АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Ю.М. БЕРЕЗАНСКИЙ

# САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

КИЕВ
«НАУКОВА ДУМКА»
1978

3

УДК 517.432+517.515+519.53

**Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.** Березанский Ю. М. К., «Наук. думка», 1978, с. 360.

В книге излагаются вопросы спектральной теории самосопряженных и нормальных операторов, действующих в пространствах функций бесконечного числа переменных, в частности теория разложений по их обобщенным собственным функциям. При этом рассматриваются как отдельные операторы, так и их произвольные коммутирующие семейства. Строится теория обобщенных функций бесконечного числа переменных. Излагаемый круг вопросов разрабатывался в последние годы, в частности, в связи с проблематикой квантовой теории поля.

Будет полезна математикам и физикам, интересующимся указанными вопросами, а также аспирантам и студентам старших курсов университетов.

Список лит.: с. 351—358.

Ответственный редактор
Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ

Рецензенты
А. В. СКОРОХОД, Ю. Л. ДАЛЕЦКИЙ



Редакция физико-математической литературы

ЮРИЙ МАКАРОВИЧ БЕРЕЗАНСКИЙ
САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

*Печатается по постановлению ученого совета Института математики АН УССР*

Редактор Д. И. Попович. Оформление художника Л. А. Дикарева.
Художественный редактор И. П. Антонюк. Технический редактор И. А. Ратнер.
Корректоры П. А. Росич, Л. М. Тищенко

Информ. бланк № 2234.

Сдано в набор 01.01.78. Подп. в печ. 12.07.78. БФ 09271. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 22,5. Уч.-изд. л. 20,82. Тираж 2000 экз. Заказ 8-393. Цена 3 руб. 50 коп.

Издательство «Наукова думка», 252601, Киев, ГСП, Репина, 3.

Книжная фабрика «Коммунист» РПО «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, 310012, Харьков-12, ул. Энгельса, 11.

Б $\frac{20204\text{-}310}{М221(04)\text{-}78}$ Б3-16-8-78



# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Интерес к анализу функций бесконечного числа переменных значительно возрос в последние годы в связи с проблематикой и успехами (может, с точки зрения физиков, и условными) квантовой теории поля, с одной стороны, и с чисто математическим желанием осмыслить ситуацию в анализе, изучающем функции точки бесконечномерного пространства,— с другой. Есть еще один раздел математики — теория вероятностей, точнее, теория случайных процессов, где уже давно изучались вопросы, которые в той или иной степени связаны с подобной проблематикой. Это обилие сторон, влияющих на формирование понятий и результатов, еще большее количество разнообразных задач, возникающих здесь, и вдобавок различие языков привело к тому, что имеется разнобой в понимании основных понятий. Хотя бы даже того, что такое функция бесконечного числа переменных. Вместе с тем этот разнобой отвечает существу дела — для всей совокупности задач, в которых «запутывается» бесконечное число переменных, нельзя подобрать единый адекватный требованиям язык.

В книге рассматривается некоторый математический аппарат, полезный при изучении самосопряженных операторов, действующих в пространствах функций бесконечного числа переменных. Точнее, идет речь об операторах, действующих в бесконечных тензорных произведениях пространств, изоморфных образах таких произведений, или их пополнений по некоторым квазискалярным (т. е. вырожденным скалярным) произведениям. Примеры таких операторов приведены в последней главе книги. Другим классам подобных операторов — операторам, связанным с положительно определенными функциями бесконечного числа переменных, бесконечномерной проблемой моментов, с гамильтонианами и функциями Уайтмэна и Швингера квантовой теории поля,— посвящена другая книга, которую автор надеется закончить в ближайшее время.

Итак, под функцией бесконечного числа переменных в книге понимается вектор бесконечного тензорного произведения одномерных пространств. Такое понимание удобно при рассмотрении ряда вопросов спектральной теории операторов и теории поля. Исходя из этой концепции и строится изложение.

Первая глава книги посвящена изложению теории пространств функций (обычных и обобщенных) бесконечного числа переменных. Удобно и полезно эту теорию конструировать абстрактно — на уровне тензорных произведений гильбертовых пространств. Абстрактная теория обобщенных функций как конечного, так и бесконечного порядка строится в § 1. Точнее, здесь излагается теория пространств с позитивной нормой, их проективных пределов и соответствующих оснащений исходных пространств. Следующий параграф посвящен теории конечных и бесконечных тензорных произведений и их оснащений, при этом основное внимание уделено рассмотрению сепарабельных подпространств полного неймановского бесконечного произведения.

В § 3 рассмотрены конкретные пространства функций конечного числа переменных. Исходным для этих построений является понятие соболевского пространства. Наконец, в § 4 излагаются примеры пространств функций бесконечного числа переменных, которые «размножаются» из соболевских пространств при помощи процедур § 2, основывающихся на бесконечных тензорных произведениях.

Здесь уместно подчеркнуть, что и теория обобщенных функций бесконечного числа переменных строится при помощи должных оснащений таких произведений. Классическая точка зрения при построении обобщенных функций сейчас вызывает трудности, так как на бесконечном прямом произведении $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \times \ldots$ вещественных осей $\mathbb{R}^1$ нельзя ввести стандартную меру $dx$ типа меры Лебега. Поэтому невозможно понимание обычной функции $f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^\infty)$ как обобщенной, равной функционалу $l(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ над основными функциями $\varphi(x)$.

Вторая глава посвящена изучению произвольных семейств коммутирующих самосопряженных (или нормальных) операторов. Обычно в задачах теории поля бесконечное число переменных возникает как вторичное явление, первичным же, во всяком случае на интуитивном уровне, является рассмотрение бесконечного числа операторов. Поэтому в каком-то смысле эта глава является основной в книге. Мы рассматриваем семейства коммутирующих операторов с точки зрения возможности разложения по их совместным обобщенным собственным функциям, т. е. их совместной диагонализации. Конечно, на такое семейство, во всяком случае, если операторы ограничены, можно натянуть коммутативную нормированную алгебру и ее диагонализировать, т. е. переходить к гельфандовскому изоморфизму. Однако при подсчетах часто удобно такую алгебру не натягивать, а поступать так, как при разложении по обобщенным собственным векторам конечного числа коммутирующих операторов $A_x$ $(x = 1, \ldots, p)$. Более того, подобное рассмотрение семейств неограниченных операторов в некотором смысле подменяет в важной ситуации достаточно сложную теорию коммутативных топологических алгебр.

При таком рассмотрении произвольных семейств коммутирующих операторов $(A_x)_{x \in X}$, где $X$ — множество индексов произвольной мощности, заменяющее $\{1, \ldots, p\}$, возникают трудности, особенно ощутимые, когда $X$ более чем счетно. Вместе с тем рассмотрение более чем счетных $X$ часто бывает существенным, например, в той же теории поля полевые операторы $A(\varphi)$ индексируются функциями $\varphi$ $(A_x = A(\varphi),\ x = \varphi)$. Именно общим семейством $(A_x)_{x \in X}$ коммутирующих самосопряженных или нормальных операторов $A_x$ и посвящена вторая глава.

В § 1 этой главы строится совместное разложение единицы $E$ этого семейства $(A_x)_{x \in X}$. Построение его сводится к обобщению теоремы А. Н. Колмогорова о существовании бесконечного произведения вероятностных мер. Такое разложение является разложением единицы на тихоновском произведении $\mathbb{R}^X$ осей $\mathbb{R}^1$ (или $\mathbb{C}^X$ комплексных плоскостей $\mathbb{C}^1$), т. е. на топологизированном определенным образом множестве всех вещественно- или комплекснозначных функций $X \ni x \mapsto \lambda(x)$, заданных на множестве $X$ индексов. Существенным для дальнейшего являются понятие и свойства носителя операторнозначной меры $E$, т. е. минимального замкнутого (в тихоновской топологии) множества полной внешней меры.

В § 2 излагается теория разложений по совместным обобщенным собственным векторам $\varphi$ семейства $(A_x)_{x \in X}$. Это один из центральных параграфов книги. Здесь трудности вызывает доказательство в случае $X$ произвольной мощности равенства типа $A_x\varphi = \lambda(x)\,\varphi$, где $x$ пробегает все $X$, а $\lambda(\cdot)$ меняется по множеству полной внешней меры $E$. Совместные обобщенные векторы $\varphi$, фигурирующие в этом равенстве, должны, разумеется, образовывать полную систему.

В § 3 на основании гельфандовской теории коммутативных нормированных алгебр излагается связь рассматриваемых семейств $(A_x)_{x \in X}$ с теорией случайных процессов, заиндексированных точками $x \in X$. В одну сторону она тривиальна: всякую случайную величину $a_x$, т. е. функцию $M \ni \omega \mapsto a_x(\omega) \in \mathbb{C}^1$ на множестве $M$ элементарных событий $\omega$, можно интерпретировать как оператор умножения на $a_x$ в $L_2$ по вероятностной мере. В другую сторону она также достаточно ясна. Представление алгебраических структур коммутирующими операторами рассмотрено в § 4. Задачу, здесь возникающую, можно пояснить так. В случае произвольных коммутирующих операторов $A_x$ совместное разложение единицы $E$ может быть сосредоточено по существу на всех функциях $\lambda(\cdot)$ из $\mathbb{R}^X$ или $\mathbb{C}^X$. Однако если между операторами $A_x$ при различных $x$ имеются алгебраические связи, то благодаря равенству $A_x\varphi = \lambda(x)\,\varphi$ $(x \in X)$ множество возможных $\lambda(\cdot)$ уменьшается. Например, если $X$ — линейное пространство и $A_{\alpha x + \beta y} = \alpha A_x + \beta A_y$ $(x, y \in X;\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}^1)$, то и $\lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda(x) + \beta\lambda(y)$, т. е. $\lambda(\cdot)$ — линейный функционал. Так, на этом пути можно установить теорему типа Стоуна о спектральном представлении группы $U_x$ унитарных операторов, где $x$ пробегает коммутативную группу $X$, которая, вообще говоря, не локально компактна.



В § 5 приведены некоторые дополнительные факты, касающиеся теории разложений. Например, разложение по индивидуальным совместным собственным функциям, теория часто встречающихся карлемановских операторов и т. п. Последний § 6 стоит несколько особняком. В нем излагается часто оказывающийся удобным способ доказательства самосопряженности операторов, а также их коммутируемости, на основе исследования единственности решений задачи Коши для эволюционных уравнений.

Третья глава книги посвящена некоторым приложениям развивавшегося аппарата. Ее можно рассматривать как иллюстративную, хотя все ситуации, в ней описывающиеся, важны (ее продолжением, по существу, будет готовящаяся сейчас книга, о которой упоминалось выше).

В § 1 излагается теория коммутирующих самосопряженных операторов, действующих по различным переменным, и функций от них. Схема этого построения аналогична схеме построения дифференциального выражения $L\left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$ с постоянными коэффициентами по элементарным дифференцированиям $-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial x_p}$ и полиному $L(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. Изложение абстрактное, на уровне бесконечных тензорных произведений ($p$, разумеется, равно $\infty$) и замены $-i\frac{\partial}{\partial x_n}$ на общий самосопряженный оператор $A_n$, действующий в пространстве функций одной переменной. В частности, с этих позиций рассмотрено бесконечномерное преобразование Фурье—Винера. В § 2 изучается частный случай функций, фигурирующих в § 1, когда роль $L(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ играет функция $L(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$ В результате получаем так называемые операторы, допускающие разделение бесконечного числа переменных. Такого сорта операторы могут появляться как свободные гамильтонианы (в этом случае $A_n$ — дифференциальные операторы второго порядка).

В § 3 при помощи методики эволюционных уравнений исследуется самосопряженность возмущений дифференциального оператора с бесконечным числом разделяющихся переменных потенциалом, зависящим от бесконечного числа этих переменных. Здесь в отличие от обычных дифференциальных операторов в неограниченной области, когда возникает «сингулярность» в связи с поведением коэффициентов на бесконечности, появляется еще одна «сингулярность», связанная с характером роста потенциала «в направлении увеличения количества переменных».

Отметим, что существует изоморфизм между пространством $L_2$ функций бесконечного числа переменных по гауссовской мере и важным для квантовой теории поля бозонным пространством Фока (изоморфизм Сигала). Этот изоморфизм позволяет заменить изучение операторов в пространстве Фока изучением соответствующих операторов в таком пространстве $L_2$. Последнее же является одним из примеров пространств, к которым применима развитая выше теория. С его помощью можно ряд конструкций книги (например, теорию обобщенных функций) перенести на пространства Фока. Однако здесь мы эти результаты излагать не будем.

Изложению указанных вопросов предшествует введение, в котором приводятся обозначения и уточняются некоторые используемые понятия. Для чтения книги достаточно знакомства со стандартным университетским курсом функционального анализа, включающим теорию неограниченных операторов и теорию обобщенных функций.

Ссылки на литературу, как правило, помещены в «Литературных указаниях». Нумерация формул, теорем и лемм — независимая в каждой главе. Знак ■ означает конец доказательства.

Отдельные части этой книги входили в спецкурсы, которые автор читал на механико-математическом факультете Киевского государственного университета. Толчком к ее написанию послужило продумывание лекций для школы по спектральной теории, организованной C.I.M.E. (Варенна, август — сентябрь 1973 г.).

В заключение я хочу выразить благодарность участникам семинаров при Институте математики АН УССР, принявшим участие в обсуждении ряда результатов книги, и в особенности моим ученикам Ю. Г. Кондратьеву, Ю. С. Самойленко и Г. Ф. Усу за ряд существенных замечаний.

Март 1977 г. *Ю. М. Березанский*

# ВВЕДЕНИЕ

Остановимся на некоторых понятиях, в определениях которых наблюдается разнобой, и введем ряд требуемых обозначений.

1. При изложении будем пользоваться обычными обозначениями теории множеств: $\in$, $\bar{\in}$, $\subseteq$, $\subset$, $\not\subseteq$, $=$, $\neq$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\varnothing$, $\times$. При этом будем писать $A \subseteq B$, если всякое $x \in A$ входит в $B$, и $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и известно, что $A \neq B$. Множество всех точек $x \in R$, обладающих определенным свойством $P(x)$, будем обозначать $\{x \in R \mid P(x)\}$. Индексы объединения, суммирования и подобные иногда опускаются, например $\sum_{j=1}^{N} 1 = N$.

Если $R \ni x \mapsto f(x) \in Q$ — некоторое отображение $f = f(\cdot)$ абстрактного пространства (т. е. множества) $R$ в абстрактное пространство $Q$, то через $f(A)$ обозначаем образ множества $A \subseteq R$, через $f^{-1}(B)$ — полный прообраз множества $B \subseteq Q$, т. е. $f^{-1}(B) = \{x \in R \mid f(x) \in B\}$, через $f \upharpoonright A$ — сужение отображения $f$ на множество $A \subseteq R$.

2. Под топологическим пространством $R$ всегда понимается хаусдорфово топологическое пространство. Таким образом, в $R$ существует семейство $\Sigma$ его подмножеств $U$, $V$, ... — базисных окрестностей, объединение которых покрывают все $R$; $U$ называется базисной окрестностью любой точки $x \in U$. Семейство $\Sigma$ удовлетворяет следующим двум аксиомам: 1) для любых $x$, $y \in R$, $x \neq y$, найдутся непересекающиеся окрестности $U$ точки $x$ и $V$ точки $y$; 2) для любой $x \in R$ и любых двух ее окрестностей $U$, $V$ найдется третья окрестность $W$ этой точки такая, что $W \subseteq U \cap V$.

Дальнейшие топологические понятия — обычные. Замыкание множества $A$ обозначается через $\tilde{A}$. Любое открытое множество $O$ называется окрестностью каждой точки $x \in O$; окрестность точки $x$ мы также обозначаем через $U(x)$, $O(x)$, ... Если $A \subseteq R$, то $A$ можно снабдить относительной топологией, задающейся базисными окрестностями вида $U \cap A$, где $U \in \Sigma$. Об этой топологии также говорят, что она индуцируется топологией пространства $R$, само $A$, так топологизированное, называется подпространством $R$. Понятие компактности эквивалентно бикомпактности. Если локально компактное пространство $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, где $R_n$ — компакты, причем $R_1 \subseteq R_2 \subseteq \ldots$, то $R$ расширяется стандартным образом до компакта $\mathbf{R}$ — компактификации $R$: полагаем $\mathbf{R} = R \cup \{\infty\}$; здесь $\infty$ — присоединяемая точка, под окрестностью которой понимается любое множество вида $\mathbf{R} \setminus Q$, где $Q \subseteq R$ — компакт. Под метрическим пространством понимается полное метрическое пространство, под шаром такого пространства, если не оговорено противное,— открытый шар.

3. Вещественное (комплексное) $N$-мерное пространство обозначаем $\mathbb{R}^N$ ($\mathbb{C}^N$) ($N = 1, 2, \ldots$). В этом пространстве под базисной окрестностью понимается любое открытое множество; $\langle x, y\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов $x$, $y$ этих пространств. Под областью $G \subseteq \mathbb{R}^N$ понимается произвольное открытое множество из $\mathbb{R}^N$. Ее граница $\partial G = \tilde{G} \setminus G$ называется $l$ раз кусочно непрерывно дифференцируемой (или класса $C^l$), если ее можно разбить на не более чем счетное число непересекающихся множеств $D_1, D_2, \ldots$, каждое из которых $D_n$ задается уравнением вида $x_j = f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N)$, где $j$ принимает одно из зависящих от $n$ значений $1, \ldots, N$, а $f$ — $l$ раз непрерывно дифференцируемая функция в некотором шаре пространства $\mathbb{R}^{N-1}$ ($l = 0, 1, \ldots$). Множеств $D_n$ в каждом шаре из $\mathbb{R}^N$ может быть не более чем конечное число.

4. Если $R$ — топологическое пространство, то $C(R)$ обозначает совокупность всех непрерывных комплекснозначных функций $R \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}^1$. Пусть $R$ — локально компактное пространство. Функция $R \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}^1$ называется финитной, если она аннулируется вне некоторого зависящего от $f$ компакта, и локально ограниченной, если она ограничена на каждом компакте зависящей от него константой. Совокупность всех комплекснозначных непрерывных финитных функций на локально компактном пространстве $R$ обозначается через $C_0(R)$.

Роль $R$ может играть, разумеется, $\mathbb{R}^N$. В качестве $R$ можно брать и область $G \subseteq \mathbb{R}^N$, топологизированную относительной топологией, индуцированной $\mathbb{R}^N$. Класс $C_0(G)$ сейчас состоит из всех непрерывных в $G$ функций, каждая из которых аннулируется «в полоске вблизи границы $\partial G$» и при $|x| \geqslant r$, где $r > 0$ достаточно большое (если $G$ неограничена), т. е. $f \in C_0(G)$ финитна у $\partial G$ и на $\infty$.

Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^N$ — некоторая область, $\tilde{G}$ — ее замыкание. Под $C^l(\tilde{G}) = C^l(G \cup \partial G)$ ($l = 0, 1, \ldots, \infty$; $C^0 \equiv C$) понимается совокупность всех функций $\tilde{G} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}^1$, каждая из которых является сужением на $\tilde{G}$ некоторой $l$ раз непрерывно дифференцируемой функции в $\mathbb{R}^N$. Через $C_0^l(G)$ мы обозначаем класс всех финитных



функций из $C^l(\tilde{G})$, т. е. $C_0^l(G) = C^l(\tilde{G}) \cap C_0(G)$. Совокупности всех вещественнозначных функций указанных и других встречающихся классов обозначаем нижним индексом Re. Для производных и степеней обычно применяем обозначения

$$D^\mu = D_1^{\mu_1} \ldots D_N^{\mu_N}, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (n = 1, \ldots, N), \ \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N),$$

$$\mu_1, \ldots, \mu_N = 0, 1, \ldots, \quad |\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_N,$$

$$s^\mu = s_1^{\mu_1} \ldots s_N^{\mu_N} \qquad (s = (s_1, \ldots, s_N)).$$

5. Пусть $(R_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство абстрактных пространств $R_\alpha$, под произведением $\underset{\alpha \in A}{\times} R_\alpha$ понимается совокупность всех функций $x$ на множестве индексов $A$ вида $A \ni \alpha \mapsto x(\alpha) = x_\alpha \in R_\alpha$. Если $R_\alpha$ — топологические пространства, то в $\underset{\alpha \in A}{\times} R_\alpha$ обычно вводится тихоновская топология (см. гл. 2, § 1). Комплекснозначная функция $\underset{\alpha \in A}{\times} R_\alpha \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}^1$ называется цилиндрической, если она зависит от конечного числа переменных. Это означает, что существует зависящее от $f$ конечное множество $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \subseteq A$ и функция $f_ц \underset{n=1}{\overset{p}{\times}} R_{\alpha_n} \ni (x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p}) \mapsto f_ц(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p}) \in \mathbb{C}^1$ такие, что $f(x) = f_ц(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_p})$ $(x \in \underset{\alpha \in A}{\times})$. Одна из наиболее простых ситуаций такого рода: $A = \{1, 2, \ldots\}$, $R_\alpha = \mathbb{R}^1$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$), тогда $\underset{\alpha \in A}{\times} R_\alpha = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \ldots$, последнее произведение обозначается через $\mathbb{R}^\infty$. Цилиндрическая функция на $\mathbb{R}^\infty$ имеет вид $\mathbb{R}^\infty \ni x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto f(x) = f_ц(x_1, \ldots, x_p)$ с некоторыми $p$ и $f_ц$. Аналогичные обозначения вводятся при замене $\mathbb{R}^1$ на $\mathbb{C}^1$.

6. Пусть $R$ — абстрактное пространство точек $x$, $\mathfrak{R}$ — некоторая $\sigma$-алгебра его множеств, $\mu$ — (неотрицательная) конечная мера на $\mathfrak{R}$. Соответствующее пространство суммируемых с $p$-й степенью ($p \geqslant 1$) комплекснозначных функций на $R$ обозначается через $L_p(R, d\mu(x))$. Для функций подобных пространств и, более общо, для функций $f$, заданных почти везде на $R$ и почти везде конечных, иногда удобно писать $R \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}^1$, хотя, разумеется, такая запись условна. Через $L_{p,\mathrm{loc}}(R, d\mu(x))$ обозначается совокупность всех локально суммируемых с $p$-й степенью функций на $R$, т. е. почти всюду определенных и почти везде конечных функций, измеримых относительно $\mathfrak{R}$ и таких, что $\int_B |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$ для всякого $B \in \mathfrak{R}$ конечной меры.

Рассмотрим последовательность (конечную или бесконечную) пространств $R_1, R_2, \ldots$, соответствующих $\sigma$-алгебр $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$ и мер

$\mu_1$, $\mu_2$, ... Хорошо известной процедурой по этим объектам строится мера $\mu$ на $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{q} R_n$ ($q \leqslant \infty$), называемая прямым, или тензорным, произведением исходных мер $\mu_n$ (в случае $q = \infty$ меры должны быть вероятностными, т. е. $\mu_n(R_n) = 1$; $n = 1, 2, \ldots$). Эту меру обозначаем $\mu = \bigotimes\limits_{n=1}^{q} \mu_n$; она называется также продакт-мерой.

Если $R$ — топологическое пространство, то через $\mathcal{B}(R)$ обозначаем $\sigma$-алгебру борелевских множеств из $R$, т. е. $\mathcal{B}(R)$ — минимальная $\sigma$-алгебра, натянутая на совокупность всевозможных открытых (или замкнутых) множеств из $R$.

Меру Лебега в пространстве $\mathbb{R}^N$ обозначаем через $m$, интегрирование по ней — через $dm(x)$, или $dx$. Если $G \subseteq \mathbb{R}^N$ — область, то пространства $L_p(G, dm(x))$ обозначаем через $L_p(G)$. В случае $R = G$ обозначение $L_{p,\mathrm{loc}}(G)$ имеет несколько отличный от предыдущего смысл: это совокупность всех комплекснозначных функций на $G$ таких, что $\int\limits_B |f(x)|^p dx < \infty$ для любого измеримого относительно $m$ ограниченного множества $B$, находящегося на положительном расстоянии от $\partial G$ (при $G = \mathbb{R}^N$ это, разумеется, прежний класс).

Еще один термин, касающийся меры: пусть имеется пространство $R$, его $\sigma$-алгебра $\mathfrak{R}$ и $\sigma$-конечная мера $\mathfrak{R} \ni B \mapsto \mu(B) \geqslant 0$. Множество $B \in \mathfrak{R}$ называется множеством полной меры, если $\mu(R \setminus B) = 0$; будем говорить также, что мера $\mu$ сосредоточена на $B$. Если заданы лишь $R$ и $\mathfrak{R}$, то под измеримой функцией на $R$ понимается такая функция, принимающая лишь конечные значения; если задана еще и мера на $\mathfrak{R}$, то измеримая функция может принимать и бесконечные значения на множестве меры нуль. $\varkappa_A$ — характеристическая функция $A \subseteq R$.

Пусть заданы $R$, $\mathfrak{R}$ и $\mu$ и, кроме того, фиксированная почти везде неотрицательная функция $p \in L_{1,\mathrm{loc}}(R, d\mu(x))$. Такую функцию будем называть весом. Интегрирование относительно меры $\mathfrak{R} \ni B \mapsto \int\limits_B p(x)\, d\mu(x)$ обозначается через $p(x)\, d\mu(x)$; $L_p(R, p(x)\, d\mu(x))$, $L_{p,\mathrm{loc}}(R, p(x)\, d\mu(x))$ — соответствующие классы.

7. Как правило, ниже рассматриваются комплексные линейные топологические пространства $X$; часто они будут сепарабельными. Вещественные пространства обычно выделяются нижним индексом Re. Линейная и замкнутая линейная оболочки множества $M \subseteq X$ обозначаются соответственно через л. о. $(M)$ и з. л. о. $(M)$. Множество $M$ называется тотальным, если з. л. о. $(M) = X$. Под подпространством $X$ всегда понимается замкнутое линейное множество из $X$. Если $X_1$, $X_2$ — два топологических пространства, то будем говорить, что справедливо топологическое вложение $X_1 \subseteq X_2$ (или $X_1 \to X_2$), если имеет место указанное включение множеств и, кроме того, топология в $X_1$ сильнее топологии в $X_2$ (грубо говоря, из сходимости в $X_1$ следует сходимость в $X_2$). Пусть имеется теоретико-множественное вложение $X_1 \subseteq X_2$. Оператор $X_1 \ni x \mapsto Ox = x \in X_2$ называется оператором вложения. Его непрерывность эквивалентна топологичности вложения $X_1 \subseteq X_2$.



Совокупность непрерывных антилинейных функционалов $l$ над $X$ обозначаем через $X'$, линейных — через $X^*$. Топологии в сопряженных пространствах каждый раз будут указываться (если это необходимо). Совокупность всех линейных непрерывных операторов, действующих из всего линейного топологического пространства $X_1$ в аналогичное пространство $X_2$, обозначим через $\mathcal{L}(X_1 \to X_2)$. То, что оператор $A$ действует из $X_1$ в $X_2$, записываем в виде $A: X_1 \to X_2$. При этом иногда $A$ не обязательно определен во всем пространстве $X_1$.

8. Под линейным нормированным (банаховым) пространством $E$ мы всегда понимаем полное пространство (то же относится и к гильбертовым пространствам $H$). Все сказанное о линейных топологических пространствах, разумеется, сохраняется и для линейных нормированных и гильбертовых пространств. При обозначении нормы вектора и скалярного произведения индексом будем указывать пространство. При обозначении нормы оператора $A \in \mathcal{L}(E_1 \to E_2)$ обычно не пишем индекс, указывающий пространства, однако иногда используется нижний индекс $E_1 \to E_2$. Обычно мы будем рассматривать операторы $A$: $E_1 \to E_2$ с плотными в $E_1$ областями определения (области определения и значения оператора $A$ обозначаются соответственно через $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{R}(A)$). Сужение оператора $A$ на $F \subseteq \mathfrak{D}(A)$ обозначается $A \upharpoonright F$. Ядром такого оператора $A$ называется линейное множество $\operatorname{Ker} A = \{x \in E_1 \mid Ax = 0\}$. Для существования на $\mathfrak{R}(A)$ алгебраически обратного оператора необходимо и достаточно выполнение условия $\operatorname{Ker} A = 0$. Под обратным оператором $A^{-1}$, если противное не оговаривается, понимаем оператор, определенный на всем $E_2$, входящий в $\mathcal{L}(E_2 \to E_1)$ и такой, что $A^{-1}Ax = x$ ($x \in \mathfrak{D}(A)$); при этом должно выполняться равенство $\mathfrak{R}(A) = E_2$.

Пусть $H_1$, $H_2$ — гильбертовы пространства. Если $A \in \mathcal{L}(H_1 \to H_2)$ таков, что $(Ax, Ay)_{H_2} = (x, y)_{H_1}$ ($x, y \in H_1$), то он называется изометрическим оператором. Изометрией называется такой изометрический оператор $A$, для которого $\mathfrak{R}(A) = H_2$. Изометрия, очевидно, устанавливает изоморфизм между $H_1$ и $H_2$.

Оператор $A$ в гильбертовом пространстве $H$ с плотной областью определения называется эрмитовым, если $(Ax, y)_H = (x, Ay)_H$ ($x, y \in \mathfrak{D}(A)$), самосопряженным, если сопряженный оператор $A^* = A$, и существенно самосопряженным, если замыкание $\tilde{A}$ оператора $A$ самосопряжено. Пусть имеется замкнутый оператор $A$, действующий в $H$. Всякое линейное множество $F \subseteq \mathfrak{D}(A)$ такое, что $(A \upharpoonright F)^{\sim} = A$, называется базой (или ядром) $A$.

Под суммой двух операторов $A_1, A_2 : E_1 \to E_2$ понимается оператор $(A_1 + A_2) x = A_1 x + A_2 x$, где $x \in \mathfrak{D}(A_1 + A_2) = \mathfrak{D}(A_1) \cap \cap \mathfrak{D}(A_2)$. Если $A_1 : E_1 \to E_2$, $A_2 : E_2 \to E_3$, то произведение этих операторов по определению равно $A_2 A_1 x = A_2 (A_1 x)$, где $\mathfrak{D}(A_2 A_1) = \{x \in \mathfrak{D}(A_1) | A_1 x \in \mathfrak{D}(A_2)\}$.

Замкнутый оператор $A$ с плотной областью определения, действующий в гильбертовом пространстве $H$, называется нормальным, если $A^* A = A A^*$.

Сделаем еще несколько замечаний, касающихся гильбертова пространства. Пусть в комплексном линейном пространстве $K$ введено квазискалярное произведение, т. е. задана функция $K \ni x, \quad y \mapsto (x, \quad y) \in \mathbb{C}^1$, удовлетворяющая всем требованиям скалярного произведения за исключением того, что она, возможно, вырождена: $N = \{x \in K \mid (x, x) = 0\} \supseteq \{0\}$. По квазискалярному произведению стандартной процедурой строится гильбертово пространство: производится сперва факторизация $K$ по $N$, а затем пополнение.

Оператор $A$, действующий в $H$, будем называть неотрицательным, если $(Ax, x)_H \geqslant 0$ $(x \in \mathfrak{D}(A))$, и положительным, если $(A x, x)_H > > 0$ $(x \in \mathfrak{D}(A),\ x \neq 0)$. У нас будут фигурировать полилинейные, т. е. линейные по каждому переменному, формы. Под билинейной формой будем понимать линейную по первому и антилинейную по второму переменным — эту форму часто называют полуторалинейной; двулинейность будет означать линейность по каждому из двух переменных.

9. В дальнейшем используется понятие оператора Гильберта — Шмидта $A$, его гильбертовой нормы $| A |$, следа оператора Сл. $(A)$. Здесь определения обычные: если $H_1, H_2$ — два гильбертовых пространства, первое из которых сепарабельно, то оператор $A \in \mathcal{L}(H_1 \to \to H_2)$ называется оператором Гильберта — Шмидта, или квазиядерным, если для некоторого ортонормированного базиса $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ в $H_1$ $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \| Ae_j \|_{H_2}^2 = | A |^2 < \infty$. Неотрицательный оператор $A \in \in \mathcal{L}(H_1 \to H_1)$ называется оператором с конечным следом, или ядерным, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)_{H_1} = \text{Сл.}\,(A) < \infty$. Эти определения, как легко видеть, не зависят от выбора ортонормированного базиса $(e_j)_{j=1}^{\infty}$. Не будем приводить простые, но важные соотношения между обычной нормой, гильбертовой нормой и следом оператора.

Вложение $H_1 \subseteq H_2$ называется квазиядерным, если таков оператор вложения $O : H_1 \to H_2$.



10. Еще три разрозненных замечания. Оператор $A$, действующий в пространстве $L_2(R, d\mu(x))$, называем интегральным, если он имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_R K(x, y) f(y)\, d\mu(y),$$

где $K(x, y)$ — некоторая измеримая относительно $\mu \otimes \mu$ почти везде конечная функция точки $(x, y) \in R \times R$, а сама формула имеет место на некотором линейном плотном в $L_2(R, d\mu(x))$ множестве $f \in \mathfrak{D}(A)$. Функция $K(x, y)$ называется ядром $A$.

Сходимость интеграла от векторнозначной функции по обычной мере понимается по норме того пространства, где лежат значения функции. У нас также будут фигурировать сильные, т. е. по норме пространства, производные от векторнозначной функции.

# ПРОСТРАНСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

## § 1. ПОНЯТИЕ ПРОСТРАНСТВА С НЕГАТИВНОЙ НОРМОЙ

В теории обобщенных функций С. Л. Соболева — Л. Шварца по существу фигурирует следующая цепочка пространств:

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \supseteq L_2(\mathbb{R}^N) \supseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \tag{1.1}$$

где $L_2(\mathbb{R}^N)$ построено по мере Лебега; $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ — пространство основных функций, состоящее из финитных бесконечно дифференцируемых функций; $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ — пространство обобщенных функций — антилинейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Роль пространства $L_2(\mathbb{R}^N)$ сводится к тому, что скалярное произведение в нем $(f, g)_{L_2(\mathbb{R}^N)}$ может быть распространено по непрерывности до билинейной формы, задающей действие обобщенной функции $\alpha \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ на основную $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$; эту билинейную форму можно обозначить $(\alpha, u)_{L_2(\mathbb{R}^N)}$. Отметим, что $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ является замыканием $L_2(\mathbb{R}^N)$ в определенной топологии.

Ниже будут рассматриваться цепочки типа (1.1), в которых пространствами являются общие гильбертовы пространства.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕГАТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть $H_0$ — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{H_0}$ и нормой $\|\cdot\|_{H_0}$, $f$, $g$ — его элементы. Предположим, что в $H_0$ плотно линейное множество $H_+$, само являющееся гильбертовым пространством относительно нового скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_{H_+}$, $\|\cdot\|_{H_+}$ — норма в $H_+$, причем

$$\|u\|_{H_0} \leqslant \|u\|_{H_+} \qquad (u \in H_+) \tag{1.2}$$

(более общий случай $\|\cdot\|_{H_0} \leqslant c\|\cdot\|_{H_+}$ с некоторым $c < \infty$ перенормировкой $H_+$ сводится к (1.2)). Элементы $H_+$, играющие роль основных функций, будем обозначать $u, v, \ldots$



Каждый элемент $f \in H_0$ порождает антилинейный непрерывный функционал $l_f$ на $H_+$ по формуле

$$l_f(u) = (f, u)_{H_0} \qquad (u \in H_+); \tag{1.3}$$

его непрерывность следует из оценки $|l_f(u)| = |(f, u)_{H_0}| \leqslant \|f\|_{H_0}\|u\|_{H_0} \leqslant \|f\|_{H_0}\|u\|_{H_+}$. Введем в $H_0$ новую норму $\|\cdot\|_{H_-}$, считая нормой $f$ норму отвечающего ему функционала $l_f$:

$$\|f\|_{H_-} = \|l_f\| = \sup_{u \in H_+} \frac{|(f, u)_{H_0}|}{\|u\|_{H_+}}. \tag{1.4}$$

Из свойств нормы нужно проверить только следующее: если $\|f\|_{H_-} = 0$, то $f = 0$. Но если $\|f\|_{H_-} = 0$, то $(f, u)_{H_0} = 0$ для всех $u \in H_+$. А так как $H_+$ плотно в $H_0$, то $f = 0$.

Пополняя пространство $H_0$ по норме (1.4), получаем линейное нормированное пространство $H_-$, называемое пространством с негативной нормой. Итак, мы построили цепочку

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \tag{1.5}$$

пространств соответственно с негативной, нулевой и позитивной нормами. Их элементы будем обозначать $\alpha, \beta, \ldots \in H_-$; $f, g, \ldots \in H_0$; $u, v, \ldots \in H_+$ и иногда называть соответственно обобщенными, обычными и гладкими векторами (смысл такой терминологии прояснится в дальнейшем). Будем также говорить, что (1.5) является оснащением пространства $H_0$ пространствами $H_+$ и $H_-$.

Благодаря линейности и взаимной однозначности отображения $H_0 \ni f \mapsto l_f \in (H_+)'$ легко понять, что $H_-$ можно считать входящим в сопряженное пространство антилинейных функционалов над $H_+ : H_- \subseteq (H_+)'$. Поэтому имеет смысл выражение $\alpha(u)$, которое подобно форме $(\alpha, u)_{L_2(\mathbb{R}^N)}$ в теории обобщенных функций С. Л. Соболева — Л. Шварца будем обозначать через $(\alpha, u)_{H_0} = \overline{(u, \alpha)}_{H_0}$ $(\alpha \in H_-,\ u \in H_+)$. Билинейная форма $(\alpha, u)_{H_0}$ является расширением по непрерывности формы $H_+ \times H_+ \ni (v, u) \mapsto (v, u)_{H_0} \in \mathbb{C}^1$ на $H_- \times H_+$. Очевидно, справедливо следующее обобщение неравенства Коши — Буняковского:

$$|(\alpha, u)_{H_0}| \leqslant \|\alpha\|_{H_-}\|u\|_{H_+} \qquad (\alpha \in H_-,\ u \in H_+) \tag{1.6}$$

(при $\alpha = f$ неравенство (1.6) означает, что $|l_f(u)| \leqslant \|l_f\|\,\|u\|_{H_+}$, затем с $H_0$ на $H_-$ оно распространяется по непрерывности).

**Пример.** Пусть $H_0 = L_2(\mathbb{R}^N)$, $H_+ = L_2(\mathbb{R}^N, p(x)\,dx)$, где $1 \leqslant p(x) \in C(\mathbb{R}^N)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. Тогда $H_- = L_2(\mathbb{R}^N, p^{-1}(x)\,dx)$.

## 2. ГИЛЬБЕРТОВОСТЬ НЕГАТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

**Теорема 1.1.** *Негативное пространство $H_-$ является гильбертовым.*

Доказательство. Сконструируем скалярное произведение в $H_-$ (эта конструкция будет использоваться и в дальнейшем). Рассмотрим билинейную форму

$$H_0 \times H_+ \ni (f, u) \mapsto B(f, u) = (f, u)_{H_0} \in \mathbb{C}^1. \qquad (1.7)$$

Она непрерывна: $|B(f, u)| \leqslant \|f\|_{H_0} \|u\|_{H_0} \leqslant \|f\|_{H_0} \|u\|_{H_+}$ и поэтому допускает представление

$$B(f, u) = (f, Au)_{H_0} = (A^*f, u)_{H_+},$$

где $A: H_+ \to H_0$, $A^*: H_0 \to H_+$ — взаимно сопряженные непрерывные операторы. Согласно (1.7) $A$ равен оператору вложения $O: H_+ \to H_0$. Обозначим $I = O^*$. Итак,

$$(f, u)_{H_0} = (f, Ou)_{H_0} = (If, u)_{H_+} \qquad (f \in H_0,\ u \in H_+),\quad I: H_0 \to H_+. \quad (1.8)$$

Введем в $H_0$ квазискалярное произведение

$$(f, g)_{H_-} = (If, Ig)_{H_+} = (f, Ig)_{H_0} = (If, g)_{H_0} \qquad (f, g \in H_0). \quad (1.9)$$

Согласно (1.4), (1.8) и (1.9)

$$\|f\|_{H_-} = \sup_{u \in H_+} \frac{|(f, u)_{H_0}|}{\|u\|_{H_+}} = \sup_{u \in H_+} \frac{|(If, u)_{H_+}|}{\|u\|_{H_+}} = \|If\|_{H_+} = \sqrt{(f, f)_{H_-}}$$
$$(f \in H_0).$$

Так как $\|\cdot\|_{H_-}$ — норма в $H_0$, то (1.9) в действительности определяет скалярное, а не квазискалярное произведение. В результате пополнения это скалярное произведение переносится с $H_0$ на $H_-$, и последнее пространство превращается в гильбертово. ■

Итак, в $H_-$ введено скалярное произведение

$$(\alpha, \beta)_{H_-}, \quad \|\alpha\|_{H_-} = \sqrt{(\alpha, \alpha)_{H_-}} \qquad (\alpha, \beta \in H_-).$$

Так как $\|I\| = \|O\| \leqslant 1$, то $\|f\|_{H_-} = \|If\|_{H_+} \leqslant \|f\|_{H_0}$ $(f \in H_0)$.

## 3. СОВПАДЕНИЕ НЕГАТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА С СОПРЯЖЕННЫМ К ПОЗИТИВНОМУ

Первое равенство в (1.9) показывает, что $I$ является изометрическим оператором из $H_-$ в $H_+$, определенным на плотном множестве пространства $H_-$. Замыкая его по непрерывности, получаем изометрический оператор $\mathbf{I}: H_- \to H_+$, действующий из всего $H_-$ в $H_+$; $I = \mathbf{I} \upharpoonright H_0$.

Легко видеть, что $\mathbf{I}$ — *изометрия между всем $H_-$ и всем $H_+$* (т. е. область значений оператора $\mathbf{I}$ $\mathfrak{R}(\mathbf{I}) = H_+$). Действительно, $\mathfrak{R}(\mathbf{I})$ плотно в $H_+$: если $u \in H_+$ таково, что в $H_+$ $u \perp \mathfrak{R}(\mathbf{I})$, то при любом $f \in H_0$ согласно (1.8) имеем $0 = (\mathbf{I}f, u)_{H_+} = (If, u)_{H_+} = (f, u)_{H_0}$, откуда $u = 0$. С другой стороны, $\mathfrak{R}(\mathbf{I})$ замкнуто в $H_+$. Поэтому $\mathfrak{R}(\mathbf{I}) = H_+$. ■

Далее, *справедливо равенство*

$$(\alpha, u)_{H_0} = (\mathbf{I}\alpha, u)_{H_+} \qquad (\alpha \in H_-,\ u \in H_+). \qquad (1.10)$$

Действительно, пусть в $H_-$ $H_0 \ni f_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha$. Тогда благодаря (1.6), (1.8) и непрерывности $\mathbf{I}$

$$(\alpha, u)_H = \lim_{n\to\infty} (f_n, u)_{H_0} = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{I}f_n, u)_{H_+} = (\mathbf{I}\alpha, u)_{H_+}. \ ■$$

**Теорема 1.2.** *Справедливо равенство*

$$H_- = (H_+)'.$$

Доказательство. Нужно только установить, что любой функционал $l \in (H_+)'$ имеет вид $l(u) = (\alpha, u)_{H_0}$ $(u \in H_+)$ при некотором $\alpha \in H_-$. По теореме Ф. Рисса существует $a \in H$: $l(u) = (a, u)_{H_+}$ $(u \in H_+)$. Так как $\mathfrak{R}(\mathbf{I}) = H_+$, то, полагая $\alpha = \mathbf{I}^{-1}a \in H_-$ и учитывая (1.10), получим

$$l(u) = (a, u)_{H_+} = (\mathbf{I}\mathbf{I}^{-1}a, u)_{H_+} = (\mathbf{I}\alpha, u)_{H_+} = (\alpha, u)_{H_0} (u \in H_+). \ ■$$

Отметим, что все приведенные результаты очевидным образом распространяются на вещественные пространства $H_0$, $H_+$ и $H_-$.

## 4. ПОСТРОЕНИЕ ИЗОМЕТРИЙ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВАМИ ЦЕПОЧКИ

**Теорема 1.3.** *Изометрия $\mathbf{I}: H_- \to H_+$ допускает разложение в произведение двух изометрий*

$$\mathbf{I} = J\mathbf{J} \qquad (\mathbf{J}: H_- \to H_0,\ J: H_0 \to H_+); \quad J = \mathbf{J} \upharpoonright H_0. \qquad (1.11)$$

Доказательство. Пусть $O$, $I$ — операторы, введенные в п. 2. Положим $A = OI: H_0 \to H_0$. Этот оператор очевидно ограничен, он неотрицателен: благодаря (1.8)

$$(Af, f)_{H_0} = (OIf, f)_{H_0} = (If, f)_{H_0} = (If, If)_{H_+} \geqslant 0 \qquad (f \in H_0).$$

Положим $B = \sqrt{A}: H_0 \to H_0$ и рассмотрим этот оператор как действующий из плотного множества пространства $H_-$ в $H_0$. Тогда он будет изометрическим:

$$(Bf, Bg)_{H_0} = (B^2 f, g)_{H_0} = (OIf, g)_{H_0} = (If, Ig)_{H_+} = (f, g)_{H_-}$$
$$(f, g \in H_0).$$

Замыкая $B$ по непрерывности, получаем изометрический оператор $\mathbf{J} : H_- \to H_0$.

Докажем равенство $\mathfrak{R}(\mathbf{J}) = H_0$. Достаточно убедиться, что если существует $f \in H_0$ такое, что в $H_0$ $f \perp \mathfrak{R}(\mathbf{J})$, то $f = 0$. При любом $g \in H_0$ $0 = (\mathbf{J}g, f)_{H_0} = (Bg, f)_{H_0} = (g, Bf)_{H_0}$, откуда $Bf = 0$. Но тогда и $OIf = B^2 f = 0$, т. е. $If = 0$, а значит, и $f = 0$. Итак, $\mathfrak{R}(\mathbf{J}) = H_0$.

Покажем, что $\mathfrak{R}(B) \subseteq H_+$. Для этого достаточно убедиться в равенстве

$$B\mathbf{J} = O\mathbf{I}. \qquad (1.12)$$

При любом $f \in H_0$ имеем $B\mathbf{J}f = B^2 f = OIf = O\mathbf{I}f$. В силу плотности $H_0$ в $H_-$ и непрерывности операторов $\mathbf{J} : H_- \to H_0$, $B : H_0 \to H_0$, $O\mathbf{I} : H_- \to H_0$, отсюда и следует (1.12).

Обозначим теперь через $J$ оператор $B$, понимая его как оператор из $H_0$ в $H_+$. Тогда равенство (1.12) показывает, что (1.11) справедливо. Осталось доказать, что $J : H_0 \to H_+$ — изометрический оператор, область значения которого совпадает с $H_+$. Но это сразу вытекает из (1.11), так как $J = \mathbf{I}\mathbf{J}^{-1}$, а $\mathbf{J}^{-1} : H_0 \to H_-$, $\mathbf{I} : H_- \to H_+$ — изометрии. ■

Заметим, что из доказательства теоремы следует равенство $OJ = \sqrt{OI}$ (здесь $OI : H_0 \to H_0$ и неотрицателен, корень понимается в обычном смысле в $H_0$).

## 5. СОПРЯЖЕННОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО НУЛЕВОГО ПРОСТРАНСТВА

Для операторов, непрерывно действующих между пространствами цепочки (1.5), естественно вводится понятие сопряженности относительно $H_0$. Так, пусть $A : H_+ \to H_0$, тогда сопряженный оператор $A^+ : H_0 \to H_-$ определяется равенством

$$(Au, f)_{H_0} = (u, A^+ f)_{H_0} \qquad (u \in H_+,\ f \in H_0). \qquad (1.13)$$

Если $A : H_+ \to H_-$, то $A^+ : H_+ \to H_-$ определяется аналогичным равенством

$$(Au, v)_{H_0} = (u, A^+ v)_{H_0} \qquad (u,\ v \in H_+). \qquad (1.14)$$

Подобным же образом определяется оператор $A^+$ для $A$, действующего между другими пространствами цепочки.

Существование $A^+$ легко следует из существования обычного сопряженного оператора $A^*$. Так, в случае (1.13) в силу (1.10) имеем $(Au, f)_{H_0} = (u, A^* f)_{H_+} = (u, \mathbf{I}^{-1} A^* f)_{H_0}$, т. е.

$$A^+ = \mathbf{I}^{-1} A^* \qquad (A^* \colon H_0 \to H_+). \qquad (1.15)$$

В случае (1.14) воспользуемся вытекающим из (1.10) соотношением $(\alpha, u)_{H_0} = (\alpha, \mathbf{I}^{-1} u)_{H_-}$ $(\alpha \in H_-,\ u \in H_+)$. Получим $(Au, v)_{H_0} = (Au, \mathbf{I}^{-1} v)_{H_-} = (u, A^* \mathbf{I}^{-1} v)_{H_+} = (u, \mathbf{I}^{-1} A^* \mathbf{I}^{-1} v)_{H_0}$, т. е.



$$A^+ = \mathbf{I}^{-1} A^* \mathbf{I}^{-1} \qquad (A^* \colon H_- \to H_+). \qquad (1.16)$$

Для операторов $A : H_+ \to H_-$ можно обобщить понятие самосопряженности: будем говорить, что $A$ самосопряжен, если $A^+ = A$, т. е. $(Au, v)_{H_0} = (u, Av)_{H_0}$ $(u, v \in H_+)$. Обычный ограниченный самосопряженный оператор $A$ в $H_0$ будет, разумеется, самосопряженным и в этом смысле, если только его понимать как оператор из пространства $H_+$ в $H_-$. Оператор $A : H_+ \to H_-$ будет самосопряженным в этом обобщенном смысле тогда и только тогда, когда оператор $\mathbf{I}A : H_+ \to H_+$ самосопряжен в $H_+$ (или когда оператор $A\mathbf{I}^{-1} : H_- \to H_-$ самосопряжен в $H_-$). Это вытекает из равенства (см. (1.10)) $(\mathbf{I}Au, v)_{H_+} = (Au, v)_{H_0} = (u, Av)_{H_0} = (u, \mathbf{I}Av)_{H_+}$ $(u, v \in H_+)$. Аналогично обобщается понятие неотрицательности оператора в $H_0$: оператор $A : H_+ \to H_-$ будем называть неотрицательным $(A \geqslant 0)$, если $(Au, u)_{H_0} \geqslant 0$ $(u \in H_+)$. Неотрицательный оператор $A : H_+ \to H_-$ будем называть оператором с конечным следом Сл. $(A)$, если для некоторого ортонормированного базиса $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ в $H_+$ Сл. $(A) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)_{H_0} < \infty$. Легко убедиться, что при изменении базиса $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ Сл. $(A)$ не изменяется.

*Для неотрицательного $A : H_+ \to H_-$ справедливо неравенство $|A| \leqslant$ Сл. $(A)$.* Действительно, если $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $H_+$, то $(\mathbf{I}^{-1} e_j)_{j=1}^{\infty}$ будет ортонормированным базисом в $H_-$, и поэтому

$$|A|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \| Ae_j \|_{H_-}^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |(Ae_j, \mathbf{I}^{-1} e_k)_{H_-}|^2 =$$
$$= \sum_{j,k=1}^{\infty} |(Ae_j, e_k)_{H_0}|^2 \leqslant \sum_{j,k=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)_{H_0} (Ae_k, e_k)_{H_0} = (\text{Сл. } (A))^2.$$

(Мы использовали изометрию $\mathbf{I}$, (1.10) и неравенство $|(Au, v)_{H_0}|^2 \leqslant (Au, u)_{H_0} (Av, v)_{H_0}$ $(u,\ v \in H_0)$ — неравенство Коши — Буняковского для квазискалярного произведения $(u, v) = (Au, v)_{H_0}$.) ■

Интересно отметить, что оператор $\mathbf{I}^{-1} : H_+ \to H_-$ будет самосопряженным и неотрицательным во введенном смысле — это следует из соотношения (см. (1.10)) $(\mathbf{I}^{-1} u, v)_{H_0} = (u, v)_{H_+} = (u, \mathbf{I}^{-1} v)_{H_0}$ $(u, v \in H_+)$. Операторы $J^{-1} : H_+ \to H_0$ и $\mathbf{J}^{-1} : H_0 \to H_-$ сопряжены относительно $H_0$:

$$\mathbf{J}^{-1} = (J^{-1})^+, \qquad (1.17)$$

что вытекает из соотношения (см. теорему 1.3 и (1.10))

$$(J^{-1} u, f)_{H_0} = (u, Jf)_{H_+} = (u, \mathbf{I}^{-1} Jf)_{H_0} = (u, \mathbf{J}^{-1} J^{-1} Jf)_{H_0} = (u, \mathbf{J}^{-1} f)_{H_0}.$$

Разумеется,

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^{+}, \quad \mathbf{J} = J^{+}, \quad \mathbf{I} \geqslant 0. \tag{1.18}$$

Схема действия операторов и основные равенства такие:

$$\begin{tikzcd} H_- \arrow[r, phantom, "\supseteq"] \arrow[r, bend left, "\mathbf{J}"] \arrow[rr, bend left=50, "\mathbf{I}"] & H_0 \arrow[r, phantom, "\supseteq"] \arrow[r, bend left, "J"] \arrow[r, bend right, "I"'] & H_+ \arrow[l, bend left=60, "O"] \end{tikzcd}$$

$$\|\cdot\|_{H_-} \leqslant \|\cdot\|_{H_0} \leqslant \|\cdot\|_{H_+}, \tag{1.19}$$

$$\begin{gathered} (\mathbf{I}\alpha, \beta)_{H_0} = (\alpha, \mathbf{I}\beta)_{H_0}, \ (\alpha, u)_{H_0} = (\mathbf{I}\alpha, u)_{H_+}, \ \mathbf{I} = J\mathbf{J}, \\ (Jf, \alpha)_{H_0} = (f, \mathbf{J}\alpha)_{H_0} \qquad (\alpha \in H_-, \ f \in H_0, \ u \in H_+). \end{gathered} \tag{1.20}$$

## 6. ПОСТРОЕНИЕ ЦЕПОЧКИ ПО ПОДПРОСТРАНСТВУ ПОЗИТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть имеется цепочка (1.19), $G_+$ — фиксированное подпространство $H_+$, плотное в $H_0$. Принимая $G_+$ и $H_0$ в качестве соответственно позитивного и нулевого пространства, можно построить негативное $G_-$ и получить цепочку

$$G_- \supseteq H_0 \supseteq G_+. \tag{1.21}$$

Спрашивается, как $G_-$ связано с $H_-$. Рассмотрим подпространство $N_- \subseteq H_-$, являющееся ортогональным дополнением относительно $(\cdot, \cdot)_{H_0}$ к $G_+$, т. е. $N_- = \{\alpha \in H_- \mid (\alpha, v)_{H_0} = 0, \ v \in G_+\}$. Тогда *$G_-$ изоморфно ортогональному дополнению в $H_-$ к $N_-$* (т. е. можно считать, что $G_- = H_- \ominus N_-$). Действительно, каждому $\alpha \in H_-$ поставим в соответствие $\beta_\alpha \in G_-$, полагая $(\beta_\alpha, v)_{H_0} = \beta_\alpha(v) = (\alpha, v)_{H_0}$ $(v \in G_+)$. Отображение $H_- \ni \alpha \mapsto \beta_\alpha \in G_-$ линейное с ядром $N_-$. Его образ заполняет все $G_-$: пусть $\beta \in G_-$ и $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ — изометрии $\mathbf{I}$, связанные соответственно с цепочками (1.19) и (1.21), тогда $\alpha = \mathbf{I}_1^{-1}\mathbf{I}_2\beta \in H_-$, как следует из (1.10), будет обладать тем свойством, что $\beta_\alpha = \beta$. С другой стороны, пусть $P$ — проектор в $H_-$ на $H_- \ominus N_-$. Ядром отображения $H_- \ni \alpha \mapsto P\alpha$ также служит $N_-$, поэтому между гильбертовыми пространствами $H_- \ominus N_-$ и $G_-$ имеется естественное взаимно однозначное линейное отображение $H_- \ominus N_- \ni P\alpha \mapsto \alpha \mapsto \beta_\alpha \in G_-$. Это отображение сохраняет норму. Действительно, как следует из (1.10), $\mathbf{I}_1^{-1}G_+ = H_- \ominus N_-$, поэтому при помощи (1.10)

$$\|\beta_\alpha\|_{G_-} = \sup_{v \in G_+} \frac{|(\alpha, v)_{H_0}|}{\|v\|_{H_+}} = \sup_{v \in G_+} \frac{|(\alpha, \mathbf{I}_1^{-1}v)_{H_-}|}{\|\mathbf{I}_1^{-1}v\|_{H_-}} = \|P\alpha\|_{H_-}.$$

Итак, рассматриваемое отображение является изоморфизмом между $H_- \ominus N_-$ и $G_-$. ■



## 7. ПОСТРОЕНИЕ ЦЕПОЧКИ ПО НЕГАТИВНОМУ ПРОСТРАНСТВУ

Выше мы строили цепочку (1.19) по заданной паре пространств $H_0$ и $H_+$. Покажем, что ее можно построить и по паре $H_0$, $H_-$. Справедлива следующая теорема, доказательство которой дает конструкцию соответствующего $H_+$.

**Теорема 1.4.** *Пусть задано гильбертово пространство $H_-$ и в нем плотное линейное множество $H_0$, являющееся само гильбертовым пространством относительно нового скалярного произведения, причем $\|f\|_{H_-} \leqslant \|f\|_{H_0}$ $(f \in H_0)$. Тогда можно построить позитивное пространство $H_+ \subseteq H_0$ таким образом, что соответствующее негативное пространство будет совпадать с $H_-$.*

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму

$$H_0 \times H_0 \ni (f, g) \mapsto B(f, g) = (f, g)_{H_-} \in \mathbb{C}^1.$$

Вследствие неравенства $\|f\|_{H_-} \leqslant \|f\|_{H_0}$ $(f \in H_0)$ она непрерывна и поэтому может быть представлена в виде

$$(f, g)_{H_-} = (Kf, g)_{H_0} \ (f, g \in H_0),$$

где $K: H_0 \to H_0$ — непрерывный оператор; очевидно, $\|K\| \leqslant 1$ и $K \geqslant 0$. Его область значений $\mathfrak{R}(K)$ плотна в $H_0$: если $0 = (Kf, h)_{H_0} = (f, h)_{H_-}$ $(f \in H_0)$, то $h = 0$ в силу плотности $H_0$ в $H_-$. На $\mathfrak{R}(K)$ существует обратный оператор $K^{-1}$: если $Kf = 0$, то $(f, g)_{H_-} = (Kf, g)_{H_0} = 0$ $(g \in H_0)$, т. е. $f = 0$.

Положим

$$(u, v)_{H_+} = (K^{-1}u, v)_{H_0} \qquad (u, v \in \mathfrak{R}(K)). \tag{1.22}$$

Так как $\|K\| \leqslant 1$, то из спектрального разложения для $K$ следует, что $\|u\|^2_{H_+} = (K^{-1}u, u)_{H_0} \geqslant \|u\|^2_{H_0}$ $(u \in \mathfrak{R}(K))$. Отсюда вытекает, что пространство $H_+$, получаемое как пополнение $\mathfrak{R}(K)$ относительно $(\cdot, \cdot)_{H_+}$, удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на позитивное относительно $H_0$ пространство. Построим по $H_0$ и введенному $H_+$ негативное пространство $G_-$. Требуется доказать, что $G_- = H_-$.

Для доказательства заметим, что $K = OI$, где последние два оператора построены по цепочке $G_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$. Это равенство вытекает из соотношения $(If, v)_{H_+} = (f, v)_{H_0}$ $(f \in H_0$, $v \in H_+ \supseteq \mathfrak{R}(K))$, следующего из (1.22) соотношения $(Kf, v)_{H_+} = (f, v)_{H_0}$ $(f \in H_0, \ v \in \mathfrak{R}(K))$, и плотности $\mathfrak{R}(K)$ в $H_+$. Поэтому для $f, g \in H_0$ $(f, g)_{H_-} = (Kf, g)_{H_0} = (If, g)_{H_0} = (f, g)_{G_-}$, откуда вследствие плотности $H_0$ в $H_-$ и в $G_-$ следует равенство $H_- = G_-$. ■

Часто возникает ситуация, при которой на векторах $f, g, \ldots$ некоторого гильбертова пространства $H_0$ вводится квазискалярное произведение $(f, g)_{H_-}$ такое, что $(f, f)_{H_-} \leqslant \|f\|^2_{H_0}$. Если $(\cdot,\cdot)_{H_-}$ является скалярным произведением, то, пополняя $H_0$ относительно $(\cdot,\cdot)_{H_-}$, получаем гильбертово пространство $H_- \supseteq H_0$. К паре $H_0$, $H_-$ можно применить теорему 1.4 и интерпретировать $H_-$ как некоторое негативное пространство с нулевым $H_0$. В случае квазискалярного произведения рассмотрим линейное множество $G = \{f \in H_0 \mid (f, f)_{H_-} = 0\}$. В силу оценки $(f, f)_{H_-} \leqslant \|f\|^2_{H_0}$ оно замкнуто в $H_0$, т. е. является подпространством. Положим $G_0 = H_0 \ominus G$ (ортогональное вычитание в $H_0$). Ясно, что на $G_0$ форма $(\cdot,\cdot)_{H_-}$ будет определять уже скалярное произведение, и мы приходим к рассмотренному случаю. Таким образом, пополнение $G_-$ пространства $G_0$ относительно $(\cdot,\cdot)_{H_-}$ также можно интерпретировать как негативное пространство с нулевым $G_0$.

**Пример**. Пусть $H_0 = L_2\ (R, d\mu\ (x))$, где $R$ — абстрактное пространство с конечной мерой $\mu$; $R \times R \ni (x, y) \mapsto K\ (x, y) \in \mathbb{C}^1$ — некоторое ограниченное ядро, измеримое относительно $\mu \otimes \mu$. Полагаем

$$(f, g)_{H_K} = \int\limits_R \int\limits_R K(x, y) f(y) \overline{g(x)}\, d\mu(x)\, d\mu(y)\ (f, g \in L_2(R, d\mu(x))), \quad (1.23)$$

где $K$ — положительно определено, т. е. $(f, f)_{H_K} \geqslant 0$ $(f \in L_2 (R, d\mu\ (x)))$. Тогда (1.23) определяет квазискалярное произведение на $H_0$. Согласно сказанному выше соответствующее этому квазискалярному произведению гильбертово пространство $H_K$ можно понимать как негативное относительно нулевого, совпадающего с $H_0$ или с некоторым его подпространством $G_0$, и некоторого позитивного $H_+$ (мы полагаем $(\cdot,\cdot)_{H_-} = \varepsilon\,(\cdot,\cdot)_{H_K}$ с достаточно малой константой $\varepsilon > 0$). Это важная интерпретация пространства $H_K$ как некоторого пространства обобщенных функций (см. также § 3, п. 12).

## 8. ПОСТРОЕНИЕ ЦЕПОЧКИ ПО ОПЕРАТОРУ

При помощи (1.19) заключаем, что

$$(u, v)_{H_+} = (J^{-1}u, J^{-1}v)_{H_0}\ (u, v \in H_+),$$
$$(\alpha, \beta)_{H_-} = (\mathbf{J}\alpha, \mathbf{J}\beta)_{H_0}\ (\alpha, \beta \in H_-). \quad (1.24)$$

В соответствии с соотношениями (1.24) можно строить цепочку (1.19), задавая предварительно наряду с $H_0$ не $H_+$ или $H_-$, а некоторый оператор в $H_0$, аналогичный $J$ или, что удобнее, $J^{-1}$. Такой подход к построению цепочек (1.19) часто бывает полезным.

Итак, пусть в некотором гильбертовом пространстве $H_0$ задан замкнутый оператор $D$ с плотной областью определения $\mathfrak{D}\ (D)$



такой, что

$$\|Du\|_{H_0} \geqslant \|u\|_{H_0} \qquad (u \in \mathfrak{D}(D)). \quad (1.25)$$

Очевидно, $\mathfrak{D}\ (D)$ будет полным гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(u, v)_{H_+} = (Du, Dv)_{H_0}. \quad (1.26)$$

Его можно принять в качестве позитивного пространства $H_+$ и построить затем соответствующее $H_-$.

Построим по такой цепочке $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ оператор $J$. Сравнивая первое из равенств (1.24) с (1.26), заключаем, что $J_0^{-1} = \sqrt{D^*D}$, где под $J_0^{-1}$ понимается оператор $J^{-1}$ в пространстве $H_0$ с областью определения $H_+$ (мы воспользовались положительностью оператора $J_0^{-1}$ и теоремой о метрически равных операторах). Если, кроме того, $D$ — положительный самосопряженный оператор, то $J_0^{-1} = D$. В этом случае $OJ = D^{-1}$, поэтому согласно второму из равенств (1.24) $(f, g)_{H_-} = (D^{-1}f, D^{-1}g)_{H_0}$ $(f, g \in H_0)$; негативное пространство $H_-$ получается как пополнение $H_0$ относительно последнего скалярного произведения.

## 9. ВЗВЕШЕННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СУММЫ ЦЕПОЧЕК

Построим ортогональные суммы цепочек (1.5), предварительно введя простое понятие взвешенной ортогональной суммы гильбертовых пространств. Пусть $(H_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность гильбертовых пространств $H_n$, $\delta = (\delta_n)_{n=1}^\infty$ $(\delta_n > 0)$ — весовая последовательность. Под взвешенной ортогональной суммой $\mathcal{H}_\delta = \bigoplus\limits_{n=1;\delta}^\infty H_n$ будем понимать гильбертово пространство последовательностей $f = (f_n)_{n=1}^\infty$ таких, что $\sum\limits_{n=1}^\infty \|f_n\|^2_{H_n} \delta_n < \infty$ с естественными линейными операциями и скалярным произведением $(f, g)_{\mathcal{H}_\delta} = \sum\limits_{n=1}^\infty (f_n, g_n)_{H_n} \delta_n$. В случае $\delta = 1$, т. е. $\delta_n = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\mathcal{H}_1$ превращается в обычную ортогональную сумму.

*Пусть даны последовательность цепочек вида* (1.5)

$$H_{-,n} \supseteq H_{0,n} \supseteq H_{+,n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad (1.27)$$

*и некоторый вес* $\delta = (\delta_n)_{n=1}^\infty$ $(\delta_n \geqslant 1)$. *Тогда*

$$\mathcal{H}_{-,\delta^{-1}} = \bigoplus_{n=1;\delta^{-1}}^\infty H_{-,n} \supseteq \underset{\substack{\| \\ \mathcal{H}_{0,1}}}{\bigoplus_{n=1;1}^\infty H_{0,n}} \supseteq \bigoplus_{n=1,\delta}^\infty H_{+,n} = \mathcal{H}_{+,\delta} \quad (1.28)$$

$$(\delta^{-1} = (\delta_n^{-1})_{n=1}^\infty)$$

*также является цепочкой.* Действительно, $\mathcal{H}_{+,\delta}$ плотно в $\mathcal{H}_{0,1}$, причем в силу условия $\delta_n \geqslant 1$ $\|u\|_{\mathcal{H}_{0,1}} \leqslant \|u\|_{\mathcal{H}_{+,\delta}}$ $(u \in \mathcal{H}_{+,\delta})$. Поэтому можно построить цепочку $G_- \supseteq \mathcal{H}_{0,1} \supseteq \mathcal{H}_{+,\delta}$. Докажем, что $G_- = \mathcal{H}_{-,\delta^{-1}}$. Пусть $I$ связан с последней цепочкой, а $I_n$ — аналогичные операторы, связанные с (1.27). Имеем

$$(If, u)_{\mathcal{H}_{+,\delta}} = (f, u)_{\mathcal{H}_{0,1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, u_n)_{H_{0,n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (I_n f_n, u_n)_{H_{+,n}} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_n^{-1} I_n f_n, u_n)_{H_{+,n}} \delta_n \qquad (f \in \mathcal{H}_{0,1}, \ u \in \mathcal{H}_{+,\delta}).$$

Отсюда $(If)_n = \delta_n^{-1} I_n f_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, поэтому для $f, g \in \mathcal{H}_{0,1}$

$$(f, g)_{G_-} = (If, g)_{\mathcal{H}_{0,1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (I_n f_n, g_n)_{H_{0,n}} \delta_n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, g_n)_{H_{-,n}} \delta_n^{-1} =$$
$$= (f, g)_{\mathcal{H}_{-,\delta^{-1}}}.$$

Так как в $G_-$ и $\mathcal{H}_{-,\delta^{-1}}$ пространство $\mathcal{H}_{0,1}$ будет плотным множеством, то благодаря последнему равенству $G_- = \mathcal{H}_{-,\delta^{-1}}$. ■

Разумеется, в приведенных выше построениях могут также фигурировать конечные, а не бесконечные, последовательности гильбертовых пространств.

## 10. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим некоторую совокупность $(B_\tau)_{\tau \in T}$ банаховых пространств $B_\tau$ ($\tau$ меняется по произвольному множеству индексов T). Предположим, что $\Phi = \bigcap_{\tau \in T} B_\tau$ плотно в каждом $B_\tau$ и снабдим это линейное пространство следующей топологией. Под базисной окрестностью нуля пространства $\Phi$ будем понимать множество $U(0; \tau_1, \ldots, \tau_m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = \{\varphi \in \Phi \mid \|\varphi\|_{B_{\tau_1}} < \varepsilon_1, \ldots, \|\varphi\|_{B_{\tau_m}} < \varepsilon_m\}$; меняя произвольно $\tau_1, \ldots, \tau_m$ по T и $\varepsilon_1 > 0, \ldots, \varepsilon_m > 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$, получаем базис окрестностей нуля. Под базисной окрестностью любого вектора $\psi \in \Phi$ понимается сдвинутая базисная окрестность нуля: $U(\psi; \tau_1, \ldots, \tau_m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi - \psi \in U(0; \tau_1, \ldots, \tau_m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)\}$. Легко доказать, что совокупность всех множеств $U(\psi; \tau_1, \ldots, \tau_m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ удовлетворяет аксиоматике базиса окрестностей хаусдорфова топологического пространства, а линейные операции непрерывны в этой топологии. Так построенное линейное топологическое пространство называется проективным пределом пространств $B_\tau$, будем его обозначать $\Phi = \operatorname{pr} \lim_{\tau \in T} B_\tau$. Если T счетно, то $\Phi$ называется счетно-нормированным и в этом случае применяется также обозначение $\Phi = \operatorname{pr} \lim_{\tau \to \infty} B_\tau$.



Далее будем предполагать выполненным следующее условие направленности норм: для любых $\tau', \tau'' \in T$ существует $\tau''' \in T$ такое, что топологически $B_{\tau'''} \subseteq B_{\tau'}$, $B_{\tau'''} \subseteq B_{\tau''}$. Отсюда следует, что в каждой окрестности $U(0; \tau_1, \ldots, \tau_m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ можно найти окрестность $U(0; \tau, \delta)$ с некоторыми $\tau \in T$ и $\delta > 0$. Поэтому базис окрестностей $\Phi$ образует совокупность всех окрестностей вида $U(\psi; \tau, \varepsilon)$ $(\psi \in \Phi, \ \tau \in T, \varepsilon > 0)$. В частном случае, когда T счетно, например $T = \{0, 1, \ldots\}$ и $\|\varphi\|_{B_0} \leqslant \|\varphi\|_{B_1} \leqslant \ldots$ $(\varphi \in \Phi)$, будем говорить, что система норм, задающая топологию в $\Phi$, монотонна. Разумеется, сейчас $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq \operatorname{pr} \lim_{\tau \to \infty} B_\tau$.

Напомним также, что последовательность $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ векторов $\varphi_n \in \Phi$ называется сходящейся к $\varphi \in \Phi$, если для любой окрестности $U(\varphi)$ найдется номер $N = N(U(\varphi))$ такой, что $\varphi_n \in U(\varphi)$ при $n > N$. Задание всех сходящихся последовательностей линейного топологического пространства $\Phi$, вообще говоря, не определяет однозначно его топологию, т. е. линейное множество $\Phi$ путем задания неэквивалентных топологий можно превратить в два различных топологических пространства $\Phi'$ и $\Phi''$ с одним и тем же набором сходящихся последовательностей.

Отметим, что проективный предел банаховых пространств часто возникает в следующей ситуации. Имеется линейное множество $E$, в котором задана система норм $\|u\|_{B_\tau}$ $(u \in E)$, где $\tau \in T$. Обозначим через $B_\tau$ пополнение $E$ относительно $\|\cdot\|_{B_\tau}$. Тогда $\Phi = \bigcap_{\tau \in T} B_\tau$ содержит $E$ и поэтому плотно в каждом $B_\tau$. Следовательно, можно определить $\operatorname{pr} \lim_{\tau \in T} B_\tau$. Направленность норм сейчас означает, что для любых $\tau', \tau'' \in T$ существуют $\tau''' \in T$ и константы $c', c'' \in (0, \infty)$ такие, что $\|u\|_{B_{\tau'}} \leqslant c' \|u\|_{B_{\tau'''}}$, $\|u\|_{B_{\tau''}} \leqslant c'' \|u\|_{B_{\tau'''}}$ $(u \in E)$. Монотонность норм, разумеется, эквивалентна наличию неравенств $\|u\|_{B_0} \leqslant \|u\|_{B_1} \leqslant \ldots$ $(u \in E)$.

В случае, когда пространства $B_\tau = H_\tau$ $(\tau \in T)$ гильбертовы, говорят о проективном пределе $\Phi$ гильбертовых пространств или, если T счетно,— о счетно-гильбертовом пространстве $\Phi$. Часто для заданного $\Phi$, понимаемого как проективный предел банаховых пространств, можно построить гильбертовы пространства, проективным пределом которых также служит $\Phi$ (см. § 3, п. 9.10). Напомним важное определение: проективный предел $\Phi = \operatorname{pr} \lim_{\tau \in T} H_\tau$ гильбертовых пространств называется ядерным пространством, если для каждого $\tau \in T$ найдется такое $\tau' \in T$, что $H_{\tau'} \subseteq H_\tau$, причем это вложение квазиядерное.

У нас часто будет возникать следующая ситуация. Имеется совокупность гильбертовых пространств $(H_\tau)_{\tau \in T}$, каждое из которых является плотным множеством некоторого фиксированного гильбертова пространства $H_0$ $(0 \in T)$, причем $\| u \|_{H_0} \leqslant \| u \|_{H_\tau}$ $(u \in H_\tau)$ (более общо: вложение $H_\tau \to H_0$ непрерывно, тогда выполнение последнего неравенства достигается перенормировкой $H_\tau$). В этом случае можно построить цепочку

$$H_{-\tau} \supseteq H_0 \supseteq H_\tau, \tag{1.29}$$

где $H_{-\tau}$ — негативное пространство, построенное по нулевому $H_0$ и позитивному $H_\tau$. С другой стороны, если $\Phi = \bigcap_{\tau \in T} H_\tau$ плотно в каждом $H_\tau$, то можно строить $\mathrm{pr} \lim_{\tau \in T} H_\tau$.

Справедлива следующая простая, но важная теорема.

**Теорема 1.5.** *Если $\Phi$ — проективный предел банаховых пространств: $\Phi = \mathrm{pr} \lim_{\tau \in T} B_\tau$, то сопряженное пространство антилинейных функционалов $\Phi' = \bigcup_{\tau \in T} B'_\tau$. В частности, если $\Phi$ — проективный предел гильбертовых пространств $H_\tau$ $(\tau \in T)$, для которых построены цепочки* (1.29), *то $\Phi' = \bigcup_{\tau \in T} H_{-\tau}$.*

Доказательство. Пусть $l \in B'_\tau$, тогда $l \upharpoonright \Phi$ является антилинейным функционалом на $\Phi$. Из непрерывности $l$ в 0 в топологии пространства $B_\tau$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $U(0; \tau, \delta)$ такая, что $| l(\varphi) | < \varepsilon$ при $\varphi \in U(0; \tau, \delta)$, а это означает непрерывность $l$ в 0 в топологии $\Phi$. Итак, $l \in \Phi'$

Обратно, пусть $l \in \Phi'$. Из непрерывности $l$ в нуле следует, что для $\varepsilon = 1$ существует такая базисная окрестность 0 в топологии $\Phi$, т. е. окрестность $U(0; \tau, \delta)$ $(\tau \in T,\ \delta > 0)$, что $| l(\varphi) | < 1$ при $\varphi \in U(0; \tau, \delta)$. Рассмотрим пространство $B_\tau$. Антилинейный функционал $l$ определен на плотном в $B_\tau$ линейном множестве $\Phi$ и ограничен единицей на пересечении $\Phi$ с шаром $\| \cdot \|_{B_\tau} < \delta$ пространства $B_\tau$. Таким образом, он непрерывен на $\Phi$, снабженном нормой пространства $B_\tau$. Распространяя его по непрерывности на все $B_\tau$, получаем, что $l \in B'_\tau$. ■

В заключение отметим, что если имеется последовательность гильбертовых пространств $(H_\tau)_{\tau=0}^\infty$ с монотонной системой норм и $\Phi = \bigcap_{\tau=0}^\infty H_\tau$ плотно в каждом $H_\tau$, то легко доказать справедливость соотношений

$$\bigcup_{\tau=0}^\infty H_{-\tau} = (\mathrm{pr} \lim_{\tau \to \infty} H_\tau)' \supseteq \cdots \supseteq H_{-2} \supseteq H_{-1} \supseteq H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots$$

$$\cdots \supseteq \mathrm{pr} \lim_{\tau \to \infty} H_\tau = \bigcap_{\tau=0}^\infty H_\tau, \tag{1.30}$$

$$\cdots \leqslant \| \varphi \|_{H_{-2}} \leqslant \| \varphi \|_{H_{-1}} \leqslant \| \varphi \|_{H_0} \leqslant \| \varphi \|_{H_1} \leqslant \| \varphi \|_{H_2} \leqslant \cdots \qquad (\varphi \in \Phi).$$



Здесь $H_{-\tau}$ построены согласно (1.29); во включениях (1.30) каждое пространство плотно в левее его стоящем.

Мы не приводили более общих конструкций проективных пределов, например, когда вместо норм задаются квазинормы или когда нет вложений между пространствами и нужно задавать отождествляющие операторы. Эти конструкции нам не понадобятся. Мы также не говорили об индуктивных пределах, и поэтому доказанные равенства теоремы 1.5 мы понимаем лишь как совпадения множеств.

## § 2. КОНЕЧНЫЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Ниже будет изложено хорошо известное понятие тензорного произведения конечного числа гильбертовых пространств и одно его обобщение в случае их бесконечного числа — понятие взвешенного тензорного произведения. Такое обобщение нам понадобится для построения разложений по обобщенным собственным функциям операторов, действующих в пространстве функций бесконечного числа переменных,— оно дает возможность строить пространства таких функций, вложенные друг в друга с операторами вложения Гильберта — Шмидта. Именно благодаря весу можно требуемым образом подавлять поведение функций в «направлении роста количества переменных». Будут изложены также тензорные произведения цепочек $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$. Мы ограничимся изложением лишь для сепарабельных бесконечномерных пространств.

### 1. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $(H_n)_{n=1}^p$ — конечная последовательность сепарабельных гильбертовых пространств $H_n$, $(e_j^{(n)})_{j=0}^\infty$ — некоторый ортонормированный базис в $H_n$ $(n = 1, \ldots, p)$. Образуем формальное произведение

$$e_\alpha = e_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)} = e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_p}^{(p)} \tag{2.1}$$

$$(\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^p; \quad \alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_p = 0, \ 1, \ \ldots)$$

(т. е. рассмотрим упорядоченную последовательность $(e_{\alpha_1}^{(1)}, \ldots, e_{\alpha_p}^{(p)})$) и на формальные векторы (2.1) натянем гильбертово пространство, считая, что эти векторы образуют его ортонормированный базис. Полученное сепарабельное гильбертово пространство носит название тензорного произведения пространств $H_1, \ldots, H_p$ и обозначается $H_1 \otimes \ldots \otimes H_p = \bigotimes_{n=1}^{p} H_n$. Таким образом, его векторы имеют вид

$$f = \sum_{\alpha \in N^p} f_\alpha e_\alpha \qquad (f_\alpha \in \mathbb{C}^1), \quad \sum_{\alpha \in N^p} |f_\alpha|^2 = \|f\|^2_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_n} < \infty \tag{2.2}$$

где $N^p$ обозначает счетное множество всех индексов $\alpha$ из (2.1). Разумеется, $(f, g)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_n} = \sum_{\alpha \in N^p} f_\alpha \bar{g}_\alpha$, где $g = \sum_{\alpha \in N^p} g_\alpha e_\alpha$ — второй вектор вида (2.2).

Пусть $f^{(n)} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(n)} e_j^{(n)} \in H_n$ $(n = 1, \ldots, p)$ — некоторые векторы. Положим по определению

$$f = f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)} = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p = 1}^{\infty} f_{\alpha_1}^{(1)} \cdots f_{\alpha_p}^{(p)} e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_p}^{(p)}. \tag{2.3}$$

Коэффициенты $f_\alpha = f_{\alpha_1}^{(1)} \ldots f_{\alpha_p}^{(p)}$ разложения (2.3) удовлетворяют условию (2.2), поэтому вектор (2.3) принадлежит $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n$, при этом

$$\|f\|_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_n} = \prod_{n=1}^{p} \|f^{(n)}\|_{H_n}. \tag{2.4}$$

Ясно, что функция $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n \ni (f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}) \mapsto f^{(1)} \otimes \ldots \otimes f^{(p)} \in \bigotimes_{n=1}^{p} H_n$ линейна по каждому переменному, а линейная оболочка векторов (2.3) плотна в $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n$. Если $M_n$ — линейное множество из $H_n$ $(n = 1, \ldots, p)$, то положим

а. $\bigotimes_{n=1}^{p} M_n =$ л. о. $\{f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)} \mid f^{(1)} \in M_1, \ldots, f^{(p)} \in M_p\}$,

$\bigotimes_{n=1}^{p} M_n =$ з. л. о. $\{f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)} \mid f^{(1)} \in M_1, \ldots, f^{(p)} \in M_p\}$.

Приведенное определение тензорного произведения, разумеется, зависит от выбора ортонормированных базисов $(e_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$ в пространствах $H_n$ $(n = 1, \ldots, p)$, однако, как легко понять, при изменении базисов мы получаем тензорное произведение, изоморфное с сохранением своей структуры исходному произведению.



**Пример.** Пусть $H_n = L_2(R_n, d\mu_n(x_n))$, где $R_n$ — пространство с мерой $\mu_n$ $(\mu_n(R_n) \leqslant +\infty)$ $(n = 1, \ldots, p)$. Тогда $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n = L_2\left(\bigtimes_{n=1}^{p} R_n, \ d(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p) \ (x)\right)$. Поясним, что для доказательства этого равенства нужно вектору вида (2.1) $e_\alpha = (e_{\alpha_1}^{(1)}(x_1)) \otimes \ldots \otimes (e_{\alpha_p}^{(p)}(x_p)) \in \bigotimes_{n=1}^{p} H_n$ поставить в соответствие функцию $e_\alpha(x) = e_{\alpha_1}^{(1)}(x_1) \ldots e_{\alpha_p}^{(p)}(x_p) \in L_2\left(\bigtimes_{n=1}^{p} R_n, \ d(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p)(x)\right)$. Так как такие функции образуют ортонормированный базис пространства $L_2\left(\bigtimes_{n=1}^{p} R_n, \ d(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p)(x)\right)$, то это соответствие порождает требуемый изоморфизм между $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n$ и $L_2\left(\bigtimes_{n=1}^{p} R_n, \ d(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p)(x)\right)$.

## 2. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ОПЕРАТОРОВ

Перейдем к определению тензорного произведения конечного числа ограниченных операторов — оператора, конструктирующегося по перемножаемым операторам по тому же закону, что и смешанная производная $\frac{\partial^p}{\partial x_1 \ldots \partial x_p}$ по производным $\frac{\partial}{\partial x_n}$.

**Теорема 2.1.** *Пусть $(H_n)_{n=1}^{p}$, $(G_n)_{n=1}^{p}$ — две последовательности гильбертовых пространств, $(A_n)_{n=1}^{p}$ — последовательность ограниченных операторов $A_n$: $H_n \to G_n$. Определим тензорное произведение $A_1 \otimes \ldots \otimes A_p = \bigotimes_{n=1}^{p} A_n$ формулой*

$$\left(\bigotimes_{n=1}^{p} A_n\right) f = \left(\bigotimes_{n=1}^{p} A_n\right)\left(\sum_{\alpha \in N^p} f_\alpha e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_p}^{(p)}\right) =$$
$$= \sum_{\alpha \in N^p} f_\alpha (A_1 e_{\alpha_1}^{(1)}) \otimes \cdots \otimes (A_p e_{\alpha_p}^{(p)}) \qquad \left(f \in \bigotimes_{n=1}^{p} H_n\right). \tag{2.5}$$

*Утверждается, что ряд в правой части (2.5) сходится слабо в $\bigotimes_{n=1}^{p} G_n$ и определяет ограниченный оператор $\bigotimes_{n=1}^{p} A_n : \bigotimes_{n=1}^{p} H_n \to \bigotimes_{n=1}^{p} G_n$,* *причем*

$$\left\| \bigotimes_{n=1}^{p} A_n \right\| = \prod_{n=1}^{p} \| A_n \|. \tag{2.6}$$

Доказательство. Его достаточно провести для $p = 2$, так как вследствие ассоциативности тензорного произведения пространств (т. е. равенства $H_1 \otimes \ldots \otimes H_p = (H_1 \otimes \ldots \otimes H_{p-1}) \otimes H_p$) отсюда легко последовательно получить доказательство при $p = 3$, $p = 4$ и т. д.

Итак, пусть $p = 2$. Обозначим через $(l_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$ некоторый ортонормированный базис в $G_n$ ($n = 1, 2$) и пусть $g = \sum_{\beta \in N^2} g_{(\beta_1, \beta_2)} l_{\beta_1}^{(1)} \otimes l_{\beta_2}^{(2)} \in G_1 \otimes G_2$. В качестве $f$ пока возьмем вектор лишь с конечным числом отличных от нуля координат $f_\alpha = f_{(\alpha_1, \alpha_2)}$. Зафиксируем $\alpha_2$, $\beta_1 = 0, 1, \ldots$ и обозначим через $f(\alpha_2)$ вектор из $H_1$ с координатами $(f_{(\alpha_1, \alpha_2)})_{\alpha_1=0}^{\infty}$ по базису $(e_{\alpha_1}^{(1)})_{\alpha_1=0}^{\infty}$ и через $g(\beta_1)$ вектор из $G_2$ с координатами $(g_{(\beta_1, \beta_2)})_{\beta_2=0}^{\infty}$ по базису $(l_{\beta_2}^{(2)})_{\beta_2=0}^{\infty}$. Получим

$$\left| \left( \sum_{\alpha \in N^2} f_\alpha (A_1 e_{\alpha_1}^{(1)}) \otimes (A_2 e_{\alpha_2}^{(2)}),\ g \right)_{G_1 \otimes G_2} \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{\alpha_1, \alpha_2 = 0}^{\infty} \sum_{\beta_1, \beta_2 = 0}^{\infty} f_{(\alpha_1, \alpha_2)} \bar{g}_{(\beta_1, \beta_2)} (A_1 e_{\alpha_1}^{(1)}, l_{\beta_1}^{(1)})_{G_1} (A_2 e_{\alpha_2}^{(2)}, l_{\beta_2}^{(2)})_{G_2} \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{\alpha_1, \alpha_2 = 0}^{\infty} \sum_{\beta_1, \beta_2 = 0}^{\infty} (A_1 e_{\alpha_1}^{(1)}, l_{\beta_1}^{(1)})_{G_1} f_{(\alpha_1, \alpha_2)} \overline{(A_2^* l_{\beta_2}^{(2)}, e_{\alpha_2}^{(2)})_{H_2} g_{(\beta_1, \beta_2)}} \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{\alpha_2 = 0}^{\infty} \sum_{\beta_1 = 0}^{\infty} (A_1 f(\alpha_2), l_{\beta_1}^{(1)})_{G_1} \overline{(A_2^* g(\beta_1), e_{\alpha_2}^{(2)})_{H_2}} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha_2 = 0}^{\infty} \sum_{\beta_1 = 0}^{\infty} |(A_1 f(\alpha_2), l_{\beta_1}^{(1)})_{G_1}|^2 \sum_{\alpha_2 = 0}^{\infty} \sum_{\beta_1 = 0}^{\infty} |(A_2^* g(\beta_1), e_{\alpha_2}^{(2)})_{H_2}|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha_2 = 0}^{\infty} \| A_1 f(\alpha_2) \|_{G_1}^2 \sum_{\beta_1 = 0}^{\infty} \| A_2^* g(\beta_1) \|_{H_2}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| A_1 \|^2 \| A_2^* \|^2 \sum_{\alpha_2 = 0}^{\infty} \| f(\alpha_2) \|_{H_1}^2 \sum_{\beta_1 = 0}^{\infty} \| g(\beta_1) \|_{G_2}^2 =$$

$$= \| A_1 \|^2 \| A_2 \|^2 \sum_{\alpha_1, \alpha_2 = 0}^{\infty} | f_{(\alpha_1, \alpha_2)} |^2 \sum_{\beta_1, \beta_2 = 0}^{\infty} | g_{(\beta_1, \beta_2)} |^2.$$

Из этого неравенства очевидно следует слабая сходимость в $G_1 \otimes G_2$ ряда $\sum_{\alpha_1, \alpha_2 = 0}^{\infty} f_{(\alpha_1, \alpha_2)} (A_1 e_{\alpha_1}^{(1)}) \otimes (A_2 e_{\alpha_2}^{(2)})$ уже при произвольном $f \in H_1 \otimes H_2$ и оценка его нормы (в $G_1 \otimes G_2$) сверху через $\| A_1 \| \| A_2 \| \times \| f \|_{H_1 \otimes H_2}$. Таким образом, оператор $A_1 \otimes A_2 : H_1 \otimes H_2 \to G_1 \otimes G_2$ определен посредством (2.5) корректно, ограничен и его норма не превосходит $\| A_1 \| \| A_2 \|$.



С другой стороны, согласно (2.5) и (2.4) $\| (A_1 \otimes A_2)(f^{(1)} \otimes f^{(2)}) \|_{G_1 \otimes G_2} = \| (A_1 f^{(1)}) \otimes (A_2 f^{(2)}) \|_{G_1 \otimes G_2} = \| A_1 f^{(1)} \|_{G_1} \| A_2 f^{(2)} \|_{G_2}$ ($f^{(1)} \in H_1$, $f^{(2)} \in H_2$). Подбирая орты $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ должным образом, получаем, что последнее произведение мало отличается от $\| A_1 \| \| A_2 \|$. Поэтому неравенство $\| A_1 \otimes A_2 \| < \| A_1 \| \| A_2 \|$ невозможно, т. е. соотношение (2.6) при $p = 2$ доказано. ■

Подчеркнем, что из определения (2.5) легко следует равенство

$$\left( \bigotimes_{n=1}^{p} A_n \right) (f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)}) = (A_1 f^{(1)}) \otimes \cdots \otimes (A_p f^{(p)}) \tag{2.7}$$

$$(f^{(1)} \in H_1, \ \ldots, \ f^{(p)} \in H_p).$$

Этим равенством оператор $\bigotimes_{n=1}^{p} A_n$ однозначно определяется. Ясно, также, что отображение

$$\mathop{\times}_{n=1}^{p} (\mathscr{L}(H_n \to G_n)) \ni (A_1, \ \ldots, \ A_p) \mapsto \bigotimes_{n=1}^{p} A_n \in \mathscr{L}\left( \bigotimes_{n=1}^{p} H_n \mapsto \bigotimes_{n=1}^{p} G_n \right)$$

линейно относительно каждого переменного. Отметим, что при помощи (2.7) легко получаем для $A_n \in \mathscr{L}(H_n \to G_n)$ и $B_n \in \mathscr{L}(G_n \to F_n)$ ($n = 1, \ldots, p$) соотношения

$$\left( \bigotimes_{n=1}^{p} B_n \right) \left( \bigotimes_{n=1}^{p} A_n \right) = \bigotimes_{n=1}^{p} (B_n A_n), \quad \left( \bigotimes_{n=1}^{p} A_n \right)^* = \bigotimes_{n=1}^{p} A_n^*. \tag{2.8}$$

*Пусть каждый из операторов $A_n$, фигурирующих в теореме 2.1,— Гильберта — Шмидта. Тогда и $\bigotimes_{n=1}^{p} A_n$ — оператор Гильберта — Шмидта, причем*

$$\left| \bigotimes_{n=1}^{p} A_n \right| = \prod_{n=1}^{p} | A_n |. \tag{2.9}$$

Действительно, согласно (2.5) и (2.4)

$$\left| \bigotimes_{n=1}^{p} A_n \right|^2 = \sum_{\alpha \in N^p} \left\| \left( \bigotimes_{n=1}^{p} A_n \right) e_\alpha \right\|_{\bigotimes_{n=1}^{p} G_n}^2 =$$

$$= \sum_{\alpha \in N^p} \| (A_1 e_{\alpha_1}^{(1)}) \otimes \cdots \otimes (A_p e_{\alpha_p}^{(p)}) \|_{\bigotimes_{n=1}^{p} G_n}^2 = \sum_{\alpha \in N^p} \prod_{n=1}^{p} \| A_n e_{\alpha_n}^{(n)} \|_{G_n}^2 =$$

$$= \prod_{n=1}^{p} \left( \sum_{\alpha_n = 0}^{\infty} \| A_n e_{\alpha_n}^{(n)} \|_{G_n}^2 \right) = \prod_{n=1}^{p} | A_n |^2 < \infty. \ ■$$

В дальнейшем нам придется также рассматривать тензорное произведение $\overset{p}{\underset{n=1}{\otimes}} A_n$ неограниченных операторов $A_n : H_n \supseteq \mathfrak{D}(A_n) \to G_n$ $(n = 1, \ldots, p)$. Здесь мы только отметим, что формулой (2.5) оно определяется корректно на области определения $\mathfrak{D}\left(\overset{p}{\underset{n=1}{\otimes}} A_n\right) = \text{a.} \overset{p}{\underset{n=1}{\otimes}} (\mathfrak{D}(A_n))$.

### 3. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Перейдем к определению в простейшем случае бесконечного тензорного произведения гильбертовых пространств $(H_n)_{n=1}^{\infty}$, т. е. сепарабельного подпространства полного неймановского тензорного произведения.

Пусть $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность гильбертовых пространств, $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ $(e^{(n)} \in H_n)$ — фиксированная последовательность ортов из $H_n$. Рассмотрим в каждом $H_n$ ортонормированный базис $(e_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$ такой, что $e_0^{(n)} = e^{(n)}$, и образуем формальное произведение

$$e_\alpha = e_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)} = e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \cdots \qquad (\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}), \qquad (2.10)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots = 0, 1, \ldots$, причем $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \ldots = 0$ начиная с некоторого зависящего от $\alpha$ номера $n$. Обозначим через $\mathrm{A}$ счетное множество всех мультииндексов $\alpha$ описанного вида. Бесконечное тензорное произведение $\mathcal{H}_e = \overset{\infty}{\underset{n=1;e}{\otimes}} H_n$ гильбертовых пространств $H_n$ со стабилизирующей последовательностью $e$ определим как гильбертово пространство, натянутое на базис $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$, который по определению считается ортонормированным. Таким образом, векторы из $\mathcal{H}_e$ имеют вид

$$f = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha e_\alpha \qquad (f_\alpha \in \mathbb{C}^1), \qquad (2.11)$$

где

$$\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} |f_\alpha|^2 = \|f\|^2_{\mathcal{H}_e} < \infty, \quad (f, g)_{\mathcal{H}_e} = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha \bar{g}_\alpha. \qquad (2.12)$$

Разумеется, при изменении базисов $(e_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$ (таких, что $e_0^{(n)} = e^{(n)}$) получаем то же самое тензорное произведение.

В дальнейшем нам часто будет удобно представлять множество $\mathrm{A}$ в виде объединения непересекающихся множеств, каждое из которых состоит из «конечных» последовательностей. Именно для



$\alpha \in \mathrm{A}$ обозначим через $\nu(\alpha)$ минимальное $m = 1, 2, \ldots$ такое, что $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \ldots = 0$. Положим $\mathrm{A}_n = \{\alpha \in \mathrm{A} \mid \nu(\alpha) = n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \varnothing$ $(n \neq m)$ и $\mathrm{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$. Это и есть требуемое разбиение. В соответствии с ним часто суммирования в формулах типа (2.11), (2.12) будут представляться в виде

$$\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} c_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathrm{A}_n} c_\alpha = c_{(0,0,\ldots)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}=0}^{\infty} \sum_{\alpha_n=1}^{\infty} c_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)} \right\}.$$

С другой стороны, $\bigcup_{n=1}^{m} \mathrm{A}_n$ состоит из всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0, 0, \ldots)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 0, 1, \ldots$ Поэтому суммирование по $\mathrm{A}$ можно также записать в виде

$$\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} c_\alpha = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \sum_{\alpha \in \mathrm{A}_n} c_\alpha = \lim_{m \to \infty} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m=0}^{\infty} c_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0, 0, \ldots)}.$$

Построенное пространство $\mathcal{H}_e$ носит название сепарабельного подпространства полного неймановского тензорного произведения пространств $H_n$.

Рассмотрим произведение $\mathcal{H}_e = \overset{\infty}{\underset{n=1;e}{\otimes}} H_n$. Пусть $f^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(n)} e_j^{(n)} \in H_n$ $(n = 1, \ldots, p)$, подобно (2.3) положим по определению

$$f = f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots =$$
$$= \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p=0}^{\infty} f_{\alpha_1}^{(1)} \cdots f_{\alpha_p}^{(p)} e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_p}^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots \qquad (2.13)$$

Легко видеть, что коэффициенты $f_\alpha$ разложения (2.13) удовлетворяют условию (2.12), поэтому, как и в случае конечного тензорного произведения, $f \in \mathcal{H}_e$ и его норма подсчитывается по той же формуле (2.4).

Подобно случаю конечных тензорных произведений, будем также пользоваться следующими естественными обозначениями. Пусть $M_n$ — линейное множество из $H_n$, $g^{(n)} \in H_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Положим

$$\left(\text{a.} \overset{p}{\underset{n=1}{\otimes}} M_n\right) \otimes g^{(p+1)} \otimes \cdots \otimes g^{(q)} \otimes e^{(q+1)} \otimes e^{(q+2)} \otimes \cdots =$$
$$= \text{л. о.} \, \{f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)} \otimes g^{(p+1)} \otimes \cdots$$
$$\cdots \otimes g^{(q)} \otimes e^{(q+1)} \otimes e^{(q+2)} \otimes \cdots \mid f^{(1)} \in M_1, \ldots, f^{(p)} \in M_p\};$$

$$\text{а.}\ \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} M_n = \text{л. о.}\ \{f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots \mid f^{(1)} \in$$

$$\in M_1, \ldots, f^{(p)} \in M_p; \quad p = 1, 2, \ldots\}.$$

Если в этих формулах вместо л. о. брать з. л. о. в $\mathcal{H}_e$, то в результате получим подпространства $\mathcal{H}_e$. Обозначим их соответственно через $\left(\bigotimes_{n=1}^{p} M_n\right) \otimes g^{(p+1)} \otimes \ldots \otimes g^{(q)} \otimes e^{(q+1)} \otimes e^{(q+2)} \otimes \ldots$ и $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} M_n$. Отметим также, что сопоставляя векторы (2.3) и (2.13) друг другу и затем продолжая это соответствие по линейности и непрерывности, получаем естественный изоморфизм гильбертовых пространств $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n$ и $\left(\bigotimes_{n=1}^{p} H_n\right) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ Образ вектора $f_p \in \bigotimes_{n=1}^{p} H_n$ в $\left(\bigotimes_{n=1}^{p} H_n\right) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ обозначим $f_p \otimes e^{(p+1)} \otimes \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$

**Примеры**. 1. Пусть $H_n = L_2(R_n, d\mu_n(x_n))$, где $R_n$ — пространство с вероятностной мерой $\mu_n$, т. е. $\mu_n(R_n) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда при $e^{(n)}(x_n) = 1$ $(x_n \in R_n,\ n = 1, 2, \ldots)$ $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n = L_2\left(\bigtimes_{n=1}^{\infty} R_n, d(\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots)(x_1, x_2, \ldots)\right)$. Действительно, сопоставим вектору вида (2.10) $e_\alpha = e_{\alpha_1}^{(1)}(x_1) \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_p}^{(p)}(x_p) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots \in \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n$ цилиндрическую функцию $e_{\alpha_1}^{(1)}(x_1) \ldots e_{\alpha_p}^{(p)}(x_p)$. Учитывая пример § 2, п. 1, заключаем, что это соответствие порождает изоморфизм между $\left(\bigotimes_{n=1}^{p} H_n\right) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ и подпространством пространства $L_2\left(\bigtimes_{n=1}^{\infty} R_n, d(\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots)(x_1, x_2, \ldots)\right)$, состоящим из цилиндрических функций,— пространством $L_2\left(\bigtimes_{n=1}^{\infty} R_n, d(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p)(x_1, \ldots, x_p)\right)$. Учитывая плотность цилиндрических функций в $L_2\left(\bigtimes_{n=1}^{\infty} R_n, d(\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots)(x_1, x_2, \ldots)\right)$ и плотность $\left(\bigotimes_{n=1}^{p} H_n\right) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ в $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n$ (при изменяющемся $p = 1, 2, \ldots$), легко прийти к требуемому равенству.

2. Пусть $H_n = l_2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $l_2$ — пространство суммируемых с квадратом последовательностей $f = (f_j)_{j=0}^{\infty}$. Стабилизирующую последовательность выберем следующим образом: при каждом $n = 1, 2, \ldots$ $e^{(n)} = (1, 0, 0, \ldots)$. Тогда

$$\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n = \left\{ f = (f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \,\Big|\, \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} |f_\alpha|^2 < \infty \right\}.$$

Здесь A, как и прежде,— множество всех финитных мультииндексов.



### 4. ВЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Покажем, что если имеются два набора гильбертовых пространств, причем каждое пространство первого набора вложено в соответствующее пространство второго набора, то свойство вложения сохранится при тензорном перемножении пространств. Рассмотрим сперва простой случай их конечного числа.

Пусть $(H_n)_{n=1}^{p}$, $(G_n)_{n=1}^{p}$ — две последовательности гильбертовых пространств, причем $H_n \subseteq G_n$ и оператор вложения $O_n : H_n \to G_n$ непрерывен $(n = 1, \ldots, p)$. Тогда $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n \subseteq \bigotimes_{n=1}^{p} G_n$, причем соответствующий оператор вложения $O = \bigotimes_{n=1}^{p} O_n$. Это утверждение непосредственно следует из теоремы 2.1, если рассмотреть отображение

$$\bigotimes_{n=1}^{p} H_n \ni \sum_{\alpha \in N^p} f_\alpha e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_p}^{p} \mapsto \sum_{\alpha \in N^p} f_\alpha (O_1 e_{\alpha_1}^{(1)}) \otimes \cdots$$

$$\cdots \otimes (O_p e_{\alpha_p}^{(p)}) \in \bigotimes_{n=1}^{p} G_n.$$

Если каждое вложение $H_n \to G_n$ квазиядерно, т. е. $O_n$ — оператор Гильберта — Шмидта, то таким же будет и вложение $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n \to \bigotimes_{n=1}^{p} G_n$, что следует из (2.9).

Перейдем к соответствующим утверждениям для бесконечного числа гильбертовых пространств.

**Теорема 2.2.** *Пусть $(H_n)_{n=1}^{\infty}$, $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ — две последовательности гильбертовых пространств, причем $H_n \subseteq G_n$, оператор вложения $O_n : H_n \to G_n$ непрерывен $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\prod_{n=1}^{\infty} \|O_n\| = c < \infty$. Если последовательность векторов $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ $(e^{(n)} \in H_n)$ такова, что $\|e^{(n)}\|_{H_n} = \|e^{(n)}\|_{G_n} = 1$, то $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n \subseteq \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n$, причем это вложение непрерывно и его норма не превосходит $c$.*

Доказательство. Пусть $(e_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$ $(e_0^{(n)} = e^{(n)})$ — некоторый ортонормированный базис в $H_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Образуем по нему согласно (2.10) базисные векторы $e_\alpha$ и рассмотрим вектор $f \in \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n$; для него имеет место представление (2.11). По $f$ построим вектор $f_p = \sum_{\nu(\alpha) \leqslant p} f_\alpha e_\alpha$, он имеет вид $h_p \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$, где $h_p \in \bigotimes_{n=1}^{p} H_n$. Но согласно сказанному выше $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n \subseteq \bigotimes_{n=1}^{p} G_n$, поэтому $h_p \in \bigotimes_{n=1}^{p} G_n$ и, следовательно, $f_p \in \bigotimes_{n=1}^{p} G_n$ и имеет вид $\sum_{\nu(\alpha) \leqslant p} g_\alpha l_\alpha$, где $l_\alpha$ построены подобно $e_\alpha$ по пространствам $G_n$, а $g_\alpha \in \mathbb{C}^1$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Очевидно,

$$\|f_p\|^2_{\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n} = \sum_{\nu(\alpha) \leqslant p} |g_\alpha|^2 = \|h_p\|^2_{\bigotimes_{n=1}^{p} G_n}.$$

Благодаря тому что норма тензорного произведения конечного числа операторов равна произведению их норм (см. (2.6)) и вытекающему из соотношения $\|e^{(n)}\|_{H_n} = \|e^{(n)}\|_{G_n}$ неравенству $\|O_n\| \geqslant 1$, имеем

$$\|f_p\|_{\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n} = \|h_p\|^2_{\bigotimes_{n=1}^{p} G_n} \leqslant \left(\prod_{n=1}^{p} \|O_n\|^2\right) \|h_p\|^2_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_n} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{n=1}^{\infty} \|O_n\|\right)^2 \|f_p\|^2_{\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n}. \tag{2.14}$$

Осталось показать, что последовательность $(f_p)_{p=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n$. В этом сразу убедимся, если напишем неравенство вида (2.14) для $f_p - f_q$ и воспользуемся тем, что $\sum_{\alpha \in A} |f_\alpha|^2 < \infty$. Теорема доказана. ■

Можно показать, что норма оператора вложения равна $c$.

**Теорема 2.3.** *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2, причем дополнительно вложения $O_n$ квазиядерны (сходимость произведения $\prod_{n=1}^{\infty} \|O_n\|$ заранее не предполагается). Для того чтобы $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n$ было квазиядерно вложено в $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|O_n|^2 - 1) < \infty, \tag{2.15}$$

*т. е. сходимости бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty} |O_n|$. Число, к которому сходится это произведение, равно гильбертовой норме оператора вложения $O$: $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n \to \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n$.*



Поясним, что $|O_n| \geqslant \|O_n\| \geqslant 1$, поэтому ряд (2.15) состоит из неотрицательных слагаемых и из сходимости произведения $\prod_{n=1}^{\infty} |O_n|$ следует сходимость произведения $\prod_{n=1}^{\infty} \|O_n\|$.

Доказательство. Пусть $e_\alpha$ — векторы вида (2.10). Имеем

$$|O|^2 = \sum_{\alpha \in A} \|e_\alpha\|^2_{\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n} = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \sum_{\alpha \in A_n} \|e_\alpha\|^2_{\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n} =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 0}^{\infty} \|e_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0, 0, \ldots)}\|^2_{\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n} = \lim_{m \to \infty} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \|e_{\alpha_k}\|^2_{G_k}\right) =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \prod_{k=1}^{m} |O_k|^2 = \prod_{k=1}^{\infty} |O_k|^2$$

(мы воспользовались тем, что $\|e^{(m+1)}\|_{G_{m+1}} = \|e^{(m+2)}\|_{G_{m+2}} = \ldots$ $\ldots = 1$). Теорема следует из того, что сходимость последнего бесконечного произведения эквивалентна сходимости ряда (2.15). ■

Отметим, что для гильбертовой нормы оператора $O$ справедлива также формула

$$|O|^2 = \sum_{\alpha \in A} \|e_\alpha\|^2_{\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in A_n} \|e_\alpha\|^2_{\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n} = \|e_{(0,0,\ldots)}\|^2_{\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} = 0}^{\infty} \sum_{\alpha_n = 1}^{\infty} \|e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e^{(n)}_{\alpha_n} \otimes e^{(n+1)} \otimes\right.$$

$$\left.\otimes e^{(n+2)} \otimes \cdots \|^2_{\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n} \right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} = 0}^{\infty} \sum_{\alpha_n = 1}^{\infty} \left( \prod_{k=1}^{n} \|e^{(k)}_{\alpha_k}\|^2_{G_k} \right) \right\} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{k=1}^{n-1} |O_k|^2 \right) (|O_n|^2 - 1).$$

Равенство последней суммы бесконечному произведению легко доказать и непосредственно: переходя к частичным суммам, просто устанавливаем общее соотношение

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n-1} c_k\right)(c_n-1)=\prod_{k=1}^{\infty} c_k \qquad (c_k \geqslant 1).$$

Существенно подчеркнуть, что выполнения условия (2.15) и тем самым квазиядерности вложения $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n \to \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n$ всегда можно добиться путем должной перенормировки пространств $H_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), именно справедлива следующая простая общая лемма.

**Лемма 2.1.** *Пусть $H$, $G$ — два гильбертовых пространства такие, что $H \subseteq G$, причем вложение $O: H \to G$ квазиядерно и существует вектор $e \in H$, для которого $\|e\|_H = \|e\|_G = 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое скалярное произведение в $H$, эквивалентное исходному, что по-прежнему $\|e\|_H = 1$, а $|O|^2$ станет меньше $1+\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $(e_j)_{j=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $H$ такой, что $e_0 = e$. Тогда $|O|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\|e_j\|_G^2 = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\|e_j\|_G^2$. Введем новое скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{H^\#}$, полагая

$$(f, g)_{H^\#} = (f, e)_H\,\overline{(g, e)}_H + c\,(Pf, Pg)_H \quad (f, g \in H),$$

где $P$ является проектором на ортогональное дополнение в $H$ к $e$, а $c > 0$ — некоторая постоянная. Оно эквивалентно исходному скалярному произведению $(\cdot,\cdot)_H$, а векторы $(e_j^\#)_{j=0}^{\infty}$, где $e_0^\# = e_0$, $e_j^\# = c^{-1/2}e_j$ ($j = 1, 2, \ldots$), образуют в нем ортонормированный базис. Выбирая достаточно большое $c$, можем добиться выполнения неравенства $\sum_{j=1}^{\infty}\|e_j^\#\|_G^2 < \varepsilon$. Теперь $|O|^2 < 1+\varepsilon$. ■

## 5. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЦЕПОЧЕК

Рассмотрим $p = 2, 3, \ldots$ цепочек вида (1.5)

$$H_{-,n} \supseteq H_{0,n} \supseteq H_{+,n} \qquad (n = 1, \ldots, p). \tag{2.16}$$

Согласно сказанному в § 2, п. 4 имеем

$$\bigotimes_{n=1}^{p} H_{-,n} \supseteq \bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n} \supseteq \bigotimes_{n=1}^{p} H_{+,n}. \tag{2.17}$$

Нетрудно видеть, что $\bigotimes_{n=1}^{p} H_{-,n}$ *можно понимать как негативное*



*пространство относительно нулевого $\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}$ и позитивного $\bigotimes_{n=1}^{p} H_{+,n}$, т. е.* (2.17) *является цепочкой.* Действительно, обозначим через $G_-$ негативное пространство относительно нулевого $\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}$ и позитивного $\bigotimes_{n=1}^{p} H_{+,n}$ (то, что эти пространства можно взять в качестве нулевого и позитивного, следует из § 2, п. 1 и (2.6)). Пусть $O$ и $I$ — соответствующие операторы, связанные с цепочкой $G_- \supseteq \bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n} \supseteq \bigotimes_{n=1}^{p} H_{+,n}$ а $O_n$ и $I_n$ — такие же операторы, связанные с (2.16). Тогда $O = \bigotimes_{n=1}^{p} O_n$ и благодаря второй из формул (2.8) $I = O^* = \bigotimes_{n=1}^{p} O_n^* = \bigotimes_{n=1}^{p} I_n$. Но $G_-$ является пополнением $\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}$ относительно скалярного произведения $(f, g)_{G_-} = (If, g)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}}$, а $\bigotimes_{n=1}^{p} H_{-,n}$, очевидно, совпадает с пополнением этого же пространства относительно $(f, g) = \left(\left(\bigotimes_{n=1}^{p} I_n\right) f, g\right)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}}$. Так как $I = \bigotimes_{n=1}^{p} I_n$, то $G_- = \bigotimes_{n=1}^{p} H_{-,n}$. ■

Из приведенного доказательства следует, что для соответствующих операторов

$$I = \bigotimes_{n=1}^{p} I_n, \quad \mathbf{I} = \bigotimes_{n=1}^{p} \mathbf{I}_n, \quad J = \bigotimes_{n=1}^{p} J_n, \quad \mathbf{J} = \bigotimes_{n=1}^{p} \mathbf{J}_n. \tag{2.18}$$

Перейдем к утверждению для бесконечного числа цепочек.

**Лемма 2.2.** *Рассмотрим цепочку* (1.5). *Предположим, что существует вектор $e \in H_+$ такой, что $\|e\|_{H_+} = \|e\|_{H_0} = 1$. Тогда $Ie = e$ и $\|e\|_{H_-} = 1$.*

Доказательство. Обозначим через $P$ проектор в $H_+$ на ортогональное дополнение в этом пространстве к орту $e$. Для любого $u \in H_+$ имеем $\|u\|_{H_+}^2 = |(u, e)_{H_+}|^2 + \|Pu\|_{H_+}^2$. В частности,

$$\|Ie\|_{H_+}^2 = |(Ie, e)_{H_+}|^2 + \|PIe\|_{H_+}^2 = |(e, e)_{H_0}|^2 + \|PIe\|_{H_+}^2 = 1 + \|PIe\|_{H_+}^2.$$

С другой стороны, так как $\|I\| = 1$, то $\|Ie\|_{H_+}^2 \leqslant \|e\|_{H_0}^2 = 1$.

Поэтому $PIe = 0$, т. е. $Ie = (Ie, e)_{H_+} e = e$. Далее, $\| e \|^2_{H_-} = (Ie, e)_{H_0} = (e, e)_{H_0} = 1$. ■

Пусть задана бесконечная последовательность цепочек (2.16), где $n = 1, 2, \ldots$ Предположим, что существует последовательность $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ таких векторов $e^{(n)} \in H_{+,n}$, что $\| e^{(n)} \|_{H_{+,n}} = \| e^{(n)} \|_{H_{0,n}} = 1$. Согласно лемме 2.1 тогда и $\| e^{(n)} \|_{H_{-,n}} = 1$. Таким образом, последовательность $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ может быть взята в качестве стабилизирующей последовательности для трех бесконечных произведений — позитивных, нулевых и негативных пространств из (2.16). Справедлива следующая теорема, аналогичная утверждению § 1, п. 9.

**Теорема 2.4.** *Последовательность пространств*

$$\mathcal{H}_{-,e} = \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_{-,n} \supseteq \underset{\displaystyle \mathcal{H}_{0,e}}{\underset{\|}{\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_{0,n}}} \supseteq \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_{+,n} = \mathcal{H}_{+,e} \tag{2.19}$$

*является цепочкой.*

Доказательство. Согласно теореме 2.2 $\mathcal{H}_{-,e} \supseteq \mathcal{H}_{0,e} \supseteq \mathcal{H}_{+,e}$, причем $\mathcal{H}_{+,e}$ плотно в остальных двух пространствах и $\| u \|_{\mathcal{H}_{0,e}} \leqslant \| u \|_{\mathcal{H}_{+,e}}$ $(u \in \mathcal{H}_{+,e})$. Обозначим через $G_-$ негативное пространство относительно нулевого $\mathcal{H}_{0,e}$ и позитивного $\mathcal{H}_{+,e}$. Пусть $I$ — оператор, связанный с цепочкой $G_- \supseteq \mathcal{H}_{0,e} \supseteq \mathcal{H}_{+,e}$. Достаточно доказать, что $(f, g)_{G_-} = (If, Ig)_{\mathcal{H}_{+,e}}$ равно $(f, g)_{\mathcal{H}_{-,e}}$ для $f, g \in \mathcal{H}_{0,e}$ или даже для $f, g$ вида (2.13).

Пусть $(l_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис в пространстве $H_{+,n}$ такой, что $l_0^{(n)} = e^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Построим соответствующие векторы $l_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$. Для $u \in \mathcal{H}_{+,e}$ имеем $u_\alpha = (u, l_\alpha)_{\mathcal{H}_{+,e}}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$. В частности,

$$(If)_\alpha = (If, l_\alpha)_{\mathcal{H}_{+,e}} = (f, l_\alpha)_{\mathcal{H}_{0,e}} \qquad (f \in \mathcal{H}_{0,e};\ \alpha \in \mathrm{A}). \tag{2.20}$$

Положим в (2.20) $f = f^{(1)} \otimes \ldots \otimes f^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ $(p = 1, 2, \ldots)$, где $f^{(k)} \in H_{0,k}$. Обозначим $\nu(\alpha) = n$, тогда при $n \leqslant p$

$$\begin{aligned}(If)_\alpha &= \prod_{j=1}^{n} (f^{(j)}, l_{\alpha_j}^{(j)})_{H_{0,j}} \prod_{j=n+1}^{p} (f^{(j)}, e^{(j)})_{H_{0,j}} = \\ &= \prod_{j=1}^{n} (f^{(j)}, \mathbf{I}_j^{-1} l_{\alpha_j}^{(j)})_{H_{-,j}} \prod_{j=n+1}^{p} (f^{(j)}, \mathbf{I}_j^{-1} e^{(j)})_{H_{-,j}} = \\ &= \prod_{j=1}^{n} (f^{(j)}, \mathbf{I}_j^{-1} l_{\alpha_j}^{(j)})_{H_{-,j}} \prod_{j=n+1}^{p} (f^{(j)}, e^{(j)})_{H_{-,j}}.\end{aligned} \tag{2.21}$$



Здесь $\mathbf{I}_j$ обозначает изометрию $\mathbf{I}$, связанную с цепочкой (2.16). В (2.21) мы воспользовались равенством

$$\mathbf{I}_k^{-1} l_0^{(k)} = \mathbf{I}_k^{-1} e^{(k)} = e^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.22}$$

вытекающим из соотношения $Ie^{(k)} = e^{(k)}$ для соответствующих операторов $I_k$; это соотношение следует из леммы 2.2.

При $n > p$ в выражение для $(If)_\alpha$ будет входить сомножитель $(e^{(n)}, l_{\alpha_n}^{(n)})_{H_{0,n}} = (e^{(n)}, \mathbf{I}_n^{-1} l_{\alpha_n}^{(n)})_{H_{-,n}}$, где $\alpha_n = 1, 2, \ldots$ Но $\mathbf{I}_n$ осуществляет изометрию между $H_{-,n}$ и $H_{+,n}$, поэтому $(\mathbf{I}_n^{-1} l_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $H_{-,n}$ и в силу (2.22) этот сомножитель равен нулю. Таким образом, $(If)_\alpha = 0$ при $\nu(\alpha) > p$.

Пусть $g = g^{(1)} \otimes \ldots \otimes g^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ $(p = 1, 2, \ldots)$, $g^{(k)} \in H_{0,k}$. Учитывая сказанное и формулу (2.21), найдем

$$\begin{aligned}(If, Ig)_{\mathcal{H}_{+,e}} &= \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} (If)_\alpha \overline{(Ig)_\alpha} = \sum_{n=1}^{p} \sum_{\alpha \in \mathrm{A}_n} (If)_\alpha \overline{(Ig)_\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} (f^{(1)}, \mathbf{I}_1^{-1} l_{\alpha_1}^{(1)})_{H_{-,1}} \overline{(g^{(1)}, \mathbf{I}_1^{-1} l_{\alpha_1}^{(1)})_{H_{-,1}}} \prod_{j=2}^{p} (f^{(j)}, e^{(j)})_{H_{-,j}} \overline{(g^{(j)}, e^{(j)})_{H_{-,j}}} + \\ &+ \sum_{n=2}^{p} \Bigg( \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}=0}^{\infty} \sum_{\alpha_n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} (f^{(j)}, \mathbf{I}_j^{-1} l_{\alpha_j}^{(j)})_{H_{-,j}} \overline{(g^{(j)}, \mathbf{I}_1^{-1} l_{\alpha_j}^{(j)})_{H_{-,j}}} \times \\ &\times \prod_{j=n+1}^{p} (f^{(j)}, e^{(j)})_{H_{-,j}} \overline{(g^{(j)}, e^{(j)})_{H_{-,j}}} \Bigg) = (f^{(1)}, g^{(1)})_{H_{-,1}} f_0^{(2)} \ldots f_0^{(p)} \overline{g_0^{(2)}} \ldots \overline{g_0^{(p)}} + \\ &+ \sum_{n=2}^{k} (f^{(1)}, g^{(1)})_{H_{-,1}} \ldots (f^{(n-1)}, g^{(n-1)})_{H_{-,n-1}} [(f^{(n)}, g^{(n)})_{H_{-,n}} - \\ &- f_0^{(n)} \overline{g_0^{(n)}}] f_0^{(n+1)} \ldots f_0^{(p)} \overline{g_0^{(n+1)}} \ldots \overline{g_0^{(p)}} = (f, g)_{\mathcal{H}_{-,e}}\end{aligned}$$

(здесь мы обозначили $f_0^{(k)} = (f^{(k)}, e^{(k)})_{H_{-,k}}$, $g_0^{(k)} = (g^{(k)}, e^{(k)})_{H_{-,k}}$). ■

## 6. ВЗВЕШЕННОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность гильбертовых пространств, $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ $(e^{(n)} \in H_n)$ и $\delta = (\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ $(\delta_n > 0)$ — фиксированные последовательности ортов и чисел, $(e_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $H_n$ такой, что $e_0^{(n)} = e^{(n)}$. Образуем векторы $e_\alpha$ вида (2.10) и определим взвешенное бесконечное тензорное произведение $\mathcal{H}_{e,\delta} = \bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_n$ гильбертовых пространств $H_n$ со стабилизирующей последовательностью $e$ и весом $\delta$ как гильбертово пространство, натянутое на базис $(\delta_{\nu(\alpha)}^{-1/2}e_\alpha)_{\alpha\in A}$, который по определению считается ортонормированным (здесь $\nu(\alpha)$ и A те же, что и в п. 3). Следовательно, векторы из $\mathcal{H}_{e,\delta}$ имеют вид

$$f = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha e_\alpha \qquad (f_\alpha \in \mathbb{C}^1), \tag{2.23}$$

$$\sum_{\alpha\in A} |f_\alpha|^2 \delta_{\nu(\alpha)} = \|f\|^2_{\mathcal{H}_{e,\delta}} < \infty, \quad (f, g)_{\mathcal{H}_{e,\delta}} = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha \bar{g}_\alpha \delta_{\nu(\alpha)}.$$

Вводя $A_n$ так же, как и в п. 3, получаем

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha\in A_n} f_\alpha e_\alpha, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \left(\sum_{\alpha\in A_n} |f_\alpha|^2\right) = \|f\|^2_{\mathcal{H}_{e,\delta}} < \infty,$$
$$(f, g)_{\mathcal{H}_{e,\delta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \left(\sum_{\alpha\in A_n} f_\alpha \bar{g}_\alpha\right). \tag{2.24}$$

Если $\delta = 1$, т. е. $\delta_n = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $\mathcal{H}_{e,1} = \mathcal{H}_e = \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n = \bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} H_n$.

Как и в случае $\delta = 1$, можно определить векторы $f = f^{(1)} \otimes \ldots \otimes f^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ формулой (2.13); легко видеть, что они принадлежат $\mathcal{H}_{e,\delta}$ при любом весе $\delta$.

Отметим, что конструкция взвешенного тензорного произведения может быть несколько расширена в следующем естественном направлении. Пусть $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность гильбертовых пространств; $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ $(e^{(n)} \in H_n)$ — стабилизирующая последовательность и $d = (d_\alpha)_{\alpha\in A}$ — некоторая последовательность положительных чисел. Построим обычным образом векторы $e_\alpha$ вида (2.10) по базисам в пространствах $H_n$. Взвешенное бесконечное тензорное произведение $\mathcal{H}_{e,d} = \bigotimes_{n=1;e,d}^{\infty} H_n$ гильбертовых пространств $H_n$ со стабилизирующей последовательностью $e$ и весом $d$ определим как гильбертово пространство, натянутое на базис $(d_\alpha^{-1/2}e_\alpha)_{\alpha\in A}$, который по определению считается ортонормированным.

Покажем теперь, что перенормировку пространств $H_n$ (см. лемму 2.1) можно свести к должным образом выбранному взвешиванию тензорного произведения.

Итак, пусть в каждом $H_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ введено новое скалярное произведение

$$(f^{(n)}, g^{(n)})_{H_n^\#} = (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} \overline{(g^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}} + c_n (P_n f^{(n)}, P_n g^{(n)})_{H_n}$$
$$(f^{(n)}, g^{(n)} \in H_n).$$



Здесь $e^{(n)} \in H_n$ — вектор из стабилизирующей последовательности, $P_n$ — проектор на ортогональное дополнение к $e^{(n)}$ в $H_n$, $c_n > 0$ — произвольная постоянная. Тензорное произведение перенормированных пространств обозначим $\mathcal{H}_e^\#$. Ортонормированный базис в $\mathcal{H}_e^\#$ образуют векторы

$$e_\alpha^\# = e_{\alpha_1}^{\#(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_p}^{\#(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots,$$

где $(e_j^{\#(n)})_{j=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $H_n$ в новом скалярном произведении. Имеем $\|e_\alpha^\#\|_{\mathcal{H}_e} = \prod_{j=1}^{p} c_j^{-1/2}$, т. е. $\|e_\alpha^\# \prod_{j=1}^{p} c_j^{1/2}\|_{\mathcal{H}_e} = 1$, поэтому $\mathcal{H}_e^\# = \mathcal{H}_{e,\delta}$, где $\delta = (\delta_n)_{n=1}^{\infty}$, $\delta_n = (c_1 \ldots c_n)^{-1}$.

Очевидно и обратное: если уже построено некоторое взвешенное бесконечное тензорное произведение $\mathcal{H}_{e,\delta}$ с весом $\delta = ((\delta_n)_{n=1}^{\infty}$, то его можно понимать как тензорное произведение перенормированных пространств без взвешивания, где константы перенормировки выбираются следующим образом: $c_1 = \frac{1}{\delta_1}$, $c_n = \frac{\delta_{n-1}}{\delta_n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. (Однако если в качестве весовой последовательности фигурирует последовательность $d = (d_\alpha)_{\alpha\in A}$, то $\mathcal{H}_{e,d}$, вообще говоря, уже нельзя понимать как тензорное произведение перенормированных посредством леммы 2.1 пространств без взвешивания.)

Остановимся на вложении взвешенных тензорных произведений. Слегка видоизменяя выкладки, приведенные после доказательства теоремы 2.3, получаем следующее утверждение. *Пусть $(H_n)_{n=1}^{\infty}$, $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ — две последовательности гильбертовых пространств, причем $H_n \subseteq G_n$, операторы вложения $O_n : H_n \to G_n$ квазиядерные $(n = 1, 2, \ldots)$, $\delta = (\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ — некоторый вес. Для того чтобы $\bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_n$ было квазиядерно вложено в $\bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} G_n$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n} \left(\prod_{k=1}^{n-1} |O_k|^2\right)(|O_n|^2 - 1) < \infty \tag{2.25}$$

(левая часть этого неравенства равна квадрату гильбертовской нормы оператора вложения $O$: $\bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_n \to \bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} G_n$).

Действительно, пусть $e_\alpha$ — векторы вида (2.10). Имеем

$$|O|^2 = \sum_{\alpha\in A} \|\delta_{\nu(\alpha)}^{-1/2} e_\alpha\|^2_{\bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} G_n} = \|e^{(1)} \otimes e^{(2)} \otimes \cdots\|^2_{\bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} G_n} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta_n}\left\{\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}=0}^{\infty}\ \sum_{\alpha_n=1}^{\infty}\| e_{\alpha_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\alpha_n}^{(n)}\otimes e^{(n+1)}\otimes\right.$$

$$\left.\otimes e^{(n+2)}\otimes\cdots\|_{\underset{n=1;e,1}{\overset{\infty}{\otimes}} G_n}\right\}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta_n}\left\{\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}=0}^{\infty}\ \sum_{\alpha_n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\|e_{\alpha_k}^{(k)}\|_{G_k}^2\right\}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta_n}\left(\prod_{k=1}^{n-1}|O_k|^2\right)(|O_n|^2-1),$$

откуда и следует утверждение. ■

В случае $\delta=1$ мы получим условие, которое эквивалентно условию (2.15).

Замечание. Из условия (2.25) сразу следует, что квазиядерность вложения $\underset{n=1;e,\delta}{\overset{\infty}{\otimes}} H_n\to\underset{n=1;e,1}{\overset{\infty}{\otimes}} G_n$ всегда можно добиться выбором веса $\delta$ (при условии, что все вложения $H_n\to G_n$ квазиядерны). Более того, если вложения $H_n\to G_n$ $(n=1,2,\ldots)$ квазиядерны и $\eta$ — некоторый вес, то всегда можно подыскать такой вес $\delta$, чтобы вложение $\underset{n=1;e,\delta}{\overset{\infty}{\otimes}} H_n\to\underset{n=1;e,\eta}{\overset{\infty}{\otimes}} G_n$ было квазиядерным. Для доказательства можно интерпретировать $\underset{n=1;e,\eta}{\overset{\infty}{\otimes}} G_n$ как невзвешенное тензорное произведение $\underset{n=1;e,1}{\overset{\infty}{\otimes}} G_n^{\#}$, где $G_n^{\#}$ — пространства $G_n$, перенормированные должным образом, а затем применить уже установленное утверждение.

Пусть теперь задана бесконечная последовательность цепочек (2.16), где $n=1,2,\ldots$, причем существует общая стабилизирующая последовательность $e=(e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ $(e^{(n)}\in H_{+,n})$, $\|e^{(n)}\|_{H_{+,n}}=\|e^{(n)}\|_{H_{0,n}}=1$. По лемме 2.2 тогда и $\|e^{(n)}\|_{H_{-,n}}=1$. Таким образом, последовательность $e=(e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ может быть взята в качестве стабилизирующей последовательности для трех бесконечных произведений — позитивных, нулевых и негативных пространств из (2.16). Справедлив следующий результат, обобщающий на взвешенные тензорные произведения теорему 2.4.

**Теорема 2.5.** *Пусть* $\delta=(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ $(\delta_n\geqslant 1)$ — *некоторый вес, тогда*

$$\mathcal{H}_{-,e,\delta^{-1}}=\underset{n=1;e,\delta^{-1}}{\overset{\infty}{\otimes}} H_{-,n}\supseteq\underset{n=1;e,1}{\overset{\infty}{\otimes}} H_{0,n}\supseteq\underset{n=1;e,\delta}{\overset{\infty}{\otimes}} H_{+,n}=\mathcal{H}_{+,e,\delta}\quad(2.26)$$

$$\underset{n=1;e,1}{\overset{\infty}{\otimes}} H_{0,n}=\mathcal{H}_{0,e,1}$$

$$(\delta^{-1}=(\delta_n^{-1}))$$

*является цепочкой.*



**Лемма 2.3.** *Теорема 2.2 сохраняется, если тензорное произведение* $\underset{n=1;e}{\overset{\infty}{\otimes}} H_n$ *заменить на взвешенное тензорное произведение* $\underset{n=1;e,\delta}{\overset{\infty}{\otimes}} H_n$, *где* $\delta=(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ $(\delta_n\geqslant 1)$.

Доказательство. Оно точно такое, как и доказательство теоремы 2.2, нужно только оценку (2.14) переписать следующим образом, вставив множители $\delta_n\geqslant 1$:

$$\|f_p\|^2_{\underset{n=1;e}{\overset{\infty}{\otimes}} G_n}\leqslant\left(\prod_{n=1}^{p}\|O_n\|\right)^2\|h_p\|^2_{\underset{n=1}{\overset{\infty}{\otimes}} H_n}=\left(\prod_{n=1}^{p}\|O_n\|\right)^2\sum_{\nu(\alpha)\leqslant p}|f_\alpha|^2\leqslant$$

$$\leqslant\left(\prod_{n=1}^{p}\|O_n\|\right)^2\sum_{\nu(\alpha)\leqslant p}|f_\alpha|^2\delta_{\nu(\alpha)}\leqslant\left(\prod_{n=1}^{\infty}\|O_n\|\right)^2\|f_p\|^2_{\underset{n=1;e,\delta}{\overset{\infty}{\otimes}} H_n}.\ ■$$

Доказательство теоремы 2.5 аналогично доказательству теоремы 2.4, при этом вначале пользуемся не теоремой 2.2, а приведенным результатом (пространство $\underset{n=1;e}{\overset{\infty}{\otimes}} H_{+,n}$ заменяется на $\underset{n=1;e,\delta}{\overset{\infty}{\otimes}} H_{+,n}$). В нашем случае $u\in\mathcal{H}_{+,e,\delta}$, поэтому $u_\alpha=\delta_{\nu(\alpha)}^{-1}(u,l_\alpha)_{\mathcal{H}_{+,e,\delta}}$, следовательно, вместо (2.20) получаем формулу

$$(If)_\alpha=\delta_{\nu(\alpha)}^{-1}(If,l_\alpha)_{\mathcal{H}_{+,e,\delta}}=\delta_{\nu(\alpha)}^{-1}(f,l_\alpha)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}\qquad(f\in\mathcal{H}_{0,e,1};\ \alpha\in\mathrm{A}).$$

Производя с ее помощью подсчет (2.21), получаем прежний ответ, умноженный на $\delta_n^{-1}$. Отсюда следует, что $(If,Ig)_{\mathcal{H}_{+,e,\delta}}=(f,g)_{\mathcal{H}_{-,e,\delta^{-1}}}$. ■

## 7. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ОПЕРАТОРОВ

Подобно изложенному в п. 2 построению тензорного произведения конечного числа операторов, можно развить теорию их бесконечных тензорных произведений. Однако в общем случае мы этого делать не будем, а ограничимся лишь некоторыми необходимыми в дальнейшем частными конструкциями.

Пусть $(H_n)_{n=1}^{\infty}$, $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ — две последовательности гильбертовых пространств, $e=(e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ $(e^{(n)}\in H_n$, $\|e^{(n)}\|_{H_n}=1)$, $l=(l^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ $(l^{(n)}\in G_n$, $\|l^{(n)}\|_{G_n}=1)$, $\delta=(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ $(\delta_n>0)$, $\eta=(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ $(\eta_n>0)$ — последовательности ортов и весов; мы можем образовать взвешенные тензорные произведения $\underset{n=1;e,\delta}{\overset{\infty}{\otimes}} H_n$ и $\underset{n=1;l,\eta}{\overset{\infty}{\otimes}} G_n$. Далее, пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность непрерывных операторов $A_n: H_n \to G_n$. Будем считать, что $A_n e^{(n)} = l^{(n)}$ при достаточно больших $n$, т. е. операторы $A_n$ переводят стабилизирующую последовательность $e$ (за исключением, возможно, конечного числа ее членов) в стабилизирующую последовательность $l$.

В этом случае определим произведение $A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots = \bigotimes_{n=1}^{\infty} A_n$ как оператор, переводящий каждый вектор $f = f^{(1)} \otimes \ldots \otimes f^{(p)} \otimes \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ в вектор $\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} A_n\right) f = (A_1 f^{(1)}) \otimes \ldots \otimes (A_p f^{(p)}) \otimes \otimes (A_{p+1} e^{(p+1)}) \otimes (A_{p+2} e^{(p+2)}) \otimes \ldots \quad (f^{(n)} \in H_n, \quad p = 1, \quad 2, \quad \ldots)$. Последний вектор имеет вид $g^{(1)} \otimes \ldots \otimes g^{(q)} \otimes l^{(q+1)} \otimes l^{(q+2)} \otimes \ldots$ и поэтому входит в $\bigotimes_{n=1;\, l,\eta}^{\infty} G_n$. По линейности это отображение распространяется в отображение а. $\bigotimes_{n=1;\, e}^{\infty} H_n \to$ а. $\bigotimes_{n=1;\, l}^{\infty} G_n$. Будем говорить, что произведение $\bigotimes_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится, если операторы $A_n$ таковы, что полученное отображение можно по непрерывности продолжить до непрерывного оператора из $\bigotimes_{n=1;\, e,\delta}^{\infty} H_n$ в $\bigotimes_{n=1;\, l,\eta}^{\infty} G_n$. Разумеется, формально можно написать соотношение типа (2.5)

$$\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} A_n\right)\left(\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes \cdots\right) = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha \,(A_1 e^{(1)}_{\alpha_1}) \otimes (A_2 e^{(2)}_{\alpha_2}) \otimes \cdots$$

Условия существования $\bigotimes_{n=1}^{\infty} A_n$ мы выяснять не будем. Отметим лишь, что при условиях теоремы 2.2 и леммы 2.3 оператор вложения фигурирующих там пространств $O: \bigotimes_{n=1;\, e,\delta}^{\infty} H_n \to \bigotimes_{n=1;\, e,\eta}^{\infty} G_n$ очевидно представим в виде бесконечного тензорного произведения операторов вложения, т. е. $O = \bigotimes_{n=1}^{\infty} O_n$, причем это произведение сходится. Это будет справедливо и при выполнении условий (2.15) или (2.25), при этом вложение будет квазиядерным.

В дальнейшем нам понадобится более сложная конструкция произведения $\bigotimes_{n=1}^{\infty} A_n$ для операторов $A_n$, не переводящих в точностью до конечного числа членов $e$ в $l$. Приведем один частный результат в этом направлении.

Рассмотрим последовательность цепочек (2.16), где $n = 1, 2, \ldots$, и их произведение — цепочку (2.26). Предположим, что вложения



$O_n: H_{+,n} \to H_{0,n}$ квазиядерны, а вес $\delta = (\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ таков, что

$$\delta_n \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n}\left(\prod_{k=1}^{n} |O_k|^2\right) < \infty. \tag{2.27}$$

Условие (2.27) влечет выполнение условия (2.25) и поэтому для оператора вложения $O: \mathcal{H}_{+,e,\delta} \to \mathcal{H}_{0,e,1}$ справедливо представление $O = \bigotimes_{n=1}^{\infty} O_n$. Беря сопряженные в смысле нулевых пространств от этих операторов вложения (см. § 1, п. 5), легко найдем, что $O_n^+$ и $O^+$ будут операторами вложения соответственно $H_{0,n}$ в $H_{-,n}$ и $\mathcal{H}_{0,e,1}$ в $\mathcal{H}_{-,e,\delta^{-1}}$. Следовательно, $\mathbf{O}_n = O_n^+ O_n$ и $\mathbf{O} = O^+ O$ будут операторами вложения $H_{+,n}$ в $H_{-,n}$ и $\mathcal{H}_{+,e,\delta}$ в $\mathcal{H}_{-,e,\delta^{-1}}$ соответственно.

Из сходимости произведения $O = \bigotimes_{n=1}^{\infty} O_n$ легко следует сходимость произведений $O^+ = \bigotimes_{n=1}^{\infty} O_n^+ : \mathcal{H}_{0,e,1} \to \mathcal{H}_{-,e,\delta^{-1}}$ и $\mathbf{O} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathbf{O}_n : \mathcal{H}_{+,e,\delta} \to \mathcal{H}_{-,e,\delta^{-1}}$, а следовательно, и произведения $A_1 \otimes \ldots \otimes A_p \otimes \mathbf{O}_{p+1} \otimes \mathbf{O}_{p+2} \otimes \ldots : H_{+,e,\delta} \to \mathcal{H}_{-,e,\delta^{-1}}$, где $p$ фиксировано, а операторы $A_n \in \mathcal{L}(H_{+,n} \to H_{-,n})$.

**Теорема 2.6.** *Пусть вложения* $O_n: H_{+,n} \to H_{0,n}$ *квазиядерны и выполнены условия* (2.27). *Рассмотрим произвольную последовательность неотрицательных операторов* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, $A_n: H_{+,n} \to H_{-,n}$, *таких, что* Сл. $(A_n) \leqslant 1$. *Тогда существует слабый предел при* $p \to \infty$ *операторов*

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_p \otimes \mathbf{O}_{p+1} \otimes \mathbf{O}_{p+2} \otimes \cdots : \mathcal{H}_{+,e,\delta} \to \mathcal{H}_{-,e,\delta^{-1}}, \tag{2.28}$$

*являющийся неотрицательным оператором с конечным следом, не превосходящим суммы из* (2.27). *Этот оператор мы обозначаем* $\bigotimes_{n=1}^{\infty} A_n$.

Доказательство. Обозначим через $A^{(p)}$ оператор (2.28) и докажем, что существует $\lim_{p\to\infty} (A^{(p)} e_\alpha, e_\beta)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{A})$, где $e_\alpha$ построены по ортонормированным базисам $(e_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$ $(e_0^{(n)} = e^{(n)})$ в пространствах $H_{+,n}$. Пусть $m = \max\{\nu(\alpha), \nu(\beta)\}$, тогда для $p > m$

$$(A^{(p)} e_\alpha, e_\beta)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} = \left(\prod_{n=1}^{m} (A_n e^{(n)}_{\alpha_n}, e^{(n)}_{\beta_n})_{H_{0,n}}\right)\left(\prod_{n=m+1}^{p} (A_n e^{(n)}, e^{(n)})_{H_{0,n}}\right) \tag{2.29}$$

(мы использовали здесь равенство $(\mathbf{O}_n e^{(n)}, e^{(n)})_{H_{0,n}} = \| e^{(n)} \|^2_{H_{0,n}} = 1$). Так как $0 \leqslant (A_n e^{(n)}, e^{(n)})_{H_{0,n}} \leqslant 1$, то второе произведение в

(2.29) имеет предел при $p \to \infty$, который, возможно, равен нулю. Это доказывает существование $\lim\limits_{p\to\infty} (A^{(p)}e_\alpha, e_\beta)_{\mathscr{H}_{0,e,1}}$.

