости*.*

Можно дать и другое описание этих мер. Зафиксируем вещественное x и рассмотрим все голоморфные функции $t(\zeta)$ в верхней полуплоскости, отображающие ее внутрь себя. Рассматриваемые меры находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями $t(\zeta)$. Соответствие устанавливается при помощи (1.59), *где t заменено на $t(\zeta)$;* $\operatorname{Im}\zeta > 0$.

Для доказательства требуются конструкции типа приведенных ранее, но применительно к расширениям с выходом из $l_2([0, \infty))$. Мы ограничимся установлением лишь наиболее простой части теоремы — доказательством существования функций $w(\zeta)$ и $t(\zeta)$, если $m(\zeta)$ задана.

Покажем, что *преобразование* (1.58) *в случае 1) переводит внутренность окружности Вейля — Гамбургера во внутренность, если* $\operatorname{Im}\zeta \cdot \operatorname{Im} z > 0$, *и внутренность во внешность, если* $\operatorname{Im}\zeta \cdot \operatorname{Im} z < 0$; *в случаях 2) и 3) переходят друг в друга внутренность окружности Вейля — Гамбургера и та полуплоскость, в которой она лежит; в случае 4) верхняя полуплоскость переходит в верхнюю, нижняя — в нижнюю.*

Действительно, при $\zeta = z$ преобразование (1.58) — тождественное, и поэтому сохраняет направление обхода. Будем теперь отодвигать z от ζ, по непрерывности направление обхода сохраняется. Однако, если z станет вещественным, то K_z выродится в

---

* Благодаря вещественности $d\sigma(\lambda)$ эта мера определяется по $m(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \zeta)^{-1} d\sigma(\lambda)$, рассматриваемой в одной из полуплоскостей $\operatorname{Im}\zeta > 0$ или $\operatorname{Im}\zeta < 0$.

полуплоскость, и поэтому при переходе через вещественную ось отображение (1.58) уже изменит направление обхода. Из этих соображений, очевидно, и следует высказанное утверждение.

Пусть $m(\zeta)$ ($\operatorname{Im}\zeta > 0$) построено по обобщенному разложению единицы, тогда удовлетворяется соотношение (1.41), где знак $=$ заменен на $\geqslant 0$. Условие на w $\dfrac{\bar{w}-w}{\bar{\zeta}-\zeta} \geqslant \sum\limits_{j=0}^{\infty} |Q_j(\zeta)+wP_j(\zeta)|^2$ выделяет внутренность окружности K_ζ (внешность выделяться не может, так как тогда бы это неравенство выполнялось для больших $|w|$, что невозможно). Итак, $m(\zeta)$ лежит внутри K_ζ. Поэтому $w(\zeta)$, определяемое из равенства

$$m(\zeta) = \frac{E_0(\zeta, z)\, w(\zeta) + E_1(\zeta, z)}{D_0(\zeta, z)\, w(\zeta) + D_1(\zeta, z)}, \tag{1.60}$$

находится внутри K_z. Ясно, что $w(\zeta)$ голоморфна при $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Итак, найдена функция $w(\zeta)$ требуемого вида, связанная с $m(\zeta)$ посредством (1.60) при $\operatorname{Im}\zeta > 0$.

Аналогично доказывается существование функции $t(\zeta)$.

9. Некоторые дальнейшие теоремы. Сейчас мы установим несколько интересных следствий теории предыдущих трех пунктов. Прежде всего поясним высказанное на стр. 522 утверждение: *всякая ортогональная спектральная мера является крайней* (т. е. крайней точкой выпуклого множества Σ всех спектральных мер выражения L). Действительно, пусть такая мера σ представима в виде $\sigma(\Delta) = \mu_1\sigma_1(\Delta) + \mu_2\sigma_2(\Delta)$, где $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$; σ_1 и σ_2 — некоторые спектральные меры. Зафиксируем невещественное z, тогда для соответствующих преобразований Стилтьеса будем иметь: $m(z) = \mu_1 m_1(z) + \mu_2 m_2(z)$. Так как точки $m_1(z)$ и $m_2(z)$ лежат внутри или на границе окружности Вейля—Гамбургера K_z, то $m(z)$ лежит внутри K_z, что невозможно (см. теорему 1.12).

Топологизируем Σ следующим образом. Расширим ось $(-\infty, \infty)$ до компакта $Q = [-\infty, \infty]$, присоединив к ней ∞, и рассмотрим пространство $C(Q)$ непрерывных комплекснозначных функций на Q. Иными словами, элементы из $C(Q)$ — это непрерывные функции $u(\lambda)$ ($\lambda \in (-\infty, \infty)$), имеющие конечный предел $u(\infty)$ при $|\lambda| \to \infty$. Линейные непрерывные функционалы над $C(Q)$ имеют вид $l(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\, d\omega(\lambda) + u(\infty)\,\omega_\infty$, где $\omega(\lambda)$ — функция ограниченной вариации, а ω_∞ — некоторая константа («мера бесконечности»); $\|l\| = \operatorname*{Var}\limits_{(-\infty,\infty)} \omega + |\omega_\infty|$. Таким образом, каждую меру из Σ можно отождествить с функционалом над $C(Q)$ и мы можем писать: $\Sigma \subset (C(Q))'$.

Теорема 1.15. *Множество Σ спектральных мер, отвечающих выражению L, является выпуклым компактом в смысле слабой топологии в $(C(Q))'$.*

Доказательство. Как уже говорилось, Σ выпукло. Оно предкомпактно благодаря слабой компактности шара в сопряженном к сепарабельному пространству $C(Q)$. Осталось установить замкнутость Σ в смысле слабой сходимости. Пусть $\sigma_n \in \Sigma$ и слабо $\sigma_n \to l \in (C(Q))'$, где l порождается функцией $\omega(\lambda)$ и числом ω_∞. Благодаря неотрицательности $d\sigma_n(\lambda)$ обобщенная мера $d\omega(\lambda) = d\sigma(\lambda)$ также неотрицательна и поэтому является обычной; покажем, что существуют интегралы (1.29). Прежде всего отметим простое обстоятельство, используемое всюду ниже: при любом $m = 0, 1, \ldots$ интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d\sigma_n(\lambda)$ не зависят от n. Действительно, пусть $\lambda^m = \sum\limits_{j=0}^{m} c_j^{(m)} P_j(\lambda)$—разложение λ^m по полиномам $P_j(\lambda)$, отвечающим L. Тогда в силу ортогональности $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d\sigma_n(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m} c_j^{(m)} \times$ $\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_j(\lambda) d\sigma_n(\lambda) = c_0^{(m)}$ независимо от n.

Для справедливости (1.29) достаточно убедиться, что при четном m $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d\sigma(\lambda) < \infty$. Пусть $N > 0$, построим разложение единицы $1 = \chi_1^{(N)}(\lambda) + \chi_2^{(N)}(\lambda)$, где $\chi_1^{(N)}(\lambda)$ аннулируется при $|\lambda| \geqslant N + 1$, а $\chi_2^{(N)}(\lambda)$ — при $|\lambda| \leqslant N$. Так как $\chi_1^{(N)}(\lambda)\lambda^m \in C(Q)$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_1^{(N)}(\lambda)\lambda^m d\sigma_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\to} l(\chi_1^{(N)}(\lambda)\lambda^m) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_1^{(N)}(\lambda)\lambda^m d\sigma(\lambda) \tag{1.61}$$

Но $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_1^{(N)}(\lambda)\lambda^m d\sigma_n(\lambda) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d\sigma_n(\lambda) = c_0^{(m)}$, поэтому при любом N и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_1^{(N)}(\lambda)\lambda^m d\sigma(\lambda) \leqslant c_0^{(m)}$. Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d\sigma(\lambda) \leqslant c_0^{(m)} < \infty$, что и требовалось.

Покажем теперь, что $\omega_\infty = 0$. Так как $\chi_2^{(N)} \in C(Q)$ и $\chi_2^{(N)}(\infty) = 1$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_2^{(N)}(\lambda)\, d\sigma_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\to} l(\chi_2^{(N)}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_2^{(N)}(\lambda)\, d\sigma(\lambda) + \omega_\infty \tag{1.62}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано, выберем N столь большим чтобы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_2^{(N)}(\lambda)\, d\sigma(\lambda) < \varepsilon$. Далее

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_2^{(N)}(\lambda)\, d\sigma_n(\lambda) \leqslant \int\limits_{(-\infty,\infty)\setminus[-N,N]} d\sigma_n(\lambda) = \int\limits_{(-\infty,\infty)\setminus[-N,N]} \frac{1}{\lambda^2}\lambda^2 d\sigma_n(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\sigma_n(\lambda) = \frac{c_0^{(2)}}{N^2} < \varepsilon$$

при N достаточно большом. Сопоставляя эти оценки с (1.62), заключаем, что $|\omega_\infty| < 2\varepsilon$, т. е. $\omega_\infty = 0$.

Итак, мы доказали, что предельный функционал l порождается мерой $d\sigma(\lambda)$, удовлетворяющей (1.29). Осталось проверить, что $d\sigma(\lambda)$ является спектральной мерой выражения L. Согласно теореме 1.9 достаточно доказать, что для σ справедливо равенство Парсеваля (1.30) с $u, v \in l_{2,0}([0, \infty))$. Так как оно справедливо для σ_n, то следует установить возможность предельного перехода в (1.30) под знаком интеграла. Она будет доказана, если показать, что при любом $m = 0, 1, \ldots$ $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d\sigma_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\to} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d\sigma(\lambda)$. Но $1 = \chi_1^{(N)}(\lambda) + \chi_2^{(N)}(\lambda)$, поэтому, учитывая (1.61), достаточно убедиться, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое N, что $\left|\int_{-\infty}^{\infty} \chi_2^{(N)}(\lambda)\lambda^m d\sigma(\lambda)\right| < \varepsilon$ и равномерно по n $\left|\int_{-\infty}^{\infty} \chi_2^{(N)}(\lambda)\lambda^m d\sigma_n(\lambda)\right| < \varepsilon$. Удовлетворение первого неравенства возможно благодаря сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m d\sigma(\lambda)$. Удовлетворение второго при $m > 0$ вытекает из оценки

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \chi_2^{(N)}(\lambda)\lambda^m d\sigma_n(\lambda)\right| \leqslant \int_{(-\infty,\infty)\setminus[-N,N]} \lambda^m d\sigma_n(\lambda) = \int_{(-\infty,\infty)\setminus[-N,N]} \frac{1}{\lambda^m}\lambda^{2m} d\sigma_n(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N^m} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2m} d\sigma_n(\lambda) = \frac{c_0^{(2m)}}{N^m} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Случай $m = 0$ был рассмотрен ранее. Теорема доказана.

Как уже известно (теоремы 1.13 и 1.14), формула

$$m(\zeta) = \frac{E_0(\zeta, x)\, t(\zeta) + E_1(\zeta, x)}{D_0(\zeta, x)\, t(\zeta) + D_1(\zeta, x)} \quad (\operatorname{Im}\zeta \neq 0) \tag{1.63}$$

(x вещественно фиксировано) дает преобразование Стилтьеса ортогональных спектральных мер $d\sigma(\lambda)$, если в нее вместо произвольной голоморфной при $\operatorname{Im}\zeta > 0$ функции $t(\zeta)$, такой что $\operatorname{Im} t(\zeta) \geqslant 0$, подставить вещественную (возможно, равную ∞) константу. Оказывается, можно описать в терминах $t(\zeta)$ и все $d\sigma(\lambda)$, входящие в выпуклую замкнутую оболочку ортогональных спектральных мер.

Теорема 1.16. *Обозначим $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ замкнутую выпуклую оболочку всех ортогональных спектральных мер, отвечающих L, т. е. замыкание в смысле слабой сходимости в $(C(Q))'$ мер*

$$\sigma(\Delta) = \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha \sigma_\alpha(\Delta) \quad \left(\mu_\alpha \geqslant 0,\ \alpha = 1, \ldots, N;\ \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha = 1\right), \tag{1.64}$$

где $d\sigma_\alpha(\lambda)$ — *ортогональные меры. Для того чтобы* $\sigma \in \Sigma_0$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $t(\zeta)$ *в* (1.63) *имела вид*

$$t(\zeta) = t^*(w(\zeta)), \quad w(\zeta) = \frac{D_1(\zeta, x)}{D_0(\zeta, x)}, \tag{1.65}$$

где $t^*(w)$ — *произвольная голоморфная при* $\operatorname{Im} w > 0$ *функция от* w *такая, что* $\operatorname{Im} t^*(w) \geqslant 0$ *(в частности,* $t^*(w)$ *может совпадать с вещественной, возможно, равной* ∞, *константой).*

Прежде чем доказывать теорему, рассмотрим более детально функции $f(z)$, голоморфные при $\operatorname{Im} z > 0$ и такие, что $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$. Это т. н. функции Неванлинна, их совокупность обозначим N*. Очевидно, класс N аддитивный (т. е. если $f, g \in N$, то и $f + g \in N$) и замкнутый относительно суперпозиции (т. е. если $f, g \in N$, то и $f(g(z)) \in N$). Так как $-\frac{1}{z} \in N$, то для $f \in N$ и $-\frac{1}{f(z)} \in N$. Функции класса N допускают хорошо известное представление — этот класс совпадает с функциями вида

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \lambda z}{\lambda - z}\, d\varrho(\lambda) \quad (\operatorname{Im} z > 0), \tag{1.66}$$

где $\alpha \in (-\infty, \infty)$ и $\beta \in [0, \infty)$ — постоянные, $d\varrho(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера на оси $(-\infty, \infty)$. Из (1.66) следует, что для всякой $f \in N$ существует $\lim\limits_{y \to +\infty} f(iy)/y = i\beta$ $(z = x + iy)$.

Пусть о $F \in N$ известно, что $\varlimsup\limits_{y \to +\infty} |yF(iy)| < \infty$; такие функции описываются формулой

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z} \quad (\operatorname{Im} z > 0), \tag{1.67}$$

где $d\tau(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера на $(-\infty, \infty)$. Из (1.67) следует, что если $\varlimsup\limits_{y \to +\infty} |yF(iy)| < \infty$ то в действительности существует $\lim\limits_{y \to +\infty} yF(iy) = i\tau((-\infty, \infty))$.

Лемма 1.7. *Класс N совпадает с классом функций* $f(z) = -z - \frac{1}{F(z)}$ $(\operatorname{Im} z > 0)$, *где* $F(z)$ *имеет вид* (1.67), *причем* $0 < \tau((-\infty, \infty)) \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $f \in N$, тогда в N входит $f(z) + z$ и, следовательно $-\frac{1}{f(z) + z} = F(z)$. Но $\lim\limits_{y \to +\infty} yF(iy) = -\lim\limits_{y \to +\infty} (f(iy)/y + i)^{-1} = i(\beta + 1)^{-1}$ ($\beta \in [0, \infty)$, $(\beta + 1)^{-1} \in (0, 1]$), поэтому F представима в виде (1.67), причем $0 < \tau((-\infty, \infty)) \leqslant 1$. Наоборот, пусть F имеет вид (1.67) $(0 < \tau((-\infty, \infty)) \leqslant 1)$, тогда $f(z) = -z - \frac{1}{F(z)}$ голоморфна при $\operatorname{Im} z > 0$; покажем, что $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$. С помощью неравенства Коши—Буняковского найдем:

---

* Излагаемые ниже факты об этих функциях см., например, в книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [1, гл. 6, п. 59, стр. 206—213].

$$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im}\left\{-z - \frac{1}{F(z)}\right\} = -y +$$

$$+ \frac{y \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2}}{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - x)\, d\tau(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2}\right)^2 + y^2\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2}\right)^2} \geqslant$$

$$\geqslant -y + \frac{y}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - x)^2 d\tau(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2} + y^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2}} =$$

$$= -y + \frac{y}{\tau((-\infty, \infty))} \geqslant 0 \quad (\operatorname{Im} z > 0).$$

Лемма доказана.

Сделаем еще одно замечание. Утверждается, что *при фиксированном вещественном* x *функция* $w(\zeta) = D_1(\zeta, x)/D_0(\zeta, x)$ $(\operatorname{Im}\zeta > 0)$ *входит в класс* N. Действительно, при $z = x$ функция (1.58) отображает верхнюю полуплоскость во внутренность окружности K_ζ (см. стр. 537, случай 3) и сказанное на стр. 534) и поэтому конечна при $\operatorname{Im} w > 0$. Таким образом, нуль знаменателя в (1.58) $w = -D_1(\zeta, x)/D_0(\zeta, x)$ может лежать лишь в нижней полуплоскости (согласно (1.54) этот нуль не может быть нулем числителя). Итак, при $\operatorname{Im}\zeta > 0$ $\operatorname{Im}\{-D_1(\zeta, x)/D_0(\zeta, x)\} \leqslant 0$, что и требовалось.

Из доказанного, в частности, следует, что функция $t(\zeta)$ вида (1.65) всегда класса N

Доказательство теоремы. Так как $\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}$, то, учитывая (1.54), получим из (1.63):

$$m(\zeta) = \frac{E_0(\zeta, x)}{D_0(\zeta, x)} - \frac{1}{D_0^2(\zeta, x)(t(\zeta) + w(\zeta))} \quad (\operatorname{Im}\zeta > 0). \tag{1.68}$$

Представление (1.64) эквивалентно представлению $m(\zeta) = \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha m_\alpha(\zeta)$ (m_α отвечает σ_α), последнее же благодаря (1.68) эквивалентно равенству

$$\frac{1}{t(\zeta) + w(\zeta)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\mu_\alpha}{t_\alpha + w(\zeta)} \quad (\operatorname{Im}\zeta > 0). \tag{1.69}$$

Здесь t_α — вещественные числа, отвечающие ортогональным σ_α; одно из этих чисел, например t_{α_0}, может равняться ∞. Это означает, что в (1.69) соответствующее слагаемое отсутствует, т. е. можно в дальнейшем считать, что $\mu_{\alpha_0} = 0$.

Покажем, что если $\sigma \in \Sigma_0$, то справедливо представление (1.65). Рассмотрим сперва случай σ вида (1.64), тогда справедливо (1.69), откуда следует, что $t(\zeta)$

зависит от ζ посредством $w(\zeta)$: $t(\zeta) = t^*(w(\zeta))$, где $t^*(w)$ — некоторая функция, удовлетворяющая соотношению $(t^*(w)+w)^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha (t_\alpha + w)^{-1}$. Функция $F(w) = -(t^*(w)+w)^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha(-t_\alpha - w)^{-1}$ имеет вид (1.67), причем $\tau((-\infty, \infty)) = \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha \leqslant 1$. Но тогда согласно лемме 1.7 $t^*(w) = -w - 1/F(w) \in N$, что и доказывает (1.65).

Пусть теперь σ является пределом в слабом смысле последовательности мер $\sigma^{(n)}$ вида (1.64). Так как для каждого $\zeta\,(\operatorname{Im}\zeta > 0)\ \frac{1}{\lambda - \zeta} \in C(Q)$, то в понятных обозначениях $\lim\limits_{n\to\infty} m^{(n)}(\zeta) = m(\zeta)$. Из (1.68) следует, что функция $(t(\zeta)+w(\zeta))^{-1}$ для этих же ζ равна пределу сумм типа (1.69); иными словами, на области значений функции $w(\zeta)$ (а значит, и для всех w, $\operatorname{Im} w > 0$) $F(w) = -(t(\zeta)+w)^{-1}$ равна пределу соответствующих сумм $\sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha(-t_\alpha - w)^{-1}$. Но этот предел может иметь лишь вид $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - w}$ с неотрицательной мерой $d\tau(\lambda)$ такой, что $0 < \tau((-\infty, \infty)) \leqslant 1$*. Отсюда при помощи леммы 1.7 заключаем, что $t^*(w) = -w - 1/F(w) \in N$, что и требуется.

Наоборот, пусть $t(\zeta)$ имеет вид (1.65), требуется показать, что $\sigma \in \Sigma_0$. Рассмотрим функцию $F(w) = -(t^*(w)+w)^{-1}$; пользуясь представлением типа (1.66) для $t^*(w)$ найдем: $\lim\limits_{v\to+\infty} vF(iv) = i(\beta+1)^{-1}$ $(\beta \in [0, \infty))$. Таким образом, $F(w)$ представима в виде (1.67) с $\tau((-\infty, \infty)) = (\beta+1)^{-1} \leqslant 1$. Будем аппроксимировать интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{-\lambda + w} = -F(w)$ интегральными суммами Римана $\sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha (t_\alpha + w)^{-1}$, где $\mu_\alpha = \tau(\Delta_\alpha) \geqslant 0$; $\sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha = \tau((-\infty, \infty)) \leqslant 1$; $-t_\alpha = \lambda_\alpha \in \Delta_\alpha$. Если $\sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha < 1$, то введем формально еще одно $\mu_{\alpha_0} = 1 - \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha > 0$ и положим $t_{\alpha_0} = \infty$. Несколько меняя, если понадобится, обозначения, мо-

---

* Действительно, эти суммы можно записать в виде $\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - w)^{-1} d\tau^{(n)}(\lambda)$, где $d\tau^{(n)}(\lambda)$ — некоторые меры, причем $0 < \varepsilon \leqslant \tau^{(n)}((-\infty, \infty)) \leqslant 1$. Предел же таких интегралов, как это легко следует из теорем Хелли, может быть только аналогичным интегралом.

жем считать, что рассматриваемый интеграл аппроксимируется суммами $\sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha (t_\alpha + w)^{-1}$; $\mu_\alpha \geq 0$; $\sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha = 1$; $t_\alpha \in [-\infty, \infty]$. Обозначим $d\sigma_\alpha(\lambda)$ ортогональные спектральные меры, отвечающие t_α по формуле (1.63). Спектральным плотностям $\sigma^{(n)}(\Delta) = \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha \sigma_\alpha(\Delta)$ будет отвечать функция $t^{(n)}(\zeta)$, связанная соотношением $(t^{(n)}(\zeta) + w(\zeta))^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha (t_\alpha + w(\zeta))^{-1}$. Так как последняя сумма аппроксимирует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} (-\lambda + w(\zeta))^{-1} d\tau(\lambda) = -f(w(\zeta)) = (t^*(w) + w(\zeta))^{-1}$, то $t^{(n}(\zeta)$ аппроксимируют при каждом ζ ($\operatorname{Im}\zeta > 0$) функцию $t(\zeta)$. Согласно (1.68) соответствующие мерам $\sigma^{(n)}$ функции $m^{(n)}(\zeta)$ приближают $m(\zeta)$ для рассматриваемых ζ. Выберем согласно теореме 1.15 из $\sigma^{(n)}$ подпоследовательность $\sigma^{(n')}$, слабо сходящуюся к некоторой спектральной мере ϱ. Так как $(\lambda - z)^{-1} \in C(Q)$, то $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - \zeta} = \lim_{n' \to \infty} m^{(n')}(\zeta) = m(\zeta)$ ($\operatorname{Im}\zeta > 0$), но отсюда вытекает, что $\varrho = \sigma$. Итак, комбинации $\sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha \sigma_\alpha(\Delta)$, отвечающие индексам n', аппроксимируют в слабом смысле σ, т. е. $\sigma \in \Sigma_0$. Теорема доказана.

Так как функции (1.65) не описывают весь класс N, то Σ_0 — *правильная часть* Σ. Отсюда следует, что *совокупность крайних спектральных мер в случае неопределенного выражения* L *всегда шире, чем совокупность ортогональных мер*. Действительно, пусть эти совокупности совпадают, тогда по теореме М. Г. Крейна и Д. П. Мильмана* любая точка из Σ входит в Σ_0, что абсурдно. Можно показать, что если в (1.63) вместо $t(\zeta)$ подставить рациональную функцию из класса N, то соответствующая $d\sigma(\lambda)$ будет крайней. Отсюда вытекает следующий интересный результат: *всякая спектральная мера есть предел в слабом смысле последовательности крайних спектральных мер* (не нужно брать выпуклые комбинации). Действительно, всякую функцию $t \in N$ можно аппроксимировать рациональными $t^{(n)} \in N$ (например, беря в (1.66) вместо интеграла суммы Римана). Тогда согласно (1.63) $m(\zeta)$ будет аппроксимироваться функциями $m^{(n)}(\zeta)$ и доказательство заканчивается так же, как и доказательство второй части теоремы 1.16.

На этом мы закончим исследование крайних точек множества Σ. В заключение пункта установим еще две теоремы другого типа.

Теорема 1.17. *Пусть* L *— произвольное разностное выражение,* $d\sigma(\lambda)$ *— его некоторая спектральная мера. Для каждого* $\mu \in (-\infty, \infty)$ *скачок функции*

---

* Ее формулировка: всякое выпуклое компактное в слабой топологии множество из сопряженного пространства к некоторому нормированному и даже к линейному топологическому локально выпуклому пространству содержит крайние точки и совпадает с выпуклой замкнутой в слабой топологии оболочкой этих точек.

$\sigma(\lambda)$ в этой точке удовлетворяет оценке

$$\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu)\leqslant\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}P_j^2(\mu)}\tag{1.70}$$

(*ряд в* (1.70) *может и расходиться*). *Эта оценка точная: в определенном случае* (1.70) *превращается в равенство, в неопределенном — равенство наступает для ортогональной спектральной меры, преобразование Стилтьеса которой подсчитывается посредством* (1.59), *где положено $x=\mu$ и $t=\infty$.*

Доказательство. Для любого полинома $P(\lambda)$ очевидно имеем: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}P^2(\lambda)\,d\sigma(\lambda)\geqslant P^2(\mu)(\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu))$. Положим $P(\lambda)=\left(\sum\limits_{j=0}^{n}P_j^2(\mu)\right)^{-1}\times$ $\times\sum\limits_{j=0}^{n}P_j(\mu)P_j(\lambda)$; $P(\mu)=1$. Пользуясь ортонормированностью полиномов $P_j(\lambda)$, получим

$$\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu)\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}P_j(\mu)P_j(\lambda)}{\sum\limits_{j=0}^{n}P_j^2(\mu)}\right\}^2d\sigma(\lambda)=\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{n}P_j^2(\mu)}\quad(n=0,1,\ldots).$$

Переходя здесь к пределу при $n\to\infty$, придем к (1.70).

Установим вторую часть теоремы, сперва предполагая, что для L имеет место неопределенный случай. Положим в (1.59) $x=\mu$ и перейдем к пределу при $t\to\infty$; учитывая (1.51), получим

$$m(\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda-\zeta}=\frac{E_0(\zeta,\mu)}{D_0(\zeta,\mu)}=\frac{1+(\zeta-\mu)\sum\limits_{j=0}^{\infty}Q_j(\zeta)P_j(\mu)}{-(\zeta-\mu)\sum\limits_{j=0}^{\infty}P_j(\zeta)P_j(\mu)}\quad(\operatorname{Im}\zeta\neq0).\tag{1.71}$$

Равенство (1.71) показывает, что $m(\zeta)$ при $\zeta=\mu$ имеет полюс; разложение этой мероморфной функции вблизи μ имеет вид:

$$m(\zeta)=-((\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu))(\zeta-\mu)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\zeta-\mu)^n.$$

Сравнивая это разложение с (1.71), получим: $\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu)=\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}P_j^2(\mu)\right)^{-1}$, что и доказывает теорему в неопределенном случае.

Пусть L определено, легко понять, что в изучении нуждается лишь случай $\sum\limits_{j=0}^{\infty}P_j^2(\mu)<\infty$. Прежде всего покажем, что теперь в смысле слабой сходимости в $l_2([0,\infty))$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{-i\varepsilon R_{\mu+i\varepsilon}\delta_0\} = ((\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu))(P_0(\mu), P_1(\mu), \ldots). \tag{1.72}$$

В самом деле, согласно (1.37) при фиксированном j

$$-i\varepsilon(R_{\mu+i\varepsilon}\delta_0)_j = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\varepsilon P_j(\lambda)}{i\varepsilon+\mu-\lambda}\,d\sigma(\lambda)\underset{\varepsilon\to 0}{\to}(\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu))\,P_j(\mu), \tag{1.73}$$

так как последовательность функций от λ $\dfrac{i\varepsilon P_j(\lambda)}{i\varepsilon+\mu-\lambda}$ сходится к 0 при $\lambda\neq\mu$, к $P_j(\mu)$ при $\lambda=\mu$ и ограничена суммируемой функцией $|P_j(\lambda)|$. Из (1.73) следует, что $(-i\varepsilon R_{\mu+i\varepsilon}\delta_0, u)_0$ сходится к требуемому пределу при каждом $u\in l_{2,0}([0,\infty))$. Для доказательства (1.72) осталось заметить, что нормы векторов рассматриваемой последовательности равномерно ограничены; $\|-i\varepsilon R_{\mu+i\varepsilon}\delta_0\|_0\leqslant \leqslant|\varepsilon|\,\|R_{\mu+i\varepsilon}\|\,\|\delta_0\|_0\leqslant 1$. Итак, (1.72) установлено.

Подобно выводу равенства (1.40) из стр. 528 получим (роль z и ζ при этом играют соответственно $\mu+i\eta$ и $\mu+i\varepsilon$):

$$(\varepsilon+\eta)\sum_{j=0}^{\infty}\{-i\eta R_{\mu+i\eta}\delta_0\}_j\,\overline{\{-i\varepsilon R_{\mu+i\varepsilon}\delta_0\}_j} = i\varepsilon\eta\,(m(\mu-i\varepsilon)-m(\mu+i\eta))$$

$$(\varepsilon,\eta\neq 0).$$

Перейдем здесь к пределу при $\eta\to 0$, учитывая (1.72) и (1.73) при $j=0$ (т. е. соотношение $-i\eta m(\mu+i\eta)\underset{\eta\to 0}{\to}\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu)$). После сокращения на ε получим

$$(\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu))\sum_{j=0}^{\infty}P_j(\mu)\,\overline{\{-i\varepsilon R_{\mu+i\varepsilon}\delta_0\}_j} = \sigma(\mu+0)-\sigma(\mu) \quad (\varepsilon\neq 0).$$

Переходя здесь еще раз к пределу при $\varepsilon\to 0$ и учитывая (1.72), получим $(\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu))\sum_{j=0}^{\infty}P_j^2(\mu)=1$, что и требуется. Теорема доказана.

Имеет место следующий критерий неопределенности L.

Теорема 1.18. *Для того чтобы разностное выражение было неопределенным, необходимо, чтобы ряды* $\sum_{j=0}^{\infty}|P_j(z)|^2$ *и* $\sum_{j=0}^{\infty}|Q_j(z)|^2$ *сходились при любом* z, *и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий: 1) один из этих рядов сходится при некотором невещественном* z; *2) один из этих рядов сходится для несчетного множества вещественных* z; *3) оба ряда сходятся при некотором вещественном* z.

Доказательство. Необходимость условий уже была установлена (см. стр. 529); также ясна достаточность условия $\sum_{j=0}^{\infty}|P_j(z)|^2<\infty$ $(\operatorname{Im} z\neq 0)$. Пусть теперь при некотором $z\,(\mathrm{Im}\, z \neq 0)$ $\sum_{j=0}^{\infty} |Q_j(z)|^2 < \infty$; так как всегда $\sum_{j=0}^{\infty} |Q_j(z) + m(z) P_j(z)|^2 < \infty$ (см. (1.41)), то и $|m(z)|^2 \sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2 < \infty$. Но $m(z) \neq 0$ (см. стр. 534, замечание), поэтому мы приходим к предыдущему требованию: $\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2 < \infty$.

Докажем достаточность условий 2). Пусть $\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(x)|^2 < \infty$ для несчетного множества $x \in (-\infty, \infty)$ и вместе с тем L определено. Тогда единственная спектральная мера $\sigma(\lambda)$ должна в этих точках x иметь разрывы, равные $\left(\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(x)|^2\right)^{-1}$ (см. теорему 1.17), что противоречит счетности множества точек разрыва неубывающей функции. Далее, пусть $\sum_{j=0}^{\infty} |Q_j(x)|^2 < \infty$ для несчетного множества $x \in (-\infty, \infty)$. Как уже отмечалось (см. стр. 526—527), полиномы $a_0 Q_j(z)$ могут рассматриваться как полиномы $\hat{P}_{j-1}(z)$ первого рода для сдвинутого разностного выражения $\hat{L}$ и поэтому по уже доказанной части теоремы $\hat{L}$ неопределенно. Следовательно, для любого $z\,(\mathrm{Im}\, z \neq 0)$ $a_0^2 \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j(z)|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\hat{P}_j(z)|^2 < \infty$; в силу 1) L неопределенно.

Докажем достаточность условия 3)*. Общее решение неоднородного разностного уравнения

$$(Lu)_j - zu_j = f_j \qquad (j = 0, 1, \ldots) \tag{1.74}$$

может быть найдено методом вариации произвольных постоянных. Проводя элементарные выкладки и учитывая (1.54), найдем

$$u_n = C_1 P_n(z) + C_2 Q_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} (P_j(z) Q_n(z) - P_n(z) Q_j(z)) f_j = C_1 P_n(z) + C_2 Q_n(z) + (V_z f)_n \qquad (n = 0, 1, \ldots); \tag{1.75}$$

---

* Здесь можно было бы воспользоваться одним общим операторным соображением (см. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман [1, гл. 7., стр. 343, теорема 4]. Мы приводим другое рассуждение, полезное для уравнений с операторными коэффициентами (см. § 2).

C_1, C_2 — произвольные постоянные (при $n = 0$ сумма в (1.75) считается равной нулю). Оператор V_z над последовательностями $(f_0, f_1, \ldots)$ носит название оператора Коши. Легко показать, что если $\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2, \sum_{j=0}^{\infty} |Q_j(z)|^2 < \infty$, то V_z является оператором Гильберта—Шмидта в пространстве $l_2([0, \infty))$. Действительно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} |P_j(z) Q_n(z) - P_n(z) Q_j(z)|^2 \leqslant \sum_{n,j=0}^{\infty} |P_j(z) Q_n(z) - P_n(z) Q_j(z)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4 \sum_{n,j=0}^{\infty} |P_j(z) Q_n(z)|^2 < \infty.$$

Пусть теперь фиксированное $x \in (-\infty, \infty)$ таково, что $\sum_{j=0}^{\infty} P_j^2(x), \sum_{j=0}^{\infty} Q_j^2(x) < \infty$. Последовательность $(P_0(\zeta), P_1(\zeta), \ldots)$ удовлетворяет уравнению вида (1.74):

$$(L P(\zeta))_j - xP_j(\zeta) = (\zeta - x) P_j(\zeta) \qquad (j = 0, 1, \ldots; \ P_{-1}(\zeta) = 0, \ P_0(\zeta) = 1).$$

Записывая формулу (1.75) для этого решения, получим:

$$P_n(\zeta) = P_n(x) + (\zeta - x)(V_x P(\zeta))_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Иными словами, $P_j(\zeta)$ совпадает с решением уравнения

$$((E - \mu V_x) u)_n = P_n(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots; \ \mu = \zeta - x); \tag{1.76}$$

наоборот, всякое решение этого уравнения, т. е. уравнения типа (1.75), совпадает с $P_j(\zeta)$. Так как $(P_0(x), P_1(x), \ldots) \in l_2([0, \infty))$, а V_x ограничен в $l_2([0, \infty))$ и даже Гильберта—Шмидта, то (1.76) можно рассматривать как уравнение в этом пространстве. Но оно обратимо для всех μ, за исключением счетной последовательности, уходящей на ∞. Таким образом, существует невещественное ζ, для которого $P_j(\zeta) = u_j = ((E - \mu V_x)^{-1} P(x))_j \in l_2([0, \infty))$. На основании 1) выражение L неопределенно. Теорема доказана.

10. Предельный переход от разностного уравнения на конечном интервале к разностному уравнению на полуоси. Мы покажем, что при помощи такого перехода можно от спектральной теории на конечном интервале перейти к основным фактам развитой выше теории. Будем рассматривать разностное выражение (1.1) на целочисленных точках конечного интервала, точнее, при $j = 0, \ldots, N$. При этом предполагается, что выполнены «граничные условия» $u_{-1} = u_{N+1} = 0$, т. е. при подсчете $(Lu)_j$ $(j = 0, \ldots, N)$ в случае $j = 0$ и $j = N$ полагаем, что $u_{-1} = u_{N+1} = 0$. В комплексном $N + 1$-мерном эвклидовом пространстве C_{N+1} векторов $u = (u_0, \ldots, u_N)$ рассмотрим оператор $(\mathrm{L}_N u)_j = (Lu)_j$ $(j = 0, \ldots, N)$; иными словами, $\mathrm{L}_N u$ подсчитывается, как действие на u усеченной якобиевой матрицы

$$
{}_{N+1} = \left\| \begin{matrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{N-1} & b_N \end{matrix} \right\|. \tag{1.77}
$$

існо, что оператор L_N эрмитов. Покажем, что спектр L_N совадает с совокупностью нулей полинома $P_{N+1}(\lambda)$. Действительно, пектр L_N (т. е. спектр матрицы J_{N+1}) состоит из корней уравнения et $(J_{N+1}-\lambda E)=0$. Обозначим $\Delta_j(\lambda)=\mathrm{Det}(J_j-\lambda E)$ $(j=1, 2, \ldots)$. аскрывая определитель $\mathrm{Det}(J_{j+1}-\lambda E)$ по элементам последней троки, легко установить соотношение: $\Delta_{j+1}(\lambda)=(b_j-\lambda)\Delta_j(\lambda)-$ $-a_{j-1}^2\Delta_{j-1}(\lambda)$ $(j=1, 2, \ldots)$. Разделив это равенство на $a_0 \ldots a_{j-1}$, олучим, что последовательность $d_j=(-1)^j(a_0\ldots a_{j-1})^{-1}\Delta_j(\lambda)$ $(j=1, 2, \ldots;$ $d_0=1$, $d_{-1}=0)$ удовлетворяет уравнению $(Ld)_j=\lambda d_j$ $(j=0, 1, \ldots)$. аким образом, $d_j=P_j(\lambda)$ $(j=0, 1, \ldots)$, откуда $\Delta_j(\lambda)=(-1)^j a_0 \ldots$ $\ldots a_{j-1}P_j(\lambda)$ $(j=1, 2, \ldots)$. Утверждение доказано.

Пусть $\lambda_1^{(N)}<\ldots<\lambda_{N+1}^{(N)}$ — нули полинома $P_{N+1}(\lambda)$, т. е. спектр L_N (согласно лемме 1.4 все нули $P_{N+1}(\lambda)$ различны). Обозначим $\varphi(\lambda_\nu^{(N)})=(\varphi_0(\lambda_\nu^{(N)}), \ldots, \varphi_N(\lambda_\nu^{(N)}))$ ортонормированный собственный зектор, отвечающий собственному значению $\lambda_\nu^{(N)}$. Покажем, что

$$
\varphi(\lambda_\nu^{(N)})=\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j=0}^{N}P_j^2(\lambda_\nu^{(N)})}}\left(P_0(\lambda_\nu^{(N)}), \ldots, P_N(\lambda_\nu^{(N)})\right) \quad (\nu=1, \ldots, N+1). \tag{1.78}
$$

3 самом деле, вектор $\varphi(\lambda_\nu^{(N)})$ удовлетворяет соотношению $J_{N+1}\varphi(\lambda_\nu^{(N)})=$ $=\lambda_\nu^{(N)}\varphi(\lambda_\nu^{(N)})$, т. е. последовательность $\varphi_0(\lambda_\nu^{(N)}), \ldots, \varphi_N(\lambda_\nu^{(N)})$ — равенству $(L\varphi(\lambda_\nu^{(N)}))_j=\lambda_\nu^{(N)}\varphi_j(\lambda_\nu^{(N)})$ $(j=0, \ldots, N;$ $\varphi_{-1}(\lambda_\nu^{(N)})=$ $=\varphi_{N+1}(\lambda_\nu^{(N)})=0)$. Отсюда находим (1.78), причем коэффициент в 1.78) появляется благодаря нормировке.

Соотношение (1.78) позволяет обычное равенство Парсеваля для эрмитовых матриц записать в следующей форме. Пусть $u, v \in l_{2,0}([0, \infty))$ таковы, что их координаты начиная с $N+1$-ой аннулируются; $\tilde{u}(\lambda)$, $\tilde{v}(\lambda)$ — преобразования Фурье, определенные посредством (1.22). Тогда

$$
(u, v)_0=\sum_{\nu=1}^{N+1}\tilde{u}(\lambda_\nu^{(N)})\overline{\tilde{v}(\lambda_\nu^{(N)})}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{N}P_j^2(\lambda_\nu^{(N)})}=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\lambda)\overline{\tilde{v}(\lambda)}\,d\sigma_N(\lambda), \tag{1.79}
$$

где мера $d\sigma_N(\lambda)$ (спектральная мера L_N) сосредоточена лишь на спектре L_N, причем $\sigma_N(\lambda_\nu^{(N)}+0)-\sigma_N(\lambda_\nu^{(N)})=\left(\sum_{j=0}^{N} P_j^2(\lambda_\nu^{(N)})\right)^{-1}$.

Теперь уже нетрудно показать, что в (1.79) можно для фиксированных u, v сделать предельный переход при $N\to\infty$, в результате которого мы придем к равенству Парсеваля (1.30). Прежде всего заметим, что *для каждого* $m=0, 1, \ldots$ *при любом* $N=1, 2, \ldots$ *имеем*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m d\sigma_N(\lambda) \leqslant C_m < \infty. \tag{1.80}$$

В самом деле, $|\lambda|^m \leqslant 1+\lambda^{2m}$, поэтому $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m d\sigma_N(\lambda) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda^{2m})\, d\sigma_N(\lambda) = 1+(J_{N+1}^{2m}\delta_0,\ \delta_0)$. Но при N достаточно большом $(J_{N+1}^{2m}\delta_0,\ \delta_0)_0=(J^{2m}\delta_0,\ \delta_0)_0$, откуда и следует (1.80).

Благодаря (1.80) при помощи первой теоремы Хелли и диагонального процесса из обобщенных мер $\sigma_N^{(m)}(\Delta)=\int_\Delta \lambda^m d\sigma_N(\lambda)$ $(m=0, 1, \ldots;$ $N=1, 2, \ldots;$ $\sigma_N^{(0)}=\sigma_N)$ можно выбрать подпоследовательность $\sigma_{N'}^{(m)}$ такую, что при каждом m в смысле сходимости в основном $\sigma_{N'}^{(m)} \xrightarrow[N'\to\infty]{} \sigma^{(m)}$. Отсюда, в частности, следует, что $\sigma_{N'}^{(m)}((-\infty,\ \infty)) \xrightarrow[N'\to\infty]{} \sigma^{(m)}((-\infty,\ \infty))$. С другой стороны, в силу второй теоремы Хелли для каждого ограниченного Δ $\int_\Delta \lambda^m d\sigma_{N'}(\lambda) \xrightarrow[N'\to\infty]{} \int_\Delta \lambda^m d\sigma(\lambda)=\sigma^{(m)}(\Delta)$ $(\sigma=\sigma^{(0)})$; таким образом, $d\sigma^{(m)}(\lambda)=\lambda^m d\sigma(\lambda)$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d\sigma_{N'}(\lambda)=\sigma_{N'}^{(m)}((-\infty,\ \infty)) \to \sigma^{(m)}((-\infty,\ \infty))=\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d\sigma(\lambda)$$

$$(m=0,\ 1,\ \ldots).$$

Итак, *из последовательности спектральных мер $d\sigma_N(\lambda)$ операторов L_N можно выбрать подпоследовательность $d\sigma_{N'}(\lambda)$, сходящуюся в основном к некоторой мере $d\sigma(\lambda)$, причем для каждого полинома $P(\lambda)$ при $N'\to\infty$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, d\sigma_{N'}(\lambda) \to \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, d\sigma(\lambda). \tag{1.81}$$

Мера $d\sigma(\lambda)$ будет некоторой спектральной мерой выражения L, рассматриваемого на полуоси $[0,\ \infty)$.

Осталось пояснить последнее утверждение. Полагая в (1.79) $N = N'$ и устремляя $N' \to \infty$, согласно (1.81) перейдем в (1.79) к пределу.

Таким образом, для любых $u, v \in l_{2,0}([0, \infty))$ справедливо равенство Парсеваля (1.30). Благодаря теореме 1.9 это и означает, что $d\sigma(\lambda)$ — спектральная мера для L на $[0, \infty)$.

Если L определенно, то в результате рассмотренного предельного перехода мы получим единственную спектральную меру, при этом нули ортогональных полиномов $P_N(\lambda)$ будут сгущаться к спектру задачи на полуоси. В неопределенном случае такая процедура даст некоторую спектральную меру $d\sigma(\lambda)$; по-видимому, при переборе всевозможных подпоследовательностей $d\sigma(\lambda)$ опишет все спектральные меры, отвечающие L. В определенном случае, очевидно, имеют место соотношения

$$\sigma(\Delta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\lambda_\nu^{(N)} \in \Delta} \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{N} P_j^2(\lambda_\nu^{(N)})}, \quad m(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=1}^{N+1} \frac{1}{(\lambda_\nu^{(N)} - z) \sum\limits_{j=0}^{N} P_j^2(\lambda_\nu^{(N)})}. \tag{1.82}$$

Ясно, что и многие другие результаты пп. 1—9 могут быть «аппроксимированы» результатами на конечном интервале, однако на этом мы останавливаться не будем.

11. Два примера. Мы ограничимся лишь самыми простыми примерами разностных выражений.

а) Разностным аналогом дифференциального выражения u'' служит $(\Delta_л \Delta_п u)_j = u_{j-1} + u_{j+1} - 2u_j$. Изучение $\Delta_л \Delta_п$, очевидно, эквивалентно изучению выражения

$$(Lu)_j = \frac{1}{2} u_{j-1} + \frac{1}{2} u_{j+1} \quad (j = 0, 1, \ldots; \ u_{-1} = 0),$$

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}. \tag{1.83}$$

К рассмотрению (1.83) мы сейчас приступим.

Прежде всего найдем $P_j(z)$. Эти полиномы являются решением задачи Коши $\frac{1}{2}u_{j-1}+\frac{1}{2}u_{j+1}=zu_j$ ($j=0, 1, \ldots;\ u_{-1}=0,\ u_0=1$). Если обозначить $z=\cos\theta$, то решение полученного рекуррентного соотношения по-прежнему будет единственным; с другой стороны, ему, очевидно, удовлетворяет последовательность $u_j=\frac{\sin(j+1)\theta}{\sin\theta}$ ($j=-1, 0, 1, \ldots$). Таким образом,

$$P_j(z)=\frac{\sin((j+1)\arccos z)}{\sin(\arccos z)} \quad (j=-1,\ 0,\ 1,\ \ldots) \tag{1.84}$$

будет решением задачи Коши; отсюда следует, что дробь в (1.84) — полином степени j от z. Итак, (1.84) дает требуемый ответ, эти полиномы носят название полиномов Чебышева второго рода. Полиномы $Q_j(z)$ ($j=1,\ 2,\ \ldots$) образуют решение задачи Коши $\frac{1}{2}v_{j-1}+$ $+\frac{1}{2}v_{j+1}=zv_j$ $\left(j=1,\ 2,\ \ldots;\ v_0=0,\ v_1=\frac{1}{a_0}=2\right)$. Сравнивая эту задачу с предыдущей, очевидно, получим: $Q_j(z)=2P_{j-1}(z)$ ($j=0,\ 1,\ \ldots$).

У L коэффициенты ограничены, поэтому в силу теоремы 1.2 и оператор L ограничен; тем более, выражение L определено. Единственная спектральная мера равна

$$d\sigma(\lambda)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}\,d\lambda, & |\lambda|\leqslant 1;\\ 0, & |\lambda|>1.\end{cases} \tag{1.85}$$

Это вытекает из теоремы 1.9 и соотношения ортогональности:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}P_j(\lambda)P_k(\lambda)\sqrt{1-\lambda^2}\,d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(j+1)\theta\cdot\sin(k+1)\theta\,d\theta=\delta_{jk}$$
$$(j,\ k=0,\ 1,\ \ldots).$$

Таким образом, спектр L заполняет сегмент $[-1,\ 1]$, $\|\mathrm{L}\|=1$. Функция $m(z)$ имеет вид

$$m(z)=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda-z}\,d\lambda=2(\sqrt{z^2-1}-z) \quad (z\overline{\in}[-1,\ 1]). \tag{1.86}$$

б) Рассмотрим выражение L, отвечающее якобиевой матрице

$$J=\left\|\begin{matrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right\|. \tag{1.87}$$

Полиномы $P_j(z)$ являются решением следующей задачи Коши:

$$\frac{1}{2}u_{j-1}+\frac{1}{2}u_{j+1}=zu_j\ \ (j=2,\ 3,\ \ldots),\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}u_0+\frac{1}{2}u_2=zu_1,$$

$$a_{-1}u_{-1}+\frac{1}{\sqrt{2}}u_1=zu_0 \qquad (u_{-1}=0,\ u_0=1).$$

Положим, как и раньше, $z=\cos\theta$. Нетрудно убедиться, что решением полученного рекуррентного соотношения будет последовательность $u_j=\sqrt{2}\cos j\theta$ $(j=1,\ 2,\ \ldots;\ u_{-1}=0,\ u_0=1)$. Таким образом, полиномы (полиномы Чебышева первого рода)

$$P_0(z)=1,\ P_j(z)=\sqrt{2}\cos(j\arccos z) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.88}$$

будут искомыми. Полиномы $Q_j(z)$ удовлетворяют соотношению $\frac{1}{2}v_{j-1}+\frac{1}{2}v_{j+1}=zv_j$ $(j=2,\ 3,\ \ldots)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}v_0+\frac{1}{2}v_2=zv_1$ $\left(v_0=0,\ v_1=\frac{1}{a_0}=\sqrt{2}\right)$, т. е. согласно а) $Q_j(z)=\sqrt{2}\sin(j\arccos z)/\sin(\arccos z)$ $(j=0,\ 1,\ \ldots)$.

Подобно предыдущему примеру легко убедиться, что L ограничен $(\|L\|=1)$, его спектр заполняет $[-1,\ 1]$ и

$$d\sigma(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{d\lambda}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}}, & |\lambda|\leqslant 1;\\ 0, & |\lambda|>1;\end{cases} \qquad m(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\lambda}{(\lambda-z)\sqrt{1-\lambda^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \qquad (z\,\overline{\in}\,[-1,\ 1]). \tag{1.89}$$

12. Общие граничные условия. Можно обобщить постановку задачи, введенной в п. 1. Общее линейное однородное граничное условие вблизи нуля, очевидно, имеет вид

$$\alpha u_{-1} + \beta u_0 = 0 \quad (|\alpha| + |\beta| > 0). \tag{1.90}$$

Сопряженное условие, т. е. соотношение между v_{-1} и v_0 такое, что $(Lu, v)_0 = (u, Lv)_0$ для любой финитной на ∞ последовательности $(u_{-1}, u_0, u_1, \ldots)$, удовлетворяющей (1.90), может быть легко найдено при помощи формулы Грина (1.4) обычным рассуждением (ср. со стр. 91—93). Оно имеет вид: $\bar{\alpha} v_{-1} + \bar{\beta} v_0 = 0$. Таким образом, условие (1.90) будет самосопряженным тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta = 0$.

Всю развитую в пп. 1 — 10 теорию можно легко перенести на задачи вида

$$\begin{gathered}(Lu)_j = a_{j-1}u_{j-1} + a_j u_{j+1} + b_j u_j = \lambda u_j;\ \alpha u_{-1} + \beta u_0 = 0 \\ (j = 0,\ 1,\ \ldots,\ \operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta = 0;\ \ \alpha^2 + \beta^2 > 0).\end{gathered} \tag{1.91}$$

Мы этого делать не будем, заметим лишь, что роль полиномов $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ играют два линейно независимых решения уравнения $(Lu)_j = zu_j$ $(j = 0, 1, \ldots)$, первое из которых удовлетворяет условию $\alpha u_{-1} + \beta u_0 = 0$, а второе с ним связано посредством (1.35).

§ 2. Разностные выражения второго порядка с операторными коэффициентами на полуоси

Ниже обобщаются результаты § 1 на случай разностного выражения вида $(Lu)_j = a_{j-1}u_{j-1} + a_j u_{j+1} + b_j u_j$, где a_j, b_j — операторы в некотором гильбертовом пространстве H, а $(u_0, u_1, \ldots)$ — последовательность векторов из H. В связи с некоторой громоздкостью построений мы не будем излагать полную теорию, а ограничимся лишь основными фактами, соответствующими, примерно, пп. 1 — 6, § 1. В следующих двух параграфах будут даны применения этих результатов к обычным разностным уравнениям на всей оси и к уравнениям в частных разностях. Сейчас уместно подчеркнуть, что выражения в частных разностях, а также обычные разностные выражения четного порядка являются частными случаями рассматриваемого выражения с операторными коэффициентами.

Прежде всего изложим в пунктах 1—4 одно вспомогательное построение, обобщающее понятие гильбертова пространства и представляющее самостоятельный интерес. Рассматриваемое ниже образование будет некоторым модулем, в котором введен аналог скалярного произведения и топология. В связи с этим напомним, что коммутативная группа G относительно сложения называется модулем (точнее, правым модулем), если для ее элементов u, v, ...

определено произведение $u\cdot\lambda$, где λ — элемент фиксированного кольца с единицей R («кольца скаляров»). Это произведение должно обладать обычными свойствами: $(u+v)\cdot\lambda=u\cdot\lambda+v\cdot\lambda$, $u\cdot(\lambda+\mu)=u\cdot\lambda+u\cdot\mu$, $u\cdot(\lambda\mu)=(u\cdot\lambda)\cdot\mu$, $u\cdot e=u$ (u, $v\in G$; λ, $\mu\in R$; e — единица кольца R).

1. Определение псевдогильбертова пространства. Пусть H и $\mathfrak{H}$ — полные гильбертовы пространства, для простоты считаем их сепарабельными. Элементы пространства H будем обозначать $x, y, \ldots$; $(\cdot,\cdot)_H$ и $\|\cdot\|_H$ — скалярное произведение и норма в H. Для $\mathfrak{H}$ соответствующие обозначения: u, v, $\ldots$; $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$. Совпадение H и $\mathfrak{H}$ не исключается, однако в приложениях наиболее интересен случай, когда H — в некотором отношении часть $\mathfrak{H}$. Рассмотрим совокупность $L(H, \mathfrak{H})$ всех линейных непрерывных операторов, отображающих все H в $\mathfrak{H}$; их будем обозначать U, V, $\ldots$. $L(H, \mathfrak{H})$ является векторным пространством относительно обычного сложения операторов, для элементов которого определено умножение справа на линейные непрерывные операторы Λ в H ($L(H, H)$ — их совокупность): $U\Lambda$; это произведение удовлетворяет обычным требованиям ассоциативности и дистрибутивности. Таким образом, $L(H, \mathfrak{H})$ является модулем.

Для U, $V\in L(H, \mathfrak{H})$ можно ввести «скалярное» произведение, полагая $\{U, V\}=U^*V\in L(H, H)$, где U^* — оператор, сопряженный к U (он действует из $\mathfrak{H}$ в H). Ясно, что $\{U, U\}$ — неотрицательный оператор и

$$(\{U, V\}x, y)_H=(Vx, Uy)_{\mathfrak{H}}\quad (x, y\in H;\ U, V\in L(H, \mathfrak{H})). \tag{2.1}$$

Для $\{\cdot,\cdot\}$ выполняются аналоги обычных свойств скалярного произведения:

$$\{U, V+W\}=\{U, V\}+\{U, W\},\ \{U, V\Lambda\}=\{U, V\}\Lambda,\ \{U, V\}^*=\{V, U\};$$

$$\{U+V, W\}=\{U, W\}+\{V, W\},\ \{U\Lambda, V\}=\Lambda^*\{U, V\}; \tag{2.2}$$

$$(U, V, W\in L(H, \mathfrak{H});\ \Lambda\in L(H, H)).$$

Совокупность $L(H, \mathfrak{H})$ будем называть псевдогильбертовым пространством, ее элементы — псевдовекторами, операторы Λ, M, $\ldots\in L(H, H)$ — псевдоскалярами, а $\{\cdot,\cdot\}$ — псевдоскалярным произведением. Топологизируем $L(H, \mathfrak{H})$ посредством сильной топологии операторов: $U^{(n)}\to U$, если для каждого $x\in H$ $U^{(n)}x\to Ux$ в $\mathfrak{H}$. Это соответствует заданию следующего базиса окрестностей: под окрестностью $O(U; x_1, \ldots, x_p; \varepsilon)$ псевдовектора U понимается совокупность всех $V\in L(H, \mathfrak{H})$ таких, что

$$\|Ux_1 - Vx_1\|_{\mathfrak{H}} < \varepsilon, \ \ldots, \ \|Ux_p - Vx_p\|_{\mathfrak{H}} < \varepsilon \ (x_1, \ldots, x_p \in H;$$
$$p = 1, 2, \ldots; \ \varepsilon > 0).$$

Хорошо известно, что введенная топологизация превращает $L(H, \mathfrak{H})$ в хаусдорфово пространство. Оно полное в том смысле, что если $U^{(n)} \in L(H, \mathfrak{H})$ таковы, что при каждом $x \in H$ последовательность $U^{(n)}x$ фундаментальна в $\mathfrak{H}$, то $U^{(n)} \to U \in L(H, \mathfrak{H})$. Полезно отметить, что $U^{(n)} \to U$ тогда и только тогда, когда $\{U^{(n)} - U, U^{(n)} - U\} \to 0$ в смысле слабой сходимости операторов в H или, что то же, когда $(\{U^{(n)} - U, U^{(n)} - U\} x, x)_H \to 0$ $(x \in H)$.

Из (2.1) ясно, что псевдоскалярное произведение является непрерывной в смысле слабой сходимости операторов в H функцией своих обоих сомножителей (непрерывности в смысле сильной сходимости в $L(H, H)$, вообще говоря, не будет). Следует подчеркнуть, что произведение $U\Lambda$, вообще говоря, не непрерывно в $L(H, \mathfrak{H})$ при одновременном изменении U в $L(H, \mathfrak{H})$ и Λ в смысле слабой сходимости в $L(H, H)$. Сумма $U + V$, очевидно, непрерывно зависит во введенной топологии от обоих слагаемых.

В заключение этого пункта покажем, что псевдогильбертово пространство действительно является обобщением гильбертова. Рассмотрим случай, когда $H = C_1$ — обычное комплексное одномерное пространство, а $\mathfrak{H}$ — произвольно. Каждый оператор U из C_1 в $\mathfrak{H}$ имеет вид: $Ux = xu$ $(x \in C_1)$, где u — некоторый вектор из $\mathfrak{H}$ (действительно, $Ux = xU1 = xu$, $u = U1$); поэтому U можно отождествить с соответствующим $u \in \mathfrak{H}$. Ясно, что это — изоморфизм между $L(C_1, \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{H}$, причем $\{U, V\} = (v, u)_{\mathfrak{H}}$ (последнее следует из (2.1): $\{U, V\} x\bar{y} = (\{U, V\} x, y)_H = (Vx, Uy)_{\mathfrak{H}} = x\bar{y}(v, u)_{\mathfrak{H}}$). Итак, можно считать, что $L(C_1, \mathfrak{H})$ совпадает с $\mathfrak{H}$.

2. Некоторые геометрические факты в псевдогильбертовом пространстве. Покажем, что в $L(H, \mathfrak{H})$ возможны некоторые конструкции, аналогичные построениям в обычном гильбертовом пространстве. Будем называть систему (конечную или нет*) $E^{(0)}, E^{(1)}, \ldots \in L(H, \mathfrak{H})$ псевдоортонормированной, если

$$\{E^{(j)}, E^{(k)}\} = \delta_{jk} E \quad (j, k = 0, 1, \ldots) \tag{2.3}$$

(E — единичный оператор в H). Существенным отличием псевдогильбертова пространства от гильбертова является то, что не всякую последовательность псевдовекторов можно «ортогонализировать» (см. об этом ниже). Пока мы будем предполагать, что некоторая псевдоортонормированная система $E^{(0)}, E^{(1)}, \ldots$ задана.

* Для определенности ниже считаем, что система бесконечна.

Теорема 2.1. *Если для некоторого $U \in L(H, \mathfrak{H})$ справедливо сходящееся в $L(H, \mathfrak{H})$ разложение*

$$U = \sum_{j=0}^{\infty} E^{(j)} U_j \quad (U_j \in L(H, H)), \tag{2.4}$$

то сходится следующий ряд в смысле слабой сходимости в $L(H, H)$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} U_j^* U_j = \{U, U\}.^* \tag{2.5}$$

Наоборот, если задана последовательность $U_0, U_1, \ldots \in L(H. H)$, для которой сходится ряд (2.5), то сходится и ряд (2.4), причем для его суммы U справедливо равенство (2.5).

Доказательство. Пусть справедливо разложение (2.4), т. е. в $L(H, \mathfrak{H})$ $\sum_{j=0}^{n} E^{(j)} U_j \to U$. Тогда в смысле слабой сходимости в $L(H', H)$

---

* Заметим, что если ряд $\sum_{j=0}^{\infty} U_j^* U_j$ $(U_j \in L(H, H))$ сходится слабо, то в силу неотрицательности его слагаемых он сходится и сильно. Пусть имеется еще один слабо сходящийся ряд $\sum_{j=0}^{\infty} V_j^* V_j$ $(V_j \in L(H, H))$. Элементарно доказывается, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} U_j^* V_j$ сходится слабо. Более того, нетрудно показать. что *он сходится и сильно.* В самом деле, из свойств (2.2) псевдоскалярного произведения получаем

$$\{U, V\} = \frac{1}{4}[\{U+V, U+V\} - \{U-V, U-V\} + i\{Ui+V, Ui+V\} - i\{Ui-V, Ui-V\}]$$

$$(U, V \in L(H, \mathfrak{H});\ Ui = U(iE)). \tag{*}$$

Ряды $\sum_{j=0}^{\infty} (U_j \pm V_j)^* (U_j \pm V_j)$, $\sum_{j=0}^{\infty} (iU_j \pm V_j)^* (iU_j \pm V_j)$, очевидно, сходятся слабо, а значит, и сильно. Но тогда согласно (*), где положено $\{U, V\} = \sum_{j=0}^{\infty} U_j^* V_j$, и последний ряд сходится сильно. Это и требовалось показать.

Всюду ниже нам удобно говорить о слабой сходимости рядов указанного вида, но нужно иметь в виду, что в действительности имеет место их сильная сходимость.

$\sum_{j=0}^{n} U_j^* U_j = \left\{\sum_{j=0}^{n} E^{(j)} U_j, \sum_{j=0}^{n} E^{(j)} U_j\right\} \to \{U, U\}$, т. е. имеет место (2.5). Наоборот, пусть $U_0, U_1, \ldots \in L(H, H)$ таковы, что ряд в (2.5) слабо сходится, тогда при каждом $x \in H$ $\sum_{j=0}^{\infty} \| U_j x \|_H^2 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} U_j^* U_j x, x\right)_H < \infty$.

Отсюда следует, что последовательность $\sum_{j=0}^{n} E^{(j)} U_j$ фундаментальна в $L(H, \mathfrak{H})$: $\left(\left\{\sum_{j=n}^{m} E^{(j)} U_j, \sum_{j=n}^{m} E^{(j)} U_j\right\} x, x\right)_H = \sum_{j=n}^{m} \| U_j x \|_{H}^2 \underset{n,m\to\infty}{\to} 0 \ (x \in H)$. В силу полноты $L(H, \mathfrak{H})$ она сходится к $U \in L(H, \mathfrak{H})$, откуда и вытекает утверждение. Теорема доказана.

Умножая псевдоскалярно (2.4) слева на $E^{(k)}$ и пользуясь непрерывной зависимостью псевдоскалярного произведения от сомножителей, получим, что коэффициенты U_j в разложении (2.4), т. е. координаты U, определяются однозначно по формуле

$$U_j = \{E^{(j)}, U\} \quad (j = 0, 1, \ldots). \tag{2.6}$$

Легко также показать, что если и для $V \in L(H, \mathfrak{H})$ имеет место разложение типа (2.4), то $\{U, V\}$ подсчитывается посредством слабо сходящегося в $L(H, H)$ ряда

$$\{U, V\} = \sum_{j=0}^{\infty} U_j^* V_j. \tag{2.7}$$

Будем говорить, что пространство $L(H, \mathfrak{H})$ допускает псевдоортонормированный базис $E^{(0)}, E^{(1)}, \ldots$, если эта система псевдоортонормирована и для любого $U \in L(H, \mathfrak{H})$ справедливо разложение (2.4). Ясно, что в этом случае $L(H, \mathfrak{H})$ можно отождествить со всевозможными последовательностями $(U_0, U_1, \ldots) = U$ псевдоскаляров такими, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} U_j^* U_j$ слабо сходится в $L(H, H)$. Операции над U выглядят следующим образом: $(U+V)_j = U_j + V_j$, $(U\Lambda)_j = U_j \Lambda$ $(j = 0, 1, \ldots)$; $\{U, V\} = \sum_{j=0}^{\infty} U_j^* V_j$.

Пример. Пространства $l_2(H; [0, \infty))$ *и* $\mathbf{l}_2(H; [0, \infty))$. Эти пространства играют существенную роль как в общей теории псевдогильбертовых пространств, так и в их приложениях к разностным уравнениям. Обозначим $l_2(H; [0, \infty))$ ортогональную сумму бесконечной последовательности пространств H, т. е.

$$l_2(H; [0, \infty)) = H \oplus H \oplus \ldots .$$

Иными словами, вектором из $l_2(H; [0, \infty))$ служит последовательность $u = (u_0, u_1, \ldots)$ векторов $u_0, u_1, \ldots \in H$ такая, что $\sum_{j=0}^{\infty} \| u_j \|_H^2 < \infty$. При этом

$$(u + v)_j = u_j + v_j, \ (\lambda u)_j = \lambda u_j \ (j = 0, 1, \ldots); \ (u, v)_{l_2(H; [0, \infty))} = \sum_{j=0}^{\infty} (u_j, v_j)_H$$
$$(u, v \in l_2(H; [0, \infty)).$$

Определим псевдогильбертово пространство $\mathbf{l}_2(H; [0, \infty))$ равенством $\mathbf{l}_2(H; [0, \infty)) = L(H, l_2(H; [0, \infty)))$. Прежде всего заметим, что в нем существует псевдоортонормированный базис $E^{(j)} = \Delta^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots)$: обозначим через $\Delta^{(j)}$ непрерывное отображение H в $l_2(H; [0, \infty))$, задающееся соотношением $\Delta^{(j)}x = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)$, где x стоит на j-ом месте. Из (2.1) легко следует, что $\{\Delta^{(j)}, \Delta^{(k)}\} = \delta_{jk} E$ $(j, k = 0, 1, \ldots)$. Система $\Delta^{(0)}, \Delta^{(1)}, \ldots$ действительно будет базисом в $\mathbf{l}_2(H; [0, \infty))$: для каждого $U \in \mathbf{l}_2(H; [0, \infty))$ определим псевдоскаляры $U_j = \{\Delta^{(j)}, U\}$, тогда $\sum_{j=0}^{\infty} \Delta^{(j)} U_j = U$. В самом деле, нужно показать, что для каждого $x \in H$ в смысле сходимости по норме в $l_2(H; [0, \infty))$ $\sum_{j=0}^{n} \Delta^{(j)} U_j x \underset{n \to \infty}{\to} Ux$. Пусть $Ux = (u_0, u_1, \ldots) \in l_2(H; [0, \infty))$, тогда $U_j x = u_j$, так как при любом $y \in H$ согласно (2.1) имеем: $(U_j x, y)_H = (\{\Delta^{(j)}, U\} x, y)_H = (Ux, \Delta^{(j)} y)_{l_2(H; [0, \infty))} = (u_j, y)_H$. Таким образом, $\sum_{j=0}^{n} \Delta^{(j)} U_j x = (u_0, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots)$ и сходимость такой последовательности к вектору $(u_0, u_1, \ldots) = Ux$ очевидна.

Сказанное ранее показывает, что $\mathbf{l}_2(H; [0, \infty))$ можно определить «координатным» способом: элементами этого пространства служат последовательности ограниченных операторов в H $U = (U_0, U_1, \ldots)$ такие, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} U_j^* U_j$ слабо сходится в $L(H, H)$. Алгебраические операции в $\mathbf{l}_2(H; [0, \infty))$ и псевдоскалярное произведение определяются равенствами

$$(U + V)_j = U_j + V_j, \ (U\Lambda)_j = U_j \Lambda \ (j = 0, 1, \ldots); \ \{U, V\} = \sum_{j=0}^{\infty} U_j^* V_j$$
$$(U, V \in \mathbf{l}_2(H; [0, \infty)).$$

Итак, если пространство $\mathfrak{H}$ имеет вид $H \oplus H \oplus \ldots$, то в $L(H, \mathfrak{H}) = \mathrm{l}_2(H; [0, \infty))$ существует бесконечный псевдоортонормированный базис. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть в $L(H, \mathfrak{H})$ имеется псевдоортонормированный базис $E^{(0)}, E^{(1)}, \ldots$, тогда каждому вектору $u \in \mathfrak{H}$ можно поставить в соответствие последовательность векторов из H*

$$u_j = (E^{(j)})^* u \quad (j = 0, 1, \ldots) \tag{2.8}$$

такую, что имеет место сильно сходящееся в $\mathfrak{H}$ разложение

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} E^{(j)} u_j, \quad \sum_{j=0}^{\infty} (u_j, u_j)_H = (u, u)_{\mathfrak{H}} < \infty. \tag{2.9}$$

Наоборот, если последовательность $u_0, u_1, \ldots \in H$ такова, что второй ряд в (2.9) сходится, то ей отвечает $u \in \mathfrak{H}$ такое, что $(E^{(j)})^* u = u_j$. Иными словами, при предположении теоремы $\mathfrak{H} = H \oplus \oplus H \oplus \ldots = l_2(H; [0, \infty))$ и $L(H, \mathfrak{H}) = \mathrm{l}_2(H; [0, \infty))$.*

Доказательство. Применим равенство (2.4) к вектору $x \in H$: $Ux = \sum_{j=0}^{\infty} E^{(j)} U_j x$. Но $U_j = \{E^{(j)}, U\} = (E^{(j)})^* U$, поэтому $U_j x = (E^{(j)})^* Ux$. Таким образом, $U_j x$ определяется по вектору $u = Ux$ и не зависит от его представления в виде $Vy (V \in L(H, \mathfrak{H}), y \in H)$. Отсюда следует разложение u из (2.9) по u_j вида (2.8). Второе равенство в (2.9) вытекает непосредственно из (2.5) и (2.1).

Для доказательства второй части теоремы достаточно убедиться, что если $u_0, u_1, \ldots \in H$ таковы, что $\sum_{j=0}^{\infty} \| u_j \|_H^2 < \infty$, то при любом $x \in H$, $x \neq 0$, найдется последовательность $U_0, U_1, \ldots \in L(H, H)$, для которой ряд (2.5) сходится, такая, что $u_j = U_j x \, (j = 0, 1, \ldots)$. Обозначим V_j унитарный оператор в H, который переводит x в $\frac{\| x \|_H}{\| u_j \|_H} u_j$, тогда $U_j = \frac{\| u_j \|_H}{\| x \|_H} V_j$ переводит x в $u_j (j = 0, 1, \ldots)$. Вместе с тем для

---

* Точнее, $\mathfrak{H}$ изометрично $H \oplus H \oplus \ldots$. Для сокращения формулировок мы и дальше изометрию будем заменять равенством. При этом два псевдогильбертовы пространства $L(H, \mathfrak{H}')$ и $L(H, \mathfrak{H}'')$ называются изометричными, если $\mathfrak{H}'$ и $\mathfrak{H}''$ изометричны; псевдоскалярные произведения в этих пространствах на соответствующих псевдовекторах совпадают.

любого $y \in H$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \| U_j y \|_H^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\| u_j \|_H^2}{\| x \|_H^2} \| V_j y \|_H^2 = \frac{\| y \|_H^2}{\| x \|_H^2} \sum_{j=0}^{\infty} \| u_j \|_H^2 < \infty,$$

т. е. ряд (2.5) слабо сходится. Теорема доказана.

Подобно предыдущему можно определить при $N = 0, 1, \ldots$ пространство $l_2(H; [0, N]) = H \oplus \ldots \oplus H$ ($N + 1$ слагаемых) и затем построить $\mathrm{l}_2(H; [0, N]) = L(H, l_2(H; [0, N]))$. Как и выше, легко убедиться, что в $\mathrm{l}_2(H; [0, N])$ имеется псевдоортонормированный базис, состоящий из $N + 1$ псевдовекторов. Наоборот, если в $L(H, \mathfrak{H})$ имеется псевдоортонормированный базис, состоящий из $N + 1$ псевдовекторов, то $\mathfrak{H} = l_2(H; [0, N])$ и $L(H, \mathfrak{H}) = \mathrm{l}_2(H; [0, N])$.

Из всего сказанного легко усмотреть, что «почти для любых H и $\mathfrak{H}$» в $L(H, \mathfrak{H})$ существует псевдоортонормированный базис. Точнее, он существует в следующих (и только этих) случаях:

а) Размерности $d(\mathfrak{H})$ и $d(H)$ пространств $\mathfrak{H}$ и H конечны, причем $d(\mathfrak{H}) = kd(H)$ ($k = 1, 2, \ldots$). В этом случае базис состоит из k псевдовекторов.

б) Размерность $d(\mathfrak{H}) = \infty$. Базис в этом случае всегда существует, причем если $d(H) < \infty$, то он обязательно состоит из ∞ псевдовекторов. Если $d(H) = \infty$, то его можно построить с любым наперед заданным количеством $k = 1, 2, \ldots, \infty$ псевдовекторов.

Для доказательства заметим, что в этих случаях всегда можно написать представление $\mathfrak{H} = H \oplus H \oplus \ldots$ с соответствующим количеством k слагаемых. Это показывает, что $L(H, \mathfrak{H}) = \mathrm{l}_2(H; [0, k-1])$ и поэтому в $L(H, \mathfrak{H})$ существует базис из k псевдовекторов. Из теоремы 2.2 и аналогичного факта относительно $\mathrm{l}_2(H; [0, N])$ вытекает, что а) и б) исчерпывают возможные случаи существования базиса.

Перейдем к вопросу о существовании аналога ортогонального дополнения к подпространству. Множество $\mathbf{G} \subseteq L(H, \mathfrak{H})$ будем называть псевдолинейным, если из того, что $U, V \in \mathbf{G}$, вытекает: $U + V \in \mathbf{G}$, $U\Lambda \in \mathbf{G}$ ($\Lambda \in L(H, H)$). Замкнутое псевдолинейное множество называется псевдоподпространством. Совокупность $\hat{\mathbf{G}}$ таких $V \in L(H, \mathfrak{H})$, для которых $\{V, U\} = 0$ ($U \in \mathbf{G}$), очевидно, также образует псевдоподпространство — псевдоортогональное дополнение к $\mathbf{G}$. Если каждое $U \in L(H, \mathfrak{H})$ допускает разложение $U = V + W$, где $V \in \mathbf{G}$ и $w \in \hat{\mathbf{G}}$, то говорят, что $L(H, \mathfrak{H})$ разлагается в псевдоортогональную сумму $\mathbf{G}$ и $\hat{\mathbf{G}}$: $L(H, \mathfrak{H}) = \mathbf{G} \oplus \hat{\mathbf{G}}$.

Пусть $x \in H$, $x \neq 0$, положим $G = \mathbf{G}x$. Так как $\mathbf{G}$ вместе с каждым U содержит и любое $U\Lambda$, то G не зависит от x; ясно, что G —

линейное множество в $\mathfrak{H}$. Будем говорить, что $\mathbf{G}$ максимально, если G замкнуто и из того, что $Ux \in G$ $(U \in L(H, \mathfrak{H}))$ при всех $x \in H$, следует: $U \in \mathbf{G}$. Докажем простую теорему, существенное применение которой будет дано в п. 9 (лемма 2.4).

Теорема 2.3. *Пусть $\mathbf{G}$ — некоторое псевдоподпространство. Для того чтобы имело место разложение $L(H, \mathfrak{H}) = \mathbf{G} \oplus \hat{\mathbf{G}}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{G}$ было максимальным. В этом случае разложение $U = U_{\mathbf{G}} + U_{\hat{\mathbf{G}}}$ $(U \in L(H, \mathfrak{H})$, $U_{\mathbf{G}} \in \mathbf{G}$, $U_{\hat{\mathbf{G}}} \in \hat{\mathbf{G}})$ единственно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}$ максимально, рассмотрим разложение $\mathfrak{H} = G \oplus \hat{G}$, где $\hat{G}$ — ортогональное дополнение в $\mathfrak{H}$ к G. При $U \in L(H, \mathfrak{H})$ и $x \in H$ $Ux \in \mathfrak{H}$ и поэтому можно написать разложение $Ux = v_x + w_x$ $(v_x \in G, w_x \in \hat{G})$. Ясно, что соответствие $x \to v_x$ линейно и благодаря неравенству $\|v_x\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \|Ux\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \|U\| \, \|x\|_H$ непрерывно, поэтому $v_x = U_{\mathbf{G}} x$, где $U_{\mathbf{G}} \in L(H, \mathfrak{H})$. При каждом $x \in H$ $U_{\mathbf{G}} x = v_x \in G$ благодаря максимальности $\mathbf{G}$ $U_{\mathbf{G}} \in \mathbf{G}$. Полагая $U_{\hat{\mathbf{G}}} = U - U_{\mathbf{G}}$, получим для любого $V \in \mathbf{G}$ $(\{U_{\hat{\mathbf{G}}}, V\} y, x)_H = (Vy, U_{\hat{\mathbf{G}}} x)_{\mathfrak{H}} = (Vy, w_x)_{\mathfrak{H}} = 0$ $(x, y \in H)$, так как $w_x \in \hat{G}$, а $Vy \in G$. Таким образом, $U_{\hat{\mathbf{G}}} \perp \mathbf{G}$, т. е. $U_{\hat{\mathbf{G}}} \in \hat{\mathbf{G}}$. Требуемое разложение установлено. Единственность его легко следует из единственности разложения $\mathfrak{H} = G \oplus \hat{G}$.

Докажем необходимость. Пусть любое $U \in L(H, \mathfrak{H})$ можно разложить: $U = U_{\mathbf{G}} + U_{\hat{\mathbf{G}}}$ $(U_{\mathbf{G}} \in \mathbf{G}, U_{\hat{\mathbf{G}}} \in \hat{\mathbf{G}})$. Тогда $Ux = U_{\mathbf{G}} x + U_{\hat{\mathbf{G}}} x$ $(x \in H, U_{\mathbf{G}} x \in G, U_{\hat{\mathbf{G}}} x \in \hat{G})$; это равенство можно понимать, как разложение Ux по G и $\hat{G}$. Так как Ux при изменении U и x пробегает все $\mathfrak{H}$, то по G и $\hat{G}$ разлагается любой вектор из $\mathfrak{H}$. Это доказывает замкнутость G. Пусть теперь $U \in L(H, \mathfrak{H})$ таково, что при любом $x \in H$ $Ux \in G$. Имеем разложение $U = U_{\mathbf{G}} + U_{\hat{\mathbf{G}}}$. Если $U_{\hat{\mathbf{G}}} \neq 0$, то найдется такое $x \in H$, что $0 \neq U_{\hat{\mathbf{G}}} x \,\overline{\in}\, G$, поэтому $Ux = U_{\mathbf{G}} x + U_{\hat{\mathbf{G}}} x \,\overline{\in}\, G$; это абсурдно. Итак, $U = U_{\mathbf{G}} \in \mathbf{G}$. Теорема доказана.

В заключение этого пункта покажем, что не всякую систему псевдовекторов $W^{(0)}, W^{(1)}, \ldots$ можно «псевдоортогонализировать», т. е. заменить псевдоортонормированной. В самом деле, для возможности нормировки $W^{(0)} \in L(H, \mathfrak{H})$ необходимо и достаточно, чтобы $\{W^{(0)}, W^{(0)}\}^{-1}$ существовал; при этом под нормировкой понимается построение такого $E^{(0)} \in L(H, \mathfrak{H})$, что $\{E^{(0)}, E^{(0)}\} = E$ и $W^{(0)}L(H, H) = E^{(0)}L(H, H)$. Это следует из того, что если $\{W^{(0)}, W^{(0)}\}^{-1}$ существует, то можно положить $E^{(0)} = W^{(0)}\sqrt{\{W^{(0)}, W^{(0)}\}^{-1}}$. Наоборот, если $E^{(0)}$ существует, то должно найтись $\Lambda \in L(H, H)$ такое, что $W^{(0)}\Lambda = E^{(0)}$. Поэтому $\Lambda^* \{W^{(0)}, W^{(0)}\} \Lambda = E$, а это возможно лишь тогда, когда $\{W^{(0)}, W^{(0)}\}^{-1}$ существует.

Пусть $W^{(0)}$ можно нормировать, заменив его на $E^{(0)}$. Следующий шаг нашего процесса заключается в подборе такого $\Lambda \in L(H, H)$, чтобы $W^{(1)} + E^{(0)}\Lambda$ был псевдоортогонален $E^{(0)}$. Легко подсчитать, что $\Lambda = -\{E^{(0)}, W^{(1)}\}$. Таким образом, теперь нужно нормировать псевдовектор $W^{(1)} - E^{(0)}\{E^{(0)}, W^{(1)}\}$. Вместе с тем $\{W^{(1)} - E^{(0)}\{E^{(0)}, W^{(1)}\}, W^{(1)} - E^{(0)}\{E^{(0)}, W^{(1)}\}\} = \{W^{(1)}, W^{(1)}\} - \{E^{(0)}, W^{(1)}\}^* \{E^{(0)}, W^{(1)}\} = (W^{(1)})^*W^{(1)} - (W^{(1)})^*E^{(0)}(E^{(0)})^*W^{(1)}$

и возможна ситуация, когда последний оператор отличен от нуля, но необратим. На этом процесс псевдоортогонализации прерывается. В некоторых случаях можно гарантировать невозникновение такой ситуации и тогда процесс можно продолжать. Пример см. в п. 8.

3. Операторные интегралы и пространства типа L_2. Прежде всего мы приведем простое обобщение понятия интеграла Стилтьеса — Римана. Доказательства проводятся при помощи обычных для теории интегрирования рассуждений и излагаться не будут. Ниже по-прежнему H — сепарабельное гильбертово пространство.

Рассмотрим операторную функцию $\mathrm{T}(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, значениями которой служат ограниченные операторы в H. Будем предполагать, что она слабо ограниченной вариации, т. е. что при любых $x, y \in H$ функция $f(\lambda) = (\mathrm{T}(\lambda)x, y)_H$ ограниченной вариации. Во всем дальнейшем $\mathrm{T}(\lambda)$ считается нормированной: в смысле слабой сходимости $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathrm{T}(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0 - 0} \mathrm{T}(\lambda) = \mathrm{T}(\lambda_0)$ $(\lambda_0 \in (-\infty, \infty))$. Пусть Δ — конечный или бесконечный интервал оси $(-\infty, \infty)$, $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ — некоторые функции на Δ, значения которых — ограниченные операторы в H. Составим суммы Стилтьеса — Римана $\sum\limits_{\alpha=1}^{N} F(\lambda_\alpha)\mathrm{T}(\Delta_\alpha)G(\lambda_\alpha)$, где $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ — конечное разбиение Δ, $\lambda_\alpha \in \Delta_\alpha$; Δ_α вида $[a, b)$ и $\mathrm{T}(\Delta_\alpha) = \mathrm{T}(b) - \mathrm{T}(a)$. Если эти суммы при продолжении разбиения слабо сходятся к некоторому пределу, не зависящему от способа разбиения и выбора точек $\lambda_\alpha \in \Delta_\alpha$, то говорят, что существует интеграл

$$\int\limits_{\Delta} F(\lambda)\, d\mathrm{T}(\lambda)\, G(\lambda) = \lim \sum_{\alpha=1}^{N} F(\lambda_\alpha)\mathrm{T}(\Delta_\alpha)G(\lambda_\alpha). \tag{2.10}$$

Если одна из функций $F(\lambda)$ или $G(\lambda)$ тождественно равна E, мы получим интегралы вида $\int\limits_{\Delta} dT(\lambda) G(\lambda)$ или $\int\limits_{\Delta} F(\lambda)\, dT(\lambda)$.

Нетрудно показать, что если для $T(\lambda)$ все интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m \, |d(T(\lambda)x, y)_H| \quad (x, y \in H;\ m = 0, 1, \ldots) \tag{2.11}$$

сходятся, то интеграл (2.10) существует для любых Δ и операторных полиномов $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$, т. е. операторных функций вида $\lambda^n C_n + \ldots + C_0$, где C_j — ограниченные операторы в H.

Из определения интеграла (2.10) немедленно вытекают обычные свойства интегралов, а также равенства

$$\Big(\int\limits_{\Delta} dT(\lambda)x, y\Big)_H = \int\limits_{\Delta} d(T(\lambda)x, y)_H, \quad \int\limits_{\Delta} F(\lambda)\, d\Big(\int\limits_{-\infty}^{\lambda} dT(\mu) G(\mu)\Big) =$$

$$= \int\limits_{\Delta} F(\lambda)\, dT(\lambda) G(\lambda), \quad \Big[\int\limits_{\Delta} F(\lambda)\, dT(\lambda) G(\lambda)\Big]^* = \int\limits_{\Delta} G^*(\lambda)\, dT^*(\lambda) F^*(\lambda). \tag{2.12}$$

Аналогично (2.10) можно определить интегрирование вектор-функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ со значениями в H:

$$\int\limits_{\Delta} (dT(\lambda) g(\lambda), f(\lambda))_H = \lim \sum_{\alpha=1}^{N} (T(\Delta_\alpha) g(\lambda_\alpha), f(\lambda_\alpha))_H. \tag{2.13}$$

Если существуют интегралы (2.11), то для любых векторных полиномов (т. е. функций вида $\lambda^n c_n + \ldots + c_0$, $c_j \in H$) интеграл (2.13) существует. Отметим, что

$$\Big(\int\limits_{\Delta} F(\lambda)\, dT(\lambda) G(\lambda) x, y\Big)_H = \int\limits_{\Delta} (dT(\lambda) G(\lambda) x, F^*(\lambda) y)_H \quad (x, y \in H). \tag{2.14}$$

Ясны также определения и свойства следующего интеграла (lim понимается в смысле слабой сходимости в H):

$$\int\limits_{\Delta} F(\lambda)\, dT(\lambda) g(\lambda) = \lim \sum_{\alpha=1}^{N} F(\lambda_\alpha) T(\Delta_\alpha) g(\lambda_\alpha). \tag{2.15}$$

В дальнейшем мы используем одно естественное обобщение пространства $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$. Рассмотрим операторную функцию $T(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, значения которой — равномерно по λ ограниченные операторы в H, причем $(T(\Delta)x, x)_H \geqslant 0$ $(x \in H)$, т. е. неотрицательную конечную операторную меру $dT(\lambda)$; $T([a, b)) = T(b) - T(a)$*. Ясно, что такая $T(\lambda)$ будет иметь слабо ограниченную вариацию. Обозначим $C_{00}(H; (-\infty, \infty))$ совокупность всех сильно непрерывных финитных вектор-функций $f(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, значения каждой из которых расположены в конечномерном зависящем от функции подпространства пространства H. Для $f, g \in C_{00}(H; (-\infty, \infty))$ определим скалярное произведение равенством

$$(f, g)_{L_2(H;(-\infty,\infty),dT(\lambda))} = \int_{-\infty}^{\infty} (dT(\lambda) f(\lambda), g(\lambda))_H; \tag{2.16}$$

легко видеть, что этот интеграл существует. Отождествляя с нулем те f, для которых $(f, f)_{L_2(H;(-\infty,\infty),dT(\lambda))} = 0$, а затем производя пополнение, получим некоторое полное сепарабельное гильбертово пространство. Его мы обозначим $L_2(H; (-\infty, \infty), dT(\lambda))$.

Природа элементов из $L_2(H; (-\infty, \infty), dT(\lambda))$ нас не будет интересовать, заметим лишь, что она может быть весьма сложной. Так, в простейшем случае, когда $T(\lambda) = 0$ $(\lambda \leqslant 0)$ и $T(\lambda) = K$ $(\lambda > 0)$, где K — ограниченный неотрицательный оператор в H. скалярное произведение (2.16) вырождается в $(f, g)_{L_2(H;\,(-\infty,\infty),\,dT(\lambda))} = (Kf(0), g(0))_H$. В результате пополнения последнее скалярное произведение может привести к обобщенным векторам (см. стр. 81), поэтому элементы пространства $L_2(H; (-\infty, \infty), dT(\lambda))$ не будут, вообще говоря, вектор-функциями со значениями в H. Вместе с тем нетрудно показать, что если вектор-функция $f(\lambda)$ сильно непрерывна на $(-\infty, \infty)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} (dT(\lambda)f(\lambda), f(\lambda))_H < \infty$, то $f \in L_2(H; (-\infty, \infty), dT(\lambda))$. Скалярное произведение в $L_2(H; (-\infty, \infty), dT(\lambda))$ двух таких вектор-функций равно интегралу $\int_{-\infty}^{\infty} (dT(\lambda)f(\lambda), g(\lambda))_H$, т. е. сохраняется формула (2.16).

Пространство $\mathbf{L}_2(H; (-\infty, \infty), dT(\lambda))$ определим по аналогии с $\mathbf{l}_2(H; [0, \infty))$ как $L(H, L_2(H; (-\infty, \infty), dT(\lambda)))$. На выяснении структуры этого пространства мы останавливаться не будем, заметим лишь что благодаря сказанному на стр. 561 в нем возможно построение псевдоортонормированных базисов; вместе с тем псевдоортогонализацию системы псевдовекторов проводить, вообще говоря, нельзя. Укажем некоторые элементы пространства $\mathbf{L}_2(H; (-\infty, \infty), dT(\lambda))$. Пусть силь-

* О введенной ранее $dT(\lambda)$ можно говорить, что задана «незнакопостоянная» операторная мера слабо ограниченной вариации. В случае конечномерного H введенные меры естественно называть также матричными.

но непрерывная по норме операторов операторная функция $F(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ со значениями в $L(H, H)$ такова, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda)\, d\mathrm{T}(\lambda) F(\lambda)$ существует. Тогда согласно (2.12) для каждого $x \in H$ $\int_{-\infty}^{\infty} (d\mathrm{T}(\lambda) F(\lambda) x, F(\lambda) x)_H < \infty$, т. е. $F(\lambda) x \in L_2(H;\ (-\infty, \infty),$ $d\mathrm{T}(\lambda))$; очевидно, $\| F(\lambda) x \|^2_{L_2(H;(-\infty,\infty), d\mathrm{T}(\lambda))} \leqslant \left\| \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda)\, d\mathrm{T}(\lambda) F(\lambda) \right\| \| x \|^2_H$. Таким образом, оператор $x \to F(\lambda) x$ непрерывно переводит все H в $L_2(H; (-\infty, \infty), d\mathrm{T}(\lambda))$, т. е.

$$F(\lambda) \in L(H, L_2(H;\ (-\infty, \infty), d\mathrm{T}(\lambda)) = \mathbf{L}_2(H; (-\infty, \infty), d\mathrm{T}(\lambda)).$$

Из (2.1), (2.12) и (2.14) вытекает, что псевдоскалярное произведение двух подобных операторных функций записывается в виде:

$$\{F, G\} = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda)\, d\mathrm{T}(\lambda)\, G(\lambda) \tag{2.17}$$

(существование этого интеграла легко установить). Нетрудно доказать, что рассматриваемые $F(\lambda)$ образуют плотное множество в $\mathbf{L}_2(H;\ (-\infty, \infty);\ d\mathrm{T}(\lambda))$.

Предлагаем читателю видоизменить построения этого пункта для случая $\mathrm{T}(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, имеющей локально слабо ограниченную вариацию (т. е. эта функция имеет слабо ограниченную вариацию на любом конечном интервале $(-N, N)$).

4. Операторы в псевдогильбертовом пространстве. Рассмотрим некоторое псевдогильбертово пространство $L(H, \mathfrak{H})$ и оператор $\mathbf{A}$, действующий в нем и определенный на всем $L(H, \mathfrak{H})$. Такой оператор назовем псевдолинейным, если $\mathbf{A}(U + V) = \mathbf{A}U + \mathbf{A}V$, $\mathbf{A}(U\Lambda) = (\mathbf{A}U)\Lambda$ $(U, V \in L(H, \mathfrak{H});\ \ \Lambda \in L(H, H))$, и непрерывным, если он непрерывен в топологии $L(H, \mathfrak{H})$. Предположим, что в $L(H, \mathfrak{H})$ выбран псевдоортонормированный базис $E^{(0)}, E^{(1)}, \ldots$. Тогда каждый псевдолинейный непрерывный оператор $\mathbf{A}$ в $L(H, \mathfrak{H})$ допускает матричное представление:

$$(\mathbf{A}U)_j = \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} U_k, \quad A_{jk} = \{E^{(j)}, \mathbf{A}E^{(k)}\} \in L(H, H) \quad (j, k = 0, 1, \ldots) \tag{2.18}$$

(V_j — координаты V в базисе $E^{(0)}, E^{(1)}, \ldots$, вычисляемые согласно (2.6); ряд (2.18) сходится в смысле слабой сходимости в $L(H, H)$).

В самом деле, благодаря непрерывности $\mathbf{A}$ имеем: $\mathbf{A}U = \mathbf{A}\left(\sum_{k=0}^{\infty} E^{(k)}U_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{A}E^{(k)})U_k$. Отсюда $(\mathbf{A}U)_j = \{E^{(j)}, \mathbf{A}U\} = \left\{E^{(j)}, \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{A}E^{(k)})U_k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\{E^{(j)}, \mathbf{A}E^{(k)}\}U_k$, что и требовалось.

Очевидно и обратное: соотношение (2.18) с произвольной матрицей $A_{jk} \in L(H, H)$ $(j, k = 0, 1, \ldots)$ определяет псевдолинейный непрерывный оператор в $L(H, \mathfrak{H})$, если только эта матрица такова, что соответствие $U \to \mathbf{A}U$ определено на всем $L(H, \mathfrak{H})$ и непрерывно.

Каждый линейный непрерывный оператор A в $\mathfrak{H}$ порождает естественным образом псевдолинейный непрерывный оператор $\mathbf{A}$ в $L(H, \mathfrak{H})$: $(\mathbf{A}U)x = A(Ux)$ $(U \in L(H, \mathfrak{H}),\ x \in H)$ (ясно, что A восстанавливается по $\mathbf{A}$ не всегда). Матричное представление (2.18) влечет аналогичное представление для A: будем записывать векторы $v \in \mathfrak{H}$ при помощи координат $v_0, v_1, \ldots \in H$ в базисе $E^{(j)}$ (см. (2.8)). Тогда справедливо разложение

$$(Au)_j = \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk}u_k,\quad A_{jk} = \{E^{(j)}, \mathbf{A}E^{(k)}\} \in L(H, H) \tag{2.19}$$

$$(u \in \mathfrak{H};\ j, k = 0, 1, \ldots)$$

(ряд сходится сильно в H). Действительно, справедливы равенства

$$U_jx = (Ux)_j,\quad (\mathbf{A}U)_jx = (A(Ux))_j\ (x \in H;\ U \in L(H, \mathfrak{H});\ j = 0, 1, \ldots); \tag{2.20}$$

первое из них вытекает из (2.8) и фактически было установлено на стр. 560, а второе следует из первого: $(\mathbf{A}U)_jx = ((\mathbf{A}U)x)_j = (A(Ux))_j$. Учитывая (2.20) и применяя равенство (2.18) к $x \in H$, придем к (2.19), записанному для $u = Ux$. Но при $x \neq 0$ векторы Ux, очевидно, пробегают все $\mathfrak{H}$; это показывает, что (2.19) справедливо при любом $u \in \mathfrak{H}$. Утверждение доказано.

Если оператор A самосопряжен в $\mathfrak{H}$, то для $\mathbf{A}$ справедливы соотношения

$$\{\mathbf{A}U, V\} = \{U, \mathbf{A}V\}\ (U, V \in L(H, \mathfrak{H})),\quad A_{jk} = A_{kj}^{*}\ (j, k = 0, 1, \ldots). \tag{2.21}$$

Действительно, для любых $x, y \in H$ в силу (2.1)

$$(\{\mathbf{A}U, V\}x, y)_H = (Vx, (\mathbf{A}U)y)_{\mathfrak{H}} = (Vx, A(Uy))_{\mathfrak{H}} = (A(Vx), Uy)_{\mathfrak{H}} =$$
$$= ((\mathbf{A}V)x, Uy)_{\mathfrak{H}} = (\{U, \mathbf{A}V\}x, y)_H,$$

откуда и вытекает первое из равенств (2.21). Второе получаем из первого, если положить $U = E^{(j)}$, $V = E^{(k)}$.

До сих пор шла речь только о непрерывных операторах в $L(H, \mathfrak{H})$, скажем теперь несколько слов и о ненепрерывных операторах. Пусть $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$ — некоторое псевдолинейное множество в $L(H, \mathfrak{H})$, оператор $\mathbf{A}$, определенный на $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$, естественно назвать псевдолинейным, если $\mathbf{A}(U+V) = \mathbf{A}U + \mathbf{A}V$, $\mathbf{A}(U\Lambda) = (\mathbf{A}U)\Lambda$ $(U, V \in L(H, \mathfrak{H});\ \Lambda \in L(H, H))$. По линейному оператору A в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}(A)$ можно построить псевдолинейный оператор в $L(H, \mathfrak{H})$: в качестве $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$ берем совокупность всех $U \in L(H, \mathfrak{H})$ таких, что $Ux \in \mathfrak{D}(A)$ при любом $x \in H$ и полагаем $(\mathbf{A}U)x = A(Ux)$ $(U \in \mathfrak{D}(\mathbf{A}), x \in H)$.

Приведем полезный пример. Определим в $L_2(H; (-\infty, \infty), d\mathrm{T}(\lambda))$ оператор умножения A на λ следующим образом: зададим его сперва посредством соотношения $f(\lambda) \to \lambda f(\lambda)$ на совокупности $C_{00}(H; (-\infty, \infty))$ описанных на стр. 565 вектор-функций, а затем замкнем. Полученный оператор, очевидно, эрмитов; более того, он самосопряжен. Достаточно показать, что $(A - zE)C_{00}(H; (-\infty, \infty))$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$ плотно в $L_2(H; (-\infty, \infty), d\mathrm{T}(\lambda))$. Пусть $f \in C_{00}(H; (-\infty, \infty))$, тогда и $g(\lambda) = \dfrac{f(\lambda)}{\lambda - z} \in C_{00}(H; (-\infty, \infty))$, причем $(A - zE)g = f$. Иными словами, $C_{00}(H; (-\infty, \infty)) \subseteq (A - zE)C_{00}(H; (-\infty, \infty))$, что и доказывает плотность последнего множества в $L_2(H; (-\infty, \infty), dT(\lambda))$.

Построим по A оператор $\mathbf{A}$ в $\mathbf{L}_2(H; (-\infty, \infty), d\mathrm{T}(\lambda))$, его естественно назвать псевдолинейным оператором умножения на λ в $\mathbf{L}_2(H; (-\infty, \infty), d\mathrm{T}(\lambda))$. Легко видеть, что непрерывные по норме операторов в H финитные функции $U(\lambda)$ входят в $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$ и $(\mathbf{A}U)(\lambda) = \lambda U(\lambda)$.