Отсюда следует, что существует $\lim\limits_{p\to\infty} (A^{(p)} u, v)_{\mathscr{H}_{0,e,1}}$ для $u$, $v$ из плотного в $\mathscr{H}_{+,e,\delta}$ множества. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $A^{(p)} \geqslant 0$ и Сл. $(A^{(p)}) \leqslant c$ $(p = 1, 2, \ldots)$, где $c$ обозначает сумму из (2.27) (напомним, что справедливо неравенство $\| A^{(p)} \| \leqslant | A^{(p)} | \leqslant$ Сл. $(A^{(p)})$, см. § 1, п. 5).

Благодаря непрерывности $A^{(p)}$ его неотрицательность достаточно проверить на векторах $u = u_q \otimes e^{(q+1)} \otimes e^{(q+2)} \otimes \ldots \in \mathscr{H}_{+,e,\delta}$, где $u_q \in \bigotimes\limits_{n=1}^{q} H_{+,n}$ $(q = 1, 2, \ldots)$. Обозначим в (2.28) $\mathbf{O}_{p+1}, \mathbf{O}_{p+2}, \ldots$ через $A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots$, тогда

$$(A^{(p)}u, u)_{\mathscr{H}_{0,e,1}} = \left(\left(\bigotimes_{n=1}^{q} A_n\right) u_q, u_q\right)_{\bigotimes\limits_{n=1}^{q} H_{0,n}} \left(\prod_{n=q+1}^{\infty} (A_n e^{(n)}, e^{(n)})_{H_{0,n}}\right) \geqslant 0.$$

Здесь мы воспользовались неотрицательностью операторов $\mathbf{O}_n$: $H_{+,n} \to H_{-,n}$ и тем обстоятельством, что если $A_n : H_{+,n} \to H_{-,n}$ неотрицательны $(n = 1, \ldots, q)$, то $\bigotimes\limits_{n=1}^{q} A_n : \bigotimes\limits_{n=1}^{q} H_{+,n} \to \bigotimes\limits_{n=1}^{q} H_{-,n}$ также неотрицательно.

Установим оценку Сл. $(A^{(p)}) \leqslant c$. Используя введенные обозначения, получаем

$$\begin{aligned}
\text{Сл.}\,(A^{(p)}) &= \sum_{\alpha\in A} (A^{(p)} (\delta_{\nu(\alpha)}^{-1/2} e_\alpha), \delta_{\nu(\alpha)}^{-1/2} e_\alpha)_{\mathscr{H}_{0,e,1}} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{-1} \left(\sum_{\alpha\in A_n} (A^{(p)}e_\alpha, e_\alpha)_{\mathscr{H}_{0,e,1}}\right) = \\
&= \delta_1^{-1} \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} (A_1 e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_1}^{(1)})_{H_{0,1}} \left(\prod_{k=2}^{\infty} (A_k e^{(k)}, e^{(k)})_{H_{0,k}}\right) + \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \delta_n^{-1} \left[\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}=0}^{\infty} \sum_{\alpha_n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} (A_k e_{\alpha_k}^{(k)}, e_{\alpha_k}^{(k)})_{H_{0,k}}\right) \times \right. \\
&\times \left.\left(\prod_{k=n+1}^{\infty} (A_k e^{(k)}, e^{(k)})_{H_{0,k}}\right)\right] = \delta_1^{-1}\,\text{Сл.}\,(A_1) \left(\prod_{k=2}^{\infty} (A_k e^{(k)}, e^{(k)})_{H_{0,k}}\right) + \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \delta_n^{-1} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \text{Сл.}\,(A_k)\right) (\text{Сл.}\,(A_n) - (A_n e^{(n)}, e^{(n)})_{H_{0,n}}) \times \\
&\times \left(\prod_{k=n+1}^{\infty} (A_k e^{(k)}, e^{(k)})_{H_{0,k}}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{-1} \left(\prod_{k=1}^{n} \text{Сл.}\,(A_k)\right) \left(\prod_{k=n+1}^{\infty} (A_k e^{(k)}, e^{(k)})_{H_{0,k}}\right).
\end{aligned} \tag{2.30}$$



Выше мы воспользовались неотрицательностью $A_k$ и соотношением $(A_k e^{(k)}, e^{(k)})_{H_{0,k}} \leqslant$ Сл. $(A_k) \leqslant 1$ при $k \leqslant p$ и $(A_k e^{(k)}, e^{(k)})_{H_{0,k}} = (\mathbf{O}_k e^{(k)}, e^{(k)})_{H_{0,k}} = 1$ при $k > p$. Далее, при $k \leqslant p$ Сл.$(A_k) \leqslant 1 \leqslant | O_k |^2$, а при $k > p$

$$\text{Сл.}\,(A_k) = \text{Сл.}\,(\mathbf{O}_k) = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{O}_k e_j^{(k)}, e_j^{(k)})_{H_{0,k}} = \sum_{j=0}^{\infty} \| O_k e_j^{(k)} \|^2_{H_{0,k}} = | O_k |^2.$$

Поэтому оценку (2.30) можно продолжить и получить Сл. $(A^{(p)}) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n^{-1} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} | O_k |^2\right) = c$. ■

З а м е ч а н и е. Условие (2.27) можно ослабить, более аккуратно проведя оценку (2.30). Отметим лишь, что в случае $\delta = 1$ его можно заменить неравенством (2.15), при этом Сл. $\left(\bigotimes\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \prod\limits_{k=1}^{\infty} | O_k |^2$. Для доказательства нужно заметить, что подсчет (2.30) сейчас дает

$$\text{Сл.}\,(A^{(p)}) = \left(\prod_{k=1}^{p} \text{Сл.}\,(A_k)\right) \left(\prod_{k=p+1}^{\infty} | O_k |^2\right),$$

откуда и следует утверждаемое.

### 8. ТЕОРЕМА О ЯДРЕ

Введем понятие обобщенного ядра. Рассмотрим $p < \infty$ цепочек

$$H_{-,n} \supseteq H_{0,n} \supseteq H_{+,n} \qquad (n = 1, \ldots, p) \tag{2.31}$$

и составим их тензорное произведение, т. е. образуем цепочку

$$\bigotimes_{n=1}^{p} H_{-,n} \supseteq \bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n} \supseteq \bigotimes_{n=1}^{p} H_{+,n}. \tag{2.32}$$

По аналогии с ядрами $F(x_1, \ldots, x_p)$ элементы $F, G, \ldots$ пространства $\bigotimes\limits_{n=1}^{p} H_{0,n}$ можно также называть ядрами (обычными); элементы $U, V, \ldots \in \bigotimes\limits_{n=1}^{p} H_{+,n}$ и $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots \in \bigotimes\limits_{n=1}^{p} H_{-,n}$ — соответственно гладкими и обобщенными ядрами (здесь удобно пользоваться прописными буквами). Докажем теорему о ядре, показывающую, что всякую непрерывную полилинейную форму можно естественным образом записать посредством обобщенного ядра.

Итак, рассмотрим непрерывную полилинейную (точнее, $p$-линейную) форму $F$ $(f^{(1)}, \ldots, f^{(p)})$ — непрерывную функцию $\bigotimes\limits_{n=1}^{p} H_{0,n} \ni$

$\ni (f^{(1)}, \dots, f^{(p)}) \mapsto F(f^{(1)}, \dots, f^{(p)}) \in \mathbb{C}^1$, линейную по каждому переменному $f^{(n)}$ при фиксированных остальных. *Ее непрерывность эквивалентна наличию оценки с некоторым $c < \infty$*

$$|F(f^{(1)}, \dots, f^{(p)})| \leqslant c \prod_{n=1}^{p} \|f^{(n)}\|_{H_{0,n}} \qquad (f^{(n)} \in H_{0,n}). \tag{2.33}$$

Действительно, из полилинейности $F$ следует, что оценка (2.33) влечет ее непрерывность в любой точке пространства $\bigoplus_{n=1}^{p} H_{0,n}$. Обратно, пусть $F$ — полилинейна и непрерывна в 0. Предположим, что оценка (2.33) не имеет места. Тогда для любого $m = 1, 2, \dots$ найдется точка $(f^{(1),m}, \dots, f^{(p),m}) \in \bigoplus_{n=1}^{p} H_{0,n}$ такая, что $|F(f^{(1),m}, \dots, f^{(p),m})| > m \prod_{n=1}^{p} \|f^{(n),m}\|_{H_{0,n}}$. Отсюда и из полилинейности следует, что $|F(g^{(1),m}, \dots, g^{(p),m})| > 1$, где $(g^{(1),m}, \dots, g^{(p),m}) = (m^{-1/p} \|f^{(1),m}\|^{-1}_{H_{0,1}} \times f^{(1),m}, \dots, m^{-1/p} \|f^{(p),m}\|^{-1}_{H_{0,p}} f^{(p),m}) \to 0$ при $m \to \infty$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$ и пользуясь непрерывностью $F$ в 0 и тем обстоятельством, что $F(0, \dots, 0) = 0$, приходим к противоречию. ■

Зафиксируем в каждом пространстве $H_{0,n}$ ортонормированный базис $(e_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$. Пусть $f^{(n)} = \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} f^{(n)}_{\alpha_n} e^{(n)}_{\alpha_n}$ — разложение вектора $f^{(n)} \in H_{0,n}$ по этому базису ($n = 1, \dots, p$); обозначим $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in N^p$. Из полилинейности и непрерывности следует представление $F$ в виде сходящегося ряда через ее координаты $F_\alpha$ и координаты векторов $f^{(n)}$:

$$F(f^{(1)}, \dots, f^{(p)}) = \sum_{\alpha \in N^p} F_\alpha f^{(1)}_{\alpha_1} \dots f^{(p)}_{\alpha_p},$$

$$F_\alpha = F(e^{(1)}_{\alpha_1}, \dots, e^{(p)}_{\alpha_p}) \in \mathbb{C}^1. \tag{2.34}$$

Доказательство теоремы о ядре базируется на следующих двух леммах.

**Лемма 2.4.** *Пусть* $\bigoplus_{n=1}^{p} H_{0,n} \ni (f^{(1)}, \dots, f^{(p)}) \mapsto F(f^{(1)}, \dots, f^{(p)})$ — *непрерывная полилинейная форма,* $A_n : H_{0,n} \to H_{0,n}$ ($n = 2, \dots, p$) — *операторы Гильберта — Шмидта. Рассмотрим непрерывную полилинейную форму* $\bigoplus_{n=1}^{p} H_{0,n} \ni (f^{(1)}, \dots, f^{(p)}) \mapsto G(f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(p)}) = F(f^{(1)}, A_2 f^{(2)}, \dots, A_p f^{(p)})$. *Утверждается, что координаты $G_\alpha$ формы $G$ таковы, что*



$$\sum_{\alpha \in N^p} |G_\alpha|^2 < \infty. \tag{2.35}$$

*Обратно, если $0 \neq A_n : H_{0,n} \to H_{0,n}$ ($n = 2, \dots, p$) непрерывны и таковы, что для любой формы $F$ координаты формы $G$ удовлетворяют условию (2.35), то все операторы $A_n$ — Гильберта — Шмидта.*

Доказательство. Зафиксируем $f^{(2)}, \dots, f^{(p)}$, тогда $H_{0,1} \ni f^{(1)} \mapsto l(f^{(1)}) = F(f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(p)})$ является линейным непрерывным функционалом на $H_{0,1}$ с нормой, не превосходящей в силу (2.33) $c \prod_{n=2}^{p} \|f^{(n)}\|_{H_{0,n}}$. Так как $l(f^{(1)}) = (f^{(1)}, a)_{H_{0,1}}$, где координаты $a_{\alpha_1}$ вектора $a \in H_{0,1}$ в базисе $(e^{(1)}_{\alpha_1})_{\alpha_1=0}^{\infty}$ имеют вид $\overline{F(e^{(1)}_{\alpha_1}, f^{(2)}, \dots, f^{(p)})}$, то

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} |F(e^{(1)}_{\alpha_1}, f^{(2)}, \dots, f^{(p)})|^2 =$$

$$= \|l\|^2 \leqslant c^2 \prod_{n=2}^{p} \|f^{(n)}\|^2_{H_{0,n}} \quad (f^{(2)} \in H_{0,2}, \dots, f^{(p)} \in H_{0,p}).$$

При помощи этой оценки получаем

$$\sum_{\alpha \in N^p} |G_\alpha|^2 = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p=0}^{\infty} |G(e^{(1)}_{\alpha_1}, \dots, e^{(p)}_{\alpha_p})|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p=0}^{\infty} |F(e^{(1)}_{\alpha_1}, A_2 e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, A_p e^{(p)}_{\alpha_p})|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c^2 \sum_{\alpha_2, \dots, \alpha_p=0}^{\infty} \left( \prod_{n=2}^{p} \|A_n e^{(n)}_{\alpha_n}\|^2_{H_{0,n}} \right) = c^2 \prod_{n=2}^{p} |A_n|^2 < \infty.$$

Обратно, пусть условие (2.35) выполняется для любой непрерывной полилинейной формы $F$. Покажем, что $|A_n| < \infty$ ($n = 2, \dots, p$). Для этого заметим, что если ввести матрицу $(A_{n,\alpha_n\beta_n})_{\alpha_n,\beta_n=0}^{\infty}$ оператора $A_n$ в базисе $(e_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$ (т. е. $A_{n,\alpha_n\beta_n} = (A_n e^{(n)}_{\beta_n}, e^{(n)}_{\alpha_n})_{H_{0,n}}$), то

$$G_\alpha = \sum_{\beta_2, \dots, \beta_p=0}^{\infty} F_{(\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_p)} \left( \prod_{n=2}^{p} A_{n,\beta_n\alpha_n} \right). \tag{2.36}$$

Построим форму $F$, принимая в качестве ее координат числа $F_\alpha = \delta_{\alpha_2\gamma_2} \dots \delta_{\alpha_{n-1}\gamma_{n-1}} \delta_{\alpha_n\alpha_1} \delta_{\alpha_{n+1}\gamma_{n+1}} \dots \delta_{\alpha_p\gamma_p}$, где $\delta_{jk}$ — символ Кронекера, а $n = 2, \dots, p$ и $\gamma_2, \dots, \gamma_p = 0, 1, \dots$ фиксированы. Подставляя эти значения $F_\alpha$ в (2.36), найдем, что $G_\alpha = A_{2,\gamma_2\alpha_2} \dots A_{n-1,\gamma_{n-1}\alpha_{n-1}} A_{n,\alpha_1\alpha_n} \times$

$\times A_{n+1,\gamma_{n+1}\alpha_{n+1}} \ldots A_{p,\gamma_p\alpha_p}$. Теперь из условия (2.35) получим

$$\sum_{\alpha\in N^p} |G_\alpha|^2 = \left(\sum_{\alpha_2=0}^{\infty} |A_{2,\gamma_2\alpha_2}|^2\right) \ldots \left(\sum_{\alpha_{n-1}=0}^{\infty} |A_{n-1,\gamma_{n-1}\alpha_{n-1}}|^2\right) \times$$
$$\times \left(\sum_{\alpha_1,\alpha_n=0}^{\infty} |A_{n,\alpha_1\alpha_n}|^2\right)\left(\sum_{\alpha_{n+1}=0}^{\infty} |A_{n+1,\gamma_{n+1}\alpha_{n+1}}|^2\right) \ldots \left(\sum_{\alpha_p=0}^{\infty} |A_{p,\gamma_p\alpha_p}|^2\right) =$$
$$= \| A_2^* e_{\gamma_2}^{(2)} \|^2_{H_{0,2}} \ldots \| A_{n-1}^* e_{\gamma_{n-1}}^{(n-1)} \|^2_{H_{0,n-1}} |A_n|^2 \| A_{n+1}^* e_{\gamma_{n+1}}^{(n+1)} \|^2_{H_{0,n+1}} \ldots$$
$$\ldots \| A_p^* e_{\gamma_p}^{(p)} \|^2_{H_{0,p}} < \infty. \tag{2.37}$$

Зафиксируем $m = 2, \ldots, n-1, n+1, \ldots, p$. Всегда найдется такое $\gamma_m = 0, 1, \ldots$, что $A_m^* e_{\gamma_m}^{(m)} \neq 0$, так как в противном случае $A_m^* = 0$, а это противоречит условию $A_m \neq 0$. Беря в (2.37) в качестве $\gamma_m$ так определенные значения, получаем, что сомножитель при $|A_n|^2$ в (2.37) отличен от нуля, поэтому $|A_n| < \infty$. ■

Лемма 2.5. *Пусть* $\bigoplus_{n=1}^{p} H_{0,n} \ni (f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}) \mapsto G\ (f^{(1)}, \ldots, f^{(p)})$ — *непрерывная полилинейная форма. Она представима в виде* $G\ (f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}) = (f^{(1)} \otimes \ldots \otimes f^{(p)}, K)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}}$, *где* $K \in \bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}$, *тогда и только тогда, когда для ее координат* $G_\alpha$ *выполняется условие* (2.35).

Доказательство. Пусть условие (2.35) выполняется. Введем векторы (2.1) и положим $K = \sum_{\alpha\in N^p} \overline{G}_\alpha e_\alpha \in \bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}$. Тогда очевидно

$$(f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)}, K)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}} = \sum_{\alpha\in N^p} f_{\alpha_1}^{(1)} \ldots f_{\alpha_p}^{(p)} G_\alpha = G\,(f^{(1)}, \ldots, f^{(p)})$$
$$(f^{(n)} \in H_{0,n}).$$

Обратно, если требуемое представление имеется, то $G_\alpha = G\,(e_{\alpha_1}^{(1)}, \ldots, e_{\alpha_p}^{(p)}) = (e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_p}^{(p)}, K)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}} = \overline{K}_\alpha$ и в силу включения $K \in \bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}$ выполнено условие (2.34). ■

**Теорема 2.7.** *Построим цепочки* (2.31) *таким образом, чтобы вложения* $H_{+,n} \to H_{0,n}$ $(n = 2, \ldots, p)$ *были квазиядерны. Тогда по каждой непрерывной полилинейной форме* $\bigoplus_{n=1}^{p} H_{0,n} \ni (f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}) \mapsto F\ (f^{(1)}, \ldots, f^{(p)})$ *можно построить такое обобщенное ядро*



$\Phi \in H_{0,1} \otimes H_{-,2} \otimes \ldots \otimes H_{-,p}$, *что*

$$F\,(f^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}) = (f^{(1)} \otimes u^{(2)} \otimes \cdots \otimes u^{(p)}, \Phi)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}} \tag{2.38}$$
$$(f^{(1)} \in H_{0,1},\ u^{(2)} \in H_{+,2}, \ldots, u^{(p)} \in H_{+,p}).$$

*Это ядро по F определяется однозначно.*

*Обратно, если для каждой формы F указанного вида справедливо представление* (2.38) *с* $\Phi \in H_{0,1} \otimes H_{-,2} \otimes \ldots \otimes H_{-,p}$, *то вложения* $H_{+,n} \to H_{0,n}$ $(n = 2, \ldots, p)$ *квазиядерны.*

Доказательство. Рассмотрим операторы $O_n$, $J_n$, связанные с цепочкой (2.31); при $n = 1$ будем считать $H_{+,1} = H_{0,1} = H_{-,1}$. Для $f^{(1)} \in H_{0,1}$, $u^{(2)} \in H_{+,2}, \ldots, u^{(p)} \in H_{+,p}$ имеем

$$F\,(f^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}) = F\,(f^{(1)}, O_2 J_2 J_2^{-1} u^{(2)}, \ldots, O_p J_p J_p^{-1} u^{(p)}) =$$
$$= G\,(f^{(1)}, J_2^{-1} u^{(2)}, \ldots, J_p^{-1} u^{(p)}), \tag{2.39}$$

где форма $G$ введена равенством

$$G\,(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(p)}) = F\,(f^{(1)}, O_2 J_2 f^{(2)}, \ldots, O_p J_p f^{(p)}) \tag{2.40}$$
$$(f^{(n)} \in H_{0,n};\ n = 1, \ldots, p).$$

При $n=2, \ldots, p$ $O_n : H_{+,n} \to H_{0,n}$ — оператор Гильберта — Шмидта, таким же будет и $A_n = O_n J_n : H_{0,n} \to H_{0,n}$. Поэтому согласно лемме 2.4 координаты $G_\alpha$ формы $G$ удовлетворяют условию (2.35) и, следовательно, благодаря лемме 2.5 имеет место представление $G\,(f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}) = (f^{(1)} \otimes \ldots \otimes f^{(p)}, K)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}}$ с $K \in \bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}$.

Теперь (2.39) можно продолжить следующим образом (ниже операция $+$ берется относительно цепочки (2.32)):

$$F\,(f^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}) = (f^{(1)} \otimes (J_2^{-1} u^{(2)}) \otimes \cdots \otimes (J_p^{-1} u^{(p)}), K)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}} =$$
$$= ((1 \otimes J_2^{-1} \otimes \cdots \otimes J_p^{-1})(f^{(1)} \otimes u^{(2)} \otimes \cdots \otimes u^{(p)}), K)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}} =$$
$$= (f^{(1)} \otimes u^{(2)} \otimes \cdots \otimes u^{(p)}, (1 \otimes J_2^{-1} \otimes \cdots \otimes J_p^{-1})^{+} K)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}} =$$
$$= (f^{(1)} \otimes u^{(2)} \otimes \ldots \otimes u^{(p)}, (1 \otimes \mathbf{J}_2^{-1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{J}_p^{-1}) K)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}}. \tag{2.41}$$

Здесь мы воспользовались соотношением $\left(\bigotimes_{n=1}^{p} J_n^{-1}\right)^{+} = \bigotimes_{n=1}^{p} \mathbf{J}_n^{-1}$, вытекающим из (1.15), (2.18), (2.8) и (1.18). Для доказательства (2.38) осталось положить $\Phi = (1 \otimes \mathbf{J}_2^{-1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{J}_p^{-1}) K$. Однозначность определения ядра $\Phi$ по форме $F$ следует из того, что л. о. векторов $f^{(1)} \otimes u^{(2)} \otimes \cdots \otimes u^{(p)}$ $(f^{(1)} \in H_{0,1}, u^{(n)} \in H_{+,n})$ плотна в $H_{0,1} \otimes H_{+,2} \otimes \cdots \otimes H_{+,p}$.

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть для формы $F$ справедливо представление (2.38), тогда для формы $G$, введенной посредством равенства (2.40), получим подобно предыдущему представление

$$G(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(p)}) = F(f^{(1)}, O_2 J_2 f^{(2)}, \ldots, O_p J_p f^{(p)}) =$$

$$= F(f^{(1)}, J_2 f^{(2)}, \ldots, J_p f^{(p)}) = (f^{(1)} \otimes J_2 f^{(2)} \otimes \cdots \otimes J_p f^{(p)}, \Phi)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}} =$$

$$= ((1 \otimes J_2 \otimes \cdots \otimes J_p)(f^{(1)} \otimes f^{(2)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)}), \Phi)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}} =$$

$$= (f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)}, (1 \otimes J_2 \otimes \cdots \otimes J_p)^{+} \Phi)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}} =$$

$$= (f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)}, (1 \otimes \mathbf{J}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{J}_p) \Phi)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}}$$

$$(f^{(n)} \in H_{0,n};\ n = 1, \ldots, p).$$

Но $(1 \otimes \mathbf{J}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{J}_p) \Phi = K \in \bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}$, поэтому при помощи леммы 2.5 заключаем, что для координат $G_\alpha$ формы $G$ выполняется условие (2.35). Так как форма $F$ произвольная, а $A_n = O_n J_n \neq 0$, то при помощи второй части леммы 2.4 заключаем, что $|A_n| < \infty$, т. е. $|O_n| < \infty$ $(n = 2, \ldots, p)$. ■

Разумеется, доказанная теорема справедлива и в том случае, когда в последовательности (2.31) вместо первой цепочки выделять любую другую. Ядро $\Phi$ теперь будет, вообще говоря, другим (как функционалы на $\bigotimes_{n=1}^{p} H_{+,n}$ все эти ядра будут совпадать). Несколько огрубляя, полученный результат можно сформулировать более симметричным образом: пусть в (2.31) каждое вложение $H_{+,n} \to H_{0,n}$ $(n = 1, \ldots, p)$ квазиядерно, тогда по любой непрерывной полилинейной форме $\bigoplus_{n=1}^{p} H_{0,n} \ni (f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}) \mapsto F(f^{(1)}, \ldots, f^{(p)})$



можно однозначным образом построить ядро $\Phi \in \bigotimes_{n=1}^{p} H_{-,n}$ такое, что

$$F(u^{(1)}, \ldots, u^{(p)}) = (u^{(1)} \otimes \cdots \otimes u^{(p)}, \Phi)_{\bigotimes_{n=1}^{p} H_{0,n}} \quad (u^{(n)} \in H_{+,n}). \tag{2.42}$$

## 9. СЛУЧАЙ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ. ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ЯДРА

С помощью теоремы 2.7 установим аналогичное утверждение для билинейных форм. В частном случае его можно будет интерпретировать как доказательство возможности записи каждого ограниченного оператора в $L_2$ в виде интегрального с обобщенным ядром.

Рассмотрим цепочку

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+. \tag{2.43}$$

Предположим, что в $H_+$ введена инволюция, являющаяся инволюцией и в $H_0$. Более точно, в $H_+$ задано антилинейное отображение $H_+ \ni u \mapsto u^* \in H_+$ такое, что $(u^*)^* = u$, $(u^*, v^*)_{H_+} = \overline{(u, v)_{H_+}}$ и $(u^*, v^*)_{H_0} = \overline{(u, v)_{H_0}}$ $(u, v \in H_+)$. Нетрудно видеть, что тогда и

$$(u^*, v^*)_{H_-} = \overline{(u, v)_{H_-}} \qquad (u, v \in H_+). \tag{2.44}$$

В самом деле, для $u, v \in H_+$ имеем $(Iu^*, v)_{H_+} = (u^*, v)_{H_0} = \overline{(u, v^*)_{H_0}} = \overline{(Iu, v^*)_{H_+}} = ((Iu)^*, v)_{H_+}$, откуда $Iu^* = (Iu)^*$. Поэтому $(u^*, v^*)_{H_-} = (Iu^*, v^*)_{H_0} = ((Iu)^*, v^*)_{H_0} = \overline{(Iu, v)_{H_0}} = \overline{(u, v)_{H_-}}$.

Равенство (2.44) показывает, что инволюцию $*$ по непрерывности можно распространить до инволюции (для которой мы сохраним то же обозначение) в $H_-: H_- \ni \alpha \mapsto \alpha^* \in H_-$. Ясно также, что отображение $H_- \supseteq H_0 \ni f \mapsto f^* \in H_0$ будет инволюцией и в $H_0$. Очевидно,

$$\mathbf{I}\alpha^* = (\mathbf{I}\alpha)^* \qquad (\alpha \in H_-). \tag{2.45}$$

Если в пространствах цепочки (2.43) введена описанная выше инволюция, то будем говорить, что (2.43) — цепочка с инволюцией $*$.

Пусть $B(f, g)$ — некоторая билинейная форма в $H_0$, т. е. непрерывная функция $H_0 \oplus H_0 \ni (f, g) \mapsto B(f, g) \in \mathbb{C}^1$, линейная по первому и антилинейная по второму переменному. Справедлива следующая теорема

**Теорема 2.8.** *Пусть в цепочке* (2.43) *вложение* $H_+ \to H_0$ *квазиядерно. Тогда по каждой непрерывной билинейной форме* $H_0 \oplus H_0 \ni (f, g) \mapsto B(f, g)$ *можно построить такое обобщенное ядро* $\mathrm{B}_1 \in H_0 \otimes H_-$, *что*

$$B(u, g) = (\mathrm{B}_1, g \otimes u^*)_{H_0 \otimes H_0} \qquad (u \in H_+, g \in H_0). \tag{2.46}$$

*Это ядро по $B$ определяется однозначно.*

*Обратно, если для каждой формы B указанного вида справедливо представление* (2.46) *с* $B_1 \in H_0 \otimes H_-$, *то вложение* $H_+ \to H_0$ *квазиядерно.*

Доказательство. Построим непрерывную двулинейную форму $F$, полагая $F(f, g) = \overline{B(g^*, f)}$ $(f, g \in H_0)$. Согласно теореме 2.7 существует обобщенное ядро $\Phi \in H_0 \otimes H_-$ такое, что $F(f, u) = (f \otimes u, \Phi)_{H_0 \otimes H_0}$ $(f \in H_0,\ u \in H_+)$. Поэтому для $u \in H_+$, $g \in H_0$

$$B(u, g) = \overline{F(g, u^*)} = \overline{(g \otimes u^*, \Phi)}_{H_0 \otimes H_0} = (\Phi, g \otimes u^*)_{H_0 \otimes H_0},$$

т. е. представление (2.46) установлено с $B_1 = \Phi$. Из плотности л. о. векторов $g \otimes u^*$ $(g \in H_0,\ u \in H_+)$ в $H_0 \otimes H_+$ следует однозначность определения ядра $B_1$ по $B$.

Обратно, пусть для каждой непрерывной билинейной формы $B$ справедливо представление (2.46). Рассмотрим произвольную непрерывную двулинейную форму $H_0 \oplus H_0 \ni (f, g) \mapsto F(f, g)$ и положим $B(f, g) = \overline{F(g^*, f)}$. Форма $B$ — непрерывная билинейная, поэтому по предположению $B(u, g) = (B_1, g \otimes u^*)_{H_0 \otimes H_0}$ $(u \in H_+,\ g \in H_0)$. Но тогда $F(g, u) = \overline{B(u^*, g)} = \overline{(B_1, g \otimes u)}_{H_0 \otimes H_0} = (g \otimes u, B_1)_{H_0 \otimes H_0}$, т. е. справедливо представление (2.38) с $\Phi = B_1$. В силу второй части теоремы 2.7 вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно. ■

Эту теорему можно было бы доказать независимо от теоремы 2.7, причем даже несколько проще (см. в связи с этим доказательство теоремы 3.3). Отметим, что, как и в случае теоремы 2.7, для $B$ наряду с представлением (2.46) справедливо представление

$$B(f, v) = (B_2, v \otimes f^*)_{H_0 \otimes H_0} \qquad (f \in H_0,\ v \in H_+), \tag{2.47}$$

где $B_2 \in H_- \otimes H_0$ однозначно определяется по $B$.

Из (2.46) и (2.47) следует, что для $u, v \in H_+$ $(B_1, u \otimes v)_{H_0 \otimes H_0} = B(v^*, u) = (B_2, u \otimes v)_{H_0 \otimes H_0}$, т. е. сужения функционалов $B_1$, $B_2$ на $H_+ \otimes H_+$ совпадают. Обозначив это общее сужение через $B$, получим, что *в случае квазиядерности вложения* $H_+ \to H_0$ *по каждой непрерывной билинейной форме* $H_0 \oplus H_0 \ni (f, g) \mapsto B(f, g)$ *можно однозначным образом построить ядро* $B \in H_- \otimes H_-$ *такое, что*

$$B(u, v) = (B, v \otimes u^*)_{H_0 \otimes H_0} \qquad (u, v \in H_+). \tag{2.48}$$

Пусть $A : H_0 \to H_0$ — непрерывный оператор. Построим по нему непрерывную билинейную форму $B(f, g) = (Af, g)_{H_0}$ $(f, g \in H_0)$, а по ней согласно (2.48) ядро $B \in H_- \otimes H_-$. Это ядро называется ядром оператора $A$. Итак,

$$(Au, v)_{H_0} = (B, v \otimes u^*)_{H_0 \otimes H_0} \qquad (u, v \in H_+). \tag{2.49}$$

Если $H_0 = L_2(R, d\mu(x))$, где $R$ — пространство с мерой $\mu$, а $A$ — оператор Гильберта — Шмидта в нем, т. е. оператор, имеющий вид



$$(Af)(x) = \int_R K(x, y) f(y)\, d\mu(y), \quad K \in L_2(R \times R,\ d\mu(x) \otimes d\mu(y)) =$$
$$= H_0 \otimes H_0, \tag{2.50}$$

то

$$(Af, g)_{H_0} = \int_R \int_R K(x, y) f(y) \overline{g(x)}\, d\mu(x)\, d\mu(y) =$$
$$= (K, g \otimes f^*)_{H_0 \otimes H_0} \qquad (f, g \in H_0), \tag{2.51}$$

где $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Сравнивая (2.49) и (2.51), заключаем, что $B = K$ (желание иметь такое равенство и определило характер расстановки переменных в формулах (2.46) — (2.48)). Формула (2.49) показывает, что для произвольного ограниченного оператора $A$ в пространстве $L_2(R, d\mu(x))$ всегда справедливо в некотором смысле представление (2.50) с $K = B$, т. е. можно считать, что он всегда «интегральный с обобщенным ядром».

Сейчас уместно ввести некоторые определения. Пусть имеется цепочка (2.43) с инволюцией $*$. Обобщенное ядро $K \in H_- \otimes H_-$ будем называть соответственно эрмитовым или положительно определенным, если $(K, v \otimes u^*)_{H_0 \otimes H_0} = \overline{(K, u \otimes v^*)}_{H_0 \otimes H_0}$ $(u, v \in H_+)$ или $(K, u \otimes u^*)_{H_0 \otimes H_0} \geqslant 0$ $(u \in H_+)$. Иными словами, непрерывная билинейная форма $H_+ \oplus H_+ \ni (u, v) \mapsto B(u, v) = (K, v \otimes u^*)$ должна быть эрмитовой или положительно определенной. Ясно, что положительно определенное ядро будет всегда эрмитовым. Если $K \in H_0 \otimes H_0$ или $K \in H_+ \otimes H_+$, то, разумеется, в написанных выше соотношениях можно заменить $u$, $v$ на $f$, $g \in H_0$ или даже на $\alpha$, $\beta \in H_-$. Если $B$ — ядро непрерывного оператора $A : H_0 \to H_0$ (см. (2.49)), то его эрмитовость или положительная определенность эквивалентны самосопряженности или неотрицательности $A$.

## 10. ПОЛНОЕ НЕЙМАНОВСКОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Это произведение определяется, грубо говоря, как ортогональная сумма пространств $\mathcal{H}_{e,1} = \bigotimes_{n=1;\,e,1}^{\infty} H_n$ по всевозможным стабилизирующим последовательностям $e$. Для точного определения нам понадобятся некоторые общие рассмотрения.

Зафиксируем пространство $\mathcal{H}_{e,\delta} = \bigotimes_{n=1;\,e,\delta}^{\infty} H_n$, где $e$ и $\delta$ — стабилизирующая последовательность и вес. Определим вектор $f^{(1)} \otimes f^{(2)} \otimes \ldots$ $(f^{(n)} \in H_n)$ как слабый предел в $\mathcal{H}_{e,\delta}$, если он существует, векторов

$$f[p] = f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots \tag{2.52}$$

при $p \to \infty$. Так как л. о. $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ плотна в $\mathcal{H}_{e,\delta}$, то для существования слабого предела векторов $f[p]$ необходимо и достаточно, чтобы 1) нормы $\| f[p] \|_{\mathcal{H}_{e,\delta}}$ были равномерно по $p = 1, 2, \ldots$ ограничены; 2) для каждого $\alpha \in A$ существовал $\lim\limits_{p\to\infty} (f[p], e_\alpha)_{\mathcal{H}_{e,\delta}}$. Этим условиям можно было бы придать более аналитический вид, однако в общем случае мы этого делать не будем и остановимся только на случае невзвешенного произведения $\mathcal{H}_{e,1}$.

В дальнейшем будем считать, что все $f^{(n)} \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, так как в противном случае ситуация тривиальна и $f^{(1)} \otimes f^{(2)} \otimes \otimes \ldots = 0$. Условия 1) и 2) для пространства $\mathcal{H}_{e,1}$ выглядят следующим образом: произведения $\prod\limits_{n=1}^{p} \| f^{(n)} \|_{H_n}$ равномерно по $p = 1, 2, \ldots$ ограничены и для каждых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 0, 1, \ldots$ произведение $\left(\prod\limits_{n=1}^{m} (f^{(n)}, e^{(n)}_{\alpha_n})_{H_n}\right)\left(\prod\limits_{n=m+1}^{\infty} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}\right)$ сходится к конечному числу (возможно, равному нулю) при каждом $m = 1, 2, \ldots$ Так как на сходимость последнего произведения первые $m$ его множителей не влияют, то можно сказать, что *слабый предел в пространстве $\mathcal{H}_{e,1}$ при $p \to \infty$ векторов* (2.52), *т. е. вектор $f^{(1)} \otimes f^{(2)} \otimes \ldots$, существует тогда и только тогда, когда произведения $\prod\limits_{n=1}^{p} \| f^{(n)} \|_{H_n}$ равномерно по $p = 1, 2, \ldots$ ограничены, а все произведения $\prod\limits_{n=q}^{\infty} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}$ $(q = 1, 2, \ldots)$ сходятся к конечному числу.*

**Лемма 2.6.** *Для существования в пространстве $\mathcal{H}_{e,1}$ сильного предела при $p \to \infty$ векторов* (2.52) *необходимо и достаточно, чтобы произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \| f^{(n)} \|_{H_n}$ и $\prod\limits_{n=q}^{\infty} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}$ $(q = 1, 2, \ldots)$ сходились к конечному числу, при этом если для каждого $q$ $\prod\limits_{n=q}^{\infty} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} = 0$, то и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \| f^{(n)} \|_{H_n} = 0$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Тогда в силу сказанного ранее существует слабый предел $\lim f[p] = g$. Подсчитаем норму $\| g \|_{\mathcal{H}_{e,1}}$. Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0, 0, \ldots)$ имеем



$$g_\alpha = (g, e_\alpha)_{\mathcal{H}_{e,1}} = \lim_{p\to\infty} (f[p], e_\alpha)_{\mathcal{H}_{e,1}} = \left(\prod_{n=1}^{m} (f^{(n)}, e^{(n)}_{\alpha_n})_{H_n}\right)\left(\prod_{n=m+1}^{\infty} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}\right). \tag{2.53}$$

Поэтому

$$\| g \|^2_{\mathcal{H}_{e,1}} = \sum_{\alpha \in A} | g_\alpha |^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 0}^{\infty} | g_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0, 0, \ldots)} |^2 = \lim_{m\to\infty} \left(\prod_{n=1}^{m} \| f^{(n)} \|^2_{H_n}\right)\left(\prod_{n=m+1}^{\infty} | (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} |^2\right). \tag{2.54}$$

Если при некотором $q = 1, 2, \ldots$ $\prod\limits_{n=q}^{\infty} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} \neq 0$, то $\prod\limits_{n=m+1}^{\infty} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} \underset{m\to\infty}{\to} 1$ и из (2.54) следует, что $\| g \|^2_{\mathcal{H}_{e,1}} = \lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{m} \| f^{(n)} \|^2_{H_n} = \lim\limits_{p\to\infty} \| f[p] \|^2_{\mathcal{H}_{e,1}}$. Если при каждом $q$ $\prod\limits_{n=q}^{\infty} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} = 0$, то из (2.54) следует, что $g = 0$. Но по условию леммы в этом случае и $\lim\limits_{p\to\infty} \| f[p] \|_{\mathcal{H}_{e,1}} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \| f^{(n)} \|_{H_n} = 0$. Поэтому всегда $\| g \|_{\mathcal{H}_{e,1}} = \lim\limits_{p\to\infty} \| f[p] \|_{\mathcal{H}_{e,1}}$ и, следовательно, $f[p] \underset{p\to\infty}{\to} g$ сильно.

Обратно, пусть сильно $f[p] \underset{p\to\infty}{\to} g$. Тогда $\| g \|_{\mathcal{H}_{e,1}} = \lim\limits_{p\to\infty} \| f[p] \|_{\mathcal{H}_{e,1}} = \lim\limits_{p\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{p} \| f^{(n)} \|_{H_n}$, откуда следует сходимость к конечному числу $\| g \|_{\mathcal{H}_{e,1}}$ произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \| f^{(n)} \|_{H_n}$. Далее, при каждом $q = 1, 2, \ldots$ существует $\lim\limits_{p\to\infty} (f[p], f[q-1])_{\mathcal{H}_{e,1}} = \lim\limits_{p\to\infty} \left(\prod\limits_{n=1}^{q-1} \| f^{(n)} \|^2\right)_{H_n} \times \left(\prod\limits_{n=q}^{p} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}\right)$, поэтому благодаря условию $f^{(n)} \neq 0$ $(n = 1, \ldots, q-1)$ произведение $\prod\limits_{n=q}^{\infty} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}$ также сходится к конечному числу. Если при каждом $q$ $\prod\limits_{n=q}^{\infty} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} = 0$, то в силу формулы

(2.53) $g_\alpha = 0$ для каждого $\alpha \in A$ и поэтому $g = 0$. Но тогда $\|g\|_{\mathcal{H}_{e,1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \|f^{(n)}\|_{H_n} = 0$. ■

Отметим, что если условия леммы 2.6 выполнены для двух последовательностей $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ и $(g^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ $(f^{(n)}, g^{(n)} \in H_n)$, то

$$(f^{(1)} \otimes f^{(2)} \otimes \cdots, g^{(1)} \otimes g^{(2)} \otimes \cdots)_{\mathcal{H}_{e,1}} = \prod_{n=1}^{\infty} (f^{(n)}, g^{(n)})_{H_n}. \tag{2.55}$$

Эта формула вытекает из того, что скалярное произведение в левой части (2.55) равно $\lim_{p\to\infty} (f[p], g[p])_{\mathcal{H}_{e,1}} = \lim_{p\to\infty} \prod_{n=1}^{p} (f^{(n)}, g^{(n)})_{H_n}$.

Следствие. Если в (2.52) в качестве векторов $f^{(n)}$ взяты орты, то для существования сильного предела $\lim_{p\to\infty} f[p]$ необходимо и достаточно, чтобы при некотором $q = 1, 2, \ldots$ произведение $\prod_{n=q}^{\infty} (f^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}$ сходилось к конечному числу, отличному от нуля.

**Лемма 2.7.** *Пусть $l = (l^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ортов $l^{(n)} \in H_n$ такая, что существует сильный предел в пространстве $\mathcal{H}_{e,1}$*

$$l^{(1)} \otimes l^{(2)} \otimes \cdots = \lim_{p\to\infty} l^{(1)} \otimes \cdots \otimes l^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots \tag{2.56}$$

*Тогда в этом же пространстве существуют сильные пределы*

$$\tilde{l}_\alpha = l_{\alpha_1}^{(1)} \otimes l_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \cdots =$$
$$= \lim_{p\to\infty} l_{\alpha_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes l_{\alpha_p}^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots \qquad (\alpha \in A), \tag{2.57}$$

*где $(l_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $H_n$ такой, что $l_0^{(n)} = l^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Эти пределы образуют в $\mathcal{H}_{e,1}$ ортонормированный базис $(\tilde{l}_\alpha)_{\alpha\in A}$.*

Доказательство. В силу следствия из леммы 2.6 условиями существования пределов (2.56) и (2.57) будут сходимости к конечному отличному от нуля числу соответственно произведений $\prod_{n=q_1}^{\infty} (l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}$ и $\prod_{n=q_2}^{\infty} (l_{\alpha_n}^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}$ с некоторыми $q_1, q_2 = 1, 2, \ldots$ Так как для $\alpha \in A$ при $n$ достаточно большом $\alpha_n = 0$ и $l_{\alpha_n}^{(n)} = l^{(n)}$, то эти два произведения при $q_1 = q_2$ достаточно больших совпадают, откуда следует, что из существования предела (2.56) вытекает существование предела (2.57), и наоборот.

Далее, из формулы (2.55) вытекает, что векторы $\tilde{l}_\alpha$ $(\alpha \in A)$



образуют в $\mathcal{H}_{e,1}$ ортонормированную систему. Она является базисом.

Для доказательства зафиксируем вектор $e_\beta = e_{\beta_1}^{(1)} \otimes e_{\beta_2}^{(2)} \otimes \ldots$ $\ldots$ $(\beta \in A)$ и подсчитаем квадрат нормы $\| Pe_\beta \|_{\mathcal{H}_{e,1}}^2$ проекции вектора $e_\beta$ на з. л. о. $((\tilde{l}_\alpha)_{\alpha\in A})$. При помощи (2.55) получим

$$\|Pe_\beta\|_{\mathcal{H}_{e,1}}^2 = \sum_{\alpha\in A} |(e_\beta, \tilde{l}_\alpha)_{\mathcal{H}_{e,1}}|^2 =$$
$$= \sum_{\alpha\in A} \left( \prod_{n=1}^{\infty} |(e_{\beta_n}^{(n)}, l_{\alpha_n}^{(n)})_{H_n}|^2 \right) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m=0}^{\infty} \left( \prod_{n=1}^{m} |(e_{\beta_n}^{(n)}, l_{\alpha_n}^{(n)})_{H_n}|^2 \prod_{n=m+1}^{\infty} |(e_{\beta_n}^{(n)}, l^{(n)})_{H_n}|^2 \right) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \left[ \prod_{n=m+1}^{\infty} |(e_{\beta_n}^{(n)}, l^{(n)})_{H_n}|^2 \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m=0}^{\infty} \left( \prod_{n=1}^{m} |(e_{\beta_n}^{(n)}, l_{\alpha_n}^{(n)})_{H_n}|^2 \right) \right] =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \left[ \prod_{n=m+1}^{\infty} |(e_{\beta_n}^{(n)}, l^{(n)})_{H_n}|^2 \right].$$

При $n$ достаточно большом $\beta_n = 0$ и $e_{\beta_n}^{(n)} = e^{(n)}$, поэтому для $m$ достаточно больших выражение в последних квадратных скобках равно $\prod_{n=m+1}^{\infty} |(e^{(n)}, l^{(n)})_{H_n}|^2$ и, следовательно, последний предел равен единице. Итак, $\| Pe_\beta \|_{\mathcal{H}_{e,1}} = 1 = \| e_\beta \|_{\mathcal{H}_{e,1}}$, т. е. $e_\beta \in$ з. л. о. $((\tilde{l}_\alpha)_{\alpha\in A})$ $(\beta \in A)$. Таким образом, з. л. о. $((\tilde{l}_\alpha)_{\alpha\in A}) = \mathcal{H}_{e,1}$. ■

Конструкцию полного неймановского произведения гильбертовых пространств $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ мы изложим в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.9.** *Пусть $E$ — совокупность всех стабилизирующих последовательностей $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ $(e^{(n)} \in H_n$, $\|e^{(n)}\|_{H_n} = 1)$. Будем говорить, что $l \in E$ эквивалентна $e \in E$ и писать $l \sim e$, если в пространстве $\mathcal{H}_{e,1}$ существует каждый сильный предел $l^{(1)'} \otimes l^{(2)'} \otimes \ldots = \lim_{p\to\infty} l^{(1)'} \otimes \ldots \otimes l^{(p)'} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$, где $(l^{(n)'})_{n=1}^{\infty}$ — последовательность $(l^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, «разбавленная» векторами $e^{(n)}$, т. е. каждое $l^{(n)'}$ равно либо $l^{(n)}$, либо $e^{(n)}$.*

*Соотношение $\sim$ является соотношением эквивалентности, и все $E$ разбивается в объединение непересекающихся классов $E_\omega$ эквивалентных между собой стабилизирующих последовательностей: $E =$*

$= \bigcup_{\omega} E_\omega$. *Выберем в каждом классе* $E_\omega$ *по представителю* $e(\omega)$, *тогда под полным неймановским произведением пространств* $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ *понимается ортогональная сумма*

$$\bigoplus_{\omega} \mathcal{H}_{e(\omega),1} = \bigoplus_{\omega} \left( \bigotimes_{n=1;e(\omega),1}^{\infty} H_n \right).$$

*Эта конструкция инвариантна относительно выбора* $e(\omega) \in E_\omega$ *в том смысле, что если и* $l(\omega) \in E_\omega$, *то между пространствами* $\mathcal{H}_{l(\omega),1}$ *и* $\mathcal{H}_{e(\omega),1}$ *можно установить изометрию, которая относит каждому формальному базисному орту* $\mathcal{H}_{l(\omega),1} \ni l_\alpha(\omega) = (l^{(1)}_{\alpha_1}(\omega)) \otimes \otimes (l^{(2)}_{\alpha_2}(\omega)) \otimes \cdots$ *базисный орт* $\mathcal{H}_{e(\omega),1} \ni \tilde{l}_\alpha(\omega) = (l^{(1)}_{\alpha_1}(\omega)) \otimes (l^{(2)}_{\alpha_2}(\omega)) \otimes \cdots$ $\cdots = \lim_{p\to\infty} (l^{(1)}_{\alpha_1}(\omega)) \otimes \cdots \otimes (l^{(p)}_{\alpha_p}(\omega)) \otimes (e^{(p+1)}(\omega)) \otimes (e^{(p+2)}(\omega)) \otimes \cdots$, *где предел понимается как сильный в пространстве* $\mathcal{H}_{e(\omega),1}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$.

Доказательство. Согласно следствию из леммы 2.6 для существования сильного предела $l^{(1)'} \otimes l^{(2)'} \otimes \ldots$ при каждом выборе $l^{(n)'} = l^{(n)}, e^{(n)}$ необходимо и достаточно, чтобы при некотором общем $q = 1, 2, \ldots$ все произведения $\prod_{n=q}^{\infty} (l^{(n)'}, e^{(n)})_{H_n}$ сходились к конечным отличным от нуля числам. Эта сходимость эквивалентна сходимости рядов

$$\sum_{n=q}^{\infty} \ln((l^{(n)'}, e^{(n)})_{H_n}). \tag{2.58}$$

Если $l^{(n)'} = e^{(n)}$, то $(l^{(n)'}, e^{(n)})_{H_n} = 1$ и соответствующий член в ряде (2.58) аннулируется. Поэтому сходимость всевозможных рядов (2.58) с $l^{(n)'}$, равным $l^{(n)}$ или $e^{(n)}$, эквивалентна тому, что ряд $\sum_{n=q}^{\infty} \ln((l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n})$ сходится в том смысле, что любой ряд, образованный из этого ряда заменой слагаемых $\ln (l^{(n_k)}, e^{(n_k)})_{H_{n_k}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ нулями, где $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ — та или иная подпоследовательность последовательности $q, q+1, \ldots$, будет сходящимся. Но это, как известно, эквивалентно абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=q}^{\infty} \ln((l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n})$. С другой стороны, благодаря неравенству $\frac{1}{2}|z| < |\ln(1+z)| < \frac{3}{2}|z|$, справедливому для комплексных $z$ таких, что $|z| < \frac{1}{2}$, абсолютная сходимость последнего ряда эквивалентна тому, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} - 1| < \infty. \tag{2.59}$$

Итак, $l \sim e$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.59).



Далее, $\| l^{(n)} - e^{(n)} \|^2_{H_n} = 2(1 - \mathrm{Re}(l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n})$, поэтому условие (2.59) влечет неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| l^{(n)} - e^{(n)} \|^2_{H_n} < \infty. \tag{2.60}$$

Теперь нетрудно убедиться, что $\sim$ является соотношением эквивалентности. Действительно, $e \sim e$; из (2.59) следует, что если $l \sim e$, то $e \sim l$. Докажем транзитивность: если $l \sim e$ и $e \sim g$, то $l \sim g$. Имеем $|(l^{(n)}, g^{(n)})_{H_n} - 1| \leqslant |(l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} - 1| + |(l^{(n)}, g^{(n)} - e^{(n)})_{H_n}| \leqslant |(l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} - 1| + |(l^{(n)} - e^{(n)}, g^{(n)} - e^{(n)})_{H_n}| + |(e^{(n)}, g^{(n)} - e^{(n)})_{H_n}| \leqslant |(l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} - 1| + |(e^{(n)}, g^{(n)})_{H_n} - 1| + \| l^{(n)} - e^{(n)} \|_{H_n} \| g^{(n)} - e^{(n)} \|_{H_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Из этой оценки, условий (2.59) и сходимости рядов (2.60) для $l, e$ и $e, g$ следует выполнение (2.59) для $l, g$. Итак, $l \sim g$.

Таким образом, $E$ можно разбить в объединение классов эквивалентных между собой стабилизирующих последовательностей и построить полное неймановское произведение. Последнее утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 2.7. ■

Отметим, что в случае вещественных гильбертовых пространств $H_n$ можно, разумеется, повторить конструкцию бесконечного тензорного произведения $\mathcal{H}_{e,1} = \bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} H_n$ со стабилизирующей последовательностью $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ и затем образовать полное неймановское произведение. Понятию эквивалентности $l \sim e$ теперь можно придать более простой вид: $l \sim e$ *тогда и только тогда, когда в пространстве* $\mathcal{H}_{e,1}$ *существует сильный предел* $l^{(1)} \otimes l^{(2)} \otimes \ldots = \lim_{p\to\infty} l^{(1)} \otimes \ldots \otimes l^{(p)} \otimes \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ Действительно, существование такого предела эквивалентно сходимости к конечному отличному от нуля числу произведения $\prod_{n=q}^{\infty} (l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}$ с некоторым $q = 1, 2, \ldots$ Но $(l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}$ вещественны и такие, что $|(l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}| \leqslant 1$, поэтому $(l^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} = 1 + a_n$, где $a_n \leqslant 0$, и сходимость последнего произведения эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$, т. е. ряда (2.59). Таким образом, приведенное сейчас понятие эквивалентности $l \sim e$ равносильно указанному в условии теоремы 2.8. ■

5 8-393

## 11. ТРОЙКИ ПРОСТРАНСТВ

Иногда полезно следующее обобщение понятия цепочки пространств $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$. Пусть имеется три гильбертовых пространства $H$, $H_0$, $H'$. Будем говорить, что они образуют тройку пространств, если выполнены следующие условия: а) $\Phi = H \cap H_0 \cap \cap H'$ плотно в каждом из этих пространств; б) билинейная форма $B(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_{H_0}$ $(\varphi, \psi \in \Phi)$ допускает оценку $|B(\varphi, \psi)| \leqslant \leqslant \|\varphi\|_{H'} \|\psi\|_H$ и поэтому может быть распространена по непрерывности до непрерывной билинейной формы $H' \oplus H \ni (\alpha, v) \mapsto \mapsto B(\alpha, v) \in \mathbb{C}^1$ (обозначим ее опять через $(\alpha, v)_{H_0}$); в) для каждого $u \in H$ существует один и только один вектор $\alpha_u \in H'$ такой, что $(u, v)_H = (\alpha_u, v)_{H_0}$ $(v \in H)$.

Разумеется, если имеется цепочка, то $H_+$, $H_0$, $H_-$ образуют тройку пространств. Вместе с тем легко привести пример тройки, не являющейся цепочкой: положим $H = L_2(\mathbb{R}^N, p(x)\,dx)$, где

$$0 < p(x) \in C(\mathbb{R}^N), \quad H_0 = L_2(\mathbb{R}^N), \quad H' = L_2(\mathbb{R}^N, p^{-1}(x)\,dx)$$

(при $p(x) \geqslant 1$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ получим цепочку, см. § 1, п. 1).

Перефразируем условие в) в определении тройки. Введем непрерывный оператор $A : H' \to H$ такой, что $(\alpha, v)_{H_0} = (A\alpha, v)_H$ $(\alpha \in \in H', v \in H)$; ясно, что $\|A\| \leqslant 1$. Тогда условие в) означает, что уравнение $A\alpha = u$ для каждого $u \in H$ имеет одно и только одно решение $\alpha = \alpha_u \in H'$. Иными словами, оператор $A$ отображает все $H'$ на все $H$ и $\operatorname{Ker} A = 0$. По теореме Банаха это эквивалентно тому, что существует непрерывный оператор $A^{-1}$, отображающий все $H$ на все $H'$. Это и есть требуемая перефразировка условия в).

Ясно также, что условие в) означает совпадение $H'$ с совокупностью всех антилинейных непрерывных функционалов над $H$, записанных посредством формы $(\cdot, \cdot)_{H_0}$. Поэтому мы также будем говорить, что $H'$ двойственно к $H$ относительно $H_0$.

**Теорема 2.10.** *Если $H$, $H_0$, $H'$ — тройка, то и $H'$, $H_0$, $H$ — тройка. Если $H_1$, $H_{0,1}$, $H_1'$ и $H_2$, $H_{0,2}$, $H_2'$ — тройки, то и $H_1 \otimes \otimes H_2$, $H_{0,1} \otimes H_{0,2}$, $H_1' \otimes H_2'$ — тройка.*

Доказательство. Пусть $H$, $H_0$, $H'$ — тройка. Для $H'$, $H_0$, $H$ условие а) выполняется тривиально. Далее, так как $B(\varphi, \psi) = \overline{B(\psi, \varphi)}$, то из условия б) для $H$, $H_0$, $H'$ следует $|B(\varphi, \psi)| = |B(\psi, \varphi)| \leqslant \|\varphi\|_H \|\psi\|_{H'}$ $(\varphi, \psi \in \Phi)$, т. е. условие б) выполняется для $H'$, $H_0$, $H$, поэтому существует продолжение по непрерывности формы $B(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_{H_0}$ в форму $H \oplus H' \ni (u, \beta) \mapsto B_1(u, \beta) \in \mathbb{C}^1$. Докажем, что для $H'$, $H_0$, $H$ выполняется и условие в). Введем непрерывный оператор $A_1 : H \to \to H'$ такой, что $B_1(u, \beta) = (A_1 u, \beta)_{H'}$ $(u \in H, \beta \in H')$. Требуется доказать, что существует непрерывный обратный оператор $A_1^{-1}$.

Для $\psi, \varphi \in \Phi$ имеем $(\varphi, \psi)_{H_0} = \overline{(\psi, \varphi)_{H_0}} = \overline{B_1(\psi, \varphi)} = (\varphi, A_1\psi)_{H'}$.



Поэтому $(A\varphi, \psi)_H = (\varphi, \psi)_{H_0} = (\varphi, A_1\psi)_{H'}$ $(\varphi, \psi \in \Phi)$. В равенстве $(A\varphi, \psi)_H = (\varphi, A_1\psi)_{H'}$ $(\varphi, \psi \in \Phi)$ операторы $A : H' \to H$, $A_1 : H \to H'$ непрерывны, поэтому в нем можно перейти к пределу при $\varphi \to \alpha$ (в $H'$) и $\psi \to v$ (в $H$). В результате получим $(A\alpha, v)_H = (\alpha, A_1 v)_{H'}$ $(\alpha \in H', v \in H)$, т. е. $A_1 = A^*$. Но если $A^{-1}$ существует, то и $(A^*)^{-1} = = A_1^{-1}$ существует. Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Обозначим $H = H_1 \otimes H_2$, $H_0 = = H_{0,1} \otimes H_{0,2}$, $H' = H_1' \otimes H_2'$ и $\Phi_j = H_j \cap H_{0,j} \cap H_j'$ $(j = 1, 2)$. Так как $\Phi_1 \otimes \Phi_2 \subseteq H \cap H_0 \cap H' = \Phi$ и плотно в каждом из пространств $H$, $H_0$, $H'$, то и $\Phi$ плотно в каждом из этих пространств, т. е. условие а) для $H$, $H_0$, $H'$ выполнено.

Рассмотрим форму $B_j(\varphi^{(j)}, \psi^{(j)}) = (\varphi^{(j)}, \psi^{(j)})_{H_{0,j}}$ $(\varphi^{(j)}, \psi^{(j)} \in \Phi_j)$, ее продолжение до билинейной формы $B_j$ переменных $(\alpha^{(j)}, v^{(j)}) \in H_j' \oplus H_j$ и соответствующий оператор $A_j$: $H_j' \to H_j$ такой, что $(\alpha^{(j)}, v^{(j)})_{H_{0,j}} = = (A_j\alpha^{(j)}, v^{(j)})_{H_j}$ $(\alpha^{(j)} \in H_j', v^{(j)} \in H_j,\ j = 1, 2)$. Произведение $A_1 \otimes A_2$ действует непрерывно из всего $H_1' \otimes H_2'$ в $H_1 \otimes H_2$ и имеет обратный $(A_1 \otimes A_2)^{-1} = A_1^{-1} \otimes A_2^{-1}$. Свойства б) и в) будут доказаны, если мы установим, что билинейная форма $B(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_{H_0}$ $(\varphi, \psi \in \Phi)$ допускает оценку $|B(\varphi, \psi)| \leqslant \|\varphi\|_{H'} \|\psi\|_H$ $(\varphi, \psi \in \Phi)$ и соответствующий оператор $A$ совпадает с $A_1 \otimes A_2$.

Пусть $\varphi = \sum_{n=1}^{p} \varphi_n^{(1)} \otimes \varphi_n^{(2)}$, $\psi = \sum_{m=1}^{p} \psi_m^{(1)} \otimes \psi_m^{(2)}$ $(\varphi_n^{(j)}, \psi_m^{(j)} \in \Phi_j;\ j = 1, 2)$, тогда

$$B(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_{H_0} = \sum_{n,m=1}^{p} (\varphi_n^{(1)}, \psi_m^{(1)})_{H_{0,1}} (\varphi_n^{(2)}, \psi_m^{(2)})_{H_{0,2}} =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{p} (A_1\varphi_n^{(1)}, \psi_m^{(1)})_{H_1} (A_2\varphi_n^{(2)}, \psi_m^{(2)})_{H_2} =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{p} ((A_1\varphi_n^{(1)}) \otimes (A_2\varphi_n^{(2)}), \psi_m^{(1)} \otimes \psi_m^{(2)})_H = ((A_1 \otimes A_2)\varphi, \psi)_H. \quad (2.61)$$

Отсюда заключаем, что $|B(\varphi, \psi)| = |((A_1 \otimes A_2)\varphi, \psi)_H| \leqslant \leqslant \|A_1 \otimes A_2\| \|\varphi\|_{H'} \|\psi\|_H \leqslant \|\varphi\|_{H'} \|\psi\|_H$. По непрерывности это неравенство распространяется до неравенства $|B(\varphi, \psi)| \leqslant \leqslant \|\varphi\|_{H'} \|\psi\|_H$ $(\varphi, \psi \in \Phi)$. Теперь можно утверждать, что существует оператор $A : H' \to H$, для которого, в частности, справедливо равенство $B(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi)_H$ $(\varphi, \psi \in \Phi)$. Сопоставляя это соотношение с (2.61), заключаем, что $A = A_1 \otimes A_2$. ■

Отметим также, что в условии в) можно не требовать единственность вектора $\alpha_u \in H'$, но зато потребовать выполнение аналогичного условия и для пространств $H'$ и $H$. Ясно, что из условий а) — в) вытекает сформулированное сейчас требование, так как $H'$, $H_0$, $H$ также тройка. Обратно, из последнего условия вытекает условие в). Действительно, предполагая неединственность определения $\alpha_u$, найдем такое $0 \neq \gamma \in H'$, что $(\gamma, v)_{H_0} = 0$ $(v \in H)$. Согласно нашему требованию для любого $\alpha \in H'$ существует $u_\alpha \in H$ такое, что $(\beta, \alpha)_{H'} = (\beta, u_\alpha)_{H_0}$ $(\beta \in H')$. Полагая здесь $\alpha = \beta = \gamma$, получаем $(\gamma, \gamma)_{H'} = (\gamma, u_\gamma)_{H_0} = 0$, т. е. $\gamma = 0$, что абсурдно.

## § 3. ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

Здесь будут рассмотрены существенные для дальнейшего примеры цепочек

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+, \tag{3.1}$$

составленных из пространств функций конечного числа переменных в ограниченных и неограниченных областях.

### 1. ПРОСТРАНСТВА СУММИРУЕМЫХ С КВАДРАТОМ ФУНКЦИЙ С ВЕСОМ

Рассмотрим простой пример цепочки (3.1), обобщающий пример § 1, п. 1. Несмотря на тривиальность конструкции, такие цепочки часто встречаются.

Пусть $H_0 = L_2(R, d\mu(x))$, где $R$ — пространство с мерой $\mu$, заданной на некоторой $\sigma$-алгебре множеств из $R$, $\mu(R) \leqslant \infty$. Рассмотрим некоторый почти везде конечный измеримый вес $p(x) \geqslant 1$ $(x \in R)$ и построим пространство $L_2(R, p(x)\,d\mu(x))$. Его, как легко видеть, можно принять в качестве позитивного пространства $H_+$. Утверждается, что *соответствующее негативное пространство $H_-$ равно $L_2(R, p^{-1}(x)\,d\mu(x))$, т. е.*

$$L_2(R, p^{-1}(x)\,d\mu(x)) \supseteq L_2(R, d\mu(x)) \supseteq L_2(R, p(x)\,d\mu(x)) \tag{3.2}$$

*является цепочкой.*

Действительно, найдем оператор $I: H_0 \to H_+$. Имеем

$$\int_R f(x)\overline{u(x)}\,d\mu(x) = (f, u)_{H_0} = (If, u)_{H_+} = \int_R (If)(x)\overline{u(x)}\,p(x)\,d\mu(x)$$

$$(f \in L_2(R, d\mu(x)),\ u \in L_2(R, p(x)\,d\mu(x))).$$

Благодаря произвольности $u$ из последнего равенства заключаем, что

$$(If)(x) = p^{-1}(x) f(x) \qquad (f \in L_2(R, d\mu(x))). \tag{3.3}$$

Отсюда следует, что для $f, g \in L_2(R, d\mu(x))$ $(f, g)_{H_-} = (If, g)_{H_0} =$



$= \int_R f(x)\overline{g(x)}\,p^{-1}(x)\,d\mu(x)$. Производя пополнение, получаем, что $H_- = L_2(R, p^{-1}(x)\,d\mu(x))$. ■

Таким образом, функции из $H_+$ «быстро убывают», а из $H_-$ «быстро растут» (если считать, например, что $R = \mathbb{R}^N$, $d\mu(x) = dx$ и $p(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$). Обобщенность функции $\alpha \in H_-$ сейчас сказывается лишь в том, что она не входит в $L_2(R, d\mu(x))$.

### 2. СОБОЛЕВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $G$ — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, \ldots)$ с один раз кусочно-непрерывно дифференцируемой границей $\partial G$ *. Соболевское пространство $W_2^l(G)$, где $l = 0, 1, \ldots$, определяется как пополнение $C^\infty(\tilde{G})$ $(\tilde{G} = G \cup \partial G)$ относительно скалярного произведения

$$(u, v)_{W_2^l(G)} = \sum_{|\mu| \leqslant l} (D^\mu u, D^\mu v)_{L_2(G)} \qquad (u, v \in C^\infty(\tilde{G})). \tag{3.4}$$

(Отметим, что если в сумме (3.4) сохранить слагаемые только при $\mu = 0$ и $|\mu| = l$, то получится скалярное произведение, эквивалентное (3.4).) Очевидно, $\|u\|_{L_2(G)} \leqslant \|u\|_{W_2^l(G)}$ $(u \in W_2^l(G))$, причем $W_2^l(G)$ плотно в $L_2(G)$. Поэтому можно построить цепочку (3.1), положив $H_0 = L_2(G)$ и $H_+ = W_2^l(G)$. Обозначив соответствующее негативное пространство $H_-$ через $W_2^{-l}(G)$, получим

$$W_2^{-l}(G) \supseteq L_2(G) \supseteq W_2^l(G) \qquad (l = 0, 1, \ldots). \tag{3.5}$$

Очевидно, при $l'' \geqslant l'$ $W_2^{l''}(G) \subseteq W_2^{l'}(G)$, поэтому $W_2^{-l''}(G) \supseteq W_2^{-l'}(G)$. В обоих этих топологических включениях меньшее пространство плотно в большем.

Пространство $W_2^{-l}(G)$ обобщенных функций называется негативным соболевским пространством. Выясним его природу, ограничиваясь случаем $l = 1$ и гладкой границы. Пусть $\partial G \in C^2$. Рассмотрим в пространстве $L_2(G)$ оператор $\{u \in C^\infty(\tilde{G}) \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} \upharpoonright \partial G = 0\} \ni u \mapsto (-\Delta + 1)u$, где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — дифференцирование по внешней нормали к $\partial G$. Хорошо известно, что такой оператор существенно самосопряжен (см., напр.: Березанский [3, гл. 6, теорема 1.3]). Обозначим через $A \geqslant 1$ его замыкание; ясно, что $A^{-1}$ существует.

* Ограничение гладкости, конечно, можно было бы ослабить, но мы этого не делаем для простоты формулировок.

*Пространство* $W_2^{-1}(G)$ *совпадает с пополнением* $L_2(G)$ *относительно скалярного произведения* $(f, g)_{W_2^{-1}(G)} = (A^{-1}f, g)_{L_2(G)}$ $(f, g \in L_2(G))$. Действительно, нужно показать, что $OI = A^{-1}$, где $O$, $I$ — операторы, связанные с цепочкой (3.5). Пусть $u \in C^\infty(\tilde{G})$ такое, что $\frac{\partial u}{\partial \nu} \upharpoonright \partial G = 0$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_G f(x)\overline{u(x)}\,dx = (f, u)_{H_0} = (If, u)_{W_2^1(G)} =$$

$$= \int_G (If)(x)\overline{u(x)}\,dx + \sum_{j=1}^N \int_G (D_j If)(x)\overline{(D_j u)(x)}\,dx =$$

$$= \int_G (OIf)(x)\overline{((-\Delta+1)u)(x)}\,dx = \int_G (OIf)(x)\overline{(Au)(x)}\,dx \qquad (f \in L_2(G)).$$

Отсюда следует, что $OIf \in \mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{D}(A)$ и $A(OIf) = f$. ■

Оператор $A^{-1}$ интегральный: существует положительно определенное ядро $K(x, y)$ (функция Грина) такое, что

$$(A^{-1}f)(x) = \int_G K(x, y) f(y)\,dy \qquad (f \in C_0(G));$$

$$K(x, y) - e(x, y) \in C(G \times G),$$

где $e(x, y)$ — фундаментальное решение выражения $-\Delta + 1$ (см., напр.: Березанский [3, гл. 3, § 5]). Поэтому $W_2^{-1}(G)$ совпадает также с пополнением $C_0(G)$ относительно следующего скалярного произведения, порожденного положительно определенным ядром:

$$(f, g)_{W_2^{-1}(G)} = \int_G\int_G K(x, y) f(y)\overline{g(x)}\,dxdy \qquad (f, g \in C_0(G)).$$

В общем случае характер пространства $W_2^{-l}(G)$ подобный, только вместо функции Грина для задачи $-\Delta u + u = f$ с граничным условием Неймана $\frac{\partial u}{\partial \nu} \upharpoonright \partial G = 0$ появится функция Грина более сложной задачи для эллиптического уравнения порядка $2l$. Однако изучать пространства $W_2^{-l}(G)$ этим путем затруднительно и мы поступим иначе.

## 3. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ КАК ЭЛЕМЕНТ НЕГАТИВНОГО СОБОЛЕВСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Приведем общее определение дельта-функции. Пусть $R$ — некоторое абстрактное пространство, $\Phi$ — линейное топологическое пространство, состоящее из некоторых функций $R \ni x \mapsto \varphi(x) \in$



$\in \mathbb{C}^1$ и обладающее тем свойством, что из сходимости $\Phi \ni \varphi_n \underset{n\to\infty}{\to} \varphi \in \Phi$ следует при каждом $x \in R$ $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(x)$. Зафиксируем $\xi \in R$ и рассмотрим антилинейный функционал $l$ на $\Phi$, полагая $l(\varphi) = \overline{\varphi(\xi)}$ $(\varphi \in \Phi)$. Согласно сделанному предположению он непрерывен, т. е. $l \in \Phi'$. Этот функционал и называется $\delta$-функцией, сосредоточенной в точке $\xi$, и обозначается $\delta_\xi$. В частности, подобная ситуация будет выполняться, если $R$ — компакт, а $\Phi \subseteq C(R)$ топологически. Отметим, что $\|\delta_\xi\|_{C'(R)} = 1$ $(\xi \in R)$.

**Теорема 3.1.** *Если* $l > \frac{N}{2}$, *то в пространстве* $W_2^{-l}(G)$ *определена* $\delta$-*функция* $\delta_\xi$, *сосредоточенная в* $\xi \in \tilde{G}$, *причем вектор-функция* $\tilde{G} \ni \xi \mapsto \delta_\xi \in W_2^{-l}(G)$ *сильно непрерывна.*

Доказательство. Согласно теоремам вложения при $l > \frac{N}{2}$ топологически $W_2^l(G) \subset C(\tilde{G})$, поэтому $\delta_\xi$ $(\xi \in \tilde{G})$ определена как элемент $W_2^{-l}(G)$.

Докажем непрерывную зависимость $\delta_\xi$ от $\xi$. Прежде всего отметим, что, очевидно, справедливы соотношения

$$W_2^{-l}(G) \supset C'(\tilde{G}) \supset L_2(G) \supset C(\tilde{G}) \supset W_2^l(G), \tag{3.6}$$

все включения в (3.6) топологические и каждое пространство плотно в левее его стоящем. Пусть $S$ — оператор вложения $W_2^l(G) \to C(\tilde{G})$, согласно теоремам вложения он вполне непрерывен. Сопряженный в обычном смысле к нему оператор $S^*: C'(\tilde{G}) \to W_2^{-l}(G)$ будет также вложением, причем вполне непрерывным.

Предположим противное: пусть в некоторой точке $\xi_0 \in \tilde{G}$ вектор-функция $\tilde{G} \ni \xi \mapsto \delta_\xi \in W_2^{-l}(G)$ не является сильно непрерывной. Тогда существует последовательность точек $\xi_n \in \tilde{G}$, сходящаяся к $\xi_0$, и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что $\|\delta_{\xi_n} - \delta_{\xi_0}\|_{W_2^{-l}(G)} \geqslant \varepsilon_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как $\|\delta_{\xi_n}\|_{C'(\tilde{G})} = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а вложение $C'(\tilde{G}) \to W_2^{-l}(G)$ вполне непрерывно, то последовательность $(\delta_{\xi_n})_{n=1}^\infty$ предкомпактна в $W_2^{-l}(G)$, поэтому существует ее подпоследовательность $(\delta_{\xi_{n_k}})_{k=1}^\infty$ такая, что $\delta_{\xi_{n_k}}$ при $k \to \infty$ сильно сходится в $W_2^{-l}(G)$ к некоторому элементу $\alpha \in W_2^{-l}(G)$. Легко видеть, что $\alpha = \delta_{\xi_0}$: для $u \in W_2^l(G)$ имеем $(\alpha, u)_{L_2(G)} = \lim_{k\to\infty}(\delta_{\xi_{n_k}}, u)_{L_2(G)} = \lim_{k\to\infty}\overline{u(\xi_{n_k})} = \overline{u(\xi_0)} = (\delta_{\xi_0}, u)_{L_2(G)}$. Итак, сильно $\delta_{\xi_{n_k}} \underset{k\to\infty}{\to} \delta_{\xi_0}$, что противоречит выбору точек $\xi_n$. ■

## 4. КВАЗИЯДЕРНОСТЬ ВЛОЖЕНИЯ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Справедлива следующая существенная теорема.

**Теорема 3.2.** *Пусть* $W_2^{l'}(G)$, $W_2^{l''}(G)$ — *два соболевских пространства таких, что* $l'' - l' > \frac{N}{2}$ $(l', l'' = 0, 1, \ldots)$. *Тогда вложение* $W_2^{l''}(G) \to W_2^{l'}(G)$ *квазиядерно.*

Доказательство. Рассмотрим сперва основной случай, когда $l' = 0$. Нам нужно доказать, что при $l > \frac{N}{2}$ в цепочке (3.5) вложение $O : W_2^l(G) \to L_2(G)$ квазиядерно. Пусть $J : L_2(G) \to W_2^l(G)$ — изометрия, связанная с цепочкой (3.5). Квазиядерность $O$ эквивалентна квазиядерности $OJ : L_2(G) \to L_2(G)$. Установим последнюю. Для $f \in L_2(G)$ при помощи (1.19), (1.20) получим

$$(OJf)(x) = (Jf)(x) = (Jf, \delta_x)_{L_2(G)} = (f, J^+\delta_x)_{L_2(G)} = \\ = (f, \mathbf{J}\delta_x)_{L_2(G)} = \int_G f(y)\,\overline{(\mathbf{J}\delta_x)(y)}\,dy \tag{3.7}$$

(поясним, что $\mathbf{J}\delta_x \in L_2(G)$). Положим $K(x, y) = \overline{(\mathbf{J}\delta_x)(y)}$, тогда

$$\int_G\int_G |K(x, y)|^2\,dxdy = \int_G \|\mathbf{J}\delta_x\|^2_{L_2(G)}\,dx = \int_G \|\delta_x\|^2_{W_2^{-l}(G)}dx \leqslant \\ \leqslant \max_{x\in\tilde G} \|\delta_x\|^2_{W_2^{-l}(G)}\, m(G) < \infty. \tag{3.8}$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью скалярной функции $\tilde G \ni x \mapsto \|\delta_x\|_{W_2^{-l}(G)} \in \mathbb{R}^1$, вытекающей из теоремы 3.1. Соотношения (3.7) и (3.8) показывают, что оператор $OJ$ — Гильберта — Шмидта.

Доказательство теоремы в общем случае основывается на уже доказанной ее части и следующих двух простых общих леммах.

**Лемма 3.1.** *Пусть $E$ — линейное множество, в котором заданы линейный оператор $E \ni f \mapsto Tf \in E$ и два скалярных произведения $(\cdot,\cdot)_{H_1}$ и $(\cdot,\cdot)_{G_1}$. Обозначим через $H_1$ и $G_1$ пополнения $E$ относительно $(\cdot,\cdot)_{H_1}$ и $(\cdot,\cdot)_{G_1}$ и предположим, что топологически $H_1 \subseteq G_1$. Утверждается, что если вложение $O_1 : H_1 \to G_1$ квазиядерно, то квазиядерным будет и вложение $O_2 : H_2 \to G_2$, где $H_2$, $G_2$ — пополнения $E$ относительно скалярных произведений $(f, g)_{H_2} = (f, g)_{H_1} + (Tf, Tg)_{H_1}$ и $(f, g)_{G_2} = (f, g)_{G_1} + (Tf, Tg)_{G_1}$ $(f, g \in E)$.*

Доказательство. Так как $\|f\|_{H_1} \leqslant \|f\|_{H_2}$ $(f \in E)$, то $H_2$ непрерывно вложено в $H_1$. В свою очередь, согласно предположению вложение $H_1 \to G_1$ квазиядерно. Поэтому вложение $H_2 \to G_1$ квазиядерно и, следовательно, если $(e_j)_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $H_2$ (который можно составить из векторов $e_j \in E$), то

$$\sum_{j=1}^\infty \|e_j\|^2_{G_1} < \infty. \tag{3.9}$$

Введем в $E$, вообще говоря, квазискалярные произведения $(f, g)_{H_3} = (Tf, Tg)_{H_1}$ и $(f, g)_{G_3} = (Tf, Tg)_{G_1}$ $(f, g \in E)$. Отождествление $E$ по каждому из таких произведений дает одно и то же линейное множество $\hat E$ полных прообразов $\hat f = T^{-1}f' = \{f \in E \mid Tf = f'\}$ векторов $f' \in E$. Последующее пополнение приводит к гильбертовым пространствам $H_3$, $G_3$, причем топологически $H_3 \subseteq G_3$. Вложение $H_3 \to G_3$ квазиядерно. Действительно, пусть $(\hat l_j)_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $H_3$, построенный из векторов $\hat l_j \in \hat E$, $l_j \in E$ — некоторый представитель класса $\hat l_j$. Тогда $(Tl_j, Tl_k)_{H_1} = (l_j, l_k)_{H_3} = (\hat l_j, \hat l_k)_{H_3} = \delta_{jk}$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$, т. е. $(Tl_j)_{j=1}^\infty$ будет ортонормированной системой в $H_1$ и благодаря квазиядерности вложения $H_1 \to G_1$ $\sum_{j=1}^\infty \|Tl_j\|^2_{G_1} < \infty$. Но $\|Tl_j\|_{G_1} = \|\hat l_j\|_{G_3}$ и последнее условие означает квазиядерность вложения $A : H_3 \to G_3$.

Отображение $E \ni f \mapsto Bf = \hat f \in \hat E$ благодаря неравенству $\|\hat f\|_{H_3} = \|Tf\|_{H_1} \leqslant \|f\|_{H_2}$ распространяется по непрерывности до непрерывного отображения $B : H_2 \to H_3$. Отображение $AB : H_2 \to G_3$ будет квазиядерным. Поэтому если $(e_j)_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $H_2$, составленный из векторов из $E$, то $\infty > \sum_{j=1}^\infty \|ABe_j\|^2_{G_3} = \sum_{j=1}^\infty \|\hat e_j\|^2_{G_3} = \sum_{j=1}^\infty \|Te_j\|^2_{G_1}$. Отсюда и из (3.9) заключаем, что

$$\sum_{j=1}^\infty \|e_j\|^2_{G_2} = \sum_{j=1}^\infty (\|e_j\|^2_{G_1} + \|Te_j\|^2_{G_1}) < \infty. \blacksquare$$

Замечания. 1. Легко видеть, что $|O_2| \leqslant \sqrt{2}\,|O_1|$.

2. Пусть в формулировке леммы 3.1 оператор $T$ обратим, т. е. $\operatorname{Ker} T = 0$. Тогда ее утверждение остается справедливым, если скалярные произведения $(\cdot,\cdot)_{H_2}$, $(\cdot,\cdot)_{G_2}$ в ее формулировке заменить на $(f, g)_{H_2} = (Tf, Tg)_{H_1}$, $(f, g)_{G_2} = (Tf, Tg)_{G_1}$ $(f, g \in E)$. Доказательство этого факта следует из приведенных выше рассуждений.

**Лемма 3.2.** *Пусть $E$ — линейное множество, в котором заданы скалярные произведения $(\cdot,\cdot)_{H_k}$ и $(\cdot,\cdot)_{G_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Положим $(\cdot, \cdot)_H = \sum_{k=1}^n (\cdot, \cdot)_{H_k}$, $(\cdot, \cdot)_G = \sum_{k=1}^n (\cdot, \cdot)_{G_k}$. Пусть $H_k$, $G_k$, $H$ и $G$ — соответствующие пополнения $E$. Тогда если $H_k \subseteq G_k$ и вложения $H_k \to G_k$ квазиядерны $(k = 1, \ldots, n)$, то таким же будет и вложение $H \to G$.*

Доказательство. Зафиксируем $k = 1, \ldots, n$. Так как $\|f\|_{H_k} \leqslant \|f\|_H$ $(f \in E)$, то $H \subseteq H_k$, причем это вложение непрерывно. Но тогда вложение $H \to G_k$ квазиядерно, и поэтому если $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $H$, то $\sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|_{G_k}^2 < \infty$. Суммируя эти неравенства по всем $k$, получаем, что $\sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|_G^2 < \infty$. ■

Закончим доказательство теоремы. Нам требуется установить, что если $l > \frac{N}{2}$ целое, то вложение $W_2^{m+l}(G) \to W_2^m(G)$ при любом $m = 0, 1, \ldots$ квазиядерно. Имея в виду применение леммы 3.1, положим $E = C^\infty(\tilde{G})$, $(Tf)(x) = (D^\nu f)(x)$, где $D^\nu$ — фиксированная производная порядка $|\nu| \leqslant m$, $(f, g)_{H_1} = (f, g)_{W_2^l(G)}$, $(f, g)_{G_1} = (f, g)_{L_2(G)}$ $(f, g \in E)$. Согласно доказанной части теоремы вложение $H_1 = W_2^l(G) \to L_2(G) = G_1$ квазиядерно, поэтому согласно лемме 3.1 квазиядерным будет и вложение $H_2 \to G_2$, где $H_2$ и $G_2$ — пополнения $E$ относительно скалярных произведений

$$(f, g)_{H_2} = (f, g)_{W_2^l(G)} + (D^\nu f, D^\nu g)_{W_2^l(G)}, \quad (f, g)_{G_2} = (f, g)_{L_2(G)} + (D^\nu f, D^\nu g)_{L_2(G)} \quad (f, g \in E). \tag{3.10}$$

Обозначим скалярные произведения $(\cdot,\cdot)_{H_2}$, $(\cdot,\cdot)_{G_2}$ в (3.10) через $(\cdot,\cdot)_{H_\nu}$, $(\cdot,\cdot)_{G_\nu}$ соответственно и применим лемму 3.2, считая $E = C^\infty(\tilde{G})$; $n$ сейчас равно количеству векторных индексов $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ таких, что $|\nu| \leqslant m$. По доказанному при каждом таком $\nu$ $H_\nu \to G_\nu$ квазиядерно, поэтому квазиядерно также вложение $H \to G$, где $H$ и $G$ — пополнение $E$ относительно скалярных произведений

$$(f, g)_H = n(f, g)_{W_2^l(G)} + \sum_{|\nu| \leqslant m} (D^\nu f, D^\nu g)_{W_2^l(G)},$$

$$(f, g)_G = n(f, g)_{L_2(G)} + \sum_{|\nu| \leqslant m} (D^\nu f, D^\nu g)_{L_2(G)} \quad (f, g \in E).$$

Первое из них эквивалентно $(\cdot, \cdot)_{W_2^{m+l}(G)}$, второе — $(\cdot, \cdot)_{W_2^m(G)}$. Поэтому $H = W_2^{m+l}(G)$, $G = W_2^m(G)$ и теорема полностью доказана ■

Отметим, что при $l > \frac{N}{2}$ оператор $OI$ для цепочки (3.5) будет интегральным с ядром $K(x, y) \in C(\tilde{G} \times \tilde{G})$ (и, разумеется, с конечным следом). Доказывается это так же, как и основной случай теоремы 3.2, только оператор $J$ нужно заменить на $I$. Тогда $K(x, y) = \overline{(I\delta_x)(y)}$ и так как $I$ — изометрия между $W_2^{-l}(G)$ и $W_2^l(G) \subset C(\tilde{G})$, а $\tilde{G} \ni x \mapsto \delta_x \in W_2^{-l}(G)$ — непрерывная вектор-функция, то отсюда следует требуемая непрерывность $K$.



### 5. ТЕОРЕМА О ЯДРЕ В ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ С КВАДРАТОМ ФУНКЦИЙ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Пусть $H_{0,n} = L_2(G^{(n)})$, где $G^{(n)} \subset \mathbb{R}^{N^{(n)}}$ $(N^{(n)} = 1, 2, \ldots)$ ограничена $(n = 1, \ldots, p)$. К полилинейной форме $\bigoplus_{n=1}^{p} H_{0,n} \ni (f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}) \mapsto F(f^{(1)}, \ldots, f^{(p)})$ можно применить теорему 2.7 о ядре, взяв согласно теореме 3.2 в качестве цепочек (2.31) цепочки

$$W_2^{-l^{(n)}}(G^{(n)}) \supset L_2(G^{(n)}) \supset W_2^{l^{(n)}}(G^{(n)}), \quad l^{(n)} > \frac{N^{(n)}}{2}.$$

Тогда ядро $\Phi$ из (2.38) лежит в пространстве $(L_2(G^{(1)})) \otimes \otimes (W_2^{-l^{(2)}}(G^{(2)})) \otimes \ldots \otimes (W_2^{-l^{(p)}}(G^{(p)}))$. Аналогичная ситуация будет и в случае билинейных форм (см. теорему 2.8).

Следующая лемма, в частности, дает некоторую информацию о характере пространства, в котором расположено соответствующее обобщенное ядро.

**Лемма 3.3.** *Пусть $W_2^{l'}(G')$ и $W_2^{l''}(G'')$ $(l', l'' = 0, 1, \ldots)$ — два соболевских пространства в ограниченных областях $G' \subset \mathbb{R}^{N'}$, $G'' \subset \mathbb{R}^{N''}$ с один раз кусочно-непрерывно дифференцируемыми границами. Тогда справедливы следующие топологические включения:*

$$W_2^{\min(l', l'')}(G' \times G'') \supseteq (W_2^{l'}(G')) \otimes (W_2^{l''}(G'')) \supseteq W_2^{l'+l''}(G' \times G''), \tag{3.11}$$
$$W_2^{-\min(l', l'')}(G' \times G'') \subseteq (W_2^{-l'}(G')) \otimes (W_2^{-l''}(G'')) \subseteq W_2^{-(l'+l'')}(G' \times G''),$$

*причем каждое пространство плотно в его содержащем.*

Доказательство. Обозначим нормы трех пространств первой цепочки из (3.11) соответственно через $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_3$ и производные по $x'$, $x''$ через $D^{\mu'}$, $D^{\mu''}$. Очевидно,

$$\|u\|_1^2 \leqslant \sum_{|\mu'| \leqslant l', |\mu''| \leqslant l''} \|D^{\mu'} D^{\mu''} u\|_{L_2(G' \times G'')}^2 \leqslant \|u\|_3^2 \quad (u \in C^\infty((G' \times G'')^\sim)). \tag{3.12}$$

С другой стороны, для функции $u((x', x'')) = \sum_{n=1}^{q} u'_n(x') u''_n(x'')$, где $u'_n \in C^\infty(\tilde{G}')$, $u''_n \in C^\infty(\tilde{G}'')$, имеем

$$\sum_{|\mu'| \leqslant l', |\mu''| \leqslant l''} \|D^{\mu'} D^{\mu''} u\|_{L_2(G' \times G'')}^2 =$$

$$= \sum_{|\mu'|\leqslant l', |\mu''|\leqslant l''} \sum_{n,m=1}^{q} (D^{\mu'}u_n' \cdot D^{\mu''}u_n'',\ D^{\mu'}u_m' \cdot D^{\mu''}u_m'')_{L_2(G'\times G'')} =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{q} \Big(\sum_{|\mu'|\leqslant l'} (D^{\mu'}u_n',\ D^{\mu'}u_m')_{L_2(G')}\Big)\Big(\sum_{|\mu''|\leqslant l''} (D^{\mu''}u_n'',\ D^{\mu''}u_m'')_{L_2(G'')}\Big) =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{q} (u_n',\ u_m')_{W_2^{l'}(G')} (u_n'',\ u_m'')_{W_2^{l''}(G'')} = \| u \|_2^2.$$

Таким образом, для таких $u$ (3.12) дает $\| u \|_1 \leqslant \| u \|_2 \leqslant \| u \|_3$. Учитывая плотность рассматриваемых $u$ в соответствующих пространствах, получаем утверждение леммы относительно первой цепочки из (3.11). Утверждение леммы относительно второй цепочки следует из доказанного по сопряжению. ■

В случае билинейных (а также двулинейных) форм вид соответствующего ядра можно уточнить. Итак, пусть $H_0 = L_2(G)$ в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим непрерывную билинейную форму $H_0 \oplus H_0 \ni (f, g) \mapsto B(f, g)$. Построим цепочку

$$W_2^{-l}(G) \supseteq L_2(G) \supseteq W_2^l(G) \quad \left(l > \frac{N}{2}\right) \tag{3.13}$$

и в ней введем естественную инволюцию, полагая $u^*(x) = \overline{u(x)}$ $(x \in G;\ u \in W_2^l(G))$. Согласно (2.48) существует $\mathrm{B} \in (W_2^{-l}(G)) \otimes \otimes (W_2^{-l}(G))$ такое, что

$$B(u, v) = (\mathrm{B}, v \otimes u^*)_{L_2(G\times G)} \ (u, v \in W_2^l(G)). \tag{3.14}$$

Пусть $J$, $\mathbf{J}$ — операторы, связанные с цепочкой (3.13). Ясно, что они коммутируют с $*$ (см. (2.45)). Поэтому из (3.14) следует

$$B(u, v) = (\mathrm{B},\ (JJ^{-1}v) \otimes (JJ^{-1}u)^*)_{L_2(G\times G)} =$$
$$= ((J \otimes J)^+ \mathrm{B},\ (J^{-1}v) \otimes (J^{-1}u)^*)_{L_2(G\times G)} =$$
$$= ((\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}) \mathrm{B},\ (J^{-1}v) \otimes (J^{-1}u)^*)_{L_2(G\times G)}.$$

Так как $\mathbf{J}: W_2^{-l}(G) \to L_2(G)$, то $K = (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J})\mathrm{B} \in L_2(G \times G)$. Теперь представление (3.14) можно переписать в виде

$$B(u, v) = \int_G \int_G K(x, y)(J^{-1}v)(y)\overline{(J^{-1}u)(x)}\,dxdy \quad (u, v \in W_2^l(G)). \tag{3.15}$$

**Теорема 3.3.** *В представлении* (3.15) *для непрерывной билинейной формы* $L_2(G) \oplus L_2(G) \ni (f, g) \mapsto B(f, g)$ *в действительности* $K \in C((G \times G)^{\sim})$.

Доказательство. Нам понадобится непосредственный вывод представления (2.48). По существу он совпадает с доказательством соответствующей части теоремы 2.7, но имеет более простой



вид. Рассмотрим общую цепочку (2.43) с квазиядерным вложением $H_+ \to H_0$, связанные с ней операторы и непрерывную билинейную форму $H_0 \oplus H_0 \ni (f, g) \mapsto B(f, g)$.

Пусть $A: H_0 \to H_0$ — оператор, отвечающий форме $B$, т. е. $(Af, g)_{H_0} = B(f, g)$ $(f, g \in H_0)$. Тогда для $u, v \in H_+$

$$B(u, v) = (Au, v)_{H_0} = (AOJJ^{-1}u,\ OJJ^{-1}v)_{H_0} =$$
$$= ((OJ)^* A (OJ) J^{-1}u,\ J^{-1}v)_{H_0}. \tag{3.16}$$

Оператор $C = (OJ)^* A (OJ): H_0 \to H_0$ квазиядерный, поэтому существует $F \in H_0 \otimes H_0$ такое, что $(Cf, g)_{H_0} = (F, g \otimes f^*)_{H_0 \otimes H_0}$ $(f, g \in H_0)$ (см. лемму 3.4). Применяя это равенство и (3.16), получаем

$$B(u, v) = (F,\ (J^{-1}v) \otimes (J^{-1}u)^*)_{H_0\otimes H_0} \ (u, v \in H_+) \tag{3.17}$$

(отметим, что перебрасывая здесь оба оператора $J^{-1}$ на $F$, получаем представление (2.48), где $\mathrm{B} = (\mathbf{J}^{-1} \otimes \mathbf{J}^{-1})F$).

Рассмотрим теперь форму $B$, фигурирующую в теореме. Сравнивая (3.15) и (3.16), заключаем, что $F = K$. Подсчитаем ядро $K \in \in L_2(G \times G)$ оператора $C$ непосредственно.

Согласно замечанию § 1, п. 4 $OJ$ — самосопряженный оператор в $H_0$, поэтому $(OJ)^* = OJ$ и для $f \in H_0 = L_2(G)$ $Cf = (OJ)A(OJ)f = JA(OJ)f \in W_2^l(G)$. Таким образом, подобно (3.7)

$$(Cf)(x) = (JA(OJ)f)(x) = (JA(OJ)f,\ \delta_x)_{L_2(G)} =$$
$$= (f,\ (OJ)^* A^* \mathbf{J}\delta_x)_{L_2(G)} = (f,\ (OJ)A^*\mathbf{J}\delta_x)_{L_2(G)} = \int_G f(y)\overline{(JA^*\mathbf{J}\delta_x)(y)}\,dy. \tag{3.18}$$

Отсюда следует, что $K(x, y) = \overline{(JA^*\mathbf{J}\delta_x)(y)}$. Согласно теореме 3.1 вектор-функция $\tilde{G} \ni x \mapsto \delta_x \in W_2^{-l}(G)$ непрерывна. Но $JA^*\mathbf{J}: W_2^{-l}(G) \to W_2^l(G)$ непрерывен, поэтому вектор-функция $\tilde{G} \ni x \mapsto JA^*\mathbf{J}\delta_x \in W_2^l(G)$ также непрерывна, а отсюда вытекает, что $K \in C((G \times G)^{\sim})$. ■

Установим лемму, на которую мы опирались при доказательстве теоремы; она почти совпадает с леммой 2.5.

**Лемма 3.4.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство с инволюцией $*$, $C: H \to H$ — ограниченный оператор. Форма $(Cf, g)_H$ может быть записана в виде $(F, g \otimes f^*)_{H\otimes H}$ $(f, g \in H)$, где $F \in H \otimes H$, тогда и только тогда, когда $C$ квазиядерный.*

Доказательство. Пусть $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $H$, тогда $(e_k^*)_{k=1}^{\infty}$ и $(e_j \otimes e_k^*)_{j,k=1}^{\infty}$ — такие же базисы в $H$ и $H \otimes H$ соответственно. Поэтому если справедливо равенство

$(Cf, g)_H = (K, g \otimes f^*)_{H \otimes H}$ $(f, g \in H)$, то

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |(Ce_k, e_j)_H|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |(K, e_j \otimes \overset{*}{e}_k)_{H\otimes H}|^2 = \|K\|^2_{H\otimes H} < \infty$$

и $C$ — квазиядерный оператор. Обратно, пусть $C$ — квазиядерный, т. е. $\sum_{j,k=1}^{\infty} |(Ce_k, e_j)_H|^2 < \infty$. Тогда в качестве $K$ можно взять элемент из $H \otimes H$, координатами которого по базису $(e_j \otimes \overset{*}{e}_k)_{j,k=1}^{\infty}$ служат числа $(Ce_k, e_j)_H$. Очевидно, $(Cf, g)_H = (K, g \otimes f^*)_{H\otimes H}$ $(f, g \in H)$. ■

Отметим, что вхождение $K$ в $C((G \times G)^{\sim})$, а не в $L_2(G \times G)$ связано с тем обстоятельством, что B по одной из переменных входит не в $W_2^{-l}(G)$, а в $L_2(G)$ (см. (2.46), (2.47)). В п. 11 мы еще возвратимся к представлению (3.14). Там же будет дана простая процедура нахождения ядра B.

## 6. ПРОСТРАНСТВА $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$

Рассмотрим соболевское пространство $W_2^l(G)$ $(l = 1, 2, \ldots)$ и обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ замыкание в $W_2^l(G)$ совокупности $C_0^\infty(G)$ бесконечно дифференцируемых финитных относительно $G$ функций. Как известно (см. напр.: Березанский [3, введение]), $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ — правильное подпространство $W_2^l(G)$, состоящее из всех функций $u \in W_2^l(G)$, для которых $(D^\mu u) \restriction \partial G = 0$, где $|\mu| \leqslant l - 1$. Ясно, что $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G) = H_+$ плотно в $L_2(G) = H_0$. Строя соответствующее негативное пространство, получаем цепочку

$$\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G) \supseteq L_2(G) \supseteq \overset{\circ}{W}{}_2^l(G) \quad (l = 1, 2, \ldots). \tag{3.19}$$

Применяя к цепочкам (3.5) и (3.19) рассуждение § 1, п. 6, можно вывести ряд свойств цепочки (3.19). Мы их формулировать не будем. Отметим лишь, что при $l > \frac{N}{2}$ вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G) \to L_2(G)$ квазиядерно. Это вытекает из следующего простого замечания: если вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно, а $G_+$ — подпространство $H_+$, то и вложение $G_+ \to H_0$ квазиядерно как суперпозиция непрерывного и квазиядерного вложений.

## 7. СОБОЛЕВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^N$ — вообще говоря, неограниченная область пространства $\mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, \ldots)$ с один раз кусочно-непрерывно дифференцируемой границей. На функциях $u, v \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^N)) \restriction \tilde{G}$ $(C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ — совокупность бесконечно дифференцируемых финитных



функций в $\mathbb{R}^N$) введем скалярное произведение $(u, v)_{W_2^l(G)}$ при помощи выражения (3.4). Соответствующее пополнение $(C_0^\infty(\mathbb{R}^N)) \restriction \tilde{G}$, как и в случае ограниченной $G$, называется соболевским пространством $W_2^l(G)$ $(l = 0, 1, \ldots)$.

Ясно, что и сейчас $W_2^l(G)$ и $L^2(G)$ можно принять в качестве позитивного и нулевого пространства и построить цепочку. Для нее мы сохраним обозначение (3.5). В случае неограниченной $G$, разумеется, сохраняется замечание п. 2 о вложениях соболевских пространств с увеличением индекса $l$.

Пусть $G'$ — ограниченная подобласть $G$, тогда $\|u \restriction G'\|_{W_2^l(G')} \leqslant \|u\|_{W_2^l(G)}$ $(u \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^N)) \restriction G)$, и поэтому в результате пополнения получим, что для $u \in W_2^l(G)$ сужение $(u \restriction G') \in W_2^l(G')$. Таким образом, функции пространства $W_2^l(G)$ имеют те же локальные свойства, что и функции такого пространства в ограниченной области. Глобальные же свойства $W_2^l(G)$ могут быть другими, например теорема 3.2 о квазиядерности вложений уже, вообще говоря, не сохраняется.

При введении пространства $W_2^l(\mathbb{R}^N)$ полезен переход к преобразованию Фурье

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \ni u(x) \mapsto \tilde{u}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{-i\langle s, x\rangle} dx$$

$$(s \in \mathbb{R}^N, \ \langle s, x\rangle = s_1 x + \cdots + s_N x_N). \tag{3.20}$$

Для $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, очевидно, $(D^\mu u)^{\sim}(s) = i^{|\mu|} s^\mu \tilde{u}(s)$ $(s \in \mathbb{R}^N)$, где $s^\mu = s_1^{\mu_1} \ldots s_N^{\mu_N}$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$. Поэтому благодаря равенству Парсеваля

$$(u, v)_{W_2^l(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(s) \overline{\tilde{v}(s)} p_l(s)\, ds, \quad p_l(s) = \sum_{|\mu| \leqslant l} s^{2\mu} \geqslant 1$$

$$(l = 0, 1, \ldots; \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)). \tag{3.21}$$

Так как $(C_0^\infty(\mathbb{R}^N))^{\sim}$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^N)$, то (3.21) показывает, что $W_2^l(\mathbb{R}^N)$ изометрично пространству $L_2(\mathbb{R}^N, p_l(s)\,ds)$. Отсюда следует, что (3.20) после замыкания по непрерывности устанавливает изометрию между пространствами цепочки $W_2^{-l}(\mathbb{R}^N) \supseteq L_2(\mathbb{R}^N) \supseteq W_2^l(\mathbb{R}^N)$ и соответствующими пространствами цепочки типа (3.2)

$$L_2(\mathbb{R}^N, p_l^{-1}(s)\,ds) \supseteq L_2(\mathbb{R}^N) \supseteq L_2(\mathbb{R}^N, p_l(s)\,ds) \quad (l = 0, 1, \ldots). \tag{3.22}$$

Отметим, что в (3.22) вложение позитивного пространства в нулевое ни при каком выборе веса не может быть квазиядерным;

это подтверждает сказанное о несохранении теоремы 3.2. Покажем, как можно видоизменить понятие соболевского пространства, чтобы добиться квазиядерности вложения.

Пусть $q(x) \in C^l(\tilde{G})$, $q(x) > 0$ $(x \in \tilde{G})$, фиксирована. На функциях $u, v \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^N)) \upharpoonright \tilde{G}$ введем скалярное произведение

$$(u, v)_{W_2^{(l,q)}(G)} = (u(x)\, q(x),\ v(x)\, q(x))_{W_2^l(G)}; \tag{3.23}$$

пополнение $(C_0^\infty(\mathbb{R}^N)) \upharpoonright \tilde{G}$ относительно этого скалярного произведения обозначим $W_2^{(l,q)}(G)$. Понятно, что $u(x) \in W_2^{(l,q)}(G)$ тогда и только тогда, когда $u(x)\, q(x) \in W_2^l(G)$. Отсюда следует, что локальные свойства функций из $W_2^{(l,q)}(G)$ такие, как и функций из $W_2^l(G)$, т. е. как у соответствующих функций в ограниченной области.

Предположим дополнительно, что $q(x) \geqslant 1$ $(x \in \tilde{G})$. Тогда

$$\| u \|_{W_2^{(l,q)}(G)} = \| uq \|_{W_2^l(G)} \geqslant \| u \|_{L_2(G)} \quad (u \in W_2^{(l,q)}(G)),$$

поэтому $W_2^{(l,q)}(G)$ и $L_2(G)$ можно принять в качестве позитивного и нулевого пространств. Строя соответствующее негативное пространство, получаем цепочку

$$W_2^{-(l,q)}(G) \supseteq L_2(G) \supseteq W_2^{(l,q)}(G). \tag{3.24}$$

**Теорема 3.4.** *Если $l > \frac{N}{2}$ целое, то в пространстве $W_2^{-(l,q)}(\mathbb{R}^N)$ определена δ-функция $\delta_\xi$, сосредоточенная в $\xi \in \mathbb{R}^N$, причем вектор-функция $\mathbb{R}^N \ni \xi \mapsto \delta_\xi \in W_2^{-(l,q)}(\mathbb{R}^N)$ непрерывна и*

$$\| \delta_\xi \|_{W_2^{-(l,q)}(\mathbb{R}^N)} \leqslant c q^{-1}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^N;\ c < \infty). \tag{3.25}$$

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^N$, обозначим через $K$ некоторый открытый шар с радиусом, равным единице, такой, что $\xi \in K$. Согласно теоремам вложения $W_2^l(K) \subset C(\tilde{K})$ и

$$| v(x) | \leqslant c \| v \|_{W_2^l(K)} \quad (x \in \tilde{K},\ v \in W_2^l(K)). \tag{3.26}$$

Поэтому $W_2^{(l,q)}(\mathbb{R}^N) \subset C(\mathbb{R}^N)$ и благодаря (3.26) при $v = uq$ и $x = \xi$ справедливо неравенство

$$| u(\xi) | = q^{-1}(\xi)\, | u(\xi)\, q(\xi) | \leqslant c q^{-1}(\xi) \| (uq) \upharpoonright K \|_{W_2^l(K)} \leqslant$$
$$\leqslant c q^{-1}(\xi) \| u \|_{W_2^{(l,q)}(\mathbb{R}^N)} \quad (\xi \in \mathbb{R}^N;\ u \in W_2^{(l,q)}(\mathbb{R}^N)). \tag{3.27}$$



Это неравенство показывает, что $\delta_\xi$ определена как элемент $W_2^{-(l,q)}(\mathbb{R}^N)$ и справедлива оценка (3.25).

Для доказательства непрерывности $\delta_\xi$ заметим, что для любого открытого шара $K$ с радиусом, равным единице, справедлива оценка

$$\| \delta_\xi - \delta_\eta \|_{W_2^{-(l,q)}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \| q^{-1}(\xi)\, \delta_\xi - q^{-1}(\eta)\, \delta_\eta \|_{W_2^{-l}(K)} \tag{3.28}$$
$$(\xi, \eta \in K).$$

Действительно, для $u \in W_2^{(l,q)}(\mathbb{R}^N)$ подобно (3.27) имеем

$$| (\delta_\xi - \delta_\eta, u)_{L_2(\mathbb{R}^N)} | = | u(\xi) - u(\eta) | = | (q^{-1}(\xi)\, \delta_\xi -$$
$$- q^{-1}(\eta)\, \delta_\eta, (uq) \upharpoonright K)_{L_2(K)} | \leqslant \| q^{-1}(\xi)\, \delta_\xi - q^{-1}(\eta)\, \delta_\eta \|_{W^{-l}(K)} \times$$
$$\times \| (uq) \upharpoonright K \|_{W_2^l(K)} \leqslant \| q^{-1}(\xi)\, \delta_\xi - q^{-1}(\eta)\, \delta_\eta \|_{W_2^{-l}(K)} \| uq \|_{W_2^l(\mathbb{R}^N)} =$$
$$= \| q^{-1}(\xi)\, \delta_\xi - q^{-1}(\eta)\, \delta_\eta \|_{W_2^{-l}(K)} \| u \|_{W_2^{(l,q)}(\mathbb{R}^N)},$$

откуда и следует (3.28).

Из (3.28) и непрерывности $q^{-1}(\xi)$ и вектор-функции $\tilde{K} \ni \xi \mapsto \delta_\xi \in W_2^{-l}(K)$ (см. теорему 3.1) следует требуемая непрерывность $\delta_\xi$. ■

Утверждение теоремы 3.4 справедливо не только для $G = \mathbb{R}^N$, но и для более широкого класса областей. Область $G \subseteq \mathbb{R}^N$ с один раз кусочно-непрерывно дифференцируемой границей назовем регулярной, если существуют ограниченная область $K \subset \mathbb{R}^N$ с границей такого же класса и некоторое $R > 0$ такие, что для любой точки $\xi \in \tilde{G}$, $| \xi | \geqslant R$, найдется область $K_\xi$, полученная из $K$ путем некоторых ортогонального вращения и трансляции и удовлетворяющая условию $\xi \in \tilde{K}_\xi$, $\tilde{K}_\xi \subseteq \tilde{G}$. *Если $G \subseteq \mathbb{R}^N$ — регулярная область, то утверждение теоремы 3.4 сохраняется для пространства $W_2^{-(l,q)}(G)$, причем в ее формулировке $\xi \in \tilde{G}$.* Действительно, сейчас сохранится неравенство (3.26) с $c$, не зависящим от $\xi \in \tilde{G}$, $| \xi | \geqslant R$, а значит, и неравенство типа (3.27) $| u(\xi) | \leqslant c q^{-1}(\xi) \times \| u \|_{W_2^{(l,q)}(G)}$ $(\xi \in \tilde{G},\ | \xi | \geqslant R)$. Отсюда вытекает оценка типа (3.25). Доказательство непрерывности $\delta_\xi$ не отличается от приведенного выше. ■

Мы не будем обобщать эту теорему на случай нерегулярных областей, например областей с уходящими на бесконечность «остриями», когда $c$ в (3.25) зависит, вообще говоря, от $\xi \in \tilde{G}$.

**Теорема 3.5.** *Пусть $G = \mathbb{R}^N$ или, более общо, $G$ является регулярной областью, $g(x) \geqslant 1$ $(x \in \tilde{G})$. Вложение $W_2^{(l,q)}(G) \to L_2(G)$ будет квазиядерным, если выполнены условия*

$$l > \frac{N}{2}, \quad \int_G q^{-2}(x)\,dx < \infty. \tag{3.29}$$

Доказательство. Оно мало отличается от доказательства теоремы 3.2 в основном случае. Действительно, рассмотрим цепочку (3.24) и связанные с ней операторы. Нужно доказать квазиядерность оператора $OJ : L_2(G) \to L_2(G)$. Для него, очевидно, справедливо представление (3.7). Полагая $K(x, y) = \overline{(\mathbf{J}\delta_x)(y)}$, получаем при помощи (3.25) для $G$ и (3.29)

$$\int_G \int_G |K(x, y)|^2\,dxdy = \int_G \|\mathbf{J}\delta_x\|^2_{L_2(G)} dx = \int_G \|\delta_x\|^2_{W_2^{-(l,q)}(G)} dx \leqslant$$

$$\leqslant c^2 \int_G q^{-2}(x)\,dx < \infty. \ \blacksquare$$

Как и в случае ограниченной $G$, для регулярной области оператор $OI$ при $l > \frac{N}{2}$ будет интегральным с ядром из $C((G \times \tilde{G})$ ). Более того, для доказательства этого факта используется лишь непрерывность вектор-функции $\tilde{G} \ni \xi \mapsto \delta_\xi \in W_2^{-(l,q)}(G)$, а оценка (3.25) не нужна. Поэтому он, как это видно из доказательства теоремы 3.4, верен и для нерегулярных областей.

## 8. СОБОЛЕВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С ВЕСОМ

В дальнейшем пространства $W_2^{(l,q)}(G)$ будут играть в основном вспомогательную роль. Гораздо более часто будут встречаться соболевские пространства с весом $W_2^l(G, p(x)\,dx)$, которые определяются следующим образом.

Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^N$ — вообще говоря, неограниченная область пространства $\mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, \ldots)$ с один раз кусочно-непрерывно дифференцируемой границей, $p(x) \in C(\tilde{G})$, $p(x) > 0$ $(x \in \tilde{G})$ — фиксированный вес. На функциях $u, v \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^N)) \restriction \tilde{G}$ введем скалярное произведение

$$(u, v)_{W_2^l(G, p(x)dx)} = \sum_{|\mu| \leqslant l} \int_G (D^\mu u)(x)\,\overline{(D^\mu v)(x)}\,p(x)\,dx \quad (l = 0, 1, \ldots); \tag{3.30}$$

$W_2^l(G, p(x)dx)$ определим как пополнение $(C_0^\infty(\mathbb{R}^N)) \restriction \tilde{G}$ относительно (3.30). Ясно, что локальные свойства функций из $W_2^l(G, p(x)\,dx)$ будут такими же, как и функций из $W_2^l(G')$ с ограниченной $G'$. Сравнивая (3.23) и (3.30), очевидно получаем на функциях $u \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^N)) \restriction \tilde{G}$ оценку $\|u\|_{W_2^{(l,q)}(G)} \leqslant c_l \|u\|_{W_2^l(G, q^2_{(l)}(x)dx)}$ $(c_l < \infty)$, где введено обозначение

$$q_{(l)}(x) = \max_{|\mu| \leqslant l} |(D^\mu q)(x)| \quad (x \in \tilde{G}). \tag{3.31}$$

Отсюда следует топологическое включение

$$W_2^l(G, q^2_{(l)}(x)\,dx) \subseteq W_2^{(l,q)}(G) \quad (l = 0, 1, \ldots), \tag{3.32}$$

причем первое пространство плотно во втором.

Предположим, что $p(x) \geqslant 1$ $(x \in \tilde{G})$, тогда $W_2^l(G, p(x)\,dx)$ и $L_2(G)$ можно принять в качестве позитивного и нулевого пространств и построить соответствующее негативное пространство $W_2^{-l}(G, p(x)\,dx)$. В результате получим цепочку, которая часто будет использоваться,

$$W_2^{-l}(G, p(x)\,dx) \supseteq L_2(G) \supseteq W_2^l(G, p(x)\,dx) \quad (l = 0, 1, \ldots). \tag{3.33}$$

Роль теоремы 3.2 будет играть следующая теорема.

**Теорема 3.6.** *Пусть $G = \mathbb{R}^N$ или, более общо, $G$ является регулярной областью, $m = 0, 1, \ldots$ и $l > \frac{N}{2}$ целое. Если веса $q_1, q_2 \in C^l(\tilde{G})$ таковы, что $0 < q_1(x) \leqslant q_2(x)$ $(x \in \tilde{G})$ и*

$$\int_G \frac{q_1^2(x)}{q_2^2(x)}\,dx < \infty, \tag{3.34}$$

*то вложение $W_2^{m+l}(G, q^2_{2,(l)}(x)dx) \to W_2^m(G, q_1^2(x)\,dx)$ квазиядерно.*

Доказательство. Сравнивая условия этой теоремы и теоремы 3.5, заключаем, что вложение $H_1 = W_2^{(l, \frac{q_2}{q_1})}(G) \to L_2(G) = G_1$ будет квазиядерным. Применим теперь к этим пространствам замечание к лемме 3.1, полагая $E = (C_0^\infty(\mathbb{R}^N)) \restriction \tilde{G}$ и $(Tf)(x) = q_1(x) f(x)$ $(x \in \tilde{G},\ f \in E)$; $\operatorname{Ker} T = 0$. В результате получим, что вложение $H_2 = W_2^{(l,q_2)}(G) \to L_2(G, q_1^2(x)\,dx) = G_2$ квазиядерно.

Согласно (3.32) вложение $W_2^l(G, q^2_{2,(l)}(x)\,dx) \to W_2^{(l,q_2)}(G)$ непрерывно, поэтому вложение $W_2^l(G, q^2_{2,(l)}(x)\,dx) \to L_2(G, q_1^2(x)\,dx)$ квазиядерно.

Дальнейшее рассуждение совершенно аналогично доказательству теоремы 3.2. Именно, применяем лемму 3.1, полагая $E =$

$= (C_0^\infty(\mathbb{R}^N)) \upharpoonright \tilde{G}, (Tf)(x) = (D^\nu f)(x)$, где $D^\nu$ — фиксированная производная порядка $|\nu| \leqslant m$, $(f, g)_{H_1} = (f, g)_{W_2^l(G, q_{2,(l)}^2(x)dx)}$, $(f, g)_{G_1} = (f, g)_{L_2(G, q_1^2(x)dx)}$ $(f, g \in E)$. Учитывая доказанную квазиядерность вложения $H_1 \to G_1$, получаем, что таким будет и вложение $H_2 \to G_2$, где $H_2$ и $G_2$ — пополнение $E$ относительно скалярных произведений

$$(f, g)_{H_2} = (f, g)_{W_2^l(G, q_{2,(l)}^2(x)dx)} + (D^\nu f, D^\nu g)_{W_2^l(G, q_{2,(l)}^2(x)dx)},$$

$$(f, g)_{G_2} = (f, g)_{L_2(G, q_1^2(x)dx)} + (D^\nu f, D^\nu g)_{L_2(G, q_1^2(x)dx)} \quad (f, g \in E).$$

Применяя затем лемму 3.2, заключаем, что квазиядерно вложение $H \to G$, где $H$ и $G$ — пополнение $E$ относительно скалярных произведений

$$(f, g)_H = n(f, g)_{W_2^l(G, q_{2,(l)}^2(x)dx)} + \sum_{|\nu| \leqslant m} (D^\nu f, D^\nu g)_{W_2^l(G, q_{2,(l)}^2(x)dx)},$$

$$(f, g)_G = n(f, g)_{L_2(G, q_1^2(x)dx)} + \sum_{|\nu| \leqslant m} (D^\nu f, D^\nu g)_{L_2(G, q_1^2(x)dx)} \quad (f, g \in E).$$

Очевидно, $H = W_2^{m+l}(G, q_{2,(m)}^2(x)\,dx)$ и $G = W_2^m(G, q_1^2(x)\,dx)$, откуда и следует теорема. ■

При рассмотрении пространства Л. Шварца $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N)$ основных функций нам понадобятся соболевские пространства со специальным весом. Положим

$$S_l(\mathbb{R}^N) = W_2^l(\mathbb{R}^N, (1 + |x|^2)^l\,dx).$$

Тогда

$$(u, v)_{S_l(\mathbb{R}^N)} = \sum_{|\mu| \leqslant l} \int_{\mathbb{R}^N} (D^\mu u)(x) \overline{(D^\mu v)(x)} (1 + |x|^2)^l\,dx$$

$$(l = 0, 1, \ldots;\ u, v \in S_l(\mathbb{R}^N)), \tag{3.35}$$

а последовательность норм $\|\cdot\|_{S_l(\mathbb{R}^N)}$ монотонная: $\|\cdot\|_{S_0(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|\cdot\|_{S_1(\mathbb{R}^N)} \leqslant \ldots$

**Теорема 3.7.** *Если $l'' - l' > \frac{N}{2}$ $(l', l'' = 0, 1, \ldots)$, то вложение $S_{l''}(\mathbb{R}^N) \to S_{l'}(\mathbb{R}^N)$ квазиядерно.*

Доказательство. Пусть $m = 0, 1, \ldots,$ $l > \frac{N}{2}$ целое. Требуется доказать, что вложение $S_{m+l}(\mathbb{R}^N) \to S_m(\mathbb{R}^N)$ квазиядерно. Применим теорему 3.6, где $q_1(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{m}{2}}$ и $q_2(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}(m+l)}$; условие (3.34), очевидно, будет выполнено. Следовательно, вложение $W_2^{m+l}(\mathbb{R}^N, q_{2,(l)}^2(x)\,dx) \to S_m(\mathbb{R}^N)$ квазиядерно.



Для рассматриваемого веса $q_2(x)$ справедлива оценка $q_{2,(l)}(x) \leqslant c_{m,l} q_2(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N;\ c_{m,l} < \infty)$, поэтому топологически $S_{m+l}(\mathbb{R}^N) \subseteq W_2^{m+l}(\mathbb{R}^N, q_{2,(l)}^2(x)\,dx)$. Беря суперпозицию последних двух вложений, заключаем, что $S_{m+l}(\mathbb{R}^N) \to S_m(\mathbb{R}^N)$ квазиядерно. ■

### 9. ПРОСТРАНСТВО Л. ШВАРЦА $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N)$ КАК ПРОЕКТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Пространство $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N)$ обычно определяется следующим образом. Введем на $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ монотонную последовательность норм, полагая

$$\|u\|_{\mathfrak{S}_\tau(\mathbb{R}^N)} = \max_{x \in \mathbb{R}^N} \left((1 + |x|^2)^{\frac{\tau}{2}} \sum_{|\mu| \leqslant \tau} |(D^\mu u)(x)|\right) \quad (\tau = 0, 1, \ldots). \tag{3.36}$$

Пусть $\mathfrak{S}_\tau(\mathbb{R}^N)$ — пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ относительно (3.36). Тогда $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N) = \operatorname{pr}\lim_{\tau \in \mathrm{T}} \mathfrak{S}_\tau(\mathbb{R}^N)$, где $\mathrm{T} = \{0, 1, \ldots\}$, т. е. $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{\tau=0}^\infty \mathfrak{S}_\tau(\mathbb{R}^N)$, и базис окрестностей нуля в $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N)$ составляют множества $U(0;\ \tau, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^N) \mid \|\varphi\|_{\mathfrak{S}_\tau(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon\}$ при произвольных $\tau = 0, 1, \ldots$ и $\varepsilon > 0$. Таким образом, $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N)$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^N$, каждая из которых вместе с любой своей производной убывает при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|^{-l}$; сходимость в $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N)$ описана указанным базисом окрестностей. Покажем, что оно подобным же образом строится и по соболевским пространствам $S_l(\mathbb{R}^N)$.

**Теорема 3.8.** *Пространство $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N)$ совпадает с проективным пределом пространств $S_\tau(\mathbb{R}^N)$: $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N) = \operatorname{pr}\lim_{\tau \in \mathrm{T}} S_\tau(\mathbb{R}^N)$. Это пространство ядерно.*

Доказательство. Для вывода соотношения $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N) = \operatorname{pr}\lim_{\tau \in \mathrm{T}} S_\tau(\mathbb{R}^N)$ нужно доказать два неравенства: для каждого $\tau \in \mathrm{T}$ найдется $\tau' \in T$ такое, что при некотором $c_{\tau\tau'} < \infty$ $\|u\|_{S_\tau(\mathbb{R}^N)} \leqslant c_{\tau\tau'} \|u\|_{\mathfrak{S}_{\tau'}(\mathbb{R}^N)}$ $(u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N))$, и аналогичное неравенство, в котором $S_\tau(\mathbb{R}^N)$ и $\mathfrak{S}_\tau(\mathbb{R}^N)$ необходимо поменять местами.

Первое неравенство тривиально: пусть $l > \frac{N}{2}$ целое, тогда согласно (3.35) для $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\|u\|_{S_\tau(\mathbb{R}^N)}^2 \leqslant \max_{x \in \mathbb{R}^N} \left((1 + |x|^2)^{\tau + l} \sum_{|\mu| \leqslant \tau} |(D^\mu u)(x)|^2\right) \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^{-l}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_{\tau\tau'}^2 \|u\|_{\mathfrak{S}_{\tau'}(\mathbb{R}^N)}^2 \quad (\tau \in \mathrm{T};\ \tau' = \tau + l).$$

Покажем теперь, что для каждого $\tau \in \mathrm{T}$ найдется $\tau' \in \mathrm{T}$ такое, что при некотором $c'_{\tau\tau'} < \infty$ $\|u\|_{\mathfrak{S}_\tau(\mathbb{R}^N)} \leqslant c'_{\tau\tau'} \|u\|_{S_{\tau'}(\mathbb{R}^N)}$ $(u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N))$. Зафиксируем целое $l > \frac{N}{2}$ и обозначим через $K_x$ открытый шар с радиусом, равным единице, и с центром в точке $x \in \mathbb{R}^N$. Согласно теоремам вложения $\|u\|_{C(\widetilde{K}_x)} \leqslant c_1 \|u\|_{W_2^l(K_x)}$ $(u \in W_2^l(K_x))$ с константой $c_1$, не зависящей от $x$. Отсюда следует, что для $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$|u(x)| \leqslant c_1 \|u \upharpoonright K_x\|_{W_2^l(K_x)} \leqslant c_1 \|u\|_{W_2^l(\mathbb{R}^N)} \quad (x \in \mathbb{R}^N). \tag{3.37}$$

Подставляя в (3.37) вместо $u(x)$ функцию $(1+|x|^2)^{\frac{\tau}{2}} (D^\mu u)(x)$, где $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и $|\mu| \leqslant \tau$, получаем

$$(1+|x|^2)^{\frac{\tau}{2}} |(D^\mu u)(x)| \leqslant c_1 \|(1+|x|^2)^{\frac{\tau}{2}} (D^\mu u)(x)\|_{W_2^l(\mathbb{R}^N)} =$$

$$= c_1 \Big( \sum_{|\nu| \leqslant l} \int_{\mathbb{R}^N} |(D^\nu((1+|x|^2)^{\frac{\tau}{2}} (D^\mu u)))(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= c_1 \Big( \sum_{|\nu| \leqslant l} \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \sum_{|\varkappa| \leqslant l, |\lambda| \leqslant \tau + l} c_{\mu\nu\varkappa\lambda} (D^\varkappa (1+|x|^2)^{\frac{\tau}{2}}) (D^\lambda u)(x) \Big|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.38}$$

Здесь $c_{\mu\nu\varkappa\lambda}$ — некоторые коэффициенты, получающиеся из формулы Лейбница. Так как $|D^\varkappa (1+|x|^2)^{\frac{\tau}{2}}| \leqslant c_2 (1+|x|^2)^{\frac{\tau}{2}}$ $(x \in \mathbb{R}^N;$ $|\varkappa| \leqslant m)$, то, оценивая при помощи элементарных неравенств правую часть (3.38) сверху, получаем

$$(1+|x|^2)^{\frac{\tau}{2}} |(D^\mu u)(x)| \leqslant c_3 \sum_{|\lambda| \leqslant \tau + l} \Big( \int_{\mathbb{R}^N} |(D^\lambda u)(x)|^2 (1+|x|^2)^\tau dx \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant c_4 \|u\|_{S_{\tau+l}(\mathbb{R}^N)}.$$

Отсюда и из (3.36) вытекает, что $\|u\|_{\mathfrak{S}_\tau(\mathbb{R}^N)} \leqslant c'_{\tau\tau'} \|u\|_{S_{\tau'}(\mathbb{R}^N)}$ $(u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N))$, где $\tau' = \tau + l$.

Итак, $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N) = \mathrm{pr} \lim\limits_{\tau \in \mathrm{T}} S_\tau(\mathbb{R}^N)$. Ядерность $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^N)$ очевидно следует из теоремы 3.7. ■

Отметим, что из теоремы 1.5 вытекает равенство

$$\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^N) = \bigcup_{\tau=0}^{\infty} S_{-\tau}(\mathbb{R}^N), \quad S_{-\tau}(\mathbb{R}^N) = W_2^{-\tau}(\mathbb{R}^N, (1+|x|^2)^\tau dx). \tag{3.39}$$



## 10. ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ КАК ПРОЕКТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Хорошо известно, что пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ определяется как совокупность функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, в которую введена следующая сходимость: $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \ni \varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, если функции $\varphi_n(x)$ равномерно финитны (т. е. существует $r > 0$, зависящее от $(\varphi_n(x))_{n=1}^\infty$, такое, что $\varphi_n(x) = 0$ при $|x| \geqslant r$ и всех $n = 1, 2, \ldots$) и для каждой производной $(D^\mu \varphi_n)(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (D^\mu \varphi)(x)$ равномерно. Такая сходимость возникает, если в $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ввести индуктивную или проективную топологию (эти топологии не эквивалентны).

В дальнейшем под $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ будем понимать $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ с проективной топологией, которая определяется следующим образом. Обозначим через $\mathrm{T}$ совокупность всех пар $\tau = (\tau_1, \tau_2(x))$, где $\tau_1 = 0, 1, \ldots$, а $\tau_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и $\tau_2(x) \geqslant 1$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. По каждому $\tau \in \mathrm{T}$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ введем норму, полагая

$$\|u\|_{\mathcal{D}_\tau(\mathbb{R}^N)} = \max_{x \in \mathbb{R}^N} \Big(\tau_2(x) \sum_{|\mu| \leqslant \tau_1} |(D^\mu u)(x)|\Big). \tag{3.40}$$

Пусть $\mathcal{D}_\tau(\mathbb{R}^N)$ — пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ относительно (3.40). Тогда $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) = \mathrm{pr} \lim\limits_{\tau \in \mathrm{T}} \mathcal{D}_\tau(\mathbb{R}^N)$, т. е. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) = \bigcap\limits_{\tau \in \mathrm{T}} \mathcal{D}_\tau(\mathbb{R}^N)$, и базис окрестностей нуля составляют множества

$$U(0;\ \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(m)}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \mid$$
$$\|\varphi\|_{\mathcal{D}_{\tau^{(1)}}(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon_1, \ldots, \|\varphi\|_{\mathcal{D}_{\tau^{(m)}}(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon_m\}$$

при произвольных $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(m)} \in \mathrm{T}$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m > 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Система норм (3.40), очевидно, направленная: для каждых $\tau', \tau'' \in \mathrm{T}$ существует $\tau''' \in \mathrm{T}$ такое, что топологически $\mathcal{D}_{\tau'''}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{D}_{\tau'}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{D}_{\tau'''}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{D}_{\tau''}(\mathbb{R}^N)$ (например, можно положить $\tau''' = (\tau'_1 + \tau''_1, \tau'_2(x) + \tau''_2(x))$. Поэтому эквивалентный базис окрестностей нуля образуют множества $U(0;\ \tau, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \mid \|\varphi\|_{\mathcal{D}_\tau(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon\}$ при произвольных $\tau \in \mathrm{T}$ и $\varepsilon > 0$. Нетрудно показать, что как множество $\mathrm{pr} \lim\limits_{\tau \in \mathrm{T}} \mathcal{D}_\tau(\mathbb{R}^N) = C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, а сходимость в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ совпадает со сходимостью, описанной в начале этого пункта.

Покажем, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ может быть построено подобным образом по соболевским пространствам. Положим

$$D_\tau(\mathbb{R}^N) = W_2^{\tau_1}(\mathbb{R}^N, \tau_2(x)\,dx) \quad (\tau = (\tau_1, \tau_2(x)) \in \mathrm{T}). \tag{3.41}$$

Отметим, что система норм (3.41) также направленна: для каждых $\tau', \tau'' \in T$ можно положить $\tau''' = (\tau_1' + \tau_1'', \tau_2'(x) + \tau_2''(x)) \in T$. Тогда топологически $D_{\tau'''}(\mathbb{R}^N) \subseteq D_{\tau'}(\mathbb{R}^N)$, $D_{\tau'''}(\mathbb{R}^N) \subseteq D_{\tau''}(\mathbb{R}^N)$.

**Теорема 3.9.** *Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ совпадает с проективным пределом пространств $D_\tau(\mathbb{R}^N)$ : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) = \operatorname{pr}\lim\limits_{\tau\in T} D_\tau(\mathbb{R}^N)$. Это пространство ядерно.*

Доказательство. Оно аналогично доказательству теоремы 3.8. Пусть $p(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ такова, что $p(x) \geqslant 1$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^N} p^{-1}(x)\,dx < \infty$. Тогда согласно (3.30) для каждого $\tau \in T$ при любой $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ имеем

$$\|u\|^2_{D_\tau(\mathbb{R}^N)} \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^N} (\tau_2(x)\,p(x) \sum_{|\mu|\leqslant\tau_1} |(D^\mu u)(x)|^2) \int\limits_{\mathbb{R}^N} p^{-1}(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c^2_{\tau\tau'} \|u\|^2_{\mathcal{D}_{\tau'}(\mathbb{R}^N)} \quad (\tau' = (\tau_1, (\tau_2(x)\,p(x))^{1/2}).$$

Докажем противоположное неравенство. Зафиксируем $\tau = (\tau_1, \tau_2(x)) \in T$ и целое $l > \frac{N}{2}$ и подставим в (3.37) вместо $u(x)$ функцию $\tau_2(x)\,(D^\mu u)(x)$, где $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и $|\mu| \leqslant \tau_1$. Получим аналогичную (3.38) оценку

$$\tau_2(x)\,|(D^\mu u)(x)| \leqslant c_1 \Big(\sum_{|\nu|\leqslant l} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big|\sum_{|\varkappa|\leqslant l, |\lambda|\leqslant\tau_1+l} c_{\mu\nu\varkappa\lambda}\,(D^\varkappa\tau_2)(x) \times$$
$$\times (D^\lambda u)(x)\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.42)$$

Обозначим через $\tau_2'(x)$ функцию из $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ такую, что $|(D^\varkappa\tau_2)(x)|^2 \leqslant \tau_2'(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ для всех $|\varkappa| \leqslant l$. Оценивая теперь правую часть (3.42) сверху, найдем

$$\tau_2(x)\,|(D^\mu u)(x)| \leqslant c_2 \sum_{|\lambda|\leqslant\tau_1+l} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |(D^\lambda u)(x)|^2\,\tau_2'(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant c_3 \|u\|_{W_2^{\tau_1+l}(\mathbb{R}^N, \tau_2'(x)dx)}.$$

Отсюда и из (3.40) вытекает, что $\|u\|_{\mathcal{D}_\tau(\mathbb{R}^N)} \leqslant c'_{\tau\tau'} \|u\|_{D_{\tau'}(\mathbb{R}^N)}$ $(u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N))$, где $\tau' = (\tau_1 + l, \tau_2'(x)) \in T$.

Итак, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) = \operatorname{pr}\lim\limits_{\tau\in T} D_\tau(\mathbb{R}^N)$. Ядерность $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ следует из теоремы 3.6. ■

Из теоремы 1.5 вытекает равенство

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) = \bigcup_{\tau\in T} D_{-\tau}(\mathbb{R}^N), \quad D_{-\tau}(\mathbb{R}^N) = W_2^{-\tau_1}(\mathbb{R}^N, \tau_2(x)\,dx). \qquad (3.43)$$



В заключение отметим, что из п. 9, 10 и теоремы 3.6 ясно, как строить соболевские пространства, чтобы их проективные пределы оказывались ядерными. Рассмотрим совокупность соболевских пространств $W_2^{\tau_1}(\mathbb{R}^N, \tau_2(x)\,dx)$, где $\tau_1$ пробегает некоторое подмножество чисел $\{0, 1, \ldots\}$, а $\tau_2(x)$ — множество положительных функций из $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Пусть $T$ — совокупность этих пар $\tau = (\tau_1, \tau_2(x))$. Для того чтобы $\operatorname{pr}\lim\limits_{\tau\in T} W_2^{\tau_1}(\mathbb{R}^N, \tau_2(x)\,dx)$ был ядерным пространством, достаточно выполнение следующего условия (условия $N$): для каждого $\tau = (\tau_1, \tau_2(x)) \in T$ найдется $\tau = (\tau_1', \tau_2'(x)) \in T$ такое, что при некоторой функции $q(x) \in C^l(\mathbb{R}^N)$ (зависящей от $\tau_2(x)$ и $\tau_2'(x)$) выполняются требования $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\tau_2(x)}{q^2(x)}\,dx < \infty, q^2(x) \geqslant \tau_2(x)$, $\tau_2'(x) \geqslant q^2_{(l)}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ и $\tau_1' \geqslant \tau_1 + l$ (здесь $l$ — минимальное целое число, большее $\frac{N}{2}$). Разумеется, можно было бы требовать меньшие ограничения на гладкость $\tau_2$, рассматривать вместо $\mathbb{R}^N$ область $G \subseteq \mathbb{R}^N$ и т. п.

## 11. ТЕОРЕМА О ЯДРЕ В ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ С КВАДРАТОМ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим полилинейную форму $\bigoplus\limits_{n=1}^{p} H_{0,n} \ni (f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}) \mapsto F(f^{(1)}, \ldots, f^{(p)})$, где $H_{0,n} = L_2(G^{(n)})$ с неограниченной регулярной $G^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^{N^{(n)}}$ $(N^{(n)} = 1, 2, \ldots)$. К такой или к соответствующей билинейной форме можно, как и в п.5, применить общие теоремы 2.7, 2.8, беря в качестве цепочек (2.31), например, цепочки

$$W_2^{-l^{(n)}}(G^{(n)}, q^2_{n,(l^{(n)})}(x)\,dx) \supseteq L_2(G^{(n)}) \supseteq W_2^{l^{(n)}}(G^{(n)}, q^2_{n,(l^{(n)})}(x)\,dx), \qquad (3.44)$$

где $l^{(n)} > \frac{N^{(n)}}{2}$ и $\int\limits_{G^{(n)}} q_n^{-2}(x)\,dx < \infty$ (требуемая квазиядерность вложений будет выполнена благодаря теореме 3.6).

Для билинейной формы $L_2(G) \oplus L_2(G) \ni (f, g) \mapsto B(f, g)$, где $G \subseteq \mathbb{R}^N$ неограничена и регулярна, также справедливо представление типа (3.15)

$$B(u, v) = \int\limits_G \int\limits_G K(x, y)\,(J^{-1}v)(y)\,\overline{(J^{-1}u)(x)}\,dxdy. \qquad (3.45)$$

Здесь $u, v \in W_2^l(G, q^2_{(l)}(x)\,dx)$, $l > \frac{N}{2}$, $\int\limits_G q^{-2}(x)\,dx < \infty$, а оператор

$J$ связан с цепочкой

$$W_2^{-l}(G, q_{(l)}^2(x)\,dx) \supseteq L_2(G) \supseteq W_2^l(G, q_{(l)}^2(x)\,dx). \qquad (3.46)$$

Сейчас справедлив и аналог теоремы 3.3: в (3.45) ядро $K \in C((G \times G)^\sim)$. Доказывается этот факт точно так, как теорема 3.3, нужно только воспользоваться тем, что вектор-функция $\tilde{G} \ni x \mapsto \delta_x \in W_2^{-l}(G, q_{(l)}^2(x)\,dx)$ непрерывна. Последнее следует из теоремы 3.4 и сопряженного включения к (3.32). Отметим также, что из оценки (3.25) и формулы $K(x, y) = \overline{(JA^*J\delta_x)(y)}$ следует некоторая оценка роста на бесконечности этого ядра.

Если в качестве цепочки (3.44) или (3.46) взять цепочки $S_{-l^{(n)}}(\mathbb{R}^{N^{(n)}}) \supseteq L_2(\mathbb{R}^{N^{(n)}}) \supseteq S_{l^{(n)}}(\mathbb{R}^{N^{(n)}}) \left(l^{(n)} > \frac{N^{(n)}}{2}\right)$, то соответствующее ядро входит в тензорное произведение пространств $S_{-l^{(n)}}(\mathbb{R}^{N^{(n)}})$. Для этого произведения легко доказать факт, аналогичный лемме 3.3 (см. § 4, п. 4).

Перейдем к другой, «элементарной», форме теоремы о ядре для билинейных форм в пространстве $L_2(G)$ (аналогичная конструкция может быть проведена и для полилинейных форм). Итак, пусть $G \subseteq \mathbb{R}^N$ — ограниченная (или нет) область. Рассмотрим характеристическую функцию открытого параллелепипеда в $\mathbb{R}^N$, образованного координатными и параллельными им, проходящими через некоторую точку $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, гиперплоскостями. Произведение этой функции на характеристическую функцию $\varkappa_G(\xi)$ области $G$ и на $(-1)^N \operatorname{sign} x_1 \dots \operatorname{sign} x_N$ обозначим через $\omega(x, \xi)$ $(\xi \in G)$. Очевидно, $\omega(x, \cdot) \in L_2(G)$ и непрерывно зависит от $x \in \mathbb{R}^N$ как вектор-функция со значениями в $L_2(G)$. Положим

$$\mathcal{D} = D_1 \dots D_N = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \dots \partial x_N}. \qquad (3.47)$$

**Теорема 3.10.** *Пусть* $L_2(G) \oplus L_2(G) \ni (f, g) \to B(f, g) = (Af, g)_{L_2(G)}$ *— непрерывная билинейная форма и* $A : L_2(G) \to L_2(G)$ *— отвечающий ей непрерывный оператор. Для любых* $u, v \in C_0^N(G)$ *справедливо представление*

$$B(u, v) = \int_G \int_G L(x, y)(\mathcal{D}u)(y)\overline{(\mathcal{D}v)(x)}\,dx\,dy \qquad (3.48)$$

*с ядром* $L(x, y)$, *непрерывно зависящим от точки* $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ *и имеющим вид*

$$L(x, y) = (A\omega(y, \cdot), \omega(x, \cdot))_{L_2(G)} \quad (x, y \in \mathbb{R}^N). \qquad (3.49)$$

*Здесь* $C_0^N(G)$, *как обычно, обозначает функции из* $C^N(G)$, *финитные относительно* $G$ *и бесконечности.*



Доказательство. Прежде всего установим равенство

$$\int_G (f, \omega(x, \cdot))_{L_2(G)} \overline{(\mathcal{D}u)(x)}\,dx = (f, u)_{L_2(G)} \quad (f \in L_2(G),\ u \in C_0^N(G)). \qquad (3.50)$$

Действительно, продолжая функции $f$ и $u$ нулями вне $G$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int_G (f, \omega(x, \cdot))_{L_2(G)} \overline{(\mathcal{D}u)(x)}\,dx = (-1)^N \int_{\mathbb{R}^N} \left( \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_N} f(\xi)\,d\xi_1 \dots d\xi_N \right) \times \overline{(\mathcal{D}u)(x)}\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{D}_x \left( \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_N} f(\xi)\,d\xi_1 \dots d\xi_N \right) \overline{u(x)}\,dx = (f, u)_{L_2(G)}.$$

Используя (3.50), докажем (3.49):

$$\int_G \int_G (A\omega(y, \cdot), \omega(x, \cdot))_{L_2(G)} (\mathcal{D}u)(y) \overline{(\mathcal{D}v)(x)}\,dx\,dy =$$

$$= \int_G \left\{ \int_G (A\omega(y, \cdot), \omega(x, \cdot))_{L_2(G)} \overline{(\mathcal{D}v)(x)}\,dx \right\} (\mathcal{D}u)(y)\,dy =$$

$$= \int_G (A\omega(y, \cdot), v)_{L_2(G)} (\mathcal{D}u)(y)\,dy = \overline{\int_G (v, A\omega(y, \cdot))_{L_2(G)} \overline{(\mathcal{D}u)(y)}\,dy} =$$

$$= \overline{\int_G (A^*v, \omega(y, \cdot))_{L_2(G)} \overline{(\mathcal{D}u)(y)}\,dy} = \overline{(A^*v, u)}_{L_2(G)} = (Au, v)_{L_2(G)} =$$

$$= B(u, v) \quad (u, v \in C_0^N(G)).$$

Непрерывность ядра (3.49) следует из непрерывности вектор-функции $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto \omega(x, \cdot) \in L_2(G)$. ■

Если ядро $L(x, y)$ окажется достаточно гладким, то в (3.48) выражения $\mathcal{D}$ можно перебросить на него интегрированием по частям и мы получим интегральное представление формы $B(u, v)$. В общем случае производные $\mathcal{D}_x\mathcal{D}_y L(x, y)$ существуют только в смысле обобщенных функций, и представление (3.48) можно понимать как представление с обобщенным (в смысле Л. Шварца) ядром $\mathcal{D}_x\mathcal{D}_y L$.