5. Разностные выражения и операторы. Рассмотрим разностное выражение

$$(Lu)_j = A_{j-1}u_{j-1} + A_j u_{j+1} + B_j u_j \quad (j = 0, 1, \ldots), \tag{2.22}$$

где $u_j \in H$, а A_j, B_j — ограниченные самосопряженные операторы в H, причем предполагается, что A_j имеют ограниченные обратные*. По (2.22) можно построить разностное выражение $\boldsymbol{L}$, действующее на последовательности ограниченных операторов в H:

$$(\boldsymbol{L}U)_j = A_{j-1}U_{j-1} + A_j U_{j+1} + B_j U_j \quad (j = 0, 1, \ldots). \tag{2.23}$$

Как в (2.22), так и в (2.23) при подсчете $(Lu)_0$ или $(\boldsymbol{L}U)_0$ всегда считается, что $u_{-1} = 0$ или $U_{-1} = 0$.

Легко убедиться в справедливости следующих формул Грина (ср. (1.4)):

* В дальнейшем можно было бы рассматривать и более общее разностное выражение вида $(Lu)_j = A^*_{j-1} u_{j-1} + A_j u_{j+1} + B_j u_j$ $(j = 0, 1, \ldots)$, где A_j и B_j — ограниченные операторы в H, причем A_j^{-1} существуют, а B_j — самосопряжены.

$$\sum_{j=k}^{l}[(u_j,(Lv)_j)_H-((Lu)_j,v_j)_H]=((A_lu_l,v_{l+1})_H-(A_lu_{l+1},v_l)_H)-$$
$$-((A_{k-1}u_{k-1},v_k)_H-(A_{k-1}u_k,v_{k-1})_H), \tag{2.24}$$

$$\sum_{j=k}^{l}[(LU)_j^*V_j-U_j^*(LV)_j]=(U_{l+1}^*A_lV_l-U_l^*A_lV_{l+1})-(U_k^*A_{k-1}V_{k-1}-$$
$$-U_{k-1}^*A_{k-1}V_k). \tag{2.25}$$

Построим по L оператор L в $l_2(H;[0,\infty))=H_0$. Для этого положим на финитных последовательностях u (совокупность которых обозначим $l_{2,0}(H;[0,\infty))$) $(\mathrm{L}'u)_j=(Lu)_j$; в силу (2.24) этот оператор эрмитов, определим L как замыкание L'. Оператор L эрмитов, но, вообще говоря, не самосопряжен. Подобно сказанному на стр. 507 легко доказать, что *область определения сопряженного оператора* L^* *состоит из всех тех* $v\in l_2(H;[0,\infty))$, *для которых* $Lv\in l_2(H;[0,\infty))$, *причем* $(\mathrm{L}^*v)_j=(Lv)_j$ $(j=0,1,\ldots)$. На вопросах самосопряженности оператора L мы остановимся несколько позже, а сейчас перейдем непосредственно к построению разложения по собственным функциям. Как обычно, будем обозначать $(\cdot,\cdot)_0=(\cdot,\cdot)_{H_0}$, $\|\cdot\|_0=\|\cdot\|_{H_0}$.

6. Полиномы первого рода и разложение по собственным функциям. По аналогии с § 1 введем операторные полиномы первого рода. Обозначим $P_j(z)$ $(j=0,1,\ldots)$ решение задачи Коши $(LU)_j=zU_j$ $(j=0,1,\ldots;\ U_{-1}=0, U_0=E)$. Последовательно определяя $U_1,U_2,\ldots$, найдем

$$P_0(z)=E,\ P_1(z)=A_0^{-1}(zE-B_0),\quad P_2(z)=A_1^{-1}[(zE-B_1)P_1(z)-A_0],\ldots \tag{2.26}$$

Таким образом, $P_j(z)$ имеют вид операторных полиномов степени j. Старший коэффициент C_j у $P_j(z)$, т. е. коэффициент при z^j, как легко понять из (2.26), имеет вид

$$C_j=A_{j-1}^{-1}\ldots A_0^{-1}\qquad (j=1,2,\ldots). \tag{2.27}$$

Рассмотрим финитные последовательности из $\mathrm{l}_2(H;[0,\infty))$, их совокупность обозначим $\mathrm{l}_{2,0}(H;[0,\infty))$. По аналогии с (1.22) введем преобразование Фурье псевдовектора $U\in\mathrm{l}_{2,0}(H;[0,\infty))$, полагая

$$\widetilde{U}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}P_j^*(\bar{z})U_j; \tag{2.28}$$

$\widetilde{U}(z)$ — некоторый операторный полином от z.

Пусть E_λ, вообще говоря, обобщенное разложение единицы, отвечающее введенному в п. 5 оператору L; E_λ — соответствующий согласно сказанному на стр. 567 оператор в $l_2(H;\ [0,\ \infty))$. По E_λ построим операторную спектральную меру $d\Sigma(\lambda)$, полагая

$$\Sigma(\lambda) = \{\Delta^{(0)},\ \mathbf{E}_\lambda\Delta^{(0)}\} = \{\mathbf{E}_\lambda\Delta^{(0)},\ \Delta^{(0)}\} \qquad (-\infty < \lambda < \infty), \quad (2.29)$$

где базис $\Delta^{(j)}$ имеет вид: $\Delta^{(j)} = (0,\ \ldots,\ 0,\ E,\ 0,\ \ldots)$ (E стоит на j-ом месте).

Рассмотрим некоторые свойства $\Sigma(\lambda)$ (и даже более общей функции), обеспечивающие возможность построения операторного интеграла.

Лемма 2.1. *При фиксированных $j,\ k = 0,\ 1,\ \ldots$ операторная функция*

$$\{\Delta^{(j)},\ \mathbf{E}_\lambda\Delta^{(k)}\} \qquad (-\infty < \lambda < \infty) \qquad (2.30)$$

имеет слабо ограниченную вариацию, причем все интегралы (2.11) *для нее сходятся. При $j = k$ эта функция неубывающая.*

Доказательство. При любых $j,\ k = 0, 1,\ \ldots$ и $x,\ y \in H$ благодаря неотрицательности $E(\Delta)$ имеем

$$|(\{\Delta^{(j)},\ \mathbf{E}(\Delta)\,\Delta^{(k)}\}\,x,\ y)_H|^2 = |((\mathbf{E}(\Delta)\,\Delta^{(k)})\,x,\ \Delta^{(j)}y)_0|^2 =$$
$$= |(E(\Delta)(\Delta^{(k)}x),\ \Delta^{(j)}y)_0|^2 \leqslant (E(\Delta)(\Delta^{(k)}x),\ \Delta^{(k)}x)_0\,(E(\Delta)(\Delta^{(j)}y),\ \Delta^{(j)}y)_0 =$$
$$= (\{\Delta^{(k)},\ \mathbf{E}(\Delta)\,\Delta^{(k)}\}\,x,\ x)_H\,(\{\Delta^{(j)},\ \mathbf{E}(\Delta)\,\Delta^{(j)}\}\,y,\ y)_H. \qquad (2.31)$$

Поэтому для разбиения $\{\Delta_1,\ \ldots,\ \Delta_N\}$ оси $(-\infty,\ \infty)$ на интервалы можем написать

$$\sum_{\alpha=1}^{N} |(\{\Delta^{(j)},\ \mathbf{E}(\Delta_\alpha)\,\Delta^{(k)}\}\,x,\ y)_H| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{N} (\{\Delta^{(k)},\ \mathbf{E}(\Delta_\alpha)\,\Delta^{(k)}\}\,x,\ x)_H^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times (\{\Delta^{(j)},\ \mathbf{E}(\Delta_\alpha)\,\Delta^{(j)}\}\,y,\ y)_H^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{\alpha=1}^{N} (\{\Delta^{(k)},\ \mathbf{E}(\Delta_\alpha)\,\Delta^{(k)}\}\,x,\ x)_H\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(\sum_{\alpha=1}^{N} (\{\Delta^{(j)},\ \mathbf{E}(\Delta_\alpha)\,\Delta^{(j)}\}\,y,\ y)_H\right)^{\frac{1}{2}} = \|\Delta^{(k)}x\|_0\,\|\Delta^{(j)}y\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|_H\,\|y\|_H \quad (x,\ y \in H). \qquad (2.32)$$

Неравенство (2.32) и показывает слабую ограниченность вариации функции (2.30). Эта функция при $j = k$ неубывающая: для любого $x \in H$ имеем: $(\{\Delta^{(j)},\ \mathbf{E}(\Delta)\,\Delta^{(j)}\}\,x,\ x)_H = ((\mathbf{E}(\Delta)\,\Delta^{(j)})\,x,\ \Delta^{(j)}x)_0 = (\mathbf{E}(\Delta)\,(\Delta^{(j)}x),\ \Delta^{(j)}x)_0 \geqslant 0$.

Для доказательства сходимости интегралов (2.11) воспользуемся следующим общим замечанием: если обобщенная мера на оси $\omega(\Delta)$ допускает для любого Δ оценку $|\omega(\Delta)|^2 \leqslant \varrho_1(\Delta)\varrho_2(\Delta)$, где ϱ_j — обычные меры, то для любой непрерывной функции $f(\lambda)$ справедлива оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|\,|d\omega(\lambda)| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|\,d\varrho_1(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|\,d\varrho_2(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

(для доказательства (2.33) нужно перейти к интегральным суммам и применить неравенство Коши—Буняковского). Теперь благодаря (2.31) вопрос сводится к сходимости интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m d(\{\Delta^{(k)}, \mathrm{E}_\lambda \Delta^{(k)}\}\,x, x)_H$ $(x \in H)$. Ясно, что достаточно рассмотреть четное m. Для него имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m d(\{\Delta^{(k)}, \mathrm{E}_\lambda \Delta^{(k)}\}\,x, x)_H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d(E_\lambda(\Delta^{(k)}x), \Delta^{(k)}x)_0 =$$

$$= (\mathrm{L}^m(\Delta^{(k)}x), \Delta^{(k)}x)_0 < \infty,$$

так как $\Delta^{(k)}x$ — финитный вектор и поэтому он входит в область определения любой степени L. Итак, интегралы (2.11) сходятся. Лемма доказана.

Заметим, что, в частности, установлено неравенство (см. вывод (2.32))

$$\|\{\Delta^{(j)}, \mathrm{E}_\lambda \Delta^{(k)}\|\leqslant 1 \qquad (-\infty < \lambda < \infty;\ j, k = 0, 1, \ldots). \quad (2.34)$$

Теперь мы можем доказать центральную теорему спектральной теории выражений (2.22), обобщающую теорему 1.6.

Теорема 2.4. *Пусть E_λ — некоторое разложение единицы (обычное или обобщенное), отвечающее оператору* L *из п. 5,* E_λ *— соответствующий оператор в* $\mathrm{l}_2(H;\ [0, \infty))$. *Построим операторную спектральную меру* $d\Sigma(\lambda)$ *по формуле* (2.29). *Относительно* $d\Sigma(\lambda)$ *полиномы* $P_j^*(\lambda)$ *образуют псевдоортонормированную систему в пространстве* $\mathrm{L}_2(H;\ (-\infty, \infty),\ d\Sigma(\lambda))$, *т. е.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(\lambda)\,d\Sigma(\lambda)\,P_k^*(\lambda) = \delta_{jk}E \qquad (j, k = 0, 1, \ldots). \quad (2.35)$$

Равенство Парсеваля для финитных псевдовекторов $U, V \in \mathrm{l}_{2,0}(H;\ [0, \infty))$ *выглядит следующим образом:*

$$\{U, \mathrm{E}(\Delta) V\} = \int_\Delta \widetilde{U}^*(\lambda)\, d\Sigma(\lambda) \widetilde{V}(\lambda), \tag{2.36}$$

где их преобразование Фурье подсчитывается по формуле (2.28).

Доказательство теоремы может идти по одному из трех путей, проведенных на стр. 514—518. Наиболее простое доказательство получаем на втором пути; мы его сейчас изложим. Подобно лемме 1.2 нетрудно установить следующую лемму.

Лемма 2.2. *Предположим, что имеется последовательность операторных функций слабо ограниченной вариации* $F(\lambda) = (F_0(\lambda), F_1(\lambda), \ldots)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *таких, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m |d(F_j(\lambda) x, y)_H| < \infty \quad (x, y \in H;\ m = 0, 1, \ldots),$$

$$(LF(\lambda))_j = \int_{-\infty}^{\lambda} \mu dF_j(\mu) \tag{2.37}$$

$$(j = 0, 1, \ldots;\ F_{-1}(\lambda) = 0).$$

Тогда справедливо представление

$$F_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} P_j(\mu)\, dF_0(\mu) \qquad (j = 0, 1, \ldots). \tag{2.38}$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим при фиксированном k последовательность $F_j(\lambda) = \{\Delta^{(j)}, \mathrm{E}_\lambda \Delta^{(k)}\}$ $(j=0, 1, \ldots; -\infty < \lambda < \infty)$. Согласно лемме 2.1 эти функции удовлетворяют первому из условий (2.37). Они удовлетворяют и второму: при $x, y \in H$ имеем

$$((LF(\lambda))_j x, y)_H = (A_{j-1}\{\Delta^{(j-1)}, \mathrm{E}_\lambda \Delta^{(k)}\} x, y)_H + (A_j \{\Delta^{(j+1)}, \mathrm{E}_\lambda \Delta^{(k)}\} x, y)_H +$$
$$+ (B_j \{\Delta^{(j)}, \mathrm{E}_\lambda \Delta^{(k)}\} x, y)_H = (\{\Delta^{(j-1)}, \mathrm{E}_\lambda \Delta^{(k)}\} x, A^*_{j-1} y)_H +$$
$$+ \ldots = ((\mathrm{E}_\lambda \Delta^{(k)}) x, \Delta^{(j-1)} A^*_{j-1} y)_0 + \ldots = (E_\lambda (\Delta^{(k)} x), \Delta^{(j-1)} A^*_{j-1} y)_0 +$$
$$+ \ldots = ((E_\lambda (\Delta^{(k)} x))_{j-1}, A^*_{j-1} y)_H + \ldots = (A_{j-1} (E_\lambda (\Delta^{(k)} x))_{j-1}, y)_H +$$
$$+ \ldots = ((L[E_\lambda (\Delta^{(k)} x)])_j, y)_H = ((\mathrm{L} E_\lambda (\Delta^{(k)} x))_j, y)_H =$$
$$= \left(\left(\int_{-\infty}^{\lambda} \mu dE_\mu (\Delta^{(k)} x) \right)_j, y \right)_H = \int_{-\infty}^{\lambda} \mu d ((E_\mu (\Delta^{(k)} x))_j, y)_H =$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda} \mu d\left((\mathbf{E}_\mu \Delta^{(k)}) x, \Delta^{(j)} y\right)_0 = \int_{-\infty}^{\lambda} \mu d\left(\{\Delta^{(j)}, \mathbf{E}_\mu \Delta^{(k)}\} x, y\right)_H =$$

$$= \left(\left(\int_{-\infty}^{\lambda} \mu dF_j(\mu)\right) x, y\right)_H,$$

откуда и следует требуемое соотношение.

Применяя лемму 2.2, получим

$$\{\Delta^{(j)}, \mathbf{E}_\lambda \Delta^{(k)}\} = \int_{-\infty}^{\lambda} P_j(\mu)\, d\,\{\Delta^{(0)}, \mathbf{E}_\mu \Delta^{(k)}\} \qquad (j, k = 0, 1, \ldots). \tag{2.39}$$

При помощи (2.39) находим также

$$\{\Delta^{(j)}, \mathbf{E}_\lambda \Delta^{(k)}\} = \{\mathbf{E}_\lambda \Delta^{(k)}, \Delta^{(j)}\}^* = \{\Delta^{(k)}, \mathbf{E}_\lambda \Delta^{(j)}\}^* =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\lambda} P_k(\mu)\, d\,\{\Delta^{(0)}, \mathbf{E}_\mu \Delta^{(j)}\}\right)^* = \int_{-\infty}^{\lambda} d\,\{\Delta^{(0)}, \mathbf{E}_\mu \Delta^{(j)}\}^* P_k^*(\mu) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda} d\,\{\Delta^{(j)}, \mathbf{E}_\mu \Delta^{(0)}\} P_k^*(\mu)$$

$$(j, k = 0, 1, \ldots).$$

Пользуясь этим равенством, можем продолжить (2.39):

$$\{\Delta^{(j)}, \mathbf{E}_\lambda \Delta^{(k)}\} = \int_{-\infty}^{\lambda} P_j(\mu)\, d_\mu \left(\int_{-\infty}^{\mu} d\,\{\Delta^{(0)}, \mathbf{E}_\nu \Delta^{(0)}\} P_k^*(\nu)\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda} P_j(\mu)\, d\,\{\Delta^{(0)}, \mathbf{E}_\mu \Delta^{(0)}\} P_k^*(\mu);$$

$$\{\Delta^{(j)}, \mathbf{E}(\Delta) \Delta^{(k)}\} = \int_{\Delta} P_j(\lambda)\, d\,\{\Delta^{(0)}, \mathbf{E}_\lambda \Delta^{(0)}\} P_k^*(\lambda) \qquad (j, k = 0, 1, \ldots). \tag{2.40}$$

Полагая здесь $\Delta = (-\infty, \infty)$, придем к (2.35). Далее, при помощи разложений (2.18) ($E^{(j)} = \Delta^{(j)}$) находим для $U, V \in \mathrm{l}_{2,0}(H; [0, \infty))$

$$\{U, \mathbf{E}(\Delta) V\} = \sum_{j=0}^{\infty} U_j^* (\mathbf{E}(\Delta) V)_j = \sum_{j,k=0}^{\infty} U_j^* \int_{\Delta} P_j(\lambda)\, d\Sigma(\lambda) P_k^*(\lambda) V_k =$$

$$= \int_{\Delta} \widetilde{U}^*(\lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, \widetilde{V}(\lambda).$$

Соотношение (2.36), а вместе с ним и теорема, доказаны.

Из полученных результатов вытекает теория разложений по собственным функциям выражения (2.22) финитных векторов из $l_2(H; [0, \infty))$. Пусть $u \in l_{2,0}(H; [0, \infty))$, его преобразованием Фурье назовем векторную функцию

$$\widetilde{u}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j^*(\bar{z})\, u_j. \tag{2.41}$$

Очевидно, для $U \in \mathrm{l}_{2,0}(H; [0, \infty))$ и $x \in H$ имеем: $\widetilde{(Ux)}(z) = (\widetilde{U}(z))\, x$. Из (2.36) получаем:

$$\begin{aligned}((E(\Delta)(Vx), Uy)_0 &= ((\mathrm{E}(\Delta)V)\,x, Uy)_0 = (\{U, \mathrm{E}(\Delta)V\}\,x, y)_H = \\ &= \left(\left(\int_\Delta \widetilde{U}^*(\lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, \widetilde{V}(\lambda)\right) x, y\right)_H = \int_\Delta (d\Sigma(\lambda)\, \widetilde{V}(\lambda)\, x, \widetilde{U}(\lambda)\, y)_H = \\ &= \int_\Delta (d\Sigma(\lambda)\, \widetilde{(Vx)}(\lambda), \widetilde{(Uy)}(\lambda))_H. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Но когда $x \neq 0$ фиксировано, а U пробегает все $\mathrm{l}_2(H; [0, \infty))$, то Ux пробегает все $l_2(H; [0, \infty))$. Ясно, что при U, изменяющемся по всему $\mathrm{l}_{2,0}(H; [0, \infty))$, Ux будет пробегать все $l_{2,0}(H; [0, \infty))$. Таким образом, из (2.42) следует равенство Парсеваля в форме:

$$(E(\Delta)\, u, v)_0 = \int_\Delta (d\Sigma(\lambda)\, \widetilde{u}(\lambda), \widetilde{v}(\lambda))_H \qquad (u, v \in l_{2,0}(H; [0, \infty))) \tag{2.43}$$

7. **Изучение преобразований Фурье.** Перенесем на рассматриваемый случай основное содержание п. 4, § 1. Прежде всего покажем, что *преобразования Фурье всевозможных финитных псевдовекторов, т. е.* $\widetilde{\mathrm{l}_{2,0}(H; [0, \infty))}$, *описывают совокупность всех операторных полиномов* (и даже более точно: полиномы степени n получаются из псевдовекторов вида $U = (U_0, \ldots, U_n, 0, 0, \ldots)$). Действительно, каждый полином нулевой степени $R_0(z) = C_0$ можно рассматривать как преобразование Фурье псевдовектора $U = (C_0, 0, 0, \ldots)$. Пусть теперь утверждение доказано для полиномов $R_j(z)$ степени $j \leqslant n-1$, установим его для полинома $R_n(z)$ степени n. Имеем $R_n(z) = z^n C_n + R_{n-1}(z)$. Так как старший коэффициент $P_n(z)$ равен $A_{n-1}^{-1} \ldots A_0^{-1}$ (см. (2.27)), то, полагая $U_n = A_{n-1}^* \ldots A_0^* C_n$, получим:

$P^*_n(\bar{z})U_n = z^n C_n + Q_{n-1}(z)$. Пусть $(U_0, \ldots, U_{n-1}, 0, 0, \ldots)$ таков, что $\widetilde{(U_0, \ldots, U_{n-1}, 0, 0, \ldots)} = R_{n-1}(z) - Q_{n-1}(z)$. Тогда

$$\widetilde{(U_0, \ldots, U_{n-1}, U_n, 0, 0, \ldots)} = \widetilde{(U_0, \ldots, U_{n-1}, 0, 0, \ldots)} + P^*_n(\bar{z})U_n =$$
$$= R_{n-1}(z) + z^n C_n = R_n(z).$$

Утверждение доказано.

Иными словами: *всякий операторный полином $P(z)$ степени n допускает единственное разложение по полиномам $P_j(z)$*:

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} P^*_j(\bar{z})U_j, \qquad U_j = \int_{-\infty}^{\infty} P_j(\lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, P(\lambda) \tag{2.44}$$
$$(j = 0, \ldots, n)$$

(единственность и выражение для U_j следуют из (2.35)).

Так как при $x \neq 0$ $(\mathrm{l}_{2,0}(H; [0, \infty)))\, x = l_{2,0}(H; [0, \infty))$ и $\widetilde{(Ux)}(z) = (\widetilde{U}(z))\, x$, то приведенные выше факты показывают, что *преобразования Фурье всевозможных финитных векторов из $l_2(H; [0, \infty))$, т. е. $\widetilde{l_{2,0}(H; [0, \infty))}$, описывают совокупность всех векторных полиномов. Любой такой полином $p(z)$ степени n единственным образом представим в виде*

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} P^*_j(\bar{z})\, u_j, \qquad u_j = \int_{-\infty}^{\infty} P_j(\lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, p(\lambda) \qquad (j = 0, \ldots, n). \tag{2.45}$$

Точкой роста операторной функции $\mathrm{T}(\lambda)$ слабо ограниченной вариации называется точка роста хотя бы одной из скалярных функций $(\mathrm{T}(\lambda)x, y)_H$ $(x, y \in H)$. Так же, как и на стр. 518—519, доказывается, что *множество точек роста, отвечающих операторной спектральной мере $d\Sigma(\lambda)$, бесконечно*. Нетрудно также видеть, что *если для некоторого операторного полинома $P(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, P(\lambda) = 0$, то $P(\lambda) \equiv 0$*. Действительно, разложение (2.44) показывает, что $P(z) = \widetilde{U}(z)$, где $U = (U_0, \ldots, U_n, 0, 0, \ldots)$. Из равенства Парсеваля (2.36) (при $V = U$ и $\Delta = (-\infty, \infty)$) следует, что $\{U, U\} = 0$, т. е. $U_0 = \ldots = U_n = 0$. Так как представление (2.44)— это равенство при каждом z, то отсюда вытекает: $P(z) \equiv 0$. Подобным же образом при помощи (2.43) и (2.45) легко доказать, что *если для* *некоторого векторного полинома* $p(\lambda)$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(d\Sigma(\lambda)p(\lambda), p(\lambda))_H = 0$, *то* $p(\lambda)\equiv 0$.

Из сказанного следует, что отображение $U\to \widetilde{U}(\lambda)$ является взаимно однозначным соответствием между финитными последовательностями $U\in \mathrm{l}_{2,0}(H;[0,\infty))$ и операторными полиномами $\widetilde{U}(\lambda)$, понимаемыми как элементы пространства $\mathrm{L}_2(H;(-\infty,\infty), d\Sigma(\lambda))$. Это соответствие сохраняет псевдоскалярное произведение (см. (2.36), $\Delta=(-\infty,\infty)$):

$$\{U,V\}_{\mathrm{l}_2(H;[0,\infty))} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{U}^*(\lambda)\,d\Sigma(\lambda)\,\widetilde{V}(\lambda) = \{\widetilde{U}(\lambda),\widetilde{V}(\lambda)\}_{\mathrm{L}_2(H;(-\infty,\infty),d\Sigma(\lambda))} \tag{2.46}$$

$$(U, V\in \mathrm{l}_{2,0}(H;[0,\infty))).$$

Последнее равенство дает возможность подобно скалярному случаю продолжить отображение $U\to\widetilde{U}(\lambda)$ на все $\mathrm{l}_2(H;[0,\infty))$. Действительно, пусть $U=(U_0,U_1,\ldots)\in \mathrm{l}_2(H;[0,\infty))$, тогда $U^{(n)}=(U_0,\ldots,\ldots,U_n, 0, 0,\ldots)\in \mathrm{l}_{2,0}(H;[0,\infty))$ сходится при $n\to\infty$ в топологии $\mathrm{l}_2(H;[0,\infty))$ к U. Из (2.46) следует, что при каждом $x\in H$ $\widetilde{(U^{(n)}(\lambda))}x$ фундаментальна в $L_2(H;(-\infty,\infty),d\Sigma(\lambda))$, т. е. $\widetilde{U^{(n)}}(\lambda)$ фундаментальна в $\mathrm{L}_2(H;(-\infty,\infty),d\Sigma(\lambda)) = L(H, L_2(H;(-\infty,\infty), d\Sigma(\lambda)))$. В силу полноты последнего пространства $\widetilde{U^{(n)}}(\lambda)$ сходится к некоторому $\widetilde{U}(\lambda)$, которое и считается Фурье-образом U. Таким образом, после продолжения отображение $U\to\widetilde{U}(\lambda)$ переводит все $\mathrm{l}_2(H;[0,\infty))$ в $\widetilde{\mathrm{l}_2(H;[0,\infty))}$ — замыкание в $\mathrm{L}_2(H;(-\infty,\infty),d\Sigma(\lambda))$ совокупности $\widetilde{\mathrm{l}_{2,0}(H;[0,\infty))}$ всех операторных полиномов.

Ряд остальных результатов п. 4, § 1 может быть перенесен на операторный случай. Отметим только следующее обобщение теоремы 1.9.

Теорема 2.5. *Пусть $d\Sigma(\lambda)$ — неотрицательная операторная мера на оси $(-\infty,\infty)$, для которой существуют интегралы* (2.11). *Если для любых финитных последовательностей U, V и их преобразований Фурье $\widetilde{U}(\lambda)$, $\widetilde{V}(\lambda)$ (определенных посредством* (2.28)) *справедливо равенство Парсеваля* (2.46) (*или, что то же самое, соотношения псевдоортогональности* (2.35)), *то $d\Sigma(\lambda)$ является операторной спектральной мерой рассматриваемого разностного выражения L.*

Доказательство. Заметим, что (2.46) влечет равенство Парсеваля в форме

$$(u, v)_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (d\Sigma(\lambda) \tilde{u}(\lambda), \tilde{v}(\lambda))_H \qquad (u, v \in l_{2,0}(H; [0, \infty))), \quad (2.47)$$

где $\tilde{u}(\lambda)$ и $\tilde{v}(\lambda)$ подсчитываются посредством (2.41) (см. рассуждения на стр. 574). Таким образом, отображение $u \to \tilde{u}(\lambda)$ является взаимно однозначным соответствием между $l_{2,0}(H; [0, \infty))$ и совокупностью векторных полиномов $\widetilde{l_{2,0}(H; [0, \infty))}$, понимаемых как элементы $L_2(H; (-\infty, \infty), d\Sigma(\lambda))$. Продолжая по изометрии это отображение, мы его распространим на все $l_2(H, [0, \infty))$ и $\widetilde{l_2(H; [0, \infty))}$ —замыкание в $L_2(H; (-\infty, \infty), d\Sigma(\lambda))$ совокупности таких полиномов. В дальнейшем доказательство протекает так же, как и на стр. 522.

8. **Обратная задача спектрального анализа.** Покажем, каким образом по операторной спектральной мере можно восстановить разностное выражение (2.22). Пусть $d\Sigma(\lambda)$ — неотрицательная операторная мера на оси $(-\infty, \infty)$, для которой существуют интегралы (2.11)*, такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} d\Sigma(\lambda) = E$. Для любого операторного полинома $P(\lambda)$ интеграл

$$\{P, P\} = \{P, P\}_{L_2(H; (-\infty, \infty), d\Sigma(\lambda))} = \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\lambda) d\Sigma(\lambda) P(\lambda), \quad (2.48)$$

очевидно, является ограниченным неотрицательным оператором. Будем дополнительно требовать от $d\Sigma(\lambda)$, чтобы оператор (2.48) был обратим при любом полиноме $P(\lambda)$, старший коэффициент которого равен E. Проведем теперь процесс псевдоортогонализации операторных полиномов E, λE, $\lambda^2 E$, ..., рассматриваемых как элементы $L_2(H; (-\infty, \infty), d\Sigma(\lambda))$.

Обозначим $P_0(\lambda) = E$. Рассмотрим полином $S_1(\lambda) = \lambda E + X_1 P_0(\lambda)$ и определим в нём неизвестный оператор X_1 из условия $\{S_1^*(\lambda), P_0^*(\lambda)\} = 0$; после этого обозначим $N_1 = \{S_1^*(\lambda), S_1^*(\lambda)\}$ и положим $P_1(\lambda) = N_1^{-\frac{1}{2}} S_1(\lambda)$. Рассмотрим полином $S_2(\lambda) = \lambda^2 N_1^{-\frac{1}{2}} + Y_2 P_1(\lambda) + X_2 P_0(\lambda)$ и определим X_2 и Y_2 из условий $\{S_2^*(\lambda), P_0^*(\lambda)\} = 0$ и $\{S_2^*(\lambda), P_1^*(\lambda)\} = 0$; обозначим $N_2 = \{S_2^*(\lambda), S_2^*(\lambda)\}$, положим $P_2(\lambda) =$

---

*Существование интегралов (2.11) эквивалентно существованию интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m d(\Sigma(\lambda) x, x)_H$, $(x \in H;\quad m = 0, 1, \ldots)$. Это следует из неравенства $|(\Sigma(\Delta) x, y)_H|^2 \leqslant (\Sigma(\Delta) x, x)_H (\Sigma(\Delta) y, y)_H$ $(x, y \in H)$, вытекающего из того, что $\Sigma(\Delta) \geqslant 0$.

$=N_2^{-\frac{1}{2}}S_2(\lambda)$. Далее, рассмотрим $S_3(\lambda)=\lambda^3N_2^{-\frac{1}{2}}N_1^{-\frac{1}{2}}+Z_3P_2(\lambda)+$ $+Y_3P_1(\lambda)+X_3P_0(\lambda)$ и определим X_3, Y_3 и Z_3 соответственно из условий $\{S_3^*(\lambda), P_0^*(\lambda)\}=0$, $\{S_3^*(\lambda), P_1^*(\lambda)\}=0$ и $\{S_3^*(\lambda), P_2^*(\lambda)\}=0$. Производим нормировку и продолжаем процесс, в результате будет построена последовательность операторных полиномов $P_0(\lambda)$, $P_1(\lambda)$, ... (P_j — степени j), таких, что $P_j^*(\lambda)$ псевдоортонормированы: $\{P_j^*(\lambda), P_k^*(\lambda)\}=\delta_{jk}E$ $(j, k=0, 1, \ldots)$.

Теперь заметим, что на операторный случай благодаря соотношениям (2.35) легко обобщаются формулы (1.33), выражающие коэффициенты L через полиномы первого рода. Именно:

$$A_j=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda P_j(\lambda)\,d\Sigma(\lambda)\,P_{j+1}^*(\lambda),\qquad B_j=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda P_j(\lambda)\,d\Sigma(\lambda)\,P_j^*(\lambda) \quad (j=0,1,\ldots). \tag{2.49}$$

Будем восстанавливать коэффициенты выражения (2.22) посредством формул (2.49): подставим в них заданную $d\Sigma(\lambda)$ и построенные $P_j(\lambda)$. Получим ограниченные операторы A_j и B_j, которые примем в качестве коэффициентов L. Операторы B_j, очевидно, самосопряженные. Операторы A_j — положительные и обратимые: для доказательства воспользуемся равенством (см. (2.49)) $N_{j+1}^{-\frac{1}{2}}A_j=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda N_{j+1}^{-\frac{1}{2}}P_j(\lambda)\times$ $\times\, d\Sigma(\lambda)\,P_{j+1}^*(\lambda)$; полином $j+1$-й степени $\lambda N_{j+1}^{-\frac{1}{2}}P_j(\lambda)$ имеет такой же старший коэффициент, как и $P_{j+1}(\lambda)$, поэтому он может быть представлен в виде $P_{j+1}(\lambda)+C_jP_j(\lambda)+\ldots+C_0P_0(\lambda)$, где C_j — некоторые операторные коэффициенты. Используя (2.35), заключаем, что $N_{j+1}^{-\frac{1}{2}}A_j=\int_{-\infty}^{\infty}(P_{j+1}(\lambda)+\ldots)\,d\Sigma(\lambda)\,P_{j+1}^*(\lambda)=E$; таким образом, $A_j=N_{j+1}^{\frac{1}{2}}$, что и требовалось. Итак, A_j и B_j можно действительно принять в качестве коэффициентов L.

Построенные полиномы $P_j(\lambda)$ являются полиномами первого рода для выражения L. Действительно, легко убедиться, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}[A_{j-1}P_{j-1}(\lambda)+A_jP_{j+1}(\lambda)+B_jP_j(\lambda)-\lambda P_j(\lambda)]\,d\Sigma(\lambda)P_k^*(\lambda)=0\ (k=0,1,\ldots)$$

(нужно считать, что $P_{-1}(\lambda)=0$). Отсюда следует: $\int_{-\infty}^{\infty}[\ldots]\,d\Sigma(\lambda)[\ldots]^*=0$.

Но полином в квадратных скобках имеет обратимый старший коэффициент, поэтому последнее соотношение означает, что $[\ldots]=0$, а это и требуется.

Итак, для построенного разностного выражения L полиномы $P_j(\lambda)$ служат полиномами первого рода, удовлетворяющими соотношениям псевдоортогональности (2.35). Согласно теореме 2.3 $d\Sigma(\lambda)$ является операторной спектральной мерой для L; тогда обратная задача решена. Мы не будем формулировать полученное обобщение теоремы 1.11, заметим лишь, что коэффициенты A_j оказались положительными. Вместе с тем дополнительно предполагалась обратимость оператора (2.48) (это более сильное требование, чем свойства $d\Sigma(\lambda)$ на стр. 570—571).

9. Подсчет дефектных чисел оператора L. В отличие от скалярного случая дефектные числа рассматриваемого оператора L могут меняться от 0 до ∞; кроме того, они не обязательно равны; в связи с этим их определение значительно усложняется. В этом и следующем пунктах мы докажем несколько общих теорем относительно подсчета дефектных чисел. Первая из них обобщает первую часть теоремы 1.1.

Теорема 2.6. *При любом комплексном z существует сильный предел*

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{j=0}^{n}P_j^*(z)\,P_j(z)\right]^{-1}, \tag{2.50}$$

являющийся ограниченным неотрицательным оператором в H с нормой, не превосходящей 1. Размерность ортогонального дополнения в H к подпространству нулей оператора $\Gamma(\bar z)$ (т. е. к подпространству таких $x\in H$, что $\Gamma(\bar z)x=0$) одна и та же для всех точек z из связной компоненты поля регулярности оператора L и совпадает с его соответствующим дефектным числом.

Прежде всего установим одну общую лемму.

Лемма 2.3. *Пусть A и B — положительные ограниченные операторы в некотором гильбертовом пространстве H; каждый из них имеет ограниченный обратный. Если $(Ax,x)\leqslant(Bx,x)$ $(x\in H)$, то $(A^{-1}x,x)\geqslant(B^{-1}x,x)$ $(x\in H)$.*

Доказательство. Положим $C=\sqrt{B^{-1}}A\sqrt{B^{-1}}$. Для каждого $y=\sqrt{B}x$ имеем

$$(Cy,y)=(\sqrt{B^{-1}}A\sqrt{B^{-1}}y,y)=(A\sqrt{B^{-1}}y,\sqrt{B^{-1}}y)=(Ax,x)\leqslant(Bx,x)=(y,y). \tag{2.51}$$

В силу неотрицательности C и неравенства Коши—Буняковского для скалярного произведения $\langle x,y\rangle=(Cx,y)$ и (2.51) будем иметь:

$$(y,y)^2=(CC^{-1}y,y)^2\leqslant(CC^{-1}y,C^{-1}y)(Cy,y)=(y,C^{-1}y)(Cy,y)\leqslant(y,C^{-1}y)(y,y),$$

откуда $(y, y) \leqslant (y, C^{-1}y)$. Подставляя сюда $y = \sqrt{B}x$, найдем: $(\sqrt{B}x, \sqrt{B}x) \leqslant$ $\leqslant(\sqrt{B}x, \sqrt{B}A^{-1}\sqrt{B}\sqrt{B}x)$, т. е. $(Bx, x) \leqslant (Bx, A^{-1}Bx)(x \in H)$. Так как B имеет обратный оператор, то $Bx = z$ описывает все H, поэтому из последнего неравенства получаем $(z, B^{-1}z) \leqslant (z, A^{-1}z)$ $(z \in H)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Его мы будем проводить по этапам.

1) При помощи леммы 2.3 легко доказать существование предела (2.50): обозначим $B_n(z) = \sum_{j=0}^{n} P_j^*(z) P_j(z) = E + \sum_{j=1}^{n} P_j^*(z) P_j(z)$, каждый из этих операторов положителен. Кроме того,

$$(x, x)_H = (B_0(z)\, x, x)_H \leqslant (B_1(z)\, x, x)_H \leqslant (B_2(z)\, x, x)_H \leqslant \ldots \quad (x \in H).$$

Согласно доказанной лемме

$$(x, x)_H = (B_0^{-1}(z)\, x, x)_H \geqslant (B_1^{-1}(z)\, x, x)_H \geqslant (B_2^{-1}(z)\, x, x)_H \geqslant \ldots \quad (x \in H),$$

т. е. $B_0^{-1}(z), B_1^{-1}(z), \ldots$ образуют убывающую последовательность положительных операторов, поэтому существует сильный предел $\lim_{n\to\infty} B_n^{-1}(z)$, т. е. предел (2.50).

2)* Покажем теперь, что для любого $V \in \mathrm{l}_{2,0}(H; [0, \infty))$ такого, что $\widetilde{V}(z) = E$, справедливо соотношение

$$\{V, V\} \geqslant \Gamma(z). \tag{2.52}$$

Рассмотрим частный случай, когда в H существует ограниченный оператор V_0^{-1}. Тогда оператор $\sum_{j=0}^{n} V_j^* V_j = V_0^* V_0 + \sum_{j=1}^{n} V_j^* V_j$ имеет ограниченный обратный.

Положим $y = \left[\sum_{j=0}^{n} V_j^* V_j\right]^{-1} x$ $(x \in H)$. Тогда

$$\left(\left[\sum_{j=0}^{n} V_j^* V_j\right]^{-1} x, x\right)_H^2 = \left(\widetilde{V}(\bar{z}) \left[\sum_{j=0}^{n} V_j^* V_j\right]^{-1} x, x\right)_H^2 = \left(\left[\sum_{j=0}^{n} P_j^*(z) V_j\right] y, x\right)_H^2 =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n} (V_j y, P_j(z)\, x)_H\right]^2 \leqslant \left[\sum_{j=0}^{n} (V_j^* V_j y, y)_H\right] \left[\sum_{j=0}^{n} (P_j^*(z) P_j(z)\, x, x)_H\right] =$$

$$= \left(\left[\sum_{j=0}^{n} V_j^* V_j\right]^{-1} x, x\right)_H \left(\left[\sum_{j=0}^{n} P_j^*(z) P_j(z)\right] x, x\right)_H.$$

---

* Из леммы 2.4 и теоремы 2.7 следует, что дефектное подпространство, отвечающее z, совпадает с совокупностью последовательностей $P_j(\bar{z})\, x$ $(j=0,1,\ldots)$, где $x \in H$ таково, что $(P_0(\bar{z})\, x, P_1(\bar{z})\, x, \ldots) \in l_2(H; [0, \infty))$. На этом основании доказательство теоремы может быть завершено проще, чем на стр. 580—584. Мы сохраняем приведенное изложение, так как ряд соотношений (например, (2.54), (2.58)) полезен сам по себе.

Сокращая это неравенство на неотрицательный множитель, получим

$$\left(\left[\sum_{j=0}^{n} V_j^* V_j\right]^{-1} x, x\right)_H \leqslant \left(\left[\sum_{j=0}^{n} P_j^*(z) P_j(z)\right] x, x\right)_H \quad (x \in H).$$

Отсюда при помощи леммы 2.3 следует, что

$$\left(\left[\sum_{j=0}^{n} V_j^* V_j\right] x, x\right)_H \geqslant \left(\left[\sum_{j=0}^{n} P_j^*(z) P_j(z)\right]^{-1} x, x\right)_H \qquad (x \in H).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим: $(\{V, V\} x, x)_H \geqslant (\Gamma(z) x, x)_H$ $(x \in H)$, т. е. (2.52).

Теперь рассмотрим общий случай: V_0^{-1} может не существовать. Выберем в H какой-нибудь ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots$, и пусть для ограниченного оператора C в H $\| c_{jk} \|_0^\infty$ — матрица, отвечающая C в этом базисе. Обозначим $\| {}^{(N)}c_{jk} \|_0^\infty$ «квадратную срезку» матрицы $\| c_{jk} \|_0^\infty$ (т. е. ${}^{(N)}c_{jk} = c_{jk}$ при $j, k \leqslant N$ и ${}^{(N)}c_{jk} = 0$ для остальных j, k); ${}^{(N)}C$ — соответствующий этой срезке ограниченный оператор.

Обозначим $\widetilde{U}(\lambda) = {}^{(N)}\widetilde{V}(\lambda)$, согласно сказанному на стр. 574 $\widetilde{U}(\lambda)$ действительно является преобразованием Фурье некоторого финитного псевдовектора $U = (U_0, U_1, \ldots)$, компоненты которого восстанавливаются по формуле $U_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_j(\lambda)\, d\Sigma(\lambda) \widetilde{U}(\lambda)$ $(j = 0, 1, \ldots)$. В частности, $U_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Sigma(\lambda) \widetilde{U}(\lambda)$; отсюда следует, что все столбцы матрицы этого оператора в базисе e_j, за исключением конечного числа, состоят из нулей, т. е. оператор U_0— конечномерный. Положим $\widetilde{W}(\lambda) = (\widetilde{U}(\lambda) - \varepsilon E)\,({}^{(N)}E - \varepsilon E)^{-1}$, как и раньше $\widetilde{W}(\lambda)$ является преобразованием Фурье некоторого $W = (W_0, W_1, \ldots) \in \mathrm{l}_{2,0}(H; [0, \infty))$. Имеем

$$W_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_j(\lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, W(\lambda) = \begin{cases} (U_0 - \varepsilon E)\,({}^{(N)}E - \varepsilon E)^{-1} & (j = 0), \\ U_j\,({}^{(N)}E - \varepsilon E)^{-1} & (j \geqslant 1). \end{cases}$$

Оператор W_0^{-1} существует тогда и только тогда, когда ε не совпадает с собственным числом конечномерного оператора U_0. Во всяком случае это будет иметь место для бесконечной последовательности $\varepsilon \to 0$. Кроме того, так как $\widetilde{U}(\bar{z}) = {}^{(N)}\widetilde{V}(\bar{z}) = {}^{(N)}E$, то $\widetilde{W}(\bar{z}) = (\widetilde{U}(\bar{z}) - \varepsilon E)\,({}^{(N)}E - \varepsilon E)^{-1} = E$. Таким образом, к W можно применить доказанную часть утверждения, в силу чего

$$(\{W, W\} x, x)_H \geqslant (\Gamma(z) x, x)_H \qquad (x \in H). \tag{2.53}$$

Пусть теперь $x \in H$ в выбранном базисе e_j — финитный вектор. Подберем номер N настолько большим, чтобы $x_j = 0$ при $j > N$. Тогда $({}^{(N)}E - \varepsilon E)^{-1} x = \frac{1}{1 - \varepsilon} x$ и поэтому

$$(\{W, W\} x, x)_H = (Wx, Wx)_{\mathrm{l}_2(H; [0, \infty))} = \| W_0 x \|_H^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \| W_j x \|_H^2 =$$

$$= \| (U_0 - \varepsilon E) ({}^{(N)}E - \varepsilon E)^{-1} x \|_H^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \| U_j ({}^{(N)}E - \varepsilon E)^{-1} x \|_H^2 =$$

$$= \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \left(\| (U_0 - \varepsilon E) x \|_H^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \| U_j x \|_H^2 \right) = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \| U_j x \|_H^2 -$$

$$- \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \operatorname{Re} (U_0 x, x)_H + \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} \| x \|_H^2 = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} (\{U, U\} x, x)_H + o(\varepsilon).$$

Таким образом, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в неравенстве (2.53), получим $(\{U, U\} x, x)_H \geqslant (\Gamma(z) x, x)_H$. Но

$$(\{U, U\} x, x)_H = \int_{-\infty}^{\infty} (d\Sigma(\lambda) \widetilde{U}(\lambda) x, \widetilde{U}(\lambda) x)_H = \int_{-\infty}^{\infty} (d\Sigma(\lambda) {}^{(N)}\widetilde{V}(\lambda) x, {}^{(N)}\widetilde{V}(\lambda) x)_H =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (d\Sigma(\lambda) \widetilde{V}(\lambda) x, \widetilde{V}(\lambda) x)_H = (\{V, V\} x, x)_H,$$

поэтому $(\{V, V\} x, x)_H \geqslant (\Gamma(z) x, x)_H$ для любого финитного x, а значит и для любого $x \in H$. Неравенство (2.52) полностью установлено.

3) Установим соотношение

$$\begin{gathered} (\Gamma(z) x, x)_H = \inf (\{V, V\} x, x)_H \qquad (x \in H). \\ V \in \mathrm{l}_{2,0}(H; [0, \infty)),\ \widetilde{V}(\bar{z}) = E \end{gathered} \tag{2.54}$$

Из (2.52) следует

$$\begin{gathered} (\Gamma(z) x, x)_H \leqslant \inf (\{V, V\} x, x) \qquad (x \in H). \\ V \in \mathrm{l}_{2,0}(H; [0, \infty)),\ \widetilde{V}(\bar{z}) = E. \end{gathered}$$

Поэтому для доказательства (2.54) достаточно убедиться, что существует такая последовательность $V^{(n)} \in \mathrm{l}_{2,0}(H; [0, \infty))$, $\widetilde{V}^{(n)}(\bar{z}) = E$, что $(\{V^{(n)}, V^{(n)}\} x, x)_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ $\to (\Gamma(z) x, x)_H$ $(x \in H)$.

Пусть $F_j = P_j(z) \left[\sum_{k=0}^{n} P_k^*(z) P_k(z) \right]^{-1}$ $(j = 0, \ldots, n)$. Тогда $\sum_{j=0}^{n} F_j^* F_j =$ $= \left[\sum_{j=0}^{n} P_j^*(z) P_j(z) \right]^{-1}$ и поэтому

$$\left(\left[\sum_{j=0}^{n} P_j^*(z) P_j(z) \right]^{-1} x, x \right)_H = \sum_{j=0}^{n} \| F_j x \|_H^2 \qquad (x \in H). \tag{2.55}$$

Положим $V^{(n)} = (F_0, \ldots, F_n, 0, 0, \ldots) \in \mathrm{l}_{2,0}(H; [0,\infty))$, очевидно, $\widetilde{V}^{(n)}(\bar z) = \sum_{j=0}^{n} P_j^*(z) F_j = E$. Кроме того, согласно (2.55)

$$(\{V^{(n)}, V^{(n)}\}\, x, x)_H = (V^{(n)}x, V^{(n)}x)_{l_2(H;[0,\infty))} = \sum_{j=0}^{n} \| F_j x \|_H^2 =$$

$$= \left(\left[\sum_{j=0}^{n} P_j^*(z) P_j(z) \right]^{-1} x, x \right)_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\Gamma(z)\, x, x)_H \qquad (x \in H).$$

Требуемая последовательность $V^{(n)}$ построена и (2.54) установлено.

4) Будем рассматривать H как подмножество пространства $L_2(H; (-\infty,\infty), d\Sigma(\lambda))$ (как совокупность постоянных функций). Скалярное произведение в $L_2(H; (-\infty,\infty), d\Sigma(\lambda))$ индуцирует в H скалярное произведение, совпадающее с первоначальным. Действительно, так как $\int_{-\infty}^{\infty} d\Sigma(\lambda) = E$, то $\int_{-\infty}^{\infty} (d\Sigma(\lambda)\, x, y)_H = \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\Sigma(\lambda)\, x, y \right)_H = (x, y)_H$. Поэтому из полноты пространства H следует, что H замкнуто в $L_2(H; (-\infty,\infty), d\Sigma(\lambda))$.

Покажем, что *дефектное число оператора* L *в точке* z *равно размерности ортогонального дополнения в* H *к подпространству всех векторов из* H, *находящихся на нулевом расстоянии* (*в* $L_2(H; (-\infty,\infty), d\Sigma(\lambda))$) *от множества* $\widetilde{(\mathrm{L} - zE)\, l_{2,0}(H; [0,\infty))} \subseteq L_2(H; (-\infty,\infty), d\Sigma(\lambda))$.

Действительно, искомое дефектное число равно размерности ортогонального дополнения в $l_2(H; [0,\infty))$ к $(\mathrm{L} - zE)\, l_{2,0}(H; [0,\infty))$. Переходя к преобразованиям Фурье, заключаем, что оно равно размерности ортогонального дополнения в $\widetilde{l_2(H; [0,\infty))} \subseteq L_2(H; (-\infty,\infty), d\Sigma(\lambda))$ к $\widetilde{(\mathrm{L} - zE)\, l_{2,0}(H; [0,\infty))}$. Так как $\widetilde{l_{2,0}(H; [0,\infty))}$ состоит из всех векторных полиномов (см. стр. 577), то $\widetilde{(\mathrm{L} - zE)\, l_{2,0}(H; [0,\infty))}$ состоит из всех векторных полиномов, аннулирующихся в точке z. Поэтому $\widetilde{(\mathrm{L} - zE)\, l_{2,0}(H; [0,\infty))} \dotplus H = \widetilde{l_{2,0}(H; [0,\infty))}$ (H понимается как совокупность постоянных вектор-функций). Обозначим посредством черты замыкание в $L_2(H; (-\infty,\infty), d\Sigma(\lambda))$ и будем учитывать, что $\overline{\widetilde{l_{2,0}(H; [0,\infty))}} = \widetilde{l_2(H; [0,\infty))}$, $\overline{H} = H$, $\overline{\widetilde{(\mathrm{L} - zE)\, l_{2,0}(H; [0,\infty))}} \subseteq \widetilde{l_2(H; [0,\infty))}$. Очевидно,

$$\widetilde{l_{2,0}(H; [0,\infty))} \subseteq \overline{\widetilde{(\mathrm{L} - zE)\, l_{2,0}(H; [0,\infty))}} \dotplus H. \tag{2.56}$$

Пусть G — ортогональное дополнение в H к $H \cap \overline{\widetilde{(\mathrm{L} - zE)\, l_{2,0}(H; [0,\infty))}}$, т. е. к множеству тех векторов из H, которые находятся на нулевом расстоянии от $\widetilde{(\mathrm{L} - zE)\, l_{2,0}(H; [0,\infty))}$. Тогда (2.56) можно переписать в виде

$$\widetilde{l_{2,0}(H; [0,\infty))} \subseteq \overline{\widetilde{(\mathrm{L} - zE)\, l_{2,0}(H; [0,\infty))}} \dotplus G, \tag{2.57}$$

где $\dotplus$ обозначает прямую сумму.

Воспользуемся следующим простым фактом, доказательство которого предоставляется читателю. Пусть $\mathfrak{H}$—сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — его подпространства, такие, что $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2=0$. Предположим, что для плотного в $\mathfrak{H}$ множества $\mathfrak{H}'$ справедливо включение: $\mathfrak{H}' \subseteq \mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2$. Тогда размерность ортогонального дополнения в $\mathfrak{H}$ к $\mathfrak{H}_1$ совпадает с размерностью $\mathfrak{H}_2$. Положим теперь $\mathfrak{H} = \widetilde{l_2(H;\,[0,\infty))}$, $\mathfrak{H}' = \widetilde{l_{2,0}(H;\,[0,\infty))}$, $\mathfrak{H}_1 = \widetilde{(\mathrm{L}-zE)\, l_{2,0}(H;\,[0,\infty))}$, $\mathfrak{H}_2 = G$. В силу (2.57) размерность ортогонального дополнения в $\widetilde{l_2(H;\,[0,\infty))}$ к $\widetilde{(\mathrm{L}-zE)\, l_{2,0}(H;\,[0,\infty))}$ — дефектное число — равно размерности G. Утверждение доказано.

5. Докажем, что расстояние вектора $x \in H$ к линейному множеству $\widetilde{(\mathrm{L}-zE)\, l_{2,0}(H;\,[0,\infty))}$ определяется по формуле

$$\varrho^2\,(x,\,(\widetilde{\mathrm{L}-zE)\, l_{2,0}(H;\,[0,\infty)}))) = (\Gamma(\bar z)\, x,\, x)_H. \tag{2.58}$$

Действительно, $\widetilde{(x,0,0,\ldots)} = x$, поэтому в силу изометрии преобразования Фурье $\varrho\,(x,\ \widetilde{(\mathrm{L}-zE)\, l_{2,0}(H;\,[0,\infty))}) = \varrho\,((x,0,0,\ldots),\,(\mathrm{L}-zE)\, l_{2,0}(H;\,[0,\infty))) = \varrho\,((x,0,0,\ldots),\ (\mathrm{L}-zE)\, l_{2,0}(H;\,[0,\infty)))$. Можно ограничиться случаем $x \neq 0$, тогда $(\mathrm{L}-zE)\, l_{2,0}(H;\,[0,\infty)) = [(\mathrm{L}-z\mathrm{E})\, \mathrm{l}_{2,0}\ (H;\,[0,\infty))\, x$; кроме того, $(x,0,0,\ldots) = \Delta^{(0)}x\ (\Delta^{(0)} = (E,0,0,\ldots))$. Таким образом,

$$\varrho^2\,(x,\,\widetilde{(\mathrm{L}-zE)\, l_{2,0}(H;\,[0,\infty)))} = \varrho^2\,(\Delta^{(0)}x,\,[(\mathrm{L}-z\mathrm{E})\, \mathrm{l}_{2,0}(H;\,[0,\infty))]\, x) =$$
$$= \inf \|(\Delta^{(0)}-U)\,x\|^2_{l_2(H;[0,\infty))} = \inf\,(\{\Delta^{(0)}-U,\,\Delta^{(0)}-U\}\,x,x)_H,$$

где U пробегает совокупность псевдовекторов вида $(\mathrm{L}-z\mathrm{E})\,\mathrm{l}_{2,0}(H;\,[0,\infty))$, т. е. совокупность финитных псевдовекторов, преобразование Фурье которых совпадает с классом операторных полиномов, аннулирующихся в точке z. Так как $\widetilde{\Delta}^{(0)} = E$, то $V = \Delta^{(0)} - U$ пробегает совокупность финитных псевдовекторов, преобразование Фурье которых в точке z равно E. Поэтому можно написать

$$\varrho^2\,(x,\,\widetilde{(\mathrm{L}-zE)\, l_{2,0}(H;\,[0,\infty))}) = \inf\,(\{V,V\}\,x,x)_H \qquad (x \in H)$$
$$V \in \mathrm{l}_{2,0}(H;\,[0,\infty)),\ \widetilde{V}(z) = E.$$

Отсюда и из (2.54) вытекает (2.58).

6) Теперь легко закончить доказательство теоремы: согласно 4) искомое дефектное число равно размерности ортогонального дополнения к подпространству всех таких $x \in H$, для которых $\rho(x,(\mathrm{L}-zE)\,l_{2,0}(H;\,[0,\infty)))=0$, или согласно (2.58), для которых $(\Gamma(\bar z)x,\ x)_H=0$. Теорема доказана.

Перейдем к обобщению второй части теоремы 1.1. Проведем сперва одну общую конструкцию. Рассмотрим гильбертовы пространства H и $\mathfrak{H}$ и псевдогильбертово $L(H,\,\mathfrak{H})$. Пусть в $\mathfrak{H}$ действует замкнутый эрмитов оператор A, построим оператор $\mathbf{A}$, действующий в $L(H, \mathfrak{H})$ (см. стр. 568), и рассмотрим псевдолинейное множество $(\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})$ и его псевдоортогональное дополнение $\widehat{(\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})}$, т. е. совокупность всех $U \in L(H, \mathfrak{H})$ таких, что $\{U, V\}=0$ при любом $V \in (\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})$.

Лемма 2.4. *При каждом невещественном z имеет место разложение*

$$L(H, \mathfrak{H}) = (\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A}) \oplus \widehat{(\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})} \tag{2.59}$$

на псевдоортогональную сумму псевдоподпространств. Для каждого $x \in H$, $x \neq 0$, $[(\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})]x = (A-zE)\mathfrak{D}(A)$; $[\widehat{(\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})}]x$ совпадает с ортогональным дополнением в $\mathfrak{H}$ к $(A-zE)\mathfrak{D}(A)$, т. е. с соответствующим дефектным подпространством оператора A

Доказательство. Так как $\mathfrak{D}(\mathbf{A})x = \mathfrak{D}(A)$, то $[(\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})]x = (A-zE)\mathfrak{D}(A)$ и поэтому в силу замкнутости оператора A множество $[(\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})]x$ замкнуто в $\mathfrak{H}$. Пусть $U \in L(H, \mathfrak{H})$ и при всех $x \in H$ $Ux \in (A-zE)\mathfrak{D}(A)$, покажем, что $U \in (\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})$. Действительно, для любого $x \in H$ найдется $v_x \in \mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{H}$ такое, что $Ux = (A-zE)v_x$. Так как z невещественно, то v_x определяется по x однозначно и $\|U\|\|x\|_H \geqslant \|Ux\|_{\mathfrak{H}} = \|(A-zE)v_x\|_{\mathfrak{H}} \geqslant k\|v_x\|_{\mathfrak{H}}$; отсюда $\|v_x\|_{\mathfrak{H}} \leqslant C\|x\|_H$. Ясно, что соответствие $x \to v_x$ аддитивно и однородно, поэтому существует оператор $V \in L(H, \mathfrak{H})$ такой, что $Vx = v_x \in \mathfrak{D}(A)$; согласно определению $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$, $V \in \mathfrak{D}(\mathbf{A})$. Итак, $Ux = (A-zE)v_x = (A-zE)Vx = [(\mathbf{A}-z\mathbf{E})V]x$ $(x \in H)$, т. е. $U = (\mathbf{A}-z\mathbf{E})V$, что и требовалось. Из доказанного выше, очевидно, следует, что $(\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})$ — максимальное псевдоподпространство (см. стр. 562).

На основании теоремы 2.3 заключаем, что справедливо представление (2.59). Ясно также, что $[\widehat{(\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})}]x$ равно ортогональному дополнению в $\mathfrak{H}$ к $(A-zE)\mathfrak{D}(A)$. Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что *дефектное подпространство оператора A полностью описывается, если описано псевдоподпространство* $\widehat{(\mathbf{A}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{A})}$. Сейчас мы опишем это псевдоподпространство для случая $A = \mathrm{L}$. Ниже $\mathbf{L}$ обозначает соответствующий оператор в $\mathbf{l}_2(H; [0, \infty)) = L(H, l_2(H; [0, \infty)))$ (не путать с выражением L).

Теорема 2.7. *Псевдоподпространство $\widehat{(\mathbf{L}-z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{L})}$ совпадает с совокупностью псевдовекторов $U \in \mathbf{l}_2(H; [0, \infty))$, координаты которых связаны соотношением*

$$U_j = P_j(\bar{z})U_0 \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{2.60}$$

Доказательство. Пусть $U \in \widehat{(\mathbf{L} - z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{L})}$, тогда при любом $x \in H$ $Ux \in \widehat{(\mathrm{L} - zE)\mathfrak{D}(\mathrm{L})}$ и поэтому $\mathrm{L}^*(Ux) = \bar{z}Ux$, т. е. $L[Ux] = \bar{z}Ux$, причем $U_{-1}x = 0$. Иными словами, $(LU)_j = A_{j-1}U_{j-1} + A_jU_{j+1} + B_jU_j = \bar{z}U_j$ $(j = 0, 1, \ldots; U_{-1} = 0)$. Но $A_{j-1}P_{j-1}(\bar{z}) + A_jP_{j+1}(\bar{z}) + B_jP_j(\bar{z}) = \bar{z}P_j(\bar{z})$ $(j = 0, 1, \ldots; P_{-1}(\bar{z}) = 0,\ P_0(\bar{z}) = E)$, поэтому, умножая последнее соотношение справа на U_0, заметим, что $P_j(\bar{z})U_0$ удовлетворяет тем же разностному уравнению и условиям Коши, что и U_j. Отсюда вытекает (2.60).

Наоборот, пусть U_0 таково, что $(U_0, U_1, \ldots) = U$, подсчитанное посредством (2.60), входит в $\mathbf{l}_2(H; [0, \infty))$. Покажем, что $U \in \widehat{(\mathbf{L} - z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{L})}$. Ясно, что $(LU)_j = \bar{z}U_j$ $(j = 0, 1, \ldots; U_{-1} = 0)$, поэтому при любом $x \in H$ $(L(Ux))_j = \bar{z}(Ux)_j$ $(j = 0, 1, \ldots; U_{-1}x = 0)$, т. е. $Ux \in \widehat{(\mathrm{L} - zE)\mathfrak{D}(L)}$. Но $\widehat{(\mathbf{L} - z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{L})}$ — максимальное псевдоподпространство (это следует из наличия разложения (2.59) и из необходимости в теореме 2.3), поэтому включение $Ux \in \widehat{(\mathrm{L} - zE)\mathfrak{D}(\mathrm{L})}$ $(x \in H)$ влечет включение $U \in \widehat{(\mathbf{L} - z\mathbf{E})\mathfrak{D}(\mathbf{L})}$, что и требовалось. Теорема доказана.

10. Полиномы второго рода. Резольвента. Как и в скалярном случае, важную роль играет решение уравнения $(LU)_j = zU_j$, линейно независимое от решения $(P_0(z), P_1(z), \ldots)$. Именно, рассмотрим уравнение $(LU)_j = zU_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ с начальными данными $U_0 = 0$, $U_1 = A_0^{-1}$. Пусть $(Q_1(z) = A_0^{-1}, Q_2(z), \ldots)$ — решение этой задачи; $Q_j(z)$ будет операторным полиномом j — 1-й степени — полиномом второго рода. Подобно скалярному случаю (см. стр. 526) легко установить формулу

$$Q_j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(\lambda) - P_j(z)}{\lambda - z}\, d\Sigma(\lambda) \qquad (j = 0, 1, \ldots). \tag{2.61}$$

Пусть A — некоторое самосопряженное расширение (возможно, с выходом из $l_2(H; [0, \infty))$) оператора L, $E(\Delta)$ и R_z — соответствующие обобщенные разложения единицы и резольвента, $\mathbf{E}(\Delta)$ и $\mathbf{R}_z$ — отвечающие им операторы в $\mathbf{l}_2(H; [0, \infty))$. Согласно общим соображениям п. 4 последние операторы можно записать посредством матриц в базисе $\Delta^{(0)} = (E, 0, 0, \ldots)$, $\Delta^{(1)} = (0, E, 0, \ldots), \ldots$; элементы этих матриц имеют вид

$$E(\Delta)_{jk} = \{\Delta^{(j)}, \mathbf{E}(\Delta)\,\Delta^{(k)}\} = \int\limits_{\Lambda} P_j(\lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, P_k^*(\lambda),$$

$$R_{z;jk} = \{\Delta^{(j)}, \mathbf{R}_z\Delta^{(k)}\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} P_j(\lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, P_k^*(\lambda) \qquad (2.62)$$

$$(j, k = 0, 1, \ldots);$$

первое равенство вытекает из (2.40), а второе — из первого и представления $R_z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda - z)^{-1} dE_\lambda$. Так же как и в скалярном случае, операторная спектральная мера $d\Sigma(\lambda)$ восстанавливается по операторной функции

$$M(z) = R_{z;00} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d\Sigma(\lambda) \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0) \qquad (2.63)$$

— достаточно перейти от (2.63) к $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda - z)^{-1} d(\Sigma(\lambda)\, x, y)_H = (M(z)\, x, y)_H$ $(x, y \in H)$ и воспользоваться формулой обращения для преобразования Стилтьеса. Функция $M(z)$ в случае расширения без выхода из $l_2(H; [0, \infty))$ удовлетворяет соотношению типа (1.40). Для иллюстрации выведем его. Пусть z и ζ невещественны, тогда при помощи (2.62) получаем

$$\{\mathbf{R}_\zeta\Delta^{(0)}, \mathbf{R}_z\Delta^{(0)}\} = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{R}_\zeta\Delta^{(0)})_j^* (\mathbf{R}_z\Delta^{(0)})_j;$$

$$(\mathbf{R}_z\Delta^{(0)})_j = R_{z;j0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(\lambda)}{\lambda - z}\, d\Sigma(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(\lambda) - P_j(z)}{\lambda - z}\, d\Sigma(\lambda) +$$

$$+ P_j(z) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d\Sigma(\lambda) = Q_j(z) + P_j(z)\, M(z) \qquad (j = 0, 1, \ldots).$$

Поэтому $\{\mathbf{R}_\zeta\Delta^{(0)}, \mathbf{R}_z\Delta^{(0)}\} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} [Q_j(\zeta) + P_j(\zeta)\, M(\zeta)]^* [Q_j(z) + P_j(z)\, M(z)]$.

С другой стороны, при помощи тождества $\mathbf{R}_\mu - \mathbf{R}_\lambda = (\mu - \lambda)\, \mathbf{R}_\mu \mathbf{R}_\lambda$, вытекающего из обычного тождества Гильберта, и равенства $R_z^* = R_{\bar z}$, получим

$$\{\mathbf{R}_\zeta\Delta^{(0)}, \mathbf{R}_z\Delta^{(0)}\} = \{\mathbf{R}_{\bar z}\mathbf{R}_\zeta\Delta^{(0)}, \Delta^{(0)}\} = \left\{\frac{\mathbf{R}_{\bar z} - \mathbf{R}_\zeta}{\bar z - \zeta}\Delta^{(0)}, \Delta^{(0)}\right\} = \\ = \frac{M(\bar\zeta) - M(z)}{\bar\zeta - z}.$$

Таким образом,

$$\frac{M(\bar\zeta) - M(z)}{\bar\zeta - z} = \sum_{j=0}^{\infty}[Q_j(\zeta) + P_j(\zeta)M(\zeta)]^*[Q_j(z) + P_j(z)M(z)] \quad (\bar\zeta \neq z). \tag{2.64}$$

Теперь легко доказать утверждение, обобщающее сказанное в конце п. 6 на стр. 529.

Теорема 2.8. *Существует по крайней мере одна операторная функция $F(z)$ такая, что псевдовектор с координатами $Q_j(z) + P_j(z)F(z)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ при каждом невещественном z входит в $\mathfrak{l}_2(H; [0, \infty))$. Если оператор L — самосопряженный, то такая операторная функция единственна и совпадает с $M(z)$.*

Доказательство. Из формулы (2.64) при $\zeta = z$ вытекает, что $F(z) = M(z)$ удовлетворяет условиям теоремы. Пусть теперь L самосопряжен и существуют две функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ такие, что $Q_j(z) + P_j(z)F_1(z)$, $Q_j(z) + P_j(z)F_2(z) \in \mathfrak{l}_2(H; [0, \infty))$. Тогда и разность этих псевдовекторов входит в $\mathfrak{l}_2(H; [0, \infty))$, т. е. $P_j(z)(F_1(z) - F_2(z)) \in \mathfrak{l}_2(H; [0, \infty))$. Поэтому обязательно $F_1(z) = F_2(z)$, так как в противном случае согласно теореме 2.7 дефектные подпространства оператора L были бы непусты, что противоречит самосопряженности L. Теорема доказана.

11. **Условия самосопряженности оператора L. Дальнейшие результаты.** Большинство остальных результатов § 1 в той или иной форме переносится на операторный случай. Иногда это делается весьма просто, иногда возникает необходимость вспомогательных конструкций. Так, просто обобщается теорема 1.3 о самосопряженности оператора L.

Теорема 2.9. *Если ряд $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\|A_j\|}$ расходится, то L самосопряжен.*

Доказательство. *Пусть* $\operatorname{Im} z \neq 0$, при помощи формулы Грина (2.25) получаем

$$(\bar z - z)\sum_{j=0}^{n} P_j^*(z)P_j(z) = \sum_{j=0}^{n}((LP(z))_j^* P_j(z) - P_j^*(z)(LP(z))_j) = \\ = P_{n+1}^*(z)A_nP_n(z) - P_n^*(z)A_nP_{n+1}(z).$$

Отсюда при $n = 0, 1, \ldots$

$$(\bar{z} - z) \sum_{j=0}^{n} \| P_j(z) x \|_H^2 = (\bar{z} - z) \left(\sum_{j=0}^{n} P_j^*(z) P_j(z) x, x \right)_H =$$

$$= (A_n P_n(z) x, P_{n+1}(z) x)_H - (A_n P_{n+1}(z) x, P_n(z) x)_H;$$

$$|\bar{z} - z| \, \| x \|_H^2 \leqslant |\bar{z} - z| \sum_{j=0}^{n} \| P_j(z) x \|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \| A_n \| \, \| P_n(z) x \|_H \, \| P_{n+1}(z) x \|_H \qquad (x \in H).$$

Таким образом, $\| A_n \|^{-1} \leqslant 2 \| P_n(z) x \|_H \| P_{n+1}(z) x \|_H / |\bar{z} - z| \, \| x \|_H^2$ $(x \neq 0)$, откуда $\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\| A_n \|} \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \| P_n(z) x \|_H \| P_{n+1}(z) x \|_H \leqslant$

$$\leqslant C \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \| P_n(z) x \|_H^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \| P_{n+1}(z) x \|_H^2} \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \| P_n(z) x \|_H^2,$$

т. е. $\sum_{n=0}^{\infty} \| P_n(z) x \|_H^2 = \infty$ для каждого $x \in H$, $x \neq 0$. Это показывает, что не существует $U \in \mathrm{l}_2(H; [0, \infty))$, отличных от 0 и удовлетворяющих (2.60) (с заменой z на $\bar{z}$). Согласно теореме 2.7 дефектные числа оператора L равны нулю. Теорема доказана.

Еще проще установить, что если нормы операторов A_j и B_j равномерно ограничены, то L ограничен и, тем более, самосопряжен.

Результаты § 1 по описанию всех спектральных мер в неопределенном случае также обобщаются на операторный случай, но ситуация здесь сложнее, так как дефектные числа теперь могут меняться от 0 до ∞. Наиболее симметричен случай максимальных дефектных чисел, характеризующийся тем, что в каждой конечной области G комплексной плоскости справедлива оценка $\| \sum_{j=0}^{\infty} P_j^*(z) P_j(z) \|_H \leqslant C_G (z \in G)$ (можно привести достаточные требования на L типа теоремы 1.5, при которых этот так называемый абсолютно неопределенный случай будет иметь место). В этом случае оператор $\Gamma(z)$ обратим, причем $\Gamma^{-1}(z) = \{P(z), P(z)\}$. Оператор $M(z)$ при фиксированном z и меняющихся расширениях будет пробегать операторную окружность типа (1.49), функция $M(z)$ описывается формулами, сходными с (1.50) и (1.59). На этих рассмотрениях мы останавливаться не будем.

§ 3. Разностные операторы второго порядка на всей оси

Спектральная теория таких операторов во многом подобна теории на полуоси; отличия связаны с тем, что теперь спектр может быть, вообще говоря, двукратным (т. е. $N_\lambda \leqslant 2$). Вырождение спектра ведет, например, к тому, что вместо спектральной меры появляется двумерная матричная мера. Ниже (п. 2) будет показано, как изучение этой задачи может быть сведено к результатам предыдущего параграфа. Заметим, что подобное сведе́ние можно произвести и для уравнения с операторными коэффициентами на всей оси.

1. Разностный оператор и доказательство равенства Парсеваля. Будем рассматривать операторы, действующие в пространстве $l_2((-\infty, \infty)) = H_0$ последовательностей $u = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots)$ таких, что $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} |u_j|^2 < \infty$. На финитных последовательностях определим оператор L', полагая

$$(\mathrm{L}'u)_j = (Lu)_j = a_{j-1}u_{j-1} + a_j u_{j+1} + b_j u_j \qquad (u \in l_{2,0}((-\infty, \infty))),$$

где $a_j > 0$, $\operatorname{Im} b_j = 0$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Этот оператор эрмитов, L обозначает замыкание L'. Так же как и на стр. 507, легко установить, что $\mathfrak{D}(\mathrm{L}^*)$ состоит из всех $v \in l_2((-\infty, \infty))$ таких, что $Lv \in l_2((-\infty, \infty))$, при этом $\mathrm{L}^*v = Lv$.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующей фундаментальной системой решений уравнения $Lu = zu$:

$$\begin{gathered} (LP_{-1;\cdot}(z))_j = zP_{-1;j}(z) \qquad (P_{-1;-1}(z) = 1,\ P_{-1;0}(z) = 0), \\ (LP_{0;\cdot}(z))_j = zP_{0;j}(z) \quad (P_{0;-1}(z) = 0,\ P_{0;0}(z) = 1); \qquad (3.1) \\ u_j = u_{-1}P_{-1;j}(z) + u_0 P_{0;j}(z) \qquad (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots). \end{gathered}$$

Под преобразованием Фурье последовательности $u \in l_{2,0}((-\infty, \infty))$ понимается двумерная вектор-функция $\tilde{u}(z) = (\tilde{u}_{-1}(z), \tilde{u}_0(z))$, где

$$\tilde{u}_\alpha(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j P_{\alpha;j}(z) \qquad (\alpha = -1, 0). \qquad (3.2)$$

Равенство Парсеваля для оператора L может быть доказано одним из трех методов, изложенных на стр. 514—518. Особенно наглядно использование первого приема; мы его сейчас наметим.

Соотношения (1.16) и (1.17), очевидно, сохраняются, нужно олько суммирование вести от $-\infty$ до $+\infty$. Вместе с тем равенство (1.18) существенно изменяется. В самом деле, повторяя рассуждения (стр. 514), получим, что каждый вектор $\varphi \in \mathfrak{R}(P(\lambda))$ удовлетворяет уравнению $((L-\lambda E)\varphi)_j = 0$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, однако никаким граничным условиям он не удовлетворяет. Поэтому согласно (3.1) $\varphi_j = \sum\limits_{\alpha=-1,0} \varphi_\alpha P_{\alpha;\,j}(\lambda)$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Отсюда при любом k $\Phi_{jk}(\lambda) = \sum\limits_{\alpha=-1,0} \Phi_{\alpha k}(\lambda) P_{\alpha;j}(\lambda)$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ и, далее, $\Phi_{\alpha k}(\lambda) = \overline{\Phi_{k\alpha}(\lambda)} = \overline{\sum\limits_{\beta=-1,0} \Phi_{\beta\alpha}(\lambda) P_{\beta;k}(\lambda)} = \sum\limits_{\beta=-1,0} \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) P_{\beta;k}(\lambda)$ $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Производя подстановку, получим

$$\Phi_{jk}(\lambda) = \sum_{\alpha,\beta=-1,0} \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) P_{\alpha;j}(\lambda) P_{\beta;k}(\lambda) \, (j,k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots). \tag{3.3}$$

Из (1.16) и (3.3) вытекает:

$$(E(\Delta)\delta_k, \delta_j)_0 = E(\Delta)_{jk} = \int_\Delta \Phi_{jk}(\lambda)\, d\varrho(\lambda) = \sum_{\alpha\,\beta=-1,0} \int_\Delta P_{\alpha;j}(\lambda) P_{\beta;k}(\lambda) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)$$
$$(j,k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots);$$
$$d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \Phi_{\alpha\beta}(\lambda)\, d\varrho(\lambda) \quad (\alpha,\beta = -1,0;\ -\infty < \lambda < \infty) \tag{3.4}$$

(здесь $\delta_k = (\ldots, \delta_{-1k}, \delta_{0k}, \delta_{1k}, \ldots)$, $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$). Учитывая начальные значения для $P_{\alpha;j}(\lambda)$ (см. (3.1)), получим из (3.4)

$$\sigma_{\alpha\beta}(\Delta) = E(\Delta)_{\alpha\beta} = (E(\Delta)\delta_\beta, \delta_\alpha)_0 \quad (\alpha,\beta = -1,0). \tag{3.5}$$

Так как $E(\Delta) \geqslant 0$, то матрица $\|\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)\|_{-1}^{0}$ положительно определенная. Равенство (3.4) при $\Delta = (-\infty, \infty)$ дает следующее соотношение ортогональности полиномов $P_{\alpha;j}(\lambda)$:

$$\sum_{\alpha,\beta=-1,0} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\alpha;j}(\lambda) P_{\beta;k}(\lambda)\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \delta_{jk} \quad (j,k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots). \tag{3.6}$$

Используя (3.4) и обозначение (3.2), получим из формулы $(E(\Delta)u, v)_0 = \int\limits_\Delta d(E_\lambda u, v)_0$ равенство Парсеваля:

$$(E(\Delta)u, v)_0 = \sum_{\alpha,\beta=-1,0} \int_\Lambda \tilde{u}_\alpha(\lambda) \overline{\tilde{v}_\beta(\lambda)}\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \quad (u, v \in l_{2,0}((-\infty, \infty))). \tag{3.7}$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $E(\Delta)$ — *некоторое разложение единицы (обычное или обобщенное), отвечающее оператору* L. *Построим матричную спектральную меру по формуле* (3.5), *так называемую спектральную матрицу. Тогда справедливы соотношения ортогональности* (3.6); *разложение по собственным функциям записывается посредством* (3.7) *и* (3.2).

2. Сведе́ние к уравнению с операторными коэффициентами («удвоение»). При продолжении непосредственного перенесения результатов § 1 на оператор L в ряде случаев возникают трудности, так как не вполне ясен вид возможных формулировок. Мы сейчас покажем, как рассматриваемые вопросы свести к конструкции § 2 и тем самым получить полную спектральную теорию для L. В частности, будет получено еще одно доказательство теоремы 3.1 — как частного случая теоремы 2.4.

Пространства $l_2((-\infty, \infty))$ и $l_2(C_2; [0, \infty))$ изометричны; изометрия устанавливается соответствием:

$$l_2((-\infty, \infty)) \ni u = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots) \longleftrightarrow \hat{u} =$$

$$= (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots) \in l_2(C_2; [0, \infty)),$$

$$\hat{u}_j = (u_{-j-1}, u_j) \quad (j = 0, 1, \ldots). \tag{3.8}$$

Нетрудно подсчитать, что при таком соответствии образом выражения L будет выражение $\hat{L}$ с операторными коэффициентами вида

$$(\hat{L}\hat{u})_j = A_{j-1}\hat{u}_{j-1} + A_j\hat{u}_{j+1} + B_j\hat{u}_j \quad (j = 0, 1, \ldots);$$

$$A_j = \begin{Vmatrix} a_{-j-2} & 0 \\ 0 & a_j \end{Vmatrix} \quad (j = 0, 1, \ldots),$$

$$B_j = \begin{Vmatrix} b_{-j-1} & 0 \\ 0 & b_j \end{Vmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots), \quad B_0 = \begin{Vmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & b_0 \end{Vmatrix}. \tag{3.9}$$

При подсчете $(\hat{L}\hat{u})_0$ нужно во всем дальнейшем полагать $\hat{u}_{-1}=0$ и поэтому значение A_{-1} роли не играет. Очевидно, коэффициенты $\hat{L}$ удовлетворяют требованиям на стр. 568.

Определим по $\hat{L}$ оператор $\hat{\mathrm{L}}$; так как при изоморфизме (3.8) $l_{2,0}((-\infty, \infty))$ и $l_{2,0}(C_2; [0, \infty))$ переходят друг в друга, то L и $\hat{\mathrm{L}}$ изоморфны и поэтому результаты относительно $\hat{\mathrm{L}}$ можно перефразировать для L. Обозначим $\hat{P}_j(z)$ и $\hat{Q}_j(z)$ полиномы соответственно первого и второго рода для выражения $\hat{L}$, т. е. решения задач

$(\hat{L}\hat{P}(z))_j = z\hat{P}_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots;\ \hat{P}_{-1}(z) = 0,\ \hat{P}_0(z) = E)$ и $(\hat{L}\hat{Q}(z))_j = z\hat{Q}_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots;\ \hat{Q}_0(z) = 0,\ \hat{Q}_1(z) = A_0^{-1})$. Расписывая последние уравнения по элементам матриц и учитывая (3.1), легко получить следующую связь с $P_{\alpha;j}(z)$:

$$\begin{gathered}\hat{P}_j(z) = \begin{Vmatrix} P_{-1;-j-1}(z) & P_{0;-j-1}(z) \\ P_{-1;j}(z) & P_{0;j}(z) \end{Vmatrix}, \\ \hat{Q}_j(z) = -\frac{1}{a_{-1}} \begin{Vmatrix} P_{0;-j-1}(z) & 0 \\ 0 & P_{-1;j}(z) \end{Vmatrix} \quad (j = 0, 1, \ldots).\end{gathered} \tag{3.10}$$

Для оператора $\hat{L}$ справедлива теорема 2.4, и, следовательно, равенство Парсеваля в форме (2.43). Покажем, что оно совпадает с (3.7). Подсчитывая преобразование Фурье (2.41) вектора $\hat{u}$, отвечающего согласно (3.8) вектору $u = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots)$, получим

$$\begin{gathered}\tilde{\hat{u}}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j^*(\bar{z})\hat{u}_j = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{Vmatrix} P_{-1;-j-1}(z) & P_{-1;j}(z) \\ P_{0;-j-1}(z) & P_{0;j}(z) \end{Vmatrix} (u_{-j-1}, u_j) = \\ = (\tilde{u}_{-1}(z), \tilde{u}_0(z)),\end{gathered} \tag{3.11}$$

где $\tilde{u}_\alpha(z)$ определяются посредством (3.2). Пусть

$$\Sigma(\lambda) = \begin{Vmatrix} \sigma_{-1,-1}(\lambda) & \sigma_{-1,0}(\lambda) \\ \sigma_{0,-1}(\lambda) & \sigma_{0,0}(\lambda) \end{Vmatrix} \tag{3.12}$$

спектральная матрица из (2.43); для $u, v \in l_{2,0}((-\infty, \infty))$ при помощи (2.43) и (3.11) найдем

$$\begin{gathered}(E(\Delta)u, v)_{l_2((-\infty,\infty))} = (E(\Delta)\hat{u}, \hat{v})_{l_2(C_2;[0,\infty))} = \int_\Delta (d\Sigma(\lambda)\tilde{\hat{u}}(\lambda), \tilde{\hat{v}}(\lambda))_{C_2} = \\ = \int_\Delta \sum_{\alpha,\beta=-1,0} \tilde{u}_\beta(\lambda)\overline{\tilde{v}_\alpha(\lambda)}\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \sum_{\alpha,\beta=-1,0} \int_\Delta \tilde{u}_\alpha(\lambda)\overline{\tilde{v}_\beta(\lambda)}\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda).\end{gathered}$$

Итак, мы перешли от равенства Парсеваля в форме (2.43) к равенству в форме (3.7).

Связи (3.8) — (3.11) дают возможность легко перефразировать результаты § 2 для изучаемого оператора L. Мы поясним это лишь на некоторых фактах, тем более что в § 2 приведен лишь неполный по сравнению с § 1 перечень возможных теорем.

Так, если заметить, что $\|A_j\| = \max(a_{-j-2}, a_j)$, $j = 0, 1, \ldots$

(см. (3.9)), то из теоремы 2.9 вытекает, что *оператор* L *самосопряжен, если* $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\max(a_{-j-2}, a_j)} = \infty$ (мы не будем заниматься возможным уточнением этого условия). Благодаря вещественности коэффициентов выражения L дефектные числа оператора L равны. Так как дефектные подпространства состоят из входящих в $l_2((-\infty, \infty))$ решений уравнения $(Lu)_j = zu_j$ ($j = 0, 1, \ldots$; $\operatorname{Im} z \neq 0$), то они максимум двумерны. Таким образом, дефектное число оператора L может принимать значения 0, 1 или 2. Правило его подсчета по полиномам $P_{\alpha;j}(z)$ ($\alpha = -1, 0$; $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$) вытекает из теоремы 2.6, в которой нужно заменить $P_j(z)$ на $\hat{P}_j(z)$ из (3.10). Ясно также, как такое правило сформулировать из представления (3.1) общего решения уравнения $Lu = zu$.

Предположим, что оператор L самосопряжен. Тогда преобразование Стилтьеса $M(z)$ его спектральной матрицы $d\Sigma(\lambda)$ в некоторых случаях может быть найдено при помощи теоремы 2.8. Именно, предположим, что мы нашли такую матричную функцию от невещественного z $M(z)$ (ее значения — матрицы второго порядка), что $\hat{Q}_j(z) + \hat{P}_j(z) M(z) \in \mathrm{l}_2(C_2; [0, \infty))$ для любого $z (\operatorname{Im} z \neq 0)$. Тогда $M(z)$ и есть искомое преобразование Стилтьеса. Проиллюстрируем этот прием на простейшем примере выражения с постоянными коэффициентами (его, конечно, можно было бы просто исследовать и при помощи преобразования Фурье $(\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots) \to \to \tilde{u}(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j e^{-ij\xi}$ ($\xi \in [0, 2\pi)$), ср. п. 2, § 3, гл. VI).

Рассмотрим разностное выражение

$$(Lu)_j = \frac{1}{2} u_{j-1} + \frac{1}{2} u_{j+1} \quad (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots). \tag{3.13}$$

Очевидно, соответствующий оператор L ограничен и самосопряжен. Нетрудно подсчитать, что решения $P_{\alpha;j}(z)$ будут иметь вид:

$$P_{-1;j}(z) = \begin{cases} -U_{j-1}(z) & (j \geqslant 1), \\ 0 & (j = 0), \\ U_{|j|-1}(z) & (j \leqslant -1), \end{cases} \quad P_{0;j}(z) = \begin{cases} U_j(z) & (j \geqslant 0), \\ 0 & (j = -1), \\ -U_{|j|-2}(z) & (j \leqslant -2), \end{cases}$$

где $U_j(z)$ — полиномы Чебышева второго рода, т. е. $U_j(z) = \frac{\sin((j+1)\arccos z)}{\sin(\arccos z)}$ ($j = -1, 0, \ldots$). Таким образом, для матричных полиномов $\hat{P}_j(z)$ и $\hat{Q}_j(z)$ получим следующие формулы (см. (3.10)):

$$\hat{P}_j(z) = \begin{Vmatrix} U_j(z) & -U_{j-1}(z) \\ -U_{j-1}(z) & U_j(z) \end{Vmatrix}, \quad \hat{Q}_j(z) = 2\begin{Vmatrix} U_{j-1}(z) & 0 \\ 0 & U_{j-1}(z) \end{Vmatrix} \tag{3.14}$$

$$(j = 0, 1, \ldots).$$

Вспомним теперь пример а) на стр. 551 — выражение (3.13) на полуоси. Для этой задачи полиномами первого и второго рода будут $P_j^+(z) = U_j(z)$ $(j = -1, 0, 1, \ldots)$ и $Q_j^+(z) = 2U_{j-1}(z)$ $(j = 0, 1, \ldots)$; спектральная мера $d\sigma(\lambda)$ и ее преобразование Стилтьеса $m(z)$ имеют вид (1.85) и (1.86). Записывая (3.14) посредством $P_j^+(z)$ и $Q_j^+(z)$, получим

$$\hat{P}_j(z) = \begin{Vmatrix} P_j^+(z) & -\frac{1}{2}Q_j^+(z) \\ -\frac{1}{2}Q_j^+(z) & P_j^+(z) \end{Vmatrix}, \quad \hat{Q}_j(z) = \begin{Vmatrix} Q_j^+(z) & 0 \\ 0 & Q_j^+(z) \end{Vmatrix} \tag{3.15}$$

$$(j = 0, 1, \ldots).$$

Пусть матричная функция $M(z) = \| M_{jk} \|_{-1}^{0}$ такова, что $\hat{Q}_j(z) + \hat{P}_j(z) M(z) \in \mathrm{l}_2(C_2;\ [0, \infty))$, т. е. что при каждых $\alpha, \beta = -1, 0$ элемент $(\hat{Q}_j(z) + \hat{P}_j(z) M(z))_{\alpha\beta} \in l_2([0, \infty))$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$. Учитывая (3.15), распишем это условие. Получим

$$\begin{gathered} Q_j^+(z)\left(1 - \frac{1}{2}M_{0,-1}(z)\right) + P_j^+(z) M_{-1,-1}(z) \in l_2([0, \infty)), \\ Q_j^+(z)\left(-\frac{1}{2}M_{0,0}(z)\right) + P_j^+(z) M_{-1,0}(z) \in l_2([0, \infty)), \\ Q_j^+(z)\left(-\frac{1}{2}M_{-1,-1}(z)\right) + P_j^+(z) M_{0,-1}(z) \in l_2([0, \infty)), \\ Q_j^+(z)\left(1 - \frac{1}{2}M_{-1,0}(z)\right) + P_j^+(z) M_{0,0}(z) \in l_2([0, \infty)). \end{gathered} \tag{3.16}$$

Но, как известно (см. стр. 529), функция $m(z)$ однозначно определяется из условия $Q_j^+(z) + m(z) P_j^+(z) \in l_2([0, \infty))$, поэтому из (3.16) вытекает

$$\frac{M_{-1,-1}(z)}{1 - \frac{1}{2}M_{0,-1}(z)} = m(z), \quad \frac{M_{-1,0}(z)}{-\frac{1}{2}M_{0,0}(z)} = m(z),$$

$$\frac{M_{0,-1}(z)}{-\frac{1}{2}M_{-1,-1}(z)} = m(z), \qquad \frac{M_{0,0}(z)}{1-\frac{1}{2}M_{-1,0}(z)} = m(z).$$

Разрешая эти уравнения относительно $M_{\alpha\beta}(z)$ и пользуясь формулой (1.86), найдем:

$$M(z) = \left\| \begin{matrix} -\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} & 1-\frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \\ 1-\frac{z}{\sqrt{z^2-1}} & -\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \end{matrix} \right\|. \tag{3.17}$$

Применяя к (3.17) формулу обращения Стилтьеса, получим следующее выражение для спектральной матрицы рассматриваемой задачи:

$$d\Sigma(\lambda) = \frac{1}{\pi}\left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \end{matrix} \right\| d\lambda \text{ при } |\lambda| \leqslant 1 \text{ и}$$

$$d\Sigma(\lambda) = 0 \text{ при } |\lambda| > 1. \tag{3.18}$$

3. Обратная задача спектрального анализа. Спектральная матрица (3.12) на основании общих результатов п. 7, § 2 такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m d\sigma_{\alpha\alpha}(\lambda) < \infty \quad (\alpha = -1, 0; \quad m = 0, 1, \ldots)^*,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = -1, 0);$$

$\Sigma(\lambda)$ имеет бесконечное число точек роста. Наоборот, пусть имеется неотрицательная операторная (матричная) мера $d\Sigma(\lambda)$ вида (3.12), для которой выполнены указанные только что требования. Тогда $d\Sigma(\lambda)$ является спектральной матрицей некоторого разностного выражения на полуоси вида (2.22), у которого A_j и B_j — матрицы второго порядка. Это вытекает из сказанного в п. 8, § 2, если только заметить, что в случае конечномерного H из условия наличия у $\Sigma(\lambda)$ бесконечного числа точек роста следует, что интеграл (2.48) имеет обратный. Поясним последний факт. Пусть $P(\lambda)$ взято из (2.48), а $x \in H$ таково, что $\{P, P\}\, x = 0$. Имеем

---

* Из существования этих интегралов следует существование интегралов (2.11) для нашего случая, см. сноску на стр. 577.

$$0 = (\{P, P\}\, x, x)_H = \int_{-\infty}^{\infty} (P^*(\lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, P(\lambda)\, x,\ x)_H =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (d\Sigma(\lambda)\, P(\lambda)\, x,\ P(\lambda)\, x)_H.$$

Благодаря наличию бесконечного числа точек роста у $\Sigma(\lambda)$ из последнего равенства вытекает, что $P(\lambda)x = 0$, т. е. $x = 0$. В связи с конечномерностью H это и обозначает, что $\{P, P\}^{-1}$ существует.

Если о $d\Sigma(\lambda)$ дополнительно известно, что матрицы второго порядка, построенные по $d\Sigma(\lambda)$ согласно (2.49), таковы, что A_j при $j = 0, 1, \ldots$ и B_j при $j = 1, 2, \ldots$ диагональны, элементы на диагонали у матриц A_j положительны и B_0 имеет вид $\| c_{\alpha\beta} \|_{-1}^{0}$, где $c_{0,-1} = c_{-1,0} > 0$, то нетрудно видеть, что построенное выражение (2.22) будет эквивалентно разностному выражению исследуемого вида на всей оси. Это и есть дополнительное условие на $d\Sigma(\lambda)$, выделяющее спектральные матрицы выражений (1.1), рассматриваемых на всей оси. Процедура построения такого выражения описана в п. 8, § 2.

§ 4. Операторы в частных разностях второго порядка в полуплоскости

Перейдем к построению спектральной теории уравнений в частных разностях. Мы рассмотрим наиболее простой и характерный случай выражения второго порядка в полуплоскости. Детальное рассмотрение такого выражения во всей плоскости может быть проведено при помощи приема удвоения, примененного в п. 2, § 3, для обычных разностей.

1. Разностный оператор и доказательство равенства Парсеваля. Рассмотрим разностное выражение вида

$$(Lu)_{jk} = a_{j-1,k} u_{j-1,k} + a_{jk} u_{j+1,k} + b_{j,k-1} u_{j,k-1} + b_{jk} u_{j,k+1} + c_{jk} u_{jk}, \quad (4.1)$$

где (j, k) — целочисленная точка плоскости, т. е. $j, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Его коэффициенты a_{jk}, b_{jk} и c_{jk} предполагаются вещественными. Для L справедлива формула Грина, которую мы сейчас сформулируем.

Назовем целочисленной конечной областью G такую совокупность целочисленных точек плоскости, которая после соединения этих точек отрезками длины 1 превращается в систему квадратов, образующих связную конечную область плоскости. Точку из G, не все четыре смежные к которой входят в G, будем называть граничной, совокупность граничных точек обозначим через Γ. Точки из G, отличные от граничных, будем называть внутренними, их совокупность обозначим через G'. Нетрудно доказать следующую формулу Грина:

$$\sum_{(j,k)\in G'} [(Lu)_{jk}\bar{v}_{jk} - u_{jk}\overline{(Lv)_{jk}}] = \sum_{(j,k)\in\Gamma} [(\Re u)_{jk}\bar{v}_{jk} - u_{jk}\overline{(\Re v)_{jk}}]. \quad (4.2)$$

Здесь $(\Re u)_{jk}$— граничное выражение, имеющее следующий вид: в каждой точке (j, k) границы оно равно сумме трех или двух разностей от u, умноженных на некоторые коэффициенты, минус $c_{jk}u_{jk}$. Разности берутся между точкой из G, смежной к (j, k), и точкой (j, k); при этом если вычитание идет вдоль оси Oj (Ok) и вычитается из точки с бо́льшим номером точка с меньшим, то разность умножается на a (b), взятое в точке (j, k), и взятое в точке, из которой вычитают, в противном случае.

Из (4.2) следует, что выражение (4.1) формально самосопряжено, т. е. $\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} (Lu)_{jk}\bar{v}_{jk} = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} u_{jk}\overline{(Lv)_{jk}}$, если хотя бы одно из u, v финитно.

Обозначим через Π совокупность целочисленных точек правой полуплоскости, т. е. точек (j, k), где $j = 0, 1, \ldots; k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. В дальнейшем мы будем рассматривать выражение (4.1) на последовательностях u_{jk}, определенных для $(j, k) \in \Pi$. При вычислении $(Lu)_{0k}$, как и в § 1, будем считать $u_{-1,k} = 0$ $(k = = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Это условие играет роль нулевого граничного условия. Заметим, что, как и в п. 12, § 1, можно было бы рассматривать и более общие условия, именно: условия вида $\alpha_k u_{-1,k} + \gamma_k(\Re u)_{-1,k} = 0$ $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, где α_k и γ_k — две фиксированные последовательности вещественных чисел; $\alpha_k^2 + \gamma_k^2 > 0$.

Определим по выражению (4.1) оператор в гильбертовом пространстве $l_2(\Pi) = H_0$, состоящем из всех последовательностей $u_{jk}((j, k) \in \Pi)$ таких, что $\sum_{(j,k)\in\Pi} |u_{jk}|^2 < \infty$; $(u, v)_{l_2(\Pi)} = (u, v)_0 = = \sum_{(j,k)\in\Pi} u_{jk}\bar{v}_{jk}$. Для этого введем в рассмотрение линейное множество $l_{2,0}(\Pi)$ последовательностей u_{jk}, финитных на ∞, т. е. таких, что $u_{jk} = 0$, если расстояние точки (j, k) от $(0, 0)$ достаточно велико. Положим $(\mathrm{L}'u)_{jk} = (Lu)_{jk}$ $(u \in l_{2,0}(\Pi);\ (j, k) \in \Pi)$. Из формулы Грина (4.2) легко усмотреть, что L' эрмитов; через L обозначим его замыкание. Оператор L эрмитов, но, вообще говоря, не самосопряжен. Сопряженный к нему оператор L^*, как легко доказать с помощью формулы Грина (ср. стр. 507), имеет вид $\mathrm{L}^*u = Lu$, причем $\mathfrak{D}(\mathrm{L}^*)$ состоит из всех $u \in l_2(\Pi)$ таких, что и $Lu \in l_2(\Pi)$. Сейчас мы перейдем к построению разложений по собственным функциям самосопряженного расширения оператора L. *Всюду в дальнейшем будем считать, что* $a_{jk} > 0$ $(j = -1, 0, 1, \ldots;\ k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$.

Последнее условие позволяет ввести полиномы первого рода для выражения (4.1) — аналог полиномов $P_j(z)$. Именно, рассмотрим при комплексном z уравнение

$$(Lu)_{jk} = a_{j-1,k}u_{j-1,k} + a_{jk}u_{j+1,k} + b_{j,k-1}u_{j,k-1} + b_{jk}u_{j,k+1} + c_{jk}u_{jk} = \\ = zu_{jk} \quad ((j, k) \in \Pi). \tag{4.3}$$

Обозначим $P_{\alpha;(j,k)}(z)$ $(\alpha = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $u_{-1,k} = 0$, $u_{0k} = \delta_{k\alpha}$ $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Так как $a_{jk} \neq 0$, то оно единственным образом определяется из рекуррентного соотношения (4.3). Ясно, что $P_{\alpha;(j,k)}(z)$ равно 0 вне угла $A\alpha B$ (см. рис. 13), а в этом углу каждое $P_{\alpha;(j,k)}(z)$ будет полиномом от z с вещественными коэффициентами; распределение степеней этих полиномов указано на рис. 13.