Установим связь между представлениями (3.48) и (3.15), (3.45). Приведем некоторые общие построения. Будем пользоваться формулой (2.48), записанной подобно (3.15):

$$B(u, v) = (\mathrm{B}, v \otimes u^*)_{H_0 \otimes H_0} = (K, (J^{-1}v) \otimes (J^{-1}u)^*)_{H_0 \otimes H_0}, \qquad (3.51)$$

$$K = (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J})\,\mathrm{B} \in H_0 \otimes H_0 \quad (u, v \in H_+).$$

Предположим, что цепочка (2.43) построена по оператору $D$ так, как это указано в § 1, п. 8, причем в исходном пространстве $H_0$

задана инволюция $*$, относительно которой $D$ веществен (т. е. $(\mathfrak{D}(D))^* = \mathfrak{D}(D)$ и $Df^* = (Df)^*$, $f \in \mathfrak{D}(D)$). Ясно, что эта цепочка будет цепочкой с инволюцией $*$, т. е. $(u^*, v^*)_{H_+} = \overline{(u, v)_{H_0}}$ ($u, v \in H_+ = \mathfrak{D}(D)$). В формулу (3.51) можно вместо $J^{-1}$ подставить $J_0^{-1} = \sqrt{D^*D} = UD$, где $U$ — унитарный оператор в $H_0$, связывающий метрически равные операторы $D$ и $\sqrt{D^*D}$. В результате получим для $u, v \in \mathfrak{D}(D)$

$$B(u, v) = (K, (J_0^{-1}v) \otimes (J_0^{-1}u^*))_{H_0 \otimes H_0} = (K, (UDv) \otimes (UDu^*))_{H_0 \otimes H_0} = \\ = ((U^{-1} \otimes U^{-1}) K, (Dv) \otimes (Du)^*)_{H_0}.$$

Итак, представление (3.51) приобретет вид

$$B(u, v) = (K_1, (Dv) \otimes (Du)^*)_{H_0 \otimes H_0}, \quad K_1 = (U^{-1} \otimes U^{-1}) K \in H_0 \otimes H_0 \\ (u, v \in \mathfrak{D}(D)). \tag{3.52}$$

Сравним теперь формулы (3.48) и (3.52). Для этого построим функцию $\delta(x) \in C(G)$, $\delta(x) > 0$ ($x \in G$) такую, что

$$\int_G \| \omega(x, \cdot) \|^2_{L_2(G)} \delta^2(x)\, dx \leqslant 1 \tag{3.53}$$

(в некоторых случаях, например для ограниченной $G$, в качестве $\delta(x)$ может быть взята константа). Пусть $D$ — оператор в $L_2(G)$, равный замыканию оператора $C_0^\infty(G) \ni u(x) \mapsto \delta^{-1}(x)\ (\mathcal{D}u)\ (x)$. Утверждается, что *$D$ пригодно для написания представления (3.52) в случае $H_0 = L_2(G)$ и инволюции $L_2(G) \ni f(x) \mapsto f^*(x) = \overline{f(x)} \in L_2(G)$. Формулы (3.48) и (3.52) переходят друг в друга, если положить $K_1(x, y) = L(x, y)\, \delta(x)\, \delta(y)$ ($x, y \in G$) и заменить в (3.48) $L$ на $K_1$ и $\mathcal{D}$ на $\delta^{-1} \mathcal{D}$.*

Действительно, из (3.50) при помощи (3.53) следует

$$\| u \|^2_{L_2(G)} = \int_G (u, \omega(x, \cdot))_{L_2(G)} \overline{(\mathcal{D}u)(x)}\, dx \leqslant \\ \leqslant \left( \int_G | (u, \omega(x, \cdot))_{L_2(G)} |^2 \delta^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \| Du \|_{L_2(G)} \leqslant \| u \|_{L_2(G)} \| Du \|_{L_2(G)} \\ (u \in C_0^\infty(G)).$$

Отсюда вытекает, что $\| Du \|_{L_2(G)} \geqslant \| u \|_{L_2(G)}$ ($u \in \mathfrak{D}(D)$). По такому $D$ можно произвести построения § 1, п. 8, а так как $D$ веществен относительно введенной инволюции, то и написать формулу (3.52). С другой стороны, из (3.49) заключаем, что $| L(x, y) | \leqslant \| A \| \| \omega(x, \cdot) \|_{L_2(G)} \| \omega(y, \cdot) \|_{L_2(G)}$ ($x, y \in \mathbb{R}^N$). Поэтому $L(x, y)\, \delta(x)\, \delta(y) \in L_2(G \times G)$. Из (3.48) и (3.52) следует



$$\int_G \int_G L(x, y)\, \delta(x)\, \delta(y)\, (Du)(y)\, \overline{(Dv)(x)}\, dx dy = B(u, v) = \\ = \int_G \int_G K_1(x, y)\, (Du)(y)\, \overline{(Dv)(x)}\, dx dy \quad (u, v \in C_0^N(G)). \tag{3.54}$$

Переходя здесь к пределу, получаем, что это равенство справедливо и для $u, v \in \mathfrak{D}(D) = H_+$. Но $D$ метрически равен $J_0^{-1}$, поэтому $\mathfrak{R}(D) = \mathfrak{R}(J_0^{-1}) = H_0 = L_2(G)$. Таким образом, линейная оболочка функций $(Du)(y)\overline{(Dv)(x)}$ ($u, v \in \mathfrak{D}(D)$) плотна в $L_2(G \times G)$ и поэтому из (3.54) следует равенство $K_1(x, y) = L(x, y) \times \delta(x)\, \delta(y)$, которое, после переопределения $K_1$ на множестве нулевой меры, можно считать выполненным для всех $(x, y) \in G \times G$. ■

Таким образом, представление (3.48) — это по существу представление вида (3.15), (3.45), построенное по оснащению $L_2(G)$, введенному при помощи определенного выше оператора $D$. Благодаря (3.49) ядро представления (3.48) просто вычисляется.

Сделаем еще некоторые замечания.

Обозначим через $D^\circ$ оператор $D$ из (3.52) как действующий из $H_+ = \mathfrak{D}(D)$ в $H_0$. Тогда (3.52), как легко понять, приводит к равенству

$$\mathrm{B} = (D^\circ \otimes D^\circ)^+ K_1. \tag{3.55}$$

Это равенство вместе с формулой (3.49) и процедурой выбора $\delta(x)$ дает возможность подсчитывать ядро $\mathrm{B}$ формы $B(f, g)$ в представлении (2.48), строящемся по цепочке $H_- \supseteq L_2(G) \supseteq \mathfrak{D}(D)$. Если $G$ ограничена, то при $l \geqslant N$ подпространство $\mathring{W}_2^l(G)$ входит в $\mathfrak{D}(D)$, поэтому так подсчитываемое ядро $\mathrm{B}$ будет по существу и ядром формы $B(f, g)$ при использовании цепочки $\mathring{W}_2^{-l}(G) \supseteq L_2(G) \supseteq \mathring{W}_2^l(G)$.

Отметим, что формула (3.49) связана с выражением для элементов матрицы $(A_{jk})_{j,k=1}^m$ оператора $A$ в $m$-мерном пространстве $\mathbb{C}^m$

$$A_{jk} = (A\delta_k, \delta_j)_{\mathbb{C}^m} \quad (j, k = 1, \ldots, m). \tag{3.56}$$

Здесь $\delta_j = (\delta_{jn})_{n=1}^m$ — векторы ортонормированного базиса в $\mathbb{C}^m$. Поясним это. При переходе от $\mathbb{C}^m$ к $L_2(G)$ роль $\delta_j$ должны играть $\delta$-функции $\delta_x(\xi)$ ($x \in G$), однако они не входят в $L_2(G)$, поэтому формула (3.56) лишена смысла. Вместе с тем в (3.56) можно перейти к преобразованному базису, положив $\omega_j = \sum_{l=1}^{j} \delta_l$ ($j = 1, \ldots, m$), и образовать матрицу $L_{jk} = (A\omega_k, \omega_j)_{\mathbb{C}^m}$ ($j, k = 1, \ldots, m$). С помощью этой матрицы легко написать действие оператора. Ядро (3.49) аналогично матрице $(L_{j,k})_{j,k=1}^m$: например, если $G = (0, \infty) \subset$

$\subset \mathbb{R}^1$, то формально можно написать, что $\omega_x(\xi) = \int\limits_0^x \delta_z(\xi)\, dz$ $(x \in$ $\in (0, \infty))$. Обобщенное ядро $\mathcal{D}_x\mathcal{D}_y L$ аналогично матрице (3.56), а формула (3.48) — формуле восстановления действия оператора $A$ по матрице $(L_{j,k})_{j,k=1}^m$.

## 12. ЦЕПОЧКА, ПОСТРОЕННАЯ ПО НЕПРЕРЫВНОМУ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОМУ ЯДРУ

В п. 2 мы видели, что скалярное произведение в $W_2^{-l}(G)$ $(l = 1, 2, \ldots)$, где $G$ — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^N$, задается при помощи некоторого положительно определенного ядра — функции Грина соответствующей эллиптической задачи порядка $2l$. При $l > \frac{N}{2}$ функция Грина непрерывна вплоть до границы области (Березанский [3, гл. 3, § 5]). С другой стороны, в этом случае $W_2^l(G) \subset C(\tilde{G})$, $\delta_\xi \in W_2^{-l}(G)$ и непрерывно зависит от $\xi \in \tilde{G}$ и т. д. (см. п. 3, 4). Покажем, что подобная ситуация достаточно общая при конструировании цепочки по положительно определенному ядру (см. пример из § 1, п. 7).

Итак, пусть $G$ — ограниченная область $\mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, \ldots)$, ядро $\tilde{G} \times \tilde{G} \ni (x, y) \mapsto K(x, y) \in \mathbb{C}^1$ непрерывно и положительно определено. Положим в § 1, п. 7 $R = G$, $d\mu(x) = dx$, тогда $(f, f)_{H_K} \geqslant 0$, где

$$(f, g)_{H_K} = \int\limits_G \int\limits_G K(x, y) f(y) \overline{g(x)}\, dx dy \quad (f, g \in L_2(G)). \tag{3.57}$$

Для простоты будем считать, что $K(x, y)$ невырождено: если при некотором $f \in L_2(G)$ $(f, f)_{H_K} = 0$, то $f(x) = 0$ почти везде. Без ограничения общности будем предполагать, что $(f, f)_{H_K} \leqslant \leqslant \|f\|^2_{L_2(G)}$ $(f \in L_2(G))$.

Согласно § 1, п. 7 можно построить цепочку

$$H_K \supseteq L_2(G) \supseteq H_+, \tag{3.58}$$

в которой роль нулевого играет пространство $L_2(G)$, а негативного — пространство $H_K$ — пополнение $L_2(G)$ относительно (3.57).

**Теорема 3.11.** *Пространство $H_+$ в цепочке (3.58) состоит из непрерывных функций, причем включение $H_+ \subset C(\tilde{G})$ топологическое, а вложение $H_+ \to L_2(G)$ квазиядерно. Поэтому $\delta$-функция $\delta_\xi \in H_K$. Утверждается, что вектор-функция $\tilde{G} \ni \xi \mapsto \delta_\xi \in H_K$ непрерывна, при этом*

$$(\delta_\xi, \delta_\eta)_{H_K} = K(\eta, \xi) \quad (\xi, \eta \in \tilde{G}). \tag{3.59}$$



Доказательство. Согласно доказательству теоремы 1.4 для построения $H_+$ нужно при помощи соотношения $(f, g)_{H_K} = (Kf, g)_{L_2(G)}$ $(f, g \in L_2(G))$ ввести непрерывный положительный оператор $K : L_2(G) \to L_2(G)$, затем положить

$$(u, v)_{H_+} = (K^{-1}u, v)_{L_2(G)} \quad (u, v \in \mathfrak{R}(K)). \tag{3.60}$$

Пространство $H_+$ совпадает с пополнением $\mathfrak{R}(K)$ относительно (3.60)

Сравнивая сказанное с (3.57), заключаем, что оператор $K$ имеет вид

$$(Kf)(x) = \int\limits_G K(x, y) f(y)\, dy \quad (f \in L_2(G)). \tag{3.61}$$

Из (3.61) следует, что $\mathfrak{R}(K) \subseteq C(\tilde{G})$. Нам требуется показать, что пополнение $\mathfrak{R}(K)$ относительно (3.60) также входит в $C(\tilde{G})$. В связи со сложностью нахождения $K^{-1}$ поступим следующим образом.

Пусть $\xi \in \tilde{G}$, $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\chi_{\xi,\varepsilon}(x)$ характеристическую функцию множества $\{x \in \tilde{G} \mid |x - \xi| < \varepsilon\}$, деленную на его меру. Так как согласно (3.57) $(\chi_{\xi,\varepsilon}, \chi_{\eta,\delta})_{H_K} \underset{\varepsilon,\delta\to 0}{\to} K(\eta, \xi)$, то $\|\chi_{\xi,n^{-1}} - \chi_{\xi,m^{-1}}\|^2_{H_K} \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$, т. е. последовательность $\chi_{\xi,n^{-1}}(x)$ фундаментальна по норме $H_K$ $(\xi, \eta \in \tilde{G})$. Отсюда следует, что для каждого $\xi \in \tilde{G}$ существует $\varkappa_\xi \in H_K$ такое, что в $H_K$ $\chi_{\xi,\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \varkappa_\xi$. Ясно также, что

$$(\varkappa_\xi, \varkappa_\eta)_{H_K} = K(\eta, \xi) \quad (\xi, \eta \in \tilde{G}). \tag{3.62}$$

Рассмотрим $u \in \mathfrak{R}(K)$, так как эта функция входит в $H_+$, а $\chi_{\xi,\varepsilon}(x)$ по норме $H_K = H_-$ стремятся при $\varepsilon \to 0$ к $\varkappa_\xi$, то $(\varkappa_\xi, u)_{L_2(G)} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} (\chi_{\xi,\varepsilon}, u)_{L_2(G)}$. Но в силу непрерывности $u$ на $\tilde{G}$ последний предел равен $\overline{u(\xi)}$. Таким образом,

$$(\varkappa_\xi, u)_{L_2(G)} = \overline{u(\xi)} \quad (u \in \mathfrak{R}(K);\ \xi \in \tilde{G}). \tag{3.63}$$

Отсюда для $u \in \mathfrak{R}(K)$ вытекает, что $|u(\xi)| \leqslant \|\varkappa_\xi\|_{H_K} \|u\|_{H_+} = (K(\xi, \xi))^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H_+} \leqslant \max\limits_{\xi\in\tilde{G}} (K(\xi, \xi))^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H_+} = c\|u\|_{H_+}$ $(\xi \in G)$. Таким образом, $\|u\|_{C(\tilde{G})} \leqslant c\|u\|_{H_+}$ $(u \in \mathfrak{R}(K))$. Переходя теперь к пополнению $\mathfrak{R}(K)$ относительно $(\cdot, \cdot)_{H_+}$, заключаем, что $H_+ \subset C(\tilde{G})$, причем последнее неравенство сохраняется. Итак, топологически $H_+ \subset C(\tilde{G})$.

Из (3.63) и плотности $\mathfrak{R}(K)$ в $H_+ \subset C(\tilde{G})$ вытекает, что $\varkappa_\xi = \delta_\xi$ $(\xi \in \tilde{G})$. Поэтому (3.59) следует из (3.62). Из (3.59) и непрерывности на $\tilde{G} \times \tilde{G}$ ядра $K(x, y)$ следует, что вектор-функция $\tilde{G} \ni \xi \mapsto \delta_\xi \in H_K$ непрерывна. Наконец, квазиядерность вложения $H_+ \to L_2(G)$ доказывается повторением выкладки (3.7). ■

Функции из пространства $H_+$ можно охарактеризовать следующим образом. Так как ядро $K(x, y)$ положительно определено и невырождено, то ему отвечает набор его собственных функций $(\varphi_n(x))_{n=1}^\infty$ и соответствующих собственных чисел $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$, причем $\lambda_n > 0$. Из (3.60) вытекает, что при $u, v \in \mathfrak{R}(K)$ $(u, v)_{H_K} = (K^{-\frac{1}{2}}u, K^{-\frac{1}{2}}v)_{L_2(G)}$. Результат пополнения приводит к тому, что $H_+$ состоит из тех и только тех $u \in L_2(G)$, для которых $K^{-\frac{1}{2}}u \in L_2(G)$. Иными словами, $H_+$ состоит из тех и только тех $u \in L_2(G)$, для которых

$$\sum_{n=1}^\infty |(u, \varphi_n)_{L_2(G)}|^2 \lambda_n^{-1} < \infty; \quad (u, v)_{H_+} = \sum_{n=1}^\infty (u, \varphi_n)_{L_2(G)} \overline{(v, \varphi_n)}_{L_2(G)} \lambda_n^{-1}$$
$$(u, v \in H_+). \tag{3.64}$$

Легко также показать, что всякая комплекснозначная мера ограниченной вариации, определенная на борелевских множествах из $\tilde{G}$, входит в $H_K$, причем скалярное произведение двух таких мер $\alpha$ и $\beta$ подсчитывается следующим образом:

$$(\alpha, \beta)_{H_K} = \int_{\tilde{G}} \int_{\tilde{G}} K(x, y)\, d\alpha(x)\, \overline{d\beta(y)}. \tag{3.65}$$

## § 4. ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

Пространства функций бесконечного числа переменных в основном мы будем строить как бесконечные тензорные произведения пространств функций одной переменной и проективные пределы таких произведений. Вначале рассмотрим вопрос о построении оснащений.



### 1. ПРОСТРАНСТВО СУММИРУЕМЫХ С КВАДРАТОМ ФУНКЦИЙ ПО ПРОДАКТ-МЕРЕ И ЕГО ОСНАЩЕНИЕ

Ниже будут рассматриваться функции точки $x \in \mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \ldots$ (топология в $\mathbb{R}^\infty$ не вводится); $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ $(x_n \in \mathbb{R}^1)$ — координатная запись этой точки. Пусть задана фиксированная последовательность непрерывных положительных весов $(p_n(x_n))_{n=1}^\infty$, которые предполагаются вероятностными, т. е. $\int_{\mathbb{R}^1} p_n(x_n)\, dx = 1$. Меру на $\mathbb{R}^\infty$

$$d\theta(x) = (d\theta_1(x_1)) \otimes (d\theta_2(x_2)) \otimes \cdots = (p_1(x_1)\, dx_1) \otimes (p_2(x_2)\, dx_2) \otimes \cdots$$

будем называть (весовой) продакт-мерой. Пространство $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\theta(x))$ согласно § 2, п. 3 можно понимать как бесконечное тензорное произведение $\underset{n=1;e,1}{\overset{\infty}{\otimes}} H_{0,n}$, где $H_{0,n} = L_2(\mathbb{R}^1, d\theta_n, x_n))$, а $e = (e^{(n)}(x_n))_{n=1}^\infty$, $e^{(n)}(x_n) \equiv 1$. Поэтому цепочки $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$, где $H_0 = L_2(\mathbb{R}^\infty, d\theta(x))$, а вложение $H_+ \to H_0$ имеет тот или иной характер, можно строить согласно общим конструкциям § 2, п. 4—6.

Так, для построения цепочки с квазиядерным вложением $H_+ \to H_0$ сперва при помощи теоремы 3.6 построим пространства $H_{+,n} \subseteq H_{0,n}$ такие, что вложения $H_{+,n} \to H_{0,n}$ квазиядерны и $\|e^{(n)}\|_{H_{+,n}} = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Эти пространства можно строить следующим образом. Рассмотрим пространство $W_2^1(\mathbb{R}^1, p_{+,n}(x_n)\, dx_n)$, где $p_{+,n}(x_n)$ — определенная на основании теоремы 3.6 неотрицательная функция такая, что вложение $W_2^1(\mathbb{R}^1, p_{+,n}(x_n)\, dx_n) \to H_{0,n}$ квазиядерно. Принять это пространство в качестве $H_{+,n}$ еще нельзя, так как в нем норма функции $e^{(n)}$ лишь больше или равна единице. Однако с помощью леммы, которая сейчас будет доказана, его можно перенормировать требуемым образом. Полученное так пространство $(W_2^1(\mathbb{R}^1, p_{+,n}(x_n)\, dx_n))^\square$ и принимается в качестве $H_{+,n}$.

**Лемма 4.1.** *Пусть $G$, $H$ — два гильбертовых пространства, причем $H$ плотно в $G$ и $\|u\|_G \leqslant \|u\|_H$ $(u \in H)$, вектор $e \in H$ такой, что $\|e\|_G = 1$. Тогда скалярное произведение*

$$(u, v)_{H^\square} = (u, e)_G \overline{(v, e)_G} + (Pu, Pv)_H \quad (u, v \in H), \tag{4.1}$$

*где $P$ — проектор в $G$ на ортогональное дополнение к $e$, эквивалентно исходному скалярному произведению в $H$ и выполняются соотношения*

$$\|u\|_G \leqslant \|u\|_{H^\square} \quad (u \in H), \quad \|e\|_{H^\square} = 1. \tag{4.2}$$

Через $H^\square$ будем обозначать перенормированное посредством (4.1) пространство $H$.

Доказательство. Так как $H \ni u = (u, e)_G e + Pu$ и $e \in H$, то $Pu \in H$, поэтому (4.1) имеет смысл. Соотношения (4.2), очевидно, выполняются, поэтому осталось доказать эквивалентность норм $\| \cdot \|_{H^\square}$ и $\| \cdot \|_H$. Имеем для $u \in H$

$$\|u\|_H = \|(u, e)_G e + Pu\|_H \leqslant |(u, e)_G| \|e\|_H + \|Pu\|_H \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}\|e\|_H \|u\|_{H^\square}.$$

Обратно, пусть $u_n \in H$ таковы, что при $n \to \infty$ $\| u_n \|_H \to 0$. Тогда в силу оценки $|(u_n, e)_G| \leqslant \| u_n \|_G \leqslant \| u_n \|_H$ $(u_n, e)_G \to 0$, а потому и $\| Pu_n \|_H = \| u_n - (u_n, e)_G e \|_H \leqslant \| u_n \|_H + |(u_n, e)_G| \times \times \| e \|_H \to 0$. Отсюда следует, что $\| u_n \|_{H^\square} \to 0$, поэтому при некотором $c > 0$ $\| u \|_{H^\square} \leqslant c \| u \|_H$ $(u \in H)$. ■

Итак, пространства $H_{+,n}$ построены. Теперь согласно теореме 2.5 можно образовать цепочку

$$\bigotimes_{n=1;e,\delta^{-1}}^{\infty} H_{-,n} \supseteq L_2(\mathbb{R}^\infty, d\theta(x)) \supseteq \bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_{+,n}, \tag{4.3}$$

где $H_{-,n}$ — негативное пространство относительно нулевого $H_{0,n} = L_2(\mathbb{R}^1, d\theta_n(x_n))$ и позитивного $H_{+,n} = (W_2^1(\mathbb{R}^1, p_{+,n}(x_n)\, dx_n))^\square$, а $\delta = (\delta_n)_{n=1}^\infty$ $(\delta_n \geqslant 1)$ — некоторый вес. Если этот вес таков, что выполняется условие (2.25), где $O_n$ — операторы вложения $H_{+,n} \to H_{0,n}$, то вложение позитивного пространства в нулевое в цепочке (4.3) будет квазиядерным. Разумеется, выполнения этого условия всегда можно добиться.

Отметим, что аналогичная (4.3) конструкция может быть проведена с заменой пространств $W_2^1(\mathbb{R}^1, p_{+,n}(x_n)\, dx_n)$ на $W_2^{(1,q+,n)}(\mathbb{R}^1)$ и с применением теоремы 3.5.

## 2. СЛУЧАЙ ГАУССОВСКОЙ МЕРЫ

Построения п. 1 можно сделать более стройными в случае, когда перемножаемые меры являются одномерными гауссовскими, т. е. когда они имеют вид

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}\, e^{-\varepsilon t^2} dt = \gamma_\varepsilon(t)\, dt = dg_\varepsilon(t) \quad (t \in \mathbb{R}^1;\ \varepsilon > 0) \tag{4.4}$$

(в случае $\varepsilon = 1$, т. е. в случае стандартной гауссовской меры, индекс $\varepsilon$ мы обычно опускаем). Прежде всего получим результаты, аналогичные изложенным в § 3, п. 8 для случая $N = 1$ и гауссовской меры. Вместо теоремы 3.6 сейчас справедливо утверждение типа теоремы 3.2.

Построим соболевское пространство $W_2^l(\mathbb{R}^1, dg(t))$ и обозначим его через $G^l(\mathbb{R}^1) = G^l(\mathbb{R}^1, 1)$. Оно является пополнением $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ относительно скалярного произведения



$$(u, v)_{G^l(\mathbb{R}^1)} = \sum_{\mu=0}^{l} \int_{\mathbb{R}^1} (D^\mu u)(t)\, \overline{(D^\mu v)(t)}\, dg(t)$$
$$(u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1);\ l = 0, 1, \ldots). \tag{4.5}$$

**Теорема 4.1.** *Вложение $G^{l+2}(\mathbb{R}^1) \to G^l(\mathbb{R}^1)$ $(l = 0, 1, \ldots)$ квазиядерно, причем его норма Гильберта — Шмидта оценивается сверху числом $2^{l+3}$.*

**Лемма 4.2.** *Действующий в пространстве $G^0(\mathbb{R}^1) = L_2(\mathbb{R}^1, dg(t))$ оператор $A$, равный замыканию оператора*

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \ni u \mapsto -\gamma^{-1}(t)(\gamma(t)u')'(t) + u(t) = -u''(t) + 2tu'(t) + u(t), \tag{4.6}$$

*самосопряжен и его спектр состоит из множества $(2n+1)_{n=0}^\infty$. Собственным вектором, отвечающим собственному числу $2n + 1$, служит полином Эрмита $h_n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Кроме того, $(u,v)_{G^1(\mathbb{R}^1)} = (Au, v)_{G^0(\mathbb{R}^1)}$ $(u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1))$.*

Доказательство леммы. Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ оператор $B$ (гармонический осциллятор), равный замыканию оператора $C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \ni v \mapsto -v''(t) + t^2 v(t)$. Хорошо известно, что $B$ самосопряжен, его спектром являются числа $2n + 1$, а соответствующими собственными векторами — функции $\gamma^{\frac{1}{2}}(t)\, h_n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ (см., напр.: С. Г. Крейн [2, гл. 9, § 2, п. 2]). Отображение $G^0(\mathbb{R}^1) \ni u(t) \mapsto \gamma^{\frac{1}{2}}(t)\, u(t) = U(t) \in L_2(\mathbb{R}^1)$ является изометрией между $G^0(\mathbb{R}^1)$ и $L_2(\mathbb{R}^1)$, при которой образом дифференциального выражения из (4.6) служит выражение $-\gamma^{-\frac{1}{2}}(t)(\gamma(t)(\gamma^{-\frac{1}{2}}(t)U)')'(t) + U(t) = -U''(t) + t^2 U(t)$. Так как $C_0^\infty((\mathbb{R}^1)$ при этом отображении сохраняется, то образом оператора $A$ служит $B$, откуда и следует лемма. ■

Доказательство теоремы. Докажем ее сперва для вложения $G^2(\mathbb{R}^1) \to G^0(\mathbb{R}^1)$. Обозначим через $H_+$ гильбертово пространство, состоящее из $\mathfrak{D}(A)$ со скалярным произведением графика $(u, v)_{H_+} = (Au, Av)_{G^0(\mathbb{R}^1)}$ $(u, v \in \mathfrak{D}(A))$. Очевидно, $\| u \|_{G^0(\mathbb{R}^1)} \leqslant \| Au \|_{G^0(\mathbb{R}^1)} = \| u \|_{H_+}$ $(u \in H_+)$, причем вложение $S : H_+ \to G^0(\mathbb{R}^1)$ квазиядерно. Последнее вытекает из того, что функции $e_n(t) = (2n+1)^{-1} h_n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ образуют ортонормированный базис в $H_+$ и поэтому

$$|S|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \| e_n \|^2_{G^0(\mathbb{R}^1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} = \frac{\pi^2}{8} < \infty. \tag{4.7}$$

Для доказательства квазиядерности вложения $G^2(\mathbb{R}^1) \to G^0(\mathbb{R}^1)$ теперь достаточно установить непрерывность вложения $G^2(\mathbb{R}^1) \to H_+$. Согласно (4.6) для $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ получаем $\|Au\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} \leqslant \|u''\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} + \|u\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} + 2\|tu'\|_{G^0(\mathbb{R}^1)}$. Оценим последнее слагаемое, предполагая дополнительно вещественность функции $u(t)$:

$$\|tu'\|^2_{G^0(\mathbb{R}^1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^1} t^2(u'(t))^2 e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^1} t(u'(t))^2 d(e^{-t^2}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^1}(u'(t))^2 e^{-t^2}dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^1} tu'(t)\,u''(t)\,e^{-t^2}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|u'\|^2_{G^0(\mathbb{R}^1)} + \frac{1}{2}\|tu'\|^2_{G^0(\mathbb{R}^1)} + \frac{1}{2}\|u''\|^2_{G^0(\mathbb{R}^1)}, \tag{4.8}$$

откуда $\|tu'\|^2_{G^0(\mathbb{R}^1)} \leqslant \|u'\|^2_{G^0(\mathbb{R}^1)} + \|u''\|^2_{G^0(\mathbb{R}^1)}$. Такое же неравенство справедливо и для общей $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ — нужно перейти к $\operatorname{Re} u(t)$ и $\operatorname{Im} u(t)$ и сложить оценки. В конечном счете получаем, что $\|Au\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} \leqslant 3\,(\|u\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} + \|u'\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} + \|u''\|_{G^0(\mathbb{R}^1)}) \leqslant 3\sqrt{3}\,\|u\|_{G^2(\mathbb{R}^1)}$ $(u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1))$. Отсюда следует включение $G^2(\mathbb{R}^1) \subseteq H_+$ и неравенство $\|u\|_{H_+} \leqslant 3\sqrt{3}\,\|u\|_{G^2(\mathbb{R}^1)}$ $(u \in G^2(\mathbb{R}^1))$. Таким образом, непрерывность вложения $G^2(\mathbb{R}^1) \to H_+$ и, следовательно, квазиядерность вложения $G^2(\mathbb{R}^1) \to G^0(\mathbb{R}^1)$ установлены. Из последней оценки и (4.7) вытекает, что для соответствующего оператора вложения справедлива оценка $|O| < 2^3$.

Рассмотрим теперь случай вложения $G^{(l+2)}(\mathbb{R}^1) \to G^l(\mathbb{R}^1)$ $(l = 0, 1, \ldots)$. Воспользуемся леммой 3.1 и замечанием 1 к ней, полагая $E = C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $(Tu)(x) = u'(x)$, $H_1 = G^2(\mathbb{R}^1)$, $G_1 = G^0(\mathbb{R}^1)$. Получим, что вложение $G^{3'}(\mathbb{R}^1) \to G^1(\mathbb{R}^1)$ квазиядерно и его норма Гильберта — Шмидта не превосходит $8\sqrt{2}$ (здесь $G^{3'}(\mathbb{R}^1)$ означает перенормировку пространства $G^3(\mathbb{R}^1)$, при которой в скалярном произведении (4.5) для $G^3(\mathbb{R}^1)$ при слагаемых с первой и второй производными стоят коэффициенты, равные двум). Таким образом, вложение $G^3(\mathbb{R}^1) \to G^1(\mathbb{R}^1)$ квазиядерно и его норма Гильберта — Шмидта не превосходит $2^4$.

Продолжаем этот процесс, взяв прежние $E$, $T$ и $H_1 = G^3(\mathbb{R}^1)$, $G_1 = G^1(\mathbb{R}^1)$, затем $H_1 = G^4(\mathbb{R}^1)$, $G_1 = G^2(\mathbb{R}^1)$ и т. д. В результате получим, что вложение $G^{l+2}(\mathbb{R}^1) \to G^l(\mathbb{R}^1)$ квазиядерно и его норма не превосходит $2^{l+3}$. ■

Пространства $G^l(\mathbb{R}^1, \varepsilon)$, аналогичные $G^l(\mathbb{R}^1) = G^l(\mathbb{R}^1, 1)$, разумеется, можно вводить и по общему гауссовскому весу (4.4). Их удобно строить как пополнения $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ относительно скалярного произведения



$$(u, v)_{G^l(\mathbb{R}^1,\varepsilon)} = \sum_{\mu=0}^{l} \varepsilon^{-\mu}\int_{\mathbb{R}} (D^\mu u)(t)\,\overline{(D^\mu v)(t)}\,dg_\varepsilon(t) \tag{4.9}$$

$$(u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1);\ l = 0, 1, \ldots;\ \varepsilon > 0).$$

Отображение $G^l(\mathbb{R}^1) \ni u(t) \mapsto u(\sqrt{\varepsilon}t) = U(t) \in G^l(\mathbb{R}^1, \varepsilon)$ является изометрией между $G^l(\mathbb{R}^1)$ и $G^l(\mathbb{R}^1, \varepsilon)$, поэтому для пространств $G^l(\mathbb{R}^1, \varepsilon)$ $(l = 0, 1, \ldots;\ \varepsilon > 0)$ сохраняется утверждение теоремы 4.1. Через $G^{-l}(\mathbb{R}^1, \varepsilon)$ обозначим негативное пространство, фигурирующее в цепочке $H_- \supseteq G^0(\mathbb{R}^1, \varepsilon) \supseteq G^l(\mathbb{R}^1, \varepsilon)$ $(l = 0, 1, \ldots;\ \varepsilon > 0)$.

Беря проективные пределы пространств $G^l(\mathbb{R}^1, \varepsilon)$, можно построить ядерные пространства $\mathcal{G}(\mathbb{R}^1, \varepsilon) = \operatorname{pr\,lim}_{\tau \in \{0, 1, \ldots\}} G^\tau(\mathbb{R}^1, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$; $\mathcal{G}(\mathbb{R}^1) = \mathcal{G}(\mathbb{R}^1, 1)$ (легко видеть, что все условия, обеспечивающие возможность таких построений, выполнены). Следующая теорема описывает внутренним образом эти пространства.

**Теорема 4.2.** *Функция $\varphi(t) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^1)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(t)\,e^{-\frac{t^2}{2}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^1)$. Отображение $\mathcal{G}(\mathbb{R}^1) \ni \varphi(t) \mapsto \varphi(t)\,e^{-\frac{t^2}{2}} = \Phi(t) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^1)$ является топологическим изоморфизмом между пространствами $\mathcal{G}(\mathbb{R}^1)$ и $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^1)$.*

Доказательство. Достаточно доказать два неравенства: для каждого $\tau = 0, 1, \ldots$ найдутся такие $\tau' = 0, 1, \ldots$ и $c < \infty$, что

$$\|\Phi\|_{S_\tau(\mathbb{R}^1)} \leqslant c\,\|\varphi\|_{G^{\tau'}(\mathbb{R}^1)},\quad \|\varphi\|_{G^\tau(\mathbb{R}^1)} \leqslant c\,\|\Phi\|_{S_{\tau'}(\mathbb{R}^1)}\quad (\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)). \tag{4.10}$$

Для доказательства первого соотношения заметим, что оценка (4.8), в которой $u'$ заменено на $\varphi$, приводит к неравенству

$$\|t\varphi\|^2_{G^0(\mathbb{R}^1)} \leqslant \|\varphi\|^2_{G^0(\mathbb{R}^1)} + \|\varphi'\|^2_{G^0(\mathbb{R}^1)}$$

и тем более к неравенству

$$\|t\varphi\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} \leqslant \|\varphi\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} + \|\varphi'\|_{G^0(\mathbb{R}^1)}\quad (\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)). \tag{4.11}$$

Итерируя (4.11), получаем

$$\|t^2\varphi\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} = \|t\,(t\varphi)\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} \leqslant \|t\varphi\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} + \|(t\varphi)'\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\varphi\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} + 2\|\varphi'\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} + \|\varphi''\|_{G^0(\mathbb{R}^1)},$$

затем оцениваем $\|t^3\varphi\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} = \|t^2(t\varphi)\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} \leqslant \ldots$ и т. д. В результате найдем, что существуют некоторые постоянные $c_{0k}, \ldots, c_{kk}$ такие, что

$$\|t^k\varphi\|_{G^0(\mathbb{R}^1)} \leqslant \sum_{j=0}^{k} c_{jk}\,\|D^j\varphi\|_{G^0(\mathbb{R}^1)}\quad (\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1);\ k = 0, 1, \ldots). \tag{4.12}$$

Оценим $\|\Phi\|_{S_\tau(\mathbb{R}^1)}$ сверху. Согласно (3.35) достаточно оценить сверху выражения $\| (1 + t^2)^{\frac{\tau}{2}} (D^\mu \Phi)(t) \|_{L_2(\mathbb{R}^1)}$ $(\mu = 0, \ldots, \tau)$ или, подставляя сюда $\Phi(t) = \varphi(t) e^{-\frac{t^2}{2}}$ и производя дифференцирование, выражения $\| t^\nu (D^\lambda \varphi)(t) e^{-\frac{t^2}{2}} \|_{L_2(\mathbb{R}^1)} = \| t^\nu (D^\lambda \varphi)(t) \|_{G^0(\mathbb{R}^1)}$ $(\nu = 0, \ldots, 2\tau;\ \lambda = 0, \ldots, \tau)$. Из (4.12) следует, что эти нормы оцениваются сверху суммой норм $\| D^j \varphi \|_{G^0(\mathbb{R}^1)}$ $(j = 0, \ldots, 3\tau)$ с некоторыми коэффициентами. Таким образом, первая из оценок (4.10) доказана, причем $\tau' = 3\tau$.

Докажем вторую оценку. Так как $\varphi(t) = \Phi(t) e^{\frac{t^2}{2}}$, то нам нужно оценить сверху $\| \Phi(t) e^{\frac{t^2}{2}} \|_{G^\tau(\mathbb{R}^1)}$, а для этого достаточно оценить сверху $\| D^\mu (\Phi(t) e^{\frac{t^2}{2}}) \|_{G^0(\mathbb{R}^1)}$ $(\mu = 0, \ldots, \tau)$, где $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$. Дифференцируя, видим, что эти нормы оцениваются сверху нормой $\| \Phi \|_{S_\tau(\mathbb{R}^1)}$ с некоторым коэффициентом. Итак, второе неравенство в (4.10) также имеет место, причем $\tau' = \tau$. ■

В силу отображения $G^l(\mathbb{R}^1) \ni u(t) \mapsto u(\sqrt{\varepsilon} t) = U(t) \in G^l(\mathbb{R}^1, \varepsilon)$ доказанная теорема сохраняется и для пространства $\mathcal{G}(\mathbb{R}^1, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, нужно только в ее формулировке заменить $e^{-\frac{t^2}{2}}$ на $e^{-\frac{\varepsilon t^2}{2}}$.

Возвратимся к построению оснащений. Рассмотрим гауссовскую меру на $\mathbb{R}^\infty$, полагая

$$d\mathfrak{g}_\varepsilon(x) = (dg_{\varepsilon_1}(x_1)) \otimes (dg_{\varepsilon_2}(x_2)) \otimes \cdots, \tag{4.13}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ $(\varepsilon_n > 0)$ — фиксированная последовательность, и образуем пространство $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x))$. В случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 1$ будем обычно писать $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(1,1,\ldots)}$ так, что стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^\infty$ имеет вид

$$d\mathfrak{g}(x) = (dg(x_1)) \otimes (dg(x_2)) \otimes \ldots$$

Конечно, при построении для этого пространства цепочки типа (4.3) можно было бы воспользоваться общей конструкцией, изложенной в п.1, однако удобнее использовать теорему 4.1 и поступить следующим образом. Положим $H_{+,n} = G^2(\mathbb{R}^1, \varepsilon_n)$, $H_{-,n} = G^{-2}(\mathbb{R}^1, \varepsilon_n)$ и образуем цепочку

$$\bigotimes_{n=1;e,\delta^{-1}}^\infty G^{-2}(\mathbb{R}^1, \varepsilon_n) \supseteq L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x)) \supseteq \bigotimes_{n=1;e,\delta}^\infty G^2(\mathbb{R}^1, \varepsilon_n). \tag{4.14}$$

Здесь, как и ранее, $e = (e^{(n)}(x_n))_{n=1}^\infty$, $e^{(n)}(x_n) \equiv 1$, $\delta = (\delta_n)_{n=1}^\infty$ $(\delta_n \geqslant 1)$ — некоторый вес. Так как $\| e^{(n)} \|_{G^2(\mathbb{R}^1, \varepsilon_n)} = 1$, то такое построение корректно. Вложение позитивного пространства в нулевое в цепочке (4.14) будет квазиядерным, если $\delta$ будет удовлетворять условию (2.25), которое вследствие теоремы 4.1 выполняется, если, например, $\sum_{n=1}^\infty 2^{6n} \delta_n^{-1} < \infty$.



## 3. ВЗВЕШЕННОЕ БЕСКОНЕЧНОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЯДЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Перейдем к построению пространств функций бесконечного числа переменных, и прежде всего изложим одну общую конструкцию. Будем строить ядерное пространство как проективный предел гильбертовых пространств, входящих в объемлющее гильбертово пространство $H_0$ (см. § 1, п. 10); предположение о существовании $H_0$ удобно с чисто технической точки зрения (определены негативные пространства), без этого предположения излагаемая ниже конструкция также возможна. Именно, пусть задано семейство гильбертовых пространств $(H_\tau)_{\tau \in \mathrm{T}}$, где $\mathrm{T}$ — произвольное множество индексов. Будем считать, что каждое $H_\tau$ является плотным подмножеством некоторого объемлющего гильбертова пространства $H_0$ $(0 \in \mathrm{T})$, причем вложение $H_\tau \to H_0$ непрерывно и имеет норму, не превосходящую единицы. Предполагается, что $\Phi = \bigcap_{\tau \in \mathrm{T}} H_\tau$ плотно в каждом $H_\tau$ и для любых $\tau', \tau'' \in \mathrm{T}$ найдется такое $\tau''' \in \mathrm{T}$, что $H_{\tau'''} \subseteq H_{\tau'}$, $H_{\tau''}$ и вложения $H_{\tau'''} \to H_{\tau'}$, $H_{\tau'''} \to H_{\tau''}$ квазиядерны. Снабдив $\Phi$ топологией, базис которой составляют окрестности $U(\psi; \tau, \varepsilon) = \{\varphi \in \Phi \mid \| \varphi - \psi \|_{H_\tau} < \varepsilon\}$ $(\tau \in \mathrm{T}, \varepsilon > 0)$, получим ядерное пространство $\Phi = \mathrm{pr} \lim_{\tau \in \mathrm{T}} H_\tau$.

Пусть теперь имеется последовательность так построенных ядерных пространств $(\Phi_n)_{n=1}^\infty$: $\Phi_n = \mathrm{pr} \lim_{\tau_n \in \mathrm{T}_n} H_{\tau_n}$, где $(H_{\tau_n})_{\tau_n \in \mathrm{T}_n}$ — соответствующее семейство гильбертовых пространств, $H_{0_n}$ $(0_n \in \mathrm{T}_n)$ — пространство $H_0$ для этого семейства. Предположим, что существует совместная стабилизирующая последовательность $e = (e^{(n)})_{n=1}^\infty$, где $e^{(n)} \in \Phi_n$, причем $\| e^{(n)} \|_{H_{\tau_n}} = 1$ для каждого $\tau_n \in \mathrm{T}_n$. Выберем в каждом $\mathrm{T}_n$ по индексу $\tau_n$ и рассмотрим взвешенное бесконечное тензорное произведение $\mathcal{H}_{\tau, e, \delta} = \bigotimes_{n=1;e,\delta}^\infty H_{\tau_n}$, где $\delta = (\delta_n)_{n=1}^\infty$ $(\delta_n \geqslant 1)$ — некоторый вес, а $\tau = (\tau_n)_{n=1}^\infty \in \times_{n=1}^\infty \mathrm{T}_n$ — выделенная последовательность. Построим проективный предел гильбертовых пространств $\mathcal{H}_{\tau;e,\delta}$, меняя всевозможным образом $\tau_n$ по $\mathrm{T}_n$ и беря произвольные веса $\delta$ указанного вида. Обозначим его через в. $\bigotimes_{n=1;e}^\infty \Phi_n$ и назовем взвешенным тензорным произведением пространств $\Phi_n$. Таким образом,

$$T = \{\tau = (\tau, \delta) = ((\tau_n)_{n=1}^{\infty}, (\delta_n)_{n=1}^{\infty}) \mid \tau_n \in T_n, \delta_n \geqslant 1\},$$

$$\text{в.}\cdot \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n = \operatorname*{pr\,lim}_{(\tau,\delta)\in T} \mathcal{H}_{\tau;e,\delta}. \tag{4.15}$$

Роль $0 \in T$ играет $(0, 1) = ((0_n)_{n=1}^{\infty}, 1)$.

**Теорема 4.3.** *Определение взвешенного бесконечного тензорного произведения* в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$ *ядерных пространств корректно. Это произведение является ядерным пространством.*

Доказательство. Так как каждое $H_{\tau_n}$ плотно в $H_{0_n}$, то $\mathcal{H}_{\tau;e,\delta} = \bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_{\tau_n}$, очевидно, плотно в $\mathcal{H}_{0;e,1} = \bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} H_{0_n}$. Соответствующий оператор вложения по норме не превосходит единицы — это вытекает из леммы 2.3. Ясно, что $\bigcap_{(\tau,\delta)\in T} \mathcal{H}_{\tau;e,\delta}$ плотно в каждом $\mathcal{H}_{\tau;e,\delta}$ — в него входят всевозможные векторы вида $\varphi^{(1)} \otimes \ldots \otimes \varphi^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$, где $\varphi^{(n)} \in \bigcap_{\tau_n \in T_n} H_{\tau_n}$ $p = 1, 2, \ldots$ Пусть $\tau' = (\tau', \delta') = ((\tau'_n)_{n=1}^{\infty}, (\delta'_n)_{n=1}^{\infty})$, $\tau'' = (\tau'', \delta'') = ((\tau''_n)_{n=1}^{\infty}, (\delta''_n)_{n=1}^{\infty})$ заданы. При каждом $n = 1, 2, \ldots$ найдем такое $\tau'''_n$, чтобы $H_{\tau'''_n} \subseteq H_{\tau'_n}, H_{\tau''_n}$ и вложения $H_{\tau'''_n} \to H_{\tau'_n}$, $H_{\tau'''_n} \to H_{\tau''_n}$ были квазиядерны — это возможно вследствие ядерности $\Phi_n$. Обозначим $\tau''' = (\tau'''_n)_{n=1}^{\infty}$. В силу замечания § 2, п. 6 можно найти вес $\delta''' = (\delta'''_n)_{n=1}^{\infty}$ $(\delta'''_n \geqslant 1)$ такой, чтобы $\mathcal{H}_{\tau''';e,\delta'''} \subseteq \mathcal{H}_{\tau';e,\delta'}$, $\mathcal{H}_{\tau'';e,\delta''}$ и вложения $\mathcal{H}_{\tau''';e,\delta'''} \to \mathcal{H}_{\tau';e,\delta'}$, $\mathcal{H}_{\tau''';e,\delta'''} \to \mathcal{H}_{\tau'';e,\delta''}$ были квазиядерны. Итак, можно положить $\tau''' = (\tau''', \delta''')$. ■

Нетрудно видеть, что элементы взвешенного бесконечного тензорного произведения в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$ в определенном смысле цилиндричны. Введем соответствующие определения. Зафиксируем $p = 1, 2, \ldots$ и положим

$$\Big(\bigotimes_{n=1}^{p} \Phi_n\Big) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots = \bigcap_{\tau_1\in T_1,\ldots,\tau_p\in T_p} \Big(\Big(\bigotimes_{n=1}^{p} H_{\tau_n}\Big) \otimes$$
$$\otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots\Big) = \operatorname*{pr\,lim}_{\tau_1\in T_1,\ldots,\tau_p\in T_p} \Big(\Big(\bigotimes_{n=1}^{p} H_{\tau_n}\Big) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots\Big). \tag{4.16}$$

Это пространство является подпространством пространства в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$. Элемент $\varphi \in$ в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$, входящий в (4.16) при некотором $p$, естественно назвать цилиндрическим.



**Теорема 4.4.** *Каждый элемент пространства* в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$ *цилиндрический, т. е. справедливо равенство*

$$\text{в.} \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n = \bigcup_{p=1}^{\infty} \Big(\Big(\bigotimes_{n=1}^{p} \Phi_n\Big) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots\Big). \tag{4.17}$$

*Сходимость последовательности векторов в пространстве* в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$ *эквивалентна сходимости в пространстве* $\bigcup_{p=1}^{\infty} ((\bigotimes_{n=1}^{p} \Phi_n) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots)$, *наделенном топологией индуктивного предела пространств* $(\bigotimes_{n=1}^{p} \Phi_n) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ *Иными словами, для того чтобы последовательность* $(\varphi^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ $(\varphi^{(k)} \in$ в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n)$ *была сходящейся к* $\varphi \in$ в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$, *необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно цилиндрической, т. е. чтобы при некотором* $p = 1, 2, \ldots$ $\varphi^{(k)} \in (\bigotimes_{n=1}^{p} \Phi_n) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *и* $\varphi^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi$ *в топологии пространства* $(\bigotimes_{n=1}^{p} \Phi_n) \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$

Доказательство. Пусть $\varphi \in$ в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$. Зафиксируем некоторую последовательность $\tau' = (\tau'_n)_{n=1}^{\infty}$, где $\tau'_n \in T_n$. Утверждается, что найдется такое $p' = 1, 2, \ldots$, что

$$\varphi \in \Big(\bigotimes_{n=1}^{p'} H_{\tau'_n}\Big) \otimes e^{(p'+1)} \otimes e^{(p'+2)} \otimes \ldots \tag{4.18}$$

В самом деле, предполагая противное, найдем такую подпоследовательность $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ последовательности $(n)_{n=1}^{\infty}$, что $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha\in A_n} \varphi_\alpha e_\alpha$ и $\varphi_\alpha \not\equiv 0$ при $\alpha \in A_{n_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Пусть $\sum_{\alpha\in A_{n_j}} |\varphi_\alpha|^2 = d_{n_j} > 0$. Построим вес $\delta = (\delta_n)_{n=1}^{\infty}$, полагая $\delta_{n_j} = \max(d_{n_j}^{-1}, 1)$ при $j = 1, 2, \ldots$, а для остальных $n$, считая $\delta_n = 1$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\alpha\in A_n} |\varphi_\alpha|^2\Big) \delta_n = \infty$, что противоречит справедливости включения $\varphi \in \bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_{\tau'_n}$.

Рассмотрим другую последовательность $\tau'' = (\tau''_n)_{n=1}^{\infty}$ $(\tau''_n \in T_n)$. Аналогично заключаем, что для нее справедливо включение вида

(4.18), в котором штрих заменен двумя штрихами. Можно считать выполненным неравенство $p'' \leqslant p'$. Это показывает, что $\varphi$ входит в (4.16), где $p$ заменено на $p'$. Итак, элемент $\varphi$ — цилиндрический.

Пусть теперь $(\varphi^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность, фигурирующая в формулировке теоремы, а $\varphi$ — ее предел, который достаточно считать равным нулю. Для доказательства равномерной цилиндричности этой последовательности, как и ранее, достаточно показать, что все $\varphi^{(k)}$ входят в пространство (4.18) при некотором $p'$. Предположим противное. Тогда найдется такая подпоследовательность $(\varphi^{(k_j)})_{j=1}^{\infty}$, что $\varphi^{(k_j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathrm{A}_n} \varphi_{\alpha}^{(k_j)} e_{\alpha}$ и $\varphi_{\alpha}^{(k_j)} \not\equiv 0$ при $\alpha \in \mathrm{A}_{n_j}$, где $n_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Пусть $\sum_{\alpha \in \mathrm{A}_{n_j}} |\varphi_{\alpha}^{(k_j)}|^2 = d_{n_j} > 0$. Построим, как и ранее, по $d_{n_j}$ вес $\delta$. Тогда $\|\varphi^{(k_j)}\|^2_{\bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_{\tau'_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{\alpha \in \mathrm{A}_n} |\varphi_{\alpha}^{(k_j)}|^2 \right) \delta_n \geqslant 1$, что противоречит сходимости $\varphi^{(k)} \to 0$ в топологии пространства в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$, понимаемого как проектный предел пространств $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}:e,\delta}$. Равномерная цилиндричность установлена. Сходимость $\varphi^{(k)} \to 0$ в пространстве (4.16) следует из соответствующей сходимости в в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$ и определения топологии в последнем пространстве. ■

Процедура образования взвешенного бесконечного тензорного произведения ядерных пространств допускает важное обобщение: вместо того чтобы рассматривать все множество T, фигурирующее в (4.15), и по нему брать проективный предел, можно рассматривать некоторое подмножество $\Sigma \subseteq \mathrm{T}$, по которому и брать проективный предел. При этом для корректности конструкции и ядерности этого проективного предела нужно, очевидно, требовать, чтобы множество $\Sigma$ обладало следующим свойством: для любых двух $\boldsymbol{\tau}' = (\tau', \delta')$, $\boldsymbol{\tau}'' = (\tau'', \delta'') \in \Sigma$ существует $\boldsymbol{\tau}''' = (\tau''', \delta''') \in \Sigma$ такое, что $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}''';e,\delta'''} \subseteq \mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}',e,\delta'}$, $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}'';e,\delta}$ и вложения $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}''';e,\delta'''} \to \mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}';e,\delta'}$, $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}''';e,\delta'''} \to \mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}'';e,\delta''}$ квазиядерны. Так построенное пространство $\operatorname{pr}\lim_{(\boldsymbol{\tau},\delta) \in \Sigma} \mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau};e,\delta}$ назовем **$\Sigma$**-бесконечным тензорным произведением пространств $\Phi$ и обозначим через в. $\bigotimes_{n=1;e,\Sigma}^{\infty} \Phi_n$. Разумеется, такое тензорное произведение не обязательно состоит из цилиндрических элементов.

В особенности полезна одна частная ситуация, когда вообще не берется взвешивание, т. е. рассматривается проективный предел некоторого множества гильбертовых пространств $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau};e,1}$. Сформулируем соответствующий результат в виде следующей простой теоремы.



**Теорема 4.5.** *Пусть имеется прежняя последовательность $(\Phi_n)_{n=1}^{\infty}$ ядерных пространств $\Phi_n = \operatorname{pr}\lim_{\tau_n \in \mathrm{T}_n} H_{\tau_n}$. Предположим, что $\Sigma$ — некоторое множество пар $(\boldsymbol{\tau}, 1)$ такое, что для любых $((\tau'_n)_{n=1}^{\infty}, 1)$, $((\tau''_n)_{n=1}^{\infty}, 1) \in \Sigma$ найдется пара $((\tau'''_n)_{n=1}^{\infty}, 1) \in \Sigma$, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|O_{\tau'''_n \tau'_n}|^2 - 1) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|O_{\tau'''_n \tau''_n}|^2 - 1) < \infty. \tag{4.19}$$

*Здесь при каждом $n = 1, 2, \ldots$ $H_{\tau'''_n} \subseteq H_{\tau'_n}$, $H_{\tau''_n}$ и $O_{\tau'''_n \tau'_n} : H_{\tau'''_n} \to H_{\tau'_n}$, $O_{\tau'''_n \tau''_n} : H_{\tau'''_n} \to H_{\tau''_n}$ — соответствующие операторы вложения. Тогда $\Sigma$-бесконечное тензорное произведение* в. $\bigotimes_{n=1;e,\Sigma}^{\infty} \Phi_n$ *определено корректно и является ядерным пространством.*

Доказательство. Условия (4.19) в комбинации с теоремой 2.3 показывают, что вложения $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}''' e,1} \to \mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}';e,1}$ и $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}''';e,1} \to \mathscr{H}_{\boldsymbol{\tau}'';e,1}$, где $\boldsymbol{\tau}' = (\tau'_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{\tau}''_n = (\tau''_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{\tau}''' = (\tau'''_n)_{n=1}^{\infty}$, квазиядерны. Отсюда и следует утверждение. ■

## 4. ПРИМЕРЫ БЕСКОНЕЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЯДЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Пространство $C^{\infty}\left(\bigtimes_{n=1}^{\infty} [0, 1]\right)$. Пусть при каждом $n = 1, 2, \ldots$

$$\Phi_n = C^{\infty}([0, 1]) = \operatorname{pr}\lim_{\tau \in \{0,1,\ldots\}} C^{\tau}([0, 1]) = \operatorname{pr}\lim_{\tau \in \{0,1,\ldots\}} W_2^{\tau}((0, 1)).$$

То, что эти два проективных предела совпадают, легко следует из теорем вложения — справедлива оценка

$$\|u\|_{C^{\tau}([0,1])} \leqslant c'_{\tau} \|u\|_{W_2^{\tau+1}((0,1))} \leqslant c''_{\tau} \|u\|_{C^{\tau+1}([0,1])} \; (u \in C^{\tau+1}([0, 1]);$$

$$c'_{\tau}, c''_{\tau} < \infty; \; \tau = 0,1,\ldots).$$

Ядерность $C^{\infty}([0, 1])$ вытекает из теоремы 3.2. Последовательность $e = (e^{(n)}(x_n))_{n=1}^{\infty}$, где $e^{(n)}(x_n) \equiv 1$, может быть взята в качестве совместной стабилизирующей. Таким образом, можно построить взвешенное бесконечное тензорное произведение в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$. Сейчас пространство (4.16) совпадает с $C^{\infty}(\bigtimes_{n=1}^{p} [0, 1]) = \operatorname{pr}\lim_{\tau \in \{0,1,\ldots\}} C^{\tau}(\bigtimes_{n=1}^{p} [0, 1]) = \operatorname{pr}\lim_{\tau \in \{0,1,\ldots\}} W_2^{\tau}(\bigtimes_{n=1}^{p} (0, 1))$, что следует из леммы 3.3 (совпадение последних двух пространств устанавливается, как и в случае $p = 1$). При помощи теоремы 4.4 и этого обстоятельства заключаем, что в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$ состоит из всех цилиндрических функций $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots) = \varphi_ц(x_1, \ldots, x_p) \in C^\infty(\times_{n=1}^{p} [0, 1])$, причем $\varphi^{(k)} \to \varphi$ при $k \to \infty$ тогда и только тогда, когда все $\varphi^{(k)}$ равномерно цилиндричны и для соответствующих $\varphi_ц^{(k)}(x_1, \ldots, x_p) \to \varphi_ц(x_1, \ldots, x_p)$ равномерно на $\times_{n=1}^{p} [0, 1]$ с любой производной. Так построенное пространство в. $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \Phi_n$ обозначим через $C^\infty(\times_{n=1}^{\infty} [0, 1])$.

Если в этом примере рассматривать не все веса $\delta$ (или, что то же, производить не все возможные перенормировки согласно лемме 2.1), то получим ядерные пространства, которые могут состоять уже не только из цилиндрических функций. Приведем наиболее простую из этих перенормировок.

Пусть при каждом $n = 1, 2, \ldots$ $G_n = L_2((0, 1))$, $H_n = W_2^1((0, 1))$, $e = (e^{(n)}(x_n))_{n=1}^{\infty}$, $e^{(n)}(x_n) \equiv 1$. Тогда согласно теореме 2.2 $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n \subseteq \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n = L_2(\times_{n=1}^{\infty} (0, 1), (dx_1) \otimes (dx_2) \otimes \ldots)$ и норма соответствующего оператора вложения не превосходит единицы. Однако это вложение не будет квазиядерным, так как условие (2.15) сейчас не выполняется. Для того чтобы оно стало квазиядерным, произведем перенормировку $W_2^1((0, 1))$. Легко подсчитать, что

$$(u, v)_{(W_2^1((0,1)))^{\#_n}} = c_n (u, v)_{W_2^1((0,1))} + (1 - c_n) \int_0^1 u(x_n)\, dx_n \int_0^1 \overline{v(x_n)}\, dx_n$$

$$(c_n \geqslant 1;\ n = 1, 2, \ldots;\ u, v \in W_2^1((0, 1))).$$

Если $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} < \infty$, то условие (2.15) выполняется и вложение $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} (W_2^1((0, 1)))^{\#_n} \to L_2(\times_{n=1}^{\infty} (0, 1), (dx_1) \otimes (dx_2) \otimes \ldots)$ квазиядерно.

2. Пространство $\mathcal{G}(\mathbb{R}^\infty, \varepsilon)$. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ ($\varepsilon_n > 0$) — фиксированная последовательность. Положим $\Phi_n = \mathcal{G}(\mathbb{R}^1, \varepsilon_n) = \operatorname{pr}\lim_{\tau \in \{0,1,\ldots\}} G^\tau(\mathbb{R}^1, \varepsilon_n)$, $e = (e^{(n)}(x_n))_{n=1}^{\infty}$, $e^{(n)}(x_n) \equiv 1$. Тогда можно построить взвешенное бесконечное тензорное произведение $\mathcal{G}(\mathbb{R}^\infty, \varepsilon) =$ в. $\bigotimes_{n=1,e}^{\infty} \mathcal{G}(\mathbb{R}^1, \varepsilon_n)$ с совместной стабилизирующей последовательностью $e$. *Элементами этого произведения будут цилиндрические*



*функции вида*

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots) = \varphi_ц(x_1, \ldots, x_p)\, e^{\sum_{n=1}^{p} \frac{\varepsilon_n}{2} x_n^2},$$

*где* $\varphi_ц \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^p)$. *Последовательность* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^\infty, \varepsilon) \ni \varphi^{(k)} \to \varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^\infty, \varepsilon)$ *при* $k \to \infty$ *тогда и только тогда, когда все* $\varphi^{(k)}$ *равномерно цилиндричны и* $\varphi_ц^{(k)}(x_1, \ldots, x_p) \to \varphi_ц(x_1, \ldots, x_p)$ *в пространстве* $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^p)$.

Действительно, пространство (4.16) совпадает с $\operatorname{pr}\lim_{\tau_1, \ldots, \tau_p \in \{0,1,\ldots\}} \bigotimes_{n=1}^{p} G_{\tau_n}(\mathbb{R}^1, \varepsilon_n)$, а последний проективный предел вследствие оценок (4.10) равен $(\operatorname{pr}\lim_{\tau_1, \ldots, \tau_p \in \{0,1,\ldots\}} \bigotimes_{n=1}^{p} S_{\tau_n}(\mathbb{R}^1))\, e^{\sum_{n=1}^{p} \frac{\varepsilon_n}{2} x_n^2}$. Чуть ниже мы докажем, что проективный предел в последнем выражении совпадает с $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^p)$. Отсюда и из теоремы 4.4 следует утверждение. ■

**Лемма 4.3.** *Справедливо равенство*

$$\operatorname{pr}\lim_{\tau_1, \ldots, \tau_p \in \{0,1,\ldots\}} \bigotimes_{n=1}^{p} S_{\tau_n}(\mathbb{R}^1) = \mathfrak{S}(\mathbb{R}^p) \quad (p = 1, 2, \ldots). \tag{4.20}$$

Доказательство. Проведем доказательство для наиболее простого случая $p = 2$; в общем случае $p > 2$ доказательство аналогичное (при $p = 1$ см. теорему 3.8). Соотношение (4.20) при $p = 2$ очевидным образом следует из следующего топологического включения:

$$S_{\min(\tau_1, \tau_2)}(\mathbb{R}^2) \supseteq S_{\tau_1}(\mathbb{R}^1) \otimes S_{\tau_2}(\mathbb{R}^1) \supseteq S_{\tau_1 + \tau_2}(\mathbb{R}^2) \quad (\tau_1, \tau_2 = 0, 1, \ldots). \tag{4.21}$$

Включение (4.21) будет доказано, если установить на функциях вида $u(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{q} u_n^{(1)}(x_1) u_n^{(2)}(x_2)$ $(u_n^{(j)} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1))$ неравенство $\|u\|_1 \leqslant \|u\|_2 \leqslant \|u\|_3$, где $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_3$ — нормы в первом, втором и третьем пространствах цепочки (4. 21).

Установим одно простое тождество. Пусть $p_1, p_2 \in C(\mathbb{R}^1)$ — два веса; $x = (x_1, x_2)$; $\tau_1, \tau_2 = 0, 1, \ldots$ Для рассматриваемой $u$ имеем

$$\sum_{\mu_1=0}^{\tau_1} \sum_{\mu_2=0}^{\tau_2} \|D_1^{\mu_1} D_2^{\mu_2} u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2, p_1(x_1) p_2(x_2) dx)} =$$

$$= \sum_{\mu_1=0}^{\tau_1} \sum_{\mu_2=0}^{\tau_2} \sum_{n,m=1}^{q} (D_1^{\mu_1} u_n^{(1)}, D_1^{\mu_1} u_m^{(1)})_{L_2(\mathbb{R}^1, p_1(x_1) dx_1)} \times$$

$$\times (D_2^{\mu_2} u_n^{(2)}, D_2^{\mu_2} u_m^{(2)})_{L_2(\mathbb{R}^1, p_2(x_2)dx_2)} = \sum_{n,m=1}^{q} (u_n^{(1)}, u_m^{(1)})_{W_2^{\tau_1}(\mathbb{R}^1, p_1(x_1)dx_1)} \times$$
$$\times (u_n^{(2)}, u_m^{(2)})_{W_2^{\tau_2}(\mathbb{R}^1, p_2(x_2)dx_2)} = \| u \|^2_{W_2^{\tau_1}(\mathbb{R}^1, p_1(x_1)dx_1) \otimes W_2^{\tau_2}(\mathbb{R}^1, p_2(x_2)dx_2)}. \quad (4.22)$$

Отметим также, что

$$(1 + |x|^2)^{\min(\tau_1, \tau_2)} \leqslant (1 + x_1^2)^{\tau_1} (1 + x_2^2)^{\tau_2} \leqslant (1 + |x|^2)^{\tau_1 + \tau_2}$$
$$(x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ \tau_1, \tau_2 = 0, 1, \ldots).$$

При помощи (4.22) и этого неравенства получим

$$\| u \|_1^2 \leqslant \sum_{\mu_1=0}^{\tau_1} \sum_{\mu_2=0}^{\tau_2} \| D_1^{\mu_1} D_2^{\mu_2} u \|^2_{L_2(\mathbb{R}^2, (1+x_1^2)^{\tau_1}(1+x_2^2)^{\tau_2} dx)} = \| u \|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\mu_1=0}^{\tau_1} \sum_{\mu_2=0}^{\tau_2} \| D_1^{\mu_1} D_2^{\mu_2} u \|^2_{L_2(\mathbb{R}^2, (1+|x|^2)^{\tau_1+\tau_2} dx)} = \| u \|_3^2. \ \blacksquare$$

Приведем еще два весьма важных примера бесконечных тензорных произведений.

## 5. ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{A}$ ($\mathbb{R}^\infty$)

Рассмотрим пространство $L_2(\mathbb{R}^1, dg(t)) = G^0(\mathbb{R}^1)$ суммируемых с квадратом по стандартной гауссовской мере $dg(t)$ функций. Ортонормированный базис в нем образуют полиномы Эрмита $(h_j(t))_{j=0}^\infty$, где

$$h_j(t) = \frac{(-1)^j}{2^{j/2}\sqrt{j!}} e^{t^2} D^j (e^{-t^2}), \quad h_0(t) \equiv 1 \quad \left(D = \frac{d}{dt}\right). \quad (4.23)$$

Каждой функции $u \in L_2(\mathbb{R}^1, dg(t))$ сопоставим последовательность $(u_j)_{j=0}^\infty$ ее коэффициентов Фурье при разложении по базису $(h_j(t))_{j=0}^\infty$. В результате получим изометрию $L_2(\mathbb{R}^1, dg(t)) \ni u \mapsto (u_j)_{j=0}^\infty \in l_2$, которую мы все время будем иметь в виду.

Для каждого $l = 0, 1, \ldots$ введем гильбертово пространство

$$A_l(\mathbb{R}^1) = \{u \in L_2(\mathbb{R}^1, dg(t)) \mid \sum_{j=0}^\infty |u_j|^2 (1 + l)^j < \infty\}; \quad (4.24)$$
$$(u, v)_{A_l(\mathbb{R}^1)} = \sum_{j=0}^\infty u_j \bar{v}_j (1 + l)^j \quad (u, v \in A_l(\mathbb{R}^1)).$$

Очевидно, $\| \cdot \|_{A_l(\mathbb{R}^1)} \leqslant \| \cdot \|_{A_{l+1}(\mathbb{R}^1)}$, $A_{l+1}(\mathbb{R}^1) \subseteq A_l(\mathbb{R}^1)$ $(l = 0, 1, \ldots)$ и $A_0(\mathbb{R}^1) = G^0(\mathbb{R}^1)$. Множество $\bigcap_{l=0}^\infty A_l(\mathbb{R}^1)$ содержит всевозможные конечные комбинации полиномов Эрмита и, следовательно, плотно



в каждом $A_l(\mathbb{R}^1)$. Образуем проективный предел

$$\operatorname*{pr\,lim}_{l \in \{0,1,\ldots\}} A_l(\mathbb{R}^1) = \mathcal{A}(\mathbb{R}^1). \quad (4.25)$$

**Лемма 4.4.** *Проективный предел* (4.25) *представляет собой ядерное пространство.*

Доказательство. Зафиксируем $l$, $l' = 0, 1, \ldots$, причем $l' > l$. Ортонормированным базисом в пространстве $A_{l'}(\mathbb{R}^1)$ служат векторы $e_j(t) = (1 + l')^{-\frac{j}{2}} h_j(t)$ $(j = 0, 1, \ldots)$, поэтому для оператора вложения $O_{l'l} : A_{l'}(\mathbb{R}^1) \to A_l(\mathbb{R}^1)$ имеем согласно (4.24)

$$|O_{l'l}|^2 = \sum_{j=0}^\infty \| (1 + l')^{-\frac{j}{2}} h_j(t) \|^2_{A_l(\mathbb{R}^1)} = \sum_{j=0}^\infty \left(\frac{1 + l}{1 + l'}\right)^j =$$
$$= \frac{1 + l'}{l' - l} = 1 + \frac{1 + l}{l' - l} < \infty. \quad (4.26)$$

Таким образом можно положить даже $l' = l + 1$. $\blacksquare$

Согласно общим правилам § 1, п. 10 можно построить последовательность негативных пространств $A_{-l}(\mathbb{R}^1)$, если в качестве нулевого взять пространство $A_0(\mathbb{R}^1) = G^0(\mathbb{R}^1)$, а в качестве позитивного — пространство $A_l(\mathbb{R}^1)$ $(l = 1, 2, \ldots)$. В результате цепочка (1.30) примет вид

$$\bigcup_{l=0}^\infty A_{-l}(\mathbb{R}^1) = (\mathcal{A}(\mathbb{R}^1))' \supseteq \cdots \supseteq A_{-2}(\mathbb{R}^1) \supseteq A_{-1}(\mathbb{R}^1) \supseteq$$
$$\supseteq A_0(\mathbb{R}^1) \supseteq A_1(\mathbb{R}^1) \supseteq A_2(\mathbb{R}^1) \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{A}(\mathbb{R}^1).$$

Из (4.24) сразу следует, что $A_{-l}(\mathbb{R}^1) = \{\xi = \sum_{j=0}^\infty \xi_j h_j(t) \mid \sum_{j=0}^\infty |\xi_j|^2 (1 + l)^{-j} < \infty\}$ и $(\xi, u)_{A_0(\mathbb{R}^1)} = \sum_{j=0}^\infty \xi_j \bar{u}_j$ $(u \in A_l(\mathbb{R}^1),\ \xi \in A_{-l}(\mathbb{R}^1);\ l = 0, 1, \ldots)$.

Рассмотрим теперь счетное множество пространств $\mathcal{A}(\mathbb{R}^1)$ и построим некоторое $\Sigma$-бесконечное тензорное произведение, взяв в качестве совместной стабилизирующей последовательности $e = (e^{(n)}(x_n))_{n=1}^\infty$, $e^{(n)}(x_n) \equiv 1$. Мы не будем брать взвешивание и в качестве $\Sigma$ возьмем всевозможные пары $(\boldsymbol{\tau}, 1)$, где $\boldsymbol{\tau} = (\tau_n)_{n=1}^\infty \in \mathop{\times}_{n=1}^\infty \mathrm{T}_n = \mathrm{T}$, $\mathrm{T}_n = \{0, 1, \ldots\}$. Таким образом, $(\tau_n)_{n=1}^\infty$ — произвольная последовательность неотрицательных целых чисел. Построим гильбертово бесконечное тензорное произведение

$$A_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbb{R}^\infty) = \bigotimes_{n=1;e}^\infty A_{\tau_n}(\mathbb{R}^1) \quad (\boldsymbol{\tau} = (\tau_n)_{n=1}^\infty) \quad (4.27)$$

(сейчас удобно обозначать последовательность $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ нежирной буквой $\tau$), а затем рассмотрим

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}^{\infty}) = \mathrm{pr}\lim_{\tau \in T} A_{\tau}(\mathbb{R}^{\infty}). \tag{4.28}$$

*Проективный предел* (4.28) *определен корректно и представляет собой ядерное пространство.*

Действительно, достаточно проверить выполнение условий теоремы 4.5. Пусть $\tau' = (\tau'_n)_{n=1}^{\infty}$, $\tau'' = (\tau''_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{T}$ — две фиксированные последовательности. Вследствие соотношения (4.26) ряды (4.19) примут вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|O_{\tau'''_n \tau'_n}|^2 - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\tau'_n}{\tau'''_n - \tau'_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|O_{\tau'''_n \tau''_n}|^2 - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\tau''_n}{\tau'''_n - \tau''_n}. \tag{4.29}$$

Положим $\tau'''_n = (2\tau'_n + 2\tau''_n + 1)\, n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, тогда $\tau'''_n - \tau'_n \geqslant (\tau'_n + 2\tau''_n + 1)\, n^2 \geqslant (1 + \tau'_n)\, n^2$, поэтому $n$-й член первого ряда в (4.29) оценивается сверху посредством $n^{-2}$. Аналогично оценивается общий член второго ряда в (4.29). Таким образом, для последовательности $\tau''' = (\tau'''_n)_{n=1}^{\infty}$ оба эти ряда являются сходящимися. ■

Гильбертовы пространства (4.27) можно рассматривать как позитивные относительно нулевого пространства $A_0(\mathbb{R}^{\infty}) = \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} A_0(\mathbb{R}^1) = L_2(\mathbb{R}^{\infty}, d\mathfrak{g}(x))$. Согласно теореме 2.4 соответствующее негативное пространство $A_{-\tau}(\mathbb{R}^{\infty})$ равно $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} A_{-\tau_n}(\mathbb{R}^1)$.

В пространстве $A_0(\mathbb{R}^1) = L_2(\mathbb{R}^1, dg(t))$ ортонормированный базис образуют векторы (4.23), поэтому в бесконечном тензорном произведении $A_0(\mathbb{R}^{\infty}) = \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} A_0(\mathbb{R}^1) = L_2(\mathbb{R}^{\infty}, d\mathfrak{g}(x))$, построенном по стабилизирующей последовательности, состоящей из единиц, согласно общим правилам ортонормированный базис образуют векторы

$$e_{\alpha} = h_{\alpha}(x) = h_{\alpha_1}(x_1) \ldots h_{\alpha_n}(x_n) \quad (x = (x_n)_{n=1}^{\infty}), \tag{4.30}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0, 1, \ldots$ и $n = 1, 2, \ldots$ Иными словами, $\alpha$ изменяется по множеству А финитных последовательностей, составленных из неотрицательных целых чисел.

В пространстве $A_l(\mathbb{R}^1)$ $(l = 0, 1, \ldots)$ ортонормированный базис образуют векторы $((1 + l)^{-j/2} h_j(t))_{j=0}^{\infty}$, поэтому по тем же правилам такой базис для $A_{\tau}(\mathbb{R}^{\infty}) = \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} A_{\tau_n}(\mathbb{R}_1)$ состоит из векторов



$h_{\alpha}(x)(1+\tau_1)^{-\frac{\alpha_1}{2}}(1+\tau_2)^{-\frac{\alpha_2}{2}} \ldots$ $(\alpha \in \mathrm{A})$. Таким образом, можно написать

$$A_{\tau}(\mathbb{R}^{\infty}) = \{u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{A}} u_{\alpha} h_{\alpha}(x) \in L_2(\mathbb{R}^{\infty}, d\mathfrak{g}(x)) \mid \sum_{\alpha \in \mathbf{A}} |u_{\alpha}|^2 (1+\tau_1)^{\alpha_1} \times$$
$$\times (1+\tau_2)^{\alpha_2} \ldots < \infty\},$$
$$(u, v)_{A_{\tau}(\mathbb{R}^{\infty})} = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} u_{\alpha} \bar{v}_{\alpha} (1+\tau_1)^{\alpha_1} (1+\tau_2)^{\alpha_2} \ldots \quad (u, v \in A_{\tau}(\mathbb{R}^{\infty})). \tag{4.31}$$

Пространство $A_{-\tau}(\mathbb{R}^{\infty})$ векторов $\xi = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \xi_{\alpha} h_{\alpha}$ определяется аналогичными (4.31) соотношениями, в которых $(1+\tau_n)^{\alpha_n}$ заменено на $(1+\tau_n)^{-\alpha_n}$ (разумеется, $\xi$ уже не входит в $L_2(\mathbb{R}^{\infty}, d\mathfrak{g}(x))$). Если $\xi = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \xi_{\alpha} h_{\alpha} \in A_{-\tau}(\mathbb{R}^{\infty})$ и $u = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} u_{\alpha} h_{\alpha} \in A_{\tau}(\mathbb{R}^{\infty})$, то $(\xi, u)_{A_0(\mathbb{R}^{\infty})} = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \xi_{\alpha} \bar{u}_{\alpha}$.

Пространство $A_{\tau}(\mathbb{R}^{\infty})$ нами построено как некоторое бесконечное тензорное произведение, входящее в пространство $A_0(\mathbb{R}^{\infty}) = L_2(\mathbb{R}^{\infty}, d\mathfrak{g}(x))$. Покажем, что если числа $\tau_n$ достаточно быстро растут при $n \to \infty$, то функции из $A_{\tau}(\mathbb{R}^{\infty})$ непрерывны на некотором гильбертовом пространстве, входящем в $\mathbb{R}^{\infty}$.

**Теорема 4.6.** *Пусть* $\tau = (\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ *таково, что* $((1+\tau_n)^{-1})_{n=1}^{\infty} \in l_1$. *Обозначим через* $R_{\tau} \subset \mathbb{R}^{\infty}$ *вещественное гильбертово пространство полной меры, выделяемое условием*

$$R_{\tau} = \{x \in \mathbb{R}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 (1+\tau_n)^{-1} < \infty\};$$
$$(x, y)_{R_{\tau}} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n (1+\tau_n)^{-1} \quad (x, y \in R_{\tau}). \tag{4.32}$$

*Утверждается, что сужение на* $R_{\tau}$ *каждой функции* $u \in A_{\tau}(\mathbb{R}^{\infty}) \subseteq L_2(\mathbb{R}^{\infty}, d\mathfrak{g}(x))$ *почти всюду относительно меры* $\mathfrak{g}$ *совпадает с непрерывной функцией точки* $x \in R_{\tau}$.

Доказательство. Предварительно покажем, что при каждом фиксированном $x \in R_{\tau}$ функционал

$$\delta_x = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} h_{\alpha}(x)\, h_{\alpha} \tag{4.33}$$

входит в $A_{-\tau}(\mathbb{R}^{\infty})$. Используя соотношения типа (4.31) для $A_{-\tau}(\mathbb{R}^{\infty})$ и формулу (см., напр.: Бейтмен, Эрдейи [1, гл. 10, п. 10, 13])

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j h_j^2(t) = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} e^{2t^2\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1}} \quad (0 < z < 1,\ t \in \mathbb{R}^1),$$

получим

$$\|\delta_x\|^2_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)} = \sum_{\alpha\in A} h^2_\alpha(x)(1+\tau_1)^{-\alpha_1}(1+\tau_2)^{-\alpha_2}\ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha\in A_n} h^2_\alpha(x)(1+\tau_1)^{-\alpha_1}(1+\tau_2)^{-\alpha_2}\ldots =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\sum_{\alpha\in A_n} h^2_\alpha(x)(1+\tau_1)^{-\alpha_1}(1+\tau_2)^{-\alpha_2}\ldots =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m=0}^{\infty} h^2_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,0,0,\ldots)}(x)(1+\tau_1)^{-\alpha_1}\ldots(1+\tau_m)^{-\alpha_m} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{\alpha_k=0}^{\infty} h^2_{\alpha_k}(x_k)(1+\tau_k)^{-\alpha_k}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left((1-(1+\tau_k)^{-2})^{-\frac{1}{2}} e^{2x_k^2(2+\tau_k)^{-1}}\right) = \left(\prod_{k=1}^{\infty}(1-(1+\tau_k)^{-2})\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times e^{2\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2(2+\tau_k)^{-1}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{\infty}(1-(1+\tau_k)^{-2})\right)^{-\frac{1}{2}} e^{2\|x\|^2_{R_\tau}}. \qquad (4.34)$$

Так как $((1+\tau_n)^{-1})_{n=1}^{\infty}\in l_1$, то тем более эта последовательность входит в $l_2$, поэтому произведение в правой части (4.34) сходится. Итак, $\delta_x\in A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)$.

То, что $g(R_\tau)=1$, вытекает из теоремы А. Н. Колмогорова — А. Я. Хинчина (см., напр.: Шилов, Фан Дык Тинь [1, § 3, п. 8]): $g(\{x\in\mathbb{R}^\infty \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^2<\infty,\ a_n\geqslant 0\})$ равна единице или нулю в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Таким образом, для $x\in R_\tau$ и $u\in A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ можно написать

$$(\delta_x, u)_{A_0(\mathbb{R}^\infty)} = \sum_{\alpha\in A} h_\alpha(x)\bar{u}_\alpha = \overline{u(x)}, \qquad (4.35)$$

причем последнее равенство имеет место $g$-почти везде.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что левая часть в (4.35) непрерывна относительно $x\in R_\tau$, а для этого достаточно убедиться, что вектор-функция $R_\tau \ni x\mapsto \delta_x \in A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)$ слабо непрерывна. Пусть $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек $x^{(k)}\in R_\tau$ такая, что в $R_\tau$ $x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x^{(0)}$. Требуется доказать, что в смысле слабой сходимости $\delta_{x^{(k)}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \delta_{x^{(0)}}$. Для этого нужно доказать, что 1) $\|\delta_{x^{(k)}}\|_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)}\leqslant c$ $(k=1, 2, \ldots)$ и 2) $(\delta_{x^{(k)}}, v)_{A_0(\mathbb{R}^\infty)} \xrightarrow[k\to\infty]{} (\delta_{x^{(0)}}, v)_{A_0(\mathbb{R}^\infty)}$ для векторов $v$ из тотального в $A_\tau(R^\infty)$ множества. Но соотношение 1) вытекает из оценки (4.34), а 2) проверяется немедленно: если $\|x^{(k)}-x^{(0)}\|_{R_\tau}\to 0$ при $k\to\infty$, то для каждого $j=0, 1, \ldots$ $x_j^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_j^{(0)}$, а поэтому и $h_\alpha(x^{(k)}) \xrightarrow[k\to\infty]{} h_\alpha(x^{(0)})$ при каждом $\alpha\in A$; в качестве тотального множества достаточно взять $(h_\alpha)_{\alpha\in A}$. ■



В дальнейшем будем считать $u\in A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ так переопределенной на множестве нулевой $g$-меры, что $R_\tau\ni x\mapsto u(x)\in\mathbb{C}^1$ непрерывна (при условии $((1+\tau_n)^{-1})_{n=1}^{\infty}\in l_1$). Теперь соотношение (4.35) выполняется для всех $x\in R_\tau$ и можно написать оценку (см. также (4.34))

$$|u(x)|\leqslant\|u\|_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)}\|\delta_x\|_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)}\ (u\in A_\tau(\mathbb{R}^\infty);\ x\in R_\tau); \qquad (4.36)$$

$$\|\delta_x\|_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)} = d_\tau\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2(2+\tau_k)^{-1}\right),\ d_\tau = \left(\prod_{k=1}^{\infty}(1-(1+\tau_k)^{-2})\right)^{-1/4}.$$

Выясним, как действуют операторы дифференцирования и умножения на полином в пространствах $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$. По существу достаточно рассмотреть элементарные операторы такого рода: взятие производной $D_k=\frac{\partial}{\partial x_k}$ и оператор $X_k$ умножения на $x_k$ $(k=1, 2, \ldots)$.

В дальнейшем через $P_ц(\mathbb{R}^\infty)$ будем обозначать линейное множество цилиндрических полиномов, т. е. функций вида

$$u(x) = \sum_{\alpha\in A} u_\alpha h_\alpha(x), \qquad (4.37)$$

где $u_\alpha=0$ для мультииндексов $\alpha$ таких, что $\nu(\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ не превосходит некоторого конечного зависящего от $u$ числа (т. е. суммирование в (4.37) фактически производится по конечному, зависящему от $u$, множеству). Ясно, что при любом $\tau$ $P_ц(\mathbb{R}^\infty)\subset A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ и плотно в этом пространстве. Операторы $D_k$ и $X_k$ определены на $P_ц(\mathbb{R}^\infty)$ и переводят его в себя:

$$P_ц(\mathbb{R}^\infty)\ni u(x)\mapsto(D_k u)(x),\ (X_k u)(x)=x_k u(x)\in P_ц(\mathbb{R}^\infty).$$

**Лемма 4.5.** *При любом $\tau\in T$ и $k=1, 2, \ldots$ операторы $D_k$ и $X_k$ распространяются по непрерывности с $P_ц(\mathbb{R}^\infty)$ до непрерывных операторов, действующих из пространства $A_{\tau'}(\mathbb{R}^\infty)$ в $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$, где $\tau'=(\tau'_n)_{n=1}^{\infty}$, $\tau'_n=\tau_n$ при $n\neq k$, $\tau'_k=\tau_k+1$.*

Доказательство. Известно, что

$$Dh_j(t) = \sqrt{2j}\, h_{j-1}(t) \quad (j = 1, 2, \ldots); \; Dh_0 = 0. \tag{4.38}$$

Примем для простоты $k = 1$, тогда при помощи (4.37) и (4.38) для $u \in P_ц(\mathbb{R}^\infty)$ получим $(D_1 u)(x) = \sum_{\alpha \in A} u_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)} \sqrt{2\alpha_1}\, h_{\alpha_1 - 1}(x_1)\, h_{\alpha_2}(x_2) \ldots$, откуда $(D_1 u)_\alpha = \sqrt{2(\alpha_1 + 1)}\, u_{(\alpha_1 + 1, \alpha_2 \ldots)}$ $(\alpha \in A)$. Поэтому

$$\| D_1 u \|^2_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)} = \sum_{\alpha \in A} |(D_1 u)_\alpha|^2 (1 + \tau_1)^{\alpha_1} (1 + \tau_2)^{\alpha_2} \ldots =$$

$$= 2 \sum_{\alpha \in A} (\alpha_1 + 1) |u_{(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots)}|^2 (1 + \tau_1)^{\alpha_1} (1 + \tau_2)^{\alpha_2} \ldots =$$

$$= 2 \sum_{\alpha \in A}{}' |u_\alpha|^2 (\alpha_1 (1 + \tau_1)^{\alpha_1 - 1}) (1 + \tau_2)^{\alpha_2} \ldots, \tag{4.39}$$

где штрих обозначает, что слагаемые, отвечающие $\alpha = (0, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$, в сумму не входят. Так как при некотором $c_1(\tau_1)$ имеем $2\alpha_1 (1 + \tau_1)^{\alpha_1 - 1} \leqslant c_1(\tau_1)(2 + \tau_1)^{\alpha_1}$ $(\alpha_1 = 1, 2, \ldots)$, то оценку в (4.39) можно продолжить; получим $\| D_1 u \|^2_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)} \leqslant c_1(\tau_1) \| u \|^2_{A_{\tau'}(\mathbb{R}^\infty)}$. Утверждение относительно $D_k$ доказано.

Рассмотрим оператор $X_k$, по-прежнему считая для простоты $k = 1$. Известно, что

$$th_j(t) = \sqrt{\frac{j}{2}}\, h_{j-1}(t) + \sqrt{\frac{j+1}{2}}\, h_{j+1}(t) \quad (j = 0, 1, \ldots; \; h_{-1} = 0). \tag{4.40}$$

Опять для $u \in P_ц(\mathbb{R}^\infty)$ получаем

$$x_1 u(x) = \sum_{\alpha \in A} u_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)} \left( \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}\, h_{\alpha_1 - 1}(x_1) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\alpha_1 + 1}{2}}\, h_{\alpha_1 + 1}(x_1) \right) h_{\alpha_2}(x_2) \ldots,$$

откуда $X_1 = A + B$, где $(Au)_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha_1 + 1}{2}}\, u_{(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots)}$, $(Bu)_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}\, u_{(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots)}$ $(\alpha \in A)$. Как и для $D_1$, легко получаем оценку $\| Au \|^2_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)} \leqslant c_2(\tau_1) \| u \|^2_{A_{\tau'}(\mathbb{R}^\infty)}$ с некоторой константой $c_2(\tau_1)$. Для $B$ имеем

$$\| Bu \|^2_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)} = \sum_{\alpha \in A} |(Bu)_\alpha|^2 (1 + \tau_1)^{\alpha_1} (1 + \tau_2)^{\alpha_2} \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in A} \alpha_1 |u_{(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots)}|^2 (1 + \tau_1)^{\alpha_1} (1 + \tau_2)^{\alpha_2} \ldots =$$



$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in A} |u_\alpha|^2 ((\alpha_1 + 1)(1 + \tau_1)^{\alpha_1 + 1})(1 + \tau_2)^{\alpha_2} \ldots \leqslant$$

$$\leqslant c_3(\tau_1) \sum_{\alpha \in A} |u_\alpha|^2 (2 + \tau_1)^{\alpha_1} (1 + \tau_2)^{\alpha_2} \ldots = c_3(\tau_1) \| u \|^2_{A_{\tau'}(\mathbb{R}^\infty)}, \tag{4.41}$$

где константа $c_3(\tau_1)$ такая, что $\frac{1}{2}(\alpha_1 + 1)(1 + \tau_1)^{\alpha_1 + 1} \leqslant c_3(\tau_1)(2 + \tau_1)^{\alpha_1}$ $(\alpha_1 = 0, 1, \ldots)$. Из (4.41) и полученной ранее аналогичной оценки для $A$ следует, что $X_1$ действует непрерывно из $A_{\tau'}(\mathbb{R}^\infty)$ в $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$. ■

Натянем на операторы $X_j$ и $D_k$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$ алгебру $\mathfrak{A}_ц(X, D)$, т. е. рассмотрим всевозможные конечные линейные комбинации с коэффициентами из $\mathbb{C}^1$ конечных произведений этих операторов. Учитывая очевидные правила коммутации для $X_j$ и $D_k$, можем сказать, что каждый элемент $Q$ этой алгебры является дифференциальным оператором с полиномиальными коэффициентами, зависящими лишь от конечного числа переменных. Ясно, что $Q$ можно записать минимальным образом, когда количество операторов $X_j$ и $D_k$ в его выражении минимальное. Разумеется, $P_ц(\mathbb{R}^\infty) \ni u(x) \mapsto (Qu)(x) \in P_ц(\mathbb{R}^\infty)$.

**Теорема 4.7.** *При любом $\tau \in T$ оператор $Q \in \mathfrak{A}_ц(X, D)$ распространяется по непрерывности с $P_ц(\mathbb{R}^\infty)$ до непрерывного оператора, действующего из пространства $A_{\tau(Q)}(\mathbb{R}^\infty)$ в $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$. Здесь $\tau(Q) = (\tau_n(Q))_{n=1}^\infty \in T$ подсчитываются следующим образом: $\tau_n(Q)$ равно $\tau_n$ плюс количество операторов $X_n$ и $D_n$, фигурирующих в минимальной записи $Q$.*

Доказательство. Нужно проитерировать должным образом лемму 4.5. ■

Отметим, что при доказательстве леммы 4.5 легко выяснить зависимость констант $c_l(\tau_1)$ $(l = 1, 2, 3)$ от $\tau_1$ и тем самым оценить через $\tau$ нормы операторов $X_j$ и $D_k$ как действующих из $A_{\tau'}(\mathbb{R}^\infty)$ в $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$. Имея эти оценки, можно поступить следующим образом. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}(X, D)$ всех формальных бесконечных рядов, натянутых на конечные произведения операторов $X_j$ и $D_k$. При определенном характере поведения коэффициентов $Q \in \mathfrak{A}(X, D)$ можно гарантировать, что этот оператор непрерывно действует из $A_{\tau(Q)}(\mathbb{R}^\infty)$ в $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ с некоторым $\tau(Q) = (\tau_n(Q))_{n=1}^\infty$, $\tau_n(Q) \geqslant \tau_n$. С другой стороны, возможность применения $Q$ к функциям из $A_{\tau(Q)}(\mathbb{R}^\infty)$ можно интерпретировать как некоторую гладкость этих функций. Тем самым мы получаем аналог теорем вложения для пространств $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$: можно выяснить, какие операторы $Q \in \mathfrak{A}(X, D)$ возможно применять к $u \in A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ + и в какие пространства такие операторы действуют. Более подробно на этих вопросах мы останавливаться не будем.

Установим еще один простой факт относительно пространств $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$, который будет использован в дальнейшем. Прежде всего приведем следующую известную формулу (см., напр.: Виленкин [1, гл. 11, § 4, п. 4]):

$$\int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t} h_j(t)\, dg(t) = \frac{(i 2^{-\frac{1}{2}}\lambda)^j}{\sqrt{j!}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \quad (j = 0, 1, \ldots;\ \lambda \in \mathbb{R}^1). \tag{4.42}$$

**Лемма 4.6.** *Каждая экспонента*

$$u^{(k)}(x) = \exp\left(i \sum_{n=1}^{k} \lambda_n x_n\right) \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}^1;\ k = 1, 2, \ldots) \tag{4.43}$$

*входит в любое пространство* $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ $(\tau \in \mathrm{T})$. *Более того, пусть* $\tau \in \mathrm{T}$. *Обозначим через* $R^\tau \subset \mathbb{R}^\infty$ *вещественное гильбертово пространство, выделяемое условием*

$$R^\tau = \{\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 \tau_n < \infty\}; \quad (\lambda, \mu)_{R^\tau} = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \mu_n \tau_n$$
$$(\lambda, \mu \in R^\tau). \tag{4.44}$$

*Утверждается, что определена и непрерывна в сильном смысле вектор-функция*

$$R^\tau \ni \lambda \mapsto \exp\left(i \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n\right) = e^{i(\lambda, x)_{l_2}} \in A_\tau(\mathbb{R}^\infty) \tag{4.45}$$

*как сильный предел по норме* $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ *функций* (4.43) *при* $k \to \infty$.

Доказательство. При помощи (4.42) заключаем, что

$$u_\alpha^{(k)} = \int_{\mathbb{R}^\infty} \exp\left(i \sum_{n=1}^{k} \lambda_n x_n\right) h_\alpha(x)\, dg(x) = \frac{(i2^{-\frac{1}{2}}\lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (i2^{-\frac{1}{2}}\lambda_k)^{\alpha_k}}{\sqrt{\alpha_1! \ldots \alpha_k!}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{k} \lambda_n^2\right) \quad (\alpha \in \mathrm{A};\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}^1).$$

Поэтому подобно (4.34)

$$\| u_\alpha^{(k)} \|^2_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)} = \sum_{\alpha \in \mathbf{A}} | u_\alpha^{(k)} |^2 (1 + \tau_1)^{\alpha_1} (1 + \tau_2)^{\alpha_2} \ldots =$$
$$= \lim_{m \to \infty} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 0}^{\infty} | u^{(k)}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0, 0, \ldots)} |^2 (1 + \tau_1)^{\alpha_1} \ldots (1 + \tau_m)^{\alpha_m} =$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \lambda_n^2\right) \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k = 0}^{\infty} \frac{(2^{-1}\lambda_1^2)^{\alpha_1} \ldots (2^{-1}\lambda_k^2)^{\alpha_k}}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} (1 + \tau_1)^{\alpha_1} \ldots$$
$$\ldots (1 + \tau_k)^{\alpha_k} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \lambda_n^2 \tau_n\right) < \infty.$$

Отсюда вытекает включение $u^{(k)} \in A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$.



Аналогично получаем

$$\left(\exp\left(i \sum_{n=1}^{k} \lambda_n x_n\right), \exp\left(i \sum_{n=1}^{k} \mu_n x_n\right)\right)_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \lambda_n \mu_n \tau_n\right)$$
$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}^1;\ k = 1, 2, \ldots). \tag{4.46}$$

При помощи (4.46) легко доказывается, что в случае $\lambda \in R^\tau$ последовательность функций (4.43) фундаментальна в пространстве $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$, поэтому вектор-функция (4.45) определена. Переходя в (4.46) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$(e^{i(\lambda, \cdot)_{l_2}}, e^{i(\mu, \cdot)_{l_2}})_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n \tau_n\right) = e^{\frac{1}{2}(\lambda, \mu)_{R^\tau}} \tag{4.47}$$
$$(\lambda, \mu \in R^\tau).$$

С помощью соотношения (4.47) нетрудно подсчитать $\| e^{i(\lambda, \cdot)_{l_2}} - e^{i(\mu, \cdot)_{l_2}} \|_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)}$, откуда следует непрерывность (4.45). ■

Замечания. 1. Пусть $\tau$ таково, что $((1 + \tau_n)^{-1})_{n=1}^\infty \in l_1$. Тогда $\tau_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ и пространство $R^\tau$ эквивалентно аналогичному пространству, выделяемому условием (4.44), в котором $\tau_n$ заменено на $1 + \tau_n$. По-прежнему будем обозначать его через $R^\tau$. Учитывая (4.32), заключаем, что $R_\tau$ — негативное пространство относительно позитивного $R^\tau$ и нулевого $l_2$. Итак, в случае $((1 + \tau_n)^{-1})_{n=1}^\infty \in l_1$ можно написать следующую цепочку вещественных пространств:

$$R_\tau \supset l_2 \supset R^\tau. \tag{4.48}$$

2. Из приведенных выше фактов относительно $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ и $A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)$ очевидным образом следуют соответствующие результаты о проективном пределе $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$ и его сопряженном пространстве $\mathcal{A}'(\mathbb{R}^\infty)$. В связи с этим отметим лишь следующее.

*Пусть* $((1 + \tau_n)^{-1})_{n=1}^\infty \in l_1$. *Для любых* $\lambda \in R^\tau$ *и* $p(x) \in P_{\text{ц}}(\mathbb{R}^\infty)$ *функция* $p(x)\, e^{i(\lambda, x)_{l_2}}$ *входит в* $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ *и непрерывно по норме этого пространства зависит от* $\lambda \in R^\tau$. В самом деле, обозначим через $Q$ оператор умножения на полином $p(x)$. Согласно теореме 4.7 $Q$ действует непрерывно из $A_{\tau(Q)}(\mathbb{R}^\infty)$ в $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$, причем $\tau_n(Q) \geqslant \tau_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\tau_n(Q) = \tau_n$ для всех $n$, за исключением конечного их числа. Так как $\tau_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$, то пространство $R^{\tau(Q)}$ эквивалентно пространству $R^\tau$, и поэтому согласно лемме 4.6 $e^{i(\lambda, \cdot)_{l_2}} \in A_{\tau(Q)}(\mathbb{R}^\infty)$ и непрерывно по норме пространства зависит от $\lambda \in R^{\tau(Q)}$, т. е. от $\lambda \in R^\tau$. Но тогда вследствие непрерывности

$Qp(x)e^{i(\lambda,x)_{l_2}} = (Qe^{i(\lambda,\cdot)_{l_2}})(x)$ будет обладать требуемыми свойствами. ■

Наконец, отметим следующее обобщение конструкции пространств $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ и $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$. Пусть $d = (d_\alpha)_{\alpha\in A}$ $(d_\alpha \geqslant 1)$ — некоторый вес. Введем пространство $A_d(\mathbb{R}^\infty)$ согласно (4.31), где произведение $(1+\tau_1)^{\alpha_1}(1+\tau_2)^{\alpha_2}\ldots$ заменено на $d_\alpha$. Если D — некоторое множество таких весов $d$, то можно рассмотреть проективный предел $\mathcal{A}_D(\mathbb{R}^\infty) = \mathrm{pr}\lim_{d\in D} A_d(\mathbb{R}^\infty)$ (при этом нужно лишь требовать, чтобы для каждых $d'$, $d'' \in D$ нашелся вес $d''' \in D$ и постоянные $c'$, $c'' \in (0, \infty)$ такие, чтобы $d'_\alpha \leqslant c' d'''_\alpha$, $d''_\alpha \leqslant c'' d'''_\alpha$ $(\alpha \in A)$. Если в качестве D взять совокупность всех весов $d = (d_\alpha)_{\alpha\in A}$ $(d_\alpha \geqslant 1)$, то, очевидно, $\mathcal{A}_D(\mathbb{R}^\infty) = P_{\text{ц}}(\mathbb{R}^\infty)$ (ср., например, с теоремой 4.4). Сходимость последовательности $(p_k)_{k=1}^\infty$, $p_k \in P_{\text{ц}}(\mathbb{R}^\infty)$, к $p \in P_{\text{ц}}(\mathbb{R}^\infty)$ сейчас означает, что количество переменных, фигурирующих в полиномах $p_k(x)$, $p(x)$, и порядки этих полиномов равномерно по $k$ ограничены и коэффициенты полиномов $p_k(x)$ сходятся к соответствующим коэффициентам полинома $p(x)$.

При рассмотрении следующего примера будет показано, что *пространство* $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$ *состоит из цилиндрических функций*. Вместе с тем несложно построить аналогичные пространства, содержащие и нецилиндрические функции. Для этого нужно рассмотреть пространство $\mathcal{A}_D(\mathbb{R}^\infty)$, где $d_\alpha = (1+\tau_1)^{\alpha_1}(1+\tau_2)^{\alpha_2}\ldots$, однако последовательности $\tau = (\tau_n)_{n=1}^\infty$ не произвольные из T, а меняются по некоторому счетному множеству $T_1$ из T, обладающему тем свойством, что для любого $\tau' \in T_1$ найдется $\tau'' \in T_1$ такая, что $\sum_{n=0}^\infty \tau'_n(\tau''_n)^{-1} < \infty$ (последнее соотношение обеспечивает ядерность $\mathcal{A}_D(\mathbb{R}^\infty)$; проверяется это так же, как и в случае $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$).

### 6. ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{H}(\mathbb{R}^\infty)$.

Подобно пространству $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$ построим невзвешенное тензорное произведение, причем роль пространств $A_l(\mathbb{R}^1)$ будут по существу играть пространства $G^l(\mathbb{R}^1)$. Перепишем сперва в терминах разложений по полиномам Эрмита (4.23) построение $G^l(\mathbb{R}^1)$. Пусть $u \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ и $u(t) = \sum_{j=0}^\infty u_j h_j(t)$ — разложение этой функции по полиномам Эрмита. Тогда вследствие (4.38)

$$(Du)(t) = \sum_{j=1}^\infty u_j \sqrt{2j}\, h_{j-1}(t) = \sum_{j=0}^\infty u_{j+1}\sqrt{2(j+1)}\, h_j(t) \quad (t \in \mathbb{R}^1).$$



Итерируя эту формулу, получаем

$$(D^\mu u)(t) = \sum_{j=0}^\infty u_{j+\mu}(2^\mu(j+1)\ldots(j+\mu))^{\frac{1}{2}} h_j(t) \quad (t\in\mathbb{R}^1;\ \mu = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, (4.5) перепишется в виде

$$(u, v)_{G^l(\mathbb{R}^1)} = \sum_{\mu=0}^{l}\left(\sum_{j=0}^\infty u_{j+\mu}\bar{v}_{j+\mu}(2^\mu(j+1)\ldots(j+\mu))\right) \tag{4.49}$$

$$(u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1);\ l = 0, 1, \ldots)$$

(в случае $\mu = 0$ множитель при $u_j\bar{v}_j$ отсутствует).

Для каждого $\mu = 0, \ldots, l$

$$\sum_{j=0}^\infty |u_{j+\mu}|^2(2^\mu(j+1)\ldots(j+\mu)) \leqslant 2^l\sum_{j=0}^\infty |u_{j+\mu}|^2(j+\mu+1)^l \leqslant$$

$$\leqslant 2^l \sum_{j=0}^\infty |u_j|^2(1+j)^l. \tag{4.50}$$

При $\mu = l$ левая часть неравенства (4.50) оценивается снизу через $2^l\sum_{j=l}^\infty |u_j|^2(1+j)^l$ и, кроме того,

$$\sum_{j=0}^{l-1}|u_j|^2(1+j)^l \leqslant l^l\sum_{j=0}^\infty |u_j|^2.$$

Из последних двух оценок и (4.50) заключаем, что существуют такие постоянные $c'_l$, $c''_l$, что

$$c'_l\sum_{j=0}^\infty |u_j|^2(1+j)^l \leqslant \|u\|^2_{G^l(\mathbb{R}^1)} \leqslant c''_l\sum_{j=0}^\infty |u_j|^2(1+j)^l \quad (l = 0, 1, \ldots). \tag{4.51}$$

Для каждого $l = 0, 1, \ldots$ введем гильбертово пространство

$$H^l(\mathbb{R}^1) = \{u \in L_2(\mathbb{R}^1, dg(t)) \mid \sum_{j=0}^\infty |u_j|^2(1+j)^l < \infty\}; \tag{4.52}$$

$$(u, v)_{H^l(\mathbb{R}^1)} = \sum_{j=0}^\infty u_j\bar{v}_j(1+j)^l \quad (u, v \in H^l(\mathbb{R}^1)).$$

Из (4.51) следует, что $H^l(\mathbb{R}')$ — перенормированное должным образом пространство $G^l(\mathbb{R}^1)$; $H^0(\mathbb{R}^1) = G^0(\mathbb{R}^1) = L_2(\mathbb{R}^1, dg(t))$. Очевидно, $\|\cdot\|_{H^l(\mathbb{R}^1)} \leqslant \|\cdot\|_{H^{l+1}(\mathbb{R}^1)}$; $H^{l+1}(\mathbb{R}^1) \subseteq H^l(\mathbb{R}^1)$ $(l = 0, 1, \ldots)$. Множество $\bigcap_{l=0}^\infty H^l(\mathbb{R}^1)$ плотно в каждом $H^l(\mathbb{R}^1)$. Таким образом можно образовать проективный предел

$$\operatorname{pr}\lim_{l\in\{0,1,\ldots\}} H^l(\mathbb{R}^1) = \mathcal{H}(\mathbb{R}^1), \tag{4.53}$$

совпадающий с $\mathcal{G}(\mathbb{R}^1) = \operatorname{pr}\lim_{l\in\{0,1,\ldots\}} G^l(\mathbb{R}^1)$ и поэтому являющийся ядерным пространством.

Сравнивая (4.24) и (4.52), заключаем, что пространства $A_l(\mathbb{R}^1)$ гораздо более узкие, чем $H^l(\mathbb{R}^1)$, т. е. $G^l(\mathbb{R}^1)$. Можно показать, что $A_l(\mathbb{R}_1)$ состоит из целых функций определенного роста, а, как мы только что выяснили, $H^l(\mathbb{R}^1)$ — из $l$ раз дифференцируемых в среднем относительно гауссовской меры функций (точный результат, касающийся функций пространства $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$, мы сформулируем ниже).

Для дальнейшего будет полезно непосредственно (подобно лемме 4.4) доказать ядерность $\mathcal{H}(\mathbb{R}^1)$. Зафиксируем $l$, $l' = 0, 1, \ldots$, причем $l' > l$. Ортонормированным базисом в пространстве $A_{l'}(\mathbb{R}^1)$ служат векторы $e_j(t) = (1+j)^{-\frac{l'}{2}} h_j(t)$ $(j = 0, 1, \ldots)$, поэтому для оператора вложения $O_{l'l} : H^{l'}(\mathbb{R}^1) \to H^l(\mathbb{R}^1)$ согласно (4.52) имеем

$$|O_{l'l}|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|(1+j)^{-\frac{l'}{2}} h_j(t)\|^2_{H^l(\mathbb{R}^1)} = \sum_{j=0}^{\infty}(1+j)^{l-l'}. \tag{4.54}$$

Поэтому если $l' = l + 2$, то ряд (4.54) сходится и вложение $O_{l'l}$ квазиядерно (это по существу другое доказательство теоремы 4.1).

Как и в случае пространств $A_l(\mathbb{R}^1)$, обычным образом строится цепочка

$$\bigcup_{l=0}^{\infty} H^{-l}(\mathbb{R}^1) = (\mathcal{H}(\mathbb{R}^1))' \supseteq \ldots \supseteq H^{-2}(\mathbb{R}^1) \supseteq H^{-1}(\mathbb{R}^1) \supseteq$$
$$\supseteq H^0(\mathbb{R}^1) \supseteq H^1(\mathbb{R}^1) \supseteq H^2(\mathbb{R}^1) \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^1),$$

где $H^{-l}(\mathbb{R}^1)$ — негативное пространство относительно позитивного $H^l(\mathbb{R}^1)$ и нулевого $H^0(\mathbb{R}^1)$. Очевидно, $H^{-l}(\mathbb{R}^1) = \{\xi = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j h_j(t) \mid \sum_{j=0}^{\infty} |\xi_j|^2 (1+j)^{-l} < \infty\}$; $(\xi, u)_{H^0(\mathbb{R}^1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \bar{u}_j$ $(u \in H^l(\mathbb{R}^1), \xi \in H^{-l}(\mathbb{R}^1);\ l = 0, 1, \ldots)$.

Построим теперь пространства, подобные $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ и $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$. Возьмем $e = (e^{(n)}(x_n))_{n=1}$, $e^{(n)}(x_n) \equiv 1$, в качестве совместной стабилизирующей последовательности; роль $\Sigma$ по-прежнему будут играть всевозможные пары $(\tau, 1)$, где $\tau = (\tau_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{T}_n = \mathrm{T}$, $\mathrm{T}_n = \{0, 1, \ldots\}$. Будем строить $\Sigma$-бесконечное тензорное произведение счетного множества пространств $\mathcal{H}(\mathbb{R}^1)$. Пусть $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность неотрицательных целых чисел. Образуем гильбертово бесконечное тензорное произведение



$$H^\tau(\mathbb{R}^\infty) = \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H^{\tau_n}(\mathbb{R}^1) \quad (\tau = (\tau_n)_{n=1}^{\infty}) \tag{4.55}$$

и соответствующий проективный предел

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^\infty) = \operatorname{pr}\lim_{\tau\in\mathrm{T}} H^\tau(\mathbb{R}^\infty). \tag{4.56}$$

*Проективный предел (4.56) определен корректно и представляет собой ядерное пространство.*

Действительно, достаточно проверить выполнение условий теоремы 4.5. Пусть $\tau' = (\tau'_n)_{n=1}^{\infty}$, $\tau'' = (\tau''_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{T}$ — две фиксированные последовательности, $\tau''' = (\tau'''_n)_{n=1}^{\infty}$, где

$$\tau'''_n = \tau'_n + \tau''_n + 2n. \tag{4.57}$$

Тогда согласно (4.54), суммируя геометрическую прогрессию, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|O_{\tau'''_n\tau'_n}|^2 - 1) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(1+j)^{\tau'_n-\tau'''_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(1+j)^{-2n} =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty}(2j+j^2)^{-1} < \infty. \tag{4.58}$$

Аналогично доказывается сходимость второго ряда в (4.19). ■

Как и для пространств $\mathrm{A}_\tau(\mathbb{R}^\infty)$, при помощи теоремы 2.4 легко доказывается, что негативное пространство $H^{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)$ относительно позитивного $H^\tau(\mathbb{R}^\infty)$ $(\tau \in \mathrm{T})$ и нулевого $H^0(\mathbb{R}^\infty) = \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H^0(\mathbb{R}^1) = L_2(\mathbb{R}^\infty, dg(x))$ равно $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H^{-\tau_n}(\mathbb{R}^1)$. Для построенных пространств подобно (4.31) имеем

$$H^\tau(\mathbb{R}^\infty) = \{u(x) = \sum_{\alpha\in\mathbf{A}} u_\alpha h_\alpha(x) \in L_2(\mathbb{R}^\infty, dg(x) \mid \sum_{\alpha\in\mathbf{A}} |u_\alpha|^2 (1+\alpha_1)^{\tau_1} \times$$
$$\times (1+\alpha_2)^{\tau_2} \ldots < \infty\};$$

$$(u, v)_{H^\tau(\mathbb{R}^\infty)} = \sum_{\alpha\in\mathbf{A}} u_\alpha \bar{v}_\alpha (1+\alpha_1)^{\tau_1}(1+\alpha_2)^{\tau_2} \ldots \quad (u, v \in H^\tau(\mathbb{R}^\infty)); \tag{4.59}$$

пространство $H^{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)$ состоит из векторов $\xi = \sum_{\alpha\in\mathbf{A}} \xi_\alpha h_\alpha$, где $\sum_{\alpha\in\mathbf{A}} |\xi_\alpha|^2 (1+\alpha_1)^{-\tau_1}(1+\alpha_2)^{-\tau_2} \ldots < \infty$; $(\xi, u)_{H^0(\mathbb{R}^\infty)} = \sum_{\alpha\in\mathbf{A}} \xi_\alpha \bar{u}_\alpha$.

Сравнивая произведенные построения с построениями примера 2, п. 4 видим, что ядерные пространства $\mathcal{G}(\mathbb{R}^1, 1) = \operatorname{pr}\lim_{l\in\{0,1,\ldots\}} G^l(\mathbb{R}^1, 1) =$

$= \mathrm{pr} \lim\limits_{l \in \{0,1,\ldots\}} G^l(\mathbb{R}^1)$ можно бесконечно тензорно перемножать не только с взвешиванием, но и без него. Необходимо только при этом перенормировать должным образом образующие гильбертовы пространства $G^l(\mathbb{R}^1)$, т. е. перейти от этих пространств к пространствам $H^l(\mathbb{R}^1)$. В результате получим $\mathcal{H}(\mathbb{R}^\infty)$. Нетрудно показать, что $\mathcal{H}(\mathbb{R}^\infty)$ *состоит из цилиндрических функций*. В самом деле, согласно (4.56) и (4.59) если $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^\infty)$, то $u(x) = \sum\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} u_\alpha h_\alpha(x)$, где $\sum\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} |u_\alpha|^2 (1+\alpha_1)^{\tau_1}(1+\alpha_2)^{\tau_2} \ldots < \infty$ для любой последовательности $(\tau_n)_{n=1}^\infty \in \mathrm{T}$. Рассмотрим разложение $\mathrm{A}$ на множества $\mathrm{A}_n : \mathrm{A} = \bigcup\limits_{n=1}^\infty \mathrm{A}_n$. Требуется доказать, что $u_\alpha = 0$ при $\alpha \in \mathrm{A}_n$ начиная с некоторого номера $n$. Предположим противное. Тогда существует бесконечное множество индексов $\alpha(n_k) \in \mathrm{A}_{n_k}$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$ таких, что $u_{\alpha(n_k)} \neq 0$. Пусть $\alpha(n_k) = ((\alpha(n_k))_1, \ldots, (\alpha(n_k))_{n_k}, 0, 0, \ldots)$. Так как $\alpha(n_k) \in \mathrm{A}_{n_k}$, то $(\alpha(n_k))_{n_k} > 0$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ подберем теперь $\tau_{n_k} = 0, 1, \ldots$ столь большим, чтобы $|u_{\alpha(n_k)}|^2 (1 + (\alpha(n_k))_{n_k})^{\tau_{n_k}} \geqslant 1$, и построим последовательность $\tau = (\tau_n)_{n=1}^\infty$, в которой на $n_k$-х местах стоят подобранные $\tau_{n_k}$, а на остальных — нули. Имеем

$$\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} |u_\alpha|^2 (1+\alpha_1)^{\tau_1}(1+\alpha_2)^{\tau_2} \ldots \geqslant \sum_{k=1}^\infty |u_{\alpha(n_k)}|^2 (1 + (\alpha(n_k))_1)^{\tau_1} \times$$
$$\times (1 + (\alpha(n_k))_2)^{\tau_2} \ldots \geqslant \sum_{k=1}^\infty |u_{\alpha(n_k)}|^2 (1 + (\alpha(n_k))_{n_k})^{\tau_{n_k}} = \infty,$$

что абсурдно. ■

Сравнивая этот результат с примером 2 п. 4, заключаем, что в. $\bigotimes\limits_{n=1;e}^\infty \mathcal{G}(\mathbb{R}^1, 1)$ и $\mathcal{H}(\mathbb{R}^\infty)$ как множества совпадают. Легко видеть, что и понятия сходящихся последовательностей в этих двух пространствах будут совпадать (хотя их топологии различные).

Так как $A_l(\mathbb{R}^1) \subset H^l(\mathbb{R}^1)$ $(l = 1, 2, \ldots)$, то и $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^\infty)$. Отсюда и из только что доказанного следует, что $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$ также состоит из цилиндрических функций. Тем самым мы доказали результат, сформулированный на стр. 120.

Опишем характер аналитичности функций из пространства $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$. Пусть $u \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$, тогда $u$ цилиндрична: $u(x) = u_{\text{ц}}(x_1, \ldots, x_p)$. Оказывается, что $u_{\text{ц}}(x_1, \ldots, x_p)$ совпадает с сужением на пространство $\mathbb{R}^p$ целой функции $p$ комплексных переменных порядка



роста не выше двух минимального типа (т. е. целой функции $\mathbb{C}^p \ni (z_1, \ldots, z_p) \mapsto u_{\text{ц}}(z_1, \ldots z_p) \in \mathbb{C}^1$, допускающей оценку $|u_{\text{ц}}(z_1, \ldots, z_p)| \leqslant c_{u_{\text{ц}},\varepsilon} \exp(\varepsilon \sum\limits_{n=1}^p |z_n|^2)$ $((z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p)$ с любым $\varepsilon > 0$). Обратно, каждое такое сужение входит в $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$. Доказывается это путем изучения свойств аналитичности функции, разлагающейся по полиномам Эрмита с определенным порядком убывания коэффициентов.

Как и в случае пространств $A_l(\mathbb{R}^1)$, в качестве $\mathrm{T}$ можно было бы брать не совокупность всех последовательностей $\tau = (\tau_n)_{n=1}^\infty$, где $\tau_n = 0, 1, \ldots$, а некоторую ее часть $\mathrm{T}_1$. Соотношения (4.57) и (4.58) показывают, что для получения ядерного пространства эта часть должна быть достаточно богата: так, например, добиться квазиядерности вложения $O_{\tau_n'''\tau_n'}$, где $\tau' = (l', l', \ldots)$, $\tau''' = (l''', l''', \ldots)$, выбором $l'$ и $l'''$ нельзя (перемножаемые пространства должны иметь достаточно быстро возрастающую гладкость). Условие на $\mathrm{T}_1$, обеспечивающее ядерность пространства, нетрудно сформулировать.

Дальнейшие результаты п. 5 для пространств $H^\tau(\mathbb{R}^\infty)$ уже оказываются несправедливыми. Это связано с тем обстоятельством, что $\delta$-функция (4.33) может являться элементом некоторого пространства $H^{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)$ только для $x \in l_2$, так как в других случаях ряд $\sum\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} h_\alpha^2(x)(1+\alpha_1)^{-\tau_1}(1+\alpha_2)^{-\tau_2} \ldots$ нельзя сделать сходящимся путем выбора достаточно быстро растущих $\tau_n$ — это следует из асимптотической формулы для полиномов Эрмита $h_j(t)$ при $j \to \infty$.

# ОБЩИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

## § 1. СОВМЕСТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЕДИНИЦЫ СЕМЕЙСТВА КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Будет строиться совместное разложение единицы произвольного семейства коммутирующих самосопряженных операторов, являющееся операторнозначной мерой на пространстве всех вещественнозначных функций на множестве индексов, нумерующих операторы. В случае конечного числа $p$ операторов такое пространство функций сведется к $\mathbb{R}^p$. Эти результаты будут также перенесены на нормальные операторы.

### 1. ПОСТРОЕНИЕ СОВМЕСТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЕДИНИЦЫ СЕМЕЙСТВА КОММУТИРУЮЩИХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим самосопряженные операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве $H$. Как известно, каждому такому оператору $A$ отвечает разложение единицы $E(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$. По функции $E(\lambda)$ строится операторнозначная мера $E(\Delta)$, определенная на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ борелевских множеств $\Delta$ на оси $\mathbb{R}^1$: на полуинтервалах $[\alpha, \beta)$ полагаем $E([\alpha, \beta)) = E(\beta) - E(\alpha)$, а затем продолжаем ее обычным образом на борелевские множества. Именно эту меру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto E(\Delta)$ мы в дальнейшем будем называть разложением единицы. Она обладает следующими тремя свойствами: $E(\Delta)$ — проектор, $E(\varnothing) = 0$, $E(\mathbb{R}^1) = 1$; если $\Delta_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ взаимно не пересекаются, то $E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(\Delta_j)$ (ряд сходится в сильном смысле); $E(\Delta' \cap \Delta'') = E(\Delta') E(\Delta'')$ $(\Delta', \Delta'' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$. Обратно, если имеется операторнозначная мера $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto E(\Delta)$, обладающая этими свойствами, то она является разложением единицы; соответствующее $E(\lambda)$ строится по формуле $E(\lambda) = E((-\infty, \lambda))$.

Введем общее понятие разложения единицы. Пусть $\Lambda$ — абстрактное пространство, $\mathfrak{A}$ — некоторая $\sigma$-алгебра множеств из $\Lambda$. Функцию $\mathfrak{A} \ni B \mapsto E(B)$ будем называть разложением единицы на $\Lambda$, если



а) $E(B)$ $(B \in \mathfrak{A})$ — проектор в $H$, $E(\varnothing) = 0$, $E(\Lambda) = 1$;

б) выполняется свойство абсолютной аддитивности: если $B_j \in \mathfrak{A}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ взаимно не пересекаются, то $E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(B_j)$, где ряд сходится в сильном смысле;

в) выполняется свойство ортогональности: $E(B' \cap B'') = E(B') E(B'')$ $(B', B'' \in \mathfrak{A})$.

Выше у нас фигурировало разложение единицы на $\mathbb{R}^1$. Напомним конструкцию такого разложения на $\mathbb{R}^p$, где $p = 1, 2, \ldots$ Пусть имеется $p$ самосопряженных операторов $A_1, \ldots, A_p$ в $H$, $E_1, \ldots, E_p$ — соответствующие разложения единицы. Операторы $A_1, \ldots, A_p$ будем называть коммутирующими, если коммутируют их разложения единицы, т. е. коммутируют операторы $E_j(\Delta')$ и $E_k(\Delta'')$ при произвольных $j, k = 1, \ldots, p$ и $\Delta', \Delta'' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$. Для такого семейства операторов $(A_x)_{x=1}^p$ можно построить их (совместное $p$-мерное) разложение единицы — операторнозначную меру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \ni B \mapsto E(B)$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств из $\mathbb{R}^p$. Эта мера строится по мерам $E_1, \ldots, E_p$ подобно построению тензорного произведения скалярных мер, а именно: на прямоугольниках $\mathop{\times}_{n=1}^{p} \Delta_n$ $(\Delta_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$ полагаем $E\left(\mathop{\times}_{n=1}^{p} \Delta_n\right) = \prod_{n=1}^{p} E_n(\Delta_n)$, а затем продолжаем $E$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ (см., напр.: Плеснер [1, гл. 8, § 8]; обстоятельное изложение см. в книге по спектральной теории операторов М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка). В результате получаем операторнозначную меру $E$, обладающую свойствами а) — в). Обратно, этими свойствами мера $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \ni B \mapsto E(B)$ определяется, т. е. каждую такую меру на $\mathbb{R}^p$, удовлетворяющую свойствам а) — в), можно рассматривать как построенную описанным способом. Носитель $\operatorname{supp} E \subseteq \mathbb{R}^p$ меры $E$ называется совместным спектром семейства операторов $(A_x)_{x=1}^p$, в случае $p = 1$ он совпадает со спектром $A$.

Пусть $\mathbb{R}^p \ni \lambda \mapsto F(\lambda) = F(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^1$ — измеримая по Борелю почти везде относительно меры $E$ конечная функция, оператор

$$F(A_1, \ldots, A_p) = \int_{\mathbb{R}^p} F(\lambda)\, dE(\lambda) \tag{1.1}$$

называется функцией от операторов $A_1, \ldots, A_p$; если $F(\lambda) = \lambda_x$, где $x = 1, \ldots, p$ фиксировано, то $F(A_1, \ldots, A_p) = A_x$. Сходимость интеграла (1.1) понимается в сильном смысле, его область определения

$$\mathfrak{D}(F(A_1, \ldots, A_p)) = \{f \in H \mid \int_{\mathbb{R}^p} |F(\lambda)|^2 d(E(\lambda) f, f)_H < \infty\}. \tag{1.2}$$

Легко видеть, что $\mathfrak{D}\,(F\,(A_1, \ldots, A_p))$ плотна в $H$. Если $F\,(\lambda)$ вещественнозначна, то оператор $F\,(A_1, \ldots, A_p)$ самосопряжен. В простейшем случае, когда $F\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ — полином, а операторы $A_1, \ldots, A_p$ дополнительно ограничены, $F\,(A_1, \ldots, A_p)$ получается подстановкой в $F\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ вместо $\lambda_x$ операторов $A_x$. После этих напоминаний перейдем к рассмотрению произвольного семейства коммутирующих самосопряженных операторов.

Пусть $X$ — произвольное множество индексов $x$, $(A_x)_{x \in X}$ — семейство самосопряженных операторов $A_x$ в $H$, каждые два из которых коммутируют в приведенном выше смысле. Через $\mathcal{B}\,(\mathbb{R}^p) \ni \Delta \mapsto E_{x_1, \ldots, x_p}\,(\Delta)$ обозначим совместное $p$-мерное разложение единицы, отвечающее операторам $A_{x_1}, \ldots, A_{x_p}$ $(x_1, \ldots, x_p$ различны; $p = 1, 2 \ldots)$. По таким разложениям единицы построим совместное разложение единицы для всего семейства $(A_x)_{x \in X}$, определенное на множествах из пространства всех вещественнозначных функций $X \ni x \mapsto \lambda\,(x) \in \mathbb{R}^1$.

Итак, рассмотрим множество $\mathbb{R}^X$ всех функций $X \ni x \mapsto \lambda\,(x) \in \mathbb{R}^1$ или, иными словами, прямое произведение $\underset{x \in X}{\times} R_x$, где каждое $R_x = \mathbb{R}^1$ (если $X$ счетно, то $\mathbb{R}^X$ будет обозначаться и через $\mathbb{R}^\infty$). Пусть $x_1, \ldots, x_p \in X$ различны, $\Delta \subseteq \mathbb{R}^p$ — множество из $\sigma$-алгебры $\mathcal{B}\,(\mathbb{R}^p)$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим все функции $\lambda\,(\cdot) \in \mathbb{R}^X$, выделяемые условием $(\lambda\,(x_1), \ldots, \lambda\,(x_p)) \in \Delta$. Такое множество $Ц$ функций называется цилиндрическим, отвечающим координатам $x_1, \ldots, x_p$ и основанию $\Delta$, мы его обозначим $Ц\,(x_1, \ldots, x_p; \Delta)$. Таким образом,

$$Ц = Ц\,(x_1, \ldots, x_p; \Delta) = \{\lambda\,(\cdot) \in \mathbb{R}^X \mid (\lambda\,(x_1), \ldots, \lambda\,(x_p)) \in \Delta\} \quad (1.3)$$
$$(x_1, \ldots, x_p \in X;\ \Delta \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R}^p);\ p = 1, 2, \ldots).$$

В записи (1.3) заданное цилиндрическое множество $Ц$ не определяет однозначно последовательность точек $x_1, \ldots, x_p$ и основание $\Delta \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R}^p)$. Так, легко понять, что если $y_1, \ldots, y_p$ — те же точки $x_1, \ldots, x_p$, но записанные в каком-либо другом порядке, то существует $\Delta' \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R}^p)$ такое, что $Ц\,(x_1, \ldots, x_p; \Delta) = Ц\,(y_1, \ldots, y_p; \Delta')$ (например, $Ц\,(x_1, x_2; \Delta_1 \times \Delta_2) = Ц\,(x_2, x_1; \Delta_2 \times \Delta_1)$, где $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R}^1)$). Далее, пусть точка из $X$ $y \neq x_k$ $(k = 1, \ldots, p)$ и $n = 1, \ldots, p + 1$ фиксированы. Рассмотрим множество $\Delta' = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid (\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{p+1}) \in \Delta\} \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R}^{p+1})$, тогда, очевидно, $Ц\,(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, x_n, \ldots, x_p; \Delta') = Ц\,(x_1, \ldots, x_p; \Delta)$ (при $n = 1$ или $p + 1$ $\Delta'$ соответственно совпадает с $\mathbb{R}^1 \times \Delta$ или $\Delta \times \mathbb{R}^1$). Обратно, цилиндрическое множество не изменится, если проделать противоположную процедуру «исключения прямого сомножителя вида $\mathbb{R}^1$ из $\Delta$ и соответствующей точки $y$». В результате конечного числа таких исключений всегда можно добиться получения представления (1.3) с минимальным количеством координат (минимальная запись цилиндрического множества) *.

*Совокупность всех цилиндрических множеств образует алгебру* $\mathcal{C}\,(\mathbb{R}^X)$. Действительно, для того чтобы доказать включения $Ц' \cup Ц''$, $Ц' \setminus Ц'' \in \mathcal{C}\,(\mathbb{R}^X)$, если $Ц'$, $Ц'' \in \mathcal{C}\,(\mathbb{R}^X)$, достаточно в записи (1.3) для $Ц'$, $Ц''$ перейти к общим координатам $x_1, \ldots, x_p$, добавляя при необходимости дополнительные точки описанной только что процедурой. После этого утверждение следует из формулы $Ц' \cup Ц'' = Ц\,(x_1, \ldots, x_p; \Delta') \cup Ц\,(x_1, \ldots, x_p; \Delta'') = Ц\,(x_1, \ldots, x_p; \Delta' \cup \Delta'')$ и аналогичной для разности. ■

Через $\mathcal{C}_\sigma\,(\mathbb{R}^X)$ обозначим $\sigma$-оболочку алгебры $\mathcal{C}\,(\mathbb{R}^X)$. Определим на алгебре $\mathcal{C}\,(\mathbb{R}^X)$ операторнозначную функцию множеств $E\,(B)$, полагая для различных $x_n$

$$E\,(Ц\,(x_1, \ldots, x_p; \Delta)) = E_{x_1, \ldots, x_p}\,(\Delta)$$
$$(x_1, \ldots, x_p \in X;\ \Delta \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R}^p);\ p = 1, 2, \ldots). \quad (1.4)$$

Легко понять, что это определение корректно: каждому цилиндрическому множеству $Ц$ однозначно сопоставляется оператор $E\,(Ц)$. В самом деле, каждое изменение записи $Ц$ связано с домножением $\Delta$ прямым образом на $\mathbb{R}^1$ или с удалением такого множителя из $\Delta$. Так как $E_x\,(\mathbb{R}^1) = 1$ $(x \in X)$, то из конструкции $E_{x_1, \ldots, x_p}\,(\Delta)$ по мерам $E_{x_n}$ следует независимость $E\,(Ц)$ от записи $Ц$. Так же легко понять, что функция множеств $\mathcal{C}\,(\mathbb{R}^X) \ni Ц \mapsto E\,(Ц)$ конечно аддитивна и ортогональна, т. е. если $Ц_1, \ldots, Ц_m \in \mathcal{C}\,(\mathbb{R}^X)$ взаимно не пересекаются, то $E\left(\bigcup_{n=1}^{m} Ц_n\right) = \sum_{n=1}^{m} E\,(Ц_n)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и $E\,(Ц' \cap Ц'') = E\,(Ц')\,E\,(Ц'')$ $(Ц', Ц'' \in \mathcal{C}\,(\mathbb{R}^X))$. Эти свойства сразу следуют из (1.4), если записать все рассматриваемые цилиндрические множества при помощи одного и того же набора координат $x_1, \ldots, x_p \in X$.

**Теорема 1.1.** *Функция множеств* $\mathcal{C}\,(\mathbb{R}^X) \ni Ц \mapsto E\,(Ц)$ *продолжается единственным образом до операторнозначной меры* $\mathcal{C}_\sigma\,(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto E\,(B)$, *обладающей свойствами* а) — в) (*где* $\Lambda = \mathbb{R}^X$, $\mathfrak{A} = \mathcal{C}_\sigma\,(\mathbb{R}^X)$). *Обратно, каждая такая операторнозначная мера порождается описанным выше образом по некоторым одномерным разложениям единицы* $E_x\,(\Delta)$ $(x \in X,\ \Delta \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R}^1))$.

Доказательство. Зафиксируем $f \in H$. Неотрицательная функция множеств $\mathcal{C}\,(\mathbb{R}^X) \ni Ц \mapsto (E\,(Ц)\,f, f)_H = \rho_{f,f}\,(Ц)$,

* Более формализовано эта процедура изложена в книге Гихмана и Скорохода [2, гл. 1]. Для понимания ряда построений § 1 полезно знакомство с этой книгой, а также с книгой Вентцеля [1].

представляющая собой согласованную систему конечномерных распределений, продолжается согласно теореме А. Н. Колмогорова (см., напр.: Гихман, Скороход [2, гл. 1, § 4, теорема 2], Вентцель [1, гл. 5, § 5.1, п. 4]) до меры $\rho_{f,f}$, определенной на некоторой $\sigma$-алгебре, содержащей $\mathcal{C}(\mathbb{R}^X)$. Во всяком случае эта мера определена на $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$. То же можно сказать и о комплекснозначной функции множеств $\rho_{f,g}(Ц) = (E(Ц)f, g)_H$ $(f, g \in H)$, так как она представима в виде линейной комбинации четырех функций вида $\rho_{h,h}(Ц)$ $(h \in H)$.

Продолженная числовая обобщенная мера $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto \rho_{f,g}(B)$ зависит от $f$ и $g$ билинейным образом. Это вытекает из того, что $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$, как хорошо известно, является также монотонной оболочкой $\mathcal{C}(\mathbb{R}^X)$, а продолжение меры с алгебры на ее монотонную оболочку осуществляется последовательными предельными переходами. Так как $\rho_{f,g}(Ц) = (E(Ц)f, g)_H$ зависит от $f$, $g$ билинейным образом, то последовательно выполняемые ее продолжения также приведут к тому, что $\rho_{f,g}(B)$ при каждом фиксированном $B$ зависит от $f$, $g \in H$ билинейно. Из предельного же перехода следует, что квадратичные формы $\rho_{f,f}(B)$ неотрицательны (а значит, $\rho_{f,g}(B)$ эрмитовы). Кроме того, $|\rho_{f,g}(B)| \leqslant \|f\|_H \|g\|_H$ $(f, g \in H)$. Это следует из оценки

$$|\rho_{f,g}(B)|^2 \leqslant \rho_{f,f}(B)\,\rho_{g,g}(B) \leqslant \rho_{f,f}(\mathbb{R}^X)\,\rho_{g,g}(\mathbb{R}^X) =$$
$$= (E(\mathbb{R}^X)f, f)_H (E(\mathbb{R}^X)g, g)_H = \|f\|_H^2 \|g\|_H^2 \quad (f, g \in H).$$

Таким образом, для каждого $B$ существует неотрицательный не превосходящий по норме единицы оператор $E(B)$ такой, что $(E(B)f, g)_H = \rho_{f,g}(B)$ $(B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X);\ f, g \in H)$. Докажем, что каждый оператор $E(B)$ — проектор. Действительно, пусть, например, $(Ц_n)_{n=1}^\infty$ — монотонная последовательность цилиндрических множеств, а $B = \lim_{n\to\infty} Ц_n$. Тогда, с одной стороны, по конструкции $E(B)$ равно слабому пределу $E(Ц_n)$, с другой — существует сильный предел $\lim_{n\to\infty} E(Ц_n)$, так как $(E(Ц_n))_{n=1}^\infty$ — монотонная последовательность проекторов. Поэтому $E(B)$ совпадает с этим пределом и, следовательно, является проектором. Таким образом, в результате первого шага построения продолжения $E(Ц)$ с $\mathcal{C}(\mathbb{R}^X)$ на $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ мы получаем проекторы, обладающие, очевидно, свойством монотонности: $E(B') \leqslant E(B'')$, если $B' \subseteq B''$. Продолжая это рассуждение, мы убедимся, что $E(B)$ $(B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X))$ — проекторы и, кроме того, при каждом шаге продолжения имеет место не только слабая, но и сильная сходимость операторов $E(B)$.

Таким образом, свойство а) для $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto E(B)$ доказано. Свойство в) — ортогональность — теперь легко следует из предельного перехода. Так, например, если $(Ц_n')_{n=1}^\infty$, $(Ц_n'')_{n=1}^\infty$ — монотонные неубывающие последовательности цилиндрических множеств и $B' = \lim_{n\to\infty} Ц_n'$, $B'' = \lim_{n\to\infty} Ц_n''$, то $(Ц_n' \cap Ц_n'')_{n=1}^\infty$ — монотонная неубывающая последовательность и $B' \cap B'' = \lim_{n\to\infty} (Ц_n' \cap Ц_n')$. Поэтому $E(B' \cap B'') = \lim_{n\to\infty} E(Ц_n' \cap Ц_n'') = \lim_{n\to\infty} (E(Ц_n')\,E(Ц_n'')) = E(B')\,E(B'')$ (мы воспользовались тем, что сходимости $E(Ц_n') \to E(B')$, $E(Ц_n'') \to E(B'')$ сильные). Аналогично обстоит дело в случае, когда обе последовательности невозрастающие. Если одна из последовательностей неубывающая, а вторая невозрастающая, нужно перейти к дополнениям для одной из них и воспользоваться тем, что $E(\mathbb{R}^X \setminus B) = 1 - E(B)$. Это рассуждение затем повторяется при следующем предельном переходе и т. д. Свойство б) абсолютной аддитивности следует из абсолютной аддитивности числовой меры $\rho_{f,g}(B)$; сильная сходимость соответствующего ряда вытекает из ортогональности $E(B)$.

Итак, существование продолжения функции множеств $E(Ц)$ до меры $E(B)$ установлено. Его единственность следует из хорошо известной единственности продолжения числовой меры с алгебры на ее $\sigma$-оболочку.

Для доказательства последнего утверждения теоремы определим по заданной операторной мере $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto E(B)$, обладающей свойствами а) — в), одномерные разложения единицы $E_x$, полагая $E_x(\Delta) = E(Ц(x; \Delta))$ $(x \in X,\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$. Каждая функция множеств $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto E_x(\Delta)$, очевидно, обладает свойствами а) — в), причем $E_x(\Delta')$ и $E_y(\Delta'')$ $(x, y \in X;\ \Delta', \Delta'' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$ коммутируют. Далее, легко проследить, что если при помощи описанной процедуры по семейству $(E_x)_{x\in X}$ строить меру $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto E_1(B)$, то $E_1(B) = E(B)$ $(B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X))$. Так, вследствие ортогональности $E(B)$, имеем

$$E_1\Big(Ц\big(x_1, \ldots, x_p;\ \mathop{\times}_{n=1}^{p} \Delta_n\big)\Big) = E_{x_1,\ldots,x_p}\Big(\mathop{\times}_{n=1}^{p} \Delta_n\Big) = E_{x_1}(\Delta_1) \ldots E_{x_p}(\Delta_p) =$$
$$= E(Ц(x_1; \Delta_1)) \ldots E(Ц(x_p; \Delta_p)) = E\Big(\bigcap_{n=1}^{p} Ц(x_n; \Delta_n)\Big) =$$
$$= E\Big(Ц\big(x_1, \ldots, x_p;\ \mathop{\times}_{n=1}^{p} \Delta_n\big)\Big) \quad (x_1, \ldots, x_p \in X;\ \Delta_1, \ldots, \Delta_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)).$$

Затем это равенство распространяется на тот случай, когда $\mathop{\times}_{n=1}^{p} \Delta_n$ заменено на конечные объединения подобных непересекающихся прямоугольников, а затем и на случай, когда $\overset{p}{\underset{n=1}{\times}} \Delta_n$ заменено на произвольное $\Delta \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, $E_1(Ц) = E(Ц)$ $(Ц \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^X))$. В силу уже отмеченной однозначности распространения операторнозначной меры с $\mathscr{C}(\mathbb{R}^X)$ на $\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ отсюда следует, что $E_1(B) = E(B)$ $(B \in \mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X))$. ∎

Меру $\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \to E(B)$ будем называть совместным разложением единицы (с. р. е.) семейства коммутирующих самосопряженных операторов $(A_x)_{x \in X}$.