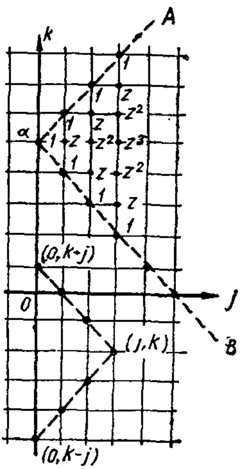


Рис. 13.

Пусть u_{jk} $((j, k) \in \Pi)$ — произвольное решение уравнения (4.3), удовлетворяющее, естественно, условию $u_{-1,k} = 0$ $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Очевидно, это решение может быть выражено через $P_{\alpha;(j,k)}(z)$ и u_{0k}:

$$u_{jk} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} u_{0\alpha}P_{\alpha;(j,k)}(z) \quad ((j, k) \in \Pi). \tag{4.4}$$

Заметим, что $P_{\alpha;(j,k)}(z)$ при фиксированном (j, k) обращается в 0 для всех α, лежащих вне $[k - j, k + j]$ (см. рис. 13), поэтому при каждом (j, k) сумма в (4.4) конечна.

Пусть $E(\Delta)$, вообще говоря, обобщенное разложение единицы, отвечающее L. Оператор L действует в пространстве $l_2(\Pi)$, которое (после введения новой нумерации точек из Π) совпадает с $l_2([0, \infty))$. Поэтому к оператору L применимы результаты стр. 364—365: справедливо представление

$$E(\Delta) = \int_{\Delta} P(\lambda)\, d\varrho(\lambda), \tag{4.5}$$

где $P(\lambda)$ — оператор обобщенного проектирования, действующий из пространства с весом $l_2(\Pi, p_{jk})$ в пространство с весом $l_2\left(\Pi, \frac{1}{p_{jk}}\right)$. Здесь последовательность $p_{jk} \geqslant 1$ $((j, k) \in \Pi)$ такова, что $\sum_{(j,k)\in\Pi}\frac{1}{p_{jk}}<\infty$. Оператор $P(\lambda)$ представим посредством некоторого положительно определенного ядра $\Phi((j, k), (l, m); \lambda)$ $((j, k), (l, m)\in\Pi)$. Ядро $\Phi((j, k), (l, m); \lambda)$ по каждой из переменных (j, k) и (l, m) удовлетворяет уравнению $Lu=\lambda u$ с условием $u_{-1,k}=0$ $(k=\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. В этом убеждаемся так же, как и при доказательстве леммы 1.1 на стр. 514. Поэтому к $\Phi((j, k), (l, m); \lambda)$ по каждой из переменных можно применить представление (4.4), в результате получим:

$$\Phi((j, k), (l, m); \lambda)=\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\Phi((0, \alpha), (0, \beta); \lambda)P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)P_{\beta;(l,m)}(\lambda) \tag{4.6}$$

(сумма здесь конечна).

Обозначим, как обычно, $\delta_{(j,k)}$ — δ-последовательность, сосредоточенную в $(j, k)\in\Pi$ ($\delta_{(j,k)}$ равна 1 в (j, k) и нулю в остальных точках Π). Таким образом, $\Phi((j, k), (l, m); \lambda)=(P(\lambda)\delta_{(l,m)}, \delta_{(j,k)})_0$ и из (4.5) и (4.6) следует:

$$(E(\Delta)\delta_{(l,m)}, \delta_{(j,k)})_0=\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\int_{\Delta}P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)P_{\beta;(j,k)}(\lambda)\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \tag{4.7}$$

$$((j, k), (l, m)\in\Pi),$$

где положено

$$d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)=\Phi((0, \alpha), (0, \beta); \lambda)\,d\varrho(\lambda)\quad(\alpha, \beta=\ldots, -1, 0, 1, \ldots). \tag{4.8}$$

Матрица $d\Sigma(\lambda)=\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ носит название спектральной. Полагая в (4.7) $(j, k)=(0, \alpha)$ и $(l, m)=(0, \beta)$, получим

$$\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)=(E(\Delta)\delta_{(0,\beta)}, \delta_{(0,\alpha)})_0\quad(\alpha,\beta=\ldots, -1, 0, 1, \ldots); \tag{4.9}$$

таким образом, спектральная матрица является «граничным значением» ядра оператора $E(\Delta)$, т. е. спектральной функции. Ясно, что матрица $\Sigma(\Delta)$ положительно определенная.

Равенство (4.7) при $\Delta=(-\infty, \infty)$ приводит к следующим соотношениям ортогональности для полиномов $P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)$:

$$\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)P_{\beta;(l,m)}(\lambda)\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)=\delta_{(j,k),(l,m)} \tag{4.10}$$

$$((j, k), (l, m)\in\Pi).$$

Введем для финитной последовательности u преобразование Фурье $\tilde{u}(\lambda)=(\ldots, \tilde{u}_{-1}(\lambda), \tilde{u}_0(\lambda), \tilde{u}_1(\lambda), \ldots)$, полагая

$$\tilde{u}_\alpha(\lambda) = \sum_{(j,k)\in\tilde{\Pi}} u_{jk} P_{\alpha;(j,k)}(\lambda) \quad (\alpha = \ldots, -1, 0, 1, \ldots;\ u \in l_{2,0}(\Pi)). \quad (4.11)$$

Ясно, что $\tilde{u}_\alpha(\lambda)$ — финитная последовательность по α. Используя (4.7), можем переписать равенство Парсеваля в виде:

$$(E(\Delta)u, v)_0 = \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} \int_\Delta \tilde{u}_\alpha(\lambda)\overline{\tilde{v}_\beta(\lambda)}\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \quad (u, v \in l_{2,0}(\Pi)). \quad (4.12)$$

Мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть $E(\Delta)$ — некоторое разложение единицы (обычное или обобщенное), отвечающее оператору* L. *Построим спектральную матрицу $d\Sigma(\lambda) = \|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ по формуле* (4.9). *Тогда справедливы соотношения ортогональности* (4.10); *разложение по собственным функциям записывается посредством* (4.12) *и* (4.11)*.

Легко видеть, что интеграл (4.12) можно понимать как операторный интеграл типа, рассмотренного в п. 3, § 2. Действительно, обозначим через Q оператор ортогонального проектирования пространства $l_2(\Pi)$ на его подпространство, состоящее из последовательностей, аннулирующихся вне оси Ok. Тогда, очевидно, $\Sigma(\Delta)$ является матрицей оператора $QE(\Delta)Q$. Это семейство операторов является неотрицательной операторной мерой и интеграл в (4.12)

---

* В случае выражения (4.1), действующего во всей плоскости (j, k) $(j, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, предыдущие рассуждения модифицируются следующим образом. Нужно, как в п. 1, § 3, ввести две системы линейно независимых решений уравнения (4.3) $P_{-1,\alpha;(j,k)}(z)$ и $P_{0,\alpha;(j,k)}(z)$ $(\alpha, j, k = \ldots, -1, 0, 1\ldots)$, удовлетворяющих условиям:

$$P_{-1,\alpha;(-1,k)}(z) = \delta_{\alpha k}, \quad P_{-1,\alpha;(0,k)}(z) = 0;$$

$$P_{0,\alpha;(-1,k)}(z) = 0, \quad P_{0,\alpha;(0,k)}(z) = \delta_{\alpha k} \quad (\alpha, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots).$$

Тогда для любого решения уравнения (4.3) получим вместо (4.4) представление $u_{jk} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} (u_{-1,\alpha}P_{-1,\alpha;(j,k)}(z) + u_{0,\alpha}P_{0,\alpha;(j,k)}(z))$ $(j, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Если, как и в (4.6), использовать это представление, то получим вместо спектральной матрицы $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ спектральную матрицу вида

$$\left\| \begin{matrix} d\sigma_{-1,-1;\alpha\beta}(\lambda) & d\sigma_{-1,0;\alpha\beta}(\lambda) \\ d\sigma_{0,-1;\alpha\beta}(\lambda) & d\sigma_{0,0;\alpha\beta}(\lambda) \end{matrix} \right\|_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}.$$

Формулы (4.10), (4.11) и (4.12) должным образом изменятся — подобно тому, как изменились соответствующие формулы в § 3 по сравнению с § 1. Подробное изучение возникающих разложений, аналогичное проведенному для случая полуплоскости в пп. 3 и 4 этого параграфа, может быть получено при помощи приема удвоения (п. 2, § 3).

можно понимать как интеграл по ней. Введем гильбертово пространство $L_2(l_2((-\infty, \infty)); (-\infty, \infty), d\Sigma(\Delta))$, которое сокращенно будем обозначать $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$. Тогда равенство Парсеваля (4.12) можно переписать в виде

$$(E(\Delta)u, v)_0 = \int_\Delta (d\Sigma(\lambda)\widetilde{u}(\lambda), \widetilde{v}(\lambda))_{l_2((-\infty,\infty))} \quad (u, v \in l_{2,0}(\Pi)). \tag{4.13}$$

2. **Изучение преобразований Фурье.** Преобразование Фурье $\widetilde{u}(\lambda)$ последовательности $u \in l_{2,0}(\Pi)$ можно мыслить как элемент пространства $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$. Изучим сейчас более подробно совокупность $\widetilde{l_{2,0}(\Pi)}$ всех таких $\widetilde{u}(\lambda)$. С этой целью рассмотрим один процесс ортогонализации, который также будет необходим при исследовании обратной задачи.

Пусть $\Sigma(\Delta)$ — некоторая неотрицательная операторная мера, значениями которой служат ограниченные операторы в пространстве $l_2((-\infty, \infty))$. Записывая $\Sigma(\Delta)$ в базисе δ_k $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, получим матрицу $\|\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)\|_{-\infty}^{\infty}$; ее мы также будем обозначать $\Sigma(\Delta)$. Предположим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m d\sigma_{\alpha\alpha}(\lambda) < \infty \; (m = 0, 1, \ldots; \; \alpha = \ldots, -1, 0, 1, \ldots). \tag{4.14}$$

Из условия (4.14) вытекает, что для всякой финитной последовательности $\xi(\lambda) = (\ldots, \xi_{-1}(\lambda), \xi_0(\lambda), \xi_1(\lambda), \ldots)$, где $\xi_\alpha(\lambda)$ — полиномы, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} (d\Sigma(\lambda)\xi(\lambda), \xi(\lambda))_{l_2((-\infty,\infty))} < \infty$. Это показывает, что $\xi(\lambda) \in L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$.

Будем предполагать, что для каждой $(j, k) \in \Pi$ система $(j+1)^2$ векторов из $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$

$$\begin{array}{llll}
\delta_{k+j} & & & \\
\delta_{k+j-1} & \lambda\delta_{k+j-1} & & \\
\delta_{k+j-2} & \lambda\delta_{k+j-2} & \lambda^2\delta_{k+j-2} & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots \lambda^j\delta_k \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\delta_{k-j+2} & \lambda\delta_{k-j+2} & \lambda^2\delta_{k-j+2} & \\
\delta_{k-j+1} & \lambda\delta_{k-j+1} & & \\
\delta_{k-j} & & &
\end{array} \tag{4.15}$$

линейно независима в этом пространстве. Обозначим через $D_{jk} \in L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$ вектор единичной длины, являющийся линейной комбинацией с вещественными коэффициентами векторов (4.15), ортогональный ко всем этим векторам, за исключением $\lambda^j\delta_k$, и такой, что последний вектор входит в разложение D_{jk} с положительным коэффициентом. Этими условиями вектор D_{jk} определяется однозначно. Отметим, что для векторов D_{jk} выполняется следующее соотношение ортогональности: $(D_{lm}, D_{jk})_{L_2(\infty;\ d\Sigma(\lambda))} = 0$, если точка $(l, m) \neq (j, k)$ попадает внутрь или на границу треугольника $(0, k+j)$, (j, k), $(0, k-j)$ (см. рис. 13).

Лемма 4.1. *Если* $d\Sigma(\lambda)$ — *спектральная матрица некоторого разностного выражения* (4.1), *то соотношения* (4.14) *выполняются и векторы* (4.15) *при любых* $(j, k) \in \Pi$ *линейно независимы. При этом* $D_{jk} = P_{.;(j,k)}(\cdot)$ *в* $L_2(\infty;\ d\Sigma(\lambda))$ *и вещественная линейная оболочка векторов* $P_{.;(l,m)}(\cdot)$, *где* (l, m) *изменяется внутри и на границе треугольника* $(0, k+j)$, (j, k), $(0, k-j)$, *совпадает с вещественной линейной оболочкой векторов* (4.15).

Доказательство. Так как при $u \in l_{2,0}(\Pi)$ $\widetilde{(L^m u)}(\lambda) = \lambda^m \tilde{u}(\lambda)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ (это вытекает хотя бы из (4.2)), то с помощью (4.12) получаем для четных m:

$$\infty > (L^m\delta_{(0,\alpha_0)}, \delta_{(0,\alpha_0)})_0 = \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{(L^m\delta_{(0,\alpha_0)})}(\lambda)\,\widetilde{(\delta_{(0,\alpha_0)})}(\lambda)\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^m \delta_{\alpha\alpha_0}\delta_{\beta\alpha_0}\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^m\,d\sigma_{\alpha_0\alpha_0}(\lambda).$$

Отсюда следуют неравенства (4.14).

Покажем теперь, что система векторов (4.15) линейно независима. В самом деле, с помощью рис. 13 легко понять, что вектор $P_{.(j,k)}(\cdot)$ является линейной комбинацией с вещественными коэффициентами векторов этой системы. Отсюда следует, что вещественная линейная оболочка $(j+1)^2$ векторов (4.15) содержит ортонормированную (в силу (4.10)) систему векторов

$$\begin{array}{llll}
P_{.;(0,k+j)}(\cdot), & & & \\
P_{.;(0,k+j-1)}(\cdot) & P_{.;(1,k+j-1)}(\cdot), & & \\
P_{.;(0,k+j-2)}(\cdot) & P_{.;(1,k+j-2)}(\cdot) & P_{.;(2,k+j-2)}(\cdot), & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots P_{.;(j,k)}(\cdot), \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
P_{.;(0,k-j+2)}(\cdot) & P_{.;(1,k-j+2)}(\cdot) & P_{.;(2,k-j+2)}(\cdot), & \\
P_{.;(0,k-j+1)}(\cdot) & P_{.;(1,k-j+1)}(\cdot), & & \\
P_{.;(0,k-j)}(\cdot); & & &
\end{array} \tag{4.16}$$

количество которых также равно $(j+1)^2$. Последнее, очевидно, и обозначает линейную независимость системы (4.15).

Наконец, вещественная линейная оболочка векторов (4.15), за исключением $\lambda^j\delta_k$, совпадает с вещественной линейной оболочкой векторов (4.16), за исключением $P_{.;(j,k)}(\cdot)$, так как последняя система векторов получается из первой посредством линейных комбинаций с вещественными коэффициентами, причем размерность обеих оболочек равна $(j+1)^2-1$. Поэтому из ортогональности $P_{.;(j,k)}(\cdot)$ к $P_{.;(l,m)}(\cdot)$ $((j,k)\neq(l,m))$ вытекает ортогональность $P_{.;(j,k)}(\cdot)$ к векторам (4.15), за исключением $\lambda^j\delta_k$. Кроме того, $P_{.;(l,k)}(\cdot)$ — единичной длины и коэффициент при $\lambda^j\delta_k$ у него положительный (последнее вытекает из построения полинома $P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)$ как решения уравнения (4.3) и положительности коэффициентов a_{lm}). Поэтому в силу единственности векторов D_{jk} заключаем, что в $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$ $P_{.;(j,k)}(\cdot)=D_{jk}$ $((j,k)\in\Pi)$. Лемма доказана.

Из леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 4.2. *Совокупность $\widetilde{l_{2,0}(\Pi)}$ преобразований Фурье последовательностей из $l_{2,0}(\Pi)$ состоит из всех финитных последовательностей вида $\xi(\lambda)=(\ldots,\xi_{-1}(\lambda),\xi_0(\lambda),\xi_1(\lambda),\ldots)$, где $\xi_\alpha(\lambda)$ — некоторый полином от λ $(\alpha=\ldots,-1,0,1,\ldots)$. Если $\xi(\lambda)\in\in\widetilde{l_{2,0}(\Pi)}$ такова, что $(\xi(\lambda),\xi(\lambda))_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=0$, то $\xi_\alpha(\lambda)\equiv 0$ $(\alpha==\ldots,-1,0,1,\ldots)$.*

Доказательство. Для проверки первого утверждения достаточно показать, что каждое $\lambda^j\delta_k\in\widetilde{l_{2,0}(\Pi)}$ $(j=0,1,\ldots;$ $k==\ldots,-1,0,1,\ldots)$. Последнее же вытекает из того, что $\lambda^j\delta_k$ является линейной комбинацией соответствующего набора векторов $P_{.;(l,m)}(\cdot)$, каждый из которых служит преобразованием Фурье последовательности $\delta_{(l,m)}\in l_{2,0}(\Pi)$. Второе утверждение вытекает из того, что вектор $\xi(\lambda)\in\widetilde{l_{2,0}(\Pi)}$ является линейной комбинацией линейно независимых векторов (4.15), если только j достаточно большое. Поэтому если $(\xi(\lambda),\xi(\lambda))_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=0$, то все коэффициенты в этой комбинации равны нулю. Последнее же и обозначает, что $\xi_\alpha(\lambda)\equiv 0$ $(\alpha=\ldots,-1,0,1,\ldots)$. Теорема доказана.

Эта теорема показывает, что переход $u\to\tilde{u}(\lambda)$ является взаимно однозначным соответствием между финитными последовательностями u и финитными последовательностями полиномов. Равенство Парсеваля (4.13) (при $\Delta=(-\infty,\infty)$) утверждает, что это изометрия между $l_{2,0}(\Pi)\subset l_2(\Pi)$ и $\widetilde{l_{2,0}(\Pi)}\subset L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$. По непрерывности эта изометрия может быть распространена на все $l_2(\Pi)$, его образом $\widetilde{l_2(\Pi)}$ будет служить замыкание в $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$ множества $\widetilde{l_{2,0}(\Pi)}$.

Оператор L при изометрии переходит в оператор $\widetilde{L}$ умножения на λ (т. е оператор $\widetilde{u}(\lambda) \to \lambda \widetilde{u}(\lambda)$), определенный сперва на $\widetilde{l_{2,0}(\Pi)}$, а затем расширенный по замыканию на все $\mathfrak{D}(\widetilde{L})$.

В нашем случае справедливы аналоги теорем 1.7 и 1.9 (или 2.5), в чем нетрудно убедиться, должным образом модифицируя доказательства на стр. 520—522. В частности, аналог теоремы 1.9 показывает, что *если неотрицательная операторная мера* $d\Sigma(\lambda)$ *такова, что справедливо равенство Парсеваля* (4.13) *при* $\Delta = (-\infty, \infty)$ (*или имеют место соотношения ортогональности* (4.10)), *то* $d\Sigma(\lambda)$ *является спектральной матрицей, построенной по некоторому разложению единицы* $E(\Delta)$ *оператора* L.

В заключение заметим, что условие линейной независимости каждой системы векторов (4.15) $(j, k) \in \Pi$) в некотором пространстве $L_2(\infty;\ d\Sigma(\lambda))$ (условия (4.14) предполагаются выполненными) влечет наличие бесконечного числа точек роста у $\Sigma(\lambda)$. В самом деле, предположим противное. Тогда конечным будет число точек роста и у фиксированной $\sigma_{\alpha_0\alpha_0}(\lambda)$. Построим полином $R(\lambda) = C_n\lambda^n + \ldots + C_0 \not\equiv 0$ такой, что

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |R(\lambda)|^2\, d\sigma_{\alpha_0\alpha_0}(\lambda) = 0.$$

Для $\xi(\lambda) = C_n\lambda^n\delta_{\alpha_0} + \ldots + C_0\delta_{\alpha_0}$ имеем:

$$(\xi(\lambda),\ \xi(\lambda))_{L_2(\infty;\ d\Sigma(\lambda))} = I = 0,$$

т. е. система (4.15) линейно зависима, что абсурдно.

Обратное утверждение неверно, соответствующий простой пример будет приведен в п. 5.

3. Сведе́ние к уравнению с операторными коэффициентами. До сих пор мы перенесли на выражение в частных разностях (4.1) лишь элементарные факты § 1. Сейчас будет намечен путь, на котором можно получить и остальные результаты. Он заключается в сведе́нии рассматриваемого вопроса к исследованию выражения с операторными коэффициентами типа (2.22).

Пространства $l_2(\Pi)$ и $l_2(l_2((-\infty, \infty));\ [0, \infty))$ изометричны. Изометрия устанавливается соответствием:

$$l_2(\Pi) \ni u = u_{jk} \longleftrightarrow \hat{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots) \in l_2(l_2((-\infty, \infty));\ [0, \infty)).$$

$$\hat{u}_j = (\ldots, u_{j,-1}, u_{j,0}, u_{j,1}, \ldots)\ (j=0, 1, \ldots). \tag{4.17}$$

При этом соответствии образом выражения L будет выражение $\hat{L}$ с операторными коэффициентами вида

$$(\hat{L}\hat{u})_j = \hat{A}_{j-1}\hat{u}_{j-1} + \hat{A}_j\hat{u}_{j+1} + \hat{B}_j\hat{u}_j;$$

$$\hat{A}_j = \begin{Vmatrix} \ddots & & & & \\ & a_{j,-1} & & 0 & \\ & & a_{j,0} & & \\ & 0 & & a_{j,1} & \\ & & & & \ddots \end{Vmatrix},$$

$$\hat{B}_j = \tag{4.18}$$

$$= \begin{Vmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ b_{j,-3} & c_{j,-2} & b_{j,-2} & & & & \\ & b_{j,-2} & c_{j,-1} & b_{j,-1} & & 0 & \\ & & b_{j,-1} & c_{j,0} & b_{j,0} & & \\ & 0 & & b_{j,0} & c_{j,1} & b_{j,1} & \\ & & & & b_{j,1} & c_{j,2} & b_{j,2} \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{Vmatrix}$$

$$(j = 0, 1, \ldots).$$

В этом и следующем пунктах будем требовать, чтобы

$$\sup_k a_{jk},\ \sup_k |b_{jk}|,\ \sup_k |c_{jk}| < \infty, \qquad \inf_k a_{jk} > 0 \qquad (j=0,\ 1, \ldots). \tag{4.19}$$

Условия (4.19) обеспечивают ограниченность операторов $\hat{A}_j$, $\hat{B}_j$ и $\hat{A}_j^{-1}$, которая необходима для построений § 2 (в связи с доказательством ограниченности $\hat{B}_j$ см. теорему 1.2). Заметим, что ограничения (4.19) можно было бы и не накладывать, а развить теорию выражений с неограниченными операторными коэффициентами специального вида (4.18), близкую к теории § 2. Однако на этих вопросах мы останавливаться не будем.

Построим по выражению (4.18) оператор $\hat{\mathrm{L}}'$ в пространстве $l_2\,(l_2\,((-\infty, \infty));\ [0, \infty))$, полагая $(\hat{\mathrm{L}}'\hat{u})_j = (\hat{L}\hat{u})_j$, где $\hat{u} \in \mathfrak{D}(\hat{\mathrm{L}}') = l_{2,0}\,(l_2\,((-\infty,\ \infty));\ \ [0, \infty))$. Оператор $\hat{\mathrm{L}}'$ не является образом оператора L', построенного на стр. 598 (т. е. $\hat{\mathrm{L}}' \neq \hat{\mathrm{L}}$), так как $\widehat{l_{2,0}(\Pi)}$ более узкое множество, чем $l_{2,0}(l_2((-\infty,\infty)); [0,\infty))$. Однако нетрудно убедиться, что замыкание $\hat{\mathrm{L}}'$ содержит $\hat{\mathrm{L}}'$. Это является следствием ограниченности операторов $\hat{A}_j$ и $\hat{B}_j$ при каждом j, которая дает возможность написать соотношение: в $l_2(l_2((-\infty,\infty)); [0,\infty))$ $\lim\limits_{N\to\infty}\hat{L}\hat{u}^{(N)} = \hat{L}\hat{u}$, где $\hat{u}\in l_{2,0}(l_2((-\infty,\infty)); [0,\infty))$, а $\hat{u}_j^{(N)}$ отличается от $\hat{u}_j$ тем, что координаты последнего вектора с индексом $k, |k|>N$ заменены нулями. Из сказанного ясно, что образом оператора L, построенного на стр. 598, является оператор $\hat{\mathrm{L}}$—замыкание $\hat{\mathrm{L}}'$. Итак, изучение операторов L и $\hat{\mathrm{L}}$ — эквивалентные задачи.

Найдем полиномы первого рода $\hat{P}_j(z)$ для выражения (4.18). Учитывая, что они удовлетворяют уравнению $(\hat{L}\hat{U})_j = z\hat{U}_j (j=0, 1, \ldots; U_{-1} = 0, U_0 = E)$ и расписывая это уравнение по элементам матриц, легко получим, что

$$\hat{P}_j(z) = \| P_{\beta;(j,\alpha)}(z) \|_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} \quad (j = 0, 1, \ldots). \tag{4.20}$$

Заметим, что элементы последней матрицы с индексом $\beta; (j, \alpha)$ аннулируются, если $|\alpha-\beta|>j$. Операторы $\hat{P}_j(z)$, конечно, являются ограниченными в пространстве $l_2((-\infty,\infty))$.

Ясно, что разложение по собственным функциям для оператора $\hat{\mathrm{L}}$, построенное согласно теореме 2.4, совпадает с подобным разложением для оператора L, изложенным в п. 1. Если записать операторную спектральную меру $d\,\Sigma(\lambda)$ теоремы 2.4 в базисе δ_α пространства $l_2((-\infty,\infty))$, то получим спектральную матрицу теоремы 4.1. Мы на этих связях подробно останавливаться не будем и заметим лишь, что преобразования Фурье, вычисленные для $u \in l_{2,0}(\Pi)$ согласно (4.11) и согласно (2.41) по существу совпадают. Действительно, учитывая вещественность коэффициентов полиномов от z, являющихся элементами матриц (4.20), получим

$$\tilde{\hat{u}}_\alpha(z) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}_j^*(\bar{z})\hat{u}_j\right)_\alpha = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} P_{\alpha;(j,\beta)}(z)\, u_{j\beta} = \tilde{u}_\alpha(z)$$
$$(\alpha = \ldots, -1, 0, 1, \ldots).$$

Результаты п. 7, § 2, приводят, как нетрудно убедиться, к теореме 4.2 и последующим фактам п. 2. Таким образом, содержание пп. 6 и 7, § 2 охватывает (при дополнительных ограничениях (4.19)) основное содержание пп. 1 и 2 этого параграфа.

4. Дальнейшая теория операторов в частных разностях. Посмотрим, как выглядит дальнейший материал § 2 в применении к выражению (4.1), записанному в виде (4.18).

Остановимся на подсчете дефектных чисел оператора L; эти числа равны благодаря вещественности коэффициентов выражения L. *Зафиксируем невещественное* z *и рассмотрим всевозможные* $x \in l_2$ $((-\infty, \infty))$, *для которых* $\varphi_{jk} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} x_\alpha P_{\alpha;(j,k)}(\bar{z})$ *входят в* $l_2(\Pi)$; *такие* $\varphi = (\varphi_{jk})$ *пробегают соответствующее дефектное подпространство оператора* L. В самом деле, векторы $\varphi \in l_2(\Pi)$ входят в дефектное подпространство тогда и только тогда, когда они удовлетворяют уравнению $L^* \varphi = \bar{z}\varphi$. Учитывая вид L^* и формулу (4.4), приходим к утверждению, которое по существу совпадает с теоремой 2.7. Из теоремы 2.6 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены ограничения* (4.19). *Для операторных полиномов* $P_j(z)$, *введенных посредством* (4.20), *существует сильный предел* (2.50), *определяющий ограниченный по норме единицей неотрицательный оператор* $\Gamma(z)$, *действующий в пространстве* $l_2((-\infty, \infty))$. *Размерность ортогонального дополнения к подпространству нулей оператора* $\Gamma(z)$ *одна и та же для всех невещественных* z *и совпадает с дефектным числом оператора* L.

Из теоремы 2.9 вытекает дальнейшая теорема.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены ограничения* (4.19). *Если*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sup\limits_k a_{jk}} = \infty,$$

то оператор L *самосопряжен**.

Для этого случая легко перефразировать и другие факты пп. 10 и 11, § 2. Существенно отметить, что для выражения (4.1) в частных разностях можно получить результаты типа теорем 1.12, 1.14, 1.17, 1.18, однако на этих вопросах мы останавливаться не можем, так как они не излагались для общих уравнений с операторными коэффициентами.

5. Обратная задача спектрального анализа для выражений в частных разностях. Мы сперва изложим решение этой задачи, независимое от соответствующих рассмотрений для уравнений с операторными коэффициентами (п. 8, § 2), а затем сравним эти результаты. Подобно предыдущим случаям (п. 5, § 1; п. 8, § 2; п. 3, § 3) L будет строиться по спектральной матрице.

---

* Этот результат допускает усиление. Именно, условия (4.19) можно заменить условиями: $\sup\limits_k |b_{jk}|$, $\sup\limits_k |a_{j-1,k} + a_{jk} + c_{jk}| < \infty$, $\inf\limits_k a_{jk} > 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$.

Выведем аналогичные (1.33) формулы, выражающие коэффициенты выражения (4.1) через $P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)$. Имеем

$$a_{j-1,k}P_{\alpha;(j-1,k)}(\lambda)+a_{jk}P_{\alpha;(j+1,k)}(\lambda)+b_{j,k-1}P_{\alpha;(j,k-1)}(\lambda)+$$
$$+b_{jk}P_{\alpha;(j,k+1)}(\lambda)+c_{jk}P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)=\lambda P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)$$
$$((j,k)\in\Pi;\ \alpha=\ldots,-1,\ 0,\ 1,\ldots;\ -\infty<\lambda<\infty).$$

Умножая скалярно в $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$ левую и правую части этого равенства на $P_{\cdot;(j+1,k)}(\cdot)$, $P_{\cdot;(j,k+1)}(\cdot)$ и $P_{\cdot;(j,k)}(\cdot)$ и пользуясь соотношениями (4.10), получим требуемые формулы:

$$a_{jk}=\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)P_{\beta;(j+1,k)}(\lambda)\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \tag{4.21}$$

$$b_{jk}=\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)P_{\beta;(j,k+1)}(\lambda)\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda),$$

$$c_{jk}=\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)P_{\beta;(j,k)}(\lambda)\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)$$

$$((j,k)\in\Pi).$$

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 4.5. *Если двум разностным выражениям вида* (4.1) *отвечает одна и та же спектральная матрица, то коэффициенты этих выражений совпадают.*

Доказательство. Пусть $d\Sigma(\lambda)$ — спектральная матрица выражения (4.1), а $P_{\alpha;(j,k)}(\lambda)$ — отвечающие ему полиномы первого рода. Формулы (4.21) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
a_{jk}&=(\lambda P_{\cdot;(j,k)}(\lambda),P_{\cdot;(j+1,k)}(\lambda))_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))},\\
b_{jk}&=(\lambda P_{\cdot;(j,k)}(\lambda),P_{\cdot;(j,k+1)}(\lambda))_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))},\\
c_{jk}&=(\lambda P_{\cdot;(j,k)}(\lambda),P_{\cdot;(j,k)}(\lambda))_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}\qquad ((j,k)\in\Pi).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Рассмотрим векторы $D_{jk}\in L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$, полученные при помощи процесса ортогонализации, описанного на стр. 603. В силу леммы 4.1 в $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$ $D_{jk}=P_{\cdot;(j,k)}(\cdot)$, а значит, и $\lambda P_{\cdot;(j,k)}(\lambda)=$ $=\lambda D_{jk}$ $((j,k)\in\Pi)$. Поэтому равенства (4.22) примут вид

$$a_{jk}=(\lambda D_{jk},D_{j+1,k})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))},\ b_{jk}=(\lambda D_{jk},D_{j,k+1})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}, \tag{4.23}$$
$$c_{jk}=(\lambda D_{jk},D_{jk})_{L_2(\infty;\,d\Sigma(\lambda))}\ ((j,k)\in\Pi).$$

Формулы (4.23) показывают, что коэффициенты выражения (4.1) однозначно определяются по $d\Sigma(\lambda)$. Теорема доказана.

Основной является следующая теорема.

Теорема 4.6. *Пусть $d\Sigma(\lambda) = \|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ — некоторая неотрицательная операторная мера, значениями которой служат ограниченные операторы в $l_2((-\infty, \infty))$. Для того чтобы $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ была спектральной матрицей некоторого разностного выражения (4.1) с граничным условием $u_{-1,k} = 0$ $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) выполнялись неравенства (4.14), причем*

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_{\alpha\alpha}(\lambda) = 1 \qquad (\alpha = \ldots, -1, 0, 1, \ldots); \tag{4.24}$$

2) каждая система векторов (4.15) была линейно независима в $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$; 3) векторы D_{jk}, построенные по $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$, удовлетворяли соотношениям ортогональности

$$(D_{jk}, D_{lm})_{L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))} = \delta_{(j,k)(l,m)} \qquad ((j, k), (l, m) \in \Pi).$$

При выполнении этих условий коэффициенты разностного выражения строятся по формулам (4.23).

Доказательство. Пусть $d\Sigma(\lambda)$ — спектральная матрица некоторого выражения (4.1), тогда, полагая в (4.10) $(j, k) = (l, m) = (0, \alpha_0)$, прийдем к (4.24). В остальной части необходимость условий 1) и 2) вытекает из леммы 4.1. Условие 3) вытекает из равенства $D_{jk} = P_{\cdot;(j,k)}(\cdot)$ и соотношений ортогональности (4.10).

Перейдем к доказательству достаточности. Определим числа a_{jk}, b_{jk} и c_{jk} $((j, k) \in \Pi)$ посредством формул (4.23).

Покажем, что $a_{jk} > 0$. Действительно, в $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$ $D_{jk} = A\lambda^j\delta_k + S$ $(A > 0)$, где S обозначает линейную комбинацию с вещественными коэффициентами векторов (4.15) (за исключением $\lambda^j\delta_k$). Поэтому $\lambda D_{jk} = A\lambda^{j+1}\delta_k + S'$, где S' — линейная комбинация с вещественными коэффициентами векторов (4.15), где вместо j положено $j+1$ (за исключением $\lambda^{j+1}\delta_k$). Кроме того, положим $D_{j+1,k} = B\lambda^{j+1}\delta_k + S''$ $(B > 0)$, где S'' — линейная комбинация того же вида, что и S'. Но S' и S'' ортогональны к $D_{j+1,k}$, поэтому

$$a_{jk} = (\lambda D_{jk}, D_{j+1,k})_{L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))} = (A\lambda^{j+1}\delta_k, D_{j+1,k})_{L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))} =$$
$$= \frac{A}{B}(B\lambda^{j+1}\delta_k, D_{j+1,k})_{L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))} = \frac{A}{B}(D_{j+1,k}, D_{j+1,k})_{L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))} =$$
$$= \frac{A}{B} > 0 \qquad ((j, k) \in \Pi).$$

Числа b_{jk} и c_{jk} вещественны. Это вытекает из соотношений ортогональности для D_{jk} и того, что λD_{jk} можно разложить в линейную комбинацию с вещественными коэффициентами некоторого количества векторов D_{lm}. Итак, a_{jk}, b_{jk} и c_{jk} могут быть взяты в качестве коэффициентов разностного выражения вида (4.1).

Будем считать, что $D_{-1,k}=0$ $(k=\ldots-1, 0, 1, \ldots)$ и положим

$$\xi = a_{j-1,k}D_{j-1,k}+a_{jk}D_{j+1,k}+b_{j,k-1}D_{j,k-1}+b_{jk}D_{j,k+1}+c_{jk}D_{jk}.$$

Покажем, что

$$(\xi, D_{lm})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=(\lambda D_{jk}, D_{lm})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}((j,k),(l,m)\in\Pi). \quad (4.25)$$

В самом деле, если (l,m) — соседняя или совпадает с (j,k), например $l=j+1$, $m=k$, то в силу соотношений ортогональности для D_{rs} $(\xi, D_{j+1,k})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=a_{jk}=(\lambda D_{jk}, D_{j+1,k})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}$. Если (l,m) — не соседняя с (j,k), то в силу ортогональности $(\xi, D_{lm})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=0$. Однако в этом случае и $(\lambda D_{jk}, D_{lm})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=0$. Действительно, λD_{jk} является линейной комбинацией D_{rs}, где (r,s) меняется внутри и на границе треугольника $(0,k+j+1)$, $(j+1,k)$, $(0,k-j-1)$, поэтому если (l,m) лежит вне этого треугольника, то $(\lambda D_{jk}, D_{lm})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=0$. Пусть теперь (l,m) лежит на этом треугольнике и не является соседний и не совпадает с (j,k). Очевидно, $(\lambda D_{jk}, D_{lm})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=(D_{jk}, \lambda D_{lm})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}$, но λD_{lm} разлагается по D_{rs}, для которых (r,s) лежит внутри и на границе треугольника $(0,m+l+1)$, $(l+1,m)$, $(0,m-l-1)$, а (j,k) на этом треугольнике не лежит. Поэтому в силу ортогональности $0=(D_{jk}, \lambda D_{lm})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=(\lambda D_{jk}, D_{lm})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}$. Итак, (4.25) доказано.

Так как ξ и λD_{jk} являются линейными комбинациями с вещественными коэффициентами векторов (4.15), а значит, такими же комбинациями и векторов D_{lm}, то в силу произвольности (l,m) в (4.25) $\xi=\lambda D_{jk}$. Итак, в $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$

$$a_{j-1,k}D_{j-1,k}+a_{jk}D_{j+1,k}+b_{j,k-1}D_{j,k-1}+b_{jk}D_{j,k+1}+c_{jk}D_{jk}=\lambda D_{jk}$$
$$((j,k)\in\Pi). \quad (4.26)$$

Таким образом, последовательность, составленная из векторов $D_{jk}\in L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$ $((j,k)\in\Pi)$, служит решением уравнения (4.26), удовлетворяющим начальным условиям: $D_{-1,k}=0$, $D_{0k}=\delta_k$ $(k=\ldots,-1, 0, 1,\ldots)$. С другой стороны, ортогональные полиномы первого рода $P_{.;(j,k)}(\cdot)$, отвечающие построенному в процессе доказательства разностному выражению, также удовлетворяют (4.26) и начальным условиям $P_{.;(-1,k)}(\cdot)=0$, $P_{.;(0,k)}(\cdot)=\delta_k$ $(k=\ldots,-1,0,1,\ldots)$. Решение уравнения (4.26) вида $S_{jk}\in L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))$ $((j,k)\in\Pi)$, удовлетворяющее некоторым начальным условиям при $j=-1$, 0, единственно в силу $a_{jk}\neq 0$, поэтому в $L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))$ $D_{jk}=P_{.;(j,k)}(\cdot)$ $((j,k)\in\Pi)$. Отсюда и из 3) следует, что $P_{.;(j,k)}(\cdot)$ удовлетворяют соотношениям ортогональности. Итак, ортогональные полиномы первого рода, отвечающие построенному разностному выражению, удовлетворяют соотношениям ортогональности в пространстве $L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))$. Это показывает (см. конец п. 2), что $d\Sigma(\lambda)$ — спектральная матрица построенного выражения. Теорема доказана.

В дополнение к этой теореме следует показать, что не для всякой $d\Sigma(\lambda)$, удовлетворяющей условиям (4.14) и (4.24), векторы (4.15) будут линейно независимы; и далее, если даже они линейно независимы, то не обязательно выполняются соотношения ортогональности $(D_{jk},D_{lm})_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=\delta_{(j,k),(l,m)}$ $((j,k),(l,m)\in\Pi)$.

Действительно, пусть неотрицательная мера $d\varrho(\lambda)$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^m d\varrho(\lambda)<\infty,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}d\varrho(\lambda)=1\qquad (m=0,\ 1,\ldots).$$

Определим неотрицательную операторную меру, полагая $\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)=\varrho(\Delta)$ $(\alpha,\beta=\ldots,-1,\ 0,\ 1,\ldots)$. Она, очевидно, удовлетворяет условиям (4.14) и (4.24), но вместе с тем векторы (4.15) будут линейно зависимыми: при $m\neq n$

$$(\delta_m-\delta_n,\delta_m-\delta_n)_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=(\delta_m,\delta_m)_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}-2(\delta_m,\delta_n)_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}+$$
$$+(\delta_n,\delta_n)_{L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))}=\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma_{mm}(\lambda)-2\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma_{mn}(\lambda)+\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma_{nn}(\lambda)=0.$$

Выше можно было считать, что $\varrho(\lambda)$ имела бесконечное число точек роста, тогда такой же будет и $\Sigma(\lambda)$. Таким образом, наличие бесконечного числа точек роста у $\Sigma(\lambda)$ еще не влечет линейной независимости векторов (4.15).

Для построения второго примера предварительно покажем, что *если* $d\Sigma(\lambda)=\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ *такова, что матрица* $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ *якобиева (т. е.* $d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)=0$ *при* $|\alpha-\beta|>1$*), причем каждая из функций* $\sigma_{\alpha,\alpha+1}(\lambda)=\sigma_{\alpha+1,\alpha}(\lambda)$ $(\alpha=\ldots,-1,\ 0,\ 1,\ldots)$ *имеет бесконечное число точек роста, то система векторов* (4.15) *линейно независима в* $L_2(\infty;d\Sigma(\lambda))$.

В самом деле, предположим, что существуют вещественные числа $C_{\mu}^{(\nu)}$ такие, что в $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$

$$C_{k-j}^{(0)}\delta_{k-j}+\ldots+C_{k+j}^{(0)}\delta_{k+j}+C_{k-j+1}^{(1)}\delta_{k-j+1}+\ldots+C_{k+j-1}^{(1)}\delta_{k+j-1}+\ldots+ \\ +C_{k}^{(j)}\lambda^{j}\delta_{k}=0. \tag{4.27}$$

Умножим скалярно (4.27) на $\lambda^{l}\delta_{k-j-1}$ $(l=0, 1, \ldots)$. Так как

$$(P(\lambda)\delta_r, Q(\lambda)\delta_s)_{L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))} = \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\overline{Q(\lambda)}\,\delta_{\alpha r}\delta_{\beta s}d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\overline{Q(\lambda)}\,d\sigma_{rs}(\lambda)=0 \tag{4.28}$$

при $|r-s|>1$, где $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ — произвольные полиномы, то после умножения получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_{k-j}^{(0)}\lambda^{l}d\sigma_{k-j,k-j-1}(\lambda)=0 \qquad (l=0, 1, \ldots),$$

т. е. $C_{k-j}^{(0)}=0$. Учитывая это равенство, умножим (4.27) на $\lambda^{l}\delta_{k-j}$ $(l= =0, 1, \ldots)$. Благодаря (4.28) получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(C_{k-j+1}^{(0)}+C_{k-j+1}^{(1)}\lambda)\,\lambda^{l}d\sigma_{k-j+1,k-j}(\lambda)=0 \qquad (l=0, 1, \ldots),$$

откуда в точках роста $\sigma_{k-j+1,k-j}(\lambda)$ $C_{k-j+1}^{(0)}+C_{k-j+1}^{(1)}\lambda=0$, т. е. $C_{k-j+1}^{(0)}=0$, $C_{k-j+1}^{(1)}=0$. Продолжая этот процесс, найдем, что все $C_{\mu}^{(\nu)}=0$. Утверждение доказано.

Очевидно, подобным образом можно доказать, что векторы (4.15) линейно независимы, если $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ такова, что $d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)=0$ при $|\alpha-\beta|>N$ (N фиксировано), причем элементы $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)$ на крайней диагонали имеют бесконечное число точек роста. В частности, это будет иметь место для диагональной матрицы $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$, диагональные элементы которой удовлетворяют указанному условию.

Теперь для построения примера рассмотрим определенную выше функцию $\varrho(\lambda)$ с дополнительным требованием наличия бесконечного числа точек роста и положим $\sigma_{\alpha\alpha}(\lambda)=\varrho(\lambda)$, $\sigma_{\alpha,\alpha+1}(\lambda)=\sigma_{\alpha+1,\alpha}(\lambda)= =\varepsilon\varrho(\lambda)$, $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)=0$ при $|\alpha-\beta|>1$. Здесь $\varepsilon>0$ столь мало, чтобы $\Sigma(\Delta)\geqslant 0$. Так определенная $d\Sigma(\lambda)$ удовлетворяет условиям (4.14), (4.24) и в силу сказанного выше векторы (4.15) линейно независимы в $L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))$. Вместе с тем

$$(D_{0k}, D_{0,k+1})_{L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))} = (\delta_k, \delta_{k+1})_{L_2(\infty; d\Sigma(\lambda))} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_{k,k+1}(\lambda) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\varrho(\lambda) \neq 0,$$

т. е. D_{lm} не образуют ортогональную систему.

К рассматриваемой обратной задаче можно подойти и с точки зрения выражений с операторными коэффициентами. В самом деле, пусть $d\Sigma(\lambda) = \|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ — некоторая неотрицательная операторная мера, значениями которой служат ограниченные операторы в $l_2((-\infty, \infty))$. Предположим, что выполнены условия (4.14) и $\int_{-\infty}^{\infty} d\Sigma(\lambda) = E$, которые уже требовались в теореме 4.6. Дополнительно предположим, что оператор (2.48) обратим. Тогда согласно сказанному в п. 8, § 2, по $d\Sigma(\lambda)$ можно построить разностное выражение вида $(\hat{L}\hat{u})_j = \hat{A}_{j-1}\hat{u}_{j-1} + \hat{A}_j\hat{u}_{j+1} + \hat{B}_j\hat{u}_j$ $(j = 0, 1, \ldots)$, где $\hat{A}_j$ и $\hat{B}_j$ — некоторые ограниченные самосопряженные операторы в $l_2((-\infty, \infty))$, причем $\hat{A}_j$ обратимы. Дальше возникает задача выделения таких $d\Sigma(\lambda)$, чтобы построенные коэффициенты приобрели вид, указанный в (4.18); условия 2) и 3) теоремы 4.6 и выделяют эти $d\Sigma(\lambda)$. Ясно, что сложность формулировки условий 2) и 3) связана с существом дела.

В заключение подчеркнем, что процесс построения коэффициентов L по $d\Sigma(\lambda)$ (если известно, что $d\Sigma(\lambda)$ — спектральная матрица некоторого выражения типа (4.1)) довольно прост и реализуем.

6. Разделение переменных. Пример. Мы ограничимся лишь одним примером построения разложений по собственным функциям выражения вида (4.1). Предварительно изложим общие соображения о разделении переменных для уравнения в частных разностях в полуплоскости.

Рассмотрим на полуоси разностное выражение

$$(L'u)_j = a'_{j-1}u_{j-1} + a'_j u_{j+1} + b'_j u_j \qquad (j = 0, 1, \ldots; u_{-1} = 0) \quad (4.29)$$

вида, изученного в § 1. Пусть $P'_j(z)$ и $d\sigma'(\lambda)$ — отвечающие ему полиномы первого рода и спектральная плотность. Далее, на всей оси рассмотрим выражение

$$(L''u)_k = a''_{k-1}u_{k-1} + a''_k u_{k+1} + b''_k u_k \qquad (k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots), \quad (4.30)$$

изученного в § 3 типа; $P''_{\alpha;k}(z)$ — соответствующие решения вида (3.1), $\| d\sigma''_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-1}^{0}$ — его спектральная матрица. По (4.29) и (4.30) построим выражение в частных разностях:

$$(Lu)_{jk} = ((L'_j + L''_k)\,u)_{jk} =$$

$$= a'_{j-1}u_{j-1,k} + a'_j u_{j+1,k} + a''_{k-1}u_{j,k-1} + a''_k u_{j,k+1} + (b'_j + b''_k)\,u_{jk} \quad (4.31)$$

$$((j,k)\in \Pi;\ u_{-1,k} = 0,\ k = \ldots, -1,\ 0,\ 1, \ldots).$$

Пусть L′, L″ и L — эрмитовые операторы, построенные по выражениям (4.29), (4.30) и (4.31) соответственно. Ясно, что L допускает разделение переменных: $L = L'\otimes E'' + E'\otimes L''$, причем $u\otimes v$ — обычное перемножение: $u_j\otimes v_j = u_j v_k$. Пусть $E'_\lambda\,(E''_\lambda)$ — некоторое обычное разложение единицы, отвечающее L′ (L″). Согласно формуле (4 2), гл. 6, семейство операторов E_λ в $l_2(\Pi)$, определенных соотношением

$$(E_\lambda(f'\otimes f''), g'\otimes g'')_{l_2(\Pi)} = \int_{-\infty}^{\infty} (E'_{\lambda-\mu}f', g')_{l_2([0,\infty))}\,d_\mu(E''_\mu f'', g'')_{l_2((-\infty,\infty))}$$

$$(f', g' \in l_2([0,\infty));\ f'', g'' \in l_2((-\infty,\infty))), \quad (4.32)$$

будет некоторым обычным разложением единицы, отвечающим L.

Из (4.32) немедленно получаем формулу для спектральной матрицы выражения L, отвечающей E_λ. Действительно, полагая $f' = g' = \delta_0$, $f'' = \delta_\beta$, $g'' = \delta_\alpha$ и замечая, что $\delta_0\otimes\delta_\gamma = \delta_{(0,\gamma)}$, при помощи соотношений (4.9), (1.20) и (3.7) получим

$$\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = (E_\lambda\delta_{(0,\beta)}, \delta_{(0,\alpha)})_{l_2(\Pi)} = \int_{-\infty}^{\infty} (E'_{\lambda-\mu}\delta_0, \delta_0)_{l_2([0,\infty))}\,d_\mu\,(E''_\mu\delta_\beta,$$

$$\delta_\alpha)_{l_2((-\infty,\infty))} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma'(\lambda-\mu) \sum_{\nu,\tau=-1,0} P''_{\nu;\beta}(\mu)\,P''_{\tau;\alpha}(\mu)\,d\sigma''_{\nu\tau}(\mu).$$

Итак,

$$\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \sum_{\nu,\tau=-1,0}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma'(\lambda-\mu)\,P''_{\nu;\alpha}(\mu)\,P''_{\tau;\beta}(\mu)\,d\sigma''_{\nu\tau}(\mu)$$

$$(\alpha,\beta = \ldots, -1,\ 0,\ 1, \ldots;\ -\infty < \lambda < \infty). \quad (4.33)$$

Найдем полиномы первого рода $P_{\alpha;(j,k)}(z)$ для L, пользуясь разложением по собственным функциям задачи (4.30). Обозначим $\tilde{u}_{j,\nu}(\mu)$ $(\nu = -1,\ 0)$ преобразование Фурье (3.2) по этим собственным функциям финитной относительно k последовательности u_{jk} ($j = 0, 1, \ldots$ фиксировано). Переходя в (4.31) к преобразованию Фурье, получим

$$a'_{j-1}\widetilde{u}_{j-1,\nu}(\mu) + a'_j\widetilde{u}_{j+1,\nu}(\mu) + b'_j\widetilde{u}_{j,\nu}(\mu) = (z-\mu)\widetilde{u}_{j,\nu}(\mu) \tag{4.34}$$
$$(\nu = -1,\ 0;\ j = 0,\ 1, \ldots).$$

Начальные условия $u_{-1,k} = 0$, $u_{0k} = \delta_{kk_0}$ ($k = \ldots, -1, 0, 1 \ldots$) перейдут в $\widetilde{u}_{-1,\nu}(\mu) = 0$ и $\widetilde{u}_{0\nu}(\mu) = P''_{\nu;k_0}(\mu)$ ($\nu = -1,\ 0$). Решением уравнения (4.34) при этих начальных условиях будут служить

$$\widetilde{u}_{j,\nu}(\mu) = P''_{\nu;k_0}(\mu)\,P'_j(z-\mu) \qquad (j = 0,\ 1, \ldots;\ \nu = -1,\ 0). \tag{4.35}$$

Если в равенстве (3.7) положить $\Delta = (-\infty, \infty)$, а затем $v = \delta_k$, то получим следующую общую формулу восстановления u_j по $\widetilde{u}_\alpha(\lambda)$ ($\alpha = \ldots, -1, 0, 1, \ldots;\ -\infty < \lambda < \infty$):

$$u_k = \sum_{\nu,\tau=-1,0}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{u}_\nu(\mu)\,P_{\tau;k}(\mu)\,d\sigma_{\nu\tau}(\mu) \qquad (k = 0,\ 1, \ldots).$$

Пользуясь этой формулой и (4.35), найдем

$$u_{jk} = \sum_{\nu,\tau=-1,0}\int_{-\infty}^{\infty}P''_{\nu;k_0}(\mu)\,P'_j(z-\mu)\,P''_{\tau;k}(\mu)\,d\sigma_{\nu\tau}(\mu).$$

Но $u_{jk} = P_{k_0;(j,k)}(z)$; таким образом,

$$P_{\alpha;(j,k)}(z) = \sum_{\nu,\tau=-1,0}\int_{-\infty}^{\infty}P'_j(z-\mu)\,P''_{\nu;\alpha}(\mu)\,P''_{\tau;k}(\mu)\,d\sigma_{\nu\tau}(\mu) \tag{4.36}$$
$$((j,k)\in\Pi;\ \alpha = \ldots, -1,\ 0,\ 1, \ldots).$$

Требуемая формула для полиномов первого рода установлена.

Перейдем теперь непосредственно к примеру. Рассмотрим выражение

$$(Lu)_{jk} = \frac{1}{2}u_{j-1,k} + \frac{1}{2}u_{j+1,k} + \frac{1}{2}u_{j,k-1} + \frac{1}{2}u_{j,k+1} \tag{4.37}$$

в полуплоскости Π с граничным условием $u_{-1,k} = 0$ ($k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$). Оно, очевидно, допускает разделение переменных, причем $(L'u)_j = (L''u)_j = \frac{1}{2}u_{j-1} + \frac{1}{2}u_{j+1}$. Из формул (4.36) и (4.33) при помощи результатов п. 11, § 1 и п. 2, § 3 вытекает ($\varkappa_{(-1,1)}(t)$ — характеристическая функция интервала $(-1, 1)$):

$$P_{\alpha;(j,k)}(z)=\frac{\operatorname{sign}\alpha\cdot\operatorname{sign}k}{\pi}\int\limits_0^\pi[\sin|\alpha+1|t\cdot\sin|k+1|t+$$

$$+\sin|\alpha|t\cdot\sin|k|t-\cos t\cdot(\sin|\alpha+1|t\cdot\sin|k|t+$$

$$+\sin|\alpha|t\cdot\sin|k+1|t)]\frac{\sin((j+1)\arccos(z-\cos t))}{\sin^2t\cdot\sqrt{1-(z-\cos t)^2}}\,dt \tag{4.38}$$

$$((j,k)\in\Pi;\ \alpha=\ldots,-1,\ 0,\ 1,\ldots);$$

$$d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)=\frac{2\operatorname{sign}\alpha\cdot\operatorname{sign}k}{\pi^2}\int\limits_0^\pi[\sin|\alpha+1|t\cdot\sin|\beta+1|t+$$

$$+\sin|\alpha|t\cdot\sin|\beta|t-\cos t\cdot(\sin|\alpha+1|t\cdot\sin|\beta|t+$$

$$+\sin|\alpha|t\cdot\sin|\beta+1|t)]\frac{\varkappa_{(-1,1)}(\lambda-\cos t)\sqrt{1-(\lambda-\cos t)^2}}{\sin^2t}\,dt\,d\lambda$$

$$(\alpha,\ \beta=\ldots,-1,\ 0,\ 1,\ldots). \tag{4.39}$$

Оператор L, построенный по (4.37), очевидно, ограничен и самосопряжен. Поэтому спектральная матрица, связанная с L, единственна и имеет вид (4.39).

Глава VIII

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЯДЕР ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЯДРА

Согласно хорошо известной теореме Бохнера каждая непрерывная положительно определенная (п. о.) функция $k(x)$, т. е. функция, для которой ядро $K(x, y) = k(y - x)$ $(x, y \in E_q;\ q \geqslant 1)$ п. о., допускает интегральное представление

$$k(x) = \int\limits_{E_q} e^{i\lambda x} d\sigma(\lambda) \quad (\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q),\ \lambda x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_q x_q)^*, \tag{*}$$

где $d\sigma(\lambda)$ — некоторая неотрицательная конечная мера в E_q. Представляет интерес обобщение этой теоремы, в котором роль элементарных п. о. функций $e^{i\lambda x}$ играют решения дифференциальных уравнений. Для того чтобы более точно сформулировать постановку, запишем в ином виде представление (*) для ядра $K(x, y)$:

$$K(x, y) = \int\limits_{E_q} \Omega_\lambda(x, y)\, d\sigma(\lambda); \tag{**}$$

здесь $\Omega_\lambda(x, y) = e^{i\lambda(y-x)}$ — «элементарные» п. о. ядра. Ядро $K(x, y)$ обладает тем свойством, что в смысле обобщенных функций Л. Шварца

$$L_{x_j}^{(j)} K = \overline{L_{y_j}^{(j)}} K \qquad (j = 1, \ldots, q), \tag{***}$$

где $L_{x_j}^{(j)} = i \dfrac{\partial}{\partial x_j}$. П. о. ядра $\Omega_\lambda(x, y)$ элементарны в том смысле, что они являются собственными для системы выражений $L^{(j)}$:

$$L_{x_j}^{(j)} \Omega_\lambda = \lambda_j \Omega_\lambda,\ \overline{L_{y_j}^{(j)}} \Omega_\lambda = \lambda_j \Omega_\lambda \quad (j = 1, \ldots, q). \tag{****}$$

Возникающая задача, в общих чертах, заключается в перенесении представления (**) на случай произвольных дифференциальных выражений $L^{(j)}$ как в обычных, так и в частных производных, а также разностных выражений. Она будет решаться посредством методов главы V, причем нам удобно ее в первых двух параграфах рассматривать абстрактно — с абстрактными п. о. ядрами. В дальнейшем случаи $q = 1$ и $q > 1$ будут существенно различаться — в первом из них удается полностью исследовать вопрос, во втором такое исследование будет неполным. Все пространства, фигурирующие в дальнейшем, предполагаются сепарабельными.

---

* В этой главе для скалярного произведения в E_n удобно обозначение: xy $(x, y \in E_n)$.

§ 1. Общая схема

1. Понятие элементарного п. о. ядра и *-коммутируемости. Пусть имеется цепочка $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ пространств с инволюцией $\alpha \to \bar{\alpha}$, образуем цепочку $H_- \otimes H_- \supseteq H_0 \otimes H_0 \supseteq H_+ \otimes H_+$. Каждый элемент $K \in H_- \otimes H_-$ мы называли обобщенным ядром. Если $(K, u \otimes \bar{u})_0 \geqslant 0$ $(u \in H_+)$, то K называлось п. о.

Пусть в H_0 действует некоторый оператор A с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$, будем предполагать, что A допускает продолжение оснащения (см. стр. 336); Д — связанное с этим продолжением пространство. Семейство п. о. ядер $\Omega_\lambda \in H_- \otimes H_-$ (λ — вещественные числа) называется семейством элементарных п. о. ядер (относительно A), если для всех λ $\|\Omega_\lambda\|_{H_- \otimes H_-} \leqslant C < \infty$ и

$$(\Omega_\lambda, ((A^* - \lambda E) v) \otimes \bar{u})_0 = 0, \qquad (\Omega_\lambda, v \otimes \overline{(A^* - \lambda E) u})_0 = 0 \quad (1.1)$$
$$(u, \ v \in \text{Д})$$

(благодаря эрмитовости Ω_λ каждое из равенств (1.1) влечет другое).

Равенства (1.1), грубо говоря, означают соотношения (****) при $q = 1$ с $L = A$. Запишем такие соотношения более точно; с этой целью нужно совершить переход, подобный тому, какой совершен в гл. V от равенства (2.7) к (2.10).

Пусть H — произвольное гильбертово пространство с инволюцией $f \to \bar{f}$. Рассмотрим в H оператор S со всюду плотной областью определения $\mathfrak{D}(S)$ и положим

$$\bar{S}f = \overline{S\bar{f}} \qquad (f \in \mathfrak{D}(\bar{S}) = \overline{\mathfrak{D}(S)}). \quad (1.2)$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{D}(\bar{S}^*) = \mathfrak{D}(\overline{S^*}) = \overline{\mathfrak{D}(S^*)}$, $\bar{S}^* = \overline{S^*}$. Если $\bar{S} = S$, то оператор S называют вещественным относительно инволюции $f \to \bar{f}$.

Будем предполагать, что рассмотренное выше Д инвариантно относительно инволюции: $\overline{\text{Д}} = \text{Д}$. Тогда Д годится для продолжения оснащения как по A, так и по $\bar{A}$: это будет плотное в H_+ линейное множество, входящее в $\mathfrak{D}(A^*) \cap \mathfrak{D}(\bar{A}^*)$ и переводящееся операторами A^* и $\bar{A}^*$ в часть H_+; топологизировать Д = Д$_+$ можно подобно сказанному на стр. 337. Построим расширения $\tilde{A} \supseteq A$, $\tilde{\bar{A}} \supseteq \bar{A}$; это будут операторы, непрерывно действующие из H_- в Д$'$ = Д$_-$. Роль цепочки (2.8), гл. V, теперь играет цепочка

$$\text{Д}_- \supseteq H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq \text{Д}_+. \quad (1.3)$$

Если понимать единичный оператор E как оператор вложения H_- в Д$_-$, то равенства (1.1) запишутся в следующей эквивалентной форме:

$$(\tilde{A}\otimes E)\,\Omega_\lambda = \lambda\Omega_\lambda, \qquad (E\otimes\tilde{\bar{A}})\,\Omega_\lambda = \lambda\Omega_\lambda. \tag{1.4}$$

Так, проверим, например, второе из соотношений (1.4). Имеем

$$(((E\otimes\tilde{\bar{A}}) - \lambda E)\,\Omega_\lambda, v\otimes\bar{u})_0 = ((E\otimes(\tilde{\bar{A}} - \lambda E))\,\Omega_\lambda, v\otimes\bar{u})_0 =$$

$$= ((E\otimes(\bar{A}^{*+} - \lambda E))\,\Omega_\lambda, v\otimes\bar{u})_0 = ((E\otimes(\bar{A}^{*} - \lambda E))^+\Omega_\lambda, v\otimes\bar{u})_0 =$$

$$= (\Omega_\lambda, (E\otimes(\bar{A}^{*} - \lambda E))\,(v\otimes\bar{u}))_0 = (\Omega_\lambda, v\otimes((\bar{A}^* - \lambda E)\,\bar{u}))_0 =$$

$$= (\Omega_\lambda, v\otimes\overline{(A^* - \lambda E)\,u})_0 \quad (u, v\in Д),$$

что и требовалось.

Опишем теперь абстрактно соотношение типа (***). Пусть $K\in H_-\otimes H_-$ — некоторое ядро, A — описанный выше оператор. Условимся говорить, что ядро K и оператор A $*$-коммутируют, если

$$(K, (A^*v)\otimes\bar{u})_0 = (K, v\otimes\overline{(A^*u)})_0 \quad (u, v\in Д). \tag{1.5}$$

Подобно (1.4) соотношение (1.5) эквивалентно равенству

$$(\tilde{A}\otimes E)\,K = (E\otimes\tilde{\bar{A}})\,K. \tag{1.6}$$

В самом деле, при любых $u, v\in Д$

$$((\tilde{A}\otimes E)\,K, v\otimes\bar{u})_0 = ((A^{*+}\otimes E)\,K, v\otimes\bar{u})_0 = ((A^*\otimes E)^+K, v\otimes\bar{u})_0 =$$

$$= (K, (A^*\otimes E)\,(v\otimes\bar{u}))_0 = (K, (A^*v)\otimes\bar{u})_0,$$

$$((E\otimes\tilde{\bar{A}})\,K, v\otimes\bar{u})_0 = ((E\otimes\bar{A}^{*+})\,K, v\otimes\bar{u})_0 = ((E\otimes\bar{A}^{*})^+K, v\otimes\bar{u})_0 =$$

$$= (K, (E\otimes\bar{A}^{*})\,(v\otimes\bar{u}))_0 = (K, v\otimes(\bar{A}^{*}\bar{u}))_0 = (K, v\otimes\overline{(A^*u)})_0,$$

откуда и следует требуемая эквивалентность.

С другой стороны, условие $*$-коммутируемости K и A можно описать следующим эквивалентным образом. Введем в H_+ скалярное произведение, полагая

$$\langle u, v\rangle = (K, v\otimes\bar{u})_0 \quad (u, v\in H_+). \tag{1.7}$$

Вообще говоря, из того, что $\langle u, u \rangle = 0$ для $u \in H_+$, не следует равенство $u = 0$. *Для простоты изложения мы сперва будем предполагать, что вырождения нет, т. е. что из* $\langle u, u \rangle = 0$ *для* $u \in H_+$ *следует:* $u = 0$. В последнем пункте этого параграфа будет показано, как видоизменяются доказательства приводимых ниже теорем в случае вырождения (их формулировки не меняются).

Итак, пополняя H_+ по скалярному произведению (1.7), получим гильбертово пространство H_K. Так как

$$\langle u, u \rangle = (K, u \otimes \bar{u})_0 \leqslant \| K \|_- \| u \otimes \bar{u} \|_+ = \| K \|_- \| u \|_+^2 \quad (u \in H_+), \tag{1.8}$$

то метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ слабее метрики $(\cdot, \cdot)_+$, т. е. в результате пополнения получим пространство $H_K \supseteq H_+$.

Предположим, что A удовлетворяет (1.5) — (1.6). Тогда сужение A^* на Д можно рассматривать как оператор в H_K, причем благодаря (1.5) имеем:

$$\langle A^*u, v \rangle = (K, v \otimes \overline{(A^*u)})_0 = (K, (A^*v) \otimes \bar{u})_0 = \langle u, A^*v \rangle \quad (u, v \in Д).$$

Это соотношение показывает, что сужение A^* эрмитово в H_K. Ясно и обратное: эрмитовость сужения A^* на Д в смысле H_K влечет (1.5) — (1.6). Итак, *$*$-коммутируемость K и A и эрмитовость сужения A^* на Д в H_K — эквивалентные требования.*

Если $H_+ = H_0$, то $(K, v \otimes \bar{u})_0 = B_K(u, v)$ является непрерывной билинейной формой в H_0 и поэтому допускает представление $(K, v \otimes \bar{u})_0 = (Su, v)_0$ $(u, v \in H_0)$ с непрерывным неотрицательным оператором S. Предположим, что оператор A также ограничен, тогда $*$-коммутируемость K и A действительно эквивалентна соотношению типа коммутируемости (однако несимметричному):

$$SA^* = AS. \tag{1.9}$$

2. Теорема о представлении. Случай $q = 1$. Мы сейчас покажем, что $*$-коммутируемость K с A является необходимым и достаточным условием представления K в виде линейной комбинации элементарных ядер Ω_λ. Правда, ядра Ω_λ будут, вообще говоря, более обобщенными, чем K.

Теорема 1.1. *Рассмотрим цепочку типа* (1.10), *гл.* I, *составленную из сепарабельных пространств с инволюцией:*

$$H_{--} \supseteq H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq H_{++}, \tag{1.10}$$

причем предполагается, что вложение $H_{++} \to H_+$ квазиядерно. Пусть в H_0 действует оператор A с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$, причем цепочка $H_{--} \supseteq H_0 \supseteq H_{++}$ (а значит и цепоч-

ка $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$) допускает продолжение оснащения, т. е. достаточно требовать, что существует инвариантное относительно инволюции линейное множество Д $\subseteq \mathfrak{D}(A^*)$, *плотное в* H_{++} *и такое, что* A^*Д $\subseteq H_{++}$.

Пусть $K \in H_- \otimes H_-$ *п. о., для того чтобы имело место представление*

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\lambda d\varrho(\lambda), \tag{1.11}$$

где Ω_λ *— некоторое семейство элементарных «более обобщенных», чем* K, *п. о. ядер из* $H_{--} \otimes H_{--}$, $d\varrho(\lambda)$*—неотрицательная конечная мера, интеграл сходится по норме пространства* $H_{--} \otimes H_{--}$*—необходимо и достаточно, чтобы* K *и* A **-коммутировали, т. е. чтобы сужение* A^* *на* Д *было эрмитовым оператором в* H_K. *В представлении* (1.11) *выражение* $\Omega_\lambda d\varrho(\lambda)$ *определяется единственным образом тогда и только тогда, когда замыкание сужения* A^* *в* H_K *максимально.*

Прежде чем доказывать теорему, поясним, что в ее формулировке появилась столь длинная цепочка пространств в связи с тем, что K, вообще говоря, ядро обобщенное, и поэтому для его задания уже необходима цепочка $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$. Пространства H_{++} и Д появились благодаря использованию теории разложений.

Доказательство. Установим достаточность, она является следствием теоремы 2.3, гл. V. Действительно, мы будем рассматривать разложение по обобщенным собственным векторам эрмитова оператора A^*, действующего в пространстве H_K. Имеем $H_K \supseteq \supseteq H_+ \supseteq H_{++}$, причем H_{++} плотно в H_K и вложение $H_{++} \to H_K$ квазиядерно как композиция квазиядерного вложения $H_{++} \to H_+$ и непрерывного $H_+ \to H_K$. Будем рассматривать H_K как нулевое, а H_{++} — как позитивное пространство, пусть $H_{--,K}$ — соответствующее негативное пространство. Благодаря квазиядерности вложения $H_{++} \to H_K$ цепочку

$$H_{--,K} \supseteq H_K \supseteq H_{++} \tag{1.12}$$

можно использовать для построения разложения. Согласно (2.14), гл. V, для обобщенного разложения единицы $E(\Delta)$ сужения на Д оператора A^* справедливо равенство

$$\langle E(\Delta)u, v\rangle = \int_\Delta \langle P(\lambda)u, v\rangle d\varrho(\lambda) \quad (u, v \in H_{++}), \tag{1.13}$$

где действующие из H_{++} в $H_{--,K}$ операторы $P(\lambda)$ являются операторами обобщенного проектирования на обобщенные собственные подпространства сужения A^*.

Покажем, что

$$\langle P(\lambda)u,\ v\rangle = (\Omega_\lambda,\ v\otimes\bar{u})_0 \quad (u,\ v\in H_{++}), \tag{1.14}$$

где Ω_λ — некоторое семейство элементарных п. о. ядер. Действительно, пусть I_1 — оператор I, построенный по цепочке (1.12), тогда $\langle P(\lambda)u,\ v\rangle = (\mathrm{I}_1 P(\lambda)u,\ v)_{++}$. Так как оператор $P(\lambda)$ — Гильберта—Шмидта из H_{++} в $H_{--,K}$, то $\mathrm{I}_1 P(\lambda)$ — оператор Гильберта—Шмидта в H_{++}. Согласно лемме 2.1, гл. I, можно написать $(\mathrm{I}_1 P(\lambda)u,\ v)_{++} = (S_\lambda,\ v\otimes\bar{u})_{H_{++}\otimes H_{++}}$ $(u,\ v\in H_{++})$, где $S_\lambda\in H_{++}\otimes H_{++}$. Пусть I_2 — оператор I, построенный по цепочке $H_{--}\otimes H_{--}\supseteq H_0\otimes H_0\supseteq H_{++}\otimes H_{++}$. Полагая $\Omega_\lambda = \mathrm{I}_2^{-1}S_\lambda$, придем к (1.14). Так как $|P(\lambda)|\leqslant 1$, $(P(\lambda)u,\ u)_0\geqslant 0$ $(u\in H_{++})$, то, очевидно, $\|\Omega_\lambda\|_{H_{--}\otimes H_{--}}\leqslant C$ и Ω_λ — п. о. ядра. Наконец, $\varphi = P(\lambda)u$ при любом $u\in$ Д будет обобщенным собственным вектором рассматриваемого сужения A^*, поэтому согласно (2.7), гл. V,

$$(\Omega_\lambda,\ ((A^*-\lambda E)v)\otimes\bar{u})_0 = \langle P(\lambda)u,\ (A^*-\lambda E)v\rangle = 0 \quad (u,\ v\in \text{Д}).$$

Положим в (1.13) $\Delta = (-\infty,\ \infty)$; используя (1.14), найдем

$$(K,\ v\otimes\bar{u})_0 = \langle u,\ v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}(\Omega_\lambda,\ v\otimes\bar{u})_0\,d\varrho(\lambda) \quad (u,\ v\in H_{++}).$$

Отсюда следует представление (1.11); характер сходимости интеграла в нем вытекает из оценки $\|\Omega_\lambda\|_{H_{--}\otimes H_{--}}\leqslant C$ и конечности меры $d\varrho(\lambda)$.

Наоборот, пусть для ядра K справедливо представление (1.11) с некоторым семейством элементарных п. о. ядер Ω_λ. Учитывая (1.1), получим при $u,\ v\in$ Д

$$(K,\ (A^*v)\otimes\bar{u})_0 = \int_{-\infty}^{\infty}(\Omega_\lambda,\ (A^*v)\otimes\bar{u})_0\,d\varrho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,(\Omega_\lambda,\ v\otimes\bar{u})_0\,d\varrho(\lambda),$$

$$(K,\ v\otimes\overline{(A^*u)})_0 = \int_{-\infty}^{\infty}(\Omega_\lambda,\ v\otimes\overline{(A^*u)})_0\,d\varrho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,(\Omega_\lambda,\ v\otimes\bar{u})_0\,d\varrho(\lambda),$$

откуда вытекает равенство (1.5). Итак, $*$-коммутируемость K и A является необходимым и достаточным условием для справедливости представления (1.11).

Осталось исследовать единственность этого представления. Предварительно установим одну лемму.

Лемма 1.1. *Пусть для п. о. ядра K справедливо представление* (1.11) *с некоторым семейством элементарных п. о. ядер Ω_λ. Тогда в пространстве H_K существует обобщенное разложение единицы $E(\Delta)$ оператора A^*, суженного на Д, такое, что для любого борелевского Δ*

$$\langle E(\Delta)u,\ v\rangle = \int_\Delta (\Omega_\lambda,\ v\otimes\bar{u})_0 d\varrho(\lambda) \quad (u,\ v\in H_{++}). \tag{1.15}$$

Доказательство. Зафиксируем Δ и рассмотрим билинейную форму $B_\Delta(u, v) = \left(\int_\Delta \Omega_\lambda d\varrho(\lambda),\ v\otimes\bar{u}\right)_0 = \int_\Delta (\Omega_\lambda,\ v\otimes\bar{u})_0 d\varrho(\lambda)\ (u,\ v\in H_{++})$. Она, очевидно, неотрицательна и поэтому $|B_\Delta(u, v)|^2 \leqslant B_\Delta(u, u) B_\Delta(v, v)$. Но

$$B_\Delta(u,\ u) = \int_\Delta (\Omega_\lambda,\ u\otimes\bar{u})_0 d\varrho(\lambda) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_\lambda,\ u\otimes\bar{u})_0 d\varrho(\lambda) =$$

$$= (K,\ u\otimes\bar{u})_0 = \langle u,\ u\rangle \quad (u\in H_{++}),$$

поэтому $|B_\Delta(u,\ v)|^2 \leqslant \langle u,\ u\rangle\ \langle v,\ v\rangle\ (u,\ v\in H_{++})$. Таким образом, $B_\Delta(u, v)$ равномерно непрерывна в H_K на плотном в этом пространстве линейном множестве H_{++}. Отсюда следует, что

$$B_\Delta(u,\ v) = \int_\Delta (\Omega_\lambda,\ v\otimes\bar{u})_0 d\varrho(\lambda) = \langle E(\Delta)u,\ v\rangle \quad (u,\ v\in H_{++}). \tag{1.16}$$

Семейство операторов $E_\lambda = E((-\infty,\ \lambda))\ (-\infty < \lambda < \infty)$, очевидно, удовлетворяет требованиям, налагаемым на обобщенное разложение единицы: при $\lambda'' > \lambda'$ $E_{\lambda''} - E_{\lambda'} \geqslant 0$, $E_{-\infty} = 0$, $E_{+\infty} = E$. Покажем, что E_λ — обобщенное разложение единицы сужения A^* на Д, т. е. что справедливы представления

$$\langle A^*u,\ v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\ \langle E_\lambda u,\ v\rangle,\quad \langle A^*u,\ A^*u\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\ \langle E_\lambda u,\ u\rangle$$

$$(u\in Д,\ v\in H_K). \tag{1.17}$$

Для $u,\ v\in Д$ имеем $\langle A^*u,\ v\rangle = (K,\ v\otimes(\overline{A^*u}))_0$; отсюда, из (1.11), (1.1) и (1.16) следует

$$\langle A^*u,\ v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_\lambda,\ v\otimes(\overline{A^*u}))_0 d\varrho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\Omega_\lambda,\ v\otimes\bar{u})_0 d\varrho(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} (\Omega_\mu, \ v \otimes \bar{u})_0 d\varrho(\mu) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_\lambda \langle E_\lambda u, v \rangle \quad (u, \ v \in Д).$$

Таким образом, мы получили первое из равенств (1.17), правда, для $v \in Д$. Так как Д плотно в H_K, то можно перейти к пределу и получить его полностью. Второе равенство в (1.17) доказывается аналогично, нужно только выше v заменить на A^*u ($u \in Д$) и воспользоваться соотношением $(\Omega_\lambda, \ (A^*u) \otimes \overline{(A^*u)})_0 = \lambda(\Omega_\lambda, \ (A^*u) \otimes \bar{u})_0 = \lambda^2 (\Omega_\lambda, \ u \otimes \bar{u})_0$ (см. (1.1)).

Итак, $E(\Delta)$ — обобщенное разложение единицы сужения A^*, причем имеет место (1.16). Лемма доказана.

Доказанная лемма показывает, что каждое представление ядра K в виде (1.11) получается при помощи некоторого обобщенного разложения единицы $E(\Delta)$ оператора A^*, суженного на Д. Согласно (1.15), единственность дифференциалов $\Omega_\lambda \, d\varrho(\lambda)$ эквивалентна единственности обобщенного разложения $E(\Delta)$ у сужения A^*, а, как известно, такая единственность имеет место тогда и только тогда, когда замыкание рассматриваемого оператора максимально. Теорема полностью доказана.

3. Построение интегральных представлений п. о. ядра в случае $q > 1$. В случае $q = 1$ мы существенно пользовались тем обстоятельством, что всякий эрмитов оператор (в частности, сужение A^* на Д) допускает самосопряженные расширения, вообще говоря, с выходом в более широкое пространство, т. е. что у него существует обобщенное разложение единицы. В случае $q > 1$ для возможности применения теоремы 2.6, гл. V, нужно дополнительно требовать существование коммутирующих самосопряженных расширений соответствующих операторов, так как такие расширения существуют не всегда (напомним, что два самосопряженных, возможно, неограниченных оператора называются коммутирующими, если их разложения единицы $E^{(1)}_{\lambda_1}$ и $E^{(2)}_{\lambda_2}$ коммутируют при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in (-\infty, \infty)$. В случае ограниченных операторов это определение, очевидно, эквивалентно обычной их коммутируемости). С подобной оговоркой рассмотрения предыдущих пунктов переносятся на случай $q > 1$, мы сейчас такое перенесение наметим. С точки зрения приложений эта оговорка весьма существенна, так как проверку возможности построения коммутирующих самосопряженных расширений удается провести лишь для отдельных случаев (см. § 2).

Пусть в оснащенном пространстве $H_0 (H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+)$ действует система операторов $A_1, \ \ldots, \ A_q$ с плотными областями определения $\mathfrak{D}(A_1), \ \ldots, \ \mathfrak{D}(A_q)$. Предположим, что каждый из операторов A_j

допускает продолжение оснащения с общим для всех топологическим пространством Д. Семейство п. о. ядер $\Omega_\lambda \in H_- \otimes H_-$ ($\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in E_q$) называется семейством элементарных п. о. ядер (относительно системы $A_1, \ldots, A_q$), если для всех λ $\|\Omega_\lambda\|_{H_-\otimes H_-} \leqslant C < \infty$ и

$$(\Omega_\lambda, ((A_j^* - \lambda_j E) v) \otimes \bar{u})_0 = 0, \quad (\Omega_\lambda, v \otimes \overline{((A_j^* - \lambda_j E) u)})_0 = 0$$
$$(u, v \in Д; \ j = 1, \ldots, q). \tag{1.18}$$

Равенства (1.18) записываются в форме, подобной (1.4). Для этого будем считать, что можно выбрать инвариантное относительно инволюции линейное множество $Д \subseteq \mathfrak{D}(A_j^*)$ ($j = 1, \ldots, q$), плотное в H_+ и такое, что $A_j^* Д \subseteq H_+$ ($j = 1, \ldots, q$). Топологизируем $Д = Д_+$ посредством должным образом выбранного скалярного произведения. Теперь можно построить цепочку (1.3) и расширения $\tilde{A}_j \supseteq A_j$, $\tilde{\bar{A}}_j \supseteq \bar{A}_j$ ($j = 1, \ldots, q$), действующие из H_- в $Д_-$. Равенства (1.18) перепишутся в виде

$$(\tilde{A}_j \otimes E)\,\Omega_\lambda = \lambda_j \Omega_\lambda, \quad (E \otimes \tilde{\bar{A}}_j)\,\Omega_\lambda = \lambda_j \Omega_\lambda \tag{1.19}$$
$$(j = 1, \ldots, q).$$

Как и при $q = 1$, первые из равенств (1.18), (1.19) влекут вторые и наоборот.

Как и раньше, мы будем пользоваться понятием *-коммутируемости ядра K с каждым из операторов A^j; *-коммутируемость K с A_j эквивалентна эрмитовости сужения оператора A_j^* на Д в скалярном произведении (1.7).

Теорема 1.2. *Пусть имеется оснащенное подобно теореме 1.1 сепарабельное пространство H_0 и в нем система операторов $A_1, \ldots, A_q$, каждый из которых удовлетворяет требованиям этой теоремы (с общим Д).*

Пусть $K \in H_- \otimes H_-$ п. о., для того чтобы имело место представление

$$K = \int_{E_q} \Omega_\lambda \, d\varrho(\lambda), \tag{1.20}$$

*где Ω_λ — некоторое семейство элементарных п. о. ядер из $H_{--} \otimes H_{--}$, $d\varrho(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера, интеграл сходится по норме пространства $H_{--} \otimes H_{--}$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух требований: а) ядро K *-коммутирует с ка-*

ждым A_j, *т. е. сужение* A_j^* *на* Д *эрмитово в* H_K; *б)* q *эрмитовых операторов — сужений* A_j^* *на* Д — *допускают расширение в* H_K *или с выходом в более широкое гильбертово пространство до системы коммутирующих самосопряженных операторов. В представлении* (1.20) *выражение* $\Omega_\lambda d\varrho(\lambda)$ *определяется единственным образом тогда и только тогда, когда у сужений* $A_1^*, \ldots, A_j^*$ *на* Д *существует лишь одно* q*-мерное обобщенное разложение единицы.*

Доказательство этой теоремы ведется по плану предыдущего доказательства и мы его лишь наметим. Пусть выполнены условия а) и б). Рассмотрим в пространстве H_K эрмитовые операторы, равные сужениям A_j^* на Д, и будем строить разложение по общим обобщенным собственным векторам этих операторов, применяя теорему 2.6, гл. V, и беря H_{++} в качестве позитивного пространства. Подобно рассуждениям, приведенным на стр. 623, мы из равенства Парсеваля типа (1.13) получим представление (1.20).

Наоборот, пусть имеется представление (1.20). Так же как и на стр. 623, легко показывается, что сужения A_j^* на Д являются эрмитовыми операторами в H_K. Покажем, что они допускают коммутирующие самосопряженные расширения. Для этого заметим, что подобно лемме 1.1 из представления (1.20) следует существование операторной меры $E(\Delta)$ на борелевских множествах из E_q, значениями которой служат неотрицательные ограниченные операторы в H_K, причем $E(E_q) = E$ и

$$\langle A_j^* u, v\rangle = \int_{E_q} \lambda_j d\langle E_\lambda u, v\rangle, \quad \langle A_j^* u, A_j^* u\rangle = \int_{E_q} \lambda_j^2 d\langle E_\lambda u, u\rangle$$
$$(u \in Д,\ v \in H_K;\quad j = 1, \ldots, q). \tag{1.21}$$

Как известно, H_K можно расширить до некоторого гильбертова пространства $\widetilde{H}_K$ таким образом, что $E(\Delta)$ будет равно $P\widetilde{E}(\Delta)P$, где $\widetilde{E}(\Delta)$ — некоторое q-мерное разложение единицы в $\widetilde{H}_K$, а P — оператор ортогонального проектирования $\widetilde{H}_K$ на H_K; иными словами, $E(\Delta)$ будет q-мерным обобщенным разложением единицы. Операторы B_j в $\widetilde{H}_K$, определенные равенствами $B_j u = \int_{E_q} \lambda_j d\widetilde{E}_\lambda u$ на векторах $u \in \widetilde{H}_K$, для которых $\int_{E_q} \lambda_j^2 d\langle \widetilde{E}_\lambda u, u\rangle_{\widetilde{H}_K} < \infty$ $(j = 1, \ldots, q)$, будут самосопряженными коммутирующими. Благодаря (1.21), каждый $B_j \supseteq A_j^*$. Итак, требование б) установлено.

Заключение теоремы о единственности $\Omega_\lambda d\varrho(\lambda)$ непосредственно следует из аналога леммы 1.1, который, как уже указывалось, имеет место. Теорема доказана.

4. Случай вырождения формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Покажем, как изменяются предыдущие рассуждения в том случае, когда из равенства $\langle u, u \rangle = 0$ для $u \in H_+$ не следует $u = 0$.

Нам понадобятся некоторые общие построения, связанные с понятием негативной нормы. Пусть

$$H_{--} \supseteq H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq H_{++}$$

цепочка типа (1.10), гл. I. Обозначения для скалярных произведений и норм пространств — обычные, случай $H_+ = H_0$ не исключается. Предположим, что на векторах из H_+ введено квазискалярное произведение $\langle u, v \rangle$ $(u, v \in H_+)$ — билинейная неотрицательная, вообще говоря, вырождающаяся форма, причем $\langle u, u \rangle \leqslant (u, u)_+$ $(u \in H_+)$. Произведем отождествление с нулем всех тех $u \in H_+$, для которых $\langle u, u \rangle = 0$; Θ обозначает подпространство таких u. Иными словами, рассмотрим фактор-пространство H_+/Θ, составленное из классов $u \dotplus \Theta$ векторов из H_+. После пополнения получим некоторое гильбертово пространство; для него сохраним обозначение H_K. Пусть $u \to Fu$ — оператор перехода от вектора $u \in H_+$ к его классу $Fu \in H_+/\Theta$, $u \to Ou$ — оператор вложения H_{++} в H_+ и $R = FO$. Все эти операторы непрерывны. Обозначим $H_{++,K}$ ортогональное дополнение в H_{++} к подпространству всех $u \in H_{++}$ таких, что $Ru = 0$, т. е. к подпространству $\Theta \cap H_{++}$; P_K — ортогональный проектор в H_{++} на $H_{++,K}$. Ясно, что $H_{++,K}$ можно считать вложенным в H_K — для этого нужно отождествлять $u \in H_{++,K}$ с классом $u \dotplus \Theta$; R будет играть роль оператора вложения. При таком вложении $\langle u, u \rangle \leqslant (u, u)_{H_{++,K}} = (u, u)_{++}$ $(u \in H_{++,K})$ и $H_{++,K}$ будет плотным в H_K. Это дает возможность рассматривать $H_K \supseteq H_{++,K}$ как нулевое и позитивное пространства и построить соответствующее негативное пространство $H_{--,K}$. Мы получим цепочку

$$H_{--,K} \supseteq H_K \supseteq H_{++,K} \tag{1.22}$$

(ср. с п. 7, § 3, гл. I).

Если вложение $H_{++} \to H_+$ было квазиядерным, то и вложение $H_{++,K} \to H_K$ квазиядерно. Это следует из того, что последний оператор вложения R равен FO и поэтому если O — Гильберта — Шмидта, то и R будет таким.

Пусть $Д \subseteq H_{++}$ — некоторое линейное плотное в H_{++} множество, S — линейный оператор с $\mathfrak{D}(S) = Д$, $\mathfrak{R}(S) \subseteq H_{++}$, причем $\langle Su, v \rangle = \langle u, Sv \rangle$ $(u, v \in Д)$ (эрмитовость в $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Тогда *$S$ переводит класс в класс и этот оператор можно рассматривать как эрмитов оператор в H_K*. Точнее, нужно показать, что если $u, v \in Д$ таковы, что $u - v \in \Theta$, то и $Su - Sv \in \Theta$; иначе, если $w \in \Theta \cap Д$, то $Sw \in \Theta$. Пусть $w \in Д$ такое, что $\langle w, w \rangle = 0$, тогда для любого $u \in Д$ $\langle Sw, u \rangle = \langle w, Su \rangle = 0$ (последнее равенство написано на основании неравенства Коши — Буняковского: $|\langle u, v \rangle|^2 \leqslant \langle u, u \rangle \times$ $\times \langle v, v \rangle$ $(u, v \in H_+)$). Благодаря плотности $Д$ в H_{++} векторами $u_n \in Д$ $(n = 1, 2, \ldots)$ можно аппроксимировать Sw в метрике H_{++}, а значит и в смысле $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Таким образом, $\langle Sw, Sw \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle Sw, u_n \rangle = 0$, т. е. $Sw \in \Theta$. Утверждение доказано.

Доказанный результат показывает, что S индуцирует эрмитов оператор $\check{S}$ в H_K, для которого $\mathfrak{D}(\check{S}) = P_K Д$, $\mathfrak{R}(\check{S}) \subseteq P_K H_{++} = H_{++,K}$. Именно, для $u \in P_K Д$ положим $\check{S}u = FSu'$, где u' — любой вектор из Д, такой, что $u - u' \in \Theta$. Определение $\check{S}$ корректно, т. е. не зависит от способа выбора u', так как если u'' — второй вектор такого же вида, как и u', то $Su' - Su'' \in \Theta$ и $FSu' = FSu''$. Ясно, что $\check{S}$ эрмитов: для $u, v \in P_K Д$ и соответствующих $u', v' \in Д$ имеем

$$\langle \check{S}u, v \rangle = \langle FSu', Fv' \rangle = \langle Su', v' \rangle = \langle u', Sv' \rangle = \langle u, \check{S}v \rangle.$$

Кроме того, $\mathfrak{D}(\check{S}) = P_K Д$ плотна в $P_K H_{++} = H_{++,K}$, а значит — и в H_K.

Пусть $E(\Delta)$ — некоторое (обобщенное) разложение единицы, отвечающее $\check{S}$. Будем строить разложение по его обобщенным собственным векторам, пользуясь цепочкой (1.22) (вложение $H_{++} \to H_+$ предполагается квазиядерным). Тогда соотношения (2.14) и (2.7), гл. V, запишутся в виде:

$$\langle E(\Delta) P_K u, P_K v \rangle = \int_\Delta \langle P(\lambda) P_K u, P_K v \rangle \, d\varrho(\lambda) \qquad (u, v \in H_{++}),$$

$$\langle \varphi, (\check{S} - \lambda E) P_K u \rangle = 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{R}(P(\lambda)) \subseteq H_{--,K};\ u \in Д). \tag{1.23}$$

Перейдем к изучению п. о. ядер. Покажем, как проводится доказательство теоремы 1.1 в случае вырождения формы (1.7). Рассмотрим такую же как и раньше цепочку (1.10) (вложение $H_{++} \to H_+$ квазиядерно) и форму (1.7). Без ограничения общности в оценке (1.8) можно считать $\| K \|_- \leqslant 1$; таким образом, сейчас применимы все только что проведенные построения. Возьмем в качестве S сужение оператора A^* на Д (см. стр. 621), для соответствующего $E(\Delta)$ можно написать формулы (1.23). Для вывода аналога соотношения (1.14) рассмотрим оператор $\mathbf{I}_1$ — оператор $\mathbf{I}$, построенный по цепочке (1.22). Имеем:

$$\langle P(\lambda) P_K u, P_K v \rangle = (\mathbf{I}_1 P(\lambda) P_K u, P_K v)_{++} = (P_K \mathbf{I}_1 P(\lambda) P_K u, v)_{++} \qquad (u, v \in H_{++}). \tag{1.24}$$

Так как $P(\lambda)$ — оператор Гильберта—Шмидта из $H_{++,K}$ в $H_{--,K}$, то $P_K \mathbf{I}_1 P(\lambda) P_K$ будет оператором Гильберта—Шмидта в H_{++} и поэтому, согласно лемме 2.1, гл. I, (1.24) можно продолжить: существует $S_\lambda \in H_{++} \otimes H_{++}$ такое, что $(P_K \mathbf{I}_1 P(\lambda) P_K u, v)_{++} = (S_\lambda, v \otimes \bar{u})_{H_{++} \otimes H_{++}}$ $(u, v \in H_{++})$. Повторяя рассуждение стр. 623, найдем п. о. ядро $\Omega_\lambda \in H_{--} \otimes H_{--}$, $\| \Omega_\lambda \|_{H_{--} \otimes H_{--}} \leqslant C$, такое, что

$$\langle P(\lambda) P_K u, P_K v \rangle = (\Omega_\lambda, v \otimes \bar{u})_0 \qquad (u, v \in H_{++}). \tag{1.25}$$

Покажем, что Ω_λ удовлетворяет первому из соотношений (1.1). Так как для $u \in H_{++}$ $P(\lambda) P_K u \in \mathfrak{R}(P(\lambda))$, то, согласно второму из равенств (1.23) и соотношению (1.25), имеем:

$$0 = \langle P(\lambda) P_K u, (\check{S} - \lambda E) P_K v \rangle = \langle P(\lambda) P_K u, FA^* v - \lambda P_K v \rangle =$$
$$= \langle P(\lambda) P_K u, P_K A^* v - \lambda P_K v \rangle = \langle P(\lambda) P_K u, P_K (A^* - \lambda E) v \rangle =$$
$$= (\Omega_\lambda, ((A^* - \lambda E) v) \otimes \bar{u})_0 \qquad (u, v \in Д),$$

что и требовалось. Итак, Ω_λ—действительно семейство элементарных п. о. ядер

Полагая в первой формуле из (1.23) $\Delta = (-\infty, \infty)$ и пользуясь (1.25), найдем

$$\langle P_K u, P_K v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_\lambda, v \otimes \bar{u})_0 d\varrho(\lambda) \qquad (u, v \in H_{++}). \tag{1.26}$$

Но на векторах $u - P_K u$, $v - P_K v$ форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ вырождается, поэтому $\langle P_K u, P_K v \rangle = \langle u, v \rangle = (K, v \otimes \bar{u})_0$. Подставляя это выражение в (1.26), придем к представлению (1.11).

То, что представление (1.11) влечет $*$-коммутируемость K и A, доказывается точно так же, как и на стр. 623.

Последняя часть теоремы 1.1, относящаяся к единственности представления (1.11), при помощи проведенных только что конструкций также просто доказывается в случае вырождения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Мы лишь заметим, что из оценки $|B_\Delta(u, v)|^2 \leqslant \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle (u, v \in H_{++})$, доказываемой, как и на стр. 624, следует, что билинейная форма определена и непрерывна на классах векторов, т. е. на элементах из $H_{++,K} \subseteq H_K$. Поэтому она по-прежнему допускает представление (1.16).

Результаты п. 3 переносятся на случай вырождения точно так же, как и результаты п. 2.

§ 2. Существование самосопряженных коммутирующих расширений и вопросы единственности

Сейчас мы получим некоторые теоремы относительно существования самосопряженных коммутирующих расширений у сужений на Д операторов A_j^*. Результаты будут двух типов: 1) когда требуемые расширения получаются переходом к замыканию; 2) когда строятся более далекие расширения. Подобно выражениям $L^{(j)}$ в (***) и (****) будем рассматривать операторы A_j, действующие по «различным переменным», только в этом случае удается установить некоторые факты о расширениях.

1. Вид операторов и элементарные теоремы о существовании самосопряженных коммутирующих расширений. Рассмотрим цепочку пространств с инволюцией

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+, \tag{2.1}$$

пусть $K \in H_- \otimes H_-$ — обобщенное п. о. ядро. Как и раньше, для $u, v \in H_+$ определим скалярное произведение $\langle u, v \rangle = (K, v \otimes \bar{u})_0$, после отождествления (если есть вырождение) и пополнения, получим гильбертово пространство H_K.

Пространства цепочки (2.1) у нас будут иметь специальный вид, обобщающий интерпретацию пространства функций $f(x_1, \ldots, x_q)$ q переменных как тензорное произведение пространств функций $f(x_j)$ по каждой из переменных. Именно, пусть имеется q цепочек пространств

$$H_-^{(j)} \supseteq H_0^{(j)} \supseteq H_+^{(j)} \quad (j = 1, \ldots, q), \tag{2.2}$$

с каждой из которых связана своя инволюция $u_j \to \overline{u_j}$. Положим $H_0 = H_0^{(1)} \otimes \ldots \otimes H_0^{(q)}$, $H_+ = H_+^{(1)} \otimes \ldots \otimes H_+^{(q)}$, как известно (см. стр. 58), $H_- = H_-^{(1)} \otimes \ldots \otimes H_-^{(q)}$. Тензорно перемножая операторы инволюций для различных цепочек (2.2), мы получим некоторую инволюцию $- = -_1 \otimes \ldots \otimes -_q$ для пространств (2.1), именно эту инволюцию мы и будем связывать с цепочкой (2.1).*

Пусть B_j — некоторый оператор в пространстве $H_+^{(j)}$ с плотной областью определения $\mathfrak{D}(B_j)$. Построим операторы C_j $(j=1, \ldots, q)$ в пространстве H_+:

$$C_j = E \otimes \ldots \otimes E \otimes B_j \otimes E \otimes \ldots \otimes E$$

$$(\mathfrak{D}(C_j) = H_+^{(1)} \otimes \ldots \otimes H_+^{(j-1)} \otimes \mathfrak{D}(B_j) \otimes H_+^{(j+1)} \otimes \ldots \otimes H_+^{(q)}) \tag{2.3}$$

(в первом произведении B_j стоит на j-м месте). Мы будем требовать выполнения равенства

$$\langle C_j u, v \rangle = \langle u, C_j v \rangle \quad (u, v \in \mathfrak{D}(C_j); \ j = 1, \ldots, q). \tag{2.4}$$

Отсюда легко следует (ср., стр. 628), что если $\langle u, u \rangle = 0$, то и $\langle C_j u, C_j u \rangle = 0$, т. е. оператор C_j можно понимать как оператор в H_K. Благодаря (2.4) все C_j — эрмитовы операторы в H_K. Ясно, что эти операторы в определенном смысле коммутируют: $C_j C_k u = C_k C_j u$ для $u \in H_+^{(1)} \otimes \ldots \otimes H_+^{(j-1)} \otimes \mathfrak{D}(B_j) \otimes H_+^{(j+1)} \otimes \ldots \otimes H_+^{(k-1)} \otimes \mathfrak{D}(B_k) \otimes H_+^{(k+1)} \otimes \ldots \otimes H_+^{(q)}$ (для определенности считаем $j < k$).