Если $\mathbb{R}^p \ni \lambda \mapsto F(\lambda) = F(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^1$ — измеримая по Борелю функция, а $x_1, \ldots, x_p$ — фиксированные различные точки из $X$, то для оператора $F(A_{x_1}, \ldots, A_{x_p})$ справедлива формула

$$F(A_{x_1}, \ldots, A_{x_p}) = \int_{\mathbb{R}^X} F(\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p))\, dE(\lambda(\cdot)), \tag{1.5}$$

$$\mathfrak{D}(F(A_{x_1}, \ldots, A_{x_p})) = \{f \in H \mid \int_{\mathbb{R}^X} |F(\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p)|^2 \times$$

$$\times\, d(E(\lambda(\cdot))f, f)_H < \infty\}$$

(функция $\mathbb{R}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto F(\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p)) \in \mathbb{C}^1$, разумеется, измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$; здесь и далее через $dE(\lambda(\cdot))$ обозначено «континуальное» интегрирование относительно построенной меры $\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \to E(B)$). В частности, (1.5) дает

$$A_x = \int_{\mathbb{R}^X} \lambda(x)\, dE(\lambda(\cdot)),\ \mathfrak{D}(A_x) = \{f \in H \mid \int_{\mathbb{R}^X} |\lambda(x)|^2 \times$$

$$\times\, d(E(\lambda(\cdot))f, f)_H < \infty\} \quad (x \in X). \tag{1.6}$$

Соотношения (1.5) легко следуют из (1.1), (1.2). Так, достаточно рассматривать вещественнозначную функцию $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ и заметить, что вследствие конструкции $E(B)$ для любого полуинтервала $[\alpha, \beta)$ можно написать $E(\{\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X \mid F(\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p)) \in [\alpha, \beta)\}) = E(Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta)) = E_{x_1, \ldots, x_p}(\Delta)$, где $\Delta = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \mid F(\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in [\alpha, \beta)\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$. Учитывая построение интеграла через интегральные суммы, получаем следующее равенство, из которого и вытекает утверждение:

$$\int_{\mathbb{R}^X} F(\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p))\, dE(\lambda(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}^p} F(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \times$$

$$\times\, dE_{x_1, \ldots, x_p}((\lambda_1, \ldots, \lambda_p)).$$

Отметим, что формулы (1.5) сохраняются и для функций $F(\lambda_1, \ldots$



$\ldots \lambda_p)$, заданных не всюду на $\mathbb{R}^p$, но обладающих тем свойством, что функция от $\lambda(\cdot)$ $F(\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p))$ определена почти везде относительно $E$.

## 2. ОБОБЩЕНИЕ

Описанная выше конструкция с. р. е. $\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto E(B)$ легко обобщается на тот случай, когда роль $\mathbb{R}^1$ играет некоторое метрическое сепарабельное локально компактное пространство $R$ *. Рассмотрим семейство $(E_x)_{x \in X}$ разложений единицы на $R$ $\mathscr{B}(R) \ni \Delta \mapsto E_x(\Delta)$, зависящих от параметра $x \in X$ ($\mathscr{B}(R)$, как обычно, обозначает $\sigma$-алгебру борелевских множеств из $R$); любые два оператора $E_{x'}(\Delta')$, $E_{x''}(\Delta'')$ $(x', x'' \in X;\ \Delta', \Delta'' \in \mathscr{B}(R))$ предполагаются коммутирующими.

Пусть $R^X$ — пространство всех отображений $X \ni x \mapsto \lambda(x) \in R$. Множество $Ц \subseteq R^X$ называется цилиндрическим, если оно имеет вид $Ц = Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta) = \{\lambda(\cdot) \in R^X \mid (\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p)) \in \Delta\}$, где $x_1, \ldots, x_p \in X$ различны и $\Delta$ входит в $\sigma$-алгебру $\mathscr{B}(R^p)$ борелевских множеств пространства $R^p = \overset{p}{\underset{n=1}{\times}} R$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Как и в случае $R = \mathbb{R}^1$, легко показать, что совокупность $\mathscr{C}(R^X)$ всех цилиндрических множеств образует алгебру. Пусть $\mathscr{C}_\sigma(R^X)$ — ее $\sigma$-оболочка.

Подобно построению тензорного произведения конечного числа скалярных мер на $\mathscr{B}(R)$ строится по $E_{x_1}, \ldots, E_{x_p}$ «совместное» $p$-мерное разложение единицы $\mathscr{B}(R^p) \ni B \mapsto E_{x_1, \ldots, x_p}(B)$ на пространстве $R^p$: полагаем $E_{x_1, \ldots, x_p}\left(\overset{p}{\underset{n=1}{\times}} \Delta_n\right) = \prod_{n=1}^{p} E_{x_n}(\Delta_n)$ $(\Delta_n \in \mathscr{B}(R))$, а затем распространяем эту операторнозначную функцию множеств на $\mathscr{B}(R^p)$ стандартной конструкцией (Плеснер [1, гл. 8, § 8]). Затем определяем на алгебре $\mathscr{C}(R^X)$ операторнозначную функцию множеств, полагая $E(Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta)) = E_{x_1, \ldots, x_p}(\Delta)$ $(x_1, \ldots, x_p \in X$ различны; $\Delta \in \mathscr{B}(R^p)$; $p = 1, 2, \ldots)$. Повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся в корректности этого определения и в справедливости следующего утверждения, обобщающего теорему 1.1: *функция множеств* $\mathscr{C}(R^X) \ni Ц \mapsto E(Ц)$ *продолжается единственным образом до операторнозначной меры* $\mathscr{C}_\sigma(R^X) \ni B \mapsto E(B)$, *обладающей свойствами* а) — в) (*где* $\Lambda = R^X$, $\mathfrak{A} = \mathscr{C}_\sigma(R^X)$); *обратно, каждая такая операторнозначная*

---

* Ряд дальнейших построений справедлив и для более общих пространств $R$, однако для определенности ниже будем ограничиваться только этим случаем.

*мера порождается описанным выше образом по некоторым разложениям единицы* $E_x(\Delta)$ $(x \in X,\ \Delta \in \mathcal{B}(R))$. Меру $E$ будем называть общим с. р. е. Соотношения (1.5), разумеется, также переносятся на рассматриваемый общий случай. Точнее, интеграл в правой части первой формулы (1.5) существует и представляет собой нормальный оператор с указанной областью определения. Если $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ вещественнозначна, то этот оператор самосопряжен.

Отметим важный частный случай такого обобщения: пусть $R$ совпадает с комплексной плоскостью $\mathbb{C}^1$, тогда каждое разложение единицы $E_x$ можно рассматривать как разложение единицы нормального оператора $A_x$ $(x \in X)$. Построенная мера $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X) \ni B \mapsto E(B)$ называется с. р. е. семейства коммутирующих нормальных операторов $(A_x)_{x\in X}$. Сейчас вместо (1.6) справедливы формулы

$$A_x = \int\limits_{\mathbb{C}^X} \lambda(x)\, dE(\lambda(\cdot)),\quad A_x^* = \int\limits_{\mathbb{C}^X} \overline{\lambda(x)}\, dE(\lambda(\cdot)), \tag{1.7}$$

$$\mathfrak{D}(A_x) = \mathfrak{D}(A_x^*) = \{f \in H \mid \int\limits_{\mathbb{C}^X} |\lambda(x)|^2 d(E(\lambda(\cdot))f, f)_H < \infty\} \quad (x \in X).$$

### 3. ТОПОЛОГИЗАЦИЯ

До сих пор в пространство $\mathbb{R}^X$ и его обобщение $R^X$ не вводилась топология. Нам понадобится тихоновская топологизация этих пространств, которую мы сейчас введем сразу для $R^X$. Под базисом окрестностей $R^X$ всюду ниже понимаем совокупность всех цилиндрических множеств вида $Ц_\sigma = Ц(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} U_n)$, где $U_n$ — окрестности в $R$ $(x_1, \ldots, x_p \in X;\ p = 1, 2, \ldots)$. Такая топологизация, как хорошо известно, превращает $R^X$ в регулярное топологическое пространство, обладающее счетным базисом тогда и только тогда, когда $X$ не более чем счетно. Оно будет компактным в том и только в том случае, когда $R$ — компакт (теорема А. Н. Тихонова). Если $R$ — локально компактное пространство, не являющееся компактом, то $R^X$ будет локально компактным тогда и только тогда, когда $X$ конечно.

Зафиксируем различные точки $x_1, \ldots, x_p \in X$ $(p = 1, 2, \ldots)$ и рассмотрим отображение

$$R^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto \pi_{x_1,\ldots,x_p}(\lambda(\cdot)) = (\lambda(x_1), \ \ldots, \ \lambda(x_p)) \in R^p \tag{1.8}$$

(в случае $p = 1$ говорят, что отображение $\pi_{x_1}$ относит $\lambda(\cdot)$ «ее координату» $\lambda(x_1)$). Из способа введения тихоновской топологии сразу следует непрерывность отображения $\pi_{x_1,\ldots,x_p}$. Оно будет и открытым, т. е. будет переводить открытые в $R^X$ множества в открытые в $R^p$. Это следует из того, что при отображении $\pi_{x_1,\ldots,x_p}$ каждая базисная окрестность $Ц_б = Ц(y_1, \ldots, y_q; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{q} U_n)$ переходит в некоторую окрестность в $R^p$. Вместе с тем замкнутым оно не будет (т. е. не будет переводить каждое замкнутое в $R^X$ множество в замкнутое в $R^p$). Так, например, в случае $R = \mathbb{R}^1$ и $X = \{1, 2\}$ отображение $\pi_1$ сводится к ортогональному проектированию плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящей из точек $(x, y)$, на ось $x$; график гиперболы $y = x^{-1}$ является замкнутым множеством в $\mathbb{R}^2$, а его образ открыт в $\mathbb{R}^1$.



Очевидно, каждое цилиндрическое множество $Ц = Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta)$ можно записать в виде $Ц = \pi^{-1}_{x_1,\ldots,x_p}(\Delta) = Ц(x_1, \ldots, x_p; \pi_{x_1,\ldots,x_p}(Ц))$, т. е. $\Delta = \pi_{x_1,\ldots,x_p}(Ц)$. Поэтому из непрерывности и открытости отображения $\pi_{x_1,\ldots,x_p}$ следует, что $Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta)$ открыто в $R^X$ тогда и только тогда, когда его основание $\Delta$ открыто в $R^p$. Нетрудно также видеть, что $Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta)$ будет замкнутым в $R^X$ тогда и только тогда, когда $\Delta$ замкнуто в $R^p$. Это следует из предыдущего утверждения и равенства $R^X \setminus Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta) = Ц(x_1, \ldots, x_p; R^p \setminus \Delta)$.

Отметим еще один пример замкнутых и открытых множеств в $R^X$. Если при каждом $x \in X$ множество $F_x \subseteq R$ замкнуто в $R$, то прямое произведение $\mathop{\times}\limits_{x\in X} F_x = \{\lambda(\cdot) \in R^X \mid \lambda(x) \in F_x,\quad x \in X\}$ замкнуто в $R^X$ (если $\lambda_0(\cdot) \in R^X \setminus \mathop{\times}\limits_{x\in X} F_x$, то тогда при некотором $x_0 \in X$ $\lambda_0(x_0) \notin F_{x_0}$ и поэтому найдется окрестность $U$ в $R$ точки $\lambda_0(x_0)$, не пересекающаяся с $F_{x_0}$, и, следовательно, окрестность $\lambda_0(\cdot)$ в $R^X$ вида $Ц(x_0; U)$ не пересекается с $\mathop{\times}\limits_{x\in X} F_x$). Дополнение $R^X \setminus \mathop{\times}\limits_{x\in X} F_x$ открыто в $R^X$.

Нетрудно видеть, что $\mathcal{C}_\sigma(R^X) \subseteq \mathcal{B}(R^X)$, *где, как обычно,* $\mathcal{B}(R^X)$ — *σ-алгебра борелевских множеств пространства* $R^X$. В самом деле, каждое цилиндрическое множество $Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta)$, где $\Delta \in \mathcal{B}(R^p)$, образуется из множеств $Ц(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} U_n)$ таким же образом, как и $\Delta$ из множеств $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} U_n$ — операции объединения и разности над цилиндрическими множествами, отвечающими одним и тем же координатам $x_1, \ldots, x_p$, сводятся к соответствующим операциям над основаниями. Поэтому $\mathcal{C}(R^X) \subseteq \mathcal{B}(R^X)$ и, следовательно, $\mathcal{C}_\sigma(R^X) \subseteq \mathcal{B}(R^X)$. ■

*Если $X$ не более чем счетно, то* $\mathcal{C}_\sigma(R^X) = \mathcal{B}(R^X)$. Действительно, достаточно убедиться, что каждое замкнутое $F \subseteq R^X$ совпадает с не более чем счетным пересечением замкнутых цилиндрических множеств и поэтому входит в $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$. Рассмотрим менее тривиальный случай бесконечного $X$. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Справедливо равенство

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Ц}(x_1, \ldots, x_n; (\pi_{x_1,\ldots,x_n}(F))^{\sim}),$$

где волна означает замыкание в $R^n$. В самом деле, пусть $\lambda(\cdot) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Ц}(x_1, \ldots, x_n; (\pi_{x_1,\ldots,x_n}(F))^{\sim})$. Тогда для каждого $n = 1, 2, \ldots$ $\lambda(\cdot) \in \text{Ц}(x_1, \ldots, x_n; (\pi_{x_1,\ldots,x_n}(F))^{\sim})$ и поэтому можно найти $\lambda_n(\cdot) \in F$ такое, что $\rho(\lambda(x_1), \lambda_n(x_1)) < \frac{1}{n}, \ldots, \rho(\lambda(x_n), \lambda_n(x_n)) < \frac{1}{n}$ ($\rho$ — расстояние в $R$). Последовательность $(\lambda_n(\cdot))_{n=1}^{\infty}$, очевидно, сходится к $\lambda(\cdot)$ в топологии $R^X$; в силу замкнутости $F$ $\lambda(\cdot) \in F$. Таким образом, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Ц}(x_1, \ldots, x_n; (\pi_{x_1,\ldots,x_n}(F))^{\sim}) \subseteq F$. Обратное включение очевидно, так как при каждом $n = 1, 2, \ldots$ $F \subseteq \text{Ц}(x_1, \ldots, x_n; (\pi_{x_1,\ldots,x_n}(F)^{\sim})$. Итак, требуемое равенство справедливо. Каждое $\text{Ц}(x_1, \ldots, x_n; (\pi_{x_1,\ldots,x_n}(F))^{\sim})$ замкнуто в $R^X$, поэтому отсюда следует утверждение. ■

Если $X$ счетно, то роль $R^X$ играет $R^\infty = R \times R \times \ldots$ Итак, $\mathcal{C}_\sigma(R^\infty) = \mathcal{B}(R^\infty)$.

В случае более чем счетного $X$ $\sigma$-алгебра $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$ существенно уже $\mathcal{B}(R^X)$. Так, например, одноточечное множество $\{\lambda(\cdot)\} \bar{\in} \mathcal{C}_\sigma(R^X)$, хотя оно, разумеется, замкнуто в $R^X$. Этот факт вытекает из следующего соотношения: *всякое множество $B \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ может быть записано в виде обобщенного цилиндрического множества*

$$B = \text{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \Delta) = \{\lambda(\cdot) \in R^X \mid (\lambda(x_1), \lambda(x_2), \ldots) \in \Delta\}, \qquad (1.9)$$

*где $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность различных точек из $X$ (координат), зависящая от $B$, а $\Delta \in \mathcal{C}_\sigma(R^\infty) = \mathcal{B}(R^\infty)$ — основание. Обратно, всякое множество вида* (1.9) *входит в* $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$. Действительно, совокупность всех множеств вида $\text{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$ с различными координатами и основаниями образует некоторую $\sigma$-алгебру $\mathfrak{A}$, содержащую $\mathcal{C}(R^X)$, а значит, и $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$. Доказывается это аналогично доказательству того, что $\mathcal{C}(R^X)$ — алгебра, нужно лишь при переходе к общим координатам «вставлять в $\Delta$» и счетные последовательности множителей $R$ и пользоваться тем, что объединение счетной совокупности не более чем счетного множества не более чем счетно. С другой стороны, $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{C}_\sigma(R^X)$, т. е. каждое множество вида (1.9) входит в $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$. Это следует из того, что операции над основаниями $\Delta$ влекут аналогичные операции над $\text{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$ (если только координаты $x_1, x_2, \ldots$ этих множеств одинаковы), поэтому построение $\Delta$ при помощи множеств из $\mathcal{C}(R^\infty)$ влечет аналогичное построение $\text{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$ при помощи цилиндрических множеств из $\mathcal{C}(R^X)$. Таким образом, $\mathfrak{A} = \mathcal{C}_\sigma(R^X)$. ■



То, что одноточечное множество при более чем счетном $X$ не входит в $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$, из (1.9) следует мгновенно: отображение $X \ni x \mapsto \lambda(x) \in R$ сейчас не может определяться счетным числом условий. Аналогично заключаем, что множества вида $\underset{x \in X}{\times} \Delta_x = \{\lambda(\cdot) \in R^X \mid \lambda(x) \in \Delta_x, \quad x \in X\}$ $(\Delta_x \in \mathcal{B}(R))$, где более чем счетное число $\Delta_x \neq R$, также не входят в $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$. $\sigma$-алгебра $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$ носит также название $\sigma$-алгебры бэровских множеств. Как мы сейчас пояснили, она, вообще говоря, беднее $\mathcal{B}(R^X)$, поэтому рассмотрение мер на $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$ связано с дополнительными трудностями.

Сделаем еще некоторые замечания, касающиеся представления (1.9). Зафиксируем различные точки $x_1, x_2, \ldots \in X$ и введем отображение $\pi_{x_1,x_2,\ldots}$, полагая

$$R^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto \pi_{x_1,x_2,\ldots}(\lambda(\cdot)) = (\lambda(x_1), \lambda(x_2), \ldots) \in R^\infty. \qquad (1.10)$$

Из определения топологий в $R^X$ и $R^\infty$ следует, что это отображение, подобно (1.8), непрерывно и открыто. Каждое обобщенное цилиндрическое множество (1.9) можно представить в виде $B = \pi_{x_1,x_2,\ldots}^{-1}(\Delta) = \text{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \pi_{x_1,x_2,\ldots}(B))$, т. е. $\Delta = \pi_{x_1,x_2,\ldots}(B)$. Отсюда заключаем, что (1.9) открыто (замкнуто) в $R^X$ тогда и только тогда, когда его основание $\Delta$ открыто (замкнуто) в $R^\infty$ (нужно воспользоваться непрерывностью и открытостью отображения $\pi_{x_1,x_2,\ldots}$ и равенством $R^X \setminus \text{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \Delta) = \text{Ц}(x_0, x_2, \ldots; R^\infty \setminus \Delta)$).

Запись любого $B \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ в виде (1.9) позволяет следующим образом вычислять $E(B)$. Зафиксируем последовательность координат $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и построим по разложениям единицы $(E_{x_n})_{n=1}^{\infty}$ с. р. е. $E$ на $R^\infty$, которое обозначим $E_{x_1,x_2,\ldots}$. *Справедлива формула*

$$E(\text{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \Delta)) = E_{x_1,x_2,\ldots}(\Delta) \; (\text{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \Delta) \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)). \qquad (1.11)$$

В самом деле, мера $E_1$, определяемая соотношением $\mathcal{C}_\sigma(R^X) \ni \text{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \Delta) \mapsto E_0(\text{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \Delta)) = E_{x_1,x_2,\ldots}(\Delta)$, является некоторым разложением единицы на $R^X$. Доказывается это точно так же, как и подобные факты, касающиеся (1.4), с учетом сказанного относительно проверки формулы (1.9). Для установления равенства $E_1 = E$ достаточно проверить совпадение этих мер на множествах из $\mathcal{C}(R^X)$, а на них они задаются одним и тем же выражением. ■

При оперировании с σ-алгеброй $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$ и с. р. е. $E$ полезно иметь в виду связь введенных понятий с прямым произведением пространств. Так, рассмотрим два общих разложения единицы $E_1$, $E_2$, заданные на пространствах $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ соответственно; $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — соответствующие σ-алгебры. Предположим, что $E_1$ и $E_2$ коммутируют, т. е. $E_1(B_1)E_2(B_2) = E_2(B_2)E_1(B_1)$ $(B_1 \in \mathfrak{A}_1,\ B_2 \in \mathfrak{A}_2)$, и обычной процедурой, о которой шла речь в п. 1, можно построить с. р. е. $E$ на пространстве $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ точек $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ $(\lambda_1 \in \Lambda_1,\ \lambda_2 \in \Lambda_2)$. Оно определено на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ (так называемом прямом произведении σ-алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$), построенной как σ-оболочка алгебры, составленной из всевозможных конечных объединений прямоугольников $B_1 \times B_2$ $(B_1 \in \mathfrak{A}_1,\ B_2 \in \mathfrak{A}_2)$. Разумеется, для такого прямоугольника $E(B_1 \times B_2) = E_1(B_1)E_2(B_2)$.

Предположим теперь дополнительно, что пространства $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ — топологические хаусдорфовы с зафиксированными базисами окрестностей $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ соответственно. Пусть $\mathfrak{A}_j$ — σ-алгебра, натянутая на $\Sigma_j$ $(j = 1, 2)$, тогда $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, натянутая на обычный базис топологического хаусдорфова пространства $\Lambda$, составленный из всевозможных прямоугольников $U_1 \times U_2$ $(U_1 \in \Sigma_1,\ U_2 \in \Sigma_2)$.

Рассмотрим пространство $\Lambda = R^X$. Пусть $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ — некоторое фиксированное разбиение $X$. Построим $\Lambda_1 = R^{X_1}$, $\Lambda_2 = R^{X_2}$. Тогда $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$, где $\lambda(\cdot) = ((\lambda(\cdot))\upharpoonright X_1, (\lambda(\cdot))\upharpoonright X_2))$ — разбиение функции $\lambda(\cdot)$ на пару «координат». Легко проверить, что тихоновская топологизация $R^{X_1}$, $R^{X_2}$ приводит к тихоновской же топологизации $R^X = R^{X_1} \times R^{X_2}$. Можно положить $\mathfrak{A}_j = \mathcal{C}_\sigma(R^{X_j})$ $(j = 1, 2)$, тогда $\mathfrak{A} = \mathcal{C}_\sigma(R^X)$.

Выражение (1.9) показывает, что $Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta) = \Delta \times R^{X_2}$, где $X_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $X_2 = X \setminus X_1$ (т. е. равно «вертикальной полосе с основанием $\Delta$»). Тогда (1.11) можно интерпретировать как соотношение $E(\Delta \times R^{X_2}) = E_1(\Delta)\, E_2(R^{X_2}) = E_1(\Delta)$, где $E_1$, $E_2$ — с. р. е., построенные по семействам $(E_x)_{x \in X_1}$, $(E_x)_{x \in X_2}$ соответственно. Отображение (1.10) $\pi_{x_1, x_2, \ldots} = \pi_1$, где $\pi_1$ — проектирование на $\Lambda_1 = R^{X_1}$ (т. е. $\pi_1((\lambda_1, \lambda_2)) = \lambda_1$).



## 4. РЕГУЛЯРНОСТЬ СОВМЕСТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЕДИНИЦЫ

Докажем, что совместное разложение единицы является регулярной операторнозначной мерой, грубо говоря, мерой, значения которой аппроксимируются значениями на открытых множествах. Доказательство удобно провести сразу в общей ситуации.

**Теорема 1.2.** *Пусть $R$ — сепарабельное метрическое локально компактное пространство, $\mathcal{C}_\sigma(R^X) \ni B \mapsto E(B)$ — общее с. р. е. Утверждается, что мера $E$ регулярна, т. е. для каждых $B \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ и $f \in H$*

$$(E(B)f, f)_H = \inf_{O \supseteq B} (E(O)f, f)_H, \tag{1.12}$$

*где* inf *распространяется по всем открытым множествам $\mathcal{C}(R^X) \ni O \supseteq B$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что для каждого цилиндрического множества $Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta) \in \mathcal{C}(R^X)$, $f \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется содержащее его открытое цилиндрическое множество $Ц(x_1, \ldots, x_p; U)$ такое, что

$$(E(Ц(x_1, \ldots, x_p; U))f, f)_H - (E(Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta))f, f)_H < \varepsilon.$$

Действительно, левая часть этого неравенства равна $(E_{x_1, \ldots, x_p}(U)f, f)_H - (E_{x_1, \ldots, x_p}(\Delta)f, f)_H$. Скалярная мера $\mathcal{B}(R^p) \ni \Delta \mapsto (E_{x_1, \ldots, x_p}(\Delta)f, f)_H$, как и всякая скалярная мера на σ-алгебре борелевских множеств локально компактного сепарабельного пространства, регулярна (Халмош [1, гл. 10, § 50—52]). Поэтому выбором открытого $U \supseteq \Delta$ левую часть можно сделать сколь угодно малой.

Пусть теперь $B \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ и $f \in H$ фиксированы. На основании совпадения на измеримых множествах меры с внешней мерой можно написать $(E(B)f, f)_H = \inf \sum_{n=1}^{\infty} (E(Ц_n)f, f)_H$, где inf распространяется по всем множествам $Ц_n \in \mathcal{C}(R^X)$, для которых $\bigcup_{n=1}^{\infty} Ц_n \supseteq B$. Выберем по заданному $\varepsilon > 0$ такие $Ц_n$, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} (E(Ц_n)f, f)_H < (E(B)f, f)_H + \varepsilon$. Затем согласно предыдущему для каждого $Ц_n$ выберем содержащее его открытое цилиндрическое множество $Ц_n'$ такое, чтобы $(E(Ц_n')f, f)_H < (E(Ц_n)f, f)_H + \varepsilon 2^{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Суммируя эти неравенства, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (E(Ц_n')f, f)_H < \sum_{n=1}^{\infty} (E(Ц_n)f, f)_H + \varepsilon < (E(B)f, f)_H + 2\varepsilon.$$

Для открытого множества $\mathcal{C}_\sigma (R^X) \ni O = \bigcup_{n=1}^{\infty} Ц'_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Ц_n \supseteq B$ вследствие монотонности меры и полученного неравенства можно написать

$$(E(B)f, f)_H \leqslant (E(O)f, f)_H \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (E(Ц'_n)f, f)_H < (E(B)f, f)_H + 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $(E(B)f, f)_H = \inf (E(O)f, f)_H$, где inf распространяется по открытым $\mathcal{C}_\sigma (R^X) \ni O \supseteq B$. ∎

Теорему 1.2 можно переписать в терминах замкнутых множеств (1.12) *эквивалентно следующему: для каждых $B \in \mathcal{C}_\sigma (R^X)$ и $f \in H$*

$$(E(B)f, f)_H = \sup_{F \subseteq B} (E(F)f, f)_H, \qquad (1.13)$$

*где* sup *распространяется по всем замкнутым* $\mathcal{C}_\sigma (R^X) \ni F \subseteq B$.

В самом деле, если (1.12) выполнено, то, записывая его для $R^X \setminus B$, получим

$$\|f\|_H^2 - (E(B)f, f)_H = (E(R^X \setminus B)f, f)_H = \inf_{O \supseteq R^X \setminus B} (E(O)f, f)_H =$$

$$= \inf_{F \subseteq B} (E(R^X \setminus F)f, f)_H = \|f\|_H^2 - \sup_{F \subseteq B} (E(F)f, f)_H,$$

где $F \in \mathcal{C}_\sigma (R^X)$ замкнуто. Отсюда следует (1.13). Аналогично убеждаемся, что из (1.13) следует (1.12). ∎

## 5. НОСИТЕЛЬ СОВМЕСТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЕДИНИЦЫ

В дальнейшем существенную роль будет играть понятие носителя меры $E$. Напомним сперва в удобной для нас форме некоторые понятия и факты. Пусть $\Lambda$ — хаусдорфово топологическое пространство, в котором зафиксирован некоторый содержащий $\Lambda$ базис $\Sigma$ окрестностей. Обозначим через $\mathfrak{A}$ σ-алгебру, натянутую на $\Sigma$. Разумеется, $\mathfrak{A}$ состоит из борелевских множеств, т. е. $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{B}(\Lambda)$; однако не всякое открытое множество обязано входить в $\mathfrak{A}$, поэтому последнее включение может быть строгим.

Рассмотрим операторнозначную (неотрицательную и нетривиальную) меру $\Theta$ на $\mathfrak{A}$, т. е. операторнозначную функцию $\mathfrak{A} \ni B \mapsto \Theta(B)$, где $\Theta(B)$ — неотрицательный оператор из $\mathcal{L}(H \to H)$, $\Theta(\varnothing) = 0$, $\Theta(\Lambda) \neq 0$, обладающую свойством абсолютной аддитивности ($\Theta(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(B_n)$, если $B_n \in \mathfrak{A}$ и взаимно не пересекаются; ряд сходится слабо). Разумеется, такая мера монотонна (если $B', B'' \in \mathfrak{A}$ и $B' \subseteq B''$, то $\Theta(B') \leqslant \Theta(B'')$) и абсолютно полуаддитивна ($\Theta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(B_n)$ для любых $B_n \in \mathfrak{A}$; ряд сходится слабо).



Ясно, что построенное ранее разложение единицы $E$ на $\mathbb{R}^X$ или $R^X$ будет примером сейчас определенной меры; роль $\Sigma$ играют базисные окрестности, фигурирующие при введении тихоновской топологии.

Рассмотрим совокупность всех замкнутых множеств $F$ из $\mathfrak{A}$, на которых сосредоточена $\Theta$ (т. е. $\Theta(F) = \Theta(\Lambda)$, $F$ полной меры $\Theta$). Носителем supp $\Theta$ меры $\Theta$ называется пересечение всех таких множеств $F$.

Отметим, что supp $\Theta$ существует для любой $\Theta$, однако это определение не исключает случай, когда носитель — пустое множество.

**Пример 1.** Пусть $\Lambda$ совпадает с сегментом $[0, 1]$, снабженным дискретной топологией, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра измеримых относительно меры Лебега множеств из $[0, 1]$. Так как всякое множество в дискретной топологии открыто, то $\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(\Lambda)$. В качестве $\Theta$ примем обычную меру Лебега $m$. Каждое множество $F_t = [0, 1] \setminus \{t\}$ $(t \in [0, 1])$ замкнуто в дискретной топологии и на нем сосредоточена мера $m$, поэтому $\operatorname{supp} m \subseteq \bigcap_{t \in [0,1]} F_t = \varnothing$, т. е. $\operatorname{supp} m = \varnothing$.

Справедливы следующие простые утверждения.

I. *Пусть $U \in \mathfrak{A}$ открыто и таково, что $U \cap (\operatorname{supp} \Theta) \neq \varnothing$. Тогда $\Theta(U) \neq 0$.*

Действительно, предположим противное: пусть $\Theta(U) = 0$. Тогда $\Lambda \setminus U \in \mathfrak{A}$ замкнуто и на нем сосредоточена мера $\Theta$: $\Theta(\Lambda \setminus U) = \Theta(\Lambda) - \Theta(U) = \Theta(\Lambda)$. Поэтому это множество должно быть одним из множеств, фигурирующих в пересечении, определяющем supp $\Theta$. Но тогда соотношение $U \cap (\operatorname{supp} \Theta) \neq \varnothing$ невозможно. ∎

Будем говорить, что мера $\Theta$ правильная, если она сосредоточена на любом открытом множестве $O \in \mathfrak{A}$, содержащем supp $\Theta$. Если мера $\Theta$ правильная, то supp $\Theta$ не может быть пустым множеством. В самом деле, предположим противное. Так как в $\Lambda$ существуют две непересекающиеся базисные окрестности $U_1$ и $U_2$ и $U_1$, $U_2 \supset \varnothing = \operatorname{supp} \Theta$, то $\Theta(U_1) = \Theta(U_2) = \Theta(\Lambda)$, что противоречит аддитивности меры и ее нетривиальности.

II. *Пусть $\Lambda$ — компакт, тогда любая мера $\Theta$ будет правильной.*

В самом деле, пусть $O \in \mathfrak{A}$ открыто и содержит supp $\Theta$. Обозначим через $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ совокупность всех замкнутых $F_\alpha \in \mathfrak{A}$, на которых сосредоточена мера $\Theta$ ($A$ — некоторое множество индексов). Таким образом, $\operatorname{supp} \Theta = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$. Совокупность открытых множеств $O$, $(\Lambda \setminus F_\alpha)_{\alpha \in A}$, очевидно, покрывает $\Lambda$. Выберем из этого покрытия конечное покрытие. Пусть это будут множества $O$, $(\Lambda \setminus F_{\alpha_j})_{j=1}^{n}$. Тогда $\Lambda = O \cup$

$\bigcup\left(\bigcap_{j=1}^{n}(\Lambda\setminus F_{\alpha_j})\right)$, $\Lambda\setminus O\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}(\Lambda\setminus F_{\alpha_j})$ и на основании монотонности и полуаддитивности $\Theta$ получаем $0\leqslant\Theta(\Lambda\setminus O)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\Theta(\Lambda\setminus F_{\alpha_j})=0$, так как $\Theta(F_{\alpha_j})=\Theta(\Lambda)$. Таким образом, $\Theta(\Lambda\setminus O)=0$. ■

III. *Пусть $\Lambda$ — метрическое сепарабельное локально компактное пространство (или, более общо, пространство, имеющее вид $\Lambda=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Lambda_k$, где $\Lambda_k$ — компакт, причем $\Lambda_k\subseteq\Lambda_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots)$). Тогда любая мера $\Theta$ будет правильной.*

Действительно, пусть $F_\alpha$ и $O$ такие же, как и в II. Тогда $O$, $(\Lambda\setminus F_\alpha)_{\alpha\in A}$ покрывают $\Lambda$, а значит, и $\Lambda_k$ при каждом $k=1, 2, \ldots$ Зафиксируем $k$ и выберем из этого покрытия конечное покрытие. Пусть это будут множества $O$, $(\Lambda\setminus F_{\alpha_{k,j}})_{j=1}^{n_k}$. Теперь $\Lambda_k\setminus O\subseteq\subseteq\bigcup_{j=1}^{n_k}(\Lambda\setminus F_{\alpha_{k,j}})$ и, следовательно, $\Lambda\setminus O=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\Lambda_k\setminus O)\subseteq\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{n_k}(\Lambda\setminus F_{\alpha_{k,j}})$. Так как $\Theta(F_{\alpha_{k,j}})=\Theta(\Lambda)$, то на основании монотонности и полуаддитивности $\Theta$ заключаем, что $\Theta(\Lambda\setminus O)=0$. ■

IV. *Пусть $\Lambda$ обладает счетным базисом окрестностей. Тогда любая мера $\Theta$ будет правильной. Более того,* supp $\Theta\in\mathfrak{A}$ *и полной меры.*

Для доказательства используем следующий хорошо известный факт: если $\Lambda$ обладает счетным базисом, то из любой бесконечной совокупности $(O_\alpha)_{\alpha\in A}$ открытых множеств этого пространства можно выделить последовательность $(O_{\alpha_n})_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\bigcup_{n=1}^{\infty}O_{\alpha_n}=\bigcup_{\alpha\in A}O_\alpha$. Пусть теперь $\operatorname{supp}\Theta=\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha$, где $F_\alpha$ такие же, как и в II. Тогда $\Lambda\setminus\operatorname{supp}\Theta=\bigcup_{\alpha\in A}(\Lambda\setminus F_\alpha)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\Lambda\setminus F_{\alpha_n})$ (ясно, что достаточно считать A бесконечным). Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{supp}\Theta=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_{\alpha_n}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{n}F_{\alpha_k}\right).$$

Множества $G_n=\bigcap_{k=1}^{n}F_{\alpha_k}\in\mathfrak{A}$ $(n=1, 2, \ldots)$ полной меры $\Theta$ и не возрастают: $G_1\supseteq G_2\supseteq\ldots$; supp $\Theta\in\mathfrak{A}$. Поэтому в смысле слабой сходимости $\Theta(\operatorname{supp}\Theta)=\lim_{n\to\infty}\Theta(G_n)=\Theta(\Lambda)$. Отсюда и из монотонности $\Theta$ следует, что если $O\in\mathfrak{A}$ открыто и содержит supp $\Theta$, то $\Theta(\Lambda)\geqslant\Theta(O)\geqslant\Theta(\operatorname{supp}\Theta)=\Theta(\Lambda)$, т. е. $\Theta(O)=\Theta(\Lambda)$. ■

Пусть мера $\Theta$ — правильная и дополнительно регулярная, т. е. для каждых $B\in\mathfrak{A}$ и $f\in H$ $(\Theta(B)f, f)_H=\inf(\Theta(O)f, f)_H$, $O\in\mathfrak{A}$



открыто и содержит $B$. Тогда для нее выполняется следующее свойство: если $B\in\mathfrak{A}$ содержит supp $\Theta$, то мера $\Theta$ сосредоточена на $B$ (так как в силу ее правильности она сосредоточена на любом открытом $O\in\mathfrak{A}$, содержащем $B\supseteq$ supp $\Theta$). Если, кроме того, $\mathfrak{A}$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств на $\Lambda$, то supp $\Theta\in\mathfrak{A}$ и $\Theta$ на нем сосредоточена (в случае IV регулярности, конечно, не нужно).

Эти факты (а также теорема 1.2), в частности, приводят к хорошо известным свойствам носителя разложения единицы на $\mathbb{R}^p$ или $\mathbb{C}^p$, т. е. носителя с. р. е. конечного числа коммутирующих самосопряженных или нормальных операторов.

Перейдем к рассмотрению произвольного семейства $(A_x)_{x\in X}$ коммутирующих самосопряженных операторов. Удобнее сразу исследовать общую ситуацию: имеется семейство $(E_x)_{x\in X}$ коммутирующих разложений единицы на $R$ и по нему построено общее с. р. е. $E$ на $R^X$. Сейчас можно положить $\Lambda=R^X$, $\Sigma$ — введенный базис окрестностей, определяющий тихоновскую топологию в $R^X$, $\mathfrak{A}=\mathscr{C}_\sigma(R^X)$ и $\Theta=E$. Таким образом, существует supp $E$ и для него выполнено I. Вместе с тем $E$ не всегда правильная мера (см. п. 6), что создает значительные трудности при оперировании с ее носителем. Пути их преодоления будут изложены в п. 7 и 8.

Если $E$ — с. р. е. семейства коммутирующих самосопряженных или нормальных операторов, то supp $E$ называется также совместным спектром этого семейства.

Приведем одно уточнение определения supp $E$, показывающее, что запас замкнутых множеств, фигурирующих в этом определении, может быть уменьшен. Это уточнение справедливо для любой меры $\Theta$ на $\mathfrak{A}=\mathscr{C}_\sigma(R^X)$, в такой форме оно и будет получено.

**Теорема 1.3.** *Пусть $\Lambda=R^X$, $\mathfrak{A}=\mathscr{C}_\sigma(R^X)$ и $\Theta$ — операторнозначная мера на $\mathfrak{A}$. Тогда ее носитель* supp $\Theta$ *можно определить как пересечение всех замкнутых цилиндрических множеств, на которых $\Theta$ сосредоточена.*

**Лемма 1.1.** *Пусть $F$ — некоторое замкнутое множество из $\mathscr{C}_\sigma(R^X)$. Тогда существует последовательность $(Ц_n)_{n=1}^{\infty}$, где $Ц_n$ — замкнутые цилиндрические множества, такая, что $Ц_1\supseteq Ц_2\supseteq\ldots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty}Ц_n=F$.*

Доказательство. Согласно соотношению (1.9) можно написать, что $F=Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$, где $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность координат, а $\Delta\in\mathscr{C}_\sigma(R^\infty)$ — основание, являющееся замкнутым множеством из $R^\infty$. Покажем, что можно положить $Ц_n=Ц(x_1, \ldots, x_n; (\pi_{x_1,\ldots,x_n}(F))^{\sim})$ $(n=1, 2, \ldots)$, где волна обозначает замыкание в $R^n$. В самом деле, каждое $Ц_n$ замкнуто. Так как $Ц(x_1; \pi_{x_1}(F))\supseteq Ц(x_1, x_2; \pi_{x_1,x_2}(F))\supseteq\ldots\supseteq Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$, то $Ц_1 \supseteq Ц_2 \supseteq \ldots \supseteq F$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} Ц_n \supseteq F$. Докажем противоположное к последнему включение. Пусть $\lambda(\cdot) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Ц_n$, тогда при каждом $n$ $\lambda(\cdot) \in Ц_n = Ц(x_1, \ldots, x_n; (\pi_{x_1,\ldots,x_n}(F))^{\sim})$, поэтому найдется $\lambda_n(\cdot) \in F$ такое, что $\rho(\lambda(x_1), \lambda_n(x_1)) < \frac{1}{n}, \ldots, \rho(\lambda(x_n), \lambda_n(x_n)) < \frac{1}{n}$, где $\rho$ — расстояние в $R$. Отсюда следует, что последовательность сужений $((\lambda_n(\cdot)) \upharpoonright X_0)_{n=1}^{\infty}$, где $X_0 = \{x_1, x_2, \ldots\}$, сходится в $R^{\infty}$ к $(\lambda(\cdot)) \upharpoonright X_0$. Но $(\lambda_n(\cdot)) \upharpoonright X_0 \in \Delta$ и $\Delta$ замкнуто в $R^{\infty}$, поэтому $(\lambda(\cdot)) \upharpoonright X_0 \in \Delta$ или, иными словами, $\lambda(\cdot) \in F$. Итак, $\bigcap_{n=1}^{\infty} Ц_n \subseteq F$. ■

Доказательство теоремы. Положим $G = \bigcap_{\beta \in B} Ц_\beta$, где $(Ц_\beta)_{\beta \in B}$ — совокупность всех замкнутых цилиндрических множеств $Ц_\beta$, на которых сосредоточено $\Theta$. Ясно, что $G \supseteq \operatorname{supp} E = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ ($(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ — совокупность всех замкнутых множеств $F_\alpha \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$, на которых сосредоточено $\Theta$). Построим при помощи леммы 1.1 для каждого $F_\alpha$ последовательность замкнутых цилиндрических множеств $(Ц_{\alpha,n})_{n=1}^{\infty}$ такую, что $Ц_{\alpha,1} \supseteq Ц_{\alpha,2} \supseteq \ldots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} Ц_{\alpha,n} = F_\alpha$. На каждом $Ц_{\alpha,n}$ сосредоточено $\Theta$, поэтому $\operatorname{supp} \Theta = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcap_{n=1}^{\infty} Ц_{\alpha,n} \supseteq \bigcap_{\beta \in B} Ц_\beta = G$. Итак, $G = \operatorname{supp} \Theta$. ■

**Пример 2.** Проиллюстрируем понятие носителя на скалярной мере, получающейся как тензорное произведение мер. Пусть $R$ — метрическое сепарабельное локально компактное пространство. Предположим, что задано семейство вероятностных мер $\mathcal{B}(R) \ni \Delta \mapsto \rho_x(\Delta) \geqslant 0$ $(x \in X)$, $\rho$ — их тензорное произведение. (Таким образом, $\mathcal{C}_\sigma(R^X) \ni B \mapsto \rho(B) \geqslant 0$; $\rho(Ц(x_1, \ldots, x_p; \times_{n=1}^{\infty} \Delta_n)) = \rho_{x_1}(\Delta_1) \ldots \rho_{x_p}(\Delta_p)$, где $x_1, \ldots, x_p$ — произвольные координаты, $\Delta_n \in \mathcal{B}(R)$.) *Утверждается, что $\rho$ правильная и*

$$\operatorname{supp} \rho = \times_{x \in X} \operatorname{supp} \rho_x = \{\lambda(\cdot) \in R^X \mid \lambda(x) \in \operatorname{supp} \rho_x, \ x \in X\}. \qquad (1.14)$$

Действительно, обозначим через $F$ множество в правой части (1.14). Пусть $\operatorname{supp} \rho = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$, где $F_\alpha$ пробегают все замкнутые множества из $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$, на каждом из которых сосредоточено $\rho$. Тогда $F \subseteq F_\alpha$ $(\alpha \in A)$. В самом деле, если $F \not\subseteq F_\alpha$ при некотором $\alpha$, то найдется точка $\lambda_0(\cdot) \in F$, не принадлежащая $F_\alpha$. Значит, некоторая ее базисная окрестность $Ц_6 = Ц(x_1, \ldots, x_p; \times_{n=1}^{p} U_n)$ не пересекается с $F_\alpha$, поэтому $\rho(Ц_6) = 0$. С другой стороны,

$$\rho(Ц_6) = \rho_{x_1}(U_1) \ldots \rho_{x_p}(U_p) > 0, \qquad (1.15)$$



так как каждое $\rho_{x_n}(U_n) > 0$ в силу того, что $U_n \cap (\operatorname{supp} \rho_{x_n}) \ni \lambda_0(x_n)$ и, следовательно, непустое. Итак, $F \subseteq \operatorname{supp} \rho$.

Для доказательства противоположного включения рассмотрим замкнутое цилиндрическое множество $Ц(x; \operatorname{supp} \rho_x)$. Мера $\rho$ на нем сосредоточена, поэтому $F = \bigcap_{x \in X} Ц(x; \operatorname{supp} \rho_x) \supseteq \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \operatorname{supp} \rho$. Соотношение (1.14) установлено.

Докажем правильность меры $\rho$. Пусть открытое множество $O \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ содержит $\operatorname{supp} \rho$. Согласно (1.9) $O = Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$, где $\Delta$ открыто в $R^{\infty}$. Это обобщенное цилиндрическое множество может содержать $\operatorname{supp} \rho = \times_{x \in X} \operatorname{supp} \rho_x$ лишь в том случае, когда основание $\Delta \supseteq \times_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp} \rho_{x_n}$. Поэтому, учитывая формулу (1.11), которая, очевидно, справедлива в рассматриваемом случае, получим

$$\rho(O) = \rho(Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta)) = \rho_{x_1,x_2,\ldots}(\Delta) \geqslant \rho_{x_1,x_2,\ldots}(\times_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp} \rho_{x_n}) =$$
$$= (\otimes_{n=1}^{\infty} \rho_{x_n})(\times_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp} \rho_{x_n}) = \prod_{n=1}^{\infty} \rho_{x_n}(\operatorname{supp} \rho_{x_n}) = 1,$$

т. е. $\rho(O) = 1$. Мы воспользовались тем, что вследствие утверждения III каждая $\rho_x$ правильная, а так как она регулярна и $\operatorname{supp} \rho_{x_n} \in \mathcal{B}(R)$, то $\rho_x(\operatorname{supp} \rho_x) = 1$. ■

В случае общего с. р. е. $E$ аналогичная (1.14) простая формула $\operatorname{supp} E = \times_{x \in X} \operatorname{supp} E_x$, вообще говоря, не имеет место. Отличие связано с тем, что нельзя подобно (1.15) вывести неравенство $E(Ц_6) = E_{x_1}(U_1) \ldots E_{x_p}(U_p) > 0$ из неравенств $E_{x_n}(U_n) > 0$ — эти проекторы могут оказаться ортогональными. Вместе с тем из приведенного рассуждения следует, что для общего с. р. е. $E$ всегда

$$\operatorname{supp} E \subseteq \times_{x \in X} \operatorname{supp} E_x. \qquad (1.16)$$

В заключение сделаем одно замечание, которое будет полезно во всяком случае для понимания примера п. 6. Соотношение (1.16), способ доказательства равенства (1.14) и сказанное в конце п. 3 приводят к мысли, что правильность с. р. е. можно легко доказать следующим способом. Предположим, что верен такой правдоподобный факт. Пусть $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ и $E$ построено по $E_1$ и $E_2$; если $\Delta_1 \times \Lambda_2$ открыто в $\Lambda$ и содержит $\operatorname{supp} E$, то $\Delta_1 \supseteq \operatorname{supp} E_1$. Тогда правильность с. р. е. $E$ вытекает немедленно: если $O \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ открыто и содержит $\operatorname{supp} E$, то согласно (1.9) $O = Ц(x_1, x_2, \ldots$

...; $\Delta_1) = \Delta_1 \times R^{X_2}$ и, следовательно, открытое в $R^{X_1}$ множество $\Delta_1 \supseteq \operatorname{supp} E_1$ $(E_1 = E_{x_1, x_2, \ldots})$, поэтому $E(O) = E_1(\Delta_1) = 1$ ($E_1$ правильна, см. IV и легко доказываемый факт, что $R^{X_1}$ обладает счетным базисом, об этом также см. лемму 1.4). Высказанный факт действительно верен, если $\Lambda_2$ — компакт (см. лемму 1.4). Однако в общем случае он неверен. Приведем пример.

**Пример 3.** Пусть $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{R}^1$ с обычной топологией, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, $E_1(\Delta_1) = \sum_{\{n=1,2,\ldots|n^{-1}\in\Delta_1\}} P_n$, $E_2(\Delta_2) = \sum_{\{n=1,2,\ldots|n\in\Delta_2\}} P_n$, где $P_n$ — проектор на $e_n$ ($(e_n)_{n=1}^{\infty}$ — фиксированный ортонормированный базис в $H$). Тогда $\operatorname{supp} E = \left\{(1,1), \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right), \ldots\right\} \subset \mathbb{R}^2 = \Lambda$ и открытое множество $(0,2) \times \mathbb{R}^1$ его содержит. Вместе с тем $\operatorname{supp} E_1$ не входит в $(0,2)$, так как он содержит точку 0.

## 6. ПРИМЕР СОВМЕСТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЕДИНИЦЫ С ПУСТЫМ НОСИТЕЛЕМ

*Построим несчетное семейство коммутирующих самосопряженных неограниченных операторов $(A_x)_{x\in X}$ такое, что для соответствующего с. р. е. $E$ носитель* $\operatorname{supp} E = \varnothing$. Дальнейшее построение по существу является комбинацией соображений, фигурировавших ранее: «выбивания» одной точки из проекции $\operatorname{supp} E$ (пример 3) и идеи построения меры с пустым носителем (пример 1). Подчеркнем, что неограниченность операторов и несчетность $X$ существенна: в случае ограниченных $A_x$ $(x \in X)$ или счетного $X$ с. р. е. правильно (это по существу вытекает из п. 5, II, IV; см. п. 8).

Положим $H = L_2(\mathbb{R}^1)$ относительно лебеговой меры $dt$, $X = \{\xi\} \cup \mathbb{R}^1$, где $\xi$ — некоторая абстрактная точка. Оператор $A_\xi$ равен оператору умножения на независимую переменную $t$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$. Таким образом, $(E_\xi(\Delta) f)(t) = \varkappa_\Delta(t) f(t)$ $(f \in L_2(\mathbb{R}^1))$, где $\varkappa_\Delta$ — характеристическая функция множества $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$. Вместо построения оператора $A_x$ при $x \in \mathbb{R}^1$ построим его разложение единицы $E_x$. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}^1$ и рассмотрим множества

$$\Delta_{x,1} = (-\infty, x-1) \cup [x+1, +\infty),$$

$$\Delta_{x,2} = \left[x-1, x-\frac{1}{2}\right) \cup \left[x+\frac{1}{2}, x+1\right),$$

$$\Delta_{x,3} = \left[x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{3}\right) \cup \left[x+\frac{1}{3}, x+\frac{1}{2}\right), \ldots$$

Очевидно, $\Delta_{x,n}$ попарно не пересекаются, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_{x,n} = \mathbb{R}^1 \setminus \{x\}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} E_x(\Delta_{x,n}) = 1$. Положим для $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ $E_x(\Delta) =$



$= \sum_{\{n=1,2,\ldots|n\in\Delta\}} E_\xi(\Delta_{x,n})$. Таким образом, $E_x$ сосредоточено в точках $\lambda = 1, 2, \ldots$ и значение $E_x(\{n\})$ равно проектору $E_\xi(\Delta_{x,n})$. Ясно, что $E_x$ — разложение единицы, коммутирующее с $E_\xi$, и любые два разложения $E_{x'}$, $E_{x''}$ $(x', x'' \in \mathbb{R}^1)$ также коммутируют. Построим по семейству $(E_x)_{x\in X}$ совместное разложение единицы $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto E(B)$. Утверждается, что $\operatorname{supp} E = \varnothing$.

В самом деле, рассмотрим совместное двумерное разложение единицы $E_{\xi,x}$ $(x \in \mathbb{R}^1)$. Легко видеть, что его носителем $\operatorname{supp} E_{\xi,x}$ будет замкнутое множество $G_x$ в плоскости $\mathbb{R}^2$ точек $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, имеющее вид $G_x = \{\mu \in \mathbb{R}^2 \mid \mu_1 \in \tilde{\Delta}_{x,n}, \ \mu_2 = n; \ n = 1, 2, \ldots\}$ ($\tilde{\Delta}_{x,n}$ — замыкание $\Delta_{x,n}$ в $\mathbb{R}^1$). Проекция $\tau_1(G_x)$ этого множества на ось $\mu_1$ совпадает с $\mathbb{R}^1 \setminus \{x\}$ (проектирование сейчас удобно обозначить через $\tau_1$). Так как мера $E_{\xi,x}$ регулярна, правильна и определена на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, то $E_{\xi,x}(G_x) = 1$.

Замкнутое цилиндрическое множество $Ц(\xi, x; G_x)$ $(x \in \mathbb{R}^1)$ будет полной меры $E(E(Ц(\xi, x; G_x)) = E_{\xi,x}(G_x) = 1)$ и поэтому является одним из тех множеств $F_\alpha$, которые фигурируют в определении носителя $\operatorname{supp} E$. Поэтому можно написать $\operatorname{supp} E \subseteq \bigcap_{x\in\mathbb{R}^1} Ц(\xi, x; G_x) = G$. Для доказательства утверждения достаточно убедиться, что $G = \varnothing$.

Представим $\mathbb{R}^X$ согласно сказанному в п. 3 в соответствии с разбиением $X = \{\xi\} \cup \mathbb{R}^1$ в виде прямого произведения $\mathbb{R}^X = \mathbb{R}^{\{\xi\}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}^1} = \Lambda_1 \times \Lambda_2$; $\mathbb{R}^X \ni \lambda(\cdot) = (\lambda(\xi), \ (\lambda(\cdot)) \restriction \mathbb{R}^1)$, где $\lambda_1 = \lambda(\xi)$ — первая, а $\lambda_2 = (\lambda(\cdot)) \restriction \mathbb{R}^1$ — вторая координата точки $\lambda(\cdot)$. Предположим, что $G \neq \varnothing$ и пусть $\lambda_0(\cdot) \in G \subseteq \mathbb{R}^X$. Обозначим через $\pi_1$ проектирование на $\Lambda_1 = \mathbb{R}^1$ в разложении $\mathbb{R}^X = \Lambda_1 \times \Lambda_2$. Тогда $\mathbb{R}^1 \supseteq \pi_1(G) \ni \pi_1(\lambda_0(\cdot)) = \lambda_0(\xi)$. С другой стороны, $G \subseteq Ц(\xi, \lambda_0(\xi); G_{\lambda_0(\xi)}) = G_{\lambda_0(\xi)} \times \mathbb{R}^{X\setminus\{\xi,\lambda_0(\xi)\}} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{X\setminus\{\xi,\lambda_0(\xi)\}}$, поэтому $\pi_1(G) \subseteq \pi_1(Ц(\xi, \lambda_0(\xi); G_{\lambda_0(\xi)})) = \pi_1(G_{\lambda_0(\xi)} \times \mathbb{R}^{X\setminus\{\xi,\lambda_0(\xi)\}}) = \tau_1(G_{\lambda_0(\xi)}) = \mathbb{R}^1 \setminus \{\lambda_0(\xi)\}$, т. е. $\pi_1(G)$ не содержит точку $\lambda_0(\xi)$, что абсурдно. Итак, $G = \varnothing$. ■

Отметим, что если положить $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto \rho(B) = (E(B) f, f)_H$, где $E$ — построенное выше с. р. е., а $f \in H$ — фиксированный орт, то *мера $\rho$ будет скалярной вероятностной мерой на $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ с пустым носителем.*

## 7. КОМПАКТИФИКАЦИЯ

То, что с. р. е. не всегда правильная мера, приводит к ряду трудностей. Изложим способ их преодоления, ограничиваясь для наглядности случаем $R = \mathbb{R}^1$. Он заключается в том, что от обычного разложения единицы $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto E(\Delta)$ мы переходим в некотором отношении к более естественному «компактифицированному» разложению, определенному на $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$. В случае конечного или счетного числа коммутирующих самосопряженных операторов такая компактификация ничего нового не дает и поэтому редко рассматривается, однако в случае их несчетного числа положение резко меняется и здесь она естественна.

Компактифицируем пространство $\mathbb{R}^1$ добавлением формальной бесконечно удаленной точки $\infty$ и обозначим полученное пространство через $\mathbf{R}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$. Под окрестностью точки $\infty$ понимается любое множество $\mathbf{R}^1 \setminus F$, где $F$ компактно в $\mathbb{R}^1$. Пространство $\mathbf{R}$ — полное метрическое сепарабельное компактное (метрика может быть введена, например, при помощи стереографической проекции). Тихоновское произведение $\mathbf{R}^X$ является, в отличие от $\mathbb{R}^X$, компактом, содержащим $\mathbb{R}^X$. Его точки будем обозначать через $\boldsymbol{\lambda}(\cdot)$, а множества из $\mathbf{R}^X$ — жирными буквами.

*Топология в* $\mathbb{R}^X$ *совпадает с относительной топологией, индуцированной топологией* $\mathbf{R}^X$ *на* $\mathbb{R}^X$. В самом деле, если $\mathbf{Ц}_б = \mathbf{Ц}(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} \mathbf{U}_n)$ — базисная окрестность в $\mathbf{R}^X$, то ее пересечение с $\mathbb{R}^X$ состоит из всех функций $\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X$, для которых $\lambda(x_n) \in \mathbf{U}_n \setminus \{\infty\} = U_n$ $(n = 1, \ldots, p)$, т. е. совпадает с цилиндрическим множеством $Ц(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} U_n)$. Так как каждое $U_n$ — окрестность в $\mathbb{R}^1$, то последнее множество — базисная окрестность в $\mathbb{R}^X$. Ясно, что так образованные окрестности пробегают все базисные окрестности пространства $\mathbb{R}^X$ (нужно брать в качестве $\mathbf{U}_n$ окрестности в $\mathbf{R}^1$, не содержащие $\infty$). ■

Ясно, что $\mathbb{R}^p$ является открытым множеством из $\mathbf{R}^p$, причем $\mathbf{R}^p \setminus \mathbb{R}^p$ нигде не плотно. *В случае бесконечного* $X$ $\mathbb{R}^X$ *не является открытым множеством из* $\mathbf{R}^X$, *оно и* $\mathbf{R}^X \setminus \mathbb{R}^X$ *плотны в* $\mathbf{R}^X$. В самом деле, если $\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X$, то любая ее базисная окрестность $\mathbf{Ц}(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} \mathbf{U}_n)$ для каждого $x \neq x_n$ $(n = 1, \ldots, p)$ содержит функцию $\boldsymbol{\lambda}(\cdot)$ такую, что $\boldsymbol{\lambda}(x) = \infty$, т. е. она не входит в $\mathbb{R}^X$, и поэтому $\mathbb{R}^X$ не открыто. Далее, если $\boldsymbol{\lambda}_0(\cdot) \in \mathbf{R}^X$ и $\mathbf{Ц}(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} \mathbf{U}_n)$ — ее базисная окрестность, то можно найти функцию $\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X$ такую, что $\lambda(x_n) \in \mathbf{U}_n$ $(n = 1, \ldots, p)$. С другой стороны, для каждого $x \neq x_n$ $(n = 1, \ldots, p)$ можно найти функцию $\lambda(\cdot) \in \mathbf{R}^X$ такую, что $\boldsymbol{\lambda}(x_n) \in \mathbf{U}$ $(n = 1, \ldots, p)$ и $\lambda(x) = \infty$, т. е. $\lambda(\cdot) \in \mathbf{R}^X \setminus \mathbb{R}^X$. Сказанное поясняет утверждение о плотности. ■



В дальнейшем наряду с σ-алгеброй $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ будет фигурировать σ-алгебра $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$ — частный случай $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$ при $R = \mathbf{R}^1$. Из соотношения (1.9) следует, что при несчетном $X$ $\mathbb{R}^X \notin \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$ и поэтому $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^X) \not\subset \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$. Соотношение между этими двумя σ-алгебрами таково: *отображение*

$$\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X) \ni \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B} \cap \mathbb{R}^X \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \tag{1.17}$$

*является отображением всей* $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$ *на всю* $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$. В самом деле, если $\mathbf{Ц}(x_1, \ldots, x_p; \ \boldsymbol{\Delta}) \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^X)$, то его пересечение с $\mathbb{R}^X$ будет цилиндрическим множеством из $\mathbb{R}^X$ с координатами $x_1, \ldots, x_p$ и основанием $\boldsymbol{\Delta} \cap \mathbb{R}^p$ (основание действительно принадлежит $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$, так как отображение $\mathcal{B}(\mathbf{R}^p) \ni \boldsymbol{\Delta} \mapsto \boldsymbol{\Delta} \cap \mathbb{R}^p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ является отображением всей $\mathcal{B}(\mathbf{R}^p)$ на всю $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$). Таким образом, это пересечение входит в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^X)$. Обратно, каждое цилиндрическое множество из $\mathbb{R}^X$ может быть так получено. Следовательно, мы построили отображение $\mathcal{C}(\mathbf{R}^X) \ni \mathbf{Ц} \mapsto \mathbf{Ц} \cap \mathbb{R}^X \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^X)$ всей $\mathcal{C}(\mathbf{R}^X)$ на всю $\mathcal{C}(\mathbb{R}^X)$. Построив из цилиндрических множеств элементы σ-оболочек и взяв каждый раз пересечение с $\mathbb{R}^X$, перейдем от этого отображения к (1.17) (Халмош [1, гл. 1, § 5, теорема 5]). ■

Рассмотрим семейство коммутирующих самосопряженных операторов $(A_x)_{x \in X}$; $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto E_x(\Delta)$ — разложение единицы $A_x$. Компактифицированным разложением единицы этого оператора будем называть операторнозначную меру

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^1) \ni \boldsymbol{\Delta} \mapsto \mathbf{E}_x(\boldsymbol{\Delta}) = E_x(\boldsymbol{\Delta} \cap \mathbb{R}^1). \tag{1.18}$$

(Иными словами, мы доопределяем $E_x$ и в точке $\infty$, полагая значение меры в ней равным нулю.) Из (1.18) легко следует, что $\mathbf{E}_x$ — действительно разложение единицы на $\mathbf{R}^1$. Согласно конструкции п. 2 построим теперь по $(\mathbf{E}_x)_{x \in X}$ на $\mathbf{R}^X$ с. р. е. $\mathbf{E}$, его мы будем называть компактифицированными с. р. е. (к. с. р. е.) семейства $(A_x)_{x \in X}$. В силу п. 5, II *мера* $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X) \ni \mathbf{B} \to \mathbf{E}(\mathbf{B})$ *правильная*. Ее носитель $\operatorname{supp} \mathbf{E}$ называется также компактифицированным совместным спектром семейства $(A_x)_{x \in X}$; он будет некоторым замкнутым множеством из $\mathbf{R}^X$, не всегда входящим в $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$. Так как вследствие теоремы 1.2 мера $\mathbf{E}$ регулярная, то любое $\mathbf{B} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$, содержащее $\operatorname{supp} \mathbf{E}$, будет полной меры $\mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{E}(\mathbf{B}) = 1$.

*С. р. е.* $E$ *и к. с. р. е.* $\mathbf{E}$ *связаны следующей простой формулой:*

$$\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X) \ni \mathbf{B} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{B}) = E(\mathbf{B} \cap \mathbb{R}^X). \tag{1.19}$$

В самом деле, благодаря (1.17) соотношение $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X) \ni \mathbf{B} \mapsto E(\mathbf{B} \cap \mathbb{R}^X) = E_1(\mathbf{B})$ определяет некоторое разложение единицы $E_1$ на $\mathbf{R}^X$. В силу однозначности процедуры продолжения меры с $\mathcal{C}(\mathbf{R}^X)$ на $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$ равенство $E_1 = \mathbf{E}$ достаточно доказать для $\mathbf{B}$ вида $\mathbf{Ц}(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} \Delta_n)$, где $\Delta_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^1)$. Вследствие (1.18)

$$E_1\left(\mathbf{Ц}\left(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} \Delta_n\right)\right) = E\left(\left(\mathbf{Ц}\left(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} \Delta_n\right)\right) \cap \mathbb{R}^X\right) =$$

$$= E\left(Ц\left(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} (\Delta_n \cap \mathbb{R}^1)\right)\right) = E_{x_1, \ldots, x_p}\left(\mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} (\Delta_n \cap \mathbb{R}^1)\right) =$$

$$= \prod_{n=1}^{p} E_{x_n}(\Delta_n \cap \mathbb{R}^1) = \prod_{n=1}^{p} \mathbf{E}_{x_n}(\Delta_n) = \mathbf{E}\left(\mathbf{Ц}\left(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} \Delta_n\right)\right). \blacksquare$$

**Теорема 1.3.** *Справедливо соотношение*

$$\operatorname{supp} E = (\operatorname{supp} \mathbf{E}) \cap \mathbb{R}^X. \tag{1.20}$$

Подчеркнем, что согласно сказанному в п. 6 возможны случаи, когда $\operatorname{supp} \mathbf{E} \subseteq \mathbf{R}^X \setminus \mathbb{R}^X$ и пересечение (1.20) пустое.

Сформулированная теорема и некоторые дальнейшие соотношения между $E$ и $\mathbf{E}$ имеют общий характер и нам удобно изложить сперва простую общую схему. Пусть $\mathbf{\Lambda}$ — хаусдорфово топологическое пространство точек $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \ldots$, в котором выделен базис окрестностей $\mathbf{\Sigma}$, и $\mathfrak{A}_1$ — $\sigma$-алгебра, натянутая на этот базис; $\Lambda = \{\lambda, \mu, \ldots\}$ — некоторое множество из $\mathbf{\Lambda}$, не входящее, вообще говоря, в $\mathfrak{A}_1$; его мы будем считать топологизированным относительной топологией, индуцированной топологией $\mathbf{\Lambda}$. Рассмотрим $\sigma$-алгебру $\mathfrak{A}$ всех множеств $B \subseteq \Lambda$ таких, что $B = \mathbf{B} \cap \Lambda$ при некотором $\mathbf{B} \in \mathfrak{A}_1$. Ясно, что $\mathfrak{A}$ действительно будет $\sigma$-алгеброй, причем натянутой на всевозможные пересечения окрестностей из $\mathbf{\Sigma}$ с $\Lambda$ (эти пересечения образуют базис $\Sigma$ относительной топологии в $\Lambda$). Предположим, что на $\mathfrak{A}$ задана операторнозначная мера $\mathfrak{A} \ni B \mapsto \Theta(B)$, удовлетворяющая обычным требованиям п. 5. Эта мера по формуле

$$\mathfrak{A}_1 \ni \mathbf{B} \mapsto \mathbf{\Theta}(\mathbf{B}) = \Theta(\mathbf{B} \cap \Lambda) \tag{1.21}$$

индуцирует операторнозначную меру $\mathbf{\Theta}$ на $\mathfrak{A}_1$.

Докажем следующие две простые леммы, касающиеся этой общей схемы.

**Лемма 1.2.** *Справедливо соотношение*

$$\operatorname{supp} \Theta = (\operatorname{supp} \mathbf{\Theta}) \cap \Lambda. \tag{1.22}$$

Доказательство. Пусть $(\mathbf{F}_\alpha)_{\alpha \in A}$ — совокупность всех замкнутых в $\mathbf{\Lambda}$ множеств из $\mathfrak{A}_1$ полной меры $\mathbf{\Theta}$. Таким образом, $\operatorname{supp} \mathbf{\Theta} = \bigcap_{\alpha \in A} \mathbf{F}_\alpha$. Каждое множество $\mathbf{F}_\alpha \cap \Lambda$, замкнуто в $\Lambda$, входит в $\mathfrak{A}$ и согласно (1.21) $\Theta(\mathbf{F}_\alpha \cap \Lambda) = \mathbf{\Theta}(\mathbf{F}_\alpha) = \mathbf{\Theta}(\mathbf{\Lambda}) = \Theta(\Lambda)$. Поэтому оно фигурирует в пересечении, определяющем $\operatorname{supp} \Theta$, и можно написать

$$\operatorname{supp} \Theta \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} (\mathbf{F}_\alpha \cap \Lambda) = \left(\bigcap_{\alpha \in A} \mathbf{F}_\alpha\right) \cap \Lambda = (\operatorname{supp} \mathbf{\Theta}) \cap \Lambda. \tag{1.23}$$



Обратно, пусть $(F_\beta)_{\beta \in B}$ — совокупность всех замкнутых в $\Lambda$ множеств из $\mathfrak{A}$ таких, что $\Theta(F_\beta) = \Theta(\Lambda)$; $\operatorname{supp} \Theta = \bigcap_{\beta \in B} F_\beta$. Предположим, что в (1.23) имеет место строгое включение. Тогда найдется $\lambda \in (\operatorname{supp} \mathbf{\Theta}) \cap \Lambda$ такое, что $\lambda \,\overline{\in}\, \operatorname{supp} \Theta = \bigcap_{\beta \in B} F_\beta$. Следовательно, существует $\beta \in B$, для которого $F_\beta \,\overline{\ni}\, \lambda$. Пусть $U \in \Sigma$ — некоторая базисная окрестность в $\Lambda$ точки $\lambda$ такая, что $U \cap F_\beta = \varnothing$. Так как $U \subseteq \Lambda \setminus F_\beta$ и $\Theta(F_\beta) = \Theta(\Lambda)$, то $\Theta(U) = 0$. С другой стороны, $U = \mathbf{U} \cap \Lambda$, где $\mathbf{U} \in \mathbf{\Sigma}$. Поэтому согласно (1.21) $\mathbf{\Theta}(\mathbf{U}) = \Theta(\mathbf{U} \cap \Lambda) = \Theta(U) = 0$. Но $\lambda \in \mathbf{U} \cap (\operatorname{supp} \mathbf{E})$ и, следовательно, последнее множество не пустое. В силу п. 5, $\mathbf{\Theta}(\mathbf{U}) \neq 0$, что абсурдно. Итак, в (1.23) имеется равенство, т. е. (1.22) установлено. $\blacksquare$

Выясним связь между интегралами по мере $\Theta$ и $\mathbf{\Theta}$. Если $\mathbf{\Lambda} \ni \boldsymbol{\lambda} \to F(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{C}^1$ — измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{A}_1$, то ее сужение $F \restriction \Lambda$, очевидно, измеримо относительно $\mathfrak{A}$.

**Лемма 1.3.** *Пусть $f \in H$ фиксировано. Функция $F$ суммируема относительно меры $(\mathbf{\Theta}(\mathbf{B}) f, f)_H$ тогда и только тогда, когда $F \restriction \Lambda$ суммируема относительно $(\Theta(B) f, f)_H$, при этом справедливо равенство*

$$\int_{\mathbf{\Lambda}} F(\boldsymbol{\lambda})\, d(\mathbf{\Theta}(\boldsymbol{\lambda}) f, f)_H = \int_{\Lambda} (F \restriction \Lambda)(\lambda)\, d(\Theta(\lambda) f, f)_H. \tag{1.24}$$

Доказательство. Учитывая конструкцию интеграла, заключаем, что лемма будет доказана, если установить соотношение (1.24) для ступенчатых функций $F$. Но для таких функций оно будет справедливо, если (1.24) справедливо для характеристической функции $F(\boldsymbol{\lambda}) = \varkappa_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\lambda})$ множества $\mathbf{B} \in \mathfrak{A}_1$, т. е. если $(\mathbf{\Theta}(\mathbf{B}) f, f)_H = (\Theta(\mathbf{B} \cap \Lambda) f, f)_H$ (очевидно, $\varkappa_{\mathbf{B}} \restriction \Lambda = \varkappa_{\mathbf{B} \cap \Lambda}$). Это равенство сразу следует из (1.21). $\blacksquare$

Применение изложенной схемы к $E$ и $\mathbf{E}$ очевидно: нужно положить $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{R}^X$, $\mathfrak{A}_1 = \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$, $\Lambda = \mathbb{R}^X$. Тогда $\mathfrak{A} = \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ согласно (1.17), и если $\Theta = E$, то $\mathbf{\Theta} = \mathbf{E}$ вследствие (1.21) и (1.19). Теперь из леммы 1.2 заключаем, что справедлива теорема 1.3. Лемма 1.3 дает связь между интегралами по $E$ и $\mathbf{E}$. Используем эту связь для того, чтобы переписать в терминах к. с. р. е. формулу (1.6). Зафиксируем $x \in X$ и рассмотрим функцию $\mathbf{R}^X \ni \boldsymbol{\lambda}(\cdot) \mapsto F(\boldsymbol{\lambda}(\cdot)) = \boldsymbol{\lambda}(x) \in \mathbf{R}^1$. Она почти везде относительно меры $\mathbf{E}$ конечна, так как множество $\{\boldsymbol{\lambda}(\cdot) \in \mathbf{R}^X \mid \boldsymbol{\lambda}(x) = \infty\} = \mathbf{Ц}(x; \{\infty\})$, и поэтому его мера $\mathbf{E}$ равна $\mathbf{E}_x(\{\infty\}) = E_x(\varnothing) = 0$. Сужение $(F \restriction \mathbb{R}^X)(\lambda(\cdot)) = \lambda(x)$. Поэтому если $f \in H$таково, что $F \restriction \mathbb{R}^X$

суммируема с квадратом относительно меры $(E(B)f, f)_H$, то $F$ будет такой же относительно $(\mathbf{E}(\mathbf{B})f, f)_H$, и наоборот. Из (1.24) следует равенство интегралов

$$\int_{\mathbf{R}^X} |\lambda(x)|^2 d(\mathbf{E}(\lambda(\cdot))f, f)_H = \int_{\mathbb{R}^X} |\lambda(x)|^2 d(E(\lambda(\cdot))f, f)_H,$$

а это влечет равенство и соответствующих спектральных интегралов:

$$\int_{\mathrm{R}^X} \lambda(x)\, d\mathbf{E}(\lambda(\cdot)) = \int_{\mathrm{R}^X} \lambda(x)\, dE(\lambda(\cdot)).$$

Отсюда и из соотношений (1.5) и (1.6) вытекает следующее утверждение: каждый оператор $A_x$ представим в виде

$$A_x = \int_{\mathbf{R}^X} \lambda(x)\, d\mathbf{E}(\lambda(\cdot)),\quad \mathfrak{D}(A_x) = \left\{f \in H \,\middle|\, \int_{\mathbf{R}^X} |\lambda(x)|^2\, d(\mathbf{E}(\lambda(\cdot))f, f)_H < \infty\right\} (x \in X) \tag{1.25}$$

(в интегралах (1.25) в действительности интегрируется вещественнозначная функция, определенная $\mathbf{E}$-почти везде на $\mathbf{R}^X$).

Совершенно аналогично определяется к. с. р. е. $\mathbf{E}$ для случая коммутирующих нормальных операторов $(A_x)_{x \in X}$. Нужно перейти от комплексной плоскости $\mathbb{C}^1$ к ее компактификации $\mathbf{C}^1 = \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}$ и рассмотреть пространство $\mathbf{C}^X$ и σ-алгебру $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{C}^X)$ (т. е. считаем $R = \mathbf{C}^1$). По разложениям единицы $(E_x)_{x \in X}$ строятся разложения единицы $\mathcal{B}(\mathbf{C}^1) \ni \Delta \mapsto \mathbf{E}_x(\Delta) = E_x(\Delta \cap \mathbb{C}^1)$, а затем, перемножая их, получаем к. с. р. е. $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{C}^X) \ni \mathbf{B} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{B}) = \mathbf{E}(\mathbf{B} \cap \mathbb{C}^X)$. Все утверждения этого пункта, разумеется, сохраняются. Вместо равенства (1.25) появляются равенства (см. (1.7))

$$\begin{gathered} A_x = \int_{\mathbf{C}^X} \lambda(x)\, d\mathbf{E}(\lambda(\cdot)),\quad A_x^* = \int_{\mathbf{C}^X} \overline{\lambda(x)}\, d\mathbf{E}(\lambda(\cdot)), \\ \mathfrak{D}(A_x) = \mathfrak{D}(A_x^*) = \left\{f \in H \,\middle|\, \int_{\mathbf{C}^X} |\lambda(x)|^2\, d(\mathbf{E}(\lambda(\cdot))f, f)_H < \infty\right\} \\ (x \in X). \end{gathered} \tag{1.26}$$

Подобную компактификацию можно производить и в случае общего метрического сепарабельного локально компактного пространства $R$.

## 8. СЛУЧАИ, КОГДА КОМПАКТИФИКАЦИЯ ИЗЛИШНЯ

Пусть $(A_x)_{x \in X}$ — семейство коммутирующих самосопряженных операторов. Компактификация при рассмотрении с. р. е. этого семейства заведомо излишня в двух случаях: 1) когда $X$ не более чем счетно и 2) когда каждый из операторов $A_x$ ограничен. Соответствующий результат сформулируем сразу для общего с. р. е. в виде одной объединяющей теоремы, содержащей также комбинацию указанных случаев.



**Теорема 1.4.** *Пусть $R$ — полное метрическое сепарабельное локально компактное пространство, $(E_x)_{x \in X}$ — коммутирующее семейство разложений единицы на $R$ (определенных на $\mathcal{B}(R)$), $E$ — соответствующее с. р. е. Если* supp $E_x$ $(x \in X)$ *за исключением не более чем счетного их числа компактны, то $E$ — правильная мера.*

Вследствие регулярности $E$ (теорема 1.2) из теоремы следует, что *если $B \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ содержит* supp $E$, *то $E$ на нем сосредоточена.* Для доказательства теоремы понадобятся некоторые факты. Перейдем к их изложению.

**Лемма 1.4.** *Пусть $R$ — полное метрическое сепарабельное локально компактное пространство, $(E_x)_{x \in X}$ — семейство коммутирующих разложений единицы $E_x$ на $R$. Если $X$ не более чем счетно, то $R^X$ обладает счетным базисом окрестностей и поэтому с. р. е. $E$ — правильная мера.*

Доказательство. Обозначим через $\mathrm{T}$ счетный базис окрестностей в пространстве $R$, который существует благодаря тому, что оно — метрическое сепарабельное. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ (мы считаем, что $X$ бесконечно). Тогда система базисных окрестностей в $R^X$ вида $Ц_б' = Ц(x_1, \ldots, x_p; \times_{n=1}^{p} V_n)$, где $V_n \in \mathrm{T}$ и $p = 1, 2, \ldots$, счетна. Вместе с тем для каждой точки $\lambda(\cdot) \in R^X$ и любой ее базисной окрестности $Ц_б = Ц(x_1, \ldots, x_p; \times_{n=1}^{p} U_n)$, где $U_n$ — произвольная окрестность в $R$, можно подобрать окрестность $\lambda(\cdot)$ вида $Ц_б'$ такую, чтобы $Ц_б' \subseteq Ц_б$. Для этого нужно при каждом $n = 1, \ldots, p$ взять окрестность $V_n \in \mathrm{T}$ точки $\lambda(x_n) \in U_n$ такую, чтобы $V_n \subseteq U_n$. Таким образом, топологии, порождаемые в $R^X$ окрестностями $Ц_б$ и $Ц_б'$, совпадают, т. е. $R^X$ существует счетным базисом окрестностей.

То, что $E$ — правильная мера, вытекает теперь из п. 5, IV. ■

**Лемма 1.5.** *Пусть $\Lambda_j$ — хаусдорфово топологическое пространство, $\mathfrak{A}_j$ — σ-алгебра, натянутая на некоторый базис окрестностей $\Sigma_j$ в $\Lambda_j$; $\mathfrak{A}_j \ni B_j \mapsto E_j(B_j)$ — разложение единицы $(j = 1, 2)$. Предположим, что $E_1$ и $E_2$ коммутируют, и существует с. р. е. $\mathfrak{A} \ni B \mapsto E(B)$, где $\mathfrak{A}$ — прямое произведение $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Пусть $\Lambda_2$ — компакт. Тогда из того, что открытое в $\Lambda$ множество вида $\Delta_1 \times \Lambda_2$ содержит* supp $E$, *следует, что $\Delta_1 \supseteq$* supp $E_1$.

Доказательство. Пусть supp $E = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$, где $F_\alpha$ пробегает совокупность всех замкнутых множеств из $\mathfrak{A}$ полной меры $E$.

Предположим, что $\Delta_1 \not\supseteq \operatorname{supp} E_1$, тогда найдется точка $\lambda_1^0 \in \operatorname{supp} E_1$, не входящая в $\Delta_1$. При любом $\lambda_2 \in \Lambda_2$ $(\lambda_1^0, \lambda_2) \bar{\in} \Delta_1 \times \Lambda_2$ и, следовательно, $(\lambda_1^0, \lambda_2) \bar{\in} \operatorname{supp} E = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$. Поэтому для каждого $\lambda_2 \in \Lambda_2$ найдется такое $\alpha(\lambda_2)$, что $(\lambda_1^0, \lambda_2) \bar{\in} F_{\alpha(\lambda_2)}$, а значит, найдется и окрестность $U_1^{(\lambda_2)} \times U_2(\lambda_2)$ $(U_1^{(\lambda_2)} \in \Sigma_1, \quad U_2(\lambda_2) \in \Sigma_2)$ точки $(\lambda_1^0, \lambda_2)$, не пересекающаяся с $F_{\alpha(\lambda_2)}$ и поэтому имеющая нулевую меру $E$. Окрестности $U_2(\lambda_2)$ покрывают компакт $\Lambda_2$. Выберем из этого покрытия конечное покрытие $\bigcup_{n=1}^{p} U_2(\lambda_{2,n}) = \Lambda_2$ и рассмотрим пересечение $V_1 = \bigcap_{n=1}^{p} U_1^{(\lambda_{2,n})}$. Очевидно, $V_1 \in \mathfrak{A}_1$ открыто и таково, что $V_1 \times \Lambda_2 \subseteq \bigcup_{n=1}^{p} (U_1^{(\lambda_{2,n})} \times U_2(\lambda_{2,n}))$. С другой стороны, $\lambda_1^0 \in V_1$, поэтому $V_1 \cap \operatorname{supp} E_1 \neq \varnothing$. Согласно п. 5, I $E_1(V_1) \neq 0$, что абсурдно. ■

Нам понадобится одно простое обобщение некоторых рассмотрений п. 1 — 3: мы будем вводить прямые произведения не одного и того же пространства $R$, а различных зависящих от $x \in X$ пространств $R_x$. Наметим его.

Пусть $(R_x)_{x \in X}$ — семейство метрических сепарабельных локально компактных пространств $R_x$. Элементы прямого произведения $\mathcal{R} = \underset{x \in X}{\times} R_x$ удобно интерпретировать как функции $\lambda(\cdot)$ на $X$, значения которых в каждой точке $x$ принадлежат пространству $R_x$. Тихоновская топологизация $\mathcal{R}$ превращает его в регулярное пространство, которое будет компактом тогда и только тогда, когда каждое $R_x$ — компакт. Цилиндрическое множество вводится соотношением

$$Ц(\mathcal{R};\ x_1, \ldots, x_p;\ \Delta) = \{\lambda(\cdot) \in \mathcal{R} \mid (\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p)) \in \Delta\},$$

где координаты $x_1, \ldots, x_p$ — различные точки из $X$, а основание $\Delta \in \mathcal{B}\left(\underset{n=1}{\overset{p}{\times}} R_{x_n}\right)$. Как и ранее, определяется процедура исключения и вставки прямых сомножителей $R_x$ в основание с соответствующим изменением координат. Это позволяет легко доказать, что совокупность всех цилиндрических множеств образует алгебру, которую мы обозначаем $\mathcal{C}(\mathcal{R})$. Ее $\sigma$-оболочка обозначается через $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$. Очевидно, $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{R})$. Как и в п. 3, нетрудно доказать, что $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$ совпадает с совокупностью всех обобщенных цилиндрических множеств $Ц(\mathcal{R}; x_1, x_2, \ldots; \Delta) = \{\lambda(\cdot) \in \mathcal{R} \mid (\lambda(x_1), \lambda(x_2), \ldots) \in \Delta\}$, где $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность координат — различных точек из $X$, а $\Delta \in \mathcal{C}_\sigma\left(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} R_{x_n}\right)$ — основание. Множество



$Ц(\mathcal{R}; x_1, x_2, \ldots; \Delta)$ открыто (замкнуто) в $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $\Delta$ открыто (замкнуто) в $\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} R_{x_n}$.

Предположим теперь, что имеется метрическое сепарабельное локально компактное пространство $R$, а $R_x$ при каждом $x \in X$ — замкнутые множества из $R$, топологизированные относительной топологией. Тогда $\mathcal{R} \subseteq R^X$ и замкнуто в $R^X$, причем тихоновская топологизация $\mathcal{R}$ совпадает с относительной, которая индуцируется пространством $R^X$. Если $X$ не более чем счетно, то $\mathcal{B}(R^X) = \mathcal{C}_\sigma(R^X)$, поэтому $\mathcal{R} \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ (в случае более чем счетного $X$, вообще говоря, $\mathcal{R} \bar{\in} \mathcal{C}_\sigma(R^X)$, что создает некоторые трудности).

*При любом $X$ отображение*

$$\mathcal{C}_\sigma(R^X) \ni B \mapsto B \cap \mathcal{R} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R}) \tag{1.27}$$

*является отображением всей $\sigma$-алгебры $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$ на всю $\sigma$-алгебру $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$. При этом если $B = Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$, то $B \cap \mathcal{R} = Ц\left(\mathcal{R}; x_1, x_2, \ldots; \Delta \cap \left(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} R_{x_n}\right)\right)$.* В самом деле, пусть сперва $X$ не более чем счетно, тогда совокупность $\{\Delta \in \mathcal{C}_\sigma(R^X) \mid \Delta \subseteq \mathcal{R}\}$ образует $\sigma$-алгебру, которая, как легко понять, совпадает с $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$. Так как теперь в (1.27) $B \cap \mathcal{R} \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ и $B \cap \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$, то отсюда следует, что это множество входит в $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$. Ясно также, что $B \cap \mathcal{R}$ пробегает все множества из $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$. Рассмотрим случай общего $X$. Выписанное равенство $B \cap \mathcal{R} = Ц\left(\mathcal{R}; x_1, x_2, \ldots; \Delta \cap \left(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} R_{x_n}\right)\right)$ очевидно. В силу уже доказанного $\Delta \cap \left(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} R_{x_n}\right) \in \mathcal{C}_\sigma\left(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} R_{x_n}\right)$, поэтому согласно определению $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$ $B \cap \mathcal{R} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$. Так как основания $\Delta \cap \left(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} R_{x_n}\right)$ пробегают все $\mathcal{C}_\sigma\left(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} R_{x_n}\right)$, то в (1.27) $B \cap \mathcal{R}$ пробегает все $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$ (Халмош [1, гл. 1, § 5, теорема 5]). ■

Предположим, что задано семейство $(E_x)_{x \in X}$ коммутирующих разложений единицы $\mathcal{B}(R) \ni \Delta \mapsto E_x(\Delta)$. Пусть $E$ — соответствующее с. р. е. Положим $R_x = \operatorname{supp} E_x$ $(x \in X)$ и рассмотрим $\mathcal{R} = \underset{x \in X}{\times} R_x$.

**Лемма 1.6.** *Если $B \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ таково, что $B \cap \mathcal{R} = \varnothing$, то $E(B) = 0$.*

Доказательство. Пусть $B = Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$ $(\Delta \in \mathcal{C}_\sigma(R^\infty))$. Тогда согласно (1.27) $B \cap \mathcal{R} = Ц\left(\mathcal{R}; x_1, x_2, \ldots; \Delta \cap \left(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} R_{x_n}\right)\right)$, и это пересечение может быть пустым лишь тогда, когда $\Delta \cap \left(\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} R_{x_n}\right) = \varnothing$. Но в силу (1.11) $E(B) = E_{x_1, x_2, \ldots}(\Delta)$, а так как вследствие леммы 1.4 мера $E_{x_1, x_2, \ldots}$ правильная, то для доказательства равенства $E_{x_1, x_2, \ldots}(\Delta) = 0$ достаточно убедиться, что $\Delta \subseteq R^\infty \setminus \operatorname{supp} E_{x_1, x_2, \ldots}$. Это включение вытекает из соотношения $\operatorname{supp} E_{x_1, x_2, \ldots} \subseteq \mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} R_{x_n}$ (см. (1. 16)). ■

Эта лемма позволяет произвести полезную общую конструкцию, которую мы изложим в виде следующей леммы.

**Лемма 1.7.** *По с. р. е. $E$ определим на $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$ ($\mathcal{R} = \mathop{\times}\limits_{x \in X} \operatorname{supp} E_x$) операторную меру $\hat{E}$, полагая*

$$\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R}) \ni \hat{B} \mapsto \hat{E}(\hat{B}) = E(B), \tag{1.28}$$

*где $B \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ таково, что $B \cap \mathcal{R} = \hat{B}$. Утверждается, что это определение корректно, $\hat{E}$ является разложением единицы на $\mathcal{R}$ и $\operatorname{supp} \hat{E} = \operatorname{supp} E$.*

Доказательство. Оператор $E(B)$ по $\hat{B}$ определяется однозначно: если $B_1, B_2 \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ таковы, что $B_1 \cap \mathcal{R} = B_2 \cap \mathcal{R}$, то $E(B_1) = E(B_2)$. В самом деле, $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ и $(B_1 \setminus B_2) \cap \mathcal{R} = \varnothing$, поэтому согласно лемме 1.6 $E(B_1 \setminus B_2) = 0$. Аналогично $E(B_2 \setminus B_1) = 0$, поэтому $E(B_1) = E(B_2)$. Таким образом, определение (1.28) корректно.

Функция множеств (1.28) является разложением единицы на $\mathcal{R}$. В самом деле, $\hat{E}(\hat{B})$ — проектор, $\hat{E}(\varnothing) = 0$, $\hat{E}(\mathcal{R}) = E(R^X) = 1$. Пусть $\hat{B}_j \in \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$ взаимно не пересекаются. Выберем $B_j \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ такими, чтобы $\hat{B}_j = B_j \cap \mathcal{R}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Положим $C_1 = B_1$, $C_2 = B_2 \setminus B_1$, $C_3 = B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)$, … Эти множества входят в $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$, взаимно не пересекаются и такие, что $C_j \cap \mathcal{R} = \hat{B}_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Поэтому в смысле сильной сходимости

$$\hat{E}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \hat{B}_j\right) = E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(C_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{E}(\hat{B}_j),$$

т. е. для $\hat{E}$ имеет место абсолютная аддитивность. Наконец, выполняется ортогональность: пусть $\hat{B}'$, $\hat{B}'' \in \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$, $B'$, $B'' \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ такие, что $\hat{B}' = B' \cap \mathcal{R}$, $\hat{B}'' = B'' \cap \mathcal{R}$. Тогда $\hat{E}(\hat{B}' \cap \hat{B}'') = E(B' \cap B'') = E(B') E(B'') = \hat{E}(\hat{B}') \hat{E}(\hat{B}'')$.

Докажем равенство $\operatorname{supp} \hat{E} = \operatorname{supp} E$. Пусть $F_\alpha \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ замкнуто и таково, что $E(F_\alpha) = 1$. Тогда согласно (1.27) и (1.28) $F_\alpha \cap \mathcal{R} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$ и $\hat{E}(F_\alpha \cap \mathcal{R}) = 1$. Кроме того, $F_\alpha \cap \mathcal{R}$ замкнуто в топологии пространства $\mathcal{R}$. Поэтому $F_\alpha \cap \mathcal{R}$ фигурирует среди множеств, определяющих $\operatorname{supp} \hat{E}$, и, таким образом, $\operatorname{supp} \hat{E} \subseteq F_\alpha \cap \mathcal{R} \subseteq F_\alpha$. Вследствие произвольности $F_\alpha$ заключаем, что $\operatorname{supp} \hat{E} \subseteq \operatorname{supp} E$.



Для доказательства противоположного включения рассмотрим замкнутое в $\mathcal{R}$ множество $\hat{F}_\beta \in \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$ такое, что $\hat{E}(\hat{F}_\beta) = 1$. Оно имеет вид $\hat{F}_\beta = Ц(\mathcal{R}; x_1, x_2, \ldots; \Delta)$, где $\Delta$ замкнуто в $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} R_{x_n}$, а значит, и в $R^\infty$. Следовательно, $F_\beta = Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$ замкнуто в $R^X$, входит в $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$, $F_\beta \cap \mathcal{R} = \hat{F}_\beta$ и $E(F_\beta) = \hat{E}(\hat{F}_\beta) = 1$. Таким образом, это множество фигурирует среди множеств, определяющих $\operatorname{supp} E$, и поэтому $\operatorname{supp} E \subseteq F_\beta$. Но тогда в силу (1.16) $\operatorname{supp} E = (\operatorname{supp} E) \cap \mathcal{R} \subseteq F_\beta \cap \mathcal{R} = \hat{F}_\beta$ для любого $\hat{F}_\beta$, откуда $\operatorname{supp} E \subseteq \operatorname{supp} \hat{E}$. ■

Доказательство теоремы. Пусть $X_0$ — совокупность всех тех точек $x \in X$, для которых $\operatorname{supp} E_x$ не является компактом. Введем согласно лемме 1.7 по $E$ разложение единицы $\hat{E}$ и докажем, что мера $\hat{E}$ правильная. Пусть $\hat{O} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$ открыто и содержит $\operatorname{supp} \hat{E}$. Требуется доказать, что $\hat{E}(\hat{O}) = 1$.

Множество $\hat{O}$ имеет вид $\hat{O} = Ц(\mathcal{R}; x_1, x_2, \ldots; \Delta)$, где $\Delta$ открыто в $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} R_{x_n}$; без ограничения общности можно считать, что $X_1 = \{x_1, x_2, \ldots\} \supseteq X_0$. Положим $X_2 = X \setminus X_1$. Как и в п. 3, легко показать, что пространство $\mathcal{R} = \mathop{\times}\limits_{x \in X} R_x$ можно понимать как прямое произведение $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, где $\mathcal{R}_1 = \mathop{\times}\limits_{x \in X_1} R_x$, $\mathcal{R}_2 = \mathop{\times}\limits_{x \in X_2} R_x$. При этом, если $\mathfrak{A}_j = \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R}_j)$ $(j = 1, 2)$, то σ-алгебра $\mathfrak{A}$, равная прямому произведению $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, совпадает с $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$.

Построим при помощи леммы 1.7 разложение единицы $\hat{E}_j$, заменив в соответствующей конструкции $X$ на $X_j$ $(j = 1, 2)$. Легко понять, что $\hat{E}_1$ и $\hat{E}_2$ коммутируют и $\hat{E}$ равно с. р. е., построенному по этим двум разложениям. Так, для доказательства последнего достаточно убедиться, что $\hat{E}(\hat{B}_1 \times \hat{B}_2) = \hat{E}_1(\hat{B}_1) \hat{E}_2(\hat{B}_2)$ $(\hat{B}_j \in \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R}_j)$; $j = 1, 2)$. Образуем с. р. е. $E_j$ по семейству $(E_x)_{x \in X_j}$ $(j = 1, 2)$. Тогда согласно (1.28) и п. 3 для $B_j \in \mathcal{C}_\sigma(R^{X_j})$ таких, что $B_j \cap \mathcal{R}_j = \hat{B}_j$ $(j = 1, 2)$, можно написать $\hat{E}_1(\hat{B}_1) \hat{E}_2(\hat{B}_2) = E_1(B_1) E_2(B_2) = E(B_1 \times B_2) = \hat{E}(\hat{B}_1 \times \hat{B}_2)$ (мы воспользовались равенством $(B_1 \times B_2) \cap \mathcal{R} = \hat{B}_1 \times \hat{B}_2$).

В соответствии с разложением $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ множество $\hat{O}$ можно записать в виде $\hat{O} = \Delta \times \mathcal{R}_2$. Так как $\mathcal{R}_2$ — компакт, а $\hat{O} \supseteq \operatorname{supp} \hat{E}$, то вследствие леммы 1.5, примененной к $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$ и $\hat{E}$, $\Delta \supseteq \operatorname{supp} \hat{E}_1$. Мера $\hat{E}_1$ правильная: аналогично лемме 1.4 доказываем, что $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \mathcal{R}_1$ имеет счетный базис окрестностей, а затем применяем п. 5, IV. Поэтому $\hat{E}_1 (\Delta) = 1$. Таким образом, $\hat{E}(\hat{O}) = \hat{E}_1 (\Delta) \hat{E}_2 (\mathcal{R}_2) = 1$, что и требовалось доказать.

Правильность меры $E$ теперь почти очевидна. В самом деле, пусть $O \in \mathcal{C}_\sigma (R^X)$ открыто в $R^X$ и содержит $\operatorname{supp} \dot{E}$. Тогда $O \cap \mathcal{R} \in \mathcal{C}_\sigma (\mathcal{R})$, открыто в $\mathcal{R}$ и содержит $\operatorname{supp} \hat{E}$ (так как согласно лемме 1.7 $\operatorname{supp} \hat{E} = \operatorname{supp} E = (\operatorname{supp} E) \cap \mathcal{R}$). Поэтому $1 = \hat{E} (O \cap \mathcal{R}) = E (O)$. ■

В связи с доказанной теоремой возникает следующий естественный вопрос. Пусть фигурирующее в ней семейство $(E_x)_{x \in X}$ порождено семейством $(A_x)_{x \in X}$ коммутирующих самосопряженных операторов. Для него наряду с с. р. е. $E$ можно построить к. с. р. е. $\mathbf{E}$. Будет ли $\operatorname{supp} \mathbf{E} = \operatorname{supp} E$. Ясно, что если хотя бы один из операторов $A_x$ неограничен, такое равенство не имеет место и связь между носителями дается формулой (1.20) (даже если имеется всего один неограниченный оператор с разложением единицы $E$, то точка $\infty$ является предельной в $\mathbf{R}^1$ для $\operatorname{supp} E$ и поэтому в силу (1.20) и замкнутости в $\mathbf{R}^1$ $\operatorname{supp} \mathbf{E}$ входит в последнее множество). Вместе с тем легко показать, что *если имеется семейство ограниченных коммутирующих самосопряженных операторов* $(A_x)_{x \in X}$, *то*

$$\operatorname{supp} E = \operatorname{supp} \mathbf{E}. \tag{1.29}$$

В самом деле, предположим, что (1.29) не имеет место. Тогда в соответствии с (1.20) найдется $\lambda_0 (\cdot) \in (\operatorname{supp} \mathbf{E}) \cap (\mathbf{R}^X \diagdown \mathbb{R}^X)$. Так как $\lambda_0 (\cdot) \in \mathbf{R}^X \diagdown \mathbb{R}^X$, то существует $x_0 \in X$ такое, что $\lambda_0 (x_0) = \infty$. Оператор $A_{x_0}$ ограничен, поэтому найдется окрестность $\mathbf{U}_0$ в $\mathbf{R}^1$ точки $\infty$ такая, что $U_0 \cap (\operatorname{supp} E_{x_0}) = \varnothing$, где $U_0 = \mathbf{U}_0 \diagdown \{\infty\}$. Это означает, что $(Ц (x_0;\ U_0)) \cap (\mathop{\times}\limits_{x \in X} \operatorname{supp} E_x) = \varnothing$ и в силу (1.16) $(Ц (x_0;\ U_0)) \cap (\operatorname{supp} E) = \varnothing$. Таким образом, $\mathcal{C}_\sigma (\mathbb{R}^X) \ni \mathbb{R}^X \diagdown Ц (x_0;\ U_0) \supseteq \operatorname{supp} E$ и благодаря правильности $E$ $E (\mathbb{R}^X \diagdown Ц (x_0;\ U_0)) = 1$. Таким образом, $E (Ц (x_0;\ U_0)) = 0$. С другой стороны, $Ц (x_0;\ U_0) = (\mathbf{Ц} (x_0;\ \mathbf{U}_0)) \cap \mathbb{R}^X$ и в соответствии с (1.19) и п. 5, I $E (Ц (x_0;\ U_0)) = \mathbf{E} (\mathbf{Ц} (x_0;\ \mathbf{U}_0)) \neq 0$, так как $\lambda_0 (\cdot) \in (\mathbf{Ц} (x_0;\ \mathbf{U}_0)) \cap (\operatorname{supp} \mathbf{E}) \neq \varnothing$. Мы пришли к противоречию. ■

Разумеется, сказанное сейчас справедливо и для нормальных операторов $A_x$.



## 9. СУЖЕНИЕ СОВМЕСТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЕДИНИЦЫ

В § 2 нам понадобится обобщение некоторых из полученных ранее результатов на случай меры, являющийся сужением с. р. е. на замкнутое множество из $\mathcal{C}_\sigma (\mathbb{R}^X)$. Приведем сперва простую общую схему.

Пусть $\Lambda$ — хаусдорфово топологическое пространство, $\mathfrak{A}$ — $\sigma$-алгебра, натянутая на некоторый базис $\Sigma$ окрестностей в $\Lambda$ и $\Theta$ — операторнозначная мера, удовлетворяющая обычным требованиям п. 5. Зафиксируем замкнутое множество $M \in \mathfrak{A}$ и топологизируем его относительной топологией, индуцируемой $\Lambda$; $\Sigma_M = \{U \cap M \mid U \in \Sigma\}$ — базис окрестностей в $M$. Рассмотрим $\sigma$-алгебру $\mathfrak{A}_M = \{B' \in \mathfrak{A} \mid B' \subseteq M\} \subseteq \mathfrak{A}$. Легко понять, что она является $\sigma$-оболочкой базисных окрестностей из $\Sigma_M$. Сужение меры $\Theta$ на $M$, которое обозначим $\Theta_M = \Theta \restriction M$, определяется равенством $\Theta_M (B') = \Theta (B')$ $(B' \in \mathfrak{A}_M)$; во всем дальнейшем предполагается, что $\Theta_M$ нетривиальна, т. е. $\Theta (M) \neq 0$.

Легко доказать, что *если $\Theta$ регулярна, то такой же будет и* $\Theta_M$. В самом деле, достаточно доказать, что при фиксированных $f \in H$ и $B' \in \mathfrak{A}_M$ найдется последовательность $(O'_n)_{n=1}^{\infty}$ открытых в $M$ множеств $O'_n \in \mathfrak{A}_M$, содержащих $B'$, и таких, что $(\Theta_M (O'_n) f, f)_H \to (\Theta_M (B') f, f)_H = (\Theta (B') f, f)_H$ при $n \to \infty$. Вследствие регулярности $\Theta$ существует последовательность $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ открытых в $\Lambda$ и содержащих $B'$ множеств $O_n \in \mathfrak{A}$ таких, что $(\Theta (O_n) f, f)_H \to (\Theta (B') f, f)_H$ при $n \to \infty$. Тогда $O'_n = O_n \cap M \supseteq B'$ открыты в $M$, входят в $\mathfrak{A}_M$ и $(\Theta (O_n) f, f)_H \geqslant (\Theta (O'_n) f, f)_H \geqslant (\Theta (B') f, f)_H$ $(n = 1, 2, \ldots)$, откуда следует, что последовательность $(O'_n)_{n=1}^{\infty}$ — требуемая. ■

Нетрудно видеть, что *справедливо соотношение*

$$\operatorname{supp} \Theta_M \subseteq \operatorname{supp} \Theta. \tag{1.30}$$

Действительно, пусть $\operatorname{supp} \Theta = \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$, где замкнутые в $\Lambda$ $F_\alpha \in \mathfrak{A}$ полной меры $\Theta$. Тогда $F_\alpha \cap M \in \mathfrak{A}_M$ замкнуты в $M$ и $\Theta_M (F_\alpha \cap M) = \Theta (F_\alpha \cap M) = \Theta (M)$, т. е. полной меры $\Theta_M$. Поэтому $\operatorname{supp} \Theta_M \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in A} (F_\alpha \cap M) \subseteq \operatorname{supp} \Theta$. ■ (Отметим, что соотношение $\operatorname{supp} \Theta_M = (\operatorname{supp} \Theta) \cap M$, вообще говоря, несправедливо. Так, если $\Lambda = [0, 1]$ с обычной топологией, $\mathfrak{A} = \mathcal{B} ([0, 1])$, $\Theta$ равно мере Лебега $m$ и $M = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$, то $\operatorname{supp} m_M = \left[0, \frac{1}{2}\right] \neq M = (\operatorname{supp} m) \cap M$.)

Предположим теперь, что наряду с набором $\Lambda$, $\mathfrak{A}$, $\Theta$ имеется набор $\mathbf{\Lambda}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathbf{\Theta}$ и они связаны друг с другом так, как это описано на стр. 150 (в частности, справедливо равенство (1.21)). Построим изложенным выше способом сужение $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{M}}$ меры $\boldsymbol{\Theta}$ на замкнутое множество $\mathbf{M} \in \mathfrak{A}_1$. *Если $M$ и $\mathbf{M}$ связаны соотношением*

$$M = \mathbf{M} \cap \Lambda, \tag{1.31}$$

*то и наборы $M$, $\mathfrak{A}_M$, $\Theta_M$ и $\mathbf{M}$, $\mathfrak{A}_{\mathbf{M},1}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{M}}$ связаны описанным в п. 7 образом.* В самом деле, $M$ — некоторое множество из $\mathbf{M}$, не входящее, вообще говоря, в $\mathfrak{A}_1$ ($\Lambda$ может не входить в $\mathfrak{A}_1$). Так как $\Lambda$ и $\mathbf{M}$ топологизированы относительной топологией, индуцированной $\boldsymbol{\Lambda}$, то благодаря (1.31) можно считать, что $M$ топологизировано относительной топологией, индуцированной $\mathbf{M}$, $\sigma$-алгебра $\mathfrak{A}_M = \{B' \in \mathfrak{A} \mid B' \subseteq M\}$ может пониматься как совокупность всех множеств вида $B' = \mathbf{B}' \cap M$, где $\mathbf{B}' \in \mathfrak{A}_{\mathbf{M},1} = \{\mathbf{B}' \in \mathfrak{A}_1 \mid \mathbf{B}' \subseteq \mathbf{M}\}$. Формула (1.21) также сохраняется: благодаря этой формуле для $\Theta$ и $\boldsymbol{\Theta}$ и (1.31) имеем

$$\mathfrak{A}_{\mathbf{M},1} \ni \mathbf{B}' \mapsto \boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{M}}(\mathbf{B}') = \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{B}') = \Theta(\mathbf{B}' \cap \Lambda) = \Theta(\mathbf{B}' \cap M) = \Theta_M(\mathbf{B}' \cap M). \blacksquare$$

Таким образом, для мер $\Theta_M$ и $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{M}}$ справедливы леммы 1.2 и 1.3, при этом $\Lambda$, $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ заменяются соответственно на $M$, $\mathbf{M}$ и $\mathfrak{A}_M$, $\mathfrak{A}_{\mathbf{M},1}$.

Применим изложенное к с. р. е. $E$ и к. с. р. е. $\mathbf{E}$ семейства $(A_x)_{x\in X}$ коммутирующих самосопряженных операторов. Теперь $\Lambda = \mathbb{R}^X$, $\mathfrak{A} = \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$, $\Theta = E$ и $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{R}^X$, $\mathfrak{A}_1 = \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$, $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{E}$. Пусть $M \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ $(E(M) > 0)$ — замкнуто, тогда $M = Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$, где $\Delta \subseteq \mathbb{R}^\infty$ — замкнуто. Обозначим замыкание $\Delta$ в $\mathbf{R}^\infty$ через $\boldsymbol{\Delta}$ и положим $\mathbf{M} = \mathbf{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \boldsymbol{\Delta})$. Очевидно, $(\mathbf{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \boldsymbol{\Delta})) \cap \mathbb{R}^X = Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$, т. е. (1.31) выполнено.

Из сказанного вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.5.** *Пусть $(A_x)_{x\in X}$ — семейство коммутирующих самосопряженных операторов, $E$ — его с. р. е., $\mathbf{E}$ — его к. с. р. е. Зафиксируем замкнутое в $\mathbb{R}^X$ множество $M = Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta) \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ $(E(M) > 0)$ и пусть $\mathbf{M} = \mathbf{Ц}(x_1, x_2, \ldots; \boldsymbol{\Delta}) \in Ц_\sigma(\mathbf{R}^X)$, где $\boldsymbol{\Delta}$ — замыкание $\Delta$ в $\mathbf{R}^\infty$. Рассмотрим сужения $E_M$ и $\mathbf{E}_{\mathbf{M}}$, они являются регулярными мерами на $(\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X))_M = \{B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \mid B \subseteq M\}$ и $(\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X))_{\mathbf{M}} = \{\mathbf{B} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X) \mid \mathbf{B} \subseteq \mathbf{M}\}$ соответственно, связанными формулой*

$$(\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X))_{\mathbf{M}} \ni \mathbf{B} \mapsto \mathbf{E}_{\mathbf{M}}(\mathbf{B}) = E_M(\mathbf{B} \cap M). \tag{1.32}$$

*Мера $\mathbf{E}_{\mathbf{M}}$ — правильная, для носителей этих мер справедливы соотношения*

$$\operatorname{supp} E_M \subseteq \operatorname{supp} E,\ \operatorname{supp} \mathbf{E}_{\mathbf{M}} \subseteq \operatorname{supp} \mathbf{E},\ \operatorname{supp} E_M = (\operatorname{supp} \mathbf{E}_{\mathbf{M}}) \cap M. \tag{1.33}$$

Доказательство. Правильность меры $\mathbf{E}_{\mathbf{M}}$ следует из п. 5, II, так как $\mathbf{M}$ — замкнутое множество компакта $\mathbf{R}^X$ и поэтому само является компактом. Соотношения (1.32) и (1.33) являются записанными для нашей ситуации общими соотношениями (1.21), (1.30), (1.22). $\blacksquare$



Справедливо следующее обобщение теоремы 1.4.

**Теорема 1.6.** *Предположим, что выполнены допущения теоремы 1.4. Зафиксируем замкнутое в $R^X$ множество $M \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ $(E(M) > 0)$ и рассмотрим сужение $E_M$ с. р. е. на $M$. Утверждается, что $E_M$ — правильная мера.*

Доказательство. Рассуждения будут заключаться в некотором усовершенствовании доказательства теоремы 1.4 (обозначения п. 8 ниже сохраняются). Пусть $M = Ц(y_1, y_2, \ldots; \Gamma)$. Положим $\mathcal{M} = M \cap \mathcal{R}$, это множество входит в $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$ (см. (1.27)) и замкнуто в топологии $\mathcal{R}$. Рассмотрим сужение $\hat{E}_{\mathcal{M}}$ меры $\hat{E}$ на $\mathcal{M}$ и установим прежде всего правильность $\hat{E}_{\mathcal{M}}$. Пусть $\hat{O} \in (\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R}))_{\mathcal{M}}$ открыто и содержит $\operatorname{supp} \hat{E}_{\mathcal{M}}$. Требуется доказать, что $\hat{E}_{\mathcal{M}}(\hat{O}) = \hat{E}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$.

Множество $\hat{O}$ имеет вид $\hat{O} = Ц(\mathcal{R}; x_1, x_2, \ldots; \Delta)$, где $\Delta$ открыто в $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} R_{x_n}$; можно предполагать, что $X_1 = \{x_1, x_2, \ldots\} \supseteq X_0 \cup \{y_1, y_2, \ldots\}$. Обозначим $\mathcal{M} = Ц(\mathcal{R}; x_1, x_2, \ldots; \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — замкнуто в $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} R_{x_n}$. Произведем разложение $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ пространства $\mathcal{R}$ так, как и в доказательстве теоремы 1.4, но с указанным сейчас $X_1$. Тогда $\hat{E}_{\mathcal{M}}$ можно считать построенным в виде произведения двух коммутирующих мер: меры $\hat{E}_{1,\mathcal{E}}$, равной сужению $\hat{E}_1$ на $\mathcal{E}$, и $\hat{E}_2$. Очевидно, $\mathcal{M} = \mathcal{E} \times \mathcal{R}_2$ и $\hat{E}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) = \hat{E}_{1,\mathcal{E}}(\mathcal{E})\, \hat{E}_2(\mathcal{R}_2) = \hat{E}_{1,\mathcal{E}}(\mathcal{E})$. Для $\hat{E}_{\mathcal{M}}$ сохраняется лемма 1.5 — в этом легко убедиться, повторив ее доказательство. Поэтому, как и ранее, можно заключить, что из включения $\hat{O} = \Delta \times \mathcal{R}_2 \supseteq \operatorname{supp} \hat{E}_{\mathcal{M}}$ вытекает включение $\Delta \supseteq \operatorname{supp} \hat{E}_{1,\mathcal{E}}$. Так как $X_1$ счетно, то мера $\hat{E}_{1,\mathcal{E}}$ правильная, поэтому $\hat{E}_{1,\mathcal{E}}(\Delta) = \hat{E}_{1,\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \hat{E}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$. Таким образом, $\hat{E}_{\mathcal{M}}(\hat{O}) = \hat{E}_{1,\mathcal{E}}(\Delta)\, \hat{E}_2(\mathcal{R}_2) = \hat{E}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$.

Из правильности меры $\hat{E}_{\mathcal{M}}$ и равенства

$$\operatorname{supp} \hat{E}_{\mathcal{M}} = \operatorname{supp} E_M \tag{1.34}$$

(оно будет доказано ниже) теорема следует почти немедленно. Так, пусть $O \in (\mathcal{C}_\sigma(R^X))_M$ открыто в $M$ и содержит $\operatorname{supp} E_M$. Так как топология в $M$ и $\mathcal{R}$ индуцируется топологией $R^X$, а топология в $\mathcal{M}$ — топологией $\mathcal{R}$, то $O \cap \mathcal{M}$ открыто в $\mathcal{M}$. Но $O \cap \mathcal{M} = O \cap \mathcal{R} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$ (см. (1.27)), т. е. $O \cap \mathcal{M} \in (\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R}))_{\mathcal{M}}$ и $O \cap \mathcal{M} \supseteq \operatorname{supp} E_{\mathcal{M}} = \operatorname{supp} \hat{E}_{\mathcal{M}}$ (см. (1.34)). Поэтому в силу доказанной правильности меры $\hat{E}_{\mathcal{M}}$ $\hat{E}_{\mathcal{M}}(O \cap \mathcal{M}) = \hat{E}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$. Согласно конструкции мер $\hat{E}_{\mathcal{M}}$, $\hat{E}$ и $E_M$ можно написать $\hat{E}_{\mathcal{M}}(O \cap \mathcal{M}) = \hat{E}(O \cap \mathcal{M}) = \hat{E}(O \cap \mathcal{R}) = E(O) = E_M(O)$, $\hat{E}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) = E_M(M)$. Из этих соотношений вытекает равенство $E_M(O) = E_M(M)$, что и доказывает правильность $E_M$.

Установим соотношение (1.34). Пусть $F_\alpha \in (\mathcal{C}_\sigma(R^X))_M$ замкнуто в $M$ и таково, что $E_M(F_\alpha) = E_M(M)$. Тогда согласно (1.27) $F_\alpha \cap \mathcal{M} = F_\alpha \cap \mathcal{R} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R})$ (т. е. $F_\alpha \cap \mathcal{M} \in (\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R}))_{\mathcal{M}}$) замкнуто в $\mathcal{M}$ и $\hat{E}_{\mathcal{M}}(F_\alpha \cap \mathcal{M}) = E_M(F_\alpha) = E_M(M) = \hat{E}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$. Поэтому это множество фигурирует при определении $\operatorname{supp} \hat{E}_{\mathcal{M}}$ и можно написать $\operatorname{supp} \hat{E}_{\mathcal{M}} \subseteq F_\alpha \cap \mathcal{M} \subseteq F_\alpha$. Вследствие произвольности $F_\alpha$ отсюда заключаем, что $\operatorname{supp} \hat{E}_{\mathcal{M}} \subseteq \operatorname{supp} E_M$.

Пусть теперь $\hat{F}_\beta \in (\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{R}))_{\mathcal{M}}$ замкнуто в $\mathcal{M}$ и $\hat{E}_{\mathcal{M}}(\hat{F}_\beta) = \hat{E}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$. Так как $\mathcal{M}$ замкнуто в $\mathcal{R}$, то $\hat{F}_\beta$ замкнуто и в $\mathcal{R}$, поэтому $\hat{F}_\beta = Ц(\mathcal{R}; x_1, x_2, \ldots; \Delta)$, где $\Delta$ замкнуто в $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} R_{x_n}$. Следовательно, $F_\beta = Ц(x_1, x_2, \ldots; \Delta)$ замкнуто в $R^X$, входит в $\mathcal{C}_\sigma(R^X)$ и $F_\beta \cap \mathcal{R} = \hat{F}_\beta$. Но $\hat{F}_\beta \subseteq \mathcal{M} \subseteq M$, поэтому последнее соотношение дает $\hat{F}_\beta = F_\beta \cap M \cap \mathcal{R}$. Множество из $M$ $F_\beta \cap M \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ и замкнуто в $M$. Согласно определению $E_M$ и (1.28) $E_M(F_\beta \cap M) = E(F_\beta \cap M) = \hat{E}(\hat{F}_\beta) = \hat{E}_{\mathcal{M}}(\hat{F}_\beta) = \hat{E}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) = E_M(M)$, т. е. оно фигурирует при определении $\operatorname{supp} E_M$. Поэтому $\operatorname{supp} E_M \subseteq F_\beta \cap M$. Но в силу (1.30) и (1.16) $\operatorname{supp} E_M \subseteq \mathcal{R}$, поэтому $\operatorname{supp} E_M \subseteq F_\beta \cap M \cap \mathcal{R} = \hat{F}_\beta$. В силу произвольности $\hat{F}_\beta$ отсюда заключаем, что $\operatorname{supp} E_M \subseteq \operatorname{supp} \hat{E}_{\mathcal{M}}$. Соотношение (1.34) установлено. ■

Подобно доказательству (1.29) легко показать, что если каждый из операторов $A_x$ $(x \in X)$, фигурирующих в теореме 1.5, ограничен, то

$$\operatorname{supp} E_M = \operatorname{supp} \mathbf{E}_M. \tag{1.35}$$

Как теорема 1.5, так и последнее утверждение справедливы и для нормальных операторов.



## 10. МОДИФИЦИРОВАННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЕДИНИЦЫ

В рассуждениях п. 7—9 фигурировали три связи между мерами на двух пространствах, одно из которых вложено во второе: а) связь типа (1.19), (1.21), когда по мере на более узком пространстве определялась мера на более широком; б) связь типа (1.28), когда по мере на более широком пространстве определялась мера на более узком, причем это более узкое пространство не входит в рассматриваемую $\sigma$-алгебру множеств на более широком пространстве; в) связь типа п. 9, когда ситуация такая же, как и в б), но более узкое пространство входит в указанную $\sigma$-алгебру, не являясь, вообще говоря, множеством полной меры.

Связь типа б) будет использована в дальнейшем, поэтому уместно изложить ее в общем виде.

Пусть $\Lambda$ — абстрактное пространство, $\mathfrak{A}$ — некоторая $\sigma$-алгебра его множеств и $\mathfrak{A} \ni B \mapsto E(B)$ — разложение единицы. Зафиксируем некоторое множество $Л \subseteq \Lambda$, не входящее, вообще говоря, в $\mathfrak{A}$, но обладающее тем свойством, что любое $B \in \mathfrak{A}$, содержащее $Л$, является множеством полной меры $E$ (т. е. $E(B) = E(\Lambda) = 1$). О множестве $Л$ будем говорить, что оно имеет полную внешнюю меру $E$.

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{A}(Л)$ всех множеств $\hat{B} \subseteq Л$ таких, что $\hat{B} = B \cap Л$ при некотором $B \in \mathfrak{A}$. Очевидно, $\mathfrak{A}(Л)$ будет некоторой $\sigma$-алгеброй. Определим по $E$ на $\mathfrak{A}(Л)$ операторнозначную функцию множеств $\hat{E}$, полагая

$$\mathfrak{A}(Л) \ni \hat{B} \mapsto \hat{E}(\hat{B}) = E(B), \tag{1.36}$$

где $B \in \mathfrak{A}$ таково, что $B \cap Л = \hat{B}$.

**Теорема 1.7.** *Введение функции множеств $\hat{E}$ посредством* (1.36) *корректно. Эта функция представляет собой разложение единицы на $Л$, которое называется модифицированным разложением единицы, сосредоточенным на $Л$.*

Доказательство. По существу оно содержалось в доказательстве леммы 1.7, однако мы все же приведем соответствующие простые рассуждения. Так, определение (1.36) корректно: если $B_1 \cap Л = B_2 \cap Л$, где $B_1, B_2 \in \mathfrak{A}$, то $E(B_1) = E(B_2)$. В самом деле, $B_1 \setminus B_2, B_2 \setminus B_1 \in \mathfrak{A}$ и $(B_1 \setminus B_2) \cap Л = (B_2 \setminus B_1) \cap Л = \varnothing$, т. е. $B_1 \setminus B_2, B_2 \setminus B_1 \subseteq \Lambda \setminus Л$, поэтому $E(B_1 \setminus B_2) = E(B_2 \setminus B_1) = 0$, откуда $E(B_1) = E(B_2)$.

Функция множеств $\hat{E}$ является разложением единицы на $Л$. В самом деле, $\hat{E}(\hat{B})$ — проектор, $\hat{E}(\varnothing) = 0$, $\hat{E}(Л) = E(\Lambda) = 1$.

Пусть $\hat{B}_j \in \mathfrak{A}(Л)$ взаимно не пересекаются. Выберем $B_j \in \mathfrak{A}$ такими, чтобы $\hat{B}_j = B_j \cap Л$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Положим $C_1 = B_1$, $C_2 = B_2 \setminus B_1$, $C_3 = B_3 \setminus (B_1 \cup B_2), \ldots$; эти множества входят в $\mathfrak{A}$, взаимно не пересекаются и такие, что $C_j \cap Л = \hat{B}_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Абсолютная аддитивность $\hat{E}$ следует из равенства

$$\hat{E}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \hat{B}_j\right) = E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(C_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{E}(\hat{B}_j),$$

ортогональность — из того, что если $\hat{B}', \hat{B}'' \in \mathfrak{A}(Л)$; $B', B'' \in \mathfrak{A}$ такие, что $\hat{B}' = B' \cap Л$, $\hat{B}'' = B'' \cap Л$, то $\hat{E}(\hat{B}' \cap \hat{B}'') = E(B' \cap B'') = E(B')E(B'') = \hat{E}(\hat{B}')\hat{E}(\hat{B}'')$. ■

З а м е ч а н и е. Легко понять, что процедура модификации может быть проведена и для произвольной операторнозначной меры $\Theta$, введенной в п. 5 (при этом то, что $\Lambda$ — топологическое пространство, сейчас можно не предполагать). Модифицированная мера $\hat{\Theta}$ определяется соотношением (1.36), в котором $E$ заменено на $\Theta$; $Л \subseteq \Lambda$ — множество полной внешней меры $\Theta$ (если $\mathfrak{A} \ni B \supseteq Л$, то $\Theta(B) = \Theta(\Lambda)$).

Подобно лемме 1.3 легко выяснить связи между интегралами по мерам $\Theta$ и $\hat{\Theta}$. Так, если $\Lambda \ni \lambda \mapsto F(\lambda) \in \mathbb{C}^1$ — измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$, то, очевидно, $F \restriction Л$ будет измеримой относительно $\mathfrak{A}(Л)$.

**Лемма 1.8.** *Пусть $f \in H$ фиксировано. Функция $F$ суммируема относительно меры $(\Theta(B)f, f)_H$ тогда и только тогда, когда $F \restriction Л$ суммируема относительно $(\hat{\Theta}(\hat{B})f, f)_H$, при этом справедливо равенство*

$$\int_{\Lambda} F(\lambda)\, d(\Theta(\lambda) f, f)_H = \int_{Л} (F \restriction Л)(\lambda)\, d(\hat{\Theta}(\lambda) f, f)_H. \qquad (1.37)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Благодаря конструкции интеграла достаточно установить равенство (1.37) для характеристической функции $\varkappa_B(\lambda)$ множества $B \in \mathfrak{A}$. В этом случае оно означает, что $\Theta(B) = \hat{\Theta}(B \cap Л)$, а такое соотношение выполняется в соответствии с (1.36). ■

В дальнейшем у нас будут фигурировать модификации с. р. е. и к. с. р. е., а также некоторых скалярных мер, с ними связанных. Равенство (1.37) позволит переписать соотношения типа (1.6) и (1.25) в терминах этих модификаций.



## § 2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Если $A$ — самосопряженный оператор с дискретным спектром $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$, то для его разложения единицы $E$ справедливо представление

$$E(\Delta) = \sum_{\lambda_j \in \Delta} P(\lambda_j) \quad (\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)), \qquad (2.1)$$

где $P(\lambda_j)$ — проектор на собственное подпространство, отвечающее $\lambda_j$.

Будет рассматриваться обобщение формулы (2.1) на с. р. е. произвольного семейства $(A_x)_{x \in X}$ коммутирующих самосопряженных или, более того, нормальных операторов, действующих в *сепарабельном* гильбертовом пространстве $H_0$. При этом появляются два существенно новых момента: 1) в связи с возможной непрерывностью спектра сумма в (2.1) переходит в интеграл, а $P(\lambda_j)$ уже не будут проекторами в исходном гильбертовом пространстве (так как $\lambda_j$, вообще говоря, не будет собственным значением), а в обобщенном смысле будут «проектировать» некоторое позитивное пространство в негативное; 2) так как с. р. е. $E$ — мера на пространстве функций $\mathbb{R}^X$ (или $\mathbb{C}^X$), то интеграл, заменяющий (2.1), будет континуальным.

### 1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОПЕРАТОРНОЗНАЧНОЙ МЕРЫ

Докажем теорему типа Радона — Никодима для операторнозначной меры. На этой теореме будет основано построение разложений по обобщенным собственным векторам.

Зафиксируем цепочку

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+, \qquad (2.2)$$

все пространства которой сепарабельны (для этого, разумеется, достаточно, чтобы таким было $H_+$). Напомним (см. гл. 1, § 1, п. 5), что оператор $A: H_+ \to H_-$ называется неотрицательным, если $(Au, u)_{H_0} \geqslant 0$ $(u \in H_+)$; след неотрицательного оператора $A$ по определению равен

$$\text{Сл.}\,(A) = \sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)_{H_0} \leqslant +\infty,$$

где $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $H_+$. Величина Сл. $(A)$ не зависит от выбора такого базиса: если $\mathbf{I}$ — изометрия, связанная с (2.2), то вследствие соотношения $(\alpha, u)_{H_0} = (\mathrm{I}\alpha, u)_{H_+}$ ($\alpha \in H_-$, $u \in H_+$) заключаем, что неотрицательность $A$ эквивалентна обычной неотрицательности $\mathrm{I}A : H_+ \to H_+$ и Сл. $(A) =$ Сл. $(\mathrm{I}A)$ .

Пусть $\Lambda$ — абстрактное пространство, в которое необязательно введена топология; $\mathfrak{A}$ — некоторая $\sigma$-алгебра множеств из $\Lambda$. Функцию $\mathfrak{A} \ni B \mapsto \Theta(B)$ будем называть операторнозначной мерой с конечным следом, если выполнены следующие требования:

$\alpha$) $\Theta(B)$ — неотрицательный оператор из $H_+$ в $H_-$, $\Theta(\varnothing) = 0$, Сл. $(\Theta(\Lambda)) < \infty$;

$\beta$) выполняется свойство абсолютной аддитивности: если $B_j \in \mathfrak{A}$ ($j = 1, 2, \ldots$) взаимно не пересекаются, то $\Theta\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \Theta(B_j)$, где ряд сходится в слабом смысле.

Из аддитивности $\Theta$ и ее неотрицательности следует монотонность: если $B' \subseteq B''$, то $\Theta(B') \leqslant \Theta(B'')$. Поэтому $\Theta(B) \leqslant \Theta(\Lambda)$ и Сл. $(\Theta(B)) \leqslant$ Сл. $(\Theta(\Lambda))$ $(B \in \mathfrak{A})$.

Введем числовую неотрицательную функцию множеств $\mathfrak{A} \ni B \mapsto \rho(B) =$ Сл. $(\Theta(B))$. Если $B_j \in \mathfrak{A}$ ($j = 1, 2, \ldots$) взаимно не пересекаются, то вследствие $\beta$) и неотрицательности слагаемых

$$\rho\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \text{Сл.}\left(\Theta\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right) = \text{Сл.}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \Theta(B_j)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}\Theta(B_j)\right)e_k, e_k\right)_{H_0} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\Theta(B_j)e_k, e_k)_{H_0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(\Theta(B_j)e_k, e_k)_{H_0} = \sum_{j=1}^{\infty}\text{Сл.}(\Theta(B_j)) = \sum_{j=1}^{\infty}\rho(B_j).$$

Таким образом, $\mathfrak{A} \ni B \mapsto \rho(B)$ является числовой неотрицательной конечной мерой; меру $\rho$ будем называть следовой мерой для меры $\Theta$.

**Теорема 2.1.** *Операторнозначную меру $\Theta$ с конечным следом можно продифференцировать по ее следовой мере $\rho$: это означает, что существует слабо измеримая относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{A}$ определенная $\rho$-почти для всех $\lambda \in \Lambda$ операторнозначная функция $\Psi(\lambda) : H_+ \to H_-$, $\Psi(\lambda) \geqslant 0$, $|\Psi(\lambda)| \leqslant$ Сл. $(\Psi(\lambda)) = 1$ такая, что*

$$\Theta(B) = \int_B \Psi(\lambda)\, d\rho(\lambda) \quad (B \in \mathfrak{A}) \tag{2.3}$$

*(интеграл сходится по гильбертовой норме). Функция $\Psi(\lambda)$ определяется однозначно с точностью до ее значений на множестве нулевой $\rho$-меры.*

Доказательство. Пусть $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — фиксированный ортонормированный базис в $H_+$; $\rho(B) =$ Сл. $(\Theta(B))$ $(B \in \mathfrak{A})$ — следовая мера, относительно которой ниже будут рассматриваться понятия почти везде и т. п. Для любых $u, v \in H_+$ числовая комплекснозначная мера $\mathfrak{A} \ni B \mapsto (\Theta(B)u, v)_{H_0}$ абсолютно непрерывна относительно $\rho$: если $\rho(B) = 0$, то и $|(\Theta(B)e_j, e_k)_{H_0}|^2 \leqslant (\Theta(B)e_j, e_j)_{H_0}(\Theta(B)e_k, e_k)_{H_0} \leqslant \rho^2(B) = 0$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$, т. е. $\Theta(B) = 0$. Поэтому по теореме Радона — Никодима справедливо представление



$$(\Theta(B)u, v)_{H_0} = \int_B \Psi(\lambda; u, v)\, d\rho(\lambda) \quad (B \in \mathfrak{A}), \tag{2.4}$$

где функция $\Psi(\lambda; u, v)$ (производная Радона — Никодима) определена на множестве $\Lambda_{u,v} \subseteq \Lambda$ полной меры, измерима относительно $\mathfrak{A}$ и суммируема; при $u = v$ она неотрицательна. Обозначим через $L$ линейную оболочку векторов $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ с рациональными комплексными коэффициентами; $L$ плотно в $H_+$. Так как $L$ счетно, то множество $\bigcap_{u,v \in L} \Lambda_{u,v}$ также полной меры; для $\lambda$ из него определены все функции $\Psi(\lambda; u, v)$ $(u, v \in L)$ и $\Psi(\lambda; u, v) \geqslant 0$ $(u \in L)$.

Как известно, производная Радона — Никодима определяется однозначно с точностью до значений на множестве меры нуль. Поэтому из того, что левая часть в (2.4) является билинейной формой относительно $u, v$, следует, что подобной формой будет и $\Psi(\lambda; u, v)$. Точнее, существует множество полной меры $M \subseteq \bigcap_{u,v \in L} \Lambda_{u,v}$ такое, что для $\lambda \in M$ $\Psi(\lambda; \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \alpha_1\bar{\beta}_1\Psi(\lambda; u_1, v_1) + \alpha_1\bar{\beta}_2\Psi(\lambda; u_1, v_2) + \alpha_2\bar{\beta}_1\Psi(\lambda; u_2, v_1) + \alpha_2\bar{\beta}_2\Psi(\lambda; u_2, v_2)$ при любых $u_1, u_2, v_1, v_2 \in L$ и комплексных рациональных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Для доказательства, используя билинейность $(\Theta(B)u, v)_{H_0}$ и произвольность $B \in \mathfrak{A}$ в (2.4), сперва заключаем, что указанное равенство справедливо для $\lambda$ из множества полной меры $M_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,u_1,u_2,v_1,v_2} \subseteq \bigcap_{u,v \in L} \Lambda_{u,v}$, а затем в качестве $M$ берем пересечение (счетное) всевозможных таких множеств. Кроме того, для таких $\lambda$, как отмечалось, $\Psi(\lambda; u, u) \geqslant 0$ $(u \in L)$. Из подобной билинейности и неотрицательности обычным образом следует неравенство Коши — Буняковского

$$|\Psi(\lambda; u, v)|^2 \leqslant \Psi(\lambda; u, u)\Psi(\lambda; v, v) \quad (\lambda \in M;\ u, v \in L). \tag{2.5}$$

При помощи (2.4) и теоремы Фубини для любого $B \in \mathfrak{A}$ получаем

$$\rho(B) = \text{Сл.}(\Theta(B)) = \sum_{j=1}^{\infty}(\Theta(B)e_j, e_j)_{H_0} = \sum_{j=1}^{\infty}\int_B \Psi(\lambda; e_j, e_j)\, d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_B\left(\sum_{j=1}^{\infty}\Psi(\lambda; e_j, e_j)\right)d\rho(\lambda),$$

откуда следует, что почти для всех $\lambda \in M$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Psi(\lambda; e_j, e_j) = 1. \tag{2.6}$$

Несколько уменьшая, если понадобится, множество $M$, можно считать, что (2.6) справедливо для всех $\lambda \in M$. Из (2.5) и (2.6) заключаем, что

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |\Psi(\lambda;\ e_j,\ e_k)|^2 \leqslant \sum_{j,k=1}^{\infty} \Psi(\lambda;\ e_j,\ e_j)\,\Psi(\lambda;\ e_k,\ e_k) = 1 \quad (\lambda \in M). \tag{2.7}$$

Зафиксируем $\lambda \in M$ и обозначим через $A(\lambda)$ оператор в $H_+$, отвечающий матрице $(a_{jk}(\lambda))_{j,k=1}^{\infty} = (\Psi(\lambda; e_k, e_j))_{j,k=1}^{\infty}$ в базисе $(e_j)_{j=1}^{\infty}$.

В силу соотношения (2.7) этот оператор корректно определен и является оператором Гильберта — Шмидта, причем $|A(\lambda)| \leqslant 1$. Из измеримости каждой функции $M \ni \lambda \mapsto \Psi(\lambda;\ e_k,\ e_j)$ $(j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots)$ следует, что операторнозначная функция $M \ni \lambda \mapsto A(\lambda)$ слабо измерима. Введем непрерывный оператор $\Psi(\lambda) = \mathbf{I}^{-1}A(\lambda) : H_+ \to H_-$ и покажем, что он будет искомым.

Действительно, для $u = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \in L$

$$(\Psi(\lambda)\,u,\ u)_{H_0} = (\mathbf{I}^{-1}A(\lambda)\,u,\ u)_{H_0} = (A(\lambda)\,u,\ u)_{H_+} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{\infty} \Psi(\lambda;\ e_k,\ e_j)\ \ \alpha_k\bar{\alpha}_j = \Psi(\lambda;\ u,\ u) \geqslant 0.$$

При помощи предельного перехода заключаем, что это равенство сохраняется и для произвольного $u \in H_+$, т. е. $\Psi(\lambda) \geqslant 0$. Далее, Сл. $(\Psi(\lambda))$ = Сл. $(A(\lambda)) = 1$ согласно (2.6). Учитывая, что

$$(\Psi(\lambda)\,e_k,\ e_j)_{H_0} = (\mathbf{I}^{-1}A(\lambda)\,e_k,\ e_j)_{H_0} = (A(\lambda)\,e_k,\ e_j)_{H_+} = \Psi(\lambda;\ e_k,\ e_j),$$

и соотношение (2.4), получаем при произвольном $B \in \mathfrak{A}$

$$\Big(\Big(\int_B \Psi(\lambda)\,d\rho(\lambda)\,e_k, e_j\Big)\Big)_{H_0} = \int_B (\Psi(\lambda)\,e_k,\ e_j)_{H_0} d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_B \Psi(\lambda;\ e_k,\ e_j)\,d\rho(\lambda) = (\Theta(B)\,e_k,\ e_j)_{H_0} \quad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

откуда следует равенство (2.3). Разумеется, из слабой измеримости $A(\lambda)$ вытекает такая же измеримость и $\Psi(\lambda)$.

Наконец, установим единственность $\Psi(\lambda)$. Пусть существует наряду с $\Psi(\lambda)$ операторнозначная функция такого же типа $\Psi_1(\lambda)$, для которой $\int_B \Psi(\lambda)\,dp(\lambda) = \int_B \Psi_1(\lambda)\,d\rho(\lambda)$ $(B \in \mathfrak{A})$. Отсюда следует, что для каждых $u,\ v \in L$ $(\Psi(\lambda)\,u,\ v)_{H_0} = (\Psi_1(\lambda)\,u,\ v)_{H_0}$ для $\lambda$ из множества $\Lambda_{1;u,v} \subseteq \Lambda$ полной меры. Но тогда для $\lambda$ из множества полной меры $M_1 = \bigcap_{u,v\in L} \Lambda_{1;u,v}$ $(\Psi(\lambda)\,u,\ v)_{H_0} = (\Psi_1(\lambda)u,\ v)_{H_0}$ при любых $u,\ v \in L$. Отсюда и из непрерывности операторов $\Psi(\lambda)$, $\Psi_1(\lambda)$ при каждом фиксированном $\lambda \in M_1$ заключаем, что $\Psi(\lambda) = \Psi_1(\lambda)$ $(\lambda \in M_1)$. ■



В том случае, когда, например, $\Lambda = \mathbb{R}^p$ и $\mathfrak{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$, приведенное доказательство несколько упрощается, кроме того, для $\Psi(\lambda)$ можно получить одну полезную формулу. Именно, напомним, что если $\omega$ и $\rho$ — две числовые меры, определенные на $\mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$, причем $\rho$ неотрицательна, а $\omega$ абсолютно непрерывна относительно $\rho$, то производную Радона — Никодима $\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)(\lambda)$ можно получить при помощи следующей формулы, верной $\rho$-почти для всех $\lambda$:

$$\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)(\lambda) = \lim_{\Delta_n \to 0} \frac{\omega(\Delta_n)}{\rho(\Delta_n)}. \tag{2.8}$$

Здесь $\Delta_n$ — прямоугольник $n$-го разбиения пространства $\mathbb{R}^p$ на прямоугольники вида $\times_{j=1}^{p} [\alpha_j,\ \beta_j)$, при этом при $n \to \infty$ диаметры этих прямоугольников должны стремиться к нулю; $\Delta_n \to \lambda$ означает, что берется предел до последовательности прямоугольников $\Delta_n \ni \lambda$, стягивающихся к $\lambda$. (На применении формулы типа (2.8), верной в более общих ситуациях (Гихман, Скороход [2, гл. 2, § 2]), мы останавливаться не будем.)

Для указанных $\Lambda$ и $\mathfrak{A}$ доказательство теоремы 2.1 можно проводить следующим образом. Как и ранее, получаем представление (2.4). Применяя формулу (2.8), заключаем, что $\Psi(\lambda;\ u,\ v) = \lim_{\Delta_n \to \lambda} \rho^{-1}(\Delta_n)\,(\Theta(\Delta_n)\,u,\ v)_{H_0}$ для $\lambda$ из множества полной меры $\Lambda_{2;u,v} \subseteq \Lambda$. Пусть $L$ — произвольное счетное множество, плотное в $H_+$ и содержащее базис $(e_j)_{j=1}^{\infty}$. Тогда последнее равенство справедливо для всех $\lambda$ из множества полной меры $M_2 = \bigcap_{u,v\in L} \Lambda_{2;u,v}$ и любых $u,\ v \in L$. Теперь легко видеть, что в смысле слабой сходимости операторов из $H_+$ в $H_-$ для $\lambda \in M_2$ существует предел

$$\lim_{\Delta_n \to \lambda} \rho^{-1}(\Delta_n)\,\Theta(\Delta_n). \tag{2.9}$$

Действительно, мы установили существование предела $\lim_{\Delta_n \to \lambda} (\rho^{-1}(\Delta_n)\,\Theta(\Delta_n)\,u,\ v)_{H_0}$, поэтому для существования предела (2.9) достаточно убедиться, что $\|\rho^{-1}(\Delta_n)\,\Theta(\Delta_n)\| \leqslant c$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$. Но $\|\rho^{-1}(\Delta_n)\,\Theta(\Delta_n)\| \leqslant |\rho^{-1}(\Delta_n)\,\Theta(\Delta_n)| \leqslant$ Сл. $(\rho^{-1}(\Delta_n)\,\Theta(\Delta_n)) = 1$, поэтому предел (2.9) существует; обозначим его через $\Psi(\lambda) : H_+ \to H_-$. Он неотрицателен, так как неотрицательны $\rho^{-1}(\Delta_n)\,\Theta(\Delta_n)$. Очевидно, $(\Psi(\lambda)\,u,\ v)_{H_0} = \Psi(\lambda;\ u, v)$ $(u,\ v \in L)$. Далее, при помощи (2.4) и теоремы Фубини для любого $B \in \mathfrak{A}$

$$\rho(B) = \text{Сл.}\ (\Theta(B)) = \sum_{j=1}^{\infty} (\Theta(B) e_j, e_j)_{H_0} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_B \Psi(\lambda;\ e_j, e_j)\, d\rho(\lambda) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_B (\Psi(\lambda) e_j, e_j)_{H_0} d\rho(\lambda) = \int_B \sum_{j=1}^{\infty} (\Psi(\lambda) e_j, e_j)_{H_0} d\rho(\lambda),$$

откуда следует, что Сл. $(\Psi(\lambda)) = 1$ почти для всех $\lambda \in M_2$. Ясно также, что для построенной $\Psi(\lambda)$ выполняется равенство (2.3).

Итак, основная часть теоремы 2.1 в рассматриваемом частном случае доказана. Мы установили также, что $\rho$-почти для всех $\lambda$ в смысле слабой сходимости операторов

$$\Psi(\lambda) = \lim_{\Delta_n \to \lambda} \rho^{-1}(\Delta_n)\, \Theta(\Delta_n). \tag{2.10}$$

Сделаем еще два замечания, касающиеся теоремы 2.1.

1. Можно рассматривать операторнозначную меру с $\sigma$-конечным следом. По определению это означает, что выполняются условия 1) и 2), однако вместо требования Сл. $(\Theta\ (\Lambda)) < \infty$ налагается более слабое ограничение: существует последовательность $(\Lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, $\Lambda_k \in \mathfrak{A}$, такая, что $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \ldots$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Lambda_k = \Lambda$ и Сл. $(\Theta(\Lambda_k)) < \infty$ при каждом $k = 1, 2, \ldots$ Для такой операторнозначной меры формулировка и доказательство теоремы 2.1 сохраняются, только следовая мера $\rho$ в этом случае будет не конечной, а $\sigma$-конечной, и представление (2.3) для $\Theta(B)$ справедливо для каждого $B \in \mathfrak{A}$, входящего в некоторое $\Lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

2. Теорему 2.1 можно по формулировке приблизить к обычной теореме Радона — Никодима. Именно, пусть задана операторнозначная мера $\mathfrak{A} \ni B \mapsto \Theta(B)$ с $\sigma$-конечным следом и некоторая $\sigma$-конечная числовая неотрицательная мера $\mathfrak{A} \ni B \mapsto \tau(B)$. Будем говорить, что $\Theta$ абсолютно непрерывна относительно $\tau$, если из того, что $\tau(B) = 0$, следует, что и $\Theta(B) = 0$. Тогда справедливо представление

$$\Theta(B) = \int_B \left(\frac{d\Theta}{d\tau}\right)(\lambda)\, d\tau(\lambda) \quad (B \in \mathfrak{A};\quad B \subseteq \Lambda_k;\quad k = 1, 2, \ldots), \tag{2.11}$$

где $\left(\frac{d\Theta}{d\tau}\right)(\lambda)$ — определенная $\tau$-почти для всех $\lambda$ операторнозначная функция, значениями которой служат неотрицательные операторы из $H_+$ в $H_-$, каждый из которых имеет конечный след, суммируемый относительно $\tau$ по $\Lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Для доказательства этого факта надо заметить, что $\rho(B) =$ Сл. $(\Theta(B))$ абсолютно непрерывна относительно $\tau$, записать представление (2.3) для $\Theta(B)$ и заменить в этой формуле $d\rho(\lambda)$ на $\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)(\lambda)\, d\tau(\lambda)$. Отметим также, что $\rho$ абсолютно непрерывна относительно $\Theta$: если для $B \in \mathfrak{A}$ $\Theta(B) = 0$, то и $\rho(B) = 0$.



## 2. ПОНЯТИЕ ОБОБЩЕННОГО СОБСТВЕННОГО ВЕКТОРА

Рассмотрим цепочку (2.2), оснащающую пространство $H_0$. Пусть $A$ — некоторый самосопряженный оператор, действующий в $H_0$. Будем говорить, что оператор $A$ допускает продолжение оснащения (2.2), если существует линейное топологическое сепарабельное пространство $D \subseteq H_+$ (включение топологическое), плотное в $H_+$, входящее в $\mathfrak{D}(A)$ и переводящееся оператором $A$ непрерывно в $H_+$. Под обобщенным собственным вектором $\varphi$ оператора $A$, отвечающим собственному значению $\lambda$, понимается вектор $\varphi \in H_-$ такой, что

$$(\varphi, Au)_{H_0} = (\lambda\varphi, u)_{H_0} \quad (u \in D). \tag{2.12}$$

Разумеется, если дополнительно известно, что вектор $\varphi$ — обычный вектор из $\mathfrak{D}(A)$, то он будет удовлетворять равенству $A\varphi = \lambda\varphi$, т. е. будет обычным собственным вектором: для доказательства нужно перебросить в (2.12) $A$ на $\varphi$ и воспользоваться плотностью $D$ в $H_0$. Если известно лишь, что $\varphi$ — обычный вектор, то из (2.12) следует, что $\varphi \in \mathfrak{D}((A \upharpoonright D)^*) \supseteq \mathfrak{D}(A)$ и $(A \upharpoonright D)^*\varphi = \lambda\varphi$ ($(A \upharpoonright D)^*$ и $A^* = A$ могут не совпадать). *В общем случае обобщенный собственный вектор $\varphi$ является обычным собственным вектором с собственным значением $\lambda$ некоторого расширения $\hat{A}$ оператора $A$.* Действительно, рассмотрим цепочку

$$D' \supseteq H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq D. \tag{2.13}$$

Так как $A \upharpoonright D : D \to H_+$ непрерывно, то существует сопряженный оператор $(A \upharpoonright D)^+$, действующий непрерывно из $H_- = (H_+)'$ в $D'$ и задающийся равенством $((A \upharpoonright D)^+\alpha)(u) = \alpha\ (Au) = (\alpha,\ Au)_{H_0}$ $(\alpha \in H_-,\ u \in D)$. Положим $\hat{A} = (A \upharpoonright D)^+$. Из этого определения и (2.12) следует, что $\hat{A}\varphi = \lambda\varphi$. Далее, если $f \in \mathfrak{D}(A)$, то $(\hat{A}f)(u) = (f, Au)_{H_0} = (Af, u)_{H_0}$ $(u \in D)$, откуда $\hat{A} \supseteq A$. ■

**Пример.** Пусть $H_0 = L_2((a, b))$, где $(a, b)$ — конечный интервал,

$$\mathfrak{D}(A') = \{f \in C^\infty([a, b]) \mid f(a) = f(b) = 0\} \ni f(x) \mapsto -f''(x) = (A'f)(x).$$

Хорошо известно, что этот оператор существенно самосопряжен, его замыкание $A = \tilde{A}'$ действует по тому же закону на $\mathfrak{D}(A) = \{f \in W_2^2((a, b)) \mid f(a) = f(b) = 0\}$. Рассмотрим в качестве цепочки (2.2), оснащающей $L_2((a, b))$, цепочку

$$W_2^{-1}((a, b)) \supseteq L_2((a, b)) \supseteq W_2^1((a, b)). \tag{2.14}$$

Продолжим оснащение (2.14), например, так. Положим $D = C_0^\infty((a, b))$, топологизируя $C_0^\infty((a, b))$ как $\operatorname{pr}\lim\limits_{\tau \in \{0, 1, \ldots\}} C_0^\tau((a, b))$.

Очевидно, все условия на $D$ будут выполнены. Под обобщенным собственным вектором, отвечающим $\lambda$, понимается элемент $\varphi \in W_2^{-1}((a, b))$ такой, что

$$(\varphi, -u'')_{L_2((a,b))} = (\lambda\varphi, u)_{L_2((a,b))} \tag{2.15}$$

для всех $u \in C_0^\infty((a, b))$.

Можно продолжение оснащения выбрать более тонким образом. А именно, положим $D = \{u \in W_2^3((a, b)) \mid u(a) = u(b) = 0\}$ и топологизируем его как подпространство $W_2^3((a, b))$; по-прежнему все условия на $D$ будут выполнены. Обобщенный собственный вектор удовлетворяет (2.15) для всех введенных $u$.

Удачный выбор $D$ существен для выяснения характера обобщенных собственных векторов. Так, из равенства (2.15), выполненного для $u \in C_0^\infty((a, b))$, можно заключить лишь, что $\varphi \in C^\infty([a, b])$ и $-\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$, а из этого равенства, выполненного для более широкого множества $\{u \in W_2^3((a, b)) \mid u(a) = u(b) = 0\}$,— что $\varphi \in C^\infty([a, b])$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ и $-\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$, т. е. $\varphi \in \mathfrak{D}(A)$ и является обычным собственным вектором (см., напр.: Березанский [3, гл. 6, § 5]).

Понятие обобщенного собственного вектора легко переносится на случай любого оператора $A$ (с плотной областью определения), действующего в $H_0$, и на семейства таких операторов. Приведем сразу общее определение. Пусть $(A_x)_{x\in X}$ — произвольное семейство операторов с плотными областями определения, действующих в $H_0$. Будем говорить, что это семейство допускает совместное продолжение оснащения (2.2), если существует линейное топологическое сепарабельное пространство $D \subseteq H_+$ (включение топологическое), плотное в $H_+$, входящее в $\bigcap_{x\in X} \mathfrak{D}(A_x^*)$ и переводящееся каждым оператором $A_x^*$ непрерывно в $H_+$. Под совместным обобщенным собственным вектором $\varphi(\lambda(\cdot))$ семейства $(A_x)_{x\in X}$, отвечающим собственному значению $\lambda(\cdot) \in \mathbb{C}^X$, понимается вектор $\varphi(\lambda(\cdot)) \in H_-$ такой, что для каждого $x \in X$

$$(\varphi(\lambda(\cdot)), A_x^* u)_{H_0} = (\lambda(x)\varphi(\lambda(\cdot)), u)_{H_0} \quad (u \in D) \tag{2.16}$$

(подчеркнем, что здесь и далее под собственным значением понимается *функция* на множестве индексов $X$). В случае семейства самосопряженных операторов в (2.16), разумеется, $A_x^*$ заменяется на $A_x$.

Если $A$ — нормальный оператор и $\varphi$ — его обычный собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda$, то $\varphi$ будет собственным вектором и оператора $A^*$ с собственным значением $\bar{\lambda}$. В случае обобщенных собственных векторов и семейства $(A_x)_{x\in X}$ нормальных операторов естественно ожидать аналогичной ситуации. Для того чтобы ее сформулировать, нужно предположить, что и семейство



операторов $(A_x^*)_{x\in X}$ допускает совместное продолжение оснащения (2.2) с тем же $D$. Тогда желательно доказать, что если $\varphi(\lambda(\cdot))$ — совместный обобщенный собственный вектор семейства $(A_x)_{x\in X}$, отвечающий собственному значению $\lambda(\cdot)$, то наряду с (2.16) будет выполняться для каждого $x \in X$ и соотношение

$$(\varphi(\lambda(\cdot)), A_x u)_{H_0} = (\overline{\lambda(x)}\varphi(\lambda(\cdot)), u)_{H_0} \quad (u \in D), \tag{2.17}$$

т. е. $\varphi(\lambda(\cdot))$ будет совместным обобщенным собственным вектором и семейства $(A_x^*)_{x\in X}$, отвечающим собственному значению $\overline{\lambda(\cdot)}$.

Далее мы убедимся, что такая картина часто будет иметь место. В случае нормальных операторов $A_x$, если противное не будет оговорено, высказывание «семейство $(A_x)_{x\in X}$ допускает совместное продолжение оснащения (2.2) с пространством $D$» означает, что и семейство $(A_x^*)_{x\in X}$ обладает этим свойством с тем же $D$. Если такой оговорки не сделать, то ряд последующих результатов для нормальных операторов (например, изложенных в п. 5—9) сохраняется лишь в той части, которая касается собственного значения $\lambda(\cdot)$.

Заметим, что самосопряженный оператор может иметь обобщенные собственные векторы, отвечающие и невещественному $\lambda$ — все зависит от выбора $D$ и тем самым расширения $\hat{A}$ (аналогичная ситуация «расширения спектра» будет иметь место и в случае общего $A$). Так, если в приведенном выше примере положить $D = C_0^\infty((a, b))$, то любое решение уравнения $-\varphi''(x) = z\varphi(x)$ $(x \in (a, b))$ с $z \in \mathbb{C}^1$ будет удовлетворять (2.15), поэтому будет обобщенным собственным вектором, отвечающим $\lambda = z$. При втором выборе $D$ такой ситуации, разумеется, уже не будет.

## 3. ПОНЯТИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ МЕРЫ И ПРОИЗВОДНАЯ ПО НЕЙ

Пусть $(A_x)_{x\in X}$ — семейство коммутирующих самосопряженных операторов, действующих в пространстве $H_0$; $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto E(B)$ — соответствующее с. р. е. Для получения формулы типа (2.1) меру $E$ в соответствии с п. 1 желательно продифференцировать по некоторой подходящей скалярной мере $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto \tau(B)$. Тогда

$$E(B) = \int_B P(\lambda(\cdot))\, d\tau(\lambda(\cdot)) \quad (B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)),$$

где $P(\lambda(\cdot))$ — соответствующая производная Радона—Никодима $\left(\frac{dE}{d\tau}\right)(\lambda(\cdot))$ (в (2.1) можно считать $\tau$ сосредоточенной в точках $\lambda_j$ и $\tau(\{\lambda_j\}) = 1$; $j = 1, 2, \ldots$). Однако даже в простейшем случае одного оператора $A$ такая производная, как правило, не существует, и поэтому записать указанную формулу с проекторами $P(\lambda(\cdot))$, действующими в $H_0$, нельзя. Выход из этого положения заключается в следующем. Рассмотрим некоторое оснащение пространства $H_0$

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \qquad (2.18)$$

и введем операторнозначную меру $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto \Theta(B) = O^+E(B)O$, где $O$ — оператор вложения $H_+ \to H_0$, а $O^+$ — сопряженный к нему (относительно $H_0$) оператор вложения $H_0 \to H_-$. Если $O$ квазиядерный, то меру $\Theta$ уже можно дифференцировать по ее следу и формула (2.3) приводит к соотношению, заменяющему (2.17).

Изложим реализацию этой идеи для произвольного семейства $(E_x)_{x\in X}$ коммутирующих разложений единицы $\mathcal{B}(R) \ni \Delta \mapsto E_x(\Delta)$, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $H_0$; $R$, как обычно, метрическое сепарабельное локально компактное пространство, $E$ — соответствующее с. р. е. Зафиксируем оснащение (2.18).

**Лемма 2.1.** *Если вложение $O: H_+ \to H_0$ квазиядерно, то функция множеств*

$$\mathcal{C}_\sigma(R^X) \ni B \mapsto \Theta(B) = O^+E(B)O \qquad (2.19)$$

*является операторнозначной мерой с конечным следом.*

Сперва отметим следующий простой факт: *если $A: H_0 \to H_0$ неотрицателен, то $O^+AO: H_+ \to H_-$ также неотрицателен и*

$$\text{Сл. } (O^+AO) \leqslant \|A\| |O|^2. \qquad (2.20)$$

Действительно, для $u \in H_+$ имеем $(O^+AOu, u)_{H_0} = (AOu, Ou)_{H_0} \geqslant 0$, т. е. $O^+AO \geqslant 0$. Далее, пусть $(e_j)_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $H_+$, тогда

$$\text{Сл. } (O^+AO) = \sum_{j=1}^\infty (O^+AOe_j, e_j)_{H_0} = \sum_{j=1}^\infty (AOe_j, Oe_j)_{H_0} \leqslant$$

$$\leqslant \|A\| \sum_{j=1}^\infty \|Oe_j\|_{H_0}^2 = \|A\| |O|^2. \blacksquare$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы. Из сказанного вытекает, что $\Theta(B) = O^+E(B)O \geqslant 0$ $(B \in \mathcal{C}_\sigma(R^X))$ и Сл. $(\Theta(R^X)) \leqslant \|E(R^X)\| |O|^2 < \infty$ (см. (2.20)); разумеется, $\Theta(\varnothing) = 0$. Установим абсолютную аддитивность. Пусть $B_j \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и не пересекаются. Тогда $E\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) = \sum_{j=1}^\infty E(B_j)$ в смысле сильной сходимости, откуда следует, что

$$\Theta\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) = O^+\left(E\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right)\right)O = O^+\left(\sum_{j=1}^\infty E(B_j)\right)O = \sum_{j=1}^\infty \Theta(B_j)$$

даже в смысле сильной сходимости. $\blacksquare$



Введем для меры (2.19) ее следовую меру $\mathcal{C}_\sigma(R^X) \ni B \mapsto \rho(B) =$ = Сл. $(\Theta(B))$ = Сл. $(O^+E(B)O)$; $\rho$ называется спектральной мерой семейства $(E_x)_{x\in X}$. Так как $R^X$ — регулярное топологическое пространство, то можно говорить о регулярности $\rho$, ее носителе и т. п. Ясно, что мера $E$ абсолютно непрерывна относительно $\rho$, и наоборот, $\rho$ абсолютно непрерывна относительно $E$.

**Теорема 2.2.** *Спектральная мера семейства $(E_x)_{x\in X}$ всегда регулярна. Справедливо равенство*

$$\operatorname{supp} \rho = \operatorname{supp} E, \qquad (2.21)$$

*где $E$ — соответствующее с. р. е. Мера $\rho$ правильна тогда и только тогда, когда $E$ правильна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим регулярность $\rho$. Достаточно доказать, что для любого $B \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ и $\varepsilon > 0$ найдется открытое $U \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$, содержащее $B$ и такое, что $\rho(U \setminus B) < \varepsilon$. Пусть $(e_j)_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $H_+$. Так как $\sum_{j=1}^\infty \|Oe_j\|_{H_0}^2 = |O|^2 < \infty$, то можно подобрать $n = 1, 2, \ldots$ столь большим, чтобы $\sum_{j=n+1}^\infty \|Oe_j\|_{H_0}^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксируем такое $n$. Мера $E$ регулярна, поэтому для каждого $j = 1, \ldots, n$ можно подобрать открытое $U_j \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$, содержащее $B$ и такое, чтобы $(E(U_j \setminus B)Oe_j, Oe_j)_{H_0} < \frac{\varepsilon}{2n}$ (см. (1.12)). Тогда $U = \bigcap_{j=1}^n U_j \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ открыто, содержит $B$ и

$$(E(U\setminus B)Oe_j, Oe_j)_{H_0} \leqslant (E(U_j \setminus B)Oe_j, Oe_j)_{H_0} < \frac{\varepsilon}{2n} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Учитывая эти оценки, получим

$$\rho(U \setminus B) = \text{Сл. } (O^+E(U \setminus B)O) = \sum_{j=1}^\infty (O^+E(U \setminus B)Oe_j, e_j)_{H_0} =$$

$$= \sum_{j=1}^n (E(U \setminus B)Oe_j, Oe_j)_{H_0} + \sum_{j=n+1}^\infty (E(U \setminus B)Oe_j, Oe_j)_{H_0} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n (E(U \setminus B)Oe_j, Oe_j)_{H_0} + \sum_{j=n+1}^\infty \|Oe_j\|_{H_0}^2 < \varepsilon.$$

Регулярность $\rho$ доказана.

Равенство (2.21) очевидно: благодаря абсолютной непрерывности мер $E$ и $\rho$ друг относительно друга всякое замкнутое множество $F \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ полной меры $E$ будет иметь полную меру $\rho$, и наоборот, поэтому пересечение всех таких множеств будет одновременно носителем мер $E$ и $\rho$.

Последнее утверждение теоремы также следует из равенства (2.21) и абсолютной непрерывности мер $E$ и $\rho$ друг относительно друга. ■

Из леммы 2.1 и теоремы 2.1 непосредственно вытекает следующая существенная для дальнейшего теорема.

**Теорема 2.3.** *Пусть $\mathscr{C}_\sigma(R^X) \ni B \mapsto E(B)$ — с. р. е. семейства $(E_x)_{x\in X}$ коммутирующих разложений единицы, действующих в пространстве $H_0$. Рассмотрим оснащение* (2.18) *этого пространства такое, что вложение $O: H_+ \to H_0$ квазиядерно. Пусть $\mathscr{C}_\sigma(R^X) \ni B \mapsto \rho(B)$ — соответствующая спектральная мера. Тогда справедливо представление*

$$O^+E(B)O = \int_B P(\lambda(\cdot))\,d\rho(\lambda(\cdot)) \quad (B\in\mathscr{C}_\sigma(R^X)), \tag{2.22}$$

*где $R^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto P(\lambda(\cdot))$ — слабо измеримая относительно $\mathscr{C}_\sigma(R^X)$ определенная $\rho$-почти для всех $\lambda(\cdot)$ операторнозначная функция, значениями которой служат неотрицательные операторы из $H_+$ в $H_-$ такие, что $|P(\lambda(\cdot))| \leqslant$ Сл. $(P(\lambda(\cdot))) = 1$; интеграл* (2.22) *сходится по гильбертовой норме.*

Оператор $P(\lambda(\cdot))$ называется оператором обобщенного проектирования, отвечающим точке $\lambda(\cdot)\in R^X$.

Подчеркнем, что последние определения связаны с фиксированным оснащением (2.18). Часто удобно ввести понятие общей спектральной меры $\tau$, отвечающей семейству $(E_x)_{x\in X}$,— это такая скалярная неотрицательная $\sigma$-конечная мера $\mathscr{C}_\sigma(R^X)\ni B\mapsto\tau(B)$, что $E$ и $\tau$ абсолютно непрерывны друг относительно друга (т. е. из того, что $\tau(B)=0$, следует, что $E(B)=0$, и наоборот). Из (2.22) вытекает, что любые $\rho$ и $\tau$, отвечающие семейству $(E_x)_{x\in X}$, также абсолютно непрерывны друг относительно друга. Разумеется, представление (2.22) можно переписать и в виде интеграла относительно $\tau$. Однако в дальнейшем, если противное не оговорено, мы под спектральной мерой всегда будем понимать $\rho(B) =$ Сл. $(O^+E(B)O)$.

Все же отметим один важный случай, касающийся с. р. е. $E$, порожденного семейством $(A_x)_{x\in X}$ коммутирующих самосопряженных (или нормальных) операторов, когда роль $\rho$ может играть еще одна мера, построенная достаточно стандартной процедурой. Будем говорить, что такое семейство имеет порождающий вектор $\Omega\in H_0$ (называемый также для краткости вакуумом), если $\|\Omega\|_{H_0} = 1$, $\Omega\in \bigcap_{x_j\in X;m_j=0,1,\ldots;j=1,\ldots,p;p=1,2,\ldots} \mathfrak{D}(A_{x_1}^{m_1}\ldots A_{x_p}^{m_p})$ и з. л. о. $(\{A_{x_1}^{m_1}\ldots A_{x_p}^{m_p}\Omega \mid x_j\in X;\ m_j=0,1,\ldots;\ j=1,\ldots,p;\ p=1,2,\ldots\}) = H_0$.

**Теорема 2.4.** *Пусть семейство $(A_x)_{x\in X}$ коммутирующих самосопряженных операторов обладает вакуумом $\Omega$. Тогда его с. р. е. $E$ и скалярная неотрицательная конечная мера*

$$\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)\ni B\mapsto\sigma(B) = (E(B)\Omega,\Omega)_{H_0} \tag{2.23}$$

*абсолютно непрерывны одна относительно другой. Иными словами,* (2.23) *является некоторой общей спектральной мерой рассматриваемого семейства. Аналогичный факт справедлив и для нормальных операторов $A_x$.*

Доказательство. Из $E(B)=0$ при некотором $B\in\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ следует, что и $\sigma(B)=0$. Обратно, пусть $B\in\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ таково, что $0=\sigma(B)=(E(B)\Omega,\Omega)_{H_0}=\|E(B)\Omega\|^2_{H_0}$, т. е. $E(B)\Omega=0$. Для любого $A_{x_1}^{m_1}\ldots A_{x_p}^{m_p}$ $(x_j\in X;\ m_j=0,1,\ldots;\ j=1,\ldots,p;\ p=1,2,\ldots)$ имеем $0=A_{x_1}^{m_1}\ldots A_{x_p}^{m_p}E(B)\Omega = E(B)A_{x_1}^{m_1}\ldots A_{x_p}^{m_p}\Omega$, откуда $E(B)f=0$ для любого $f\in$ л. о. $(\{A_{x_1}^{m_1}\ldots A_{x_p}^{m_p}\Omega\mid x_j\in X;\ m_j=0,1,\ldots;\ j=1,\ldots,p;\ p=1,2,\ldots\})$, а значит, и для любого $f$ из замыкания этой оболочки, т. е. для $f\in H_0$. Итак, $E(B)=0$. ■

Замечание. Будем говорить, что $\Omega\in H_0$ $(\|\Omega\|_{H_0}=1)$ является частичным вакуумом, если $\Omega\in\bigcap\mathfrak{D}(A_{x_1}^{m_1}\ldots A_{x_p}^{m_p})$, где пересечение берется лишь по некоторым точкам $x_j\in X$ и некоторым натуральным степеням $m_j$, но з. л. о. $(A_{x_1}^{m_1}\ldots A_{x_p}^{m_p}\Omega)$ с $x_j$ и $m_j$, изменяющимися указанным образом, все же совпадает с $H_0$. Ясно, что теорема 2.4 сохраняется, если в ее формулировке вакуум заменить частичным вакуумом.

Отметим, что в ряде случаев $\Omega$ действительно является вакуумом, фигурирующим в квантовой теории поля.

## 4. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОВМЕСТНЫМ ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ

Пусть $(A_x)_{x\in X}$ — семейство коммутирующих самосопряженных операторов, действующих в пространстве $H_0$. Согласно § 1, п. 1, 7 с этим семейством связывается с. р. е. $\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)\ni B\mapsto E(B)$ и к. с. р. е. $\mathscr{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)\ni \mathbf{B}\mapsto\mathbf{E}(\mathbf{B})$, причем справедливо равенство (1.19). Зафиксируем оснащение (2.18), где вложение $O: H_+\to H_0$ квазиядерно, и построим в соответствии с п. 3 спектральную меру $\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)\ni B\mapsto\rho(B) =$ Сл. $(O^+E(B)O)$ и меру, связанную с $\mathbf{E}$: $\mathscr{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)\ni\mathbf{B}\mapsto\boldsymbol{\rho}(\mathbf{B}) =$ Сл. $(O^+\mathbf{E}(\mathbf{B})O)$ (компактифицированную спектральную меру). Из (1.19) вытекает, что $\mathscr{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)\ni\mathbf{B}\mapsto\boldsymbol{\rho}(\mathbf{B}) = \rho(\mathbf{B}\cap\mathbb{R}^X)$.

Непосредственное применение теоремы 2.3 приводит к следующему подготовительному результату.

**Теорема 2.5.** *Пусть* $(A_x)_{x\in X}$ — *семейство коммутирующих самосопряженных операторов, действующих в пространстве* $H_0$, *меры* $E$, $\mathbf{E}$, $\rho$ *и* $\boldsymbol{\rho}$ — *соответствующие с. р. е., к. с. р. е., спектральная мера и компактифицированная спектральная мера. Справедливы представления типа* (2.22)

$$O^+E(B)\,O = \int\limits_B P(\lambda(\cdot))\,d\rho(\lambda(\cdot)), \quad O^+\mathbf{E}(\mathbf{B})\,O = \int\limits_{\mathbf{B}} P(\lambda(\cdot))\,d\boldsymbol{\rho}(\lambda(\cdot)) \tag{2.24}$$

$$(B\in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X), \quad \mathbf{B}\in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)).$$

*Здесь* $\mathbf{R}^X \ni \lambda(\cdot)\mapsto P(\lambda(\cdot))$—*слабо измеримая относительно* $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$ *определенная* $\boldsymbol{\rho}$-*почти для всех* $\lambda(\cdot)$ *операторнозначная функция со свойствами, описанными в теореме* 2.3. *Функция* $P(\lambda(\cdot))$ — *оператор обобщенного проектирования, отвечающий точке* $\lambda(\cdot)$,— *является сужением этой функции на* $\mathbb{R}^X$ *и обладает аналогичными свойствами.*

Доказательство. Из (2.22) вытекают оба представления (2.24) с некоторыми функциями $P(\lambda(\cdot))$ и $P(\lambda(\cdot))$ и требуется лишь установить, что $\rho$-почти для всех $\lambda(\cdot)$ $P(\lambda(\cdot)) = P(\lambda(\cdot))\restriction\mathbb{R}^X$. Обозначим последнее сужение через $P_1(\lambda(\cdot))$. Так как $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)\ni$ $\ni \mathbf{B}\mapsto \boldsymbol{\rho}(\mathbf{B}) = \rho(\mathbf{B}\cap\mathbb{R}^X)$, то применима формула (1.24), где $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{R}^X$, $\Lambda = \mathbb{R}^X$, $\mathfrak{A}_1 = \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$, $\mathfrak{A} = \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$, $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\rho}$ и $\Theta = \rho$. Зафиксируем $u, v\in H_+$ и положим $F(\lambda(\cdot)) = \varkappa_{\mathbf{B}}(\lambda(\cdot))\,(P(\lambda(\cdot))\,u, v)_{H_0}$ ($\mathbf{B}\in\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$). Тогда в силу этой формулы, второго из равенств (2.24), (1.19) и первого из равенств (2.24) будем иметь

$$\int\limits_{\mathbf{B}\cap\mathbb{R}^X} (P_1(\lambda(\cdot))\,u, v)_{H_0}d\rho(\lambda(\cdot)) = \int\limits_{\mathbb{R}^X} (\varkappa_{\mathbf{B}}(\lambda(\cdot))\,P(\lambda(\cdot))\,u, v)_{H_0})\restriction$$

$$\mathbb{R}^X d\rho(\lambda(\cdot)) = \int\limits_{\mathbf{B}} (P(\lambda(\cdot))\,u, v)_{H_0}d\boldsymbol{\rho}(\lambda(\cdot)) = (O^+\mathbf{E}(\mathbf{B})\,Ou, v)_{H_0} =$$

$$= (O^+E(\mathbf{B}\cap\mathbb{R}^X)\,Ou, v)_{H_0} = \int\limits_{\mathbf{B}\cap\mathbb{R}^X} (P(\lambda(\cdot))\,u, v)_{H_0}d\rho(\lambda(\cdot)). \tag{2.25}$$

Множества $\mathbf{B}\cap\mathbb{R}^X$ пробегают всю $\sigma$-алгебру $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$, поэтому из (2.25) следует, что $(P_1(\lambda(\cdot))\,u, v)_{H_0} = (P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0}$ $\rho$-почти для всех $\lambda(\cdot)$. Утверждение следует из произвольности $u, v\in H_+$. ■

В случае одного самосопряженного оператора $A$ первая из формул (2.24) дает

$$O^+E(\Delta)\,O = \int\limits_\Delta P(\lambda)\,d\rho(\lambda) \quad (\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)), \tag{2.26}$$



где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\ni\Delta\mapsto\rho(\Delta) = \text{Сл.}\,(O^+E(\Delta)\,O)$ — спектральная мера $A$ (компактификацию, как уже говорилось в § 1, п. 7, не имеет смысла рассматривать). Нетрудно установить, что при естественном требовании существования продолжения оснащения (2.18) область значений $\mathfrak{R}(P(\lambda))$ $\rho$-почти для каждого $\lambda$ состоит из обобщенных собственных векторов оператора $A$, отвечающих собственному значению $\lambda$ (Березанский [3, гл. 5]). Подобная картина будет и в случае конечного семейства коммутирующих самосопряженных операторов, и даже в случае их счетного числа; подчеркнем, что теперь собственное значение — функция на множестве индексов. Однако в случае множества индексов произвольной мощности возникают существенные трудности, пути преодоления которых будут изложены в следующих трех пунктах. В первом из них мы изложим более прозрачную ситуацию, когда в семействе $(A_x)_{x\in X}$ имеется не более чем счетное число неограниченных операторов и компактификацию можно не проводить, во втором — рассмотрим общую картину. Окончательные формулировки будут содержаться в третьем пункте.

Изложенные выше результаты без всяких изменений переносятся на семейство $(A_x)_{x\in X}$ коммутирующих нормальных операторов, нужно только $\mathbb{R}$ и $\mathbf{R}$ заменить соответственно на $\mathbb{C}$ и $\mathbf{C}$.

### 5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОВМЕСТНЫМ ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ СЕМЕЙСТВА КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ, СРЕДИ КОТОРЫХ ЛИШЬ НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ СЧЕТНОЕ ЧИСЛО НЕОГРАНИЧЕННЫХ

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.6.** *Пусть* $(A_x)_{x\in X}$ — *семейство коммутирующих самосопряженных операторов, действующих в пространстве* $H_0$, *среди которых лишь не более чем счетное число неограниченных. Зафиксируем оснащение* (2.18) *с квазиядерным вложением* $O: H_+\to$ $\to H_0$ *и предположим, что это семейство допускает совместное его продолжение с пространством* $D$, *являющимся проективным пределом гильбертовых пространств. Пусть* $\rho$ — *спектральная мера семейства* $(A_x)_{x\in X}$.

*Утверждается, что существует входящее в* supp $\rho$ *множество* $T\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^X)$ *полной внешней спектральной меры (т. е. любое* $B\in$ $\in\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$, *содержащее* $T$, *имеет полную спектральную меру) такое, что при* $\lambda(\cdot)\in T$ Сл. $(P(\lambda(\cdot))) = 1$ *и область значений* $\mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot)))$ *каждого оператора обобщенного проектирования* $P(\lambda(\cdot))$ *состоит из совместных обобщенных собственных векторов семейства* $(A_x)_{x\in X}$, *отвечающих собственному значению* $\lambda(\cdot)$. *Множество* $T$ *будем называть уточненным совместным спектром семейства.*

Замечания. 1. Если $X$ не более чем счетно, то $\mathscr{B}(\mathbb{R}^X) = \mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ и мера $\rho$ сосредоточена на $T$. В этом случае доказательство теоремы становится почти очевидным (см. лемму 2.2). Сейчас $D$ может быть общим линейным топологическим сепарабельным пространством.

2. Положить $T = \operatorname{supp} \rho$, вообще говоря, нельзя даже в случае одного оператора $A$.

3. Утверждение теоремы состоит в том, что существует входящее в $\operatorname{supp} \rho$ множество $T \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^X)$ полной внешней спектральной меры такое, что для каждого $\lambda(\cdot) \in T$ выполняется при каждом $x \in X$ равенство

$$(P(\lambda(\cdot))u, \quad A_x v)_{H_0} = (\lambda(x) P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} (u \in H_+, v \in D). \tag{2.27}$$

Заметим, что достаточно установить выполнение соотношения (2.27) для $u$ и $v$, меняющихся по плотным множествам, соответственно в $H_+$ и $D$. Действительно, если $u_n$ и $v_n$ взяты из этих множеств и в соответствующих пространствах $u_n \to u$ и $v_n \to v$ при $n \to \infty$, то, переходя в соотношении $(P(\lambda(\cdot))u_n, A_x v_n)_{H_0} = (\lambda(x) P(\lambda(\cdot)) u_n, v_n)_{H_0}$ к пределу, получаем (2.27). Переход к пределу возможен в силу определения продолжения оснащения.

**Лемма 2.2.** *Для каждого $x \in X$ существует множество $Q_x \in \mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ полной спектральной меры такое, что для каждого $\lambda(\cdot) \in Q_x$ выполняется равенство (2.27). Сейчас $D$ предполагается общим линейным топологическим сепарабельным пространством.*

Доказательство. Зафиксируем $u, v \in D$. При помощи первого из равенств (2.24) для каждого $B \in \mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ получим

$$\int_B (P(\lambda(\cdot))u, A_x v)_{H_0} d\rho(\lambda(\cdot)) = \Big(\Big(\int_B P(\lambda(\cdot))\, d\rho(\lambda(\cdot))\Big) u, A_x v\Big)_{H_0} =$$

$$= (O^+ E(B) O u, A_x v)_{H_0} = (A_x E(B) u, v)_{H_0} = \Big(\int_B \lambda(x)\, dE(\lambda(\cdot)) u, v\Big)_{H_0} =$$

$$= \int_B \lambda(x)\, d(O^+ E(\lambda(\cdot)) O u, v)_{H_0}. \tag{2.28}$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$A_x E(B) = \int_B \lambda(x)\, dE(\lambda(\cdot)), \tag{2.29}$$

вытекающим из (1.6). Далее, так как согласно первому из равенств (2.24) при любом $C \in \mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ $(O^+ E(C) O u, v)_{H_0} = \int_C (P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} \times \times d\rho(\lambda(\cdot))$, то из (2.28) следует

$$\int_B (P(\lambda(\cdot))u, A_x v)_{H_0} d\rho(\lambda(\cdot)) = \int_B \lambda(x) (P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} d\rho(\lambda(\cdot)).$$



Вследствие произвольности $B$ отсюда вытекает, что существует множество $Q_{u,v,x} \in \mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ полной меры $\rho$ такое, что при $\lambda(\cdot) \in Q_{u,v,x}$ выполняется соотношение (2.27).

Пусть теперь $L$ — счетное множество, плотное в пространстве $D$, а значит, и в $H_+$. Рассмотрим счетное пересечение $\bigcap_{u,v \in L} Q_{u,v,x} = Q_x$. Это множество полной меры $\rho$ и для $\lambda(\cdot) \in Q_x$ соотношение (2.27) выполняется для всех $u, v \in L$. Согласно замечанию 3 отсюда вытекает справедливость (2.27) при $\lambda(\cdot) \in Q_x$, $u \in H_+$, $v \in D$. ■

Если $X$ не более чем счетно, то из этой леммы сразу вытекает теорема, если положить $T = (\bigcap_{x \in X} Q_x) \cap \operatorname{supp} \rho$. Этим обосновано замечание 1. В случае, если $X$ произвольной мощности, доказательство теоремы гораздо более сложное и для его проведения необходим ряд результатов § 1 и излагаемые ниже конструкции.

**Лемма 2.3.** *Пусть $\Phi$ — линейное топологическое сепарабельное пространство, $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ — фиксированное счетное плотное множество в нем. Предположим, что сопряженное пространство $\Phi'$ антилинейных функционалов также сепарабельно относительно слабой топологии. Рассмотрим произвольное множество $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{L}(\Phi \to H)$ линейных непрерывных операторов, действующих из $\Phi$ в некоторое сепарабельное гильбертово пространство $H$. Утверждается, что всегда $\mathcal{A}$ сепарабельно в следующем смысле: существует последовательность операторов $(A_n)_{n=1}^\infty$ $(A_n \in \mathcal{A})$ такая, что для любого оператора $A \in \mathcal{A}$ можно найти подпоследовательность $(A_{n_k})_{k=1}^\infty$ такую, что при $k \to \infty$ $\|(A - A_{n_k}) \varphi_j\|_H \to 0$ для каждого $j = 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Обозначим через $(\beta_m)_{m=1}^\infty$ фиксированное счетное плотное множество в $\Phi'$ и через $(e_j)_{j=1}^\infty$ ортонормированный базис в $H$. Рассмотрим совокупность $\mathscr{B}$ операторов из $\Phi$ в $H$, имеющих вид $\Phi \ni \varphi \mapsto B\varphi = \sum_{j=1}^n \overline{\beta_{m_j}(\varphi)}\, e_j \in H$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Каждый такой оператор непрерывен и определяется конечной подпоследовательностью $(m_1, \ldots, m_n)$ последовательности $(1, 2, \ldots)$, поэтому $\mathscr{B}$ — счетное подмножество из $\mathscr{L}(\Phi \to H)$. Занумеруем его: $\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$.

Пусть $p, q = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим теперь при фиксированных $p, q$ операторы $A \in \mathcal{A}$, для которых $\|(A - B_p)\varphi_k\|_H < \frac{1}{q}$ при $k = 1, \ldots, q$. Если такие операторы существуют, то один из них обозначим $A_{p,q} \in \mathcal{A}$. Покажем, что так построенное не более чем счетное множество операторов $A_{p,q}$ является требуемым.

Предварительно покажем, что для любых $A \in \mathcal{A}$ и $q = 1, 2, \ldots$ найдется некоторый оператор $B_{n_q} \in \mathcal{B}$ такой, что

$$\|(A - B_{n_q})\varphi_k\|_H < \frac{1}{q} \quad (k = 1, \ldots, q). \tag{2.30}$$

Оператор $A$, как и всякий непрерывный оператор из $\Phi$ в $H$, может быть представлен в следующем виде: существует последовательность функционалов $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ из $\Phi'$ такая, что

$$A\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\alpha_j(\varphi)}\, e_j \quad (\varphi \in \Phi).$$

Так как $\|A\varphi_k\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(\varphi_k)|^2 < \infty$, то существует номер $l(k, q) = 1, 2, \ldots$ столь большой, что $\sum_{j=l(k,q)+1}^{\infty} |\alpha_j(\varphi_k)|^2 < \frac{1}{2q^2}$. Положим $l(q) = \max_{k=1,\ldots,q} l(k, q)$, тогда

$$\sum_{j=l(q)+1}^{\infty} |\alpha_j(\varphi_k)|^2 < \frac{1}{2q^2} \quad (k = 1, \ldots, q).$$

Поскольку $(\beta_m)_{m=1}^{\infty}$ плотно в $\Phi'$, выберем из этой последовательности для любого $j = 1, \ldots, l(q)$ функционалы $\beta_{m(j,q)}$ такие, что $|(\alpha_j - \beta_{m(j,q)})(\varphi_k)|^2 < \frac{1}{2q^2 l(q)}$ $(k = 1, \ldots, q)$. Это всегда можно сделать, так как векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ конечное число; ясно, что индексы $m(1, q), \ldots, m(l(q), q)$ можно считать различными. Построим оператор $\Phi \ni \varphi \mapsto B\varphi = \sum_{j=1}^{l(q)} \overline{\beta_{m(j,q)}(\varphi)}\, e_j \in H$. Он принадлежит $\mathcal{B}$ и поэтому имеет некоторый номер $n_q$, т. е. $B = B_{n_q}$. Для него будет выполняться оценка (2.30):

$$\|(A - B_{n_q})\varphi_k\|_H^2 = \sum_{j=1}^{l(q)} |(\alpha_j - \beta_{m(j,q)})(\varphi_k)|^2 + \sum_{j=l(q)+1}^{\infty} |\alpha_j(\varphi_k)|^2 < $$
$$< l(q)\frac{1}{2q^2 l(q)} + \frac{1}{2q^2} = \frac{1}{q^2}.$$

Итак, (2.30) установлено. Из определения операторов $A_{p,q}$ и этой оценки следует, что для каждого $q = 1, 2, \ldots$ существует оператор $A_{n_q,q}$ (отсюда, в частности, вытекает, что операторов $A_{p,q}$ бесконечное число, т. е. их множество счетно). Покажем, что последовательность $(A_{n_q,q})_{q=1}^{\infty}$ аппроксимирует $A$ в требуемом смысле. Действительно, определение $A_{p,q}$ дает, что $\|(A_{n_q,q} - B_{n_q})\varphi_k\|_H < \frac{1}{q}$ $(k = 1, \ldots, q)$. Из этого неравенства и (2.30) заключаем, что $\|(A - A_{n_q,q})\varphi_k\|_H < \frac{2}{q}$ $(k = 1, \ldots, q;\ q = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, для каждого $j = 1, 2, \ldots$ при $q \to \infty$ $\|(A - A_{n_q,q})\varphi_j\|_H \to 0$. ■



**Лемма 2.4.** *Пусть $\Phi$ — линейное топологическое сепарабельное пространство, являющееся проективным пределом гильбертовых пространств. Тогда $\Phi'$ также сепарабельно относительно слабой топологии.*

Доказательство. Пусть $\Phi = \mathrm{pr}\lim_{\tau \in T} H_\tau$, где $H_\tau$ — гильбертовы пространства, а $\Psi$ — счетное плотное в $\Phi$ множество. Согласно теореме 1.5 гл. 1 $\Phi' = \bigcup_{\tau \in T} H'_\tau = \bigcup_{\tau \in T} H_\tau$. Так как $\Phi$ плотно в каждом $H_\tau$ и включение $\Phi \subseteq H_\tau$ топологическое, то и $\Psi$ плотно в каждом $H_\tau$. Но тогда $\Psi$ плотно в $\Phi'$ относительно слабой топологии: пусть $\alpha \in \Phi'$, существует такое $\tau_0$, что $\alpha \in H_{\tau_0}$, т. е. $\alpha(\varphi) = (a_\alpha, \varphi)_{H_{\tau_0}}$, где $a_\alpha \in H_{\tau_0}$ $(\varphi \in \Phi)$. Обозначим через $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ последовательность из $\Psi$, аппроксимирующую в $H_{\tau_0}$ вектор $a_\alpha$. Тогда для каждого $\varphi \in \Phi$ при $n \to \infty$ $(\psi_n, \varphi)_{H_{\tau_0}} \to (a_\alpha, \varphi)_{H_{\tau_0}} = \alpha(\varphi)$, т. е. векторы $\psi_n$, понимаемые как функционалы из $\Phi'$, аппроксимируют в слабом смысле $\alpha$. ■

Следствие. Утверждение леммы 2.3 справедливо, если $\Phi$ — линейное топологическое сепарабельное пространство, являющееся проективным пределом гильбертовых пространств.

Сделаем еще следующие дополнения к теореме 2.2. Пусть $\rho$ — спектральная мера семейства $(E_x)_{x \in X}$ коммутирующих разложений единицы и $M \in \mathcal{C}_\sigma(R^X)$ — замкнутое множество такое, что $\rho(M) > 0$. Рассмотрим сужение $\rho_M$ меры $\rho$ на $M$, т. е. меру $(\mathcal{C}_\sigma(R^X))_M \ni B' \mapsto \rho_M(B') = \rho(B')$, где $(\mathcal{C}_\sigma(R^X))_M = \{B' \in \mathcal{C}_\sigma(R^X) \mid B' \subseteq M\}$. Согласно § 1, п. 9 из регулярности $\rho$ следует регулярность $\rho_M$; $\operatorname{supp}\rho_M \subseteq \operatorname{supp}\rho$. Ясно, что $\rho_M(B') = \mathrm{Сл.}\,(O^+E_M(B')\,O)$ $(B' \in (\mathcal{C}_\sigma(R^X))_M)$. Из абсолютной непрерывности мер $E_M$ и $\rho_M$ друг относительно друга вытекает, что $\operatorname{supp}\rho_M = \operatorname{supp} E_M$; $\rho_M$ правильна тогда и только тогда, когда $E_M$ правильна.

Доказательство теоремы будем проводить по шагам.

I. Рассмотрим цепочку (2.18) и построим при помощи процесса ортогонализации ортонормированный базис $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ в пространстве $H_+$, составленный из векторов пространства $D$. Произвольно дополним его до счетного множества $L$, плотного в $D$. Согласно следствию леммы 2.4 из семейства операторов $\mathcal{A} = (A'_x)_{x \in X}$, где $A'_x = A_x \upharpoonright D$, действующих непрерывно из $D$ в $H_+$, можно выбрать последовательность $(A'_{x_n})_{n=1}^{\infty}$ такую, что для каждого $x_0 \in X$ существует подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, для которой в $H_+$ $\lim_{k \to \infty} A'_{x_{n_k}} u = A'_{x_0} u$ при любом $u \in L$.

II. Построим множество $T$. Положим $C = \{\lambda(\cdot) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_{x_n} \mid$ $\mid$ Сл. $(P(\lambda(\cdot))) = 1\} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$, где $x_n$ — построенные в I точки, а $Q_{x_n}$ — соответствующие множества, построенные согласно лемме 2.2. Ясно, что $C$ — множество полной спектральной меры и для $\lambda(\cdot) \in C$ выполняется соотношение (2.27) с $x = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Из равенства $\sum_{j=1}^{\infty} (P(\lambda(\cdot)) e_j, e_j)_{H_0} =$ Сл. $(P(\lambda(\cdot))) = 1 \quad (\lambda(\cdot) \in C)$ вытекает справедливость разложения

$$C = \bigcup_{j,m=1}^{\infty} C^{j,m}, \quad C^{j,m} = \left\{\lambda(\cdot) \in C \mid (P(\lambda(\cdot)) e_j, e_j)_{H_0} \geqslant \frac{1}{m}\right\} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X). \tag{2.31}$$

Пусть $(C^p)_{p=1}^{\infty}$ — занумерованное в каком-либо порядке счетное семейство $(C^{j,m})_{j,m=1}^{\infty}$. Положим $C_1 = C^1$, $C_2 = C^2 \setminus C_1$, $C_3 = C^3 \setminus (C_1 \cup C_2)$, ... Очевидно, множества $C_q \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$, попарно не пересекаются и $\bigcup_{q=1}^{\infty} C_q = C$. Обозначим через $(C_{q_p})_{p=1}^{N}$ $(N \leqslant \infty)$ подпоследовательность последовательности $(C_q)_{q=1}^{\infty}$, состоящую из всех множеств $C_q$, имеющих ненулевую спектральную меру (при $N = \infty$ значение $p = \infty$, разумеется, здесь и ниже не фигурирует). Пусть $Q_0$ — объединение всех остальных множеств и множества $\mathbb{R}^X \setminus C$, а $Q_p = C_{q_p}$ $(p = 1, \ldots, N)$.

Очевидно, $Q_p \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ и попарно не пересекаются $(p = 0, \ldots, N)$; $\rho(Q_0) = 0$; $\rho(Q_p) > 0$ $(p = 1, \ldots, N)$ и справедливо разложение

$$\mathbb{R}^X = \bigcup_{p=0}^{N} Q_p. \tag{2.32}$$

При $p = 1, \ldots, N$ каждое $Q_p = C_{q_p} \subseteq C^{q_p}$, поэтому согласно (2.31) найдутся такие $j_p$, $m_p = 1, 2, \ldots$, что выполняется неравенство

$$(P(\lambda(\cdot)) e_{j_p}, e_{j_p})_{H_0} \geqslant \frac{1}{m_p} \quad (\lambda(\cdot) \in Q_p; \quad p = 1, \ldots, N). \tag{2.33}$$

Согласно теореме 2.2 спектральная мера $\rho$ регулярна. Поэтому в соответствии с (1.13) для каждого $B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ $\rho(B) = \sup \rho(F)$, где sup распространяется по всем замкнутым $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni F \subseteq B$. Это дает возможность для каждого $p = 1, \ldots, N$ построить последовательность $(M_{p,q})_{q=1}^{\infty}$ замкнутых множеств $M_{p,q} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$, входящих в $Q_p$ и таких, что

$$\lim_{q\to\infty} \rho(M_{p,q}) = \rho(Q_p) \quad (p = 1, \ldots, N). \tag{2.34}$$



Так как в (2.34) $\rho(Q_p) > 0$, то можно считать, что и $\rho(M_{p,q}) > 0$ $(p = 1, \ldots, N;\ q = 1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим сужение $\rho_{M_{p,q}}$ меры $\rho$ на $M_{p,q}$. Так как сужение $E_{M_{p,q}}$ с. р. е. $E$ является правильной мерой (см. теорему 1.6), то и $\rho_{M_{p,q}}$ — регулярная правильная мера (это обстоятельство ниже будет существенно использоваться). Обозначим $F_{p,q} = \operatorname{supp} \rho_{M_{p,q}} \subseteq M_{p,q} \subseteq Q_p$ $(p = 1, \ldots, N;\ q = 1, 2, \ldots)$. Напомним, что $M_{p,q}$ топологизируется топологией, индуцируемой $\mathbb{R}^X$, и $F_{p,q}$ замкнуто в $\mathbb{R}^X$; ясно также, что $F_{p,q} \subseteq \operatorname{supp} \rho$. Положим

$$T = \bigcup_{p=1}^{N} \bigcup_{q=1}^{\infty} F_{p,q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^X). \tag{2.35}$$

III. Очевидно, $T \subseteq \operatorname{supp} \rho$. Докажем, что множество (2.35) полной внешней спектральной меры. Пусть $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \supseteq T$. Требуется показать, что $\rho(B) = \rho(\mathbb{R}^X)$. Разложение (2.32) порождает разложение $B = \bigcup_{p=0}^{N} B_p$, где $B_p = B \cap Q_p \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ и попарно не пересекаются. Поэтому $\rho(B) = \sum_{p=0}^{N} \rho(B_p)$, и достаточно убедиться, что $\rho(B_p) = \rho(Q_p)$ $(p = 0, \ldots, N)$. Очевидно, следует рассмотреть лишь случай $p = 1, \ldots, N$. Зафиксируем такое $p$.

Так как $B \supseteq T$, то $B_p = B \cap Q_p \supseteq T \cap Q_p = \bigcup_{q=1}^{\infty} F_{p,q}$, откуда $B_p \supseteq F_{p,q}$ и, следовательно, $(\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X))_{M_{p,q}} \ni B_p \cap M_{p,q} \supseteq F_{p,q}$.

В силу регулярности и правильности меры $\rho_{M_{p,q}}$ множество $B_p \cap M_{p,q}$ полной меры, т. е. $\rho_{M_{p,q}}(B_p \cap M_{p,q}) = \rho_{M_{p,q}}(M_{p,q}) = \rho(M_{p,q})$ $(q = 1, 2, \ldots)$. Поэтому $\rho(B_p) \geqslant \rho(B_p \cap M_{p,q}) = \rho_{M_{p,q}}(B_p \cap M_{p,q}) = \rho(M_{p,q})$; переходя в неравенстве $\rho(B_p) \geqslant \rho(M_{p,q})$ $(q=1, 2, \ldots)$ к пределу при $q \to \infty$ и используя (2.34), найдем $\rho(B_p) \geqslant \rho(Q_p)$. С другой стороны, $B_p \subseteq Q_p$, поэтому справедливо противоположное неравенство. Итак, $\rho(B_p) = \rho(Q_p)$.

IV. Проверка соотношения (2.27) будет осуществляться в три шага. Ниже будут рассматриваться функции вида (1.8) $\mathbb{R}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto \pi_x(\lambda(\cdot)) = \lambda(x) \in \mathbb{R}^1$ $(x \in X$ фиксировано). Напомним, что каждая такая функция измерима относительно $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ и непрерывна в топологии $\mathbb{R}^X$.

Зафиксируем $x_0 \in X$ и будем проверять (2.27) для $x = x_0$. Построим подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ такую, что в $H_+$ $\lim_{k\to\infty} A'_{x_{n_k}} u = A'_{x_0} u$ $(u \in L)$; она существует согласно I. Утверждается, что для каждого $p = 1, \ldots, N$ сужения

$(\pi_{x_{n_k}} \upharpoonright Q_p)(\lambda(\cdot))$ равномерно относительно $\lambda(\cdot) \in Q_p$ сходятся при $k \to \infty$ к некоторой функции $f_p(\lambda(\cdot))$, непрерывной на $Q_p$ и измеримой относительно σ-алгебры $(\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X))_{Q_p} = \{B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \mid B \subseteq Q_p\}$ ($Q_p$ снабжается относительной топологией, индуцируемой $\mathbb{R}^X$).

Действительно, из соотношения (2.27), выполняющегося для $x = x_{n_k}$ и $\lambda(\cdot) \in Q_p \subseteq C$, и (2.33) имеем

$$(\pi_{x_{n_k}} \upharpoonright Q_p)(\lambda(\cdot)) = \lambda(x_{n_k}) = (P(\lambda(\cdot)) e_{i_p}, A'_{x_{n_k}} e_{i_p})_{H_0} (P(\lambda(\cdot)) e_{i_p}, e_{i_p})^{-1}_{H_0}$$
$$(\lambda(\cdot) \in Q_p; \quad k = 1, 2, \ldots). \tag{2.36}$$

При помощи (2.36) и (2.33) заключаем, что

$$|(\pi_{x_{n_k}} \upharpoonright Q_p)(\lambda(\cdot)) - (\pi_{x_{n_l}} \upharpoonright Q_p)(\lambda(\cdot))| = |(P(\lambda(\cdot)) e_{i_p},$$
$$(A'_{x_{n_k}} - A'_{x_{n_l}}) e_{i_p})_{H_0}| (P(\lambda(\cdot)) e_{i_p}, e_{i_p})^{-1}_{H_0} \leqslant m_p \| P(\lambda(\cdot)) e_{i_p} \|_{H_-} \times$$
$$\times \|(A'_{x_{n_k}} - A'_{x_{n_l}}) e_{i_p}\|_{H_+} \leqslant m_p \|(A'_{x_{n_k}} - A'_{x_{n_l}}) e_{i_p}\|_{H_+} \tag{2.37}$$

(мы воспользовались тем, что при $\lambda(\cdot) \in C \supseteq Q_p$

$$\|P(\lambda(\cdot)) e_{i_p}\|_{H_-} \leqslant \|P(\lambda(\cdot))\| \|e_{i_p}\|_{H_+} \leqslant |P(\lambda(\cdot))| \leqslant$$
$$\leqslant \text{Сл.}\ (P(\lambda(\cdot))) = 1).$$

Так как в $H_+$ $\lim_{k \to \infty} A'_{x_{n_k}} e_{i_p} = A'_{x_0} e_{i_p}$, то из (2.37) следует равномерная сходимость при $k \to \infty$ сужений $\pi_{x_{n_k}} \upharpoonright Q_p$. Осталось заметить, что каждое такое сужение — непрерывная на $Q_p$ измеримая относительно $(\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X))_{Q_p}$ функция, так как $\pi_{x_{n_k}}$ непрерывна во всем $\mathbb{R}^X$ и измерима относительно $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$.

V. В соответствии с разложением (2.32) определим функцию

$$\mathbb{R}^X \setminus Q_0 = \bigcup_{p=1}^{N} Q_p \ni \lambda(\cdot) \mapsto f(\lambda(\cdot)) = f_p(\lambda(\cdot)), \quad \text{если} \quad \lambda(\cdot) \in Q_p.$$

Ясно, что $f_p = f \upharpoonright Q_p$, $T \subseteq \mathbb{R}^X \setminus Q_0$ (отметим, что при $N = \infty$ функция $f$, вообще говоря, не непрерывна в относительной топологии пространства $\mathbb{R}^X \setminus Q_0$). Утверждается, что

$$(f \upharpoonright T)(\lambda(\cdot)) = (\pi_{x_0} \upharpoonright T)(\lambda(\cdot)) = \lambda(x_0) \quad (\lambda(\cdot) \in T). \tag{2.38}$$

Действительно, пусть $\lambda_0(\cdot) \in T$ зафиксирована. Согласно (2.35) найдутся такие $p = 1, \ldots, N$ и $q = 1, 2, \ldots$, что $\lambda_0(\cdot) \in F_{p,q}$. Рассмотрим соответствующее пространство $M_{p,q}$ и сужение $\rho_{M_{p,q}}$ меры $\rho$. В силу (1.6), первого из представлений (2.24) и (2.33) имеем

$$\|(A'_{x_{n_k}} - A'_{x_0}) e_{i_p}\|^2_{H_+} \geqslant \|(A'_{x_{n_k}} - A'_{x_0}) e_{i_p}\|^2_{H_0} = \|(A_{x_{n_k}} - A_{x_0}) e_{i_p}\|^2_{H_0} =$$



$$= \int_{\mathbb{R}^X} |\lambda(x_{n_k}) - \lambda(x_0)|^2 d(E(\lambda(\cdot)) e_{i_p}, e_{i_p})_{H_0} = \int_{\mathbb{R}^X} |\pi_{x_{n_k}}(\lambda(\cdot)) -$$
$$- \pi_{x_0}(\lambda(\cdot))|^2 (P(\lambda(\cdot)) e_{i_p}, e_{i_p})_{H_0} d\rho(\lambda(\cdot)) \geqslant \frac{1}{m_p} \int_{M_{p,q}} |(\pi_{x_{n_k}} \upharpoonright M_{p,q})(\lambda(\cdot)) -$$
$$- (\pi_{x_0} \upharpoonright M_{p,q})(\lambda(\cdot))|^2 d\rho_{M_{p,q}}(\lambda(\cdot)) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.39}$$

Перейдем в (2.39) к пределу при $k \to \infty$. Согласно I левая часть этого соотношения стремится к нулю. Согласно IV $(\pi_{x_{n_k}} \upharpoonright Q_p)(\lambda(\cdot))$ равномерно относительно $\lambda(\cdot) \in Q_p$ сходятся к $(f \upharpoonright Q_p)(\lambda(\cdot)) = f_p(\lambda(\cdot))$, поэтому такая сходимость есть и на $M_{p,q} \subseteq Q_p$ и, следовательно, в правой части (2.39) можно перейти к пределу под знаком интеграла. В результате получим

$$0 = \int_{M_{p,q}} |(f \upharpoonright M_{p,q})(\lambda(\cdot)) - (\pi_{x_0} \upharpoonright M_{p,q})(\lambda(\cdot))|^2 d\rho_{M_{p,q}}(\lambda(\cdot)). \tag{2.40}$$

Обозначим подынтегральную функцию в (2.40) через $g(\lambda(\cdot)) \geqslant 0$. Она равна сужению на $M_{p,q}$ непрерывной на $Q_p$ функции $|f_p(\lambda(\cdot)) - (\pi_{x_0} \upharpoonright Q_p)(\lambda(\cdot))|^2 \in (\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X))_{Q_p}$ и поэтому непрерывна на $M_{p,q}$ и входит в $(\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X))_{M_{p,q}}$. Для доказательства (2.38) нужно показать, что $g(\lambda_0(\cdot)) = 0$. Предположим противное. Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и окрестность $U$ в $M_{p,q}$ точки $\lambda_0(\cdot)$, что $g(\lambda(\cdot)) \geqslant \varepsilon$ при $\lambda(\cdot) \in U$. Так как $F_{p,q} = \operatorname{supp} \rho_{M_{p,q}}$ и $\lambda_0(\cdot) \in U \cap F_{p,q} \neq \varnothing$, то согласно § 1, п. 5, I мера $\rho_{M_{p,q}}(U) > 0$. Поэтому

$$\int_{M_{p,q}} g(\lambda(\cdot))\, d\rho_{M_{p,q}}(\lambda(\cdot)) \geqslant \int_U g(\lambda(\cdot))\, d\rho_{M_{p,q}}(\lambda(\cdot)) \geqslant \varepsilon \rho_{M_{p,q}}(U) > 0,$$

что противоречит (2.40). Итак, (2.38) установлено.

VI. Проверим соотношение (2.27) в зафиксированной в IV точке $x_0$; $\lambda(\cdot) \in T$ также фиксирована. Как отмечалось в замечании 3, достаточно рассмотреть $u, v \in L$, где $L$ введено в I.

Записывая (2.27) для $x = x_{n_k}$, получим

$$(P(\lambda(\cdot)) u, A'_{x_{n_k}} v)_{H_0} = (\pi_{x_{n_k}} \upharpoonright T)(\lambda(\cdot)) (P(\lambda(\cdot)) u, v)_{H_0} \quad (u, v \in L).$$

Перейдем здесь к пределу при $k \to \infty$. Левая часть благодаря выбору $x_{n_k}$ стремится к $(P(\lambda(\cdot)) u, A'_{x_0} v)_{H_0}$. Множитель $(\pi_{x_{n_k}} \upharpoonright T)(\lambda(\cdot))$ согласно IV стремится к $(f \upharpoonright T)(\lambda(\cdot))$ (так как из включения $\lambda(\cdot) \in T$ следует включение $\lambda(\cdot) \in Q_p$ при некотором $p = 1, \ldots, N$), а благодаря (2.38) этот предел равен $(\pi_{x_0} \upharpoonright T)(\lambda(\cdot)) = \lambda(x_0)$. В результате получим $(P(\lambda(\cdot)) u, A_{x_0} v)_{H_0} = \lambda(x_0) \times (P(\lambda(\cdot)) u, v)_{H_0}$ $(u, v \in L; \lambda(\cdot) \in T)$.

Равенство Сл. $(P(\lambda(\cdot))) = 1$ $(\lambda(\cdot) \in T)$ вытекает из включения $T \subseteq C$ и построения $C$. ■

Аналогично формулируется и точно так же доказывается теорема 2.6 для семейства $(A_x)_{x \in X}$ коммутирующих нормальных операторов. При этом оказывается, что $\Re(P(\lambda(\cdot)))$ $(\lambda(\cdot) \in T)$ *состоит из совместных обобщенных собственных векторов и семейства* $(A_x^*)_{x \in X}$, *отвечающих собственному значению* $\lambda(\cdot)$, т. е. для каждого $\varphi(\lambda(\cdot)) \in \Re(P(\lambda(\cdot)))$ наряду с (2.16) выполняется соотношение (2.17). Этот факт устанавливается так. Подобно теореме 2.6 доказывается существование $T$ (обозначим его через $T_1$). Затем аналогично доказывается существование множества $T_2$ полной внешней спектральной меры такого, что для каждого $\lambda(\cdot) \in T_2$ Сл.$(P(\lambda(\cdot))) = 1$ и $\Re(P(\lambda(\cdot)))$ состоит из $\varphi(\lambda(\cdot))$, для которых выполняется (2.17); при этом в доказательстве вместо формулы (1.6) нужно использовать вторую из формул (1.7). Затем можно положить $T = T_1 \cap T_2$. Требуется лишь пояснить, что $T$ имеет полную внешнюю спектральную меру. Это следует из рассуждений III, если наложить два разложения типа (2.35) для $T_1$ и $T_2$ и использовать разбиение пространства $\mathbb{C}^X$ типа (2.32), которое получается из наложения таких разбиений, фигурирующих при конструировании $T_1$ и $T_2$. ■

## 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОВМЕСТНЫМ ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ СЕМЕЙСТВА КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Докажем следующую теорему, играющую роль теоремы 2.6.

**Теорема 2.7.** *Пусть $(A_x)_{x \in X}$ — семейство коммутирующих самосопряженных операторов, действующих в пространстве $H_0$. Зафиксируем оснащение (2.18) с квазиядерным вложением $O: H_+ \to H_0$ и предположим, что это семейство допускает совместное его продолжение с пространством $D$, являющимся проективным пределом гильбертовых пространств. Пусть $\rho$ — компактифицированная спектральная мера семейства $(A_x)_{x \in X}$. Тогда существуют входящее в* supp $\rho$ *множество $\mathbf{T} \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^X)$ полной внешней компактифицированной спектральной меры (уточненный компактифицированный совместный спектр семейства $(A_x)_{x \in X}$) и отображение $\mathbf{T} \ni \lambda(\cdot) \mapsto (\mathrm{reg}\,\lambda(\cdot))(\cdot) \in \mathbb{R}^X$ такие, что при $\lambda(\cdot) \in \mathbf{T}$* Сл. $(P(\lambda(\cdot))) = 1$ *и область значений $\Re(P(\lambda(\cdot)))$ каждого оператора $P(\lambda(\cdot))$ состоит из совместных обобщенных собственных векторов семейства $(A_x)_{x \in X}$, отвечающих собственному значению* $(\mathrm{reg}\,\lambda(\cdot))(\cdot)$.

*Отображение* reg *имеет следующий вид. Строится последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ точек $x_n \in X$, $\lambda(x_n) \neq \infty$ $(\lambda(\cdot) \in \mathbf{T})$, и для каждого $x \in X$ ее зависящая от $x$ подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ такие,*



*что при каждом $\lambda(\cdot) \in \mathbf{T}$ существует предел $\lim_{k\to\infty} \lambda(x_{n_k}) \in \mathbb{R}^1$, равный по определению* $(\mathrm{reg}\,\lambda(\cdot))(x)$. *Если $\lambda(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $x \in X$ таковы, что $\lambda(x) \neq \infty$, то этот предел совпадает с $\lambda(x)$, иными словами,* $(\mathrm{reg}\,\lambda(\cdot))(x) = \lambda(x)$ *в каждой точке $x$, для которой $\lambda(x) \neq \infty$.*

Поясним сразу, что последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ строится на основании леммы 2.3, как и при доказательстве теоремы 2.6.

Доказательство этой теоремы является должным изменением рассуждений п. 5, учитывающим то обстоятельство, что сейчас с. р. е. не является правильной мерой и для использования понятия носителя необходимо перейти к компактификации. Справедлива следующая лемма, заменяющая лемму 2.2.

**Лемма 2.5.** *Для каждого $x \in X$ существует множество $\mathbf{Q}_x \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$ полной компактифицированной спектральной меры такое, что для каждого $\lambda(\cdot) \in \mathbf{Q}_x$ значение $\lambda(x) \neq \infty$ и выполняется равенство*

$$(P(\lambda(\cdot))u, A_x v)_{H_0} = (\lambda(x) P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} \quad (u \in H_+, v \in D). \tag{2.41}$$

Доказательство. При фиксированных $u, v \in D$ с помощью второго из равенств (2.24) и соотношений (1.19), (2.29) и (1.24) получим подобно (2.28) для $\mathbf{B} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$ такого, что $\mathbf{B} \cap \{\lambda(\cdot) \in \mathbf{R}^X \mid \lambda(x) = \infty\} = \varnothing$,

$$\int_{\mathbf{B}} (P(\lambda(\cdot))u, A_x v)_{H_0} d\rho(\lambda(\cdot)) = (O^+ \mathbf{E}(\mathbf{B}) Ou, A_x v)_{H_0} =$$

$$= (A_x E(\mathbf{B} \cap \mathbb{R}^X)u, v)_{H_0} = \int_{\mathbf{B} \cap \mathbb{R}^X} \lambda(x)\, d(E(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} =$$

$$= \int_{\mathbf{B}} \lambda(x)\, d(\mathbf{E}(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} = \int_{\mathbf{B}} \lambda(x) (P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} d\rho(\lambda(\cdot)). \tag{2.42}$$

Из (2.42) вследствие произвольности $\mathbf{B}$ и того, что $\rho(\{\lambda(\cdot) \in \mathbf{R}^X \mid \lambda(x) = \infty\}) = 0$, вытекает существование множества $\mathbf{Q}_{u,v,x} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$ полной меры $\rho$, для которого при $\lambda(\cdot) \in \mathbf{Q}_{u,v,x}$ $\lambda(x) \neq \infty$ и выполняется (2.41). Дальнейшее завершение доказательства такое же, как и в лемме 2.2. ■

Доказательство теоремы. Сперва при помощи лемм 2.3 и 2.4 повторяем шаг I доказательства теоремы 2.6: строим последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ и фиксируем для каждого $x \in X$ некоторую ее подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ такую, что в $H_+$ $\lim_{k\to\infty} A'_{x_{n_k}} u = A'_x u$ $(u \in L)$. Затем при помощи леммы 2.5 совершенно аналогично II строим множество $\mathbf{T}$, заменяя лишь в соответствующих местах обычные буквы на жирные. Так, полагаем

$$\mathbf{C} = \{\lambda(\cdot) \in \bigcap_{n=1} \mathbf{Q}_{x_n} \mid \text{Сл. } (P(\lambda(\cdot))) = 1\} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X),$$

строим $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{M}_{p,q}$ и

$$\mathbf{F}_{p,q} = \operatorname{supp} \rho_{\mathbf{M}_{p,q}} \subseteq \mathbf{M}_{p,q} \subseteq \mathbf{Q}_p \subseteq \mathbf{C} \quad (p = 1, \ldots, N; \quad q = 1, 2, \ldots). \tag{2.43}$$

Множество $\mathbf{T}$ строится в соответствии с формулой (2.35). Так как для каждого $x \in X$ $\lambda(x) \neq \infty$, если $\lambda(\cdot) \in \mathbf{Q}_x$, то для каждого $\lambda(\cdot)$ из множества $\mathbf{C}$ $\lambda(x_n) \neq \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Это свойство подавно выполняется для множеств $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{M}_{p,q}$, $\mathbf{F}_{p,q}$ и $\mathbf{T}$ в силу (2.43). Подобно III устанавливается, что $\mathbf{T}$ — полной внешней компактифицированной спектральной меры. При этом вместо теоремы 1.6 используется теорема 1.5, обеспечивающая правильность меры $\rho_{\mathbf{M}_{p,q}}$.

Пусть теперь $\lambda_0(\cdot) \in \mathbf{T}$ зафиксировано. Определим вещественнозначную функцию $(\operatorname{reg} \lambda_0(\cdot))(x)$ $(x \in X)$, полагая в каждой точке $x$ такой, что $\lambda_0(x) \neq \infty$, $(\operatorname{reg} \lambda_0(\cdot))(x) = \lambda_0(x)$. Если $x$ таково, что $\lambda_0(x) = \infty$, то $(\operatorname{reg} \lambda_0(\cdot))(x) = \lim\limits_{k \to \infty} \lambda_0(x_{n_k})$. Существование этого предела по существу доказано в IV, однако его удобно провести еще раз. Так как $\lambda_0(\cdot) \in \mathbf{T}$, то благодаря аналогу (2.35) $\lambda_0(\cdot) \in \mathbf{F}_{p,q}$ при некоторых $p$, $q$. Поэтому в силу (2.43) и аналога (2.33) $(P(\lambda_0(\cdot)) e_{i_p}, e_{i_p})_{H_0} \geqslant m_p^{-1}$. Из соотношения (2.41), выполняющегося для $\lambda(\cdot) \in \mathbf{C} \supseteq \mathbf{T}$; $u, v \in L$; $x = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, теперь вытекает

$$\lambda_0(x_{n_k}) = (P(\lambda_0(\cdot)) e_{i_p}, A'_{x_{n_k}} e_{i_p})_{H_0} (P(\lambda_0(\cdot)) e_{i_p}, e_{i_p})_{H_0}^{-1} \xrightarrow[k \to \infty]{}$$

$$(P(\lambda_0(\cdot)) e_{i_p}, A'_x e_{i_p})_{H_0} (P(\lambda_0(\cdot)) e_{i_p}, e_{i_p})_{H_0}^{-1} = (\operatorname{reg} \lambda_0(\cdot))(x). \tag{2.44}$$

Итак, $(\operatorname{reg} \lambda(\cdot))(x)$ определено для каждого $\lambda(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $x \in X$. Нужно проверить, что $\mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot)))$ $(\lambda(\cdot) \in \mathbf{T})$ состоит из совместных обобщенных собственных векторов семейства $(A_x)_{x \in X}$, отвечающих собственному значению $(\operatorname{reg} \lambda(\cdot))(\cdot)$. Теперь следует по существу повторить рассуждения IV—VI, заменив $\lambda(\cdot)$ на $(\operatorname{reg} \lambda(\cdot))(\cdot)$. Так, зафиксируем $x = x_0$. Нужно установить равенство

$$(P(\lambda(\cdot)) u, A_{x_0} v)_{H_0} = ((\operatorname{reg} \lambda(\cdot))(x_0) P(\lambda(\cdot)) u, v)_{H_0} \tag{2.45}$$
$$(\lambda(\cdot) \in \mathbf{T}; \quad u, v \in L)$$

(рассмотрение таких $u$, $v$ достаточно, см. п. 5, замечание 3).

Сперва повторяется без изменений шаг IV, так как отображение $\mathbf{R}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto \pi_x(\lambda(\cdot)) = \lambda(x)$ таково, что $(\pi_{x_{n_k}} \upharpoonright \mathbf{Q}_p)(\lambda(\cdot)) = \lambda(x_n) \neq \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В результате получаем, что последовательность сужений $(\pi_{x_{n_k}} \upharpoonright \mathbf{Q}_p)(\lambda(\cdot))$ $(k = 1, 2, \ldots;$ $x_{n_k}$ определяются по $x = x_0)$ сходится при $k \to \infty$ к некоторой вещественнозначной функции $f_p(\lambda(\cdot))$, непрерывной на $\mathbf{Q}_p$ и измеримой относительно $\sigma$-алгебры $(\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X))_{\mathbf{Q}_p}$ ($\mathbf{Q}_p$ топологизируется относительной топологией пространства $\mathbf{R}^X$, $(\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X))_{\mathbf{Q}_p} = \{\mathbf{B} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X) \mid \mathbf{B} \subseteq \mathbf{Q}_p\}$).



Как и в V, строим функцию $\mathbf{R}^X \setminus \mathbf{Q}_0 = \bigcup\limits_{p=1}^{N} \mathbf{Q}_p \ni \lambda(\cdot) \mapsto f(\lambda(\cdot)) = f_p(\lambda(\cdot)) \in \mathbb{R}^1$, если $\lambda(\cdot) \in \mathbf{Q}_p$. Вместо (2.38) установим равенство

$$(f \upharpoonright \mathbf{T})(\lambda(\cdot)) = (\operatorname{reg} \lambda(\cdot))(x_0) \quad (\lambda(\cdot) \in \mathbf{T}). \tag{2.46}$$

Пусть $\lambda_0(\cdot) \in \mathbf{T}$ зафиксирована. Если $\lambda_0(x_0) = \infty$, то $(\operatorname{reg} \lambda(\cdot))(x_0)$ определяется соотношением (2.44) и таким же образом в IV, V определяется $f$, поэтому сейчас (2.46) справедливо.

Предположим, что $\lambda_0(x_0) \neq \infty$. Согласно аналогу (2.35) найдутся такие $p = 1, \ldots, N$ и $q = 1, 2, \ldots$, что $\lambda_0(\cdot) \in \mathbf{F}_{p,q}$. Рассмотрим соответствующие $\mathbf{M}_{p,q}$ и $\rho_{\mathbf{M}_{p,q}}$. Благодаря (1.25), второму из представлений (2.24) и аналогу (2.33) подобно (2.39) получим

$$\|(A'_{x_{n_k}} - A'_{x_0}) e_{i_p}\|_{H_+}^2 \geqslant \int\limits_{\mathbf{R}^X \setminus \mathbf{S}} |\lambda(x_{n_k}) - \lambda(x_0)|^2 \, d(\mathbf{E}(\lambda(\cdot)) e_{i_p}, e_{i_p})_{H_0} =$$
$$= \int\limits_{\mathbf{R}^X \setminus \mathbf{S}} |\pi_{x_{n_k}}(\lambda(\cdot)) - \pi_{x_0}(\lambda(\cdot))|^2 (P(\lambda(\cdot)) e_{i_p}, e_{i_p})_{H_0} d\rho(\lambda(\cdot)) \geqslant \tag{2.47}$$
$$\geqslant \frac{1}{m_p} \int\limits_{\mathbf{M}_{p,q} \setminus \mathbf{S}} |(\pi_{x_{n_k}} \upharpoonright \mathbf{M}_{p,q})(\lambda(\cdot)) - (\pi_{x_0} \upharpoonright \mathbf{M}_{p,q})(\lambda(\cdot))|^2 \, d\rho_{\mathbf{M}_{p,q}}(\lambda(\cdot)).$$

Здесь $\mathbf{S} = \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{\lambda(\cdot) \in \mathbf{R}^X \mid \lambda(x_{n_k}) = \infty\}\right) \cup \{\lambda(\cdot) \in \mathbf{R}^X \mid \lambda(x_0) = \infty\} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^X)$, $\mathbf{E}(\mathbf{S}) = \rho(\mathbf{S}) = 0$, $\rho_{\mathbf{M}_{p,q}}(\mathbf{M}_{p,q} \cap \mathbf{S}) = 0$. Как и в (2.39), перейдем в (2.47) к пределу при $k \to \infty$, в результате получим

$$0 = \int\limits_{\mathbf{M}_{p,q} \setminus \mathbf{S}} |(f \upharpoonright \mathbf{M}_{p,q})(\lambda(\cdot)) - (\pi_{x_0} \upharpoonright \mathbf{M}_{p,q})(\lambda(\cdot))|^2 \, d\rho_{\mathbf{M}_{p,q}}(\lambda(\cdot)). \tag{2.48}$$

Обозначим подынтегральную функцию в (2.48) через $g(\lambda(\cdot)) \geqslant 0$. Так как $f_p(\lambda(\cdot))$ непрерывна на $\mathbf{Q}_p$, а $\lambda(\cdot) \mapsto \lambda(x_0)$ непрерывна на $\mathbf{R}^X \setminus \mathbf{S}$, то $\mathbf{M}_{p,q} \setminus \mathbf{S} \ni \lambda(\cdot) \mapsto g(\lambda(\cdot))$ непрерывна в топологии $\mathbf{M}_{p,q} \setminus \mathbf{S}$, индуцированной топологией $\mathbf{R}^X$. Точка $\lambda_0(\cdot) \in \mathbf{M}_{p,q} \setminus \mathbf{S}$, так как $\lambda_0(x_0) \neq \infty$. Равенство (2.46) сейчас означает, что $g(\lambda_0(\cdot)) = 0$. Предположим противное, тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и окрестность точки $\lambda_0(\cdot)$ в пространстве $\mathbf{M}_{p,q} \setminus \mathbf{S}$, т. е. множество вида $\mathbf{U} \setminus \mathbf{S}$, где $\mathbf{U}$ — окрестность в $\mathbf{M}_{p,q}$, такие, что $g(\lambda(\cdot)) \geqslant \varepsilon$ при $\lambda(\cdot) \in \mathbf{U} \setminus \mathbf{S}$. Так как $\mathbf{U} \cap \operatorname{supp} \rho_{\mathbf{M}_{p,q}} \neq \varnothing$, то $\rho_{\mathbf{M}_{p,q}}(\mathbf{U}) > 0$; $\rho_{\mathbf{M}_{p,q}}(\mathbf{U} \cap \mathbf{S}) = 0$. Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_{\mathbf{M}_{p,q} \setminus \mathbf{S}} g(\lambda(\cdot)) \, d\rho_{\mathbf{M}_{p,q}}(\lambda(\cdot)) > 0,$$

а это абсурдно. Итак, (2.46) установлено. Теперь вывод равенства (2.45) из (2.46) производится точно так, как и в п. VI доказательства теоремы 2.6. Кроме того, ясно, что Сл. $(P(\lambda(\cdot))) = 1 \quad (\lambda(\cdot) \in \in \mathbf{T})$. ■

Отметим, что множества $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $\mathbf{T}$ тесно связаны. После того как их выбор произведен, имеется свобода в выборе по заданной $x \in X$ подпоследовательности $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ такой, что в $H_+$ $\lim_{k\to\infty} A'_{x_{n_k}} u = A'_x u$ $(u \in L)$. Заметим, что значение $(\mathrm{reg}\, \lambda(\cdot))(x)$ $(\lambda(\cdot) \in \mathbf{T})$ уже не зависит от последнего выбора. Это следует из (2.44).

Разумеется, теорема 2.7 с понятными изменениями в формулировке справедлива и для семейства $(A_x)_{x\in X}$ коммутирующих нормальных операторов.

## 7. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМ О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОВМЕСТНЫМ ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ

Сформулируем результаты теорем 2.3, 2.5—2.7 в несколько более общей и удобной форме для нормальных операторов. При этом мы будем пользоваться понятием модификации меры, введенным в § 1, п. 10.

**Теорема 2.8.** *Пусть $(A_x)_{x\in X}$ — семейство коммутирующих нормальных операторов, действующих в пространстве $H_0$, среди которых лишь не более чем счетное число неограниченных. Зафиксируем оснащение* (2.18) *с квазиядерным вложением $O: H_+ \to H_0$ и предположим, что это семейство допускает совместное его продолжение с пространством $D$, являющимся проективным пределом гильбертовых пространств. Обозначим через $T \subseteq \mathrm{supp}\,\rho$ уточненный совместный спектр семейства. Зафиксируем множество $Q$ такое, что $T \subseteq Q \subseteq \mathbb{C}^X$, и построим по нему модифицированные с. р. е. $\hat{E}$ и спектральную меру $\hat{\rho}$, сосредоточенную на $Q$.*

*Справедливо представление*

$$O^+\hat{E}(\hat{B})\,O = \int_{\hat{B}} \hat{P}(\lambda(\cdot))\, d\hat{\rho}(\lambda(\cdot)) \quad (\hat{B} \in \mathcal{C}_\sigma(Q) = (\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X))(Q)), \tag{2.49}$$

*где $\sigma$-алгебра $\mathcal{C}_\sigma(Q)$ состоит из всех $\hat{B} \subseteq Q$ таких, что $\hat{B} = B \cap Q$ при некотором $B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)$. В формуле* (2.49) *$\hat{P}$ равно сужению $P \upharpoonright Q$ оператора $P(\lambda(\cdot))$ обобщенного проектирования, интеграл сходится по гильбертовой норме. Множество $T$ имеет полную внешнюю модифицированную спектральную меру и обладает тем свойством, что для каждого $\lambda(\cdot) \in T$* Сл. $(\hat{P}(\lambda(\cdot))) = 1$ *и область значений $\mathfrak{R}(\hat{P}(\lambda(\cdot)))$ состоит из совместных собственных векторов семейства $(A_x)_{x\in X}$, отвечающих собственному значению $\lambda(\cdot)$, одновременно являющихся такими же векторами семейства $(A^*_x)_{x\in X}$, отвечающих $\lambda(\cdot)$.*



Замечания. 1. Ясно, что

$$\hat{\rho}(\hat{B}) = \text{Сл.}\,(O^+\hat{E}(\hat{B})\,O) \quad (\hat{B} \in \mathcal{C}_\sigma(Q)). \tag{2.50}$$

2. Для оператора $A_x$ и его сопряженного $A^*_x$ справедливы формулы

$$A_x = \int_Q \lambda(x)\, d\hat{E}(\lambda(\cdot)),\ A^*_x = \int_Q \overline{\lambda(x)}\, d\hat{E}(\lambda(\cdot)),$$

$$\mathfrak{D}(A_x) = \mathfrak{D}(A^*_x) = \left\{ f \in H_0 \,\middle|\, \int_Q |\lambda(x)|^2\, d(\hat{E}(\lambda(\cdot)) f, f)_{H_0} < \infty \right\} \tag{2.51}$$

$$(x \in X).$$

Эти формулы вытекают из представлений (1.7) и соотношения (1.37).

Доказательство. Формула (2.49) вытекает из (1.36), первого равенства (2.24) и (1.37) следующим образом: при произвольных $u, v \in H_+$ имеем

$$(O^+\hat{E}(\hat{B})\,Ou, v)_{H_0} = (O^+E(B)\,Ou, v)_{H_0} = \int_{\mathbb{C}^X} \varkappa_B(\lambda(\cdot))(P(\lambda(\cdot))\,u, v)_{H_0} \times$$

$$\times\, d\rho(\lambda(\cdot)) = \int_Q ((\varkappa_B(\cdot)(P(\cdot)\,u, v)_{H_0}) \upharpoonright Q)(\lambda(\cdot))\, d\hat{\rho}(\lambda(\cdot)) =$$

$$= \Big(\int_{\hat{B}} \hat{P}(\lambda(\cdot))\, d\hat{\rho}(\lambda(\cdot))\, u, v\Big)_{H_0}.$$

Требуемая сходимость интеграла (2.49) вытекает из (1.37):

$$\int_Q |\hat{P}(\lambda(\cdot))|\, d\hat{\rho}(\lambda(\cdot)) = \int_{\mathbb{C}^X} |P(\lambda(\cdot))|\, d\rho(\lambda(\cdot)) < \infty.$$

Ясно, что $T$ имеет полную внешнюю модифицированную спектральную меру: если $\hat{B} \in \mathcal{C}_\sigma(Q)$ содержит $T$, то для соответствующего $B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)$ также $B \supseteq T$, откуда $\rho(B) = \rho(\mathbb{C}^X)$ и $\hat{\rho}(\hat{B}) = \hat{\rho}(Q)$.

Остальные два утверждения вытекают из теоремы 2.6. ■

**Теорема 2.9.** *Пусть выполнены предположения теоремы 2.8, но множество неограниченных операторов $A_x$ имеет произвольную мощность. Обозначим через $\mathbf{T} \subseteq \mathrm{supp}\,\boldsymbol{\rho}$ уточненный компактифицированный совместный спектр этого семейства и зафиксируем множество $\mathbf{Q}$ такое, что $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{C}^X$. Тогда для модифицированных* *посредством* **Q** *к. с. р. е.* $\hat{\mathbf{E}}$ *и компактифицированной спектральной меры* $\hat{\rho}$ *справедливы утверждения теоремы* 2.8 *с тем отличием, что требуемые буквы заменяются жирными, а* $\mathfrak{R}(\hat{P}(\boldsymbol{\lambda}(\cdot)))$, *где* $\boldsymbol{\lambda}(\cdot) \in \mathbf{T}$, *состоит из совместных обобщенных собственных векторов семейства* $(A_x)_{x \in X}$, *отвечающих собственному значению* $(\mathrm{reg}\,\boldsymbol{\lambda}(\cdot))(\cdot)$ *и одновременно являющихся такими же векторами семейства* $(A_x^*)_{x \in X}$, *отвечающих* $\overline{(\mathrm{reg}\,\boldsymbol{\lambda}(\cdot))(\cdot)}$ *(регуляризация описана в теореме* 2.7).

Разумеется, справедливы с должной переформулировкой и оба замечания к теореме 2.8 (в связи с аналогами (2.51) см. (1.25)). Сформулированная теорема выводится из теорем 2.5 и 2.7 аналогично выводу теоремы 2.8 из теорем 2.5 и 2.6.

В случае $\mathbf{Q} = \mathbf{T}$ теорема 2.9 может быть трансформирована таким образом, что соответствующее разложение единицы будет определено на обычных, не принимающих бесконечные значения функциях. Для этого напомним хорошо известные простые факты, связанные с отображением мер.

Пусть $\boldsymbol{\Lambda}$ — абстрактное пространство, $\mathfrak{A}_1$ — некоторая $\sigma$-алгебра его множеств и $\mathfrak{A}_1 \ni \mathbf{B} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{B})$ — разложение единицы в гильбертовом пространстве $H$. Предположим, что имеется фиксированное отображение $\boldsymbol{\Lambda} \ni \boldsymbol{\lambda} \mapsto \varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda \in \Lambda$ пространства $\boldsymbol{\Lambda}$ на некоторое другое абстрактное пространство $\Lambda$. Тогда совокупность $\mathfrak{A}_\varphi = \{B \subseteq \Lambda \mid \varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_1\}$ образует $\sigma$-алгебру множеств пространства $\Lambda$, на которой можно определить операторнозначную меру $E_\varphi$, полагая $E_\varphi(B) = \mathbf{E}(\varphi^{-1}(B))$. Легко видеть, что $E_\varphi$ также будет разложением единицы, которое называется $\varphi$-образом разложения $\mathbf{E}$. Если функция $\Lambda \ni \lambda \mapsto F(\lambda) \in \mathbb{C}^1$ измерима относительно $\mathfrak{A}_\varphi$, то $F(\varphi(\boldsymbol{\lambda}))$ будет измеримой относительно $\mathfrak{A}_1$. Из определения интеграла по разложению единицы немедленно вытекает равенство

$$\int_{\boldsymbol{\Lambda}} F(\varphi(\boldsymbol{\lambda}))\, d\mathbf{E}(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{\Lambda} F(\lambda)\, dE_\varphi(\lambda) = A, \tag{2.52}$$

$$\mathfrak{D}(A) = \Big\{ f \in H \,\Big|\, \int_{\boldsymbol{\Lambda}} |F(\varphi(\boldsymbol{\lambda}))|^2 d(\mathbf{E}(\boldsymbol{\lambda}) f, f)_H = \int_{\Lambda} |F(\lambda)|^2 d(E_\varphi(\lambda) f, f)_H < \infty \Big\}.$$

В дальнейшем (например, в § 3) нам понадобятся еще некоторые конструкции, связанные с отображением мер. Напомним их сразу. Во-первых, введенное сейчас понятие $\varphi$ образа $\mathbf{E}$ переносится на любую операторнозначную меру $\boldsymbol{\Theta}$, заданную на $\mathfrak{A}_1$: $\Theta_\varphi(B) = \boldsymbol{\Theta}(\varphi^{-1}(B))$ $(B \in \mathfrak{A}_\varphi)$. Во-вторых, можно не предполагать равенства $\varphi(\boldsymbol{\Lambda}) = \Lambda$, а считать, что $\varphi(\boldsymbol{\Lambda}) \subseteq \Lambda$. Тогда положим $\mathfrak{A}_\varphi = \{B \subseteq \Lambda \mid \varphi^{-1}(B \cap \varphi(\boldsymbol{\Lambda})) \in \mathfrak{A}_1\}$, $\Theta_\varphi(B) = \boldsymbol{\Theta}(\varphi^{-1}(B \cap \varphi(\boldsymbol{\Lambda})))$ $(B \in \mathfrak{A}_\varphi)$. Иными словами, мы присоединяем к $\sigma$-алгебре, построенной старой процедурой на $\varphi(\boldsymbol{\Lambda})$, любые множества из $\Lambda \setminus \varphi(\boldsymbol{\Lambda})$ и считаем, что их мера $\Theta_\varphi$ равна нулю. В-третьих, можно считать заранее заданной некоторую $\sigma$-алгебру $\mathfrak{A}$ множеств пространства $\Lambda$, обладающую тем свойством, что $\varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_1$ при любом $B \in \mathfrak{A}$, и положить $\Theta_\varphi(B) = \boldsymbol{\Theta}(\varphi^{-1}(B))$ $(B \in \mathfrak{A})$ (например, если $\boldsymbol{\Lambda} \ni \boldsymbol{\lambda} \mapsto \varphi(\boldsymbol{\lambda}) \in \Lambda = \mathbb{C}^1$ — измеримая функция, то можно положить $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^1)$). Во всех этих случаях меру $\Theta_\varphi$ будем попрежнему называть $\varphi$-образом $\boldsymbol{\Theta}$; соотношения (2.52), очевидно, сохраняются и приобретают формулировку типа лемм 1.3 и 1.6.

Возвратимся к теореме 2.9 в случае $\mathbf{Q} = \mathbf{T}$. Рассмотрим пространство $\mathbf{T}$ и модифицированное посредством $\mathbf{T}$ к. с. р. е. $\hat{\mathbf{E}}$; мера $\hat{\mathbf{E}}$ является разложением единицы, определенным на $\sigma$-алгебре $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{T}) = (\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{C}^X))(\mathbf{T})$, состоящей из всех множеств $\hat{\mathbf{B}} \subseteq \mathbf{T}$, имеющих вид $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \cap \mathbf{T}$, где $\mathbf{B} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{C}^X)$. Отображение

$$\mathbf{T} \ni \boldsymbol{\lambda}(\cdot) \mapsto (\mathrm{reg}\,\boldsymbol{\lambda}(\cdot))(\cdot) \in \mathrm{reg}\,\mathbf{T} \subseteq \mathbb{C}^X \tag{2.53}$$

является отображением $\mathbf{T}$ на $\Lambda = \mathrm{reg}\,\mathbf{T}$. Применим к $\hat{\mathbf{E}}$ и (2.53) только что упомянутую конструкцию и построим reg-образ $\hat{E}_{\mathrm{reg}}$ разложения единицы $\hat{\mathbf{E}}$. В результате получим разложение единицы $\mathcal{C}_\sigma[\mathrm{reg}\,\mathbf{T}] = \{B \subseteq \mathrm{reg}\,\mathbf{T} \mid \mathrm{reg}^{-1}(B) \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{T})\} \ni B \mapsto \hat{E}_{\mathrm{reg}}(B) = \hat{\mathbf{E}}(\mathrm{reg}^{-1}(B))$, связанное стандартными формулами (2.52) с $\hat{\mathbf{E}}$.

Для получения представлений типа (2.51) в терминах $\hat{E}_{\mathrm{reg}}$ нужно доказать следующую лемму.

**Лемма 2.6.** *При каждом фиксированном* $x \in X$ *функция* $\mathrm{reg}\,\mathbf{T} \ni \lambda(\cdot) \mapsto F(\lambda(\cdot)) = \lambda(x) \in \mathbb{C}^1$ *измерима относительно* $\sigma$*-алгебры* $\mathcal{C}_\sigma[\mathrm{reg}\,\mathbf{T}]$.

Доказательство. Благодаря конструкции $\mathcal{C}_\sigma[\mathrm{reg}\,\mathbf{T}]$ следует установить измеримость относительно $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{T})$ функции $\mathbf{T} \ni \boldsymbol{\lambda}(\cdot) \mapsto G(\boldsymbol{\lambda}(\cdot)) = (\mathrm{reg}\,\boldsymbol{\lambda}(\cdot))(x) \in \mathbb{C}^1$. Согласно теореме 2.7 существует последовательность $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ $(x_{n_k} \in X)$ такая, что при каждом $\boldsymbol{\lambda}(\cdot) \in \mathbf{T}$ $\boldsymbol{\lambda}(x_{n_k}) \neq \infty$ и $(\mathrm{reg}\,\boldsymbol{\lambda}(\cdot))(x) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\lambda}(x_{n_k})$. Иными словами, если ввести функции $\mathbf{T} \ni \boldsymbol{\lambda}(\cdot) \mapsto G_k(\boldsymbol{\lambda}(\cdot)) = \boldsymbol{\lambda}(x_{n_k})$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $G(\boldsymbol{\lambda}(\cdot)) = \lim_{k\to\infty} G_k(\boldsymbol{\lambda}(\cdot))$ $(\boldsymbol{\lambda}(\cdot) \in \mathbf{T})$, поэтому достаточно установить измеримость относительно $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{T})$ каждой функции $G_k$. Но $G_k$ является сужением на $\mathbf{T}$ измеримой относительно $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{C}^X)$ функции, равной нулю на $\{\boldsymbol{\lambda}(\cdot) \in \mathbf{C}^X \mid \boldsymbol{\lambda}(x_{n_k}) = \infty\}$ и задающейся соотношением $\mathbf{C}^X \ni \boldsymbol{\lambda}(\cdot) \mapsto \boldsymbol{\lambda}(x_{n_k})$ вне этого множества. В силу конструкции $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{T})$ это сужение измеримо. ■

При помощи этой леммы и формул (2.52) заключаем, что для фиксированного $x \in X$ определен нормальный оператор

$$A = \int_{\operatorname{reg} \mathbf{T}} \lambda(x)\, d\hat{E}_{\operatorname{reg}}(\lambda(\cdot)) = \int_{\mathbf{T}} (\operatorname{reg} \lambda(\cdot))(x)\, d\hat{\mathbf{E}}(\lambda(\cdot)),$$
$$\mathfrak{D}(A) = \left\{ f \in H_0 \,\Big|\, \int_{\operatorname{reg} \mathbf{T}} |\lambda(x)|^2\, d(\hat{E}_{\operatorname{reg}}(\lambda(\cdot)) f, f)_{H_0} < \infty \right\}. \tag{2.54}$$

По определению отображения reg $\{\lambda(\cdot) \in \mathbf{T} \mid (\operatorname{reg} \lambda(\cdot))(x) \neq \lambda(x)\} \subseteq \{\lambda(\cdot) \in \mathbf{C}^X \mid \lambda(x) = \infty\}$, причем в силу леммы 2.6 первое из этих множеств входит в $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{T})$. Так как мера $\mathbf{E}$ второго множества равна нулю, то и $\hat{\mathbf{E}}(\{\lambda(\cdot) \in \mathbf{T} \mid \operatorname{reg} \lambda(\cdot))(x) \neq \lambda(x)\}) = 0$. Поэтому второй интеграл в (2.54) равен $\int_{\mathbf{T}} \lambda(x)\, d\hat{\mathbf{E}}(\lambda(\cdot)) = A_x$ (см. аналог формул (2.51) для $\hat{\mathbf{E}}$) и, следовательно, $A_x = A$. Отсюда получаем представление, аналогичное (2.54), и для $A_x^*$.

Полученные представления не очень удобны, так как $\sigma$-алгебра $\mathcal{C}_\sigma[\operatorname{reg} \mathbf{T}]$ имеет не вполне прозрачную структуру. Мы сейчас произведем их дальнейшую трансформацию. Пусть подобно теореме 2.8 $Q$ таково, что $\operatorname{reg} \mathbf{T} \subseteq Q \subseteq \mathbb{C}^X$. Построим прежнюю $\sigma$-алгебру $\mathcal{C}_\sigma\ (Q)$.

**Лемма 2.7.** *Для каждого* $B \in \mathcal{C}_\sigma(Q)$ *пересечение* $B \cap \operatorname{reg} \mathbf{T} \in \mathcal{C}_\sigma[\operatorname{reg} \mathbf{T}]$.

Доказательство. $\sigma$-алгебру $\mathcal{C}_\sigma(Q)$, очевидно, можно понимать как $\sigma$-оболочку алгебры $\mathcal{C}(Q)$, состоящей из цилиндрических множеств $Ц(Q;\ x_1, \ldots, x_p;\ \Delta) = \{\lambda(\cdot) \in Q \mid (\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p)) \in \Delta\}$ $(\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^p))$. Поэтому достаточно доказать, что для любого такого множества $(Ц(Q;\ x_1, \ldots, x_p;\ \Delta)) \cap \operatorname{reg} \mathbf{T} \in \mathcal{C}_\sigma[\operatorname{reg} \mathbf{T}]$. Но это пересечение равно $\{\lambda(\cdot) \in \operatorname{reg} \mathbf{T} \mid (\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p)) \in \Delta\}$, т. е. совпадает с полным прообразом множества $\Delta$ при отображении $\operatorname{reg} \mathbf{T} \ni \lambda(\cdot) \mapsto (\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p)) \in \mathbb{C}^p$. Такое отображение измеримо относительно $\sigma$-алгебры $\mathcal{C}_\sigma[\operatorname{reg} \mathbf{T}]$, так как согласно лемме 2.6 в этом же смысле измерима каждая координата $\operatorname{reg} \mathbf{T} \ni \lambda(\cdot) \mapsto \lambda(x_n) \in \mathbb{C}^1$. Поэтому полный прообраз борелевского $\Delta \subseteq \mathbb{C}^p$ входит в $\mathcal{C}_\sigma[\operatorname{reg}\ \mathbf{T}]$. ■

Введем теперь меру $\mathcal{C}_\sigma(Q) \ni B \mapsto E_{\operatorname{reg}}(B) = \hat{E}_{\operatorname{reg}}(B \cap \operatorname{reg} \mathbf{T})$. Ясно, что она будет разложением единицы на $Q$. Так как при фиксированном $x \in X$ функция $Q \ni \lambda(\cdot) \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{C}^1$ измерима относительно $\mathcal{C}_\sigma(Q)$, то соотношение (2.54) для $A = A_x$ можно переписать в виде $A_x = \int_Q \lambda(x)\, dE_{\operatorname{reg}}(\lambda(\cdot))$. Аналогичное представление имеет место и для $A_x^*$.



Резюмируя сказанное, приходим к следующей теореме.

**Теорема 2.10.** *Пусть* $(A_x)_{x \in X}$ *— семейство коммутирующих нормальных операторов, действующих в пространстве* $H_0$. *Зафиксируем оснащение* (2.18) *с квазиядерным вложением* $O: H_+ \to H_0$ *и предположим, что это семейство допускает совместное его продолжение с пространством* $D$, *являющимся проективным пределом гильбертовых пространств. Зафиксируем множество* $Q$ *такое, что* $\operatorname{reg} \mathbf{T} \subseteq Q \subseteq \mathbb{C}^X$, *и построим* $\sigma$-*алгебру* $\mathcal{C}_\sigma(Q)$.

*Утверждается, что существует разложение единицы* $\mathcal{C}_\sigma(Q) \ni B \mapsto E_{\operatorname{reg}}(B)$ *такое, что справедливы представления*

$$A_x = \int_Q \lambda(x)\, dE_{\operatorname{reg}}(\lambda(\cdot)), \quad A_x^* = \int_Q \overline{\lambda(x)}\, dE_{\operatorname{reg}}(\lambda(\cdot)),$$
$$\mathfrak{D}(A_x) = \mathfrak{D}(A_x^*) = \left\{ f \in H_0 \,\Big|\, \int_Q |\lambda(x)|^2 d(E_{\operatorname{reg}}(\lambda(\cdot)) f, f)_{H_0} < \infty \right\} \tag{2.55}$$
$$(x \in X).$$

*Для каждого* $\lambda(\cdot) \in \operatorname{reg} \mathbf{T}$ *имеют место равенства*

$$(\hat{P}(\lambda(\cdot))u,\ A_x^* v)_{H_0} = (\lambda(x)\hat{P}(\lambda(\cdot))u,\ v)_{H_0}, \tag{2.56}$$
$$(\hat{P}(\lambda(\cdot))u,\ A_x v)_{H_0} = (\overline{\lambda(x)}\hat{P}(\lambda(\cdot))u,\ v)_{H_0} \quad (x \in X;\quad u \in H_+,\ v \in D).$$

*Здесь* $\hat{P}$ *— оператор обобщенного проектирования из теоремы* 2.9, $\lambda(\cdot) \in \mathbf{T}$ *таково, что* $(\operatorname{reg} \lambda(\cdot))(\cdot) = \lambda(\cdot)$.

Отметим, что отображение (2.53), вообще говоря, не взаимно однозначно. Поэтому в общем случае не удается от функции $\hat{P}(\cdot)$, заданной на $\mathbf{T}$, перейти к аналогичной функции, заданной на $\operatorname{reg} \mathbf{T}$, и трансформировать посредством (2.52) аналог равенства (2.49). Таким образом, о мере $\hat{\mathbf{E}}$ и операторах $\hat{P}(\lambda(\cdot))$ из (2.56) можно лишь утверждать, что

$$O^+ \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{B}})\, O = \int_{\hat{\mathbf{B}}} \hat{P}(\lambda(\cdot))\, d\hat{\rho}(\lambda(\cdot)) \quad (\hat{\mathbf{B}} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{T})). \tag{2.57}$$

Разумеется, функция $\mathbf{T} \ni \lambda(\cdot) \mapsto \hat{P}(\lambda(\cdot))$ слабо измерима относительно $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{T})$, ее значения — неотрицательные операторы из $H_+$ в $H_-$, причем $|\hat{P}(\lambda(\cdot))| \leqslant$ Сл. $(\hat{P}(\lambda(\cdot))) = 1$ для каждого $\lambda(\cdot) \in \mathbf{T}$. Интеграл (2.57) сходится по гильбертовой норме.

Ясно, что в случае самосопряженных операторов все результаты этого пункта сохраняются. В применениях наиболее удобны теорема 2.8 (в случае не более чем счетного числа неограниченных операторов) и теорема 2.10 (в общем случае).

## 8. ОПЕРАТОРЫ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ИНДЕКСА

Установим простое, но существенное дополнение к теоремам 2.6—2.10, показывающее, в частности, что при несложном добавочном условии интегрирование в представлениях (2.49), (2.51) и (2.55) будет вестись по пространству непрерывных или даже гладких функций.

**Теорема 2.11.** *Предположим, что множество индексов $X$ является топологическим пространством, а операторы $A_x$ зависят от $x \in X$ непрерывно в следующем смысле: для каждого $u \in D$ вектор-функция*

$$X \ni x \mapsto A_x^* u \in H_+ \tag{2.58}$$

*слабо непрерывна. Если это условие выполняется дополнительно к условиям теорем 2.8 или 2.10, то $T$ или соответственно $\operatorname{reg} \mathbf{T}$ состоит из непрерывных комплекснозначных (или вещественнозначных в случае самосопряженных операторов $A_x$) функций. Если, более того, $X$ — дифференцируемое многообразие, а (2.58) $k$ раз слабо непрерывно дифференцируема, то эти множества состоят из $k$ раз непрерывно дифференцируемых функций.*

Доказательство. Проведем его для случая теоремы 2.8. Так как Сл. $(P(\lambda(\cdot)) = 1$ при $\lambda(\cdot) \in T$, то для каждого $\lambda(\cdot) \in T$ найдется зависящий от $\lambda(\cdot)$ вектор $u \in D$ такой, что $(P(\lambda(\cdot))\, u, u)_{H_0} > 0$. Теперь из (2.27) получаем $\lambda(x) = (P(\lambda(\cdot))\, u, A_x^* u)_{H_0} (P(\lambda(\cdot))\, u, u)_{H_0}^{-1}$ $(x \in X)$, откуда и следует утверждение. Для случая теоремы 2.10 рассуждения аналогичны. ■

Из этой теоремы вытекает, что при выполнении условия (2.58) интегрирование в формулах (2.51) и (2.49), если модификация построена посредством $Q = T$, ведется по множествам непрерывных на $X$ функций; аналогичная ситуация и в случае формул (2.55). Функции, по множествам из которых ведется интегрирование в (2.57), будут всюду непрерывны за исключением тех точек, где они принимают значение $\infty$. В случае гладкости вектор-функции (2.58) все упомянутые интегрирования ведутся по множествам гладких функций.

## 9. ТЕОРИЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ В СЛУЧАЕ ОСНАЩЕНИЯ ЯДЕРНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

Часто для теории разложений удобна более жесткая, чем (2.18) и (2.13), схема введения оснащения и его продолжения; она приводит к более просто формулируемым, хотя и менее точным, результатам. Опишем эту схему для общего случая нормальных операторов и покажем, как соответствующие результаты выводятся из результатов п. 4—8.



Пусть $H_0$ — сепарабельное гильбертово пространство, в котором плотно сепарабельное ядерное пространство $\Phi$, причем включение $\Phi \subseteq H_0$ топологическое; само $\Phi$ является проективным пределом гильбертовых пространств: $\Phi = \operatorname{pr}\lim_{\tau \in T} H_\tau$. Беря сопряженное пространство $\Phi'$ антилинейных функционалов и снабжая его слабой топологией, получаем цепочку с топологическими включениями

$$\Phi' \supseteq H_0 \supseteq \Phi \tag{2.59}$$

($f \in H_0$ отождествляется с антилинейным функционалом $l_f \in \Phi'$, где $l_f(\varphi) = (f, \varphi)_{H_0}$ $(\varphi \in \Phi)$). Действие функционала $\alpha \in \Phi'$ на вектор $\varphi \in \Phi$ будем записывать в виде $(\alpha, \varphi)_{H_0}$. Оператор вложения $\Phi \to H_0$ обозначим через $O$. Тогда сопряженный оператор $O^+$: $H_0 \to \Phi'$ будет, как легко видеть, оператором вложения $H_0 \to \Phi'$.

Пусть $(A_x)_{x \in X}$ — произвольное семейство операторов с плотными областями определения, действующих в $H_0$. Предположим, что

а) пересечение областей определения $\bigcap_{x \in X} \mathfrak{D}(A_x^*) \supseteq \Phi$ и для каждого $x \in X$ сужение $A_x^* \restriction \Phi$ действует непрерывно из $\Phi$ в $\Phi$, т. е. $A_x^* \restriction \Phi \in \mathcal{L}(\Phi \to \Phi)$.

В соответствии с определением на стр. 172 будем говорить, что вектор $\varphi(\lambda(\cdot)) \in \Phi'$ — совместный обобщенный собственный вектор семейства $(A_x)_{x \in X}$, отвечающий собственному значению $\lambda(\cdot) \in \mathbb{C}^X$, если для каждого $x \in X$

$$(\varphi(\lambda(\cdot)), \; A_x^* v)_{H_0} = (\lambda(x)\, \varphi(\lambda(\cdot)), v)_{H_0} \quad (v \in \Phi). \tag{2.60}$$

Разумеется, это определение эквивалентно тому, что $\varphi(\lambda(\cdot)) \in \Phi'$ для каждого $x \in X$ является собственным вектором с собственным значением $\lambda(x)$ некоторого расширения $\hat{A}_x : \Phi' \to \Phi'$ оператора $A_x$ (а именно, $\hat{A}_x = (A_x^* \restriction \Phi)^+$; $+$ — сопряжение для $\mathcal{L}(\Phi \to \Phi)$).

В случае семейства $(A_x)_{x \in X}$ нормальных операторов дополнительно предполагается, что $\bigcap_{x \in X} \mathfrak{D}(A_x) \supseteq \Phi$ и для каждого $x \in X$ $A_x \restriction \Phi \in \mathcal{L}(\Phi \to \Phi)$ (если противное не оговаривается). Тогда можно рассматривать векторы $\varphi(\lambda(\cdot)) \in \Phi'$, являющиеся совместными обобщенными собственными векторами и семейства $(A_x^*)_{x \in X}$, отвечающими собственному значению $\overline{\lambda(\cdot)} \in \mathbb{C}^X$. Иными словами, для каждого $x \in X$ должно выполняться соотношение

$$(\varphi(\lambda(\cdot)), \; A_x v)_{H_0} = (\overline{\lambda(x)}\, \varphi(\lambda(\cdot)), v)_{H_0} \quad (v \in \Phi). \tag{2.61}$$

В соответствии с п. 8 можно сделать еще одно дополнительное предположение:

б) пусть $X$ — топологическое пространство, а операторы $A_x$ зависят от $x \in X$ непрерывно в том смысле, что для каждого $u \in \Phi$

слабо непрерывна вектор-функция

$$X \ni x \mapsto A_x^* u \in \Phi. \qquad (2.62)$$

Теоремы типа 2.5—2.10 и соответствующие представления сейчас выглядят следующим образом.

**Теорема 2.12.** *Пусть* $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X) \ni B \mapsto E(B)$ *— с. р. е. семейства коммутирующих нормальных операторов* $(A_x)_{x\in X}$, *действующих в пространстве* $H_0$. *Тогда существует скалярная неотрицательная конечная мера* $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X) \ni B \mapsto \rho(B) \geqslant 0$ *(спектральная мера семейства) такая, что* $E$ *и* $\rho$ *абсолютно непрерывны одна относительно другой и справедливо представление*

$$O^+ E(B) O = \int_B P(\lambda(\cdot))\, d\rho(\lambda(\cdot)) \quad (B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)). \qquad (2.63)$$

*Здесь* $\mathbb{C}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto P(\lambda(\cdot))$ *— определенная* $\rho$*-почти для всех* $\lambda(\cdot) \in \mathbb{C}^X$ *функция, значениями которой служат непрерывные операторы из* $\Phi$ *в* $\Phi'$, *неотрицательные в том смысле, что* $(P(\lambda(\cdot))u, u)_{H_0} \geqslant 0$ $(u \in \Phi)$, *интеграл* (2.63) *сходится слабо. Аналогичный факт справедлив и для к. с. р. е.* $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{C}^X) \ni \mathbf{B} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{B})$: *существует компактифицированная спектральная мера* $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{C}^X) \ni \mathbf{B} \mapsto \boldsymbol{\rho}(\mathbf{B}) \geqslant 0$ *такая, что* $\mathbf{E}$ *и* $\boldsymbol{\rho}$ *абсолютно непрерывны друг относительно друга и справедливо представление типа* (2.63) *с операторами* $P(\boldsymbol{\lambda}(\cdot))$ $(\boldsymbol{\lambda}(\cdot) \in \mathbf{C}^X)$.

*Если выполнено предположение а) и среди операторов* $A_x$ *не более чем счетное число неограниченных, то существует входящее в* supp $\rho$ *множество* $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^X)$ *(уточненный совместный спектр семейства) полной внешней спектральной меры такое, что область значений* $\mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot))$ *каждого оператора* $P(\lambda(\cdot))$, *где* $\lambda(\cdot) \in T$, *состоит из совместных обобщенных собственных векторов семейства* $(A_x)_{x\in X}$, *отвечающих собственному значению* $\lambda(\cdot)$ *и являющихся одновременно такими же векторами для семейства* $(A_x^*)_{x\in X}$ *и собственного значения* $\overline{\lambda(\cdot)}$.

*Если дополнительно выполнено предположение б), то* $T$ *состоит из непрерывных комплекснозначных функций на* $X$.

*Пусть* $Q \subseteq \mathbb{C}^X$ *— некоторое множество, содержащее* $T$. *Определим согласно* § 1, п. 10 *модифицированные с. р. е.* $\hat{E}$ *и спектральную меру* $\hat{\rho}$. *Тогда* (2.63) *можно переписать в виде следующего слабо сходящегося интеграла:*

$$O^+ \hat{E}(\hat{B}) O = \int_{\hat{B}} \hat{P}(\lambda(\cdot))\, d\hat{\rho}(\lambda(\cdot)), \quad \hat{P} = P \restriction Q \quad (\hat{B} \in \mathcal{C}_\sigma(Q)). \qquad (2.64)$$

*Если множество неограниченных операторов* $A_x$ *имеет произвольную мощность, а остальные предположения выполнены, то последние результаты видоизменяются следующим образом. Существует множество* $\mathbf{T} \in \mathcal{B}(\mathbf{C}^X)$ *(уточненный компактифицированный спектр семейства) полной внешней меры* $\boldsymbol{\rho}$ *такое, что* $\mathfrak{R}(P(\boldsymbol{\lambda}(\cdot)))$ $(\boldsymbol{\lambda}(\cdot) \in \mathbf{T})$ *будет обладать прежними свойствами, только собственными значениями будут служить* $(\mathrm{reg}\, \boldsymbol{\lambda}(\cdot))(\cdot)$ *и* $(\overline{\mathrm{reg}\, \boldsymbol{\lambda}(\cdot)})(\cdot)$; *в случае выполнения б)* reg $\mathbf{T}$ *состоит из непрерывных комплекснозначных функций. Представление* (2.64) *сохраняется, только* $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{C}^X$ *и в нем появляются соответствующие жирные буквы. Понятным образом также переформулируется и теорема* 2.10.

*Разумеется, справедливы также формулы* (2.51) *и* (2.55).

Доказательство. Оно заключается в несложном сведении этой теоремы к теоремам 2.5—2.10. Ограничимся случаем, когда среди операторов $A_x$ не более чем счетное число неограниченных.

Включение $\Phi \subseteq H_0$ по предположению топологическое, т. е. оператор вложения $O: \Phi \to H_0$ непрерывен. Поэтому в любой окрестности нуля пространства $H_0$, например в шаре $\|\cdot\|_{H_0} < 1$, найдется окрестность $U(0; \tau_1, \ldots, \tau_m; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ нуля пространства $\Phi$. Но в последней окрестности в силу предположения о полуупорядоченности норм $\|\cdot\|_{H_\tau}$ найдется окрестность $\Phi$ вида $U(0; \tau', \delta') = \{\varphi \in \Phi \mid \|\varphi\|_{H_{\tau'}} < \delta'\}$. Таким образом, шар $\|\cdot\|_{H_0} < 1$ пространства $H_0$ содержит пересечение шара $\|\cdot\|_{H_{\tau'}} < \delta'$ пространства $H_{\tau'}$ с $\Phi$, т. е. оператор вложения $O$ непрерывен как оператор из пространства $\Phi$, снабженного нормой пространства $H_{\tau'}$, в $H_0$. Так как $\Phi$ плотно в $H_{\tau'}$, то, расширяя этот оператор по непрерывности, заключаем, что $H_{\tau'}$ непрерывно вложено в $H_0$. Вследствие ядерности пространства $\Phi$ найдется $\tau''$ такое, что $H_{\tau''} \subseteq H_{\tau'}$, причем это вложение квазиядерно. Но тогда вложение $H_{\tau''} \subseteq H_0$ как суперпозиция квазиядерного и непрерывного вложений также квазиядерно. Обозначим через $H_+$ пространство $H_{\tau''}$, перенормировав его, если понадобится, таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\|u\|_{H_0} \leqslant \|u\|_{H_+}$ $(u \in H_+)$; разумеется, $H_+ \supseteq \Phi$ плотно в $H_0$. Из сказанного следует, что можно построить цепочку с топологическими включениями

$$\Phi' \supseteq H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq \Phi. \qquad (2.65)$$

Примем теперь в качестве цепочки (2.18) среднюю часть цепочки (2.65) и обозначим через $O_1$ оператор вложения $H_+ \to H_0$, $O_1^+$ — оператор вложения $H_0 \to H_-$. Применяя теорему 2.5, заключаем, что справедливо представление

$$O_1^+ E(B) O_1 = \int_B P_1(\lambda(\cdot))\, d\rho_1(\lambda(\cdot)) \quad (B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)), \qquad (2.66)$$

где $P_1(\lambda(\cdot)): H_+ \to H_-$ — оператор обобщенного проектирования, а $\rho_1(B) = $ Сл. $(O^+ E(B) O_1)$ — спектральная мера.

Рассмотрим вложения $O_2 : \Phi \to H_+$ и $O_3 : H_- \to \Phi'$. Умножая (2.66) справа и слева соответственно на $O_2$ и $O_3$, получаем (2.63), где положено $P(\lambda(\cdot)) = O_3 P_1 (\lambda(\cdot)) O_2$ и $\rho = \rho_1$. Сходимость интеграла (2.66) по гильбертовой норме операторов из $H_+$ в $H_-$ влечет, очевидно, слабую сходимость интеграла (2.63).

Пусть теперь выполнено предположение а). Тогда цепочку (2.65) можно принять в качестве (2.13) ($\Phi = D$), так как условия, приведенные на стр. 171, сейчас будут выполнены. Из теоремы 2.6 (сформулированной для нормальных операторов) и выражения $P$ через $P_1$ следует, что и вторая часть теоремы доказана.

Ее третья часть сразу вытекает из теоремы 2.11 (сформулированной для нормальных операторов), так как слабая непрерывность вектор-функции (2.62) влечет слабую непрерывность вектор-функции (2.58).

Представление (2.64) следует из (2.49). ■

Из доказательства следует, что в действительности при предположениях теоремы вместо (2.63) и (2.64) имеют место более сильные равенства (2.24) (первое равенство) и (2.49), однако выбор пространства $H_+$ среди пространств $H_\tau$ $(\tau \in T)$ не вполне эффективен. Аналогичная ситуация будет и в случае компактификации. Ясна также переформулировка доказанной теоремы для случая самосопряженных операторов.

## § 3. СВЯЗИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ И КОММУТАТИВНЫМИ АЛГЕБРАМИ ОПЕРАТОРОВ. КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Установим связь между теорией § 1, 2 и случайными процессами с помощью гельфандовской теории коммутативных нормированных алгебр. Здесь мы ограничимся лишь выяснением общей ситуации.

### 1. ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Напомним сперва некоторые хорошо известные определения (см., напр.: Гихман, Скороход [2, гл. 1], Вентцель [1]). Рассмотрим фиксированное абстрактное пространство $M$ точек $\omega$ (вероятностное пространство или пространство элементарных событий $\omega$) и $\sigma$-алгебру $\mathfrak{M}$ его множеств (событий); на $\mathfrak{M}$ предполагается заданной неотрицательная мера $\mathfrak{M} \ni B \mapsto \mu(B) \geqslant 0$ такая, что $\mu(M) = 1$ (вероятностная мера, $\mu(B)$ — вероятность события $B$). Случайной (комплекснозначной) величиной $\varphi$ называется функция $M \ni \omega \to \varphi(\omega) \in \mathbb{C}^1$, измеримая относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{M}$; ее распределение $\mu_\varphi$ — $\varphi$-образ меры $\mu$ при отображении $M \ni \omega \mapsto \varphi(\omega) \in \mathbb{C}^1$, если в $\mathbb{C}^1$ фиксирована $\sigma$-алгебра борелевских множеств (см. стр. 194—195). Иными словами, распределение случайной величины $\varphi$ — это мера $\mu_\varphi$ на $\mathcal{B}(\mathbb{C}^1)$, определенная соотношением $\mathcal{B}(\mathbb{C}^1) \ni \Delta \mapsto \mu_\varphi(\Delta) = \mu(\varphi^{-1}(\Delta))$.



Векторной случайной величиной $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ называется отображение $M \ni \omega \mapsto \varphi(\omega) = (\varphi_1(\omega), \ldots, \varphi_p(\omega)) \in \mathbb{C}^p$, измеримое относительно $\mathfrak{M}$ (т. е. каждая координата $M \ni \omega \mapsto \varphi_n(\omega) \in \mathbb{C}^1$—измеримая относительно $\mathfrak{M}$ функция), ее распределение $\mu_\varphi$— мера $\mathcal{B}(\mathbb{C}^p) \ni \Delta \mapsto \mu_\varphi(\Delta) = \mu(\varphi^{-1}(\Delta))$. Ясно, что $\mu_\varphi(\mathbb{C}^p) = 1$ ($p = 1, 2, \ldots$). Если $\Delta = \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} \Delta_n$ — прямоугольник, то $\varphi^{-1}(\Delta) = \bigcap\limits_{n=1}^{p} \varphi_n^{-1}(\Delta_n)$, и поэтому

$$\mu_\varphi\left(\mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} \Delta_n\right) = \mu\left(\varphi^{-1}\left(\mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} \Delta_n\right)\right) = \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{p} \varphi_n^{-1}(\Delta_n)\right) =$$
$$= \int\limits_M \left(\prod_{n=1}^{p} \varkappa_{\varphi_n^{-1}(\Delta_n)}(\omega)\right) d\mu(\omega) \quad (\Delta_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1)). \tag{3.1}$$

Это тривиальное равенство существенно для дальнейшего.

Пусть $\Phi$ — некоторое множество случайных величин $\varphi_\alpha$: $\Phi = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} \varphi_\alpha$. Эти случайные величины называются независимыми, если для любой векторной случайной величины $\varphi(\omega) = (\varphi_{\alpha_1}(\omega), \ldots, \varphi_{\alpha_p}(\omega))$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathrm{A}$ различны; $p = 1, 2, \ldots$) ее функция распределения $\mu_\varphi = \mu_{\varphi_{\alpha_1}} \otimes \ldots \otimes \mu_{\varphi_{\alpha_p}}$.

Случайным процессом, индексированным посредством $x \in X$, называется некоторое семейство $(\varphi_x)_{x \in X}$ случайных величин $\varphi_x$. Иными словами, задание случайного процесса эквивалентно заданию функции

$$M \times X \ni (\omega, x) \mapsto \varphi_x(\omega) \in \mathbb{C}^1 \tag{3.2}$$

такой, что при каждом $x$ функция $\varphi_x(\cdot)$ измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{M}$.

Каждый фиксированный случайный процесс $(\varphi_x)_{x \in X}$ порождает вероятностную меру $m$ на пространстве $\mathbb{C}^X$. Точнее, сейчас наряду с ранее заданными $M$, $\mathfrak{M}$ и $\mu$ можно рассмотреть новое вероятностное пространство $\mathbb{C}^X$, где элементарными событиями служат точки $\lambda(\cdot) \in \mathbb{C}^X$ (т. е. функции $X \ni x \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{C}^1$), а событиями — множества $B$ из $\sigma$-алгебры $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)$. Вероятностная мера $m$ строится аналогично с. р. е. (см. § 1, п. 1, 2). Сперва рассматривается алгебра $\mathcal{C}(\mathbb{C}^X)$ цилиндрических множеств $Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta)$, где $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^p)$. На множествах из этой алгебры полагаем

$$m(Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta)) = \mu_\varphi(\Delta) = \mu_{(\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_p})}(\Delta) = \mu(\varphi^{-1}(\Delta)), \tag{3.3}$$

где $\varphi = (\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_p})$ — векторная случайная величина. В (3.3) точки $x_1, \ldots, x_p \in X$ различны, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^p)$. Как и для с. р. е., доказывается, что это определение корректно — значение $m(Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta))$ не зависит от записи цилиндрического множества при выборе того или иного множества координат. Это связано с тем обстоятельством, что $\mu_{\varphi_x}(\mathbb{C}^1) = 1$ $(x \in X)$; поэтому добавление или изъятие координаты и соответствующее домножение или изъятие прямого сомножителя $\mathbb{C}^1$ в $\Delta$ не влияет на величину (3.3). Далее, при помощи теоремы А. Н. Колмогорова продолжаем функцию множеств $m$ с $\mathcal{C}(\mathbb{C}^X)$ до меры $m$ на $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)$. Это и есть искомая вероятностная мера.

Отметим, что повторяя доказательство теоремы 1.2, легко убедиться, что $m$ всегда регулярна.

Таким образом, по заданной тройке $M, \mathfrak{M}, \mu$ и фиксированному случайному процессу $(\varphi_x)_{x \in X}$ мы построили тройку $\mathbb{C}^X$, $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)$, $m$. Относительно нее опять можно рассматривать случайные величины — функции $\mathbb{C}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto F(\lambda(\cdot)) \in \mathbb{C}^1$, измеримые относительно $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)$. В частности, такой величиной при фиксированном $x \in X$ будет функция $\mathbb{C}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto \pi_x(\lambda(\cdot)) = \lambda(x) \in \mathbb{C}^1$. Ее функция распределения $m_{\pi_x}(\Delta) = m(\pi_x^{-1}(\Delta)) = m(Ц(x; \Delta)) = \mu_{\varphi_x}(\Delta) = \mu(\varphi_x^{-1}(\Delta))$ $(\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1))$.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ПО СЛУЧАЙНОМУ ПРОЦЕССУ СЕМЕЙСТВА КОММУТИРУЮЩИХ НОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Построение по процессу семейства коммутирующих операторов весьма простое: каждую случайную величину $\varphi$ можно интерпретировать как оператор умножения на функцию $\varphi(\omega)$ в пространстве $L_2(M, d\mu(\omega))$. Тогда процессу $(\varphi_x)_{x \in X}$ будет отвечать семейство таких операторов, которые, разумеется, будут коммутировать.

Точнее, каждая измеримая функция $M \ni \omega \mapsto a(\omega) \in \mathbb{C}^1$ определяет в пространстве $H = L_2(M, d\mu(\omega))$ оператор умножения $A$ на нее:

$$H \supseteq \mathfrak{D}(A) \ni f(\omega) \mapsto (Af)(\omega) = a(\omega) f(\omega) \in H,$$
$$\mathfrak{D}(A) = \{f \in H \mid a(\cdot) f(\cdot) \in H\}. \tag{3.4}$$

*Область определения* $\mathfrak{D}(A)$ *плотна в* $H$. В самом деле, благодаря тому что $a$ почти везде конечна, можно написать $\mu(B_N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, где $B_N = \{\omega \in M \mid |a(\omega)| > N\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Любая функция $g \in H$, аннулирующаяся на множестве $B_N$ при некотором $N$, входит в $\mathfrak{D}(A)$. Вместе с тем для каждой $f \in H$ можно построить функцию $f_N$, совпадающую с $f$ на $M \setminus B_N$ и аннулирующуюся на $B_N$, тогда



$$\| f - f_N \|_H^2 = \int_{B_N} |f(\omega)|^2 \, d\mu(\omega) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \blacksquare$$

Ясно, что оператор $A$ нормальный, причем $A^*$ порождается аналогично (3.4) функцией $M \ni \omega \mapsto \overline{a(\omega)} \in \mathbb{C}^1$, и ограничен в том и только в том случае, когда $a(\omega)$ в существенном ограничена, причем $\|A\| = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in M} |a(\omega)|$. Резольвента $R_z$ — оператор умножения на функцию $(a(\omega) - z)^{-1}$, причем множество регулярных точек легко описать по функции $a$. Отсюда следует, что разложение единицы $\mathcal{B}(\mathbb{C}^1) \ni \Delta \mapsto E(\Delta)$, отвечающее $A$, имеет вид

$$H \ni f(\omega) \mapsto (E(\Delta) f)(\omega) = \varkappa_\Delta(a(\omega)) f(\omega) = \varkappa_{a^{-1}(\Delta)}(\omega) f(\omega), \tag{3.5}$$

где $\varkappa_B$ — характеристическая функция множества $B$.

Зафиксируем теперь случайный процесс $(a_x)_{x \in X}$ вида (3.2) и поставим в соответствие каждой случайной величине $a_x$ по формуле (3.4) оператор $A_x$. В результате получим семейство $(A_x)_{x \in X}$ коммутирующих нормальных операторов. Положим $\Omega(\omega) = 1$ $(\omega \in M)$. Нетрудно видеть, что *с. р. е.* $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X) \ni B \mapsto E(B)$ *построенного семейства* $(A_x)_{x \in X}$ *связано с мерой* $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X) \ni B \mapsto m(B) \geqslant 0$, *порожденной процессом* $(a_x)_{x \in X}$, *при помощи формулы*

$$(E(B)\Omega, \Omega)_{L_2(M, d\mu(\omega))} = m(B) \quad (B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)). \tag{3.6}$$

Действительно, так как левая часть в (3.6) является скалярной неотрицательной мерой, то для доказательства (3.6) достаточно установить это равенство при $B = Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta)$, т. е. доказать, что $(E_{x_1, \ldots, x_p}(\Delta) \Omega, \Omega)_H = \mu_{(a_{x_1}, \ldots, a_{x_p})}(\Delta)$ $(x_1, \ldots, x_p \in X;\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^p);\ p = 1, 2, \ldots)$. Последнее соотношение будет доказано, если его установить при $\Delta = \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p} \Delta_n$ $(\Delta_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1))$. Благодаря определению $E_{x_1, \ldots, x_p}$, (3.5) и (3.1) имеем

$$(E_{x_1, \ldots, x_p}(\Delta)\Omega, \Omega)_H = (E_{x_1}(\Delta_1) \ldots E_{x_p}(\Delta_p)\Omega, \Omega)_H =$$
$$= \left(\prod_{n=1}^{p} \varkappa_{a_{x_n}^{-1}(\Delta_n)}(\omega)\Omega, \Omega\right)_H = \int_M \left(\prod_{n=1}^{p} \varkappa_{a_{x_n}^{-1}(\Delta_n)}(\omega)\right) d\mu(\omega) =$$
$$= \mu_{(a_{x_1}, \ldots, a_{x_p})}\left(\mathop{\times}_{n=1}^{p} \Delta_n\right). \blacksquare$$

Из (3.6) вытекает, что $m$ абсолютно непрерывна относительно $E$. Если $\Omega$ является частичным вакуумом для семейства $(A_x)_{x \in X}$, то согласно замечанию к теореме 2.4 $E$ абсолютно непрерывна относительно $m$. В этом случае ряд фактов § 1, касающихся понятия носителя, остается справедливым для меры $m$. Так, теорема 1.4 приводит к следующему. Пусть $(a_x)_{x \in X}$ — случайный процесс, причем среди функций $a_x$ лишь не более чем счетное число не являются в существенном ограниченными. Если функции $a_{x_1}^{m_1}(\omega), \ldots$ $\ldots, a_{x_p}^{m_p}(\omega)$ при некоторых $x_j \in X$ и некоторых натуральных степенях $m_j$ входят в $L_2(M, d\mu(\omega))$ и их з. л. о. совпадает с $L_2(M, d\mu(\omega))$, то мера $m$, порождаемая этим процессом, правильная. (Последнее условие — переформулировка того, что $\Omega$ — частичный вакуум.)

Компактификация (см. § 1, п. 7) приводит к следующему. Пусть существует частичный вакуум $\Omega$ (в остальном процесс $(a_x)_{x\in X}$ произвольный); $m$ — мера, порожденная процессом. Определим «компактифицированную» меру $\mathbf{m}$, полагая

$$\mathscr{C}_\sigma(\mathbf{C}^X) \ni \mathbf{B} \mapsto \mathbf{m}(\mathbf{B}) = m(\mathbf{B} \cap \mathbb{C}^X). \tag{3.7}$$

Утверждается, что мера (3.7) правильная.

Аналогично формулируются результаты § 1, п. 9, касающиеся сужения мер $m$ и $\mathbf{m}$ на замкнутые обобщенные цилиндрические множества. Подчеркнем, что всюду выше топология в $\mathbb{C}^X$ и $\mathbf{C}^X$ тихоновская; по-видимому, она слишком слабая для ряда вопросов теории случайных процессов. Вместе с тем эти результаты совершенно не зависят от характера множества $X$. Если рассматривать процессы, составленные из вещественных случайных величин $a_x$ (т. е. $\operatorname{Im} a_x(\omega) = 0$ $\mu$-почти для всех $\omega$), то все описанные результаты сохраняются, лишь операторы $A_x$ будут самосопряженными и $\mathbb{C}^X$, $\mathbf{C}^X$ нужно заменить на $\mathbb{R}^X$, $\mathbf{R}^X$.

## 3. ПОСТРОЕНИЕ ПО СЕМЕЙСТВУ КОММУТИРУЮЩИХ НОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА. СВЯЗЬ С КОММУТАТИВНЫМИ АЛГЕБРАМИ ОПЕРАТОРОВ

Грубо говоря, мы покажем, что с точностью до изоморфизма гильбертова пространства описанное выше семейство $(A_x)_{x\in X}$, порожденное случайным процессом,— достаточно общая модель. Следующие ниже рассуждения во многом являются должным вариантом известного доказательства спектральной теоремы фон Неймана для неймановских алгебр ограниченных операторов на основании гельфандовской теории коммутативных нормированных алгебр (см. напр.: Наймарк [1, гл. 8], Морен [3, гл. 1]).

Пусть $(A_x)_{x\in X}$ — обладающее частичным вакуумом $\Omega$ семейство коммутирующих нормальных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $H$. Свяжем с ним, хотя и не самым разумным образом, некоторую коммутативную нормированную алгебру $A$, пространство $M$ максимальных идеалов которой можно будет принять в качестве пространства элементарных событий. (Неразумность заключается в том, что эта алгебра слишком широкая, правда, на семейство $(A_x)_{x\in X}$ мы не накладываем никаких дополнительных условий.) Позже, после доказательства теорем 3.1 и 3.2, мы опишем улучшение конструкции.



Обозначим через $(E_x)_{x\in X}$ соответствующее $(A_x)_{x\in X}$ семейство разложений единицы и натянем на коммутирующие проекторы $E_x(\Delta)$ $(x \in X,\ \Delta \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^1))$ нормированную алгебру $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{L}(H \to H)$ (т. е. возьмем всевозможные линейные комбинации и произведения операторов $E_x(\Delta)$ и замкнем это множество по норме операторов). Ясно, что $\mathscr{A}$ будет коммутативной $C^*$-алгеброй с единицей. Пусть $M$ — компакт ее максимальных идеалов $\omega$. В силу теоремы И. М. Гельфанда — М. А. Наймарка $\mathscr{A}$ изометрически изоморфна алгебре $C(M)$ всех комплекснозначных непрерывных функций на $M$ с обычными алгебраическими операциями и равномерной нормой $\|\cdot\|_{C(M)}$ (Гельфанд, Райков, Шилов [1, приложение], Морен [3, гл. 1, п. 3]). Обозначим этот изоморфизм через $g$: $\mathscr{A} \ni A \mapsto g(A) = a \in C(M)$; $g(1) = e$ $(e(\omega) = 1,\ \omega \in M)$.

Рассмотрим на $C(M)$ линейный функционал $l$, полагая

$$l(a) = (g^{-1}(a)\Omega, \Omega)_H \quad (a \in C(M)). \tag{3.8}$$

Он непрерывен благодаря оценке $|l(a)| \leqslant \|g^{-1}(a)\| \|\Omega\|_H^2 = \|a\|_{C(M)}$ $(a \in C(M))$, $l(e) = 1$, и неотрицателен: если $a(\omega) \geqslant 0$ $(\omega \in M)$, то $g^{-1}(a)$ — неотрицательный оператор из $\mathscr{A}$ и $l(a) \geqslant 0$. В силу теоремы Ф. Рисса справедливо представление

$$l(a) = \int_M a(\omega)\, d\mu(\omega) \quad (a \in C(M)), \tag{3.9}$$

где $\mathscr{B}(M) \ni B \mapsto \mu(B) \geqslant 0$ — однозначно определяемая по $l$ вероятностная $(\mu(M) = l(e) = 1)$ мера на $\sigma$-алгебре борелевских множеств пространства $M$.

Введем пространство $L_2(M, d\mu(\omega))$ и покажем, что $g$ индуцирует естественную изометрию между $H$ и $L_2(M, d\mu(\omega))$. Эта изометрия основывается на следующей формуле, вытекающей из (3.8) и (3.9):

$$(A_1\Omega, A_2\Omega)_H = (A_2^* A_1\Omega, \Omega)_H = l(g(A_2^* A_1)) = l(\overline{g(A_2)}\, g(A_1)) =$$
$$= \int_M (g(A_1))(\omega)\, \overline{(g(A_2))(\omega)}\, d\mu(\omega) = (g(A_1), g(A_2))_{L_2(M, d\mu(\omega))} \tag{3.10}$$
$$(A_1, A_2 \in \mathscr{A}).$$

**Лемма 3.1.** *Существует изометрия $H \ni f \mapsto Gf = \hat{f} \in L_2(M, d\mu(\omega))$, переводящая все пространство $H$ во все $L_2(M, d\mu(\omega))$ и обладающая тем свойством, что*

$$G(A\Omega) = g(A) \quad (A \in \mathscr{A}), \tag{3.11}$$

*при этом линейное множество $\{A\Omega \mid A \in \mathscr{A}\}$ плотно в $H$.*

Доказательство. Сперва установим, что указанное линейное множество $L$ плотно в $H$. Зафиксируем $f \in H$ и $\varepsilon > 0$ и найдем согласно определению частичного вакуума такие $x_1, \ldots, x_p \in X$ и линейную комбинацию (ниже $m_j$ — натуральные числа)

$$f_1 = \sum_{m_1=0}^{l_1} \ldots \sum_{m_p=0}^{l_p} c_{m_1, \ldots, m_p} A_{x_1}^{m_1} \ldots A_{x_p}^{m_p}\Omega, \tag{3.12}$$

что $\|f - f_1\|_H < \varepsilon$. Пусть $\mathbb{C}^N \ni (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \lambda \mapsto F(\lambda) \in \mathbb{C}^1$ — непрерывна и финитна. Обозначим через $E_{x_1, \ldots, x_p}$ с. р. е. семейства операторов $(A_{x_n})_{n=1}^p$, тогда в силу (3.12) и (1.1), (1.2) имеем

$$\|f_1 - F(A_{x_1}, \ldots, A_{x_p})\Omega\|_H^2 =$$

$$= \int_{\mathbb{C}^p} \left| \sum_{m_1=0}^{l_1} \ldots \sum_{m_p=0}^{l_p} c_{m_1, \ldots, m_p} \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_p^{m_p} - F(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \right|^2 \times$$

$$\times d(E_{x_1, \ldots, x_p}(\lambda)\Omega, \Omega)_H \tag{3.13}$$

(интеграл в (3.13) сходится благодаря тому, что $\Omega$ входит в область определения всех операторов, фигурирующих в (3.12)). $F$ можно подобрать такой, чтобы интеграл в (3.13) стал меньше $\varepsilon^2$. Для доказательства плотности $L$ в $H$ достаточно убедиться, что; $F(A_{x_1}, \ldots, A_{x_p}) \in \mathcal{A}$.