В этом параграфе мы будем заниматься коммутирующими самосопряженными расширениями операторов C_j. Эти результаты немедленно прилагаются в § 4—5 к задаче, возникшей в п. 3, § 1, если в качестве некоторого сужения C_j брать сужение оператора A_j^* на Д $\subseteq H_{++} \subseteq H_+$. Так как A_j^*Д $\subseteq H_{++} \subseteq H_+$, то это сужение может рассматриваться как оператор в H_+ (ясно, что операторы A_j должны иметь определенную структуру, обеспечивающую то обстоятельство, что A_j^* действуют «покоординатно»).

* Тензорное произведение операторов инволюции определяется как и на стр. 55—57.

Прежде всего установим один общий факт.

Лемма 2.1. *Пусть в гильбертовом пространстве H действуют два, вообще говоря, неограниченных самосопряженных оператора S_1 и S_2. Для коммутирования S_1 и S_2 необходимо и достаточно, чтобы коммутировали их резольвенты $R_{z_1}^{(1)}$ и $R_{z_2}^{(2)}$ при некоторых фиксированных z_1 и z_2.*

Доказательство. Необходимость очевидна: если $E^{(1)}(\Delta_1)$ и $E^{(2)}(\Delta_2)$ — разложения единицы, отвечающие соответственно S_1 и S_2, то из коммутирования их при любых Δ_1 и Δ_2 вытекает коммутирование резольвент $R_\zeta^{(j)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \zeta} dE_\lambda^{(j)}$ $(j = 1, 2)$. Установим достаточность.

Прежде всего заметим, что если z и ζ — регулярные точки некоторого оператора S, а R_λ — его резольвента, то оператор $(E - (\zeta - z)R_z)^{-1}$ существует и равен $E - (z - \zeta) R_\zeta$. Это следует из тождества:

$$(E - (\zeta - z) R_z)(E - (z - \zeta) R_\zeta) = E - (z - \zeta) R_\zeta - (\zeta - z) R_z + $$
$$+ (\zeta - z)(z - \zeta) R_z R_\zeta = E - (\zeta - z)[R_z - R_\zeta - (z - \zeta) R_z R_\zeta] = E.$$

Пусть теперь S_1 и S_2 самосопряжены и таковы, что $R_{z_1}^{(1)}$ и $R_{z_2}^{(2)}$ коммутируют. Из тождества Гильберта $R_z^{(1)} - R_{z_1}^{(1)} = (z - z_1) R_z^{(1)} R_{z_1}^{(1)}$ и установленного сейчас факта следует: $R_z^{(1)}(E - (z - z_1) R_{z_1}^{(1)}) = R_{z_1}^{(1)}$, $R_z^{(1)} = (E - (z - z_1) R_{z_1}^{(1)})^{-1} R_{z_1}^{(1)}$. Отсюда вытекает, что $R_z^{(1)}$ и $R_{z_2}^{(2)}$ коммутируют. Аналогично заключаем, что $R_\zeta^{(2)}$ и $R_z^{(1)}$ коммутируют при любых невещественных ζ и z.

По хорошо известной формуле для произвольных интервалов Δ_1 и Δ_2 имеем:

$$E^{(1)}(\Delta_1) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta_1 + i\varepsilon} (R_z^{(1)} - R_{\bar z}^{(1)})\, dz,$$
$$E^{(2)}(\Delta_2) = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta_2 + i\delta} (R_\zeta^{(2)} - R_{\bar\zeta}^{(2)})\, d\zeta \tag{2.5}$$

(пределы понимаются в слабом смысле). Согласно уже доказанному интегралы в (2.5) коммутируют, но тогда коммутируют и их слабые пределы $E^{(1)}(\Delta_1)$ и $E^{(2)}(\Delta_2)$. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть при каждом $j = 1, \ldots, q$ множество $(B_j - zE)\mathfrak{D}(B_j)$ плотно в $H_+^{(j)}$ хотя бы для одного значения z из* *верхней и одного — из нижней полуплоскостей. Тогда замыкания операторов C_j самосопряжены в H_K и коммутируют.*

Доказательство для упрощения записи будем проводить при $q=2$. Пусть $(B_j - zE)\mathfrak{D}(B_j)$ плотно в $H_+^{(j)}$ при $z = z_j, \zeta_j (\operatorname{Im} z_j > 0, \operatorname{Im}\zeta_j < 0;\ j=1, 2)$. Имеем

$$(C_1 - z_1E)\mathfrak{D}(C_1) = (B_1 \otimes E - z_1E)(\mathfrak{D}(B_1) \otimes H_+^{(2)}) =$$
$$= ((B_1 - z_1E) \otimes E)(\mathfrak{D}(B_1) \otimes H_+^{(2)}) = ((B_1 - z_1E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes H_+^{(2)}.$$

Так как $(B_1 - z_1E)\mathfrak{D}(B_1)$ плотно в $H_+^{(1)}$, то последнее произведение плотно в $H_+^{(1)} \otimes H_+^{(2)} = H_+$, а значит плотно и в H_K. Подобным образом и $((B_1 - \zeta_1E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes H_+^{(2)}$ плотно в H_K, поэтому замыкание C_1 самосопряжено. Аналогичная картина будет и для C_2.

Убедимся в коммутируемости замыканий C_1 и C_2; согласно лемме 2.1 достаточно проверить коммутируемость их резольвент $R_{z_1}^{(1)}$ и $R_{z_2}^{(2)}$. Ее достаточно установить на множестве $((B_1 - z_1E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes \otimes ((B_2 - z_2E)\mathfrak{D}(B_2))$, плотном в $H_+^{(1)} \otimes H_+^{(2)} = H_+$, а значит и в H_K. Коммутируемость на этом множестве следует из коммутируемости на элементах вида $w = ((B_1 - z_1E)u_1) \otimes ((B_2 - z_2E)u_2)$ $(u_1 \in \mathfrak{D}(B_1),\ u_2 \in \mathfrak{D}(B_2))$. Так как $w \in \mathfrak{R}(E \otimes B_2 - z_2E)$, то $R_{z_2}^{(2)}w = (E \otimes B_2 - z_2E)^{-1}w$ и мы получим

$$R_{z_1}^{(1)}R_{z_2}^{(2)}(((B_1 - z_1E)u_1) \otimes ((B_2 - z_2E)u_2)) = R_{z_1}^{(1)}(E \otimes B_2 - z_2E)^{-1}(((B_1 -$$
$$- z_1E)u_1) \otimes ((B_2 - z_2E)u_2)) = R_{z_1}^{(1)}(E \otimes (B_2 - z_2E)^{-1})(((B_1 - z_1E)u_1) \otimes$$
$$\otimes ((B_2 - z_2E)u_2)) = R_{z_1}^{(1)}(((B_1 - z_1E)u_1) \otimes u_2) = (B_1 \otimes E - z_1E)^{-1}(((B_1 -$$
$$- z_1E)u_1) \otimes u_2) = ((B_1 - z_1E)^{-1} \otimes E)(((B_1 - z_1E)u_1) \otimes u_2) = u_1 \otimes u_2.$$

К такому же ответу мы придем, если будем подсчитывать $R_{z_2}^{(2)}R_{z_1}^{(1)}(((B_1 - z_1E)u_1) \otimes ((B_2 - z_2E)u_2))$ — т. е. коммутируемость $R_{z_1}^{(1)}$ и $R_{z_2}^{(2)}$ на рассматриваемых элементах установлена. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы вытекает, что для коммутируемости резольвент $R_{z_1}^{(1)}$ и $R_{z_2}^{(2)}$ операторов, полученных замыканием C_1 и C_2, достаточно, чтобы множество $((B_1 - z_1E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes \otimes ((B_2 - z_2E)\mathfrak{D}(B_2))$ было плотным в H_K.

Приведем более тонкую теорему такого же типа. Предварительно введем некоторые понятия. Зафиксируем векторы $w_2 \in H_+^{(2)}, \ldots, w_q \in H_+^{(q)}$ и рассмотрим для векторов $u_1, v_1 \in H_+^{(1)}$ скалярное (точнее, квазискалярное) произведение

$$\langle u_1, v_1 \rangle_{w_2, \ldots, w_q} = \langle u_1 \otimes w_2 \otimes \ldots \otimes w_q,\ v_1 \otimes w_2 \otimes \ldots \otimes w_q \rangle \quad 2.6)$$

где справа стоит произведение в пространстве H_K. Пополнение $H_+^{(1)}$ по введенному скалярному произведению (после отождествления) будем обозначать $H_{K;\,w_2,\ldots,w_q}^{(1)}$. Очевидно, $H_{K;\,w_2,\ldots,w_q}^{(1)}$ изометрично с подпространством H_K, получающимся замыканием линейного множества $H_+^{(1)} \otimes w_2 \otimes \ldots \otimes w_q$.

Если оператор B_1 таков, что соответствующий C_1 (см. (2.3)) эрмитов в H_K, то

$$\langle B_1 u_1,\ v_1\rangle_{w_2,\ldots,w_q} = \langle u_1,\ B_1 v_1\rangle_{w_2,\ldots,w_q} \quad (u_1,\ v_1 \in \mathfrak{D}(B_1)).$$

Это соотношение подобно (2.4), из него следует, что оператор B_1 можно рассматривать как действующий в $H_{K;\,w_2,\ldots,w_q}^{(1)}$ и он там будет эрмитовым. Ясно, что этот оператор изометричен части C_1, действующей в замыкании $H_+^{(1)} \otimes w_2 \otimes \ldots \otimes w_q$ (очевидно, последнее подпространство инвариантно относительно C_1).

Фиксируя элементы w других пространств $H_+^{(j)}$, можно аналогичным образом построить пространства $H_{K;w_1,w_3,\ldots,w_q}^{(2)}, \ldots, H_{K;w_1,w_2,\ldots,w_{q-1}}^{(q)}$ и для них высказать утверждения, подобные приведенным для $H_{K;\,w_2,\ldots,w_q}^{(1)}$.

Теорема 2.2. *Пусть при каждом $j = 1, \ldots, q$ замыкание оператора B_j в любом пространстве $H_{K;\,w_1,\ldots,w_{j-1},\,w_{j+1},\ldots,w_q}^{(j)}$ $(w_l \in H_+^{(l)},$ $l \neq j)$ самосопряжено. Тогда замыкания операторов C_j самосопряжены в H_K и коммутируют.*

Доказательство по-прежнему проводим для $q = 2$. Пусть $j = 1$, беря упомянутый изометрический образ $H_{K;w_2}^{(1)}$, получим, что по условию теоремы сужение C_1 на $\mathfrak{D}(B_1) \otimes w_2$ после замыкания самосопряжено в замыкании $H_+^{(1)} \otimes w_2$. Иными словами, при невещественном z $((B_1 - zE)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes w_2$ плотно в $H_+^{(1)} \otimes w_2$. Благодаря произвольности $w_2 \in H_+^{(2)}$ $(C_1 - zE)\mathfrak{D}(C_1) = ((B_1 - zE)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes H_+^{(2)}$ плотно в смысле метрики H_K в $H_+^{(1)} \otimes H_+^{(2)} = H_+$. Итак, замыкание C_1 самосопряжено. Аналогично устанавливаем самосопряженность замыкания C_2.

Для установления коммутируемости C_1 и C_2 предварительно заметим, что из предыдущего доказательства видно, что и *замыкания некоторых сужений C_1 будут самосопряжены в H_K. Именно таким будет всякое сужение на множество $\mathfrak{D}(B_1) \otimes G_2$, где G_2 — линейное множество из $H_+^{(2)}$, такое, что $H_+^{(1)} \otimes G_2$ плотно в H_K.* Аналогичное справедливо и для C_2: можно рассматривать сужение C_2 на $G_1 \otimes \mathfrak{D}(B_2)$, где $G_1 \otimes H_+^{(2)}$ плотно в H_K.

Согласно замечанию к теореме 2.1 и лемме 2.1 для доказательства коммутируемости замыканий C_1 и C_2 достаточно установить плотность в H_K множества $((B_1-z_1E)\mathfrak{D}(B_1))\otimes((B_2-z_2E)\mathfrak{D}(B_2))$ при любых невещественных z_1 и z_2. Рассмотрим сужение C_1 на множество $\mathfrak{D}(B_1)\otimes G_2$, где $G_2=((B_2-z_2E)\mathfrak{D}(B_2))$. Такое G_2 брать возможно, поскольку $H_+^{(1)}\otimes G_2 = H_+^{(1)}\otimes((B_2-z_2E)\mathfrak{D}(B_2)) = (C_2-z_2E)\mathfrak{D}(C_2)$ плотно в H_K благодаря самосопряженности замыкания C_2. Замыкание рассматриваемого сужения C_1 самосопряжено в H_K, поэтому $(C_1-z_1E)(\mathfrak{D}(B_1)\otimes \otimes G_2) = ((B_1-z_1E)\mathfrak{D}(B_1))\otimes G_2 = ((B_1-z_1E)\mathfrak{D}(B_1))\otimes((B_2-z_2E)\mathfrak{D}(B_2))$ плотно в H_K, что и требовалось. Теорема доказана.

2. Связь с проблемой единственности в задаче Коши для дифференциальных уравнений. Мы сейчас установим более глубокий критерий того, что замыкания операторов C_j самосопряжены и коммутируют. Для этого будет развит прием п. 7, § 1, гл. VI. Нам удобно повторить сейчас определение слабого решения на стр. 392 (при $r=1$).

Пусть в гильбертовом пространстве H действует оператор S со всюду плотной областью определения $\mathfrak{D}(S)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt}-S^*u=0 \quad (0\leqslant t<\infty). \tag{2.7}$$

Под слабым решением этого уравнения понимают вектор-функцию $u(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ со значениями в H, слабо дифференцируемую по t и удовлетворяющую равенству

$$\frac{d}{dt}(u(t),\ f)_H-(u(t),\ Sf)_H=\left(\frac{du(t)}{dt},\ f\right)_H-(u(t),\ Sf)_H=0 \tag{2.8}$$

$$(f\in\mathfrak{D}(S),\ 0\leqslant t<\infty).$$

Будем говорить, что для уравнения (2.7) имеет место единственность слабых решений задачи Коши, если каждое слабое решение $u(t)$, равное нулю при $t=0$, аннулируется и при всех $t>0$.

Теорема 2.3. *Пусть при каждом $j=1,\ \ldots,\ q$ для обоих уравнений*

$$\frac{du}{dt}\pm(iB_j)^*u=0 \quad (0\leqslant t<\infty), \tag{2.9}$$

рассматриваемых в пространствах $H_+^{(j)}$, справедлива единственность слабых решений задачи Коши. Тогда замыкания опграторов C_j само-

сопряжены в H_K и коммутируют. При этом дополнительно предполагается, что каждый C_j имеет в H_K равные дефектные числа.

Как и раньше, доказательство будем проводить при $q=2$. Установим следующий общий факт.

Лемма 2.2. *Пусть G_2 — некоторое линейное множество из $H_+^{(2)}$. Обозначим F_{G_2} сужение оператора C_1 на $\mathfrak{D}(B_1)\otimes G_2=\mathfrak{D}(F_{G_2})$, этот оператор эрмитов с плотной областью определения в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_{G_2}\subseteq H_K$, являющемся замыканием в H_K линейного множества $H_+^{(1)}\otimes G_2$. Если оператор B_1 таков, что для обоих уравнений (2.9) при $j=1$ справедлива единственность слабых решений задачи Коши, то замыкание F_{G_2} максимально в $\mathfrak{H}_{G_2}$ (лемма справедлива без предположения о равенстве дефектных чисел оператора C_1).*

Доказательство. Так как F_{G_2} эрмитов в $\mathfrak{H}_{G_2}$, то существует самосопряженное расширение $\widetilde{F}_{G_2}$ этого оператора, вообще говоря, с выходом в более широкое пространство $\widetilde{\mathfrak{H}}_{G_2}\supseteq\mathfrak{H}_{G_2}$. Пусть $\widetilde{E}_\lambda$ — его разложение единицы, $E_\lambda=P\widetilde{E}_\lambda P$ — обобщенное разложение единицы оператора F_{G_2} (P — оператор проектирования $\widetilde{\mathfrak{H}}_{G_2}$ на $\mathfrak{H}_{G_2}$). Построим векторную функцию $v(t)$ со значениями в $\mathfrak{H}_{G_2}\subseteq H_K$:

$$v(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\,dE_\lambda v(0)\qquad(0\leqslant t<\infty),\tag{2.10}$$

где $v(0)$ — произвольный вектор из $\mathfrak{D}(F_{G_2})$. Так как $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\,d\langle E_\lambda v(0), v(0)\rangle<\infty$, то $v(t)$ сильно дифференцируема по t и $\frac{dv(t)}{dt}=$
$$=i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda e^{i\lambda t}\,dE_\lambda v(0).$$

Так как H_+ плотно в H_K и $\|u\|_{H_K}\leqslant C\|u\|_+$ $(u\in H_+)$, то H_K можно взять в качестве нулевого, а H_+ — в качестве позитивного пространств. Рассмотрим соответствующий оператор I, определяемый равенством $\langle f,u\rangle=(If,u)_+$ $(f\in H_K,\ u\in H_+)$, он непрерывно переводит все H_K в плотную часть H_+ и имеет, вообще говоря, неограниченный обратный. Определим вектор-функцию со значениями в H_+ равенством $u(t)=Iv(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$, так как $v(t)$ сильно дифференцируема, то и $u(t)$ будет такой же. Покажем, что $u(t)$ удовлетворяет следующему соотношению для любого $w\in\mathfrak{D}(F_{G_2})$:

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, w\right)_+ - (u(t), iF_{G_2}w)_+ = \frac{d}{dt}(u(t), w)_+ - (u(t), iF_{G_2}w)_+ = 0 \tag{2.11}$$
$$(0 \leqslant t < \infty)$$

(о слабом решении соответствующего дифференциального уравнения в H_+ мы не говорим, так как плотность $\mathfrak{D}(F_{G_2})$ в H_+ не предполагалась). Имеем

$$\frac{d}{dt}(u(t), w)_+ - (u(t), iF_{G_2}w)_+ = \frac{d}{dt}(Iv(t), w)_+ - (Iv(t), iF_{G_2}w)_+ =$$
$$= \frac{d}{dt}\langle v(t), w\rangle - \langle v(t), iF_{G_2}w\rangle = i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda e^{i\lambda t}\, d\langle E_\lambda v(0), w\rangle -$$
$$- i\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\langle E_\lambda v(0), F_{G_2}w\rangle. \tag{2.12}$$

Но

$$\langle E_\lambda v(0), F_{G_2}w\rangle = \langle P\widetilde{E}_\lambda Pv(0), F_{G_2}w\rangle = \langle \widetilde{E}_\lambda v(0), F_{G_2}w\rangle_{\widetilde{\mathfrak{H}}_{G_2}} =$$
$$= \langle \widetilde{E}_\lambda v(0), \widetilde{F}_{G_2}w\rangle_{\widetilde{\mathfrak{H}}_{G_2}} = \int_{-\infty}^{\lambda}\mu d\langle \widetilde{E}_\mu v(0), w\rangle_{\widetilde{\mathfrak{H}}_{G_2}} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\lambda}\mu d\langle E_\mu v(0), w\rangle.$$

Подставляя в (2.12), получим, что интегралы сокращаются. Итак, (2.11) доказано.

Так как в (2.11) $w \in \mathfrak{D}(F_{G_2}) = \mathfrak{D}(B_1)\otimes G_2$ произвольно, то соотношение (2.11) эквивалентно такому же равенству, в котором $w = w_1 \otimes w_2$, где $w_1 \in \mathfrak{D}(B_1)$ и $w_2 \in G_2$. Иными словами, (2.11) эквивалентно равенству

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, w_1 \otimes w_2\right)_+ - (u(t), (iB_1w_1)\otimes w_2)_+ = 0 \tag{2.13}$$
$$(0 \leqslant t < \infty,\ w_1 \in \mathfrak{D}(B_1),\ w_2 \in G_2).$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая конструкция. Пусть $w_2 \in H_+^{(2)}$ фиксировано, рассмотрим выражение $B(f, u_1) =$

$= (f, u_1 \otimes w_2)_+$ $(f \in H_+,\ u_1 \in H_+^{(1)})$, оно является билинейным функционалом. Этот функционал непрерывен:

$$|B(f, u_1)| = |(f, u_1 \otimes w_2)_+| \leqslant \| f \|_+ \| u_1 \otimes w_2 \|_+ =$$
$$= \| f \|_+ \| u_1 \|_{H_+^{(1)}} \| w_2 \|_{H_+^{(2)}} = C \| f \|_+ \| u_1 \|_{H_+^{(1)}} \quad (f \in H_+,\ u_1 \in H_+^{(1)}),$$

поэтому он допускает представление посредством оператора в скалярном произведении пространств H_+ или $H_+^{(1)}$. Представление при помощи $(\cdot, \cdot)_+$ фигурировало в определении $B(f, u_1)$, представление при помощи $(\cdot, \cdot)_{H_+^{(1)}}$ дает:

$$(f, u_1 \otimes w_2)_+ = B(f, u_1) = (Q_{w_2} f, u_1)_{H_+^{(1)}} \quad (f \in H_+,\ u_1 \in H_+^{(1)}), \tag{2.14}$$

где Q_{w_2} — линейный оператор, непрерывно действующий из H_+ в $H_+^{(1)}$.

Продолжим доказательство леммы. Построим вектор-функцию со значениями в пространстве $H_+^{(1)}$: $q_{w_2}(t) = Q_{w_2} u(t)$ $(0 \leqslant t < \infty,\ w_2 \in G_2 \subseteq H_+^{(2)})$. Так как $u(t)$ сильно дифференцируема, то такой же будет и $q_{w_2}(t)$, причем $\frac{d}{dt} q_{w_2}(t) = Q_{w_2} \frac{du(t)}{dt}$. Теперь при помощи (2.14) равенство (2.13) можно переписать так:

$$0 = \left(\frac{du(t)}{dt}, w_1 \otimes w_2 \right)_+ - (u(t),\ (iB_1 w_1) \otimes w_2)_+ =$$
$$= \left(Q_{w_2} \frac{du(t)}{dt}, w_1 \right)_{H_+^{(1)}} - (Q_{w_2} u(t),\ iB_1 w_1)_{H_+^{(1)}} =$$
$$= \frac{d}{dt} (q_{w_2}(t), w_1)_{H_+^{(1)}} - (q_{w_2}(t),\ iB_1 w_1)_{H_+^{(1)}}$$
$$(0 \leqslant t < \infty,\ w_1 \in \mathfrak{D}(B_1)).$$

Иными словами, $q_{w_2}(t)$ является слабым решением уравнения (2.9) при $j = 1$ и со знаком минус. Начальные данные:

$$q_{w_2}(0) = Q_{w_2} u(0) = Q_{w_2} Iv(0). \tag{2.15}$$

Предположим, что замыкание F_{G_2} не максимально в $\mathfrak{H}_{G_2}$. Тогда существуют два различных обобщенных разложения единицы — E'_λ и E''_λ, порожденные этим оператором. Проведя предыдущую конструкцию с начальным данным $v(0)$ для каждого из этих разложений, найдем два решения $q'_{w_2}(t)$ и $q''_{w_2}(t)$ уравнения (2.9) ($j = 1$, знак минус), имеющие, согласно (2.15), одни и те же начальные данные. В силу предположенной единственности слабых решений $q'_{w_2}(t) = q''_{w_2}(t)$ $(0 \leqslant t < < \infty)$. Пусть $v'(t)$ и $v''(t)$ обозначают функции, построенные по E'_λ и E''_λ; аналогичный смысл имеют $u'(t)$ и $u''(t)$. При любых $w_1 \in \mathfrak{D}(B_1)$, $w_2 \in G_2$ получаем

$$\langle v'(t) - v''(t),\ w_1 \otimes w_2\rangle = (I(v'(t) - v''(t)),\ w_1 \otimes w_2)_+ =$$
$$= (u'(t) - u''(t),\ w_1 \otimes w_2)_+ = (Q_{w_2}(u'(t) - u''(t)),\ w_1)_{H_+^{(1)}} =$$
$$= (q'_{w_2}(t) - q''_{w_2}(t),\ w_1)_{H_+^{(1)}} = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty).$$

Последнее равенство имеет место и для линейных комбинаций векторов $w_1 \otimes w_2$, а эти комбинации описывают множество $\mathfrak{D}(B_1) \otimes G_2$, плотное в $\mathfrak{H}_2$. Итак, $v'(t) - v''(t) = 0\ (0 \leqslant t < \infty)$. Учитывая (2.10), получим при произвольном $u \in \mathfrak{H}_{G_2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\,\langle (E'_\lambda - E''_\lambda)\, v(0),\ u\rangle = \langle v'(t) - v''(t),\ u\rangle = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь уравнение $\frac{du}{dt} + (iB_1)^* u = 0$ при $t \geqslant 0$ и произведем в нем замену переменных $t = -\tau$. В результате получим уравнение $\frac{du}{d\tau} - (iB_1)^* u = 0$ при $\tau \leqslant 0$, для которого имеет место единственность слабых решений задачи Коши в силу предположенной единственности для исходного уравнения. Повторяя для этого уравнения все предыдущее, мы придем к равенству (2.16), в котором $-\infty < t \leqslant 0$.

Функция $\omega(\lambda) = \langle (E'_\lambda - E''_\lambda)\, v(0), u\rangle$ имеет ограниченную вариацию на вещественной оси; (2.16) обозначает, что ее преобразование Фурье—Стилтьеса при всех вещественных t аннулируется. По теореме единственности для преобразования Фурье—Стилтьеса $\omega(\lambda) = 0$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, т. е. $\langle (E'_\lambda - E''_\lambda)\, v(0)\ u\rangle = 0$, где $v(0) \in \mathfrak{D}(F_{G_2})$, $u \in \mathfrak{H}_{G_2}$. Так как $\mathfrak{D}(F_{G_2})$ плотна в $\mathfrak{H}_{G_2}$, то $E'_\lambda = E''_\lambda$, что противоречит допущению. Лемма доказана.

Из доказанного утверждения вытекает следующая лемма.

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия предыдущей леммы, причем дополнительно известно:* 1) *множество G_2 таково, что $H_+^{(1)} \otimes G_2$ плотно в H_K (т. е. $\mathfrak{H}_{G_2} = H_K$);* 2) *оператор C_1 имеет в H_K равные дефектные числа. Тогда замыкание F_{G_2} самосопряжено в H_K.*

Доказательство. Согласно лемме 2.2 замыкание F_{G_2} максимально в H_K, поэтому для доказательства достаточно убедиться, что F_{G_2} имеет равные дефектные числа. Но F_{G_2} является сужением оператора C_1, дефектные числа которого, по предположению, равны. Так как C_1 допускает самосопряженные расширения в H_K, то и F_{G_2} их допускает, т. е. и его дефектные числа равны. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. При $G_2 = H_+^{(1)}$ оператор F_{G_2} совпадает с C_1, применяя лемму 2.3, заключаем, что замыкание $C_1 = F_{G_2}$ в H_K самосопряжено. Аналогично устанавливается самосопряженность замыкания C_2.

Для доказательства коммутируемости замыканий C_1 и C_2 согласно лемме 2.1 и замечанию к теореме 2.1 достаточно показать, что множества

$$((B_1 - z_1E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes ((B_2 - z_2E)\mathfrak{D}(B_2)) \tag{2.17}$$

при невещественных z_1 и z_2 плотны в H_K. Рассмотрим сужение F_{G_2} оператора C_1 на $\mathfrak{D}(F_{G_2}) = \mathfrak{D}(B_1) \otimes G_2$, где $G_2 = (B_2 - z_2E)\mathfrak{D}(B_2)$. Множество G_2 удовлетворяет требованиям леммы 2.3, так как $H_+^{(1)} \otimes G_2 = H_+^{(1)} \otimes ((B_2 - z_2E)\mathfrak{D}(B_2)) = (C_2 - z_2E)\mathfrak{D}(C_2)$ плотно в H_K благодаря самосопряженности замыкания C_2. Поэтому согласно этой лемме замыкание F_{G_2} самосопряжено, т. е. $(F_{G_2} - z_1E)\mathfrak{D}(F_{G_2}) = (B_1 \otimes E - z_1E)(\mathfrak{D}(B_1) \otimes ((B_2 - z_2E)\mathfrak{D}(B_2))) = ((B_1 - z_1E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes \otimes ((B_2 - z_2E)\mathfrak{D}(B_2))$ плотно в H_K. Итак, плотность множеств (2.17) установлена и теорема доказана.

Приведем теперь одну схему доказательства единственности решений задачи Коши, показывающую, что разрешимость задачи Коши при достаточно произвольных начальных данных влечет единственность сопряженной задачи (ср., стр. 395—398).

Прежде всего заметим, что для единственности слабых решений задачи Коши для уравнения (2.7) на всем интервале $[0, \infty)$ достаточно, чтобы она имела место локально, т.е. чтобы нашлось $T > 0$ такое, что если (2.8) имеет место при $t \in [0, T]$ и $u(0) = 0$, то $u(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Действительно, благодаря тому, что оператор A в (2.8) не зависит от t, слабые решения уравнения (2.7) можно произвольно сдвигать: если $u(t)$ удовлетворяет (2.8) при $t \in [a, b]$, то $v(t) = u(t - s)$ удовлетворяет (2.8) при $t \in [s, T + s]$. Поэтому если справедлива единственность на интервале $[0, T]$, то она имеет место и на любом интервале $[s, T + s]$, т. е. из того, что $u(t)$ удовлетворяет (2.8) при $t \in [s, T + s]$ и $u(s) = 0$, следует: $u(t) = 0$, $t \in [s, T + s]$. В частности, она имеет место на интервалах $[0, T]$, $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, . . ., откуда следует, что она справедлива и на полуоси $[0, \infty)$.

Теорема 2.4. *Для единственности слабых решений задачи Коши для уравнения (2.7) на интервале $[0, \infty)$ достаточно выполнение следующей ситуации. Существуют два линейных топологических пространства Φ и Ψ такие, что $\Phi \subseteq \Psi \subseteq \mathfrak{D}(S)$, из сходимости в Φ следует сходимость в Ψ, а из последней — сходимость в H, Φ плотно в H; при некотором $T > 0$ существует операторная функция $Q(t_0, t)$, где $0 \leqslant t_0, t \leqslant T$, значения которой — непрерывные операторы, действующие из Φ в Ψ, такая, что при любом $\varphi \in \Phi$ $\varphi(t) = Q(t_0, t)\varphi$ является сильным решением (в смысле H) уравнения*

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} + S(\varphi(t)) = 0 \tag{2.18}$$

на всем интервале $[0, T]$, обращающимся в φ при $t = t_0$.

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из леммы 1.4, гл. VI (при $r = 1$), если только эту лемму слегка перефразировать.

В случае $q = 1$ теоремы 2.1 и 2.3 дают достаточные условия самосопряженности оператора в H_K. Эти условия, очевидно, можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2.5. *Рассмотрим пространства и операторы, введенные на стр. 631, при $q = 1$. Для того, чтобы замыкание оператора $B = C$ было самосопряженным в H_K, достаточно выполнение одного из следующих условий:*

1) *множество $(B - zE)\mathfrak{D}(B)$ плотно в H_+ хотя бы для одного значения z из верхней и одного — из нижней полуплоскостей;*

2) *для обоих уравнений*

$$\frac{du}{dt} \pm (iB)^* u = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty), \tag{2.19}$$

рассматриваемых в пространстве H_+, справедлива единственность слабых решений задачи Коши и дефектные числа B в пространстве H_K равны (без последнего условия замыкание B лишь максимально).

Заметим, что *для справедливости результатов этого и предыдущего пунктов наличие инволюций — j и $- = -_1 \otimes \ldots \otimes -_q$ несущественно*, можно было бы просто задавать в H_+ некоторое скалярное произведение $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Конструкция с инволюцией нам была полезна лишь в связи с тем, что последнее скалярное произведение строилось по ядру.

3. **Более далекие коммутирующие самосопряженные расширения системы операторов.** В теоремах 2.1—2.3 мы строили коммутирующие самосопряженные расширения операторов $C_1, \ldots, C_q$ посредством процедуры замыкания. Сейчас будут получены некоторые результаты по расширению для операторов, несамосопряжен-

ных после замыкания. С точки зрения интегральных представлений п. о. ядер эти результаты приведут к неединственным представлениям. Для простоты будем считать $q = 2$.

Будем предполагать, что в пространствах $H_+^{(1)}$ и $H_+^{(2)}$ заданы антилинейные преобразования $u_1 \to u_1^{\circ_1}$, $u_2 \to u_2^{\circ_2}$, $\circ_1^2 = \circ_2^2 = E$, такие, что тензорное произведение $\circ = \circ_1 \otimes \circ_2$ является после замыкания по непрерывности инволюцией в H_K.

Теорема 2.6. *Пусть операторы C_1 и C_2 вещественны относительно инволюции $\circ$ и замыкание сужения C_1 на множество $\mathfrak{D}(B_1) \otimes w_2$ при любом $w_2 \in H_+^{(2)}$ самосопряжено в пространстве $H_{K;w_2}^{(1)}$ — пополнении $H_+^{(1)}$ по скалярному произведению $\langle u_1, v_1\rangle_{w_2} = \langle u_1 \otimes w_2, v_1 \otimes w_2\rangle$ (отсюда, согласно теореме 2.2, следует, что замыкание C_1 в H_K самосопряжено). Тогда существует самосопряженное расширение оператора C_2, коммутирующее с замыканием C_1.*

Доказательство. Рассмотрим при фиксированных невещественных z_1, z_2 преобразования Кэли $U_{z_j}^{(j)} = (C_j - \bar{z}_j E)(C_j - z_j E)^{-1}$ $(j = 1,2)$. Операторы $U_{z_j}^{(j)}$ осуществляют изометрические отображения следующих пар множеств:

$$U_{z_1}^{(1)} : (C_1 - z_1E)\mathfrak{D}(C_1) = ((B_1 - z_1E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes H_+^{(2)} \to$$
$$\to (C_1 - \bar{z}_1E)\mathfrak{D}(C_1) = ((B_1 - \bar{z}_1E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes H_+^{(2)},$$
$$U_{z_2}^{(2)} : (C_2 - z_2E)\mathfrak{D}(C_2) = H_+^{(1)} \otimes ((B_2 - z_2E)\mathfrak{D}(B_2)) \to$$
$$\to (C_2 - \bar{z}_2E)\mathfrak{D}(C_2) = H_+^{(1)} \otimes ((B_2 - \bar{z}_2 E)\mathfrak{D}(B_2)).$$

Множества первой пары благодаря самосопряженности замыкания C_1 плотны в H_K и поэтому $U_{z_1}^{(1)}$ по непрерывности распространяется до унитарного оператора, мы его по-прежнему обозначаем $U_{z_1}^{(1)}$. Множества второй пары неплотны в H_K, пусть N_{z_2} и $N_{\bar{z}_2}$ — ортогональные дополнения к первому и второму из них (т. е. дефектные подпространства C_2). Покажем, что оператор $U_{z_2}^{(2)}$ можно расширить до унитарного оператора в H_K, коммутирующего с $U_{z_1}^{(1)}$.

Будем на время доказательства этой и следующей теорем замыкание в H_K множества M обозначать $[M]$. Убедимся, что подпространства

$$\mathfrak{R}_{z_2} = [H_+^{(1)} \otimes ((B_2 - z_2E)\mathfrak{D}(B_2))], \quad \mathfrak{R}_{\bar{z}_2} = [H_+^{(1)} \otimes ((B_2 - \bar{z}_2E)\mathfrak{D}(B_2))] \tag{2.20}$$

инвариантны относительно $U_{z_1}^{(1)}$ и в них $U_{z_1}^{(1)}$ — унитарный оператор. Доказательство проведем для первого из этих подпространств. Из условий теоремы (см. доказательство теоремы 2.2) следует, что для любого линейного множества $G_2 \subseteq H_+^{(2)}$ замыкание сужения оператора C_1 на $\mathfrak{D}(B_1) \otimes G_2$ самосопряжено в $[H_+^{(1)} \otimes G_2]$, т. е. что $(C_1 - \zeta E)(\mathfrak{D}(B_1) \otimes G_2) = ((B_1 - \zeta E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes G_2$ $(\operatorname{Im}\zeta \neq 0)$ плотно в $[H_+^{(1)} \otimes G_2]$. Полагая $G_2 = (B_2 - z_2 E)\mathfrak{D}(B_2)$ и $\zeta = z_1, \bar{z}_1$, найдем, что в $\mathfrak{R}_{z_2}$ плотны множества $((B_1 - z_1 E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes ((B_2 - z_2 E)\mathfrak{D}(B_2))$ и $((B_1 - \bar{z}_1 E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes ((B_2 - z_2 E)\mathfrak{D}(B_2))$. Вместе с тем при любых $u_1 \in \mathfrak{D}(B_1)$ и $u_2 \in \mathfrak{D}(B_2)$

$$U_{z_1}^{(1)}(((B_1 - z_1 E)u_1) \otimes ((B_2 - z_2 E)u_2)) = (B_1 \otimes E - \bar{z}_1 E) \times$$
$$\times (B_1 \otimes E - z_1 E)^{-1}(((B_1 - z_1 E)u_1) \otimes ((B_2 - z_2 E)u_2)) =$$
$$= ((B_1 \otimes E - \bar{z}_1 E)u_1) \otimes ((B_2 - z_2 E)u_2) =$$
$$= ((B_1 - \bar{z}_1 E)u_1) \otimes ((B_2 - z_2 E)u_2),$$

т. е. $U_{z_1}^{(1)}$ переводит плотное множество в $\mathfrak{R}_{z_2}$ в такое же множество. Иными словами, $U_{z_1}^{(1)}$ (после замыкания) унитарно в первом из подпространств (2.20).

Так как N_{z_2} и $N_{\bar{z}_2}$ являются ортогональными дополнениями к подпространствам (2.20), а $U_{z_1}^{(1)}$ унитарен во всем H_K и в этих подпространствах, то N_{z_2} и $N_{\bar{z}_1}$ для него инвариантны и в них он унитарен. Так как $C_1 = (\bar{z}_1 E - z_1 U_{z_1}^{(1)})(E - U_{z_1}^{(1)})^{-1}$, то эти подпространства инвариантны и относительно C_1, а значит и относительно его разложения единицы $E(\Delta)$.

Итак, оператор $U_{z_1}^{(1)}$ унитарен в каждом из подпространств (2.20), а $U_{z_2}^{(2)}$ переводит первое из них во второе. Таким образом, на подпространстве $\mathfrak{R}_{z_2}$ имеют смысл оба произведения $U_{z_1}^{(1)} U_{z_2}^{(2)}$ и $U_{z_2}^{(2)} U_{z_1}^{(1)}$; покажем, что эти произведения здесь равны. Так как множество $((B_1 - z_1 E)\mathfrak{D}(B_1)) \otimes ((B_2 - z_2 E)\mathfrak{D}(B_2))$ плотно в рассматриваемом подпространстве, то достаточно проверить коммутируемость на векторах $((B_1 - z_1 E)u_1) \otimes ((B_2 - z_2 E)u_2)$ $(u_1 \in \mathfrak{D}(B_1),\ u_2 \in \mathfrak{D}(B_2))$. Имеем

$$U_{z_1}^{(1)} U_{z_2}^{(2)}(((B_1 - z_1 E)u_1) \otimes ((B_2 - z_2 E)u_2)) =$$
$$= U_{z_1}^{(1)}(E \otimes B_2 - \bar{z}_2 E)(E \otimes B_2 - z_2 E)^{-1}(((B_1 - z_1 E)u_1) \otimes ((B_2 - z_2 E)u_2)) =$$
$$= U_{z_1}^{(1)}(((B_1 - z_1 E)u_1) \otimes ((B_2 - \bar{z}_2 E)u_2)) =$$
$$= (B_1 \otimes E - \bar{z}_1 E)(B_1 \otimes E - z_1 E)^{-1}(((B_1 - z_1 E)u_1) \otimes ((B_2 - \bar{z}_2 E)u_2)) =$$
$$= ((B_1 - \bar{z}_1 E)u_1) \otimes ((B_2 - \bar{z}_2 E)u_2).$$

Точно так же покажем, что и $U_{z_2}^{(2)} U_{z_1}^{(1)} (((B_1 - z_1 E) u_1) \otimes ((B_2 - z_2 E) u_2)) = ((B_1 - \bar{z}_1 E) u_1) \otimes ((B_2 - \bar{z}_2 E) u_2)$, откуда и следует требуемая коммутируемость.

Обозначим X некоторый изометрический оператор, переводящий все N_{z_2} во все $N_{\bar{z}_2}$. Имеем:

$$U_{z_1}^{(1)} (U_{z_2}^{(2)} \oplus X) (\mathfrak{R}_{z_2} \oplus N_{z_2}) = U_{z_1}^{(1)} U_{z_2}^{(2)} \mathfrak{R}_{z_2} \oplus U_{z_1}^{(1)} X N_{z_2},$$

$$(U_{z_2}^{(2)} \oplus X) U_{z_1}^{(1)} (\mathfrak{R}_{z_2} \oplus N_{z_2}) = (U_{z_2}^{(2)} \oplus X)(U_{z_1}^{(1)} \mathfrak{R}_{z_2} \oplus U_{z_1}^{(1)} N_{z_2}) = $$
$$= U_{z_2}^{(2)} U_{z_1}^{(1)} \mathfrak{R}_{z_2} \oplus X U_{z_1}^{(1)} N_{z_2}.$$

Так как на $\mathfrak{R}_{z_2}$ $U_{z_1}^{(1)}$ и $U_{z_2}^{(2)}$ коммутируют, *то $U_{z_1}^{(1)}$ и $U_{z_2}^{(2)} \oplus X$ — расширение $U_{z_2}^{(2)}$ на все H_K — будут коммутировать тогда и только тогда, когда X подобрано так, что*

$$U_{z_1}^{(1)} X f = X U_{z_1}^{(1)} f \qquad (f \in N_{z_2}). \tag{2.21}$$

Но $U_{z_1}^{(1)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \bar{z}_1}{\lambda - z_1} dE_\lambda$, поэтому последняя коммутируемость следует из равенства

$$E(\Delta) X f = X E(\Delta) f \qquad (f \in N_{z_2}), \tag{2.22}$$

здесь Δ — произвольное борелевское множество (это равенство имеет смысл, так как N_{z_2} и $N_{\bar{z}_2}$ инвариантны относительно $E(\Delta)$). Подберем теперь X таким образом, чтобы выполнялось (2.22).

Оператор C_2 вещественен относительно инволюции $\circ$, поэтому вещественным будет и C_2^*. Следовательно, если $C_2^*\varphi = z\varphi$, то $C_2^*(\varphi^\circ) = \bar{z}\varphi^\circ$, т. е. $(N_{z_2})^\circ = N_{\bar{z}_2}$. Далее, C_1 также вещественен относительно $\circ$, поэтому вещественным будет и любое $E(\Delta)$. Зафиксируем $f_1 \in N_{z_2}$ и рассмотрим замыкание линейной оболочки векторов $E(\Delta) f_1$ при любых борелевских Δ, обозначим его $N_{z_2}^{(1)}$. Очевидно, $f_1 \in N_{z_2}^{(1)} \subseteq \subseteq N_{z_2}$. Если $N_{z_2}^{(1)}$ не исчерпывает всего N_{z_2}, рассмотрим вектор $f_2 \in N_{z_2}$, $f_2 \perp N_{z_1}^{(1)}$ и построим $N_{z_2}^{(2)}$ как замыкание линейной оболочки векторов $E(\Delta) f_2$; очевидно, $N_{z_2}^{(2)} \perp N_{z_2}^{(1)}$. Если $N_{z_2}^{(1)} \oplus N_{z_2}^{(2)}$ не исчерпывает N_{z_2}, рассмотрим вектор $f_3 \in N_{z_2}$, $f_3 \perp N_{z_2}^{(1)} \oplus N_{z_2}^{(2)}$ и построим $N_{z_2}^{(3)}$ и т. д. Очевидно, $N_{z_2}^{(1)} \oplus N_{z_2}^{(2)} \oplus \ldots = N_{z_2}$. Беря над этим равенством $\circ$, получим $(N_{z_2}^{(1)})^\circ \oplus (N_{z_2}^{(2)})^\circ \oplus \ldots = (N_{z_2})^\circ = N_{\bar{z}_2}$.

Так как $N_{z_2}^{(j)}$ и $(N_{z_2}^{(j)})^\circ$ инвариантны относительно любого $E(\Delta)$, то для построения оператора X достаточно построить такой оператор, переводящий все $N_{z_2}^{(j)}$ изометрически во все $(N_{z_2}^{(j)})^{\circ}$ и удовлетворяющий (2.22) при $f \in N_{z_2}^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Его достаточно определить на векторах вида $f = \sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) f_j$; полагаем $X\left(\sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) f_j\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) f_j^{\circ} = \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k E(\Delta_k) f_j\right)^{\circ} \in (N_{z_2}^{(j)})^{\circ}$. Справедливо равенство:

$$\left\langle X\left(\sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) f_j\right),\ X\left(\sum_{l=1}^{n} d_l E(\Delta_l) f_j\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k E(\Delta_k) f_j\right)^{\circ},\ \left(\sum_{l=1}^{n} \bar{d}_l E(\Delta_l) f_j\right)^{\circ}\right\rangle =$$

$$= \overline{\left\langle \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k E(\Delta_k) f_j,\ \sum_{l=1}^{n} \bar{d}_l E(\Delta_l) f_j\right\rangle} = \sum_{k,l=1}^{n} c_k \bar{d}_l\, \overline{\langle E(\Delta_k) f_j, E(\Delta_l) f_j\rangle} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} c_k \bar{d}_l\, \overline{\langle E(\Delta_k \cap \Delta_l) f_j, f_j\rangle} = \sum_{k,l=1}^{n} c_k \bar{d}_l \langle E(\Delta_k) f_j, E(\Delta_l) f_j\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) f_j,\ \sum_{l=1}^{n} d_l E(\Delta_l) f_j\right\rangle.$$

Это равенство, с одной стороны, показывает, что X определен корректно: если $\sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) f_j = 0$, то и $\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k E(\Delta_k) f_j\right)^{\circ} = 0$. С другой стороны, из него следует изометричность X. Далее, ясно, что X переводит все $N_{z_2}^{(j)}$ во все $(N_{z_2}^{(j)})^{\circ}$. Наконец,

$$E(\Delta) X\left(\sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) f_j\right) = E(\Delta) \sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) f_j^{\circ} = \sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta \cap \Delta_k) f_j^{\circ},$$

$$X\left(E(\Delta) \sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) f_j\right) = X\left(\sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta \cap \Delta_k) f_j\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta \cap \Delta_k) f_j^{\circ},$$

т. е. (2.22) выполняется на $f = \sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) f_j$, а значит и всюду на $N_{z_2}^{(j)}$. Требуемый оператор X, а значит и расширение $U_{z_2}^{(2)}$ до унитарного оператора, коммутирующего с $U_{z_1}^{(1)}$, построено.

Расширению оператора $U_{z_2}^{(2)}$ отвечает самосопряженное расширение оператора C_2. Коммутируемость этого расширения с замыканием C_1 вытекает из следующего общего факта.

Лемма 2.4. *Пусть в гильбертовом пространстве H действуют два самосопряженных оператора S_1 и S_2. Для коммутирования S_1 и S_2 необходимо и достаточно, чтобы коммутировали при фиксированных невещественных z_1, z_2 их преобразования Кэли $U_{z_1}^{(1)}$ и $U_{z_2}^{(2)}$.*

Действительно, резольвента оператора выражается через его преобразование Кэли по формуле $R_z = \frac{1}{z - \bar{z}}(U_z - E)$, поэтому коммутируемость преобразований Кэли $U_{z_1}^{(1)}$ и $U_{z_2}^{(2)}$ эквивалентна коммутируемости резольвент $R_{z_1}^{(1)}$ и $R_{z_2}^{(2)}$. Дальше нужно воспользоваться леммой 2.1.

Теорема доказана.

Заметим, что требование наличия инволюции $\circ$ и вещественность C_1, C_2 использовались лишь при построении оператора X, удовлетворяющего (2.21). Если при других предположениях оператор X можно подобрать как-либо иначе, то эти требования становятся излишними. Следующая теорема в известном смысле является одной из реализаций этого замечания.

Теорема 2.7. *Пусть оператор C_1 таков, что замыкание его сужения на множество $\mathfrak{D}(B_1) \otimes w_2$ при любом $w_2 \in H_+^{(2)}$ самосопряжено в пространстве $H_{K;w_2}^{(1)}$. Относительно оператора C_2 предположим, что у него имеется вещественная точка регулярного типа. Тогда существует самосопряженное расширение оператора C_2, коммутирующее с замыканием C_1.*

Доказательство. Рассмотрим преобразование Кэли $U_{z_1}^{(1)}$ оператора C_1 при фиксированном невещественном z_1; этот оператор после замыкания превращается в унитарный оператор в H_K. Пусть λ_2 — вещественная точка регулярного типа оператора C_2, оператор $R_{\lambda_2}^{(2)} = (C_2 - \lambda_2 E)^{-1}$ является ограниченным эрмитовым оператором, действующим из неплотного в H_K множества $H_+^{(1)} \otimes ((B_2 - \lambda_2 E)\mathfrak{D}(B_2))$ в плотное множество $H_+^{(1)} \otimes \mathfrak{D}(B_2)$. Если удастся расширить этот оператор до некоторого ограниченного самосопряженного оператора $\widetilde{R}_{\lambda_2}^{(2)}$, определенного во всем H_K и коммутирующего с $U_{z_1}^{(1)}$, то это вызовет расширение $\widetilde{C}_2$ оператора C_2 до самосопряженного, резольвентой которого в точке λ_2 будет являться $\widetilde{R}^{(2)}_{\lambda_2}$. Именно, нужно положить $\widetilde{C}_2 = (\widetilde{R}^{(2)}_{\lambda_2})^{-1} + \lambda_2 E$. Поясним, что $(\widetilde{R}^{(2)}_{\lambda_2})^{-1}$ существует как неограниченный оператор, так как из того, что $\widetilde{R}^{(2)}_{\lambda_2} f = 0$, следует $f = 0$: если $g \in H^{(1)}_{+} \otimes ((B_2 - \lambda_2 E)\mathfrak{D}(B_2))$, то $0 = \langle \widetilde{R}^{(2)}_{\lambda_2} f, g\rangle = \langle f, \widetilde{R}^{(2)}_{\lambda_2} g\rangle = \langle f, R^{(2)}_{\lambda_2} g\rangle$, где $R^{(2)}_{\lambda_2} g$ пробегает плотное в H_K множество $H^{(1)}_K \otimes \mathfrak{D}(B_2)$; благодаря его плотности $f = 0$. Расширение $\widetilde{C}_2$ будет коммутировать с C_1, так как коммутируемость $U^{(1)}_{z_1}$ и $\widetilde{R}^{(2)}_{\lambda_2}$ влечет коммутируемость $R^{(1)}_{z_1} = \dfrac{1}{z_1 - \bar{z}_1}(U^{(1)}_{z_1} - E)$ и $\widetilde{R}^{(2)}_{\lambda_2}$.

Для дальнейшего заметим, что подпространства $\mathfrak{R}_{\lambda_2} = [H^{(1)}_{+} \otimes ((B_2 - \lambda_2 E)\mathfrak{D}(B_2))]$ и $N_{\lambda_2} = H_K \ominus R_{\lambda_2}$ являются инвариантными подпространствами для оператора $U^{(1)}_{z_1}$ и в них он унитарен. Доказывается это точно так же, как и соответствующее утверждение на стр. 642—643. Теперь установим следующие общие леммы.

Лемма 2.5. *Пусть в гильбертовом пространстве $H = G_1 \oplus G_2$, построенном по гильбертовым пространствам G_1 и G_2, действует непрерывный эрмитов оператор S с неплотной областью определения G_1. Тогда существует самосопряженное непрерывное расширение T этого оператора на все пространство H, причем всевозможные такие расширения описываются посредством формулы*

$$Tf = T_X f = Sf_1 + Qf_2 + Xf_2 \qquad (f = f_1 + f_2;\ f_1 \in G_1,\ f_2 \in G_2). \quad (2.23)$$

Здесь Q — фиксированный оператор, действующий из G_2 в G_1 и являющийся сопряженным к действующему из G_1 в G_2 оператору $P_2 S$, где P_2 — оператор ортогонального проектирования на G_2; X — произвольный непрерывный самосопряженный оператор, действующий в пространстве G_2.

Доказательство. Предположим, что требуемое расширение T существует и найдем его вид. Так как

$$Tf = Sf_1 + P_1 T P_2 f_2 + P_2 T P_2 f_2 \quad (2.24)$$

(P_1 — ортогональный проектор на G_1), то в силу эрмитовости операторов T и S получим

$$0 = (Tf, g)_H - (f, Tg)_H = (Sf_1 + P_1 T f_2 + P_2 T f_2, g_1 + g_2)_H -$$
$$- (f_1 + f_2, Sg_1 + P_1 T g_2 + P_2 T g_2)_H = (P_2 S f_1, g_2)_H - (f_1, P_1 T P_2 g_2)_H +$$
$$+ (P_1 T P_2 f_2, g_1)_H - (f_2, P_2 S g_1)_H + (P_2 T P_2 f_2, g_2)_H - (f_2, P_2 T P_2 g_2)_H. \quad (2.25)$$

Полагая здесь сперва $f_2 = 0$, а затем $f_1 = g_1 = 0$, найдем $P_1TP_2 = (P_2S)^*$, $P_2TP_2 = (P_2TP_2)^*$. Сравнивая (2.23) и (2.24), получим, что $Q = P_1TP_2 = (P_2S)^*$; оператор $X = P_2TP_2 = (P_2TP_2)^*$ самосопряжен в G_2. Итак, если требуемое расширение существует, то оно имеет вид (2.23). Наоборот, формула (2.23), очевидно, определяет некоторое непрерывное расширение S на все H; читая равенство (2.25) в обратном направлении, мы убедимся, что это расширение эрмитово. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть выполнены предположения леммы 2.5 и, кроме того, в пространстве H действует унитарный оператор U, для которого G_1 и G_2 инвариантны и который коммутирует с S : $SUf_1 = USf_1$ $(f_1 \in G_1)$. Все самосопряженные непрерывные расширения на H оператора S, коммутирующие с U, описываются прежней формулой* (2.23), *в которой только в качестве X берется произвольный непрерывный самосопряженный в G_2 оператор, коммутирующий с частью U в G_2.*

Доказательство. Пусть X коммутирует с U в G_2, покажем, что T_X коммутирует с U. Из (2.23) и коммутируемости S с U следует, что нужно лишь убедиться в равенстве $QUf_2 = UQf_2$ $(f_2 \in G_2)$. Учитывая, что $Q = (P_2S)^*$, при произвольных $f_2 \in G_2$, $f_1 \in G_1$ получаем $(Qf_2, f_1)_H = (f_2, P_2Sf_1)_H = (f_2, Sf_1)_H$. Отсюда $(QUf_2, f_1)_H = (Uf_2, Sf_1)_H = (f_2, U^{-1}Sf_1)_H = (f_2, SU^{-1}f_1)_H = (Qf_2, U^{-1}f_1)_H = (UQf_2, f_1)_H$ $(f_1 \in G_1, f_2 \in G_2)$, т. е. $QUf_2 = UQf_2$ $(f_2 \in G_2)$, что и требовалось.

Наоборот, если T_X коммутирует с U, то, в частности, $QUf_2 + XUf_2 = T_XUf_2 = UT_Xf_2 = UQf_2 + UXf_2$ $(f_2 \in G_2)$. Учитывая инвариантность G_1 и G_2 относительно U, заключаем из последнего равенства: $XUf_2 = UXf_2$. Итак, X коммутирует с U в G_2. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Применим лемму 2.6, полагая $H = H_K$, $G_1 = \mathfrak{R}_{\lambda_2}$, $G_2 = N_{\lambda_2}$, $U = U_{z_1}^{(1)}$ и S равным замыканию оператора $R_{\lambda_2}^{(2)} = (C_2 - \lambda_2 E)^{-1}$. Для ее применимости нужно убедиться в коммутируемости $U_{z_1}^{(1)}$ и $R_{\lambda_2}^{(2)}$, но это проверяется точно так же, как и коммутируемость $U_{z_1}^{(1)}$ и $U_{z_2}^{(2)}$ в теореме 2.6. Если теперь положить в (2.23) $X = E$, то требование коммутируемости X с $U_{z_1}^{(1)}$ в N_{λ_2} будет выполнено и мы получим расширение $R_{\lambda_2}^{(2)}$, коммутирующее с $U_{z_1}^{(1)}$. Этим доказательство теоремы заканчивается.

Из доказательств теорем 2.6 и 2.7 легко видеть, что все самосопряженные расширения C_2 в H_K, коммутирующие с замыканием C_1 (мы их будем называть допустимыми), можно описать. Справедлива теорема.

Теорема 2.8. *Пусть замыкание сужения оператора C_1 на множество $\mathfrak{D}(B_1) \otimes w_2$ при любом $w_2 \in H_+^{(2)}$ самосопряжено в пространстве $H_{K;w_2}^{(1)}$, опе-*

ратор C_2 — произвольный вида (2.3). *Обозначим $U_z^{(1)}$ и $U_\zeta^{(2)}$ преобразования Кэли соответственно для C_1* и *C_2 в пространстве H_K, $U_z^{(1)}$ (после замыкания) — унитарный оператор в H_K, для которого любое дефектное подпространство N_ζ оператора C_2 является инвариантным. Зафиксируем невещественные z_1, z_2. Преобразования Кэли $\widetilde{U}_{z_2}^{(2)}$ допустимых расширений C_2 имеют вид $\widetilde{U}_{z_2}^{(2)} = U_{z_2}^{(2)} \oplus X$, где X — произвольный оператор, изометрически отображающий все N_{z_2} на все $N_{\bar{z}_2}$ и коммутирующий с $U_{z_1}^{(1)}$:*

$$U_{z_1}^{(1)} X f = X U_{z_1}^{(1)} f \quad (f \in N_{z_2}). \tag{2.26}$$

Пусть выполнены условия первой части теоремы и дополнительно C_2 имеет вещественную точку λ_2 регулярного типа. Положим $R_{\lambda_2}^{(2)} = (C_2 - \lambda_2 E)^{-1}$, замыкание G_1 области определения этого оператора и ортогональное дополнение к ней G_2 — инвариантные подпространства для $U_z^{(1)}$. Зафиксируем невещественное z_1. Резольвенты $\widetilde{R}_{\lambda_2}^{(2)}$ допустимых расширений C_2 имеют вид

$$\widetilde{R}_{\lambda_2}^{(2)} f = R_{\lambda_2}^{(2)} f_1 \dotplus R f_2 \dotplus X f_2 \quad (f = f_1 \dotplus f_2 \in H_K;\ f_1 \in G_1, f_2 \in G_2). \tag{2.27}$$

Здесь R — фиксированный оператор, действующий из G_2 в G_1 и являющийся сопряженным к оператору $P_2 R_{\lambda_2}^{(2)}$ из G_1 в G_2 (P_2 — ортогональный проектор на G_2); X — произвольный самосопряженный оператор в G_2, коммутирующий с $U_{z_1}^{(1)}$.

Теорема 2.6 по существу сводится к тому, что при наличии инволюции $\circ$ и вещественности C_1 и C_2 можно построить X, удовлетворяющий (2.26), а теорема 2.7 — к тому, что X из (2.27) всегда можно построить, полагая $X = E$.

Сделаем еще некоторые замечания. Проверка самосопряженности замыкания сужения C_1 на $\mathfrak{D}(B_1) \otimes w_2$ в пространстве $H_{K;w_2}^{(1)}$, необходимая для применения теорем 2.6 — 2.8, может осуществляться при помощи леммы 2.2. Из доказательства этих теорем видно, что вместо этого требования можно требовать несколько меньшее: замыкание сужения C_1 на $\mathfrak{D}(B_1) \otimes ((B_2 - z_2 E)\, \mathfrak{D}(B_2))$ или на $\mathfrak{D}(B_1) \otimes ((B_2 - \lambda_2 E) \mathfrak{D}(B_2))$ самосопряжено в пространстве $[H_+^{(1)} \otimes ((B_2 - z_2 E) \mathfrak{D}(B_2))]$ или $[H_+^{(1)} \otimes ((B_2 - \lambda_2 E)\, \mathfrak{D}(B_2))]$. Относительно необходимости инволюции $- = -_1 \otimes -_2$ можно сделать такое же замечание, как и в конце п.2.

§ 3. Непрерывные положительно определенные ядра, *-коммутирующие с одним дифференциальным оператором

Сейчас мы рассмотрим приложения результатов предыдущих двух параграфов. Для простоты будет исследоваться случай непрерывных п. о. ядер, случай разрывных и обобщенных ядер может быть изучен аналогично. В этом параграфе считается, что $q = 1$ и A — дифференциальный оператор.

1. Общее дифференциальное выражение. Пусть $G \subseteq E_n$ — некоторая область n-мерного пространства с границей Γ, $K(x, y) \in$

$\in C(G\times G)$ — ядро. Напомним, что это ядро называется п. о., если для любых точек $x_1, \ldots, x_N \in G$ и любых комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_N$

$$\sum_{j,k=1}^{N} K(x_j, x_k)\,\xi_k\bar{\xi}_j \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Легко проверить, что условие (3.1) эквивалентно требованию:

$$B_K(u,u) \geqslant 0 \ (u \in C_0^\infty(G));\ B_K(u,v) = \langle u, v \rangle =$$
$$= \iint_{GG} K(x,y)\,u(y)\,\overline{v(x)}\,dxdy \qquad (u, v \in C_0^\infty(G)). \tag{3.2}$$

Из (3.1) вытекает, что $K(x,x) \geqslant 0$ и $|K(x,y)|^2 \leqslant K(x,x)K(y,y)$ $(x, y \in \in G)$.

Выберем функцию $p(x) \in C^\infty(G)$, $p(x) \geqslant 1$ $(x \in G)$, настолько быстро растущей при $x \to \Gamma$ и ∞, чтобы

$$\int_G \frac{K(x,x)}{p(x)}\,dx < \infty. \tag{3.3}$$

Тогда $K \in L_2(G\times G;\, p^{-1}(x)\,p^{-1}(y)\,dxdy)$. Во всем дальнейшем будем считать $H_0 = L_2(G)$. Сейчас мы показали, что если положить $H_+ = L_2(G, pdx)$, где $p(x)$ подбирается из условия (3.3), то $K \in H_-\otimes H_-$. Пространство H_K теперь совпадает с пополнением $L_2(G, pdx)$ (или $C_0^\infty(G)$) относительно скалярного произведения (3.2) (возможно, после предварительного отождествления).

Предположим, что в G определено выражение

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leqslant r} a_\alpha(x)\,D^\alpha u,$$

где $a_\alpha \in C^{|\alpha|}(G)$; Λ — соответствующий ему минимальный оператор в $L_2(G)$ (т. е. замыкание оператора $u \to Lu$, $u \in C_0^\infty(G)$). В качестве оператора A из § 1 примем Λ. Инволюцией в $L_2(G)$ служит обычный переход к комплексной черте. Оператор Λ, конечно, допускает продолжение оснащения — в качестве Д можно взять $C_0^\infty(G)$, топологизированное должным образом. Сопряженный в $L_2(G)$ оператор Λ^* совпадает с $Л^+$ — максимальным оператором, построенным по L^+, его сужение на Д $= C_0^\infty(G)$ (т. е. $C = B$, см. стр. 631) — с действием здесь Λ^+, т е. с соответствием $u \to L^+u$ $(u \in C_0^\infty(G))$. Согласно сказанному на стр. 621, $*$-коммутируемость K и A эквивалентна равенству

$$\langle L^+ u, v \rangle = \langle u, L^+ v \rangle \quad (u, v \in C_0^\infty(G)), \text{ т. е. } L_x K = \overline{L}_y K \tag{3.4}$$

(второе равенство выполняется внутри $G \times G$; если $K \overline{\in} W^r_{2,\text{лок}}(G \times G)$, то его нужно понимать в смысле обобщенных функций Л. Шварца, соответствующее тождество, очевидно, совпадает с первым из равенств (3.4)).

Построим пространство H_{++} такое, чтобы вложение $H_{++} \to H_+$ было квазиядерным. Воспользовавшись замечанием на стр. 353—354, возьмем $(u, v)_{++} = (u\sqrt{p},\ v\sqrt{p})_{\mathfrak{H}}$, где $\mathfrak{H} \subset L_2(G)$ таково, что вложение $\mathfrak{H} \to L_2(G)$ квазиядерно. Можно положить $\mathfrak{H} = W_2^{(l,q)}(G)$. Здесь $l > \frac{n}{2}$, а для $q(x)$ сходится интеграл (3.17), гл. I. В результате получим, что в качестве H_{++} можно принять пространство $W_2^{(l,s)}(G)$, где $l > \frac{n}{2}$, а $s(x) = \sqrt{p(x)}\,q(x)$, т. е. $s \in C^\infty(G)$, $s(x) \geqslant 1$ $(x \in G)$ и

$$\int\limits_G \frac{p(x)\,A^2(x)}{s^2(x)}\,dx < \infty \tag{3.5}$$

(функция $A(x)$ введена на стр. 73). Очевидно, $Д \subset H_{++}$. Таким образом,

$$Д' \supseteq H_{--} \supseteq H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq H_{++} \supseteq Д.$$

Определение семейства элементарных п. о. ядер, фигурирующего в теореме 1.1, теперь выглядит следующим образом. Предположим, что коэффициенты $a_\alpha \in C^{|\alpha|+l}(G)$; п. о. ядра $\Omega_\lambda \in W_2^{-(l,s)}(G) \otimes \otimes W_2^{-(l,s)}(G)$ $(\|\Omega_\lambda\|_{W_2^{-(l,s)}(G) \otimes W_2^{-(l,s)}(G)} \leqslant C < \infty)$ образуют семейство элементарных п. о. ядер, если внутри $G \times G$

$$L_x \Omega_\lambda = \lambda \Omega_\lambda, \qquad \overline{L}_y \Omega_\lambda = \lambda \Omega_\lambda,$$

$$\text{т. е. } (\Omega_\lambda, ((L^+ - \lambda E)\,v)(x)\,\overline{u(y)})_0 = 0, \quad (\Omega_\lambda, v(x)\,\overline{((L^+ - \lambda E)\,u)(y)})_0 = 0$$
$$(u, v \in C_0^\infty(G)). \tag{3.6}$$

Сформулируем теорему 1.1 для рассматриваемого частного случая.

Теорема 3.1. *Пусть* $K(x, y) \in C(G \times G)$ — *п. о. ядро,* $p, s \in \in C^\infty(G)$ $(p(x),\ s(x) \geqslant 1,\ x \in G)$ *выбраны из условий сходимости интегралов* (3.3) *и* (3.5); *коэффициенты* L $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+l}(G)\left(l > \frac{n}{2}\right)$.

Для того чтобы имело место представление

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\lambda \, d\varrho(\lambda), \tag{3.7}$$

где $\Omega_\lambda \in W_2^{-(l,s)}(G) \otimes W_2^{-(l,s)}(G)$ *— некоторое семейство элементарных п. о. ядер,* $d\varrho(\lambda)$ *— неотрицательная конечная мера, интеграл* (3.7) *сходится по норме пространства* $W_2^{-(l,s)}(G) \otimes W_2^{-(l,s)}(G)$ *— необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (3.4). *В* (3.7) $\Omega_\lambda \, d\varrho(\lambda)$ *определяется единственным образом тогда и только тогда, когда замыкание в* H_K *оператора* $u \to L^+ u$ ($u \in C_0^\infty(G)$) *максимально.*

2. **Случай эллиптического выражения.** Предположим, что L эллиптично и с достаточно гладкими коэффициентами, тогда теорема 3.1 существенно уточняется. Так, пусть $a_\alpha \in C^{|\alpha|+r+l+1}(G)$, из уравнений (3.6) при помощи теоремы 4.4, гл. III, заключаем, что Ω_λ в каждой ограниченной строго внутренней относительно $G \times G$ области входит в $W_2^{r+l+1} \otimes W_2^{r+l+1}$, и, тем более, суммируема в ней. Применяя теорему 4.2, гл III, получаем, что производные $(D_x^\alpha D_y^\beta \Omega_\lambda)(x, y)$ при $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant r + l + 1$ существуют и непрерывны относительно точки $(x, y) \in G \times G$.

Лемма 3.1. *Для любых* $x, y \in G$ *выполняется неравенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Omega_\lambda(x, y)| \, d\varrho(\lambda) \leqslant \sqrt{K(x, x) K(y, y)}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Из (3.7) для $u, v \in C_0^\infty(G)$ следует

$$\int_G \int_G K(x, y) u(y) \overline{v(x)} \, dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_G \int_G \Omega_\lambda(x, y) u(y) \overline{v(x)} \, dx dy d\varrho(\lambda). \tag{3.9}$$

Пусть $\varkappa_\nu(x) \geqslant 0$ — сингулярная последовательность функций из $C_0^\infty(G)$, сходящаяся к δ_{x_0}; положим в (3.9) $u = v = \varkappa_\nu$. Так как при $\nu \to \infty$

$$0 \leqslant \int_G \int_G \Omega_\lambda(x, y) \varkappa_\nu(y) \varkappa_\nu(x) \, dx dy \to \Omega_\lambda(x_0, x_0),$$

то в силу леммы Фату, равенства (3.9) и непрерывности ядра $K(x, y)$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\lambda(x_0, x_0) \, d\varrho(\lambda) \leqslant \lim_{\nu \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_G \int_G \Omega_\lambda(x, y) \varkappa_\nu(y) \varkappa_\nu(x) \, dx dy d\varrho(\lambda) =$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} \int_G \int_G K(x, y) \varkappa_\nu(y) \varkappa_\nu(x) \, dx dy = K(x_0, x_0).$$

Применяя это неравенство и пользуясь п. о. ядра $\Omega_\lambda(x, y)$, получим при $x_0, y_0 \in G$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Omega_\lambda(x_0, y_0)|\, d\varrho(\lambda)\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\Omega_\lambda(x_0, x_0)}\, \sqrt{\Omega_\lambda(y_0, y_0)}\, d\varrho(\lambda)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\lambda(x_0, x_0)\, d\varrho(\lambda) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\lambda(y_0, y_0)\, d\varrho(\lambda) \leqslant K(x_0, x_0)\, K(y_0, y_0), \quad (3.10)$$

т. е. (3.8). Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что в эллиптическом случае интеграл (3.7) сходится абсолютно для любых $x, y \in G$. Функция $\Omega_\lambda(x, y)$ точки (x, y, λ) суммируема относительно меры $dx dy d\varrho(\lambda)$ в области $G' \times G' \times (-\infty, \infty)$, где $G' \subseteq G$ — любая ограниченная подобласть, лежащая строго внутри G.

Теорему 3.1 теперь можно так сформулировать, чтобы в ней не фигурировало пространство $H_{-\,-} \otimes H_{-\,-} = W_2^{-(l,s)}(G) \otimes W_2^{-(l,s)}(G)$.

Теорема 3.2. *Пусть L — эллиптическое выражение, коэффициенты которого $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+r+l+1}(G)$ $\left(l > \frac{n}{2}\right)$. Семейство п. о. ядер $\Omega_\lambda(x, y)$ $(x, y \in G)$ будем называть семейством элементарных п. о. ядер, если существуют и непрерывны относительно $(x, y) \in G \times G$ производные $(D_x^\alpha D_y^\beta \Omega_\lambda)(x, y)$ $(|\alpha|, |\beta| \leqslant r + l + 1)$ и выполнены первые два равенства в* (3.6).

Для того чтобы п. о. ядро $K(x, y) \in C(G \times G)$ было представимо в виде абсолютно сходящегося интеграла

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\lambda(x, y)\, d\varrho(\lambda) \qquad (x, y \in G), \qquad (3.11)$$

где $d\varrho(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера, а $\Omega_\lambda(x, y)$ — некоторое семейство элементарных п. о. ядер, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение (3.4). *В* (3.11) *$\Omega_\lambda d\varrho(\lambda)$ определяется единственным образом тогда и только тогда, когда замыкание в H_K оператора $u \to L^+ u$ $(u \in C_0^\infty(G))$ максимально.*

Доказательство. Пусть K таково, что (3.4) имеет место. Согласно теореме 3.1 и лемме 3.1 справедливо представление (3.7), в котором интеграл сходится абсолютно, т. е. справедливо (3.11). Наоборот, пусть имеется последнее представление. Полагая в нем

$y=x$, найдем: $K(x,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega_\lambda(x,x)\,d\varrho(\lambda)$ $(x\in G)$; отсюда аналогично (3.10) заключаем, что $\Omega_\lambda(x,y)$ суммируема по $(x,y,\lambda)\in G'\times G'\times\times(-\infty,\infty)$ (G' лежит строго внутри G и ограничена) относительно меры $dxdyd\varrho(\lambda)$. Благодаря этому законны следующие выкладки, доказывающие (3.4):

$$\langle L^+u,v\rangle=\iint\limits_{GG}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega_\lambda(x,y)\,d\varrho(\lambda)\right\}(L^+u)(y)\overline{v(x)}\,dxdy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\iint\limits_{GG}\Omega_\lambda(x,y)(L^+u)(y)\overline{v(x)}\,dxdy\right\}d\varrho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\iint\limits_{GG}(\bar{L}_y\Omega_\lambda)(x,y)\,u(y)\overline{v(x)}\,dxdy\right\}d\varrho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\iint\limits_{GG}(L_x\Omega_\lambda)(x,y)\,u(y)\overline{v(x)}\,dxdy\right\}d\varrho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\iint\limits_{GG}\Omega_\lambda(x,y)\,u(y)\overline{(L^+v)(x)}\,dxdy\right\}d\varrho(\lambda)=\langle u,L^+v\rangle$$

$$(u,v\in C_0^\infty(G)).$$

Докажем последнее утверждение теоремы. Оно устанавливается так же, как и на стр. 625, если только доказать следующий аналог леммы 1.1: пусть имеется представление (3.11), $\Delta\subseteq(-\infty,\infty)$ — борелевские множества. Билинейные формы $B_\Delta(u,v)=\int\limits_\Delta\left\{\iint\limits_{GG}\Omega_\lambda(x,y)\times\times u(y)\overline{v(x)}\,dxdy\right\}d\varrho(\lambda)$ $(u,v\in C_0^\infty(G))$ непрерывны в H_K и определяют операторы $E(\Delta)$, образующие обобщенное разложение единицы сужения оператора Λ^* на $Д=C_0^\infty(G)$. Доказывается этот факт точно так же, как и лемма 1.1, нужно лишь при выводе (1.16) заменить H_{++} на $C_0^\infty(G)$ и иметь в виду, что $\Omega_\lambda(x,y)$ суммируема относительно $dxdyd\varrho(\lambda)$ для $(x,y,\lambda)\in G'\times G'\times(-\infty,\infty)$. Теорема доказана.

Изучим при предположениях п. 1 обобщенную резольвенту R_z действующего в H_K эрмитова оператора $u\to L^+u$ $(u\in C_0^\infty(G))$. Для этого нам понадобится следующее дополнение к теореме 2.2, гл. I.

Теорема 3.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2, гл. I, и, кроме того, имеется цепочка* $\mathfrak{H}_-\supseteq\mathfrak{H}_0\supseteq\mathfrak{H}_+=H_+$. *Тогда представление*

(2.18), *гл. I, можно записать также в виде*

$$B(u, v) = (\Psi, v \otimes \bar{u})_{\mathfrak{H}_0} \quad (u, v \in H_+), \tag{3.12}$$

где $\Psi \in \mathfrak{H}_- \otimes \mathfrak{H}_-$.

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из (2.18), гл. I, и следующего общего факта, который нужно применить к цепочкам $H_- \otimes H_- \supseteq H_0 \otimes H_0 \supseteq H_+ \otimes H_+$ и $\mathfrak{H}_- \otimes \mathfrak{H}_- \supseteq \mathfrak{H}_0 \otimes \mathfrak{H}_0 \supseteq H_+ \otimes H_+$.

Лемма 3.2. *Пусть имеются две цепочки с общим позитивным пространством:* $H_-^{(1)} \supseteq H_0^{(1)} \supseteq H_+^{(1)}$ *и* $H_-^{(2)} \supseteq H_0^{(2)} \supseteq H_+^{(2)} = H_+^{(1)}$. *Тогда всякому* $\alpha \in H_-^{(1)}$ *отвечает* $\beta \in H_-^{(2)}$ *такое, что*

$$(\alpha, u)_{H_0^{(1)}} = (\beta, u)_{H_0^{(2)}} \qquad (u \in H_+^{(1)})^*. \tag{3.13}$$

В самом деле, пусть $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ — операторы $\mathbf{I}$, построенные по первой и второй цепочкам соответственно. Тогда $(\alpha, u)_{H_0^{(1)}} = (\mathbf{I}_1\alpha, u)_{H_+^{(1)}} = (\mathbf{I}_1\alpha, u)_{H_+^{(2)}} = (\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{I}_1\alpha, u)_{H_0^{(2)}}$ $(u \in H_+^{(1)})$. Полагая $\beta = \mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{I}_1\alpha$, получим (3.13). Лемма, а значит и теорема, доказаны.

Пусть K таково, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ невырождена. Применим теорему 3.3 в случае цепочек $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ и $\mathfrak{H}_- \supseteq \mathfrak{H}_0 \supseteq H_+$ вида $H_{--,K} \supseteq H_K \supseteq H_{++} = W_2^{(l,s)}(G)$ и $W_2^{-(l,s)}(G) = H_{--} \supseteq H_0 = L_2(G) \supseteq H_{++} = W_2^{(l,s)}(G)$ и формы $B(u, v) = \langle R_z u, v \rangle$ $(u, v \in W_2^{(l,s)}(G))$. В результате получим представление

$$\langle R_z u, v \rangle = (\mathrm{R}_z, v(x)\overline{u(y)})_0 \quad (u, v \in C_0^\infty(G)) \tag{3.14}$$

с обобщеным ядром $\mathrm{R}_z \in W_2^{-(l,s)}(G) \otimes W_2^{-(l,s)}(G)$. Покажем, что R_z внутри $G \times G$ является обобщенным решением уравнений

$$L_x \mathrm{R}_z - z\mathrm{R}_z = K, \quad L_y^{\oplus} \mathrm{R}_z - z\mathrm{R}_z = K. \tag{3.15}$$

В самом деле, в (3.14) u, очевидно, можно заменить на $(L - zE)u$ $(u \in C_0^\infty(G))$ и мы получим

$$(\mathrm{R}_z, v(x)\overline{((L - zE)u)(x)})_0 = \langle R_z(L - zE)u, v \rangle = \langle u, v \rangle =$$

$$= \int_G \int_G K(x, y)\, u(y)\, \overline{v(x)}\, dx dy = (K, v(x)\overline{u(y)})_0 \quad (u, v \in C_0^\infty(G)),$$

т. е. второе из равенств (3.15). Аналогично доказывается и первое из них.

Доказательство соотношений (3.14) и (3.15) в случае вырождения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ предоставляем читателю. Заметим лишь, что теперь вместо теоремы 3.3 нужно применить следующее ее обобщение: пусть выполнены условия теоремы 2.2, гл. I, и имеется цепочка $\mathfrak{H}_- \supseteq \mathfrak{H}_0 \supseteq \mathfrak{H}_+ \supseteq H_+$, где H_+ — подпространство $\mathfrak{H}_+$. Тогда справедливо представление (3.12) с $\Psi \in \mathfrak{H}_- \otimes \mathfrak{H}_-$. Для доказа-

---

* Этот факт по существу уже фигурировал в доказательстве теоремы 1.1 на стр. 623.

тельства этого факта нужно построить цепочку $\mathfrak{H}'_- \supseteq \mathfrak{H}'_0 \supseteq \mathfrak{H}'_+ = H_+$, где $\mathfrak{H}'_0$ — замыкание $\mathfrak{H}'_+ = H_+$ в метрике $\mathfrak{H}_0$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{H}'_-$ изометрично подпространству $\mathfrak{H}_-$, состоящему из всех $\alpha \in \mathfrak{H}_-$, аннулирующихся на ортогональном дополнении в $\mathfrak{H}_+$ к $\mathfrak{H}'_+$. Поэтому можно применить к цепочкам $H_+ \supseteq H_0 \supseteq H_-$ и $\mathfrak{H}'_- \supseteq \mathfrak{H}'_0 \supseteq \mathfrak{H}'_+ = H_+$ теорему 3.3, получить представление типа (3.12), а затем перейти к представлению с $\Psi \in \mathfrak{H}_- \otimes \mathfrak{H}_-$.

Возвратимся опять к эллиптическому L.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2; R_z — обобщенная резольвента действующего в H_K эрмитова оператора $u \to L^+u$ ($u \in C_0^\infty(G)$). Утверждается, что обобщенное ядро R_z резольвенты R_z в действительности является достаточно гладким: существуют и непрерывны относительно $(x, y) \in G \times G$ производные $D_x^\alpha D_y^\beta \mathrm{R}_z$, где $|\alpha| \leqslant q'$, $|\beta| \leqslant r + q'' - 1$ или $|\alpha| \leqslant r + q' - 1$, $|\beta| \leqslant q''$, если только существуют и непрерывны производные $D_x^\alpha D_y^\beta K$ ($|\alpha| \leqslant q' \leqslant l + 1$, $|\beta| \leqslant q'' \leqslant l + 1$) (поэтому при $q', q'' \geqslant 1$ уравнения (3.15) удовлетворяются в обычном смысле). Представление (3.14) запишется в виде*

$$\langle R_z u, v \rangle = \int_G \int_G R(x, y; z)\, u(y)\, \overline{v(x)}\, dx dy \quad (u, v \in C_0(G)));\ \mathrm{R}_z = R(\cdot, \cdot; z). \tag{3.16}$$

Справедливы соотношения:

$$\begin{gathered} R(x, y; z) = \overline{R(y, x; \bar z)},\quad R(x, y;\ z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_\lambda(x, y)}{\lambda - z}\, d\varrho(\lambda), \\ \int_\Delta \Omega_\lambda(x, y)\, d\varrho(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{\Delta + i\varepsilon} \operatorname{Im} R(x, y; z)\, dz \quad (x, y \in G). \end{gathered} \tag{3.17}$$

Доказательство. Применим к обобщенному ядру R_z, удовлетворяющему уравнениям (3.15), теорему 4.4, гл. III. Получим, что R_z в каждой ограниченной строго внутренней подобласти $G \times G$ входит в

$$(W_2^{q'} \otimes W_2^{r+q''-1}) \cup (W_2^{r+q'-1} \otimes W_2^{q''})$$

и тем более суммируемо в ней. Поэтому можно применить и теорему 4.2, гл. III, в силу которой существуют и непрерывны относительно $(x, y) \in G \times G$ производные $D_x^\alpha D_y^\beta \mathrm{R}_z$, указанные в формулировке теоремы. Часть теоремы, касающаяся гладкости R_z, установлена.

Первое из равенств (3.17) следует из (3.16) и того, что $R_z^* = R_{\bar z}$; третье — из второго. Установим второе. Из (3.8) вытекает, что интеграл в этом равенстве сходится и законны следующие преобразования:

$$\int_G \int_G R(x, y; z)\, u(y)\, \overline{v}(x)\, dx dy = \langle R_z u, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d\langle E_\lambda u, v \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} \left\{ \int_G \int_G \Omega_\lambda (x, y)\, u(y)\, \overline{v(x)}\, dxdy \right\} d\varrho(\lambda) =$$

$$= \int_G \int_G \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_\lambda (x, y)}{\lambda - z} d\varrho(\lambda) \right\} u(y)\, \overline{v(x)}\, dxdy \quad (u, v \in C_0^\infty(G)).$$

Отсюда вытекает второе из равенств (3.17). Теорема доказана.

К представлениям резольвенты (3.14) и (3.16) можно подойти и с других позиций. Именно, в п. 7 будет показано, что пространства H_K содержат δ_ξ — δ-функцию, сосредоточенную в точке $\xi \in G$. Если в (3.14) в качестве u и v взять δ-последовательности u_ν, v_ν, стягивающиеся к δ_η и δ_ξ соответственно (т. е. последовательности функций из $C_0^\infty(G)$, аппроксимирующие в H_K δ_η и δ_ξ), то получим, что существует $\lim_{\nu\to\infty} (\mathrm{R}_z, v_\nu(x)\overline{u_\nu(y)})_0 = \lim_{\nu\to\infty} \langle R_z u_\nu, v_\nu \rangle = \langle R_z \delta_\eta, \delta_\xi \rangle$. Это показывает, что *ядро* R_z *и в случае общего выражения* L *будет обычным* (правда, мы так не сумеем доказать его достаточную гладкость в эллиптическом случае). Формула типа второй в (3.17) для этого ядра также сохранится, однако интеграл будет, конечно, сходиться лишь в смысле пространства $W_2^{-(l,s)}(G) \otimes W_2^{-(l,s)}(G)$, а не абсолютно. Мы не будем в общем случае более подробно рассматривать этот подход. Некоторая детализация подобных рассмотрений содержится в п. 9 (формула (3.68)) и в § 6.

Заметим также, что формулы типа (3.14), (3.16) и (3.17) (вторая) могут быть получены и для произвольных ограниченных функций оператора $u \to L^+ u$ $(u \in C_0^\infty(G))$.

В дальнейшем будем рассматривать в основном случай обыкновенных дифференциальных выражений L. Примерам для случая выражений в частных производных посвящен § 6.

3. Случай обыкновенного дифференциального выражения. Пусть G одномерно: $G \subseteq E_1$; L — обыкновенное дифференциальное выражение. Теорема 3.1 справедлива при всех $n = 1, 2, \ldots$, поэтому она имеет место в нашем случае. Однако благодаря тому что все решения обыкновенного уравнения гладкие, сейчас имеет место и ситуация, описанная в п. 2. Более точно, предположим, что коэффициенты L $a_\alpha \in C^{\alpha+l}(G)$, где $l \geqslant 1$. Применяя теорему 5.1, гл. VI, получим, что производные $(D_x^\alpha D_y^\beta \Omega_\lambda)(x, y)$ при $\alpha, \beta \leqslant r + l$ существуют и непрерывны относительно $(x, y) \in G \times G$. Это позволяет повторить все рассуждения стр. 652—654 (в частности, доказать лемму 3.1) и сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.5. *Пусть* L *— обыкновенное дифференциальное выражение, коэффициенты которого* $a_\alpha(x) \in C^{\alpha+l}(G)$ $(l \geqslant 1)$. *Тогда для него справедливы все утверждения теоремы 3.2 с заменой* $r + l + 1$ *на* $r + l$.

В рассуждениях стр. 655 относительно резольвенты R_z также не исключался случай $n = 1$, поэтому обобщенное ядро R_z существует и для обыкновенного L. Более того, опять применяя теорему 5.1, гл. VI, докажем так же, как и ранее, аналог теоремы 3.4.

Теорема 3.6. *Пусть L — обыкновенное выражение, коэффициенты которого $a_\alpha(x) \in C^{\alpha+l}(G)$ $(l \geqslant 1)$, п. о. ядро $K(x, y)$ таково, что существуют и непрерывны относительно $(x, y) \in G \times G$ производные $D_x^\alpha D_y^\beta K$ при $\alpha \leqslant q' = 0, 1, \ldots$ и $\beta \leqslant q'' = 0, 1, \ldots$. Тогда ядро R_z резольвенты достаточно гладкое: существуют и непрерывны по $(x, y) \in G \times G$ производные $D_x^\alpha D_y^\beta R_z$, где $\alpha \leqslant r + \min(l, q')$, $\beta \leqslant r + \min(l, q'')$. Уравнгния (3.15) удовлетворяются в обычном смысле и верны соотношения (3.17).*

Для обыкновенного выражения L представление (3.11) существенно улучшается, если провести преобразования типа изложенных на стр. 499—500. В самом деле, пусть $\chi_0(x; \lambda), \ldots, \chi_{r-1}(x; \lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения $Lu - \lambda u = 0$ $(x \in G)$, удовлетворяющих условиям:

$$\left.\frac{d^k}{dx^k} \chi_j(x; \lambda)\right|_{x=a} = \delta_{jk} \qquad (j, k = 0, \ldots, r-1), \tag{3.18}$$

где a — некоторая точка G (предполагается, что G — интервал, конечный или бесконечный)*. Каждое решение u уравнения $Lu - \lambda u = 0$ выражается через $\chi_j(x; \lambda)$ по формуле: $u(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \left(\frac{d^j u}{dx^j}\right)(a)\, \chi_j(x; \lambda)$ $(x \in G)$. Учитывая соотношения (3.6) и применяя к $\Omega_\lambda(x, y)$ дважды эту формулу, получим:

$$\Omega_\lambda(x, y) = \sum_{j=0}^{r-1} \left(\frac{\partial^j \Omega_\lambda}{\partial x^j}\right)(a, y)\, \chi_j(x; \lambda) =$$

$$= \sum_{j,k=0}^{r-1} \left(\frac{\partial^{j+k} \Omega_\lambda}{\partial x^j\, \partial y^k}\right)(a, a)\, \chi_j(x; \lambda)\, \overline{\chi_k(y; \lambda)} \qquad (x, y \in G). \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в (3.11) и полагая $d\sigma_{jk}(\lambda) = \left(\frac{\partial^{j+k} \Omega_\lambda}{\partial x^j\, \partial x^k}\right)(a, a)\, d\varrho(\lambda)$, найдем:

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,k=0}^{r-1} \chi_j(x; \lambda)\, \overline{\chi_k(y; \lambda)}\, d\sigma_{jk}(\lambda) \qquad (x, y \in G). \tag{3.20}$$

* Фундаментальную систему можно выделять и как-либо иначе.

Теорема 3.7. *Пусть G — конечный или бесконечный интервал на оси $(-\infty, \infty)$, $K(x, y) \in C(G \times G)$ — п. о. ядро, L — обыкновенное дифференциальное выражение порядка r, коэффициенты которого $a_\alpha(x) \in C^{\alpha+l}(G)$ $(l \geqslant 1)$ и $\chi_j(x; \lambda)$ $(j = 0, \ldots, r-1)$ — фундаментальная система решений уравнения $Lu = \lambda u$ $(x \in G)$, удовлетворяющих начальным условиям* (3.18). *Для того чтобы было справедливо представление* (3.20) *с некоторой неотрицательной матричной мерой $\| d\sigma_{jk}(\lambda) \|_0^{r-1}$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие* (3.4) *(интеграл в* (3.20) *при каждых $x, y \in G$ сходится в смысле пространства $L_2(C_r; (-\infty, \infty), \| d\sigma_{jk}(\lambda) \|_0^{r-1})$, см. стр. 564—565; C_r — r-мерное комплексное пространство). Мера $\| d\sigma_{jk}(\lambda) \|_0^{r-1}$ определяется по ядру $K(x, y)$ единственным образом тогда и только тогда, когда замыкание в H_K оператора $u \to \to L^+ u$ $(u \in C_0^\infty(G))$ максимально.*

Доказательство. Пусть условие (3.4) выполняется, согласно теореме 3.5 имеет место представление (3.11), а значит, как было только что показано, и (3.20) со сконструированной выше $d\Sigma(\lambda) = \| d\sigma_{jk}(\lambda) \|_0^{r-1}$. Как вытекает из леммы 5.1, гл. VI, $\Sigma(\Delta)$ — неотрицательная матричная мера. Ясно также, что сходимость интеграла (3.11) влечет сходимость (3.20) в смысле $L_2(C_r; (-\infty, \infty), d\Sigma(\lambda))$. Наоборот, пусть справедливо представление (3.20). Положим

$$\varrho(\Delta) = \sum_{j=0}^{r-1} \int_\Delta f(\lambda)\, d\sigma_{jj}(\lambda),$$

где $f(\lambda) \in C((-\infty, \infty))$ положительна и настолько быстро убывает при $|\lambda| \to \infty$, что $\varrho((-\infty, \infty)) < \infty$. Если $\varrho(\Delta) = 0$, то и $\sigma_{jj}(\Delta) = 0$ $(j = 0, \ldots, r-1)$, а значит в силу неравенства $\sigma_{jk}^2(\Delta) \leqslant \sigma_{jj}(\Delta) \sigma_{kk}(\lambda)$ и $\Sigma(\Delta) = 0$. Отсюда следует, что матрица $\| d\sigma_{jk}(\lambda)/d\varrho(\lambda) \|_0^{r-1}$ существует и неотрицательно определенная, поэтому ядро

$$\Omega_\lambda(x, y) = \sum_{j, k=0}^{r-1} \frac{d\sigma_{jk}(\lambda)}{d\varrho(\lambda)} \chi_j(x; \lambda) \overline{\chi_k(y; \lambda)} \quad (x, y \in G)$$

п. о. Ясно, что семейство $\Omega_\lambda(x, y)$ — семейство элементарных п. о. ядер в смысле определения теоремы 3.2. Представление (3.20) теперь можно переписать в виде (3.11) с абсолютно сходящимся интегралом. Согласно теореме 3.5, ядро $K(x, y)$ удовлетворяет (3.4), что и требовалось.

Наконец, последнее утверждение теоремы следует из того, что выражение $\Omega_\lambda(x, y)\, d\varrho(\lambda)$ и матрица $d\Sigma(\lambda)$ при фиксированных $\chi_j(x; \lambda)$ однозначно определяют друг друга. Теорема доказана.

В заключение этого пункта покажем, что достаточно сильное вырождение формы $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ влечет единственность представления (3.20).

Теорема 3.8. *Пусть выполнены условия теоремы 3.7. Предположим, что существует r финитных (относительно $(-\infty, \infty)$) линейно независимых функций ограниченной вариации $\omega^{(0)}(x), \ldots, \omega^{(r-1)}(x)$ $(x \in G)$ таких, что*

$$\int_G \int_G K(x, y)\, d\omega^{(\alpha)}(y)\, d\overline{\omega^{(\alpha)}(x)} = 0 \quad (\alpha = 0, \ldots, r-1). \tag{3.21}$$

Тогда замыкание в H_K оператора $u \to L^+u$ $(u \in C_0^\infty(G))$ самосопряжено, представление (3.20) единственно и матрица $\|\sigma_{jk}(\lambda)\|_0^{r-1}$ имеет максимум счетное число точек роста (т. е. интеграл (3.20) вырождается в сумму).

Доказательство. Несколько преобразуем формулу (3.20). Для этого положим $\sigma(\Delta) = \sum_{j=0}^{r-1} \sigma_{jj}(\Delta)$; очевидно, все меры $\sigma_{jk}(\Delta)$ абсолютно непрерывны относительно $\sigma(\Delta)$ и поэтому существует $\Sigma'(\lambda) = \|d\sigma_{jk}(\lambda)/d\sigma(\lambda)\|_0^{r-1}$, являющаяся неотрицательной матрицей. Теперь (3.20) приобретает вид:

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [\Sigma'(\lambda)\chi(x; \lambda),\ \chi(y; \lambda)]\, d\sigma(\lambda) \quad (x, y \in G), \tag{3.22}$$

где $\chi(x; \lambda)$ — вектор $(\chi_0(x; \lambda), \ldots, \chi_{r-1}(x; \lambda)) \in C_r$, а $[\cdot,\cdot]$ — скалярное произведение в пространстве C_r. Интегрируя (3.22) по $d\omega^{(\alpha)}(y)\, d\overline{\omega^{(\alpha)}(x)}$ и пользуясь (3.21), получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\Sigma'(\lambda)\widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda),\ \widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda)]\, d\sigma(\lambda) = 0 \quad (\alpha = 0, \ldots, r-1); \tag{3.23}$$

здесь $\widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda)$ — вектор с координатами $\widetilde{\omega}_j^{(\alpha)}(\lambda) = \int_G \chi_j(x; \lambda)\, d\overline{\omega^{(\alpha)}(x)}$ $(j = 0, \ldots, r-1)$.

Как хорошо известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решение $\chi_j(x; \lambda)$ при фиксированном x — целая функция комплексного параметра λ. Но тогда такой же функцией от λ будет каждый интеграл $\widetilde{\omega}_j^{(\alpha)}(\lambda)$, а значит — и определитель $F(\lambda) = \operatorname{Det}\|\widetilde{\omega}_k^{(j)}(\lambda)\|_0^{r-1}$.

Пусть $\mathfrak{N}$ — счетное множество на $(-\infty, \infty)$, состоящее из всех нулей функции $F(\lambda)$. Покажем, что $\Sigma'(\lambda) = 0$ σ-почти для всех

$\lambda \in (-\infty, \infty) \setminus \mathfrak{R}$. Обозначим $\tau(\lambda) = \max\limits_{j=0,\ldots,r-1} \{\tau_j(\lambda)\}$, где $\tau_0(\lambda),\ldots, \tau_{r-1}(\lambda)$ — собственные значения матрицы $\Sigma'(\lambda)$; нам нужно доказать, что $\tau(\lambda) = 0$ для указанных λ. Предположим противное. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ и множество $\Delta \subseteq (-\infty, \infty) \setminus \mathfrak{R}$ такие, что $\tau(\lambda) \geqslant \varepsilon_0$ $(\lambda \in \Delta)$ и $\sigma(\Delta) > 0$. Пусть точка $\lambda_0 \in \Delta$ такова, что для любого $\delta > 0$ $\sigma((\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \cap \Delta) > 0$. Так как $F(\lambda_0) \neq 0$, то векторы $\widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda)$ $(\alpha = 0, \ldots, r-1)$ в некоторой δ_0-окрестности точки λ_0 линейно независимы и по ним можно разложить любой вектор из C_r. В частности, разложим по ним вектор φ_λ, $|\varphi_\lambda| = 1$, являющийся собственным для матрицы $\Sigma'(\lambda)$ и отвечающий такому собственному значению $\tau_j(\lambda) = \tau_{j(\lambda)}(\lambda)$, для которого $\tau(\lambda) = \tau_j(\lambda)$; здесь $\lambda \in (\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0 + \delta_0) \cap \Delta$. Итак, для указанных λ $\varphi_\lambda = \sum\limits_{\alpha=0}^{r-1} c_\alpha(\lambda)\widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda)$ и поэтому $[\Sigma'(\lambda)\varphi_\lambda, \varphi_\lambda] = \sum\limits_{\alpha,\beta=0}^{r-1} c_\alpha(\lambda)\overline{c_\beta(\lambda)} \times [\Sigma'(\lambda)\widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda), \widetilde{\omega}^{(\beta)}(\lambda)]$. Имеем благодаря (3.23):

$$0 < \varepsilon_0\sigma((\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0 + \delta_0) \cap \Delta) \leqslant \int\limits_{(\lambda_0-\delta_0,\ \lambda_0+\delta_0)\cap\Delta} [\Sigma'(\lambda)\varphi_\lambda, \varphi_\lambda]\, d\sigma(\lambda) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=0}^{r-1} \int\limits_{(\lambda_0-\delta_0,\ \lambda_0+\delta_0)\cap\Delta} c_\alpha(\lambda)\overline{c_\beta(\lambda)}[\Sigma'(\lambda)\widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda), \widetilde{\omega}^{(\beta)}(\lambda)]\, d\sigma(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant C\max_{\alpha,\beta} \int_{-\infty}^{\infty} |[\Sigma'(\lambda)\widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda), \widetilde{\omega}^{(\beta)}(\lambda)]|\, d\sigma(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant C\max_{\alpha,\beta} \int_{-\infty}^{\infty} [\Sigma'(\lambda)\widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda), \widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda)]^{\frac{1}{2}} [\Sigma'(\lambda)\widetilde{\omega}^{(\beta)}(\lambda), \widetilde{\omega}^{(\beta)}(\lambda)]^{\frac{1}{2}} d\sigma(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant C\max_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} [\Sigma'(\lambda)\widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda), \widetilde{\omega}^{(\alpha)}(\lambda)]\, d\sigma(\lambda) = 0,$$

что абсурдно (выше мы воспользовались очевидной оценкой: $|c_\alpha(\lambda)| \leqslant C_1|\varphi_\lambda| = C_1$). Итак, $\Sigma'(\lambda) = 0$ σ-почти для всех $\lambda \in (-\infty, \infty) \setminus \mathfrak{R}$.