Пусть выбранная $F$ аннулируется вне прямоугольника $\Delta = \times_{n=1}^{p} \Delta_n \subset \mathbb{C}^p$, где $\Delta_n$ — замкнутый квадрат в $\mathbb{C}^1$. Полагая $\lambda_n = \sigma_n + i\tau_n$ ($\sigma_n, \tau_n \in \mathbb{R}^1$; $n = 1, \ldots, p$) и интерпретируя $\Delta$ как компакт из $\mathbb{R}^{2p}$, получаем, что $F(\sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \sigma_p + i\tau_p)$ может быть в силу теоремы Вейерштрасса равномерно на $\Delta$ аппроксимирована сколь угодно точно полиномом от $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$; $\tau_1, \ldots, \tau_p$, т. е. полиномом $P(\lambda, \bar\lambda)$ от $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$; $\bar\lambda_1, \ldots, \bar\lambda_p$. Так как при любом $h \in H$

$$\|(F(A_{x_1}, \ldots, A_{x_p}) - \int_\Delta P(\lambda, \bar\lambda)\, dE_{x_1, \ldots, x_p}(\lambda))h\|_H^2 =$$

$$= \|\int_\Delta (F(\lambda) - P(\lambda, \bar\lambda))\, dE_{x_1, \ldots, x_p}(\lambda) h\|_H^2 \leqslant \max_{\lambda \in \Delta} |F(\lambda) -$$

$$- P(\lambda, \bar\lambda)|^2 \|h\|_H^2,$$

то можно утверждать, что $F(A_{x_1}, \ldots, A_{x_p})$ по норме операторов может быть приближена как угодно точно оператором $\int_\Delta P(\lambda, \bar\lambda)\, dE_{x_1, \ldots, x_p}(\lambda)$. Последний оператор в свою очередь являет-



ся полиномом от $E_{x_n}(\Delta_n)$, $\int_{\Delta_n} z\,dE_{x_n}(z)$ и $\int_{\Delta_n} \bar z\,dE_{x_n}(z)$ ($n = 1, \ldots, p$), а эти операторы, очевидно, входят в $\mathcal{A}$ (нужно равномерно на $\Delta_n$ аппроксимировать функцию $z$ кусочно постоянной функцией). Итак, $F(A_{x_1}, \ldots, A_{x_p}) \in \mathcal{A}$, что и требовалось.

Доказательство леммы теперь почти очевидно. В самом деле, определим $G$ на $L$ формулой (3.11). Из (3.10) вытекает корректность этого определения ($g(A)$ зависит только от $A\Omega$) и изометричность $G$; ясно, что $G$ линейно. Так как $L$ и $G(L) = C(M)$ плотны в $H$ и $L_2(M, d\mu(\omega))$ соответственно, то, продолжая $G$ по непрерывности на все $H$, получим требуемую изометрию. ■

**Лемма 3.2.** *При изометрии $G$ образом оператора $A \in \mathcal{A}$ служит оператор умножения в $L_2(M, d\mu(\omega))$ на непрерывную функцию $(g(A))(\omega)$, т. е. в $L_2(M, d\mu(\omega))$*

$$(G(Af))(\omega) = (g(A))(\omega)(Gf)(\omega) \quad (f \in H,\ A \in \mathcal{A}). \tag{3.14}$$

Доказательство. Зафиксируем $f \in H$. Пусть $(A_n)_{n=1}^\infty$ — такая последовательность операторов $A_n \in \mathcal{A}$, что в $H$ $A_n\Omega \underset{n\to\infty}{\to} f$. Тогда благодаря (3.11) в смысле сходимости в $L_2(M, d\mu(\omega))$

$$(G(Af))(\omega) = \lim_{n\to\infty}(G(AA_n\Omega))(\omega) = \lim_{n\to\infty}(g(AA_n))(\omega) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}((g(A))(\omega)(g(A_n))(\omega)) = (g(A))(\omega)\lim_{n\to\infty}(g(A_n))(\omega) =$$

$$= (g(A))(\omega)\lim_{n\to\infty}(G(A_n\Omega))(\omega) = (g(A))(\omega)(Gf)(\omega). \ ■$$

Так как $g(\mathcal{A}) = C(M)$, то любой оператор умножения на функцию из $C(M)$ в пространстве $L_2(M, d\mu(\omega))$ может быть получен как образ (3.14) некоторого $A \in \mathcal{A}$; ясно, что $A^*$ переходит в оператор умножения на $\overline{(g(A))(\omega)}$.

Расширим соответствие (3.14) на более широкие классы операторов $A$. Обозначим через $L_\infty(\mathcal{A})$ совокупность всех ограниченных операторов $B$ в $H$, получаемых как сильные пределы операторов из $\mathcal{A}$ (т. е. $L_\infty(\mathcal{A})$ — замыкание $\mathcal{A}$ в сильной операторной топологии). С другой стороны, пусть $L_\infty(M, d\mu(\omega))$ — пространство всех в существенном относительно меры $\mu$ ограниченных измеримых функций $M \ni \omega \mapsto b(\omega) \in \mathbb{C}^1$.

**Лемма 3.3.** *При изометрии $G$ образом каждого оператора из $L_\infty(\mathcal{A})$ служит оператор умножения в $L_2(M, d\mu(\omega))$ на некоторую функцию из $L_\infty(M, d\mu(\omega))$, причем так может быть получена любая функция этого пространства. Точнее, существует взаимно однозначное соответствие $L_\infty(\mathcal{A}) \ni B \mapsto b \in L_\infty(M, d\mu(\omega))$ такое, что в $L_2(M, d\mu(\omega))$*

$$(G(Bf))(\omega) = b(\omega)(Gf)(\omega) \quad (f \in H,\ B \in L_\infty(\mathcal{A})). \tag{3.15}$$

Доказательство. Зафиксируем $B \in L_\infty(\mathcal{A})$ и рассмотрим последовательность $(A_n)_{n=1}^\infty$ $(A_n \in \mathcal{A})$ такую, что $Bf = \lim_{n\to\infty} A_n f$ $(f \in H)$. Используя лемму 3.2, заключаем, что в $L_2(M, d\mu(\omega))$

$$(G(Bf))(\omega) = \lim_{n\to\infty}(G(A_n f))(\omega) = \lim_{n\to\infty}(g(A_n))(\omega)(Gf)(\omega) \quad (f \in H). \quad (3.16)$$

Положим здесь $f = \Omega$. Так как $(G\Omega)(\omega) = 1$ $(\omega \in M)$, можно заключить, что в $L_2(M, d\mu(\omega))$ существует предел $\lim_{n\to\infty} g(A_n) = G(B\Omega)$. Выделяя из последовательности $((g(A_n))(\omega))_{n=1}^\infty$ подпоследовательность, сходящуюся почти везде, и переходя в (3.16) к пределу по этой подпоследовательности, получаем, что $(G(Bf))(\omega) = (G(B\Omega))(\omega)(Gf)(\omega)$ почти везде. Но

$$\|(G(B\Omega))(\cdot)(Gf)(\cdot)\|_{L_2(M, d\mu(\omega))} = \|G(Bf)\|_{L_2(M, d\mu(\omega))} =$$
$$= \|Bf\|_H \leqslant \|B\|\|f\|_H = \|B\|\|Gf\|_{L_2(M, d\mu(\omega))} \quad (f \in H). \quad (3.17)$$

Так как в (3.17) $Gf$ пробегает все $L_2(M, d\mu(\omega))$, то отсюда вытекает существенная ограниченность $(G(B\Omega))(\omega)$. Обозначая эту функцию через $b(\omega)$, придем к (3.15). Из (3.15) вытекает, что функция $b$ определяется по $B$ однозначно и может порождаться лишь одним оператором $B \in L_\infty(\mathcal{A})$.

Осталось убедиться, что по любой $b \in L_\infty(M, d\mu(\omega))$ можно найти оператор $B \in L_\infty(\mathcal{A})$ такой, что $B \mapsto b$. Для доказательства рассмотрим ограниченный оператор $\hat{B}$ умножения на функцию $b(\omega)$, действующий в $L_2(M, d\mu(\omega))$. Построим последовательность функций $(a_n(\omega))_{n=1}^\infty$ $(a_n \in C(M))$ таких, чтобы в смысле сходимости по мере $\mu$ $a_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} b(\omega)$ и все функции $a_n(\omega)$ были равномерно ограничены: $|a_n(\omega)| \leqslant C$ $(C = \operatorname{ess\,sup}_{\omega\in M} |b(\omega)|;$ $\omega \in M;$ $n = 1, 2, \ldots)$. Ввиду измеримости и существенной ограниченности $b(\omega)$ это всегда можно сделать. Пусть $\hat{A}_n$ — оператор умножения на $a_n(\omega)$ в пространстве $L_2(M, d\mu(\omega))$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Легко видеть, что для каждой функции $\hat{f} \in L_2(M, d\mu(\omega))$ по норме этого пространства $\hat{A}_n\hat{f} \underset{n\to\infty}{\to} \hat{B}\hat{f}$. Действительно, для произвольного $\sigma > 0$ имеем

$$\|\hat{B}\hat{f} - \hat{A}_n\hat{f}\|^2_{L_2(M, d\mu(\omega))} = \int_M |b(\omega) - a_n(\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leqslant$$
$$\leqslant \sigma^2 \int_M |\hat{f}(\omega)|^2 d\mu(\omega) + 4C^2 \int_{\{\omega\in M \,|\, |b(\omega) - a_n(\omega)| \geqslant \sigma\}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\mu(\omega). \quad (3.18)$$

Так как $\mu(\{\omega \in M \mid |b(\omega) - a_n(\omega)| \geqslant \sigma\}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то правая часть



(3.18) при $n$ достаточно большом может быть сделана сколь угодно малой.

Для завершения доказательства леммы осталось положить $B = G^{-1}\hat{B}G$, $A_n = G^{-1}\hat{A}_n G$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда каждый $A_n \in \mathcal{A}$ и в $H$ $Bf = \lim_{n\to\infty} A_n f$ $(f \in H)$, т. е. $B \in L_\infty(\mathcal{A})$. Согласно (3.15) $B \mapsto b$. ■

Будем воспринимать $L_\infty(M, d\mu(\omega))$ как коммутативную алгебру ограниченных операторов $\hat{B}$ умножения в пространстве $L_2(M, d\mu(\omega))$ на функции $b \in L_\infty(M, d\mu(\omega))$, а $C(M)$ — как ее подалгебру. Тогда согласно лемме 3.3 операторы $B = G^{-1}\hat{B}G$ $(\hat{B} \in L_\infty(M, d\mu(\omega)))$ пробегают все $L_\infty(\mathcal{A})$, т. е. последнее множество превращается в коммутативную алгебру ограниченных операторов в $H$, причем содержащую вместе с каждым оператором его сопряженный (так как последним свойством обладает алгебра $L_\infty(M, d\mu(\omega))$). Резюмируя сказанное и леммы 3.2 и 3.3, приходим к следующему хорошо известному результату. *Совокупность $L_\infty(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{A}$ является сильно замкнутой коммутативной алгеброй операторов из $\mathcal{L}(H \to H)$, содержащей вместе с каждым оператором его сопряженный (коммутативной неймановской алгеброй операторов). Изометрия $H \ni f \mapsto Gf = \hat{f} \in L_2(M, d\mu(\omega))$ индуцирует перевод $L_\infty(\mathcal{A})$ во всю алгебру $L_\infty(M, d\mu(\omega))$, при этом алгебра $\mathcal{A}$ переходит в алгебру $C(M)$.*

Выясним теперь, какими будут образы при изометрии $G$ и некоторых неограниченных операторов, определенным образом связанных с алгеброй $\mathcal{A}$. Пусть $C$ — нормальный оператор в пространстве $H$ с областью определения $\mathfrak{D}(C)$. Будем говорить, что он присоединен к $\mathcal{A}$, если существуют последовательности $(B_n)_{n=1}^\infty$, $(D_n)_{n=1}^\infty$ $(B_n, D_n \in L_\infty(\mathcal{A}))$ такие, что 1) для любого $f \in \mathfrak{D}(C)$ $Cf = \lim_{n\to\infty} B_n f$; 2) $\Omega = \lim_{n\to\infty} D_n\Omega$ и $D_n\Omega \in \mathfrak{D}(C)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Совокупность всех присоединенных к $\mathcal{A}$ операторов обозначим через $L_0(\mathcal{A})$.

Ясно, что $L_\infty(\mathcal{A}) \subseteq L_0(\mathcal{A})$. Для нас существенно, что *каждый оператор $A_x$ $(x \in X)$ присоединен к $\mathcal{A}$*. В самом деле, обозначим $\Delta_n = \{z \in \mathbb{C}^1 \mid |z| \leqslant n\}$ и положим $B_n = \int_{\Delta_n} z dE_x(z)$, $D_n = E_x(\Delta_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ясно, что операторы $B_n$, $D_n \in \mathcal{A} \subseteq L_\infty(\mathcal{A})$ и обладают требуемыми свойствами. ■

Обозначим через $L_0(M, d\mu(\omega))$ совокупность всех $\mu$-почти везде конечных измеримых относительно $\mathcal{B}(M)$ функций $M \ni \omega \mapsto c(\omega) \in \mathbb{C}^1$; разумеется, функции из $L_0(M, d\mu(\omega))$ считаются равными, если они равны $\mu$-почти везде.

**Теорема 3.1.** *При изометрии $G$ образом каждого оператора, присоединенного к $\mathcal{A}$, служит оператор умножения в $L_2(M, d\mu(\omega))$*

*на некоторую функцию из* $L_0(M, d\mu(\omega))$, *причем каждая функция этой совокупности может быть так получена.*

*Точнее, существует взаимно однозначное соответствие* $L_0(\mathcal{A}) \ni C \mapsto c \in L_0(M, d\mu(\omega))$, *при котором в* $L_2(M, d\mu(\omega))$

$$(G(Cf))(\omega) = c(\omega)(Gf)(\omega), \quad f \in \mathfrak{D}(C) = \{f \in H \mid c(\cdot)(Gf)(\cdot) \in L_2(M, d\mu(\omega))\}. \tag{3.19}$$

Доказательство. Зафиксируем $C \in L_0(\mathcal{A})$ и рассмотрим связанную с ним последовательность операторов $D_n \in L_\infty(\mathcal{A})$. Так как в $H$ $D_n\Omega \underset{n\to\infty}{\to} \Omega$, то согласно лемме 3.3 в $L_2(M, d\mu(\omega))$ $d_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} 1$, где $d_n \in L_\infty(M, d\mu(\omega))$ — функция, отвечающая оператору $D_n$. Выделим из $(d_n)_{n=1}^\infty$ подпоследовательность $(d_{n_k})_{k=1}^\infty$ сходящуюся к единице $\mu$-почти везде. Обозначим через $P \in \mathcal{B}(M)$ множество полной меры, для каждой точки которого имеет место эта сходимость, и положим $e_k = d_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $(B_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность операторов $B_n \in L_\infty(\mathcal{A})$, связанных согласно определению $L_0(\mathcal{A})$ с $C$. Для каждого $f \in \mathfrak{D}(C)$ в $H$ $B_n f \underset{n\to\infty}{\to} Cf$. Используя лемму 3.3 и обозначая через $b_n \in L_\infty(M, d\mu(\omega))$ функцию, отвечающую оператору $B_n$, получим в смысле сходимости в пространстве $L_2(M, d\mu(\omega))$

$$b_n(\omega)(Gf)(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} (C(Gf))(\omega) \quad (f \in \mathfrak{D}(C)). \tag{3.20}$$

Покажем, что при помощи диагонального процесса из последовательности $(b_n)_{n=1}^\infty$ в существенном ограниченных на $M$ функций можно выделить подпоследовательность $(b_{n_l})_{l=1}^\infty$, которая почти везде сходится к некоторой измеримой функции $c(\omega)$.

Положим в (3.20) $f = D_{n_1}\Omega$, т. е. $Gf = e_1$, и выделим из последовательности $(b_n(\omega)\, e_1(\omega))_{n=1}^\infty$, сходящейся в $L_2(M, d\mu(\omega))$ к $(Ce_1)(\omega)$, подпоследовательность $(b_{1n}(\omega)\, e_1(\omega))_{n=1}^\infty$, которая сходится к этой же функции почти везде. Затем положим в (3.20) $f = D_{n_2}\Omega$, т. е. $Gf = e_2$, и выделим из последовательности $(b_{1n}(\omega)\, e_2(\omega))_{n=1}^\infty$ подпоследовательность $(b_{2n}(\omega)\, e_2(\omega))_{n=1}^\infty$, которая сходится к $(Ce_2)(\omega)$ почти везде. Продолжим эту процедуру, полагая $f = D_{n_3}\Omega$ и т. д., и затем рассмотрим диагональную последовательность $(b_{nn}(\omega))_{n=1}^\infty$. Она обладает тем свойством, что для каждого $k = 1, 2, \ldots$ последовательность $(b_{nn}(\omega)\, e_k(\omega))_{n=1}^\infty$ сходится почти везде, поэтому можно построить множество $Q \in \mathcal{B}(M)$ полной меры, для каждой точки $\omega$ которого указанная последовательность сходится при любом $k = 1, 2, \ldots$

Теперь легко понять, что в каждой точке $\omega$ множества $P \cap Q$ полной меры существует предел $c(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} b_{nn}(\omega)$. Действительно, так как $\omega \in P$, то $e_k(\omega) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$, поэтому найдется $k$ столь большое, что $e_k(\omega) \neq 0$. Зафиксируем это $k$ и рассмотрим последовательность $(b_{nn}(\omega) e_k(\omega))_{n=1}^\infty$. Так как $\omega \in Q$, то она сходится, а значит, в силу неравенства $e_k(\omega) \neq 0$ сходится и последовательность $(b_{nn}(\omega))_{n=1}^\infty$. Итак, $c(\omega)$ построена при $\omega \in P \cap Q$, вне этого множества считаем $c(\omega)$ равной, например, нулю. Осталось обозначить $b_{ll} = b_{n_l}$ $(l = 1, 2, \ldots)$.

Заменим теперь в (3.20) $n$ на $n_l$ и перейдем к пределу при $l \to \infty$. В результате получим равенство $(G(Cf))(\omega) = c(\omega)(Gf)(\omega)$ почти для всех $\omega \in M$. Таким образом, мы построили функцию $c(\omega)$, отвечающую $C$. Кроме того, доказано включение

$$\mathfrak{D}(C) \subseteq \{f \in H \mid c(\cdot)(Gf)(\cdot) \in L_2(M, d\mu(\omega))\}. \tag{3.21}$$

Отметим, что нормальность $C$ пока нигде не использовалась.

Докажем противоположное к (3.21) включение. Пусть $h$ входит в правое множество (3.21). Тогда согласно уже доказанному можем написать, если обозначить $\hat{k}(\omega) = \overline{c(\omega)}(Gh)(\omega) \in L_2(M, d\mu(\omega))$,

$$(Cf, h)_H = (G(Cf), Gh)_{L_2(M, d\mu(\omega))} = (c(\cdot)(Gf)(\cdot), (Gh)(\cdot))_{L_2(M, d\mu(\omega))} = ((Gf)(\cdot), \hat{k}(\cdot))_{L_2(M, d\mu(\omega))} = (f, G^{-1}(\hat{k}(\cdot)))_H \quad (f \in \mathfrak{D}(C)).$$

Отсюда следует, что $h \in \mathfrak{D}(C^*) = \mathfrak{D}(C)$ (следствие нормальности $C$), что и требовалось. Итак, соотношения (3.19) установлены.

Из плотности $G(\mathfrak{D}(C))$ в $L_2(M, d\mu(\omega))$ следует, что функция $c$, отвечающая $C$ согласно (3.19), определяется однозначно. Далее, если $C_1$, $C_2$ — два оператора из $L_0(\mathcal{A})$, которым согласно (3.19) отвечает одна и та же $c$, то их области определения совпадают и их действия одинаковы, т. е. $C_1 = C_2$.

Осталось убедиться, что по любой $c \in L_0(M, d\mu(\omega))$ можно найти оператор $C \in L_0(\mathcal{A})$ такой, что $C \mapsto c$. Для этого рассмотрим оператор $\hat{C}$ умножения на функцию $c(\omega)$, действующий в $L_2(M, d\mu(\omega))$. Положим $b_n(\omega) = c(\omega)$ на множестве $\{\omega \in M \mid |c(\omega)| \leqslant n\}$ и $b_n(\omega) = 0$ для остальных $\omega$ из $M$. Пусть $\hat{B}_n$ — соответствующий оператор умножения $(n = 1, 2, \ldots)$. Для каждой функции $\hat{f} \in \mathfrak{D}(\hat{C})$ по норме пространства $L_2(M, d\mu(\omega))$ $\hat{B}_n\hat{f} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \hat{C}f$. В самом деле,

$$\|\hat{C}\hat{f} - \hat{B}_n\hat{f}\|^2_{L_2(M, d\mu(\omega))} = \int\limits_{\{\omega\in M \mid |c(\omega)|>n\}} |c(\omega)\hat{f}(\omega)|^2\, d\mu(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

так как $\mu(\{\omega \in M \mid |c(\omega)| > n\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ благодаря тому, что $c(\omega)$ почти везде конечна, а $c(\cdot)\hat{f}(\cdot) \in L_2(M, d\mu(\omega))$ $(\hat{f} \in \mathfrak{D}(\hat{C}))$.

Положим теперь $C = G^{-1}\hat{C}G$, $B_n = G^{-1}\hat{B}_nG$ ($n = 1, 2, \ldots$). Тогда согласно лемме 3.3 каждый $B_n \in L_\infty(\mathcal{A})$ и в $H$

$$Cf = \lim_{n\to\infty} B_n f \quad (f \in G^{-1}\hat{f} \in \mathfrak{D}(C) = G^{-1}\mathfrak{D}(\hat{C})). \tag{3.22}$$

Построим теперь требуемую последовательность $(D_n)_{n=1}^{\infty}$. Положим $d_n(\omega) = 1$ на множестве $\{\omega \in M \mid |c(\omega)| > n\}$ и $d_n(\omega) = 0$ для остальных $\omega$ из $M$. Пусть $\hat{D}_n$ — соответствующий оператор умножения в пространстве $L_2(M, d\mu(\omega))$ ($n = 1, 2, \ldots$). Ясно, что в этом пространстве $\hat{D}_n e \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$ и $\hat{D}_n e \in \mathfrak{D}(\hat{C})$ ($n = 1, 2, \ldots$). Опять перейдем посредством изометрии $G$ в $H$, получим операторы $D_n = G^{-1}\hat{D}_nG \in L_\infty(\mathcal{A})$ такие, что в $H$ $D_n\Omega \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Omega$ и $D_n\Omega \in \mathfrak{D}(C)$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Из (3.22) и только что доказанного следует, что $C$ присоединен к $\mathcal{A}$, т. е. $C \in L_0(\mathcal{A})$. Согласно (3.19) $C \mapsto c$. ■

Замечания. 1. Совокупность $L_0(M, d\mu(\omega))$ является алгеброй относительно обычных алгебраических операций, замкнутой относительно сходимости почти везде. Тем самым благодаря теореме 3.1 соответствующие алгебраические операции и сходимость можно ввести и в $L_0(\mathcal{A})$. Подробно на этих вопросах мы останавливаться не будем.

2. Самосопряженные операторы из $L_0(\mathcal{A})$ соответствуют вещественнозначным функциям из $L_0(M, d\mu(\omega))$.

Параллельно с теоремой 3.1 мы доказали следующий результат.

**Теорема 3.2.** *Пусть $(A_x)_{x\in X}$ — обладающее частичным вакуумом семейство коммутирующих нормальных операторов. Построенная в теореме 3.1 изометрия $G$ преобразует это семейство в семейство операторов умножения в $L_2(M, d\mu(\omega))$ на измеримые $\mu$-почти всюду конечные функции. Пусть $a_x(\cdot) \in L_0(M, d\mu(\omega))$ — функция, отвечающая $A_x$, тогда $(a_x)_{x\in X}$ — случайный процесс, причем роль вероятностного пространства играет $M$ с $\sigma$-алгеброй событий $\mathcal{B}(M)$ и вероятностной мерой $\mu$.*

Эта теорема вытекает из теоремы 3.1 и сделанного выше замечания о том, что $A_x \in L_0(M, d\mu(\omega))$ ($x \in X$). Отметим, что если $\Omega \in \mathfrak{D}(A_x)$, то $a_x = G(A_x\Omega)$.

Замечание 3. Как уже говорилось, алгебра $\mathcal{A}$ и пространство $M$, фигурирующие в теоремах 3.1 и 3.2, будут, вообще говоря, слишком широкими. Легко понять, какое дополнительное ограничение надо наложить на семейство $(A_x)_{x\in X}$ и орт $\Omega$, чтобы иметь возможность сузить эти образования. Предположим, что существует коммутативная $C^*$-алгебра $\mathcal{A}_1$ с единицей ограниченных операторов из $\mathcal{L}(H \to H)$, обладающая следующими свойствами: а) линейное множество $\{A\Omega \mid A \in \mathcal{A}_1\}$ плотно в $H$; б) обозначим через $L_0(\mathcal{A}_1)$ совокупность всех нормальных операторов в $H$, присоединенных к $\mathcal{A}_1$ (определение присоединенности такое, как и ранее, нужно лишь $\mathcal{A}$ заменить на $\mathcal{A}_1$); требуется, чтобы каждый оператор $A_x$ ($x \in X$) был присоединен к $\mathcal{A}_1$.



Повторяя приведенные выше доказательства с заменой $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}_1$ (основная часть доказательства леммы 3.1 сейчас просто совпадает с требованием а)), легко установить справедливость теорем 3.1 и 3.2, где $\mathcal{A}$ заменено на $\mathcal{A}_1$, $M$ — на пространство $M_1$ максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}_1$ и т. д.

## 4. ПОНЯТИЕ КВАНТОВОГО ПРОЦЕССА

Введем следующее определение. Будем называть (общим) квантовым процессом, индексированным посредством $x \in X$, семейство $(A_x)_{x\in X}$ действующих в $H$ коммутирующих нормальных операторов, обладающее частичным вакуумом $\Omega$ *. Если все операторы $A_x$ самосопряжены или унитарны, то процесс будем называть самосопряженным или унитарным.

Теорема 3.2 показывает, что всякий квантовый процесс с точностью до изоморфизма гильбертова пространства $H$ можно заменить обычным случайным процессом (который будем называть реализацией квантового). Из сказанного в п. 2 вытекает, что и обычный случайный процесс можно рассматривать как квантовый, если только выполнено условие того, что $\Omega(\cdot) = 1$ является частичным вакуумом (см. стр. 206). Несмотря на кажущуюся эквивалентность этих двух понятий, между ними имеются существенные различия, связанные с тем, что естественные условия, формулируемые в терминах гильбертова пространства $H$, часто переходят в неестественные при его реализации как $L_2(M, d\mu(\omega))$, и обратно. Подчеркнем также, что саму реализацию часто удобно вводить различными способами (см. п. 3).

Каждый из операторов $A_x$ ($x \in X$) можно воспринимать как «нереализованную» случайную величину. Разложение единицы $E_x$ при помощи формулы $\mathcal{B}(\mathbb{C}^1) \ni \Delta \mapsto (E_x(\Delta)\Omega, \Omega)_H$ дает распределение соответствующей реализованной случайной величины $a_x$ независимо от способа реализации (см. (3.6), где $B = Ц(x; \Delta)$; ниже термин «нереализованная» опускаем). Мы не будем последовательно излагать с «инвариантных» позиций соответствующую часть теории случайных процессов и ограничимся лишь отдельными замечаниями.

1. Пусть $(A_x)_{x\in X'}$ ($X' \subseteq X$) — некоторое множество случайных величин. Эти величины называются независимыми, если мера

* В квантовой теории поля возникает ситуация, когда операторы $A_x$ не всегда коммутируют. Ее мы не будем затрагивать в этой книге.

$(E_{x_1, \ldots, x_p}(\cdot)\,\Omega, \Omega)_H = (E_{x_1}(\cdot)\,\Omega, \Omega)_H \otimes \ldots \otimes (E_{x_p}(\cdot)\,\Omega, \Omega)_H$ ($x_1, \ldots, x_p \in X'$ различны; $p = 1, 2, \ldots$). Математическое ожидание $\mathbf{M}$ и дисперсия $\mathbf{D}$ случайной величины $A_x$ определяются равенствами $\mathbf{M}A_x = (A_x\Omega, \Omega)_H$ (если $\Omega \in \mathfrak{D}(A_x)$) и $\mathbf{D}A_x = \|(A_x - (\mathbf{M}A_x)1)\,\Omega\|_H^2 \leqslant \infty$. Если $\Omega \bar{\in} \mathfrak{D}(A_x)$, то можно положить $\mathbf{M}A_x = \lim_{n\to\infty}(A_xD_n\Omega, D_n\Omega)_H$, если последний предел существует ($D_n$ — операторы из $L_\infty(\mathcal{A})$, связанные с $A_x \in L_0(\mathcal{A})$). Ковариация случайных величин $A_x$, $A_y$ определяется, если она существует, соотношением $\mathrm{cov}(A_x, A_y) = ((A_x - (\mathbf{M}A_x)\,1)\Omega, (A_y - (\mathbf{M}A_y)1\Omega)_H$ ($x, y \in X$).

2. Самосопряженный квантовый процесс называется гауссовским (с нулевым средним, невырожденный), если для любых различных $x_1, \ldots, x_p \in X$ ($p = 1, 2, \ldots$) справедливо следующее представление через интеграл по мере Лебега:

$$(E_{x_1, \ldots, x_p}(\Delta)\,\Omega, \Omega)_H =$$
$$= (2\pi)^{-\frac{p}{2}}\,(\mathrm{Det}\,(b_{jk})_{j,k=1}^p)^{\frac{1}{2}} \int_\Delta e^{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^p b_{jk}\xi_j\xi_k}\,d\xi \quad (\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)). \tag{3.23}$$

Здесь $(b_{jk})_{j,k=1}^p = ((a_{jk})_{j,k=1}^p)^{-1}$; $(a_{jk})_{j,k=1}^p$, $a_{jk} = (A_{x_j}\Omega, A_{x_k}\Omega)_H$ — матрица ковариаций (предполагается, что $\Omega \in \mathfrak{D}(A_x)$ ($x \in X$) и каждая такая матрица обратима, т. е. векторы $A_{x_1}\Omega, \ldots, A_{x_p}\Omega$ линейно независимы). Можно было бы определить и общий гауссовский процесс (с ненулевым средним, вырожденный), например, при помощи так называемой характеристической функции процесса.

3. Теоремы 2.8, 2.10, 2.12 о разложении по совместным обобщенным собственным векторам можно интерпретировать как результат типа выбора функций $X \ni x \mapsto a_x(\omega) \in \mathbb{C}^1$ при фиксированном $\omega$ для обычного случайного процесса $(a_x)_{x\in X}$, т. е. выбора его траекторий. Каждая такая функция будет собственным значением, отвечающим совместному обобщенному собственному вектору $\delta_\omega$ операторов умножения на $a_x(\cdot)$ (разумеется, $M$ и $\mu$ должны быть такими, чтобы $\delta_\omega$ можно было разумно определить). Смысл этих теорем с такой точки зрения заключается в возможности выбора полного (по мере $m$, отвечающей процессу) запаса этих функций, оперируя только с $A_x$ и $H$, без предварительной реализации процесса.

4. Посмотрим, к чему приводит с точки зрения случайных процессов пример с. р. е. с пустым носителем (см. § 1, п. 6). Применим к этому семейству самосопряженных операторов $(A_x)_{x\in X}$ ($X = \{\xi\} \cup \mathbb{R}^1$) теорему 3.2 или, для того чтобы явно выписать $M$ и $\mu$, замечание 3 п. 3. Рассмотрим в пространстве $H = L_2(\mathbb{R}^1)$ всевозможные операторы умножения на функции $a(\cdot) \in C(\mathbb{R}^1)$, имеющие конечные равные пределы при $t \to \pm\infty$. Они образуют коммутативную



$C^*$ алгебру $\mathcal{A}_1$, пространством $M$ максимальных идеалов $\omega$ которой служит компактифицированная ось $\mathbf{R}^1$. Положим $\Omega = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$. Легко видеть, что $\{A\Omega \mid A \in \mathcal{A}_1\}$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^1)$. Алгебра $L_\infty(\mathcal{A}_1)$ состоит из всех операторов умножения в $L_2(\mathbb{R}^1)$ на ограниченные измеримые функции, а $L_0(\mathcal{A}_1)$ — на измеримые функции. Действие оператора $A_x$ ($x \in \mathbb{R}^1$) сводится к умножению на функцию $a_x(t) = \sum_{n=1}^\infty n\varkappa_{\Delta_{x,n}}(t)$, поэтому каждый такой оператор входит в $L_0(\mathcal{A}_1)$; также $A_\xi \in L_0(\mathcal{A}_1)$. Сопоставляя (3.8) и (3.9), заключаем, что сейчас $d\mu(\omega) = \pi^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega^2}d\omega$. Итак, реализацией рассматриваемого квантового процесса служит следующий случайный процесс: $M = \mathbb{R}^1$, $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, $d\mu(\omega) = \pi^{-\frac{1}{2}}e^{-\omega^2}d\omega$, $(a_x(\omega))_{x\in X}$, где $a_\xi(\omega) \equiv \omega$, $a_x(\omega)$ при $x \in \mathbb{R}^1$ имеет указанный выше вид. Вероятностная мера $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X) \ni B \mapsto m(B) \geqslant 0$, отвечающая этому процессу, обладает тем свойством, что $\mathrm{supp}\,m = \varnothing$.

## § 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР КОММУТИРУЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Если семейство коммутирующих нормальных операторов $(A_x)_{x\in X}$ произвольно, то его с. р. е. может служить произвольное разложение единицы $E$ на $\mathbb{C}^X$. Однако если между операторами $A_x$ имеются определенные алгебраические связи, то $E$ уже не будет таковым. Мы рассмотрим некоторые типы таких связей и выясним, где заведомо сосредоточено в этих случаях $E$. Будет удобно пользоваться понятием представления алгебраической структуры $X$: отображение $X \ni x \mapsto A_x$ должно быть таким, чтобы оно алгебраические операции в $X$ переводило в соответствующие операции над операторами $A_x$. Для простоты формулировки будем в основном пользоваться схемой с оснащением ядерным пространством (см. § 2, п. 9).

### 1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В качестве $X$ будет фигурировать линейное топологическое пространство, коммутативная топологическая группа или алгебра. Предварительно напомним некоторые хорошо известные понятия и факты.

Если $X$ — линейное топологическое пространство, то сопряженное пространство $X^*$ линейных функционалов является множеством из $\mathbb{C}^X$ (или $\mathbb{R}^X$ в случае вещественного $X$). Относительная топология, индуцируемая тихоновской топологией в $\mathbb{C}^X$, совпадает со слабой топологией в сопряженном пространстве. Будут также рассматриваться линейные топологические (комплексные) пространства $X$ с инволюцией $_*$. Это означает, что в $X$ определен антилинейный непрерывный оператор $X \ni x \mapsto x^* \in X$, обладающий тем свойством, что $(x^*)^* = x^{**} = x$ $(x \in X)$.

Пусть $X$ — аддитивно записанная топологическая коммутативная группа (не обязательно локально компактная). Непрерывная функция $X \ni x \mapsto \chi(x) \in \mathbb{C}^1$ такая, что $|\chi(x)| = 1$ $(x \in X)$ и $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ $(x, y \in X)$, называется непрерывным характером группы $X$, а совокупность $\hat{X}$ всех таких характеров — группой ее непрерывных характеров (в $\hat{X}$ вводится структура коммутативной группы, если положить $\hat{X} \times \hat{X} \ni (\chi, \theta) \mapsto \chi \circ \theta = \chi(x)\theta(x)$ $(x \in X)$). Очевидно, $\hat{X} \subseteq \mathbb{C}^X$. Тихоновская топология в $\mathbb{C}^X$ индуцирует топологию в $\hat{X}$. Легко проверить, что группа $\hat{X}$ в этой топологии будет непрерывной.

Пусть $X$ — топологическая коммутативная алгебра, т. е. комплексное линейное топологическое пространство, являющееся одновременно и коммутативной алгеброй, причем операция умножения $X \times X \ni (x, y) \mapsto xy \in X$ непрерывна. При рассмотрении таких алгебр существенную роль играют мультипликативные функционалы, т. е. отличные от нуля элементы $l$ сопряженного пространства $X^*$ линейных непрерывных функционалов, удовлетворяющие условию $l(xy) = l(x)\,l(y)$ $(x, y \in X)$. В их совокупность $M \subseteq X^* \subseteq \mathbb{C}^X$ можно ввести топологию, индуцированную слабой топологией в $X^*$ или, что то же, тихоновской топологией в $\mathbb{C}^X$.

Если алгебра $X$ нормирована, то мультипликативные функционалы находятся во взаимно однозначном соответствии с максимальными идеалами алгебры. Так, если $X$ содержит единицу, то $l \leftrightarrow \omega$, где $\omega$ — максимальный идеал, задающийся соотношением $\omega = \{x \in X \mid l(x) = 0\}$. Множество $M$ можно понимать тогда как пространство максимальных идеалов.

## 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА, ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ

Напомним некоторые понятия. Пусть $Q \subseteq \mathbb{C}^X$. Обозначим, как и ранее, через $\mathcal{C}_\sigma(Q) = (\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X))(Q)$ $\sigma$-алгебру всех множеств $\hat{B} \subseteq \mathbb{C}^X$ вида $\hat{B} = B \cap Q$, где $B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)$. Иными словами, $\mathcal{C}_\sigma(Q)$ совпадает с совокупностью всех обобщенных цилиндрических множеств вида



$$\hat{B} = Ц(Q;\ x_1,\ x_2,\ \ldots;\ \Delta) = \{\lambda(\cdot) \in Q \mid (\lambda(x_1),\ \lambda(x_2),\ \ldots) \in \Delta\}$$
$$(\Delta \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^\infty)). \tag{4.1}$$

Эту $\sigma$-алгебру можно понимать как $\sigma$-оболочку алгебры $\mathcal{C}(Q)$, состоящей из всех цилиндрических множеств вида

$$Ц(Q;\ x_1,\ \ldots,\ x_p;\ \Delta) = \{\lambda(\cdot) \in Q \mid (\lambda(x_1),\ \ldots,\ \lambda(x_p)) \in \Delta\}$$
$$(\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^p);\quad p = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.2}$$

Пусть на $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)$ задано с. р. е. $E$ семейства операторов $(A_x)_{x \in X}$, причем $Q$ имеет полную внешнюю меру $E$. Тогда благодаря теореме 1.7 может быть построено модифицированное с. р. е. $\hat{E}$, сосредоточенное на $Q$. Ниже мы используем эту схему при $Q$, совпадающем с $X^*$, $\hat{X}$ или $M$.

Рассмотрим сперва представления ограниченными операторами.

**Теорема 4.1.** *Пусть $(A_x)_{x \in X}$ — семейство действующих в пространстве $H_0$ ограниченных коммутирующих нормальных операторов, для которых существует оснащение* (2.59) *с ядерным $\Phi$ такое, что выполняются условия а) и б) § 2, п. 9. Предположим, что дополнительно выполняется одно из следующих требований:*

*α) $X$ — линейное комплексное топологическое пространство и семейство $(A_x)_{x \in X}$ осуществляет его представление, т. е. отображение $X \ni x \mapsto A_x\ \mathcal{L}(H_0 \to H_0)$ линейно;*

*β) $X$ — коммутативная топологическая группа, $(A_x)_{x \in X}$ состоит из унитарных операторов и осуществляет представление $X$, т. е. $A_{x+y} = A_x A_y$ $(x, y \in X)$;*

*γ) $X$ — коммутативная топологическая алгебра, $(A_x)_{x \in X}$ осуществляет точное представление $X$, т. е. отображение $X \ni x \mapsto A_x \in \mathcal{L}(H_0 \to H_0)$ линейно, мультипликативно и для каждого $f \in H_0$ $(f \neq 0)$ найдется $x \in X$ такое, что $A_x f \neq 0$.*

*Тогда для рассматриваемого семейства можно построить модифицированное с. р. е. $\hat{E}$, которое сосредоточено в случае: α) на сопряженном к $X$ пространстве $X^*$; β) на группе $\hat{X}$ непрерывных характеров группы $X$; γ) на пространстве $M$ мультипликативных функционалов алгебры $X$.*

Доказательство. Согласно сказанному выше достаточно доказать, что каждое из множеств $X^*$, $\hat{X}$ и $M$ имеет полную внешнюю меру $\hat{E}$ или, что то же, $\rho$. Так как операторы $A_x$ ограничены, а условия а) и б) предполагаются выполненными, то из теоремы 2.12 следует, что существует множество $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^X)$ полной внешней меры $\rho$, состоящее из непрерывных функций на $X$ и такое, что для каждого $\lambda(\cdot) \in T$ имеем

$$(P(\lambda(\cdot))u, A_x^* v)_{H_0} = \lambda(x)(P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} (u, v \in \Phi; x \in X). \quad (4.3)$$

Для доказательства первых двух утверждений теоремы достаточно установить, что $T$ входит в одно из множеств $X^*$ или $\hat{X}$, если выполнено условие, соответственно, $\alpha$) или $\beta$). В случае $\gamma$) рассуждения будут более сложными.

Пусть выполнено $\alpha$). Из равенства $A_{\alpha x+\beta y} = \alpha A_x + \beta A_y$ заключаем, что $A^*_{\alpha x+\beta y} = \bar{\alpha} A_x^* + \bar{\beta} A_y^*$ $(x, y \in X; \alpha, \beta \in \mathbb{C}^1)$. Для каждого фиксированного $\lambda(\cdot) \in T$ из (4.3) и этого равенства получаем

$$\lambda(\alpha x+\beta y)(P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} = (P(\lambda(\cdot))u, A^*_{\alpha x+\beta y} v)_{H_0} =$$
$$= (P(\lambda(\cdot))u, \bar{\alpha} A_x^* v + \bar{\beta} A_y^* v)_{H_0} = \alpha(P(\lambda(\cdot))u, A_x^* v)_{H_0} +$$
$$+ \beta(P(\lambda(\cdot))u, A_y^* v)_{H_0} = (\alpha\lambda(x) + \beta\lambda(y))(P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} \quad (4.4)$$
$$(x, y \in X; \alpha, \beta \in \mathbb{C}^1; u, v \in \Phi).$$

Так как Сл. $(P(\lambda(\cdot))) = 1$, то можно так подобрать $u, v \in \Phi$, чтобы $(P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} \neq 0$. Тогда из (4.4) следует, что функция $\lambda(\cdot)$ линейная. Как уже отмечалось, она непрерывная, т. е. является элементом из $X^*$. Итак, $T \subseteq X^*$.

Пусть выполнено $\beta$). Так как спектр унитарного оператора расположен на единичной окружности $K$ комплексной плоскости, то из включений (1.16) и $T \subseteq \operatorname{supp} \rho$ заключаем, что $T \subseteq K^X = \underset{x \in X}{\times} K$. Зафиксируем $\lambda(\cdot) \in T$. Из сказанного вытекает, что $|\lambda(x)| = 1$ $(x \in X)$. При помощи (4.3) получим

$$\lambda(x+y)(P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} = (P(\lambda(\cdot))u, A^*_{x+y} v)_{H_0} =$$
$$= (P(\lambda(\cdot))u, A_x^* A_y^* v)_{H_0} = \lambda(x)(P(\lambda(\cdot))u, A_y^* v)_{H_0} =$$
$$= \lambda(x)\lambda(y)(P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} \quad (x, y \in X; u, v \in \Phi). \quad (4.5)$$

Здесь мы воспользовались равенством $A^*_{x+y} = A^{-1}_{x+y} = A_{-(x+y)} = A_{-x}A_{-y} = A_x^* A_y^*$ и тем, что $A_y^* \Phi \subseteq \Phi$ $(x, y \in X)$. Подбирая $u, v \in \Phi$ так, чтобы $(P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} \neq 0$, получаем из (4.5) равенство $\lambda(x+y) = \lambda(x)\lambda(y)$ $(x, y \in X)$. Это соотношение, равенство $|\lambda(x)| = 1$ и непрерывность функции $\lambda(\cdot)$ показывают, что $\lambda(\cdot)$ — непрерывный характер группы $X$. Итак, $T \subseteq \hat{X}$.

Пусть выполнено $\gamma$). Из равенств $A_{\alpha x+\beta y} = \alpha A_x + \beta A_y$ и $A_{xy} = A_x A_y$ благодаря ограниченности и попарной коммутируемости операторов $A_x$ заключаем, что $A^*_{\alpha x+\beta y} = \bar{\alpha} A_x^* + \bar{\beta} A_y^*$ и $A^*_{xy} = A_x^* A_y^*$ $(x, y \in X; \alpha, \beta \in \mathbb{C}^1)$. При помощи этих двух равенств подобно (4.4) и (4.5) получим, что для каждой функции $\lambda(\cdot) \in T$ справедливы соотношения $\lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda(x) + \beta\lambda(y)$



и $\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$ $(x, y \in X; \alpha, \beta \in \mathbb{C}^1)$. Эти соотношения и ее непрерывность показывают, что $\lambda(\cdot)$ — элемент из $X^*$, удовлетворяющий свойству мультипликативности, т. е. $\lambda(\cdot)$ — мультипликативный функционал. Мы не установили неравенство $\lambda(\cdot) \neq 0$, поэтому сейчас можно сделать лишь заключение, что $T \subseteq M \cup \{0\}$.

Из доказанного вытекает, что множество $Q = M \cup \{0\}$ полной внешней спектральной меры. Построим модифицированное с. р. е. $\hat{E}$, сосредоточенное на $Q$. Согласно (2.51) можно написать

$$A_x = \int_{M \cup \{0\}} \lambda(x)\, d\hat{E}(\lambda(\cdot)) \qquad (x \in X). \quad (4.6)$$

Покажем теперь, что $M$ полной внешней спектральной меры; этим будет завершено доказательство. Предположим противное. Тогда найдется такое $B_0 \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^X)$, что $B_0 \supseteq M$ и $\rho(\mathbb{C}^X \setminus B_0) \neq 0$ и, следовательно, $E(\mathbb{C}^X \setminus B_0) \neq 0$. Ясно, что $0 \notin B_0$, так как тогда должно было бы выполняться равенство $\rho(\mathbb{C}^X \setminus B_0) = 0$. Поэтому $\{0\} = (\mathbb{C}^X \setminus B_0) \cap (M \cup \{0\}) \in \mathcal{C}_\sigma(M \cup \{0\})$ и $\hat{E}(\{0\}) = E(\mathbb{C}^X \setminus B_0) \neq 0$, отсюда следует, разумеется, что и $M \in \mathcal{C}_\sigma(M \cup \{0\})$. Эти соотношения позволяют (4.6) переписать в виде

$$A_x = \int_M \lambda(x)\, d\hat{E}(\lambda(\cdot)) + 0(x)\,\hat{E}(\{0\}) = \int_M \lambda(x)\, d\hat{E}(\lambda(\cdot)) \qquad (x \in X). \quad (4.7)$$

Так как $\hat{E}(\{0\}) \neq 0$, то найдется отличный от нуля вектор $f \in \Re(\hat{E}(\{0\}))$. В силу свойства ортогональности $\hat{E}$ для любого $\mathcal{C}_\sigma(M \cup \{0\}) \ni B \subseteq M$ имеем $\hat{E}(B)f = 0$, поэтому согласно (4.7) $A_x f = 0$ $(x \in X)$. Но это противоречит предполагаемой точности представления. Итак, $M$ — полной внешней спектральной меры. ■

Замечания. 1. Совершенно аналогично случаю $\alpha$) можно рассмотреть вместо комплексного вещественное линейное топологическое пространство $X$. Сейчас $(A_x)_{x \in X}$ — семейство ограниченных коммутирующих самосопряженных операторов таких, что отображение $X \ni x \mapsto A_x \in \mathcal{L}(H_0 \to H_0)$ линейно. Как и ранее, $\hat{E}$ сосредоточено на $X^*$.

2. Можно рассмотреть представление комплексного линейного топологического пространства $X$ с инволюцией * (отображение $X \ni x \mapsto A_x \in \mathcal{L}(H_0 \to H_0)$ линейно и $A_{x^*} = A_x^*$ $(x \in X)$). Тогда $\hat{E}$ сосредоточено на пространстве $X^*_{\mathrm{Re}} = \{\lambda \in X^* \mid \lambda(x^*) = \overline{\lambda(x)}, x \in X\}$ вещественных функционалов из $X^*$. В самом деле, при помощи (4.3) и той части теоремы 2.12, которая касается выполнения соотношения типа (2.17), получим для $\lambda(\cdot) \in T$

$$\lambda(x^*)(P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} = (P(\lambda(\cdot))u, A^*_{x^*}v)_{H_0} = (P(\lambda(\cdot))u, A_x v)_{H_0} =$$
$$= \overline{\lambda(x)}(P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} \quad (u, v \in \Phi;\ x \in X).$$

Отсюда заключаем, что $\lambda(x^*) = \overline{\lambda(x)}$ $(x \in X)$, что и требуется.

3. Если в случае $\gamma$) не требовать точности представления, то $\hat{E}$ будет сосредоточено на $M \cup \{0\}$.

4. Приведенные результаты справедливы и в случае цепочки гильбертовых пространств (2.18). Именно, предположим, что выполняются обычные условия, при которых имеют место теоремы 2.8 и 2.11:

а$'$) имеется цепочка $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ с квазиядерным вложением $O: H_+ \to H_0$ и семейство $(A_x)_{x\in X}$ допускает совместное продолжение оснащения $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+ \supseteq D$, где $D$ — проективный предел гильбертовых пространств;

б$'$) для каждого $u \in D$ вектор-функция $X \ni x \mapsto A^*_x u \in H_+$ слабо непрерывна.

*Утверждение теоремы* 4.1 *сохраняется, если условия а) — б) заменить на условия а$'$) — б$'$), при этом в случаях* $\beta$) *и* $\gamma$) *следует требовать сепарабельность* $X$. В самом деле, все этапы доказательства этой теоремы сохраняются за исключением соотношений $\lambda(x + y) = \lambda(x)\lambda(y)$ и $\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$ $(x, y \in X)$ в случаях $\beta$) и $\gamma$) соответственно. Докажем первое из них. Пусть $(x_j)_{j=1}^\infty$ и $(v_k)_{k=1}^\infty$ — последовательности, плотные в $X$ и $D$ соответственно, причем $x_1 = 0$. Так как $(A_{-x_j}v_k)_{j,k=1}^\infty \supseteq (v_k)_{k=1}^\infty$ $(A_0 = 1)$, то первая из этих последовательностей плотна в $H_+$. При помощи индукции выберем из нее подпоследовательность $(A_{-x_{j_n}}v_{k_n})_{n=1}^\infty$ линейно независимых векторов. Построим линейное топологическое пространство $D_1 =$ л. о. $((A_{-x_{j_n}}v_{k_n})_{n=1}^\infty)$ со сходимостью: $\sum_{n=1}^\infty c_n^{(m)} A_{-x_{j_n}}v_{k_n} \xrightarrow[m\to\infty]{} \sum_{n=1}^\infty c_n A_{-x_{j_n}}v_{k_n}$, если $c_n^{(m)}$ равномерно по $m$ финитны и для каждого $n$ $c_n^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} c_n$. Ясно, что $D_1$ — проективный предел гильбертовых пространств и плотно в $H_+$, причем вложение $D_1 \subseteq H_+$ топологическое. Каждый оператор $A^*_x = A_{-x}$ $(x \in X)$ переводит непрерывно $D_1$ в $H_+$, так как $A_{-x}A_{-x_{j_n}}v_{k_n} = A_{-x-x_{j_n}}v_{k_n} \in H_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, справедлив вариант теоремы 2.6 для нормальных операторов с заменой $D$ на $D_1$. Пусть $T_1$ — соответствующий уточненный спектр, $T$ — такой спектр, построенный по $D$. Множество $T \cap T_1$ имеет полную внешнюю спектральную меру — ср. с доказанным в конце § 2, п. 5.

Пусть $\lambda(\cdot) \in T \cap T_1$, согласно (2.16) получим при каждых $x \in X$, $u \in H_+$ и $j, k = 1, 2, \ldots$



$$\lambda(x + x_j)(P(\lambda(\cdot))u, v_k)_{H_0} = (P(\lambda(\cdot))u, A^*_{x+x_j}v_k)_{H_0} =$$
$$= (P(\lambda(\cdot))u, A_{-x-x_j}v_k)_{H_0} = (P(\lambda(\cdot))u, A_{-x}A_{-x_j}v_k)_{H_0} =$$
$$= \lambda(x)(P(\lambda(\cdot))u, A_{-x_j}v_k)_{H_0} = \lambda(x)\lambda(x_j)(P(\lambda(\cdot)u, v_k)_{H_0}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $v_k \in D$ и $A_{-x_j}v_k \in D_1$. Из полученного соотношения как и ранее заключаем, что $\lambda(x + x_j) = \lambda(x)\lambda(x_j)$ $(x \in X;\ j = 1, 2, \ldots)$. Так как $x_j$ плотны в $X$, а функция $\lambda(\cdot)$ непрерывна, то отсюда следует $\lambda(x + y) = \lambda(x)\lambda(y)$ $(x, y \in X)$.

Случай $\gamma$) рассматривается аналогично; если $X$ не содержит единицу, то ее нужно сперва обычным образом присоединить и расширить представление $X \ni x \mapsto A_x \in \mathscr{L}(H_0 \to H_0)$. ■

Замечания 1—3 легко распространяются на цепочки гильбертовых пространств.

5. Выпишем некоторые формулы, связанные с теоремой 4.1 и замечаниями 1, 2 и 4. Ниже $\hat{E}$ обозначено через $E$. Для каждого $x \in X$ справедливы соответствующие представления:

$$A_x = \int_{X^\bullet} \lambda(x)\, dE(\lambda), \quad A^*_x = \int_{X^\bullet} \overline{\lambda(x)}\, dE(\lambda); \quad A_x = \int_{X^\bullet_{\mathrm{Re}}} \lambda(x)\, dE(\lambda),$$
$$A^*_x = \int_{X^\bullet_{\mathrm{Re}}} \lambda(x^*)\, dE(\lambda); \quad A_x = \int_{\hat{X}} \chi(x)\, dE(\chi); \quad A_x = \int_{M} l(x)\, dE(l). \tag{4.8}$$

6. Из доказательства теоремы 4.1 следует, что аналогичное уменьшение области интегрирования в представлениях (2.51) имеет место и при ряде других, алгебраических и дифференциальных, связях между операторами $A_x$ семейства $(A_x)_{x\in X}$ (не реализующих, вообще говоря, представление линейного пространства, группы, алгебры и т. п.). Связи между операторами согласно (2.16), (2.17) приводят к некоторому функциональному уравнению для собственного значения $\lambda(\cdot)$, интегралы будут распространены по множеству решений этого уравнения.

7. В случае представлений алгебраических структур неограниченными операторами возникают дополнительные трудности, связанные с компактификацией. Проиллюстрируем их преодоление с помощью теоремы 2.10 в случае представления линейного топологического пространства с инволюцией.

**Теорема 4.2.** *Пусть $X$ — линейное комплексное топологическое пространство с инволюцией* $*$, $(A_x)_{x\in X}$ *— семейство действующих в $H_0$ коммутирующих нормальных операторов, осуществляющее представление $X$. Это означает, что выполнены обычные условия* а$'$) *и* б$'$) *и, кроме того, отображение $X \ni x \mapsto A^*_x \upharpoonright D \in \mathscr{L}(D \to H_+)$ антилинейно и $A_{x^*} \upharpoonright D = A^*_x \upharpoonright D$ $(x \in X)$.*

*Тогда на σ-алгебре $\mathcal{C}_\sigma(X^*_{\mathrm{Re}})$ множеств из пространства $X^*_{\mathrm{Re}}$ вещественных линейных непрерывных функционалов над $X$ существует разложение единицы $\mathcal{C}_\sigma(X^*_{\mathrm{Re}}) \ni B \mapsto E(B)$ такое, что справедливы представления*

$$A_x = \int_{X^*_{\mathrm{Re}}} \lambda(x)\, dE(\lambda), \quad A_x^* = \int_{X^*_{\mathrm{Re}}} \overline{\lambda(x)}\, dE(\lambda) = \int_{X^*_{\mathrm{Re}}} \lambda(x^*)\, dE(\lambda), \tag{4.9}$$

$$\mathfrak{D}(A_x) = \mathfrak{D}(A_x^*) = \left\{ f \in H_0 \,\middle|\, \int_{X^*_{\mathrm{Re}}} |\lambda(x)|^2 d(E(\lambda)f, f)_{H_0} < \infty \right\} \quad (x \in X).$$

Доказательство. Условия теоремы таковы, что можно применить теорему 2.10. Покажем, что сейчас $\mathrm{reg}\,\mathbf{T} \subseteq X^*_{\mathrm{Re}}$. Зафиксируем $\lambda(\cdot) \in \mathrm{reg}\,\mathbf{T}$. Пусть $\lambda(\cdot) \in \mathbf{T}$ такое, что $(\mathrm{reg}\,\lambda(\cdot))(\cdot) = \lambda(\cdot)$. При помощи первого из равенств (2.56) и антилинейности отображения $X \ni x \mapsto A_x^* \upharpoonright D \in \mathcal{L}(D \to H_+)$ заключаем, что

$$\lambda(\alpha x + \beta y)(\hat{P}(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} = (\hat{P}(\lambda(\cdot))u, A^*_{\alpha x + \beta y} v)_{H_0} =$$
$$= (\hat{P}(\lambda(\cdot))u, \bar{\alpha} A_x^* v + \bar{\beta} A_y^* v)_{H_0} = (\alpha\lambda(x) + \beta\lambda(y))(\hat{P}(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0}$$
$$(x, y \in X;\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}^1;\ u, v \in D). \tag{4.10}$$

Так как Сл. $(\hat{P}(\lambda(\cdot))) = 1$, то при некоторых $u, v \in D$ $(\hat{P}(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} \neq 0$ и (4.10) дает линейность функции $\lambda(\cdot)$. Как и в теореме 2.11, из первого равенства (2.56) и б′) заключаем, что $X \ni x \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{C}^1$ непрерывна. Таким образом, $\lambda(\cdot) = \lambda \in X^*$. Вещественность $\lambda$ вытекает из обоих соотношений (2.56) и равенства $A_x^* \upharpoonright D = A_{x^*} \upharpoonright D$ $(x \in X)$:

$$\lambda(x^*)(\hat{P}(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} = (\hat{P}(\lambda(\cdot))u, A^*_{x^*} v)_{H_0} = (\hat{P}(\lambda(\cdot))u, A_x v)_{H_0} =$$
$$= \overline{\lambda(x)}(\hat{P}(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} \quad (x \in X;\ u, v \in D).$$

Итак, $\lambda(\cdot) \in X^*_{\mathrm{Re}}$, т. е. $\mathrm{reg}\,\mathbf{T} \subseteq X^*_{\mathrm{Re}}$.

Осталось применить теорему 2.10 при $Q = X^*_{\mathrm{Re}}$ и обозначить $E_{\mathrm{reg}}$ через $E$. ■

Разумеется, модификация доказанной теоремы справедлива и в случае $X$ без инволюции (комплексного или вещественного). Ясно также, что можно было бы использовать схему оснащения (2.59) с ядерным $\Phi$. Тогда в условии теоремы нужно было бы а′) и б′) заменить на а) и б) и требовать, чтобы отображение $X \ni x \mapsto A_x^* \upharpoonright \Phi \in \mathcal{L}(\Phi \to \Phi)$ было антилинейным и $A_{x^*} \upharpoonright \Phi = A_x^* \upharpoonright \Phi$ $(x \in X)$.

Теоремы 4.1, 4.2, сделанные замечания и соответствующие представления (4.8), (4.9) пока выглядят односторонними: из того, что



$(A_x)_{x \in X}$ реализует представление алгебраической структуры, следует определенный характер $E$. По существу же справедливо и обратное утверждение — из (4.8), (4.9) следует, что $(A_x)_{x \in X}$ реализует представление соответствующей структуры и выполняются условия типа а), б) — а′), б′). Изложим соответствующий результат в случае β) и $X$, являющегося гильбертовым пространством.

### 3. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ СТОУНА

Случай β) теоремы 4.1 и соответствующая формула (4.8) являются обобщением классической теоремы Стоуна о спектральном представлении группы унитарных операторов $\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto U_t \in \mathcal{L}(H_0 \to H_0)$ на тот случай, когда роль $\mathbb{R}^1$ играет коммутативная топологическая группа $X$, не являющаяся, вообще говоря, локально компактной. Остановимся более подробно на этом результате в случае, когда $X$ — вещественное гильбертово пространство. Мы будем применять цепочки гильбертовых пространств, в этом случае можно сформулировать как прямую, так и обратную теоремы. Все пространства, фигурирующие ниже, предполагаются сепарабельными.

Итак, рассмотрим цепочку

$$H_0 \supseteq H_+ \supseteq D, \tag{4.11}$$

где $H_0$, $H_+$ — комплексные гильбертовы пространства, вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно, $D$ — проективный предел гильбертовых пространств, плотно топологически вложенный в $H_+$.

**Теорема 4.3.** *Унитарное представление $X \ni x \mapsto U_x$ вещественного гильбертова пространства $X$ действующими в $H_0$ унитарными операторами $U_x$ имеет вид*

$$U_x = \int_X e^{i(\lambda, x)} x dE(\lambda) \qquad (x \in X), \tag{4.12}$$

*где $E$ — некоторое разложение единицы на σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ борелевских множеств из $X$, тогда и только тогда, когда существует оснащение (4.11) такое, что 1) сужение $U_x \upharpoonright D$ является непрерывным оператором из $D$ в $H_+$ $(x \in X)$, 2) для каждого $u \in D$ вектор-функция $X \ni x \mapsto U_x u \in H_+$ слабо непрерывна. Разложение единицы $E$ из (4.12) по $(U_x)_{x \in X}$ определяется однозначно.*

Доказательство. Утверждение теоремы, касающееся получения представления (4.12), в основном уже доказано. Так, применим теорему 4.1 в случае β) для цепочки гильбертовых пространств (см. замечание 4). Это можно сделать, так как условия 1), 2) теоремы обеспечивают выполнение требуемой части условия а′) и условия б′) (см. замечание 6 и равенство $U_x^* \upharpoonright D = U_{-x} \upharpoonright D$, $x \in X$). В результате установим справедливость пятого равенства (4.8)

Но каждый непрерывный характер группы $X$, являющейся вещественным гильбертовым пространством, которое понимается как группа относительно сложения, имеет вид $\chi(x) = e^{i(\lambda, x)_X}$ $(x \in X)$, где $\lambda \in X$ — некоторый вектор. Для доказательства нужно рассмотреть функцию $X \ni x \mapsto l(x) = -i \ln \chi(x) \in \mathbb{R}^1$. Она, очевидно, аддитивна и непрерывна, поэтому является линейным непрерывным функционалом на $X$ и, следовательно, имеет вид $l(\cdot) = (\lambda, \cdot)_X$, где $\lambda \in X$.

Модифицированное с. р. е. $\hat{E}$ задано на $\sigma$-алгебре $\mathcal{C}_\sigma(X)$, состоящей из множеств вида (4.1), где $Q = X$ и $\lambda(x_n) = (\lambda, x_n)_X$. Но так как $X$ сепарабельно, то оно обладает счетным базисом окрестностей в слабой топологии. Это означает, что $\mathcal{C}_\sigma(X)$ совпадает с $\sigma$-алгеброй борелевских (относительно слабой топологии) множеств из $X$. Такая $\sigma$-алгебра совпадает и с $\sigma$-алгеброй $\mathcal{B}(X)$ борелевских множеств в топологии $X$, определяемой нормой (здесь следует лишь пояснить, что каждый шар $\{x \in X \mid \|x\|_X \leqslant 1\}$ может быть получен как пересечение счетного числа полупространств $\{x \in X \mid (x, y_n)_X \leqslant 1\}$, где $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — плотная последовательность точек на его поверхности). В конечном счете $\hat{E}$ оказывается заданным на $\mathcal{B}(X)$ (обозначим его через $E$).

Перейдем к доказательству обратного утверждения теоремы, при этом будут использованы результаты гл. 1, § 4, п.5 (применяются также обозначения этого пункта).

Рассмотрим последовательность $\tau = (\tau_n)_{n=1}^{\infty} \in T$ такую, что $((1 + \tau_n)^{-1})_{n=1}^{\infty} \in l_1$, и введем пространство $R^{\tau}$ согласно (4.44), где $\tau_n$ заменено на $1 + \tau_n$. Так как $X$ изоморфно $R^{\tau}$ (как любые два сепарабельных вещественных гильбертовых пространства), то можно считать, что имеется представление (4.12) доказываемой теоремы, где $X = R^{\tau}$. Для дальнейшего будет удобно отождествлять $X'$ не с $X$, а с негативным пространством $R_{\tau}$ цепочки (4.48) (см. гл. 1) (при этом нужно пользоваться соотношением $(x, y)_{R^{\tau}} = (\mathbf{I}^{-1} x, y)_{l_2}$ $(x, y \in R^{\tau})$, где оператор $\mathbf{I}$ связан с этой цепочкой). Пусть $F$ — образ разложения единицы $E$ при отображении $R^{\tau} \ni x \mapsto \mathbf{I}^{-1} x \in R_{\tau}$, т. е. $F$ определен формулой $\mathcal{B}(R_{\tau}) \ni B \mapsto F(B) = E(\mathbf{I}(B))$. Ясно, что $F$ — разложение единицы в пространстве $R_{\tau}$. Равенство (4.12) теперь перепишется в виде

$$U_x = \int_{R_\tau} e^{i(\lambda, x)_{l_2}} dF(\lambda) \qquad (x \in R^{\tau}). \tag{4.13}$$

Итак, нужно доказать, что из существования представления (4.13) вытекает возможность построения оснащения (4.11) с требуемыми свойствами. Доказательство проведем в несколько шагов.

I. Зафиксируем вектор $l_1 \in H_0$, $\|l_1\|_{H_0} = 1$, и рассмотрим линейное отображение



$$A_\tau(\mathbb{R}^\infty) \ni a \mapsto Q_1 a = \int_{R_\tau} a(\lambda) \|\delta_\lambda\|_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)}^{-1} dF(\lambda) l_1 \in H_0. \tag{4.14}$$

Поясним, что $a(\lambda)$ при $\lambda \in R_\tau$ непрерывна (см. теорему 4.6 гл. 1). В силу (4.36) гл. 1 функция под знаком интеграла в (4.14) также непрерывна и по модулю не превосходит $\|a\|_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)}$, поэтому интеграл существует и можно написать оценку

$$\|Q_1 a\|_{H_0}^2 = \int_{R_\tau} |a(\lambda)|^2 \|\delta_\lambda\|_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)}^2 d(F(\lambda) l_1, l_1)_{H_0} \leqslant \|a\|_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)}^2. \tag{4.15}$$

Таким образом, $Q_1$ непрерывен и $\|Q_1\| \leqslant 1$. Более того, $Q_1$ — оператор Гильберта — Шмидта и $|Q_1| = 1$. В самом деле, рассмотрим ортонормированный базис $e_\alpha(\lambda) = (1 + \tau_1)^{-\frac{\alpha_1}{2}} (1 + \tau_2)^{-\frac{\alpha_2}{2}} \ldots$ $\ldots h_\alpha(\lambda)$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ в пространстве $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$. Учитывая (4.15) и (4.34) гл. 1, получим

$$|Q_1|^2 = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \|Q_1 e_\alpha\|_{H_0}^2 =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \int_{R_\tau} (h_\alpha^2(\lambda) (1 + \tau_1)^{-\alpha_1} (1 + \tau_2)^{-\alpha_2} \ldots) \|\delta_\lambda\|_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)}^2 \times$$

$$\times d(F(\lambda) l_1, l_1)_{H_0} = 1.$$

II. Рассмотрим ядро оператора $Q_1$, т. е. подпространство $\{a \in A_\tau(\mathbb{R}^\infty) \mid Q_1 a = 0\}$, и обозначим через $\hat{A}_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ ортогональное к нему дополнение. Пусть $\hat{Q}_1$ — сужение $Q_1$ на $\hat{A}_\tau(\mathbb{R}^\infty)$. Выбирая ортонормированный базис в $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ таким образом, чтобы его векторы содержались в $\hat{A}_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ и в этом ядре, получим, что $|\hat{Q}_1| = |Q_1| = 1$. На $\Re(\hat{Q}_1) = \Re(Q_1)$ существует обратный оператор $\hat{Q}_1^{-1}$, являющийся замкнутым (так как $\hat{Q}_1$ непрерывен) и таким, что

$$\|\hat{Q}_1^{-1} f\|_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)} \geqslant \|f\|_{H_0} \qquad (f \in \Re(Q_1)). \tag{4.16}$$

Превратим теперь $\Re(Q_1) \subseteq H_0$ в гильбертово пространство $H_{+,1}$, полагая $(f, g)_{H_{+,1}} = (\hat{Q}_1^{-1} f, \hat{Q}_1^{-1} g)_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)}$ $(f, g \in \Re(Q_1))$. Так как $\hat{Q}_1^{-1}$ замкнут и выполняется оценка (4.16), то $H_{+,1} = \Re(Q_1)$ полное. Вложение $O_1 : H_{+,1} \to H_0$ квазиядерно, причем $|O_1| = 1$. Действительно, пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\hat{A}_\tau(\mathbb{R}^\infty)$, тогда $(\hat{Q}_1 a_n)_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $H_{+,1}$.

Для него имеем

$$|O_1|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{Q}_1 a_n\|^2_{H_0} = |\hat{Q}_1|^2 = 1.$$

Положим $D_1 = Q_1 P_ц(\mathbb{R}^\infty) \subset H_{+,1}$, где $P_ц(\mathbb{R}^\infty)$ — совокупность всех цилиндрических полиномов. Иными словами, $D_1$ состоит из всех векторов вида $u = \sum_{\alpha \in A} u_\alpha Q_1 e_\alpha$, где функция $A \ni \alpha \mapsto u_\alpha \in \mathbb{C}^1$ финитна. Итак, мы получили цепочку

$$H_0 \supseteq H_{+,1} \supseteq D_1, \tag{4.17}$$

причем вложение $O_1 : H_{+,1} \to H_0$ квазиядерно, а $D_2$ плотно в $H_{+,1}$.

III. Если $H_{+,1}$ плотно в $H_0$, то построение на этом заканчивается. Если нет, то выбираем вектор $l_2 \in H_0$, $\|l_2\|_{H_0} = 1$, ортогональный к $H_{+,1}$, и повторяем конструкцию I — II с заменой $l_1$ на $l_2$. Получим цепочку

$$H_0 \supseteq H_{+,2} \supseteq D_2 \tag{4.18}$$

с квазиядерным вложением $O_2 : H_{+,2} \to H_0$; $D_2$ плотно в $H_{+,2}$. Через $Q_2$ обозначим оператор (4.14), где $l_1$ заменено на $l_2$.

Пространство $H_{+,2}$ ортогонально в скалярном произведении $(\cdot,\cdot)_{H_0}$ к $H_{+,1}$. Действительно, для $a, b \in A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$

$$(Q_1 a, Q_2 b)_{H_0} = \int_{R_\tau} a(\lambda)\overline{b(\lambda)} \|\delta_\lambda\|^{-2}_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)} d(F(\lambda) l_1, l_2)_{H_0}.$$

Отсюда вытекает, что достаточно доказать равенство $\int_B \|\delta_\lambda\|^{-1}_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)} d(F(\lambda) l_1, l_2)_{H_0} = 0$ для любого $B \in \mathcal{B}(R_\tau) = \mathcal{C}_\sigma(R_\tau)$, а значит, и для любого $B \in \mathcal{C}(R_\tau)$, т. е. множества типа (4.2) с $Q = R_\tau$, $\lambda(x_n) = \lambda_n$. Зафиксируем $B_0 \in \mathcal{C}(R_\tau)$. Пусть $B_0 = Ц(R_\tau;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p;\ \Delta_0) = \{\lambda \in R_\tau \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \Delta_0\}$, где $\Delta_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$. Достаточно установить, что комплекснозначная конечная мера

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \ni \Delta \mapsto \omega(\Delta) = \int_{Ц(R_\tau;\lambda_1,\ldots,\lambda_p;\Delta)} d_\tau^{-1} \exp\left(-\sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda_k^2 (2+\tau_k)^{-1}\right) \times$$
$$\times\, d(F(\lambda) l_1, l_2)_{H_0}$$

нулевая, так как благодаря (4.36) гл. 1

$$\int_{B_0} \|\delta_\lambda\|^{-1}_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)} d(F(\lambda) l_1, l_2)_{H_0} = \int_{\Delta_0} \exp\left(-\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 (2+\tau_k)^{-1}\right) \times$$
$$\times\, d\omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_p).$$

По построению вектор $l_2$ ортогонален в $H_0$ пространству $H_{+,1}$, а значит, и всем векторам $Q_1 e_\alpha$ ($\alpha \in A$). В частности, он ортогонален всем векторам $Q_1(h_{\alpha_1}(\lambda_1) \ldots h_{\alpha_p}(\lambda_p))$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_p = 0, 1, \ldots$), т. е.



$$0 = (Q_1(h_{\alpha_1}(\lambda_1) \ldots h_{\alpha_p}(\lambda_p)), l_2)_{H_0} =$$
$$= \int_{R_\tau} h_{\alpha_1}(\lambda_1) \ldots h_{\alpha_p}(\lambda_p) \|\delta_\lambda\|^{-1}_{A_\tau(\mathbb{R}^\infty)} d(F(\lambda) l_1, l_2)_{H_0} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^p} h_{\alpha_1}(\lambda_1) \ldots h_{\alpha_p}(\lambda_p) \exp\left(-\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 (2+\tau_k)^{-1}\right) d\omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \tag{4.19}$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p = 0, 1, \ldots).$$

Ниже мы докажем лемму 4.1, из которой будет следовать, что соотношение (4.19) влечет равенство $\omega = 0$. Итак, $H_{+,2}$ ортогонально в $H_0$ к $H_{+,1}$.

IV. Из (4.17) и (4.18) вытекает, что

$$H_0 \supseteq H_{+,1} \oplus H_{+,2} \supseteq D_1 \oplus D_2, \tag{4.20}$$

где $\oplus$ обозначает ортогональную сумму в $H_0$. Если $H_{+,1} \oplus H_{+,2}$ плотно в $H_0$, то построение заканчивается. Если нет, то выбираем вектор $l_3 \in H_0$, $\|l_3\|_{H_0} = 1$, ортогональный к $H_{+,1} \oplus H_{+,2}$, и строим аналогичную (4.17) и (4.18) цепочку и т. д. В результате получим цепочку

$$H_0 \supseteq \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_{+,n} \supseteq \bigoplus_{n=1}^{\infty} D_n, \tag{4.21}$$

где ортогональное суммирование понимается в $H_0$ и $\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_{+,n}$ уже плотно в $H_0$ (слагаемых может быть и конечное число, для определенности мы рассматриваем более сложный случай их бесконечного числа).

Заменим теперь в (4.21) $\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_{+,n}$ на взвешенную ортогональную сумму этих пространств $\bigoplus_{n=1;\delta}^{\infty} H_{+,n}$, где $\delta = (\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ ($\delta_n > 0$) — некоторый вес (см. гл. 1, § 1, п. 9). По-прежнему $\bigoplus_{n=1;\delta}^{\infty} H_{+,n}$ будет плотным в $H_0$, соответствующий оператор вложения равен $O = \bigoplus_{n=1}^{\infty} O_n$,

$$|O|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{-1} |O_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{-1}. \tag{4.22}$$

Выберем $\delta_n$ столь быстро убывающими, чтобы сходился ряд (4.22), и положим $H_+ = \bigoplus_{n=1;\delta}^{\infty} H_{+,n}$. Итак, сейчас вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно.

В качестве $D$ примем совокупность всех финитных последовательностей $u = (u_n)_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in D_n$. Топологизируем $D$, считая, что $u^{(k)} \in D$ сходятся при $k \to \infty$ к $u \in D$, если все $u^{(k)}$ равномерно по $k$ финитны и при каждом $n$ $u_n^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_n$ в том смысле, что сходятся соответствующие координаты $(u_n^{(k)})$ $(\alpha)$ при разложении вектора $u_n^{(k)}$ по базисным векторам $(Q_n e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ (здесь $Q_n$ обозначает оператор $Q_1$ для $n$-го шага), причем функции $\mathrm{A} \ni \alpha \mapsto u_n^{(k)}(\alpha) \in \mathbb{C}^1$ равномерно по $k$ финитны. Легко понять, что эту топологизацию $D$ можно произвести более аккуратно с указанием системы окрестностей. Для этого нужно рассмотреть гильбертово пространство

$$G_{n,\sigma_n} = \left\{ \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} f_\alpha (Q_n e_\alpha) \mid \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} |f_\alpha|^2 \sigma_n(\alpha) < \infty \right\} (\sigma_n = (\sigma_n(\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}, \sigma_n(\alpha) \geqslant 1)$$

с естественным скалярным произведением, а затем построить взвешенную ортогональную сумму $\overset{\infty}{\underset{n=1;\rho}{\oplus}} G_{n,\delta_n}$ $(\rho = (\rho_n)_{n=1}^{\infty},\ \rho_n \geqslant 1$ — вес). Тогда $D = \mathrm{pr}\lim \overset{\infty}{\underset{n=1;\rho}{\oplus}} G_{n,\sigma_n}$, где проективный предел берется по всем весам $\sigma_n$ и $\rho$. Очевидно, вложение $D \to H_+$ топологическое, причем $D$ плотно в $H_+$.

Итак, цепочка (4.11) построена. Покажем, что выполняются условия а′) и б′).

V. Для доказательства включения $U_x \upharpoonright D \in \mathscr{L}(D \to H_+)$ $(x \in X = R^\tau)$ достаточно убедиться, что $U_x \upharpoonright D_n \in \mathscr{L}(D_n \to H_{+,n})$ $(n = 1, 2, \ldots;\ x \in R^\tau)$. Пусть, например, $n = 1$, $u \in D_1$, тогда $u = Q_1 p$, где $p \in P_{\text{ц}}(\mathbb{R}^\infty)$. Согласно (4.13) и (4.14) при фиксированном $x \in R^\tau$ имеем

$$U_x u = \int_{R_\tau} e^{i(\lambda,x)_{l_2}} dF(\lambda) \left( \int_{R_\tau} p(\mu) \| \delta_\mu \|^{-1}_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)} dF(\mu)\, l_1 \right) =$$
$$= \int_{R_\tau} e^{i(\lambda,x)_{l_2}} p(\lambda) \| \delta_\lambda \|^{-1}_{A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)} dF(\lambda)\, l_1. \tag{4.23}$$

Благодаря замечанию 2 гл. 1, § 4, п. 5 функции $e^{i(\cdot,x)_{l_2}} p(\cdot) \in A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ (сейчас $\lambda$ и $x$ поменялись ролями). Поэтому $U_x u = Q_1 (e^{i(\cdot,x)_{l_2}} p(\cdot)) \in \mathfrak{R}(Q_1) = H_{+,1}$. Оператор $D_1 \ni u \mapsto U_x u \in H_{+,1}$, очевидно, непрерывен, так как сходимость $u$ означает покоординатную сходимость при разложении $u$ по базису $(Q_1 e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$, причем координаты равномерно финитны. Выполнение условия а′) установлено.



Условие б′) заключается в слабой непрерывности вектор-функции $R^\tau \ni x \mapsto U_x u \in H_+$ при каждом $u \in D$. Достаточно рассмотреть $u \in D_n$, тогда $U_x u \in H_{+,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть $n = 1$, согласно (4.23) $U_x u = Q_1 (e^{i(\cdot,x)_{l_2}} p(\cdot))$. Но благодаря упомянутому уже замечанию 2 вектор-функция $R^\tau \ni x \mapsto e^{i(\cdot,x)_{l_2}} p(\cdot) \in A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ сильно непрерывна. Так как $Q_1 \in \mathscr{L}(A_\tau(\mathbb{R}^\infty) \to H_0)$, то и $R^\tau \ni x \mapsto Q_1 (e^{i(\cdot,x)_{l_2}} p(\cdot)) = U_x u \in H_{+,1}$ даже сильно непрерывна.

Докажем последнее утверждение теоремы — однозначность определения $E$ по семейству $(U_x)_{x\in X}$. Выберем в $X$ ортонормированный базис и реализуем это пространство как вещественное пространство $l_2$. Тогда (4.12) перепишется в виде

$$U_x = \int_{l_2} e^{i(\lambda,x)_{l_2}} dE(\lambda) \qquad (x \in l_2). \tag{4.24}$$

Зафиксируем $p = 1, 2, \ldots$ и рассмотрим $x^{(p)} \in \mathbb{R}^p$. Пусть $x = (x_1^{(p)}, \ldots, x_p^{(p)}, 0, 0, \ldots)$. Подставляя это $x$ в (4.24) и обозначая $U_x = U^{(p)}_{x^{(p)}}$, получаем для унитарного представления $\mathbb{R}^p \ni x^{(p)} \mapsto U^{(p)}_{x^{(p)}}$ формулу

$$U^{(p)}_{x^{(p)}} = \int_{\mathbb{R}^p} \exp\left( i \sum_{n=1}^{p} \lambda_n x_n \right) dE^{(p)}(\lambda) \qquad (x^{(p)} \in \mathbb{R}^p), \tag{4.25}$$

где $\mathscr{B}(\mathbb{R}^p) \ni \Delta \mapsto E^{(p)}(\Delta) = E(Ц(l_2;\ x_1^{(p)}, \ldots, x_p^{(p)};\ \Delta))$. В силу обычной $p$-мерной теоремы Стоуна разложение единицы $E^{(p)}$ из (4.25) определяется по $(U^{(p)}_{x^{(p)}})_{x^{(p)}\in\mathbb{R}^p}$, а значит, и по $(U_x)_{x\in l_2}$ однозначно. Но $E^{(p)}$ $(p = 1, 2, \ldots)$, очевидно, однозначно определяют и $E$. ■

Нам осталось доказать следующую общую лемму.

**Лемма 4.1.** *Пусть $\mathscr{B}(\mathbb{R}^p) \ni \Delta \mapsto \omega(\Delta)$ — комплекснозначная конечная мера такая, что при некоторых $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}^p} h_{\alpha_1}(x_1) \ldots h_{\alpha_p}(x_p) \exp\left( -\sum_{k=1}^{p} x_k^2 \varepsilon_k \right) d\omega(x_1, \ldots, x_p) = 0$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p = 0, 1, \ldots).$$

*Тогда* $\omega = 0$.

Доказательство. Предположим, что лемма доказана при $p = 1$ и $p = n - 1$. Покажем, что тогда она справедлива и при $p = n$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Зафиксируем $\Lambda_0 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$ и рассмотрим конечную комплекснозначную меру $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \ni \Delta \mapsto \int_{\Delta_0\times\Delta} d\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega_{\Delta_0}(\Delta)$, а затем зафиксируем $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и рассмотрим аналогичную меру

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta' \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\alpha_2}(x_2) \ldots h_{\alpha_n}(x_n) \exp\left(-\sum_{k=2}^{n} x_k^2 \times \right.$$

$$\left. \times\ \varepsilon_k\right) d\omega_{\Delta'}(x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \int_{\Delta' \times \mathbb{R}^{n-1}} h_{\alpha_2}(x_2) \ldots h_{\alpha_n}(x_n) \exp\left(-\sum_{k=2}^{n} x_k^2 \varepsilon_k\right) d\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \omega_{\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(\Delta'). \tag{4.26}$$

Имеем

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} h_{\alpha_1}(x_1) \ldots h_{\alpha_n}(x_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \varepsilon_k\right) d\omega(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} h_{\alpha_1}(x_1)\, e^{-x_1^2 \varepsilon_1} d\omega_{\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(x_1) \qquad (\alpha_1 = 0, 1, \ldots),$$

откуда по предположению $\omega_{\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = 0$, т. е. $\omega_{\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(\Delta') = 0$ $(\Delta' \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1))$. Зафиксируем $\Delta'$, тогда из последнего равенства при $\alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0, 1, \ldots$, (4.26) и нашего предположения заключаем, что $\omega_{\Delta'} = 0$, т. е. $\omega_{\Delta'}(\Delta) = 0$ $(\Delta \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n-1}))$. Благодаря произвольности $\Delta'$ отсюда следует, что $\omega = 0$.

Из доказанного ясно, что лемму достаточно установить при $p = 1$. Имеем

$$0 = \int_{\mathbb{R}^1} h_{\alpha_1}(x_1)\, e^{-x_1^2 \varepsilon_1} d\omega(x_1) = \int_{\mathbb{R}^1} h_{\alpha_1}(x_1)\, e^{-x_1^2} d\omega_1(x_1),$$

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto \omega_1(\Delta) = \int_{\Delta} e^{x_1^2(1-\varepsilon_1)} d\omega(x_1) \qquad (\alpha_1 = 0, 1, \ldots).$$

Пусть $0 < \varepsilon_1 < 1$, функция $\omega_1(x_1) = \int_0^{x_1} e^{t^2(1-\varepsilon_1)} d\omega(t)$, вообще говоря, неограничена, однако удовлетворяет оценке $|\omega_1(x_1)| \leqslant \leqslant c e^{x_1^2(1-\varepsilon_1)}$ $(x_1 \in \mathbb{R}^1)$. Поэтому, интегрируя по частям, найдем при помощи равенств (4.38) и (4.40) гл. 1

$$0 = \int_{\mathbb{R}^1} h_{\alpha_1}(x_1)\, e^{-x_1^2} d\omega_1(x_1) = -\int_{\mathbb{R}_1} \omega_1(x_1)\, d\left(h_{\alpha_1}(x_1)\, e^{-x_1^2}\right) =$$

$$= \sqrt{2(\alpha_1 + 1)} \int \omega_1(x_1)\, h_{\alpha_1+1}(x_1)\, e^{-x_1^2} dx_1 \qquad (\alpha_1 = 0, 1, \ldots).$$

Отсюда вытекает, что $\omega_1(x_1) = c$ $(x_1 \in \mathbb{R}^1)$, т. е. $\omega_1(\Delta) = 0$ $(\Delta \in \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1))$, а значит, и $\omega = 0$. Случай $\varepsilon_1 \geqslant 1$ рассматривается аналогично. ■



**Теорема 4.4.** *Пусть $X$ — вещественное гильбертово пространство, $(A_x)_{x \in X}$ — семейство действующих в $H_0$ коммутирующих самосопряженных операторов с областями определения $\mathfrak{D}(A_x) \supseteq D$ таких, что $A_{\alpha x + \beta y} u = \alpha A_x u + \beta A_y u$ $(x, y \in X;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1;\ u \in D)$. Это семейство допускает представление*

$$A_x = \int_X (\lambda, x)_X\, dE(\lambda) \qquad (x \in X), \tag{4.27}$$

*где $E$ — некоторое разложение единицы на $\mathscr{B}(X)$, тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1), 2) *теоремы* 4.3 *с заменой $U_x$ на $A_x$. Разложение единицы $E$ из* (4.27) *по $(A_x)_{x \in X}$ определяется однозначно.*

Доказательство. Справедливость представления (4.27) вытекает из модификации теоремы 4.2, примененной к вещественному гильбертову пространству $X$. То, что сейчас $\mathscr{C}_\sigma(X) = \mathscr{B}(X)$, пояснено в доказательстве теоремы 4.3. Доказательство обратного утверждения теоремы в основном повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 4.3. А именно, переписываем представление (4.27) в виде $A_x = \int_{R_\tau} (\lambda, x)_{l_2}\, dF(\lambda)$ $(x \in R^\tau)$, аналогичном (4.13), а затем повторяем шаги I—IV. Шаг V изменяется в том отношении, что нужно использовать сильную непрерывность вектор-функции $R^\tau \ni \ni x \mapsto (\cdot, x)_{l_2} p(\cdot) \in A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$. Доказывается этот факт совершенно аналогично доказательству замечания 2 гл. 1, § 4, п. 5. Так, используется аналог леммы 4.6 гл. 1, в котором $e^{i(\lambda, x)_{l_2}}$ заменено на $(\lambda, x)_{l_2}$. Его доказательство подобно выводу леммы, при этом вместо (4.42) гл. 1 используется формула $\int_{\mathbb{R}^1} t h_j(t)\, dg(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}\, \delta_{j,1}$ $(j = 0, 1, \ldots)$ (см. (4.40) гл. 1). Соответствующие выкладки приводить не будем. Однозначность $E$ устанавливается стандартной процедурой. ■

Отметим, что получить теорему 4.3 из теоремы 4.4, и наоборот, беря соответствующие функции операторов, не удается, так как, например, из того, что условия 1), 2) выполняются для $A_x$, еще не следует, что они выполняются для $U_x = e^{iA_x}$ $(x \in X)$.

## 4. ОБОБЩЕННЫЕ КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

По аналогии с обобщенными случайными процессами будем говорить, что задан обобщенный самосопряженный квантовый процесс, если задано обладающее частичным вакуумом $\Omega$ семейство $(A_x)_{x \in X}$ коммутирующих самосопряженных операторов, действующих в пространстве $H_0$, индексированных элементами вещественного линейного топологического пространства $X$ и таких, что $A_{\alpha x + \beta y} u = \alpha A_x u + \beta A_y u$ $(x, y \in X;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1)$.

Здесь $u$ — произвольный элемент линейного множества $D \subseteq \subseteq \mathfrak{D}(A_x)$ $(x \in X)$, плотного в $H_0$.

Поясним, что, как правило, обычный самосопряженный квантовый процесс $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^N}$ вкладывается в обобщенный стандартным образом: рассматривается вещественное линейное топологическое пространство $X$ основных функций $\mathbb{R}^N \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^1$ и образуются операторы

$$A_x = \int_{\mathbb{R}^N} A_t x(t)\, dt \qquad (x \in X) \tag{4.28}$$

(если в (4.28) рассматривать комплекснозначные функции $x(t)$, то определение процесса будет таким, как в формулировке теоремы 4.2; ясно также, как определить обобщенный процесс, отвечающий нормальным операторам $A_t$).

Теоремы 4.1, 4.2, 4.4 и их упомянутые модификации для того или иного $X$ приводят к спектральным представлениям таких процессов, близким к известным представлениям для случайных процессов в необобщенном (Гихман, Скороход [2, гл. 4, § 5]) и обобщенном стационарном случаях (Гельфанд, Виленкин [1, гл. 3, § 3, п. 4]). Приведем наиболее просто формулируемый результат, вытекающий из соответствующей модификации теоремы 4.2. *Пусть $(A_x)_{x \in X}$ — обобщенный самосопряженный квантовый процесс. Предположим, что $H_0$ — сепарабельное, а $D$ — ядерное пространство, причем сужение $A_x \upharpoonright D \in \mathcal{L}(D \to D)$ $(x \in X)$ и для каждого $u \in D$ вектор-функция $X \ni x \mapsto A_x u \in D$ слабо непрерывна. Тогда справедливо представление*

$$A_x = \int_{X^*} \lambda(x)\, dE(\lambda) \qquad (x \in X), \tag{4.29}$$

*где $E$ — некоторое разложение единицы на $\mathcal{C}_\sigma(X^*)$.*

## § 5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О РАЗЛОЖЕНИИ ПО ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ

Этот параграф является дополнением к результатам § 2. В нем преимущественно будет идти речь о разложении по обобщенным собственным векторам одного самосопряженного или нормального оператора.



### 1. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ИНДИВИДУАЛЬНЫМ ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ

В простейшем случае самосопряженного оператора $A$, действующего в конечномерном ($p$-мерном) гильбертовом пространстве $H_0$, теорема о разложении по его собственным векторам выглядит следующим образом. В $H_0$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ оператора $A$, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (среди которых могут быть одинаковые). Поэтому каждый вектор $f \in H_0$ допускает разложение $f = \sum_{n=1}^{p} (f, \varphi_n)_{H_0} \varphi_n$ или, что эквивалентно, справедливо равенство Парсеваля $(f, g)_{H_0} = \sum_{n=1}^{p} (f, \varphi_n)_{H_0} \overline{(g, \varphi_n)_{H_0}}$ $(f, g \in H_0)$. Покажем, как переписать разложения (2.24) в форме, максимально приближающейся к этим элементарным равенствам. Для этого напомним, что если $C: H_0 \to H_0$ — вполне непрерывный неотрицательный оператор в $H_0$ с собственными ортонормированными векторами $\psi_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, N \leqslant \infty)$, отвечающими положительным собственным числам $\nu_\alpha$, то билинейная форма $(Cf, g)_{H_0}$ допускает следующее представление в виде абсолютно сходящегося ряда:

$$(Cf, g)_{H_0} = \sum_{\alpha=1}^{N} \nu_\alpha (f, \psi_\alpha)_{H_0} \overline{(g, \psi_\alpha)_{H_0}} \qquad (f, g \in H_0). \tag{5.1}$$

**Теорема 5.1.** *Пусть выполнены предположения теоремы* 2.5. *Тогда для каждого $\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X$, для которого определен оператор обобщенного проектирования $P(\lambda(\cdot))$, можно построить (вообще говоря, неоднозначно) последовательность векторов $\varphi_\alpha(\lambda(\cdot)) \in \in \mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot))) \subseteq H_-$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, N_{\lambda(\cdot)} \leqslant \infty)$ такую, что*

$$(P(\lambda(\cdot))\, u, v)_{H_0} = \sum_{\alpha=1}^{N_{\lambda(\cdot)}} (u, \varphi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0} \overline{(v, \varphi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}} \quad (u, v \in H_+), \tag{5.2}$$

*где ряд абсолютно сходится. Если дополнительно выполнены предположения теоремы* 2.6, *то, разумеется, каждый вектор $\varphi_\alpha(\lambda(\cdot))$ $(\lambda(\cdot) \in T)$ — совместный обобщенный собственный вектор семейства $(A_x)_{x \in X}$ с собственным значением $\lambda(\cdot)$. Число $N_{\lambda(\cdot)}$ называется кратностью собственного значения $\lambda(\cdot)$ (оно определяется однозначно). Аналогичное утверждение справедливо и относительно операторов $P(\lambda(\cdot))$ и теоремы* 2.7.

Доказательство. Рассмотрим при фиксированном $\lambda(\cdot)$ оператор $\mathbf{J}P(\lambda(\cdot))J: H_0 \to H_0$, где изометрии $J$ и $\mathbf{J}$ связаны с цепочкой (2.18). Так как $P(\lambda(\cdot))$ — оператор Гильберта — Шмидта, то таким будет и этот оператор. Благодаря соотношению

$$(\mathbf{J}P(\lambda(\cdot))Jf, f)_{H_0} = (P(\lambda(\cdot))Jf, Jf)_{H_0} \geqslant 0 \qquad (f \in H_0)$$

он неотрицателен. Применяя разложение (5.1), получим

$$(P(\lambda(\cdot))Jf, Jg)_{H_0} = (\mathbf{J}P(\lambda(\cdot))Jf, g)_{H_0} =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{N_{\lambda(\cdot)}} \nu_\alpha(\lambda(\cdot))(f, \psi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}\overline{(g, \psi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}} \qquad (f, g \in H_0), \tag{5.3}$$

где $\psi_\alpha(\lambda(\cdot)) \in H_0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, N_{\lambda(\cdot)} \leqslant \infty)$ — ортонормированная последовательность собственных векторов оператора $\mathbf{J}P(\lambda(\cdot))J$, отвечающих собственным значениям $\nu_\alpha(\lambda(\cdot)) > 0$. Если $\nu_{\alpha_1}(\lambda(\cdot)) = \nu_{\alpha_2}(\lambda(\cdot))$, то выбор $\psi_{\alpha_1}(\lambda(\cdot))$ и $\psi_{\alpha_2}(\lambda(\cdot))$ неоднозначен; отсюда следует неоднозначность построения $\psi_\alpha(\lambda(\cdot))$, о которой говорилось в формулировке теоремы.

Положим

$$\varphi_\alpha(\lambda(\cdot)) = \sqrt{\nu_\alpha(\lambda(\cdot))}\,\mathbf{J}^{-1}\psi_\alpha(\lambda(\cdot)) \in H_- \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N_{\lambda(\cdot)}), \tag{5.4}$$

тогда для произвольных $u, v \in H_+$ из (5.3) при $f = J^{-1}u$, $g = J^{-1}v$ получаем

$$(P(\lambda(\cdot))u, v)_{H_0} = \sum_{\alpha=1}^{N_{\lambda(\cdot)}} \nu_\alpha(\lambda(\cdot))(J^{-1}u, \psi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}\overline{(J^{-1}v, \psi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}} =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{N_{\lambda(\cdot)}} (u, \varphi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}\overline{(v, \varphi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}}.$$

Осталось заметить, что векторы (5.4) входят в $\mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot)))$: имеем

$$\mathbf{J}P(\lambda(\cdot))J\psi_\alpha(\lambda(\cdot)) = \nu_\alpha(\lambda(\cdot))\psi_\alpha(\nu(\cdot)),$$

откуда $\varphi_\alpha(\lambda(\cdot)) = P(\lambda(\cdot))((\nu_\alpha(\lambda(\cdot)))^{-\frac{1}{2}} J\psi_\alpha(\lambda(\cdot))) \in \mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot)))$.

Теорема в случае операторов $P(\lambda(\cdot))$ доказывается аналогично. ■

При помощи (5.2) первое из представлений (2.24) можно переписать в виде равенства Парсеваля

$$(E(B)u, v)_{H_0} = \int_B \sum_{\alpha=1}^{N_{\lambda(\cdot)}} (u, \varphi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}\overline{(v, \varphi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}}\, d\rho(\lambda(\cdot))$$
$$(B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X); \quad u, v \in H_+). \tag{5.5}$$

В частности, при $B = \mathbb{R}^X$ получаем разложение скалярного произведения $(u, v)_{H_0}$, которое можно записать в виде

$$u = \int_{\mathbb{R}^X} \sum_{\alpha=1}^{N_{\lambda(\cdot)}} (u, \varphi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}\varphi_\alpha(\lambda(\cdot))\, d\rho(\lambda(\cdot)) \qquad (u \in H_+). \tag{5.6}$$

Интеграл и ряд в (5.6) сходятся в следующем слабом смысле: если «умножить скалярно относительно $(\cdot,\cdot)_{H_0}$» выражение (5.6) на $v \in H_+$, то получится имеющее точный смысл равенство (5.5) при $B = \mathbb{R}^X$.



Представление (5.6) дает разложение произвольного вектора $u \in H_+$ в сумму (вообще говоря, континуальную) по обобщенным собственным векторам, причем интеграл дает суммирование по собственным векторам, отвечающим различным собственным значениям $\lambda(\cdot)$, а сумма по $\alpha$ учитывает кратность $N_{\lambda(\cdot)} \leqslant \infty$ такого значения. Равенство (5.6) и есть требуемая форма разложения (2.24).

Рассмотрим случай одного самосопряженного оператора $A$ такого, у которого все $N_\lambda = 1$ (т. е. спектр однократен). Тогда равенство Парсеваля (5.5) для $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$ и $u, v \in H_+$ перепишется в виде

$$(E(B)u, v)_{H_0} = \int_B (u, \varphi_1(\lambda))_{H_0}\overline{(v, \varphi_1(\lambda))}\, d\rho(\lambda) = \int_B \tilde{u}(\lambda)\overline{\tilde{v}(\lambda)}\, d\rho(\lambda) \tag{5.7}$$
$$(\tilde{u}(\lambda) = (u, \varphi_1(\lambda))_{H_0}, \ u \in H_+).$$

Определенная $\rho$-почти везде функция $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto \tilde{u}(\lambda) = (u, \varphi_1(\lambda))_{H_0} \in \mathbb{C}^1$ носит название преобразования Фурье вектора $u \in H_+$ (в случае $A$, равного замыканию в $L_2(\mathbb{R}^1)$ оператора $C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \ni u(x) \mapsto -iu'(x)$, функция $\varphi_1(\lambda) = e^{i\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$ и мы получаем классическое преобразование Фурье).

Понятие преобразования Фурье можно ввести и в общем случае. Поставим в соответствие каждому вектору $u \in H_+$ его преобразование Фурье — определенную $\rho$-почти всюду на $\mathbb{R}^X$ вектор-функцию

$$\mathbb{R}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto \tilde{u}(\lambda(\cdot)) = ((u, \varphi_1(\lambda(\cdot)))_{H_0}, (u, \varphi_2(\lambda(\cdot)))_{H_0}, \ldots) =$$
$$= (\tilde{u}_1(\lambda(\cdot)), \tilde{u}_2(\lambda(\cdot)), \ldots) \tag{5.8}$$

(если $N_{\lambda(\cdot)} < \infty$, то в правой части (5.8) будем дописывать нули). Тогда равенство Парсеваля (5.5) можно переписать в виде

$$(E(B)u, v)_{H_0} = \int_B (\tilde{u}(\lambda(\cdot)), \tilde{v}(\lambda(\cdot)))_{l_2}\, d\rho(\lambda(\cdot))$$
$$(B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X); \quad u, v \in H_+). \tag{5.9}$$

Отметим, что равенство Парсеваля в форме (5.9) легко распространить на произвольные векторы из исходного пространства $H_0$. Действительно, пусть $f \in H_0$ и $u_n \in H_+$ при $n \to \infty$ аппроксимируют $f$ в норме $H_0$. Тогда согласно (5.9) при $B = \mathbb{R}^X$ последовательность $\tilde{u}_n(\lambda(\cdot))$ будет фундаментальной в скалярном произведении

$$(F, G) = \int_{\mathbb{R}^X} (F(\lambda(\cdot)), G(\lambda(\cdot)))_{l_2}\, d\rho(\lambda(\cdot)), \tag{5.10}$$

введенном на ρ-почти везде определенных вектор-функциях $\mathbb{R}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto F(\lambda(\cdot)) \in l_2$, для которых $\int_{\mathbb{R}^X} \| F(\lambda(\cdot)) \|_{l_2}^2 \, d\rho(\lambda(\cdot)) < \infty$. Предел этой фундаментальной последовательности $\tilde{f}(\lambda(\cdot))$ принадлежит отвечающему (5.10) гильбертову пространству и называется преобразованием Фурье вектора $f$. Предельным переходом равенство (5.9) распространяется на случай, когда $u$, $v$ заменены на $f$, $g \in H_0$. Разумеется, в общем случае уже нельзя интерпретировать $\tilde{f}_\alpha(\lambda(\cdot))$ как $(f, \varphi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}$.

Описанная выше процедура разложения по индивидуальным обобщенным собственным векторам легко переносится и на другие типы разложений, фигурировавшие в § 2, 4 (в частности, на случай нормальных операторов).

## 2. ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА

Покажем, что если имеется оснащение (2.18) такое, что для любого самосопряженного оператора $A$ в $H_0$ справедлива формула (2.26), то вложение $H_+ \to H_0$ обязательно квазиядерное (тем более квазиядерность этого вложения будет иметь место при наличии одной из формул (2.24) для любого семейства коммутирующих самосопряженных операторов). Мы будем даже требовать меньше от функции $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto P(\lambda)$, чем это установлено теоремой 2.5. Именно, справедлив следующий результат.

**Теорема 5.2.** *Пусть имеется цепочка* (2.18) *такая, что для разложения единицы $E$ любого самосопряженного оператора $A$ в $H_0$ справедлива формула* (2.26), *где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto \rho(\Delta)$ — конечная мера, а $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto P(\lambda) \in \mathcal{L}(H_+ \to H_-)$ — определенная ρ-почти везде операторнозначная функция такая, что ρ-почти для всех $\lambda \in \mathbb{R}^1$ $\| P(\lambda) \| \leqslant c < \infty$. Тогда вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно.*

**Лемма 5.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $(e_j)_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в нем и $A \in \mathcal{L}(H \to H)$. Если матрица этого оператора имеет вид $(A_{jk})_{j,k=1}^\infty$, $A_{jk} = (Ae_k, e_j)_H = \alpha_j \bar{\alpha}_k$, где $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^\infty \in l_2$, то $A$ — оператор Гильберта — Шмидта и*

$$| A | = \| A \| = \sum_{j=1}^\infty | \alpha_j |^2. \tag{5.11}$$

Доказательство. Очевидно $| A |^2 = \sum_{j,k=1}^\infty | A_{jk} |^2 = \left( \sum_{j=1}^\infty |\alpha_j|^2 \right)^2 = \| \alpha \|_{l_2}^4 < \infty$, причем всегда $\| A \| \leqslant | A |$. Поэтому для доказательства (5.11) достаточно проверить неравенство $\| A \| \geqslant \| \alpha \|_{l_2}^2$. Оно же вытекает из соотношения $Af = \| \alpha \|_{l_2}^2 f$, где $f = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j e_j \in H$. ■



Доказательство теоремы. Рассмотрим операторы $O$, $O^+$, $J$ и $\mathbf{J}$, связанные с цепочкой (2.18), и произвольное разложение единицы $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto E(\Delta)$ в $H_0$. Положим $C = OJ : H_0 \to H_0$. Очевидно, $C^* = \mathbf{J}O^+ : H_0 \to H_0$. Для любых непересекающихся $\Delta_l \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ $(l = 1, 2, \ldots)$ таких, что $\bigcup_{l=1}^\infty \Delta_l = \mathbb{R}^1$, при помощи (2.26) и условий теоремы получаем

$$\sum_{l=1}^\infty \| C^*E(\Delta_l) C \| = \sum_{l=1}^\infty \| \mathbf{J}O^+E(\Delta_l) OJ \| \leqslant \sum_{l=1}^\infty \| O^+E(\Delta_l) O \| =$$
$$= \sum_{l=1}^\infty \left\| \int_{\Delta_l} P(\lambda) \, d\rho(\lambda) \right\| \leqslant \sum_{l=1}^\infty \int_{\Delta_l} \| P(\lambda) \| \, d\rho(\lambda) \leqslant c \sum_{l=1}^\infty \rho(\Delta_l) =$$
$$= c\rho(\mathbb{R}^1) < \infty. \tag{5.12}$$

Построим теперь следующее одномерное разложение единицы в $H_0$. Пусть $(e_l)_{l=1}^\infty$ — некоторый ортонормированный базис в $H_0$, $P_l$ — проектор на одномерное подпространство, натянутое на $e_l$, $(\lambda_l)_{l=1}^\infty$ — монотонно возрастающая к $+\infty$ фиксированная последовательность вещественных чисел. Положим $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto E(\Delta) = \sum_{\lambda_l \in \Delta} P_l$ — так построенная функция множеств будет требуемым разложением единицы. Применим к нему оценку (5.12), где $\Delta_1 = (-\infty, \lambda_1]$, $\Delta_2 = (\lambda_1, \lambda_2]$, $\Delta_3 = (\lambda_2, \lambda_3]$, ... В результате получим, что

$$\sum_{l=1}^\infty \| C^*P_lC \| = \sum_{l=1}^\infty \| C^*E(\Delta_l) C \| < \infty. \tag{5.13}$$

Но матрица $(A_{jk}^{(l)})_{j,k=1}^\infty$ оператора $C^*P_lC$, как легко подсчитать, имеет вид $A_{jk}^{(l)} = \bar{C}_{lj} C_{lk}$, где $(C_{jk})_{j,k=1}^\infty$ — матрица оператора $C$. Поэтому применима лемма 5.1, на основании которой $\| C^*P_lC \| = \sum_{j=1}^\infty | C_{lj} |^2$. Таким образом, (5.13) приводит к условию $\sum_{l,j=1}^\infty | C_{lj} |^2 < \infty$, т. е. $C = OJ$ яляется оператором Гильберта — Шмидта в $H_0$. Но так как $J$ — изометрия между $H_0$ и $H_+$, то отсюда следует, что $O$ — оператор Гильберта — Шмидта из $H_+$ в $H_0$. ■

## 3. СЛУЧАЙ ВЛОЖЕНИЯ, НЕ ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ КВАЗИЯДЕРНЫМ

Мы показали, что если цепочка (2.18) пригодна для построения разложений по обобщенным собственным векторам любого самосопряженного оператора $A$, действующего в $H_0$, то вложение $H_+ \to H_0$ обязательно квазиядерно. Однако при фиксированном $A$ выбор цепочки (2.18) может оказаться более свободным. Приведем некоторые результаты.

Итак, пусть $A$ — некоторый самосопряженный оператор, действующий в $H$, $E$ — его разложение единицы. Если нам удастся так построить цепочку (2.18), что операторнозначная мера $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto \Theta(\Delta) = O^+E(\Delta)O$ будет иметь σ-конечный след $\rho(\Delta)$, то тогда согласно замечанию на стр. 170 ее можно будет продифференцировать по этому следу и повторить все рассуждения § 2, п. 3—5 (в случае одного оператора). Формулировка теорем 2.5, 2.6 и результатов п. 9 не изменяется, лишь спектральная мера $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto \rho(\Delta) = \text{Сл.}(O^+E(\Delta)O)$ не будет, вообще говоря, конечной.

**Теорема 5.3.** *Пусть оператор $A$ и цепочка (2.18) таковы, что существует определенная на его спектре $S(A)$ ограниченная непрерывная и отличная от нуля комплекснозначная функция $\alpha(\lambda)$ такая, что оператор $\alpha(A)O : H_+ \to H_0$ квазиядерный. Тогда операторнозначная мера $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \to O^+E(\Delta)O$ имеет σ-конечный след и, следовательно, цепочка (2.18) пригодна для построения разложений по обобщенным собственным векторам оператора $A$.*

Сперва докажем следующую лемму.

**Лемма 5.2.** *Если существует определенная на $S(A)$ ограниченная непрерывная положительная функция $\beta(\lambda)$ такая, что $\text{Сл.}(JO^+\beta(A)OJ) < \infty$, то мера $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto O^+E(\Delta)O$ имеет σ-конечный след.*

Доказательство. Положим $S_n(A) = (S(A)) \cap [-n, n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда для каждого $n$ найдется $\varepsilon_n > 0$ такое, что $\alpha(\lambda) \geqslant \varepsilon_n$ $(\lambda \in S_n(A))$. Поэтому

$$0 \leqslant \varepsilon_n E([-n, n]) = \varepsilon_n E(S_n(A)) \leqslant \int_{S_n(A)} \beta(\lambda)\, dE(\lambda) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{S(A)} \beta(\lambda)\, dE(\lambda) = \beta(A).$$

Отсюда при любом $C \in \mathscr{L}(H_0 \to H_0)$ $0 \leqslant \varepsilon_n C^*E([-n, n])C \leqslant C^*\beta(A)C$. Полагая $C = OJ$ и учитывая, что $C^* = JO^+$, получим $0 \leqslant JO^+E([-n, n])OJ \leqslant \varepsilon_n^{-1} JO^+\beta(A)OJ$, а значит, и

$$\text{Сл.}(JO^+E([-n, n])OJ) \leqslant \varepsilon_n^{-1}\, \text{Сл.}(JO^+\beta(A)OJ) < \infty \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.14}$$

С другой стороны, если $C \in \mathscr{L}(H_+ \to H_-)$ неотрицателен, то $JCJ \in \mathscr{L}(H_0 \to H_0)$ также очевидно неотрицателен и

$$\text{Сл.}(C) = \text{Сл.}(JCJ). \tag{5.15}$$

В самом деле, пусть $(e_j)_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в пространстве $H_+$, тогда $(J^{-1}e_j)_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $H_0$ и мы имеем

$$\text{Сл.}(C) = \sum_{j=1}^\infty (Ce_j, e_j)_{H_0} = \sum_{j=1}^\infty (JCJJ^{-1}e_j, J^{-1}e_j)_{H_0} = \text{Сл.}(JCJ).$$



Теперь из (5.14) при помощи (5.15) получим, что

$$\text{Сл.}(O^+E([-n, n])O) = \text{Сл.}(JO^+E([-n, n])OJ) < \infty \quad (n = 1, 2, \ldots). \ ■$$

Доказательство теоремы. Будем пользоваться следующим очевидным соотношением: для любого $C \in \mathscr{L}(H_0 \to H_0)$ $\text{Сл.}(C^*C) = |C|^2 \leqslant \infty$. Применяя его к $C = \alpha(A)OJ \in \mathscr{L}(H_0 \to H_0)$, получим общую формулу

$$\text{Сл.}(JO^+(|\alpha|^2(A))OJ) = \text{Сл.}(JO^+(\alpha(A))^*\alpha(A)OJ) = = |\alpha(A)OJ|^2 = |\alpha(A)O|^2 < \infty. \tag{5.16}$$

Осталось применить лемму 5.2 при $\beta(\lambda) = |\alpha(\lambda)|^2$. ■

Перейдем к рассмотрению вопроса о проверке условия $|\alpha(B)O| < \infty$ для возмущения $B$ оператора $A$, который сам удовлетворял подобному условию. Установим две леммы, первая из которых является простым, однако полезным для такой проверки замечанием, а вторая обобщает на неограниченные операторы хорошо известный в конечномерном случае факт.

**Лемма 5.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 5.3 и, кроме того, в пространстве $H_0$ действует самосопряженный оператор $B$; $S(B)$ — его спектр. Предположим, что можно подобрать неотрицательную ограниченную функцию $\gamma \in C(\mathbb{R}^1)$, положительную на $S(B)$, не превосходящую $|\alpha(\lambda)|^2$ на $S(A)$ и такую, что $\gamma(B) \leqslant \gamma(A)$ или, более общо, $\text{Сл.}(JO^+\gamma(B)OJ) \leqslant \text{Сл.}(JO^+\gamma(A)OJ)$. Тогда $|\gamma^{\frac{1}{2}}(B)O| < \infty$.*

Доказательство. Согласно (5.16)

$$|\gamma^{\frac{1}{2}}(B)O|^2 = \text{Сл.}(JO^+\gamma(B)OJ) \leqslant$$
$$\leqslant \text{Сл.}(JO^+\gamma(A)OJ) \leqslant \text{Сл.}(JO^+(|\alpha|^2(A))OJ) =$$
$$= |\alpha(A)O|^2 < \infty. \ ■$$

Линейное множество $F \subseteq \mathfrak{D}(A)$ будем называть базой замкнутого оператора $A$, если $(A \upharpoonright F)^\sim = A$ (обычно база называется ядром, мы изменяем терминологию, чтобы не вызвать путаницу с ядром отображения).

**Лемма 5.4.** *Пусть $H$ — некоторое гильбертово пространство, в котором действуют самосопряженные неотрицательные операторы $A$ и $B$ такие, что существуют ограниченные обратные $A^{-1}$ и $B^{-1}$. Если на некотором линейном множестве $F$, являющемся базой для обоих операторов $A$ и $B$, $A \leqslant B$ (т. е. $(Af, f)_H \leqslant (Bf, f)_H$, $f \in F$), то $B^{-1} \leqslant A^{-1}$.*

Доказательство. На области определения $\mathfrak{D}(C)$, состоящей из векторов вида $f = B^{\frac{1}{2}}h$ $(h \in F)$, определен неотрицательный оператор $C = B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$. Так как $F$ — база $B$ и $B^{-1}$ существует, то $\mathfrak{D}(C)$ плотна в $H$. Имеем

$$(Cf, f)_H = (B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}f, f)_H = (Ah, h)_H \leqslant (Bh, h)_H = \|f\|_H^2 \quad (f \in \mathfrak{D}(C)), \tag{5.17}$$

поэтому для квазискалярного произведения $(f, g) = (Cf, g)_H$ $(f, g \in \mathfrak{D}(C))$ в силу неравенства Коши — Буняковского получим

$$|(f, g)|^2 \leqslant (f, f)(g, g) \leqslant \|f\|_H^2 \|g\|_H^2 \qquad (f, g \in \mathfrak{D}(C)).$$

Последняя оценка показывает, что неотрицательную билинейную форму $\mathfrak{D}(C) \ni f, g \mapsto B(f, g) = (f, g)$ можно по непрерывности распространить в такую же форму на замыкании $\mathfrak{D}(C)$ в $H$, т. е. на $H$. Для нее мы сохраним прежнее обозначение $(f, g)$ $(f, g \in H)$. Отметим, что при $f \in \mathfrak{D}(C)$, $g \in H$ $(f, g) = (Cf, g)_H$. В силу (5.17) $(f, f) \leqslant \|f\|_H^2$ $(f \in H)$.

Определим теперь на $\mathfrak{D}(D)$, состоящей из векторов вида $u = B^{-\frac{1}{2}}Av$ $(v \in F)$, оператор $D = B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}$. Ясно, что область значений $\mathfrak{R}(D) = \mathfrak{D}(C)$ и $CDu = u$ $(u \in \mathfrak{D}(D))$. Применяя неравенство Коши — Буняковского к $(f, g)$ $(f, g \in H)$ и оценку $(f, f) \leqslant \|f\|_H^2$, получим для векторов $u \in \mathfrak{D}(D)$

$$(u, u)_H^2 = (CDu, u)_H^2 = (Du, u)^2 \leqslant (Du, Du)(u, u) = $$
$$= (CDu, Du)_H (u, u) \leqslant (u, Du)_H (u, u)_H,$$

откуда $(u, u)_H \leqslant (u, Du)_H$, т. е. $(u, u)_H \leqslant (u, B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}u)_H = (B^{\frac{1}{2}}u, A^{-1}B^{\frac{1}{2}}u)_H$ $(u \in \mathfrak{D}(D))$. Обозначим $B^{\frac{1}{2}}u = w$. Тогда последнее неравенство перепишется в виде

$$(w, B^{-1}w)_H \leqslant (w, A^{-1}w)_H. \tag{5.18}$$

Но так как $u = B^{-\frac{1}{2}}Av$ $(v \in F)$, то $w = Av$, где $v$ пробегает $F$. Так как $(A\upharpoonright F)^{\sim} = A$ и $A^{-1}$ существует, то векторы $w$ пробегают плотное множество в $H$. Благодаря непрерывности операторов $A^{-1}$ и $B^{-1}$ соотношение (5.18) обозначает, что $B^{-1} \leqslant A^{-1}$. ■

Комбинация последних двух лемм приводит к следующей теореме.

**Теорема 5.4.** *Пусть самосопряженный полуограниченный снизу числом $a$ оператор $A$ и цепочка* (2.18) *таковы, что для функции $\alpha(\lambda) = (\lambda - z)^{-\frac{1}{2}}$ $(\lambda \in [a, \infty)$; $z < a$ фиксировано) имеем $|\alpha(A)O| < \infty$. Тогда для любого самосопряженного оператора $B$, имеющего общую базу с $A$ и такого, что на этой базе $B \geqslant A$, справедлива оценка $|\alpha(B)O| < \infty$. Таким образом, цепочка* (2.18) *пригодна для построения разложений по обобщенным собственным векторам и оператора $B$.*

Доказательство. Пусть $F$ — общая база $A$ и $B$. Тогда она будет общей базой и операторов $A - z1$ и $B - z1$, причем на $F$ $A - z1 \leqslant B - z1$. Согласно лемме 5.4 отсюда следует, что $(B - z1)^{-1} \leqslant (A - z1)^{-1}$, т. е. выполнено условие $\gamma(B) \leqslant \gamma(A)$ с функцией $\gamma(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}$ при $\lambda \geqslant a$ и равной $(a - z)^{-1}$ при $\lambda < a$ (поясним, что $S(A) \subseteq [a, \infty)$ по условию; $S(B) \subseteq [a, \infty)$ благодаря неравенству $B \geqslant A$). Эта функция положительна на $S(B)$ и $\gamma(\lambda) = |\alpha(\lambda)|^2$ на $S(A)$. Теперь теорема следует из леммы 5.3. ■

## 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ КАРЛЕМАНОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Применим результаты п. 3 к более конкретным ситуациям. Пусть $H_0 = L_2(R, d\mu(x))$, где $R$ — пространство с мерой $\mu$, заданной на некоторой $\sigma$-алгебре множеств из $R$; $\mu(R) \leqslant \infty$. Самосопряженный оператор $A$, действующий в этом пространстве, называется карлемановским, если существует определенная на его спектре ограниченная непрерывная и отличная от нуля комплекснозначная функция $\alpha(\lambda)$ такая, что $\alpha(A)$ является интегральным карлемановским оператором. Последнее означает, что существует измеримое относительно меры $\mu \otimes \mu$ и определенное $\mu \otimes \mu$-почти для всех $(x, y) \in R \times R$ ядро $K(x, y)$ такое, что для некоторого плотного в $L_2(R, d\mu(x))$ множества функций $f$ справедливо представление $(\alpha(A)f)(x) = \int_R K(x, y) f(y)\, d\mu(y)$ и $\mu$-почти для каждого $y \in R$

$$\int_R |K(x, y)|^2 d\mu(x) < \infty. \tag{5.19}$$

Примеры карлемановских операторов (эллиптических операторов с гладкими коэффициентами и др.) приведены в книге автора (Березанский [3, гл. 6]) и ниже.

**Теорема 5.5.** *Пусть $A$ — самосопряженный карлемановский оператор, действующий в пространстве $L_2(R, d\mu(x))$. Тогда существует такой $\mu$-измеримый вес $p(x) \geqslant 1$ $(x \in R)$, что для построения разложения по обобщенным собственным функциям оператора $A$ пригодна цепочка* (см. гл. 1, (3.2))

$$L_2(R, p^{-1}(x)\, d\mu(x)) \supseteq L_2(R, d\mu(x)) \supseteq L_2(R, p(x)\, d\mu(x)). \tag{5.20}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную цепочку вида (5.20). Согласно (3.3) гл. 1 для нее $(If)(x) = p^{-1}(x) f(x)$ $(f \in L_2(R, d\mu(x)))$, поэтому

$$(Jf)(x) = p^{-\frac{1}{2}}(x) f(x) \quad (f \in L_2, (R, d\mu(x))). \tag{5.21}$$

Следовательно, непрерывно действующему в пространстве $L_2(R, d\mu(x))$ оператору $\alpha(A) OJ$ отвечает ядро $K_1(x, y) = K(x, y) p^{-\frac{1}{2}}(y)$, причем

$$|\alpha(A) O|^2 = |\alpha(A) OJ|^2 = \int_R\int_R |K(x, y)|^2 p^{-1}(y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) < \infty. \tag{5.22}$$

Согласно (5.19) функция $k(y) = \int_R |K(x, y)|^2 d\mu(x)$ — измеримая и почти везде конечная. Поэтому можно подобрать такой измеримый вес $p(y) \geqslant 1$, чтобы $\int_R k(y) p^{-1}(y)\, d\mu(y) < \infty$. Последнее условие, как это следует из (5.22), означает, что $|\alpha(A) O| < \infty$. Видим, что условие теоремы 5.3 выполнено с цепочкой (5.20) и так подобранным весом $p(x)$. ■

Подчеркнем, что вес $p(x)$, фигурирующий в доказанной теореме, — произвольный измеримый вес $p(x) \geqslant 1$ $(x \in R)$, для которого интеграл (5.22) сходится.

Таким образом, для карлемановских операторов обобщенность собственной функции заключается лишь в том, что она принадлежит не $L_2(R, d\mu(x))$, а пространству $L_2(R, p^{-1}(x)\, d\mu(x))$ с указанным весом $p(x)$. Разложение по его индивидуальным собственным функциям производится согласно общей схеме п. 1. Приведем четыре простых утверждения, относящихся к карлемановским операторам $A$.

I. *Оператор* $P(\lambda) : L_2(R, p(x)\, d\mu(x)) \to L_2(R, p^{-1}(x)\, d\mu(x))$ *является интегральным*, т. е.

$$(P(\lambda) u)(x) = \int_R P(x, y; \lambda)\, u(y)\, d\mu(y) \quad (u \in L_2(R, p(x)\, d\mu(x))), \tag{5.23}$$

*причем ядро* $P(x, y; \lambda)$ — *спектральное ядро* $A$ — *удовлетворяет* $\rho$-*почти для всех* $\lambda \in \mathbb{R}^1$ *оценке*

$$\int_R\int_R |P(x, y; \lambda)|^2 p^{-1}(x) p^{-1}(y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \leqslant 1. \tag{5.24}$$

Действительно, $\rho$-почти для всех $\lambda$ $|P(\lambda)| \leqslant$ Сл. $(P(\lambda)) = 1$. Рассмотрим оператор $\mathrm{J}P(\lambda)J : L_2(R, d\mu(x)) \to L_2(R, d\mu(x))$, $|\mathrm{J}P(\lambda)J| = |P(\lambda)| \leqslant 1$ $\rho$-почти везде. Поэтому при соответствующем фиксированном $\lambda$ этот оператор интегральный в $L_2(R, d\mu(x))$, ядро $K(x, y)$ которого удовлетворяет оценке $\int_R\int_R |K(x, y)|^2 d\mu(x)\, d\mu(y) \leqslant 1$. Благодаря (5.21) $P(x, y; \lambda) = K(x, y) p^{\frac{1}{2}}(x) p^{\frac{1}{2}}(y)$ является ядром оператора $P(\lambda)$, откуда следуют соотношения (5.23), (5.24). ■



II. *Пусть* $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto \gamma(\lambda) \in \mathbb{C}^1$ — *измеримая по Борелю функция такая, что* $|\gamma(\lambda)| \leqslant |\alpha(\lambda)|^2$ $(\lambda \in S(A))$. *Тогда* $\int_{\mathbb{R}^1} |\gamma(\lambda)|\, d\rho(\lambda) < \infty$.

Действительно, для $\Delta \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$ имеем

$$\rho(\Delta) = \text{Сл.}\,(O^+E(\Delta) O) = \text{Сл.}\,(\mathrm{J}O^+E(\Delta) OJ) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{J}O^+E(\Delta) OJe_j, e_j)_{H_0} = \lim_{n\to\infty} \rho_n(\Delta),$$
$$\rho_n(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{J}O^+E(\Delta) OJe_j, e_j)_{H_0},$$

где $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — некоторый ортонормированный базис в $H_0 = L_2(R, d\mu(x))$. При помощи теорем Хелли легко обосновать следующий предельный переход:

$$\int_{\mathbb{R}^1} |\gamma(\lambda)|\, d\rho(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^1} |\gamma(\lambda)|\, d\rho_n(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^1} \sum_{j=1}^{n} |\gamma(\lambda)| \times$$
$$\times d\,(\mathrm{J}O^+E(\lambda) OJe_j, e_j)_{H_0} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{J}O^+(|\gamma|(A)) OJe_j, e_j)_{H_0} \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{J}O^+(|\alpha|^2(A)) OJe_j, e_j)_{H_0} = \text{Сл.}\,(\mathrm{J}O^+(|\alpha|^2(A)) OJ) =$$
$$= |\alpha(A) O|^2 < \infty. \ ■$$

III. *Для всякой функции* $\gamma(\lambda)$, *фигурирующей в утверждении* II, *оператор* $O^+\gamma(A) O : L_2(R, p(x)\, d\mu(x)) \to L_2(R, p^{-1}(x)\, d\mu(x))$ *является интегральным, причем его ядро* $K(x, y) \in L_2(R \times R, p^{-1}(x) p^{-1}(y)\, d\mu(x) \otimes d\mu(y))$.

Действительно, в силу (2.26)

$$O^+\gamma(A) O = \int_{\mathbb{R}^1} \gamma(\lambda)\, d(O^+E(\lambda) O) = \int_{\mathbb{R}^1} \gamma(\lambda) P(\lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Но согласно утверждению I $P(\lambda)$ — интегральный оператор, поэтому формально $O^+\gamma(A) O$ также будет интегральным оператором с ядром

$$K(x, y) = \int_{\mathbb{R}^1} \gamma(\lambda) P(x, y; \lambda)\, d\rho(\lambda) \quad (x, y \in R). \tag{5.25}$$

Для доказательства утверждения достаточно установить, что функция (5.25) входит в $L_2(R \times R, p^{-1}(x)p^{-1}(y)\,d\mu(x)\otimes d\mu(y))$. При помощи неравенства Коши — Буняковского и (5.24) имеем

$$\int\int_{RR}\left|\int_{\mathbb{R}^1}\gamma(\lambda)P(x,\ y;\ \lambda)\,d\rho(\lambda)\right|^2 p^{-1}(x)\,p^{-1}(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\mathbb{R}^1}|\gamma(\lambda)|\,d\rho(\lambda)\int\int_{RR}\left(\int_{\mathbb{R}^1}|\gamma(\lambda)|\,|P(x,y;\lambda)|^2\,d\rho(\lambda)\right)p^{-1}(x)\,p^{-1}(y)\times$$

$$\times\,d\mu(x)\,d\mu(y)\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^1}|\gamma(\lambda)|\,d\rho(\lambda)\right)^2<\infty.\ \blacksquare$$

IV. *Если для самосопряженного действующего в пространстве $L_2(R, d\mu(x))$ оператора $A$ и некоторой фигурирующей в определении карлемановости функции $\alpha(\lambda)$ удается так подобрать оснащение (5.20), что* $|\alpha(A)\,O|^2 =$Сл. $(JO^+(|\alpha|^2(A))OJ) < \infty$, *то $A$ — карлемановский оператор.*

В самом деле, очевидно, что $|\ \alpha\ (A)\,OJ\,| < \infty$. Поэтому действующий в $L_2(R, d\mu(x))$ оператор $\alpha(A)\,OJ$ является интегральным с ядром $K_1(x, y)$, суммируемым с квадратом по двум переменным. Но тогда $K(x, y) = K_1(x, y)\,p^{\frac{1}{2}}(y)$ будет требуемым ядром для $\alpha(A)$. $\blacksquare$

Перейдем к исследованию карлемановости возмущения карлемановского оператора, основывающемуся на теореме 5.4 и лемме 5.3.

**Теорема 5.6.** *Пусть $A$ — самосопряженный полуограниченный снизу числом $a$ оператор, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N)$ по лебеговой мере. Предположим, что резольвента $R_z(A)$ при некотором $z < a$ является интегральным оператором, ядро которого локально ограничено. Рассмотрим действующий в этом пространстве самосопряженный оператор $B$, имеющий общую базу с $A$ и такой, что на этой базе $B \geqslant A$. Тогда $B$ — карлемановский оператор.*

Доказательство. Достаточно показать, что подбором цепочки вида (5.20) можно добиться выполнения неравенства $|\,\alpha(A)\,O\,| < \infty$, где $\alpha(\lambda) = (\lambda - z)^{-\frac{1}{2}}$ $(\lambda \in [a, \infty))$. Тогда согласно теореме 5.4 такое же неравенство справедливо и при замене $A$ на $B$. Таким образом, $|\alpha(B)\,O| < \infty$, поэтому согласно IV оператор $B$ карлемановский.

Из (5.16) следует, что нужно так подобрать вес $p(x) \geqslant 1$ $(x \in \mathbb{R}^N)$, чтобы Сл. $(JO^+COJ) < \infty$, где $C = R_z(A) > 0$.

Введем в $L_2(\mathbb{R}^N)$ оператор осреднения $(S_\varepsilon f)(x) = (\omega_\varepsilon * f)(x)$. Здесь $*$ означает свертку и $\omega_\varepsilon(x) = (m(K_\varepsilon))^{-1}\varkappa_{K_\varepsilon}(x)$ ($K_\varepsilon$ — открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в 0, $m(K_\varepsilon)$ — его лебегова мера, $\varkappa_{K_\varepsilon}$ — характеристическая функция $K_\varepsilon$). Нетрудно видеть, что $S_\varepsilon$ — ограниченный самосопряженный оператор с неотрицательным симметрическим ядром $S_\varepsilon(x, y)$, в сильном смысле $S_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 1$ и для каждых областей $G_1 \subset G_2 \subset \mathbb{R}^N$ $\sup\limits_{x\in G_1;\ 0<\varepsilon\leqslant\delta}|(S_\varepsilon f)(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in G_2}|f(x)|$, где $\delta = \rho(G_1, \mathbb{R}^N\setminus G_2) > 0$. Оператор $JO^+S_\varepsilon CS_\varepsilon OJ$ непрерывно действует в $L_2(\mathbb{R}^N)$ и имеет ядро



$$K_\varepsilon(x,\ y) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} S_\varepsilon(x,\ s)\,C(s,\ t)\,S_\varepsilon(t,\ y)\,ds\,dt\,p^{-\frac{1}{2}}(x)\,p^{-\frac{1}{2}}(y)$$
$$(x,\ y \in \mathbb{R}^N), \tag{5.26}$$

где $C(x, y)$ — ядро оператора $C$. Предположим, что $p \in C(\mathbb{R}^N)$, тогда ядро (5.26) непрерывно зависит от $(x, y)$ и положительно определено. Поэтому

$$\text{Сл. } (JO^+S_\varepsilon CS_\varepsilon OJ) = \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x,\ x)\,dx \leqslant \infty \qquad (\varepsilon > 0). \tag{5.27}$$

Оценим интеграл (5.27). Пусть $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ — последовательность шаров $G_n = \{x \in \mathbb{R}^N \mid\ |x| < n\}$. Обозначим $c_n = \sup\limits_{x,y\in G_n}|C(x, y)|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и рассмотрим ядро $K_{1,\varepsilon}(x, y) = K_\varepsilon(x, y)\,p^{\frac{1}{2}}(x)\,p^{\frac{1}{2}}(y)$ $(x, y \in \mathbb{R}^N)$. Согласно (5.26) его можно понимать как результат применения к $C(s, t)$ тензорного произведения $S_\varepsilon \otimes S_\varepsilon$ двух операторов осреднения, поэтому благодаря свойствам этих операторов $\sup\limits_{x,y\in G_n;\,0<\varepsilon\leqslant 1}|K_{1,\varepsilon}(x, y)| \leqslant c_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Отсюда $(G_0 = \varnothing)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x,\ x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} K_{1,\varepsilon}(x,\ x)\,p^{-1}(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{G_{n+1}\setminus G_n} K_{1,\varepsilon}(x,\ x)\times$$
$$\times\,p^{-1}(x)\,dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}\int_{G_{n+1}\setminus G_n} p^{-1}(x)\,dx \qquad (0 < \varepsilon \leqslant 1). \tag{5.28}$$

Подберем функцию $p(x)$ столь быстро растущей при $|x| \to \infty$, чтобы ряд в правой части (5.28) оказался сходящимся. Тогда

$$\text{Сл. } (JO^+S_\varepsilon CS_\varepsilon OJ) \leqslant c < \infty \qquad (0 < \varepsilon \leqslant 1). \tag{5.29}$$

Нетрудно видеть, что в неравенстве (5.29) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получить требуемую оценку Сл. $(JO^+COJ) \leqslant c$. Действительно, если $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N)$, то левая часть (5.29) равна $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(CS_\varepsilon OJe_j,\ S_\varepsilon OJe_j)_{L_2(\mathbb{R}^N)}$. Каждое слагаемое $(CS_\varepsilon OJe_j,\ S_\varepsilon OJe_j)_{L_2(\mathbb{R}^N)} \to (COJe_j,\ OJe_j)_{L_2(\mathbb{R}^N)}$ при $\varepsilon \to 0$, поэтому благодаря неотрицательности слагаемых и (5.29) Сл. $(JO^+COJ) = \sum\limits_{j=1}^{\infty}(COJe_j,\ OJe_j)_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leqslant c < \infty$. $\blacksquare$

Подчеркнем, что цепочка вида (5.20), где $p(x) \geqslant 1$ $(x \in \mathbb{R}^N)$, непрерывна и выбрана таким образом, чтобы сходился ряд (5.28), может обслуживать любой оператор $B$, удовлетворяющий условиям теоремы.

**Пример.** Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N)$ дифференциальное выражение

$$(\mathcal{M}u)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x) + q(x)u(x) = (\mathcal{L}u)(x) + q(x)u(x). \tag{5.30}$$

Здесь $\mathcal{L}$ — эллиптическое формально самосопряженное выражение порядка $r > N$ с коэффициентами $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$; $q \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ и почти везде неотрицательна; $\mathcal{L}$ предполагается полуограниченным снизу на $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ некоторым $a$ (т. е. $(\mathcal{L}u, u)_{L_2(\mathbb{R}^N)} \geqslant a\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^N)}$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$). Введем эрмитовы операторы в $L_2(\mathbb{R}^N)$ $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \ni u \mapsto \mathcal{L}u$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \ni u \mapsto \mathcal{M}u$ и предположим, что они имеют полуограниченные снизу самосопряженные расширения в $L_2(\mathbb{R}^N)$ $A$ и $B$ соответственно с некоторой общей базой. Утверждается, что операторы $A$ и $B$ — карлемановские с общими $\alpha(\lambda) = (\lambda - z)^{-\frac{1}{2}}$ ($z < a$ фиксировано; $\lambda \in [a, \infty)$) и весом $p(x)$. Это следует из только что изложенного, так как известно (Березанский [3, гл. 3, теорема 5.1]), что при $r > N$ резольвента $R_z(A)$ введенного сейчас оператора $A$ является интегральным оператором, ядро которого локально ограничено.

В случае дифференциальных выражений (5.30), порядок которых не слишком высок (не превосходит $N$), приведенная схема непригодна, так как сейчас для доказательства карлемановости нужно брать функцию $\alpha(\lambda)$ типа $(\lambda^l - z)^{-1}$, где целое $l > 0$ достаточно большое, а соответствующий аналог леммы 5.4 несправедлив. Изложим несколько другой подход.

Пусть $A$ — действующий в пространстве $L_2(R, d\mu(x))$ самосопряженный полуограниченный снизу карлемановский оператор, $\alpha(\lambda)$ — соответствующая функция. Предположим, что для любого $t \in (0, 1]$ существует $c_t > 0$ такое, что

$$|\alpha(\lambda)|^2 \geqslant c_t e^{-t\lambda} \qquad (\lambda \in S(A)). \tag{5.31}$$

Согласно приведенному выше утверждению III каждый оператор $O^+e^{-tA}O : L_2(R, p(x)\,d\mu(x)) \to L_2(R, p^{-1}(x)\,d\mu(x))$ является интегральным, пусть $U(x, y; t) \in L_2(R \times R, p^{-1}(x)p^{-1}(y)d\mu(x) \otimes d\mu(y))$ $(t \in (0, 1])$ — отвечающее ему ядро. Будем говорить, что оператор $A$ удовлетворяет условию полугрупповой позитивности, если для каждого $t \in (0, 1]$ $\mu \otimes \mu$-почти для всех $(x, y) \in R \times R$ выполняется неравенство $U(x, y; t) \geqslant 0$.

**Теорема 5.7.** *Пусть в пространстве $L_2(R, d\mu(x))$ действует полуограниченный снизу карлемановский оператор $A$, удовлетворяющий условию полугрупповой позитивности, $R \ni x \mapsto v(x) \geqslant 0$ — измеримая функция такая, что у $A$ существует база $F$, для которой замыкание $V$ оператора $F \ni f(x) \mapsto v(x)f(x)$ самосопряжено. Обозначим через $B$ замыкание оператора $F \ni f \mapsto Af + Vf$ и предположим, что $B$ самосопряжен.*

*Утверждается, что $B$ — карлемановский оператор и для построения разложения по его обобщенным собственным функциям пригодна цепочка* (5.20), *построенная по $A$.*



Доказательство. Используем известную мультипликативную формулу: пусть в гильбертовом пространстве $H$ действуют самосопряженные полуограниченные снизу операторы $A$ и $V$. Обозначим через $B$ замыкание оператора $\mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(V) \ni f \mapsto Af + Vf$ и предположим, что $B$ самосопряжен. Тогда для каждых $t > 0$ и $f \in H$ в смысле сильной сходимости

$$e^{-tB}f = \lim_{n\to\infty} (e^{-\frac{t}{n}A}e^{-\frac{t}{n}V})^n f. \tag{5.32}$$

Учитывая оценку (5.31) при $t = 1$ и применяя лемму 5.3, где $\gamma(\lambda) = c_1e^{-\lambda}$ при $\lambda \geqslant a$ и равна $c_1e^{-a}$ при $\lambda < a$, получаем, что достаточно доказать неравенство Сл. $(JO^+e^{-B}OJ) \leqslant$ Сл. $(JO^+e^{-A}OJ)$ или, что то же, $|e^{-\frac{1}{2}B}OJ| \leqslant |e^{-\frac{1}{2}A}OJ|$ (см. (5.16)).

В силу (5.32) для каждого $f \in L_2(R, d\mu(x))$ имеем

$$(e^{-\frac{1}{2}B}OJf)(x) = \lim_{n\to\infty}((e^{-\frac{1}{2n}A}e^{-\frac{1}{2n}V})^n OJf)(x). \tag{5.33}$$

Обозначим $e_n(x) = e^{-\frac{1}{2n}v(x)} \in [0, 1]$ $(x \in R;\ n = 1, 2, \ldots)$. Для ядра $K_n(x, y)$ оператора, стоящего справа в (5.33) под знаком предела, получим в силу неотрицательности функций $U(x, y; t)$, $e_n(x) \leqslant 1$ и $p(x)$ и теоремы Фубини $\mu \otimes \mu$-почти для всех $(x, y) \in R \times R$

$$0 \leqslant K_n(x, y) = \int_R U(x, z_1; (2n)^{-1})e_n(z_1)\left(\int_R U(z_1, z_2; (2n)^{-1})e_n(z_2) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\ldots\left(\int_R U(z_n, y; (2n)^{-1})\,dz_n\right)\ldots\right)dz_2\right)dz_1 e_n(y)\,p^{-\frac{1}{2}}(y) =$$

$$= \int_R \cdots \int_R U(x, z_1; (2n)^{-1})e_n(z_1)U(z_1, z_2; (2n)^{-1})e_n(z_2) \cdots$$

$$\cdots U(z_n, y; (2n)^{-1})\,dz_1dz_2 \cdots dz_n e_n(y)\,p^{-\frac{1}{2}}(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_R \cdots \int_R U(x, z_1; (2n)^{-1})U(z_1, z_2; (2n)^{-1}) \cdots U(z_n, y; (2n)^{-1}) \times$$

$$\times\, dz_1dz_2 \cdots dz_n p^{-\frac{1}{2}}(y).$$

Последний интеграл является ядром оператора $(e^{-\frac{1}{2n}A})^n OJ = e^{-\frac{1}{2}A} OJ$. Обозначим его через $L(x, y)$. Таким образом, $0 \leqslant K_n(x, y) \leqslant L(x, y)$ $\mu \otimes \mu$-почти для всех $(x, y) \in R \times R$. Отсюда заключаем, что

$$|(e^{-\frac{1}{2n}A} e^{-\frac{1}{2n}V})^n OJ|^2 = \iint_{RR} K_n^2(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{RR} L^2(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = |e^{-\frac{1}{2}A} OJ|^2.$$

Из этого неравенства и соотношения (5.32) вытекает, что $|e^{-\frac{1}{2}B} OJ|^2 \leqslant |e^{-\frac{1}{2}A} OJ|^2$. ■

**Пример.** Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N)$ оператор $B$ Шредингера с сингулярным полуограниченным снизу потенциалом — замыкание оператора $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \ni u(x) \mapsto -(\Delta u)(x) + q(x)u(x)$, где $q \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ и $q(x) \geqslant a$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. Известно, что $B$ самосопряжен (Като [1]). При помощи теоремы 5.7 легко показать, что $B$ — карлемановский.

Действительно, определим $A$ так же, как и $B$, но по дифференциальному выражению $-\Delta u + au$. Известно, что $A$ полуограничен снизу числом $a$, самосопряжен и карлемановский, причем $\alpha(\lambda) = (\lambda^l - z)^{-1}$, где целое $l > \frac{N}{4}$ и $z < a$ (Березанский [3, гл. 6, лемма 2.1]). Более того, $A$ удовлетворяет условию полугрупповой позитивности: условие (5.31) очевидно, а требуемые свойства ядра $U(x, y; t)$ — фундаментального решения сдвинутого на $a$ уравнения теплопроводности — вытекают из хорошо известного представления для этого ядра (напомним, что при $a = 0$ $U(x, y; t) = (2\sqrt{\pi t})^{-N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)$ $(x, y \in \mathbb{R}^N;\ t \in (0, 1])$). Сейчас $F = C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $v(x) = q(x) - a \geqslant 0$ $(x \in \mathbb{R}^N)$.

В случае карлемановских операторов, действующих в пространстве $L_2(R, d\mu(x))$, где $R$ — локально компактное сепарабельное пространство, а $\mu$ — определенная на борелевских множествах мера, положительная на открытых множествах и конечная на компактных, можно из предполагаемой априори непрерывности спектрального ядра $P(x, y; \lambda)$ относительно $(x, y) \in R \times R$ сделать некоторые полезные заключения (например, доказать непрерывность индивидуальных собственных функций $\varphi_\alpha(x; \lambda)$). На этих результатах мы не останавливаемся (Березанский [3, гл. 5, § 4, п. 3]).



## 5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_2$

В случае семейства $(A_x)_{x\in X}$ общих коммутирующих самосопряженных операторов, действующих в пространстве $H_0 = L_2(G)$, где $G \subseteq \mathbb{R}^N$, для конструкции разложения нужно построить оснащение этого пространства (2.18) с квазиядерным вложением $H_+ \to H_0$. В качестве $H_+$ часто удобно брать соболевское пространство $W_2^l(G)$ $\left(l > \frac{N}{2}\right)$ в случае ограниченной $G$ (см. гл. 1, теорему 3.2) или пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{l,q_1}(G)$ и $W_2^l(G, q_2(x)\,dx)$ $\left(l > \frac{N}{2}\right)$ в случае неограниченной регулярной $G$ (условия на веса $q_1$ и $q_2$ диктуются теоремами 3.5 и 3.6 гл. 1). Иногда для получения явных формул в качестве $H_+$ полезно брать позитивное пространство, построенное согласно гл. 1, § 1, п. 8 по оператору $D$, равному замыканию оператора в $L_2(G)$ $C_0^\infty(G) \ni u(x) \mapsto \delta^{-1}(x)(\mathcal{D}u)(x)$, где $\mathcal{D} = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \dots \partial x_N}$, а $\delta$ подобрана согласно гл. 1, § 3, п. 11 (квазиядерность вложения $H_+ \to H_0$ следует из (3.53) гл. 1).

Для операторов в $H_0 = L_2(\mathbb{R}^\infty, d\theta(x))$, где $d\theta(x)$ — продакт-мера, оснащение (2.18) можно строить согласно (4.3) и (4.14) гл. 1 с указанными там правилами подбора перемножаемых позитивных пространств и веса.

Первую из формул (2.24) можно переписать в виде

$$(E(B)u, v)_{H_0} = \int_B (Q(\lambda(\cdot))J^{-1}u, J^{-1}v)_{H_0}\, d\rho(\lambda(\cdot)) \tag{5.34}$$

$$(B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X);\ u, v \in H_+),$$

где $Q(\lambda(\cdot)) = \mathbf{J}P(\lambda(\cdot))J : H_0 \to H_0$ $\rho$-почти для каждого $\lambda(\cdot)$ — оператор в $H_0$ со следом, равным единице. Оператор $Q(\lambda(\cdot))$ подавно квазиядерный, поэтому, например в случае $H_0 = L_2(G)$, подынтегральное выражение в (5.34) приобретает вид

$$(Q(\lambda(\cdot))J^{-1}u, J^{-1}v)_{L_2(G)} = \iint_{GG} Q(x, y; \lambda(\cdot))(J^{-1}u)(y)\overline{(J^{-1}v)(x)}\, dx dy$$

$$(u, v \in H_+), \tag{5.35}$$

где $\rho$-почти для каждого $\lambda(\cdot)$ $Q(\cdot, \cdot; \lambda(\cdot)) \in L_2(G \times G)$. Эта формула напоминает соответствующее равенство для карлемановских операторов (если в ней перебросить $J^{-1}$, то $(\mathbf{J}^{-1} \otimes \mathbf{J}^{-1})Q(x, y; \lambda(\cdot)) = P(x, y; \lambda(\cdot))$; правда, последнее ядро — обобщенное).

В частности, если $H_+$ порождается оператором $D$, то при помощи рассуждений типа приведенных в гл. 1, § 3, п. 11 получим более явное представление

$$(Q(\lambda(\cdot))J^{-1}u,\ J^{-1}v)_{L_2(G)} = \int_G\int_G Q_1(x,\ y;\ \lambda(\cdot))(\mathcal{D}u)(y)\times$$
$$\times\overline{(\mathcal{D}v)(x)}\,dxdy \tag{5.36}$$
$$(u,\ v\in C_0^\infty(G)).$$

Здесь $Q_1(x,\ y;\ \lambda(\cdot)) = ((U^{-1}\otimes U^{-1})Q(x,\ y;\lambda(\cdot)))\delta^{-1}(x)\delta^{-1}(y)\in$ $\in L_{2,\mathrm{loc}}(G\times G)$, унитарный оператор $U$ определяется равенством $\sqrt{D^*D}=UD$. Из (5.36) и (5.34) вытекает

$$(E(B)u,\ v)_{L_2(G)} = \int_B\left(\int_G\int_G Q_1(x,\ y;\ \lambda(\cdot))(\mathcal{D}u)(y)\overline{(\mathcal{D}v)(x)}dxdy\right)d\rho(\lambda(\cdot)) \tag{5.37}$$
$$(B\in\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X);\ u,\ v\in C_0^\infty(G)).$$

Ядро $Q_1(x,\ y;\ \lambda(\cdot))$ из соотношения (5.37) однозначно не определяется — при добавлении к нему любого слагаемого $K(x,\ y)$, удовлетворяющего уравнению $(\mathcal{D}_x\mathcal{D}_yK)(x,\ y)=0$, (5.37) не изменяется. Одно из ядер $Q_1(x,\ y;\ \lambda(\cdot))$, удовлетворяющих (5.37), имеет следующий простой вид:

$$Q_1(x,\ y;\ \lambda(\cdot)) = \left(\frac{d}{d\rho}(E\omega(y,\ \cdot),\ \omega(x,\ \cdot))_{L_2(G)}\right)(\lambda(\cdot))\qquad (x,\ y\in G), \tag{5.38}$$

где $\omega(x,\ \xi)$ определены в гл. 1, § 3, п.11. Для доказательства (5.38) запишем согласно теореме 3.10 гл. 1 представление

$$(E(B)u,\ v)_{L_2(G)} = \int_G\int_G (E(B)\omega(y,\ \cdot),\ \omega(x,\ \cdot))_{L_2(G)}(\mathcal{D}u)(y)\times$$
$$\times\overline{(\mathcal{D}v)(x)}\,dxdy \tag{5.39}$$
$$(B\in\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X);\ u,\ v\in C_0^\infty(G)).$$

При каждых фиксированных $x,\ y\in G$ мера $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)\ni B\mapsto$ $\mapsto(E(B)\omega(y,\ \cdot),\ \omega(x,\ \cdot))_{L_2(G)}$, очевидно, абсолютно непрерывна относительно $\rho$. Применяя обычную теорему Радона — Никодима и переставляя интегралы в (5.39), придем к (5.37) с ядром (5.38). Аналогично можно записать и другие формулы § 2, 4.

## 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ИНДИВИДУАЛЬНЫМ ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ В СЛУЧАЕ НАЛИЧИЯ ВАКУУМА

В § 2, п. 3 мы уже говорили, что для семейства $(A_x)_{x\in X}$, обладающего вакуумом $\Omega$ (т. е. порождающим вектором), роль спектральной меры может играть мера $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)\ni B\mapsto\sigma(B)=(E(B)\Omega,\ \Omega)_{H_0}$. Установим еще одну теорему, касающуюся этого случая.



**Теорема 5.8.** *Пусть выполнены предположения теорем 2.5, 2.6. Дополнительно, пусть семейство $(A_x)_{x\in X}$ обладает частичным вакуумом $\Omega$ из $D$ таким, что $A_{x_1}^{m_1}\ldots A_{x_p}^{m_p}\Omega\in D$ для фигурирующих в определении $\Omega$ точек $x_j\in X$ и степеней $m_j$, причем линейная оболочка этих векторов плотна не только в $H_0$, но и в $H_+$. Тогда для каждого собственного значения $\lambda(\cdot)\in T$ соответствующая кратность $N_{\lambda(\cdot)}=1$ (т. е. спектр однократен). Аналогичное утверждение справедливо и в случае теоремы 2.7.*

Частичный вакуум $\Omega$, удовлетворяющий сформулированным в условии теоремы требованиям, будем называть сильным.

Доказательство. Пусть $\lambda(\cdot)\in T$. Предположим, что в разложении (5.2) для этого $\lambda(\cdot)$ $N_{\lambda(\cdot)}>1$, и придем к противоречию. Из доказательства теоремы 5.1 следует, что тогда и в разложении (5.3) $N_{\lambda(\cdot)}>1$. Запишем это разложение для $f\in H_0$ и $g=$ $=J^{-1}\Omega$:

$$(P(\lambda(\cdot))Jf,\ \Omega)_{H_0} = \sum_{\alpha=1}^{N_{\lambda(\cdot)}}\nu_\alpha(\lambda(\cdot))(f,\ \psi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}\overline{(J^{-1}\Omega,\ \psi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}}. \tag{5.40}$$

Обозначим через $l_{2,N_{\lambda(\cdot)}}$ либо пространство $l_2$ в случае $N_{\lambda(\cdot)}=$ $=\infty$, либо $\mathbb{C}^{N_{\lambda(\cdot)}}$ в случае $N_{\lambda(\cdot)}<\infty$. Так как $(\psi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{\alpha=1}^{N_{\lambda(\cdot)}}$ — ортонормированная последовательность в $H_0$, то векторы $((f,\ \psi_1(\lambda(\cdot)))_{H_0},\ (f,\ \psi_2(\lambda(\cdot)))_{H_0},\ \ldots)\in l_{2,N_{\lambda(\cdot)}}$ при изменении $f$ по $H_0$ пробегают все $l_{2,N_{\lambda(\cdot)}}$. Отсюда следует, что при $N_{\lambda(\cdot)}>1$ существует такое $f_0\in H_0$, для которого вектор $((f_0,\ \psi_1(\lambda(\cdot)))_{H_0},$ $(f_0,\ \psi_2(\lambda(\cdot)))_{H_0},\ \ldots)$ отличен от нуля и ортогонален в $l_{2,N_{\lambda(\cdot)}}$ вектору $(\nu_1(\lambda(\cdot))(J^{-1}\Omega,\ \psi_1(\lambda(\cdot)))_{H_0},\ \nu_2(\lambda(\cdot))(J^{-1}\Omega,\ \psi_2(\lambda(\cdot)))_{H_0},\ldots)$ (который также принадлежит $l_{2,N_{\lambda(\cdot)}}$, так как $J^{-1}\Omega\in H_0$, а множители $\nu_\alpha(\lambda(\cdot))$ ограничены). Подставляя в (5.40) вместо $f$ вектор $f_0$, найдем

$$(P(\lambda(\cdot))Jf_0,\ \Omega)_{H_0}=0.$$

Применяя последовательно равенство (2.27), получаем

$$(P(\lambda(\cdot))Jf_0,\ A_{x_1}^{m_1}\ldots A_{x_p}^{m_p}\Omega)_{H_0} = (\lambda(x_1))^{m_1}\ldots(\lambda(x_p))^{m_p}\times$$
$$\times(P(\lambda(\cdot))Jf_0,\ \Omega)_{H_0}=0 \tag{5.41}$$

для всех $x_j\in X$ и натуральных $m_j$, фигурирующих в определении сильного частичного вакуума. Так как по предположению линейная оболочка векторов $A_{x_1}^{m_1}\ldots A_{x_p}^{m_p}\Omega$ плотна в $H_+$, то из (5.41) следует, что $P(\lambda(\cdot))Jf_0=0$. Пусть теперь $g\in H_0$ произвольно, тогда согласно (5.3)

$$0 = (P(\lambda(\cdot)) Jf_0, Jg)_{H_0} = \sum_{\alpha=1}^{N_{\lambda(\cdot)}} \nu_\alpha(\lambda(\cdot)) (f_0, \psi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0} \times \times \overline{(g, \psi_\alpha(\lambda(\cdot)))_{H_0}}. \quad (5.42)$$

Так как векторы $((g, \psi_1(\lambda(\cdot)))_{H_0}, (g, \psi_2(\lambda(\cdot)))_{H_0}, \ldots)$ описывают все $l_{2,N_{\lambda(\cdot)}}$ и $\nu_\alpha(\lambda(\cdot)) > 0$, то из (5.42) заключаем, что вектор $((f_0, \psi_1(\lambda(\cdot)))_{H_0}, (f_0, \psi_2(\lambda(\cdot)))_{H_0}, \ldots) = 0$, что абсурдно.

Случай теоремы 2.7 рассматривается аналогично. ■

Таким образом, при выполнении предположений теоремы 5.8 преобразование Фурье (5.8) вектора $u \in H_+$ имеет вид

$$\mathbb{R}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto \tilde{u}(\lambda(\cdot)) = (u, \varphi_1(\lambda(\cdot)))_{H_0}, \quad (5.43)$$

а равенство Парсеваля в форме (5.9) превратится в равенство

$$(E(B)u, v)_{H_0} = \int_B \tilde{u}(\lambda(\cdot)) \overline{\tilde{v}(\lambda(\cdot))} \, d\rho(\lambda(\cdot)) =$$

$$= \int_B \tilde{u}(\lambda(\cdot)) \overline{\tilde{v}(\lambda(\cdot))} \left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)(\lambda(\cdot)) \, d\sigma(\lambda(\cdot)) \quad (B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X);\ u, v \in H_+). \quad (5.44)$$

Аналогичные результаты справедливы и для нормальных операторов.

## § 6. САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ОПЕРАТОРОВ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Изложим один простой и часто приводящий к цели способ доказательства существенной самосопряженности операторов, сводящий вопрос к изучению соответствующей задачи Коши. В частности, он легко приводит к критериям самосопряженности в терминах квазианалитических векторов. Приведем также некоторые приемы проверки коммутируемости самосопряженных операторов, связанные с этим подходом.

Ниже будут рассматриваться только эрмитовы и самосопряженные операторы. Заметим, что для доказательства нормальности оператора $A$ нужно установить самосопряженность $\mathrm{Re}A = 2^{-1}(A + A^*)$ и $\mathrm{Im}\,A = (2i)^{-1}(A - A^*)$ и их коммутируемость. Выяснение коммутируемости нормальных операторов также сводится к доказательству коммутируемости их вещественных и мнимых частей.



### 1. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О СВЯЗИ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ С ЕДИНСТВЕННОСТЬЮ

Пусть $H$ — гильбертово пространство, в котором действует оператор $B$ со всюду плотной областью определения $\mathfrak{D}(B)$; $I \subseteq \mathbb{R}^1$ — конечный или бесконечный замкнутый, открытый или полуоткрытый интервал; $r = 1, 2, \ldots$ Под сильным решением уравнения

$$\left(\frac{d^r u}{dt^r}\right)(t) + Bu(t) = 0 \qquad (t \in I) \quad (6.1)$$

на $I$ понимается вектор-функция $I \ni t \mapsto u(t) \in H$, $r$ раз сильно непрерывно дифференцируема (т. е. имеющая $r$ сильных производных на $I$, последняя из которых непрерывна), такая, что при каждом $t \in I$ $u(t) \in \mathfrak{D}(B)$ и удовлетворяется равенство (6.1).

Сильно непрерывно дифференцируемая $r$ раз вектор-функция $I \ni t \mapsto u(t) \in H$ будет сильным решением уравнения

$$\left(\frac{d^r u}{dt^r}\right)(t) + B^* u(t) = 0 \qquad (t \in I) \quad (6.2)$$

тогда и только тогда, когда выполняется «слабое» равенство

$$\left(\left(\frac{d^r u}{dt^r}\right)(t), f\right)_H + (u(t), Bf)_H = 0 \qquad (f \in \mathfrak{D}(B);\ t \in I). \quad (6.3)$$

Это утверждение сразу вытекает из определения сопряженного оператора, так как из (6.3) следует, что при каждом $t \in I$ $u(t) \in \mathfrak{D}(B^*)$ благодаря включению — $u''(t) \in H$.

Будем говорить, что для уравнения (6.1) на $I = [0, b)$ $(0 < b \leqslant \infty)$ имеет место единственность сильных решений задачи Коши, если каждое сильное решение $u(t)$ этого уравнения на $[0, b)$ такое, что $u(0) = \ldots = u^{r-1}(0) = 0$, аннулируется и для всех $t \in (0, b)$. Разумеется, *если имеет место единственность на* $[0, b)$ *при некотором* $b > 0$, *то она имеет место и на* $[0, \infty)$. В самом деле, пусть $[0, \infty) \ni t \mapsto u(t)$ — сильное решение уравнения (6.1) на $[0, \infty)$ такое, что $u(0) = \ldots = u^{(r-1)}(0) = 0$. Благодаря предполагаемой единственности можем заключить, что $u(t) = 0$ при $t \in (0, b)$, в частности $u(t) = 0$ в окрестности точки $c = \frac{b}{2}$, поэтому $u(c) = \ldots = u^{(r-1)}(c) = 0$. Функция $[0, \infty) \ni t \mapsto u_1(t) = u(t + c)$ — сильное решение (6.1) на $[0, \infty)$ такое, что $u_1(0) = u(c) = 0, \ldots, u_1^{(r-1)}(0) = u^{(r-1)}(c) = 0$, и поэтому $u_1(t) = 0$ при $t \in (0, b)$. Повторяя предыдущее рассуждение, заключаем, что функция $[0, \infty) \ni t \mapsto u_2(t) = u_1(t + c) = u(t + 2c)$ аннулируется при

$t \in (0, b)$. Далее построим функцию $u_3(t)$ и т. д. В результате получим, что $u(t) = 0$ $(t \in (0, \infty))$. ■

В дальнейшем будем считать $r$ равным единице или двум, хотя возможно (и имеет смысл) обобщение некоторых последующих результатов на случай общего $r$.

**Теорема 6.1.** *Пусть $A$ — эрмитов оператор, действующий в $H$. Для его существенной самосопряженности необходимо, чтобы для обоих уравнений*

$$\left(\frac{du}{dt}\right)(t) \pm (iA)^* u(t) = 0 \qquad (t \in [0, b)) \tag{6.4}$$

*имела место единственность сильных решений задачи Коши на $[0, b)$ при любом $b \in (0, \infty]$, и достаточно, чтобы она имела место при некотором таком $b$.*

Доказательство. Проведем его в несколько шагов.

I. Установим достаточность, предполагая пока, что $A$ имеет равные дефектные числа. Предположим противное: пусть замыкание $\tilde{A}$ не самосопряжено. Тогда у $A$ существуют два различных самосопряженных расширения $A_1$ и $A_2$ в $H$. Пусть $E_1$, $E_2$ — соответствующие разложения единицы. Для любого $g \in \mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(A_1)$ интеграл $\int_{\mathbb{R}^1} \lambda^2 \, d(E_1(\lambda) g, g)_H$ сходится, поэтому вектор-функция

$$[0, \infty) \ni t \mapsto u_1(t) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t} dE_1(\lambda) g \tag{6.5}$$

будет один раз сильно непрерывно дифференцируемой и $u_1'(t) = i\int_{\mathbb{R}^1} \lambda e^{i\lambda t} \, dE_1(\lambda) g$. Легко видеть, что она будет сильным решением уравнения (6.4) на $[0, \infty)$ со знаком «+». Действительно, нужно проверить соответствующее слабое равенство (6.3), которое сейчас будет выглядеть так:

$$\left(\left(\frac{du_1}{dt}\right)(t), f\right)_H + (u_1(t), iAf)_H = 0 \qquad (f \in \mathfrak{D}(A);\ t \in [0, \infty)).$$

Так как $d(E_1(\lambda) g, Af)_H = d(E_1(\lambda) g, A_1 f)_H = d\left(\int_{-\infty}^{\lambda} \mu \, d(E_1(\mu) g, f)_H\right) = \lambda d(E_1(\lambda) g, f)_H$, то

$$\left(\left(\frac{du_1}{dt}\right)(t), f\right)_H + (u_1(t), iAf)_H = i\int_{\mathbb{R}^1} \lambda e^{i\lambda t} d(E_1(\lambda) g, f)_H -$$
$$- i\int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t} d(E_1(\lambda) g, Af)_H = 0 \qquad (f \in \mathfrak{D}(A);\ t \in [0, \infty)),$$



т. е. требуемое соотношение выполнено. Аналогично функция $u_2(t)$, построенная согласно (6.5) по $E_2$, будет сильным решением этого же уравнения; $u_1(0) = u_2(0) = g$. Таким образом, и $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ — сильное решение уравнения (6.4) со знаком «+» на $[0, \infty)$, причем $u(0) = 0$. Благодаря сделанному ранее замечанию единственность имеет место на $[0, \infty)$, поэтому $u(t) = 0$ при $t \geqslant 0$. Отсюда

$$\int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t} d((E_1(\lambda) - E_2(\lambda)) g, h)_H = 0 \qquad (g \in \mathfrak{D}(A),\ h \in H,\ t \in [0, \infty)). \tag{6.6}$$

Рассмотрим теперь уравнение (6.4) со знаком «—». Можно повторить приведенное рассуждение, заменив в (6.5) $e^{i\lambda t}$ на $e^{-i\lambda t}$. В результате получим соотношение (6.6), где также произведена такая замена. Таким образом, если ввести функцию ограниченной вариации $\omega(\lambda) = ((E_1(\lambda) - E_2(\lambda))g, h)_H$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$, то согласно (6.6) и этой его модификации $\int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t} \, d\omega(\lambda) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$. В силу теоремы единственности для преобразования Фурье — Стилтьеса отсюда следует, что $d\omega(\lambda) = 0$, т. е. $((E_1(\lambda) - E_2(\lambda))g, h)_H = 0$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$. Так как здесь $g \in \mathfrak{D}(A)$, а $\mathfrak{D}(A)$ плотно в $H$ и $h \in H$, то $E_1(\lambda) = E_2(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$. Мы пришли к противоречию.

II. В случае различных дефектных чисел у $A$ воспользуемся следующей простой леммой.

**Лемма 6.1.** *Построим пространство $\mathfrak{H} = H \oplus H$ векторов $f = (f_1, f_2)$ $(f_1, f_2 \in H)$ и в нем оператор $\mathfrak{A}$ со всюду плотной областью определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{D}(A) \oplus \mathfrak{D}(A)$, полагая $\mathfrak{A}f = (Af_1, -Af_2)$ $(f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}))$. Рассмотрим на вектор-функциях со значениями в $\mathfrak{H}$ уравнение $(b \in (0, \infty])$*

$$\left(\frac{du}{dt}\right)(t) + (i\mathfrak{A})^* u(t) = 0 \qquad (t \in [0, b)). \tag{6.7}$$

*Утверждается, что если имеет место единственность сильных решений задачи Коши на $[0, b)$ для обоих уравнений (6.4), то такая единственность имеет место и для сильных решений уравнения (6.7), и наоборот.*

Доказательство. Пусть $[0, b) \ni t \mapsto u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathfrak{H}$ — сильное решение задачи Коши для уравнения (6.7). Так как $\mathfrak{A}^* f = (A^* f_1, -A^* f_2)$ $(f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}^*) = \mathfrak{D}(A^*) \oplus \mathfrak{D}(A^*))$, то $[0, b) \ni t \mapsto u_1(t) \in H$ и $[0, b) \ni t \mapsto u_2(t) \in H$ являются сильными решениями уравнения (6.4) со знаками «+» и «—» соответственно. Отсюда и из предполагаемой единственности сильных решений задачи Коши на $[0, b)$ для (6.4) вытекает единственность для (6.7). Столь же просто выводится и обратное утверждение. ■

III. Докажем теперь достаточность в теореме для оператора $A$ с индексом дефекта $(m, n)$. Построим, как и в лемме 6.1, оператор

$\mathfrak{A}$. Легко проверить, что индекс дефекта этого оператора равен $(m+n,\ m+n)$ (см., напр.: Ахиезер, Глазман [1, гл. 9, п. 111]). В силу леммы 6.1 имеет место единственность для (6.7) на $[0, b)$. Применив эту лемму к случаю, когда $A$ заменено на $-A$, получим, что такая единственность имеет место и для уравнения (6.7), в котором знак «+» заменен на «—». Так как дефектные числа оператора $\mathfrak{A}$ одинаковы и равны $m+n$, то к нему можно применить I и заключить, что $\mathfrak{A}$ существенно самосопряжен. Но тогда $m+n=0$, откуда $m=n=0$, т. е. и $A$ существенно самосопряжен.

IV. Для доказательства необходимости установим одну общую лемму, отражающую в нашей ситуации принцип Хольмгрена. Эта лемма в дальнейшем будет использоваться и в других целях.

**Лемма 6.2.** *Рассмотрим уравнение* (6.2) *на* $[0, b)$ $(b\in(0,\infty])$. *Пусть существует плотное в $H$ множество $\Phi$ такое, что для любых $T\in(0, b)$ и $\varphi_0, \ldots, \varphi_{r-1}\in\Phi$ существует сильное решение задачи Коши*

$$\left(\frac{d^r\varphi}{dt^r}\right)(t)+(-1)^r B\varphi(t)=0\ (t\in[0, T]),\ \varphi(T)=\varphi_0, \ldots, \varphi^{(r-1)}(T)=\varphi_{r-1}. \tag{6.8}$$

*Тогда имеет место единственность сильных решений задачи Коши для* (6.2) *на* $[0, b)$.

Доказательство. Проведем его, например, для случая $r=2$. Просто проверяется следующая формула интегрирования по частям: пусть $[0, T]\ni t\mapsto\alpha(t),\ \beta(t)\in H$ — дважды сильно непрерывно дифференцируемые вектор-функции. Тогда

$$\int_0^T(\alpha''(t), \beta(t))_H\,dt=\int_0^T(\alpha(t), \beta''(t))_H\,dt+[(\alpha'(t), \beta(t))_H-(\alpha(t), \beta'(t))_H]_0^T. \tag{6.9}$$

Пусть $u(t)$ — сильное решение задачи Коши для уравнения (6.2) при $r=2$ на $[0, b)$ такое, что $u(0)=u'(0)=0$, а $\varphi(t)$ — сильное решение, о котором идет речь в формулировке леммы. При помощи (6.9) получаем

$$\int_0^T((u''(t), \varphi(t))_H-(u(t), \varphi''(t))_H)\,dt=(u'(T), \varphi_0)_H-(u(T), \varphi_1)_H. \tag{6.10}$$

Так как при каждом $s\in[0, T]$ $\varphi(s)\in\mathfrak{D}(B)$, то согласно равенству (6.3) с $f=\varphi(s)$ можно написать $(u''(t), \varphi(s))_H+(u(t), B\varphi(s))_H=0$ $(t\in[0, b))$. Полагая здесь $t=s$ и заменяя затем $s$ на $t$, получаем $(u''(t), \varphi(t))_H=-(u(t), B\varphi(t))_H (t\in[0, T])$. В силу (6.8) при $r=2$ имеем $(u(t), \varphi''(t))_H=-(u(t), B\varphi(t))_H$ $(t\in[0, T])$. Из этих двух равенств заключаем, что выражение в левой части (6.10) обращается в нуль, поэтому $(u'(T), \varphi_0)_H-(u(T), \varphi_1)_H=0$ $(\varphi_0, \varphi_1\in\Phi)$. Из плотности $\Phi$ в $H$ теперь заключаем, что $u(T)=u'(T)=0$. Так как $T\in(0, b)$ произвольно, то отсюда следует утверждение.



В случае $r=1$ рассуждения аналогичны, нужно только пользоваться формулой интегрирования по частям

$$\int_0^T(\alpha'(t), \beta(t))_H\,dt=-\int_0^T(\alpha(t), \beta'(t))_H\,dt+[(\alpha(t), \beta(t))_H]_0^T, \tag{6.11}$$

справедливой для один раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций $[0, T]\ni t\mapsto\alpha(t), \beta(t)\in H$. В случае общего $r$ нужно $r$ раз проитерировать формулу (6.11) (формула (6.10) — два раза проитерированное равенство (6.11)). ■

V. Перейдем к доказательству необходимости. Пусть $\tilde{A}$ самосопряжен и $E$ — его разложение единицы. Применим лемму 6.2, полагая $r=1$, $B=(iA)^*=-i\tilde{A}$ и $\Phi=\bigcup_{n=1}^{\infty}E((-n, n))H$. Сильное решение задачи Коши (6.8), сейчас имеющей вид $\varphi'(t)+i\tilde{A}\varphi(t)=0$ $(t\in[0, T])$, $\varphi(T)=\varphi_0$, существует и равно

$$\varphi(t)=\int_{\mathbb{R}^1}e^{-i\lambda(t-T)}dE(\lambda)\,\varphi_0 \qquad (t\in[0, T]) \tag{6.12}$$

(так как $\varphi_0\in\Phi$, то интеграл в (6.12) фактически распространен по конечному интервалу и поэтому функция $[0, T]\ni t\mapsto\varphi(t)$ один раз непрерывно дифференцируема; ясно, что она является решением требуемой задачи). Таким образом, в силу этой леммы для уравнения (6.4) со знаком «+» имеет место единственность на $[0, b)$. Аналогично рассматривается случай знака «—», теперь $B=-(iA)^*=i\tilde{A}$. ■

**Теорема 6.2.** *Пусть $A$ — эрмитов оператор, действующий в $H$. Для его существенной самосопряженности необходимо, чтобы для уравнения*

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)(t)+A^*u(t)=0 \qquad (t\in[0, b)) \tag{6.13}$$

*имела место единственность сильных решений задачи Коши на $[0, b)$ при любом $b\in(0,\infty]$, и достаточно, чтобы $A$ был полуограничен снизу и такая единственность сильных решений имела место при некотором $b>0$.*

Доказательство. Установим достаточность. Предположим, что $\tilde{A}$ не является самосопряженным. Тогда у $A$ существует два различных самосопряженных расширения $A_1$ и $A_2$ в $H$, ограниченных снизу числом $c>-\infty$. Пусть $E_1$, $E_2$ — соответствующие разложения единицы. Для любого $g\in\mathfrak{D}(A)\subseteq\mathfrak{D}(A_1)$ интеграл

$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \lambda^2 d\,(E_1(\lambda)\,g,\,g)_H$ сходится, поэтому вектор-функция

$$[0,\ \infty) \ni t \mapsto u_1(t) = \int\limits_c^\infty \cos(\sqrt{\lambda}\,t)\,dE_1(\lambda)\,g \qquad (6.14)$$

будет дважды сильно непрерывно дифференцируема. Подобно доказательству теоремы 6.1 легко убеждаемся, что она является сильным решением уравнения (6.13) на $[0, \infty)$ — для этого надо проверить выполнение соответствующего слабого равенства вида (6.3). Кроме того, $u_1(0) = g$, $u_1'(0) = 0$. Аналогично, заменяя в (6.14) $E_1$ на $E_2$, построим функцию $u_2(t)$. Разность $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ также будет сильным решением уравнения (6.13) на $[0, \infty)$ таким, что $u(0) = u'(0) = 0$. В силу предполагаемой единственности сильных решений задачи Коши $u(t) = 0$ при $t \geqslant 0$. Умножая это равенство скалярно на $h \in H$, получаем

$$\int\limits_c^\infty \cos(\sqrt{\lambda}\,t)\,d\,((E_1(\lambda) - E_2(\lambda))\,g,\ h)_H = 0 \qquad (t \in [0,\ \infty)).$$

Отсюда в силу единственности определения меры $d\omega(\lambda)$ по ее косинус-преобразованию Фурье — Стилтьеса заключаем, что $\omega(\lambda) = ((E_1(\lambda) - E_2(\lambda))g, h)_H = 0$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$. Благодаря произвольности $g \in \mathfrak{D}(A)$ и $h \in H$ заключаем, что $E_1(\lambda) = E_2(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$, что абсурдно.

Установим необходимость. Пусть $\tilde{A}$ самосопряжен и $E$ — его разложение единицы. Применим лемму 6.2, полагая $r = 2$, $B = A^* = \tilde{A}$ и $\Phi = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E((-n,\ n))\,H$. Сильное решение задачи Коши (6.8), сейчас имеющей вид $\varphi''(t) + \tilde{A}\varphi(t) = 0$ $(t \in [0,\ T])$, $\varphi(T) = \varphi_0$, $\varphi'(T) = \varphi_1$, существует и равно

$$\varphi(t) = \int\limits_c^\infty \cos(\sqrt{\lambda}\,(t - T))\,dE(\lambda)\,\varphi_0 + \int\limits_c^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}\,(t - T))\,dE(\lambda)\,\varphi_1 \qquad (6.15)$$
$$(t \in [0,\ T])$$

(как и в (6.12), интегрирование в (6.15) фактически распространяется по конечному интервалу). Поэтому согласно этой лемме имеет место единственность сильных решений задачи Коши для (6.13) на $[0, b)$ при каждом $b \in (0, \infty]$. ■

Отметим, что из доказательства необходимости в теоремах 6.1 и 6.2 видно, что существенная самосопряженность $A$ влечет единственность сильных решений задачи Коши для уравнения



$\left(\dfrac{d^r u}{dt^r}\right)(t) + z\tilde{A}u(t) = 0$ $(r = 1,\ 2,\ \ldots;\ z \in \mathbb{C}^1)$ на $[0, b)$ при любом $b \in (0, \infty]$.

Теорему 6.2 обычно удобно применять в простой комбинации с леммой 6.2. Сформулируем соответствующий результат в виде теоремы.

**Теорема 6.3.** *Пусть $A$ — эрмитов полуограниченный снизу оператор, действующий в $H$. Предположим, что существует плотное в $H$ линейное множество $\Phi \subseteq H$ такое, что для некоторого $b > 0$ задача Коши при любых $T \in (0, b)$ и $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$*

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)(t) + A\varphi(t) = 0 \qquad (t \in [0,\ T]),\ \varphi(T) = \varphi_0,\ \varphi'(T) = \varphi_1 \quad (6.16)$$

*имеет сильное решение. Тогда оператор $A$ существенно самосопряжен.*

Доказательство. Из условия теоремы благодаря лемме 6.2 вытекает, что имеет место единственность сильных решений задачи Коши на $[0, b)$ для уравнения (6.13). Но тогда согласно теореме 6.2 $\tilde{A}$ самосопряжен. ■

Разумеется, подобная теорема справедлива и для случая теоремы 6.1. Отметим также, что в лемме 6.2 и теореме 6.3 множество $\Phi$ может зависеть от $T$.

## 2. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Приведем три результата, расширяющие область применения теоремы 6.3 на неполуограниченные операторы $A$, на операторы, для которых задача Коши (6.16) плохо разрешима, и на степени оператора $A$.

**Теорема 6.4.** *Пусть $A$ — эрмитов действующий в $H$ оператор с равными дефектными числами. Предположим, что существует плотное в $H$ множество $\Phi$ такое, что задача Коши при любых $\varphi_0$, $\varphi_1 \in \Phi$*

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)(t) + A\varphi(t) = 0 \qquad (t \in [0,\ \infty)),\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \varphi'(0) = \varphi_1 \quad (6.17)$$

*имеет сильное решение. Кроме того, предположим, что при каждом фиксированном $\varphi_0 \in \Phi$ решение $\varphi(t)$ задачи Коши (6.17) с $\varphi_1 = 0$ таково, что*

$$(\varphi(t),\ \varphi_0)_H \underset{t \to \infty}{=} O(e^{Ct^2}) \qquad (6.18)$$

*с некоторым $C = C_{\varphi_0} \geqslant 0$. Тогда $A$ существенно самосопряжен.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условия теоремы следует существование сильного решения $\varphi(t)$ задачи Коши (6.16) при любом $T \in (0, \infty)$. В самом деле, если обозначить через

$\psi(t)$ сильное решение задачи (6.17), то $\varphi(t) = \psi(T - t)$ $(t \in [0, T])$ будет требуемым решением задачи (6.16).

Пусть $[0, \infty) \ni t \mapsto \varphi(t)$ — сильное решение задачи (6.17) такое, что $\varphi_1 = 0$. Справедливо представление

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^1} \cos(\sqrt{\lambda}\, t)\, dE_1(\lambda)\, \varphi_0 \qquad (t \in [0, \infty)), \tag{6.19}$$

где $E_1$ — разложение единицы, отвечающее любому самосопряженному расширению $A_1$ в $H$ оператора $A$. Действительно, зафиксируем $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ с компактным замыканием. Вектор-функция $[0, \infty) \ni t \mapsto \chi_1(t) = E_1(\Delta)\varphi(t)$ дважды сильно непрерывно дифференцируема, так как такова $\varphi(t)$, а оператор $E_1(\Delta)$ непрерывен. При этом $\chi_1''(t) = E_1(\Delta)\varphi''(t)$ $(t \in [0, \infty))$. Кроме того, для каждого $t \in [0, \infty)$ $\chi_1(t) = E_1(\Delta)\varphi(t) \in \mathfrak{D}(A_1) \subseteq \mathfrak{D}(A^*)$ и $A^*\chi_1(t) = A_1\chi_1(t) = A_1E_1(\Delta)\varphi(t) = E_1(\Delta)A_1\varphi(t) = E_1(\Delta)A\varphi(t)$. Учитывая эти соотношения, можем в силу (6.17) написать $\chi_1''(t) + A^*\chi_1(t) = E_1(\Delta)\varphi''(t) + E_1(\Delta)A\varphi(t) = E_1(\Delta)(\varphi''(t) + A\varphi(t)) = 0$ $(t \in [0, \infty))$; $\chi_1(0) = E_1(\Delta)\varphi(0) = E_1(\Delta)\varphi_0$, $\chi_1'(0) = E_1(\Delta)\varphi'(0) = E_1(\Delta)\varphi_1$. Таким образом, $\chi_1(t)$ является сильным решением задачи Коши

$$\chi''(t) + A^*\chi(t) = 0 \quad (t \in [0, \infty)),\ \chi(0) = E_1(\Delta)\varphi_0,\ \chi'(0) = 0.$$

Другим таким решением будет, очевидно, вектор-функция $[0, \infty) \ni t \mapsto \chi_2(t) = \int_{\Delta} \cos(\sqrt{\lambda t})\, dE_1(\lambda)\,\varphi_0$ (см. доказательство достаточности в теоремах 6.2 и 6.1). На основании леммы 6.2 эти решения должны совпадать, так как задача Коши (6.16), как уже пояснялось, имеет сильное решение. Итак,

$$E_1(\Delta)\varphi(t) = \int_{\Delta} \cos(\sqrt{\lambda}\, t)\, dE_1(\lambda)\,\varphi_0 \qquad (t \in [0, \infty)). \tag{6.20}$$

Положим в (6.20) $\Delta = (-n, n)$ и перейдем к пределу при $n \to \infty$. Для каждого $t$ в $H$ $E_1((-n, n))\varphi(t) \underset{n \to \infty}{\to} \varphi(t)$, поэтому существует сильный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \cos(\sqrt{\lambda t})\, dE_1(\lambda)\,\varphi_0$, равный по определению интегралу в правой части (6.19). Итак, (6.19) установлено.

Предположим, что $\tilde{A}$ несамосопряжен. Тогда у $A$ существуют в $H$ два различных самосопряженных расширения $A_1$ и $A_2$. Пусть $E_1$ и $E_2$ — соответствующие разложения единицы. По доказанному формула (6.19) сохраняется и для $E_1$ и для $E_2$. Поэтому благодаря (6.18) можно написать для каждого $t \in [0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{R}^1} \cos(\sqrt{\lambda}\, t)\, d(E_1(\lambda)\ \varphi_0, \varphi_0)_H = \int_{\mathbb{R}^1} \cos(\sqrt{\lambda}\, t)\, d(E_2(\lambda)\,\varphi_0,\ \varphi_0)_H = (\varphi(t),\ \varphi_0)_H \underset{t\to\infty}{=} O(e^{Ct^2}).$$



Отсюда, как известно (см. ниже), следует совпадение мер: $(E_1(\Delta)\varphi_0, \varphi_0)_H = (E_2(\Delta)\varphi_0, \varphi_0)_H$ $(\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1);\ \varphi_0 \in \Phi)$. Так как $\Phi$ плотно в $H$, то из последнего равенства заключаем, что $E_1 = E_2$, а это абсурдно. ■

Выше мы воспользовались следующим результатом, усиливающим теорему единственности восстановления меры по ее косинус-преобразованию Фурье — Стилтьеса: если $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto \omega(\lambda) \in \mathbb{C}^1$ — функция ограниченной вариации такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^1} \cos(\sqrt{\lambda}\, t)\, d\omega(\lambda) = 0\ (t \in \mathbb{R}^1),\ \int_{\mathbb{R}^1} \cos(\sqrt{\lambda}\, t)\,|\,d\omega(\lambda)\,| \underset{t\to\infty}{=} O(e^{Ct^2}) \tag{6.21}$$

при некотором $C \geqslant 0$, то $d\omega(\lambda) = 0$ (см., напр.: Березанский [3, гл. 8, теорема 3.18 и следствие]) (нам нужно было положить $\omega(\lambda) = (E_1(\lambda)\varphi_0, \varphi_0)_H - (E_2(\lambda)\varphi_0, \varphi_0)_H$). Этот результат может быть усилен (Вул [1], Чаус [1, 2, теорема 7]) в том отношении, что постоянная $C$ в (6.21) может быть заменена медленно растущей функцией $C(t)$, т. е. дважды непрерывно дифференцируемой функцией $(0, \infty) \ni t \mapsto C(t) > 0$ такой, что 1) $C'(t) \geqslant 0$ $(t \in (0, \infty))$, $\lim\limits_{t\to\infty} C(t) = \infty$; 2) при любом $\varepsilon > 0$ найдутся $t_\varepsilon$, $c_\varepsilon > 0$ такие, что для $t \geqslant t_\varepsilon$ $C(t) \leqslant c_\varepsilon t^\varepsilon$; 3) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} tC''(t)(C'(t))^{-1}$; 4) функция $tC'(t)(C(t))^{-1}$ невозрастающая при достаточно больших $t$; 5) выполняется условие $\int_1^\infty t^{-1}(C(t))^{-1}\, dt = \infty$. Из доказательства теоремы 6.4 видно, что она сохранится, если условие (6.18) заменить условием

$$(\varphi(t),\ \varphi_0)_H \underset{t\to\infty}{=} O(e^{C(t)t^2}), \tag{6.22}$$

где $C(t)$ — медленно растущая функция.

Приведенная теорема по существу обобщает теорему 6.3 на неполуограниченные операторы $A$. Следующее утверждение обобщает ее на случай, когда неясно существование сильного решения задачи Коши (6.16).

**Теорема 6.5.** *Пусть $A$ — эрмитов полуограниченный снизу оператор, действующий в $H$. Предположим, что существуют последовательность операторов $(A_n)_{n=1}^\infty$, действующих в $H$, с областями определения $\mathfrak{D}(A_n)$, плотное в $H$ множество $\Phi$ и $b > 0$, обладающие следующими свойствами: 1) для произвольных $T \in (0, b)$ и $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$ существуют последовательности $(\varphi_{0,n})_{n=1}^\infty$, $(\varphi_{1,n})_{n=1}^\infty$ векторов из $H$ такие, что при $n \to \infty$ в $H$ $\varphi_{0,n} \to \varphi_0$, $\varphi_{1,n} \to \varphi_1$, и сильные решения задач Коши*

$$\left(\frac{d^2\varphi_n}{dt^2}\right)(t) + A_n\varphi_n(t) = 0 \quad (t \in [0, T]),\ \varphi_n(T) = \varphi_{0,n},\ \varphi_n'(T) = \varphi_{1,n} \tag{6.23}$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

*причем* $\varphi_n(t) \in \mathfrak{D}(A)$ $(t \in [0, T])$; *2) для произвольных* $T \in (0, b)$ и $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$

$$\int_0^T (u(t), (A_n - A)\varphi_n(t))_H\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{6.24}$$

*где* $u(t)$ — *сильное решение уравнения* (6.13) *такое, что* $u(0) = u'(0) = 0$. *Тогда* $A$ *существенно самосопряжен.*

Доказательство. Согласно теореме 6.2 достаточно показать, что $u(t) = 0$ при $t \in (0, b)$. Пусть $T \in (0, b)$ и $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$. Построим соответствующие аппроксимирующие последовательности $(\varphi_{0,n})_{n=1}^\infty$ и $(\varphi_{1,n})_{n=1}^\infty$ и решения $\varphi_n(t)$. Из (6.9) следует

$$\int_0^T ((u''(t), \varphi_n(t))_H - (u(t), \varphi_n''(t))_H)\, dt = (u'(T), \varphi_{0,n})_H - (u(T), \varphi_{1,n})_H$$

$$(n = 1, 2, \ldots). \tag{6.25}$$

Так как $\varphi_n(t) \in \mathfrak{D}(A)$, то с помощью (6.3), как и при доказательстве леммы 6.2, получаем $(u''(t), \varphi_n(t))_H = -(u(t), A\varphi_n(t))_H$ $(t \in [0, T])$; благодаря (6.23) также имеем $(u(t), \varphi_n''(t))_H = -(u(t), A_n\varphi_n(t))_H$ $(t \in [0, T])$. Из этих двух соотношений следует, что левая часть равенства (6.25) равна левой части (6.24), поэтому $(u'(T), \varphi_0)_H - (u(T), \varphi_1)_H = \lim_{n\to\infty}[(u'(T), \varphi_{0,n})_H - (u(T), \varphi_{1,n})_H] = 0$. Ввиду произвольности $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$ и плотности $\Phi$ в $H$ отсюда заключаем, что $u(T) = 0$. ■

Замечание. *Предположим, что условия теоремы* 6.5 *выполнены, причем операторы* $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *самосопряжены, положительны, обратимы и существует последовательность* $(m_n)_{n=1}^\infty$ *натуральных чисел* $m_n$ *такая, что 1) сильные решения* $\varphi_n(t) \in \mathfrak{D}(A_n^{m_n+1})$ $(t \in [0, T];\ n = 1, 2, \ldots)$; *2) нормы* $\|A_n^{m_n}\varphi_n(T)\|_H$, $\|A_n^{m_n - \frac{1}{2}}\varphi_n'(T)\|_H$ *ограничены по* $n = 1, 2, \ldots$; *3)* $\mathfrak{R}(A_n^{-m_n}) \subseteq \mathfrak{D}(A_n - A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *и* $\|(A_n - A)A_n^{-m_n}\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. *Тогда условие* (6.24) *выполнено и, следовательно, оператор* $A$ *существенно самосопряжен.*

В самом деле, применяя к равенству (6.23) оператор $A_n^{m_n}$, заключаем, что функция $\psi_n(t) = A_n^{m_n}\varphi_n(t)$ удовлетворяет такому же уравнению (6.23) и начальным условиям $\psi_n(T) = A_n^{m_n}\varphi_n(T)$, $\psi_n'(T) = A_n^{m_n}\varphi_n'(T)$. Так как $A_n$ самосопряжен, то для $\psi_n(t)$ можно написать представление вида (6.15), из которого следует оценка $\|\psi_n(t)\|_H \leqslant \|\psi_n(T)\|_H + \|A_n^{-\frac{1}{2}}\psi_n'(T)\|_H$ $(t \in [0, T])$ (нужно cos и sin в интегралах (6.15) оценить по модулю сверху единицей). Поэтому в силу 2) $\|A_n^{m_n}\varphi_n(t)\|_H \leqslant c$ $(t \in [0, T];\ n = 1, 2, \ldots)$.



Теперь подынтегральное выражение в интеграле (6.24) можно записать в виде $(u(t), (A_n - A)A_n^{-m_n}A_n^{m_n}\varphi_n(t))_H$, откуда при помощи неравенства Коши — Буняковского оно оценивается по модулю сверху через $c \max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_H \|(A_n - A)A_n^{-m_n}\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. ■

Следующая теорема показывает, грубо говоря, что если при помощи теоремы 6.3 удается доказать существенную самосопряженность $A$, то автоматически оказывается доказанной и существенная самосопряженность любой его степени.

**Теорема 6.6.** *Пусть* $\mathfrak{D} \subseteq H$ — *плотное множество в гильбертовом пространстве* $H$, *на котором определен эрмитов полуограниченный снизу оператор* $A$ *такой, что* $A\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}$. *Предположим, что при некотором* $b > 0$ *для каждых* $T \in (0, b)$ *и* $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathfrak{D}$ *существует вектор-функция* $[0, T] \ni t \mapsto \varphi(t) \in \mathfrak{D}$ *такая, что 1) при каждом* $n = 0, 1, \ldots$ *вектор-функция* $[0, T] \ni t \mapsto A^n\varphi(t) \in H$ *дважды сильно непрерывно дифференцируема; 2) удовлетворяются следующее уравнение и начальные условия:*

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)(t) + A\varphi(t) = 0 \quad (t \in [0, T]),\ \varphi(T) = \varphi_0,\ \varphi'(T) = \varphi_1. \tag{6.26}$$

*При этих предположениях каждый оператор в* $H$ $\mathfrak{D} \ni f \mapsto A^n f$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *существенно самосопряжен.*

Доказательство. Пусть $A \geqslant c1$ $(c \in \mathbb{R}^1)$. Положим $B = A + a1$, где $a = -c + 1$. Очевидно, $B \geqslant 1$. Зафиксируем $m = 0, 1, \ldots$ и введем на $\mathfrak{D}$ скалярное произведение

$$(f, g)_{\mathfrak{H}_m} = (B^m f, B^m g)_H \qquad (f, g \in \mathfrak{D}). \tag{6.27}$$

Так как $\|Bf\|_H \geqslant \|f\|_H$, то и $\|B^m f\|_H \geqslant \|f\|_H$ $(f \in \mathfrak{D})$. Поэтому (6.27) действительно определяет скалярное произведение в $\mathfrak{D}$. Пусть $\mathfrak{H}_m$ — соответствующее пополнение $\mathfrak{D}$ $(\mathfrak{H}_0 = H)$. По $A$ построим оператор $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}_m$, беря $\mathfrak{D}$ в качестве его области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ и полагая $\mathfrak{A}f = Af$ $(f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{D})$. Этот оператор эрмитов в $\mathfrak{H}_m$ и полуограничен:

$$(\mathfrak{A}f, g)_{\mathfrak{H}_m} = (B^m Af, B^m g)_H = (B^m f, B^m Ag)_H = (f, \mathfrak{A}g)_{\mathfrak{H}_m}$$
$$(f, g \in \mathfrak{D}),$$
$$(\mathfrak{A}f, f)_{\mathfrak{H}_m} = (B^m Af, B^m f)_H = (AB^m f, B^m f)_H \geqslant c\|B^m f\|_H^2 = c\|f\|_{\mathfrak{H}_m}^2$$
$$(f \in \mathfrak{D}).$$

Он будет и существенно самосопряженным. Действительно, для этого согласно теореме 6.3 достаточно, чтобы в $\mathfrak{H}_m$ существовало плотное множество $\Phi$ такое, что для любых $T \in (0, b)$ и $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$ задача Коши

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)(t) + \mathfrak{A}\varphi(t) = 0 \quad (t \in [0, T]),\ \varphi(T) = \varphi_0,\ \varphi'(T) = \varphi_1 \tag{6.28}$$

имела сильное решение $[0, T] \ni t \mapsto \varphi(t) \in \mathfrak{H}_m$. Легко понять, что таким решением будет служить функция $\varphi(t)$, фигурирующая в условии теоремы. При этом $\Phi = \mathfrak{D}$. В самом деле, ее можно понимать как вектор-функцию $\varphi(t)$: $[0, T] \to \mathfrak{H}_m$, причем она будет дважды непрерывно сильно дифференцируемой (последнее вытекает из того, что $B^m\varphi(t) = A^m\varphi(t) + ma\,A^{m-1}\varphi(t) + \ldots + a^m\varphi(t) : [0, T] \to H$ дважды сильно непрерывно дифференцируема). При каждом $t \in [0, T]$ $\varphi(t) \in \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ и (6.28) удовлетворяется благодаря (6.26).

Итак, $\mathfrak{A}$ существенно самосопряжен, и поэтому для каждого $z \bar{\in} [c, \infty)$ область значений $\mathfrak{A} - z1$, т. е. $(A - z1)\mathfrak{D}$, плотна в $\mathfrak{H}_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$.

Зафиксируем $n = 1, 2, \ldots$ и невещественное число $z$ такое, что ни один из корней $z_1, \ldots, z_n$ $n$-й степени из этого числа не попадает на $[c, \infty)$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что $(A^n - z1)\mathfrak{D}$ плотно в $H$. Очевидно, при $f \in \mathfrak{D}$ справедливо разложение $(A^n - z1)f = \left(\prod_{j=1}^{n} (A - z_j1)\right) f$, поэтому для любых $f_0 \in H$ и $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{D}$ при помощи неравенства треугольника можно написать оценку

$$\|f_0 - (A^n - z1) f_n\|_H \leqslant \|f_0 - (A - z_1 1) f_1\|_H + \sum_{m=1}^{n-1} \left\| \left(\prod_{j=1}^{m} (A - z_j 1)\right) (f_m - (A - z_{m+1}1) f_{m+1}) \right\|_H. \qquad (6.29)$$

Для $\zeta \in \mathbb{C}^1$ и $g \in \mathfrak{D}$ имеем $\|(A - \zeta 1) g\|_H = \|(B - (\zeta + a)1) g\|_H \leqslant (1 + |\zeta + a|)\|Bg\|_H$. Итерируя эту оценку и используя коммутируемость $A$ и $B$ и (6.27), можем продолжить (6.29) следующим образом:

$$\|f_0 - (A^n - z1) f_n\|_H \leqslant \|f_0 - (A - z_1 1) f_1\|_H + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^{m} (1 + |z_j + a|)\right) \times \|B^m (f_m - (A - z_{m+1}1) f_{m+1})\|_H \leqslant c \sum_{m=0}^{n-1} \|f_m - (A - z_{m+1}1) f_{m+1}\|_{\mathfrak{H}_m}, \qquad (6.30)$$

где $c$ — константа, зависящая от $a$ и $z_j$.

Пусть $f_0 \in H$ и $\varepsilon > 0$ заданы. Благодаря плотности $(A - z1)\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{H}_0$ подберем такое $f_1 \in \mathfrak{D}$, чтобы $\|f_0 - (A - z_1 1) f_1\|_{\mathfrak{H}_0} < \varepsilon$. Затем благодаря плотности $(A - z_2 1)\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{H}_1$ подберем такое $f_2 \in \mathfrak{D}$, чтобы $\|f_1 - (A - z_2 1) f_2\|_{\mathfrak{H}_1} < \varepsilon$, и т. д.; $f_n \in \mathfrak{D}$ подбираем так, чтобы $\|f_{n-1} - (A - z_n 1) f_n\|_{\mathfrak{H}_{n-1}} < \varepsilon$. В результате из (6.30) следует оценка $\|f_0 - (A^n - z1) f_n\|_H < cn\varepsilon$, что и доказывает плотность $(A^n - z1)\mathfrak{D}$ в $H$. ■

В приложениях этой теоремы к дифференциальным операторам



$\mathfrak{D}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций, поэтому условие $A\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}$ влечет требование бесконечной дифференцируемости коэффициентов. Если интересоваться существенной самосопряженностью определенной $n$-й степени $A$, то его можно избежать. Для этого нужно несколько ослабить предположения теоремы (доказательство ее остается прежним). Пусть $A$ — эрмитов оператор в $H$ с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$. Положим

$$\mathfrak{D}(A^m) = \{f \in \mathfrak{D}(A) \mid Af \in \mathfrak{D}(A), \ \ldots, \ A^{m-1}f \in \mathfrak{D}(A)\},$$

оператор $A^m$ определяется естественным образом на $\mathfrak{D}(A^m)$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, $\mathfrak{D}(A) \supseteq \mathfrak{D}(A^2) \supseteq \ldots$ Пусть $n = 1, 2, \ldots$ фиксировано, $A$ — эрмитов полуограниченный снизу оператор в $H$ с областью определения $\mathfrak{D}(A)$, причем $\mathfrak{D}(A^n)$ плотно в $H$. Предположим, что при некотором $b > 0$ для каждых $T \in (0, b)$ и $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathfrak{D}(A^{n-1})$ существует вектор-функция $[0, T] \ni t \mapsto \varphi(t) \in \mathfrak{D}(A^n)$ такая, что 1) при каждом $m = 0, \ldots, n$ вектор-функция $[0, T] \ni t \mapsto A^m\varphi(t) \in H$ дважды сильно непрерывно дифференцируема; 2) выполняется условие 2) теоремы 6.6. Тогда ее утверждение сохраняется для $A^n$.

Отметим также, что теорема, аналогичная теореме 6.6, справедлива и для эволюционных уравнений первого порядка, т. е. в рамках применения теоремы 6.1.

## 3. СУЩЕСТВЕННАЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ И КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ

Предварительно напомним некоторые факты теории квазианалитических функций (см., напр.: Мандельбройт [1, гл. 4]).

Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ — конечный сегмент, $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ — фиксированная последовательность положительных чисел. Классом $C\{m_n\}$ называется линейная совокупность всех функций $f \in C^\infty([a, b])$, для каждой из которых справедливы оценки

$$|(D^n f)(t)| \leqslant K_f^n m_n \qquad (t \in [a, b]; \ n = 0, 1, \ldots), \qquad (6.31)$$

где $K_f$ — зависящая от $f$ константа.

Как известно, класс аналитических на $[a, b]$ функций $f(t)$ характеризуется оценками (6.31), в которых положено $m_n = n!$ Для этого класса $C\{n!\}$, очевидно, имеет место следующий факт. Если $f \in C\{n!\}$ такова, что в фиксированной точке $t_0 \in [a, b]$ $(D^n f)(t_0) = 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$, то $f(t) = 0$ при $t \in [a, b]$. С целью обобщения этой ситуации вводится следующее определение. Класс $C\{m_n\}$ называется квазианалитическим, если из того, что в некоторой фиксированной точке $t_0 \in [a, b]$ для $f \in C\{m_n\}$ справедливы равенства $(D^n f)(t_0) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, следует $f(t) = 0$ $(t \in [a, b])$.

Справедлива следующая теорема А. Данжуа — Т. Карлемана: класс $C\{m_n\}$ квазианалитический тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\inf_{k=n,n+1,\dots} m_k^{\frac{1}{k}}\Big)^{-1}=\infty. \qquad (6.32)$$

Пусть $H$ — некоторое гильбертово пространство, $A$ — эрмитов оператор в нем. Вектор $\varphi\in H$ называется квазианалитическим (относительно $A$), если $\varphi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{D}(A^n)$ и класс $C\{\|A^n\varphi\|_H\}$ квазианалитический.

**Лемма 6.3.** *Вектор $\varphi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{D}(A^n)$ квазианалитический тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|A^n\varphi\|_H^{-\frac{1}{n}}=\infty. \qquad (6.33)$$

Доказательство. Ясно, что $C\{\|A^n\varphi\|_H\}=C\{\|A^n(\lambda\varphi)\|_H\}$, где $\lambda>0$ фиксировано. Отсюда следует, что лемму достаточно проверить для вектора $\varphi$, норма которого $\|\varphi\|_H=1$. Для такого вектора последовательность

$$\big(\|A^n\varphi\|_H^{\frac{1}{n}}\big)_{n=1}^{\infty} \qquad (6.34)$$

неубывающая. Действительно, $\|A\varphi\|_H^2=(A\varphi, A\varphi)_H=(A^2\varphi,\varphi)_H\leqslant\|A^2\varphi\|_H\|\varphi\|_H$, т. е. $\|A\varphi\|_H\leqslant\|A^2\varphi\|_H^{\frac{1}{2}}$. Пусть уже доказано неравенство $\|A^n\varphi\|_H^{\frac{1}{n}}\leqslant\|A^{n+1}\varphi\|_H^{\frac{1}{n+1}}$. Докажем, что и $\|A^{n+1}\varphi\|_H^{\frac{1}{n+1}}\leqslant\|A^{n+2}\varphi\|_H^{\frac{1}{n+2}}$ $(n=1, 2, \dots)$. С учетом предполагаемого неравенства

$$\|A^{n+1}\varphi\|_H^2=(A^{n+1}\varphi, A^{n+1}\varphi)_H=(A^{n+2}\varphi, A^n\varphi)_H\leqslant$$
$$\leqslant\|A^{n+2}\varphi\|_H\|A^n\varphi\|_H\leqslant\|A^{n+2}\varphi\|_H\|A^{n+1}\varphi\|_H^{\frac{n}{n+1}}.$$

Отсюда $\|A^{n+1}\varphi\|_H^{\frac{n+2}{n+1}}\leqslant\|A^{n+2}\varphi\|_H$, что и требовалось доказать. Итак, последовательность (6.34) неубывающая.

Применим к классу $C\{\|A^n\varphi\|_H\}$ $(\|\varphi\|_H=1)$ критерий А. Данжуа — Т. Карлемана. Так как последовательность (6.34) неубывающая, то $\inf_{k=n,n+1,\dots}\|A^k\varphi\|_H^{\frac{1}{k}}=\|A^n\varphi\|_H^{\frac{1}{n}}$. Поэтому условие (6.32) квазианалитичности этого класса, т. е. квазианалитичности вектора $\varphi$, перепишется в виде (6.33). ■



**Теорема 6.7.** *Пусть $A$ — замкнутый эрмитов оператор, действующий в $H$. Он самосопряжен тогда и только тогда, когда в $H$ существует тотальное множество, состоящее из квазианалитических векторов.*

Доказательство. В одну сторону утверждение тривиально: пусть $A$ — самосопряжен, тогда достаточно доказать квазианалитичность каждого вектора $\varphi$ вида $\varphi=E((a, b))f$, где $E$ — разложение единицы, отвечающее $A$, $a, b\in\mathbb{R}^1$ $(a<b)$, $f\in H$. Очевидно, $\varphi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{D}(A^n)$. Далее имеем

$$\|A^n\varphi\|_H^2=\int_a^b\lambda^{2n}d(E(\lambda)f, f)_H\leqslant c^{2n}\|f\|_H^2$$
$$(c=\max(|a|, |b|);\quad n=1, 2, \dots),$$

поэтому ряд (6.33) расходится и согласно лемме 6.3 вектор $\varphi$ квазианалитический.

Предположим теперь, что у $A$ существует тотальное множество $M$ квазианалитических векторов $\varphi$. Так как $A$ замкнут, то достаточно доказать его существенную самосопряженность или согласно теореме 6.1 единственность сильных решений задачи Коши для уравнений (6.4) при $b=\infty$. Пусть $u(t)$ — сильное решение задачи

$$\Big(\frac{du}{dt}\Big)(t)-(\zeta A)^*u(t)=0\qquad(t\in[0, \infty),\ u(0)=0), \qquad (6.35)$$

где $\zeta=\pm i$. Достаточно установить, что для любого $T>0$ $u(t)=0$ для $t\in[0, T]$.

«Слабое» равенство (6.3) для (6.35) с квазианалитическим вектором $f=\varphi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{D}(A^n)$ дает

$$\frac{d}{dt}(u(t), \varphi)_H=\Big(\Big(\frac{du}{dt}\Big)(t), \varphi\Big)_H=(u(t), (\zeta A)\varphi)_H\qquad(t\in[0, T]).$$

Но $(\zeta A)\varphi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{D}(A^n)$, поэтому

$$\frac{d}{dt}(u(t), (\zeta A)\varphi)_H=(u(t), (\zeta A)^2\varphi)_H\qquad(t\in[0, T])$$

и т. д. Отсюда следует, что $(u(t), \varphi)_H\in C^{\infty}([0, T])$ и

$$D^n(u(t), \varphi)_H=D^{n-1}(u(t), (\zeta A)\varphi)_H=\cdots=(u(t), (\zeta A)^n\varphi)_H \qquad (6.36)$$
$$(t\in[0, T];\ n=0, 1, \dots).$$

Так как значения $u(t)$ на $[0, T]$ ограничены, то из (6.36) заключаем, что

$$|D^n(u(t), \varphi)_H|\leqslant c\|(\zeta A)^n\varphi\|_H=c\|A^n\varphi\|_H\qquad(t\in[0, T];\ n=0, 1, \dots),$$

т. е. скалярная функция $[0, T] \ni t \mapsto f(t) = (u(t), \varphi)_H$ принадлежит классу $C\{\|A^n\varphi\|_H\}$. Из (6.36) и равенства $u(0) = 0$ следует, что $(D^n f)(0) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, поэтому вследствие квазианалитичности $C\{\|A^n\varphi\|_H\}$ справедливо равенство $(u(t), \varphi)_H = f(t) = 0$ $(t \in [0, T])$. Так как множество $M$ векторов $\varphi$ тотальное, то $u(t) = 0$ $(t \in [0, T])$. ■

Полезно также следующее определение. Пусть по-прежнему $A$ — эрмитов оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H$. Вектор $\varphi \in H$ называется аналитическим (относительно $A$), если $\varphi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$ и степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\varphi\|_H}{n!} z^n \tag{6.37}$$

имеет отличный от нуля радиус сходимости, и целым, если этот радиус равен бесконечности. Разумеется, всякий аналитический вектор будет и квазианалитическим, но не наоборот. Отметим, что при доказательстве первой части теоремы 6.7 мы установили следующий более сильный факт: *если $A$ самосопряжен, то у него существует тотальное множество целых векторов* (каждый рассмотренный в этом доказательстве вектор $\varphi = E(a, b)) f$ удовлетворяет оценке $\|A^n\varphi\|_H \leqslant c^n \|f\|_H$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и поэтому будет целым).

Установим еще одну теорему, уточняющую теорему 6.7 для полуограниченных снизу операторов.

Пусть $A$ — эрмитов оператор, действующий в $H$. Вектор $\varphi \in H$ называется стилтьесовским (относительно $A$), если $\varphi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$ и класс $C\{\|A^n\varphi\|_H^{\frac{1}{2}}\}$ квазианалитический, или, иными словами,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A^n\varphi\|_H^{-\frac{1}{2n}} = \infty \tag{6.38}$$

(эквивалентность стилтьесовости условию (6.38) вытекает из того, что последовательность $(\|A^n\varphi\|_H^{\frac{1}{2n}})_{n=1}^{\infty}$ при $\|\varphi\|_H = 1$ неубывающая вместе с (6.34); затем нужно применить критерий А. Данжуа — Т. Карлемана).

Ясно, что каждый квазианалитический вектор —стилтьесовский, но не наоборот. Таким образом, если обозначить множества всех целых, аналитических, квазианалитических и стилтьесовских векторов относительно оператора $A$ соответственно через $\mathscr{E}(A)$, $\mathscr{A}(A)$, $\mathscr{O}(A)$ и $\mathfrak{S}(A)$, то получим включения

$$\mathscr{E}(A) \subseteq \mathscr{A}(A) \subseteq \mathscr{O}(A) \subseteq \mathfrak{S}(A). \tag{6.39}$$



**Теорема 6.8.** *Пусть $A$ — замкнутый эрмитов полуограниченный снизу оператор. Если в $H$ существует тотальное множество, состоящее из стилтьесовских векторов, то $A$ самосопряжен.*

Обратное утверждение очевидно в силу уже доказанного и (6.39).

Доказательство. Согласно теореме 6.2 достаточно доказать единственность сильных решений задачи Коши для уравнения (6.13) при $b = \infty$. Пусть $u(t)$ — сильное решение этой задачи такое, что $u(0) = u'(0) = 0$. Покажем, что для любого $T > 0$ $u(t) = 0$ $(t \in [0, T])$. Пусть $M$ — тотальное множество стилтьесовских векторов $\varphi$, фигурирующее в условии теоремы. Положим $[0, T] \ni t \mapsto f(t) = (u(t), \varphi)_H$, где $\varphi \in M$. Из соотношения (6.3), записанного для (6.13), вытекает, что $f \in C^2([0, T])$ и $\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)(t) = -(u(t), A\varphi)_H$ $(t \in [0, T])$. Так как $A\varphi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$, то таким же образом заключаем, что $(u(t), A\varphi)_H \in C^2([0, T])$ и $\frac{d^2}{dt^2}(u(t), A\varphi)_H = -(u(t), A^2\varphi)_H$ $(t \in [0, T])$, и т. д. В результате получим, что $f \in C^\infty([0, T])$ и

$$(D^{2k} f)(t) = D^{2k}(u(t), \varphi)_H = -D^{2(k-1)}(u(t), A\varphi)_H = \cdots$$
$$\cdots = (-1)^k (u(t), A^k\varphi)_H \quad (t \in [0, T];\ k = 0, 1, \ldots). \tag{6.40}$$

Аналогичное равенство можно написать и для нечетных производных. Действительно, дифференцируя (6.40), получаем

$$(D^{2k+1} f)(t) = (-1)^k (u'(t), A^k\varphi)_H \quad (t \in [0, T];\ k = 0, 1, \ldots). \tag{6.41}$$

Значения $u(t)$ и $u'(t)$ на $[0, T]$ ограничены, поэтому из (6.40), (6.41), эрмитовости $A$ и неравенства Коши — Буняковского следует, что

$$|(D^{2k} f)(t)|,\ |(D^{2k+1} f)(t)| \leqslant c\|A^k\varphi\|_H \leqslant c\|\varphi\|_H^{\frac{1}{2}} \|A^{2k}\varphi\|_H^{\frac{1}{2}}$$
$$(t \in [0, T];\quad k = 0, 1, \ldots),$$

т. е. $f \in C\{m_n\}$, где $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ — последовательность чисел $(\|\varphi\|_H^{\frac{1}{2}}, \|\varphi\|_H^{\frac{1}{2}}, \|A\varphi\|_H^{\frac{1}{2}}, \|A\varphi\|_H^{\frac{1}{2}}, \|A^2\varphi\|_H^{\frac{1}{2}}, \|A^2\varphi\|_H^{\frac{1}{2}}, \ldots)$. Класс $C\{m_n\}$ не изменится, если мы нормируем $\varphi$. Но тогда, как уже говорилось, последовательность $(\|A^n\varphi\|_H^{\frac{1}{2n}})_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая. Отсюда следует, что условие А. Данжуа — Т. Карлемана (6.32) для рассматриваемой последовательности может быть записано в виде (6.38). Таким образом, класс $C\{m_n\}$ квазианалитический.

С другой стороны, соотношения (6.40) и (6.41) и условия $u(0) = u'(0) = 0$ дают, что $(D^n f)(0) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Поэтому $(u(t), \varphi)_H = f(t) = 0$ $(t \in [0, T])$. Из тотальности $M$ заключаем, что $u(t) = 0$ $(t \in [0, T])$. ■

## 4. ПРОВЕРКА КОММУТИРУЕМОСТИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть в гильбертовом пространстве $H$ действуют существенно самосопряженные, вообще говоря, неограниченные операторы $A_1$ и $A_2$. Напомним, что они называются коммутирующими, если $E_1(\Delta_1) E_2(\Delta_2) E_2(\Delta_2) E_1(\Delta_1)$ для любых $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, где $E_1, E_2$ — разложения единицы операторов $A_1, A_2$ соответственно. Проверка такой коммутируемости часто вызывает серьезные трудности. Приведем некоторые факты, облегчающие эту проверку. Прежде всего установим следующую известную лемму.

**Лемма 6.4.** *Пусть $A_1$ и $A_2$ — два самосопряженных оператора. Для того чтобы они коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы коммутировали их резольвенты $R_{z_1}(A_1)$ и $R_{z_2}(A_2)$ при некоторых фиксированных $z_1, z_2$.*

Доказательство. Если $A_1, A_2$ коммутируют, то коммутируемость их резольвент вытекает из представления $R_{z_j}(A_j) = \int\limits_{\mathbb{R}_1} (\lambda - z_j)^{-1} dE_j(\lambda)$ $(j = 1, 2)$. Обратно, пусть $R_{z_1}(A_1), R_{z_2}(A_2)$ коммутируют. Докажем сперва, что коммутируют $R_{\zeta_1}(A_1), R_{\zeta_2}(A_2)$ при любых невещественных $\zeta_1, \zeta_2$. В самом деле, пусть $B$ — некоторый оператор, действующий в $H$, $z, \zeta \in \mathbb{C}^1$ — две его регулярные точки. Тогда оператор $(1 - (z - \zeta) R_\zeta(B))^{-1}$ существует и равен $1 + (z - \zeta) R_z(B)$ — в этом убеждаемся простой проверкой с использованием тождества Гильберта. При помощи этого тождества и установленного сейчас факта имеем $R_{\zeta_1}(A_1) - R_{z_1}(A_1) = (\zeta_1 - z_1) R_{\zeta_1}(A_1) R_{z_1}(A_1)$, $R_{\zeta_1}(A_1)(1 - (\zeta_1 - z_1) R_{z_1}(A_1)) = R_{z_1}(A_1)$, $R_{\zeta_1}(A_1) = (1 - (\zeta_1 - z_1) R_{z_1}(A_1))^{-1} R_{z_1}(A_1)$. Из последнего равенства и коммутируемости $R_{z_1}(A_1)$ и $R_{z_2}(A_2)$ следует, что $R_{\zeta_1}(A_1)$ и $R_{z_2}(A_2)$ также коммутируют. Аналогичным образом отсюда вытекает, что и $R_{\zeta_1}(A_1)$ и $R_{\zeta_2}(A_2)$ коммутируют.

Теперь воспользуемся хорошо известной формулой: для конечных интервалов $\Delta_1, \Delta_2$ в смысле слабой сходимости

$$E_j(\Delta_j) = \lim_{\varepsilon_j \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta_j + i\varepsilon_j} (R_{\zeta_j}(A_j) - R_{\bar\zeta_j}(A_j))\, d\zeta_j \qquad (j = 1, 2). \quad (6.42)$$

В силу доказанного интегралы в (6.42) при $j = 1$ и $j = 2$ коммутируют. Но тогда коммутируют и их слабые пределы $E_1(\Delta_1)$ и $E_2(\Delta_2)$, т. е. имеет место коммутируемость $A_1$ и $A_2$. ■



Полезно следующее простое утверждение, дающее достаточное условие коммутируемости в терминах квазианалитических векторов.

**Теорема 6.9.** *Пусть $A_1, A_2$ — два эрмитовых оператора с областями определения $\mathfrak{D}(A_1), \mathfrak{D}(A_2)$, действующих в $H$; линейное множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}(A_1) \cap \mathfrak{D}(A_2)$. Предположим, что они на $\mathfrak{D}$ коммутируют, т. е. $A_1 \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}(A_2)$, $A_2 \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}(A_1)$ и $A_1 A_2 f = A_2 A_1 f$ $(f \in \mathfrak{D})$.*

*Пусть дополнительно у $A_1, A_2$ и сужения $A_1 \restriction ((A_2 - z1)\mathfrak{D})$ при некотором невещественном $z$ существуют тотальные множества квазианалитических векторов. Тогда замыкания $\tilde A_1$ и $\tilde A_2$ самосопряжены и коммутируют.*

Доказательство. Согласно теореме 6.7 операторы $\tilde A_1$ и $\tilde A_2$ самосопряжены. Пусть $R_\zeta(\tilde A_1)$ и $R_\zeta(\tilde A_2)$ — их резольвенты. В силу леммы 6.4 для доказательства коммутируемости $\tilde A_1$ и $\tilde A_2$ достаточно проверить коммутируемость $R_z(\tilde A_1)$ и $R_z(\tilde A_2)$. Для $f \in \mathfrak{D}$ в силу коммутируемости $A_1$ и $A_2$ имеем

$$R_z(\tilde A_1) R_z(\tilde A_2)(A_1 - z1)(A_2 - z1) f = R_z(\tilde A_1) R_z(\tilde A_2)(A_2 - z1) \times$$
$$\times (A_1 - z1) f = f = R_z(\tilde A_2) R_z(\tilde A_1)(A_1 - z1)(A_2 - z1) f.$$

Поэтому для коммутируемости $R_z(\tilde A_1)$ и $R_z(\tilde A_2)$ достаточно убедиться, что $(A_1 - z1)(A_2 - z1)\mathfrak{D}$ плотно в $H$. Но это множество совпадает с областью значений $\mathfrak{R}(A_1 \restriction ((A_2 - z1)\mathfrak{D}) - z1)$, а оператор $A_1 \restriction ((A_2 - z1)\mathfrak{D})$ в силу той же теоремы 6.7 существенно самосопряжен, поэтому указанная область значений плотна в $H$. ■

Остановимся на одной часто возникающей ситуации, когда требуется проверка коммутируемости самосопряженных операторов. Пусть $H_1, H_2$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Образуем их тензорное произведение $\mathcal{H} = H_1 \otimes H_2$ и рассмотрим в $\mathcal{H}$ квазискалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такое, что при некотором $c > 0$

$$\langle\langle f \rangle\rangle = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} \leqslant c \|f\|_{\mathcal{H}} \qquad (f \in \mathcal{H}). \quad (6.43)$$

С помощью $\langle \cdot, \cdot \rangle$ стандартным образом посредством отождествления и пополнения образуем по $\mathcal{H}$ гильбертово пространство $\hat{\mathcal{H}}$.

Пусть в $H_j$ задан оператор $A_j$ с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A_j)$ $(j = 1, 2)$. По $A_1$ и $A_2$ построим операторы в $\mathcal{H}$ с плотными областями определения, полагая $\mathcal{A}_1 = A_1 \otimes 1$, $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_1) = \text{a.}(\mathfrak{D}(A_1) \otimes H_2)$ и $\mathcal{A}_2 = 1 \otimes A_2$, $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_2) = \text{a.}(H_1 \otimes \mathfrak{D}(A_2))$. Ясно, что на $\mathfrak{D} = \text{a.}(\mathfrak{D}(A_1) \otimes \mathfrak{D}(A_2)) \subseteq \mathfrak{D}(\mathcal{A}_1) \cap \mathfrak{D}(\mathcal{A}_2)$ эти операторы коммутируют: $\mathcal{A}_1 \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}(\mathcal{A}_2)$, $\mathcal{A}_2 \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}(\mathcal{A}_1)$ и $\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 f = \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 f$ $(f \in \mathfrak{D})$.

Предположим, что для $j = 1, 2$ оператор $\mathcal{A}_j$ — эрмитов относительно $\langle \cdot , \cdot \rangle : \langle \mathcal{A}_j f, g \rangle = \langle f, \mathcal{A}_j g \rangle$ $(f, g \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_j))$. Тогда отображение $\mathcal{H} \supseteq \mathfrak{D}(\mathcal{A}_j) \ni f \mapsto \mathcal{A}_j f \in \mathcal{H}$ порождает естественным образом оператор $\hat{\mathcal{A}}_j$ в $\hat{\mathcal{H}}$, так как из того, что $\langle f, f \rangle = 0$, следует, что и $\langle \mathcal{A}_j f, \mathcal{A}_j f \rangle = 0$ $(f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_j))$. Убедимся в последнем факте. Для произвольного $g \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_j)$ имеем $|\langle \mathcal{A}_j f, g \rangle|^2 = |\langle f, \mathcal{A}_j g \rangle|^2 \leqslant \langle f, f \rangle \langle \mathcal{A}_j g, \mathcal{A}_j g \rangle = 0$, откуда $\langle \mathcal{A}_j f, g \rangle = 0$. Благодаря плотности $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_j)$ в $\mathcal{H}$ аппроксимируем в $\mathcal{H}$ вектор $\mathcal{A}_j f$ векторами $g_n \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_j)$. Тогда в силу (6.43) $\langle \mathcal{A}_j f, \mathcal{A}_j f \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{A}_j f, g_n \rangle = 0$.

Итак, если обозначать через $\hat{f}, \hat{g}, \ldots$ классы, содержащие элементы $f, g, \ldots$ из $\mathcal{H}$ при факторизации по $\{h \in \mathcal{H} \mid \langle h, h \rangle = 0\}$, то $\hat{\mathcal{A}}_j \hat{f} = (\mathcal{A}_j f)^\wedge$, $\mathfrak{D}(\hat{\mathcal{A}}_j) = (\mathfrak{D}(\mathcal{A}_j))^\wedge$. Ясно, что операторы $\hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2$ эрмитовы и коммутируют на $\hat{\mathfrak{D}} \subseteq \mathfrak{D}(\hat{\mathcal{A}}_1) \cap \mathfrak{D}(\hat{\mathcal{A}}_2) : \hat{\mathcal{A}}_1 \hat{\mathfrak{D}} \subseteq \mathfrak{D}(\hat{\mathcal{A}}_2)$, $\hat{\mathcal{A}}_2 \hat{\mathfrak{D}} \subseteq \mathfrak{D}(\hat{\mathcal{A}}_1)$ и $\hat{\mathcal{A}}_1 \hat{\mathcal{A}}_2 f = \hat{\mathcal{A}}_2 \hat{\mathcal{A}}_1 f$ $(f \in \hat{\mathfrak{D}})$. Задача заключается в выяснении условий, при которых можно утверждать, что операторы $\hat{\mathcal{A}}_1$ и $\hat{\mathcal{A}}_2$ существенно самосопряжены и коммутируют. Конечно, в некоторых случаях применима теорема 6.9, тем не менее мы установим еще два результата.

Для формулировки первого из них приведем еще одну дополнительную конструкцию. Зафиксируем $f_2 \in H_2$ и рассмотрим в $H_1$ квазискалярное произведение $\langle f_1, g_1 \rangle_{f_2} = \langle f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes f_2 \rangle$ $(f_1, g_1 \in H_1)$. После отождествления и пополнения по $\langle \cdot , \cdot \rangle_{f_2}$ образуем гильбертово пространство $\hat{H}_{1,f_2}$. Оператор $A_1$ эрмитов относительно $\langle \cdot , \cdot \rangle_{f_2}$:

$$\langle A_1 f_1, g_1 \rangle_{f_2} = \langle (A_1 f_1) \otimes f_2, g_1 \otimes f_2 \rangle = \langle \mathcal{A}_1 (f_1 \otimes f_2), g_1 \otimes f_2 \rangle =$$
$$= \langle f_1 \otimes f_2, \mathcal{A}_1 (g_1 \otimes f_2) \rangle = \langle f_1, A_1 g_1 \rangle_{f_2} \quad (f_1, g_1 \in \mathfrak{D}(A_1)).$$

Поэтому аналогично предыдущему он порождает эрмитов оператор $\hat{A}_{1,f_2}$ в пространстве $\hat{H}_{1,f_2}$. Подобным образом зафиксировав $f_1 \in H_1$, построим пространство $\hat{H}_{2,f_1}$ и эрмитов оператор $\hat{A}_{2,f_1}$, действующий в нем.

**Теорема 6.10.** *Пусть при $f_1, f_2$, пробегающих плотные множества $M_1, M_2$ в пространствах $H_1, H_2$ соответственно, операторы $\hat{A}_{1,f_2}$, $\hat{A}_{2,f_1}$ существенно самосопряжены. Тогда и операторы $\hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2$ существенно самосопряжены. Они коммутируют, если при некотором невещественном $z$ каждый оператор $\hat{A}_{1,h_2}$ существенно самосопряжен при $h_2 \in (A_2 - zI)\,\mathfrak{D}$ и $\operatorname{Ker}(A_j - zI) = \{g_j \in \mathfrak{D}(A_j) \mid (A_j - zI)\, g_j = 0\} = 0$.*

Доказательство. Установим существенную самосопряженность $\hat{\mathcal{A}}_1$. Пусть $f_1 \in H_1$, $f_2 \in M_2$. Достаточно убедиться, что при фиксированных $\varepsilon > 0$ и невещественном $z$ можно подобрать $g_j \in \mathfrak{D}(A_1)$ такое, что $\|(f_1 \otimes f_2)^\wedge - (\hat{\mathcal{A}}_1 - zI)(g_1 \otimes f_2)^\wedge\|_{\hat{\mathcal{H}}} < \varepsilon$. Но эта норма равна

$$\langle\langle f_1 \otimes f_2 - (\mathcal{A}_1 - zI)(g_1 \otimes f_2)\rangle\rangle = \langle\langle (f_1 - (A_1 - zI) g_1) \otimes f_2 \rangle\rangle =$$
$$= \|\hat{f}_1 - (\hat{A}_{1,f_2} - zI)\,\hat{g}_1\|_{\hat{H}_{1,f_2}}, \tag{6.44}$$

где $\hat{f}_1, \hat{g}_1$ — классы, фигурирующие при построении пространства $\hat{H}_{1,f_2}$ и содержащие $f_1, g_1$ соответственно. Правая часть (6.44) может быть сделана путем выбора $g_1 \in \mathfrak{D}(A_1)$ сколь угодно малой благодаря существенной самосопряженности $\hat{A}_{1,f_2}$. Утверждение доказано. Аналогично доказывается существенная самосопряженность $\hat{\mathcal{A}}_2$.

Докажем коммутируемость $\hat{\mathcal{A}}_1$ и $\hat{\mathcal{A}}_2$. Сперва установим плотность векторов $(((A_1 - zI)g_1) \otimes ((A_2 - zI)g_2))^\wedge$ $(g_1 \in \mathfrak{D}(A_1)$, $g_2 \in \mathfrak{D}(A_2))$ в $\hat{\mathcal{H}}$. Пусть $f_1 \in M_1$, $f_2 \in H_2$. В понятных обозначениях

$$\|(f_1 \otimes f_2)^\wedge - (((A_1 - zI)\, g_1) \otimes ((A_2 - zI)\, g_2))^\wedge\|_{\hat{\mathcal{H}}} =$$
$$= \langle\langle f_1 \otimes f_2 - ((A_1 - zI)\, g_1) \otimes ((A_2 - zI)\, g_2)\rangle\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \langle\langle f_1 \otimes (f_2 - (A_2 - zI)\, g_2)\rangle\rangle + \langle\langle (f_1 - (A_1 - zI)\, g_1) \otimes$$
$$\otimes (A_2 - zI)\, g_2 \rangle\rangle = \|\hat{f}_2 - (\hat{A}_{2,f_1} - zI)\,\hat{g}_2\|_{\hat{H}_{2,f_1}} +$$
$$+ \|\hat{f}_1 - (\hat{A}_{1,(A_2 - zI)g_2} - zI)\,\hat{g}_1\|_{\hat{H}_{1,(A_2 - zI)g_2}}. \tag{6.45}$$

В силу существенной самосопряженности $\hat{A}_{2,f_1}$ первое слагаемое может быть сделано выбором $g_2 \in \mathfrak{D}(A_2)$ сколь угодно малым. То же справедливо для второго слагаемого вследствие существенной самосопряженности $\hat{A}_{1,(A_2 - zI)g_2}$. Требуемая плотность установлена.

Так как $\operatorname{Ker}(A_1 - zI) = 0$, то в $H_1$ существует алгебраически обратный оператор $(A_1 - zI)^{-1}$. Но тогда в $\mathcal{H}$ существует и алгебраически обратный оператор $(\mathcal{A}_1 - zI)^{-1} = (A_1 - zI)^{-1} \otimes 1$. Действие резольвенты $R_z(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_1)$ на векторе $(f_1 \otimes f_2)^\wedge$ $(f_1 \in H_1$, $f_2 \in H_2)$, очевидно, равно $((\mathcal{A}_1 - zI)^{-1}(f_1 \otimes f_2))^\wedge$. Аналогичная картина будет и с оператором $A_2$. Поэтому при $g_1 \in \mathfrak{D}(A_1)$, $g_2 \in \mathfrak{D}(A_2)$ имеем

$$R_z(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_2)\, R_z(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_1)\, (((A_1 - zI)\, g_1) \otimes ((A_2 - zI)\, g_2))^\wedge =$$
$$= R_z(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_2)\, (((A_1 - zI)^{-1} \otimes 1)((A_1 - zI)\, g_1) \otimes ((A_2 - zI)\, g_2)))^\wedge =$$

$$= R_z(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_2)(g_1 \otimes ((A_2 - z1)g_2))^\wedge = ((1 \otimes (A_2 - z1)^{-1})(g_1 \otimes \otimes ((A_2 - z1)g_2))^\wedge = (g_1 \otimes g_2)^\wedge =$$

$$= R_z(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_1) R_z(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_2)(((A_1 - z1)g_1) \otimes ((A_2 - z1)g_2))^\wedge. \qquad (6.46)$$

В силу плотности векторов $(((A_1 - z1)g_1) \otimes (A_2 - z1)g_2))^\wedge$ в $\hat{\mathcal{H}}$ соотношение (6.46) означает коммутируемость $R_z(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_1)$ и $R_z(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_2)$. Осталось применить лемму 6.4. ■

Следующая теорема тесно связана с теоремой 6.1.

**Теорема 6.11.** *Предположим, что имеет место единственность сильных решений уравнений в* $H_j$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)(t) \pm (iA_j^*)u(t) = 0 \qquad (t \in [0, b_j)) \qquad (6.47)$$

*при некотором* $b_j \in (0, \infty]$. *Тогда оператор* $\hat{\mathcal{A}}_j$ *существенно самосопряжен* ($j = 1, 2$). *Если дополнительно при некоторых невещественных* $z_j$ $\operatorname{Ker}(A_j - z_j1) = 0$ ($j = 1, 2$), *то* $\hat{\mathcal{A}}_1$ *и* $\hat{\mathcal{A}}_2$ *коммутируют.*

Доказательство. Установим самосопряженность $\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_1$; самосопряженность $\hat{\mathcal{A}}_2$ доказывается аналогично. Предварительно заметим, что при каждом фиксированном $f_2 \in H_2$ существует непрерывный оператор $\hat{\mathcal{H}} \ni w \mapsto T_{f_2}w \in H_1$ такой, что

$$\langle w, (f_1 \otimes f_2)^\wedge \rangle = (T_{f_2}w, f_1)_{H_1} \quad (w \in \hat{\mathcal{H}}, \ f_1 \in H_1). \qquad (6.48)$$

В самом деле, выражение слева в (6.48) представляет собой билинейную форму относительно $w \in \hat{\mathcal{H}}$ и $f_1 \in H_1$, непрерывную в силу неравенства Коши — Буняковского для $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и оценки (6.43). Поэтому она записывается указанным в (6.48) образом.

Рассмотрим сильное решение $[0, b_1) \ni t \mapsto v(t) \in \hat{\mathcal{H}}$ уравнения в $\hat{\mathcal{H}}$ $\left(\frac{dv}{dt}\right)(t) + (i\hat{\mathcal{A}}_1)^* v(t) = 0, v(0) = 0$. Записывая это уравнение в слабой форме типа (6.3), где роль $f$ играет $(f_1 \otimes f_2)^\wedge$ ($f_1 \in \mathfrak{D}(A_1)$, $f \in H_2$), получим

$$\left\langle \left(\frac{dv}{dt}\right)(t), (f_1 \otimes f_2)^\wedge \right\rangle + \langle v(t), i\hat{\mathcal{A}}_1(f_1 \otimes f_2)^\wedge \rangle = 0 \qquad (6.49)$$
$$(t \in [0, b_1)).$$

Функция $[0, b_1) \ni t \mapsto u(t) = T_{f_2}v(t) \in H_1$ будет один раз сильно непрерывно дифференцируема. С помощью (6.48) и соотношения $\hat{\mathcal{A}}_1(f_1 \otimes f_2)^\wedge = ((A_1f_1) \otimes f_2)^\wedge$ равенство (6.49) перепишется в виде



$$\left(\left(\frac{du}{dt}\right)(t), f_1\right)_{H_1} + (u(t), iA_1f_1) = 0, \quad u(0) = T_{f_2}v(0) = 0$$
$$(f_1 \in \mathfrak{D}(A_1); \quad t \in [0, b_1)).$$

Иными словами, мы получаем запись в слабом виде уравнения (6.47) при $j = 1$ со знаком «+». Вследствие предполагаемой единственности $u(t) = 0$ ($t \in [0, b_1)$). Возвращаясь при помощи (6.48) к $v(t)$, получаем, что $\langle v(t), (f_1 \otimes f_2)^\wedge \rangle = 0$ ($t \in [0, b_1)$) для всех $f_1 \in \mathfrak{D}(A_1)$ и $f_2 \in H_2$. Отсюда следует, что $v(t) = 0$ ($t \in [0, b_1)$). Аналогично устанавливается единственность в случае знака «—».

Для доказательства самосопряженности $\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_1$ осталось применить теорему 6.1.

В приведенном доказательстве самосопряженности $\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_1$ существенно, что $f_1 \in \mathfrak{D}(A_1)$; вектор $f_2$ мог пробегать не все пространство $H_2$, а лишь такое множество из него, чтобы векторы $(f_1 \otimes f_2)^\wedge$ ($f_1 \in \mathfrak{D}(A_1)$) образовывали тотальное множество в $\hat{\mathcal{H}}$. В частности, можно брать $f_2 \in (A_2 - z_2 1)\,\mathfrak{D}(A_2)$, так как тогда векторы $(f_1 \otimes f_2)^\wedge$ пробегают совокупность векторов вида $(\hat{\mathcal{A}}_2 - z_2 1)(f_1 \otimes g_2)^\wedge$, где $g_2 \in \mathfrak{D}(A_2)$, и в силу существенной самосопряженности $\hat{\mathcal{A}}_2$ такая тотальность будет иметь место. Это замечание приводит к тому, что сужение $\hat{\mathcal{A}}_1 \restriction (\text{а.}(\mathfrak{D}(A_1) \otimes \mathfrak{R}(A_2 - z_2 1)))^\wedge$ существенно самосопряженное. Отсюда следует, что векторы

$$(((A_1 - z_1 1)g_1) \otimes ((A_2 - z_2 1)g_2))^\wedge \ (g_1 \in \mathfrak{D}(A_1), \ g_2 \in \mathfrak{D}(A_2)) \qquad (6.50)$$

образуют плотное множество в $\hat{\mathcal{H}}$.

Вычисляя на векторах (6.50) $R_{z_2}(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_2) R_{z_1}(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_1)$ и $R_{z_1}(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_1) R_{z_2}(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_2)$, подобно (6.46) придем к одному и тому же результату $(g_1 \otimes g_2)^\wedge$. Таким образом, операторы $R_{z_1}(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_1)$ и $R_{z_2}(\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_2)$ коммутируют на плотном в $\hat{\mathcal{H}}$ множестве, откуда при помощи леммы 6.4 вытекает коммутируемость $\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_1$ и $\tilde{\hat{\mathcal{A}}}_2$. ■

Отметим, что единственность в приведенной теореме часто можно доказывать при помощи леммы 6.2.

Случай, когда операторы $\hat{\mathcal{A}}_1$ и $\hat{\mathcal{A}}_2$ сами после замыкания несамосопряжены, но допускают самосопряженные коммутирующие расширения, рассмотрен (в несколько другой постановке) в книге автора (Березанский [3, гл. 8, § 2, п. 3]).

# НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

## § 1. ОПЕРАТОРЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ ПО РАЗЛИЧНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ, И ФУНКЦИИ ОТ НИХ

Построения этого параграфа, по существу, обобщают конструкцию дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Обобщение касается четырех моментов: вместо пространства $L_2$ по одной переменной рассматривается абстрактное гильбертово пространство; количество переменных бесконечно; вместо $-i\frac{d}{dx_n}$ рассматривается произвольный самосопряженный оператор и, наконец, вместо полинома от дифференцирований вводятся более общие функции.

### 1. ОПЕРАТОРЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ ПО РАЗЛИЧНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Пусть задана последовательность гильбертовых пространств $(H_{0,n})_{n=1}^{\infty}$ и в каждом $H_{0,n}$ действует самосопряженный оператор $A_n$ с областью определения $\mathfrak{D}(A_n)$; $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto E_n(\Delta)$ — отвечающее ему разложение единицы. Рассмотрим некоторую стабилизирующую последовательность $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ ортов $e^{(n)} \in H_{0,n}$ и образуем бесконечное тензорное произведение $\mathcal{H}_{0,e,1} = \bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} H_{0,n}$. Каждый оператор $A_n$ индуцирует естественным образом оператор $\mathcal{A}_n$ в $\mathcal{H}_{0,e,1}$. А именно, положим

$$\mathcal{A}'_n = \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n-1} \otimes A_n \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots,$$

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}'_n) = \text{a.}\,(H_{0,1} \otimes \cdots \otimes H_{0,n-1} \otimes \mathfrak{D}(A_n) \otimes H_{0,n+1} \otimes H_{0,n+2} \otimes \cdots),$$

$$\mathcal{A}'_n(f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(n-1)} \otimes f^{(n)} \otimes f^{(n+1)} \otimes f^{(n+2)} \otimes \cdots) =$$
$$= f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(n-1)} \otimes (A_n f^{(n)}) \otimes f^{(n+1)} \otimes f^{(n+2)} \otimes \cdots$$
$$(f^{(j)} \in H_{0,j}, \quad j \neq n; \quad f^{(n)} \in \mathfrak{D}(A_n); \quad n = 1, 2, \ldots). \tag{1.1}$$

Так как $\mathcal{A}_n - z1 = \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n-1} \otimes (A_n - z1) \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots$ $(z \in \mathbb{C}^1)$,



то каждый из операторов $\mathcal{A}'_n$ существенно самосопряжен. Через $\mathcal{A}_n$ будем обозначать замыкание $\mathcal{A}'_n$. Легко видеть, что $\mathcal{A}_n$ отвечает разложение единицы

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto \mathcal{E}_n(\Delta) = \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n-1} \otimes E_n(\Delta) \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \tag{1.2}$$

В силу (2.8) гл. 1 эти разложения единицы коммутируют.

Таким образом мы построили по $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ (или $(E_n)_{n=1}^{\infty}$) счетное семейство коммутирующих самосопряженных операторов $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$, действующих в $\mathcal{H}_{0,e,1}$. О них будем говорить, что они действуют по различным переменным. Пусть $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty) \ni B \mapsto \mathcal{E}(B) : \mathcal{H}_{0,e,1} \to \mathcal{H}_{0,e,1}$ — с. р. е. этого семейства, построенное в § 1 гл. 2 (сейчас $X = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}^X = \mathbb{R}^\infty$, точки $\lambda(\cdot)$ пространства $\mathbb{R}^\infty$ в дальнейшем удобно обозначать через $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$).

Изложенная простая конструкция аналогична переходу от обычных производных к частным. Действительно, пусть имеется конечное число пространств $H_n$ $(n = 1, \ldots, p)$, каждое из которых совпадает с $L_2(\mathbb{R}^1, dx_n)$, построенным по лебеговой мере. В $L_2(\mathbb{R}^1, dx_n)$ действует оператор $A_n$, порожденный производной $-i\frac{d}{dx_n}$ как минимальный оператор, т. е. $A_n$ равен замыканию оператора в $L_2(\mathbb{R}^1, dx_n)$ $C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \ni u(x_n) \mapsto -iu'(x_n)$. Тогда $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n = L_2(\mathbb{R}^p, dx)$, а $\mathcal{A}_n$, как легко видеть, порождается подобным образом частной производной $-i\frac{\partial}{\partial x_n}$. В дальнейшем помимо изучения введенного семейства $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ мы будем конструировать операторы по «элементарным» операторам $\mathcal{A}_n$ аналогично тому, как дифференциальные операторы с частными производными строятся по $-i\frac{\partial}{\partial x_n}$. Разложение по совместным обобщенным собственным векторам семейства $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ аналогично такому разложению для семейства $\left(-i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{n=1}^{p}$, т. е. $p$-мерному преобразованию Фурье.

Предположим, что для каждого оператора $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ известно его разложение по обобщенным собственным векторам: имеется цепочка сепарабельных пространств

$$H_{-,n} \supseteq H_{0,n} \supseteq H_{+,n} \tag{1.3}$$

с квазиядерным вложением $O_n : H_{+,n} \to H_{0,n}$ и для $A_n$ известна его спектральная мера $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto \rho_n(\Delta) = \text{Сл.}\,(O_n^+ E_n(\Delta) O_n)$ и оператор обобщенного проектирования $P_n(\lambda_n)$ $(\lambda_n \in \mathbb{R}^1)$. Построим по этим данным разложение для всего семейства $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$. Будем предполагать, что $e^{(n)} \in H_{+,n}$ и $\|e^{(n)}\|_{H_{+,n}} = \|e^{(n)}\|_{H_{0,n}} = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Без потери общности можно считать выполненным условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|O_n|^2 - 1) < \infty \tag{1.4}$$

(для достижения (1.4) нужно произвести перенормировку каждого $H_{+,n}$ согласно лемме 2.1 гл. 1).

Тензорно перемножив цепочки (1.3), получим цепочку (см. теорему 2.4 гл. 1)

$$\mathcal{H}_{-,e,1} = \bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} H_{-,n} \supseteq \bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} H_{0,n} \supseteq \bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} H_{+,n} = \mathcal{H}_{+,e,1} \tag{1.5}$$
$$\bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} H_{0,n} = \mathcal{H}_{0,e,1}$$

с квазиядерным (благодаря условию (1.4)) вложением $\mathcal{H}_{+,e,1} \to \mathcal{H}_{0,e,1}$. Как пояснялось в гл. 1, § 2, п. 7, для оператора вложения $\mathcal{O} : \mathcal{H}_{+,e,1} \to \mathcal{H}_{0,e,1}$ справедливо равенство $\mathcal{O} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} O_n$ и аналогичные равенства для $\mathcal{O}^+$, $\mathbf{O} = \mathcal{O}^+ \mathcal{O}$. Цепочка (1.5) будет играть роль цепочки (2.18) гл. 2 при построении разложения для $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$.

**Теорема 1.1.** *Спектральная мера* $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty) \ni B \mapsto \rho(B)$ *и оператор обобщенного проектирования* $\mathcal{P}(\lambda)$ *семейства* $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ *задаются формулами*

$$\rho = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \rho_n, \quad \mathcal{P}(\lambda) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} P_n(\lambda_n) \qquad (\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}). \tag{1.6}$$

Поясним, что первое произведение в (1.6) существует, так как $\rho_n(\mathbb{R}^1) = |O_n|^2$ и произведение $\prod_{n=1}^{\infty} |O_n|^2$ сходится благодаря (1.4). Существование второго произведения в (1.6) вытекает из теоремы 2.6 гл. 1 и замечания к ней.

Доказательство. Спектральная мера $\rho$ определяется соотношением $\rho(B) = \text{Сл.}\ (\mathcal{O}^+ \mathcal{E}(B) \mathcal{O})$ $(B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty))$. Подсчитаем ее значение в случае $B = Ц(1, \ldots, p;\ \times_{n=1}^{p} \Delta_n) = \left(\times_{n=1}^{p} \Delta_n\right) \times \mathbb{R}^\infty$ $(\Delta_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$. Вводя орты $e_\alpha$ для пространства $\mathcal{H}_{+,e,1}$ (см. (2.10) гл. 1), получаем при помощи (1.2) и выкладки (2.30) гл. 1 (см. также замечание к теореме 2.6 гл. 1)

$$\rho(B) = \rho\left(\left(\times_{n=1}^{p} \Delta_n\right) \times \mathbb{R}^\infty\right) = \text{Сл.}\left(\mathcal{O}^+ \mathcal{E}\left(\left(\times_{n=1}^{p} \Delta_n\right) \times \mathbb{R}^\infty\right) \mathcal{O}\right) =$$
$$= \text{Сл.}\left(\mathcal{O}^+ \mathcal{E}\left(\bigcap_{n=1}^{p} Ц(n;\ \Delta_n)\right) \mathcal{O}\right) = \text{Сл.}\left(\mathcal{O}^+ \left(\prod_{n=1}^{p} \mathcal{E}(Ц(n;\ \Delta_n))\right) \mathcal{O}\right) =$$



$$= \text{Сл.}\left(\mathcal{O}^+ \left(\prod_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n(\Delta_n)\right) \mathcal{O}\right) =$$
$$= \text{Сл.}\left(\mathcal{O}^+ \left(\bigotimes_{n=1}^{p} E_n(\Delta_n)\right) \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots\right) \mathcal{O}\right) =$$
$$= \text{Сл.}\left(\left(\bigotimes_{n=1}^{p} O_n^+ E_n(\Delta_n) O_n\right) \otimes \mathbf{O}_{p+1} \otimes \mathbf{O}_{p+2} \otimes \cdots\right) =$$
$$= \left(\prod_{n=1}^{p} \text{Сл.}\,(O_n^+ E_n(\Delta_n) O_n)\right)\left(\prod_{n=p+1}^{\infty} |O_n|^2\right) =$$
$$= \left(\prod_{n=1}^{p} \rho_n(\Delta_n)\right)\left(\prod_{n=p+1}^{\infty} \rho_n(\mathbb{R}^1)\right) = \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} \rho_k\right)\left(\left(\times_{n=1}^{p} \Delta_n\right) \times \mathbb{R}^\infty\right) =$$
$$= \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} \rho_k\right)(B).$$

Из этого равенства следует совпадение мер $\rho$ и $\bigotimes_{k=1}^{\infty} \rho_k$ и на любом $B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$, т. е. первое из соотношений (1.6).

Докажем второе соотношение (1.6). Для любых $\Delta_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ при помощи (2.24) гл. 2, уже произведенных выкладок и первого равенства из (1.6) получим

$$\int_{\left(\times_{n=1}^{p} \Delta_n\right) \times \mathbb{R}^\infty} \mathcal{P}(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \mathcal{O}^+ \mathcal{E}\left(\left(\times_{n=1}^{p} \Delta_n\right) \times \mathbb{R}^\infty\right) \mathcal{O} =$$
$$= \left(\bigotimes_{n=1}^{p} O_n^+ E_n(\Delta_n) O_n\right) \otimes \mathbf{O}_{p+1} \otimes \mathbf{O}_{p+2} \otimes \cdots =$$
$$= \left(\bigotimes_{n=1}^{p} \int_{\Delta_n} P_n(\lambda_n)\, d\rho_n(\lambda_n)\right) \otimes \left(\int_{\mathbb{R}^1} P_{p+1}(\lambda_{p+1})\, d\rho_{p+1}(\lambda_{p+1})\right) \otimes$$
$$\otimes \left(\int_{\mathbb{R}^1} P_{p+2}(\lambda_{p+2})\, d\rho_{p+2}(\lambda_{p+2})\right) \otimes \cdots =$$
$$= \int_{\left(\times_{n=1}^{p} \Delta_n\right) \times \mathbb{R}^\infty} \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} P_n(\lambda_n)\right) d\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} \rho_n\right)(\lambda) =$$
$$= \int_{\left(\times_{n=1}^{p} \Delta_n\right) \times \mathbb{R}^\infty} \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} P_n(\lambda_n)\right) d\rho(\lambda).$$

Отсюда благодаря произвольности множества $(\overset{p}{\underset{n=1}{\times}} \Delta_n) \times \mathbb{R}^\infty$ следует совпадение $\mathcal{P}(\lambda)$ и $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\otimes}} P_n(\lambda_n)$ $\rho$-почти для всех $\lambda \in \mathbb{R}^\infty$. ■

Отметим, что из первого равенства (1.6) и соотношения (1.14) гл. 2 для совместного спектра $S((\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty) = \operatorname{supp} \mathcal{E} = \operatorname{supp} \rho$ рассматриваемого семейства получаем формулу

$$S((\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\times}} S(A_n). \tag{1.7}$$

Мы не будем строить в общем случае разложение по индивидуальным обобщенным собственным векторам семейства $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$, хотя это и нетрудно сделать. Отметим лишь, что все они лежат в $\mathfrak{R}(\mathcal{P}(\lambda)) \subseteq \mathcal{H}_{-,e,1}$ и, так как з. л. о. векторов $u^{(1)} \otimes u^{(2)} \otimes \ldots u^{(n)} \in H_{+,n}$ и начиная с некоторого номера $u^{(n)} = e^{(n)}$) совпадает с $\mathcal{H}_{+,e,1}$, входят в з. л. о. векторов

$$\mathcal{P}(\lambda)(u^{(1)} \otimes u^{(2)} \otimes \cdots) = (P_1(\lambda_1) u^{(1)}) \otimes (P_2(\lambda_2) u^{(2)}) \otimes \cdots \tag{1.8}$$

Последние векторы — бесконечные тензорные произведения обобщенных собственных векторов операторов $A_n$ (заметим, что так как $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\otimes}} P_n(\lambda_n)$ определено, то бесконечное тензорное произведение векторов $P_n(\lambda_n) u^{(n)}$ существует как вектор из $\mathcal{H}_{-,e,1}$).

Остановимся вкратце на построении продолжения оснащения цепочки (1.5) по таким продолжениям для (1.3). Пусть при каждом $n = 1, 2, \ldots$ имеется продолжение оснащения

$$H_{-,n} \supseteq H_{0,n} \supseteq H_{+,n} \supseteq D_n, \tag{1.9}$$

приспособленное для оператора $A_n$. Если $D_n$ — гильбертовы пространства, содержащие $e^{(n)}$ и $\|e^{(n)}\|_{D_n} = 1$, то в качестве продолжения оснащения цепочки (1.5) можно принять

$$\mathcal{H}_{-,e,1} \supseteq \mathcal{H}_{0,e,1} \supseteq \mathcal{H}_{+,e,1} \supseteq \mathcal{D}, \tag{1.10}$$

где $\mathcal{D} = \overset{\infty}{\underset{n=1;e,1}{\otimes}} D_n$. Легко понять, что оно пригодно для семейства $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$. Если $D_n$ — ядерные пространства, являющиеся проективными пределами гильбертовых (содержащих $e^{(n)}$ в качестве орта), то роль $\mathcal{D}$ может играть их взвешенное бесконечное тензорное произведение (см. гл. 1, § 4, п. 3). Непрерывность $\mathcal{A}_n \upharpoonright \mathcal{D} : \mathcal{D} \to \mathcal{H}_{+,e,1}$ теперь легко следует из теоремы 4.4 гл. 1.

Остановимся на более частной ситуации, когда каждый оператор $A_n$ имеет сильный вакуум (т. е. порождающий вектор), совпадающий с $e^{(n)}$. Точнее, будем считать, что при каждом $n = 1, 2, \ldots$ имеется продолжение оснащения (1.9) с ядерными $D_n$, причем $A_n^m e^{(n)} \in D_n$ $(m = 0, 1, \ldots)$ и л. о. этих векторов плотна в $H_{+,n}$ (такое $D_n$ всегда может быть построено, см. Морен К. [2, гл. 17, § 5]). Тогда *семейство операторов* $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$ *будет иметь сильный вакуум* $\Omega = e^{(1)} \otimes e^{(2)} \otimes \ldots$: $\mathcal{A}_1^{m_1} \ldots \mathcal{A}_p^{m_p} \Omega \in \mathcal{D}$ $(m_1, \ldots, m_p = 0, 1, \ldots; p = 1, 2, \ldots)$ *и л. о. этих векторов плотна в* $\mathcal{H}_{+,e,1}$ (сейчас $\mathcal{D}$ — взвешенное тензорное произведение пространств $D_n$). Действительно,

$$\mathcal{A}_1^{m_1} \ldots \mathcal{A}_p^{m_p} \Omega = (A_1^{m_1} e^{(1)}) \otimes \cdots \otimes (A_p^{m_p} e^{(p)}) \otimes e^{(p+1)} \otimes$$
$$\otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots \in \text{a.}(D_1 \otimes \cdots \otimes D_p \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots) \subseteq \mathcal{D}.$$

Отсюда сразу же вытекает, что и л. о. этих векторов плотна в $\mathcal{H}_{+,e,1}$. ■

Согласно теореме 2.4 гл. 2 спектральной мерой семейства $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$ теперь может служить $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty) \ni B \mapsto \sigma(B) = (\mathcal{E}(B)\Omega, \Omega)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}$. Легко видеть, что эта мера совпадает с $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\otimes}} \sigma_n$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto \sigma_n(\Delta) = (E_n(\Delta) e^{(n)}, e^{(n)})_{H_{0,n}}$ — соответствующая спектральная мера оператора $A_n$:

$$\sigma = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\otimes}} \sigma_n \tag{1.11}$$

(равенство (1.11) достаточно проверить на множествах $(\overset{p}{\underset{n=1}{\times}} \Delta_n) \times \mathbb{R}^\infty$ $(\Delta_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1); p = 1, 2, \ldots)$, где оно очевидно).

В силу теоремы 5.8 гл. 2 кратность собственного значения сейчас равна единице: $N_\lambda = 1$ $\rho$-почти для всех $\lambda$. Таким образом, одномерное пространство $\mathfrak{R}(\mathcal{P}(\lambda))$ лежит в з. л. о. векторов (1.8), причем каждое $\mathfrak{R}(P_n(\lambda_n))$ также одномерно. Отсюда следует, что для соответствующих индивидуальных обобщенных собственных векторов справедливо равенство

$$\varphi_1(\lambda) = \varphi_1^{(1)}(\lambda_1) \otimes \varphi_1^{(2)}(\lambda_2) \otimes \cdots \in \mathcal{H}_{-,e,1} \quad (\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty) \tag{1.12}$$

($\varphi_1(\lambda)$ — совместный собственный вектор семейства $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$, $\varphi_1^{(n)}(\lambda_n)$ — такой же вектор оператора $A_n$).

Равенство (1.12) влечет простую формулу для преобразования Фурье, связанного с $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$. Так, из соотношения (5.43) гл. 2, (1.7) и (1.12) следует

$$\mathbb{R}^\infty \supseteq S((\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\times}} S(A_n) \ni \lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty \mapsto \tilde{u}(\lambda) =$$
$$= \left(u, \overset{\infty}{\underset{n=1}{\otimes}} \varphi_1^{(n)}(\lambda_n)\right)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} \quad (u \in \mathcal{H}_{+,e,1}). \tag{1.13}$$

Равенство Парсеваля (5.44) гл. 2 теперь имеет вид

$$(\mathscr{E}(B)u,\ v)_{\mathscr{H}_{0,e,1}} = \int\limits_B \tilde{u}(\lambda)\overline{\tilde{v}(\lambda)}\,d\rho(\lambda) =$$

$$= \int\limits_B \tilde{u}(\lambda)\overline{\tilde{v}(\lambda)}\frac{d\rho(\lambda)}{d\sigma(\lambda)}\,d\sigma(\lambda) \quad (B\in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty);\ u,\ v\in \mathscr{H}_{+,e,1}). \tag{1.14}$$

Разумеется, его по непрерывности можно распространить и на векторы из $\mathscr{H}_{0,e,1}$.

Все построения этого пункта легко обобщаются на тот случай, когда каждый из операторов $A_n$ нормальный. В результате мы получаем семейство $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$ коммутирующих нормальных операторов.

Отметим, что согласно теореме 2.6 гл. 1 произведение $\bigotimes\limits_{n=1}^{\infty} P_n(\lambda_n)$ существует как слабый предел при $p\to\infty$ операторов $P_1(\lambda_1)\otimes\ldots$ $\ldots\otimes P_p(\lambda_p)\otimes \mathbf{O}_{p+1}\otimes\mathbf{O}_{p+2}\otimes\ldots$ Поэтому векторы (1.8) и (1.12) аппроксимируются соответствующими векторами слабо. Впрочем, можно доказать, что указанный предел существует и в сильном смысле.

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ — ВИНЕРА

Перейдем к рассмотрению конкретной ситуации, приводящей к тому, что преобразование (1.13) окажется бесконечномерным преобразованием Фурье — Винера. Установим прежде всего требуемые факты в случае одной переменной.

Рассмотрим пространство $H_0 = L_2(\mathbb{R}^1,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}dt)$ или $G^0(\mathbb{R}^1)$ в обозначениях гл. 1, § 4, п. 2; как и ранее, гауссовскую меру будем обозначать $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}dt = \gamma(t)\,dt = dg(t)$. В этом пространстве определим оператор $A$, равный замыканию оператора

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^1)\ni u(t)\mapsto -i\gamma^{-\frac{1}{2}}(t)(\gamma^{\frac{1}{2}}(t)u)'(t) =$$
$$= -i(u'(t)-tu(t)). \tag{1.15}$$

Отображение

$$H_0\ni u(t)\mapsto \gamma^{\frac{1}{2}}(t)u(t) = U(t)\in L_2(\mathbb{R}^1) \tag{1.16}$$

является изометрией между $H_0$ и $L_2(\mathbb{R}^1)$, при которой образом дифференциального выражения из (1.15) служит выражение $-iU'(t)$. Так как $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ при этом отображении сохраняется, то образом оператора $A$ служит оператор $B$, равный замыканию в $L_2(\mathbb{R}^1)$ оператора $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)\ni U(t)\to -iU'(t)$. Хорошо известно, что $B$ самосопряжен, поэтому самосопряженным будет и $A$.



Отметим, что *ограниченные вместе с первой производной функции $u(t)$ из $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ входят в $\mathfrak{D}(A)$ и действие оператора $A$ на них задается той же формулой* (1.15). Для доказательства этого факта нужно рассмотреть последовательность $(\chi_n(t))_{n=1}^\infty$ функций $\chi_n\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, равных единице при $|t|\leqslant n$ и нулю при $|t|\geqslant n+1$, а на интервалах $(-n-1,\ -n)$, $(n,\ n+1)$ принимающих значения из $[0,\ 1]$ и получающихся сдвигом должных кусков графика функции $\chi_1(t)$. Тогда $u_n(t) = u(t)\chi_n(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ и, как легко подсчитать, в $H_0$ при $n\to\infty$ $u_n\to u$ и $Au_n$ имеет предел, равный действию дифференциального выражения (1.15) на $u$. Это и доказывает утверждение. ■

Известно (см., напр.: Березанский [3, гл. 6, § 5, п. 3]), что оператор $B$ — карлемановский и для его спектральных меры $\rho_B$ и ядра $P_B(t,\ s;\ \lambda)$ справедливо представление

$$P_B(t,\ s;\ \lambda)\,d\rho_B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}e^{i\lambda(t-s)}d\lambda\ (t,\ s\in\mathbb{R}^1;\ \lambda\in S(B) = \mathbb{R}^1). \tag{1.17}$$

Возвращаясь при помощи введенного отображения (1.16) к оператору $A$, получаем из (1.17) для его спектральных меры $\rho$ и ядра $P(t,\ s;\ \lambda)$ формулу

$$P(t,\ s;\ \lambda)\,d\rho(\lambda) =$$
$$= (\gamma(t)\gamma(s))^{-\frac{1}{2}}P_B(t,\ s;\ \lambda)\,d\rho_B(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{i\lambda(t-s)+\frac{1}{2}(t^2+s^2)}d\lambda$$
$$(t,\ s\in\mathbb{R}^1;\ \lambda\in S(A) = S(B) = \mathbb{R}^1) \tag{1.18}$$

(поясним, что оператор $P(\lambda)$ для $A$ восстанавливается по (1.18) согласно (5.23) гл. 2, где интегрирование ведется относительно гауссовской меры $\gamma(s)\,ds$).

Оператор $A$ имеет вакуум $\Omega = 1\in H_0$. Действительно, согласно (1.18) для разложения единицы $E$ оператора $A$ получаем

$$(E(\Delta)1,\ 1)_{H_0} = \int\limits_\Delta\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}\int\limits_{\mathbb{R}^1}P(t,\ s;\ \lambda)\gamma(s)\gamma(t)\,ds\,dt\right)d\rho(\lambda) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_\Delta e^{-\lambda^2}d\lambda \qquad (\Delta\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)) \tag{1.19}$$

(мы воспользовались тем, что $\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{i\lambda x-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}$ $(\lambda\in\mathbb{R}^1)$).

Поэтому $\int\limits_{\mathbb{R}^1}\lambda^{2m}d(E(\lambda)1,\ 1)_{H_0}<\infty$ при любом $m = 0,\ 1,\ \ldots$, т. е. $\Omega\in\bigcap\limits_{m=0}^{\infty}\mathfrak{D}(A^m)$. Далее, при помощи индукции по $m = 0,\ 1,\ \ldots$ из

(1.15) легко заключить, что л. о. $(\Omega, A\Omega, \ldots, A^m\Omega) =$ л. о. $(1, t, \ldots \ldots, t^m)$. Но совокупность всех полиномов, как хорошо известно, плотна в $H_0$, поэтому з. л. о. $(\{A^m\Omega \mid m = 0, 1, \ldots\}) = H_0$, что и доказывает утверждаемое. В нашем случае мера (2.23) гл. 2 согласно (1.19) задается формулой

$$\sigma(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\Delta e^{-\lambda^2} d\lambda \qquad (\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)). \tag{1.20}$$

Разумеется, оператор $A$ — карлемановский, однако нам полезно сейчас построить оснащение пространства $H_0$ не типа (5.20) гл. 2, а вида (2.18) гл. 2 с квазиядерным вложением $H_+ \to H_0$. В качестве $H_+$ можно принять пространство $G^2(\mathbb{R}^1)$, тогда квазиядерность $H_+ \to H_0$ обеспечивается теоремой 4.1 гл. 1. Отметим, что $\|\Omega\|_{H_0} = \|\Omega\|_{H_+} = 1$. Перенормируем $H_+$ при помощи леммы 2.1 гл. 1, обеспечив неравенство $|O^{\#n}|^2 - 1 < n^{-2}$ ($n = 1, 2, \ldots$ фиксировано) для оператора вложения $O^{\#n}$: $H_+^{\#n} \to H_0$ (удобно отметить зависимость перенормировки от $n$, см. также стр. 108).

Итак, имеем оснащение

$$H_-^{\#n} \supseteq L_2\left(\mathbb{R}^1, \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt\right) \supseteq (G^2(\mathbb{R}^1))^{\#n}, \tag{1.21}$$

где через $H_-^{\#n}$ обозначено соответствующее негативное пространство. Это оснащение нетрудно продолжить применительно к $A$. Например, положим $D = \operatorname{pr} \lim_{\tau \in \{0,1,\ldots\}} G^\tau(\mathbb{R}^1) = \mathcal{G}(\mathbb{R}^1)$. Из теоремы 4.2 гл. 1 легко следует, что $A \restriction D$ переводит $D$ в $D$ непрерывно: нужно воспользоваться отображением (1.16) и тем хорошо известным обстоятельством, что оператор $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^1) \ni \Phi(t) \mapsto \Phi'(t) \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^1)$ непрерывен. Поэтому тем более $A \restriction D$ непрерывно переводит $D$ в $G^2(\mathbb{R}^1)$, т. е. мы действительно построили для $A$ продолжение оснащения (1.21).

Вакуум $\Omega$ для оператора $A$ будет вакуумом и в сильном смысле. Это обстоятельство удобнее всего проверить при помощи отображения (1.16) и теоремы 4.2 гл. 1. Так, все векторы $A^m\Omega$ ($m = 0, 1, \ldots$) входят в $D$, поскольку это эквивалентно утверждению, что функция $\pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ и все ее производные входят в $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^1)$. Далее, так как л. о. $(\Omega, A\Omega, \ldots, A^m\Omega) =$ л. о. $(1, t, \ldots, t^m)$, то, применяя (1.16) и замечая, что совокупность всех полиномов от $t$, умноженных на $e^{-\frac{1}{2}t^2}$, плотна в $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^1)$, заключаем, что л. о. $(\{A^m\Omega \mid m = 0, 1, \ldots\})$ плотна в $D$ и тем более в $G^2(\mathbb{R}^1)$.

Учитывая (1.18) и (1.20), легко записать в нашем случае преобразование (5.43) гл. 2 и равенство Парсеваля (5.44) гл. 2. Соответствующее преобразование носит название одномерного преобразования Фурье — Винера и выглядит следующим образом:



$$\mathbb{R}^1 = S(A) \ni \lambda \mapsto \tilde{u}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^1} u(t)\, e^{i\lambda t + \frac{1}{2}(\lambda^2 - t^2)} dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} u(t)\, e^{i\lambda t + \frac{1}{2}\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} dt \qquad (u \in G^2(R^1)), \tag{1.22}$$

а равенство Парсеваля (при $B = \mathbb{R}^1$) имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^1} u(t)\overline{v(t)}\, e^{-t^2} dt = \int_{\mathbb{R}^1} \tilde{u}(\lambda)\overline{\tilde{v}(\lambda)} d\sigma(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^1} \tilde{u}(\lambda)\overline{\tilde{v}(\lambda)}\, e^{-\lambda^2} d\lambda$$

$$(u, v \in G^2(\mathbb{R}^1)). \tag{1.23}$$

По непрерывности преобразование (1.22) и равенство (1.23) может быть распространено на функции $u, v \in H_0$.

Перейдем к рассмотрению бесконечномерного случая. Пусть $(H_{0,n})_{n=1}^\infty$ — последовательность одних и тех же пространств $H_{0,n} = L_2\left(\mathbb{R}^1, \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_n^2} dx_n\right)$, в каждом из которых действуют одинаковые операторы $A_n$, совпадающие с построенным выше оператором $A$. Рассмотрим стабилизирующую последовательность $e = (e^{(n)}(x_n))_{n=1}^\infty$, где каждое $e^{(n)}(x_n) \equiv 1$, и образуем бесконечное тензорное произведение $\mathcal{H}_{0,e,1} = \bigotimes_{n=1;e,1}^\infty H_{0,n} = L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}(x))$. Здесь $d\mathfrak{g}(x)$, как и в (4.13) гл. 1,— гауссовская мера на $\mathbb{R}^\infty$:

$$d\mathfrak{g}(x) = (dg(x_1)) \otimes (dg(x_2)) \otimes \cdots = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_1^2} dx_1\right) \otimes$$

$$\otimes \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_2^2} dx_2\right) \otimes \cdots \tag{1.24}$$

По операторам $A_n$ в соответствии с общей схемой п.1 построим семейство коммутирующих самосопряженных операторов $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$ (каждый из $\mathcal{A}_n$, грубо говоря,— оператор (1.15), действующий по $n$-й переменной $x_n$) и соответствующее совместное разложение единицы $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty) \ni B \mapsto E(B)$.

Для построения оснащения пространства $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}(x))$ нужно перемножить цепочки (1.21) при $n = 1, 2, \ldots$:

$$\mathcal{H}_{-,e,1} = \bigotimes_{n=1;e,1}^\infty H_-^{\#n} \supseteq L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}(x)) \supseteq \bigotimes_{n=1;e,1}^\infty (G^2(\mathbb{R}^1))^{\#n} = \mathcal{H}_{+,e,1}. \tag{1.25}$$

В цепочке (1.25) вложение позитивного пространства в нулевое будет квазиядерным, так как благодаря перенормировкам условие (1.4) выполняется. Для продолжения оснащения (1.25) нужно построить взвешенное бесконечное тензорное произведение пространств $\mathcal{G}(\mathbb{R}^1)$: сейчас $\mathcal{D} = \text{в.}\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} \mathcal{G}(\mathbb{R}^1) = \mathcal{G}(\mathbb{R}^\infty, \varepsilon)$ $(\varepsilon = (1, 1, \ldots))$, где последнее пространство цилиндрических функций описано в гл. 1, § 4, п. 4.

Как уже говорилось, каждый оператор $A_n$ имеет сильный вакуум $e^{(n)}(x_n) \equiv 1$. Но тогда согласно общей конструкции п. 1 и семейство $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет сильный вакуум $\Omega(x) = 1 \otimes 1 \otimes \ldots \equiv 1$. Таким образом, в нашем случае справедливы не только формулы (1.6) и (1.7), но и (1.11) — (1.13).

Выпишем некоторые из полученных сейчас соотношений. Согласно (1.7) $S((\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}) = \mathbb{R}^\infty$. Равенства (1.6) и (1.18), если последнее переписать в виде

$$P(t, s; \lambda)\, d\rho(\lambda) = e^{i\lambda(t-s)+\frac{1}{2}(t^2+s^2)+\frac{1}{4}\lambda^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} d\lambda\right),$$

дают, что оператор $\mathcal{P}(\lambda)$ является «интегральным с ядром»:

$$\mathcal{P}(x, y; \lambda)\, d\rho(\lambda) = e^{i\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x_n-y_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2+y_n^2)+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2} \times$$
$$\times\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda_1^2}{4}} d\lambda_1\right)\otimes\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda_2^2}{4}} d\lambda_2\right)\otimes\cdots \qquad (1.26)$$
$$(x = (x_n)_{n=1}^{\infty},\ y = (y_n)_{n=1}^{\infty},\ \lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^\infty).$$

Ряды в (1.26) сходятся в том смысле, что «обрезанные» ядра, отвечающие суммированиям в (1.26) от 1 до $p$, порождают последовательность операторов, слабо сходящихся при $p \to \infty$ к $\mathcal{P}(\lambda)\, d\rho(\lambda)$ как операторы из $\mathcal{H}_{+,e,1}$ в $\mathcal{H}_{-,e,1}$.

Из соотношений (1.11) и (1.20) следует, что спектральная мера $\sigma$ будет гауссовской:

$$d\sigma(\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_1^2} d\lambda_1\right)\otimes\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_2^2} d\lambda_2\right)\otimes\cdots = dg(\lambda). \qquad (1.27)$$

Преобразование Фурье (1.13) — в рассматриваемом случае называемое бесконечномерным преобразованием Фурье — Винера — состоит в том, что каждой функции $u(x) \in \mathcal{H}_{+,e,1}$ ставится в соответствие функция

$$\mathbb{R}^\infty \ni \lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto \tilde{u}(\lambda) =$$



$$= \int_{\mathbb{R}^\infty} u(x)\, e^{i\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} dx_1\right)\otimes\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} dx_2\right)\otimes\cdots \qquad (1.28)$$

(экспонента под знаком интеграла сходится так, как и (1.12)). Равенство Парсеваля (при $B = \mathbb{R}^\infty$) имеет вид для $u(x)$, $v(x) \in \mathcal{H}_{+,e,1}$

$$\int_{\mathbb{R}^\infty} u(x)\overline{v(x)}\, dg(x) = \int_{\mathbb{R}^\infty} u(x)\overline{v(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_1^2} dx_1\right)\otimes$$
$$\otimes\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_2^2} dx_2\right)\otimes\cdots = \int_{\mathbb{R}^\infty} \tilde{u}(\lambda)\overline{\tilde{v}(\lambda)}\, dg(\lambda) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^\infty} \tilde{u}(\lambda)\overline{\tilde{v}(\lambda)}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_1^2} d\lambda_1\right)\otimes\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda_2^2} d\lambda_2\right)\otimes\cdots \qquad (1.29)$$

Для функций из класса $\mathcal{H}_{+,e,1} = \bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} (G^2(\mathbb{R}^1))^{\#n}$ интегралы в (1.28), (1.29) абсолютно сходятся. Мы не будем выяснять, как расширить этот класс, чтобы сохранить абсолютную сходимость. Отметим лишь, что для более явного описания подобных классов функций полезно вместо оснащения (1.25) строить оснащения $L_2(\mathbb{R}^\infty, dg(x))$, используя пространства $A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$ и $H^\tau(\mathbb{R}^\infty)$ (гл. 1, § 4, п. 5,6). При переходе к сходимости интегралов в среднем квадратичном, как уже отмечалось, соотношения (1.28), (1.29) могут быть распространены на произвольные $u, v \in L_2(\mathbb{R}^\infty, dg(x))$. Ясно также, что в отношении дифференцирования преобразование (1.28) ведет себя так же, как и обычное многомерное преобразование Фурье, нужно только производные $-i\frac{\partial}{\partial x_n}$ заменять на $-i\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - x_n\right)$.

### 3. ФУНКЦИИ ОТ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ПО РАЗЛИЧНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Пусть $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ — семейство коммутирующих самосопряженных операторов в $\mathcal{H}_{0,e,1}$, построенное в п. 1, $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty) \ni B \mapsto \mathcal{E}(B)$ — его с. р. е. Рассмотрим комплекснозначную функцию $\mathbb{R}^\infty \ni \lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto L(\lambda) = L(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, измеримую относительно $\sigma$-алгебры $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$. Предположим, что она определена и конечна почти везде относительно меры $\mathcal{E}$, на точках из $\mathbb{R}^\infty$ вне этого множества будем считать ее значения равными бесконечности. По такой функции можно построить действующий в $\mathcal{H}_{0,e,l}$ нормальный оператор $\mathcal{L} = L(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots)$, полагая

$$\mathcal{L} = L(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots) = \int_{\mathbb{R}^\infty} L(\lambda)\, d\mathcal{E}(\lambda), \tag{1.30}$$

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \{f \in \mathcal{H}_{0,e,l} \mid \int_{\mathbb{R}^\infty} |L(\lambda)|^2 d(\mathcal{E}(\lambda) f, f)_{\mathcal{H}_{0,e,l}} < \infty\}.$$

Нормальность $\mathcal{L}$ следует из общих свойств интеграла по разложению единицы (см., напр.: Плеснер [1, гл. 8]). В связи с проверкой нормальности отметим, что $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ плотно в $\mathcal{H}_{0,e,l}$, так как для каждого $n = 1, 2, \ldots\ \mathfrak{R}(\mathcal{E}(B_n)) \subseteq \mathfrak{D}(\mathcal{L})$, где $B_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^\infty \| L(\lambda)| \leqslant \leqslant n\}$, а $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ является множеством полной меры $\mathcal{E}$.

Легко написать выражение для разложения единицы оператора $\mathcal{L}$. Для этого рассмотрим отображение $\mathbb{R}^\infty \setminus \{\lambda \in \mathbb{R}^\infty \mid L(\lambda) = \infty\} \ni \lambda \mapsto L(\lambda) \in \mathbb{C}^1$ и σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{C}^1)$ борелевских множеств из $\mathbb{C}^1$. В силу измеримости $L\, L^{-1}(\Delta) \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$ для любого $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1)$, поэтому можно построить $L$-образ $\mathcal{E}_L$ меры $\mathcal{E}$ (понятия, связанные с отображением мер, мы напоминали на стр. 194, 195), *который и будет совпадать с разложением единицы $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ оператора $\mathcal{L}$*. В самом деле, согласно формуле (2.52) гл. 2, примененной в случае функции $\mathbb{C}^1 \ni z \mapsto F(z) \equiv z \in \mathbb{C}^1$, получим

$$\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}^\infty} L(\lambda)\, d\mathcal{E}(\lambda) = \int_{\mathbb{C}^1} z d\mathcal{E}_L(z).$$

Как уже говорилось, $\mathcal{E}_L$ будет разложением единицы на $\mathbb{C}^1$, поэтому последнее равенство показывает, что $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = \mathcal{E}_L$. ■

Пусть теперь имеются оснащения (1.3). Как и ранее, построим цепочку (1.5). Она, разумеется, пригодна и для построения разложения по обобщенным собственным векторам оператора $\mathcal{L}$ (в дальнейшем все разложения будут строиться с использованием именно этой цепочки). Почти очевидно, что *спектральная мера $\mathcal{B}(\mathbb{C}^1) \ni \Delta \mapsto \rho_{\mathcal{L}}(\Delta)$ оператора $\mathcal{L}$ равна L-образу спектральной меры семейства $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$*. В самом деле, $\rho_{\mathcal{L}}(\Delta) = \text{Сл.}\ (\mathcal{O}^+ \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\Delta)\, \mathcal{O}) = \text{Сл.}\ (\mathcal{O}^+ \mathcal{E}(L^{-1}(\Delta))\, \mathcal{O}) = \rho(L^{-1}(\Delta)) = \rho_l(\Delta)$ $(\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1))$. ■

Из определения (1.30) оператора $\mathcal{L}$ следует, что при $z \in \mathbb{C}^1$

$$(\mathcal{L} - z1)^{-1} = \int_{\mathbb{R}^\infty} (L(\lambda) - z)^{-1} d\mathcal{E}(\lambda), \quad \|(\mathcal{L} - z1)^{-1}\| = \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda \in \mathbb{R}^\infty} |(L(\lambda) - z)^{-1}|$$



(ess sup берется относительно меры $\mathcal{E}$). Таким образом, $z$ — регулярная точка $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда последняя норма конечна. Отсюда следует, что $z \in S(\mathcal{L})$ тогда и только тогда, когда $z \in \bigcap (L(\operatorname{supp} \mathcal{E}) \setminus B))^{\sim}$, где пересечение берется по всем множествам $B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$ нулевой меры $\mathcal{E}$, а волна означает замыкание в $\mathbb{C}^1$. Учитывая формулу (1.7) для $\operatorname{supp} \mathcal{E} = S((\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty)$, заключаем, что спектр $S(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ совпадает с множеством

$$S(\mathcal{L}) = \bigcap_{B \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty), \mathcal{E}(B)=0} \left(L\left(\left(\mathop{\times}_{n=1}^{\infty} S(A_n)\right) \setminus B\right)\right)^{\sim}. \tag{1.31}$$

Ниже мы покажем, как выразить оператор обобщенного проектирования $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(z)$, отвечающий $\mathcal{L}$, через операторы обобщенного проектирования $P_n(\lambda_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для этого нам понадобятся некоторые факты относительно дезинтегрирования мер (Бурбаки [1, гл. 6, § 3]). Напомним их в требуемом виде, используя обозначения для отображения мер из гл. 2, § 2, п. 7. Пусть $\mathbf{\Lambda}$ — сепарабельное локально компактное пространство, $\mathcal{B}(\mathbf{\Lambda}) \ni \mathbf{B} \mapsto \sigma(\mathbf{B}) \geqslant 0$ — некоторая конечная неотрицательная мера на σ-алгебре борелевских множеств из $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Lambda} \ni \boldsymbol{\lambda} \mapsto \varphi(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{C}^1$ — фиксированное отображение $\mathbf{\Lambda}$ в компактифицированную комплексную плоскость $\mathbf{C}^1$ такое, что для любого $\mathbf{\Delta} \in \mathcal{B}(\mathbf{C}^1)$ $\varphi^{-1}(\mathbf{\Delta}) \in \mathcal{B}(\mathbf{\Lambda})$. Рассмотрим φ-образ $\sigma_\varphi$ меры $\sigma$. Тогда утверждается, что существует семейство $(\sigma_z)_{z \in \mathbf{C}^1}$ неотрицательных конечных мер, каждая из которых определена на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbf{\Lambda})$ и сосредоточена на $\varphi^{-1}(\mathbf{z}) \in \mathcal{B}(\mathbf{\Lambda})$, такое, что для любой $F \in L_1(\mathbf{\Lambda}, d\sigma(\boldsymbol{\lambda}))$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbf{\Lambda}} F(\boldsymbol{\lambda})\, d\sigma(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{\mathbf{C}^1} \left( \int_{\varphi^{-1}(\mathbf{z})} F(\boldsymbol{\lambda})\, d\sigma_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{\lambda}) \right) d\sigma_\varphi(\mathbf{z}). \tag{1.32}$$

**Теорема 1.2.** *Справедливо следующее представление для оператора обобщенного проектирования $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(z)$, отвечающего $\mathcal{L}$, через операторы обобщенного проектирования $P_n(\lambda_n)$:*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(z) = \int_{L^{-1}(z)} \left( \bigotimes_{n=1}^{\infty} P_n(\lambda_n) \right) d\sigma_z(\lambda) \quad (z \in \mathbb{C}^1;\ \lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty). \tag{1.33}$$

*Здесь $(\sigma_z)_{z \in \mathbb{C}^1}$ — некоторое семейство неотрицательных конечных мер, каждая из которых определена на σ-алгебре $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$ и сосредоточена на $L^{-1}(z) \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$. Интеграл в (1.33) сходится по гильбертовой норме операторов из $\mathcal{H}_{+,e,l}$ в $\mathcal{H}_{0,e,l}$.*

Доказательство. Рассмотрим к. с. р. е. $\mathbf{E}$ семейства $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty : \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^\infty) \ni \mathbf{B} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{B})$ (см. гл. 2, § 1, п. 7); $\mathbf{E}$ и $\mathcal{E}$ связаны обычной формулой (1.19) гл. 2. Согласно теореме 2.5 гл. 2 справедливо представление

$$\mathcal{O}^+\mathbf{E}(\mathbf{B})\,\mathcal{O} = \int\limits_{\mathbf{B}} P(\lambda)d\rho(\lambda) \quad (\mathbf{B} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^\infty) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)), \tag{1.34}$$

где $\rho$ — соответствующая компактифицированная спектральная мера, $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ $(\lambda \in \mathbf{R}^\infty)$. Ясно, что $\mathbb{R}^\infty \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^\infty)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{R}^\infty \setminus \mathbb{R}^\infty) = 0$.

Продолжим функцию $L$ с $\mathbb{R}^\infty$ на $\mathbf{R}^\infty$, полагая ее равной бесконечности на $\mathbf{R}^\infty \setminus \mathbb{R}^\infty$. Продолженную функцию обозначим через $\mathbf{L}$. Отображение $\mathbf{R}^\infty \ni \lambda \mapsto \mathbf{L}(\lambda) \in \mathbf{C}^1$ будет обладать тем свойством, что для любого $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbf{C}^1)$ $\mathbf{L}^{-1}(\Delta) \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbf{R}^\infty) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$. Таким образом, для него справедливо сказанное выше о дезинтегрировании мер.