Таким образом, интеграл в представлении (3.22), а значит и в (3.20), заменяется суммой, распространенной по $\lambda \in \mathfrak{R}$. Иными словами, матричная функция $\Sigma(\lambda)$ имеет максимум счетное число точек роста, причем независимо от вида $\Sigma(\lambda)$ ее точки роста расположены на фиксированном не более чем счетном множестве $\mathfrak{R}$. Это же можно интерпретировать следующим образом: все самосопряженные расширения (в H_K или с выходом) оператора $u \to L^+u$

($u \in C_0^\infty(G)$) обладают тем свойством, что их спектры расположены на $\mathfrak{R}$. Но хорошо известно, что если замыкание эрмитова оператора не самосопряжено, то его всегда можно так расширить до самосопряженного, чтобы любая вещественная точка регулярного типа стала собственным значением расширенного оператора. Мы пришли к абсурду, так как очевидно любая точка из $(-\infty, \infty) \setminus \mathfrak{R}$ — точка регулярного типа исходного оператора. Теорема доказана.

4. Самосопряженность операторов в H_K, отвечающих обыкновенным дифференциальным выражениям с постоянными коэффициентами на всей оси. В этом и следующем пунктах при помощи результатов п. 2, § 2, будут получены некоторые факты относительно самосопряженности замыкания в H_K оператора $u \to L^+u$ ($u \in C_0^\infty(E_n)$). Мы их будем излагать в форме, пригодной для использования в следующем параграфе при изучении коммутирующих расширений. Для простоты сперва будет рассмотрен случай обыкновенного выражения $L: n = 1$.

Нам понадобится теория пространств типа S, напомним необходимые определения и факты (И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [2], гл. 4, стр. 199—288). Зафиксируем α, $\beta \geqslant 0$ и A, $B > 0$ и введем пространство $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ следующим образом. Рассмотрим функции $\varphi \in C^\infty(E_1)$, удовлетворяющие неравенствам

$$|x^k (D^q\varphi)(x)| \leqslant C_{\varphi, a, b} (A + a)^k (B + b)^q k^{k\alpha} q^{q\beta} \tag{3.24}$$
$$(x \in E_1; \quad k,\ q = 0, 1, \ldots; \quad a,\ b > 0);$$

константа $C_{\varphi, a, b}$ зависит от выбора φ, a и b. Ясно, что чем меньше константы α, β, A и B, тем жестче оценка (3.24) и тем ýже запас функций, ей удовлетворяющих. Совокупность функций φ, удовлетворяющих (3.24), образует линейное множество, оно и обозначается $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$. Введем в $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ счетную систему норм, полагая

$$\|\varphi\|_{a, b} = \sup_{x, k, q} \frac{|x^k (D^q\varphi)(x)|}{(A + a)^k (B + b)^q k^{k\alpha} q^{q\beta}} \quad \left(a,\ b = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots\right). \tag{3.25}$$

Топологизируем $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ как счетнонормированное пространство с нормами (3.25), т. е. будем под окрестностями нуля понимать пересечения (взятые в конечном числе) совокупностей $\varphi \in S_{\alpha, A}^{\beta, B}$, удовлетворяющих неравенствам вида $\|\varphi\|_{a, b} < \varepsilon$. Можно показать, что $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ будет полным счетнонормированным пространством, причем сходимость $\varphi_n \to 0$ в его топологии эквивалентна тому, что последовательность $\varphi_n(x)$ ограничена в $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ (т. е $\|\varphi_n\|_{a, b} \leqslant C_{a, b}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ для всех a, b) и сходится к 0 равномерно на каждом ограниченном интервале вместе с любой своей производной. Легко видеть, что если $A'' \geqslant A' > 0$ и $B'' \geqslant B' > 0$, то $S_{\alpha,\,A'}^{\beta,\,B'} \subseteq S_{\alpha,\,A''}^{\beta,\,B''}$, причем включение топологическое (т. е. из сходимости в левом пространстве вытекает сходимость в правом).

Функции из пространства $S_{\alpha,\,A}^{\beta,\,B}$ имеют определенный порядок убывания на ∞ и определенные свойства аналитичности. Вообще можно показать, что если для $\varphi \in C^\infty(E_1)$ выполняются оценки

$$|x^k (D^q\varphi)(x)| \leqslant C_\varphi A^k B^q k^{k\alpha} q^{q\beta} \quad (x \in E_1; \quad k,\ q = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{3.26}$$

при фиксированных α, $\beta \geqslant 0$ и A, $B > 0$, то справедливы следующие заключения. Если $\alpha = 0$, то φ финитна. Если $\alpha > 0$, то φ удовлетворяет оценке

$$|(D^q\varphi)(x)| \leqslant C_{1,\,\varphi} B^q q^{q\beta} e^{-K_{\alpha,\,A}|x|^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (x \in E_1; \quad q = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{3.27}$$

где

$$K_{\alpha,\,A} = \frac{\alpha}{eA^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{3.28}$$

а $C_{1,\,\varphi}$ — некоторая новая константа (в частности, можно положить $C_{1,\,\varphi} = C_\varphi e^{\frac{\alpha e}{2}}$). Выше $\beta \geqslant 0$ и $B > 0$ были произвольными.

Если в (3.26) $\beta \leqslant 1$, то $\varphi(x)$ продолжается в аналитическую функцию в некоторой полосе вокруг вещественной оси, причем если $\beta < 1$, то эта функция просто целая. В случае $\alpha > 0$ и $\beta < 1$ продолженная функция $\varphi(z) = \varphi(x + iy)$ удовлетворяет оценке

$$|\varphi(x + iy)| \leqslant C_{2,\,\varphi} e^{-K_{\alpha,\,A}|x|^{\frac{1}{\alpha}} + Q_{\beta,\,B}|y|^{\frac{1}{1-\beta}}} \quad (-\infty < x,\ y < \infty), \tag{3.29}$$

где $C_{2,\,\varphi}$ — некоторая константа, $K_{\alpha,\,A}$ вычисляется по (3.28), а $Q_{\beta,\,B}$ — любое число, большее

$$\frac{1-\beta}{e}(Be)^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{3.30}$$

Для нас будет важен вопрос о том, какие дифференциальные операторы бесконечного порядка определены в пространствах $S_{\alpha,\,A}^{\beta,\,B}$ и куда они непрерывно действуют. Примем следующее определение.

Пусть $\Pi(s) = \sum\limits_{q=0}^{\infty} c_q s^q$ — некоторая целая функция комплексной переменной s. Сопоставим с нею дифференциальное выражение бесконечного порядка $\Pi(D)=\sum\limits_{q=0}^{\infty} c_q D^q$. Пусть имеется два линейных топологических пространства Φ и Ψ, состоящие из некоторых бесконечно дифференцируемых функций на E_1. Будем говорить, что в Φ определен оператор $\Pi(D)$ и что он непрерывно действует в Ψ, если для каждой $\varphi\in\Phi$ ряд $(\Pi(D)\varphi)(x)=\sum\limits_{q=0}^{\infty} c_q(D^q\varphi)(x)$ сходится в смысле сходимости в Ψ и соответствие $\varphi\to\Pi(D)\varphi$ непрерывно из Φ в Ψ.

Справедливо следующее утверждение: если $\Pi(s)$ — целая функция порядка роста $\leqslant \frac{1}{\beta}(\beta>0)$ и типа $\leqslant \frac{\beta}{B^{\frac{1}{\beta}}e^{a}}$ *, то оператор $\Pi(D)$ определен на $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ и непрерывно действует в $S_{\alpha, A}^{\beta, Be^{\beta}}$ (здесь на параметры α, $\beta\geqslant 0$; A, $B>0$ налагалось единственное ограничение: $\beta>0$).

Перейдем теперь к последнему вопросу, касающемуся свойств пространств типа S. Неравенства (3.24) могут быть столь жесткими, что не найдется ни одной функции, за исключением $\varphi(x)\equiv 0$, которая им удовлетворяет. Таким образом, возникает естественный вопрос о нетривиальности пространств $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, т. е. о наличии в них хотя бы одной отличной от 0 функции. Оказывается, что эти пространства нетривиальны в следующих случаях:

а) $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ с любыми α, $\beta\geqslant 0$; $\alpha+\beta>1$ и A, $B>0$;

б) $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ с любыми α, $\beta>0$; $\alpha+\beta=1$ и A, $B>0$ такими, что $AB>\gamma_{\alpha,\beta}$, где $\gamma_{\alpha,\beta}$ — некоторое положительное число, определенным образом вычисляемое по α и β.

С нетривиальностью пространств тесно связано понятие достаточного запаса функций в них. Будем говорить, что некоторое топологическое пространство Φ бесконечно дифференцируемых функций на E_1 достаточно богато функциями, если для локально суммируемой относительно лебеговой меры функции $f(x)$ $(x\in E_1)$ из равенства $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx=0$ для всех $\varphi\in\Phi$ вытекает, что $f(x)=0$ почти везде. Можно доказать, что нетривиальные $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ с α, $\beta>0$ достаточно богаты функциями.

Перейдем к исследованию самосопряженности, налагая определенные ограничения на рост ядра K на ∞. Итак, пусть п. о. ядро

---

* Напомним, что целая функция $f(s)$ называется целой функцией порядка $M\in(0,\infty)$ и типа $N\in[0,\infty)$, если для любого $\varepsilon>0$ при всех s справедлива оценка $|f(s)|\leqslant C_\varepsilon e^{(N+\varepsilon)|s|^M}$, причем M и N — минимальные числа, для которых имеет место это неравенство.

$K(x, y) \in C(E_1 \times E_1)$ удовлетворяет (3.4) с некоторым обыкновенным выражением L порядка r, коэффициенты которого постоянны. Предположим, что справедлива оценка

$$|K(x, y)| \leqslant Ce^{N(|x|^M+|y|^M)} \quad (x, y \in E_1), \tag{3.31}$$

где $M \geqslant 1$ и $N > 0$ фиксированы. Из (3.31) следует, что в качестве $p(x)$ (см. (3.3)) можно взять, например,

$$p(x) = e^{\sigma N|x|^M} \quad (\sigma > 2); \tag{3.32}$$

тем самым определится вид пространства $H_+ = L_2(E_1; pdx)$.

В дальнейшем для исследования самосопряженности замыкания в H_K оператора $u \to L^+u$ $(u \in C_0^\infty(G))$, т. е. сужения $A^* = \Lambda^* = Л^+$ на Д, мы будем применять теоремы 2.4 — 2.5 с пространствами Φ и Ψ типа $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$, не состоящими из финитных функций. Поэтому нам придется рассматриваемый оператор сперва несколько расширить и уже этот расширенный оператор принимать в качестве $C = B$ в теории § 2.

Лемма 3.3. *Обозначим Θ совокупность функций из $C^\infty(E_1)$, удовлетворяющих оценкам*

$$|(D^q u)(x)| \leqslant C_{u, q} e^{-\varrho N|x|^M} \quad (x \in E_1;\ q = 0, 1, \ldots), \tag{3.33}$$

где $\varrho > \frac{\sigma}{2}$. Очевидно, Θ, $L^+[\Theta] \subset L_2(E_1, pdx) = H_+ \subseteq H_K$. Определим оператор B в H_K, полагая $Bu = L^+u$ $(u \in \mathfrak{D}(B) = \Theta)$. Утверждается, что B содержится в замыкании в H_K оператора $u \to L^+u$ $(u \in C_0^\infty(E_1))$.*

В самом деле, пусть $u \in \Theta$. Так как $u, Du, \ldots, D^r u \in L_2(E_1, pdx)$, то можно построить последовательность $u_n \in C_0^\infty(E_1)$ такую, что в $L_2(E_1, pdx)$ $u_n \to u, \ldots, D^r u_n \to D^r u$. Таким образом, в $H_+ = L_2(E_1, pdx)$, а значит и в H_K, $u_n \to u$ и $L^+u_n \to L^+ u$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть $\Pi(s)$ — целая функция порядка $\mu \in [1, \infty)$ и типа $\nu \in (0, \infty)$. Предположим, что $M \geqslant 1$ при $\mu > 1$ таково, что $\frac{1}{M} + \frac{1}{\mu} = 1$, а при $\mu = 1$ — произвольно; ν при $\mu > 1$ достаточно мало, а при $\mu = 1$ — также произвольно. Утверждается, что существуют два пространства Φ и Ψ типа $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ такие, что 1) $\Phi \subset \Psi \subset \Theta$; 2) из сходимости в Φ следует сходимость в Ψ, а*

---

* Множество Θ введено лишь для упрощения изложения. Можно было бы оператор B определять равенством $Bu = L^+u$ на $\mathfrak{D}(B) = \Psi$.

из последней — сходимость в $L_2(E_1, pdx)$; 3) Φ плотно в $L_2(E_1, pdx)$; 4) оператор $\Pi(D)$ определен в Φ и непрерывно его переводит в Ψ.

Доказательство. Предположим сперва, что $\mu > 1$. Рассмотрим пространство $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$, в котором α и A пока произвольны, а $\beta > 0$, $\frac{1}{\beta} \geqslant \mu$ и $\frac{\beta}{B^{\frac{1}{\beta}} e^2} \geqslant \nu$, т. е. $0 < \beta \leqslant \frac{1}{\mu}$, $0 < B \leqslant \frac{\beta^\beta}{\nu^\beta e^{2\beta}}$. Согласно сказанному ранее оператор $\Pi(D)$ непрерывно переводит $\Phi = S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ в $\Psi = S_{\alpha, A}^{\beta, Be^\beta} \supset S_{\alpha, A}^{\beta, B} = \Phi$ (включение вытекает из неравенства $e^\beta > 1$). В частности, мы положим $\beta = \frac{1}{\mu}$, тогда допустимые границы для B даются неравенством

$$0 < B \leqslant \frac{1}{\nu^{\frac{1}{\mu}} \mu^{\frac{1}{\mu}} e^{\frac{2}{\mu}}}. \tag{3.34}$$

Положим $\alpha = 1 - \beta = 1 - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} > 0$. Итак, $\Phi = S_{\frac{1}{M}, A}^{\frac{1}{\mu}, B} \subset$ $\subset S_{\frac{1}{M}, A}^{\frac{1}{\mu}, Be^{\frac{1}{\mu}}} = \Psi$ с пока что неподобранными A, $B > 0$. Согласно (3.27) и (3.24) для функций $\varphi \in \Psi$ справедлива оценка

$$|(D^q\varphi)(x)| \leqslant C_{\varphi, q}\, e^{-\frac{1}{eM(A+a)^M}|x|^M} \quad (x \in E_1;\ q = 0, 1, \ldots), \tag{3.35}$$

где $a > 0$ — некоторое фиксированное число. Сравнивая (3.35) с (3.33), заключаем, что при $A > 0$ достаточно малом можно подобрать малое $a > 0$ так, чтобы $\frac{1}{eM(A+a)^M} > \varrho N$; зафиксируем такое A. В этом случае

$$\Phi \subset \Psi \subset \Theta \subset L_2(E_1, pdx). \tag{3.36}$$

Легко понять, что сходимость в Ψ влечет сходимость в $L_2(E_1, pdx)$. В самом деле, если $\varphi_n \to 0$ в Ψ, то $\varphi_n(x) \to 0$ равномерно на каждом ограниченном интервале оси E_1 и $\|\varphi_n\|_{a, b} \leqslant$ $\leqslant C_{a, b} < \infty \left(n = 1, 2, \ldots;\ a, b = 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$. Последнее неравенство означает, что для всех n

$$|x^k(D^q\varphi_n)(x)| \leqslant C_{a, b}(A + a)^k (Be^{\frac{1}{\mu}} + b)^q k^{\frac{k}{M}} q^{\frac{q}{\mu}}$$

$$\left(x \in E_1;\ k,\ q = 0, 1, \ldots;\ a,\ b = 1, \frac{1}{2}, \ldots\right),$$

поэтому согласно (3.27) для φ_n справедлива оценка вида (3.35) равномерно по n (a достаточно малое зафиксировано). Учитывая выбор A, получим, в частности: $|\varphi_n(x)| \leqslant Ce^{-\varrho N|x|^M}$ ($x \in E_1$; $n = 1, 2, \ldots$). Это позволяет ниже перейти к пределу под знаком интеграла и доказать утверждаемое:

$$\|\varphi_n\|^2_{L_2(E_1,\ p\,dx)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(x)|^2 e^{\sigma N|x|^M} dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

До сих пор мы не заботились о нетривиальности пространств Φ и Ψ, устраним сейчас этот пропуск. Так как $\Phi = S^{\frac{1}{\mu},\ B}_{\frac{1}{M},\ A}$ и $\frac{1}{M} + \frac{1}{\mu} = 1$, то Φ (а значит, и Ψ) нетривиально при $AB > \gamma_{\alpha,\ \beta} = \gamma_{\frac{1}{M},\ \frac{1}{\mu}}$ (см. стр. 664). Подберем B столь большим, чтобы выполнялось это неравенство; после этого подберем $\nu > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось (3.34). Итак, теперь Φ нетривиально и, согласно сказанному на стр. 664, достаточно богато функциями $\left(\alpha = \frac{1}{M},\ \beta = \frac{1}{\mu} > 0\right)$. Отсюда уже следует, что Φ плотно в $H_+ = L_2(E_1,\ p\,dx)$: в противном случае найдется $f \in L_2(E_1,\ p\,dx)$, $f \neq 0$, такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{f(x)}p(x)\,dx = 0$ ($\varphi \in \Phi$), а это абсурдно. Таким образом, лемма в случае $\mu > 1$ доказана.

Рассмотрим случай $\mu = 1$. По-прежнему возьмем $\Phi = S^{\beta,\ B}_{\alpha,\ A}$ и $\Psi = S^{\beta,\ Be^{\beta}}_{\alpha,\ A} \supset \Phi$, где $\beta = \frac{1}{\mu} = 1$ и B должно удовлетворять оценке (3.34). Далее положим $\alpha = \frac{1}{2M} > 0$. Для функций $\varphi \in \Psi$ будет иметь место оценка (3.35), в которой M заменено на $2M$. Поэтому эти функции убывают на ∞ быстрее, чем функции из Θ, для которых предполагалось (3.33), и соотношение (3.36) сохранится. Так же как и раньше, убедимся, что сходимость в Ψ влечет сходимость в $L_2(E_1,\ p\,dx)$. Сейчас $\alpha + \beta = \frac{1}{2M} + 1 > 1$, поэтому Φ нетривиально, достаточно богато функциями и, следовательно, плотно в $L_2(E_1,\ p\,dx)$. Итак, случай $\mu = 1$ также рассмотрен. Лемма доказана.

Как следует из доказательства леммы, пространства Φ и Ψ строились так: 1) в случае $\mu > 1$ полагалось $\Phi = S_{\frac{1}{M}, A}^{\frac{1}{\mu}, B}$, $\Psi = S_{\frac{1}{M}, A}^{\frac{1}{\mu}, Be^{\frac{1}{\mu}}}$, где $A > 0$ бралось настолько малым, чтобы $\frac{1}{eMA^M} > \varrho N$, а $B > 0$ — настолько большим, чтобы $AB > \gamma_{\frac{1}{M}, \frac{1}{\mu}}$; после этого $\nu > 0$ считалось настолько малым, чтобы $B \leqslant (\nu^{\frac{1}{\mu}} \mu^{\frac{1}{\mu}} e^{\frac{2}{\mu}})^{-1}$; 2) в случае $\mu = 1$ полагалось $\Phi = S_{\frac{1}{2M}, A}^{1, B}$, $\Psi = S_{\frac{1}{2M}, A}^{1, Be}$, где $A > 0$ произвольно, а $B > 0$ удовлетворяет неравенству $B \leqslant (\nu e^2)^{-1}$.

Пусть $\overline{L}(s) = \sum_{\alpha=0}^{r} \bar{a}_\alpha s^\alpha$ — полином комплексной переменной s, отвечающий выражению L^+. Функция $\Pi(s;\ t_0,\ t) = e^{i(t_0 - t)\overline{L}(s)}$ $(0 \leqslant t_0 < t \leqslant T < \infty)$ при фиксированных t_0, t будет целой функцией порядка r и некоторого типа, меньшего или равного $\nu(T) < \infty$; $\nu(T) \to 0$ при $T \to 0$. К этой функции применима лемма 3.4, причем в случае $r > 1$ нужно выбирать $T > 0$ достаточно малым, а в случае $r = 1$ можно взять $T \in (0, \infty)$ любым. Ясно, что Φ и Ψ из этой леммы можно выбрать общими для всех t_0, $t \in [0, T]$. Тогда оператор $Q(t_0, t) = \Pi(D;\ t_0,\ t)$ при любых t_0, $t \in [0, T]$ непрерывно переводит все Φ в Ψ, причем $\varphi(t) = Q(t_0, t)\varphi$ $(\varphi \in \Phi)$ равно φ при $t = t_0$.

Лемма 3.5. *Построенный оператор $Q(t_0, t)$ обладает тем свойством, что вектор-функция $\varphi(t) = Q(t_0, t)\varphi$ $(\varphi \in \Phi,\ t \in [0, T];$ $t_0 \in [0, T]$ фиксировано) со значениями в $L_2(E_1, p dx)$ сильно дифференцируема и удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} + iB\varphi(t) = 0 \qquad (t \in [0, T])\,. \tag{3.37}$$

Доказательство. Для $t \in [0, T]$ $\varphi(t) \in \Psi \subset \Theta$ и уравнение (3.37) по существу имеет вид: $\frac{d\varphi(t)}{dt} + iL^+[\varphi(t)] = 0$. Из сходимости в Ψ следует сходимость в $L_2(E_1, p dx)$, поэтому для доказательства леммы достаточно убедиться, что $\varphi(t)$ дифференцируема в топологии Ψ и эта производная удовлетворяет последнему равенству. Но последний факт доказывается в теории обобщенных функций (И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [3], гл. 2, § 3, стр. 54—56). Лемма доказана.

Теорема 3.9. *Пусть L — обыкновенное дифференциальное выражение порядка r с постоянными коэффициентами, $K(x, y) \in C(E_1 \times E_1)$ — п. о. ядро, удовлетворяющее соотношению* (3.4). *Таким образом, имеет место представление* (3.20) *с фиксированной фундаментальной системой решений $\chi_j(x; \lambda)$ уравнения $Lu = \lambda u$. Пусть $r > 1$, для того чтобы матрица $\| d\sigma_{jk}(\lambda) \|_0^{r-1}$ в представлении* (3.20) *определялась по $K(x, y)$ однозначно, достаточно выполнение при некотором $N > 0$ оценки $|K(x, y)| \leqslant Ce^{N(|x|^{r'}+|y|^{r'})}$ $(C > 0,\ x,\ y \in E_1)$, где $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.*

В случае $r = 1$ $d\sigma_{00}(\lambda)$ всегда определяется однозначно.

Ясно, что при условиях теоремы замыкание оператора $u \to L^+u$ $(u \in C_0^\infty(E_1))$ будет самосопряжено, если только он имеет равные дефектные числа. Например, если он вещественен относительно некоторой инволюции в H_K (это будет всегда так при вещественных $K(x, y)$ и коэффициентах L).

Мы докажем сейчас теорему лишь для случая $r > 1$. При $r = 1$ будет установлен более слабый результат: $d\sigma_{00}(\lambda)$ определяется однозначно, если при некотором $M \geqslant 1$

$$|K(x, y)| \leqslant Ce^{|x|^M+|y|^M} \qquad (C > 0;\ x,\ y \in E_1). \tag{3.38}$$

Этот результат нам понадобится лишь как образец рассуждения для аналогичной части теоремы 3.10, в которой установить единственность без ограничений роста ядра K уже не удается. Доказательство утверждения теоремы при $r = 1$ удобно привести в п. 10, стр. 395—396.

Итак, пусть выполнены условия теоремы при $r > 1$ и ограничение (3.38) при $r = 1$. Согласно теореме 3.7 нужно показать, что замыкание в H_K оператора $u \to L^+ u$ $(u \in C_0^\infty(G))$ максимально. В силу леммы 3.3 можно ограничиться доказательством максимальности замыкания оператора B $(Bu = L^+u,\ u \in \Theta)$. Воспользуемся теоремой 2.5, 2); вопрос сводится к установлению единственности слабых решений задачи Коши в $H_+ = L_2(E_1, p dx)$ с $p(x)$ вида (3.32) для обоих уравнений $\frac{du}{dt} \pm (iB)^*u = 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$. Но она при помощи теоремы 2.4 вытекает из лемм 3.4 и 3.5 (последнюю лемму нужно применить также и к выражению — L^+). Теорема доказана.

В заключение заметим, что применение теоремы 2.5, 1), дает гораздо более слабый результат: гарантируется в предположениях теоремы 3.9 единственность представления (3.20) лишь в случае, когда ее условия заменяются оценкой $|K(x, y)| \leqslant Ce^{N(|x|+|y|)}$ $(C, N > 0;\ x, y \in E_1)$; порядок r любой*. Поя-

* Правда, аналогичное применение теоремы 2.1 в случае $q \geqslant 1$ операторов не предполагает равенства их дефектных чисел (ср. с теоремой 4.3).

сним сказанное. Благодаря оценке на K можно положить $p(x) = e^{\sigma N|x|}$ $(\sigma > 2)$, $H_+ = L_2(E_1, pdx)$, $Bu = L^+u$ $(u \in \mathfrak{D}(B) = C_0^\infty(E_1))$. Пусть $0 \neq h \in L_2(E_1, pdx)$ ортогонально в H_+ к $(B - zE)\mathfrak{D}(B)$, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(L^+ - zE)u \cdot \bar{h}pdx = 0$ $(u \in C_0^\infty(E_1))$.
В силу сказанного на стр. 498 $hp \in C^\infty(E_1)$ и $(L - \bar{z}E)[hp] = 0$, поэтому $h(x)p(x) = \sum\limits_{j=1}^{r} c_j e^{\mu_j x}$, где μ_j — корни уравнения $L(\mu) - \bar{z} = 0$ (z всегда можно так изменить, чтобы корни были различными). Учитывая вид p, найдем: $|h(x)|^2 p(x) = \left|\sum\limits_{j=1}^{r} c_j e^{\mu_j x}\right|^2 e^{-\sigma N|x|}$. Ясно, что всегда можно так подобрать z из верхней и нижней полуплоскостей, чтобы $|\mu_j| > \frac{\sigma N}{2}$ $(j = 1, \ldots, r)$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|h|^2 pdx = \infty$, что абсурдно. Утверждение доказано.

5. Случай выражений в частных производных с постоянными коэффициентами во всем E_n. Для него можно провести рассмотрения, подобные изложенным в п. 4, и установить аналог теоремы 3.9. Будем пользоваться пространствами $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ с векторными индексами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $A = (A_1, \ldots, A_n)$ и $B = (B_1, \ldots, B_n)$, где $\alpha_j, \beta_j \geqslant 0$ и $A_j, B_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Такое пространство $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ определяется как совокупность функций $\varphi \in C^\infty(E_n)$, удовлетворяющих неравенствам (3.24), в которых k, q, a и b заменены векторными индексами указанного типа, причем, как обычно, выражения вида x^k, $k^{k\alpha}$ обозначают соответственно $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ и $k_1^{k_1\alpha_1} \ldots k_n^{k_n\alpha_n}$. В этих неравенствах $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$; $k_j, q_j = 0, 1, \ldots$; $a_j, b_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Пространство $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ является счетнонормированным относительно системы норм (3.25), в которых $a_j, b_j = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ $(j = 1, \ldots, n)$. Подобным же образом перефразируются и остальные определения и результаты, приведенные на стр. 662—664. При этом экспоненциалы в оценках типа (3.27) заменяются на произведения соответствующих экспоненциалов, вычисленных покоординатно. Так, например, в (3.27) $\exp(-K_{\alpha, A}|x|^{\frac{1}{\alpha}})$ заменяется на $\exp(-K_{\alpha_1, A_1}|x_1|^{\frac{1}{\alpha_1}} - \ldots - K_{\alpha_n, A_n}|x_n|^{\frac{1}{\alpha_n}})$.

Повторяя рассуждения, можно доказать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.10. *Пусть L — выражение порядка r с постоянными коэффициентами, $K(x, y) \in C(E_n \times E_n)$ — п. о. ядро, удовлетворяющее соотношению* (3.4), *следовательно, имеет место представление* (3.7) (*или* (3.11) *в случае эллиптического L*). *Для того чтобы $\Omega_\lambda d\varrho(\lambda)$ определялось по $K(x, y)$ однозначно, достаточно выполнение следующей оценки: при некотором $N > 0$*

$$|K(x, y)| \leqslant Ce^{N(|x_1|^{r'}+\ldots+|x_n|^{r'}+|y_1|^{r'}+\ldots+|y_n|^{r'})} \qquad (C > 0;\ x,\ y \in E_n),$$

где $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ при $r > 1$, а в случае $r = 1$ r' — произвольное положительное число.

6. **Обычные п. о. функции.** Пусть $G = (-l, l)$, где $0 < l \leqslant \infty$. Как известно, функция $k(t) \in C((-2l, 2l))$ называется п. о., если ядро $K(x, y) = k(y - x)$ $(x, y \in G)$ п. о., т. е. для любых точек $x_1, \ldots, x_N \in G$ и любых комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_N$

$$\sum_{j, k=1}^{N} k(x_k - x_j)\,\xi_k\bar{\xi}_j \geqslant 0 .$$

Так как для п. о. ядра $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, $|K(x, y)|^2 \leqslant K(x, x) K(y, y)$ $(x, y \in G)$, то $k(y - x) = \overline{k(x - y)}$, $|k(y - x)|^2 \leqslant k^2(0)$. Обозначая $y - x = t$, получим

$$k(t) = \overline{k(-t)}, \quad |k(t)| \leqslant k(0) \qquad (t \in (-2l, 2l)). \tag{3.39}$$

Непосредственно из определения можно получить и ряд других свойств п. о. функций, однако мы на них останавливаться не будем, так как такие свойства вытекают и из интегрального представления, которое мы сейчас получим. Это представление легко следует из теоремы 3.7.

Теорема 3.11. *Функция $k(t) \in C((-2l, 2l))$ $(0 < l \leqslant \infty)$ п. о. в том и только в том случае, когда она представима в виде*

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\sigma(\lambda) \qquad (t \in (-2l, 2l)), \tag{3.40}$$

где $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера. В случае $l = \infty$ эта мера определяется однозначно по k; при $l < \infty$ однозначности, вообще говоря, не будет.

Доказательство. То, что функция вида (3.40) п. о., проверяется непосредственно. Установим представление (3.40). Положим $L = i\dfrac{d}{dx} = L^+$. Если $k(t)$ достаточно гладкая, то (3.4) выполнено:

$$L_x[K(x,\ y)] = i\frac{d}{dx}k(y-x) = -i\frac{d}{dy}k(y-x) = \\ = \overline{L}_y[K(x,\ y)] \qquad (x,\ y \in G). \tag{3.41}$$

В общем случае для $u,\ v \in C_0^\infty(G)$ имеем:

$$\langle L^+u,\ v\rangle = i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(y-x)u'(x)\overline{v(y)}\,dxdy =$$

$$= i\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} k(x)u'(y-x)\,dx\right)\overline{v(y)}\,dy =$$

$$= i\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} u'(y-x)\overline{v(y)}\,dy\right)dx =$$

$$= i\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(y-x)\overline{v'(y)}\,dy\right)dx = \langle u,\ L^+v\rangle, \tag{3.42}$$

т. е. (3.4) также выполняется. Итак, ядро K $*$-коммутирует с $i\dfrac{d}{dx}$. Очевидно, в нашем случае $\chi_0(x;\ \lambda) = e^{-i\lambda x}$, если считать $a=0$. Поэтому (3.20) даст представление

$$k(y-x) = K(x,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-x)}\,d\sigma_{00}(\lambda) \qquad (x,\ y \in G),$$

которое после замены $y - x = t$ перейдет в (3.40).

Единственность меры $d\sigma(\lambda)$ при $l = \infty$ вытекает хотя бы из выполнения условия (3.38) и ограниченности $K(x,\ y)$ (см. (3.39)). В дальнейшем мы покажем, что при $l < \infty$ $d\sigma(\lambda)$ определяется, вообще говоря, неоднозначно. Теорема доказана.

Эта теорема по существу дает также ответ на один нетривиальный вопрос. пусть функция $k(t) \in C((-2l,\ 2l))$ п. о., причем $l < \infty$, можно ли ее продолжить в п. о. функцию на всей оси? Действительно, такая функция на $(-2l,\ 2l)$ совпадает с интегралом $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}d\sigma(\lambda)$, который определен и п. о. для всех $t \in (-\infty, \infty)$, т. е. требуемое продолжение построено. В пп. 8, 9 мы детально изучим этот вопрос.

7. Пространства H_K как негативные. Предварительно установим некоторые факты относительно пространств H_K, построенных по общим п. о. непрерывным ядрам $K(x, y)$. Пусть G — ограниченная область пространства E_n, $K(x, y) \in C(G \times G)$ — **п.** о. ядро, которое дополнительно будем считать ограниченным в $G \times G$. На функциях $f, g \in L_2(G)$ введем скалярное произведение, полагая

$$\langle f, g \rangle = \int_G \int_G K(x, y) f(y) \overline{g(x)}\, dx dy ; \tag{3.43}$$

очевидно, $\langle f, f \rangle \leqslant C \| f \|^2_{L_2(G)}$ $(C > 0,\ f \in L_2(G))$. *Будем предполагать, что форма* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *невырождена* (т. е. $\langle f, f \rangle \neq 0$ при $f \in L_2(G)$, $f \neq 0$). Пополнение $L_2(G)$ (или $C_0^\infty(G)$) относительно (3.43) обозначим H_K. Согласно теореме 3.7, гл. I, H_K можно рассматривать как негативное пространство, построенное по нулевому $H_0 = L_2(G)$ и некоторому позитивному $H_{+, K}$. Итак,

$$H_K \supseteq H_0 = L_2(G) \supseteq H_{+, K}. \tag{3.44}$$

Пространство $H_{+, K}$ строится (см. стр. 81) как замыкание $\mathfrak{R}(K)$ относительно метрики $(u, v)_{+, K} = (K^{-1}u, v)_0$, где $K = \hat{I}$ — оператор в $L_2(G)$, определяемый равенством $(Kf, g)_0 = \langle f, g \rangle$ $(f, g \in L_2(G))$. Сравнивая это соотношение с (3.43), найдем, что

$$(Kf)(x) = \int_G K(x, y) f(y)\, dy \qquad (f \in L_2(G)). \tag{3.45}$$

Из (3.45) и непрерывности ядра $K(x, y)$ следует, что $\mathfrak{R}(K) \subseteq C(G)$.

Лемма 3.6. *Пусть* $\xi \in G$, *в пространстве* H_K *существует вектор* δ_ξ *(δ-функция, сосредоточенная в точке ξ) такой, что для каждой* $u \in \mathfrak{R}(K) \subseteq H_{+, K}$

$$(\delta_\xi, u)_0 = \overline{u(\xi)}; \quad \langle \delta_\xi, \delta_\eta \rangle = K(\eta, \xi) \quad (\xi, \eta \in G). \tag{3.46}$$

Доказательство. Обозначим $\varkappa_{\xi, \varepsilon}(x)$ $(x \in G)$ характеристическую функцию шара с центром в точке ξ радиуса $\varepsilon > 0$, деленную на его объем. Очевидно, при $\varepsilon, \delta \to 0$ $\langle \varkappa_{\xi, \varepsilon}, \varkappa_{\eta, \delta} \rangle \to K(\eta, \xi)$, поэтому при $\varepsilon_n \to 0$ $\langle \varkappa_{\xi, \varepsilon_n} - \varkappa_{\xi, \varepsilon_m}, \varkappa_{\xi, \varepsilon_n} - \varkappa_{\xi, \varepsilon_m} \rangle \underset{n, m \to \infty}{\to} 0$, т. е. последовательность $x_{\xi, \varepsilon_n}(x)$ фундаментальна в H_K и в силу полноты последнего сходится к некоторому его элементу, который мы и обозначим δ_ξ. Второе равенство в (3.46) очевидно, первое вытекает из соотношения $(\varkappa_{\xi, \varepsilon}, u)_0 = \int_G \varkappa_{\xi, \varepsilon}(x) \overline{u(x)}\, dx$ и непрерывности функции $u \in \mathfrak{R}(K) \subseteq C(G)$. Лемма доказана.

Из второго равенства в (3.46) немедленно вытекает, что

$\langle \delta_{\xi_n} - \delta_\xi, \delta_{\xi_n} - \delta_\xi \rangle \to 0$ при $\xi_n \to \xi$, т. е. δ_ξ *является непрерывной вектор-функцией от* ξ *со значением в* H_K. Из (3.46) следует, что $\langle \delta_\xi, \delta_\xi \rangle$ ограничено при $\xi \in G$ и поэтому для каждой замкнутой области F, расположенной строго внутри G, имеем при $u \in \mathfrak{R}(K)$: $|u(\xi)| = |(\delta_\xi, u)_0| \leqslant \sqrt{\langle \delta_\xi, \delta_\xi \rangle} \, \|u\|_{+, K} \leqslant C \|u\|_{+, K}$ $(\xi \in F)$. Иными словами, для $u \in \mathfrak{R}(K)$

$$\|u\|_{C(F)} \leqslant C \|u\|_{+, K} \qquad (C > 0). \tag{3.47}$$

Так как $H_{+, K}$ является пополнением $\mathfrak{R}(K)$ по норме $\|\cdot\|_{+, K}$, то (3.47) показывает, что *каждый элемент из* $H_{+, K}$ *является непрерывной функцией* $u(x)$ $(x \in G)$, *удовлетворяющей оценке* (3.47) *для любой замкнутой* $F \subset G$. Отсюда следует, что первое равенство из (3.46) справедливо при любой $u \in H_{+, K}$.

Покажем еще, что *линейная оболочка векторов* δ_ξ, *где* ξ *пробегает плотное множество в* G, *плотна в пространстве* H_K. В самом деле, пусть $\alpha \in H_K$ таково, что $\langle \alpha, \delta_\xi \rangle = 0$ для всех рассматриваемых ξ. При помощи оператора $\mathbf{I}$, построенного по цепочке (3.44), получим:

$$0 = \langle \alpha, \delta_\xi \rangle = (\mathbf{I}\alpha, \delta_\xi)_0 = (\mathbf{I}\alpha)(\xi) \in H_{+, K} \subseteq C(G).$$

Благодаря плотности точек ξ в G отсюда следует, что $(\mathbf{I}\alpha)(x) = 0$ $(x \in G)$, т. е. $\mathbf{I}\alpha = 0$ и $\alpha = 0$. Утверждение доказано.

Обозначим $V_0(G)$ совокупность всех комплекснозначных мер ограниченной вариации, определенных на борелевских подмножествах из G и сосредоточенных строго внутри G. Каждая такая мера обычным образом порождает линейный непрерывный функционал в пространстве $C(F)$. Согласно (3.47), этот функционал будет непрерывным функционалом и над $H_{+, K}$, т. е. можно считать, что $V_0(G) \subseteq H_K$. Нетрудно понять, что

$$(\omega, u)_0 = \int_G \overline{u(x)}\, d\omega(x), \qquad \langle \omega, \theta \rangle = \int_G \int_G K(x, y)\, d\omega(y)\, d\overline{\theta(x)} \tag{3.48}$$

$$(\omega, \theta \in V_0(G); \quad u \in H_{+, K}).$$

Остановимся на одном полезном критерии принадлежности функции $u \in C(G)$ к пространству $H_{+, K}$. Прежде всего заметим, что, согласно теореме 1.1, гл. I, пространство $H_{+, K}$ совпадает с $\mathfrak{D}(D)$, где $D = \sqrt{\hat{I}^{-1}}$, т. е. $H_{+, K} = \mathfrak{R}(\sqrt{\hat{I}})$. Учитывая, что $\hat{I} = K$, получаем:

$$H_{+, K} = \mathfrak{R}(\sqrt{K}). \tag{3.49}$$

Лемма 3.7. *Обозначим* $w_1(x), w_2(x), \ldots$ *полный набор ортонормированных собственных функций из* $L_2(G)$ *ядра* $K(x, y)$, *отвечаю-*

щих собственным значениям $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ ($\varrho_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots$). *Функция* $u \in L_2(G)$ *входит в* $H_{+, K}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\|u\|^2_{+, K} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|(u, w_j)_0|^2}{\varrho_j} < \infty. \tag{3.50}$$

В самом деле, согласно (3.49), $u \in L_2(G)$ входит в $H_{+, K}$ в том и только в том случае, когда $u = \sqrt{K}f$, где $f \in L_2(G)$; при этом, согласно (1.13), гл. I, $\|u\|^2_{+, K} = \|Du\|^2_0 = \|f\|^2_0$. Но $f = \sqrt{K^{-1}}u$; $(f, w_j)_0 = \frac{(u, w_j)_0}{\sqrt{\varrho_j}}$, откуда и следует лемма.

Укажем теперь на те дополнительные факты, которые будут иметь место, если ядро $K(x, y)$ непрерывно вплоть до границы, т. е. $K(x, y) \in C((G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma))$. В этом случае δ_ξ определена для всех $\xi \in G \cup \Gamma$, причем (3.46) справедливо при $\xi, \eta \in G \cup \Gamma$ и δ_ξ — непрерывная вектор-функция со значениями в H_K от $\xi \in G \cup \Gamma$. В неравенстве (3.47) также можно положить $F = G \cup \Gamma$. $H_{+, K} \subseteq C(G \cup \Gamma)$. Наконец, обозначим $V(G \cup \Gamma)$ совокупность всех комплекснозначных мер ограниченной вариации, определенных на борелевских подмножествах из $G \cup \Gamma$. Тогда $V(G \cup \Gamma) \subseteq H_K$, причем справедливы соотношения (3.48).

Итак, мы показали, что в случае ограниченной G и ограниченного и невырожденного K в пространстве H_K содержатся δ-функции. Предоставляем читателю выяснить ситуацию в случае общих G и K.

8. **Задача продолжения п. о. функции с конечного интервала на всю ось. Операторный подход, условия единственности***. Заметим прежде всего, что между излагаемыми ниже вопросами и результатами § 1, гл. VII, по теории якобиевых матриц имеется глубокая аналогия, она будет также подчеркнута в § 5 этой главы. Итак, мы рассматриваем п. о. функцию $k(t) \in C((-2l, 2l))$ при $0 < l < \infty$ Задача ее продолжения тесно связана с изучением спектральных свойств оператора, порожденного $L = i\frac{d}{dx}$ в соответствующем пространстве H_K. Так как для $k(t)$ имеет место представление (3.40), то $k(t) \in C([-2l, 2l])$. Поэтому ядро $K(x, y) = k(y - x) \in C([-l, l] \times [-l, l])$ и при построении выше пространства H_K (мы его также обозначаем H_k) можно положить $p(x) \equiv 1$. Итак, мы можем пользоваться только что установленными общими результатами относительно пространств цепочки (3.44), включая сказанное в конце п. 7, если только предположить, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ невырождена. *Всюду ниже будем считать выполненным предположение о невырожденности формы* (3.43), *построенной по* $K(x, y) = k(y - x)$ $(x, y \in (-l, l))$. Если эта форма вырождена, то согласно теореме 3.8 представление (3.40) единственно, т. е. единственно про-

* При изложении результатов пп. 8 и 9 о продолжении п. о. функций автор пользовался неопубликованной рукописью М. Г. Крейна.

должение $k(t)$ на всю ось в п. о. функцию. При этом интеграл в (3.40) переходит в сумму.

Наличие в пространстве H_k δ-функций сближает теорию разложений по собственным функциям операторов в H_k с подобной теорией в пространстве $l_2([0, \infty))$. Отметим еще, что *благодаря первому из соотношений* (3.39) *отображение* $u(x) \to u^\circ(x) = \overline{u(-x)}$ $(u \in L_2((-l, l)))$ *после замыкания по непрерывности порождает инволюцию в* H_k.

Согласно общей схеме рассмотрим в H_k оператор $Cu = L^+u = i\dfrac{du}{dx}$ $(u \in \mathfrak{D}(C) = C_0^\infty((-l, l)))$, равный сужению на $C_0^\infty((-l, l))$ соответствующего оператора A^*. Этот оператор эрмитов в H_k, мера $d\sigma(\lambda)$ в представлении (3.40) является спектральной мерой некоторого его самосопряженного расширения (в H_k или с выходом); наоборот, каждая мера $d\sigma(\lambda)$ из (3.40) порождается таким образом. *Оператор C вещественен относительно инволюции* $\circ$ $(i\,(\overline{u(-x)})' = \overline{iu'\,(-x)})$ *и поэтому имеет равные дефектные числа.* Таким образом, *для единственности меры $d\sigma(\lambda)$ в представлении* (3.40) *необходимо и достаточно, чтобы замыкание C было самосопряженным в* H_k. Аналогично случаю якобиевых матриц проблему продолжения п. о. функции $k(t) \in C((-2l, 2l))$ на всю ось будем называть определенной или нет в зависимости от того, единственно такое продолжение или нет. Как уже говорилось, это эквивалентно тому, единственным или неединственным образом определяется мера $d\sigma(\lambda)$ в представлении (3.40). Таким образом, только что нами был получен необходимый и достаточный критерий определенности проблемы продолжения.

Подставляя в (3.43) выражение для k из (3.40), получим

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\overline{\tilde{g}(\lambda)}\, d\sigma(\lambda), \quad \tilde{f}(\lambda) = \int_{-l}^{l} e^{i\lambda x} f(x)\,dx \quad (f, g \in L_2((-l, l))). \quad (3.51)$$

Ясно, что соотношение (3.51) является равенством Парсеваля, построенным по отвечающему $d\sigma(\lambda)$ самосопряженному расширению оператора C. Если $E(\Delta)$ — соответствующее (обобщенное) разложение единицы, то

$$\langle E(\Delta) f, g \rangle = \int_{\Delta} \tilde{f}(\lambda)\overline{\tilde{g}(\lambda)}\, d\sigma(\lambda).$$

Пусть $f \in L_2((-l, l))$ такова, что $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) = 0$. Тогда, согласно (3.51), $\langle f, f \rangle = 0$, а значит благодаря допущению о невырожденности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $f = 0$ и в $L_2((-l, l))$. Таким образом, $\tilde{f}(\lambda) \equiv 0$. Это полезное замечание аналогично сказанному на стр. 519 относительно полиномов.

Переходя в (3.51) к пределу, получим равенство Парсеваля для произвольных $f, g \in H_k$, при этом $\tilde{f}(\lambda) \in L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ нужно понимать, как предел в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ функций $\tilde{f}_n(\lambda)$, где $f_n \in L_2((-l, l))$ аппроксимирует f в H_k. В частности, $\tilde{\delta}_\xi(\lambda) = e^{i\lambda\xi}$ $(\xi \in [-l, l])$ (это следует, например, из аппроксимации элемента δ_ξ функциями $\varkappa_{\xi,\varepsilon}(x)$). Легко также показать, что для $\omega \in V([-l, l])$ $\tilde{\omega}(\lambda) = \displaystyle\int_{-l}^{l} e^{i\lambda x} d\omega(x)$. Итак, равенство Парсеваля в самом общем виде запишется так:

$$\langle E(\Delta)\alpha, \beta \rangle = \int\limits_{\Delta} \widetilde{\alpha}(\lambda)\overline{\widetilde{\beta}(\lambda)}\, d\sigma(\lambda) \quad (\alpha, \beta \in H_k). \tag{3.52}$$

Сравнивая сказанное выше со сказанным на стр. 519, легко проследить аналогию со случаем якобиевой матрицы в $l_2([0, \infty))$. При этом роль полиномов играют функции $\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_{-l}^{l} e^{i\lambda x} u(x)\, dx$, где $u \in C_0^\infty((-l, l))$ — преобразования Фурье векторов $u \in C_0^\infty((-l, l)) \subset H_k$. Совокупность $\widetilde{C_0^\infty((-l, l))}$ «полиномов» можно описать и внутренним образом (см. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [1], гл. 2, § 1, стр. 195). Именно: $\widetilde{u}(\lambda) \in \widetilde{C_0^\infty((-l, l))}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{u}(\lambda)$ — целая функция комплексного переменного λ, допускающая для всех λ оценку:

$$|\lambda^k \widetilde{u}(\lambda)| \leqslant C_{\widetilde{u}, k}\, e^{l_{\widetilde{u}} |\operatorname{Im}\lambda|} \qquad (C_{\widetilde{u}, k} > 0;\quad k = 0, 1, \ldots) \tag{3.53}$$

($l_{\widetilde{u}} \in (0, l)$ таково, что $u(x) = 0$ при $|x| \geqslant l_{\widetilde{u}}$).

Переход $u \to \widetilde{u}(\lambda)$ ($u \in C_0^\infty((-l, l))$) является изометрией между плотной частью пространства H_k и линейным множеством $\widetilde{C_0^\infty((-l, l))} \subset L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$. Продолжая его по непрерывности, получим изометрию между H_k и $\widetilde{H}_k$ —замыканием в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ всех «полиномов» $\widetilde{C_0^\infty((-l, l))}$. Очевидно, $\widetilde{C_0^\infty((-l, l))} \subset \widetilde{L_2((-l, l))} \subset \widetilde{V([-l, l])} \subset \widetilde{H}_k$. При изометрии $u \to \widetilde{u}(\lambda)$ оператор C переходит в оператор умножения на λ, определенный на $\widetilde{C_0^\infty((-l, l))}$.

В дальнейшем мы будем пользоваться аналогом формулы (1.20), гл. VII. Для ее вывода положим в (3.52) $\alpha = \beta = \delta_0$; так как $\widetilde{\delta}_0(\lambda) \equiv 1$, то

$$\sigma(\Delta) = \langle E(\Delta)\delta_0, \delta_0 \rangle. \tag{3.54}$$

Повторяя доказательство теоремы 1.7, гл. VII, в котором нужно лишь $l_2([0, \infty))$, $l_{2,0}([0, \infty))$ и $\widetilde{l_{2,0}([0, \infty))}$ заменить соответственно на H_k, $C_0^\infty((-l, l))$ и $\widetilde{C_0^\infty((-l, l))}$, придем к следующему результату.

Теорема 3.12. *Для того чтобы совокупность функций* $\widetilde{C_0^\infty((-l, l))}$ *была плотна в* $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$, *необходимо и достаточно, чтобы* $d\sigma(\lambda)$ *была порождена обычным разложением единицы. Такие спектральные меры* $d\sigma(\lambda)$ *будем называть, как и раньше, ортогональными.*

Заметим, что результат типа теоремы 1.9, гл. VII, нами уже установлен; аналог теоремы 1.10 в рассматриваемом случае выглядит так: для плотности в $L_1((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ совокупности функций $\widetilde{C_0^\infty((-2l, 2l))}$ необходимо и достаточно, чтобы $d\sigma(\lambda)$ была крайней. Вопросы типа обратной задачи (п. 5, § 1, гл. VII) сейчас в прежнем виде не возникают.

Перейдем к исследованию самосопряженности замыкания оператора C, т. е. к исследованию определенности или нет проблемы продолжения. Сперва укажем примеры п. о. функций $k(t) \in C((-2l, 2l))$, для которых проблема продолжения неопределенна.

1. Пусть $k(t) \in C((-\infty, \infty))$ — некоторая четная неотрицательная выпуклая (книзу) и стремящаяся к 0 при $|t| \to \infty$ функция. Такая функция — п. о. В самом деле, как известно, интеграл $s(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty k(t)\cos\lambda t\,dt$ при $\lambda \neq 0$ сходится, причем $s(\lambda) \geqslant 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(\lambda)\,d\lambda < \infty$ и имеет место представление

$$k(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} s(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Big(\int\limits_{-\infty}^{\lambda} s(\mu)\,d\mu\Big) \quad (t \in (-\infty, \infty)).$$

Из него и следует, что $k(t)$ п. о.

Если $k(t) \in C((-2l, 2l))$ $(0 < l < \infty)$ — четная положительная выпуклая (книзу) функция, то она может быть продолжена на всю ось с сохранением этих свойств так, что $\lim\limits_{|t|\to\infty} k(t) = 0$. По доказанному продолженная функция п. о., следовательно, и исходная была п. о. Так как возможных продолжений бесконечное количество, то для исходной функции проблема продолжения неопределенна.

2. Если $k_1(t)$, $k_2(t) \in C((-2l, 2l))$ и п. о., то $k_1(t)\,k_2(t)$ также п. о. Это следует непосредственно из определения п. о. функции и того обстоятельства, что если матрицы $\|a_{jk}\|_1^N$, $\|b_{jk}\|_1^N$ неотрицательно определенные, то такой же будет и $\|a_{jk}b_{jk}\|_1^N$. П. о. функция $f(t) = k(t)\sum\limits_{j=1}^{m} c_j e^{i\lambda_j t}$ $(c_j > 0)$, где $k(t)$ имеет вид, указанный в 1, неоднозначно продолжима с $(-2l, 2l)$ в п. о. функцию на всей оси, так как $k(t)$ такая. Вместе с тем в отличие от примера 1 $f(t)$ немонотонна при $t < 0$ и $t > 0$.

3. Функция вида (3.40), каково бы ни было $l < \infty$, неоднозначно продолжима в п. о. функцию на всей оси, если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\sigma'(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda > -\infty. \tag{3.55}$$

В самом деле, пусть (3.55) выполняется, а $k(t)$ продолжима однозначно. Согласно теореме 3.12 теперь в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ плотна совокупность функций $\widetilde{C_0^\infty((-l, l))} \subseteq \widetilde{H}_k \subseteq L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$. Таким образом, и $\widetilde{H}_k$ плотно в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$. Но в H_k плотны линейные комбинации δ_ξ $(\xi \in [-l, l])$, поэтому в $\widetilde{H}_k$, а значит и в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$, плотны комбинации $\widetilde{\delta}_\xi(\lambda) = e^{i\lambda\xi}$. Отсюда, очевидно, вытекает, что в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ плотны и линейные комбинации $e^{i\lambda\eta}$ $(\eta \in [0, 2l])$, а это невозможно в связи с условием (3.55) (см. теорему, цитированную на стр. 521). Утверждение доказано.

4. Покажем, что гладкость п. о. функции не влияет на ее однозначную

продолжимость: существуют п. о. функции $k(t) \in C^{\infty}([-2l, 2l])$, не продолжимые однозначно. В самом деле, пусть $l < l_1 < \infty$ и $k_1(t) \in C((-2l_1, 2l_1))$ п. о. и продолжима неоднозначно, обозначим $k_2(t)$, $k_3(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ два ее различных продолжения. Рассмотрим $\chi(t) \in C_0^{\infty}((-\infty, \infty))$, аннулирующуюся вне $(-\varepsilon, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Тогда свертка $k_j{*}\chi$ входит в $C^{\infty}((-\infty, \infty))$, такой же будет и свертка $k_j{*}\chi{*}\chi^{\circ}$ $(j = 2, 3)$. Вместе с тем последняя свертка, как легко проверить, будет п. о. При ε достаточно малом $(k_2{*}\chi{*}\chi^{\circ})(t) = (k_3{*}\chi{*}\chi^{\circ})(t)$ для $t \in [-2l, 2l]$, так как $k_2(t) = k_3(t) = k_1(t)$ для $t \in (-2l_1, 2l_1)$. Но в $(-\infty, \infty)$ $k_2 \not\equiv k_3$, поэтому при должном выборе χ и $k_2{*}\chi{*}\chi^{\circ} \not\equiv k_3{*}\chi{*}\chi^{\circ}$. Итак, мы получили п. о. функцию $k_2{*}\chi{*}\chi^{\circ} \in C^{\infty}([-2l, 2l])$, имеющую два различных продолжения в п. о. функцию на всей оси $(-\infty, \infty)$.

Заметим, что пример, который мы сейчас строили, может быть также легко найден на основании примера 3. Действительно, функция $k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} e^{-|\lambda|^{\frac{1}{2}}} d\lambda \in C^{\infty}((-\infty, \infty))$ и п. о., вместе с тем так как сейчас $\sigma'(\lambda) = e^{-|\lambda|^{\frac{1}{2}}}$, то интеграл (3.55) сходится.

Мы не будем больше останавливаться на примерах. Отметим лишь, что примеры 1 — 3 носили следующий характер: п. о. функция $k(t)$ была задана на $(-2l, 2l)$ $(0 < l < \infty)$ и ее можно было неоднозначно продолжать с любого интервала $(-2m, 2m)$, где $0 < m \leqslant l$. Оказывается, можно привести такие примеры п. о. функций, заданных на $(-2l, 2l)$ $(0 < l < \infty)$, что они с любого интервала $(-2m, 2m)$, где $0 < m < l$, продолжаются неоднозначно, а с $(-2l, 2l)$ — однозначно. Существуют примеры п. о. функций, которые с $(-2l, 2l)$ продолжаются неоднозначно, а с любого интервала $(-2m, 2m)$, где $m > l$ — однозначно.

Приведем достаточный критерий определенности проблемы продолжения, при этом воспользуемся одним результатом из теории степенной проблемы моментов, который будет приведен в § 5. Прежде всего убедимся, что справедлива лемма.

Лемма 3.8. *Рассмотрим п. о. функцию* $k(t) \in C((-2l, 2l))$ $(0 < l \leqslant \infty)$, *пусть* (3.40) — *ее интегральное представление. Если при некотором* $m = 0, 1, \ldots$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2m} d\sigma(\lambda) < \infty, \tag{3.56}$$

то $k(t) \in C^{2m}([-2l, 2l])$. *С другой стороны, если существует производная* $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m}} k\right)(0)$, *то сходится интеграл* (3.56).

Доказательство. Пусть выполнено (3.56), тогда интеграл в (3.40) дифференцируем и $k \in C^{2m}([-2l, 2l])$. Наоборот, пусть существует производная $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m}} k\right)(0)$; имеем $(\Delta_h^{2m} k)(0) \underset{h \to 0}{\to} \left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m}} k\right)(0)$, где $(\Delta_h f)(t) = \frac{1}{2h}[f(t+h) - f(t-h)]$. Вместе с тем $(\Delta_h e^{i\lambda \cdot})(t) = \frac{i}{h} \sin \lambda h \cdot e^{i\lambda t}$, $(\Delta_h^{2m} e^{i\lambda \cdot})(t) = \left(\frac{i}{h} \sin \lambda h\right)^{2m} \cdot e^{i\lambda t}$. Поэтому вычисляя от обеих сторон равенства (3.40) разность Δ_h^{2m} при $t = 0$, найдем:

$$(-1)^m (\Delta_h^{2m} k)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda h}{h}\right)^{2m} d\sigma(\lambda) \geqslant \int_{-N}^{N} \left(\frac{\sin \lambda h}{\lambda h}\right)^{2m} \lambda^{2m} d\sigma(\lambda) \quad (N > 0).$$

Переходя здесь к пределу при $h \to 0$ и учитывая существование предела в левой части, получим, что (3.56) имеет место. Лемма доказана.

Теорема 3.13. *Пусть $k(t) \in C((-2l, 2l))$ $(0 < l < \infty)$ п. о. и такова, что существуют все производные $k^{(m)}(0)$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Если*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2m]{(-1)^m k^{(2m)}(0)}} = \infty, \tag{3.57}$$

то проблема продолжения определенна.

Доказательство. Из леммы 3.8 следует, что $k(t) \in C^{\infty}([-2l, 2l])$; если $d\sigma(\lambda)$ — некоторая мера, дающая представление (3.40) для $k(t)$ при $t \in [-2l, 2l]$, то интегралы (3.56) сходятся при любом $m = 0, 1, \ldots$. Таким образом, представление (3.40) можно дифференцировать под знаком интеграла. Полагая $t = 0$, найдем:

$$(-i)^m k^{(m)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d\sigma(\lambda) \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Мы получили, что числа $s_m = (-i)^m k^m(0)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ образуют моментную последовательность. Для определенности проблемы моментов, т. е. для однозначного определения $d\sigma(\lambda)$ по s_m достаточно выполнение следующего критерия: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2m]{s_{2m}}} = \infty$ (см. п. 4, § 5). Из (3.57) следует, что в нашем случае последнее условие выполняется; таким образом, $d\sigma(\lambda)$ определяется однозначно по $k(t)$ $(t \in (-2l, 2l))$, т. е. проблема продолжения определенна. Теорема доказана.

Подчеркнем, что из леммы 3.8 вытекает бесконечная дифференцируемость $k(t)$, для которой существуют $k^{(m)}(0)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, и ее продолжения. Для аналитической в окрестности 0 функции $f(z)$ справедлива оценка $|f^{(m)}(0)| \leqslant \leqslant CR^m m!$ $(m = 0, 1, \ldots)$, поэтому условие (3.57) выполняется и такая $k(t)$ продолжается однозначно. Впрочем, этот результат является следствием более простого обстоятельства: если п. о. функция $k(t) \in C(-\infty, \infty)$ аналитична в окрестности 0, то она аналитична и всюду. Доказывается этот факт посредством рассуждений, близких к использованным при доказательстве леммы 4.2, гл. V. Именно, нужно построить по ядру $K(x, y) = k(y - x)$ пространство $\mathfrak{H}_k$ и доказать аналитическую зависимость e_x от x.

Для дальнейшего понадобится вид сопряженного оператора C^* к оператору C. *Пусть* I *построен по цепочке $H_k \supseteq H_0 \supseteq H_{+,k}$, тогда*

$$C^* \alpha = i \mathrm{I}^{-1} (\mathrm{I}\alpha)'; \tag{3.58}$$

$\mathfrak{D}(C^*)$ *состоит из тех и только тех* $\alpha \in H_k$, *для которых* $\mathrm{I}\alpha \in C^1([-l, l])$, *причем* $(\mathrm{I}\alpha)' \in H_{+,k}$. В самом деле, пусть $\alpha \in H_k$ такое, что $\langle iu', \alpha \rangle = \langle u, \beta \rangle$ $(u \in C_0^\infty(-l, l))$ при некотором $\beta = C^*\alpha$. Тогда $(iu', \mathrm{I}\alpha)_0 = (u, \mathrm{I}\beta)_0$ для тех же u, причем $\mathrm{I}\beta \in H_{+,k} \subseteq C([-l, l])$. Отсюда, благодаря сказанному на стр. 498, $\mathrm{I}\alpha \in C^1([-l, l])$ и $i(\mathrm{I}\alpha)' = \mathrm{I}\beta$, т. е. $C^*\alpha = \beta = i\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{I}\alpha)'$.

В одну сторону включение установлено; обращая рассуждения, докажем его и в обратную сторону. Соотношение (3.58) доказано.

Из (3.58) следует, что оператор C^* существенно отличается от аналогичного оператора L^* в случае разностных уравнений: в отличие от L^* он, вообще говоря, не определен на δ-функциях δ_ξ $(\xi \in [-l, l])$, так как $(\mathrm{I}\delta_\xi)(y) = k(y - \xi)$ в общем случае не будет дифференцируемой. Это отличие будет несколько нарушать аналогию между дальнейшими построениями п. 9 и изложением § 1, гл. VII. С другой стороны, заметим, что последнее изложение могло бы быть несколько модифицировано в направлении приводимых в следующем пункте доказательств.

Как обычно, обозначим $\overline{C}$ замыкание оператора C в H_k. Рассмотрим подпространство $\mathfrak{R}(\overline{C} - zE)$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$ пространства H_k и ортогональное дополнение N_z к нему—дефектное подпространство. Из (3.58) вытекает следующий факт: *индекс дефекта оператора C имеет вид* (0, 0) *или* (1, 1); *в последнем случае дефектное подпространство N_z состоит из скалярных кратных вектора* $\mathrm{I}^{-1}e^{-i\bar{z}x} \in H_k$. В самом деле, дефектные числа у C равны благодаря его вещественности относительно инволюции $\circ$. Пусть теперь оператор $\overline{C}$ несамосопряжен, тогда N_z совпадает с подпространством решений уравнения $C^*\varphi = \bar{z}\varphi$. Согласно (3.58), последнее равенство означает, что на $[-l, l]$ $i(\mathrm{I}\varphi)' = \bar{z}\mathrm{I}\varphi$, т. е. $\mathrm{I}\varphi = ae^{-i\bar{z}x}$ $(x \in [-l, l])$, где a — скаляр. Итак, $\varphi = a\mathrm{I}^{-1}e^{-i\bar{z}x}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, самосопряженность $\overline{C}$ — тонкий факт, зависящий от структуры $k(t)$: если эта функция такова, что при $\operatorname{Im} z \neq 0$ $e^{-izx} \overline{\in} H_{+,k}$, то $\overline{C}$ — самосопряжен; в противном случае — нет. Отсюда и из леммы 3.7 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 3.14. *Пусть* $k(t) \in C((-2l, 2l))$ $(0 < l < \infty)$ — *п. о. функция. Рассмотрим полный набор ортонормированных собственных функций* $w_1(x), w_2(x), \ldots \in L_2((-l, l))$ *ядра* $K(x, y) = k(y - x)$ $(x, y \in (-l, l))$, *отвечающих положительным собственным значениям:*

$$\int_{-l}^{l} k(y - x)\, w_j(y)\, dy = \varrho_j w_j(x) \quad (x \in (-l, l),\ \varrho_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots).$$

Для того чтобы проблема продолжения $k(t)$ была определенной, достаточно, чтобы при некотором невещественном z, и необходимо, чтобы при любом невещественном z имело место соотношение:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho_j} \left| \int_{-l}^{l} e^{-izx}\overline{w_j(x)}\, dx \right|^2 = \infty. \tag{3.59}$$

Заметим, что в то время, когда в условии (3.57) фигурируют лишь значения $k(t)$ вблизи 0, в условии (3.59) фигурируют значения $k(t)$ на всем интервале $(-2l, 2l)$. В первом случае продолжение $k(t)$ с любого интервала $(-l, l)$ единственно, во втором — лишь с рассматриваемого нитервала (ср. со сказанным на стр. 679).

В заключение этого пункта сделаем несколько замечаний. Прежде всего *покажем, что* $C^1([-l, l]) \subset \mathfrak{D}(C^*)$ *и*

$$C^*v = i\left[\frac{dv}{dx} + v(-l)\,\delta_{-l} - v(l)\,\delta_l\right] \quad (v \in C^1([-l, l])). \tag{3.60}$$

Действительно, пусть $u \in C_0^\infty((-l, l))$, продолжая ее нулем на всю ось, получим

$$\langle Cu, v\rangle =$$

$$= \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} k(y-x)\, iu'(y)\,\overline{v(x)}\,dx\,dy =$$

$$= i\int_{-l}^{l}\left(\int_{-\infty}^{\infty} k(y-x)\,u'(y)\,dy\right)\overline{v(x)}\,dx =$$

$$= i\int_{-l}^{l}\frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,u(t+x)\,dt\right)\overline{v(x)}\,dx =$$

$$= i\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,u(t+l)\,dt\,\overline{v(l)} -$$

$$- i\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,u(t-l)\,dt\,\overline{v(-l)} -$$

$$- i\int_{-l}^{l}\left(\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,u(t+x)\,dt\right)\overline{v'(x)}\,dx =$$

$$= i\int_{-l}^{l} k(y-l)\,u(y)\overline{v(l)}\,dy - i\int_{-l}^{l} k(y+l)\,u(y)\,\overline{v(-l)}\,dy + \langle u, iv'\rangle =$$

$$= \langle u, i\,[v' + v(-l)\,\delta_{-l} - v(l)\,\delta_l]\rangle,$$

что и доказывает (3.60).

Предположим, что п. о. функция $k(t) \in C^2([-2l, 2l])$. *Тогда* $C^1([-l, l]) \subset \subset \mathfrak{D}(\overline{C})$ *и*

$$\overline{C}u = i\left[\frac{du}{dx} + u(-l)\,\delta_{-l} - u(l)\,\delta_l\right] \quad (u \in C^1([-l, l])). \tag{3.61}$$

В самом деле, пусть последовательность $u_n \in C_0^\infty((-l, l))$ такова, что в $L_2((-l, l))$ (а значит, и в H_k) она сходится к $u \in C^1([-l, l])$. Тогда Cu_n фундаментальна в H_k: интегрируя по частям, получим

$$\langle Cu_n - Cu_m, Cu_n - Cu_m \rangle = \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} k(y-x)\,(u_n(y) - u_m(y))'\overline{(u_n(x) - u_m(x))'}\,dx\,dy =$$

$$= -\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} k''(y-x)\,(u_n(y) - u_m(y))\,\overline{(u_n(x) - u_m(x))}\,dx\,dy \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Благодаря полноте H_k найдется $\alpha \in H_k$ такое, что в H_k $Cu_n \to \alpha$. Итак, для $u \in C^1([-l, l])$ мы нашли последовательность $u_n \in C_0^\infty((-l, l))$ такую, что в H_k $u_n \to u$ и $Cu_n \to \alpha$; это показывает, что $u \in \mathfrak{D}(\overline{C})$. В силу эрмитовости C имеем $C \subseteq C^*$, поэтому и $\overline{C} \subseteq C^*$. Но на $C^1([-l, l])$ оператор C^* действует согласно (3.60), следовательно, для $\overline{C}u = C^*u$ справедливо равенство (3.61). Утверждение доказано.

Из (3.60) и (3.61) следует, что если $k(t) \in C^2([-2l, 2l])$, то на $C^1([-l, l])$ операторы $\overline{C}$ и C^* совпадают. Однако отсюда еще не вытекает, что $\overline{C} = C^*$, так как в отличие от подобных дифференциальных операторов в пространстве $L_2(G)$, вообще говоря, C^* не совпадает со своим замыканием с функций из $C^1([-l, l])$.

Для любого $\alpha \in \mathfrak{D}(C^*)$ в силу доказанного на стр. 681 $\mathrm{I}\alpha \in C^1([-l, l]) \subset \subset \mathfrak{D}(C^*)$, т. е. $\mathrm{I}\,\mathfrak{D}(C^*) \subset \mathfrak{D}(C^*)$.

Из (3.58) и (3.60) вытекает следующее соотношение коммутирования операторов C^* и I:

$$C^*\mathrm{I}\alpha - \mathrm{I}C^*\alpha = i[(\mathrm{I}\alpha)(-l)\,\delta_{-l} - (\mathrm{I}\alpha)(l)\,\delta_l] \quad (\alpha \in \mathfrak{D}(C^*)). \tag{3.62}$$

Действительно,

$$C^*\mathrm{I}\alpha - \mathrm{I}C^*\alpha = i[(\mathrm{I}\alpha)' + (\mathrm{I}\alpha)(-l)\delta_{-l} - (\mathrm{I}\alpha)(l)\delta_l] - i\,\mathrm{I}\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{I}\alpha)' = i[(\mathrm{I}\alpha)(-l)\delta_{-l} - (\mathrm{I}\alpha)(l)\delta_l].$$

9. Описание всех продолжений. Перейдем к описанию всех продолжений п. о. функции $k(t)$ $(t \in (-2l, 2l))$ в п. о. функцию на всей оси в случае их неединственности. Как уже говорилось, мы получим теорию, аналогичную теории неопределенного случая для якобиевых матриц.

Прежде всего изложим конструкцию, подобную приведенной на стр. 531—532. Зафиксируем невещественное z и разложим вектор $\delta_0 \in H_k$ по $\mathfrak{R}(\overline{C} - zE)$ и N_z:

$$\delta_0 = e_z + i_z \qquad (e_z \in \mathfrak{R}(\overline{C} - zE),\ i_z \in N_z).$$

Покажем, что *оператор* $\overline{C}$ *будет самосопряженным тогда и только тогда, когда* $i_z = 0$. Действительно, если $\overline{C}$ самосопряжен, то $\mathfrak{R}(\overline{C} - zE) = H_k$ и $i_z = 0$.

Если $\overline{C}$ несамосопряжен, то $N_z = \{a\mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x}\}$. Имеем: $\langle \delta_0, \mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x} \rangle = (\delta_0, e^{-i\bar{z}x})_0 = 1$, т. е. компонента δ_0 в N_z отлична от нуля; иными словами, $i_z \neq 0$. Утверждение доказано.

Пусть ψ — нормированный вектор $\mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x}$, т. е. $\psi = \mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x} \times \langle \mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x}, \mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x} \rangle^{-\frac{1}{2}}$. Так как $i_z = \langle \delta_0, \psi \rangle \psi$, то $\langle i_z, i_z \rangle = |\langle \delta_0, \psi \rangle|^2$ и мы получим следующую формулу для квадрата расстояния в H_k вектора δ_0 к $\mathfrak{R}(\overline{C} - zE)$:

$$\varrho^2(\delta_0, \mathfrak{R}(\overline{C} - zE)) = \langle i_z, i_z \rangle = \langle \mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x}, \mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x} \rangle^{-1}.$$

Эта формула остается справедливой и в случае самосопряженного $\overline{C}$: теперь, $\mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x} \overline{\in} H_k$, т. е. $\langle \mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x}, \mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x} \rangle = \infty$, вместе с тем и $i_z = 0$.

Введем аналог полиномов первого рода; в отличие от разностного случая их построение неоднозначно*. Кроме того, они не будут «полиномами» в нашем смысле — не принадлежат $C_0^\infty((-l, l))$. Пусть $x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots$ — счетная всюду плотная на $[-l, l]$ последовательность точек этого сегмента (нам удобно, хотя и необязательно, включить в число этих точек 0). Рассмотрим последовательность δ-функций $\delta_{x_0} = \delta_0, \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots \in H_k$ и произведем ее ортогонализацию; $p_0 = \delta_0, p_1, p_2, \ldots \in H_k$ — полученная ортонормированная система. Так как линейная оболочка векторов δ_{x_j} плотна в H_k (см. стр. 674), то $p_0, p_1, \ldots$ образуют ортонормированный базис в H_k. Имеем $\widetilde{\delta_{x_j}}(\lambda) = e^{i\lambda x_j}$, поэтому каждое $\widetilde{p_j}(\lambda) = P_j(\lambda)$ — линейная комбинация конечного числа экспоненциалов $e^{i\lambda x_k}$. Система «функций 1-го рода» $P_0(\lambda) \equiv 1, P_1(\lambda), \ldots$ образует ортонормированный базис в $\widetilde{H}_k$. Подчеркнем, что построение $P_j(\lambda)$ не зависит от выбора $d\sigma(\lambda)$, т. е. от вида самосопряженного расширения оператора C.

Будем рассматривать неопределенный случай продолжения, т. е. $\overline{C}$ предполагается несамосопряженным. Имеем $\langle \mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x}, \delta_{x_j} \rangle = (e^{-i\bar{z}x}, \delta_{x_j})_0 = e^{-i\bar{z}x_j}$, поэтому

$$\langle \mathrm{I}^{-1} e^{-i\bar{z}x}, p_j \rangle = P_j(-\bar{z}) \quad (j = 0, 1, \ldots; \ \mathrm{Im}\, z \neq 0). \tag{3.63}$$

Отсюда вытекают следующие важные равенства:

$$\langle \mathrm{I}^{-1} e^{izx}, \mathrm{I}^{-1} e^{izx} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2, \quad \varrho^2(\delta_0, \mathfrak{R}(\overline{C} - zE)) = \langle i_z, i_z \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} |P_j(-\bar{z})|^2} \quad (\mathrm{Im}\, z \neq 0). \tag{3.64}$$

* Рассматриваемые ниже функции $P_j(\lambda)$ и $Q_j(\lambda)$ можно называть аналогами полиномов первого и второго рода лишь весьма условно — только на основании близости конструкций стр. 684—694 и стр. 526—538. Действительные аналоги этих полиномов возникают при континуальной «ортогонализации» δ_x (см. «Литературные указания», стр. 767).

Выше фигурируют действительно бесконечные ряды, а не конечные суммы, так как последнее возможно лишь тогда, когда процесс ортогонализации приведет к системе $\{p_j\}$, у которой начиная с некоторого индекса k $p_k = p_{k+1} = \ldots = 0$. Но тогда, согласно теореме 3.8, проблема продолжения определенная, что противоречит нашему предположению. Из (3.64) вытекает, что в неопределенном случае для любого невещественного z сходится ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2. \tag{3.65}$$

Наоборот, если при некотором невещественном z ряд (3.65) сходится, то задача продолжения неопределенна.

Перейдем к построению аналогов полиномов второго рода. Пусть z и ζ — произвольные комплексные числа, $\xi \in [-l, l]$. Найдется вектор $\gamma_{\xi, z} \in L_2((-l, l)) \subseteq H_k$ такой, что

$$\tilde{\gamma}_{\xi,z}(\zeta) = \frac{e^{i\zeta\xi} - e^{iz\xi}}{\zeta - z} = \tilde{\gamma}_{\xi,\zeta}(z) \tag{3.66}$$

(при совпадении ζ с z в (3.66) нужно брать предел); $\gamma_{\xi,z}$ — непрерывная вектор-функция со значениями в $L_2((-l, l))$ точки (ξ, z) и голоморфная (целая), как функция точки z при каждом фиксированном ξ. В самом деле, положим $\gamma_{\xi,z}(x) = i\varkappa_{(0,\xi)}(x)\, e^{iz(\xi-x)} \in L_2((-l, l))$ ($\varkappa_{(a,b)}(x)$ — характеристическая функция интервала (a, b)). Очевидно, $\gamma_{\xi,z}$ обладает требуемыми свойствами непрерывности по (ξ, z) и голоморфности по z. Соотношение (3.66) также выполняется: при $\zeta \neq z$

$$\tilde{\gamma}_{\xi,z}(\zeta) = \int_{-l}^{l} \gamma_{\xi,z}(x)\, e^{i\zeta x}\, dx = i\int_{0}^{\xi} e^{iz(\xi-x)} e^{i\zeta x}\, dx = \frac{e^{i\zeta\xi} - e^{iz\xi}}{\zeta - z}$$

Так как $p_j = \sum_{k=0}^{j} c_k \delta_{x_k}$, то $q_{j,z} = \sum_{k=0}^{j} c_k \gamma_{x_k, z} \in H_k$ $(j = 0, 1, \ldots)$ обладает, согласно (3.66), тем свойством, что $\tilde{q}_{j,z}(\lambda) = (P_j(\lambda) - P_j(z))(\lambda - z)^{-1}$; $q_{j,z}$ — голоморфная вектор-функция со значениями в H_k от z. Рассмотрим голоморфные функции $Q_j(z) = \langle q_{j,z}, \delta_0 \rangle$. Используя равенство Парсеваля (3.52) (при $\Delta = (-\infty, \infty)$), получим для любого z

$$Q_j(z) = \langle q_{j\,z}, \delta_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(\lambda) - P_j(z)}{\lambda - z}\, d\sigma(\lambda) \quad (j = 0, 1, \ldots;\ Q_0(z) = 0) \tag{3.67}$$

(как и раньше, при спуске z на $(-\infty, \infty)$ в последнем интеграле нужно брать предел подынтегрального выражения). «Функции 2-го рода» $Q_j(z)$ и будут играть роль полиномов $Q_j(z)$ в нашей задаче. Заметим, что определение через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ показывает, что их вид не зависит от выбора меры $d\sigma(\lambda)$, т. е. расширения C.

Каждая из функций $Q_j(z)$ ограничена на вещественной оси и поэтому входит в $L_2((-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$. Для доказательства ограниченности заметим, что $(P_j(\lambda) - P_j(z))(\lambda - z)^{-1} = \left(\frac{dP_j}{d\lambda}\right)(\theta_{\lambda,z})$, где $\theta_{\lambda,z}$ — некоторая точка отрезка, соединяющего λ и z. Но $P_j(\lambda) = \sum_{k=0}^{j} c_k e^{i\lambda x_k}$, следовательно $\left(\frac{dP_j}{d\lambda}\right)(\theta_{\lambda,z}) = $ $= i \sum_{k=0}^{j} c_k x_k e^{i\theta_{\lambda,z} x_k}$, что показывает равномерную по λ и z ограниченность частного $(P_j(\lambda) - P_j(z))(\lambda - z)^{-1}$. Отсюда и из (3.67) вытекает утверждение.

Теперь результаты п. 6, § 1, гл. VII, переносятся на наш случай. Прежде всего установим некоторые равенства, связанные с, вообще говоря, обобщенной резольвентой R_z оператора C. Так, для ее ядра $R(x, y; z)$ справедлив аналог представления (1.37), гл. VII:

$$R(x, y; z) = \langle R_z \delta_y, \delta_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(y-x)}}{\lambda - z}\, d\sigma(\lambda) \quad (x, y \in [-l, l]). \tag{3.68}$$

В самом деле, пусть $x, y \in (-l, l)$. Нужно воспользоваться представлением (3.16), взяв в нем в качестве u и v сингулярные последовательности непрерывных функций, сходящиеся (в смысле H_k) к δ_y и δ_x соответственно (ср. со стр. 657). После перехода к пределу получим $R(x, y; z) = \langle R_z \delta_y, \delta_x \rangle$ $(x, y \in (-l, l))$. Ядро R на концах $-l, l$ просто определяется как соответствующий предел $\langle R_z \delta_y, \delta_x \rangle$ (он существует, так как δ_ξ — непрерывная вектор-функция со значениями в H_k; $\xi \in [-l, l]$). Второе равенство в (3.68) следует либо из (3.17), либо из (3.52).

Однако представление (3.68) мало полезно для наших целей, так как δ_x не ортонормированы в H_k. Поэтому поступаем следующим образом. Записываем R_z в ортонормированном базисе в H_k вида $p_0 = \delta_0, p_1, \ldots$, тогда для матрицы этого оператора получаем аналогичную (1.37) формулу:

$$R_{z;jk} = \langle R_z p_k, p_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{P_j(\lambda)}\, P_k(\lambda)}{\lambda - z}\, d\sigma(\lambda) \quad (j, k = 0, 1, \ldots). \tag{3.69}$$

Мера $d\sigma(\lambda)$ однозначно восстанавливается по голоморфной вне спектра соответствующего расширения оператора C функции

$$m(z) = R_{z;00} = R(0, 0; z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}. \tag{3.70}$$

Введем для функций вида $F(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{izx_k}$ $(x_k \in [-l, l])$ операцию

$$F(z) \to \overline{F}(z) = \overline{F(\bar{z})} = \sum_{k=0}^{n} \bar{c}_k e^{-izx_k}.$$

Повторяя выкладки стр. 528 для любых регулярных z и ζ, найдем:

$$(R_z p_0)_j = \overline{Q}_j(z) + m(z) \overline{P}_j(z) \quad (j = 0, 1, \ldots), \tag{3.71}$$

$$\frac{\overline{m(\zeta)}-m(z)}{\bar{\zeta}-z}=\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{Q}_j(z)+m(z)\bar{P}_j(z))\overline{(\bar{Q}_j(\zeta)+m(\zeta)\bar{P}_j(\zeta))}\qquad (\bar{\zeta}\neq z),$$

$$\frac{\overline{m(z)}-m(z)}{\bar{z}-z}=\sum_{j=0}^{\infty}|\bar{Q}_j(z)+m(z)\bar{P}_j(z)|^2\quad(\operatorname{Im} z\neq 0).$$

В последних двух равенствах предполагается, что R_z — обычная резольвента. Если она обобщенная, то сохраняется лишь первое и третье соотношения, причем в третьем знак $=$ нужно заменить знаком $\geqslant$.

Нам понадобятся некоторые сведения о тригонометрических полиномах *. Зафиксируем $A>0$ и рассмотрим на интервале $[-A, A)$ тригонометрический полином n-го порядка с вещественными коэффициентами, т. е. функцию вида

$$P(z)=a_0+\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\cos\frac{jz\pi}{A}+b_j\sin\frac{jz\pi}{A}\right)\quad(\operatorname{Im} a_j=\operatorname{Im} b_j=0).$$

$P(z)$ имеет на $[-A, A)$ не более $2n$ нулей. Из его непрерывности следует, что число нулей на $[-A, A)$, при которых происходит перемена знака, обязательно четное. Обозначим эти нули $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2p}$; $0\leqslant p\leqslant n$. Справедливо следующее представление:

$$P(z)=\pm\prod_{k=1}^{2p}\sin\frac{(z-\alpha_k)\pi}{2A}\left|\sum_{\nu=0}^{n-p}c_\nu e^{i\frac{\nu z\pi}{A}}\right|^2,\tag{3.72}$$

c_ν — некоторые комплексные коэффициенты*.

Установим один факт, аналогичный лемме 1.4, гл. VII. Рассмотрим комплексную линейную оболочку функций

$$1,\ \cos\frac{z\pi}{A},\ \sin\frac{z\pi}{A},\ \ldots,\ \cos\frac{jz\pi}{A},\ \sin\frac{jz\pi}{A},\ \ldots,\tag{3.73}$$

т. е. совокупность всех комплексных полиномов с фиксированным A. Предположим, что на этих полиномах введено невырожденное скалярное произведение вида $(P,Q)=\int_{-\infty}^{\infty}P(\lambda)\overline{Q(\lambda)}\,d\sigma(\lambda)$, где $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера. Произведем ортогонализацию последовательности (3.73), пользуясь вещественными линейными комбинациями; пусть $P_0(z)$, $P'_{\mathrm{I}}(z)$, $P''_{\mathrm{I}}(z),\ldots$, $P'_j(z)$, $P''_j(z),\ldots$ — полученная ортогональная система. Утверждается, что P'_n, $(z)\,P''_n(z)$ *имеет точно $2n$ вещественных нулей на $[-A, A)$, причем эти нули простые.* Рассмотрим,

---

* См., например, Г. Полиа, Г. Сеге [1], отд. VI, задачи 11, 40, стр. 88, 94. Формула (3.72) следует из представления $g(\theta)=e^{-in\theta}G(e^{i\theta})$ задачи 11, если из полинома $G(z)$ выделить множители, отвечающие вещественным нулям $g(\theta)$ типа α_j (они дадут произведение синусов), а к оставшейся части применить результат задачи 40.

например, полином $P'_n(z)$. Предположим противное к доказываемому, тогда в представлении (3.72) для $P'_n(z)$ будет $p < n$. Положим $R(z) = \prod_{k=1}^{2p} \sin\frac{(z-\alpha_k)\pi}{2A} \times \times \sum_{\nu=0}^{n-p} c_\nu e^{i\frac{\nu z\pi}{A}}$; заменяя здесь sin по формуле Эйлера, получим, что $R(z)$ является линейной комбинацией функций $1, e^{i\frac{z\pi}{A}}, \ldots, e^{i\frac{nz\pi}{A}}$, т. е. тригонометрическим полиномом с комплексными коэффициентами. По предположению $(R, R) > 0$. Вместе с тем $(R, R) = \left(P'_n(z), \prod_{k=1}^{2p} \sin\frac{(z-\alpha_k)\pi}{2A}\right) = 0$, так как произведение синусов является линейной комбинацией с вещественными коэффициентами первых $1+2p$ функций из (3.73), т. е. полиномов $P_0(z), \ldots, P'_p(z)$, $P''_p(z)$. Утверждение доказано.

Из него вытекает что *для полиномов $P_0(z), P'_1(z), P''_1(z), \ldots$ справедливы оценки вида*

$$|P(x+iy')| \leqslant |P(x+iy'')| \qquad (|y'| \leqslant |y''|). \tag{3.74}$$

В самом деле, для этих полиномов в представлении (3.72) фигурирует лишь произведение синусов. Замечая, что $\left|\sin\frac{(x+iy-\alpha_k)\pi}{2A}\right|$ является монотонно растущей функцией от $|y|$, придем к (3.74).

Возвратимся к проблеме продолжения п. о. функции. Роль леммы 1.5, гл. VII, играет следующая лемма.

Лемма 3.9. *В неопределенном случае ряды $\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2$ и $\sum_{j=0}^{\infty} |Q_j(z)|^2$ сходятся при любом z, причем их суммы равномерно ограничены в каждой ограниченной части комплексной плоскости.*

Доказательство проведем по этапам.

1) Пусть G — ограниченная область комплексной плоскости, находящаяся на положительном расстоянии от оси $(-\infty, \infty)$. Покажем сперва, что для $z \in G \setminus \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — некоторое максимум конечное множество точек, ряды $\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2$, $\sum_{j=0}^{\infty} |Q_j(z)|^2$ сходятся равномерно. Доказательство будет следовать доказательству леммы 1.5, гл. VII: рассмотрим некоторую функцию $m(z)$ вида (3.70), пусть $z \in G'$ (E' — комплексно сопряженное множество к множеству E). Для таких z последний ряд в (3.71), т. е. $\sum_{j=0}^{\infty} |\overline{Q}_j(z) + m(z)\overline{P}_j(z)|^2$, будет сходиться к непрерывной функции и поэтому, согласно теореме Дини, его сходимость — равномерная. Пусть $m_1(z)$ — другая функция вида (3.70). Из равномерной сходимости в G' второго ряда $\sum_{j=0}^{\infty} |\overline{Q}_j(z) + m_1(z)\overline{P}_j(z)|^2$ при помощи вычи-

тания установим, что $|m(z)-m_1(z)|\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\overline{P}_j(z)|^2$ также сходится равномерно при $z\in G'$, т. е. $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\overline{P}_j(z)|^2$ — при $G'\diagdown\mathfrak{R}'$, а значит $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|P_j(z)|^2=\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\overline{P}_j(\overline{z})|^2$ — при $z\in G\diagdown\mathfrak{R}$. Сравнивая ряды $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\overline{P}_j(z)|^2$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\overline{Q}_j(z)+m(z)\overline{P}_j(z)|^2$ для $z\in G'\diagdown\mathfrak{R}'$, заключаем, что ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\overline{Q}_j(z)|^2$ при $z\in G'\diagdown\mathfrak{R}'$, а значит и ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|Q_j(z)|^2$ при $z\in G\diagdown\mathfrak{R}$ — сходятся равномерно. Утверждение доказано.

2) Докажем теперь равномерную сходимость ряда (3.65) в любой ограниченной области комплексной плоскости при специальном выборе точек $x_0=0, x_1, x_2, \ldots\in[-l, l]$, определяющих функции $P_j(z)$. Именно, в качестве этих точек будем брать всюду плотную в $[-l, l]$ последовательность

$$0;\ -\frac{1}{2}l,\ \frac{1}{2}l;\ -\frac{3}{4}l,\ -\frac{1}{4}l,\ \frac{1}{4}l,\ \frac{3}{4}l;$$

$$-\frac{7}{8}l,\ -\frac{5}{8}l,\ -\frac{3}{8}l,\ -\frac{1}{8}l,\ \frac{1}{8}l,\ \frac{3}{8}l,\ \frac{5}{8}l,\ \frac{7}{8}l;\ \ldots \tag{3.75}$$

(мы последовательно каждый интервал делим на две равные части). Ортогонализацию векторов $\delta_{x_0}, \delta_{x_1}, \ldots$ в H_k, т. е. ортогонализацию функций $e^{i\lambda x_0}$, $e^{i\lambda x_1}, \ldots$ в $L_2((-\infty,\infty), d\sigma(\lambda))$, будем проводить следующим образом: нормируем $e^{i\lambda x_0}=1$, затем вместо $e^{i\lambda\left(-\frac{1}{2}l\right)}$ и $e^{i\lambda\left(\frac{1}{2}l\right)}$ рассматриваем $\cos\lambda\left(\frac{1}{2}l\right)$ и $\sin\lambda\left(\frac{1}{2}l\right)$ и проводим ортогонализацию $1, \cos\lambda\left(\frac{1}{2}l\right)$ и $\sin\lambda\left(\frac{1}{2}l\right)$, пользуясь вещественными линейными комбинациями. Аналогично поступаем дальше, заменяя функции вида $e^{-i\lambda s}$ и $e^{i\lambda s}$ на $\cos\lambda s$ и $\sin\lambda s$. В результате такой ортогонализации последовательность $P_0(z), P_1(z), \ldots$ будет выглядеть как $P_0(z), P_1'(z), P_1''(z), P_2'(z), \ldots$. Но тогда для функций I-го рода $P_0(z)$, $P_1(z), \ldots$ будут иметь место оценки (3.74), которые, очевидно, позволяют вывести из 1) требуемую сходимость ряда (3.65).

3) Установим часть леммы, относящуюся к ряду (3.65). Обозначим сейчас G произвольную ограниченную область комплексной плоскости. Пусть $P_0(z)$, $P_1(z), \ldots$ — функции первого рода, построенные по любой последовательности $x_0=0, x_1, \ldots$, а $\widehat{P}_0(z), \widehat{P}_1(z), \ldots$ — функции, построенные в 2). Согласно (3.64), при $\operatorname{Im} z\neq 0$ $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|P_j(z)|^2=\langle i_z, i_z\rangle^{-1}=\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\widehat{P}_j(z)|^2$. Но в силу 2) последний ряд сходится равномерно в каждой ограниченной части плоскости, поэтому

его сумма непрерывна и $\sum_{j=0}^{\infty} |\hat{P}_j(z)|^2 \leqslant C_G\ (z \in G)$. Для $z \in G \diagdown (-\infty, \infty)$ имеем: $\sum_{j=0}^{N} |P_j(z)|^2 \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |\hat{P}_j(z)|^2 \leqslant C_G$. Переходя здесь к пределу при z, приближающемся к оси $(-\infty, \infty)$, получим $\sum_{j=0}^{N} |P_j(z)|^2 \leqslant C_G\ (z \in G)$, т. е. $\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2 \leqslant C_G\ (z \in G)$, что и требовалось.

4) Докажем часть леммы, относящуюся к ряду $\sum_{j=0}^{\infty} |Q_j(z)|^2$. Здесь воспользоваться предыдущими рассуждениями нельзя, так как для функций $Q_j(z)$ даже в случае точек вида (3.75) нет оценок (3.74), и мы поступим иначе. Пусть G — такая же, как и в 3); G' — область, комплексно сопряженная к G. Из (3.70) вытекает оценка $|m(z)| \leqslant C_1 / |\operatorname{Im} z|$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$. С ее помощью из последнего равенства в (3.71) и из 3) получаем:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\overline{Q}_j(z) + m(z)\overline{P}_j(z)|^2 \leqslant \frac{C_1}{|\operatorname{Im} z|^2}\ (\operatorname{Im} z \neq 0),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |m(z)\overline{P}_j(z)|^2 \leqslant \frac{C_1^2 C_{\widetilde{G}'}}{|\operatorname{Im} z|^2}\ (z \in \widetilde{G}',\ \operatorname{Im} z \neq 0),$$

где $\widetilde{G}'$ обозначает область, состоящую из объединения кругов радиуса 1 с центрами в точках G'. Из полученных двух оценок вытекает:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\overline{Q}_j(z)|^2 \leqslant \frac{C_2}{|\operatorname{Im} z|^2} \quad (z \in \widetilde{G}',\ \operatorname{Im} z \neq 0). \tag{3.76}$$

Будем пользоваться функцией $\overset{+}{\log}\, t = \log t$ при $t \geqslant 1$ и равной 0 при $0 \leqslant t < 1$. Легко видеть, что $\overset{+}{\log}(ab) \leqslant \overset{+}{\log}\, a + \overset{+}{\log}\, b$. Из (3.76) вытекает: $\overset{+}{\log}\left(\sum_{j=0}^{\infty} |\overline{Q}_j(z)|^2\right) \leqslant \overset{+}{\log}\, C_2 + 2\,\overset{+}{\log}\frac{1}{|\operatorname{Im} z|}\ (z \in \widetilde{G}', \operatorname{Im} z \neq 0)$. Зафиксируем натуральное N, теперь получим $(z = x + iy)$:

$$\iint_{\widetilde{G}'} \overset{+}{\log}\left(\sum_{j=0}^{N} |\overline{Q}_j(z)|^2\right) dx\,dy \leqslant \iint_{\widetilde{G}'} \left(\overset{+}{\log}\, C_2 + 2\,\overset{+}{\log}\frac{1}{|y|}\right) dx\,dy = C_3 < \infty. \tag{3.77}$$

Покажем, что функция $\overset{+}{\log}\left(\sum_{j=0}^{N}|\overline{Q}_j(z)|^2\right)$ субгармонична*. В самом деле, $\log|\overline{Q}_j(z)|^2 = 2\log|\overline{Q}_j(z)|$ субгармонична, так как $\overline{Q}_j(z)=\overline{Q_j(\bar{z})}$ — целая функция. Иными словами, $|\overline{Q}_j(z)|^2$ — логарифмически субгармоническая функция. Известно, что конечная сумма логарифмически субгармонических функций логарифмически субгармонична, т. е. $\log\left(\sum_{j=0}^{N}|\overline{Q}_j(z)|^2\right)$ субгармонична. Но тогда верхняя огибающая этой функции и 0, т. е. $\overset{+}{\log}\left(\sum_{j=0}^{N}|\overline{Q}_j(z)|^2\right)$, также субгармонична.

Как известно, для субгармонической функции $f(z)$ справедлива теорема о среднем: $f(\zeta)\leqslant\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{|\zeta-z|\leqslant r} f(z)\,dz$, если только $r>0$ настолько мало, что круг $|\zeta-z|\leqslant r$ лежит в области определения $f(z)$. Применяя эту теорему при $r=1$ и $\zeta\in G'$ к функции $f(z)=\overset{+}{\log}\left(\sum_{j=0}^{N}|\overline{Q}_j(z)|^2\right)$ и пользуясь неравенством (3.77), получим:

$$\overset{+}{\log}\left(\sum_{j=0}^{N}|\overline{Q}_j(\zeta)|^2\right)\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta-z|\leqslant 1}\overset{+}{\log}\left(\sum_{j=0}^{N}|\overline{Q}_j(z)|^2\right)dz\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\widetilde{G'}}\overset{+}{\log}\left(\sum_{j=0}^{N}|\overline{Q}_j(z)|^2\right)dx\,dy\leqslant C_3.$$

Отсюда $\sum_{j=0}^{N}|\overline{Q}_j(\zeta)|^2\leqslant e^{C_3}$, а значит и $\sum_{j=0}^{\infty}|\overline{Q}_j(\zeta)|^2\leqslant e^{C_3}$ $(\zeta\in G')$, т. е. $\sum_{j=0}^{\infty}|Q_j(\zeta)|^2\leqslant e^{C_3}$ $(\zeta\in G)$. Пункт 4) и, следовательно, лемма доказаны.

В отличие от леммы 1.5, гл. VII, мы не устанавливали равномерную сходимость при $|z|\leqslant C<\infty$ рядов из леммы 3.9 (хотя она н нмеет место). Ограничимся рассмотрением ряда (3.65) и докажем такую сходнмость. Подобно выводу (3.63) и (3.64) легко убедиться, что в любом случае (определенном или нет) справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{\infty}|P_j(z)|^2=\langle \mathrm{I}^{-1}e^{izx},\mathrm{I}^{-1}e^{izx}\rangle \tag{3.78}$$

* Относнтельно используемых ннже фактов о субгармонических функциях см., например, И. И. Привалов [1], гл. 3, стр. 29—77.

при произвольном комплексном z (в обоих частях (3.78) могут появляться ∞). Беря сперва в (3.78) в качестве функций $P_j(z)$ специально построенные $\hat{P}_j(z)$, докажем, что $\langle I^{-1} e^{izx}, I^{-1} e^{izx} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} |\hat{P}_j(z)|^2$ непрерывно при любом z. Из (3.78) следует, что и $\sum_{j=0}^{\infty} |P_j(z)|^2$ непрерывно. Наше утверждение теперь вытекает из теоремы Дини.

Таким образом установлены аналоги основных фактов на стр. 526—533, которые позволили доказать теорему 1.12, гл. VII. Почти не изменяя рассуждений, придем к доказательству следующего результата.

Теорема 3.15. *Пусть имеет место неопределенный случай задачи продолжения п. о. функции. Зафиксируем невещественное z и рассмотрим точку $m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}$, где $d\sigma(\lambda)$ — ортогональная (т. е. отвечающая расширению в H_k) спектральная плотность. Перебирая всевозможные такие плотности, получим, что точка $m(z)$ описывает некоторую окружность K_z (аналог окружности Вейля — Гамбургера), центр и радиус которой подсчитываются по формулам:*

$$O(z) = -\frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} |\overline{P}_j(z)|^2} \left(\frac{1}{z - \bar{z}} + \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\bar{z}) \bar{Q}_j(z) \right),$$

$$R(z) = \frac{1}{|z - \bar{z}| \sum_{j=0}^{\infty} |\overline{P}_j(z)|^2}. \tag{3.79}$$

Если проблема продолжения определенная, то эта окружность вырождается в точку.

Точки w окружности K_z находятся во взаимно однозначном соответствии с ортогональными спектральными мерами $d\sigma(\lambda)$ (а значит, в силу (3.52) — и с самими разложениями единицы). Именно, каждой $d\sigma(\lambda)$ отвечает точка $w^{\sigma} = m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}$. Наоборот, каждой $w \in K_z$ отвечает $d\sigma(\lambda)$, преобразование Стилтьеса которой подсчитывается по формуле

$$m(\zeta) = \frac{E_0(\zeta, z) w + E_1(\zeta, z)}{D_0(\zeta, z) w + D_1(\zeta, z)}, \tag{3.80}$$

где $E_0(\zeta, z)$, $E_1(\zeta, z)$, $D_0(\zeta, z)$ и $D_1(\zeta, z)$ — целые функции по каждой переменной при фиксированной другой, выражающиеся рядами

$$E_0(\zeta, z) = 1 + (\zeta - z)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{Q}_j(\zeta)\overline{P}_j(z), \quad E_1(\zeta, z) = (\zeta - z)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{Q}_j(\zeta)\overline{Q}_j(z),$$

$$D_0(\zeta, z) = -(\zeta - z)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{P}_j(\zeta)\overline{P}_j(z), \quad D_1(\zeta, z) = 1 - (\zeta - z)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{P}_j(\zeta)\overline{Q}_j(z).$$

Коэффициенты в (3.79) *и* (3.80) *не зависят от выбора точек* $x_0 = 0, x_1, \ldots,$ *по которым строится последовательность* $P_0(z), P_1(z), \ldots,$ *и от вида процедуры ортогонализации.*

Отметим лишь некоторые особенности в доказательстве. В лемме 3.9 не устанавливалась равномерная сходимость рядов, поэтому при доказательстве аналитичности коэффициентов в формуле (3.80) поступаем так. Рассмотрим, например, $E_0(\zeta, z)$ как функцию от ζ. Пусть G_1 и G_2 — две ограниченные области комплексной плоскости, тогда, согласно лемме 3.9, существуют константы C_{G_1} и C_{G_2} такие, что $\sum_{j=0}^{\infty}|\overline{Q}_j(\zeta)|^2 \leqslant C_{G_1}$, $\sum_{j=0}^{\infty}|\overline{P}_j(z)|^2 \leqslant C_{G_2}$ $(\zeta \in G_1, z \in G_2)$. При помощи неравенства Коши—Буняковского отсюда следует: $\left|\sum_{j=0}^{N}\overline{Q}_j(\zeta)\overline{P}_j(z)\right| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\left|\overline{Q}_j(\zeta)\overline{P}_j(z)\right| \leqslant \sqrt{C_{G_1}C_{G_2}}$ $(\zeta \in G_1,\ z \in G_2)$. Зафиксируем z, последовательность $f_N(\zeta) = \sum_{j=0}^{N}\overline{Q}_j(\zeta)\overline{P}_j(z)$ голоморфных функций в G_1 равномерно ограничена. Поэтому ее предел — ряд $\sum_{j=0}^{\infty}\overline{Q}_j(\zeta)\overline{P}_j(z)$, а значит и $E_0(\zeta, z)$ — голоморфны по ζ.

Поясним указанную независимость коэффициентов в (3.79) и (3.80). Окружность K_z определяется независимо от $x_0, x_1, \ldots$ и вида процедуры ортогонализации как окружность, по которой меняется точка $m(z)$, где соответствующее $d\sigma(\lambda)$ — ортогональное. Поэтому ее радиус и центр, а значит и суммы $\sum_{j=0}^{\infty}|\overline{P}_j(z)|^2$, $\sum_{j=0}^{\infty}P_j(\overline{z})\overline{Q}_j(z)$ (см. (3.79)), от указанных факторов не зависят. Формула (3.80) осуществляет перевод $K_z \ni w$ в $K_\zeta \ni m(\zeta)$; независимость от $x_0, x_1, \ldots$ и вида процедуры ортогонализации коэффициентов этой формулы следует из независимости K_z и K_ζ. Теорему можно считать доказанной.

Независимость коэффициентов в (3.79) и (3.80) от выбора точек x_0, x_1, ... и процедуры ортогонализации частично также следует из соотношений (3.63) и (3.64), дающих аналитическое представление некоторых из этих коэффициентов, независимое от построения $P_j(z)$. Подобные аналитические представления можно получить и для остальных коэффициентов.

Из (3.80) следует, что функция $m(\zeta)$, отвечающая самосопряженным расширением оператора C в пространстве H_k (т. е. ортогональным $d\sigma(\lambda)$), мероморфна. Поэтому, как и в случае якобиевой матрицы, спектр такого расширения дискретен и не имеет предельных точек на конечном расстоянии.

Дальнейшие результаты п. 7, § 1, гл. VII, также переносятся на рассматриваемый случай (трудность составляет лишь доказательство тождества (1.54)). Отметим, что *аналог теоремы 1.13, гл. VII, справедлив буквально в том же виде, что и эта теорема.* Доказательство является повторением рассуждений на стр. 536—537. Факты, аналогичные сформулированным в п. 8, § 1, гл. VII, также могут быть получены для задачи продолжения. Заметим только, что если $m(z)$ построена по неортогональной $d\sigma(\lambda)$, то при фиксированном z точки $m(z)$ заполняют внутренность окружности K_z.

Из результатов п. 9, § 1, гл. VII, мы остановимся лишь на аналоге теоремы 1.17. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.16. *Рассмотрим задачу продолжения п. о. функции; пусть $d\sigma(\lambda)$ — некоторая спектральная мера, $\mu \in (-\infty, \infty)$. В любом случае (определенном или нет) скачок функции $\sigma(\lambda)$ в точке μ удовлетворяет оценке*

$$\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu) \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} |P_j(-\mu)|^2} = \frac{1}{\langle \mathrm{I}^{-1} e^{-i\mu x}, \mathrm{I}^{-1} e^{-i\mu x} \rangle} \tag{3.81}$$

(ряд в (3.81) может и расходиться, т. е. $\langle \mathrm{I}^{-1} e^{-i\mu x}, \mathrm{I}^{-1} e^{-i\mu x} \rangle$, возможно, равно ∞). Оценка (3.81) точная: в определенном случае (3.81) превращается в равенство, в неопределенном равенство наступает для ортогональной спектральной меры, преобразование Стилтьеса которой задается посредством формулы (1.59), гл. VII (записанной для задачи продолжения), где положено $x=\mu$ и $t=\infty$.

Доказательство протекает точно так же, как и доказательство теоремы 1.17, гл. VII. Лишь равенство $\sigma(\mu+0)-\sigma(\mu) = \langle \mathrm{I}^{-1} e^{-i\mu x}, \mathrm{I}^{-1} e^{-i\mu x} \rangle^{-1}$ в определенном случае естественней доказывать, используя представление не (3.69), а (3.68).

10. Экспоненциально выпуклые функции. Интегральное представление этого класса функций мы получим в качестве второго примера к общей теореме 3.7. Пусть $G=(l', l'')$ $(-\infty \leqslant l' < l'' \leqslant \infty)$, функцию $k(t) \in C((2l', 2l''))$ называют экспоненциально выпуклой, если ядро $K(x, y) = k(x+y)$ $(x, y \in G)$ п. о.

Теорема 3.17. *Функция $k(t) \in C((2l', 2l''))$ экспоненциально выпукла в том и только том случае, когда она представима в виде*

$$k(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t}\, d\sigma(\lambda) \quad (t \in (2l', 2l'')). \tag{3.82}$$

где $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная мера. Мера $d\sigma(\lambda)$ всегда определяется по k единственным образом.

Доказательство. Экспоненциальная выпуклость функции (3.82) проверяется непосредственно. Установим представление (3.82). Положим $L = \frac{d}{dx} = -L^+$. Если $k(t)$ достаточно гладкая, то

$$L_x[K(x, y)] = \frac{d}{dx} k(x+y) = \frac{d}{dy} k(x+y) = \bar{L}_y[K(x, y)] \quad (x, y \in G),$$

т. е. (3.4) выполнено. В случае негладкой k убеждаемся в справедливости этого соотношения подобно тому, как это сделано в (3.42). В рассматриваемом случае $r = 1$, $\chi_0(x; \lambda) = e^{\lambda x}$. Поэтому представление (3.20) приобретает вид

$$k(x+y) = K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x+y)} d\sigma_{00}(\lambda) \qquad (x, y \in G),$$

которое после замены $x + y = t$ дает (3.82).

Пусть $d\sigma(\lambda)$ такова, что интеграл (3.82) существует, тогда существует и интеграл $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(t+i\tau)} d\sigma(\lambda)$ $(s = t + i\tau)$ при $s \in (2l', 2l'') \times (-\infty, \infty)$, причем функция $F(s)$ является аналитической в этой полосе. Следовательно, она определяется однозначно по $F((t, 0)) = k(t)$ $(t \in (2l', 2l''))$; в частности, однозначно определяется и функция $f(\tau) = F((t_0, \tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} e^{\lambda t_0} d\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \tau < \infty,\ t_0 \in (2l', 2l'')$ фиксировано). Но $f(\tau)$ п. о., а последнее представление— представление (3.40) для нее. Поэтому $e^{\lambda t_0} d\sigma(\lambda)$, т. е. $d\sigma(\lambda)$ определяется по $f(\tau)$, а значит и по k, единственным образом. Теорема доказана.

Приведем теперь пропущенное доказательство последней части теоремы 3.9. Итак, нам нужно показать, что если $r = 1$ и L—обыкновенное дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами и $G = (-\infty, \infty)$, то $d\sigma_{00}(\lambda)$ в представлении (3.20) определяется по $K(x, y)$ однозначно. Пусть $Lu = \frac{1}{b}\frac{du}{dx} + a_0 u$, тогда $\chi_0(x; \lambda) = e^{b(\lambda - a_0)x}$ (считаем $a = 0$) и представление (3.20) перейдет в представление

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{b(\lambda - a_0)x}\, \overline{e^{b(\lambda - a_0)y}}\, d\sigma_{00}(\lambda) =$$

$$= e^{-ba_0 x - \overline{ba_0} y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(bx + \bar{b}y)}\, d\sigma_{00}(\lambda) \qquad (x, y \in (-\infty, \infty)). \quad (3.83)$$

Положим $b = \alpha + i\beta$. Можно считать, что $\alpha\beta \neq 0$, так как в противном случае вопрос о единственности представления (3.83) сводится к соответствующему вопросу в теореме 3.11 при $l = \infty$ или в теореме 3.17 при $l' = -\infty$, $l'' = +\infty$ и решается положительно. Если $\alpha\beta \neq 0$, то при любом комплексном s уравнение $bx + \bar{b}y = s$ относительно x, $y \in (-\infty, \infty)$ всегда разрешимо. Из (3.83) тогда следует, что интеграл $F(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda s} d\sigma_{00}(\lambda)$ существует для любого s и его значения однозначно определяются по $K(x, y)$. Но $F((0, \tau)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} d\sigma_{00}(\lambda)$ $(\tau \in (-\infty, \infty))$, поэтому в силу теоремы 3.11 $d\sigma_{00}(\lambda)$ определяется по $F((0, \tau))$, а значит и по K, однозначно. Утверждение доказано.

11. Выражение $\frac{d^2}{dx^2}$. Рассмотрим два примера, связанные с представлением (3.20) относительно $\frac{d^2}{dx^2}$.

1) Пусть $G = (-l, l)$, где $0 < l \leqslant \infty$. Будем рассматривать четную функцию $k(t) \in C((-2l, 2l))$, для которой ядро $K(x, y) = \frac{1}{2}[k(x + y) + k(x - y)]$ $(x, y \in G)$ п. о. В этом случае можно положить $L = \frac{d^2}{dx^2} = L^+$. Как и на стр. 672, легко проверить, что выполняется внутри $G \times G$ соотношение $L_x[K(x, y)] = \bar{L}_y[K(x, y)]$, следовательно, согласно (3.20), имеет место представление

$$\frac{1}{2}[k(x + y) + k(x - y)] = K(x, y) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}x \cdot \cos\sqrt{\lambda}y\, d\sigma_{00}(\lambda) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}x \frac{\sin\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\lambda}}\, d\sigma_{01}(\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \cos\sqrt{\lambda}y\, d\sigma_{10}(\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \sin\sqrt{\lambda}y}{\lambda}\, d\sigma_{11}(\lambda) \qquad (x, y \in (-l, l)) \qquad (3.84)$$

(поясним, что мы считали $a = 0$ и поэтому $\chi_0(x; \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x$,

$\chi_1(x;\ \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\Big)$. Легко видеть, что благодаря четности $k(t)$ (3.84) можно так переписать, чтобы в нем сохранился лишь первый интеграл. В самом деле, имеем $K(x,\ y) = K(-x,\ y) = K(x,\ -y) = K(-x,\ -y)$, поэтому

$$K(x,\ y) = \frac{1}{4}[K(x,\ y) + K(-x,\ y) + K(x,\ -y) + K(-x,\ -y)].$$

Подставляя в это равенство представление (3.84), найдем:

$$\frac{1}{2}[k(x+y) + k(x-y)] = K(x,\ y) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}x\cdot\cos\sqrt{\lambda}y\,d\sigma_{00}(\lambda) \quad (x,\ y \in (-l,\ l)). \tag{3.85}$$

Сравнивая (3.84) и (3.85), получаем, что сумма трех последних интегралов в (3.84) равна нулю при любых $x,\ y \in (-l,\ l)$.

Полагая в (3.85) $y=x$, найдем $\frac{1}{2}[k(2x)+k(0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2\sqrt{\lambda}x\,d\sigma_{00}(\lambda)$.

Но

$$k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_{00}(\lambda),$$

поэтому

$$k(2x) = \int_{-\infty}^{\infty} (2\cos^2\sqrt{\lambda}x - 1)\,d\sigma_{00}(\lambda) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}2x\,d\sigma_{00}(\lambda) \qquad (x \in (-l,\ l)). \tag{3.86}$$

Теорема 3.18. *Для того чтобы четная функция $k(t) \in C((-2l,\ 2l))$ $(0 < l \leqslant \infty)$ обладала тем свойством, что ядро $K(x,\ y) = \frac{1}{2}[k(x+y) + k(x-y)]$ $(x,\ y \in (-l,\ l))$ п. о., необходимо и достаточно, чтобы имело место представление*

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\,d\sigma(\lambda) \qquad (t \in (-2l,\ 2l)), \tag{3.87}$$

где $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера. Если $l=\infty$ и $k(t)$ такова, что при некотором $N>0$ выполняется оценка

$$|k(t)| \leqslant Ce^{Nt^2} \qquad (C>0;\ t\in(-\infty,\ \infty)), \tag{3.88}$$

то мера $d\sigma(\lambda)$ определяется по k однозначно.

Доказательство. Представление (3.87) вытекает из (3.86). Наоборот, если $k(t)$ имеет вид (3.87), то в силу равенства

$$\frac{1}{2}[\cos\sqrt{\lambda}(x+y)+\cos\sqrt{\lambda}(x-y)] = \cos\sqrt{\lambda}x\cdot\cos\sqrt{\lambda}y$$

непосредственно проверяется п. о. ядра $K(x,\ y)=\frac{1}{2}[k(x+y)+ k(x-y)]$. Далее из оценки (3.88) вытекает:

$$|K(x,\ y)| \leqslant \frac{C}{2}[e^{N(x+y)^2}+e^{N(x-y)^2}] \leqslant Ce^{2N(x^2+y^2)} \qquad (x,\ y\in(-\infty,\ \infty))$$

и поэтому последнее утверждение теоремы следует из теоремы 3.9.

Следствие. Рассмотрим функции $f(t)$ ($t\in(-\infty,\ \infty)$), представимые абсолютно сходящимися интегралами

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda}t\,d\omega(\lambda) \qquad (t\in(-\infty,\infty)), \tag{3.89}$$

где комплекснозначная мера $d\omega(\lambda)$ такова, что при некотором $N>0$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{\lambda}t}|\,d\omega(\lambda)| \underset{t\to+\infty}{=} O(e^{Nt^2}). \tag{3.90}$$

Тогда из того, что $f(t)=0$ $(t\in(-\infty,\infty))$, вытекает: $d\omega(\lambda)=0$.

Действительно, достаточно рассмотреть случай вещественной $d\omega(\lambda)$. Пусть $f(t)\equiv 0$, $\omega(\Delta)=\omega_+(\Delta)-\omega_-(\Delta)$ — разложение соответствующей меры $\omega(\Delta)$ на положительную и отрицательную части, $k_\pm(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda}t\,d\omega_\pm(\lambda)$. Имеем: $k_+(t)=k_-(t)$ $(t\in(-\infty,\ \infty))$, причем, как это следует из (3.90), для функций k_+ и k_- справедлива оценка (3.88). Согласно теореме 3.18, $\omega_+(\Delta)=\omega_-(\Delta)$, т. е. $\omega(\Delta)=0$, что и требовалось доказать.

Итак, из единственности в теореме 3.18 мы получили единственность в преобразовании (3.89). Ясно, что и наоборот — из последней единственности вытекает единственность в теореме 3.18.

2) Пусть $G=(-l,l)$, где $0<l\leqslant\infty$. Будем рассматривать чет-

ную функцию $k(t) \in C((-2l,\ 2l))$, $k(0)=0$, для которой ядро $K(x, y) = \frac{1}{2}[k(x+y) - k(x-y)]$ $(x, y \in G)$ п. о. Как и в примере 1) можно взять $L = \frac{d^2}{dx^2}$, тогда мы получим для нашего ядра K представление (3.84). Однако теперь $K(x, y) = -K(-x, y) = -K(x, -y) = K(-x, -y)$ и поэтому нужно воспользоваться равенством $K(x, y) = \frac{1}{4}[K(x, y) - K(-x, y) - K(x, -y) + K(-x, -y)]$, которое приведет не к представлению (3.85), а к представлению

$$\frac{1}{2}[k(x+y) - k(x-y)] = K(x, y) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \sin\sqrt{\lambda}\, y}{\lambda}\, d\sigma_{11}(\lambda) \quad (x, y \in (-l, l)). \tag{3.91}$$

Теорема 3.19. *Для того чтобы четная функция* $k(t) \in C((-2l, 2l))$ $(0 < l \leqslant \infty)$, $k(0) = 0$, *обладала тем свойством, что ядро* $K(x, y) = \frac{1}{2}[k(x+y) - k(x-y)]$ $(x, y \in (-l, l))$ *п. о., необходимо и достаточно, чтобы имело место представление*

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin^2\sqrt{\lambda}\,\frac{t}{2}}{\lambda}\, d\sigma(\lambda) \qquad (t \in (-2l, 2l)), \tag{3.92}$$

где $d\sigma(\lambda)$ *— неотрицательная мера. При* $l = \infty$ *имеет место условие единственности меры* $d\sigma(\lambda)$ *такое же, как и в теореме* 3.18.

Теорема вытекает из (3.91), если там положить $x = y = \frac{t}{2}$, и из замечаний, подобных сделанным при доказательстве теоремы 3.18.

Теоремы 3.18 и 3.19 содержат утверждение о возможности продолжения функции $k(t)$ $(t \in (-2l, 2l))$, для которой соответствующее ядро $K(x, y)$ п. о., на всю ось с сохранением этого свойства. Здесь можно было бы развить теорию продолжений, аналогичную изложенной в пп. 8 и 9 для обычных п. о. функций. На этих вопросах мы останавливаться не будем.

Методику образования по функции $k(t)$ ядер, $*$-коммутирующих с выражением $\frac{d^2}{dx^2}$, можно обобщить и на случай выражений

$$L = \frac{d^r}{dx^r}, \tag{3.93}$$

если только рассматривать аналитические функции $k(t)$. Именно, обозначим $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ корни r-й степени из 1. Пусть $k(s)$ — целая функция комплексного переменного s такая, что ядро $K(x, y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} c_{\alpha\beta} k(\varepsilon_\alpha x + \varepsilon_\beta y)$ п. о. ($c_{\alpha\beta}$ — некоторые коэффициенты; $x, y \in (-\infty, \infty)$). Тогда для выражения (3.93) имеем:

$$L_x[K(x, y)] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} c_{\alpha\beta} \varepsilon_\alpha^r k^{(r)}(\varepsilon_\alpha x + \varepsilon_\beta y) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} c_{\alpha\beta} k^{(r)}(\varepsilon_\alpha x + \varepsilon_\beta y) = \overline{L}_y[K(x, y)]$$

и поэтому ядро K можно раскладывать по собственным функциям выражения (3.93). Из этого разложения будут следовать некоторые представления для исходной функции $k(s)$. Мы ограничимся лишь этим общим замечанием.

12. Выражение Штурма — Лиувилля. Покажем, как посредством детализации общего представления (3.20) может быть обобщен на такие выражения пример 1) предыдущего пункта. Итак, мы рассматриваем

$$Lu = -\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)\,u \qquad (x \in G = (-l, l);\ 0 < l \leqslant \infty), \tag{3.94}$$

где $q(x) \in C((-l, l))$—некоторый комплекснозначный четный коэффициент. Если $K(x, y) \in C(G \times G)$ — п. о. ядро, удовлетворяющее внутри $G \times G$ соотношению

$$L_x[K(x, y)] = \overline{L}_y[K(x, y)], \tag{3.95}$$

то на основании теоремы 3.7 для него может быть написано представление (3.20) (с $r = 2$). Из четности $q(x)$ легко следует, что $\chi_0(x; \lambda)$ четная, а $\chi_1(x; \lambda)$ — нечетная; здесь χ_0 и χ_1 — решения уравнения $Lu = \lambda u$, удовлетворяющие условиям (3.18) при $a = 0$. Поэтому если дополнительно предположить, что $K(x, y)$ по каждому из переменных при фиксированном другом четно, то подобно примеру 1) сумма трех интегралов в (3.20) будет равна нулю и мы после введения обозначения $d\sigma(\lambda) = d\sigma_{00}(\lambda)$ получим

$$K(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_0(x; \lambda)\overline{\chi_0(y; \lambda)}d\sigma(\lambda) \qquad (x, y \in (-l, l)). \tag{3.96}$$

В рассматриваемом случае также можно должным образом сформулировать понятие п. о. функции одной переменной. С этой целью введем так называемые операторы обобщенного сдвига T_y, связанные с (3.94). Продолжим $q(x)$ четным образом в функцию из $C((-2l, 2l))$. Пусть $u(x) \in C^2((-2l, 2l))$ и четна, обозначим через $U(x, y)$ решение гиперболического уравнения (3.95), удовлетворяющее начальным условиям: $U(x, 0) = u(x)$, $\frac{\partial}{\partial y} U(x, 0) = 0$ $(x \in (-2l, 2l))$. Это решение, очевидно, определено в открытом квадрате Q с вершинами $(-2l, 0)$, $(0, 2l)$, $(2l, 0)$, $(0, -2l)$ и входит в $C^2(Q)$. Если воспользоваться методом Римана интегрирования уравнения (3.95), то для $U(x, y)$ получим формулу

$$U(x, y) = \frac{1}{2}[u(x + y) + u(x - y)] + \int\limits_{x-y}^{x+y} \omega(x, y, s)u(s)\,ds \qquad ((x, y) \in Q), \tag{3.97}$$

где $\omega(x, y, s)$ — некоторая функция, выражающаяся через функцию Римана. Из четности $q(x)$ и $u(x)$ и единственности решения задачи Коши для уравнения (3.95) очевидно вытекает четность $U(x, y)$ по каждому переменному при фиксированном другом.

Пусть теперь $u(x) \in C((-2l, 2l))$, определим в Q ядро $U(x, y)$ посредством формулы (3.97). Это ядро не будет достаточно гладким, однако в смысле обобщенных функций Л. Шварца оно удовлетворяет уравнению (3.95) внутри $G \times G$. Кроме того, для него сохранится четность по каждому из переменных. Введем оператор T_y, полагая

$$(T_y u)(x) = U(x, y) \qquad ((x, y) \in Q). \tag{3.98}$$

Таким образом, для каждого $y \in (-2l, 2l)$ $(T_y u)(x)$ определена для $x \in (-2l + |y|, 2l - |y|)$. В частности, $(T_y u)(x)$ определена для $(x, y) \in G \times G$.

Функцию $k(t) \in C((-2l, 2l))$ называют п. о. относительно семейства операторов (3.98), если ядро $K(x, y) = (T_y k)(x)$ $(x, y \in G)$ п. о. Из сказанного ясно, что для этого ядра справедливо представление (3.96). Полагая в нем $y = 0$, получим

$$k(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_0(x; \lambda)\,d\sigma(\lambda) \qquad (x \in (-l, l)). \tag{3.99}$$

Если $l = \infty$, то представление (3.99) имеет место на всей области определения функции k. В этом случае легко показать, что и всякая функция вида (3.99) с неотрицательной конечной мерой $d\sigma(\lambda)$ будет п. о. в нашем смысле (нужно воспользоваться тем, что $(T_y \chi_0(\cdot; \lambda))(x) = \chi_0(x; \lambda)\chi_0(y; \lambda)$).

На вопросах единственности представления (3.99) останавливаться не будем. В заключение заметим, что часто удобно определять операторы обобщенного сдвига на функциях, заданных на $[0, 2l)$. В этом случае мы продолжаем такие функции четным образом на $(-2l, 2l)$ и применяем изложенное определение.

§ 4. Случай $q > 1$ дифференциальных операторов

Ниже будут распространены результаты § 3 на случай q операторов. Мы будем рассматривать лишь тот случай, когда операторы действуют по различным переменным, и пользоваться общими фактами § 2.

1. Общие дифференциальные выражения. Пусть n-мерное пространство E_n разложено в ортогональную сумму $E_n = E_{n_1}^{(1)} \oplus \ldots \oplus E_{n_q}^{(q)}$ q пространств $E_{n_j}^{(j)}$ размерности n_j; $n = n_1 + \ldots + n_q$. Точки $x \in E_n$ будем представлять в виде: $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(q)}) = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}; \ldots; x_1^{(q)}, \ldots, x_{n_q}^{(q)})$, где $x^{(j)}$ пробегает $E_{n_j}^{(j)}$. В качестве G будем рассматривать области вида $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(q)}$, где $G^{(j)} \subseteq E_{n_j}^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, q)$.

Рассмотрим п. о. ядро $K(x, y) \in C(G \times G)$ и подберем для него функцию $p(x)$ $(x \in G)$, удовлетворяющую (3.3). Эту функцию будем строить в виде: $p(x) = p^{(1)}(x^{(1)}) \ldots p^{(q)}(x^{(q)})$, где $p^{(j)}(x^{(j)}) \in C^\infty(G^{(j)})$, $p^{(j)}(x^{(j)}) \geqslant 1$ $(x^{(j)} \in G^{(j)}$; $j = 1, \ldots, q)$ (возможность такого выбора p вытекает из леммы 4.1; лемма приведена в конце этого пункта). Рассмотрим цепочку

$$H_-^{(j)} = L_2\left(G^{(j)}, \frac{1}{p^{(j)}(x^{(j)})} dx^{(j)}\right) \supseteq H_0^{(j)} = L_2(G^{(j)}, dx^{(j)}) \supseteq$$

$$\supseteq H_+^{(j)} = L_2(G^{(j)}, p^{(j)}(x^{(j)})\, dx^{(j)})$$

$$(j = 1, \ldots, q),$$

которая будет играть роль цепочки (2.2). Тогда $H_0 = H_0^{(1)} \otimes \ldots \otimes H_0^{(q)} = L_2(G, dx)$, $H_+ = H_+^{(1)} \otimes \ldots \otimes H_+^{(q)} = L_2(G, p(x)\, dx)$, $H_- = H_-^{(1)} \otimes \ldots$

$\ldots \otimes H_-^{(q)} = L_2(G, p^{-1}(x)\,dx)$. Таким образом, $K(x, y) \subseteq H_-\otimes H_- = L_2(G\times G,\ p^{-1}(x)\,p^{-1}(y)\,dx\,dy)$. Роль инволюции $u\to \bar u$ в этих пространствах играет переход к комплексиой черте.

Пусть задано q дифференциальных выражений

$$L^{(1)}u = \sum_{|\alpha|\leqslant r_1} a_\alpha^{(1)}(x^{(1)}) D_{(1)}^\alpha u, \ldots, L^{(q)}u = \sum_{|\alpha|\leqslant r_q} a_\alpha^{(q)}(x^{(q)}) D_{(q)}^\alpha u, \qquad (4.1)$$

где $a_\alpha^{(j)}(x^{(j)}) \in C^{|\alpha|}(G^{(j)})$, $D_{(j)}$ обозначает дифференцирование по j-й группе координат; $\Lambda^{(j)}$ — минимальный оператор в $H_0 = L_2(G)$, отвечающий $L^{(j)}$. Положим $A_j = \Lambda^{(j)}$. Каждый из операторов A_j допускает продолжение оснащения с $Д = C_0^\infty(G)$, топологизированным должным образом. Сужение A_j^* на $Д$ совпадает с соответствием $u\to L^{(j)+}u$ $(u\in C_0^\infty(G))$. Условие $*$-коммутируемости K и A_j записывается посредством равенств вида (3.4), в которых L заменено на $L^{(j)}$ $(j=1,\ldots,q)$.

В качестве операторов B_j, определенных на стр. 631, можно принять операторы $u\to L^{(j)+}u$ $(u\in C_0^\infty(G^{(j)}))$, действующие в пространстве $H_+^{(j)} = L_2(G^{(j)}, p^{(j)}(x^{(j)})\,dx^{(j)})$. Роль операторов C_j будут играть операторы в H_+ вида $u\to L^{(j)+}u$, где $u\in \mathfrak{D}(C_j) = H_+^{(1)}\otimes\ldots \ldots\otimes H_+^{(j-1)}\otimes C_0^\infty(G^{(j)})\otimes H_+^{(j+1)}\otimes\ldots\otimes H_+^{(q)}$; напомним, что C_j мы часто будем рассматривать действующими в H_K. Нетрудно сообразить, что *замыкание в H_K оператора $u\to L^{(j)+}u$ $(u\in C_0^\infty(G))$ содержит оператор C_j, поэтому расширение их замыканий в H_K — эквивалентные задачи*. Этим обстоятельством мы в дальнейшем часто будем пользоваться, не подчеркивая его особо. Ясно, что условие $*$-коммутируемости K и A_j и эрмитовость C_j в H_K (т. е. (2.4)) — эквивалентные требования.

Пространство H_{++}, необходимое для построения разложений по собственным функциям, конструируется так же, как и на стр. 651: $H_{++} = W_2^{-(l,s)}(G)$, где $l>\frac{n}{2}$ и $s(x)$ удовлетворяет (3.5). Пространство H_K — по-прежнему пополнение (после отождествления, если понадобится) H_+ по скалярному произведению $\langle\cdot,\cdot\rangle$ вида (3.2). Наконец, семейство Ω_λ (где $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_q)\in E_q$) элементарных п. о. ядер из теоремы 1.2 теперь определяется как п. о. ядра $\Omega_\lambda\in W_2^{-(l,s)}(G)\otimes W_2^{-(l,s)}(G)$, $\|\Omega_\lambda\|_{W_2^{-(l,s)}(G)\otimes W_2^{-(l,s)}(G)}\leqslant C$, удовлетворяющие соотношениям (3.6) для каждого $L = L^{(j)}$ с заменой λ на λ_j ($j = 1, \ldots, q$). Аналогично теореме 3.1 теорема 1.2 для рассматриваемого частного случая операторов выглядит так:

Теорема 4.1. *Пусть $K(x, y) \in C(G \times G)$ — п. о. ядро, функции $p(x)$, $s(x)$ подобраны выше, коэффициенты выражений $L^{(j)}$ (см. (4.1)) $a_\alpha^{(j)}(x^{(j)}) \in C^{|\alpha|+l}(G^{(j)})$, где $l > \frac{n}{2}$ ($j = 1, \ldots, q$). Для того чтобы имело место представление*

$$K = \int_{E_q} \Omega_\lambda d\varrho(\lambda), \tag{4.2}$$

где $\Omega_\lambda \in W_2^{-(l,s)}(G) \otimes W_2^{-(l,s)}(G)$ — некоторое семейство элементарных п. о. ядер, $d\varrho(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера, интеграл (4.2) сходится по норме пространства $W_2^{-(l,s)}(G) \otimes W_2^{-(l,s)}(G)$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух требований: а) выполнены соотношения (3.4), в которых L заменено на $L^{(j)}$ ($j=1, \ldots, q$); б) q эрмитовых операторов в H_K $u \to L^{(j)+}u$ ($u \in C_0^\infty(G)$) допускают расширение в H_K или с выходом в более широкое гильбертово пространство до системы коммутирующих самосопряженных операторов. В представлении (4.2) выражение $\Omega_\lambda d\varrho(\lambda)$ определяется единственным образом в том и только том случае, когда у операторов $u \to L^{(j)+}u$ ($u \in C_0^\infty(G)$) существует лишь одно q-мерное обобщенное разложение единицы.

В заключение докажем лемму, благодаря которой возможно было подобрать функцию $p(x)$ в виде $p^{(1)}(x^{(1)}) \ldots p^{(q)}(x^{(q)})$.

Лемма 4.1. *Пусть неотрицательная функция $M(x) \in C(G)$, существуют функции $p^{(j)}(x^{(j)}) \in C^\infty(G^{(j)})$, $p^{(j)}(x^{(j)}) \geqslant 1$ ($x^{(j)} \in G^{(j)}$; $j = 1, \ldots, q$) такие, что*

$$\int_G \frac{M(x)}{p^{(1)}(x^{(1)}) \ldots p^{(q)}(x^{(q)})} dx < \infty. \tag{4.3}$$

Доказательство. Для упрощения выкладок рассмотрим случай $q = 2$. Сперва докажем, что если $\| m_{jk} \|_1^\infty$ — произвольная матрица, состоящая из неотрицательных элементов, то всегда можно указать две последовательности $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$ и $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$ такие, что

$$\sum_{j,k=1}^\infty m_{jk} \varrho_j \sigma_k < \infty; \quad \varrho_j, \ \sigma_j > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{4.4}$$

В самом деле, рассмотрим последовательности $(m_{j1}, m_{j2}, \ldots)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и построим мажорантную последовательность $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$, полагая $\mu_j = \max\{m_{1j}, \ldots, m_{jj}\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, для каждой последовательности $(m_{j1}, m_{j2}, \ldots)$ начиная с достаточно больших индексов k (именно, при $k \geqslant j$) будем иметь $m_{jk} \leqslant \mu_k$. Выберем последовательность $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$, $\sigma_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k\sigma_k < \infty$. Тогда для каждого $j = 1, 2, \ldots$ $s_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m_{jk}\sigma_k \leqslant$ $\leqslant C_j \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k\sigma_k < \infty$. Выберем теперь $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$, $\varrho_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы $\sum\limits_{j=1}^{\infty} s_j\varrho_j < \infty$. Таким образом соотношение (4.4) удовлетворено.

Перейдем к доказательству леммы. Пусть $G = G^{(1)} \times G^{(2)}$. Представим $G^{(1)}$ в виде объединения замыканий некоторых областей, имеющих в качестве общих точек лишь точки своих границ и расположенных строго внутри $G^{(1)}: G^{(1)} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} G_j^{(1)}$. Пусть $G^{(2)} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k^{(2)}$ — аналогичное представление для области $G^{(2)}$. Тогда

$$\int\limits_G \frac{M(x)}{p^{(1)}(x^{(1)})\,p^{(2)}(x^{(2)})}\,dx = \sum_{j,k=1}^{\infty} \int\limits_{G_j^{(1)}} \int\limits_{G_k^{(2)}} \frac{M(x^{(1)}, x^{(2)})}{p^{(1)}(x^{(1)})\,p^{(2)}(x^{(2)})}\,dx^{(1)}dx^{(2)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j,k=1}^{\infty} m_{jk} \int\limits_{G_j^{(1)}} \frac{dx^{(1)}}{p^{(1)}(x^{(1)})} \cdot \int\limits_{G_k^{(2)}} \frac{dx^{(2)}}{p^{(2)}(x^{(2)})}; \tag{4.5}$$

$$m_{jk} = \max_{x^{(1)} \in G_j^{(1)},\, x^{(2)} \in G_k^{(2)}} M(x^{(1)}, x^{(2)}) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots).$$

Согласно доказанному выберем последовательности ϱ_j и σ_k такими, чтобы выполнялось (4.4) с матрицей $\|m_{jk}\|_1^{\infty}$ из (4.5). Подберем теперь функцию $p^{(1)}(x^{(1)}) \in C^{\infty}(G^{(1)})$ так, чтобы $p^{(1)}(x^{(1)}) \geqslant 1$ $(x^{(1)} \in G^{(1)})$ и $\int\limits_{G_j^{(1)}} \frac{dx^{(1)}}{p^{(1)}(x^{(1)})} \leqslant \varrho_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и аналогично по σ_k подберем $p^{(2)}(x^{(2)})$.

Тогда ряд в правой части (4.5) сверху мажорируется сходящимся рядом $\sum_{j,k=1}^{\infty} m_{jk}\varrho_j\sigma_k$, т. е. интеграл в левой части (4.5) сходится. Лемма доказана.

Применение этой леммы к нашему случаю очевидно: нужно положить $M(x) = K(x, x)$.

2. **Обыкновенные дифференциальные выражения.** Если в схеме п. 1 выражение $L^{(j)}$ эллиптично или является обыкновенным выражением, то ядро Ω_λ будет гладким по j-м «координатам» x и y. Мы остановимся лишь на наиболее простом случае, когда $q = n$, $n_1 = \ldots = n_q = 1$, все выражения $L^{(1)}, \ldots, L^{(n)}$ — обыкновенные. Случай выражений в частных производных предоставляем рассмотреть читателю. При помощи теоремы 5.1, гл. VI, и рассуждений типа приведенных на стр. 657, 652—654 нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(n)}$, где $G^{(j)}$ — одномерные конечные или бесконечные интервалы. Рассматривается n обыкновенных выражений*

$$L^{(1)}u = \sum_{0 \leqslant \alpha \leqslant r_1} a_\alpha^{(1)}(x_1) D_1^\alpha u, \ldots, L^{(n)}u = \sum_{0 \leqslant \alpha \leqslant r_n} a_\alpha^{(n)}(x_n) D_n^\alpha u, \qquad (4.6)$$

где $a_\alpha^{(j)}(x_j) \in C^{\alpha + l_j}(G^{(j)})$, $l_j \geqslant 1$ $(j = 1, \ldots, n)$. Семейство п. о. ядер $\Omega_\lambda(x, y)$ $(x, y \in G;\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$ будем называть семейством элементарных п. о. ядер, если существуют и непрерывны относительно $(x, y) \in G \times G$ производные $(D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n} D_{y_1}^{\beta_1} \ldots D_{y_n}^{\beta_n} \Omega_\lambda)$ (x, y) при $\alpha_j, \beta_j \leqslant r_j + l_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ и справедливы равенства:

$$L_{x_j}^{(j)}\Omega_\lambda = \lambda_j \Omega_\lambda, \quad \overline{L_{y_j}^{(j)}}\Omega_\lambda = \lambda_j \Omega_\lambda \quad (x, y \in G;\ j = 1, \ldots, n). \qquad (4.7)$$

Для того чтобы п. о. ядро $K(x, y) \in C(G \times G)$ было представимо в виде абсолютно сходящегося интеграла

$$K(x, y) = \int_{E_n} \Omega_\lambda(x, y)\, d\varrho(\lambda) \qquad (x, y \in G), \qquad (4.8)$$

где $\varrho(\Delta)$ — неотрицательная конечная мера, а $\Omega_\lambda(x, y)$ — некоторое семейство элементарных п. о. ядер, необходимо и достаточно выполнение требований, сформулированных в конце теоремы 4.1 (при $q = n$). Сформулированный в этой же теореме критерий единственности дает единственность представления (4.8).

Для обобщенной резольвенты $R_z^{(j_0)}$, действующего в H_K эрмитова оператора $u \to L^{(j_0)+}u$ $(u \in C_0^\infty(G))$, справедливы результаты типа теоремы 3.4.

Для их вывода сейчас удобно поступить так. Рассмотрим систему коммутирующих самосопряженных расширений операторов $u \to L^{(j)+} u$ ($u \in C_0^\infty(G)$), дающую представление (4.8), и будем изучать резольвенту $R_z^{(j_0)}$ именно такого расширения. Легко понять, что обычное ядро

$$R^{(j_0)}(x, y; z) = \int_{E_n} \frac{\Omega_\lambda(x, y)}{\lambda_{j_0} - z} d\varrho(\lambda) \qquad (x, y \in G) \tag{4.9}$$

(интеграл сходится абсолютно в силу сходимости интеграла (4.8), см. также оценку (3.8), аналог которой сейчас справедлив) является ядром резольвенты $R_z^{(j_0)}$, т. е. имеет место равенство (3.16) с заменой R_z и $R_z(x, y; z)$ соответственно на $R_z^{(j_0)}$ и $R^{(j_0)}(x, y; z)$. Это равенство устанавливается точно так же, как и второе из равенств (3.17).

Из представления (4.9) и непрерывности ядра $\Omega_\lambda(x, y)$ относительно $(x, y) \in G \times G$ следует, что $R^{(j_0)}(\cdot, \ ; z) \in C(G \times G)$. Кроме того, подобно (3.15) в обобщенном смысле внутри $G \times G$

$$L_{x_{j_0}}^{(j_0)}[R^{(j_0)}(x, y; z)] - zR^{(j_0)}(x, y; z) = K(x, y),$$

$$L_{y_{j_0}}^{(j_0)+}[R^{(j_0)}(x, y; z)] - zR^{(j_0)}(x, y; z) = K(x, y).$$

Эти равенства дают возможность применить теорему 5.1, гл. VI, и замечание к ней и установить достаточную гладкость ядра $R^{(j_0)}(x, y; z)$.

Перейдем теперь к выводу представлений типа (3.20). Зафиксируем в каждом интервале $G^{(j)}$ некоторую точку a_j и обозначим $\chi_0^{(j)}(x_j; z), \ldots, \chi_{r_j-1}^{(j)}(x_j; z)$ фундаментальную систему решений уравнения $L^{(j)}u - zu = 0$ $(x_j \in G^{(j)})$, удовлетворяющих условиям:

$$\frac{d^k}{dx_j^k} \chi_m(x_j; z) \Big|_{x_j = a_j} = \delta_{mk} \qquad (m, k = 0, \ldots, r_j - 1; \ j = 1, \ldots, n). \tag{4.10}$$

Положим

$$X_\alpha(x; \lambda) = \chi_{\alpha_1}^{(1)}(x_1; \lambda_1) \ldots \chi_{\alpha_n}^{(n)}(x_n; \lambda_n) \tag{4.11}$$

$$(x = (x_1, \ldots, x_n) \in G, \ \lambda \in (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E_n),$$

где векторный индекс $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ меняется по целочисленному параллелепипеду A точек с координатами $\alpha_1 = 0, \ldots, r_1 - 1; \ldots; \alpha_n = 0, \ldots, r_n - 1$.

Учитывая, что ядра $\Omega_\lambda(x, y)$ удовлетворяют уравнениям (4.7), и выражая их через введенные фундаментальные системы решений, получим аналогично стр. 658:

$$\Omega_\lambda(x, y) = \sum_{\alpha, \beta \in A} \left(\frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \ldots + \beta_n} \Omega_\lambda}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial y_n^{\beta_n}} \right)(a, a) X_\alpha(x; \lambda) \overline{X_\beta(y; \lambda)}$$

$$(a = (a_1, \ldots, a_n)). \tag{4.12}$$

Подставляя (4.12) в (4.8) и вводя обозначения

$$d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)=\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta_1+\ldots+\beta_n}\Omega_\lambda}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial y_1^{\beta_1}\ldots\partial y_n^{\beta_n}}\right)(a,a)\,d\varrho(\lambda), \qquad (4.13)$$

придем к представлению ядра $K(x, y)$, обобщающему (3.20):

$$K(x,y)=\int\limits_{E_n}\sum_{\alpha,\beta\in A}X_\alpha(x;\lambda)\overline{X_\beta(y;\lambda)}\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \qquad (x,y\in G). \quad (4.14)$$

Матрица $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{\alpha,\beta\in A}$ с векторным обозначением для индексов строк и столбцов п. о. в обычном смысле, т.е. $\sum\limits_{\alpha,\beta\in A}\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)\,\xi_\alpha\bar{\xi}_\beta\geqslant 0$ для любых ξ_α $(\alpha\in A)$. В этом убеждаемся подобно стр. 501. Итак, *если ввести фундаментальные системы решений* (4.10) *и построить произведения* (4.11), *то представление* (4.8) *можно переписать в форме* (4.14) *с некоторой неотрицательной матричной мерой* $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{\alpha,\beta\in A}$. *Ясно, что и всякое подобное представление* (4.14) *может быть переписано в форме* (4.8). Интеграл (4.14) сходится в смысле пространства $L_2(C_l; (-\infty,\infty), \|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{\alpha,\beta\in A})$, где C_l — комплексное пространство размерности l, равной порядку матрицы $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{\alpha,\beta\in A}$.

Пока все представления этого параграфа — формулы (4.2), (4.8) и (4.14) — носили условный характер, так как неясно было, в каких случаях существуют коммутирующие самосопряженные расширения. Сейчас мы при помощи теоремы 2.3 и техники, развитой в п. 4, § 3, найдем некоторые достаточные условия, при которых эти представления имеют место для случая обыкновенных дифференциальных выражений с постоянными коэффициентами.

Теорема 4.3. *Пусть п. о. ядро $K(x, y)\in C(E_n\times E_n)$ удовлетворяет в смысле обобщенных функций соотношениям*

$$L^{(j)}_{x_j}K=\overline{L^{(j)}_{y_j}}K \qquad (j=1,\ldots,n); \qquad (4.15)$$

здесь $L^{(j)}$ — обыкновенное дифференциальное выражение по переменной x_j порядка r_j с постоянными коэффициентами. Предположим, что выполняется оценка

$$|K(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n)|\leqslant Ce^{N\left(|x_1|^{r'_1}+\ldots+|x_n|^{r'_n}+|y_1|^{r'_1}+\ldots+|y_n|^{r'_n}\right)} \quad (4.16)$$

$$(C>0; \qquad x,y\in E_n),$$

где $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'_j}=1$ при $r_j>1$, в случае $r_j=1$ r'_j — произвольное положительное число. Тогда для ядра K имеет место представление

4.14) *и мера* $\| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\beta\in A}$ *в нем определяется однозначно. При этом дополнительно предполагается, что каждый из операторов* $u \to L^{(j)+}u$ $(u \in C_0^\infty(G);\ j = 1, \ldots, n)$ *в* H_K *имеет равные дефектные числа (например,* $K(x, y)$ *и коэффициенты выражений* $L^{(1)}, \ldots, L^{(n)}$ *вещественны).*

Доказательство. Благодаря оценке (4.16) можно положить подобно (3.32) $p(x) = e^{\sigma N(|x_1|^{r'_1}+\ldots+|x_n|^{r'_n})}$, $\sigma > 2$ $(x \in E_n)$, так что $p^{(j)}(x_j) = e^{\sigma N |x_j|^{r'_j}}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Операторы B_j имеют вид $u \to L^{(j)+}u$ $(u \in C_0^\infty((-\infty, \infty)))$, они действуют в пространстве $H_+^{(j)} = L_2((-\infty,\infty), p^{(j)}(x_j)\,dx_j)$. Мы покажем, что замыкания в H_K операторов $u \to L^{(j)+}u$ $(u \in C_0^\infty(G))$ (или, что то же, замыкания операторов C_j, построенных согласно (2.3)), самосопряжены и коммутируют.

Аналогично случаю $n = 1$ заметим, что область определения оператора B_j (а значит, и C_j) можно несколько расширить (см. лемму 3.3) Именно, обозначим Θ_j совокупность функций $u \in C^\infty((-\infty,\infty))$, удовлетворяющих оценкам

$$|(D^q u)(x_j)| \leqslant C_{u,q} e^{-\varrho N |x_j|^{r'_j}} \qquad (x_j \in (-\infty, \infty);\ q = 0, 1, \ldots),$$

где $\varrho > \frac{\sigma}{2}$. Вместо оператора B_j рассмотрим более широкий оператор в $H_+^{(j)}$, действующий по закону: $u \to L^{(j)+}u$, $u \in \Theta_j \supset C_0^\infty((-\infty,\infty))$. Соответствующим образом расширится и оператор C_j. Подобно лемме 3.3 элементарно доказывается, что это расширение оператора C_j входит в замыкание в H_K прежнего оператора C_j. Поэтому теперь можно считать, что $B_j u = L^{(j)+}u$, $u \in \Theta_j$.

Согласно теореме 2.3 достаточно показать, что для $2n$ уравнений $\frac{du}{dt} \pm i(B_j)^* u = 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$, j-е из которых рассматривается в пространстве $H_+^{(j)}$, справедлива единственность слабых решений задачи Коши. Эта же единственность, как было показано ранее, вытекает из теоремы 2.4 и лемм 3.4 и 3.5. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 4.3 остается справедливой, если неравенство (4.16) заменить следующим. Пусть выражения $L^{(1)}, \ldots, L^{(m)}$ порядка > 1, а остальные порядка 1 $(m \leqslant n)$. Тогда достаточно требовать:

$$|K(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)| \leqslant$$
$$\leqslant C(x_{m+1}, \ldots, x_n; y_{m+1}, \ldots, y_n)\, e^{N(|x_1|^{r'_1}+\ldots+|x_m|^{r'_m}+|y_1|^{r'_1}+\ldots+|y_m|^{r'_m})} \tag{4.17}$$
$$(x, y \in E_n),$$

где $C(\cdot\,;\,\cdot)$ — произвольная непрерывная функция. Предположение о равенстве дефектных чисел нужно усилить, заменив его, например, требованием вещественности коэффициентов $L^{(1)}, \ldots, L^{(n)}$ и симметрии $K(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ относительно каждой пары переменных x_j, y_j.

В самом деле, можно взять $p(x) = e^{\sigma N(|x_1|^{r_1'} + \ldots + |x_m|^{r_m'})} p^{(m+1)}(x_{m+1}) \ldots$ $\ldots p^{(n)}(x_n)$ $(x \in E_n)$, где $\sigma > 2$, а $p^{(j)}$ при $j \geqslant m+1$ подобраны на основании леммы 4.1 по $M(x) = C(x_{m+1}, \ldots, x_n; x_{m+1}, \ldots, x_n)$. После выбора $p(x)$ определится вид пространств $H_+^{(j)}$. Теперь заметим, что скалярное произведение (2.6) $\langle u_1, v_1 \rangle_{w_2, \ldots, w_n} = \langle u_1 \otimes w_2 \otimes \ldots \otimes w_n,$ $v_1 \otimes w_2 \otimes \ldots \otimes w_n \rangle$, где $w_j \in H_+^{(j)}$ $(j > 1)$ фиксированы, а $u_1, v_1 \in H_+^{(1)}$ является скалярным произведением, порожденным благодаря свойствам симметрии $K(x, y)$ вещественным ядром

$$K_{w_2, \ldots, w_n}(x_1, y_1) = \iint\limits_{E_{n-1} \times E_{n-1}} K(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) w_2(y_2) \overline{w_2(x_2)} \ldots$$
$$\ldots w_n(y_n) \overline{w_n(x_n)}\, dx_2 \ldots dx_n dy_2 \ldots dy_n. \tag{4.18}$$

Для этого ядра в силу (4.17) справедлива оценка

$$|K_{w_2, \ldots, w_n}(x_1, y_1)| \leqslant C_1 e^{N(|x_1|^{r_1'} + |y_1|^{r_1'})} \qquad (C_1 > 0;\ x_1, y_1 \in (-\infty, \infty)).$$

Поэтому, согласно теореме 3.9, замыкание оператора $u \to L^{(1)+}u$ $(u \in C_0^\infty((-\infty, \infty)))$ максимально в пространстве $H^{(1)}_{K:w_2, \ldots, w_n}$, а значит в силу равенства его дефектных чисел и самосопряжено (их равенство следует из вещественности ядра (4.18) и коэффициентов $L^{(1)+}$). Аналогичная ситуация имеет место при замене 1 индексом $2, \ldots, n$ (для индексов начиная с $m+1$-го нужно воспользоваться последним утверждением теоремы 3.9). Итак, предположения теоремы 2.2 выполнены. Это доказывает утверждение.

3. Примеры. Результаты п. 2 и соответствующие факты § 3 дают возможность построить ряд примеров представлений.

1) *Обычные п. о. функции многих переменных.* Функция $k(t) \in C(E_n)$ называется п. о, если ядро $K(x, y) = k(y - x)$ $(x, y \in E_n)$ п.о. Как и в одномерном случае, она всегда ограничена.

Теорема 4.4. *Функция $k(t) \in C(E_n)$ п. о. тогда и только тогда, когда она допускает представление*

$$k(t) = \int\limits_{E_n} e^{i\lambda t} d\sigma(\lambda) \qquad (\lambda t = \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n;\quad t \in E_n), \tag{4.19}$$

где $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера. Эта мера определяется по k однозначно.

Эта теорема вытекает из теоремы 4.3: нужно положить $L^{(1)} = i\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, L^{(n)} = i\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, заметить равенство дефектных чисел соответствующих операторов (см. стр. 676), написать для ядра $K(x, y)$ представление (4.14) (при построении X_α считаем $a = 0$) и сделать замену $y - x = t$.

При непосредственном выводе теоремы 4.4 можно воспользоваться теоремой 3.11 и теоремой 2.1 или 2.2 (ср. доказательство теоремы 4.5).

Выше было существенно, что п. о. функция $k(t)$ была задана во всем E_n. Ситуация, когда $k(t)$ определена на части E_n, не является тривиальной и будет рассмотрена в п. 4.

2) *Экспоненциально выпуклые функции многих переменных.* Пусть $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(n)} = (l_1', l_1'') \times \ldots \times (l_n', l_n'')$, где $-\infty \leqslant l_j' < l_j'' \leqslant \infty$ $(j = 1, \ldots, n)$. Функцию $k(t) \in C(2G)$ $(2G = (2l_1', 2l_1'') \times \ldots \times (2l_n', 2l_n''))$ называют экспоненциально выпуклой, если ядро $K(x, y) = k(x + y)$ $(x, y \in G)$ п. о. Ясно, что $k(t)$ обязательно вещественна.

Теорема 4.5. *Функция $k(t) \in C(2G)$ является экспоненциально выпуклой тогда и только тогда, когда она допускает представление*

$$k(t) = \int_{E_n} e^{\lambda t} d\sigma(\lambda) \qquad (t \in 2G), \tag{4.20}$$

где $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная мера. Эта мера определяется по k однозначно.

В случае $G = E_n$ эта теорема просто следует из замечания к теореме 4.3; в общем случае ее удается доказать лишь благодаря единственности меры в представлении (3.82) независимо от вида (l', l'').

Доказательство. Построим, как указано в п. 1, функцию $p(x) \in G$ и пространства H_+ и $H_+^{(1)}, \ldots, H_+^{(n)}$. Положим $L^{(1)} = \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, L^{(n)} = \dfrac{\partial}{\partial x_n}$, тогда ядро $K(x, y) = k(x + y)$ будет, очевидно, удовлетворять соотношениям (4.15). Существование коммутирующих самосопряженных расширений операторов $u \to L^{(j)+}u$ $(u \in C_0^\infty(G))$ или соответствующих операторов C_j доказывается при помощи теоремы 2.2. В самом деле, скалярное произведение (2.6) теперь порождается ядром типа (4.18), причем $K_{w_2, \ldots, w_n}(x_1, y_1) = k_{w_2, \ldots, w_n}(x_1 + y_1)$, где функция $k_{w_2, \ldots, w_n}$ получается из функции k интегрированиями. К экспоненциально выпуклой функции $k_{w_2, \ldots, w_n}(t_1)$ $(t_1 \in (2l_1', 2l_1''))$ применима теорема 3.17, из единственности в которой следует самосопряженность замыкания оператора $u \to L^{(1)+}u$ $(u \in C_0^\infty((l_1', l_1'')))$, действующего в пространстве $H_{K, w_2, \ldots, w_n}^{(1)}$ (заметим, что этот оператор имеет равные дефектные числа благодаря вещественности $k_{w_2,\ldots,w_n}(x_1+y_1)$ и $L^{(1)}$). Аналогично рассматриваем случаи, когда индекс 1 заменен на $2,\ldots,n$. Итак, условия теоремы 2.2 выполнены и требуемые расширения существуют. Это позволяет написать для ядра $K(x, y)$ представление (4.14), откуда и следует формула (4.20). Теорема доказана.

В следующих примерах для простоты считаем $n=2$.

3) Рассмотрим функцию $k(t)=k(t_1,t_2)\in C(E_2)$, четную по каждой переменной и такую, что ядро $K(x,y)=\frac{1}{2}[k(x+y)+k(x-y)]$ п.о. Кроме того, предполагается, что при некотором $N>0$

$$|k(t)|\leqslant Ce^{N(t_1^2+t_2^2)} \qquad (C>0;\ t_1,t_2\in(-\infty,\infty)). \tag{4.21}$$

Тогда такая функция представима в виде

$$k(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\cos\sqrt{\lambda_1}t_1\cdot\cos\sqrt{\lambda_2}t_2\,d\sigma(\lambda_1,\lambda_2) \qquad (t\in E_2), \tag{4.22}$$

где $d\sigma(\lambda_1,\lambda_2)$ — конечная неотрицательная мера, которая определяется однозначно. Наоборот, всякая функция (4.22) обладает тем свойством, что ядро $K(x,y)=\frac{1}{2}[k(x+y)+k(x-y)]$ $(x,y\in E_2)$ п. о.

Это утверждение вытекает из теоремы 4.3, примененной к ядру $K(x,y)$ и выражениям $L^{(1)}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$, $L^{(2)}=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Необходимые при этом дополнительные рассуждения — такого же типа, как и при доказательстве теоремы 3.18. Нужно заметить, что ограничения на $k(t)$ влекут ее вещественность.

4) Пример 3) сохраняется, если заменить в нем ядро $K(x,y)$ ядром $K(x,y)=\frac{1}{2}[k(x+y)-k(x-y)]$ и дополнительно потребовать, чтобы $k(0,t_2)=k(t_1,0)=0$ $(t_1,t_2\in(-\infty,\infty))$. Представление (4.22) перейдет в

$$k(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\frac{2\sin^2\sqrt{\lambda_1}\frac{t_1}{2}}{\lambda_1}\cdot\frac{2\sin^2\sqrt{\lambda_2}\frac{t_2}{2}}{\lambda_2}\,d\sigma(\lambda_1,\lambda_2) \qquad (t\in E_2).$$

5) Пример 3) сохраняется, если заменить в нем ядро $K(x,y)$ ядром $K(x,y)=\frac{1}{2}[k(x_1+y_1,y_2-x_2)+k(x_1-y_1,y_2-x_2)]$, причем от

функции $k(t)=k(t_1, t_2)$ требуется лишь четность по первому переменному, а оценка (4.21) заменяется следующей:

$$|k(t)| \leqslant C(t_2)e^{Nt_1^2} \qquad (C(t_2)>0;\ t_1 \in (-\infty, \infty)).$$

Несколько модифицируя рассуждения, приведенные на стр. 710, получаем представление:

$$k(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int \cos\sqrt{\lambda_1}t_1 \cdot e^{i\lambda_2 t_2}d\sigma(\lambda_1, \lambda_2) \qquad (t \in E_2).$$

Ясно, что можно написать еще ряд примеров, комбинируя подобно 5) одномерные случаи. При этом если мы будем пользоваться выражениями $i\frac{\partial}{\partial x_2}$ или $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, то переменная t_2 должна меняться по всей оси $(-\infty, \infty)$, а если выражением $\frac{\partial}{\partial x_2}$ — то t_2 может меняться и в конечном интервале (ср. с доказательством теоремы 4.5). Общим свойством всех этих примеров, как и примеров 1) — 5), будет единственность меры $d\sigma(\lambda)$.

4. **Продолжение п. о. функций двух переменных.** Пусть $G = G^{(1)}\times G^{(2)} = (-l_1, l_1)\times(-l_2, l_2)$, где $0<l_1,\ l_2<\infty$; $2G = (-2l_1, 2l_1)\times(-2l_2, 2l_2)$. Функция $k(t) \in C(2G)$ называется п. о., если п. о. ядро $K(x, y)=k(y-x)$ $(x, y \in G)$. В отличие от случая одной переменной получение интегрального представления (4.19) для такой функции, т. е. продолжение ее в п. о. функцию на всем E_2, не всегда возможно (имеется контрпример). Сложность ситуации связана с тем обстоятельством, что продолжение п. о. функции одной переменной с интервала $(-l, l)$ на всю ось, вообще говоря, неединственно. Ниже мы получим все же некоторые результаты, касающиеся возможности продолжения. Отметим, что рассмотрение случая двух, а не n переменных проводится лишь для упрощения изложения.

Согласно (3.39), $K(x, y)$ ограничено при $x, y \in G$, поэтому в качестве функции $p(x)$ из (3.3) можно взять $p(x)=1$. Таким образом, $H_+ = H_0 = L_2(G)$, $H_+^{(j)} = L_2((-l_j, l_j))$; очевидно, $L^{(j)} = i\frac{\partial}{\partial x_j} = L^{(j)+}$ удовлетворяют соотношениям (4.15) внутри G $(j=1, 2)$.

Нам требуется выяснить существование коммутирующих самосопряженных расширений действующих в H_K эрмитовых операторов $u \to i\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(u \in C_0^\infty(G))$ $(j=1, 2)$, или, что то же самое, эрмитовых операторов $C_1 u = i\frac{\partial u}{\partial x_1}(u \in C_0^\infty((-l_1, l_1))\otimes L_2((-l_2, l_2))$ и $C_2 u = i\frac{\partial u}{\partial x_2}$

$(u \in L_2((-l_1, l_1)) \otimes C_0^\infty((-l_2, l_2))$. При помощи теоремы 2.6 легко доказывается следующая теорема.

Теорема 4.6. *Пусть п. о. функция $k(t)=k(t_1, t_2) \in C(2G)$ обладает тем свойством, что п. о. функция одной переменной $k(t_1, 0)$ продолжается однозначно с интервала $(-2l_1, 2l_1)$ на всю ось. Тогда и функция $k(t)$ продолжается (вообще говоря, неоднозначно) с прямоугольника $2G$ в п. о. функцию на всей плоскости E_2. Таким образом, для $t \in 2G$ функция $k(t)$ допускает представление* (4.19) *(с $n=2$), мера в котором определяется в общем неоднозначно.*

Доказательство. Роль преобразования $\circ_j$ в $H_+^{(j)}$ играет переход $u(x_j) \to \overline{u(-x_j)}$ $(j=1, 2)$. Тогда $\circ = \circ_1 \otimes \circ_2$ имеет вид: $u^\circ(x) = \overline{u(-x)}$ $(x \in G)$ и после замыкания по непрерывности будет инволюцией в H_K (для последнего нужно учесть равенство $k(t) = \overline{k(-t)}$ $(t \in 2G)$, см. (3.39)). Ясно, что операторы C_1 и C_2 вещественны относительно $\circ$.

Покажем, что замыкание сужения C_1 на множество $C_0^\infty((-l_1, l_1)) \otimes \otimes w_2 = \mathfrak{D}(B_1) \otimes w_2$ при любом $w_2 \in H_+^{(2)}$ самосопряжено в $H_{K;w_2}^{(1)}$ — пополнении $H_+^{(1)}$ по скалярному произведению

$$\langle u_1, v_1\rangle_{w_2} = \langle u_1 \otimes w_2, v_1 \otimes w_2\rangle = \int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2}\int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2} k(y_1-x_1, y_2-x_2)\times$$
$$\times u_1(y_1) w_2(y_2)\overline{v_1(x_1)}\,\overline{w_2(x_2)}\,dx_1 dx_2 dy_1 dy_2.$$

Функция $f(t_2) = \int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_1}^{l_1} k(y_1-x_1, t_2) u_1(y_1)\overline{u_1(x_1)}\,dx_1 dy_1 \in C((-2l_2, 2l_2))$ очевидно п. о., поэтому $|f(t_2)| \leqslant f(0)$ $(t_2 \in (-2l_2, 2l_2))$. Отсюда следует:

$$\langle u_1, u_1\rangle_{w_2} = \int_{-l_2}^{l_2}\int_{-l_2}^{l_2} f(y_2-x_2) w_2(y_2)\overline{w_2(x_2)}\,dx_2 dy_2 \leqslant C_{w_2} f(0) =$$

$$= C_{w_2}\int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_1}^{l_1} k(y_1-x_1, 0) u_1(y_1)\overline{u_1(x_1)}\,dx_1 dy_1 \quad (u_1 \in H_+^{(1)} = L_2((-l_1, l_1))). \tag{4.23}$$

Таким образом, скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_{w_2}$ мажорируется скалярным произведением, построенным в $L_2((-l_1, l_1))$ по п. о. функции $k(t_1, 0)$. Поэтому если множество функций $i\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - zu$ $(\operatorname{Im} z \neq 0,\ u \in C_0^\infty((-l_1, l_1)))$ плотно в пространстве $H_{k(y_1-x_1, 0)}$, то оно тем более плотно в $H_{K;w_2}^{(1)}$. Но первая плотность имеет место, так как по предположению функция $k(t_1, 0)$ продолжается однозначно и соответствующий оператор самосопряжен. Следовательно, имеет место и вторая плотность, т. е. рассматриваемое замыкание сужения C_1 самосопряжено.

Условия теоремы 2.6 выполнены, следовательно, существуют самосопряженные коммутирующие расширения операторов C_1 и C_2. Теперь применяем теорему 4.2. Теорема доказана.

Сделаем некоторые замечания. Изменяя несколько рассуждения, видим, что *п. о. функция* $k(t)=k(t_1, t_2)$, *определенная в полосе* $(-\infty, \infty)\times(-2l_2, 2l_2)$, *всегда продолжается на* E_2 *(в общем неоднозначно). Если о п. о. функции* $k(t)=k(t_1, t_2)\in C((-2l_1, 2l_1)\times(-2l_2, 2l_2))$ $(0<l_1, l_2<\infty)$ *известно, что п. о. функции одной переменной* $k(t_1, 0)$ *и* $k(0, t_2)$ *продолжаются на всю ось однозначно, то и* $k(t)$ *продолжается на* E_2 *однозначно.* Это следует из теоремы 2.2 с помощью рассуждения, примененного при доказательстве теоремы 4.6.

Сейчас мы наметим описание продолжений п. о. функции $k(t)$, фигурировавшей в теореме 4.6, которые отвечают самосопряженным расширениям в H_K. Прежде всего перенесем на случай п. о. функций двух переменных некоторые из результатов пп. 8 и 9 предыдущего параграфа. Итак, будем рассматривать произвольную п. о. функцию $k(t)\in C(2G)=C((-2l_1, 2l_1)\times(-2l_2, 2l_2))$ $(0<l_1, l_2<\infty)$.

Покажем, что обязательно $k(t)\in C([-2l_1, 2l_1]\times[-2l_2, 2l_2])$, *т. е. что* $k(t)$ *равномерно непрерывна на* $2G$. В самом деле, воспользуемся конструкцией, примененной при доказательстве леммы 4.2, гл. V. Положим $K(x, y)=k(y-x)$ $(x, y\in G)$, нам нужно убедиться в равномерной по $(x, y)\in G\times G$ непрерывности этого ядра. Как следует из сказанного на стр. 363, для этого достаточно проверить равномерную непрерывность вектор-функции e_x $(x\in G)$ со значениями в пространстве $\mathfrak{H}_K$. На основании (4.19), гл. V, получаем

$$\|e_x-e_y\|_K^2=(e_x-e_y, e_x-e_y)_K=K(x, x)-2\operatorname{Re}K(x, y)+$$
$$+K(y, y)=2[k(0)-\operatorname{Re}k(y-x)].$$

Это равенство показывает, что равномерная непрерывность e_x в G следует из непрерывности $k(t)$ в 0. Утверждение доказано.

Из доказанного следует, что для ядра $K(x, y)=k(y-x)$ $(x, y\in G)$ справедливы все результаты п. 7, § 3, включая сказанное в конце этого пункта (мы дополнительно считаем, что форма, построенная по ядру K, невырождена). Цепочку (3.44) также будем обозначать: $H_k\supseteq H_0=L_2(G)\supseteq H_{+,k}$. В пространстве H_k действуют введенные выше эрмитовые операторы C_1 и C_2. Если они допускают самосопряженные коммутирующие расширения S_1 и S_2 (в H_k или с выходом), то для $k(t)$ при $t\in 2G$ справедливо представление (4.19) $(n=2)$. Подставляя в (3.43) это представление, получим аналогичное (3.51) равенство Парсеваля:

$$\langle E(\Delta)f, g\rangle=\int_\Delta \tilde f(\lambda)\overline{\tilde g(\lambda)}\,d\sigma(\lambda),\quad \tilde f(\lambda)=\int_G e^{i\lambda x}f(x)\,dx\ (f, g\in L_2(G)), \tag{4.24}$$

где $E(\Delta)$ — двумерное (обобщенное) разложение единицы, отвечающее этим расширениям. Подобно одномерному случаю в (4.24) можно перейти к пределу и получить равенство

$$\langle E(\Delta)\alpha,\beta\rangle=\int\limits_{\Delta}\widetilde{\alpha}(\lambda)\overline{\widetilde{\beta}(\lambda)}\,d\sigma(\lambda)\quad(\alpha,\beta\in H_k),\tag{4.25}$$

где под $\widetilde{\alpha}(\lambda)$ понимается предел в $L_2(E_2, d\sigma(\lambda))$ функций $\widetilde{f_n}(\lambda)$ для $f_n\in L_2(G)$, аппроксимирующих α в H_k. Ясно, что при $\xi\in[-2l_1, 2l_1]\times[-2l_2, 2l_2]$ $\widetilde{\delta_\xi}(\lambda)=$ $=e^{i\lambda\xi}$. Формула (3.54) также сохраняется: $\sigma(\Delta)=\langle E(\Delta)\delta_0,\delta_0\rangle$.

Для ядер $R^{(1)}(x,y;z)$ и $R^{(2)}(x,y;z)$ резольвент $R_z^{(1)}$ и $R_z^{(2)}$ операторов S_1 и S_2 справедливы представления типа (3.68). Они непосредственно вытекают из (4.9) и вида $\Omega_\lambda(x,y)$ (или из (4.25)) и таковы:

$$R^{(j)}(x,y;z)=\langle R_z^{(j)}\delta_y,\delta_x\rangle=\int\limits_{E_2}\frac{e^{i\lambda(y-x)}}{\lambda_j-z}\,d\sigma(\lambda)\tag{4.26}$$

$$(x,y\in[-l_1,l_1]\times[-l_2,l_2];\quad j=1,2).$$

Аналогичные представления имеют место и для ядер более общих операторов $F(S_1, S_2)=\int\limits_{E_2}F(\lambda_1,\lambda_2)\,dE_\lambda$, где $F(\lambda_1,\lambda_2)$ — измеримая по Борелю ограниченная функция. В этом случае в (4.26) $\frac{1}{\lambda_j-z}$ следует заменить на $F(\lambda_1,\lambda_2)$.

Подобно одномерному случаю для операторов C_1 и C_2 доказывается (без предположения о существовании коммутирующих самосопряженных расширений): пусть I построен по цепочке $H_k\supseteq H_0\supseteq H_{+,k}$, тогда

$$C_1^*\alpha=i\mathrm{I}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{I}\alpha)\right),\qquad C_2^*\alpha=i\mathrm{I}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{I}\alpha)\right);\tag{4.27}$$

$\mathfrak{D}(C_1^*)$ ($\mathfrak{D}((C_2^*))$ состоит из тех и только тех $\alpha\in H_k$, для которых $\mathrm{I}\alpha$ непрерывно дифференцируемо по x_1 (x_2), причем $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{I}\alpha)\in H_{+,k}$ $\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{I}\alpha)\in H_{+,k}\right)$.

Обозначим N_z ($\mathrm{Im}\,z\neq0$) дефектное подпространство оператора C_2; N_z совпадает с подпространством решений уравнения $C_2^*\varphi=\bar z\varphi$. Согласно (4.27) это означает, что на $[-l_1,l_1]\times[-l_2,l_2]$ $i\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{I}\varphi\right)=\bar z\mathrm{I}\varphi$, т. е. $(\mathrm{I}\varphi)(x_1,x_2)=$ $=a(x_1)\,e^{-i\bar z x_2}$ $(x\in[-l_1,l_1]\times[-l_2,l_2])$. Функция $a(x_1)$ — некоторая непрерывная функция на $[-l_2,l_2]$, обладающая тем свойством, что $a(x_1)\,e^{-i\bar z x_2}\in H_{+,k}$. Итак, N_z *состоит из векторов вида*

$$\varphi=\mathrm{I}^{-1}(a(x_1)\,e^{-i\bar z x_2})\in H_k,\tag{4.28}$$

где $a(x_1)\in C([-l_1,l_1])$ *таково, что* $a(x_1)\,e^{-i\bar z x_2}\in H_{+,k}$. Подобным же образом описываются и дефектные подпространства оператора C_1, однако в дальнейшем мы будем рассматривать тот случай, когда замыкание $\bar C_1$ самосопряжено в H_k.

Несколько дополним абстрактные построения § 2, именно, детализируем вид оператора X из соотношения (2.26).

Лемма 4.2. *При предположениях теоремы 2.6 множество* $\mathfrak{D}(\bar{C}_1) \cap N_{z_2}$ *плотно в пространстве* N_{z_2}. *Сужение* Γ_{z_2} *оператора* $\bar{C}_1$ *на это множество самосопряжено в* N_{z_2}.

Доказательство. Рассмотрим подпространства $N_{z_2}^{(j)}$, введенные на стр. 644. Они попарно ортогональны, $N_{z_2}^{(1)} \oplus N_{z_2}^{(2)} \oplus \ldots = N_{z_2}$ и $N_{z_2}^{(j)}$ состоит из замыкания линейной оболочки векторов $E(\Delta) f_j$ при любом борелевском Δ. Каждое такое замыкание, очевидно, совпадает с совокупностью векторов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, dE_\lambda f_j$, где $F(\lambda)$ такова, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda f_j, f_j\rangle < \infty$. Поэтому любое $f \in N_{z_2}$ представимо в виде

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_j(\lambda)\, dE_\lambda f_j, \quad \langle f, f\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_j(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda f_j, f_j\rangle < \infty. \tag{4.29}$$

Последовательность функций $F_1(\lambda), F_2(\lambda), \ldots$ определяется по f, вообще говоря, неоднозначно; скалярное произведение $\langle f, g\rangle$ $(f, g \in N_{z_2})$ записывается посредством равенства, подобного второму равенству в (4.29). Ясно, что $f \in N_{z_2}$ входит в $\mathfrak{D}(\bar{C}_1)$ в том и только том случае, когда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda F_j(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda f_j, f_j\rangle < \infty$, причем $\bar{C}_1 f = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda F_j(\lambda)\, dE_\lambda f_j$. Из полученного разложения пространства N_{z_2} легко следует утверждение леммы.

Обозначим X_0 оператор X, построенный при доказательстве теоремы 2.6. В терминах разложений (4.29) имеем:

$$X_0\left(\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_j(\lambda)\, dE_\lambda f_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_j(\lambda)\, dE_\lambda f_j^{\circ}. \tag{4.30}$$

Оператор X_0 переводит изометрически все N_{z_2} во все $N_{\bar{z}_2}$ и удовлетворяет соотношению (2.26): $U_{z_1}^{(1)} X_0 f = X_0 U_{z_1}^{(1)} f$ $(f \in N_{z_2})$.

Пусть Y — произвольный унитарный оператор в пространстве N_{z_2}, коммутирующий с самосопряженным оператором Γ_{z_2}. Так как часть $U_{z_1}^{(1)}$, действующая в N_{z_2}, может рассматриваться как функция Γ_{z_2}, то Y будет коммутировать и с $U_{z_1}^{(1)}$. Поэтому $X = X_0 Y$ удовлетворяет (2.26). Наоборот, если X удовлетворяет (2.26), то $X_0^{-1} X$ будет унитарным оператором в пространстве N_{z_2}, коммутирующим с $U_{z_1}^{(1)}$, т. е. с Γ_{z_2}. Итак, мы получили, что X *в формуле* (2.26) *имеет вид*

$$X = X_0 Y, \tag{4.31}$$

где X_0 *определяется равенством* (4.30), *а* Y — *произвольный унитарный оператор в* N_{z_2}, *коммутирующий с* Γ_{z_2}.

Возвратимся опять к рассмотрению п. о. функции $k(t)$ из теоремы 4.6. Для простоты будем считать $z_2 = i$. Согласно (4.28), $\varphi = \mathrm{I}^{-1}(a(x_1)e^{-x_2})$, $\psi = \mathrm{I}^{-1}(b(x_1)e^{-x_2}) \in N_i$, если только $a, b \in C([-l_1, l_1])$ таковы, что $a(x_1)e^{-x_2}$, $b(x_1)e^{-x_2} \in H_{+,k}$, при этом $\langle \varphi, \psi \rangle = (a(x_1)e^{-x_2}, b(x_1)e^{-x_2})_{+,k}$. Учитывая вид оператора $C_1 = C_1^*$ (см. (4.27)), можно высказать следующее утверждение.

Введем на функциях $a(x_1) \in C([-l_1, l_1])$, для которых $(a(x_1)e^{-x_2}, a(x_1)e^{-x_2})_{+,k} < \infty$, скалярное произведение

$$[a, b] = (a(x_1)e^{-x_2}, b(x_1)e^{-x_2})_{+,k}.$$

В результате получим полное гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, изометрическое N_i. Роль оператора Y из (4.31) играет любой унитарный оператор в $\mathfrak{H}$, коммутирующий с самосопряженным оператором в этом пространстве $a(x_1) \to ia'(x_1)$, определенным на всех тех $a \in \mathfrak{H} \cap C^1([-l_1, l_1])$, для которых $a' \in \mathfrak{H}$.

Структура пространства $\mathfrak{H}$ и этого самосопряженного оператора в нем, которая в конечном счете зависит от вида $k(t)$, определяет множество операторов Y и тем самым множество продолжений $k(t)$ с $(-2l_1, 2l_1) \times (-2l_2, 2l_2)$ на E_2, описываемых расширениями в H_k. О том, что здесь ситуация может быть самая разнообразная, говорит следующий простой пример.

Прежде всего заметим, что если $k_j(t_j) \in C((-2l_j, 2l_j))$ $(0 < l_j \leqslant \infty;\ j = 1, 2)$ п. о. функции, то и $k(t) = k(t_1, t_2) = k_1(t_1)k_2(t_2)$ — п. о. функция (это вытекает из того, что если матрицы $\| a_{jk} \|_1^n$ и $\| b_{jk} \|_1^n$ неотрицательно определенные, то и $\| a_{jk} b_{jk} \|_1^n$ такая же). Рассмотрим п. о. функцию на $(-\infty, \infty) \times (-2l_2, 2l_2)$

$$k(t) = \sum_{\alpha=1}^{N} e^{i\lambda_1^{(\alpha)} t_1} k_2(t_2), \tag{4.32}$$

где $\lambda_1^{(\alpha)}$ — фиксированные точки оси $(-\infty, \infty)$, а $k_2(t_2) \in C((-2l_2, 2l_2))$ п. о. и продолжается на всю ось неоднозначно. Пусть $k_2^{(\alpha)}(t_2)$ $(\alpha = 1, \ldots, N)$ — различные такие продолжения, тогда $\sum_{\alpha=1}^{N} e^{i\lambda_1^{(\alpha)} t_1} k_2^{(\alpha)}(t_2)$ будут продолжениями (4.32) на E_2. Так как $k_2^{(\alpha)}$ описывают продолжения k_2 независимо, то «количество» продолжений k зависит от N.

Аналитические формулы, дающие возможность по оператору Y написать продолжение, т. е. соответствующую меру $d\sigma(\lambda_1, \lambda_2)$, можно получить, если воспользоваться теоремой 2.8. Согласно этой теореме и (4.31) допустимое расширение оператора C_2 имеет преобразование Кэли вида $\widetilde{U}_i^{(2)} = U_i \oplus X_0 Y$. Если затем воспользоваться представлениями типа (4.26), то можно выразить $d\sigma(\lambda_1, \lambda_2)$ через Y подобно тому, как это делалось в п. 7, § 1, гл VII и в п. 9, § 3, гл. VIII. На этом мы останавливаться не будем. Вместе с тем мы наметим идею несколько другого, более симметричного и естественного, пути получения «анализа» в теории продолжения п. о. функции двух переменных. В дальнейшем будет удобно рассматривать функции, заданные в полосе.

Рассмотрим операторную п. о. функцию $\mathrm{K}(t)$, $t \in (-2l, 2l)$ $(0 < l \leqslant \infty)$. Ее значениями служат линейные непрерывные операторы, действующие в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H; она непрерывна по норме операторов относительно t. П. о. означает, что для любых точек $x_1, \ldots, x_N \in$

$\in(-l, l)$ и векторов $\xi_1, \ldots, \xi_N \in H$ $\sum\limits_{j,k=1}^{N} (\mathrm{K}(x_k - x_j)\xi_k, \xi_j)_H \geqslant 0$. При помощи конструкций, подобных изложенным в § 2, гл. VII, можно перенести ряд результатов теории пп. 6, 8 и 9, § 3, на случай операторных п. о. функций. Представление (3.40) будет иметь вид

$$\mathrm{K}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\,\Sigma(\lambda) \qquad (t \in (-2l, 2l)), \tag{4.33}$$

где $d\Sigma(\lambda)$ — неотрнцательная операторная конечная мера. В случае $l < \infty$ все $d\Sigma(\lambda)$ (т. е. все продолження $\mathrm{K}(t)$ в п. о. функцию на $(-\infty, \infty)$) можно описать посредством теоремы типа теоремы 3.15 (см. также сказанное в коице § 2, гл. VII). В этой теореме роль точек w, берущихся на окружности K_z, будут теперь играть некоторые операторы W, расположенные на операторном аналоге окружности Вейля — Гамбургера.

Перейдем от операторного случая функцни $\mathrm{K}(t)$ к случаю п. о. функции двух переменных $k(t_1, t_2)$ $((t_1, t_2) \in (-\infty, \infty) \times (-l_2, l_2))$. Этот переход аналогичен переходу в § 4, гл. VII, к уравнениям в частных разностях от операторных уравнений. Именно, примем в качестве H пополненне $C_0^\infty((-\infty, \infty))$ (возможно, после отождествлення) по скалярному произведению

$$(f, g)_H = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(y_1 - x_1, 0) f(y_1)\overline{g(x_1)}\, dx_1\, dy_1 \qquad f, g \in C_0^\infty((-\infty, \infty)))$$

и затем определим функцию $K(t_2)$ из соотношения

$$(\mathrm{K}(t_2) f, g)_H = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(y_1 - x_1, t_2) f(y_1)\overline{g(x_1)}\, dx_1 dy_1 (f, g \in C_0^\infty((-\infty,\infty))). \tag{4.34}$$

Ясно, что п. о. функции $k(t_1, t_2)$ влечет п. о. операторной функции $\mathrm{K}(t_2)$ $(t_2 \in (-2l_2, 2l_2))$. Поэтому, согласно (4.33), $\mathrm{K}(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_2 t_2}\, d\,\Sigma(\lambda_2)$ $(t \in (-2l_2, 2l_2))$ с некоторой $d\,\Sigma(\lambda_2)$. Это представление более общее, чем представленне (4.19). В самом деле, последнее при помощи (4.34) можно переписать в виде $(f \in C_0^\infty((\infty, \infty))$:

$$(\mathrm{K}(t_2) f)(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} k(y_1 - x_1, t_2) f(y_1)\, dy_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{E_2} e^{i(\lambda_1(y_1 - x_1) + \lambda_2 t_2)}\, d\sigma(\lambda_1, \lambda_2)\right) f(y_1)\, dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_2 t_2}\, (d\,\Sigma(\lambda_2) f)(x_1);$$

$$(\Sigma(\Delta) f)(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{(-\infty,\infty)\times\Delta} e^{i\lambda_1(y_1 - x_1)}\, d\sigma(\lambda_1, \lambda_2)\right) f(y_1)\, dy_1. \tag{4.35}$$

Оператор $\Sigma(\Delta)$, как легко поеять, будет неотрицательным в H.

Итак, специальная операторная п. о. функция $K(t_2)$, порожденная согласно (4.34) п. о. функцией $k(t_1, t_2)$, допускает в некоторых случаях (например, в случае теоремы 4.6) более специальное, чем (4.33), представление (4.35). Для получения всех представлений (4.35) нужно в формулах типа теоремы 3.15 брать специальные операторы W с операторной окружности типа Вейля — Гамбургера. Именно: эти W должны коммутировать с самосопряженным оператором, изоморфным описанному выше оператору $a \to ia'$ в пространстве $\mathfrak{H}$ и равным замыканию в H оператора $f \to if'$ ($f \in C_0^\infty((-\infty, \infty))$). Сейчас охватывается и случай расширений с выходом из H_K, но требуется максимальность дефектных чисел оператора C_2.

§ 5. Положительно определенные ядра, *-коммутирующие с разностными операторами

В этом параграфе при помощи общих построений § 1—2 излагается разностный аналог вопросов, рассмотренных в § 3—4. В частности, будет рассмотрена теория степенной проблемы моментов и ее обобщения. Как уже говорилось, этот параграф тесно связан с гл. VII.

1. Одно обыкновенное разностное выражение. Рассмотрим случай выражения, действующего на всей оси, т. е. действующего на последовательности комплексных чисел $u = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots) = (u_j)$. Такое выражение порядка r удобно записывать в виде

$$(Lu)_j = \sum_{\alpha=-r^-}^{r^+} a_{j\alpha} u_{j+\alpha} = \sum_{\alpha=-r^-}^{r^+} a_{j\alpha} (T^\alpha u)_j \quad ((Tu)_j = u_{j+1};$$

$$j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots), \tag{5.1}$$

где $r = r^- + r^+$ — фиксированное разложение r на неотрицательные целые числа, а $a_{j\alpha}$ — комплексные коэффициенты, причем $a_{j,-r^-}$, $a_{j,r^+} \neq 0$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Сопряженное выражение L^+ определяется из равенства $\sum_{j=-\infty}^{\infty} (Lu)_j \bar{v}_j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_j \overline{(L^+ v)_j}$, где хотя бы одна из последовательностей u, v финитна. Очевидно,

$$(T^+ u)_j = u_{j-1}, \quad (L^+ u)_j = \sum_{\alpha=-r^-}^{r^+} (T^{+\alpha} a_{.\alpha} u_.)_j \quad (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots). \tag{5.2}$$

Посредством $\bar{L}$ будем обозначать выражение $\sum_{\alpha=-r^-}^{r^+} \bar{a}_{j\alpha} T^\alpha$.

Рассмотрим ядро (вернее, бесконечную матрицу) $K = \| K_{jk} \|_{-\infty}^{\infty}$; K_{jk} $(j, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ — комплексные числа. Это ядро называется п. о., если для любой финитной последовательности $(\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$ комплексных чисел

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} K_{jk}\xi_k\bar{\xi}_j \geqslant 0. \tag{5.3}$$

Из (5.3), очевидно, вытекает, что $K_{jj} \geqslant 0$, $|K_{jk}|^2 \leqslant K_{jj}K_{kk}$ ($j, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$). Подберем такую последовательность (p_j), $p_j \geqslant 1$ ($j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$), чтобы

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{K_{jj}}{p_j} < \infty. \tag{5.4}$$

Тогда $K \in l_2((-\infty, \infty), p_j^{-1}) \otimes l_2((-\infty, \infty), p_j^{-1})$. Будем считать $H_0 = l_2((-\infty, \infty), 1) = l_2((-\infty, \infty))$, $H_+ = l_2((-\infty, \infty), p_j)$. Таким образом, $K \in H_- \otimes H_-$. Пространство H_K совпадает с пополнением $l_2((-\infty, \infty), p_j) = H_+$ (или $l_{2,0}((-\infty, \infty))$), возможно после отождествления, по скалярному произведению

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} K_{jk}u_k\bar{v}_j. \tag{5.5}$$

В качестве оператора A из § 1, действующего в $l_2((-\infty, \infty)) = H_0$, примем замыкание Λ в этом пространстве отображения $u \to Lu$, $u \in l_{2,0}((-\infty, \infty))$. Инволюцией, как и ранее, служит переход к комплексной черте. Оператор Λ допускает продолжение оснащения — в качестве Д можно взять $l_{2,0}((-\infty, \infty))$, топологизировав его подходящим образом. Сопряженный в $l_2((-\infty, \infty))$ оператор Λ^*, как легко видеть (см. стр. 507), совпадает с оператором $u \to L^+u$, определенным на всех таких $u \in l_2((-\infty, \infty))$, для которых и $L^+u \in l_2((-\infty, \infty))$. Оператор $C = B$ — с его сужением на $l_{2,0}((-\infty, \infty))$. Условие $*$-коммутируемости K и A примет вид:

$$L_jK = \bar{L}_kK. \tag{5.6}$$

Пространство H_{++} будет носить более простой по сравнению со стр. 651 характер. Именно, как и там можно положить $(u, v)_{++} = (u\sqrt{p_j}, v\sqrt{p_j})_{\mathfrak{H}}$, где $\mathfrak{H} \subset l_2((-\infty, \infty))$ таково, что вложение $\mathfrak{H} \to l_2((-\infty, \infty))$ квазиядерно. Возьмем $\mathfrak{H} = l_2((-\infty, \infty), q_j)$, где $q_j \geqslant 1$ и $\sum_{j=-\infty}^{\infty} q_j^{-1} < \infty$.

Таким образом, $H_{++} = l_2((-\infty, \infty), s_j)$, $s_j \geqslant 1$, причем

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{p_j}{s_j} < \infty.$$

Семейством п. о. ядер $\Omega_\lambda = \| \Omega_{\lambda;jk} \|_{-\infty}^{\infty}$, фигурирующим в теореме 1.1, будут служить такие п. о. ядра, что

$$L_j \Omega_\lambda = \lambda \Omega_\lambda, \qquad \bar{L}_k \Omega_\lambda = \lambda \Omega_\lambda, \qquad \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \frac{|\Omega_{\lambda;jk}|^2}{s_j s_k} \leqslant C < \infty. \quad (5.7)$$

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, ядра Ω_λ можно разложить по фундаментальной системе решений на $(-\infty, \infty)$ разностного уравнения $Lu - \lambda u = 0$. Фундаментальную систему $\chi_{0;j}(\lambda), \ldots, \chi_{r-1;j}(\lambda)$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ можно выделять, например, следующими условиями Коши, заданными в r точках $a - r^-, \ldots, a + r^+ - 1$, где a — целое фиксированное:

$$\chi_{k;j}(\lambda) = \delta_{j,k+a-r^-} \qquad (j = a - r^-, \ldots, a + r^+ - 1;\ k = 0, \ldots, r-1). \quad (5.8)$$

Из теоремы 1.1 при помощи рассмотрений, подобных изложенным в § 3, вытекает следующая теорема.

Теорема 5.1. *Рассмотрим п. о. ядро $K = \| K_{jk} \|_{-\infty}^{\infty}$, разностное выражение* (5.1) *и фундаментальную систему $\chi_{0;j}(\lambda), \ldots, \chi_{r-1;j}(\lambda)$ решений уравнения $Lu - \lambda u = 0$, выделяющуюся условиями* (5.8). *Для того, чтобы имело место представление*

$$K_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta=0}^{r-1} \chi_{\alpha;j}(\lambda) \overline{\chi_{\beta;k}(\lambda)} \, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \qquad (j, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots) \quad (5.9)$$

с некоторой неотрицательной матричной мерой $\| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|_0^{r-1}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5.6) (*интеграл в* (5.9) *при каждых фиксированных j, k сходится в смысле пространства $L_2(C_r; (-\infty, \infty), \| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|_0^{r-1})$. Мера $\| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|_0^{r-1}$ определяется однозначно тогда и только тогда, когда замыкание в H_K оператора $u \to L^+ u$, $u \in l_{2,0}((-\infty, \infty))$, максимально.*

Итак, случай выражения (5.1) на оси нами рассмотрен. Представляет интерес также случай полуоси. Без ограничения общности можно считать, что этой полуосью служит $[0, \infty)$, т. е. что L действует на последовательности

$u = (u_0, u_1, \ldots) = (u_j)$. Коэффициенты L можно предполагать определенными для всех $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, однако при подсчете $(Lu)_j$ для $j=0,\ldots$ $\ldots, r^- - 1$ полагаем $u_{-r^-} = \ldots = u_{-1} = 0$. Это условие играет роль граничного условия в 0 (ср., стр. 507), его характер зависит от представления r в виде $r^- \dotplus r^+$.

Для того чтобы имело место равенство $\sum_{j=0}^{\infty} (Lu)_j \bar{v}_j = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \overline{(L^+v)_j}$, где хотя бы одна из последовательностей финитна на $\dotplus\infty$, нужно при подсчете по формуле (5.2) $(L^+u)_j$ $(j = 0, \ldots, r^+ - 1)$ полагать $u_{-r^+} = \ldots = u_{-1} = 0$. Это соглашение мы будем считать в дальнейшем выполненным.

После сказанного теорема 5.1 легко переносится на случай полуоси. При ее доказательстве нужно пространства на $(-\infty, \infty)$ заменять аналогичными пространствами на $[0,\infty)$, а финитность понимать как финитность на $\dotplus\infty$. Функции $\chi_{\alpha;j}(\lambda)$, фигурирующие в (5.9), изменятся. Именно, под $\chi_{\alpha;j}(\lambda)$ нужно понимать систему линейно независимых решений уравнения $(Lu)_j - \lambda u_j = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$, удовлетворяющих «граничным» условиям для L в нуле (т. е. нужно учитывать высказанное правило подсчета $(Lu)_j$ при $j = 0, \ldots, r^- - 1$). Так как таких условий r^-, то указанных решений будет r^+. В частности, в качестве этих решений могут быть приняты $\chi_{r^-;j}(\lambda), \ldots, \chi_{r^-+r^+-1;j}(\lambda)$, удовлетворяющие в точках $0, \ldots, r^+-1$ условиям

$$\chi_{k;j}(\lambda) = \delta_{j,k-r^-} \quad (j = 0, \ldots, r^+ - 1;\ k = r^-, \ldots, r - 1;\ a = 0). \tag{5.10}$$

Итак, можно высказать следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Будем рассматривать выражения (5.1) и (5.2) на полуоси $[0,\infty)$, учитывая указанные правила подсчета $(Lu)_j$ и $(L^+u)_j$ для j вблизи 0. Пусть $K = \| K_{jk} \|_0^{\infty}$ — п. о. ядро. Для него сохраняется теорема 5.1, только систему r решений $\chi_{0;j}(\lambda), \ldots, \chi_{r-1;j}(\lambda)$ нужно заменить системой r^+ решений $\chi_{r^-;j}(\lambda), \ldots, \chi_{r-1;j}(\lambda)$ уравнения $(Lu)_j - \lambda u_j = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$ и матрицу $\| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|$ порядка r матрицей порядка r^+. Оператор, фигурирующий в конце теоремы, нужно заменить замыканием оператора $u \to L^+ u$, $u \in l_{2,0}([0,\infty))$, рассматриваемым в пространстве H_K — пополнении (возможно, после отождествления) $l_{2,0}([0,\infty))$ по скалярному произведению (5.5), где $-\infty$ заменена 0.*

На представления (5.9) переносится с понятным изменением формулировки теорема 3.8 о вырождении формы.

В заключение заметим, что для рассмотренных разностных случаев, конечно, будут иметь место представления типа (3.16) — (3.17) для (обобщенной) резольвенты R_z эрмитова оператора $u \to L^+ u$ $(u \in l_{2,0}((-\infty, \infty)))$ или $u \in$ $\in l_{2,0}([0,\infty)))$ или его ограниченной функции. Эти формулы для R_z в случае оси:

$$\langle R_z u, v \rangle = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} R_{z;jk} u_k \bar{v}_j \qquad (u, v \in l_{2,0}((-\infty,\infty))),$$

$$R_{z;jk} = \langle R_z \delta_k, \delta_j \rangle = \overline{R_{\bar{z};kj}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_{\lambda;jk}}{\lambda - z}\, d\varrho(\lambda), \tag{5.11}$$

$$\int\limits_{\Delta} \Omega_{\lambda;jk}\, d\varrho(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Delta+i\varepsilon} \operatorname{Im} R_{z;jk}\, dz \qquad (j, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$$

(здесь $\Omega_{\lambda;jk}\, d\varrho(\lambda)$ — подынтегральное выражение из (5.9)).

2. **Самосопряженность оператора в H_K, отвечающего обыкновенному разностному выражению с постоянными коэффициентами.** Сейчас мы получим для разностных выражений результаты типа п. 4, § 3. Будет использована общая схема п. 2, § 2, однако роль пространств $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ будут играть некоторые нормированные пространства.

Обозначим через $K_{p,\varrho}$ (p, $\varrho > 0$ фиксированы) банахово пространство последовательностей $\varphi = (\ldots, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \ldots)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{p,\varrho} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j|\, p^{|j|}\, |j|^{\frac{|j|}{\varrho}} < \infty, \tag{5.12}$$

т. е. $K_{p,\varrho} = l_1\left((-\infty, \infty), p^{|j|}\, |j|^{\frac{|j|}{\varrho}}\right)$. Будем считать, что коэффициенты выражения (5.1) постоянны, т. е. $a_{j\alpha} = a_\alpha$ не зависит от j. Определим на последовательностях $\varphi \in K_{p,\varrho}$ по функции $e^{\zeta s}$ переменного s (ζ — фиксированное комплексное число) оператор $e^{\zeta L}$, полагая

$$(e^{\zeta L}\varphi)_j = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\zeta^q}{q!} (L^q\varphi)_j \qquad (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots) \tag{5.13}$$

(в нашем случае удобно несколько изменить путь введения операторов типа $\Pi(D)$, ср. со стр. 663—664). Основой является следующая лемма.

Лемма 5.1. *Если $\varrho = \max(r^-, r^+)$, $0 < p' < p$ и $|\zeta| \leqslant T_{p,p',\varrho}$, где $T_{p,p',\varrho}$ достаточно мало, то оператор $e^{\zeta L}$ непрерывно действует из пространства $K_{p,\varrho}$ в пространство $K_{p',\varrho}$.*

Доказательство. Нам нужно показать, что для каждого $\varphi \in K_{p,\varrho}$ ряд (5.13) сходится при любом j, полученная последовательность входит в $K_{p',\varrho}$ и

$$\left\| \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\zeta^q}{q!} (L^q\varphi)_\cdot \right\|_{p',\varrho} \leqslant C \|\varphi\|_{p,\varrho} \qquad (C > 0). \tag{5.14}$$

С этой целью проведем ряд оценок. Для выражения T^α имеем ($\mu = p'/p$):

$$\| T^{\alpha}\varphi \|_{p',\varrho} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} | \varphi_{j+\alpha} | p'^{|j|} |j|^{\frac{|j|}{\varrho}} =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} | \varphi_{j+\alpha} | p^{|j+\alpha|} | j+\alpha |^{\frac{|j+\alpha|}{\varrho}} \frac{p'^{|j|} | j |^{\frac{|j|}{\varrho}}}{p^{|j+\alpha|} | j+\alpha |^{\frac{|j+\alpha|}{\varrho}}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{j} \left[\mu^{|j|} p^{|j|-|j+\alpha|} \left| \frac{j}{j+\alpha} \right|^{\frac{|j+\alpha|}{\varrho}} | j |^{\frac{|j|}{\varrho} - \frac{|j+\alpha|}{\varrho}} \right] \| \varphi \|_{p,\varrho} \leqslant$$

$$\leqslant p^{|\alpha|} e^{\frac{|\alpha|}{\varrho}} \sup_{j} [\mu^{|j|} | j |^{\frac{|\alpha|}{\varrho}}] \| \varphi \|_{p,\varrho} \qquad (5.15)$$

(мы воспользовались оценками $|a| - |b| \leqslant |a - b|$ и $\left| \frac{a}{b} \right|^{|b|} \leqslant e^{|a-b|}$ для вещественных a, b).

Справедливо неравенство

$$\mu^{t} t^{\sigma} \leqslant \left(-\frac{\sigma}{e \log \mu} \right)^{\sigma} \qquad (0 < t,\ \sigma;\ 0 < \mu < 1). \qquad (5.16)$$

В самом деле, найдем наибольшее значение функции $f(t) = \mu^{t} t^{\sigma}$ на $[0, \infty)$; так как $f(0) = f(\infty) = 0$, то оно достигается в точке max. В силу монотонности $\log x$ $t_{\max}$ для $f(t)$ и $g(t) = \log f(t) = t \log \mu + \sigma \log t$ совпадают. Но $g'(t) = \log \mu + \frac{\sigma}{t}$, откуда $t_{\max} = -\frac{\sigma}{\log \mu}$. Подставляя это значение в $f(t)$, получим (5.16).

Продолжая (5.15) при помощи (5.16), получим:

$$\| T^{\alpha}\varphi \|_{p',\varrho} \leqslant p^{|\alpha|} \left(-\frac{|\alpha|}{\varrho \log \mu} \right)^{\frac{|\alpha|}{\varrho}} \| \varphi \|_{p,\varrho}. \qquad (5.17)$$

Используя (5.17), найдем оценку для $\| L^{q}\varphi \|_{p',\varrho}$. Выражение L^{q} будет порядка qr, пусть оно имеет вид: $L^{q} = \sum_{\alpha=-qr^{-}}^{qr^{+}} a_{\alpha}^{(q)} T^{\alpha}$ $(a_{j\alpha}^{(1)} = a_{j\alpha})$. Обозначим $A_{q} = \max_{\alpha} \{ | a_{\alpha}^{(q)} | \}$. Из соотношения $L^{q} = L \cdot L^{q-1}$ легко следует, что $A_{q} \leqslant (2r + 1) A_{1} A_{q-1}$ $(q = 2, 3, \ldots)$, откуда $A_{q} \leqslant (2r + 1)^{q-1} A_{1}^{q} \leqslant (2r + 1)^{q} A_{1}^{q}$ $(q = 1, 2, \ldots)$. Таким образом

$$\| L^{q}\varphi \|_{p',\varrho} \leqslant \sum_{\alpha=-qr^{-}}^{qr^{+}} | a_{\alpha}^{(q)} | \, \| T^{\alpha}\varphi \|_{p',\varrho} \leqslant A_{q} \sum_{\alpha=-qr^{-}}^{qr^{+}} p^{|\alpha|} \left(-\frac{|\alpha|}{\varrho \log \mu} \right)^{\frac{|\alpha|}{\varrho}} \| \varphi \|_{p,\varrho} \leqslant$$

$$\leqslant (2r+1)^q A_1^q (2q\varrho+1)\, p^{q\varrho}\left(-\frac{q}{\log\mu}\right)^q \|\varphi\|_{p,\varrho} =$$

$$= (2q\varrho+1)\left[-\frac{(2r+1)A_1 p^{\varrho}}{\log\mu}\right]^q q^q \|\varphi\|_{p,\varrho} =$$

$$= C_1^q (2q\varrho+1)\, q^q \|\varphi\|_{p,\varrho} \qquad (q = 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (5.18)$$

где C_1 не зависит от q. Ясно, что эта же оценка справедлива и при $q = 0$.

При помощи (5.18) получим

$$\left\|\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\zeta^q}{q!}L^q\varphi\right\|_{p',\varrho} \leqslant \sum_{q=0}^{\infty}\frac{|\zeta|^q}{q!}\|L^q\varphi\|_{p',\varrho} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{q=0}^{\infty}\frac{T^q_{p,p',\varrho}}{q!}C_1^q(2q\varrho+1)q^q\right]\|\varphi\|_{p,\varrho}.$$

Для достаточно малого $T_{p,p',\varrho} > 0$ ряд в квадратных скобках будет сходящимся. Итак, неравенство (5.14), а вместе с ним и лемма, доказаны.

Справедлива следующая теорема, аналогичная теореме 3.9.

Теорема 5.3. *Пусть* L *— обыкновенное разностное выражение на оси* $(-\infty, \infty)$ *порядка* r *(см.* (5.1)), *коэффициенты которого предполагаются постоянными* ($a_{j\alpha} = a_\alpha$); $K = \|K_{jk}\|_{-\infty}^{\infty}$ *— п. о. ядро, удовлетворяющее* (5.6). *Согласно теореме 5.1, для* K *имеет место представление* (5.9). *Для однозначности определения матричной меры* $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_0^{r-1}$ *в представлении* (5.9) *достаточно выполнения оценки*

$$|K_{jk}| \leqslant CN^{|j|+|k|}|j|^{\frac{|j|}{\varrho}}|k|^{\frac{|k|}{\varrho}} \qquad (j,\ k = \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots), \quad (5.19)$$

где $\varrho = \max(r^-, r^+)$, *а* C, $N > 0$ *— некоторые постоянные.*

При условии равенства дефектных чисел замыкание оператора $u \to L^+u$ $(u \in l_{2,0}((-\infty, \infty)))$ будет самосопряжено в H_K.

Доказательство. Из оценки (5.19) следует, что последовательность

$$p_j = N^{\sigma|j|}|j|^{\frac{2|j|}{\varrho}} \qquad (j = \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots),$$

где $\sigma > 2$ фиксировано, удовлетворяет (5.4) и поэтому может быть принята для построений п. 1 ($p_j \geqslant 1$, так как без ограничения общости можно считать $N \geqslant 1$). Выбор p_j определяет пространство $H_+ = l_2((-\infty, \infty), p_j)$.

Нам нужно доказать максимальность замыкания в H_K оператора $\to L^+u$ ($u \in l_{2,0}((-\infty, \infty))$). Будем пользоваться теоремами 2.5 и .4, полагая $\Phi = K_{p,Q} \subset K_{p',Q} = \Psi$ $(0 < p' < p)$, причем p' выбрано настолько большим, чтобы $N^\sigma \leqslant p'^{\frac{3}{2}}$. Последнее неравенство обеспечивает включение $\Psi = K_{p',Q} \subset l_2((-\infty, \infty); p_j)$. В самом деле, если $\varphi \in K_{p',Q}$, то сходится ряд типа (5.12), откуда

$$|\varphi_j| \leqslant \|\varphi\|_{p',Q} p'^{-|j|} |j|^{-\frac{|j|}{Q}} \qquad (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots).$$

Поэтому

$$|\varphi_j|^2 N^{\sigma|j|} |j|^{\frac{2|j|}{Q}} \leqslant \|\varphi\|^2_{p',Q} p'^{-2|j|} N^{\sigma|j|} \leqslant \|\varphi\|^2_{p',Q} p'^{-\frac{|j|}{2}}$$

и ряд $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j|^2 N^{\sigma|j|} |j|^{\frac{2|j|}{Q}} = \|\varphi\|^2_{l_2((-\infty, \infty), p_j)}$ сходится, причем его сумма $\leqslant C_1 \|\varphi\|^2_{p',Q}$.

Как и в случае дифференциальных выражений, расширим оператор $u \to L^+u$ ($u \in l_{2,0}((-\infty, \infty))$): положим $Bu = L^+u$, где $u \in \mathfrak{D}(B) = \Psi$ (ввиду простоты ситуации сейчас вводить аналог Θ нецелесообразно). Из (5.18) вытекает, что $L^+[\Psi] \subseteq l_2((-\infty, \infty), p_j)$. Подобно лемме 3.3 нетрудно показать, что этот оператор B входит в замыкание в H_K оператора $u \to L^+u$ ($u \in l_{2,0}((-\infty, \infty))$). Поэтому достаточно установить максимальность замыкания B.

Итак, зафиксировав указанные p и p', получим цепочку $\Phi = K_{p,Q} \subset \Psi = K_{p',Q} = \mathfrak{D}(B) \subset l_2((-\infty, \infty), p_j)$. Выберем $T_{p,p',Q} = T > 0$ согласно лемме 5.1. Тогда при любых t_0, $t \in [0, T]$ определен оператор $Q(t_0, t) = e^{i(t_0 - t)L^+}$, действующий непрерывно из всего Φ в Ψ. Как это обычно делается, нетрудно показать, что при любой $\varphi \in \Phi$ функция $\varphi(t) = Q(t_0, t)\varphi$ является сильным решением уравнения $\frac{d\varphi(t)}{dt} + iL^+[\varphi(t)] = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ в пространстве Ψ, обращающимся в φ при $t = t_0$. Так как из сходимости в Ψ следует сходимость в $H_+ = l_2((-\infty, \infty), p_j)$, то это решение будет сильным и в H_+. Таким образом, выполнены требования теоремы 2.4 и слабое решение уравнения $\frac{du}{dt} + (iB)^*u = 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$ в пространстве H_+ единственно. Аналогично убеждаемся в единственности слабых решений уравнения $\frac{du}{dt} - (iB)^* u = 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$. Согласно теореме 2.5, 2), замыкание в H_K оператора B максимально, что и требовалось доказать.

Перейдем к рассмотрению случая полуоси. Здесь по сравнению со всей осью будут некоторые отличия, основой которых служит следующая лемма.

Лемма 5.2. *В пространстве* $\hat{K}_{p,\varrho} = l_1\left([0, \infty), p^{|j|} \, |j|^{\frac{|j|}{\varrho}}\right)$ $(p, \varrho > 0$ *любые) оператор* $\varphi \to T\varphi$ *является ограниченным с нормой* $\leqslant \frac{1}{p}$.

Доказательство следует из оценки

$$\| T\varphi \|_{\hat{K}_{p,\varrho}} = \sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_{j+1}| \, p^j j^{\frac{j}{\varrho}} = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \, p^{k-1} (k-1)^{\frac{k-1}{\varrho}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \, p^k k^{\frac{k}{\varrho}} \leqslant \frac{1}{p} \| \varphi \|_{\hat{K}_{p,\varrho}} \qquad (\varphi \in \hat{K}_{p,\varrho}).$$

Установим аналог леммы 5.1. Прежде всего заметим, что достаточно доказать неравенство (5.14) (в нормах $\hat{K}$) для случая неотрицательных коэффициентов L, числа ζ и координат φ — к такой ситуации легко перейти посредством почленной оценки по модулю. Пусть $u = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots)$, $v = (v_0, v_1, \ldots)$, положим: $\hat{u} = (u_0, u_1, \ldots)$, $\tilde{v} = (\ldots, 0, 0, v_0, v_1, \ldots)$; $L_+ = \sum_{\alpha=1}^{r+} a_\alpha T^\alpha$, $L_- = \sum_{\alpha=-r^-}^{0} a_\alpha T^\alpha$. Применяя выражения L, L_+ и L_- как выражения на всей оси, получим $e^{\zeta L} \tilde{\varphi} = e^{\zeta L_+ + \zeta L_-} \tilde{\varphi} = e^{\zeta L_+} e^{\zeta L_-} \tilde{\varphi}$. Отсюда при помощи лемм 5.2 и 5.1 найдем:

$$\| e^{\zeta L} \varphi \|_{\hat{K}_{p',\varrho}} \leqslant \| \widehat{e^{\zeta L} \tilde{\varphi}} \|_{\hat{K}_{p',\varrho}} = \| \widehat{e^{\zeta L_+} e^{\zeta L_-} \tilde{\varphi}} \|_{\hat{K}_{p',\varrho}} \leqslant C_1 \| \widehat{e^{\zeta L_-} \tilde{\varphi}} \|_{\hat{K}_{p',\varrho}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \| e^{\zeta L_-} \tilde{\varphi} \|_{K_{p',\varrho}} \leqslant C_2 \| \tilde{\varphi} \|_{K_{p,\varrho}} = C_2 \| \varphi \|_{\hat{K}_{p,\varrho}}.$$

Таким образом, *для случая полуоси лемма 5.1 сохраняется, нужно лишь пространства K заменить на пространства $\hat{K}$ и считать $\varrho = r^-$.*

Теперь можно повторить доказательство теоремы 5.3, учитывая высказанный вариант леммы 5.1. Так как он применяется к выражению L^+, то мы придем к следующей теореме.

Теорема 5.4. *Для п. о. ядра $K = \|K_{jk}\|_0^\infty$ на полуоси $[0, \infty)$ имеет место теорема 5.3. При этом, естественно, нужно в оценке (5.19) считать j, $k = 0, 1, \ldots$. Число ϱ равно $r+$.*

3. Случай $q = n > 1$ обыкновенных разностных выражений. Проведем для него рассмотрения типа § 4; представляет интерес такая ситуация, когда имеется m полных осей $(\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ и $n-m$ полуосей, в качестве которых можно принять $[0, 1, \ldots)$. Поэтому обозначим через G множество целочисленных точек $j=(j_1, \ldots, j_n)$ пространства E_n, где $j_1, \ldots j_m$ меняются по $(\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, а $j_{m+1}, \ldots, j_n$ — по $[0, 1, \ldots)$. Мы также будем писать: $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(n)}$, где $G^{(1)}, \ldots, G^{(m)}$ — оси, $G^{(m+1)}, \ldots, G^{(n)}$ — полуоси.

Комплекснозначное ядро $K = K_{jk}$ $(j, k \in G)$ называется п. о., если для него выполняется аналогичное (5.3) условие: для любой финитной последовательности комплексных чисел ξ_j

$$\sum_{j,k \in G} K_{jk} \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0. \tag{5.20}$$

Очевидно, $K_{jj} \geqslant 0$, $|K_{jk}|^2 \leqslant K_{jj} K_{kk}$ $(j, k \in G)$.

Подберем последовательность $p_j \geqslant 1$ $(j \in G)$ такую, чтобы $\sum\limits_{j \in G} \frac{K_{jj}}{p_j} < \infty$. Согласно утверждению на стр. 704 ее можно подыскать в виде: $p_j = p_{j_1}^{(1)} \ldots p_{j_n}^{(n)}$, где $p_{j_\nu}^{(\nu)} \geqslant 1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ и поэтому

$$l_2(G; p_j) = l_2(G^{(1)}, p_{j_1}^{(1)}) \otimes \ldots \otimes l_2(G^{(n)}, p_{j_n}^{(n)}),$$

$$l_2\left(G, \frac{1}{p_j}\right) = l_2\left(G^{(1)}, \frac{1}{p_{j_1}^{(1)}}\right) \otimes \ldots \otimes l_2\left(G^{(n)}, \frac{1}{p_{j_n}^{(n)}}\right); \tag{5.21}$$

$$l_2(G) = l_2(G^{(1)}) \otimes \ldots \otimes l_2(G^{(n)})^*.$$

Имеем: $K \in l_2(G, p_j^{-1}) \otimes l_2(G, p_j^{-1})$. Будем считать $H_0 = l_2(G)$, $H_+ = l_2(G; p_j)$, тогда $H_- = l_2(G, p_j^{-1})$. Соотношения (5.21) показывают, что можно положить

$$H_0^{(\nu)} = l_2(G^{(\nu)}), \qquad H_+^{(\nu)} = l_2(G^{(\nu)}, p_{j_\nu}^{(\nu)}), \qquad H_-^{(\nu)} = l_2\left(G^{(\nu)}, \frac{1}{p_{j_\nu}^{(\nu)}}\right)$$

$$(\nu = 1, \ldots, n).$$

Пространство H_K совпадает с пополнением $l_2(G, p_j)$ или $l_{2,0}(G)$ (воз-

---

* Напомним, что $l_2(G, m_j)$ обозначает „многомерное" l_2 с весом m_j; $l_2(G) = l_2(G, 1)$.

можно, после отождествления) по скалярному произведению

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j,k\in G} K_{jk} u_k \bar{v}_j. \tag{5.22}$$

Рассмотрим n разностных выражений вида (5.1)

$$L^{(\nu)} = \sum_{\alpha=-r_\nu^-}^{r_\nu^+} a_{j_\nu\alpha}^{(\nu)} T_\nu^\alpha \qquad (r_\nu = r_\nu^- + r_\nu^+;\ \ r_\nu^-,\ r_\nu^+ \geqslant 0;\ \ \nu = 1, \ldots, n), \tag{5.23}$$

где T_ν — сдвиг по ν-ой оси: $(T_\nu u)_j = u_{j_1,\ldots,j_{\nu-1},\, j_{\nu+1},\, j_{\nu+1},\ldots,j_n}$. Коэффициенты $L^{(\nu)}$, подобно случаю дифференциальных операторов, зависят только от j_ν; в случае полуоси (т. е. когда $\nu \geqslant m+1$) будем требовать выполнение нашего соглашения о действии $L^{(\nu)}$ вблизи 0; $L^{(\nu)+}$, $\overline{L^{(\nu)}}$ имеют прежний смысл.

Проведем по аналогии с § 4 дальнейшие построения. Определим в $H_0 = l_2(G)$ n операторов $A_1, \ldots, A_n$, считая $A_\nu = \Lambda_\nu$ равным замыканию в этом пространстве отображения $u \to L^{(\nu)}u$, $u \in l_{2,0}(G) = Д$. Условие $*$-коммутируемости ядра K и A_ν, очевидно, запишется в виде:

$$L_{j_\nu}^{(\nu)} K = \overline{L_{k_\nu}^{(\nu)}} K \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{5.24}$$

Операторами B_ν служат определенные в пространствах $H_+^{(\nu)} = l_2(G^{(\nu)}, p_{j_\nu}^{(\nu)})$ отображения $u \to L^{(\nu)+}u$, $u \in l_{2,0}(G^{(\nu)})$ ($\nu = 1, \ldots, n$). Роль операторов C_ν будут играть операторы в $H_+ = l_2(G, p_j)$ вида $u \to L^{(\nu)+}u$, где $u \in \mathfrak{D}(C_\nu) = H_+^{(1)} \otimes \ldots \otimes H_+^{(\nu-1)} \otimes l_{2,0}(G^{(\nu)}) \otimes H_+^{(\nu+1)} \otimes \ldots \otimes H_+^{(n)}$. Как и в дифференциальном случае, замыкание C_ν в H_K и замыкание его сужения на $l_{2,0}(G)$ совпадают.

После сказанного не составляет труда на основании теоремы 1.2 доказать разностный аналог представления (4.14). Мы ограничимся лишь формулировкой.

Пусть $\nu = 1, \ldots, m$. Зафиксируем точку $a_\nu \in G^{(\nu)} = (\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ и рассмотрим фундаментальную систему решений на оси $G^{(\nu)}$ уравнения $L^{(\nu)}u - \lambda_\nu u = 0$, удовлетворяющую условиям (5.8) (с $a = a_\nu$). Обозначим ее

$$\chi_{0;\,j_\nu}^{(\nu)}(\lambda_\nu), \ldots, \chi_{r_\nu-1;\,j_\nu}^{(\nu)}(\lambda_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, m;\ 0 \leqslant m \leqslant n). \tag{5.25}$$

При $\nu = m+1, \ldots, n$ рассмотрим фундаментальную систему решений на полуоси $G^{(\nu)} = [0, \infty)$ такого же уравнения, удовлетворяющую условиям (5.10):

$$\chi^{(\nu)}_{\overline{r_\nu};\, j_\nu}(\lambda), \ldots, \chi^{(\nu)}_{r_\nu - 1;\, j_\nu}(\lambda) \qquad (\nu = m+1, \ldots, n). \tag{5.26}$$

Из решений (5.25) — (5.26) составим произведения типа (4.11):

$$\begin{gathered} X_\alpha(j;\ \lambda) = \chi^{(1)}_{\alpha_1;\, j_1}(\lambda_1) \ldots \chi^{(n)}_{\alpha_n;\, j_n}(\lambda_n) \\ (j = (j_1, \ldots, j_n) \in G,\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E_n), \end{gathered} \tag{5.27}$$

где векторный индекс $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ меняется по целочисленному параллелепипеду А точек с координатами

$$\alpha_1 = 0, \ldots, r_1 - 1; \ldots; \alpha_m = 0, \ldots, r_m - 1;$$

$$\alpha_{m+1} = \overline{r_{m+1}}, \ldots, r_{m+1} - 1; \ldots; \alpha_n = \overline{r_n}, \ldots, r_n - 1.$$

Теорема 5.5. *Рассмотрим п. о. ядро $K = K_{jk}(j,\ k \in G)$ и n разностных выражений* (5.23) *и построим произведения* (5.27). *Для того чтобы имело место представление*

$$K_{jk} = \int\limits_{E_n} \sum_{\alpha, \beta \in A} X_\alpha(j;\lambda)\, \overline{X_\beta(k;\lambda)}\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \qquad (j, k \in G) \tag{5.28}$$

с неотрицательной матричной мерой $\| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\beta \in A}$, необходимо и достаточно выполнение двух требований: а) имеют место равенства (5.24); *б) n эрмитовых операторов в H_K $u \to L^{(j)+} u$ ($u \in l_{2,0}(G)$) допускают расширение в H_K или с выходом в более широкое пространство до системы коммутирующих самосопряженных операторов. Имеет место также понятный критерий единственности представления* (5.28).

Ясно, что интеграл в (5.28) сходится для каждых j, k в смысле $L_2(C_l;\ (-\infty,\ \infty), \| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\beta \in A})$.

Подобно тому, как это сделано на стр. 709 для дифференциальных операторов, можно объединить технику п. 2 с теоремой 2.3 и доказать следующий аналог теоремы 4.3.

Теорема 5.6. *Пусть п. о. ядро $K = K_{jk} = K_{j_1, \ldots, j_n, k_1, \ldots, k_n}$ $(j, k \in G)$ удовлетворяет соотношениям* (5.24) *с разностными выражениями* (5.23), *имеющими постоянные коэффициенты (т. е. $a^{(\nu)}_{j_\nu \alpha} = a^{(\nu)}_\alpha$).*

Для того чтобы имело место представление (5.28) (*в котором мера $\| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\beta \in A}$ определяется однозначно*), *достаточно выполнение следующей оценки*

$$| K_{j_1, \ldots, j_n;\, k_1, \ldots, k_n} | \leqslant C N^{|j_1| + \ldots + |j_n| + |k_1| + \ldots + |k_n|} \times$$

$$\times |j_1|^{\frac{|l_1|}{\varrho_1}} \ldots |j_n|^{\frac{|l_n|}{\varrho_n}} |k_1|^{\frac{|k_1|}{\varrho_1}} \ldots |k_n|^{\frac{|k_n|}{\varrho_n}} \qquad (j, k \in G), \tag{5.29}$$

где $\varrho_\nu = \max(r_\nu^-, r_\nu^+)$ *при* $\nu \leqslant m$ *и* $\varrho_\nu = r_\nu^+$ *при* $\nu \geqslant m+1$. *При этом дополнительно предполагается равенство дефектных чисел каждого оператора в* H_K *вида* $u \to L^{(\nu)+}u$, $u \in l_{2,0}(G)$.

Перейдем к примерам интегральных представлений п. о. ядер, связанных с обыкновенными разностными выражениями.

4. Классическая степенная проблема моментов. Так называется следующая задача: пусть задана последовательность вещественных чисел s_0, s_1, ... Спрашивается, при каких условиях она допускает представление

$$s_j = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^j d\sigma(\lambda) \qquad (j = 0, 1, \ldots), \tag{5.30}$$

где $d\sigma(\lambda)$ некоторая неотрицательная мера (из сходимости интеграла при $j = 0$ следует конечность этой меры).

Из теоремы 5.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 5.7. *Для того чтобы имело место представление* (5.30), *необходима и достаточна п. о. ядра*

$$K_{jk} = s_{j+k} \qquad (j, k = 0, 1, \ldots). \tag{5.31}$$

Доказательство. Если s_j имеет вид (5.30), то п. о. ядра (5.31) устанавливается непосредственно. Наоборот, пусть s_j такова, что $K_{jk} = s_{j+k}$ п. о. $(j, k = 0, 1, \ldots)$. Рассмотрим разностное выражение $(Lu)_j = (Tu)_j = u_{j+1}$ $(r = r^+ = 1, r^- = 0)$ на полуоси $[0, \infty)$. Так как $L_j K = s_{j+1+k} = L_k K$ и $\bar{L} = L$, то выполнено условие $*$-коммутируемости (5.6) и имеет место представление (5.9). Вычисляя $\chi_{0;j}(\lambda)$, получим $u_{j+1} - \lambda u_j = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$, $u_0 = 1$, откуда $\chi_{0;j}(\lambda) = \lambda^j$. Итак,

$$s_{j+k} = K_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{j+k} d\sigma_{00}(\lambda) \qquad (j, k = 0, 1, \ldots),$$

что эквивалентно (5.30). Теорема доказана.

Последовательность $s_j (j = 0, 1, \ldots)$, допускающая представление (5.30), носит название моментной. Мера $d\sigma(\lambda)$ в (5.30) определяется, вообще говоря, неоднозначно — замыкание оператора $u \to T^+ u$ $(u \in l_{2,0}([0, \infty))$ не всегда будет максимально в H_K. Проблема моментов называется определенной или нет в зависимости от того, однозначно определяется $d\sigma(\lambda)$ или нет. Из теоремы 5.4 вытекает, что *проблема моментов будет определенной, если выполняется оценка*

$$|s_j| \leqslant CN^j j^j \qquad (C, N > 0; \qquad j = 0, 1, \ldots). \tag{5.32}$$

Действительно, для ядра (5.31) получаем: $|K_{jk}| \leqslant \sqrt{K_{jj}K_{kk}} = \sqrt{s_{2j}s_{2k}} \leqslant$ $\leqslant C(2N)^{j+k} j^j k^k$ $(j, k = 0, 1, \ldots)$, что обеспечивает (5.19).

Заметим, что для любой моментной последовательности имеет место равенство дефектных чисел оператора $Cu = T^+u$ $(u \in l_{2,0}([0, \infty)))$. Это следует из его вещественности относительно инволюции в H_K, вводимой как замыкание оператора $u_j \to \bar{u}_j$ $(u \in l_2([0, \infty)))$. Поэтому условие определенности эквивалентно требованию самосопряженности в H_K замыкания C.

Установим более тонкие критерии определенности проблемы моментов. Для этого напомним некоторые факты теории квазианалитических функций (см., например, С. Мандельбройт [1], гл. 1, стр. 9—35).

Пусть $[a, b]$ — конечный отрезок вещественной оси, $(m_0, m_1, \ldots)$ — фиксированная последовательность положительных чисел. Классом $C(m_n)$ называется линейная совокупность всех функций $f(t) \in C^\infty([a, b])$, для каждой из которых справедливы оценки

$$|(D^n f)(t)| \leqslant K_f^n m_n \qquad (t \in [a, b];\ n = 0, 1, \ldots), \tag{5.33}$$

где $K_f > 0$ — зависящая от f константа.

Как известно, класс аналитических на $[a, b]$ функций $f(t)$ характеризуется оценками (5.33), в которых положено $m_n = n!$. Для этого класса $C(n!)$, очевидно, имеет место следующий факт. Если $f \in$ $\in C(n!)$ такова, что в фиксированной точке $t_0 \in [a, b]$ $(D^n f)(t_0) = 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$, то $f(t) = 0$ при $t \in [a, b]$. С целью обобщения этой ситуации вводится следующее определение. Класс $C(m_n)$ называется квазианалитическим, если из того, что в некоторой фиксированной точке $t_0 \in [a, b]$ для $f \in C(m_n)$ справедливы равенства $(D^n f)(t_0) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, следует $f(t) = 0$ $(t \in [a, b])$.

Класс $C(m_n)$ будет квазианалитическим, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}} = \infty. \tag{5.34}$$

Необходимое и достаточное условие квазианалитичности $C(m_n)$ (Карлеман) выглядит так: построим для $r \in [1, \infty)$ функцию $T(r) =$ $= \sup\limits_{n=0,1,\ldots} r^n/m_n$, тогда должно выполняться условие:

$$\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^2}\, dr = +\infty. \tag{5.35}$$

Из этого условия (а также и непосредственно) видно, что квазианалитичность класса $C(m_n)$ не зависит от выбора отрезка $[a, b]$. Очевидно, что два класса $C(m_n)$ и $C(d^n m_n)$ $(d > 0)$ одновременно квазианалитичны или нет; то же самое можно сказать о классах $C(m_n)$ и $C(m_n + d)$.

Перейдём к применению в проблеме моментов. Мы изложим подход с использованием задачи Коши. Его можно перенести на общие выражения (5.1) и ослабить ограничения (5.19) так же, как сейчас будут ослаблены (5.29).

Лемма 5.3. *Будем рассматривать в гильбертовом пространстве $H = l_2([0, \infty), m_j)$ слабые решения уравнения (2.7), где $Su = \bar{\zeta}T^+u$, $u \in l_{2,0}([0, \infty))$; $\zeta \neq 0$ — фиксированное комплексное число. Единственность таких решений задачи Коши имеет место тогда и только тогда, когда класс $C(\sqrt{m_n})$ квазианалитический.*

Доказательство. Слабо дифференцируемая вектор-функция $u(t) = (u_0(t), u_1(t), \ldots)$ $(t \in [0, \infty))$ со значением в пространстве $l_2([0, \infty), m_j) = H$ будет слабым решением нашего уравнения, если выполняется равенство (2.8) с $f = \delta_k \in \mathfrak{D}(S)$, где $k = 0, 1, \ldots$ любое. Но $(S\delta_k)_j = \bar{\zeta}\delta_{k, j-1} = \bar{\zeta}(\delta_{k+1})_j$, поэтому это равенство перепишется в виде $m_k \dfrac{du_k(t)}{dt} - \zeta m_{k+1}u_{k+1}(t) = 0$ $(t \in [0, \infty);\ k = 0, 1, \ldots)$. Полагая $v_j(t) = m_j u_j(t)$, получим

$$\frac{dv_k(t)}{dt} - \zeta v_{k+1}(t) = 0 \qquad (t \in [0, \infty);\ k = 0, 1, \ldots). \tag{5.36}$$

Значения вектор-функции $v(t) = (v_0(t), v_1(t), \ldots)$ будут принадлежать пространству $l_2([0, \infty), m_j^{-1})$, т. е. при каждом $t \in [0, \infty)$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|v_j(t)|^2}{m_j} = c(t) < \infty. \tag{5.37}$$

Более того, так как $u(t)$ слабо дифференцируема, то она и слабо непрерывна на $[0, \infty)$, а поэтому и ограничена при $t \in [0, T]$, где $T > 0$ любое. Следовательно, $c(t) = \| u(t) \|^2 \leqslant C_T$ при $t \in [0, T]$.

Рекуррентно определяя из (5.36) $v_k(t)$, найдем, что $v_k(t) = \left(\dfrac{1}{\zeta}\right)^k (D_k v_0)(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Условие (5.37) перепишется в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{|\zeta|^{2j} m_j} |(D^j v_0)(t)|^2 \leqslant C_T < \infty \qquad (t \in [0, T], T > 0). \tag{5.38}$$

Итак, рассматриваемая единственность в задаче Коши эквивалентна следующему: имеется функция $v_0(t) \in C^\infty([0, \infty))$, удовлетворяющая

(5.38). В каких случаях из равенств $(D^j v_0)(0) = 0$ $(j = 0, 1, \dots)$ можно заключить, что $v_0(t) \equiv 0$.

Пусть класс $C(\sqrt{m_n})$ квазианалитический. Так как из (5.38) следуют неравенства $|(D^j v_0)(t)| \leqslant \sqrt{C_T}|\zeta|^j \sqrt{m_j}$ $(t \in [0, T];\ j=0, 1, \dots)$, то $v_0 \in C(\sqrt{m_n})$. Поэтому из равенств $(D^j v_0)(0) = 0$ $(j = 0, 1, \dots)$ вытекает, что $v_0(t) = 0$ $(t \in [0, T])$, т. е. имеет место единственность.

Наоборот, пусть единственность в задаче Коши предполагается. Рассмотрим некоторую функцию $f(t) \in C^\infty([0, T])$ из класса $C(\sqrt{m_n})$; $(D^n f)(0) = 0$ $(n = 0, 1, \dots)$. Функция $v_0(t) = f(\varepsilon t)$ $(\varepsilon > 0, t \in [0, T/\varepsilon])$ также будет входить в $C(\sqrt{m_n})$ и $(D^n v_0)(0) = 0$ $(n = 0, 1, \dots)$. Вместе с тем выбором достаточно малого ε можно добиться того, что неравенства (5.33) для нее примут вид $|(D^j v_0)(t)| \leqslant C^j \sqrt{m_j}$ $(t \in [0, T/\varepsilon];\ j = 0, 1, \dots)$, где $C < |\zeta|$. Это обеспечит сходимость ряда (5.38) и поэтому согласно предположению $v_0(t) = 0$ $(t \in [0, T/\varepsilon])$, т. е. $f(t) = 0$ в $[0, T]$. Итак, класс $C(\sqrt{m_n})$ квазианалитический. Лемма доказана.

Теорема 5.8. *Пусть s_j $(j = 0, 1, \dots)$ — моментная последовательность. Если класс $C(\sqrt{s_{2n}})$ квазианалитический, то проблема моментов определенная.*

Доказательство. Положим $K_{jk} = s_{j+k}$, $p_j = d^j(\sqrt{s_j} + 1)^2$ $(j, k = 0, 1, \dots;\ d > 1)$. Для п. о. ядра K_{jk} и этой последовательности $p_j > 1$ ряд типа (5.4) сходится, поэтому в схеме п. 1 можно принять $H_+ = l_2([0, \infty), d^j(\sqrt{s_{2j}} + 1)^2)$. Применим теорему 2.5, 2); вопрос сводится к доказательству единственности слабых решений задачи Коши в пространстве H_+ для уравнений

$$\frac{du}{dt} \pm (iB)^* u = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty),$$

где $Bu = T^+ u$, $u \in l_{2,0}([0, \infty))$. Согласно лемме 5.3 такая единственность будет иметь место, если класс $C(\sqrt{p_n}) = C(d^{\frac{n}{2}}(\sqrt{s_{2n}} + 1))$ квазианалитический или, что то же, класс $C(\sqrt{s_{2n}})$—квазианалитический. Теорема доказана.

Можно показать, что условия теоремы близки к необходимым. Из признаков квазианалитичности (5.34) и (5.35) вытекает

Следствие (критерий Карлемана). Проблема моментов будет определенной, если

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2j]{s_{2j}}} = \infty \tag{5.39}$$

или, точнее, если имеет место (5.35), где положено

$$T(r) = \sup_{j=0,1,\dots} \frac{r^j}{\sqrt{s_{2j}}} \qquad (r \in [1, \infty))^*. \tag{5.40}$$

Ввиду простоты выражения L для случая проблемы моментов просто записываются условия того, чтобы мера $d\sigma(\lambda)$ в представлении (5.30) была сосредоточена на полуоси $[0, \infty)$ (это так называемая проблема моментов Стилтьеса) или на заданном сегменте $[a, b]$ (так называемая конечная проблема моментов).

Действительно, если $d\sigma(\lambda)$ сосредоточена на $[0, \infty)$, то соответствующее ей расширение оператора $Bu = T^+u (u \in l_{2,0}([0, \infty)))$ неотрицательно и поэтому и сам B неотрицателен. Наоборот, если этот оператор неотрицателен, то он допускает неотрицательные самосопряженные расширения, которым отвечает $d\sigma(\lambda)$, сосредоточенная на $[0, \infty)$. Условие неотрицательности имеет вид: при $u \in l_{2,0}([0, \infty))$ $0 \leqslant \langle T^+u, u\rangle = \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} u_{k-1} \bar{u}_j = \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k+1} u_k \bar{u}_j$ $(u_{-1} = 0)$.
Итак, для того чтобы для моментной последовательности s_j существовало представление (5.30) с мерой $d\sigma(\lambda)$, сосредоточенной на $[0, \infty)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k+1} \xi_k \bar{\xi}_j \geqslant 0 \qquad (\xi \in l_{2,0}([0, \infty))). \tag{5.41}$$

Аналогично для конечности проблемы моментов необходимо и достаточно выполнение условия $a\langle u, u\rangle \leqslant \langle Bu, u\rangle \leqslant b\langle u, u\rangle$ $(u \in l_{2,0}([0, \infty)))$, т. е. для моментной последовательности s_j условия

$$a \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} \xi_k \bar{\xi}_j \leqslant \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k+1} \xi_k \bar{\xi}_j \leqslant b \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} \xi_k \bar{\xi}_j \qquad (\xi \in l_{2,0}([0, \infty))). \tag{5.42}$$

Ясно, что в этом случае проблема моментов определенная.

Остановимся на вырожденной проблеме моментов. Моментная последовательность называется вырожденной, если существует вектор $(\xi_0, \dots, \xi_N) \neq 0$ такой, что

$$\sum_{j,k=0}^{N} s_{j+k} \xi_k \bar{\xi}_j = 0. \tag{5.43}$$

---

* На стр. 680 была выведена из критерия (5.39) теорема 3.13 о п. о. функциях. С другой стороны, ее можно вывести непосредственно из критерия (5.34) квазианалитичности (нужно учесть, что $|k^{(2n)}(t)| \leqslant (-1)^n k^{(2n)}(0) = m_{2n}$). Далее, эта теорема влечет критерий (5.39)—следует по мере из (5.30) построить п. о. функцию (3.40) и учесть, что в (3.40) мера определяется однозначно благодаря выполнению условия (3.57). Как говорилось, рассуждения на стр. 734—735 более общие: они переносятся на произвольные выражения (5.1).

Легко понять, что *в этом случае проблема моментов будет определенной и мера* $d\sigma(\lambda)$ *сосредоточена в конечном числе точек. Количество этих точек равно минимальному из чисел* N, *для которых выполняется условие* (5.43). *Наоборот, если* $d\sigma(\lambda)$ *сосредоточена в конечном числе точек, то имеется вырождение* (5.43).

В самом деле, как уже говорилось, на разностный случай переносится теорема 3.8. Так как сейчас $r = 1$, то для ее справедливости достаточно вырождения формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на одном векторе, т. е. условия (5.43). Аналогом решения $\chi_0(x;\lambda)$, фигурирующего в доказательстве этой теоремы (при $r=1$), будет служить λ^j—полином по λ. Из рассуждения на стр. 660—661 видно, что в этом случае $d\sigma(\lambda)$ сосредоточена на конечном множестве точек $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subset (-\infty, \infty)$. Обозначая $\sigma(\{\lambda_\alpha\}) = \sigma_\alpha$ и подставляя в (5.43) представление (5.30), получим: $\sum_{\alpha=1}^{m}\left|\sum_{j=0}^{N}\xi_j\lambda_\alpha^j\right|^2\sigma_j = 0$, т. е. полином $\tilde{\xi}(\lambda) = \sum_{j=0}^{N}\xi_j\lambda^j$ аннулируется в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Отсюда легко следуют остальные из доказываемых утверждений.

5. Связь с теорией якобиевых матриц. С проблемой моментов, рассмотренной в п.4, связано согласно общей теории пространство H_K— пополнение $H_+ = l_2([0,\infty), p_j)$ или $l_{2,0}([0,\infty))$ относительно скалярного произведения $\langle u, v\rangle = \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k}u_k\bar{v}_j$. При этом сперва, если нужно, производится отождествление. Мы только что видели, что в случае отождествления, т. е. наличия вырождения (5.43), ситуация будет простой, поэтому ниже предполагается отсутствие вырождения. Без ограничения общности можно считать $s_0 = 1$.

Произведем в H_K процедуру ортогонализации δ-последовательностей $\delta_0, \delta_1, \ldots$, аналогичную проведенной в п. 9, § 3 (вернее, мы там производили ортогонализацию, аналогичную рассматриваемому сейчас более простому случаю). Получим последовательность векторов $p_0 = \delta_0, p_1, \ldots \in l_{2,0}([0,\infty))$ — ортонормированный базис в H_K. Процедура ортогонализации однозначна, если каждый вектор $p_n \perp \{\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}\}$ мы будем искать в виде $p_n = c_n\delta_n + \ldots + c_0\delta_0$, где все c_j вещественны и $c_n > 0$; именно так мы и будем поступать. Так как предполагалось отсутствие вырождения, то базис $p_0, p_1, \ldots$ — бесконечен. Можно было бы выписать обычные формулы перехода от базиса $\delta_0, \delta_1, \ldots$ к базису $p_0, p_1, \ldots$, однако они нам не понадобятся. Обозначим лишь F оператор в H_K, переводящий $\delta_0, \delta_1, \ldots$ в $p_0, p_1, \ldots$: $F\delta_k = p_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$; F^{-1} существует на $l_{2,0}([0,\infty)) \subset H_K$, но, вообще говоря, неограничен.

Иногда удобно пользоваться другой интерпретацией пространства H_K для случая проблемы моментов. Свяжем с каждым $u \in l_{2,0}([0,\infty))$ полином $\widetilde{u}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \lambda^j$ и H_K будем мыслить как пространство всех полиномов $\widetilde{u}(\lambda)$, для которых определено невырожденное скалярное произведение

$$\langle \widetilde{u}(\lambda), \widetilde{v}(\lambda) \rangle = \langle u, v \rangle = \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} u_k \bar{v}_j \qquad (u, v \in l_{2,0}([0,\infty))). \tag{5.44}$$

Если для последовательности s_j уже получено представление (5.30) с некоторой $d\sigma(\lambda)$, то скалярное произведение (5.44), очевидно, запишется в виде

$$\langle \widetilde{u}(\lambda), \widetilde{v}(\lambda) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}(\lambda) \overline{\widetilde{v}(\lambda)}\, d\sigma(\lambda). \tag{5.45}$$

Введем полиномы $P_j(\lambda) = \widetilde{p}_j(\lambda)$ $(j = 0, 1, \dots;\ P_0(\lambda) = \widetilde{\delta}_0(\lambda) \equiv 1)$; они ортонормированы в скалярном произведении (5.44) — (5.45) и образуют базис в H_K.

Из сказанного ясно, что H_K можно также интерпретировать как пространство $l_2([0,\infty))$, если пользоваться базисом $p_0, p_1, \dots$ (или $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots$). Во всяком случае для $u \in l_{2,0}([0,\infty))$ можно писать: $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \delta_k = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{u}_j p_j$, отсюда $\hat{u}_j = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \langle \delta_k, p_j \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{F}_{jk} u_k$, где $\| \mathrm{F}_{jk} \|_0^{\infty} = \| \langle \delta_k, F\delta_j \rangle \|_0^{\infty} = \mathrm{F}$; u_j вычисляется по $\hat{u}_k$ при помощи формально обратной матрицы F^{-1}. Так как и δ_k и p_k входят в $l_{2,0}([0,\infty))$, то матрицы F и F^{-1} переводят финитные последовательности в финитные.

Запишем оператор $Bu = T^+ u$ $(u \in l_{2,0}([0,\infty)))$ в базисе $p_0, p_1, \dots$. Очевидно, он имеет вид $\hat{u}_j \to (\mathrm{F}T^+\mathrm{F}^{-1}\hat{u})_j$ $((\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots) \in l_{2,0}([0,\infty)))$. Подсчитаем элементы матрицы $\mathrm{F}T^+\mathrm{F}^{-1}$. Это проще сделать не непосредственно, а при помощи следующего соображения. Так как $T^+\delta_k = \delta_{k+1}$, то $\widetilde{(T^+\delta_k)}(\lambda) = \widetilde{\delta}_{k+1}(\lambda) = \lambda \widetilde{\delta}_k(\lambda)$. Таким образом, в интерпретации H_K как пространства полиномов со скалярным произведением (5.45) оператор B выглядит как оператор умножения на λ. Но мы знаем, что такой оператор может рассматриваться и как действие якобиевой матрицы — см. п. 5, § 1, гл. VII (заметим, что благодаря невырожденности $\sigma(\lambda)$ имеет бесконечное число точек роста). Элементы этой матрицы подсчитываются посредством формул (1.33), гл. VII, где полиномы $P_j(\lambda)$ совпадают с введенными только что. Ясно, что и действие якобиевой матрицы можно интерпретировать как оператор B в некотором H_K. Сказанное резюмируем в виде следующей теоремы.

Теорема 5.9. *Пусть задана невырожденная моментная последовательность s_j $(j = 0, 1, \ldots)$, построим пространство H_K, $K_{jk} = s_{j+k}$ $(j, k = 0, 1, \ldots)$. Перейдем в этом пространстве от базиса $\delta_0, \delta_1, \ldots$ к описанному ортонормированному базису $p_0, p_1, \ldots$. Оператор $Bu = T^+u$ $(u \in l_{2,0}([0, \infty)))$ в базисе $p_0, p_1 \ldots$ запишется как действие якобиевой матрицы, элементы которой находятся по формулам*

$$a_j = \langle T^+p_j, p_{j+1}\rangle = \langle \lambda P_j(\lambda), P_{j+1}(\lambda)\rangle,$$

$$b_j = \langle T^+p_j, p_j\rangle = \langle \lambda P_j(\lambda), P_j(\lambda)\rangle \qquad (j = 0, 1, \ldots).$$

Наоборот, пусть задана некоторая якобиева матрица (1.5), гл. VII. Построим по ней систему полиномов первого рода $P_0(\lambda)$, $P_1(\lambda), \ldots$; $d\sigma(\lambda)$ — некоторая ее спектральная мера. Пусть

$$\lambda^n = c_n^{(n)}P_n(\lambda) + \ldots + c_0^{(n)}P_0(\lambda) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Тогда $s_n = c_0^{(n)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \cdot 1\, d\sigma(\lambda)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *является невырожденной моментной последовательностью. Если по ней при помощи первой части теоремы построить якобиеву матрицу, то получим исходную матрицу.*

Так как теория проблемы моментов сводится к спектральной теории оператора B, а § 1, гл. VII — построение спектральной теории именно этого оператора, только записанного в другом базисе, то все полученные там результаты немедленно прилагаются к проблеме моментов. В частности, теоремы 1.12—1.14, гл. VII, дают описание всех решений $d\sigma(\lambda)$ проблемы моментов — т. е. всех спектральных плотностей в терминологии гл. VII.

В заключение пункта покажем, что критерий Карлемана определенности проблемы моментов (5.39) является следствием критерия (1.8), гл. VII, самосопряженности разностного оператора. В самом деле, из построения полиномов первого рода $P_j(\lambda)$ ясно, что $P_j(\lambda) =$

$= \frac{1}{a_0 \ldots a_{j-1}} \lambda^j + \ldots$, поэтому учитывая их ортонормированность относительно любой спектральной меры $d\sigma(\lambda)$ и формулы (1.33), гл. VII, получим:

$$a_j = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_j(\lambda) P_{j+1}(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda^{j+1}}{a_0 \ldots a_{j-1}} + \lambda(\ldots) \right) P_{j+1}(\lambda) d\sigma(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{a_0 \ldots a_{j-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{j+1} P_{j+1}(\lambda)\, d\sigma(\lambda) \leqslant \frac{1}{a_0 \ldots a_{j-1}} \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2(j+1)} d\sigma(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} P_{j+1}^2(\lambda)\, d\sigma(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_0 \ldots a_{j-1}} \sqrt{s_{2(j+1)}},$$

т. е. $a_0 \ldots a_j \leqslant \sqrt{s_{2(j+1)}}$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Пусть условие (5.39) выполнено. Тогда в силу полученного неравенства

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{a_0 \ldots a_j}} = \infty. \tag{5.46}$$

Если теперь воспользоваться общим неравенством

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{u_1 \ldots u_n} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (u_n > 0;\ n = 1, 2, \ldots)$$

(см., например, Н. И. Ахиезер [2], гл. 2, стр. 110 — 111), то из (5.46) заключаем, что расходится ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{a_j}$. Согласно теореме 1.3, гл. VII, разностный оператор L самосопряженный, т. е. проблема моментов определенная.

6. **Другие примеры представлений.** Приведем еще три примера к общим теоремам 5.1 — 5.3. Их количество подобно рассмотрениям п п. 11 — 12, § 3, можно было бы увеличить.

1) Пусть c_j $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ такая последовательность, что ядро $K_{jk} = c_{j+k}$ $(j, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ п. о. Как и в п. 4, положим $L = T$, условие $*$-коммутируемости (5.6) будет выполнено и поэтому справедливо (5.9). Сейчас $r = 0$ и $\chi_{0;j}(\lambda) = \lambda^j$ $(j = \ldots, -1,$

$0, 1, \ldots$). Таким образом, мы получаем:

$$c_j = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^j d\sigma(\lambda) \qquad (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots). \tag{5.47}$$

Ясно, что наша последовательность c_j, рассматриваемая при $j = 0, 1, \ldots$, будет моментной. Это, в частности, дает достаточные условия однозначности $d\sigma(\lambda)$ в (5.47). Однако обратное неверно: не всякую моментную последовательность s_j ($j = 0, 1, \ldots$) можно продолжить на $j = -1, -2, \ldots$ с сохранением п. о. ядра $K_{jk} = s_{j+k}$. Как видно из (5.30), для этого необходимо и достаточно, чтобы мера $d\sigma(\lambda)$ вблизи $\lambda = 0$ была такова, что все интегралы $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\lambda|^j d\sigma(\lambda)$ ($\varepsilon > 0$; $j = -1, -2, \ldots$) существуют.

2) Рассмотрим четную последовательность c_j ($c_{-j} = c_j$; $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$) такую, что ядро $K_{jk} = \frac{1}{2}[c_{j+k} + c_{j-k}]$ (j, $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$) п. о.. Этот случай подобен примеру 1), п. 11, § 3. Возьмем сейчас $(Lu)_j = u_{j-1} + u_{j+1} = (T^+u)_j + (Tu)_j$ ($L^+ = L = \overline{L}$). Имеем

$$(L_jK)_{jk} = \frac{1}{2}[c_{j-1+k} + c_{j-1-k}] + \frac{1}{2}[c_{j+1+k} + c_{j+1-k}] = (L_kK)_{jk}$$

$$(j, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots),$$

поэтому справедливо представление (5.9) с указанным L. Так же, как и на стр. 697, отсеиваем нечетные решения уравнения $(Lu)_j = \lambda u_j$ ($j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$). Четные решения, как нетрудно подсчитать, будут иметь вид: $\chi_{0;j}(\lambda) = P_j(\lambda)$ ($j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$), где $P_j(\lambda) = \cos\left(j \arccos \frac{\lambda}{2}\right)$ — полиномы Чебышева первого рода (ср. с (1.88), гл. VII). Итак, для четной последовательности c_j п. о. ядра $K_{jk} = \frac{1}{2}[c_{j+k} + c_{j-k}]$ (j, $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$) эквивалентна представлению

$$c_j = \int_{-\infty}^{\infty} P_j(\lambda)\, d\sigma(\lambda) \qquad (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots) \tag{5.48}$$

с некоторой конечной неотрицательной мерой $d\sigma(\lambda)$. Теорема 5.3 дает критерий однозначности определения меры $d\sigma(\lambda)$ по c_j: достаточно, чтобы $|c_j| \leqslant CN^{|j|}|j|^{|j|}$ $(C, N > 0;\ j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$.

3) Имеется одно важное представление, которое формально не вкладывается в теорию этой главы*. Именно, последовательность c_j $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ называется п. о., если ядро $K_{jk} = c_{k-j}$ $(j, k = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$ п. о. Такая последовательность допускает представление (теорема Герглотца):

$$c_j = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda j} d\sigma(\lambda) \qquad (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots), \tag{5.49}$$

где $d\sigma(\lambda)$—некоторая конечная неотрицательная мера. Если мы построим пространство H_K по ядру K_{jk}, то в нем оператор $Bu = T^+u$ $(u \in l_{2,0}((-\infty, \infty))$ будет не эрмитовым, а изометрическим, который после замыкания превращается в унитарный. Если теперь воспользоваться спектральной теоремой для унитарных операторов, то мы аналогично эрмитовому случаю получим представление (5.49). Мера в этом представлении, благодаря ограниченности рассматриваемого оператора, определяется по c_j однозначно.

Перейдем к примерам, связанным с $q > 1$ разностными выражениями.

7. Многомерная степенная проблема моментов. Будем рассматривать множество G целочисленных точек $j = (j_1, \ldots, j_n)$, где $j_1, \ldots, j_n = 0, 1, \ldots$ (т. е. $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(n)}$; $G^{(\nu)}$ — полуоси). Спрашивается, при каких условиях последовательность s_j $(j \in G)$ можно представить в виде

$$s_j = s_{j_1, \ldots, j_n} = \int_{E_n} \lambda_1^{j_1} \ldots \lambda_n^{j_n} d\sigma(\lambda) \qquad (j = (j_1, \ldots, j_n) \in G), \tag{5.50}$$

где $d\sigma(\lambda)$ — некоторая неотрицательная мера (конечная в силу равенства (5.50) при $j = (0, \ldots, 0)$). Если (5.50) имеет место, то ядро $K_{jk} = s_{j+k}$ $(j, k \in G)$ очевидно п. о. При $n = 1$ п. о. этого ядра, как мы знаем (см. п. 4), достаточна для справедливости представления (5.50); если $n > 1$, то п. о. уже недостаточно (соответствующий пример, вытекающий из конструкции Гильберта положительного полинома от двух переменных, не являющегося суммой квадратов модулей таких полиномов, см., например, в книге И. М. Гельфанда, Н. Я Виленкина [1], гл. 2, § 7, стр. 287—295).

Сейчас мы приведем некоторые условия, которые вместе с

---

* Схему этой главы нетрудно обобщить на случай операторов, допускающих нормальные расширения. Тогда пример 3) включился бы в построенную теорию.

п. о. ядра $K_{jk}=s_{j+k}$ уже будут достаточными для справедливости (5.50). Предварительно заметим, что п. о. этого ядра влечет вещественность последовательности s_j $(j\in G)$, а так как последовательность s_j будет связываться с выражениями с вещественными коэффициентами, то это влечет равенство дефектных чисел соответствующих операторов типа $u\to L^{(\nu)+}u$, $u\in l_{2,0}(G)$.

Теорема 5.10. *Пусть последовательность* s_j $(j\in G)$ *такова, что ядро* $K_{jk}=s_{j+k}$ $(j,\ k\in G)$ *п. о. и имеет место оценка*

$$|s_j|\leqslant CN^{j_1+\ldots+j_n}j_1^{j_1}\ldots j_n^{j_n}\qquad (j=(j_1,\ldots,j_n)\in G)\qquad (5.51)$$

с некоторыми $C,\ N>0$. *Тогда справедливо представление* (5.50) *и мера* $d\sigma(\lambda)$ *в нем определяется однозначно.*

Эта теорема вытекает из теоремы 5.6. Действительно, из (5.51) следует:

$$|K_{jk}|\leqslant\sqrt{K_{jj}K_{kk}}=\sqrt{s_{2j}s_{2k}}\leqslant\qquad (5.52)$$
$$\leqslant C(2N)^{j_1+\ldots+j_n+k_1+\ldots+k_n}j_1^{j_1}\ldots j_n^{j_n}k_1^{k_1}\ldots k_n^{k_n}\qquad (j,\ k\in G).$$

В теореме 5.6 нужно положить $L^{(\nu)}=T_\nu$, тогда $\varrho_\nu=r_\nu^+=1$ $(\nu=1,\ldots,n)$ и оценка (5.52) обеспечивает выполнение (5.29). Записав для нашего случая представление (5.28), получим (5.50).

Замечание. В теореме 5.10 неравенство (5.51) можно ослабить, заменив его оценкой

$$\sqrt{s_{2j}}\leqslant Cm_{j_1}^{(1)}\ldots m_{j_n}^{(n)}\qquad (C>0:\ j\in G),\qquad (5.53)$$

где последовательности положительных чисел $m_{j_1}^{(1)},\ldots,m_{j_n}^{(n)}$ таковы, что каждый из классов $C(m_{j_1}^{(1)}),\ldots,C(m_{j_n}^{(n)})$ квазианалитический.

В самом деле, будем проводить конструкцию п. 3 для $K_{jk}=s_{j+k}$ $(j,k\in G)$, положив $p_j=d_1^{j_1}(m_{j_1}^{(1)}+1)^2\ldots d_n^{j_n}(m_{j_n}^{(n)}+1)^2$ $(j\in G)$, где $d_1,\ldots,d_n>1$. Такой выбор p_j возможен благодаря оценке (5.53), обеспечивающей сходимость ряда $\sum\limits_{j\in G}\frac{K_{jj}}{p_j}$. Таким образом, теперь $H_+^{(\nu)}=l_2([0,\infty),\ d_\nu^j(m_j^{(\nu)}+1)^2)$ $(\nu=1,\ldots,n)$. Наше утверждение вытекает из общей теоремы 2.3 и леммы 5.3 (ср. с доказательством теоремы 5.8).

Получим сейчас несколько более тонкую теорему, в которой уже не будут участвовать «мультипликативные» оценки (5.51) или (5.53). Ее доказательство основывается на теореме 2.2. Предварительно заметим, что незначительно изменив рассуждения на стр. 634—635 можно формулировку этой теоремы усилить.

Пусть при каждом $\nu = 1, \ldots, q$ $\mathfrak{R}(B_\nu) \subseteq \mathfrak{D}(B_\nu)$ *и замыкание оператора* B_ν *в любом пространстве* $H^{(\nu)}_{K;w_1,\ldots,w_{\nu-1},w_{\nu+1},\ldots w_q}$ $(w_l \in \mathfrak{D}(B_l),\ l \neq \nu)$ *самосопряжено. Тогда замыкания операторов* C_ν *самосопряжены в* H_K *и коммутируют.*

Лемма 5.4. *Пусть* s_j *такова, что ядро* $K_{jk} = s_{j+k}$ $(j, k \in G)$ *п. о. Для любого* $(N_1, \ldots, N_n) \in G$ *справедливо неравенство*

$$s_{2j} = s_{2j_1,\ldots,2j_n} \leqslant \sum_{l_1=0,2N_1;\ldots;l_n=0,2N_n} s_{l_1,\ldots,l_n}$$

$$(0 \leqslant j_1 \leqslant N_1, \ldots, 0 \leqslant j_n \leqslant N_n). \tag{5.54}$$

Доказательство. Пусть c_l $(l = 0, 1, \ldots)$ — одномерная моментная последовательность, согласно теореме 5.7 она допускает представление $c_l = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^l d\varrho(\lambda)$ $(l = 0, 1, \ldots)$. Если $l \leqslant N$, то $\lambda^{2l} \leqslant 1 + \lambda^{2N}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ и из этого представления вытекает неравенство

$$c_{2l} \leqslant c_0 + c_{2N} \qquad (0 \leqslant l \leqslant N). \tag{5.55}$$

При фиксированных $j_1, \ldots, j_{\nu-1}, j_{\nu+1}, \ldots, j_n$ последовательность $c_{j_\nu} = s_{2j_1,\ldots,2j_{\nu-1},j_\nu,2j_{\nu+1},\ldots,2j_n}$ $(j_\nu = 0, 1, \ldots)$ — одномерная моментная $(\nu = 1, \ldots, n)$. Применяя последовательно неравенство (5.55), получим

$$s_{2j_1,\ldots,2j_n} \leqslant s_{0,2j_2,\ldots,2j_n} + s_{2N_1,2j_2,\ldots,2j_n} \leqslant s_{0,0,2j_3,\ldots,2j_n} +$$
$$+ s_{0,2N_2,2j_3,\ldots,2j_n} + s_{2N_1,0,2j_3,\ldots,2j_n} + s_{2N_1,2N_2,2j_3,\ldots,2j_n} \leqslant$$
$$\leqslant \ldots \leqslant \sum_{l_1=0,2N_1;\ldots;l_n=0,2N_n} s_{l_1,\ldots,l_n} \qquad (0 \leqslant j_1 \leqslant N_1, \ldots, 0 \leqslant j_n \leqslant N_n).$$

Лемма доказана.

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 5.11. *Пусть последовательность* s_j $(j \in G)$ *такова, что ядро* $K_{jk} = s_{j+k}$ $(j, k \in G)$ *п. о. Если каждая одномерная моментная последовательность вида*

$$c_{j_\nu} = \sum_{\substack{l_1=0,2N;\ldots;l_{\nu-1}=0,2N;\\ l_{\nu+1}=0,2N;\ldots;l_n=0,2N}} s_{l_1,\ldots,l_{\nu-1},j_\nu,l_{\nu+1},\ldots,l_n}, \qquad j_\nu = 0, 1, \ldots \tag{5.56}$$

($N = 0, 1, \ldots; \nu = 1, \ldots, n$ *фиксированы*), *определенна, то справедливо представление* (5.50) *и мера* $d\sigma(\lambda)$ *в нем определяется однозначно.*

Доказательство. Построим по ядру $K_{jk} = s_{j+k}$ $(j, k \in G)$ пространства H_0, H_+ и т. д. так, как указано в п. 3. Сейчас нужно считать $L^{(\nu)} = T_\nu$, роль операторов B_ν играют отображения $u \to T_\nu^+ u$ $(u \in l_{2,0}([0, \infty)))$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Ясно, что $\mathfrak{R}(B_\nu) \subseteq \mathfrak{D}(B_\nu)$. Если мы докажем, что замыкание оператора B_ν в любом пространстве $H^{(\nu)}_{K; w_1, \ldots, w_{\nu-1}, w_{\nu+1}, \ldots, w_n}$ $(w_l \in l_{2,0}([0, \infty)) = \mathfrak{D}(B_l)$, $(l \neq \nu)$ самосопряжено, то условия сформулированного выше варианта теоремы 2.2 будут выполнены. Благодаря этой теореме можно будет применить теорему 5.5 и получить представление (5.50) с однозначно определяющейся $d\sigma(\lambda)$. Итак, нам осталось установить самосопряженность указанных замыканий операторов B_ν. Для определенности будем считать $\nu = 1$.

Скалярное произведение в пространстве $H^{(1)}_{K; w_2, \ldots, w_n}$ $(w_2, \ldots, w_n \in l_{2,0}([0, \infty)))$ имеет вид

$$\langle u, v\rangle_{w_2, \ldots, w_n} = \sum_{j_1, \ldots, j_n, k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} s_{j_1+k_1, j_2+k_2, \ldots, j_n+k_n} \times$$

$$\times u_{k_1} \bar{v}_{j_1} w_{2;k_2} \bar{w}_{2;j_2} \ldots w_{n;k_n} \bar{w}_{n;j_n} \tag{5.57}$$

$$(u, v \in H^{(1)}_+).$$

Последовательность $S_{j_2, \ldots, j_n} = \sum_{j_1, k_1 = 0}^{\infty} s_{j_1+k_1, j_2, \ldots, j_n} u_{k_1} \bar{u}_{j_1}$ $(u \in l_{2,0}([0, \infty)))$ очевидно такова, что ядро $K_{j_2, \ldots, j_n; k_2, \ldots, k_n} = S_{j_2+k_2, \ldots, j_n+k_n}$ $(j_2, \ldots, j_n, k_2, \ldots, k_n = 0, 1, \ldots)$ п. о., поэтому $|S_{j_2+k_2, \ldots, j_n+k_n}| \leqslant \sqrt{S_{2j_2, \ldots, 2j_n} S_{2k_2, \ldots, 2k_n}}$. Учитывая это неравенство, получим из (5.57)

$$\langle u, u\rangle_{w_2, \ldots, w_n} = \sum_{j_2, \ldots, j_n, k_2, \ldots, k_n = 0}^{\infty} S_{j_2+k_2, \ldots, j_n+k_n} \times$$

$$\times w_{2;k_2} \bar{w}_{2;j_2} \ldots w_{n;k_n} \bar{w}_{n;j_n} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j_2, \ldots, j_n = 0}^{\infty} \sqrt{S_{2j_2, \ldots, 2j_n}} \, |w_{2;j_2}| \ldots |w_{n;j_n}| \right)^2. \tag{5.58}$$

Пусть $N > 0$ столь велико, что все $w_{2;l}, \ldots, w_{n;l}$ аннулируются при $l > N$, тогда из (5.58) при помощи леммы 5.4, примененной к $S_{2j_2,\ldots,2j_n}$, следует:

$$\langle u, u\rangle_{w_2,\ldots,w_n} \leqslant C \sum_{j_2,\ldots,j_n=0}^{\infty} S_{2j_2,\ldots,2j_n} \leqslant C \sum_{l_2=0,2N;\ldots;l_n=0,2N} S_{l_2,\ldots,l_n} =$$

$$= C \sum_{j_1,k_1=0}^{\infty} \left(\sum_{l_2=0,2N;\ldots;l_n=0,2N} s_{j_1+k_1,l_2,\ldots,l_n} \right) u_{k_1}\bar{u}_{j_1} = \langle u, u \rangle_C \qquad (5.59)$$

$$(u \in l_{2,0}([0, \infty))),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_C$ — скалярное произведение, построенное по одномерной моментной последовательности вида (5.56) при $\nu = 1$. По предположению эта моментная последовательность определенная, поэтому замыкание оператора $u \to T_1^+ u$ $(u \in l_{2,0}([0, \infty)))$ в соответствующем H_C будет самосопряжено. Благодаря неравенству (5.59) таким же будет и требуемое замыкание этого оператора. Теорема доказана.

Теорема 2.6, естественно, применима к многомерной проблеме моментов. Как и относительно теоремы 2.2, предварительно заметим, что *в формулировке теоремы 2.6 можно считать w_2 не произвольным из $H_+^{(2)}$, а меняющимся по $\mathfrak{D}(B_2)$, если только предполагать включение $\mathfrak{R}(B_2) \subseteq \mathfrak{D}(B_2)$*. В таком виде теорема 2.6 позволяет установить следующий результат.

Теорема 5.12. *Пусть последовательность $s_j = s_{j_1,j_2}$ $(j_1, j_2 = 0, 1, \ldots)$ такова, что ядро $K_{jk} = s_{j+k}$ п. о. Если каждая одномерная моментная последовательность вида*

$$c_{j_1} = s_{j_1,0} + s_{j_1,2N}, \quad j_1 = 0, 1, \ldots \ (N = 0, 1, \ldots \ \textit{фиксировано}) \qquad (5.60)$$

определенна, то справедливо представление (5.50) (при $n = 2$) с, вообще говоря, неоднозначно определяющейся мерой $d\sigma(\lambda)$.

Доказательство. Проделаем те же построения, что и при выводе теоремы 5.11. Как и там, можно утверждать, что замыкание оператора $u \to T_1^+ u$ $(u \in l_{2,0}([0, \infty)))$ в любом пространстве $H^{(1)}_{K;w_2}$ $(w_2 \in l_{2,0}([0, \infty)))$ самосопряжено. Кроме того, операторы $C_1 u = T_1^+ u$, $C_2 u = T_2^+ u$ $(u \in l_{2,0}(G))$ вещественны относительно инволюции $\circ$, определяемой как переход к комплексной черте. Это позволяет применить высказанное видоизменение теоремы 2.6 и теорему 5.5 и закончить доказательство.

В заключение заметим, что подобно тому как это намечено в п. 4, § 4 можно было бы описывать всевозможные $d\sigma(\lambda)$, участвующие в представлении (5.50) для рассматриваемой сейчас последовательности s_j. На этих вопросах мы останавливаться не будем.

8. **О дальнейших примерах.** Из одномерных примеров п. 4 и п. 6 можно конструировать ряд многомерных примеров, подобно тому как это делалось в п. 3, § 4, для непрерывного случая. Например, можно было бы рассмотреть последовательность $c_j = c_{j_1, j_2}$ (j_1, $j_2 = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$), четную по каждой переменной и такую, что ядро $K_{jk} = \frac{1}{2}[c_{j+k} + c_{j-k}]$ п. о., или последовательность $c_j = c_{j_1, j_2}(j_1 = \ldots, -1, 0, 1, \ldots;\ j_2 = 0, 1, \ldots)$, четную по первой переменной и такую, что ядро $K_{jk} = \frac{1}{2}\,[c_{j_1+k_1, j_2+k_2} + c_{j_1-k_1, j_2+k_2}]$ п. о. Представление таких и подобных последовательностей легко получается по развитой схеме, результаты мы приводить уже не будем.

§ 6. Примеры, связанные с операторами в частных производных

Как мы знаем, общее представление (3.7) п. о. ядра через семейство элементарных п. о. ядер Ω_λ в случае обыкновенного дифференциального уравнения существенно улучшается, так как Ω_λ (x, y) можно выразить через фиксированую фундаментальную систему решений $\chi_j(\cdot\ ; \lambda)$ уравнения $Lu - \lambda u = 0$ и получить формулу (3.20). Сейчас мы покажем, что в некоторых случаях и для уравнений в частных производных и всегда для уравнений в частных разностях можно уточнить представление (3.7). Мы приведем самые простые примеры и не будем заниматься их обобщениями.

1. **Случай эллиптического выражения в ограниченной области и регулярного ядра.** Пусть $G \subset E_n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ; в G рассматривается формально самосопряженное эллиптическое выражение L порядка r с достаточно гладкими вещественными коэффициентами $a_\alpha(x)$, на Γ — формально самосопряженные граничные условия (гр), которые также предполагаются вещественными (т. е. из того, что $u(x) \in W_2^r$ (гр), следует: $\overline{u(x)} \in W_2^r$ (гр)). Предположим, что L, Γ и (гр) таковы, что оператор в пространстве $L_2(G)$ Λ' (гр) $= Lu$, $u \in \mathfrak{D}(\Lambda'$ (гр)$) = W_2^r$ (гр), самосопряжен*. Обозначим $\Phi_0(x, y; \lambda)$ и $d\varrho_0(\lambda)$ спектральные функцию и меру этого оператора.

Рассмотрим теперь $*$-коммутирующее с L вещественное п. о. ядро $K(x, y) \in C(G \times G)$, регулярное в том смысле, что $K \in L_2(G \times G, dxdy)$ и соотношение (3.4) выполняется не только для $u, v \in C_0^\infty(G)$, но и для $u, v \in W_2^r$ (гр) (если K достаточно гладко, то это эквивалентно тому, что $L_x K = L_y K$ и $K(x, y)$ по каждому из переменных удовлетворяет (гр)). Будем считать, что заведомо $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|+r+l+1}(G)$ $\left(l > \frac{n}{2}\right)$, так что справедливо представление (3.11).

Теорема 6.1. *При сделанных предположениях Ω_λ (x, y) $d\varrho$ (λ) определяется*

* Например, пусть выполнены предположения теоремы 1.3, гл. VI.

единственным образом посредством формулы

$$\Omega_\lambda(x, y)\,d\varrho(\lambda) = \int\limits_G K(x, \xi)\,\Phi_0(\xi, y; \lambda)\,d\xi d\varrho(\lambda) \qquad (x, y \in G). \tag{6.1}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что так как $K \in L_2(G\times G, dxdy)$, то $L_2(G) \subseteq H_K$ и $\langle f, f\rangle \leqslant C\|f\|^2_{L_2(G)}$ $(f \in L_2(G))$. Отображение $f(x) \to \overline{f(x)}$, порождает инволюцию — в H_K. Определим в H_K оператор S, полагая $Su = L^+u = Lu$, $u \in \mathfrak{D}(S) = W_2^r$ (гр). Так как (3.4) справедливо для $u, v \in W_2^r$ (гр), то S эрмитов. Он очевидно вещественен относительно инволюции и поэтому имеет равные дефектные числа. Пусть A—его самосопряженное расширение в H_K; A служит некоторым самосопряженным расширением и оператора $u \to L^+u$ $(u \in C_0^\infty(G))$, поэтому A порождает представление (3.11).

Пусть R_z^0— резольвента (в $L_2(G)$) оператора Λ' (гр), $R_0(x, y; z)$ — ее ядро. При $f \in L_2(G)$ $R_z^0 f \in \mathfrak{D}(\Lambda'(\text{гр})) = W_2^r(\text{гр}) = \mathfrak{D}(S)$, поэтому в H_K

$$(A - zE)\,R_z^0 f = (S - zE)\,R_z^0 f = (L - zE)\,R_z^0 f = (\Lambda'(\text{гр}) - zE)\,R_z^0 f = f. \tag{6.2}$$

Если R_z — резольвента оператора A, то $(A - zE)\,R_z f = f$ $(f \in L_2(G))$. Сравнивая это соотношение с (6.2), заключаем, что $(A - zE)(R_z f - R_z^0 f) = 0$ $(f \in L_2(G))$. Благодаря самосопряженности A отсюда следует равенство в смысле пространства H_K:

$$R_z f = R_z^0 f \qquad (f \in L_2(G)). \tag{6.3}$$

Обозначим $R(x, y; z)$ ядро резольвенты R_z, из (6.3) при помощи (3.16) получаем:

$$\int\limits_G\int\limits_G R(x, y; z)\,u(y)\,\overline{v(x)}\,dxdy = \langle R_z u, v\rangle = \langle R_z^0 u, v\rangle =$$

$$= \int\limits_G\int\limits_G K(x, \xi)\left(\int\limits_G R_0(\xi, y; z)\,u(y)\,dy\right)\overline{v(x)}\,dxd\xi =$$

$$= \int\limits_G\int\limits_G\left(\int\limits_G K(x, \xi)\,R_0(\xi, y; z)\,d\xi\right)u(y)\,\overline{v(x)}\,dxdy \qquad (u, v \in C_0(G)).$$

Отсюда

$$R(x, y; z) = \int\limits_G K(x, \xi)\,R_0(\xi, y; z)\,d\xi \qquad (x, y \in G). \tag{6.4}$$

Из (6.4) при помощи последнего равенства в (3.17) и близкого соотношения для оператора Λ' (гр) нетрудно вывести формулу (6.1). Теорема доказана.

Подставляя найденное выражение для $\Omega_\lambda d\varrho(\lambda)$ в (3.11), *получим представление $K(x, y)$ в виде абсолютно сходящегося интеграла*

$$K(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_G K(x, \xi)\,\Phi_0(\xi, y; \lambda)\,d\xi\right\}d\varrho(\lambda) \qquad (x, y \in G). \tag{6.5}$$

Для произвольной функции $f \in L_2(G)$ в смысле сходимости в среднем квадратичном справедливо равенство $f(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_G f(\xi)\Phi_0(\xi, y; \lambda)\, d\xi \right\} d\varrho(\lambda)$, вытекающее из равенства Парсеваля для оператора Λ'(гр). Так как почти для каждого x $K(x, \cdot) \in L_2(G)$, то, записав это равенство для $f(\cdot) = K(x, \cdot)$, получим (6.5), однако интегралы в этом представлении не будут сходиться абсолютно. Смысл доказанной теоремы состоит в том, что при предположении п. о. и регулярности ядра $K(x, y)$ эти интегралы сходятся абсолютно. Этот факт является непосредственным обобщением обычной теоремы Бохнера для рядов Фурье о том, что ряд Фурье непрерывной функции с неотрицательными коэффициентами сходится абсолютно.

2. Двумерное выражение Лапласа. Мы сейчас для п. о. ядра $K(x, y) \in C(E_2 \times E_2)$, $*$-коммутирующего с выражением $\Delta = D_1^2 + D_2^2$, детализируем представление (3.11) в направлении преобразования его к виду, подобному (3.20). Предварительно выведем одну формулу для решений уравнения $\Delta u = \lambda u$.

Пусть $u(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = D_1^2 u + D_2^2 u = \lambda u \tag{6.6}$$

во всей плоскости E_2 (λ — вещественный коэффициент). Так как каждое решение эллиптического уравнения с аналитическими коэффициентами аналитично, то существует целая по каждой из комплексных переменных $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ функция $u(z_1, z_2)$, совпадающая при $z_1 = x_1$ и $z_2 = x_2$ с $u(x_1, x_2)$ и удовлетворяющая уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2} = \lambda u$. Обозначим $v(x_1, x_2) = u(x_1, ix_2)$, очевидно.

$$D_1^2 v - D_2^2 v = \lambda v \qquad ((x_1, x_2) \in E_2). \tag{6.7}$$

Решая уравнение (6.7) по методу Римана, получаем следующее представление v через начальные данные (см., например, А. Н. Тихонов, А. А. Самарский [1], гл. 2, § 5, стр. 133—137):

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[v(x_1 - x_2, 0) + v(x_1 + x_2, 0)] -$$

$$- \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\, x_2 \int\limits_{x_1 - x_2}^{x_1 + x_2} \frac{J_1\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right)}{\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}}\, v(\xi, 0)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{x_1 - x_2}^{x_1 + x_2} J_0\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) (D_2 v)(\xi, 0)\, d\xi \qquad ((x_1, x_2) \in E_2). \tag{6.8}$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя:

$$J_0(s) = 1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{s}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{s}{2}\right)^6 + \ldots,$$

$$J_1(s) = \frac{s}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{s}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{s}{2}\right)^5 - \ldots \tag{6.9}$$

Функция $v(z_1, z_2)$ имеет смысл при комплексных z_1, z_2 и будет целой по каждому из переменных, в частности, целой будет $v(z_1, 0)$, а также $(D_2 v)(z_1, 0)$.

Из разложений (6.9) следует, что ядра $((x_1-\xi)^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}} J_1(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2 - x_2^2})$ и $J_0(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2 - x_2^2})$ также будут целыми по x_2. Отсюда вытекает, что каждое слагаемое в правой части (6.8) можно продолжить по x_2 в комплексную плоскость z_2 и формула (6.8) остается справедливой, если в ней x_2 заменить на z_2. Полагая теперь $z_2 = -ix_2$ и замечая, что $v(x_1, -ix_2) = u(x_1, x_2)$, получим требуемое представление любого решения в E_2 уравнения (6.6):

$$\begin{gathered} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left[u(x_1 + ix_2, 0) + u(x_1 - ix_2, 0)\right] - \\ - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\, x_2 \int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2} \frac{J_1(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2 + x_2^2})}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 + x_2^2}}\, u(\xi, 0)\, d\xi + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2} J_0(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2 + x_2^2})\,(D_2 u)(\xi, 0)\, d\xi \qquad ((x_1, x_2) \in E_2). \end{gathered} \tag{6.10}$$

Ясно, что здесь интегрирование ведется по любой спрямляемой дуге в комплексной плоскости, соединяющей точки $x_1 + ix_2$ и $x_1 - ix_2$.

Запишем формулу (6.10) в сокращенном виде. Обозначим через Z линейное топологическое пространство всех целых функций $\varphi(\xi)$ одной комплексной переменной ξ. Под сходимостью в Z понимается равномерная на каждом ограниченном множестве сходимость. Равенства

$$\begin{gathered} (\chi_\xi^{(0)}(x; \lambda), \varphi(\xi)) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x_1 + ix_2) + \varphi(x_1 - ix_2)\right] - \\ - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\, x_2 \int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2} \frac{J_1(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2 + x_2^2})}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 + x_2^2}}\, \varphi(\xi)\, d\xi, \\ (\chi_\xi^{(1)}(x; \lambda), \varphi(\xi)) = \frac{1}{2}\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2} J_0(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2 + x_2^2})\, \varphi(\xi)\, d\xi \\ (x = (x_1, x_2) \in E_2,\ \varphi \in Z) \end{gathered} \tag{6.11}$$

определяют линейные непрерывные функционалы $\chi^{(0)}(x; \lambda)$ и $\chi^{(1)}(x; \lambda)$ над Z. В обозначениях (6.11) формула (6.10) примет вид:

$$\begin{gathered} u(x) = u(x_1, x_2) = (\chi_\xi^{(0)}(x; \lambda), u(\xi, 0)) + (\chi_\xi^{(1)}(x; \lambda), (D_2 u)(\xi, 0)) \\ (x = (x_1, x_2) \in E_2). \end{gathered} \tag{6.12}$$

Отсюда следует, что в определенном смысле зависящие от параметра ξ функции $\chi_\xi^{(0)}(x;\lambda)$, $\chi_\xi^{(1)}(x;\lambda)$ (первая из них по ξ обобщенная) образуют фундаментальную систему решений уравнения (6.6). Через них мы и будем выражать элементарные ядра.

С этой целью введем пространство $Z\otimes Z$, состоящее из функций $\varphi(\xi,\eta)$ двух комплексных переменных ξ, η, целых по каждой из переменных. Сходимость в $Z\otimes Z$ — равномерная на каждом ограниченном (в пространстве $(\xi,\eta)\in C_2$) множестве. Понятным образом построим $\chi_\xi^{(\alpha)}(x;\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda)$ $(\alpha,\beta=0,1)$. Так, например,

$$(\chi_\xi^{(0)}(x;\lambda)\otimes\chi_\eta^{(1)}(y;\lambda),\varphi(\xi,\eta))=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{y_1+iy_2}^{y_1-iy_2}[\varphi(x_1+ix_2,\eta)+\varphi(x_1-ix_2,\eta)]\,J_0\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(y_1-\eta)^2+y_2^2}\right)d\eta\,-$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{\lambda}x_2\int\limits_{x+ix_2}^{x_1-ix_2}\int\limits_{y_1+iy_2}^{y_1-iy_2}\frac{J_1\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}}\times$$

$$\times J_0\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(y_1-\eta)^2+y_2^2}\right)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\qquad(x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in E_2).$$

Пусть $\Omega_\lambda(x,y)$ — семейство элементарных п. о. ядер из представления (3.11), записанного для нашего ядра $K(x,y)$. По x и y $\Omega_\lambda(x,y)$ удовлетворяет уравнению (6.6), поэтому эта функция целая относительно каждого из переменных x_1, x_2, y_1, y_2. Легко заключить, что для любого комплексного ξ $\Omega_\lambda((\xi,0),y)$ и $\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial x_2}((\xi,0),y)$ удовлетворяют по y уравнению (6.6), поэтому к $\Omega_\lambda(x,y)$ сперва можно применить представление (6.12) (по x), а затем аналогичные представления по y. В результате найдем:

$$\Omega_\lambda(x,y)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}(\chi_\xi^{(\alpha)}(x;\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda),\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0)))$$

$$(x,y\in E_n),\tag{6.13}$$

где обозначено

$$\Omega_\lambda^{(0,0)}((\xi,0),(\eta,0))=\Omega_\lambda((\xi,0),(\eta,0)),\quad \Omega_\lambda^{(1,0)}((\xi,0),(\eta,0))=\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial x_2}((\xi,0),(\eta,0)),$$

$$\Omega_\lambda^{(0,1)}((\xi,0),(\eta,0))=\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial y_2}((\xi,0)(\eta,0)),\ \Omega_\lambda^{(1,1)}((\xi,0),(\eta,0))=$$

$$=\frac{\partial^2\Omega_\lambda}{\partial x_2\partial y_2}((\xi,0),(\eta,0)).$$

Если теперь подставить (6.13) в (3.11), то получим представление типа (3.20). Для того чтобы сформулировать результат, нужно ввести соответствующее понятие интеграла. Оно близко определениям п. 3, § 2, гл. VII.

Рассмотрим матрицу

$$T(\lambda) = \begin{Vmatrix} t_{\xi,\eta}^{(0,0)}(\lambda) & t_{\xi,\eta}^{(0,1)}(\lambda) \\ t_{\xi,\eta}^{(1,0)}(\lambda) & t_{\xi,\eta}^{(1,1)}(\lambda) \end{Vmatrix} \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

элементами которой служат функции $t_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$, целые по ξ и η и ограниченной вариации по λ. Будем предполагать, что $T(\Delta) = T(b) - T(a)$ $(\Delta = [a, b))$ п. о. в том смысле, что для любых функционалов $l_\xi^{(0)}$, $l_\xi^{(1)}$ над Z $\sum\limits_{\alpha,\beta=0}^{1} (l_\xi^{(\alpha)} \otimes l_\eta^{(\beta)}, t_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta)) \geqslant 0$. Условимся называть такую $T(\lambda)$ аналитической мерой.

Пусть теперь функционалы $l_\xi^{(\alpha)}$ непрерывно (в слабом смысле) зависят от параметра λ: $l_\xi^{(\alpha)} = l_\xi^{(\alpha)}(\lambda)$ $(\alpha = 0, 1;\ -\infty < \lambda < \infty)$. Тогда можно определить интеграл соотношением

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} (l_\xi^{(\alpha)}(\lambda) \otimes l_\eta^{(\beta)}(\lambda), dt_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)) = \lim \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} (l_\xi^{(\alpha)}(\lambda_\nu) \otimes$$

$$\otimes\, l_\eta^{(\beta)}(\lambda_\nu), t_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta_\nu)),$$

где $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ — разбиение оси $(-\infty, \infty)$ на интервалы, $\lambda_\nu \in \Delta_\nu$, а lim берется по продолжению разбиения. Если $l_\xi^{(\alpha)}(\lambda)$ достаточно малы при больших $|\lambda|$, то этот предел существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек $\lambda_\nu \in \Delta_\nu$. Это понятие интеграла и полученные ранее результаты дают возможность сформулировать следующую теорему.

Теорема 6.2. *Пусть $K(x, y) \in C(E_2 \times E_2)$ — п. о. ядро, функционалы $\chi_\cdot^{(0)}(x; \lambda)$ и $\chi_\cdot^{(1)}(x; \lambda)$ над Z определены соотношениями* (6.11). *Для того чтобы при каждых $x, y \in E_2$ имело место представление*

$$K(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} (\chi_\xi^{(\alpha)}(x; \lambda) \otimes \chi_\eta^{(\beta)}(y; \lambda), d\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)), \tag{6.14}$$

где $\Sigma(\lambda) = \| \sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda) \|_{\alpha,\beta=0}^{1}$ — некоторая аналитическая мера, необходимо и достаточно, чтобы $K(x, y)$ удовлетворяло (в смысле обобщенных функций Л. Шварца) ультрагиперболическому уравнению

$$\Delta_x K = \Delta_y K. \tag{6.15}$$

Достаточность уже почти доказана: после подстановки (6.13) в (3.11) получим (6.14), если положить

$$\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi, 0), (\eta, 0))\, d\varrho(\lambda).$$

о, что так полученная матрица $\Sigma(\lambda)$ будет аналитической мерой, проверя- :ся примерно так, как соответствующее утверждение на стр. 501. Необхо- имость условия (6.15) для справедливости (6.14) проверяется непосред- :венно.

Можно убедиться, что $d\Sigma(\lambda)$ определяется однозначно, если замыкание в K оператора $u \to \Delta u$ $(u \in C_0^\infty(E_2))$ максимально. Из теоремы 3.10 следует, го *однозначность будет иметь место в случае наличия при некотором* $N > 0$ *ценки*

$$|K(x, y)| \leqslant Ce^{N(|x_1|^2+|x_2|^2+|y_1|^2+|y_2|^2)} \quad (C > 0;\ x, y \in E_2).$$

Ясно, что конструкция, изложенная в этом пункте, обобщается на сильно ллиптические выражения L второго порядка с аналитическими коэффициен- ами (в частности, на многомерное выражение Лапласа).

3. **Выражения в частных разностях.** Для таких выражений хорошо ре- ается задача Коши (см. п. 1, § 4, гл. VII), поэтому для п. о. ядер, $*$-комму- ирующих с ними, могут быть получены представления типа (3.20). Поясним го на простейшем примере выражения в полуплоскости. Итак, пусть Π — елочисленная правая полуплоскость, т. е. совокупность точек $j = (j_1, j_2)$, де $j = 0, 1, \ldots$; $j_2 = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. В Π будем рассматривать п. о. дро $K = K_{jk}$ $(j, k \in \Pi)$ (см. п. 3, § 5) и выражение L в частных разностях, налогичное выражению (4.1), гл. VII, но, вообще говоря формально неса- осопряженное:

$$\begin{gathered}(Lu)_{j_1,j_2} = a_{j_1,j_2;(-1,0)}u_{j_1-1,j_2} + a_{j_1,j_2;(+1,0)}u_{j_1+1,j_2} + \\ + a_{j_1j_2;(0,-1)}u_{j_1,j_2-1} + a_{j_1,j_2;(0,+1)}u_{j_1,j_2+1} + a_{j_1,j_2;(0,0)}u_{j_1,j_2} \\ ((j_1, j_2) = j \in \Pi).\end{gathered} \tag{6.16}$$

сюду ниже будем считать, что u удовлетворяет нулевому граничному условию а прямой $j_1 = -1$, т. е. при подсчете $(Lu)_{0,j_2}$ полагаем $u_{-1,j_2} = 0$ $(j_2 = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Коэффициенты выражения (6.16) — произвольные комплексные исла, будем лишь требовать, чтобы $a_{j_1,j_2;(+1,0)} \neq 0$ $((j_1, j_2) \in \Pi)$.

Последнее условие дает возможность рекуррентно находить решение уравне- ия $(Lu)_j = zu_j$ $(j \in \Pi)$, если u_j задано на двух соседних вертикальных осях, апример, при $j_1 = -1$ и $j_1 = 0$. В частности, как и на стр. 599, можно по- троить решения $P_{\alpha;(j_1,j_2)}(z)$ этого уравнения, удовлетворяющие начальным словиям: $P_{\alpha;(-1,j_2)}(z) = 0$, $P_{\alpha;(0,j_2)}(z) = \delta_{\alpha j_2}$ $(\alpha, j_2 = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Вид тих решений будет такой же, как и там. Любое решение уравнения $(Lu)_j = zu_j$ $j \in \Pi)$ выразится через $P_{\alpha;(j_1,j_2)}(z)$ посредством формулы

$$u_{j_1,j_2} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} u_{0,\alpha}P_{\alpha;(j_1,j_2)}(z) \qquad ((j_1,j_2) \in \Pi). \tag{6.17}$$

Предположим теперь, что ядро K_{jk} $*$-коммутирует с L:

$$(L_jK)_{jk} = (\bar{L}_kK)_{jk} \qquad (j,k \in \Pi). \tag{6.18}$$

Повторяя рассуждения (стр. 720 — 722), получим, что справедливо представление

$$K_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{\lambda;jk}d\varrho(\lambda) \qquad (j, k \in \Pi), \tag{6.19}$$

где семейство элементарных п. о. ядер Ω_λ удовлетворяет соотношениям типа (5.7). Учитывая формулу (6.17), подобно тому как это было сделано в п. 1, § 4, гл. VII, выразим $\Omega_{\lambda;\,jk}d\varrho(\lambda)$ через $P_{\alpha;\,(j_1,j_2)}(\lambda)$. В результате (6.19) перейдет в представление

$$K_{jk}=\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{\alpha;(j_1,j_2)}(\lambda)\overline{P_{\beta;(k_1,k_2)}(\lambda)}\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\quad(j,\,k\in\Pi),\tag{6.20}$$

где $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ — некоторая неотрицательная операторная мера (ее значения — операторы в $l_2((-\infty,\infty))$, записанная в матричном виде. Ясно, что и наоборот — всякое ядро вида (6.20) будет п. о. и будет удовлетворять равенству (6.18).

В случае ядер во всей плоскости $(j_1,\,j_2)\,(j_1,\,j_2=\ldots,\,-1,\,0,\,1,\,\ldots)$ предыдущая схема сохраняется, нужно только воспользоваться сноской на стр. 601. Теперь роль матрицы $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ будет играть матрица

$$\left\|\begin{matrix}d\sigma_{-1,-1;\,\alpha\beta}(\lambda) & d\sigma_{-1,0;\,\alpha\beta}(\lambda)\\ d\sigma_{0,-1;\,\alpha\beta}(\lambda) & d\sigma_{0,0;\,\alpha\beta}(\lambda)\end{matrix}\right\|_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}.$$

Рассмотрим конкретный пример представления (6.20). Пусть п. о. ядро $K_{jk}=K_{j_1,j_2;k_1,k_2}$ $(j_1,\,j_2=0,\,1,\,\ldots;\;k_1,\,k_2=\ldots,\,-1,\,0,\,1,\,\ldots)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{gathered}K_{j_1-1,j_2;\,k_1,k_2}+K_{j_1+1,j_2;\,k_1,k_2}+K_{j_1,j_2-1;\,k_1,k_2}+K_{j_1,j_2+1;\,k_1,k_2}=\\=K_{j_1,j_2;\,k_1-1,k_2}+K_{j_1,j_2;\,k_1+1,k_2}+K_{j_1,j_2;\,k_1,k_2-1}+K_{j_1,j_2;\,k_1,k_2+1}\\(j_1,\,j_2=0,\,1,\,\ldots;\;k_1,\,k_2=\ldots,\,-1,\,0,\,1,\,\ldots)\end{gathered}\tag{6.21}$$

если один из индексов $j_1,\,j_2,\,k_1,\,k_2$ принимает значение -1, считаем $K_{j_1,j_2;k_1,k_2}=0$). Равенство (6.21) показывает, что K $*$-коммутирует с выражением $(Lu)_{j_1,j_2}=\frac{1}{2}u_{j_1-1,j_2}+\frac{1}{2}u_{j_1+1,j_2}+\frac{1}{2}u_{j_1,j_2-1}+\frac{1}{2}u_{j_1,j_2+1}$, рассматриваемым в Π. Решения $P_{\alpha;(j_1,j_2)}(\lambda)$ для данного L подсчитаны — см. формулу (4.38), гл. VII. Если подставить эти выражения в (6.20), то получим искомое представление ядра K_{jk}.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

В этих указаниях и в списке литературы мы будем останавливаться лишь на вопросах, имеющих прямое отношение к изложению, в остальном будут даны ссылки на имеющиеся обзоры. В тех случаях, когда это не будет вызывать недоразумений, мы приводим ссылки на более поздние, но полные работы авторов, а не на предварительные публикации.

Введение

Для чтения книги необходимо знакомство с основными фактами общей теории меры и интегрирования, например, в объеме первых глав книги Халмоша [1]; формулу (3) см. в книге Сакса [1], гл. 4, § 15, стр. 229—235. Знакомство с теорией операторов в гильбертовом пространстве предполагается в объеме книги Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [1] или гл. 4 книги М. А. Наймарка [2]; см. также соответствующие разделы книг Ф. Рисса и Б. С. Надя [1] и Данфорда и Дж. Шварца [1, 2]. Факты относительно линейных нормированных пространств см., например, в книге Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [1], элементарные понятия теории линейных топологических пространств — в гл. 11 этой книги или в книге И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [2].

Теория соболевских пространств (пп. 5—6, 9—11) изложена в книге С. Л. Соболева [3], см. также Л. В. Канторович, Г. П. Акилов [1], гл. 9—10. Сведения об обобщенных функциях см. в первых главах книги И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [1]. Неравенство Эрлинга — Ниренберга доказано в работах G. Ehrling [1], L. Nirenberg [1]; в весьма общей форме оно получено В. П. Ильиным [1] и В. П. Глушко и С. Г. Крейном [1, 2].

Глава I

Пространства с негативной нормой были введены и изучались Лере (J. Leray [1]) и в особенности Лаксом (P. D. Lax [2]) (правда, эти авторы ограничивались рассмотрением позитивных пространств типа соболевских). Близкие вопросы рассматривались еще в 1937 г. М. Г. Крейном (ср. М. Г. Крейн [7]). Первоначально пространства с негативной нормой применялись при изучении краевых задач для уравнений в частных производных, однако впоследствии выяснилось, что такие пространства полезны и в других вопросах — спектральной теории, в теории положительно определенных ядер и т. д. Отметим, что рассматриваемая глава является повторением почти без изменений статьи автора [16].

Введение позитивных и негативных пространств, изложенное в § 1, можно было бы проводить, обобщая схему Лакса. Однако представилось более удобным поступать несколько иначе согласно плану, содержащемуся в статье автора [7]. Другой способ введения по существу позитивных и негативных пространств принадлежит Г. И. Кацу [1, 2], связь с этой точкой зрения излагается в п. 6, § 3. Теорема 1.1 принадлежит автору, теорема 1.2 получена независимо М. Г. Крейном [7] и Лаксом (P. D. Lax [1]).

Теория абстрактных обобщенных ядер, излагающаяся в § 2, аналогична теории обобщенных ядер Л. Шварца (L. Schwartz [2]) и строится в плане заметки автора [15]. Теорема 2.2 является простым и естественным вариантом теоремы Л. Шварца о ядре; другие результаты в этом направлении см. в книге И. М. Гельфанда, Н. Я. Виленкина [1], гл. 1, § 3, стр. 98—105; см. также L. Ehrenpreis [1]. Наиболее ранняя теорема типа 2.2 была опубликована автором [3, 6] в связи с построением разложений по обобщенным собственным функциям, она излагается в § 3 (теорема 3.4). Понятие квазиядерности вложения, по существу, возникло у Г. И. Каца [1] в результате продумывания ситуации, которая сложилась после появления работ по разложениям по обобщенным собственным функциям И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко [1], с одной стороны, и автора [3] — с другой. Здесь существенную роль сыграло определение ядерности Гротендика (A. Grothendieck [1]) и одна работа Д. А. Райкова [1].

В п. 1, § 3, подробно исследуется случай Лакса, когда в качестве позитивного пространства берется соболевское пространство в ограниченной области. Отметим результаты других авторов, содержащиеся в этом параграфе: теорема типа 3.1 опубликована Л. и К. Моренами (L. Maurin, K. Maurin [1]), теорема 3.6 принадлежит Хёрмандеру (L. Hörmander [3]), конструкция п. 6, как уже указывалось,— Г. И. Кацу. Дальнейшие примеры позитивных и негативных пространств даны в следующих главах. Негативные пространства типа $W_p^l(G)$ $(p\neq 2)$ см., например,— Лионс, Мадженес (J. L. Lions, E. Magenes [1, 2]), Шехтер (M. Schechter [10]). В связи с результатами § 3 и теорией соболевских пространств см. также книгу Хёрмандера (L. Hörmander [4]) и обзор Л. Р. Волевича и Б. П. Панеяха [1].

§ 4 имел своей целью указать на связь рассматриваемых вопросов с построением оснащений гильбертова пространства посредством линейных топологических пространств. Подробное изложение соответствующих результатов читатель найдет в книге И. М. Гельфанда и Н. Я. Виленкина [1], гл. I, стр. 12—153 (этим авторам принадлежит и сам термин «оснащение»).

Глава II

В связи с построениями § 1 см. книгу И. Г. Петровского [1], гл. I, стр. 7—83

Результаты п. 2, § 2 (понятие разрешимого расширения и теорема 2.1 о его существовании), а также п. 4, § 2, принадлежат М. И. Вишику [2]; см. также работу Хёрмандера (L. Hörmander [1]). Факты, приведенные в п. 3, § 2, и в пп. 1—4, § 3 (почти корректные граничные условия, условная разрешимость, существование обобщенных решений), опубликованы автором [12, 7, 9]. Они появились в результате продумывания упомянутых сейчас работ М. И. Вишика и Хёрмандера и работ М. И. Вишика и С. Л. Соболева [1], Лакса (P. D. Lax [2]), Фридрихса (K. O. Friedrichs [2]), Моравец (K. Morawetz [1]). Почти одновременно подобные результаты получены Шехтером (M. Schechter [6, 4], также [7]); близкие факты содержатся в работах Лионса (J. L. Lions [2]) и Браудера (F. E. Browder [9]), а также в наиболее ранних работах подобного рода, принадлежащих Фикера (G. Fichera [1, 2]). Намеченный в п. 5, § 2 подход к изучению максимального оператора принадлежит Хёрмандеру (L. Hörmander [2]).

Подход пп. 6—8, § 3, восходящий к вариационному методу изучения краевых задач, развит М. И. Вишиком [1] (см. также М. И. Вишик, О. А. Ладыженская [1]), а также Гордингом (L. Gårding [1]), Браудером (F. E. Browder [2]), Лаксом и Мильграмом (P. D. Lax, A. N. Milgram [1] и Лионсом (J. L. Lions [1]). С возможным применением схемы п. 8, § 3 к конкретным неэллиптическим уравнениям связаны работы П. П. Мосолова [1, 2] и С. М. Никольского [2].

Отметим также обзоры М. И. Вишика, А. Д. Мышкиса и О. А. Олейник [1], Гординга (L. Gårding [6]), М. И. Вишика и Г. Е. Шилова [1], А. А. Дезина [1], связанные с проблематикой как этой, так и последующих двух глав.

Глава III

Понятие сильной эллиптичности (п. 1, § 1) принадлежит М. И. Вишику, им же доказана часть (неравенство (1.4)) теоремы 1.1 (М. И. Вишик [1]). Остальные утверждения этой основной для § 1—2 теоремы доказаны Гордингом (L. Gårding [1]) и Браудером (F. E. Browder [2]). Изложение § 2 следует в работе М. И. Вишика и О. А. Ладыженской [1].

Основное для дальнейшего энергетическое неравенство — теоремы 3.1 и 3.3 — впервые для выражения Лапласа и нулевых граничных условий при $s=0$ было доказано С. Н. Бернштейном [1, 2]. Для сильно эллиптических выражений второго порядка подобное неравенство в случае нулевых условий установлено О. А. Ладыженской [1, 2, 3], С. Г. Михлиным [1], Каччиополи (R. Caccioppoli [1]), библиографию вопроса для выражений второго порядка см. также в книге Миранда [1]. Эти результаты были перенесены на произвольные сильно эллиптические системы (с нулевыми граничными условиями) О. В. Гусевой [1], несколько позже близкие результаты были получены Браудером (F. E. Browder [4]). Для общих граничных условий, причем даже неоднородных, и общих эллиптических выражений подобное неравенство доказано Л. Н. Слободецким [13], Браудером (F. E. Browder [8, 10, 11]), Агмоном, Дуглисом и Ниренбергом [1], Шехтером (M. Schechter [2]); в части этих статей установлены оценки не только в L_2-нормах, но и в L_p-нормах и шаудеровских нормах. Отметим, что впервые оценки в L_p-нормах в более простых случаях были даны А. И. Кошелевым [1].

Идея локализации при доказательстве теорем 3.1 и 3.3 восходит к Шаудеру (J. Schauder [2]) и применялась многими из указанных выше авторов. Мы приводим в случае $s=0$ два доказательства леммы 3.1, основной для доказательства теоремы 3.1. Первое из них основывается на интегрировании по частям, развивающем прием С. Н. Бернштейна (см. О. А. Ладыженская [1, 2, 3]), и пригодно для простейших задач в случае сильно эллиптических выражений второго порядка (см. также лемму 3.7). Второе использует технику преобразований Фурье и пригодно для L_2-норм в случае общих эллиптических выражений и общих (даже неоднородных) граничных условий (см. ниже указания к § 6), оно принадлежит Шехтеру (M. Schechter [1, 2]); важную роль в этом доказательстве играет лемма 3.3. Ароншайна (N. Aronszajn [2]). Общую методику, развитую в упомянутой работе Агмоном, Дуглисом и Ниренбергом, и пригодную для L_p-норм и шаудеровских норм, мы не излагаем. Она упоминается в п. 3, § 3 и использует теорему Зигмунда—Кальдерона о сингулярных интегральных операторах. Прием перехода от случая $s=0$ к случаю $s>0$ (этап 7) доказательства теоремы 3.1 принадлежит Ниренбергу (L. Nirenberg [1]) и Браудеру (F. E. Browder [4]).

Метод продолжения по параметру (пп. 4—5, § 3) давно применялся в теории дифференциальных уравнений (С. Н. Бернштейн [1], J. Schauder [1]). Приведенное здесь изложение воспроизводит работу О. А. Ладыженской [3].

Важная для вопросов повышения гладкости теорема 3.6 о гомеоморфизмах в случае 1-ой пары пространств следует из теоремы 3.1 и метода продолжения по параметру, в случае 4-ой пары она выводится из предыдущего случая путем хорошо известной методики перехода к сопряженным операторам (см. М. И. Вишик, С. Л. Соболев [1], Ю. М. Березанский [9], M. Schechter [7]). Наиболее сложным является промежуточный случай (2-я и 3-я пары). Для рассматриваемых сейчас нулевых условий эта часть теоремы доказана Лионсом и Мадженесом (J. L. Lions, E. Magenes [1]). Мы приводим другое ее доказательство, принадлежащее Я. А. Ройтбергу и автору, основной частью которого является непосредственный вывод энергетического неравенства в негативных нормах (теорема 3.2).

Доказательство существования для эллиптических уравнений классических фундаментальных решений, свойства которых приведены в п. 1, § 4 дано Я. Б. Лопатинским [1, 2], см. также Йон [2]. Существование фундаментальных решений при минимальных требованиях гладкости на коэффициенты (интегральное условие Гельдера) установлено недавно М. И. Матийчуком [1, 2]. При требовании одной непрерывности коэффициентов фундаментальные решения с обычным характером особенности могут не существовать, см. D. Gilbarg, J. Serrin [1], А. М. Ильин [1]. О полезной для ряда вопросов связи между фундаментальными решениями эллиптических и параболических уравнений см. в книге С. Д. Эйдельмана [1]. Фундаментальные решения во всей G рассмотрены Ю. И. Любичем [3]. Первый результат относительно регулярности внутри области обобщенного решения эллиптического уравнения принадлежит С. Л. Соболеву [1], о других работах в этом направлении для уравнений второго порядка см. в книге Миранда [1]. Общие утверждения относительно внутренней регулярности получены различными методами рядом математиков: Л. Шварцем (L. Schwartz [1]), Фридрихсом (K. O. Friedrichs [1]), Браудером (F. E. Browder [2]), Мореном (K. Maurin [1]) и др. Теоремы 4.1 и 4.3 относятся к такого рода результатам и доказаны известной методикой с применением фундаментальных решений. Теоремы 4.2 и 4.4 о гладкости обобщенных ядер (в несколько более частном виде) принадлежат Я. А. Ройтбергу [1]. Теорема 4.6 о локальном повышении гладкости обобщенных решений вплоть до границы области (как и предшествовавшая ей теорема 4.5) доказана автором, С. Г. Крейном, Я. А. Ройтбергом [1]. В более ранних работах относительно гладкости вплоть до границы повышалась либо гладкость локального решения, являющегося обычной функцией (L. Nirenberg [1], F. E. Browder [4], M. Schechter [9]), либо неполностью гладкость обобщенного решения, рассматриваемого во всей области (M. Schechter [7], J. Peetre [1]). Вторая часть теоремы 4.8 (другое описание максимального оператора) впервые была доказана М. Ш. Бирманом [1, 2]; приведенное простое доказательство основывается на приеме Хёрмандера (лемма 2.2, гл. II).

Перейдем к § 5. Теорема 5.1 при несколько бо́льших ограничениях установлена автором [6], ему же принадлежат рассмотрения п. 7 (произведение резольвент) [18]. Теорема 5.4 доказана Браудером (F. E. Browder [1, 11]). Остальные результаты этого параграфа принадлежат Я. А. Ройтбергу и автору (Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг [1]). Отметим, что в случае уравнения Шредингера в трехмерном пространстве и классических граничных условий поведение ядра резольвенты оператора вблизи границы области можно усмотреть из работы А. Я. Повзнера [3]. В общем случае для выражений высокого порядка удовлетворение ядром резольвенты граничных условий в обобщенном смысле установлено Гордингом. В случае уравнения второго порядка, рассматриваемого в ограниченной области с нулевыми граничными условиями, поведение ядра резольвенты вплоть до границы области исследовалось классическими методами В. А. Ильиным и И. А. Шишмаревым [1].

Рассмотрим § 6. Впервые изучение краевых задач для общих эллиптических систем с общими граничными условиями, задающимися дифференциальными выражениями, было проведено Я. Б. Лопатинским [3]. В этой работе были найдены условия, при которых подобные задачи сводятся к регулярным интегральным уравнениям (в более простых случаях подобные условия ранее были получены З. Я. Шапиро [1]); условия формулировались в указанной в п. 3, § 3 форме. В случае одного уравнения они эквивалентны условиям накрывания, приведенным в п. 1, § 6. В указанной работе Я. Б. Лопатинского также введено понятие правильной эллиптичности и доказана лемма 3.2.

Граничным нормам посвящено много литературы, так, см. работы Хёрмандера и Лионса (L. Hörmander, J. L. Lions [1]), Л. Н. Слободецкого [2, 3], Лионса и Мадженеса (J. L. Lions, E. Magenes [1, 2]), С. М. Никольского [1], Л. Р. Волевича и Б. П. Панеяха [1]. Впрочем, для наших целей при желании восстановить доказательства вполне достаточно знакомства с соответствующими частями статей Шехтера (M. Schechter [2, 3]) и Л. Н. Слободецкого [2].

Теорема 6.1 доказана Л. Н. Слободецким [1, 3], Агмоном, Дуглисом и Ниренбергом [1], Шехтером (M. Schechter [2]), Браудером (F. E. Browder [10]). Как уже говорилось, доказательство достаточности в этой теореме аналогично изложенному доказательству теоремы 3.1, новым моментом является лемма 6.1, которая хотя по формулировке и доказательству обобщает лемму 3.1, однако является технически более сложной. Ее доказательство (как и доказательство леммы 3.1) содержится в статье Шехтера (M. Schechter [2]). В этой же работе содержится доказательство необходимости в теореме 6.1 (см. также Агмон, Дуглис, Ниренберг [1]).

Ряд рассуждений п. 2, п. 4 и пп. 6—7 хорошо известен, см., например, Агмон, Дуглис, Ниренберг [1], Шехтер (M. Schechter [3, 4, 5]), Браудер (F. E. Browder [8]), Петре (J. Peetre [1]).

Лемма 6.4 принадлежит Браудеру, ее доказательство в случае нулевых граничных условий содержится в его статье (F. E. Browder [8]), в общем случае см. также З. Г. Шефтель [2]; в связи с вопросами, изложенными в п. 3, см. также М. С. Агранович, Л. Р. Волевич, А. С. Дынин [1] (впрочем подчеркнем, что для рассматриваемого в дальнейшем случае нормальных граничных условий лемма 6.4 не является необходимой — конечность коразмерности теперь вытекает из леммы 6.2). Теорема 6.4 с доказательством принадлежит Шехтеру [3]. Понятие нормальных систем граничных условий и основные результаты п. 5 принадлежатАроншайну и Мильграму (N. Aronszain, A. N. Milgram [1]), а также Шехтеру (M. Schechter [3]).

Основные результаты п. 8 принадлежат Я. А. Ройтбергу [3], п. 10 — С. Г. Крейну, Я. А. Ройтбергу и автору (Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг [1]). Пространства в теоремах о гомеоморфизмах, установленных в п. 8 и п. 10, строились таким образом, чтобы эти теоремы возможно было применить к задаче повышения гладкости обобщенных решений — подобно тому, как это было сделано в случае нулевых граничных условий в п. 6, § 4. Такое применение результатов п. 8 дано в пп. 11—12, оно принадлежит Я. А. Ройтбергу [3]. Результаты п. 10 в этом отношении менее удобны и соответствующее их применение, принадлежащее Я. А. Ройтбергу, не излагается (ср. Я. А. Ройтберг [2]). Гомеоморфизмы для других пространств (с использованием также L_p-норм) установлены почти одновременно с приведенными работами и независимо Лионсом и Мадженесом (J. L. Lions, E. Magenes [2], E. Magenes [1]) и Шехтером (M. Schechter [10—12]) (точнее, в этих работах Шехтера устанавливались односторонние оценки типа (6.78)). В последней работе Шехтера установлены также теоремы о локальном повышении гладкости вплоть до границы (даже в плане L_p-теории) типа изложенных в § 4 и § 6. Простейшая интерполяционная теорема 6.10, с помощью которой доказывались теоремы о гомеоморфизмах, доказана независимо Лионсом (J. L. Lions [3]) и С. Г. Крейном [1, 2]. Отметим обзор Мадженеса, посвященный дальнейшим интерполяционным теоремам и их применениям к уравнениям в частных производных (E. Magenes [1]), и недавнюю книгу Хёрмандера (L. Hörmander [4]), содержащую теоремы о повышении гладкости, близкие к изложенным в п. 6, § 4, и в пп. 11—12, § 6. О продолжении функций класса W_p^s (G) вне G с сохранением класса и с наличием неравенств вида (6.90) см. В. М. Бабич [1], Л. Н. Слободецкий [2].

Отметим еще несколько работ, относящихся к тематике этой главы. Шехтером (M. Schechter [8]) и независимо, но позже, Я. А. Ройтбергом и З. Г. Шефтелем [1, 2, 3] перенесена L_2-теория разрешимости краевых задач, типа изложенной в пп. 1—6, § 3, и пп. 1—2, 4—7, § 6, на эллиптические уравнения с разрывными коэффициентами, т. е. на задачи типа дифракционных (последние два автора перенесли также подход § 1—2). Затем З. Г. Шефтелем [1, 2] была развита L_p-теория разрешимости для таких задач, а Я. А. Ройтбергом [4] остальные результаты § 3—6 перенесены на указанные уравнения.

Ряд основных результатов гл. III переносится на системы эллиптических уравнений с обычными коэффициентами и с коэффициентами, являющимися интегральными сингулярными операторами (М. С. Агранович, Л. Р. Волевич, А. С. Дынин [1]). Более того, М. И. Вишиком и Г. И. Эскиным [1] развита подобная теория для более общих операторов, охватывающих и широкие классы интегральных операторов, а Агмоном, Дуглисом и Ниренбергом (S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg [2]) и В. А. Солонниковым [1] теория перенесена на более общие системы («системы, эллиптические в смысле Дуглиса—Ниренберга»; ряд важных задач сводится к таким системам). Отметим некоторые полезные обобщения основного энергетического неравенства — теоремы 3.1. В случае сильно эллиптических выражений L, M второго порядка можно снизу оценивать не $\|Lu\|_0^2 = (Lu, Lu)_0$, а $\mathrm{Re}(Lu, Mu)_0$ — это усматривается из метода доказательства, основанного на интегрировании по частям (П. Е. Соболевский [1], О. А. Ладыженская [4]). Наконец, основное энергетическое неравенство можно устанавливать в неограниченных областях в пространствах с весом (F. E. Browder [11], Л. Н. Прокопенко [1]).

В заключение заметим, что ряд разделов теории эллиптических уравнений выше не был отражен (уравнения второго порядка, L_p-теория, подсчет индекса и т. д.).

Глава IV

Мы не будем приводить довольно обширного списка литературы, относящегося к «неклассическим» краевым задачам, и отметим помимо работ, непосредственно касающихся изложения, лишь нескольких авторов, получивших первые результаты в этом направлении: Адамар (J. Hadamard [1]), Губер (A. Huber [1]), Манжерон (D. Mangeron [1]), Боржин и Даффин (D. G. Bourgin, R. Duffin [1], Йон (F. John [1]).

Результаты § 1 принадлежат Хёрмандеру (L. Hörmander [1]). Исключение составляет более прямое доказательство леммы 1.1, принадлежащее Л. П. Нижнику и автору, близкий подход предложен Тревом (J. F. Treves [1]). Развитие этого способа доказательства леммы 1.1 используется в построениях § 2—3.

В § 2, в основном, излагаются результаты автора [14]. Задача Дирихле для уравнения колебания струны рассматривалась рядом математиков: помимо упомянутых работ Адамара, Губера, Боржина и Даффина и Йона см. работы С. Л. Соболева [4], Р. А. Александряна [1, 2], Н. Н. Вахания [1], Р. Т. Денчева [1], Г. В. Вирабяна [1]. В отличие от этих работ мы рассматриваем не гладкие решения, а решения из L_2. Благодаря этому обстоятельству удается строить примеры областей, для которых обобщенная разрешимость задачи Дирихле устойчива относительно малых возмущений границы. Рассуждения в конце п. 4 и в п. 5 — типа применявшихся Р. А. Александряном [2].

Перейдем к § 3. Впервые функциональная методика доказательства существования слабых решений краевых задач была применена к уравнениям смешанного типа Моравец (C. S. Morawetz [1]), которая рассматривала системы первого порядка, эквивалентные уравнению Чаплыгина; Фридрихс (K. O. Friedrichs [2]) изучил весьма общие системы. Техника Моравец получения энергетических неравенств применялась в случае других уравнений и граничных условий Ф. И. Франклем [1], см. в связи с этим также п. 5 и работу Линь Цзянь-бин [1]. Результаты пп. 1—4 принадлежат автору [13, 19], они представляют собой другой путь получения энергетических неравенств, дающий оценки в других нормах и для более общих уравнений, чем уравнение Чаплыгина. Как уже говорилось, к этой методике автор пришел в связи с развитием доказательства леммы 1.1; с другой стороны, ее можно рассматривать подобно технике Моравец и как развитие *abc*-метода Фридрихса доказательства теорем единственности для уравнения Чаплыгина. Результаты пп. 1—4 тесно связаны со статьей Проттера (M. H. Protter [1]) относительно подобных теорем единственности. Относительно гладкости слабых решений, получаемых посредством неравенств Моравец, см. работу Лакса и Филлипса (P. D. Lax, R. S. Phillips [1]). Детальное изложение других подходов к уравнениям смешанного типа и библиография имеется в книгах Берса [1] и А. В. Бицадзе [1].

В связи с результатами § 2—3 и гл. II отметим близкую по идеям и технике работу Фикера о существовании слабых решений краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка (G. Fichera [3]). Достаточную гладкость этих решений недавно установила О. А. Олейник [1].

Глава V

Исторически путь построения разложений по обобщенным собственным функциям и векторам был гораздо более извилистым, чем изложенный в этой главе. Построение разложений по собственным функциям в случае непрерывного спектра приводило к значительным трудностям, которые преодолевались во многих работах, в особенности посвященных спектральной теории сингулярных дифференциальных операторов. Из работ в этой области, больше всего повлиявших на создание изложенной теории, укажем следующие.

М. Г. Крейном [6, 8, 13] был создан общий метод направляющих функционалов и доказана с его помощью теорема разложения по собственным функциям для обыкновенных самосопряженных дифференциальных операторов произвольного порядка, а также даны его приложения к интегральному представлению положительно определенных ядер. Другое доказательство теоремы о разложении принадлежит Кодаира (K. Kodaira [1]). Первой работой, посвященной спектральной теории самосопряженного эллиптического оператора в неограниченной области, была работа Карлемана (T. Carleman [1]). Теория разложений по собственным функциям оператора Шредингера в неограниченной области была построена А. Я. Повзнером [3, 4], работа которого послужила отправной точкой ряда исследований в этой области. Для общих самосопряженных эллиптических операторов подобные результаты были получены Гордингом (L. Garding [2, 3]) и Браудером (F. E. Browder [1]). В работе Маутнера (F. I. Mautner [1]) была четко высказана идея дифференцирования разложения единицы, а в работе Хёрмандера (L. Hörmander [1]) были впервые построены разложения по собственным функциям неэллиптических (а именно — гипоэллиптических) операторов. Значительную роль в развитии всего круга вопросов, связанных с построением спектральной теории, оказали книги Титчмарша [1, 2] и Б. М. Левитана [1], возбудившие, в частности, интерес к классической работе Г. Вейля (1910 г.) в этом направлении.

С другой стороны, создание теории разложений по обобщенным собственным функциям стимулировали некоторые стоявшие задачи. К их числу относится задача доказательства наличия собственных функций у динамической системы и задача С. Л. Соболева об исследовании собственных функций вида $A\varphi=\lambda B\varphi$, где A и B — дифференциальные операторы. Исследуя последнюю задачу, Р. А. Александрян [1, 2] еще в 1949 г. впервые сформулировал частное понятие обобщенной собственной функции.

В 1955 г. появилась основополагающая в рассматриваемом направлении работа И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко [1] (см. также И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [3]), в которой было показано, что всякий самосопряженный оператор A, действующий в сепарабельном функциональном гильбертовом пространстве H, имеет полную систему обобщенных собственных функций, являющихся функционалами над некоторым линейным топологическим пространством основных функций Φ. Авторы рассматривали конкретные виды Φ, однако из методики доказательства было видно, что оно проходит для любого счетнонормированного $\Phi=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Phi_n$, которое «ядерно в смысле И. М. Гельфанда»: всякий слабо абсолютно сходящийся ряд функционалов из Φ' абсолютно сходится по норме некоторого Φ_n'.

В 1956 г. появилась работа автора [3] (см. также [6]), в которой было показано, что в качестве Φ может быть взято не линейное топологическое, а некоторое гильбертово пространство. Тем самым обобщенные собственные функции становились функционалами конечного порядка, который зависел лишь от характера H. В этой работе $H=L_2(E_n)$, но методика доказательства, как было указано, проходила для ряда других функциональных пространств.

В 1956 г. Браудер (F. E. Browder [3]) на основании упомянутой статьи И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко подробно изучил разложение по обобщенным собственным функциям типа $A\varphi=\lambda B\varphi$. Гординг (L. Gårding [4]) в реферате на статью автора [3] наметил другой изящный подход к основному результату статьи, этот подход затем был развит в абстрактном виде К. Мореном (K. Maurin [2, 3, 4]) для весьма общих случаев. Он не использует дифференцирование E_λ, а основывается на теореме Неймана о разложении гильбертова пространства в прямой интеграл по заданному A. Д. А. Райков [1] показал, что ядерные в смысле Гротендика пространства являются ядерными в смысле И. М. Гельфанда, этим самым было произведено обобщение теоремы И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко на абстрактные гильбертовы H с вложенным в него ядерным в обычном понимании Φ.

Вместе с тем, как уже подчеркивалось, представлялось важным выбирать Φ как можно ближе к H. О том, что зазор между Φ и H мог быть не очень большим, говорили результаты автора о возможности выбора в качестве Φ гильбертовых пространств, однако они не давали ответа на вопрос в абстрактном и законченном виде. Здесь завершающую роль сыграла работа Г. И. Каца [1, 2, 3], в которой было подчеркнуто, что существенна не внутренняя структура Φ, а то, как это пространство вложено в H. Именно Г. И. Кац показал, что если $\Phi=H_+$ гильбертово, то квазиядерность вложения $H_+\to H$ является необходимым и достаточным условием того, что у любого самосопряженного оператора А, действующего в H, имеется полная система обобщенных собственных векторов из H. Другой подход к этим результатам, развивающий методику статей автора [3, 6], был предложен им в [10].

Дальнейшая модификация результатов и доказательств содержится в книге И. М. Гельфанда, Н. Я. Виленкина [1] и в работах К. Морена (K. Maurin [5] и Фояша (C. Foiaş [1, 2, 3]). В частности, в этих работах Фояша детально исследован случай, когда Φ — банахово пространство. См. также E. Nelson [1], E. Gerlach [1]. Обобщение теории на некоторые классы несамосопряженных операторов содержится в работах Браудера (F. E. Browder

[6, 7]) и В. Э. Лянце [1]. См. также работу Ю. Л. Далецкого [1], где даны применения к континуальным интегралам.

После этого краткого обзора перейдем к указаниям относительно фактов, помещенных в книге. Построение § 1—2 разложений по обобщенным собственным векторам следует статье автора [10] и общим соображениям его работы [16]. Теорема 1.1 тоже принадлежит автору [10], теорема 1.2 — Динкулеану (N. Dinculeanu [1]). Теорема 1.5, как указывалось, принадлежит Г. И. Кацу [1, 3]. Приведенное простое ее доказательство подсказано автору статьей Фояша (C. Foiaş [2]). В п. 4, § 2 излагается упомянутая выше методика доказательства Гординга — Морена теоремы о разложении. Полезное замечание о том, что Сл. $(P(\lambda))=1$, и связанные с ним уточнения принадлежат Ю. Б. Орочко.

Результаты § 3 в основном принадлежат автору [3, 6]. Спектральная теория карлемановских операторов была развита Маутнером (F. I. Mautner [1]) и Гордингом (L. Gårding [3]), в более специальном случае — А. Я. Повзнером [3]. Изложенное в § 4 детальное изучение поведения спектрального ядра Φ $(x, y; \lambda)$ таких операторов принадлежит автору [3, 6, 10]. Важное для § 4 замечание п. 1 принадлежит Г. И. Кацу [3] и автору [10]. Доказательство леммы 4.1 опирается на технику, развитую М. Г. Крейном [10], лемма 4.2 принадлежит ему же. Теоремы 5.1 и 5.2 принадлежат автору [3, 6], теоремы 5.3 и 5.4 — Ю. Б. Орочко и автору (Ю. М. Березанский, Ю. Б. Орочко [1]), теорема 5.5 — Г. И. Кацу, А. Г. Костюченко и автору (результат опубликован в статье Ю. М. Березанского [10]), лемма 5.2 — М. Г. Крейну [10].

Глава VI

К предложениям пп. 1—3, § 1, по-видимому, независимо пришел ряд математиков, занимающихся спектральной теорией и краевыми задачами. Теорема 1.4 по существу принадлежит Карлеману (T. Carleman [1]). Теоремы 1.5 и 1.6 принадлежат Л. П. Нижнику [1, 3], а лемма 1.3 — Като (T. Kato [1]). В связи с вопросами, изложенными в п. 6, см. работы Браудера (F. E. Browder [11]), Л. П. Нижника [3], А. Я. Повзнера [3], Икебе (T. Ikebe [1]), Като (T. Kato [2]) и Л. Д. Фаддеева [4]. Впервые на связь между самосопряженностью оператора Шредингера и единственностью решения задачи Коши для соответствующего волнового уравнения обратил внимание и использовал ее для доказательства самосопряженности А. Я. Повзнер [3], подобная методика с использованием параболических уравнений затем применялась А. Г. Костюченко [1]. Теорема 1.7 является абстрактным изложением подобного приема. Теорема 1.8 в случае выражения Шредингера принадлежит А. Я. Повзнеру [3]. В связи с затронутым вопросом единственности решений задачи Коши отметим работы Ю. И. Любича [1, 2], Л. Н. Прокопенко [2], Агмона и Ниренберга (S. Agmon, L. Nirenberg [1]). О самосопряженности эллиптических операторов в случае области с угловыми точками см. работу М. Ш. Бирмана, Г. Е. Скворцова [1]. В связи со сказанным в конце п. 7 см. работу Б. М. Левитана [5] о самосопряженности оператора Шредингера.

Перейдем к § 2. Спектральная теория внутри области (п. 1) в случае выражения Шредингера построена А. Я. Повзнером [3], а в общем случае — Гордингом (L. Gårding [2]) и Браудером (F. E. Browder [1]); уточнения, связанные с изучением роста спектрального ядра $\Phi(x, y; \lambda)$ вблизи границы области, с его разложимостью в ряд и т. д. принадлежат автору [6, 10, 18], а лемма 2.3 — М. Г. Крейну [10]. Спектральная теория вплоть до границы (пп. 2—4) построена автором [18], существенное для этого построения представление (2.21) подсказано одним близким преобразованием Гординга, применявшимся им при построении теории внутри области (L. Gårding [2]). Отметим, что некоторые факты спектральной теории вплоть до границы для уравнения Шредингера можно усмотреть из работы А. Я. Повзнера [3]. Относительно п. 5 см. статью автора [6]. Результаты п. 9, касающиеся гиперболических уравнений, принадлежат автору [1, 8]; они получены с использованием идеи С. Л. Соболева [2] и техники М. Рисса (M. Riesz [1]). Результаты п. 10, за исключением утверждения в конце этого пункта, принадлежат автору; это утверждение — Г. И. Кацу, А. Г. Костюченко и автору (см. Ю. М. Березанский [10]). Оценка собственных функций типа теоремы 2.11 в случае $n=1$ с полуограниченным $c(x)$ получена ранее другим, более аналитическим методом Э. Э. Шнолем [2, 3], при этом равномерная непрерывность $c(x)$ может не предполагаться (см. также И. М. Глазман [1]). Пример, о котором шла речь на стр. 446, принадлежит В. П. Маслову [1]. В связи с результатами п. 10 см. также работу А. Г. Костюченко [2] об оценке ядра резольвенты эллиптического оператора. Недавно Ю. Б. Орочко [1] развил методику п. 10 и получил оценки (2.96) для любого n без всяких ограничений на потенциал $c(x)$, кроме его достаточной гладкости; при этом в оценках ω можно отбросить.

Результаты пп. 1—3, § 3 принадлежат автору, частично они опубликованы [6], а также Л. П. Нижнику [4]; близкие факты см. также: И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [1], Фояш (C. Foiaş [4]). Построение разложений по собственным функциям гипоэллиптических операторов дано Хёрмандером (L. Hörmander [1]) еще до создания общей теории разложений по обобщенным собственным функциям, в п. 4 приведено изложение этих результатов Хёрмандера с новых позиций. Отметим, что недавно удалось существенно продвинуться в изучении асимптотических свойств спектральной функции гипоэллиптического оператора, см. N. Nilsson [1], также В. Н. Горчаков [1, 2].

Построение теории разделения переменных (§ 4) следует, в основном, работе автора [6]. Из более ранних работ в этом направлении отметим статьи Кордеса (H. O. Cordes [1, 2]) и «аналитическое» изложение вопроса в книге Титчмарша [2]. Написанию п. 2 во многом способствовала работа Л. и К. Моренов (L. Maurin, K. Maurin [2]). Этим же авторам принадлежит существенная формула (4.23).

Литература к § 5 была указана в тексте.

Сделаем некоторые дополнительные замечания. Относительно исследования спектра дифференциальных операторов см. книгу И. М. Глазмана [1] и обзор И. М. Глазмана и М. Ш. Бирмана [1]. Относительно асимптотических свойств (по λ) спектральной функции, собственных функций и т. д. см. статьи Б. М. Левитана [3, 4] и диссертацию Бергендала (G. Bergendal [1]). Детальное изучение сходимости разложений проведено В. А. Ильиным [1]. Укажем на работы М. Г. Крейна [12, 16], устанавливающие глубокие аналогии между спектральной теорией уравнения Штурма — Лиувилля на полуоси (или более общее — уравнения колебания струны) и спектральной теорией якобиевых матриц и классической проблемой моментов, и на работу В. А. Марченко [1], посвященную построению операторов преобразования для уравнения Штурма — Лиувилля и изучению с их помощью гармонического анализа разложений по собственным функциям и обратной задачн.

Мы не будем касаться обратной задачи спектрального анализа для уравнения Штурма — Лиувилля на полуоси и уравнения колебания струны, решенной в известных работах В. А. Марченко, М. Г. Крейна и И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана. Литературу см. частично в обзоре Л. Д. Фаддеева [3] и книге З. С. Аграновича и В. А. Марченко [1]. Остановимся коротко на обратной задаче спектрального анализа для простейшего эллиптического уравнения — уравнения Шредингера $-\Delta u+c(x)u=\lambda u$, рассматриваемого в некоторой области $G\subseteq E_n (n=2,3)$ с достаточно гладкой границей Г. Автором [1, 8] показано, что коэффициент $c(x)$ однозначно восстанавливается по спектральной функции $\Xi(x, y; \lambda)$, заданной для $(x, y; \lambda)\in I\times I\times(-\infty,\infty)$, где I — некоторый (сколь угодно малый) плоский кусок границы Г. Аналогичная теорема единственности справедлива и в случае $G=E_n$. Доказательства этих фактов существенно опираются на некоторые результаты пп. 9—10, § 2. Разностный аналог подобной постановки изложен в п. 5, § 4, гл. VII. Далее, автором выведены связи между указанной спектральной постановкой обратной задачи и рядом постановок с данными рассеяния [2, 8]. Отметим, что в этих работах по существу установлены дисперсионные соотношения по энергии для уравнения Шредингера с финитным потенциалом $c(x)$, точнее, было показано, как такие соотношения после проведения некоторых оценок могут быть выведены из работы А. Я. Повзнера [3]; см. также для быстро убывающих потенциалов Л. Д. Фаддеев [2]. В этих же работах автора установлена асимптотика амплитуды рассеяния плоских волн, дающая возможность обосновать методику Э. Э. Шноля [1] решения обратной задачи с данными рассеяния, затем для быстро убывающих потенциалов подобный результат был независимо получен Л. Д. Фаддеевым [1]. В связи с обратной задачей с данными рассеяния укажем еще работы: Д. Я. Петрина [1], Л. П. Нижник [2], В. И. Мальченко [1], Лакс, Филлипс (P. D. Lax, R. S. Phillips [2]). Задача рассеяния для разностных уравнений: И. М. Лифшиц [1], В. Г. Тарнопольский [3], М. С. Эскина [1].

В заключение отметим, что построение разложений (как и решение обратной задачи) в случае обыкновенных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами дано Ф. С. Рофе-Бекетовым [1, 2]. Ряд задач на собственные значения для подобных уравнений в конечном интервале детально исследовался С. Г. Крейном и Г. И. Лаптевым [1]. Описание всех спектральных мер получено недавно М. Л. Горбачуком.

Глава VII

В § 1 излагается классическая теория якобиевых матриц. На характер изложения повлияли статьи Н. И. Ахиезера [1] и в особенности М. Г. Крейна и М. А. Красносельского [1]; пп. 4, 6—8 в основном являются разностной интерпретацией соответствующих параграфов последней статьи. Теорема 1.3 принадлежит Карлеману, теорема 1.4 — Воук (A. Wouk [1]), теорема 1.5 — автору [5], теорема 1.8 — М. Г. Крейну [5], теорема 1.10 — М. А. Наймарку [1], теоремы 1.12—1.14 — Неванлинна, теорема 1.16 — несколько модифицированная теорема И. М. Глазмана и П. Б. Найман [1]. Доказательством теоремы М. Г. Крейна и Д. П. Мильмана см., например, в книге Данфорда и Дж. Шварца [1]. Другие подходы к теории якобиевых матриц, ряд смежных вопросов, подробную библиографию и т. д. см. в книге Н. И. Ахиезера [2], в этой же книге приведено полное доказательство теоремы 1.14. Более классический подход см. в книге J. A. Shohat, J. D. Tamarkin [1]. К § 1 примыкает § 3. Метод «удвоения», излагаемый здесь, принадлежит автору [5].

Перейдем к § 2. Псевдогильбертовы пространства типа l_2, составленные из последовательностей матриц конечного фиксированного порядка, впервые рассматривал М. Г. Крейн [11]. Автор [5], а затем В. Г. Тарнопольский [1], рассматривали аналогичные пространства для матриц бесконечного порядка и операторов. Изложенный в пп. 1—4 общий подход принадлежит автору.

Спектральная теория формально самосопряженных обыкновенных разностных выражений второго порядка, коэффициентами которых являются матрицы конечного фиксированного порядка, построена М. Г. Крейном [11]. Здесь удалось получить столь же окончательные результаты, как и в случае классической проблемы моментов. С этим циклом вопросов тесно связана построенная М. Г. Крейном [2, 3, 9] общая теория целых операторов, позволившая на операторы с конечными дефектными числами, имеющие определенную структуру, перенести основные положения проблемы моментов. Отметим, что к целым операторам относятся, например, операторы, возникающие в теории продолжения положительно определенных функций. Спектральная теория формально самосопряженных выражений в частных разностях второго порядка (§ 4) принадлежит автору [5]. Ее можно рассматривать как теорию типа М. Г. Крейна, однако теперь коэффициентами служат уже бесконечные матрицы специального вида. Обобщение на случай произвольных коэффициентов, являющихся только ограниченными операторами, было дано В. Г. Тарнопольским [1, 2]. Результаты пп. 5—11, в основном, принадлежат автору [5] и В. Г. Тарнопольскому [1, 2]; в этих работах приведены и дальнейшие факты теории, о которых упоминается в конце п. 11.

Результаты § 4 частично обобщены на случай произвольного четного порядка Б. В. Базановым [1, 2]. В связи с вопросом об описании всех спектральных матриц см. работу А. В. Штрауса [1] об общем виде резольвент самосопряженных расширений эрмитова оператора; формула А. В. Штрауса использовалась в упомянутых работах Б. В. Базанова. Подобные вопросы для случая неплотно заданных операторов см. Б. И. Лошкарев [1].

Глава VIII

Впервые теорема об интегральном представлении ограниченной п. о. в обобщенном смысле функции по собственным функциям уравнения Штурма—Лиувилля на полуоси была получена методами нормированных колец А. Я. Повзнером [1, 2]. Общий случай одного обыкновенного дифференциального уравнения без предположений ограниченности функции был полностью изучен М. Г. Крейном [6, 8, 10] при помощи метода направляющих функционалов, созданного им под влиянием заметки М. С. Лившица [1]. Под влиянием основной идеи этого метода развивались последующие исследования в направлении получения интегральных представлений п. о. ядер. Так, автор [4, 11], объединяя прием М. Г. Крейна введения гильбертова пространства H_K по ядру K с теорией разложений по обобщенным собственным функциям оператора, порождаемого в H_K рассматриваемым дифференциальным выражением, получил результаты, охватывающие и уравнения в частных производных, когда метод направляющих функционалов уже неприменим. Их обобщения и уточнения были даны К. Мореном, рассмотревшим обобщенные п. о. ядра (K. Maurin [2, 3]), и Браудером (F. E. Browder [7]). Случай интегральных представлений по собственным функциям более чем одного уравнения (многомерные теоремы) изучался независимо, почти одновременно и близкими методами А. Г. Костюченко и Б. С. Митягиным [1, 2, 3] и автором [10, 15]. В § 1—2 в основном излагается теория, развитая в последней статье автора. Отметим результаты других математиков, содержащиеся в этих параграфах. Теорема 2.2 принадлежит А. Г. Костюченко и Б. С. Митягину [3], теорема 2.4 — по существу, И. М. Гельфанду и Г. Е. Шилову [3], теорема 2.6 получена в 1945 г. М. С. Лившицем и независимо позже Г. И. Эскиным [1] (см. также Р. С. Исмагилов [1]). Излагаемое ее доказательство приспособлено к описанию всех самосопряженных расширений. Результат, похожий на теорему 2.7, опубликован Р. С. Исмагиловым [2]. Теоремы 2.7 и 2.8 опубликованы автором [17]. В связи с § 1—2 см. также статью Фояша (C. Foiaş [4]).

Перейдем к § 3. Результаты пп. 1—2 принадлежат автору [4, 11, 15] и Браудеру (F. E. Browder [7]), результаты п. 3—М. Г. Крейну [6, 8], теоремы 3.9 и 3.10 — автору [15]. Доказательство этих теорем использует по существу модификацию теоремы И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [3] о классах единственности задачи Коши для общих уравнений с постоянными коэффициентами. Близкий подход в случае $L=\frac{d^2}{dx^2}$ был ранее применен А. Г. Костюченко и Б. С. Митягиным [1, 3], а еще раньше А. Я Повзнером [3].

Остановимся подробнее на теореме 3.9 для случая выражения $L=\frac{d^2}{dx^2}$ и результатах п. 11. Указанные в п. 11 представления принадлежат М. Г. Крейну [6, 8]. Условие единственности представления (3.87) эквивалентно следствию на стр. 698; результат, сформулированный в нем, независимо от теории п. о. функций был ранее доказан Б. М. Левитаном и Н. Н. Мейманом [1]. Теоремы типа 3.18 и 3.19 при $l=\infty$ для обобщенных функций $k(t)$ были получены И. М. Гельфандом и Ся До-шином [1] (см. также И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин [1] и А. Г. Костюченко и Б. С. Митягин [1, 3]). Впервые обычную теорему Бохнера для обобщенных функций доказал Л. Шварц (L. Schwartz [1]), в связи с этими вопросами см. новую его работу [3].

Отметим, что оценка (3.88) в теореме 3.18 может быть ослаблена: функцию Ce^{Nt^2} можно заменить функцией $Ce^{Nt^2h(t)}$, где $h(t)>0$ медленно растет на ∞. Это сделано Е. Б. Вул [1]. Подобное ослабление оценок может быть получено и в общем случае теорем 3.9 и 3.10. Это сделано Н. Н. Чаусом [2]. Он предварительно доказал более тонкую теорему о классах единственности решения задачи Коши для общего уравнения с постоянными коэффициентами, чем использованная в п. 4 теорема И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, а затем применил такую же методику, как в пп. 4—5.

Теорема 3.11 при $l=\infty$ — обычная теорема Бохнера (S. Bochner [1]), при $l<\infty$ — теорема М. Г. Крейна о возможности продолжения п. о. функции с сохранением положительной определенности (М. Г. Крейн [1]).

Основные результаты пп. 8—9 об описании продолжений п. о. функций принадлежат М. Г. Крейну [1, 2, 3, 9 и дальнейшие его исследования]. Их изложение несколько модифицировано автором в плане привлечения теории пространств с позитивной и негативной нормами. В пп. 8—9 изложена лишь первая работа М. Г. Крейна об описании всех продолжений п. о. функции; мы не излагали дальнейших его работ, в которых по существу проводилась континуальная «ортогонализация» δ_x, где x — непрерывно меняется по $[-l, l]$, а под «ортогональностью» понимается выполнение равенства Парсеваля (М. Г. Крейн [14, 15, 17, 18]). Эти работы воедино связаны с данным М. Г. Крейном решением обратной задачи спектрального анализа для уравнений Штурма — Лиувилля и более общих его аналогов. Мы не касались интерпретации теории продолжения с точки зрения целых операторов (М. Г. Крейн [2, 3, 9]). Отметим, что первый пример неоднозначного продолжения п. о. функции принадлежит Б. В. Гнеденко [1].

Теорема 3.17 принадлежит С. Н. Бернштейну [3], результаты п. 12 — А. Я. Повзнеру [1, 2] и М. Г. Крейну [6, 8]. Относительно подходов к результатам типа п. 12 посредством теории коммутативных колец (нормированных и топологических) см. А. Я. Повзнер [1, 2], Б. М. Левитан [2], Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн [1], А. Г. Костюченко, Б. С. Митягин [1, 3].

Ряд других интересных примеров интегральных представлений п. о. ядер по собственным функциям обыкновенных дифференциальных выражений см. в работах Шенберга (I. J. Shoenberg [1]), М. Г. Крейна [10], Девинатца (A. Devinatz [1, 2]), А. Г. Костюченко, Б. С. Митягина [3], Н. И. Ахиезера [2]. С некоторыми построениями § 3 связана также работа Ароншайна о воспроизводящих ядрах (N. Aronszajn [1], см. также E. Nelson [1].

Перейдем к § 4. Результаты пп. 1—2 принадлежат автору [15]; для менее общих дифференциальных выражений $\left(\text{именно, } L_t^{(j)}=i\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$ и ядер они частично раньше были получены А. Г. Костюченко и Б. С. Митягиным [1, 3]. Отметим, что последние авторы рассматривали также ядра, сконструированные по обобщенным функциям $k(t)$ (например, $K(x,y)=\frac{1}{2}(k(x+y)+k(x-y))$); многомерные теоремы типа Бохнера для подобных обобщенных ядер впервые были установлены Н. Я. Виленкиным [1] (см. также И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин [1]).

Теоремы 4.4 и 4.5 — классические многомериые теоремы Бохнера и С. Н. Бернштейна (см., иапример, Н. И. Ахиезер [2]). Примеры 3) —5), п. 3, с бо́льшими ограничениями на рост $k(t)$ (например, $e^{Nt^2}j$ заменяется иа $e^{Nt}j$). были известны; в указанной форме они получены впервые А. Г. Костюченко и Б. С. Митягиным [1, 3]. «Смешанные» п. о. функции типа примера 5) впервые рассматривал и дал иитегральные представления для них Девинатц (A. Devinatz [2]). Как и в одномерном случае, Н. Н. Чаусом [2] получено ослабление условий (4.16) в общей теореме 4.3.

Теорема 4.6 установлена в 1945 г. М. С. Лившицем в его докторской диссертации (Москва, ин-т им. Стеклова), но не опубликована. Позже независимо она была с некоторыми дополнительными ограничениями доказана Девинатцом (A. Devinatz [4]) и без них — Г. И. Эскиным [1]. Намечаемая в п. 4 схема описания продолжений п. о. функций двух переменных — автора. Теорема об интегральном представлении вида (4.33) операторных п. о. функций принадлежит М. Г. Крейну [8] и М. Л. Горбачуку [2]; в этой и последующей работе [3] М. Л. Горбачук перенес на операторные п. о. функции основные факты пп. 7—9, § 3 об описании продолжений, что, в частности, дало возможность завершить описание продолжений п. о. функций двух переменных, намеченное в п. 4, § 4 (Ю. М. Березанский, М. Л. Горбачук [1]). Другой подход к описанию всех продолжений, основанный на получении для $k(t)$ $(t\in(-\infty,\infty)\times(-l_2, l_2))$ формулы (4.32) с интегралом, вообще говоря, вместо суммы, и дальнейшем продолжении функций $k_\alpha(t_2)$, принадлежит И. Е. Овчаренко [2] и Б. Я. Левину и И. Е. Овчаренко [1]. Для общих ядер, *-коммутирующих с дифференциальными выражениями, позже подобное описание получил иным способом М. Л. Горбачук [1]. С рассматриваемым кругом вопросов связана также работа И. Е. Овчаренко [1].

Пример п. о. функции в прямоугольнике, не допускающей продолжения в п. о. функцию во всей плоскости, построен Кальдероном и Пепинским (A. P. Calderon, R. Pepinsky [1]) и позже независимо Рудиным (W. Rudin [1]). Результат такого рода для двумерной проблемы моментов, показывающий, что такая проблема не всегда разрешима, получен Р. Б. Зархиной [1], общие соображения по этому поводу см. в книге И. М. Гельфанда и Н. Я. Виленкина [1]. В этой же книге приведена конструкция Д. Гильберта положительного полинома от двух переменных, не являющегося суммой квадратов модулей полиномов. Этот полином используется во всех перечисленных примерах.

Рассмотрим § 5. Результаты пп. 2—3 принадлежат, в основном, Н. Н. Чаусу [1]. Пространства $K_{p,Q}$, используемые здесь, являются обобщением пространств, примененных раньше А. Г. Костюченко и Б. С. Митягиным [2, 3] в близких построениях для проблемы моментов. Недавно Чанг Чан [1] усилил теоремы 5.3, 5.4 и 5.6. Так, например, в оценке (5.19) выражение $|j|^{Q|j|}\,|k|^{Q|k|}$ можно заменить на $m_{|j|}m_{|k|}$, где класс $C(A^n_{nQ}m_{nQ})$ квазианалитический; здесь $A_n\geqslant 1$ $(n=0, 1, \dots)$ — неубывающая последовательность, такая, что $|a_{j\alpha}|\leqslant A_{|j|}$ ($a_{j\alpha}$ — коэффициенты выражения (5.1), они могут быть переменными). Аналогично ослабляется оценка (5.29). Этот результат получен при помощи метода, упомянутого на стр. 734.

В пп. 4—5 излагаются, частично с новых позиций, классические вопросы степенной проблемы моментов, литературу см. в книгах Шохата и Тамаркина (J. A. Shohat, J. D. Tamarkin [1]) и Н. И. Ахиезера [2]. Многомерной степенной проблеме моментов посвящены работы Хэвилэнда (E. K. Haviland [1]), Девинатца (A. Devinatz [2, 3]), Р. Б. Зархиной [1]. А. Г. Костюченко, Б. С. Митягина [2, 3]; подход к этой проблеме, изложенный в п. 7, принадлежит

А. Г. Костюченко и Б. С. Митягину. Теорема 5.11 в двумерном случае принадлежит Девинатцу (A. Devinatz [3]), в многомерном (в несколько более слабой форме) — А. Г. Костюченко и Б. С. Митягину [2, 3], теорема 5.12 — Г. И. Эскину [1].

Результаты § 6 принадлежат автору. Прием перехода от эллиптического к гиперболическому уравнению, использованный в п. 2, см. в книге И. Н. Векуа [1].

Сделаем некоторые дополнительные замечания. В связи с разностными выражениями с операторными коэффициентами можно рассматривать операторную проблему моментов: $S_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\Sigma(\lambda)$ $(n=0, 1, \ldots)$ (ср. п. 8, § 2, гл. VII). Она подробно изучена М. Г. Крейном [11] (см. также М. Г. Крейн и М. А. Красносельский [1]) в случае матриц конечного независящего от n порядка.

Изложенную в гл. VIII теорию можно строить (правда, не с такой полнотой) для ядер $K(x, y)$, более общих, чем п. о. Именно, ядро $K(x, y) \in C(E_n \times E_n)$ называют эрмитово-индефинитным с $\varkappa (0 \leqslant \varkappa < \infty)$ отрицательными квадратами, если квадратичные формы $\sum\limits_{j,k=1}^{N} K(x_j, x_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k$ $(x_1, \ldots, x_N \in E_n;$ $N=1, 2, \ldots)$ содержат (после диагонализации) не более $\varkappa$ отрицательных квадратов, причем хотя бы одна из этих форм содержит точно $\varkappa$ таких квадратов. Для подобных ядер, $*$-коммутирующих с дифференциальным выражением L, можно строить теорию интегральных представлений по собственным функциям уравнения $Lu = \lambda u$. Здесь имеют место также многомерный и дискретный аналоги теории. Первые результаты принадлежат М. Г. Крейну (1948 г.) и И. С. Иохвидову (1955 г.) (И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн [1], И. С. Иохвидов [1]). Интегральное представление для непрерывной эрмитово-индефинитной функции $k(t)$, заданной на всей оси (т. е. функции, для которой ядро $K(x, y) = k(y-x)$ эрмитово-индефинитно), получил М. Г. Крейн [19]. Затем упомянутая общая теория интегральных представлений эрмитово-индефинитных ядер была развита В. И. Горбачук [1—4]. Во всех этих вопросах существенную роль играет теорема Л. С. Понтрягина [1] об инвариантных подпространствах эрмитова оператора, действующего в пространстве с индефинитной метрикой.

Ряд неосвещенных в гл. VIII интересных подходов к п. о. функциям и их обобщениям содержится в книгах И. М. Гельфанда и Н. Я. Виленкина [1] и Н. И. Ахиезера [2].

ЛИТЕРАТУРА

Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. (Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.)

1. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, 1. М., ИЛ, 1962.

2. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations. II, — Comm. Pure and Appl. Math., **17**, 1, 1964, 35—92.

Agmon S., Nirenberg L.

1. Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space. — Comm. Pure and Appl. Math., **16**, 2, 1963, 121—239.

Агранович З. С., Марченко В. А.

1. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, Изд-во ХГУ, 1960.

Агранович М. С., Волевич Л. Р., Дынин А. С.

1. Разрешимость общих граничных задач для эллиптических систем в многомерных областях. — Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963.

Hadamard J.

1. Équations aux dérivées partielles, le cas hyperbolique. — L'Enseignement Mathématique, **35**, 1936, 25—29.

Акилов Г. П.

1. См. Канторович А. В., Акилов Г. П. [1].

Александрян Р. А.

1. О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге. — ДАН СССР, **73**, 5, 1950, 869—872.

2. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева. — Труды Моск. матем. об-ва, 9, 1960, 455—505.

Aronszajn N.

1. The theory of reproducing kernels. — Trans. Amer. Math. Soc., **68**, 3, 1950, 337—404. (Русск. перевод: Математика, **7**, 2, 1963, 67—130).

2. On coercive integro-differential quadratic forms. — Proc. Conf. Partial Differential Equations, Univ. of Kansas, 1954, Technical Report, 14, **94**—106.

Aronszajn N., Milgram A. N.

1. Differential operators on Riemannian manifolds. — Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 2, 2, 1953, 1—61.

Ахиезер Н. И.

1. Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов. — УМН, **9**, 1941, 126—156.

2. Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961.

Ахиезер Н. И., Глазман И. М.

1. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.—Л., Гостехиздат, 1950.

Бабич В. М.

1. К вопросу о распространении функций.—УМН, 8, 2, 1953, 111—113.

Базанов Б. В.

1. О спектральных функциях одного симметрического частно-разностного оператора. — Сибирск. матем. журн., **2**, 2, 1961, 187—200.

2. Некоторые вопросы теории симметричных конечно-разностных операторов, Волжский матем. сборник (теоретич. серия), **1**, 1963, 9—31.

Bergendal G.

1. Convergence and summability of eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators. — Communications du Séminaire math. de l'université de Lund, **15**, 1959, 1—63.

Березанский Ю. М.

1. Об однозначности определения уравнения Шредингера по его спектральной функции. — ДАН СССР, **93**, 4, 1953, 591—594.

2. Об обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера. — ДАН СССР, **105**, 2, 1955, 197—200.

3. О разложении по собственным функциям общих самосопряженных дифференциальных операторов. — ДАН СССР, **108**, 3, 1956, 379—382.

4. Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям уравнений в частных производных. — ДАН СССР, **110**, 6, 1956, 893—896.

5. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка. — Труды Моск. матем. об-ва, **5**, 1956, 203—268.

6. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Матем. сборник, **43**, 1, 1957, 75—126.

7. О краевых задачах для общих дифференциальных операторов в частных производных. — ДАН СССР, **122**, 6, 1958, 959—962.

8. О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера. — Труды Моск. матем. об-ва, **7**, 1958, 3—62.

9. Об обобщенных решениях краевых задач. — ДАН СССР, **126**, 6, 1959, 1159—1162.

10. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов. — УМЖ, **11**, 1, 1959, 16—24.

11. Представление положительно определенных ядер через собственные функции дифференциальных уравнений. — Матем. сборник, **47**, 2, 1959, 145—176.

12. Некоторые примеры «неклассических» краевых задач для уравнений в частных производных. — ДАН СССР, **131**, 3, 1960, 478—481.

13. Энергетические неравенства для некоторых классов уравнений смешанного типа. — ДАН СССР, **132**, 1, 1960, 9—12.

14. О задаче Дирихле для уравнения колебания струны. — УМЖ, **12**, 4, 1960, 363—372.

15. Одно обобщение многомерной теоремы Бохнера. — ДАН СССР, **136**, 5, 1961, 1011—1014.

16. Пространства с негативной нормой. — УМН, **18**, 1, 1963, 63—96.

17. Некоторые вопросы спектральной теории самосопряженных дифференциальных операторов в частных производных. — Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963.

18. О гладкости вплоть до границы области спектральной функции самосопряженного дифференциального эллиптического оператора. — ДАН СССР, **152**, 3, 1963, 511—514.

19. Существование слабых решений некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа. — УМЖ, **15**, 4, 1963, 347—364.

Березанский Ю. М., Горбачук М. Л.

1. О продолжении положительно определенных функций двух переменных.— УМЖ, 17, 5, 1965, 96—102.

Березанский Ю. М., Крейн С. Г.

1. Гиперкомплексные системы с континуальным базисом. — УМН, **12**, 1, 1957, 147—152.

Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А.

1. Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений. — ДАН СССР, **148**, 4, 1963, 745—748.

Березанский Ю. М., Орочко Ю. Б.

1. Одно замечание относительно роста собственных функций самосопряженных операторов. — УМЖ, **14**, 2, 1962, 180—184.

Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.

1. О гладкости вплоть до границы области ядра резольвенты эллиптического оператора. — УМЖ, **15**, 2, 1963, 185—189.

Бернштейн С. Н.

1. Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа. — Сообщ. Харьк. матем. об-ва, вторая серия, 11, 1908—1909, 1—164.
2. О некоторых априорных оценках в обобщенной задаче Дирихле. — ДАН СССР, **124**, 2, 1959, 735—738.
3. Абсолютно монотонные функции. Собр. соч., т. 1, М., Изд-во АН СССР, 1952.

Берс Л. (Bers L.)

1. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М., ИЛ, 1961.

Бирман М. Ш.

1. К теории общих граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений. — ДАН СССР, **92**, 2, 1953, 205—208.
2. Характеристика эллиптических дифференциальных операторов с максимальной областью определения. — Вестник Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., мех. и астр., 19, 1957, 177—188.

Бирман М. Ш., Глазман И. М.

1. Спектры сингулярных дифференциальных операторов. — Труды 4-го Всесоюзного матем. съезда, **2**, 1964, 253—261.

Бирман М. Ш., Скворцов Г. Е.

1. О квадратичной суммируемости старших производных решения задачи Дирихле в области с кусочно гладкой границей. — Изв. вузов, математика, 5, 1962, 12—21.

Бицадзе А. В.

1. Уравнения смешанного типа. М., Изд-во АН СССР, 1959.

Bourgin D. G., Duffin R.

1. The Dirichlet problem for the vibrating string equation. — Bull. of the American Math. Soc., **45**, 1939, 851—859.

Bochner S.

1. Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Leipzig, 1932.

Browder F. E.

1. The eigenfunctionexpansion theorem for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **40**, 6, 1954, 454—467.

2. Strongly elliptic system of differential equations. — Contributions to the Theory of Partial Differ. Equations, Ann. Math. Studies, 33, Princeton, 1954, 15—51.

3. Eigenfunction expansions for formally self-adjoint partial differential operators. I, II. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **42**, 10, 1956, 769—771; **42**, 11, 1956, 870—872.

4. On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations. — Comm. Pure. a. Appl. Math., **9**, 3, 1956, 351—361.

5. Eigenfunction expansions for non-symmetric partial differential operators. I. — Amer. J. Math., **80**, 2, 1958, 365—381.

6. Eigenfunction expansions for non-symmetric partial differential operators. II. — Amer. J. Math., **81**, 1, 1959, 1—22.

7. Eigenfunction expansions for non-symmetric partial differential operators. III. — Amer. J. Math., **81**, 3, 1959, 715—734.

8. Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **45**, 3, 1959, 365—372.

9. Functional analysis and partial differential equations. I. — Math. Ann., **138**, 1959, 55—79. (Русск. перевод: Математика, **4**, 3, 1960, 79—106).

10. A priori estimates for solutions of elliptic boundary value problems. I, II. — Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetenschappen, Ser. A, **22**, 2, 1960, 145—159; 160—169.

11. On the spectral theory of elliptic differential operators. I. — Math. Ann., **142**, 1961, 22—130.

Бурбаки Н. (Bourbaki N.)

1. Intégration. Chap. 6, Intégration vectorielle. Paris, 1959.

2. Топологические векторные пространства. М., ИЛ, 1959.

Вахания Н. Н.

1. Об одной краевой задаче с заданием на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны. — ДАН СССР, **116**, 6, 1957, 906—909.

Векуа И. Н.

1. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

Виленкин Н. Я.

1. К теории положительно определенных обобщенных ядер. — УМН, **15**, 3, 1960, 139—146.

2. см. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. [1].

Вирабян Г. В.

1. О резольвенте одного оператора. — ДАН СССР, **151**, 2, 1963, 258—261.

Вишик М. И.

1. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений.— Матем. сборник, **29**, 3, 1951, 615—676.

2. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений. — Труды Моск. матем. об-ва, **1**. 1952, 187—246.

Вишик М. И., Ладыженская О. А.

1. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений. — УМН, **11**, 6, 1956, 41—97.

Вишик М. И., Мышкис А. Д., Олейник О. А.

1. Дифференциальные уравнения с частными производными, Математика в СССР за 40 лет, т. 1, М., Физматгиз, 1959, 563—636.

Вишик М. И., Соболев С. Л.

1. Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. — ДАН СССР, 111, 3, 1956, 521—523.

Вишик М. И., Шилов Г. Е.

1. Общая теория уравнений с частными производными и некоторые проблемы теории краевых задач. — Труды 4-го Всесоюзного матем. съезда, 1, 1963, 55—85.

Вишик М. И., Эскин Г. И.

1. Краевые задачи для общих сингулярных уравнений в ограниченной области. — ДАН СССР, 155, 1, 1964, 24—27.

Волевич Л. Р.

1. См. Агранович М. С., Волевич Л. Р., Дынин А. С. [1].

Волевич Л. Р., Панеях Б. П.

1. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. — УМН, 20, 1, 1965, 3—74.

Wouk A.

1. Difference equations and J-matrices. — Duke Math. J., 20, 2, 1953, 141—159.

Вул Е. Б.

1. О теоремах единственности для одного класса интегральных представлений. — ДАН СССР, 129, 4, 1959, 722—725.

Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.

1. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., Физматгиз, 1961.

Гельфанд И. М., Костюченко А. Г.

1. О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов. — ДАН СССР, 103, 3, 1955, 349—352.

Гельфанд И. М., Ся До-шин.

1. О положительно определенных обобщенных функциях. — УМН, 15, 1, 1960, 185—190.

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.

1. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.
2. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958.
3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958.

Gerlach E.

1. On spectral representation for selfadjoint operators. Expansion in generalized eigenelements. — University of Kansas, Technical report 4, 1964.

Gilbarg D., Serrin J.

1. On isolated singularities of second order elliptic differential equations. — J. d'Analyse Math., 4, 1955—1956, 309—340. (Русск. перевод: Математика, 2, 6, 1958, 63—86).

Глазман И. М.

1. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., Физматгиз, 1963.

2. См. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. [1].

3. См. Бирман М. Ш., Глазман И. М. [1].

Глазман И. М., Найман П. Б.

1. О выпуклой оболочке ортогональных спектральных функций. — ДАН СССР, **102**, 3, 1955, 445—448.

Глушко В. П., Крейн С. Г.

1. Дробные степени дифференциальных операторов и теоремы вложения.— ДАН СССР, **122**, 6, 1958, 963—966.

2. Неравенства для норм производных в пространствах L^p с весом. — Сибирский матем. журн., **1**, 3, 1960, 343—382.

Гнеденко Б. В.

1. О характеристических функциях. — Бюлл. МГУ (А), **1**, 5, 1937, 17—18.

Горбачук В. И.

1. Об интегральном представлении эрмитово-индефинитных ядер с конечным числом отрицательных квадратов (случай многих переменных). — УМЖ, **16**, 2, 1964, 232—236.

2. Об интегральном представлении эрмитово-индефинитных ядер. — УМЖ, **17**, 3, 1965, 43—58.

3. См. Плющева В. И. [1].

4. См. Плющева В. И. [2].

Горбачук М. Л.

1. Об описании продолжений положительно определенных ядер.—ДАН СССР, **159**, 4, 1964, 719—722.

2. О представлении положительно определенных операторных функций. — УМЖ, **17**, 2, 1965, 29—46.

3. Об описании продолжений положительно определенной операторной функции. — УМЖ, **17**, 5, 1965, 102—110.

4. См. Березанский Ю. М., Горбачук М. Л. [1].

Gårding L.

1. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations.— Math. Scand., 1, 1, 1953, 55—72.

2. Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators. — 12 Skand. Mat. Kongr., Lund, 1953 (1954), 44—55.

3. Application of the theory of direct integrals of Hilbert spaces to some integral and differential operators. — Lect. Ser. Inst. Fluid. Dynam. a. Appl. Math., **11**, 1954.

4. Math. Rev., 18, 4, 1957, 323.

5. Eigenfunction expansions. — Seminar in Appl. Math., Boulder, Colorado, June 29 — July 19, 1957.

6. Некоторые направления и проблемы теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных. — УМН, 15, 1, 1960, 137—152.

Горин Е. А.

1. Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных. — УМН, **16**, 1, 1961, 91—118.

Горчаков В. Н.

1. Об асимптотике спектральной функции одного класса гипоэллиптических операторов. — ДАН СССР, **152**, 3, 1963, 519—522.

2. Об асимптотических свойствах спектральной функции гипоэллиптических операторов. — ДАН СССР, **160**, 4, 1965, 746—749.

Градштейн И. С.

1. См. Рыжик И. М., Градштейн И. С. [1].

Grothendieck A.

1. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs Amer. Math. Soc., 16, 1955.

Huber A.

1. Die erste Randwertaufgabe für geschlossene Bereiche bei der Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$. — Monatshefte Math. und Phys., 39, 1932, 79—100.

Гусева О. В.

1. О краевых задачах для сильно эллиптических систем. — ДАН СССР, 102, 6, 1955, 1069—1072.

Далецкий Ю. Л.

1. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями. — УМН, 17, 5, 1962, 3—115.

Данфорд Н., Шварц Дж. (Dunford N., Schwartz J.)

1. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962.
2. Linear operators. Part II. New York — London, 1963.

Duffin R.

1. См. Bourgin D. G., Duffin R. [1].

Devinatz A.

1. Integral representations of positive definite functions. — Trans. Amer. Math. Soc., 74, 1, 1953, 56—77.
2. Integral representations of positive definite functions. II —Trans. Amer. Math. Soc., 77, 3, 1954, 455—480.
3. Two parameter moment problems. — Duke Math. J., 24, 4, 1957, 481—504.
4. On the extensions of positive definite functions. — Acta Math., 102, 1—2, 1959, 109—134.

Дезин А. А.

1. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах. — УМН, 14, 3, 1959, 21—73.

Денчев Р. Т.

1. О спектре одного оператора. — ДАН СССР, 126, 2, 1959, 259—262.

Dinculeanu N.

1. Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires. III. — Proc. Amer. Math. Soc., 10, 1959, 59—68.

Douglis A.

1. См. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. [1].
2. См. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. [2].

Дынин А. С.

1. См. Агранович М. С., Волевич Л. Р., Дынин А. С. [1].

Зархина Р. Б.

1. О двумерной проблеме моментов. — ДАН СССР, 124, 4, 1959, 743—746.

Ikebe T.

1. Eigenfunction expansions associated with the Schroedinger operators and their applications to scattering theory. — Arch. for Rat. Mech. Anal., 5, 1, 1960, 1—34.

Ильин А. М.

1. О фундаментальном решении пораболического уравнения. — ДАН СССР, **147**, 4, 1962, 768—771.

Ильин В. А.

1. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа. — УМН, 13, 1, 1958, 87—180.

Ильин В. А., Шишмарев И. А.

1. Об эквивалентности систем обобщенных и классических собственных функций. — Изв. АН СССР, математика, **24**, 5, 1960, 757—774.

Ильин В. П.

1. Некоторые функциональные неравенства типа теорем вложения. — ДАН СССР, **123**, 6, 1958, 967—970.

Иохвидов И. С.

1. К теории неопределенных теплицевых форм. — ДАН СССР, **101**, 2, 1955, 213—216.

Иохвидов И. С., Крейн М. Г.

1. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I, II. — Труды Моск. матем. об-ва, **5**, 1956, 367—432; **8**, 1959, 413—496.

Исмагилов Р. С.

1. Самосопряженные расширения системы коммутирующих симметрических операторов. — ДАН СССР, **133**, 3, 1960, 511—514.

2. Самосопряженные расширения коммутирующих симметрических операторов. — УМН, 17, 1, 1962, 177—181.

Йон Ф. (John F.)

1. The Dirichlet problem for a hyperbolic equation. — Amer. J. Math., **63**, 1, 1941, 141—154.

2. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М., ИЛ, 1958.

Calderon A. P., Pepinsky R.

1. On the phase of Fourier coefficients for positive real periodic functions. — Computing Methods and the phase problem in *x*-ray Cristal Analysis, 1952, 339—348.

Канторович А. В., Акилов Г. П.

1. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.

Garleman T.

1. Sur la théorie mathématique de l'équation de Schroedinger. — Arkiv för Math., Astr. och Fys., **24**, 11, 1934, 1—7.

Kato T.

1. Fundamental properties of Hamilton operators of Schroedinger type. — Trans. Amer. Math. Soc., 70, 2, 1952, 195—211.

2. Growth properties of solutions of the reduced wave equation with variable coefficient.—Comm. Pure a. Appl. Math., **12**, 3, 1959, 402—425.

Кац Г. И.

1. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов. — ДАН СССР, **119**, 1, 1958, 19—22.

2. Обобщенные элементы гильбертова пространства. — УМЖ, **12**, 1, 1960, 13—24.

3. Спектральные разложения самосопряженных операторов по обобщенным элементам гильбертова пространства. — УМЖ, **13**, 4, 1961, 13—33.

Caccioppoli R.

1. Limitazioni integrali per le soluzioni di un équazioni lineare ellitica a derivate parziali. — Giorn. Mat. Battaglini, **80**, 1950 —1951, 186—212.

Kodaira K.

1. On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions. — Amer. J. Math, **72**, 3, 1950, 502—544.

Cordes H. O.

1. Separation der Variablen in Hilbertschen Räumen.—Math. Ann., **125**, 1953, 401—434.

2. Über die spectrale Zerlegung von hypermaximalen Operatoren, die durch Separation der Variablen zerfallen. I, II. — Math. Ann., **128**, 1954—1955, 257—289; 373—411.

Костюченко А. Г.

1. О спектральных свойствах самосопряженных эллиптических операторов. — ДАН СССР, **115**, 1, 1957, 34—37.

2. Оценка резольвент сингулярных эллиптических операторов. — ДАН СССР, **132**, 1, 1960, 32—35.

3. См. Гельфанд И. М., Костюченко А. Г. [1].

Костюченко А. Г., Митягин Б. С.

1. О представлении положительно определенных функционалов на ядерных пространствах. — ДАН СССР, **131**, 1, 1960, 13—16.

2. Многомерная проблема моментов. — ДАН СССР, **131**, 6, 1960, 1249—1252.

3. Положительно определенные функционалы на ядерных пространствах. — Труды Моск. матем. об-ва, **9**, 1960, 283—316.

Кошелев А. И.

1. Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем. — УМН, **13**, 4, 1958, 29—88.

Красносельский М. А.

1. См. Крейн М. Г., Красносельский М. А. [1].

Крейн М. Г.

1. О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций. — ДАН СССР, **26**, 1, 1940, 17—21.

2. Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице. I, II. — ДАН СССР, **43**, 8, 1944, 323—326; ДАН СССР, **44**, 4, 1944, 131—134.

3. Об одном замечательном классе эрмитовых операторов. — ДАН СССР, **44**, 5, 1944, 191—195.

4. О проблеме продолжения винтовых дуг в гильбертовом пространстве.— ДАН СССР, **45**, 4, 1944, 147—150.

5. Об одной экстраполяционной проблеме А. Н. Колмогорова. — ДАН СССР, **46**, 8, 1945, 339—342.

6. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения. — ДАН СССР, **53**, 1, 1946, 3—6.

7. Про лінійні цілком неперервні оператори в функціональних просторах з двома нормами. — Збірник праць ін-ту матем. АН УРСР, 9, 1947, 104—129.

8. Про ермітові оператори з напрямними функціоналами. — Збірник праць ін-ту матем. АН УРСР, **10**, 1948, 83—106.

9. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m). — УМЖ, 1, 2, 1949, 3—66.

10. Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах. Ч. 1.— УМЖ, 1, 4, 1949, 64—98.

11. Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов. — ДАН СССР, **69**, 2, 1949, 125—128.

12. О краевой задаче Штурма — Лиувилля в интервале $(0, \infty)$ и об одном классе интегральных уравнений. — ДАН СССР, **73**, 6, 1950, 1125—1128.

13. Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале $(0, \infty)$. — ДАН СССР, 74, 1, 1950, 9—12.

14. Решение обратной задачи Штурма — Лиувилля. — ДАН СССР, **76**, 1, 1951, 21—24.

15. Об одном обобщении исследований Стильтьеса. — ДАН СССР, 87, 6, 1952, 881—884.

16. О неопределенном случае краевой задачи Штурма — Лиувилля в интервале $(0, \infty)$. — Изв. АН СССР, сер. матем., **16**, 4, 1952, 293—324.

17. Аналог неравенств Чебышева—Маркова в одномерной краевой задаче.— ДАН СССР, **89**, 1, 1953, 5—8.

18. О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка. — ДАН СССР, 88, 3, 1953, 405—408.

19. Об интегральном представлении непрерывной эрмитово-индефинитной функции с конечным числом отрицательных квадратов. — ДАН СССР, **125**, 1, 1959, 31—34.

20. См. Иохвидов И. С., Крейн М. Г. [1].

Крейн М. Г., Красносельский М. А.

1. Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов.— УМН, **2**, 3, 1947, 60—106.

Крейн С. Г.

1. Доклад на Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применениям. Баку, 1959.

2. Об одной интерполяционной теореме в теории операторов. — ДАН СССР, **130**, 3, 1960, 491—494.

3. См. Березанский Ю. М., Крейн С. Г. [1].

4. См. Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А. [1].

5. См. Глушко В. П., Крейн С. Г. [1].

6. См. Глушко В. П., Крейн С. Г. [2].

Крейн С. Г., Лаптев Г. И.

1. Граничные задачи для уравнения в гильбертовом пространстве. — ДАН СССР, **146**, 3, 1962, 535—538.

Ладыженская О. А.

1. О методе Фурье для волнового уравнения. — ДАН СССР, **75**, 6, 1950, 765—768.

2. О замыкании эллиптического оператора. — ДАН СССР, **79**, 5, 1951, 723—725.

3. Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений. — Вестник Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., мех. и астр., 11, 1955, 23—29.

4. Об интегральных оценках, сходимости приближенных методов и решений в функционалах для линейных эллиптических операторов. — Вестник Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., мех. и астр., 7, 1958, 60—69.

5. См. Вишик М. И., Ладыженская О. А. [1].

Lax P. D.

1. Symmetrizable linear transformations. — Comm. Pure a. Appl. Math., 7, 4, 1954, 633—647.

2. On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations. — Comm. Pure a. Appl. Math., **8**, 4, 1955, 615—633. (Русск. перевод: Математика, 1, 1, 1957, 43—59).

Lax P. D., Milgram A. N.

1. Parabolic equations. — Contribution to the Theory of Partial Differ. Equations, Ann. of Math. Studies, 33, Princeton, 1954, 167—190.

Lax P. D., Phillips R. S.

1. Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. — Comm. Pure a. Appl. Math., **13**, 3, 1960, 427—455.
2. The wave equation in exterior domains. — Bull. Amer. Math. Soc., **68**, 1, 1962, 47—49.

Лаптев Г. И.

1. См. Крейн С. Г., Лаптев Г. И. [1].

Левин Б. Я., Овчаренко И. Е.

1. Описание продолжений эрмитово-положительных функций. — ДАН СССР, **159**, 4, 1964, 746—749.

Левитан Б. М.

1. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. — УМН, **4**, 1, 1949, 3—112.
3. Некоторые вопросы спектральной теории самосопряженных дифференциальных операторов. — УМН, 11, 6, 1956, 117—144.
4. Асимптотическое поведение спектральной функции и разложение по собственным функциям. Асимптотическое поведение собственных значений и разложение по собственным функциям в случае, когда $q(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$. Приложения VI и VII к книге Титчмарш Э. Ч. [2], стр. 479—528.
5. Об одной теореме Титчмарша и Сиерса. — УМН, **16**, 4, 1961, 175—178.

Левитан Б. М., Мейман Н. Н.

1. О теореме единственности. — ДАН СССР, 81, 5, 1951, 729—731.

Leray J.

1. Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients. Princeton, Inst. for Adv. Study, 1952.

Лившиц М. С.

1. Об одном применении теории эрмитовых операторов к обобщенной проблеме моментов. — ДАН СССР, **44**, 1, 1944, 3—7.

Линь Цзянь-бин

1. О некоторых задачах Франкля. — Вестник Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., мех. и астр., 13, 1961, 28—39.

Lions J. L.

1. Problémes aux limites en théorie des distributions. — Acta Math., **94**, 1—2, 1955, 13—153.
2. Conditions aux limites de Visik — Soboleff et problèmes mixtes. — C. R. Acad. Sci. Paris, **244**, 9, 1957, 1126—1128.
3. Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications. — Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys., RPR, **2** (50), 4, 1958, 419—432.
4. Equations differentielles operationelles et problèmes aux limites. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1961.
5. См. Hörmander L., Lions J. L. [1].

Lions J. L., Magenes E.

1. Problemi ai limiti non omogenei. (III). — Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. III, **15**, 1—2, 1961, 39—101.

2. Problemi ai limiti non omogenei. (V). — Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. III, **16**, 1, 1962, 1—44.

Лифшиц И. М.

1. Рассеяние коротких упругих волн в кристаллической решетке. — Журн. экспер. и теорет. физики, **18**, 3, 1948, 293—300.

Лопатинский Я. Б.

1. Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. — УМЖ, **3**, 1, 1951, 3—38.

2. Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа. — УМЖ, **3**, 3, 1951, 290—316.

3. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. — УМЖ, **5**, 2, 1953, 123—151.

Лошкарев Б. И.

1. Спектральное разложение эрмитова конечно-разностного оператора второго порядка.—Волжский матем. сб. (теоретич. серия), **1**, 1963, 138—144.

Любич Ю. И.

1. Об условиях единственности решения абстрактной задачи Коши.— ДАН СССР, **130**, 5, 1960, 969—972.

2. К теореме единственности решения абстрактной задачи Коши. — УМН, **16**, 5, 1961, 181—182.

3. О существовании в большом фундаментальных решений линейных эллиптических уравнений второго порядка. — Матем. сборник, **57**, 1, 1962, 45—58.

Лянце В. Э.

1. Неограниченные операторы, перестановочные с разложением единицы — УМЖ, **15**, 4, 1963, 376—384.

Magenes E.

1. Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali. — Conferenza tenuta al VII Congresso dell' UMI, Genova, 30 settembre — 5 ottobre 1963.

2. См. Lions J. L., Magenes E. [1].

3. См. Lions J. L., Magenes E. [2].

Мальченко В. И.

1. К обратной задаче для уравнений квантовой механики.— УМЖ, **12**, 1, 1960, 93—96.

Мандельбройт С.

1. Квазианалитические классы функций. М.—Л., Гостехиздат, 1937.

Mangeron D.

1. Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche realidoppie. — Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4), 2, 1932, 29—40.

Марченко В. А.

1. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I, II.—Труды Моск. матем. об-ва, **1**, 1952, 327—420; **2**, 1953, 3—83.

2. См. Агранович З. С., Марченко В. А. [1].

Маслов В. П.

1. Об асимптотике обобщенных собственных функций уравнения Шредингера. — УМН, **16**, 4, 1961, 253—254.

Матийчук М. И.

1. Фундаментальные матрицы решений параболических и эллиптических систем с коэффициентами, удовлетворяющими интегральному условию Гельдера.— ДАН СССР, **150**, 3, 1963, 480—483.

2. Фундаментальні матриці розв'язків загальних $2\vec{b}$ — параболічних і $2\vec{b}$ — еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера. — ДАН УРСР, 8, 1964, 1010—1014.

Mautner F. I.

1. On eigenfunction expansions. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **39**, 1, 1953, 49—53. (Русск. перевод: УМН, **10**, 4, 1955, 127—132).

Мейман Н. Н.

1. См. Левитан Б. М., Мейман Н. Н. [1].

Milgram A. N.

1. См. Aronszajn N., Milgram A. N. [1].
2. См. Lax P. D., Milgram A. N. [1].

Миранда К. (Miranda C.)

1. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.

Митягин Б. С.

1. См. Костюченко А. Г., Митягин Б. С. [1].
2. См. Костюченко А. Г., Митягин Б. С. [2].
3. См. Костюченко А. Г., Митягин Б. С. [3].

Михлин С. Г.

1. О некоторых оценках, связанных с функцией Грина. — ДАН СССР, **78**, 3, 1951, 443—446.

Morawetz C. S.

1. A weak solution for a system of equations of elliptic-hyperbolic type.— Comm. Pure a. Appl. Math., 11, 3, 1958, 315—331.

Maurin K.

1. Der Fundamentalsatz über schwache Lösungen der allgemeinen linearen Systeme der elliptischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. — Bull. Acad. Polon. Sci., cl. 3, 2, 1954, 457—461.

2. Entwicklung positiv definiter Kerne nach Eigendistributionen. Differenzierbarkeit der Spektralfunktion eines hypoelliptischen Operators.— Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. math., astr. et phys., **6**, 3, 1958, 149—155.

3. Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen. Spektraldarstellung abstrakter Kerne. Eine Verallgemeinerung der Distributionen auf Lieschen Gruppen.— Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. math astr. et phys., 7, 8, 1959, 471—479.

4. Eine Bemerkung zur allgemeinen Eigenfunktionsentwicklungen für vertauschbare Operatorensysteme beliebiger Mächtigkeit. — Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. math., astr. et phys., **8**, 6, 1960, 381—384.

5. Abbildungen vom Hilbert — Schmidtschen Typus und ihre Anwendungen. — Math. Scand., **9**, 1961, 359—371.

Maurin L., Maurin K.

1. Nuklearität gewisser Rellich — Sobolevschen Einbettung. Anwendung auf Spektraltheorie der Differentialoperatoren. — Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. math., astr. et phys., **8**, 9, 1960, 621—624.

2. Spektraltheorie separierbarer Operatoren. — Studia Math., **23**, 1, 1963, 1—29.

Мосолов П. П.

1. О краевой задаче для гипоэллиптических операторов. — Матем. сборник, **55**, 3, 1961, 307—328.

2. Об обобщенной первой краевой задаче для некоторого класса дифференциальных операторов. I, II. — Матем. сборник, **57**, 3, 1962, 333—374; Матем. сборник, **59** (дополнительный), 1962, 165—188.

Мышкис А. Д.

1. См. Вишик М. И., Мышкис А. Д., Олейник О. А. [1].

Найман П. Б.

1. См. Глазман И. М., Найман П. Б. [1].

Наймарк М. А.

1. Экстремальные спектральные функции симметрического оператора.— Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 4, 1947, 327—344.

2. Линейные дифференциальные операторы. М., Гостехиздат, 1954.

Nelson E.

1. Kernel functions and eigenfunction expansions. — Duke Math. J., **25**, 1, 1958, 15—27.

Нижник Л. П.

1. О спектре общих дифференциальных операторов. — ДАН СССР, **124**, 3, 1959, 517—519.

2. Задача рассеивания при нестационарном возмущении. — ДАН СССР, **132**, 1, 1960, 40—43.

3. Структура спектра и самосопряженность возмущений дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. — УМЖ, **15**, 4, 1963, 385—399.

4. Спектральные свойства самосопряженных дифференциальных операторов в частных производных, близких к операторам с постоянными коэффициентами. — Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963.

Никольский С. М.

1. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных. — УМН, **16**, 5, 1961, 63—114.

2. Вариационная задача. — Матем. сборник, **62**, 1, 1963, 53—75.

Nilsson N.

1. Asymptotic estimates for spectral functions connected with hypoelliptic differential operators.—Arkiv för Math., **5**, 35, 1965, 527—540.

Nirenberg L.

1. Remarks on strongly elliptic partial differential equations. — Comm. Pure and Appl. Math., **8**, 4, 1955, 648—674.

2. См. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. [1].

3. См. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. [2].

4. См. Agmon S., Nirenberg L. [1].

Овчаренко И. Е.

1. Об одном применении метода направляющих функционалов в теории предкоммутирующих операторов. — ДАН СССР, **154**, 5, 1964, 1038—1041.

2. О продолжении эрмитово-положительных функций. — ДАН Арм. ССР, **38**, 5, 1964, 257—261.

3. См. Левин Б. Я., Овчаренко И. Е. [1].

Олейник О. А.

1. Об одной задаче Г. Фикеры.—ДАН СССР, 157, 6, 1964, 1297—1300.

2. См. Вишик М. И., Мышкис А. Д., Олейник О. А. [1].

Орочко Ю. Б.

1. О поведении на бесконечности собственных функций оператора Шредингера.—ДАН СССР, **163**, 5, 1965, 1073—1076.

2. См. Березанский Ю. М., Орочко Ю. Б. [1].

Панеях Б. П.

1. См. Волевич Л. Р., Панеях Б. П. [1].

Pepinsky R.

1. См. Calderon A. P., Pepinsky R. [1].

Peetre J.

1. Another approach to elliptic boundary problems. — Comm. Pure a. Appl. Math., **14**, 4, 1961, 711—731. (Русск. перевод: Математика, 7, 1, 1963, 43—65).

Петриив Д. Я.

1. Решение обратной задачи дифракции. — УМЖ, **12**, 4, 1960, 476—479.

Петровский И. Г.

1. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1961.

Плющева В. И. (Горбачук В. И.).

1. Об интегральном представлении эрмитово-индефинитных матриц с $\varkappa$ отрицательными квадратами. — УМЖ, **14**, 1, 1962, 30—39.

2. Об интегральном представлении эрмитово-индефинитных ядер с конечным числом отрицательных квадратов. — ДАН СССР, **145**, 3, 1962, 534—537.

Повзнер А. Я.

1. Об уравнениях типа Штурма — Лиувилля и позитивных функциях.— ДАН СССР, **43**, 9, 1944, 387—391.

2. О дифференциальных уравнениях типа Штурма — Лиувилля на полуоси. — Матем. сборник, **23**, 1, 1948, 3—52.

3. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора — $\Delta u + cu$. — Матем. сборник, **32**, 1, 1953, 109—156.

4. О разложениях по функциям, являющихся решением задачи рассеяния. — ДАН СССР, **104**, 3, 1955, 360—363.

Полиа Г., Сеге Г. (Polya G., Szegö G.)

1. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М., ИЛ, 1956.

Понтрягин Л. С.

1. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. — Изв. АН СССР, сер. матем., **8**, 1944, 243—280.

Привалов И. И.

1. Субгармонические функции. М. — Л., 1937.

Прокопенко Л. Н.

1. Задача Коши для параболических уравнений второго порядка с растущими коэффициентами. — ДАН СССР, **144**, 6, 1962, 1221—1224.

2. О единственности решения задачи Коши для операторно-дифференциальных уравнений. — ДАН СССР, **148**, 5, 1963, 1030—1033.

Protter M. H.
1. Uniqueness theorems for the Tricomi problem. II—. J. Rat. Mech. a. Analysis, **4**, 5, 1955, 721—732.

Райков Д. А.
1. Об одном свойстве ядерных пространств.— УМН, **12**, 5, 1957, 231—236.

Riesz M.
1. L'intégrale de Riemann — Liouville et le problème de Cauchy. — Acta Math., **81**, 1—2, 1949, 1—222.

Рисс Ф., Секефальви—Надь Б. (Riesz F., Sz.—Nagy B.)
Лекции по функциональному анализу. М., ИЛ, 1954.

Ройтберг Я. А.
1. Про розклад за власними функціями самоспряжених еліптичних систем. — ДАН УРСР, 6, 1960, 721—725.
2. Локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений. — УМЖ, **15**, 4, 1963, 444—448.
3. Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений.— ДАН СССР, **157**, 4, 1964, 798—801.
4. Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических задач с неоднородными граничными условиями. — Доклад на конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям, Душанбе, 1964.
5. См. Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А. [1].
6. См. Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А. [1].

Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.
1. Об уравнениях эллиптического типа с разрывными коэффициентами.— ДАН СССР, **146**, 6, 1962, 1275—1278.
2. Энергетические неравенства для эллиптических операторов с разрывными коэффициентами и общих граничных условий и условий сопряжения. — ДАН СССР, **148**, 3, 1963, 531—533.
3. Общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. — ДАН СССР, **148**, 5, 1963, 1034—1037.

Рофе-Бекетов Ф. С.
1. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений. — Функциональный анализ и его применения. Тр. V Всесоюзн. конф. по функц. анал и его применению, Баку, 1961, 230—237.
2. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях.— Матем. сборник, **51**, 3, 1960, 293—342.

Rudin W.
1. The extension problem for positive definite functions.—Illinois J. Math.- **7**, 3, 1963, 532—539.

Рыжик И. М., Градштейн И. С.
1. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. — Л., Гостех, издат, 1951.

Сакс С. (Saks S.)
1. Теория интеграла. М., ИЛ., 1949.

Самарский А. А.
1. См. Тихонов А. Н., Самарский А. А. [1].

Szegö G.
1. См. Полиа Г., Сеге Г. [1].,

Секефальви—Надь Б. (Sz.—Nagy B.)
1. См. Рисс Ф., Секефальви—Надь Б. [1].

Serrin J.
1. См. Gilbarg D., Serrin J. [1].

Скворцов Г. Е.
1. См. Бирман М. Ш., Скворцов Г. Е. [1].

Слободецкий Л. Н.
1. Оценки в L_p решений эллиптических систем. — ДАН СССР, **123**, 4, 1958, 616—619.
2. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. — Ученые записки Ленинградского гос. педагог. ин-та им. Герцена, 197, 1958, 54—112.
3. Оценки в L_2 решений линейных эллиптических и параболических систем. I. — Вестник Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., мех. и астр., 7, 1960, 28—47.

Соболев С. Л.
1. Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений. — Матем. сборник, 2, 3, 1937, 465—499.
2. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений для нескольких независимых переменных. I, II. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1937, 515—549; 1, 1938, 61—90.
3. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1950.
4. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе. — ДАН СССР, **109**, 4, 1956, 707—709.
5. См. Вишик М. И., Соболев С. Л. [1].

Соболевский П. Е.
1. Об одном неравенстве для эллиптических операторов. — Труды семинара по функц. анализу, Изд-во Воронежского гос. университета, 6, 1958, 105—113.

Солонников В. А.
1. Оценки решений общих краевых задач для эллиптических систем.—ДАН СССР, **151**, 4, 1963, 783—785

Ся До-шин.
1. См. Гельфанд И. М., Ся До-шин [1].

Tamarkin J. D.
1. См. Shohat J. A., Tamarkin J. D. [1].

Тарнопольский В. Г.
1. Про самоспряженість різницевих операторів з операторними коефіцієнтами. — ДАН УРСР, 11, 1959, 1189—1192.
2. Абсолютно неозначений випадок для різницевого оператора з операторними коефіцієнтами. — ДАН УРСР, 3, 1960, 305—308.
3. Задача рассеивания для разностного уравнения. — ДАН СССР, **136**, 4, 1961, 779—782.

Титчмарш Э. Ч. (Titchmarsh E. C.)
1. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М., ИЛ, 1960.

2. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2, М., ИЛ, 1961.

Тихонов А. Н., Самарский А. А.

1. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953.

Трев Ж. (Treves J. F.)

1. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М. «Мир», 1965.

Фаддеев Л. Д.

1. Единственность решения обратной задачи рассеяния. — Вестник Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., мех. и астр., 7, 1956, 126—130.

2. О дисперсионных соотношениях в нерелятивистской теории рассеяния. — Журн. экспер. и теорет. физики, 35, 2, 1958, 433—439.

3. Обратная задача квантовой теории рассеяния. — УМН, 14, 4, 1959, 57—119.

4. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. — Труды матем. ин-та им. Стеклова, Изд-во АН СССР, 69. 1963.

Fichera G.

1. Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari.—Atti del Convegno Internaz. sulle equazioni derivate e parziali, Trieste, 1954, 174—227.

2. Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali. — Corsi Istituto Naz. Alta Matem., Libreria Veschi, Roma, 1958.

3. On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order.—Boundary problems in differential equations, Univ. Wisconsin Press, Madison, 1960, 97—120. (Русск. перевод: Математика, 7, 6, 1963, 99—121).

Phillips R. S.

1. См. Lax P. D., Phillips R. S. [1].

2. См. Lax P. D., Phillips R. S. [2].

Foiaş C.

1. Décompositions intégrales des familles spectrales et semi-spectrales en opérateurs qui sortent de l'espace hilbertien. — Acta Sci. Math., Szeged, 20, 2—3, 1959, 117—155.

2. Asupra descompunerii integrale a măsurilor vectoriale şi aplicaţiile sale la teoria spectrală. I, II.—Comunicările Acad. RPR, 11, 3, 1961, 301—307; 309—311.

3. Décompositions en opérateurs et vecteurs propres. 1. Études de ces décompositions et leurs rapports avec les prolongements des opérateurs, Rev. math. pures et appl., 7, 2, 1962, 241—282.

4. Equations aux dérivées partielles. — C. R. Acad. Sci. Paris, 255, 1962, 247—248.

Франкль Ф. И.

1. Теорема существования слабого решения прямой задачи теории плоскопараллельного сопла Лаваля в первом приближении. — Изв. вузов, математика, 6, 1959, 192—201.

Friedrichs K. O.

1. On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations. — Comm. Pure a. Appl. Math., 6, 3, 1953, 299—326.

2. Symmetric positive linear differential equations. — Comm. Pure a. Appl. Math., 11, 3, 1958, 333—418.

Халмош П. (Halmos P. R.)

1. Теория меры. М., ИЛ, 1953.

Haviland E.

1. On the momentum problem for distribution functions in more than one dimension. I, II. — Amer. J. Math., 57, 1935, 562—568; 58, 1936, 164—168.

Хёрмандер Л. (Hörmander L.)

1. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. М., ИЛ, 1959.
2. Definitions of maximal differential operators. — Arkiv för Math., 3, 46, 1958, 501—504.
3. Differential operators of principal type. — Math. Ann., 140, 2, 1960, 124—146. (Русск. перевод: Математика, 5, 5, 1961, 89—114).
4. Linear partial differential operators. Berlin, 1963.

Hörmander L., Lions J. L.

1. Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet. — Math. Scand., 4, 1956, 259—270.

Хинчин А. Я.

1. Цепные дроби. М. — Л., Гостехиздат, 1949.

Чанг Чан.

1. О представлении положительно определенных матриц по собственным функциям разностных операторов. — УМЖ, 17, 2, 1965, 124—129.

Чаус Н. Н.

1. О представлении положительно определенных ядер через собственные функции разностных выражений. — УМЖ, 17, 2, 1965, 129—134.
2. О классах единственности решений задачи Коши и представлениях положительно определенных ядер. — ДАН СССР, 163, 1, 1965, 36—39

Шапиро З. Я.

1. Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа. — Изв. АН СССР, сер. матем., 17, 1953, 539—562.

Schauder J.

1. Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischen Typus.— Math. Ann., 106, 1932, 661—721.
2. Über lineare elliptische Differentialgleichungen.— Math. Z., 38, 1934, 257—282.

Schwartz J.

1. См. Данфорд Н. Шварц Дж. [1].
2. См. Dunford N., Schwartz J. [2].

Schwartz L.

1. Théorie des distributions. T. 1, 2. Paris. 1950.
2. Théorie des noyaux. — Proc. Intern. Congr. Math., 1, 1952, 220—230. (Русск. перевод: Математика, 3, 3, 1959, 69—79).
3. Применение обобщенных функций к изучению элементарных частиц в релятивистской квантовой механике. М., «Мир», 1964.

Schoenberg I. J.

1. Metric spaces and completely monotone functions. — Ann. Math., 39, 4, 1938, 811—841.

Schechter M.

1. Coerciveness of linear partial differential operators for functions satisfying zero Dirichle-type boundary data. — Comm. Pure a. Appl. Math., 11, 2, 1958, 153—174. (Русск. перевод: Математика, 4, 3, 1960, 57—78).

2. Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary condition. — Comm. Pure a. Appl. Math., 12, 1, 1959, 37—66.

3. General boundary value problems for elliptic partial differential equations.—Comm. Pure a. Appl. Math., 12, 3, 1959, 457—486. (Русск. перевод: Математика, 4, 5, 1960, 93—122).

4. Remarks on elliptic boundary value problems. — Comm. Pure a. Appl. Math., 12, 4, 1959, 561—578. (Русск. перевод: Математика, 4, 6, 1960, 3—21).

5. Mixed boundary problems for general elliptic equations. — Comm. Pure a. Appl. Math., 13, 2, 1960, 183—201.

6. A general approach to boundary problems. — Bull. Amer. Math. Soc., 66, 6, 1960, 495—500.

7. Negative norms and boundary problems. — Ann. Math., 72, 3, 1960, 581—593.

8. A generalization of the problem of transmission. — Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. III, 14, 3, 1960, 207—236.

9. A local regularity theorem. — J. Math. a. Mech., 10, 2, 1961, 279—288.

10. On the theory of differential boundary problems. — Illinois J. Math., 7, 2, 1963, 232—245.

11. Coerciveness in L^p. — Trans. Amer. Math. Soc., 107, 1, 1963, 10—29.

12. On L^p estimates and regularity. I, II. — Amer. J. Math., 85, 1, 1963, 1—13; Math. Scand., 13, 1, 1963, 47—69.

Шефтель З. Г.

1. Оценки в L_p решений эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющих общим граничным условиям и условиям сопряжения. — ДАН СССР, 149, 1, 1963, 48—51.

2. Теория эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами L_p-оценки решений, автореферат кандидатской диссертации. Изд-во Воронежского госуниверситета, 1963.

3. См. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. [1].

4. См. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. [2].

5. См. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. [3].

Шилов Г. Е.

1. Локальные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. — УМН, 14, 5, 1959, 3—44.

2. См. Вишик М. И., Шилов Г. Е. [1].

3. См. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. [1].

4. См. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. [2].

5. См. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. [3].

Шишмарев И. А.

1. См. Ильин В. А., Шишмарев И. А. [1].

Шноль Э. Э.

1. О поведении собственных функций уравнения Шредингера, автореферат кандидатской диссертации. М., Изд-во МГУ, 1955.

2. О поведении собственных функций.—ДАН СССР, 94, 3, 1954, 389—392.

3. О поведении собственных функций уравнения Шредингера.—Матем. сборник, 42, 3, 1957, 273—286.

Shohat J. A., Tamarkin J. D.
1. The problem of moments. Amer. Math. Soc., Providence, 1943.

Штраус А. В.
1. Обобщенные резольвенты симметрических операторов. — Изв. АН СССР, сер. матем., 18, 1, 1954, 51—86.

Эйдельман С. Д.
1. Параболические системы. М., «Наука», 1964.

Ehrenpreis L.
1. On the theory of kernels of Schwartz. — Proc. Amer. Math. Soc., **7**, **4**, 1956, 713—718. (Русск. перевод: Математика, **3**, 3, 1959, 81—85).

Ehrling G.
1. On a type of eigenvalue problems for certain differential operators.— Math. Scand., **2**, 2, 1954, 267—285.

Эскин Г. И.
1. Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов.— ДАН СССР, **133**, 3, 1960, 540—543.
2. См. Вишик М. И., Эскин Г. И. [1].

Эскина М. С.
1 Прямая и обратная задача рассеяния для уравнения в частных разностях -- ДАН СССР, **166**, 4, 1966, 809—812.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

БЕРЕЗАНСКИЙ
ЮРИЙ МАКАРОВИЧ

**Разложение по собственным функциям
самосопряженных операторов**

*Печатается по постановлению
ученого совета Института математики
АН УССР*

Редактор *Л. П. Березинец*
Художественный редактор *И. П. Антонюк*
Оформление художника *Д. Д. Грибова*
Технический редактор *Д. В. Вирич*
Корректоры *Ж. Е. Квятковская, Р. С. Коган*