Пусть $u, v \in \mathcal{H}_{+,e,1}$, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbf{C}^1)$. Применяя формулу (1.32) к случаю, когда $\Lambda = \mathbf{R}^\infty$, $\varphi = \mathbf{L}$, $\sigma = \rho$ и $F(\lambda) = \varkappa_\Delta(\mathbf{L}(\lambda))\,(P(\lambda)u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}$, получим

$$\int\limits_{\mathbf{R}^\infty} \varkappa_\Delta(\mathbf{L}(\lambda))\,(P(\lambda)u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}\,d\rho(\lambda) =$$

$$= \int\limits_{\Delta}\Bigg(\int\limits_{\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{z})} (P(\lambda)u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}\,d\rho_{\mathbf{z}}(\lambda)\Bigg)\,d\rho_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}). \tag{1.35}$$

С другой стороны, левая часть этого равенства вследствие (1.34) может быть переписана в виде

$$\int\limits_{\mathbf{R}^\infty} \varkappa_\Delta(\mathbf{L}(\lambda))\,d(\mathcal{O}^+\mathbf{E}(\lambda)\,\mathcal{O}u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}.$$

Применяя к этому интегралу формулу типа (2.52) гл. 2, связывающую интегралы при отображении мер, получим, что он равен $\int\limits_{\mathbf{C}^1} \varkappa_\Delta(\mathbf{z})\,d\omega_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}) = \omega_{\mathbf{L}}(\Delta)$, где $\omega_{\mathbf{L}}$ — $\mathbf{L}$-образ меры $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty) \ni \mathbf{B} \mapsto \omega(\mathbf{B}) = (\mathcal{O}^+\mathbf{E}(\mathbf{B})\,\mathcal{O}u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}$. Рассмотрим $\mathbf{L}$-образ $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}$ разложения единицы $\mathbf{E}$. Очевидно, $\omega_{\mathbf{L}}(\Delta) = (\mathcal{O}^+\mathbf{E}_{\mathbf{L}}(\Delta)\,\mathcal{O}u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}$. Следовательно, (1.35) можно переписать в виде

$$(\mathcal{O}^+\mathbf{E}_{\mathbf{L}}(\Delta)\,\mathcal{O}u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} = \int\limits_{\Delta}\Bigg(\int\limits_{\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{z})} (P(\lambda)u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}\,d\rho_{\mathbf{z}}(\lambda)\Bigg)\,d\rho_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}). \tag{1.36}$$

Положим в этом равенстве $\mathbf{\Delta} = \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1)$. Так как $\mathbf{L}$ на $\mathbb{R}^\infty$ совпадает с $L$ и $\mathbf{E}(\mathbf{R}^\infty \setminus \mathbb{R}^\infty) = 0$, то левая часть (1.36) станет равной $(\mathcal{O}^+\mathcal{E}_L(\Delta)\,\mathcal{O}u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} = (\mathcal{O}^+\mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\Delta)\,\mathcal{O}u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}$. Преобразуем правую часть (1.36). Как и для $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}$, при $\Delta_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1)$ можно написать $\rho_{\mathbf{L}}(\Delta_1) = \rho_L(\Delta_1) = \rho_{\mathscr{L}}(\Delta_1)$. Поэтому в (1.36) для $\mathbf{\Delta} = \Delta$ можно $d\rho_{\mathbf{L}}(\mathbf{z})$ заменить на $d\rho_{\mathscr{L}}(z)$. Далее, так как $\mathbf{L}$ на $\mathbf{R}^\infty \setminus \mathbb{R}^\infty$ равно бесконечности, а на $\mathbb{R}^\infty$ совпадает с $L$, то $\mathbf{L}^{-1}(z) = L^{-1}(z)$ $(z \in \mathbb{C}^1)$. Наконец, $P \restriction \mathbb{R}^\infty = \mathcal{P}$ (см. теорему 2.5 гл. 2). Таким образом, из (1.36) получим



$$(\mathcal{O}^+\mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\Delta)\,\mathcal{O}u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} =$$

$$= \int\limits_{\Delta}\Bigg(\int\limits_{L^{-1}(z)} (\mathcal{P}(\lambda)u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}\,d\sigma_z(\lambda)\Bigg)\,d\rho_{\mathscr{L}}(z) \quad (u, v \in \mathcal{H}_{+,e,1};\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1)). \tag{1.37}$$

Здесь мы обозначили через $\sigma_z$ сужение меры $\rho_z$, определенной на $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$, на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Записывая обычное представление $(\mathcal{O}^+\mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\Delta)\,\mathcal{O}u, v)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}$ через $\mathcal{P}_{\mathscr{L}}(z)$ и $d\rho_{\mathscr{L}}(z)$ и сравнивая его с (1.37), вследствие произвольности $\Delta$, $u$, $v$ заключаем, что справедливо представление (1.33) (нужно учесть, что $\mathcal{P}_{\mathscr{L}}(z)$ определена $\rho_{\mathscr{L}}$-почти для всех $z$, и второе равенство (1.6)). Требуемая сходимость интеграла в (1.33) следует из того, что $\text{Сл.}\left(\bigotimes\limits_{n=1}^{\infty} P_n(\lambda_n)\right) = \text{Сл.}(\mathcal{P}(\lambda)) = 1$. ■

Разумеется, если функция $L$ $\mathcal{E}$-почти везде принимает вещественные значения, то оператор $\mathscr{L}$ самосопряжен.

Все сказанное в этом пункте почти без изменения переносится и на случай нормальных операторов $A_n$.

## 4. СЛУЧАЙ ФУНКЦИЙ, ХОРОШО АППРОКСИМИРУЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ

Определение (1.30) обычно малоэффективно в отношении подсчета действия оператора $\mathscr{L}$. Мы его модифицируем для одного типа функций $L$. Пример такой модификации будет изложен в следующем параграфе.

Обозначим через $L_0(\mathbb{R}^\infty, d\mathcal{E}(\lambda))$ класс функций $L$, для которых мы определяли операторы $\mathscr{L}$, т. е. совокупность всех комплекснозначных функций $\mathbb{R}^\infty \ni \lambda \mapsto L(\lambda)$, измеримых относительно $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$ и почти везде конечных относительно $\mathcal{E}$.

Пусть $(E_p(z))_{p=1}^\infty$ — последовательность разложений единицы $\mathcal{B}(\mathbb{C}^1) \ni \Delta \mapsto E_p(\Delta)$. Будем говорить, что она слабо сходится к разложению единицы $\mathcal{B}(\mathbb{C}^1) \ni \Delta \mapsto E(\Delta)$, если для любой непрерывной ограниченной функции $\mathbb{C}^1 \ni z \mapsto \varphi(z) \in \mathbb{C}^1$ операторы $\int\limits_{\mathbb{C}^1} \varphi(z)\,dE_p(z)$ при $p \to \infty$ сильно сходятся к оператору $\int\limits_{\mathbb{C}^1} \varphi(z)\,dE(z)$.

Аналогично определяется и слабая сходимость разложений единицы на $\mathbb{R}^1$. (Это определение является операторным вариантом слабой сходимости функций распределения $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto \mu_p(\lambda)$ в теории вероятностей или вообще ограниченных неубывающих функций; для них нужно выше заменить $\mathbb{C}^1$, $E_p$ и $E$ на $\mathbb{R}^1$, $\mu_p$ и $\mu$.)

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.3.** *Пусть $L \in L_0(\mathbb{R}^\infty, d\mathcal{E}(\lambda))$ такова, что существует последовательность цилиндрических функций $(L_p)_{p=1}^\infty$, $L_p(\lambda) = L_{p,\text{ц}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, каждая из которых входит в $L_0(\mathbb{R}^\infty, d\mathcal{E}(\lambda))$, и а) $L_p(\lambda) \underset{p\to\infty}{\to} L(\lambda)$ почти для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^\infty$ относительно $\mathcal{E}$; б) разложения единицы $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}$ нормальных операторов $\mathcal{L}_p = L_{p,\text{ц}}(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p)$ слабо сходятся при $p \to \infty$ к некоторому разложению единицы $E$. Тогда $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = E$ $(\mathcal{L} = L(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots))$.*

*Если $f \in \left(\bigcap_{p=1}^\infty \mathfrak{D}(\mathcal{L}_p)\right)$ таково, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $c > 0$, для которого при любом $p = 1, 2, \ldots$*

$$\int_{|z|>c} |z|^2 \, d(\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}(z) f, f)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} < \varepsilon, \tag{1.38}$$

*то в смысле сходимости в $\mathcal{H}_{0,e,1}$*

$$\mathcal{L} f = \lim_{p\to\infty} \mathcal{L}_p f. \tag{1.39}$$

Отметим, что действие $\mathcal{L}_p$ часто может просто подсчитываться, тогда (1.39) приводит к процедуре подсчета $\mathcal{L} f$.

Доказательство. Так как $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p} = \mathcal{E}_{L_p}$, то для любой функции $\varphi$, фигурирующей в определении слабой сходимости, в силу (2.52) гл. 2 можно написать

$$\int_{\mathbb{C}^1} \varphi(z) \, d\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}(z) f = \int_{\mathbb{R}^\infty} \varphi(L_p(\lambda)) \, d\mathcal{E}(\lambda) f \tag{1.40}$$

$$(f \in \mathcal{H}_{0,e,1}; \ p = 1, 2, \ldots).$$

Поясним, что функция $\varphi(L_p(\lambda))$, вообще говоря, не определена для $\lambda \in \mathbb{R}^\infty$ таких, что $L_p(\lambda) = \infty$, но так как мера $\mathcal{E}$ множества этих $\lambda$ равна нулю, то соотношение (1.40) корректно.

Перейдем к пределу при $p \to \infty$ в (1.40). Левая часть этого соотношения согласно определению слабой сходимости сходится к $\int_{\mathbb{C}^1} \varphi(z) \, dE(z) f$. Правая часть сходится к $\int_{\mathbb{C}^1} \varphi(z) \, d\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(z) f$. В самом



деле, учитывая (2.52) гл. 2, получим

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^\infty} \varphi(L_p(\lambda)) \, d\mathcal{E}(\lambda) f - \int_{\mathbb{C}^1} \varphi(z) \, d\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(z) f \right\|^2_{\mathcal{H}_{0,e,1}} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\infty} |\varphi(L_p(\lambda)) - \varphi(L(\lambda))|^2 \, d(\mathcal{E}(\lambda) f, f)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}. \tag{1.41}$$

Для каждого

$$\lambda \in C = \left(\bigcap_{p=1}^\infty \{\lambda \in \mathbb{R}^\infty \mid L_p(\lambda) \neq \infty\}\right) \cap \{\lambda \in \mathbb{R}^\infty \mid L(\lambda) \neq \infty\} \cap$$

$$\cap \{\lambda \in \mathbb{R}^\infty \mid \lim_{p\to\infty} L_p(\lambda) = L(\lambda)\} \tag{1.42}$$

вследствие непрерывности $\varphi$ $\varphi(L_p(\lambda)) \underset{p\to\infty}{\to} \varphi(L(\lambda))$, причем $|\varphi(L_p(\lambda))| \leqslant \sup_{z \in \mathbb{C}^1} |\varphi(z)| < \infty$ $(\lambda \in C; \ p = 1, 2, \ldots)$. Так как $C$ — множество полной меры $\mathcal{E}$, то в правой части (1.41) можно перейти к пределу под знаком интеграла и в результате получим нуль. Итак, для любой рассматриваемой $\varphi$ $\int_{\mathbb{C}^1} \varphi(z) \, dE(z) f = \int_{\mathbb{C}^1} \varphi(z) \, d\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(z) f$ $(f \in \mathcal{H}_{0,e,1})$. Отсюда следует, что $E = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

Докажем вторую часть утверждения. Убедимся прежде всего, что $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})$, т. е. что $\int_{\mathbb{R}^\infty} |L(\lambda)|^2 \, d(\mathcal{E}(\lambda) f, f)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} < \infty$. Интеграл из (1.38) равен

$$\int_{\{\lambda \in \mathbb{R}^\infty \mid |L_p(\lambda)| > c\}} |L_p(\lambda)|^2 \, d(\mathcal{E}(\lambda) f, f)_{\mathcal{H}_{0,e,1}},$$

поэтому условие (1.38) обеспечивает выполнение неравенства $\int_{\mathbb{R}^\infty} |L_p(\lambda)|^2 \, d(\mathcal{E}(\lambda) f, f)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} \leqslant c_1 < \infty$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Так как при $p \to \infty$ функции $L_p(\lambda)$ сходятся к $L(\lambda)$ почти везде относительно меры $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty) \ni B \mapsto (\mathcal{E}(B) f, f)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}$, то на основании леммы Фату получаем сходимость требуемого интеграла.

Зафиксируем указанные $f$ и $\varepsilon$ и выберем $c > 0$ столь большим, чтобы выполнялось (1.38) и, кроме того, $\int_{|z|>c} |z|^2 d(\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(z) f, f)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} < \varepsilon$. Построим функцию $\varphi \in C(\mathbb{C}^1)$, $0 \leqslant \varphi(z) \leqslant 1$ $(z \in \mathbb{C}^1)$, равную нулю при $|z| \geqslant c + 1$ и единице при $|z| \leqslant c$. Имеем

$$\|\mathscr{L}_p f - \mathscr{L} f\|_{\mathscr{H}_{0,e,1}} \leqslant \left\|\mathscr{L}_p f - \int\limits_{\mathbb{C}^1} z\varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(z) f\right\|_{\mathscr{H}_{0,e,1}} +$$

$$+\left\|\int\limits_{\mathbb{C}^1} z\varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(z) f - \int\limits_{\mathbb{C}^1} z\varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}}(z) f\right\|_{\mathscr{H}_{0,e,1}} +$$

$$+\left\|\int\limits_{\mathbb{C}^1} z\varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}}(z) f - \mathscr{L} f\right\|_{\mathscr{H}_{0,e,1}} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{C}^1} |z|^2 (1-\varphi^2(z))\, d(\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(z) f, f)_{\mathscr{H}_{0,e,1}}\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left\|\int\limits_{\mathbb{C}^1} z\varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(z) f - \int\limits_{\mathbb{C}^1} z\varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}}(z) f\right\|_{\mathscr{H}_{0,e,1}} +$$

$$+\left(\int\limits_{\mathbb{C}^1} |z|^2 (1-\varphi^2(z))\, d(\mathscr{E}_{\mathscr{L}}(z) f, f)_{\mathscr{H}_{0,e,1}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{\varepsilon} + \left\|\int\limits_{\mathbb{C}^1} z\varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(z) f - \int\limits_{\mathbb{C}^1} z\varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}}(z) f\right\|_{\mathscr{H}_{0,e,1}} \quad (1.43)$$

$$(p = 1, 2, \ldots).$$

Так как $z\varphi(z) \in C(\mathbb{C}^1)$ и ограничена, то в силу слабой сходимости $\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}$ к $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}$ последняя норма в (1.43) при $n$ достаточно больших может быть сделана сколь угодно малой. ■

Предположим теперь, что имеется оснащение (1.5) и построена соответствующая спектральная мера $\rho$ семейства $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$. *Если* $L \in L_2(\mathbb{R}^{\infty}, d\rho(\lambda))$, *то для этой функции выполняются условия первой части теоремы* 1.3.

В самом деле, аппроксимируем $L$ в $L_2(\mathbb{R}^{\infty}, d\rho(\lambda))$ последовательностью цилиндрических функций и выберем из нее подпоследовательность $(L_p)_{p=1}^{\infty}$, сходящуюся к $L$ $\rho$-почти везде. Функции $L_p$ будут искомыми. Так, требование а), разумеется, выполнено. Для проверки б) зафиксируем ограниченную $\varphi \in C(\mathbb{C}^1)$. Учитывая, что $\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p} = \mathscr{E}_{L_p}$, $\mathscr{E}_{\mathscr{L}} = \mathscr{E}_L$, с помощью (2.52) гл. 2 и обычного соотношения (2.24) гл. 2 получаем для $u \in \mathscr{H}_{+,e,1}$

$$\left\|\int\limits_{\mathbb{C}^1} \varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(z) u - \int\limits_{\mathbb{C}^1} \varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}}(z) u\right\|^2_{\mathscr{H}_{0,e,1}} =$$

$$= \left\|\int\limits_{\mathbb{R}^{\infty}} (\varphi(L_p(\lambda)) - \varphi(L(\lambda)))\, d\mathscr{E}(\lambda) u\right\|^2_{\mathscr{H}_{0,e,1}} =$$



$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{\infty}} |\varphi(L_p(\lambda)) - \varphi(L(\lambda))|^2\, d(\mathscr{E}(\lambda) u, u)_{\mathscr{H}_{0,e,1}} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{\infty}} |\varphi(L_p(\lambda)) - \varphi(L(\lambda))|^2 (\mathscr{P}(\lambda) u, u)_{\mathscr{H}_{0,e,1}}\, d\rho(\lambda) \leqslant \quad (1.44)$$

$$\leqslant \|u\|^2_{\mathscr{H}_{+,e,1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{\infty}} |\varphi(L_p(\lambda)) - \varphi(L(\lambda))|^2\, d\rho(\lambda) \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Здесь, как и в (1.40), функции $\varphi(L_p(\lambda))$ и $\varphi(L(\lambda))$ определены $\rho$-почти для всех $\lambda \in \mathbb{R}^{\infty}$. Так как на множестве $C$ (см. (1.42)) полной меры $\rho$ подынтегральное выражение в последнем интеграле (1.44) стремится к нулю и равномерно по $p$ ограничено, то можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить в пределе нуль. Таким образом, в $\mathscr{H}_{0,e,1}$

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_{\mathbb{C}^1} \varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(z) u = \int\limits_{\mathbb{C}^1} \varphi(z)\, d\mathscr{E}_{\mathscr{L}}(z) u \quad (u \in \mathscr{H}_{+,e,1}). \quad (1.45)$$

Нормы всех операторов, изображаемых интегралами из (1.45), равномерно по $p$ ограничены числом $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}^1} |\varphi(z)| < \infty$. Поэтому из (1.45) и плотности $\mathscr{H}_{+,e,1}$ в $\mathscr{H}_{0,e,1}$ следует такое же соотношение (1.45), в котором $u$ заменено на произвольный вектор $f \in \mathscr{H}_{0,e,1}$. ■

В заключение сделаем одно простое замечание, касающееся носителя предела разложений единицы.

Введем следующее общее определение. Пусть $(S_p)_{p=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность множеств $S_p \subseteq \mathbb{C}^1$. Рассмотрим множество $S$ всех тех точек $z \in \mathbb{C}^1$, которые представимы в виде предела $z = \lim\limits_{p\to\infty} z_p$, где $z_p$ — некоторая точка из $S_p$. Это множество назовем пределом последовательности $(S_p)_{p=1}^{\infty}$ и будем писать $S = \lim\limits_{p\to\infty} S_p$; ясно, что $S$ всегда замкнуто.

Легко видеть, что *если последовательность разложений единицы* $(E_p)_{p=1}^{\infty}$ *слабо сходится к разложению единицы* $E$, *то* $\operatorname{supp} E \subseteq \lim\limits_{p\to\infty} \operatorname{supp} E_p$ (простые примеры показывают, что равенства здесь может и не быть). В самом деле, пусть $z_0 \in \operatorname{supp} E$. Построим неотрицательную функцию $\varphi \in C(\mathbb{C}^1)$, $\varphi(z_0) = 1$, равную нулю вне некоторой окрестности $z_0$. Тогда $0 \neq \int\limits_{\mathbb{C}^1} \varphi(z)\, dE(z) = \lim\limits_{p\to\infty} \int\limits_{\mathbb{C}^1} \varphi(z)\, dE_p(z)$, поэтому при $p$ достаточно больших

$\int\limits_{\mathbb{C}^1} \varphi(z)\, dE_p(z) \neq 0$. Это означает, что указанная окрестность содержит точки из supp $E_p$ при этих $p$. ■

Как и ранее, утверждения этого пункта сохраняются для самосопряженных операторов $\mathscr{L}$, а также для нормальных $A_n$.

## § 2. ОПЕРАТОРЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ РАЗДЕЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

Продолжим изучение введенных в § 1, п. 3, 4 функций от операторов, действующих по различным переменным. Вопрос заключается в следующем. Предположим, что задана некоторая записанная посредством формального выражения функция $L(\lambda)$ на $\mathbb{R}^\infty$. Как подыскать семейство самосопряженных операторов $(A_n)_{n=1}^\infty$ (или разложений единицы $(E_n)_{n=1}^\infty$) таким образом, чтобы $L$ оказалось $\mathscr{E}$-почти везде конечной измеримой относительно $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$ функцией на $\mathbb{R}^\infty$? Здесь $\mathscr{E}$ — с. р. е., построенное по соответствующему семейству $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^\infty$. Изучим этот вопрос для функции $L(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$, при этом даже получим в некотором отношении необходимые и достаточные условия на $(E_n)_{n=1}^\infty$. Функция $L(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$, как легко понять, отвечает случаю, когда $\mathscr{L}$ допускает разделение бесконечного числа переменных.

### 1. СВЕРТКА КОНЕЧНОГО ЧИСЛА РАЗЛОЖЕНИЙ ЕДИНИЦЫ НА ОСИ

Покажем, как обобщить понятие свертки функций распределения на оси на случай разложений единицы. Будем рассматривать только разложения единицы на $\mathbb{R}^1$ (в этом параграфе их удобно понимать не как меры $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto E(\Delta)$, а как функции $E(\lambda) = E((-\infty, \lambda))$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$).

Пусть $H_1$, $H_2$ — два сепарабельных гильбертовых пространства, $\mathscr{H} = H_1 \otimes H_2$. Рассмотрим два разложения единицы $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto E_1(\lambda) \in \mathscr{L}(H_1 \to H_1)$ и $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto E_2(\lambda) \in \mathscr{L}(H_2 \to H_2)$. Функции $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto \mathscr{E}_1(\lambda) = (E_1(\lambda)) \otimes 1$ и $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto \mathscr{E}_2(\lambda) = 1 \otimes (E_2(\lambda))$ будут коммутирующими разложениями единицы в $\mathscr{H}$. Определим их свертку.

**Теорема 2.1.** *Определим свертку* $(\mathscr{E}_1 \bigstar \mathscr{E}_2)(\lambda) = \mathscr{F}(\lambda)$ *следующим образом. Пусть* $(e_{\alpha_1}^{(1)})_{\alpha_1=0}^\infty$, $(e_{\alpha_2}^{(2)})_{\alpha_2=0}^\infty$ — *ортонормированные базисы в пространствах* $H_1$, $H_2$ *соответственно. Зафиксируем*



$\lambda \in \mathbb{R}^1$ *и образуем матрицу*

$$A_{\alpha\beta}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} (E_1(\lambda-\mu)\, e_{\beta_1}^{(1)}, e_{\alpha_1}^{(1)})_{H_1}\, d\,(E_2(\mu)\, e_{\beta_2}^{(2)}, e_{\alpha_2}^{(2)})_{H_2} \tag{2.1}$$

$$(\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2) \in N^2).$$

*Эта матрица в ортонормированном базисе* $e_\alpha = e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)}$ $(\alpha \in N^2)$ *пространства* $\mathscr{H} = H_1 \otimes H_2$ *порождает оператор, который мы и обозначаем через* $(\mathscr{E}_1 \bigstar \mathscr{E}_2)(\lambda)$. *Утверждается, что так определенная функция* $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto (\mathscr{E}_1 \bigstar \mathscr{E}_2)(\lambda)$ *является некоторым разложением единицы в* $\mathscr{H}$ *и ее определение не зависит от выбора базисов.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что интеграл (2.1) существует как свертка двух функций ограниченной вариации. Далее определим по (2.1) обычным образом билинейную форму а. $(H_1 \otimes H_2) \ni f, g \mapsto B_\lambda(f, g)$, полагая для

$$f = \sum_{k=1}^p f^{(1),k} \otimes f^{(2),k} = \sum_{k=1}^p \sum_{\beta \in N^2} f_{\beta_1}^{(1),k} f_{\beta_2}^{(2),k} e_\beta = \sum_{\beta \in N^2} f_\beta e_\beta,$$

$$g = \sum_{j=1}^p g^{(1),j} \otimes g^{(2),j} = \sum_{j=1}^p \sum_{\alpha \in N^2} g_{\alpha_1}^{(1),j} g_{\alpha_2}^{(2),j} e_\alpha = \sum_{\alpha \in N^2} g_\alpha e_\alpha$$

$$B_\lambda(f, g) = \sum_{\alpha, \beta \in N^2} A_{\alpha\beta}(\lambda)\, f_\beta \bar{g}_\alpha =$$

$$= \sum_{j,k=1}^p \int\limits_{\mathbb{R}^1} (E_1(\lambda-\mu)\, f^{(1),k}, g^{(1),j})_{H_1}\, d\,(E_2(\mu)\, f^{(2),k}, g^{(2),j})_{H_2} \tag{2.2}$$

(при установлении последнего равенства нужно переставить бесконечные суммы по $\alpha$, $\beta$ с интегралом; возможность такой перестановки легко обосновать).

При $\lambda' < \lambda''$

$$B_{\lambda'}(f, f) \leqslant B_{\lambda''}(f, f) \quad (f \in \text{а. } (H_1 \otimes H_2)). \tag{2.3}$$

В самом деле, обозначим $[\lambda' - \mu, \lambda'' - \mu) = \delta_\mu$, тогда

$$B_{\lambda''}(f, f) - B_{\lambda'}(f, f) =$$

$$= \sum_{j,k=1}^p \int\limits_{\mathbb{R}^1} (E_1(\delta_\mu)\, f^{(1),k}, f^{(1),j})_{H_1}\, d\,(E_2(\mu)\, f^{(2),k}, f^{(2),j})_{H_2}.$$

Для того чтобы установить неотрицательность последней суммы, достаточно убедиться, что подобное выражение с заменой интеграла интегральной суммой неотрицательно, т. е. достаточно проверить неотрицательность суммы вида

$$\sum_{j,k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(E_1(\delta_{\mu_l})f^{(1),k},\ f^{(1),j})_{H_1}(E_2(\Delta_l)f^{(2),k},\ f^{(2),j})_{H_2}=$$
$$=\sum_{l=1}^{q}\sum_{j,k=1}^{p}(E_1(\delta_{\mu_l})f^{(1),k},\ f^{(1),j})_{H_1}(E_2(\Delta_l)f^{(2),k},\ f^{(2),j})_{H_2}.$$

Здесь $\mathbb{R}^1=\bigcup\limits_{l=1}^{q}\Delta_l$ — некоторое разбиение оси на борелевские множества $\Delta_l$, $\mu_l$ — некоторая точка из $\Delta_l$. При фиксированном $l$ каждая из матриц $(a_{jk})_{j,k=1}^{p}=((E_1(\delta_{\mu_l})f^{(1),k},\ f^{(1),j})_{H_1})_{j,k=1}^{p}$, $(b_{jk})_{j,k=1}^{p}=((E_2(\Delta_l)f^{(2),k},\ f^{(2),j})_{H_2})_{j,k=1}^{p}$ положительно определена. Но тогда будет положительно определенной и матрица $(a_{jk}b_{jk})_{j,k=1}^{p}$, поэтому $\sum\limits_{j,k=1}^{p}a_{jk}b_{jk}\geqslant 0$. Неравенство (2.3) установлено.

Далее, легко видеть, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty}B_\lambda(f,f)=(f,f)_{\mathscr{H}}\quad(f\in \mathrm{a}.(H_1\otimes H_2)).\tag{2.4}$$

Действительно, в интеграле (2.2), где $g=f$, можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\lambda\to+\infty$, так как подынтегральная функция ограничена. В результате предельного перехода получим

$$\sum_{j,k=1}^{p}(f^{(1),k},\ f^{(1),j})_{H_1}(f^{(2),k},\ f^{(2),j})_{H_2}=$$
$$=\sum_{j,k=1}^{p}(f^{(1),k}\otimes f^{(2),k},\ f^{(1),j}\otimes f^{(2),j})_{\mathscr{H}}=(f,f)_{\mathscr{H}}.$$

Из (2.3) и (2.4) вытекает, что для каждого $\lambda\in\mathbb{R}^1$ $B_\lambda(f,f)\leqslant(f,f)_{\mathscr{H}}$ ($f\in$ a. $(H_1\otimes H_2)$). Из определения (2.2) непосредственно вытекает, что билинейная форма $B_\lambda$ эрмитова, поэтому последнее неравенство означает, что она ограничена. Таким образом, существует ограниченный самосопряженный оператор $\mathscr{F}(\lambda)\in\mathscr{L}(\mathscr{H}\to\mathscr{H})$ такой, что $(\mathscr{F}(\lambda)f,g)_{\mathscr{H}}=B_\lambda(f,g)$ ($f,g\in$ a. $(H_1\otimes H_2)$).

Убедимся, что функция $\mathbb{R}^1\ni\lambda\mapsto\mathscr{F}(\lambda)$ является разложением единицы в $\mathscr{H}$. Для этого в основном нужно установить соотношение ортогональности $\mathscr{F}(\lambda')\mathscr{F}(\lambda'')=\mathscr{F}(\min(\lambda',\lambda''))$ или, что то же самое, равенство

$$\sum_{\beta\in N^2}A_{\alpha\beta}(\lambda')A_{\beta\gamma}(\lambda'')=A_{\alpha\gamma}(\min(\lambda',\lambda''))\qquad(\lambda',\lambda''\in\mathbb{R}^1;\quad \alpha,\ \gamma\in N^2).\tag{2.5}$$

Зафиксируем $\alpha$, $\gamma\in N^2$. Согласно (2.1)

$$\sum_{\beta\in N^2}A_{\alpha\beta}(\lambda')A_{\beta\gamma}(\lambda'')=$$



$$=\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\sum_{\beta_1=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(E_1(\lambda'-\mu)e^{(1)}_{\beta_1},\ e^{(1)}_{\alpha_1})_{H_1}(E_1(\lambda''-\nu)e^{(1)}_{\gamma_1},\ e^{(1)}_{\beta_1})_{H_1}\times$$
$$\times d(E_2(\mu)e^{(2)}_{\beta_2},\ e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2}d(E_2(\nu)e^{(2)}_{\gamma_2},\ e^{(2)}_{\beta_2})_{H_2}=$$
$$=\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(E_1(\lambda''-\nu)e^{(1)}_{\gamma_1},\ E_1(\lambda'-\mu)e^{(1)}_{\alpha_1})_{H_1}\times$$
$$\times d(E_2(\mu)e^{(2)}_{\beta_2},\ e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2}d(E_2(\nu)e^{(2)}_{\gamma_2},\ e^{(2)}_{\beta_2})_{H_2}=\sum.$$

Здесь мы поменяли местами сумму по $\beta_1$ и двойной интеграл по $(\mu,\ \nu)$ (что легко обосновать) и воспользовались равенством Парсеваля. Пользуясь коммутативностью свертки функций ограниченной вариации (или, если угодно, интегрируя по частям) и соотношением ортогональности $E_n(t')E_n(t'')=E_n(\min(t',\ t''))$ ($t',\ t''\in\mathbb{R}^1$; $n=1,2$), преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$\sum=\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^1}\left(\int_{\mathbb{R}^1}(E_2(\lambda''-\nu)e^{(2)}_{\gamma_2},\ e^{(2)}_{\beta_2}\right)_{H_2}d_\nu(E_1(\nu)e^{(1)}_{\gamma_1},\ E_1(\lambda'-\mu)e^{(1)}_{\alpha_1})_{H_1})\times$$
$$\times d_\mu(E_2(\mu)e^{(2)}_{\beta_2},\ e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2}=\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^1}\left(\int_{-\infty}^{\lambda'-\mu}(E_2(\lambda''-\nu)e^{(2)}_{\gamma_2},\ e^{(2)}_{\beta_2})_{H_2}\times\right.$$
$$\left.\times d_\nu(E_1(\nu)e^{(1)}_{\gamma_1},\ e^{(1)}_{\alpha_1})_{H_1}\right)d_\mu(E_2(\mu)e^{(2)}_{\beta_2},\ e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2}=$$
$$=\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^1}(E_2(\lambda'-\mu)e^{(2)}_{\beta_2},\ e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2}d_\mu\left(\int_{-\infty}^{\mu}(E_2(\lambda''-\nu)e^{(2)}_{\gamma_2},\ e^{(2)}_{\beta_2})_{H_2}\times\right.$$
$$\left.\times d_\nu(E_1(\nu)e^{(1)}_{\gamma_1},\ e^{(1)}_{\alpha_1})_{H_1}\right)=\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^1}(E_2(\lambda'-\mu)e^{(2)}_{\beta_2},\ e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2}\times$$
$$\times(E_2(\lambda''-\mu)e^{(2)}_{\gamma_2},\ e^{(2)}_{\beta_2})_{H_2}d_\mu(E_1(\mu)e^{(1)}_{\gamma_1},\ e^{(1)}_{\alpha_1})_{H_1}=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^1}(E_2(\lambda''-\mu)e^{(2)}_{\gamma_2},\ E_2(\lambda'-\mu)e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2}d(E_1(\mu)e^{(1)}_{\gamma_1},\ e^{(1)}_{\alpha_1})_{H_1}=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^1}(E_2(\min(\lambda',\lambda'')-\mu))e^{(2)}_{\gamma_2},\ e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2}d(E_1(\mu)e^{(1)}_{\gamma_1},\ e^{(1)}_{\alpha_1})_{H_1}=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^1}(E_1(\min(\lambda',\lambda'')-\mu)e^{(1)}_{\gamma_1},\ e^{(1)}_{\alpha_1})_{H_1}d(E_2(\mu)e^{(2)}_{\gamma_2},\ e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2}=$$
$$=A_{\alpha\gamma}(\min(\lambda',\lambda'')).$$

Соотношение (2.5) установлено, т. е. $\mathscr{F}(\lambda')\mathscr{F}(\lambda'')=\mathscr{F}(\min(\lambda',\lambda''))$. В частности, отсюда при $\lambda'=\lambda''=\lambda$ вытекает, что $\mathscr{F}(\lambda)$ ($\lambda\in\mathbb{R}^1$) — проектор.

Для доказательства того, что $\mathcal{F}(\lambda)$ — некоторое разложение единицы, осталось заметить, что выполняются условия нормировки. Из (2.4) вытекает соотношение $\mathcal{F}(+\infty) = 1$. Подобно выводу (2.4) легко найдем, что и $\mathcal{F}(-\infty) = 0$, $\mathcal{F}(\lambda - 0) = \mathcal{F}(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$. Итак, $\mathcal{F}(\lambda)$ — разложение единицы.

Независимость определения свертки от выбора базисов вытекает из представления (2.2) формы $B_\lambda$ через интеграл: это представление не изменится при выборе других базисов $(e^{(1)}_{\alpha_1})_{\alpha_1=0}^\infty$ и $(e^{(2)}_{\alpha_2})_{\alpha_2=0}^\infty$. ■

Изложенное определение свертки $\mathcal{E}_1(\lambda)$ с $\mathcal{E}_2(\lambda)$ по существу сводится к следующему. Записываем формально понимаемый интеграл

$$(\mathcal{E}_1 \bigstar \mathcal{E}_2)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^1} \mathcal{E}_1(\lambda - \mu)\, d\mathcal{E}_2(\mu). \tag{2.6}$$

Этот интеграл сходится в следующем смысле. Применяем (2.6) к $f^{(1)} \otimes f^{(2)}$ и скалярно умножаем в $\mathcal{H}$ результат на $g^{(1)} \otimes g^{(2)}$ $(f^{(1)}, g^{(1)} \in H_1;\ f^{(2)}, g^{(2)} \in H_2)$. Получаем для формального выражения $((\mathcal{E}_1 \bigstar \mathcal{E}_2)(\lambda)(f^{(1)} \otimes f^{(2)}), g^{(1)} \otimes g^{(2)})_{\mathcal{H}}$ некоторую формулу (см. (2.2)), которая позволяет это выражение с помощью билинейности и предельного перехода распространить с $f^{(1)} \otimes f^{(2)}$ и $g^{(1)} \otimes g^{(2)}$ на произвольные $f \in \mathcal{H}$ и $g \in \mathcal{H}$ и доказать, что оно — билинейная форма некоторого непрерывного оператора —именно, $(\mathcal{E}_1 \bigstar \mathcal{E}_2)(\lambda)$.

Указанная процедура пригодна и для конструкции свертки $(\mathcal{E}_2 \bigstar \mathcal{E}_1)(\lambda)$, нужно только соответствующим образом изменить доказательство теоремы 2.1. Ясно, что так определенная свертка коммутативна: $\mathcal{E}_1 \bigstar \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2 \bigstar \mathcal{E}_1$ — это следует из коммутативности свертки функций ограниченной вариации в формуле (2.2).

Определение свертки легко обобщается на случай конечного числа разложений единицы, действующих в различных пространствах. Пусть $H_1, \ldots, H_p$ — сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathcal{H} = \bigotimes_{n=1}^{p} H_n$, в каждом $H_n$ действует разложение единицы $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto E_n(\lambda)$. Функции $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto \mathcal{E}_n(\lambda) = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{n-1} \otimes E_n(\lambda) \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{p-n}$ $(n = 1, \ldots, p)$ будут коммутирующими разложениями единицы в $\mathcal{H}$. Каждое разложение единицы $\mathcal{E}_n(\lambda)$ можно интерпретировать двояко: 1) как разложение единицы в $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$, где $\mathcal{H}' = \bigotimes_{j=1}^{n} H_j$, $\mathcal{H}'' = \bigotimes_{j=n+1}^{p} H_j$, вида $(E'(\lambda)) \otimes 1$; 2) как разложение вида $1 \otimes (E''(\lambda))$, где $\mathcal{H}' = \bigotimes_{j=1}^{n-1} H_j$, $\mathcal{H}'' = \bigotimes_{j=n}^{p} H_j$ (понятно, что в первом случае $n = 1, \ldots, p-1$, во втором $n = 2, \ldots, p$). Такая интерпретация и приведенное выше определение свертки для $p = 2$ позволяет строить последовательно $p$-кратную свертку

$$\mathcal{F}(\lambda) = \left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda) = (\ldots((\mathcal{E}_1 \bigstar \mathcal{E}_2) \bigstar \mathcal{E}_3) \bigstar \cdots \bigstar \mathcal{E}_p)(\lambda), \tag{2.7}$$

являющуюся некоторым разложением единицы.



Легко понять, что имеется ассоциативность: в (2.7) можно расставлять скобки произвольным образом. Вообще свертку (2.7) можно строить так. Образуем формальную свертку $\left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)$ типа (2.6), сходимость соответствующих интегралов понимается в том же смысле, что и в (2.6), нужно только вместо $g^{(1)} \otimes g^{(2)}$ и $f^{(1)} \otimes f^{(2)}$ рассматривать $\bigotimes_{n=1}^{p} g^{(n)}$ и $\bigotimes_{n=1}^{p} f^{(n)}$ $(g^{(n)}, f^{(n)} \in H_n)$.

Предположим теперь, что имеется оснащение каждого $H_n = H_{0,n}$:

$$H_{-,n} \supseteq H_{0,n} \supseteq H_{+,n} \quad (n = 1, \ldots, p), \tag{2.8}$$

причем оператор вложения $O_n : H_{+,n} \to H_{0,n}$ квазиядерный (разумеется, это не является ограничением, так как цепочки (2.8) всегда можно построить). При помощи (2.8) можно обычным образом ввести спектральную меру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto \rho_n(\Delta) = \text{Сл.}\ (O_n^+ E_n(\Delta) O_n)$ $(n = 1, \ldots, p)$.

Тензорно перемножая цепочки (2.8), получаем оснащение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$:

$$\mathcal{H}_- \supseteq \mathcal{H}_0 \supseteq \mathcal{H}_+, \quad \mathcal{H}_- = \bigotimes_{n=1}^{p} H_{-,n}, \quad \mathcal{H}_+ = \bigotimes_{n=1}^{p} H_{+,n}. \tag{2.9}$$

Как известно, сейчас оператор вложения $\mathcal{O} : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_0$ имеет вид $\mathcal{O} = \bigotimes_{n=1}^{p} O_n$ и будет также квазиядерным (см. гл. 1, § 2, п. 5). Введем при помощи (2.9) спектральную меру $\rho$ разложения единицы

$$\mathcal{F}(\lambda) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}(\lambda) = \left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda) : \mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto \rho_{\mathcal{L}_p}(\Delta) = \\ = \text{Сл.}\ (\mathcal{O}^+ \mathcal{F}(\Delta)\, \mathcal{O})$$

(смысл обозначения $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}$ станет ясным чуть ниже). Нетрудно видеть, что *для соответствующих неубывающих функций справедливо равенство*

$$\rho_{\mathcal{L}_p}(\lambda) = \left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^{p} \rho_n\right)(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^1). \tag{2.10}$$

В самом деле, согласно определению (2.7) равенство (2.10) достаточно доказать при $p = 2$. Пусть $(e^{(1)}_{\alpha_1})_{\alpha_1=0}^\infty$, $(e^{(2)}_{\alpha_2})_{\alpha_2=0}^\infty$, $(e_\alpha)_{\alpha \in N^2}$ $(e_\alpha =$

$= e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\alpha_2})$ — ортонормированные базисы в пространствах $H_{+,1}$, $H_{+,2}$ и $\mathcal{H}_+$ соответственно. Тогда благодаря (2.6) с помощью перестановок, которые легко обосновать, получим

$$\rho_{\mathcal{L}_2}(\lambda) = \text{Сл.}\ (\mathcal{O}^+ \mathcal{E}_{\mathcal{L}_2}(\lambda)\mathcal{O}) = \sum_{\alpha\in N^2} (\mathcal{O}^+\mathcal{E}_{\mathcal{L}_2}(\lambda)\mathcal{O}e_\alpha,\ e_\alpha)_{\mathcal{H}_0} =$$

$$= \sum_{\alpha\in N^2}(O_1^+\otimes O_2^+)\int_{\mathbb{R}^1}((E_1(\lambda-\mu))\otimes 1)\,d(1\otimes(E_2(\mu)))\times$$

$$\times (O_1\otimes O_2)(e^{(1)}_{\alpha_1}\otimes e^{(2)}_{\alpha_2}),\ e^{(1)}_{\alpha_1}\otimes e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_1\otimes H_2} =$$

$$= \sum_{\alpha\in N^2}\int_{\mathbb{R}^1}(O_1^+E_1(\lambda-\mu)\,O_1e^{(1)}_{\alpha_1},\ e^{(1)}_{\alpha_1})_{H_1}\,d(O_2^+E_2(\mu)\,O_2e^{(2)}_{\alpha_2},\ e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2} =$$

$$= \sum_{\alpha_2=0}^\infty\int_{\mathbb{R}^1}\rho_1(\lambda-\mu)\,d(O_2^+E_2(\mu)\,O_2e^{(2)}_{\alpha_2},\ e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2} =$$

$$= \sum_{\alpha_2=0}^\infty \int_{\mathbb{R}^1}(O_2^+E_2(\lambda-\mu)\,O_2e^{(2)}_{\alpha_2},\ e^{(2)}_{\alpha_2})_{H_2}\,d\rho_1(\mu) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1}\rho_2(\lambda-\mu)\,d\rho_1(\mu) = (\rho_1\bigstar\rho_2)(\lambda)\ (\lambda\in\mathbb{R}^1).\ \blacksquare$$

Хорошо известно, что если меры $\rho_{\mathcal{L}_p}$ и $\rho_n$ связаны соотношением (2.10), то

$$\operatorname{supp}\rho_{\mathcal{L}_p} = \left(\sum_{n=1}^p \operatorname{supp}\rho_n\right)^\sim, \tag{2.11}$$

где под суммой понимается алгебраическая сумма множеств, расположенных на оси. Так как носители разложения единицы и соответствующей спектральной меры совпадают, то из (2.11) получаем

$$\operatorname{supp}\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p} = \left(\sum_{n=1}^p \operatorname{supp}E_n\right)^\sim,$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}(\lambda) = \left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^p \mathcal{E}_n\right)(\lambda)\quad(\lambda\in\mathbb{R}^1). \tag{2.12}$$

Рассмотрим самосопряженные операторы в пространстве $\mathcal{H} = \bigotimes_{n=1}^p H_n$, отвечающие разложениям единицы $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}$. Обозначим их соответственно через $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}$ ($n = 1, \ldots, p$). Легко видеть, что $\mathcal{A} = L_p(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p)$, *где функция* $L_p(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p)$ *операторов* $\mathcal{A}_n$ *построена по скалярной функции* $\mathbb{R}^p \ni \lambda = (\lambda_n)_{n=}^p \mapsto L_p(\lambda) = \lambda_1+\ldots+\lambda_p\in\mathbb{R}^1$.

Используем следующую просто проверяемую заменой переменных общую формулу. Пусть $\mathbb{R}^1\ni\lambda\mapsto\tau_n(\lambda)\in\mathbb{C}^1$ — функция ограниченной вариации ($n = 1, \ldots, p$), $\mathbb{R}^1\ni\lambda\mapsto\varphi(\lambda)\in\mathbb{C}^1$ — измери-



мая относительно $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ ограниченная функция. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^p}\varphi(\lambda_1+\cdots+\lambda_p)\,d\left(\bigotimes_{n=1}^p\tau_n\right)(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_p) = \int_{\mathbb{R}^1}\varphi(\lambda)\,d\left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^p\tau_n\right)(\lambda). \tag{2.13}$$

Эта же формула справедлива в случае неубывающих $\tau_n(\lambda)$ для произвольной измеримой относительно $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ неотрицательной функции $\varphi(\lambda)$.

Перейдем к доказательству утверждения. Пусть $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)\ni\Delta\mapsto\mathcal{E}(\Delta)$ — с. р. е., построенное по семейству $(\mathcal{E}_n)_{n=1}^p$. Тогда разложение единицы оператора $L_p(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p)$ равно $L_p$-образу $\mathcal{E}_{L_p}$ с. р. е. $\mathcal{E}$ (ср. с § 1, п. 3, где это объяснено для более сложной ситуации счетного числа $\mathcal{E}_n$). Таким образом, нужно доказать, что $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p} = \mathcal{E}_{L_p}$. Положим $f = \bigotimes_{n=1}^p f^{(n)}$, $g = \bigotimes_{n=1}^p g^{(n)}$, где $f^{(n)}$, $g^{(n)}\in H_n$. В силу (2.7) имеем

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}(\lambda)f,\ g)_{\mathcal{H}} = \left(\left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^p\mathcal{E}_n\right)(\lambda)f,\ g\right)_{\mathcal{H}} = \left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^p(E_n(\cdot)f^{(n)},\ g^{(n)})_{H_n}\right)(\lambda)$$

$$(\lambda\in\mathbb{R}^1).$$

Отсюда при помощи (2.13) и (2.52) гл. 2 получаем для $\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}(\Delta)f,\ g)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^1}\varkappa_\Delta(\lambda)\,d\left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^p(E_n(\cdot)f^{(n)},\ g^{(n)})_{H_n}\right)(\lambda) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^p}\varkappa_\Delta(\lambda_1+\cdots+\lambda_p)\,d\left(\bigotimes_{n=1}^p(E_n(\cdot)f^{(n)},\ g^{(n)})_{H_n}\right)(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_p) =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^p}\varkappa_\Delta(L_p(\lambda))\,d\mathcal{E}(\lambda)f,\ g\right)_{\mathcal{H}} = \left(\int_{\mathbb{R}^1}\varkappa_\Delta(\lambda)\,d\mathcal{E}_{L_p}(\lambda)f,\ g\right)_{\mathcal{H}} =$$

$$= (\mathcal{E}_{L_p}(\Delta)f,\ g)_{\mathcal{H}}.$$

Благодаря достаточной произвольности $f$ и $g$ отсюда следует, что $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}(\Delta) = \mathcal{E}_{L_p}(\Delta)$. ■

В соответствии с § 1, п. 3, 4 можно обозначить $\mathcal{A} = \mathcal{L}_p$; $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}$ — его разложение единицы.

Введем теперь оператор $\mathcal{A}$ с других позиций. Пусть в каждом $H_n$ действует эрмитов оператор $A_n$ с областью определения $\mathfrak{D}(A_n)$ ($n = 1, \ldots, p$). Построим оператор в $\mathcal{H}$

$$\mathcal{A}'_{\min} = \sum_{n=1}^p \underbrace{1\otimes\ldots\otimes1}_{n-1}\otimes A_n\otimes\underbrace{1\otimes\ldots\otimes1}_{p-n} = \sum_{n=1}^p\mathcal{A}'_n, \tag{2.14}$$

20 8-393

$$\mathcal{A}'_n = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{n-1} \otimes A_n \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{p-n},$$

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}'_{\min}) = \text{a.} \bigotimes_{n=1}^{p} \mathfrak{D}(A_n), \quad \mathfrak{D}(\mathcal{A}'_n) =$$

$$= \text{a.}\ (H_1 \otimes \ldots \otimes H_{n-1} \otimes \mathfrak{D}(A_n) \otimes H_{n+1} \otimes \ldots \otimes H_p).$$

Ясно, что операторы $\mathcal{A}'_n$ и $\mathcal{A}'_{\min}$ — эрмитовы; их замыкания обозначим через $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}_{\min}$.

**Теорема 2.2.** *Пусть $\mathcal{A}$ построен по разложениям единицы $(E_n)_{n=1}^p$, где $E_n$ отвечает некоторому самосопряженному расширению в $H_n$ оператора $A_n$. Тогда $\mathcal{A}$ является некоторым самосопряженным расширением в $\mathcal{H}$ оператора $\mathcal{A}_{\min}$. Если каждый оператор $A_n$ существенно самосопряжен в $H_n$ $(n = 1, \ldots, p)$, то $\mathcal{A}_{\min}$ самосопряжен и совпадает с $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Для справедливости включения $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_{\min}$ достаточно убедиться, что $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}'_{\min}$ или что для любых $f^{(n)} \in \mathfrak{D}(A_n)$ вектор $f = \bigotimes_{n=1}^{p} f^{(n)} \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}f = \mathcal{A}'_{\min}f$. При помощи (2.7) и (2.13) получим

$$\int_{\mathbb{R}^1} \lambda^2 d(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\lambda) f, f)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda^2 d\left(\bigstar_{n=1}^{p} (E_n(\cdot) f^{(n)}, f^{(n)})_{H_n}\right)(\lambda) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^p} (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)^2 d\left(\bigotimes_{n=1}^{p} E_n(\cdot) f^{(n)}, f^{(n)})_{H_n}\right)(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \leqslant$$

$$\leqslant p \sum_{j=1}^{p} \int_{\mathbb{R}^1} \lambda_j^2 d\left(\bigotimes_{n=1}^{p} (E_n(\cdot) f^{(n)}, f^{(n)})_{H_n}\right)(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) =$$

$$= p \sum_{j=1}^{p} \| f^{(1)} \|_{H_1}^2 \ldots \| f^{(j-1)} \|_{H_{j-1}}^2 \left(\int_{\mathbb{R}^1} \lambda_j^2 d(E_j(\lambda_j) f^{(j)}, f^{(j)})_{H_j}\right) \times$$

$$\times \| f^{(j+1)} \|_{H_{j+1}}^2 \ldots \| f^{(p)} \|_{H_p}^2 < \infty,$$

т. е. $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Далее, для прежнего $f$ и $g = \bigotimes_{n=1}^{p} g^{(n)}$ $(g^{(n)} \in H_n)$ при помощи (2.7), (2.13) и (2.14) получим

$$(\mathcal{A}f, g)_{\mathcal{H}} = \left(\int_{\mathbb{R}^1} \lambda d\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\lambda) f, g\right)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda d\left(\bigstar_{n=1}^{p} (E_n(\cdot) f^{(n)}, g^{(n)})_{H_n}\right)(\lambda) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^p} (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p) d\left(\bigotimes_{n=1}^{p} (E_n(\cdot) f^{(n)}, g^{(n)})_{H_n}\right)(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) =$$



$$= \sum_{j=1}^{p} (f^{(1)}, g^{(1)})_{H_1} \ldots (f^{(j-1)}, g^{(j-1)})_{H_{j-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^1} \lambda_j d(E_j(\lambda_j) f^{(j)}, g^{(j)})_{H_j}\right) \times$$

$$\times (f^{(j+1)}, g^{(j+1)})_{H_{j+1}} \ldots (f^{(p)}, g^{(p)})_{H_p} = \sum_{j=1}^{p} (\mathcal{A}'_j f, g)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{A}'_{\min} f, g)_{\mathcal{H}}.$$

В силу произвольности $g^{(n)} \in H_n$ отсюда следует, что $\mathcal{A}f = \mathcal{A}'_{\min}f$.

Докажем последнее утверждение теоремы. Рассмотрим случай $p = 2$. Так как оператор $\mathcal{A}_{\min} \subseteq \mathcal{A}$, то для доказательства его самосопряженности и совпадения с $\mathcal{A}$ достаточно убедиться, что при некотором невещественном $z \in \mathbb{C}^1$ $\mathcal{R}_z(f^{(1)} \otimes f^{(2)}) \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min})$, где $f^{(1)} \in H_1$, $f^{(2)} \in H_2$. Из равенства $\mathcal{R}_z = \int_{\mathbb{R}^1} (\lambda - z)^{-1} d(\mathcal{E}_1 \bigstar \mathcal{E}_2)(\lambda)$ и (2.6) следует, что

$$\mathcal{R}_z = \int_{\mathbb{R}^1} \mathcal{R}_{z-\mu}^{(1)} d\mathcal{E}_2(\mu),$$

где $\mathcal{R}_z^{(1)}$ — резольвента оператора $\mathcal{A}_1$. Сходимость этого интеграла понимается в том же смысле, что и сходимость интеграла (2.6). Пусть $\mathbb{R}^1 = \bigcup_{l=1}^{q} \Delta_l$ — некоторое разбиение оси на борелевские множества, $\mu_l \in \Delta_l$. Заменив интеграл соответствующей интегральной суммой, получим выражения

$$\sum_{l=1}^{q} (\mathcal{R}_{z-\mu_l}^{(1)} f^{(1)}) \otimes (\mathcal{E}_2(\Delta_l) f^{(2)}) \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}'_{\min}) \subseteq \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min}).$$

Эти выражения, как легко понять, слабо сходятся при продолжении разбиения к $\mathcal{R}_z(f^{(1)} \otimes f^{(2)})$ (нужно использовать указанную сходимость интеграла и ограниченность их норм, которую легко установить). Поэтому можно построить такие их линейные комбинации (также, разумеется, входящие в $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min})$), которые сходятся к $\mathcal{R}_z(f' \otimes f'')$ по норме $\mathcal{H}$. Из замкнутости $\mathcal{A}_{\min}$ вытекает, что $\mathcal{R}_z(f' \otimes f'') \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min})$, что и требовалось доказать.

В случае $p > 2$ доказательство производится аналогично, нужно лишь $\mathcal{E}_2(\lambda)$ заменить на $\left(\bigstar_{n=2}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)$. ■

Оператор $\mathcal{A}_{\min}$ (в частности, $\mathcal{A}$) естественно по аналогии с дифференциальными операторами назвать оператором, допускающим разделение конечного числа переменных. Из (2.12) вытекает следующая формула для спектра $\mathcal{A}$:

$$S(\mathcal{A}) = \left(\sum_{n=1}^{p} S(A_n)\right)^{\sim}. \tag{2.15}$$

Так как $\mathcal{A} = \mathcal{L}_p = L_p(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p)$, то аналогично теореме 1.2 можно доказать формулу типа (1.33) для оператора обобщенного проектирования, отвечающего $\mathcal{A}$.

Сделаем последнее замечание. Построения § 1, п. 1, 3, в которых операторы $A_{p+1} = A_{p+2} = \ldots = 0$, а $L(\lambda) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_p$, по существу будут относиться к рассмотренной в этом пункте ситуации.

## 2. СВЕРТКА БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА РАЗЛОЖЕНИЙ ЕДИНИЦЫ НА ОСИ И ЕЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ

Рассмотрим последовательность $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ сепарабельных гильбертовых пространств $H_n$, $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ $(e^{(n)} \in H_n,\ \| e^{(n)} \|_{H_n} = 1)$ — фиксированная стабилизирующая последовательность, $\mathcal{H}_{e,1} = \bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} H_n$ — соответствующее бесконечное тензорное произведение. Предположим, что в каждом $H_n$ действует некоторое разложение единицы $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto E_n(\lambda)$. Тогда $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto \mathcal{E}_n(\lambda) = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{n-1} \otimes E_n(\lambda) \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots$ будет разложением единицы в $\mathcal{H}_{e,1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Последнее пространство можно интерпретировать как тензорное произведение $\mathcal{H}_{e,1} = H_1 \otimes \ldots \otimes H_p \otimes H'_{p+1}$, где $H'_{p+1} = \bigotimes_{n=p+1;e',1}^{\infty} H_n$ $(e' = (e^{(n)})_{n=p+1}^{\infty})$, поэтому согласно п. 1 существует свертка $\left(\bigstar_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)$, являющаяся некоторым разложением единицы в $\mathcal{H}_{e,1}$.

Определим бесконечную свертку $\left(\bigstar_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$ как разложение единицы в $\mathcal{H}_{e,1}$ такое, что

$$\left(\bigstar_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n\right)(\lambda) = \lim_{p\to\infty} \left(\bigstar_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda), \tag{2.16}$$

где предел понимается в смысле слабой сходимости разложений единицы (см. стр. 293), и выясним условия ее существования. При этом нам понадобится следующая общая лемма, переносящая на разложение единицы хорошо известный факт о слабой сходимости функций распределения (его формулировка такая, как и приводимой леммы).

**Лемма 2.1.** *Пусть $(E_n(\lambda))_{n=1}^{\infty}$ — последовательность разложений единицы, действующих в некотором гильбертовом пространстве $H$. Рассмотрим интегралы*

$$U_n(t) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t} dE_n(\lambda) \quad (t \in \mathbb{R}^1;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{2.17}$$

*являющиеся соответствующими группами унитарных операторов. Последовательность $(E_n(\lambda))_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится при $n \to \infty$ к некоторому разложению единицы тогда и только тогда, когда последовательность векторов $(U_n(t) f)_{n=1}^{\infty}$ для каждых $f \in H$ и $t \in \mathbb{R}^1$ сходится в $H$ и, кроме того, функции $\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto (U_n(t) f, f)_H$ сходятся равномерно на каждом ограниченном интервале оси $\mathbb{R}^1$.*



Доказательство. Пусть в рассматриваемом смысле $E_n \xrightarrow[n\to\infty]{} E$, где $E$ — некоторое разложение единицы. В соответствии с определением слабой сходимости векторы $U_n(t) f$ сходятся в $H$ для каждых $f \in H$ и $t \in \mathbb{R}^1$. Далее, из определения этой же сходимости вытекает, что последовательность $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto (E_n(\lambda) f, f)_H$ $(\| f \|_H = 1;\ n = 1, 2, \ldots)$ функций распределения при $n \to \infty$ слабо сходится к функции распределения $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto (E(\lambda) f, f)_H$. Как хорошо известно, последовательность их преобразований Фурье $\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto (U_n(t) f, f)_H$ сходится при $n \to \infty$ равномерно на каждом ограниченном интервале оси $\mathbb{R}^1$. Разумеется, сказанное справедливо и при $\| f \|_H \neq 1$.

Докажем обратное утверждение леммы. Положим $U(t) f = \lim_{n\to\infty} U_n(t) f$ $(f \in H;\ t \in \mathbb{R}^1)$. Ясно, что каждый оператор $U(t)$ будет изометрическим. Справедливо равенство $U(-t)\, U(t) = 1$ $(t \in \mathbb{R}^1)$. Действительно, для каждого $f \in H$ $U(-t)\, U(t) f = \lim_{n\to\infty} U_n(-t)\, U_n(t) f$, так как

$$\| U(-t)\, U(t) f - U_n(-t)\, U_n(t) f \|_H \leqslant \| U(-t)\, U(t) f - U_n(t)\, U(t) f \|_H + \| U_n(-t)\, U(t) f - U_n(-t)\, U_n(t) f \|_H \leqslant$$
$$\leqslant \| (U(-t) - U_n(-t))\, U(t) f \|_H + \| U(t) f - U_n(t) f \|_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Но $U_n(-t)\, U_n(t) = 1$, что и доказывает требуемое соотношение.

Равенство $U(-t)\, U(t) = 1$ показывает, что операторы $U(t)$ унитарные и $U(-t) = U^{-1}(t) = U^*(t)$ $(t \in \mathbb{R}^1)$. При $t = 0$ и $f \in H$ $U(0) f = \lim_{n\to\infty} U_n(0) f = f$, т. е. $U(0) = 1$.

Для $f, g \in H$ и $t, s \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$(U_n(t + s) f, g)_H = (U_n(s) f,\ U_n(-t) g)_H \xrightarrow[n\to\infty]{} (U(s) f, U(-t) g)_H = (U(t)\, U(s) f, g)_H.$$

С другой стороны, левая часть этого соотношения стремится к $(U(t + s) f, g)_H$. Следовательно, $U(t + s) = U(t)\, U(s)$. Таким образом, операторнозначная функция $\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto U(t)$ является унитарным представлением группы $\mathbb{R}^1$, для которого благодаря последнему условию леммы функция $\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto (U(t) f, f)_H \in \mathbb{C}^1$ непрерывна при каждом $f \in H$. Представляя $(U(t) f, g)_H$ $(f, g \in H)$ через квадратичные формы, заключаем, что и функция $\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto (U(t) f, g)_H \in \mathbb{C}^1$ непрерывна, т. е. представление $\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto U(t)$ слабо непрерывно. Следовательно, оно непрерывно, и для него справедлива теорема Стоуна $U(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t}dE(\lambda)$ $(t\in\mathbb{R}^1)$, где $E(\lambda)$ — некоторое разложение единицы (см., напр.: Наймарк [1, гл. 6, § 29, 31]). Покажем, что в смысле слабой сходимости $E_{\iota}\underset{n\to\infty}{\to} E$.

Зафиксируем $f\in H$ $(\|f\|_H=1)$ и рассмотрим последовательность функций распределения $\mathbb{R}^1\ni\lambda\mapsto(E_n(\lambda)f,f)_H$ $(n=1,2,\ldots)$. Соответствующие преобразования Фурье будут равны $\mathbb{R}^1\ni t\mapsto (U_n(t)f,f)_H$. При $n\to\infty$ они сходятся равномерно на каждом ограниченном интервале к функции $(U(t)f,f)_H$. В силу обычной связи между слабой сходимостью функций распределения и сходимостью их преобразований Фурье заключаем, что в слабом смысле $(E_n(\lambda)f,f)_H\underset{n\to\infty}{\to}\mu(\lambda)$, где $\mathbb{R}^1\ni\lambda\mapsto\mu(\lambda)$ — некоторая функция распределения. Очевидно, $\mu(\lambda)=(E(\lambda)f,f)_H$ $(\lambda\in\mathbb{R}^1)$. Итак, для любой ограниченной $\varphi(\lambda)\in C(\mathbb{R}^1)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1}\varphi(\lambda)\,d(E_n(\lambda)f,f)_H\xrightarrow[n\to\infty]{}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\varphi(\lambda)\,d(E(\lambda)f,f)_H. \tag{2.18}$$

Беря здесь $f\in H$ произвольным и переходя от квадратичных форм к билинейным, заключаем, что в смысле слабой сходимости операторов

$$A_n=\int\limits_{\mathbb{R}^1}\varphi(\lambda)\,dE_n(\lambda)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\varphi(\lambda)\,dE(\lambda)=A. \tag{2.19}$$

Для доказательства сильной сходимости в (2.19) достаточно убедиться, что для каждого $f\in H$ $\|A_nf\|_H\underset{n\to\infty}{\to}\|Af\|_H$. Заменяя в (2.18) $\varphi(\lambda)$ на $|\varphi(\lambda)|^2$, получаем требуемое соотношение. ■

**Теорема 2.3.** *Для того чтобы бесконечная свертка* (2.16) *существовала (и являлась разложением единицы), необходимо, чтобы для всех* $c>0$, *и достаточно, чтобы для некоторого* $c>0$ *выполнялись условия*

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(E_n([-c,c))e^{(n)},e^{(n)})_{H_n}\right)<\infty, \tag{2.20}$$

$$б)\quad \text{ряд}\ \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c}\lambda d(E_n(\lambda)e^{(n)},e^{(n)})_{H_n}\ \text{сходится},$$

$$в)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c}\left[\lambda-\int\limits_{-c}^{c}\lambda d(E_n(\lambda)e^{(n)},e^{(n)})_{H_n}\right]^2 d(E_n(\lambda)e^{(n)},e^{(n)})_{H_n}<\infty.$$

Доказательство. Предположим, что условия (2.20) выполняются. Докажем существование бесконечной свертки. Рассмотрим следующие унитарные операторы в $\mathcal{H}_{e,1}$:



$$\mathcal{U}_p(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{i\lambda t}d\left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^{p}\mathcal{E}_n\right)(\lambda)=\prod_{n=1}^{p}\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{i\lambda t}d\mathcal{E}_n(\lambda) \tag{2.21}$$
$$(t\in\mathbb{R}^1;\ p=1,2,\ldots),$$

где операторы

$$\mathcal{V}_n(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{i\lambda t}d\mathcal{E}_n(\lambda) \tag{2.22}$$

также унитарны.

Пусть $f\in\mathcal{H}_{e,1}$. Из (2.21) вытекает

$$\|\mathcal{U}_p(t)f-\mathcal{U}_q(t)f\|^2_{\mathcal{H}_{e,1}}=\left\|\left(1-\prod_{n=q+1}^{p}\mathcal{V}_n(t)\right)f\right\|^2_{\mathcal{H}_{e,1}}\leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\|f\|^2_{\mathcal{H}_{e,1}}-\left(\left(\prod_{n=q+1}^{p}\mathcal{V}_n(t)\right)f,f\right)_{\mathcal{H}_{e,1}}\right| \tag{2.23}$$
$$(t\in\mathbb{R}^1;\ p>q).$$

Здесь мы использовали общее неравенство $\|(1-U)f\|^2_H=2\mathrm{Re}\,(\|f\|^2_H-(Uf,f)_H)\leqslant 2\,|\|f\|^2_H-(Uf,f)_H|$ $(f\in H)$ для унитарного оператора $U\in\mathcal{L}(H\to H)$.) Для вектора $f$ вида

$$f=f^{(1)}\otimes\ldots\otimes f^{(r)}\otimes e^{(r+1)}\otimes e^{(r+2)}\otimes\ldots\ (f^{(n)}\in H_n;\ n=1,\ldots,r) \tag{2.24}$$

неравенство (2.23) при $q\geqslant r$ переходит в неравенство

$$\|\mathcal{U}_p(t)f-\mathcal{U}_q(t)f\|_{\mathcal{H}_{e,1}}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{2}\|f\|_{\mathcal{H}_{e,1}}\left|1-\prod_{n=q+1}^{p}\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{i\lambda t}d(E_n(\lambda)e^{(n)},e^{(n)})_{H_n}\right| \tag{2.25}$$
$$(t\in\mathbb{R}^1;\ p>q).$$

Рассмотрим функции распределения $\mathbb{R}^1\ni\lambda\mapsto\mu_n(\lambda)=(E_n(\lambda)e^{(n)},e^{(n)})_{H_n}$ $(n=1,2,\ldots)$. По теореме А. Н. Колмогорова о трех рядах (см., напр.: Гихман, Скороход [2, гл. 2, § 3], Винтнер [1, п. 26—33]) условия а) — в) гарантируют существование бесконечной свертки $\left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^{\infty}\mu_n\right)(\lambda)$, которая определяется как функция распределения, являющаяся слабым пределом при $p\to\infty$ функций распределения $\left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^{p}\mu_n\right)(\lambda)$. Переходя к преобразованиям Фурье, заключаем, что существует предел

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{i\lambda t}d\left(\mathop{\bigstar}_{n=1}^{p}\mu_n\right)(\lambda)=\lim_{p\to\infty}\prod_{n=1}^{p}\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{i\lambda t}d\mu_n(\lambda) \tag{2.26}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}^1$, причем этот предел будет равномерным при $t$, изменяющемся по ограниченному интервалу.

Из (2.26) вытекает, что выражение в правой части (2.25) стремится к нулю при $p, q \to \infty$, т. е. $\lim_{p\to\infty} \mathcal{U}_p(t) f$ существует для каждого $t \in \mathbb{R}^1$ и $f$ вида (2.24). Так как эти векторы образуют тотальное множество в $\mathcal{H}_{e,1}$ и $\|\mathcal{U}_p(t)\| = 1$ ($t \in \mathbb{R}^1$; $p = 1, 2, \ldots$), то отсюда следует существование такого же предела для произвольного $f \in \in \mathcal{H}_{e,1}$.

Далее, для $f$ вида (2.24) из (2.21) при $p > r$ следует

$$(\mathcal{U}_p(t) f, f)_{\mathcal{H}_{e,1}} = \\ = \prod_{n=1}^{r} \left( \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t} d(E_n(\lambda) f^{(n)}, f^{(n)})_{H_n} \right) \prod_{n=r+1}^{p} \left( \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t} d\mu_n(\lambda) \right).$$

Сравнивая это выражение с (2.26), заключаем, что $\lim_{p\to\infty} (\mathcal{U}_p(t) f, f)_{\mathcal{H}_{e,1}}$ существует равномерно по $t$, меняющемся в каждом ограниченном интервале. Из тотальности множества векторов вида (2.24) и того, что

$$\|\mathcal{U}_p(t)\| = 1 \quad (t \in \mathbb{R}^1;\ p = 1, 2, \ldots),$$

вытекает аналогичная сходимость и для любого $g \in \mathcal{H}_{e,1}$: нужно оценить $|(\mathcal{U}_p(t) g, g)_{\mathcal{H}_{e,1}} - (\mathcal{U}_q(t) g, g)_{\mathcal{H}_{e,1}}|$, добавляя и вычитая аналогичные члены, в которых один или оба векторы $g$ заменены вектором $h$ из л. о. векторов (2.24) и близким $g$.

Таким образом, выполняются условия леммы 2.1 и, следовательно, существует предел (2.16).

Обратно, пусть свертка (2.16) существует. Так как $\left(\left(\bigstar_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda) \varepsilon, \varepsilon\right)_{\mathcal{H}_{e,1}} = \left(\bigstar_{n=1}^{p} \mu_n\right)(\lambda)$, где $\varepsilon = e^{(1)} \otimes e^{(2)} \otimes \ldots$, то существует и свертка $\left(\bigstar_{n=1}^{\infty} \mu_n\right)(\lambda)$. На основании той же теоремы А. Н. Колмогорова заключаем, что условия (2.20) выполнены. ■

Нетрудно написать более простые достаточные условия, обеспечивающие существование свертки (2.16). *Таким условием будет сходимость по норме пространства* $\mathcal{H}_{e,1}$ *ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n (e^{(1)} \otimes e^{(2)} \otimes \ldots), \quad \mathcal{A}_n = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda d\mathcal{E}_n(\lambda), \tag{2.27}$$

*или (более жесткое) условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n e^{(n)}\|_{H_n} < \infty, \quad A_n = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda dE_n(\lambda). \tag{2.28}$$



Действительно, прежде всего заметим, что из (2.28) следует (2.27): пусть $\varepsilon = e^{(1)} \otimes e^{(2)} \otimes \ldots$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}_n \varepsilon\|_{\mathcal{H}_{e,1}} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{(n)} \otimes \cdots \otimes e^{(n-1)} \otimes A_n e^n \otimes e^{(n+1)} \otimes e^{(n+2)} \otimes \cdots\|_{\mathcal{H}_{e,1}} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n e^{(n)}\|_{H_n} < \infty.$$

Далее, нетрудно показать, что из условия (2.27) следуют условия (2.20) при $c = \infty$ — нужно подсчитать $\|\sum_{n=q+1}^{\infty} \mathcal{A}_n \varepsilon\|^2_{\mathcal{H}_{e,1}}$. Однако в этом случае полезно провести доказательство теоремы 2.3 без использования теоремы А. Н. Колмогорова. Так, построим согласно § 1, п. 1 по семейству $(\mathcal{E}_n)_{n=1}^{\infty}$ коммутирующих разложений единицы с. р. е. $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty) \ni B \mapsto \mathcal{E}(B)$. Тогда операторы (2.22) и (2.27) запишутся в виде

$$\mathcal{V}_n(t) = \int_{\mathbb{R}^\infty} e^{i\lambda_n t} d\mathcal{E}(\lambda), \quad \mathcal{A}_n = \int_{\mathbb{R}^\infty} \lambda_n d\mathcal{E}(\lambda) \quad (t \in \mathbb{R}^1;\quad n = 1, 2, \ldots),$$

поэтому вместо (2.25) на каждом векторе (2.24) при $p > q \geq r$ можно написать оценку

$$\|\mathcal{U}_p(t) f - \mathcal{U}_q(t) f\|^2_{\mathcal{H}_{e,1}} = \left\| \left(1 - \prod_{n=q+1}^{p} \mathcal{V}_n(t)\right) f \right\|^2_{\mathcal{H}_{e,1}} = \\ = \int_{\mathbb{R}^\infty} \left|1 - e^{it \sum_{n=q+1}^{p} \lambda_n}\right|^2 d(\mathcal{E}(\lambda) f, f)_{\mathcal{H}_{e,1}} \leq \\ \leq t^2 \int_{\mathbb{R}^\infty} \left(\sum_{n=q+1}^{p} \lambda_n\right)^2 d(\mathcal{E}(\lambda) f, f)_{\mathcal{H}_{e,1}} = \\ = t^2 \|f\|^2_{\mathcal{H}_{e,1}} \int_{\mathbb{R}^\infty} \left(\sum_{n=q+1}^{p} \lambda_n\right)^2 d(\mathcal{E}(\lambda) \varepsilon, \varepsilon)_{\mathcal{H}_{e,1}} = \\ = t^2 \|f\|^2_{\mathcal{H}_{e,1}} \left\| \sum_{n=q+1}^{p} \mathcal{A}_n \varepsilon \right\|^2_{\mathcal{H}_{e,1}}. \tag{2.29}$$

Из этой оценки следует, что $\lim_{p\to\infty} \mathcal{U}_p(t) f$ существует для каждых $t \in \mathbb{R}^1$ и $f$ вида (2.24). Как и ранее, заключаем, что этот предел существует и для произвольного $f \in \mathcal{H}_{e,1}$. Далее, из (2.29) вытекает,

что
$$|(\mathcal{U}_p(t)f, f)_{\mathcal{H}_{e,1}} - (\mathcal{U}_q(t)f, f)_{\mathcal{H}_{e,1}}| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{\mathcal{H}_{e,1}} \|\mathcal{U}_p(t)f - \mathcal{U}_q(t)f\|_{\mathcal{H}_{e,1}} \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0$$
равномерно по $t$, меняющемся на конечном интервале. Отсюда вытекает такая сходимость при любом $f \in \mathcal{H}_{e,1}$. Таким образом, выполняются условия леммы 2.1, и поэтому предел (2.16) существует. ■

В случае, когда $\operatorname{supp} E_n \subseteq [0, \infty)$ начиная с достаточно больших номеров $n$, условия существования бесконечной свертки (2.16) упрощаются. Так, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.4.** *Если* $\operatorname{supp} E_n \subseteq [0, \infty)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *то последовательность разложений единицы* $\left(\left(\bigstar_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)\right)_{p=1}^{\infty}$ *является невозрастающей для каждого* $\lambda \in \mathbb{R}^1$, *поэтому при* $\lambda \in \mathbb{R}^1$ *существует предел* (2.16), *понимаемый как сильный предел операторов.*

*Если, кроме того, выполнены условия а), б) из* (2.20) *при некотором* $c > 0$, *то этот предел будет разложением единицы и его существование можно понимать в смысле слабой сходимости разложений единицы.*

Доказательство. Для того чтобы убедиться в справедливости первой части теоремы, очевидно, достаточно проверить неравенство $(\mathcal{E}_1 \bigstar \mathcal{E}_2)(\lambda) \leqslant \mathcal{E}_1(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$, где свертка построена в $\mathcal{H} = H_1 \otimes H_2$ согласно (2.6), причем $\operatorname{supp} E_n \subseteq [0, \infty)$ $(n = 1, 2)$. Имеем
$$(\mathcal{E}_1 \bigstar \mathcal{E}_2)(\lambda) = \int_0^\infty (E_1(\lambda - \mu) \otimes 1)\, d(1 \otimes E_2(\mu)) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\infty (E_1(\lambda) \otimes 1)\, d(1 \otimes E_2(\mu)) = E_1(\lambda) \otimes 1 = \mathcal{E}_1(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^1).$$
Эту оценку легко обосновать следующим образом. Вместо интеграла напишем соответствующую интегральную сумму и затем воспользуемся неубыванием функции $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto E_1(\lambda)$ и следующим простым фактом: если в гильбертовом пространстве $H$ имеются три ограниченных оператора $A$, $B$ и $C$ такие, что $A \leqslant B$, $C$ неотрицательный и коммутирует с $A$ и $B$, то $AC \leqslant BC$.

Итак, при каждом $\lambda \in \mathbb{R}^1$ последовательность проекторов в $\mathcal{H}_{e,1}$ $\left(\left(\bigstar_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)\right)_{p=1}^{\infty}$ не возрастает, поэтому существует ее сильный предел $\mathcal{F}(\lambda)$, являющийся также проектором. Очевидно, $\mathcal{F}(\lambda') \leqslant \mathcal{F}(\lambda'')$ $(\lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}^1;\ \lambda' < \lambda'')$ и $\mathcal{F}(-\infty) = 0$. Однако, вообще говоря, $\mathcal{F}(+\infty) \neq 1$. Поэтому для того чтобы $\mathcal{F}$ было разложением единицы, необходимы дополнительные условия (простой пример, когда $\mathcal{F}(+\infty) = 0$: положим $E_n(\lambda) = 0$ для $\lambda \leqslant 1$ и $E_n(\lambda) = 1$ для $\lambda > 1$, $n = 1, 2, \ldots$).



Докажем вторую часть теоремы. Обозначим $a_n = \int_0^c \lambda d(E_n(\lambda) e^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} \geqslant 0$. Условие б) из (2.20) означает, что $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$. Покажем, что отсюда следует выполнение и условия в). В самом деле,
$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^c \left[\lambda - \int_0^c \lambda d(E_n(\lambda)e^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}\right]^2 d(E_n(\lambda)e^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} =$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \left[\int_0^c \lambda^2 d(E_n(\lambda)e^{(n)}, e^{(n)})_{H_n} - 2a_n^2 + a_n^2 (E_n([0, c))e^{(n)}, e^{(n)})_{H_n}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty (ca_n - a_n^2) < \infty.$$
Итак, в нашем случае из выполнения условий а), б) следует выполнение условий а) — в), поэтому существует свертка (2.16).

Легко понять, что введенная выше функция $\mathcal{F}(\lambda)$ равна $\left(\bigstar_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^1)$. В самом деле, для $f \in \mathcal{H}_{e,1}$ и финитной $\varphi \in C(\mathbb{R}^1)$ вследствие теоремы Хелли и определения слабой сходимости в (2.16) имеем
$$\int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d(\mathcal{F}(\lambda)f, f)_{\mathcal{H}_{e,1}} = \lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d\left(\left(\bigstar_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda) f, f\right)_{\mathcal{H}_{e,1}} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d\left(\left(\bigstar_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n\right)(\lambda) f, f\right)_{\mathcal{H}_{e,1}}.$$
В силу произвольности $\varphi$ и $f$ отсюда следует требуемое равенство. ■

Как и в случае конечной свертки, введем соответствующую разложению единицы $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\lambda) = \left(\bigstar_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)$ спектральную меру. Для этого рассмотрим последовательность оснащений пространств $H = H_{0,n}$
$$H_{-,n} \supseteq H_{0,n} \supseteq H_{+,n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.30}$$
таких, что $e^{(n)} \in H_{+,n}$, $\|e^{(n)}\|_{H_{+,n}} = 1$, операторы вложения $O_n : H_{+,n} \to H_{0,n}$ квазиядерны и
$$\sum_{n=1}^\infty (|O_n|^2 - 1) < \infty. \tag{2.31}$$
Разумеется, оснащения (2.30) всегда можно построить. Перемножив цепочки (2.30), получим оснащение (1.5) пространства $\mathcal{H}_{e,1} =$

$= \mathcal{H}_{0,e,\mathrm{i}}$ с требуемыми свойствами (см. § 1, п. 1). Спектральная мера $\rho_{\mathcal{L}}$ определяется обычным образом: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto \rho_{\mathcal{L}}(\Delta) = \text{Сл.}\,(\mathcal{O}^+ \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\Delta)\,\mathcal{O})$.

Покажем, что подобно (2.10) функция $\rho_{\mathcal{L}}(\lambda)$ выражается в виде бесконечной свертки функций $\rho_n(\lambda)$. При доказательстве теоремы 2.3 уже напоминалось понятие бесконечной свертки функций распределения. Функции $\rho_n(\lambda)$ не будут функциями распределения, так как $\rho_n(+\infty) = \rho_n(\mathbb{R}^1) = |O_n|^2 > 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Но вследствие (2.31) произведение $\prod_{n=1}^{\infty} |O_n|^2 \in (1, \infty)$ сходится, поэтому если аналогично определять свертку $\left(\bigstar_{n=1}^{\infty} \rho_n\right)(\lambda)$, то она будет существовать одновременно со сверткой функций распределения $\left(\bigstar_{n=1}^{\infty} \rho_n^*\right)(\lambda)$, где $\rho_n^*(\lambda) = |O_n|^{-2} \rho_n(\lambda)$. Нетрудно показать, что выполнение условий (2.20) влечет выполнение условий теоремы А. Н. Колмогорова для последовательности $(\rho_n^*(\lambda))_{n=1}^{\infty}$, и поэтому обе последние свертки существуют. Однако мы поступим проще.

**Теорема 2.5.** *Для спектральной меры $\rho_{\mathcal{L}}$, отвечающей разложению единицы $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\lambda) = \left(\bigstar_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)$, справедлива формула*

$$\rho_{\mathcal{L}}(\lambda) = \left(\bigstar_{n=1}^{\infty} \rho_n\right)(\lambda) = \lim_{p\to\infty} \left(\bigstar_{n=1}^{p} \rho_n\right)(\lambda) \tag{2.32}$$

*(предел понимается в смысле слабой сходимости неубывающих функций).*

Доказательство. Используем сейчас следующий простой факт. Пусть $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$ — цепочка, состоящая из сепарабельных гильбертовых пространств, $(A_p)_{p=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных операторов $A_p : H_+ \to H_-$, сильно сходящаяся к оператору $A : H_+ \to H_-$. Тогда $A$ также неотрицателен и $\text{Сл.}\,(A) = \lim_{p\to\infty} \text{Сл.}\,(A_p)$.

Так как каждая ограниченная функция из $C(\mathbb{R}^1)$ представима в виде линейной комбинации четырех неотрицательных ограниченных функций $\varphi$ из $C(\mathbb{R}^1)$, то для установления (2.32) достаточно убедиться, что для такой $\varphi$

$$\int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d\rho_{\mathcal{L}}(\lambda) = \lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d\left(\bigstar_{n=1}^{p} \rho_n\right)(\lambda). \tag{2.33}$$

Имеем с помощью (2.10)

$$\int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d\rho_{\mathcal{L}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d\,(\text{Сл.}\,(\mathcal{O}^+ \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\lambda)\,\mathcal{O})) =$$



$$= \text{Сл.}\left(\int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d\,(\mathcal{O}^+ \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\lambda)\,\mathcal{O})\right) = \text{Сл.}\left(\mathcal{O}^+\left(\int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\lambda)\right)\mathcal{O}\right) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \text{Сл.}\left(\mathcal{O}^+\left(\int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d\left(\bigstar_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)\right)\mathcal{O}\right) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d\left(\text{Сл.}\left(\mathcal{O}^+\left(\bigstar_{n=1}^{p} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)\,\mathcal{O}\right)\right) = \lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)\, d\left(\bigstar_{n=1}^{p} \rho_n\right)(\lambda).$$

Мы здесь поменяли местами Сл. с интегралом и lim на основании упомянутого общего факта и использовали соотношения п. 1. Равенство (2.33) установлено. ■

## 3. РАЗДЕЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

Подобно конечной свертке свяжем с бесконечной сверткой некоторый самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ в $\mathcal{H}_{0,e,\mathrm{i}}$ такой, что $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ будет его разложением единицы

Рассмотрим введенное в § 1, п. 1 семейство коммутирующих самосопряженных операторов $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$, действующих по различным переменным; $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty) \ni B \mapsto \mathcal{E}(B)$ — его с. р. е., построенное по разложениям единицы $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto E_n(\Delta)$ соответствующих операторов $A_n$ в $H_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

**Теорема 2.6.** *Предположим, что для последовательности $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ разложений единицы выполняются условия (2.20) при некотором $c > 0$. Тогда функция*

$$\mathbb{R}^\infty \ni \lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto L(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \tag{2.34}$$

*определена и конечна почти для всех $\lambda \in \mathbb{R}^\infty$ относительно соответствующего с. р. е. $\mathcal{E}$, при этом а) $L_p(\lambda) = L_{p,\text{ц}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_p \underset{p\to\infty}{\to} L(\lambda)$ почти для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^\infty$ относительно $\mathcal{E}$; б) разложения единицы $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}$ самосопряженных операторов $\mathcal{L}_p = L_{p,\text{ц}}(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p)$ слабо сходятся при $p \to \infty$ к $\left(\bigstar_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n\right)(\lambda)$ и поэтому в силу теоремы 1.3 последняя свертка совпадает с разложением единицы, построенным согласно (1.30) по $\mathcal{E}$ и (2.34).*

*Обратно, если для некоторой последовательности $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ разложений единицы выполняется условие б), то для нее выполняются и условия (2.20) при любом $c > 0$.*

Доказательство. По существу нам нужно лишь доказать, что из (2.20) следует а). В самом деле, отсюда будет вытекать требуемая сходимость ряда (2.34). Далее, согласно п. 1 $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_p}(\lambda) =$

$=\left(\bigstar_{n=1}^{p}\mathscr{E}_n\right)(\lambda)$, поэтому б) следует из теоремы 2.3. Обратно, если б) выполнено, то это означает существование свертки (2.16) и в силу той же теоремы 2.3 выполнение условий (2.20).

Итак, пусть условия (2.20) выполнены при некотором $c>0$. Докажем, что $L_p(\lambda)\underset{p\to\infty}{\to}L(\lambda)$, $\mathscr{E}$-почти везде. Без ограничения общности можно предполагать, что построены оснащения (2.30) со свойством (2.31). При помощи (1.5) введем спектральную меру $\rho$, отвечающую $\mathscr{E}$; она выражается через $\rho_n$ согласно (1.6): $\rho=\bigotimes_{n=1}^{\infty}\rho_n$. Достаточно доказать, что $L_p(\lambda)\underset{p\to\infty}{\to}L(\lambda)$ $\rho$-почти везде. Следующее ниже рассуждение по существу хорошо известно (Винтнер [1, п. 39—40], Гихман, Скороход [2, гл. 2, § 3]).

Докажем прежде всего, что последовательность $(L_p(\lambda))_{p=1}^{\infty}$ фундаментальна относительно меры $\rho$. Для $p>q$ и $\varepsilon>0$ с помощью (2.13) получим

$$\rho(\{\lambda\in\mathbb{R}^\infty \mid |L_p(\lambda)-L_q(\lambda)|>\varepsilon\})=$$
$$=\int\limits_{\left|\sum_{n=q+1}^{p}\lambda_n\right|>\varepsilon}\cdots\int d\left(\bigotimes_{n=q+1}^{p}\rho_n\right)(\lambda_{q+1},\ldots,\lambda_p)=$$
$$=\int\limits_{|\lambda|>\varepsilon}d\left(\bigstar_{n=q+1}^{p}\rho_n\right)(\lambda). \tag{2.35}$$

Так как сейчас свертка (2.32) существует, то на основании скалярного варианта леммы 2.1 заключаем, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\hat{\rho}_n(t)$, где $\hat{\rho}_n(t)=\int_{\mathbb{R}^1}e^{i\lambda t}d\rho_n(t)$, сходится равномерно по $t$, меняющемся на любом ограниченном интервале оси $\mathbb{R}^1$. Поэтому в смысле такой же сходимости $\prod_{n=q}^{p}\hat{\rho}_n(t)\underset{q,p\to\infty}{\to}1$. Возвращаясь к сверткам, заключаем, что в смысле слабой сходимости неубывающих функций $\left(\bigstar_{n=q}^{p}\rho_n\right)(\lambda)\underset{p,q\to\infty}{\to}\delta_0(\lambda)$, где $\delta_0$ — единичная мера, сконцентрированная в точке $\lambda=0$. Отсюда и из (2.35) заключаем, что для произвольных $\varepsilon$, $\delta>0$ существует $m=m(\varepsilon,\delta)$ такое, что

$$\rho(\{\lambda\in\mathbb{R}^\infty \mid |L_p(\lambda)-L_q(\lambda)|>\varepsilon\})<\delta;\quad p,\ q>m. \tag{2.36}$$

Покажем, что справедливо неравенство

$$\rho(\{\lambda\in\mathbb{R}^\infty \mid \max_{m<r\leqslant p}|L_r(\lambda)-L_m(\lambda)|>2\varepsilon\})\leqslant\frac{\delta}{\rho(\mathbb{R}^\infty)-\delta}. \tag{2.37}$$



Введем следующие множества из $\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$:

$$A_r=\{\lambda\in\mathbb{R}^\infty \mid |L_{m+1}(\lambda)-L_m(\lambda)|\leqslant 2\varepsilon,\ \ldots,\ |L_{r-1}(\lambda)-L_m(\lambda)|\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon,\ |L_r(\lambda)-L_m(\lambda)|>2\varepsilon\},$$
$$B_r=\{\lambda\in\mathbb{R}^\infty \mid |L_p(\lambda)-L_m(\lambda)|\leqslant\varepsilon\}\quad(r=m+1,\ \ldots,\ p).$$

Легко видеть, что $\{\lambda\in\mathbb{R}^\infty \mid |L_p(\lambda)-L_m(\lambda)|>\varepsilon\}\supseteq\bigcup_{r=m+1}^{p}(A_r\cap B_r)$, $A_j\cap A_k=\varnothing$ $(j\neq k;\ j,\ k=m+1,\ \ldots,\ p)$ и $\rho(A_r\cap B_r)=\rho(A_r)\rho(B_r)$ $(r=m+1,\ \ldots,\ p)$. Поэтому

$$\delta>\rho(\{\lambda\in\mathbb{R}^\infty \mid |L_p(\lambda)-L_m(\lambda)|>\varepsilon\})\geqslant\rho\left(\bigcup_{r=m+1}^{p}(A_r\cap B_r)\right)=$$
$$=\sum_{r=m+1}^{p}\rho(A_r\cap B_r)=\sum_{r=m+1}^{p}\rho(A_r)\rho(B_r)\geqslant(\rho(\mathbb{R}^\infty)-\delta)\sum_{r=m+1}^{p}\rho(A_r)=$$
$$=(\rho(\mathbb{R}^\infty)-\delta)\rho(\{\lambda\in\mathbb{R}^\infty \mid \max_{m<r\leqslant p}|L_r(\lambda)-L_m(\lambda)|>2\varepsilon\}).$$

Отсюда вытекает (2.37).

Положим $A_{n,N}=\{\lambda\in\mathbb{R}^\infty \mid \sup_{j,k>n}|L_j(\lambda)-L_k(\lambda)|>N^{-1}\}\in\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$ расходится на множестве $B=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{n,N}$. Оценим $\rho(B)$. Из включения $A_{n,N}\subseteq\{\lambda\in\mathbb{R}^\infty \mid \sup_{m<r\leqslant p}|L_r(\lambda)-L_m(\lambda)|>2\varepsilon\}$ при $n<m$, $N^{-1}\geqslant 2\varepsilon$ и неравенства (2.37) следует, что

$$\rho(A_{n,N})\leqslant\rho(\{\lambda\in\mathbb{R}^\infty \mid \sup_{m<r\leqslant p}|L_r(\lambda)-L_m(\lambda)|>2\varepsilon\})\leqslant\frac{\delta}{\rho(\mathbb{R}^\infty)-\delta}$$
$$(n<m,\quad N^{-1}\geqslant 2\varepsilon),$$

откуда $\rho\left(\bigcap_{n=1}^{m-1}A_{n,N}\right)\leqslant\delta(\rho(\mathbb{R}^\infty)-\delta)^{-1}$. Так как в (2.36) $m$ может быть сделано сколь угодно большим, а $\delta$ — сколь угодно малым, то последнее неравенство показывает, что $\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{n,N}\right)=0$ $(N^{-1}\geqslant 2\varepsilon)$. Так как $\varepsilon>0$ в (2.36) произвольно, то это равенство имеет место при любом $N=1,2,\ldots$ Поэтому $\rho(B)=0$. Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$ сходится $\rho$-почти для всех $\lambda\in\mathbb{R}^\infty$. ■

Итак, мы можем интерпретировать бесконечную свертку $\left(\mathop{\bigstar}\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_n\right)(\lambda)$, если она существует, как разложение единицы $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}(\lambda)$ оператора $\mathscr{L}$ в $\mathscr{H}_{0,e,1}$, построенного по $\mathscr{E}$ и (2.34) согласно (1.30); этот оператор мы также будем обозначать через $\mathcal{A}$; $\mathscr{E}_{\mathcal{A}} = \mathscr{E}_{\mathscr{L}}$ (тем самым мы оправдали обозначения, введенные во второй части п. 2). Сейчас, разумеется, применимы все результаты § 1, п. 3, 4. В частности, *для оператора* $\mathcal{A}$ *справедлива теорема* 1.2, *где* $\mathbb{C}^1$ *заменено на* $\mathbb{R}^1$ *и* $L$ *имеет вид* (2.34).

Перейдем теперь, как и в п. 1, к непосредственному построению оператора $\mathcal{A}$. Пусть в каждом пространстве $H_{0,n}$ действует эрмитов оператор $A_n$ с областью определения $\mathfrak{D}(A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Зафиксируем некоторую стабилизирующую последовательность $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, $e^{(n)} \in \mathfrak{D}(A_n)$ и построим тензорное произведение $\mathscr{H}_{0,e,1} = \bigotimes\limits_{n=1;e,1}^{\infty} H_{0,n}$. В $\mathscr{H}_{0,e,1}$ определим эрмитовы операторы $\mathcal{A}_n'$ согласно формулам (1.1) и положим в смысле сходимости в $\mathscr{H}_{0,e,1}$

$$\mathcal{A}_{\min}' f = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} (\underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n-1} \otimes A_n \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots) f =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} \mathcal{A}_n' f, \tag{2.38}$$

$$f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min}') = \text{a.}\left(\bigotimes_{n=1;e,1}^{\infty} \mathfrak{D}(A_n)\right).$$

Для корректного определения $\mathcal{A}_{\min}'$ достаточно потребовать выполнение условий типа (2.27), (2.28): в пространстве $\mathscr{H}_{0,e,1}$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n' (e^{(1)} \otimes e^{(2)} \otimes \cdots) \tag{2.39}$$

или (более жесткое условие) справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| A_n e^{(n)} \|_{H_n} < \infty. \tag{2.40}$$

Поясним, что так как каждый вектор $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min}')$ имеет вид $f = f_q \otimes e^{(q+1)} \otimes e^{(q+2)} \otimes \ldots$, где $f_q \in \text{a.}\left(\bigotimes\limits_{n=1}^{q} \mathfrak{D}(A_n)\right)$, то сходимость ряда (2.39) влечет сходимость в $\mathscr{H}_{0,e,1}$ и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n' f$, т. е. $\mathcal{A}_{\min}'$ определен корректно. Ясно также, что из (2.40) следует сходимость ряда (2.39) — будет сходиться даже ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| \mathcal{A}_n' (e^{(1)} \otimes e^{(2)} \otimes \otimes \ldots) \|_{\mathscr{H}_{0,e,1}}$.



В дальнейшем всегда будем требовать выполнение условия (2.39) (или (2.40)). Оператор $\mathcal{A}_{\min}'$, очевидно, эрмитов. Пусть $\mathcal{A}_{\min}$ — его замыкание. Справедлива следующая теорема, обобщающая теорему 2.2.

**Теорема 2.7.** *Пусть оператор* $\mathcal{A} = \mathscr{L}$ *построен согласно теореме* 2.6 *по последовательности* $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *разложений единицы, где каждое* $E_n$ *отвечает некоторому самосопряженному расширению в* $H_n$ *оператора* $A_n$ *(предполагается выполненным условие* (2.39)*).*

*Утверждается, что* $\mathcal{A}$ *является некоторым самосопряженным расширением в* $\mathscr{H}_{0,e,1}$ *оператора* $\mathcal{A}_{\min}$. *Если каждый оператор* $A_n$ *существенно самосопряжен в* $H_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *то* $\mathcal{A}_{\min}$ *самосопряжен и совпадает с* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Так как $\int\limits_{\mathbb{R}^1} \lambda dE_n(\lambda) \supseteq A_n$, то $\int\limits_{\mathbb{R}^1} \lambda d\mathscr{E}_n(\lambda) \supseteq \mathcal{A}_n'$ $(n = 1, 2, \ldots)$, поэтому условие (2.39) влечет выполнение условия (2.27). Таким образом, требования (2.20) выполнены и оператор $\mathcal{A} = \mathscr{L}$ можно построить.

Пусть

$$f = f^{(1)} \otimes \cdots \otimes f^{(q)} \otimes e^{(q+1)} \otimes e^{(q+2)} \otimes \cdots \ (f^{(n)} \in \mathfrak{D}(A_n)), \tag{2.41}$$

$q = 1, 2, \ldots$ — фиксировано. Ясно, что $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min}')$. Покажем включение $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}^1)$ неотрицательна, не превосходит единицы и финитна. При помощи определения (2.16), если положить $L_p(\lambda) = L_{p,\text{ц}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \sum\limits_{n=1}^{p} \lambda_n$, $\mathscr{L}_p = L_{p,\text{ц}}(\mathcal{A}_1, \ldots \ldots, \mathcal{A}_p)$ и учесть, что $\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(\lambda) = \left(\mathop{\bigstar}\limits_{n=1}^{p} \mathscr{E}_n\right)(\lambda)$ (см. п. 1), получим

$$\int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda) \lambda^2 d(\mathscr{E}_{\mathcal{A}}(\lambda) f, f)_{\mathscr{H}_{0,e,1}} =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda) \lambda^2 d(\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(\lambda) f, f)_{\mathscr{H}_{0,e,1}} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}^1} \lambda^2 d(\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(\lambda) f, f)_{\mathscr{H}_{0,e,1}} = \lim_{p\to\infty} \| \mathscr{L}_p f \|^2_{\mathscr{H}_{0,e,1}} =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{p} \mathcal{A}_n' f \right\|^2_{\mathscr{H}_{0,e,1}} = \| \mathcal{A}_{\min}' f \|^2_{\mathscr{H}_{0,e,1}} < \infty.$$

Мы здесь воспользовались тем обстоятельством, что $\mathscr{L}_p$ является расширением эрмитова в $\mathscr{H}_{0,e,1}$ оператора, определяемого соотношением $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min}') \ni f \mapsto \sum\limits_{n=1}^{p} \mathcal{A}_n' f$, — это очевидное следствие теоремы 2.2.

В силу произвольности $\varphi$ из полученного неравенства следует, что $\int\limits_{\mathbb{R}^1} \lambda^2 d(\mathcal{E}_{\mathcal{A}} f, f)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} < \infty$, т. е. $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Так как $\mathfrak{D}(\mathcal{A}'_{\min})$ состоит из л. о. векторов вида (2.41), то $\mathfrak{D}(\mathcal{A}'_{\min}) \subseteq \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, а значит, и $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min}) \subseteq \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Докажем, что $\mathcal{A}_{\min} \subseteq \mathcal{A}$. Для этого достаточно убедиться, что $\mathcal{A}'_{\min} f = \mathcal{A} f$ в случае рассматривавшегося сейчас вектора $f$. Вследствие теоремы 2.6 и равенства (1.30) можно написать

$$\mathcal{A} = \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) d\mathcal{E}(\lambda), \quad \mathcal{L}_p = \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \left( \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \right) d\mathcal{E}(\lambda) \quad (p = 1, 2, \ldots). \tag{2.42}$$

Пусть $B_N = \{\lambda \in \mathbb{R}^\infty \mid |\lambda_1| \leqslant N, \ |\lambda_1 + \lambda_2| \leqslant N, \ \ldots\} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$. Ясно, что в соответствии с (2.42) для любого $g \in \mathcal{H}_{0,e,1}$ имеем

$$\begin{gathered}
(\mathcal{E}(B_N) \mathcal{A} f, g)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} = \int\limits_{B_N} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) d(\mathcal{E}(\lambda) f, g)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}, \\
(\mathcal{E}(B_N) \mathcal{L}_p f, g)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} = \int\limits_{B_N} \left( \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \right) d(\mathcal{E}(\lambda) f, g)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} \\
(N, \ p = 1, 2, \ldots).
\end{gathered} \tag{2.43}$$

Для каждого фиксированного $N$ при $p \to \infty$ вторые интегралы в (2.43) стремятся к первому благодаря теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Таким образом, $(\mathcal{E}(B_N) \mathcal{A} f, g)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} = \lim\limits_{p \to \infty} (\mathcal{E}(B_N) \mathcal{L}_p f, g)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}$. Но по норме $\mathcal{H}_{0,e,1}$ $\mathcal{L}_p f = \sum\limits_{n=1}^{p} \mathcal{A}'_n f \xrightarrow[p \to \infty]{} \mathcal{A}'_{\min} f$, поэтому

$$(\mathcal{E}(B_N) \mathcal{A} f, g)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} = (\mathcal{E}(B_N) \mathcal{A}'_{\min} f, g)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} \quad (N = 1, 2, \ldots). \tag{2.44}$$

Так как согласно теореме 2.6 $\mathcal{E}$-почти для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^\infty$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ сходится, то его частичные суммы ограничены и $\lambda \in B_N$ при некотором $N$. Таким образом, $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} B_N$ имеет полную меру $\mathcal{E}$, и поэтому $\mathcal{E}(B_1) \leqslant \mathcal{E}(B_2) \leqslant \ldots$ и сильно $\lim\limits_{N \to \infty} \mathcal{E}(B_N) = 1$. Переходя в (2.44) к пределу при $N \to \infty$ и учитывая произвольность $g$, заключаем, что $\mathcal{A} f = \mathcal{A}'_{\min} f$.

Перейдем к доказательству последнего утверждения теоремы. Сперва установим один общий факт. *Зафиксируем* $p = 1, 2, \ldots$ *и*



*введем следующий эрмитов оператор, действующий в* $\mathcal{H}_{0,e,1}$:

$$\mathcal{A}^{(p)\prime}_{\min} f = \sum_{n=1}^{p} \mathcal{A}'_n f, \tag{2.45}$$

$$f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}^{(p)\prime}_{\min}) = \text{a.}\ (\mathfrak{D}(A_1) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{D}(A_p) \otimes H_{p+1} \otimes H_{p+2} \otimes \cdots).$$

*Пусть* $\mathcal{A}^{(p)}_{\min}$ — *его замыкание. Утверждается, что если вектор* $f = f^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$, *где* $f^{(p)} \in \bigotimes\limits_{n=1}^{p} H_n$, *входит в* $\mathfrak{D}(\mathcal{A}^{(p)}_{\min})$, *то он входит и в* $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min})$.

Действительно, пусть $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}^{(p)}_{\min})$. Тогда существует последовательность векторов $(f_m)_{m=1}^{\infty}$, $f_m \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}^{(p)\prime}_{\min})$ такая, что в $\mathcal{H}_{0,e,1}$ $f_m \xrightarrow[m \to \infty]{} f$ и $\sum\limits_{n=1}^{p} \mathcal{A}'_n f_m \xrightarrow[m \to \infty]{} \mathcal{A}^{(p)}_{\min} f$. Обозначим через $P$ про-

ектор в $\bigotimes\limits_{n=p+1;\,l,1}^{\infty} H_n$, где $l = (e^{(n)})_{n=p+1}^{\infty}$, на вектор $e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \ldots$ Тогда $g_m = (\underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{p} \otimes P) f_m$ сходится к $f$ и

$$\mathcal{A}^{(p)\prime}_{\min} g_m = \left( \sum_{n=1}^{p} \mathcal{A}'_n \right) g_m = (\underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{p} \otimes P) \left( \sum_{n=1}^{p} \mathcal{A}'_n \right) f_m \xrightarrow[m \to \infty]{} \xrightarrow[m \to \infty]{} \mathcal{A}^{(p)}_{\min} f. \tag{2.46}$$

Так как $g_m \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}'_{\min})$ и $g_m \xrightarrow[m \to \infty]{} f$ в $\mathcal{H}_{0,e,1}$, то для доказательства утверждения достаточно показать, что в $\mathcal{H}_{0,e,1}$ существует предел $\lim\limits_{m \to \infty} \mathcal{A}'_{\min} g_m$. Пусть $f_m = f_m^{(p)} \otimes f_m^{\infty}$, где $f_m^{(p)} \in \text{a.}\ \bigotimes\limits_{n=1}^{p} \mathfrak{D}(\mathcal{A}_n)$, $f_m^{\infty} \in \bigotimes\limits_{n=p+1;\,l,1}^{\infty} H_n$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Тогда $g_m = f_m^{(p)} \otimes P f_m^{\infty} = c_m f_m^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots$, где $P f_m^{\infty} = c_m e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots$ $(c_m \in \mathbb{C}^1)$, и

$$\mathcal{A}'_{\min} g_m = \left( \left( \sum_{n=1}^{p} \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n-1} \otimes A_n \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{p-n} \right) c_m f_m^{(p)} \right) \otimes \otimes \left( \left( \sum_{n=p+1}^{\infty} \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n-1} \otimes A_n \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \right) e^{(p+1)} \otimes e^{(p+2)} \otimes \cdots \right). \tag{2.47}$$

Из сходимости (2.46) в $\mathcal{H}_{0,e,1}$ очевидно следует сходимость первого сомножителя из (2.47) в $\bigotimes\limits_{n=1}^{p} H_n$, второй же сомножитель от $m$ не за висит. Поэтому из (2.47) вытекает существование в $\mathcal{H}_{0,e,1}$ $\lim_{m\to\infty} \mathcal{A}'_{\min} g_m$. ■

Итак, пусть каждый оператор $A_n$ самосопряжен в $H_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Для доказательства самосопряженности $\mathcal{A}_{\min} \subseteq \mathcal{A}$ и его совпадения с $\mathcal{A}$ достаточно убедиться, что при некотором невещественном $z \in \mathbb{C}^1$ $\mathcal{R}_z f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min})$, где $\mathcal{R}_z$ — резольвента оператора $\mathcal{A}$, а $f$ — произвольный вектор вида (2.41).

Так как разложение единицы $\mathscr{E}_{\mathcal{A}} = \mathscr{E}_{\mathscr{L}}$ в силу теоремы 2.6 является слабым пределом разложений единицы $\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}$, то в $\mathcal{H}_{0,e,1}$ $\mathcal{R}_z f = \lim_{p\to\infty} h_p$, где

$$h_p = \int_{\mathbb{R}^1} (\lambda - z)^{-1} d\mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(\lambda) f. \tag{2.48}$$

Из теоремы 2.2 вытекает, что определенный выше оператор $\mathcal{A}^{(p)}_{\min}$ самосопряжен в $\mathcal{H}_{0,e,1}$ и его разложением единицы служит $\left(\bigstar_{n=1}^{p} \mathscr{E}_n\right)(\lambda) = \mathscr{E}_{\mathscr{L}_p}(\lambda)$. Поэтому $h_p \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}^{(p)}_{\min})$ и согласно только что доказанному утверждению при $p \geqslant q$ $h_p \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min})$. Переписывая (2.48) в виде интеграла по мере $\mathscr{E}$ и затем применяя оператор $\mathcal{A}_{\min} \subseteq \mathcal{A}$, получим при помощи теоремы 2.6

$$\mathcal{A}_{\min} h_p = \int_{\mathbb{R}^\infty} L(\lambda)\left(\left(\sum_{n=1}^{p} \lambda_n\right) - z\right)^{-1} d\mathscr{E}(\lambda) f \quad (p = q,\ q+1,\ \ldots).$$

Отсюда

$$\|\mathcal{A}_{\min} h_p - \mathcal{A}_{\min} h_r\|^2_{\mathcal{H}_{0,e,1}} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^\infty} |L(\lambda)|^2 \left|\left(\left(\sum_{n=1}^{p} \lambda_n\right) - z\right)^{-1} - \left(\left(\sum_{n=1}^{r} \lambda_n\right) - z\right)^{-1}\right|^2 d(\mathscr{E}(\lambda) f, f)_{\mathcal{H}_{0,e,1}} \tag{2.49}$$
$$(p, r = q, q+1, \ldots).$$

Подынтегральное выражение в (2.49) оценивается сверху через функцию $4|\operatorname{Im} z|^{-2} |L(\lambda)|^2$, являющуюся суммируемой относительно $d(\mathscr{E}(\lambda) f, f)_{\mathcal{H}_{0,e,1}}$, так как $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}'_{\min}) \subseteq \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Поэтому в (2.49) можно перейти к пределу при $p, r \to \infty$ под знаком интеграла, откуда следует фундаментальность последовательности $(\mathcal{A}_{\min} h_p)_{p=q}^{\infty}$. Таким образом, при $p \geqslant q$ $h_p \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min})$, $h_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \mathcal{R}_z f$ и $\lim_{p\to\infty} \mathcal{A}_{\min} h_p$ существует. Из замкнутости $\mathcal{A}_{\min}$ следует, что $\mathcal{R}_z f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min})$, а это и требовалось доказать. ■

Оператор $\mathcal{A}_{\min}$ будем называть оператором, допускающим разделение бесконечного числа переменных. В частности, оператор $\mathcal{A}$ будет таким же, роль $A_n$ играют операторы в $H_n$, отвечающие $E_n$ ($n = 1, 2, \ldots$).



Легко привести достаточное условие на последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ существенно самосопряженных операторов $A_n$ в пространствах $H_n$, обеспечивающее возможность выбора такой стабилизации $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, для которой выполнено (2.40). *Пусть* $\rho(0, S(A_n))$ — *расстояние точки* 0 *от спектра* $S(A_n)$ *оператора* $A_n$. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(0, S(A_n)) < \infty, \tag{2.50}$$

*то указанный выбор возможен*. Действительно, пусть $\lambda_n \in S(A_n)$ таково, что $|\lambda_n| < \rho(0, S(A_n)) + n^{-2}$. Выберем «почти собственный вектор $\varphi^{(n)}$ оператора $A_n$ с собственным значением $\lambda_n$». Точнее, найдем вектор $\varphi^{(n)} \in H_n$, $\|\varphi^{(n)}\|_{H_n} = 1$, такой, что $\|A_n\varphi^{(n)} - \lambda_n\varphi^{(n)}\|_{H_n} < n^{-2}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Хорошо известно, что такой вектор всегда существует. Из последних двух неравенств следует, что $\|A_n\varphi^{(n)}\|_{H_n} \leqslant \rho(0, S(A_n)) + 2n^{-2}$ и в силу (2.50) $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\varphi^{(n)}\|_{H_n} < \infty$. Последовательность $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, где $e^{(n)} = \varphi^{(n)}$, будет требуемой. ■

Итак, если выполнено условие (2.50), то при соответствующем выборе стабилизации для последовательности операторов $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ верны результаты этого пункта. Если (2.50) не выполнено, то его выполнение всегда можно достичь, заменяя операторы $A_n$ на сдвинутые операторы $A_n - c_n 1$ ($c_n \in \mathbb{R}^1$). Таким образом, после указанной «регуляризации» операторов сохраняются упомянутые результаты.

**Теорема 2.8.** *Спектр* $S(\mathcal{A})$ *оператора* $\mathcal{A}$ *имеет вид следующего предела множеств:*

$$S(\mathcal{A}) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} S(\mathcal{A}_n), \quad S(\mathcal{A}_n) = \operatorname{supp} E_n. \tag{2.51}$$

Доказательство. Благодаря теореме 2.6, замечанию на стр. 297 и формуле (2.11) можно написать $S(\mathcal{A}) \subseteq \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{p} S(\mathcal{A}_n)\right)^{\sim}$. Однако последний предел в силу определения предела множеств равен пределу в (2.51). Таким образом, включение в одну сторону доказано.

Докажем включение

$$S(\mathcal{A}) \supseteq \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} S(A_n). \tag{2.52}$$

Будем пользоваться следующим неравенством, справедливым для произвольных ограниченных неубывающих функций $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto$

$\mapsto \tau_1(\lambda), \tau_2(\lambda) \in \mathbb{R}^1, \lambda_0 \in \mathbb{R}^1$ и $\varepsilon > 0$:

$$\int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} d(\tau_1 \bigstar \tau_2)(\lambda) \geqslant \int\limits_{\lambda_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{\lambda_0+\frac{\varepsilon}{2}} d\tau_1(\lambda_1) \int\limits_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} d\tau_2(\lambda_2). \tag{2.53}$$

Оно непосредственно вытекает из (2.13), если положить $p=2$, $\varphi(\lambda) = \varkappa_{(\lambda_0-\varepsilon,\, \lambda_0+\varepsilon)}(\lambda)$ и оценить должным образом снизу $\varphi(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Рассмотрим спектральную меру (2.32), отвечающую оператору $\mathcal{L} = \mathcal{A}$; $S(\mathcal{A}) = \operatorname{supp} \rho_{\mathcal{L}}$. Так как $\rho_{\mathcal{L}} = \mathop{\bigstar}\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n = \left(\mathop{\bigstar}\limits_{n=1}^{p} \rho_n\right) \bigstar \left(\mathop{\bigstar}\limits_{n=p+1}^{\infty} \rho_n\right)$, то в силу (2.53)

$$\int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} d\rho_{\mathcal{L}}(\lambda) \geqslant \int\limits_{\lambda_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{\lambda_0+\frac{\varepsilon}{2}} d\left(\mathop{\bigstar}\limits_{n=1}^{p} \rho_n\right)(\lambda_1) \int\limits_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} d\left(\mathop{\bigstar}\limits_{n=p+1}^{\infty} \rho_n\right)(\lambda_2) \tag{2.54}$$

$$(p = 1, 2, \ldots).$$

При доказательстве теоремы 2.6 мы уже выяснили, что $\left(\mathop{\bigstar}\limits_{n=p+1}^{\infty} \rho_n\right)(\lambda)$ при $p \to \infty$ сходится к $\delta_0(\lambda)$. Поэтому последний интеграл в (2.54) для $p > p_0$ может быть оценен снизу $\frac{1}{2}$ при $p_0$ достаточно большом.

Пусть теперь $\lambda_0$ принадлежит правому множеству в (2.52) и не принадлежит левому. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что левый интеграл в (2.54) обратится в нуль. В силу доказанного неравенства $\left(\mathop{\bigstar}\limits_{n=1}^{p} \rho_n\right)\left(\left[\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2}, \lambda_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = 0$ для $p > p_0$, и поэтому в интервале $\left(\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2}, \lambda_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ нет точек $\operatorname{supp} \mathop{\bigstar}\limits_{n=1}^{p} \rho_n = \operatorname{supp} \rho_{\mathcal{L}_p} = \operatorname{supp} \mathcal{E}_{\mathcal{L}_p} = \left(\sum\limits_{n=1}^{p} S(A_n)\right)^{\sim}$ (см. (2.10), (2.12)). Мы пришли к противоречию. Итак, включение (2.52) доказано. ■

## § 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМЕННЫХ

Этот параграф носит в достаточной степени иллюстративный характер: в нем мы покажем, какими будут результаты § 2 по разделению бесконечного числа переменных в важном случае, когда $A_n$ — некоторые дифференциальные операторы второго порядка, и как можно для простейших ситуаций при помощи теоремы 6.5 гл. 2 доказать самосопряженность возмущения такого оператора с разделяющимися переменными.



### 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ РАЗДЕЛЯЮЩИХСЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим на пространстве $\mathbb{R}^\infty$ точек $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \in \mathbb{R}^1)$ гауссовскую меру

$$d\mathfrak{g}_\varepsilon(x) = (dg_{\varepsilon_1}(x_1)) \otimes (dg_{\varepsilon_2}(x_2)) \otimes \cdots =$$
$$= \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\pi}}\, e^{-\varepsilon_1 x_1^2}\, dx_1\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\pi}}\, e^{-\varepsilon_2 x_2^2}\, dx_2\right) \otimes \cdots, \tag{3.1}$$

где $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ $(\varepsilon_n > 0)$ — заданная последовательность (используем обозначения гл. 1, § 4, п. 2); $\gamma_{\varepsilon_n}(x_n) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi}}\, e^{-\varepsilon_n x_n^2}$. Образуем по (3.1) пространство

$$L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x)) = \bigotimes_{n=1;\, e,1}^{\infty} H_{0,n} = \mathcal{H}_{0,e,1}, \quad H_{0,n} = L_2(\mathbb{R}^1, dg_{\varepsilon_n}(x_n)) \tag{3.2}$$

$$(e = (e^{(n)}(x_n))_{n=1}^{\infty},\ e^{(n)}(x_n) \equiv 1)$$

и в нем построим следующий оператор, допускающий разделение бесконечного числа переменных.

Отображение $L_2(\mathbb{R}^1, dx_n) \ni U(x_n) \mapsto u(x_n) = \gamma_{\varepsilon_n}^{-\frac{1}{2}}(x_n)\, U(x_n) \in L_2(\mathbb{R}^1, dg_{\varepsilon_n}(x_n))$ является изометрией между этими пространствами суммируемых с квадратом функций, при которой $\left(\frac{\partial U}{\partial x_n}\right)(x_n)$ в $L_2(\mathbb{R}^1, dx_n)$ переходит в обставленную посредством $\gamma_{\varepsilon_n}$ производную $(D_n u)(x_n) = \gamma_{\varepsilon_n}^{-\frac{1}{2}}(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}(\gamma_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}(x_n)\, u(x_n))$, а $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}\right)(x_n)$ — в дифференциальное выражение

$$(D_n^2 u)(x_n) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)(x_n) - 2\varepsilon_n x_n \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)(x_n) + (\varepsilon_n^2 x_n^2 - \varepsilon_n)\, u(x_n). \tag{3.3}$$

По $-D_n^2$ построим в $L_2(\mathbb{R}^1, dg_{\varepsilon_n}(x_n))$ минимальный оператор $A_n$, т. е. рассмотрим замыкание в этом пространстве оператора $C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \ni u(x_n) \mapsto -(D_n^2 u)(x_n)$. Так как при указанном выше отображении

$C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ переходит в себя, то из хорошо известных свойств минимального оператора, порожденного второй производной в $L_2(\mathbb{R}^1)$, вытекает, что $A_n$ самосопряжен в $L_2(\mathbb{R}^1, dg_{\varepsilon_n}(x_n))$, неотрицателен и $S(A_n) = [0, \infty)$. Отметим еще, что, как и в § 1, п. 2, легко доказывается, что ограниченные вместе с первой и второй производными функции из $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ входят в $\mathfrak{D}(A_n)$ и действие на них оператора $A_n$ задается так же, как и на $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ (в дальнейшем совокупность ограниченных вместе с производными до порядка $l = 0, 1, \ldots$ включительно функций из $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ обозначается через $C_{b,l}^\infty(\mathbb{R}^p)$ $(p = 1, 2, \ldots)$).

Благодаря представлению (3.2) пространства $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x))$ в нем согласно общей процедуре § 2, п. 3 можно построить оператор $\mathcal{A}$. Для возможности проведения этой процедуры и применения теоремы 2.7 достаточно убедиться в сходимости ряда (2.40) (то, что $e^{(n)} \in \mathfrak{D}(A_n)$, мы сейчас пояснили). Из (3.3) следует, что $(D_n^2 e^{(n)})(x_n) = (D_n^2 1)(x_n) = \varepsilon_n^2 x_n^2 - \varepsilon_n$. Легко подсчитать также, что $\int_{\mathbb{R}^1} (\varepsilon_n^2 x_n^2 - \varepsilon_n)^2 dg_{\varepsilon_n}(x_n) = 3/4\ \varepsilon_n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому (2.40) в нашем случае эквивалентно условию

$$\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n < \infty. \tag{3.4}$$

Итак, если условие (3.4) выполнено, то согласно (2.38) можно определить оператор $\mathcal{A}'_{\min}$, а затем $\mathcal{A}_{\min} = (\mathcal{A}'_{\min})^\sim$ и в силу теоремы 2.7 утверждать, что последний оператор самосопряжен, равен $\mathcal{A}$ и его разложение единицы строится при помощи бесконечной свертки (2.16) по разложениям единицы операторов $A_n$.

Полезно несколько модифицировать определение оператора $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\min}$. Из формулы (2.38) для $\mathfrak{D}(\mathcal{A}'_{\min})$ и того, что ограниченные вместе с первой и второй производными функции из $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ входят в $\mathfrak{D}(A_n)$, следует, что и всякая цилиндрическая бесконечно дифференцируемая ограниченная вместе с производными до второго порядка включительно функция входит в $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min})$. Иными словами, всякая функция вида $\mathbb{R}^\infty \ni x \mapsto u(x) = u_ц(x_1, \ldots, x_p)$, где $u_ц \in C_{b,2}^\infty(\mathbb{R}^p)$ $(p = p(u))$, входит в $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min})$; линейную совокупность всех таких функций обозначим через $C_{ц,b,2}^\infty(\mathbb{R}^\infty)$. Наше утверждение следует из того, что всякую ограниченную функцию $u_ц \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$ при фиксированном $p$ можно достаточно хорошо аппроксимировать функциями из а. $\bigotimes_{n=1}^p C_{b,2}^\infty(\mathbb{R}^1)$. В конечном счете мы получаем следующее утверждение. *Рассмотрим дифференциальное выражение с бесконечным числом переменных вида*



$$(\mathcal{L}u)(x) = -\sum_{n=1}^\infty (D_n^2 u)(x) =$$

$$= -\sum_{n=1}^\infty \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)(x) - 2\varepsilon_n x_n \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)(x) + (\varepsilon_n^2 x_n^2 - \varepsilon_n) u(x) \right). \tag{3.5}$$

*Если выполняется условие* (3.4), *то оператор в пространстве* $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x))$, *задаваемый соотношением* $C_{ц,b,2}^\infty(\mathbb{R}^\infty) \ni u(x) \mapsto (\mathcal{L}u)(x)$, *существенно самосопряжен и неотрицателен. Пусть* $\mathcal{A}$ *— его замыкание. Подсчет разложения единицы* $\mathcal{A}$, *его спектральной меры, оператора обобщенного проектирования и т. п. производится согласно общим правилам § 2. Его спектр* $S(\mathcal{A}) = [0, \infty)$ (*см.* (2.51)). Отметим, что построение требуемого для теории разложений по обобщенным собственным функциям оснащения пространства (3.2) описано в гл. 1, § 4, п. 2, в гл. 2, § 5, п. 5 и в § 1, п. 2 настоящей главы.

Выражение (3.5) и соответствующий оператор $\mathcal{A}$ можно воспринимать как корректный образ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x))$ «не имеющего смысла бесконечномерного лапласиана $-\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}\right)(x)$ в неимеющем смысла пространстве $L_2(\mathbb{R}^\infty, (dx_1) \otimes (dx_2) \otimes \ldots)$». Ясно, что такие образы не обязательно строить, вводя гауссовские меры. Можно рассматривать $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\theta(x))$ по достаточно общей продакт-мере описанного в гл. 1, § 4, п. 1 типа; нужно только, чтобы веса $p_n(x_n)$, заменяющие $\gamma_{\varepsilon_n}(x_n)$, были достаточно гладкими.

## 2. САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим дифференциальное выражение (3.5), возмущенное потенциалом,

$$(\mathcal{M}u)(x) = (\mathcal{L}u)(x) + q(x)u(x) = -\sum_{n=1}^\infty (D_n^2 u)(x) + q(x)u(x) =$$

$$= -\sum_{n=1}^\infty \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)(x) - 2\varepsilon_n x_n \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)(x) + (\varepsilon_n^2 x_n^2 - \varepsilon_n) u(x) \right) +$$

$$+ q(x)u(x). \tag{3.6}$$

Здесь потенциал $q(x)$ — вещественнозначная функция из пространства $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x))$, условие (3.4) предполагается выполненным. Выражение $\mathcal{M}$ подобно $\mathcal{L}$ порождает эрмитов оператор $\mathcal{B}'$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x)) : (\mathcal{B}'u)(x) = (\mathcal{M}u)(x)$, $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{B}') = C_{ц,b,2}^\infty(\mathbb{R}^\infty)$. Возникает вопрос, при каких ограничениях на $q(x)$ оператор $\mathcal{B}'$

существенно самосопряжен, т. е. самосопряжено его замыкание $\mathcal{B}$. Мы сейчас приведем некоторый результат в этом направлении.

В дальнейшем потенциал $q(x)$ удобно записывать в виде

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_n^2 x_n^2 - \varepsilon_n) + a(x), \tag{3.7}$$

где $a \in L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathcal{g}_\varepsilon(x))$. Поясним, что так как благодаря (3.4) бесконечная сумма из (3.7) входит в $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathcal{g}_\varepsilon(x))$, то принадлежность этому пространству функции $q$ или $a$ — эквивалентные требования. С помощью $a(x)$ выражение (3.6) перепишется в виде

$$(\mathcal{M}u)(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)(x) - 2\varepsilon_n x_n \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)(x) \right) + a(x)\,u(x). \tag{3.8}$$

Преимущество записи (3.8) по сравнению с (3.6) в том, что $(\mathcal{M}1)(x) = a(x)$. Тем самым действие $\mathcal{M}$ на цилиндрическую функцию $u(x) = u_ц(x_1, \ldots, x_p)$ сводится к такому же выражению (3.8), в котором лишь знак бесконечности заменяем на $p$.

**Теорема 3.1.** *Предположим, что существует последовательность вещественнозначных функций $a_p(x_1, \ldots, x_p) \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$ $(p = 1, 2, \ldots)$, сходящаяся при $p \to \infty$ к $a(x)$ в $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathcal{g}_\varepsilon(x))$ и такая, что для некоторого $\delta > 0$ выполнены следующие два условия:*

$$\inf_{x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^1;\ p=1,2,\ldots} \left( \sum_{n=1}^{p} (\varepsilon_n^2 x_n^2 - \varepsilon_n) + a_p(x_1, \ldots, x_p) \right) > -\infty, \tag{3.9}$$

$$2^p \left( \int_{Q_p(\delta)} |a(x) - a_p(x_1, \ldots, x_p)|^{2p} \gamma_{\varepsilon_1}^{-1}(x_1) \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \gamma_{\varepsilon_p}^{-1}(x_p)\, d\mathcal{g}_\varepsilon(x) \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[p \to \infty]{} 0, \tag{3.10}$$

*где*

$$Q_p(\delta) = \left( \mathop{\times}_{n=1}^{p} (-l_{n,p}(\delta), l_{n,p}(\delta)) \right) \times \mathbb{R}^\infty, \quad l_{n,p}(\delta) =$$

$$= \left(\varepsilon_n^{-1} \ln\left(\varepsilon_n^{-\frac{1}{2}} p^{2+\delta}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (n = 1, \ldots, p).$$

*Тогда оператор $\mathcal{B}$, порожденный (3.8), самосопряжен.*

Поясним, что условие (3.9) означает равномерную полуограниченность снизу цилиндрических аппроксимаций потенциала $q$ вида (3.7). В случае конечного числа переменных полуограниченность снизу потенциала, как хорошо известно, достаточна для существенной самосопряженности оператора Шредингера, а значит, и соответствующего оператора (3.8). Для бесконечного числа переменных у нас к этому требованию добавляется условие (3.10) достаточной быстроты аппроксимации потенциала цилиндрическими потенциалами.



Предварительно установим три общие леммы, в которых будут фигурировать функции точки $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, где $N$ фиксировано. Пусть $\mathbb{R}^1 \ni x_n \mapsto p_n(x_n) > 0$ — вероятностный дважды непрерывно дифференцируемый вес $(n = 1, \ldots, N)$; $d\theta(x) = (p_1(x_1)\,dx_1) \otimes \ldots \otimes (p_N(x_N)\,dx_N)$ и $(D_n u)(x_n) = p_n^{-\frac{1}{2}}(x_n) \times \frac{\partial}{\partial x_n}\left(p_n^{\frac{1}{2}}(x_n)\, u(x_n)\right)$ — соответствующие вероятностная мера на $\mathbb{R}^N$ и обставленная производная. У нас также будут фигурировать точки $\mathbf{x} = (t, x)$ $(t \in \mathbb{R}^1,\ x \in \mathbb{R}^N)$ пространства $\mathbb{R}^{N+1}$; $d\theta(\mathbf{x}) = (dt) \otimes d\theta(x)$ ($dt$ — мера Лебега), $D_0 = \frac{\partial}{\partial t}$.

**Лемма 3.1.** *Рассмотрим в цилиндре $Ц = \{\mathbf{x} = (t, x) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid t \in (0, T),\ |x| < r\}$ гиперболическое дифференциальное выражение*

$$(\mathcal{N}v)(\mathbf{x}) = (D_0^2 v)(\mathbf{x}) - \sum_{n=1}^{N} (D_n^2 v)(\mathbf{x}) + b(x)\,v(\mathbf{x}), \tag{3.11}$$

*где $b(x) \geqslant 1$ — суммируемая по мере Лебега в шаре $K = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < r\}$ функция. Утверждается, что для всякой функции $v \in C^2(\bar{Ц})$, аннулирующейся вместе с нормальной производной на верхнем основании и боковой поверхности цилиндра $Ц$, имеет место энергетическое неравенство*

$$2T \|\mathcal{N}v\|_{L_2(Ц, d\theta(\mathbf{x}))} \geqslant \|v\|_{W_2^1(Ц, d\theta(\mathbf{x}))}; \tag{3.12}$$

$$\|v\|_{W_2^1(Ц, d\theta(\mathbf{x}))} = \left( \int_Ц \left( \sum_{n=0}^{N} |(D_n v)(\mathbf{x})|^2 + |v(\mathbf{x})|^2 \right) d\theta(\mathbf{x}) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Легко убедиться в справедливости следующей формулы интегрирования по частям:

$$\int_Ц D_n f \cdot g\,d\theta(\mathbf{x}) = -\int_Ц f \cdot D_n g\,d\theta(\mathbf{x}) +$$

$$+ \int_{\partial Ц} f g\, p_1(x_1) \ldots p_N(x_N)\, \nu_n(\mathbf{x})\, d\sigma(\mathbf{x}) \quad (n = 0, \ldots, N),$$

где $d\sigma(\mathbf{x})$ — интегрирование по мере Лебега на границе цилиндра $Ц$, а $\nu(\mathbf{x}) = (\nu_0(\mathbf{x}), \ldots, \nu_N(\mathbf{x}))$ — орт внешней нормали к $Ц$ в точке $\mathbf{x} \in \partial Ц$. Полагая $A(\mathbf{x}) = -t$, при помощи этой формулы получаем

$$\int_Ц D_0^2 v \cdot D_0 \bar{v} \cdot A\,d\theta(\mathbf{x}) = -\int_Ц D_0 v \cdot D_0^2 \bar{v} \cdot A\,d\theta(\mathbf{x}) + \int_Ц |D_0 v|^2\, d\theta(\mathbf{x}),$$

$$-\int_{Ц} D_n^2 v \cdot D_0\bar{v} \cdot A d\theta(\mathbf{x}) = \int_{Ц} D_n v \cdot D_n D_0 \bar{v} \cdot A d\theta(\mathbf{x}) =$$

$$= -\int_{Ц} D_0 D_n v \cdot D_n \bar{v} \cdot A d\theta(\mathbf{x}) + \int_{Ц} |D_n v|^2 d\theta(\mathbf{x}) =$$

$$= \int_{Ц} D_0 v \cdot D_n^2 \bar{v} \cdot A d\theta(\mathbf{x}) + \int_{Ц} |D_n v|^2 d\theta(\mathbf{x}) \quad (n = 1, \ldots, p),$$

$$\int_{Ц} b v D_0 \bar{v} \cdot A d\theta(\mathbf{x}) = -\int_{Ц} b D_0 v \cdot \bar{v} \cdot A d\theta(\mathbf{x}) + \int_{Ц} b |v|^2 d\theta(\mathbf{x}).$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\int_{Ц} \mathcal{N} v \cdot D_0 \bar{v} \cdot A d\theta(\mathbf{x}) = -\int_{Ц} \mathcal{N}\bar{v} \cdot D_0 v \cdot A d\theta(\mathbf{x}) +$$

$$+ \int_{Ц} \left( \sum_{n=0}^{N} |D_n v|^2 + b |v|^2 \right) d\theta(\mathbf{x}).$$

Далее имеем

$$2 \operatorname{Re} \int_{Ц} \mathcal{N} v \cdot D_0 \bar{v} \cdot A d\theta(\mathbf{x}) =$$

$$= \int_{Ц} \left( \sum_{n=0}^{N} |D_n v|^2 + b |v|^2 \right) d\theta(\mathbf{x}) \geqslant \| v \|^2_{W_2^1(Ц, d\theta(\mathbf{x}))}. \tag{3.13}$$

Оценивая левую часть (3.13) сверху через $2T \| \mathcal{N} v \|_{L_2(Ц, d\theta(\mathbf{x}))} \times$ $\times \| v \|_{L_2(Ц, d\theta(\mathbf{x}))}$ и затем сокращая в полученном неравенстве на последнюю норму, прийдем к (3.12). ■

С л е д с т в и е. *Пусть функция $v$ такая же, как и в лемме, за исключением того, что на верхнем основании цилиндра Ц она и ее нормальная производная, вообще говоря, не аннулируются; $T \in$ $\in (0, 1)$. Тогда вместо неравенства* (3.12) *выполняется неравенство*

$$\| \mathcal{N} v \|_{L_2(Ц, d\theta(\mathbf{x}))} + \| \mathcal{M}(v(T, x)) \|_{L_2(K, \theta(x))} +$$

$$+ \| \mathcal{M}((D_0 v)(T, x)) \|_{L_2(K, d\theta(x))} \geqslant \frac{1}{3} \| v \|_{W_2^1(Ц, d\theta(\mathbf{x}))}, \tag{3.14}$$

*где через $\mathcal{M}$ обозначено эллиптическое дифференциальное выражение, действующее на функции от $x$ и получающееся из $\mathcal{N}$ отбрасыванием слагаемого $D_0^2$.*

Действительно, положим $w(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) - v(T, x) - (t - T) \times$ $\times (D_0 v)(T, x)$ $(\mathbf{x} = (t, x) \in Ц)$. Эта функция удовлетворяет условиям леммы, поэтому



$$\| w \|_{W_2^1(Ц, d\theta(\mathbf{x}))} \leqslant 2T \| \mathcal{N} w \|_{L_2(Ц, d\theta(\mathbf{x}))} \leqslant 2T (\| \mathcal{N} v \|_{L_2(Ц, d\theta(\mathbf{x}))} +$$

$$+ T^{\frac{1}{2}} \| \mathcal{M}(v(T, \cdot)) \|_{L_2(K, d\theta(x))} + 3^{-\frac{1}{2}} T^{\frac{3}{2}} \| \mathcal{M}((D_0 v)(T, \cdot)) \|_{L_2(K, d\theta(x))}). \tag{3.15}$$

С другой стороны, в силу неравенства треугольника для $\| \cdot \|_{W_2^1(Ц, d\theta(\mathbf{x}))}$

$$\| w \|_{W_2^1(Ц, d\theta(\mathbf{x}))} \geqslant \| v \|_{W_2^1(Ц, d\theta(\mathbf{x}))} - T^{\frac{1}{2}} \| v(T, \cdot) \|_{W_2^1(K, d\theta(x))} -$$

$$- (3^{-1} T^3 + T)^{\frac{1}{2}} \| (D_0 v)(T, \cdot) \|_{W_2^1(K, d\theta(x))} \geqslant$$

$$\geqslant \| v \|_{W_2^1(Ц, d\theta(\mathbf{x}))} - T^{\frac{1}{2}} \| \mathcal{M}(v(T, \cdot)) \|_{L_2(K, d\theta(x))} - \tag{3.16}$$

$$- (3^{-1} T^3 + T)^{\frac{1}{2}} \| \mathcal{M}((D_0 v)(T, \cdot)) \|_{L_2(K, d\theta(x))};$$

$$\| f \|_{W_2^1(K, d\theta(x))} = \left( \int_K \left( \sum_{n=1}^{N} |(D_n f)(x)|^2 + |f(x)|^2 \right) d\theta(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Мы здесь воспользовались следующей оценкой для $f \in C^2(\tilde{K})$, аннулирующейся на $\partial K : \| \mathcal{M} f \|_{L_2(K, d\theta(x))} \geqslant \| f \|_{W_2^1(K, d\theta(x))}$ (она получается обычным образом интегрированием по частям с использованием условия $b(x) \geqslant 1$). Из (3.15) и (3.16) получаем некоторую оценку сверху для $\| v \|_{W_2^1(Ц, d\theta(\mathbf{x}))}$, из которой следует (3.14), если воспользоваться тем обстоятельством, что $T \in (0, 1)$. ■

**Лемма** 3.2. *Обычное соболевское пространство $W_2^1(\mathbb{R}^N)$ вкладывается в пространство $L_q(\mathbb{R}^N)$ с $q \in [2, 2N(N-2)^{-1})$, причем норма оператора вложения оценивается сверху выражением*

$$c_1 2^{\frac{N}{2}} (N(2 - q) + 2q)^{-1} \quad (N = 2, 3, \ldots), \tag{3.17}$$

*где $c_1$ — независящая от $N$ и $q$ постоянная.*

Разумеется, само такое вложение хорошо известно, смысл этой леммы заключается в оценке относительно $N$ и $q$ нормы оператора вложения. Отметим, что указанным ниже образом подобную оценку можно было бы получить и для общих пространств $W_p^l(\mathbb{R}^N)$ $(p > 1;$ $l = 0, 1, \ldots)$.

Доказательство. Пусть $f(x) \mapsto \tilde{f}(s)$ и $f(s) \mapsto \hat{f}(x)$ — прямое и обратное преобразования Фурье (сейчас удобно в прямом преобразовании (3.20) гл. 1 не писать множитель $(2\pi)^{-\frac{N}{2}}$, а в обратном — писать множитель $(2\pi)^{-N}$). Очевидно $(W_2^1(\mathbb{R}^N))^{\sim}$ состоит из функций $\tilde{f}$, где $\tilde{f}$ такова, что $g_f(s) = (|s|^2+1)^{\frac{1}{2}}\tilde{f}(s) \in L_2(\mathbb{R}^N)$. Поэтому $f$ представима в виде свертки

$$f(x) = (\hat{\tilde{f}})(x) = ((|s|^2+1)^{-\frac{1}{2}} g_f(s))^{\wedge}(x) = (G * h_f)(x), \qquad (3.18)$$

где $G(x) = ((|s|^2+1)^{-\frac{1}{2}})^{\wedge}(x)$, а $(h_f)(x) = (\hat{g_f})(x) \in L_2(\mathbb{R}^N)$. Если в (3.18) $h_f$ будет пробегать $L_2(\mathbb{R}^N)$, то $f$ будет пробегать $W_2^1(\mathbb{R}^N)$. Подсчитывая преобразование Фурье, получаем для $G$ формулу

$$G(x) = 2^{\frac{1-N}{2}} \pi^{-\frac{N+1}{2}} K_{\frac{N-1}{2}}(|x|)\,|x|^{\frac{1-N}{2}}, \qquad (3.19)$$

где $K_\nu$ — модифицированная бесселева функция третьего рода. При помощи известного интегрального представления для $K_\nu$ формулу (3.19) можно преобразовать следующим образом:

$$G(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right)^{-1} e^{-|x|} \int_0^\infty e^{-|x|t} \left(t + \frac{t^2}{2}\right)^{\frac{N-2}{N}} dt > 0$$

$$(x \in \mathbb{R}^N).$$

Применяя оценку $(a+b)^m \leqslant 2^{m-1}(a^m + b^m)$ $(a, \ b \geqslant 0; \ m \geqslant 1)$, отсюда получаем

$$G(x) \leqslant (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right)^{-1} e^{-|x|} \left(2^{\frac{N}{2}-2} \int_0^\infty e^{-|x|t} t^{\frac{N}{2}-1} dt + \right.$$

$$\left. + 2^{-1} \int_0^\infty e^{-|x|t} t^{N-2} dt \right) = 2^{-2} \pi^{-\frac{N}{2}} e^{-|x|} |x|^{-\frac{N}{2}} +$$

$$+ 2^{-1}(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \Gamma(N-1) e^{-|x|} |x|^{-N+1} = G_1(x) + G_2(x). \qquad (3.20)$$

Из (3.20) вытекает, что функция $G \in L_a(\mathbb{R}^N)$ при $a \in [1, \ N(N-1)^{-1})$. Оценим ее норму. Переходя к сферическим координатам, получаем

$$\|G\|_{L_a(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|G_1\|_{L_a(\mathbb{R}^N)} + \|G_2\|_{L_a(\mathbb{R}^N)} =$$



$$= 2^{-2}\pi^{-\frac{N}{2}} \left(2\pi^{\frac{N}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{a}} \left(\int_0^\infty e^{-ar} r^{N-1-a\frac{N}{2}} dr\right)^{\frac{1}{a}} +$$

$$+ 2^{-1}(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right)^{-1} \Gamma(N-1) \left(2\pi^{\frac{N}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{a}} \times$$

$$\times \left(\int_0^\infty e^{-ar} r^{N-1-a(N-1)} dr\right)^{\frac{1}{a}} =$$

$$= 2^{-2+\frac{1}{a}} \pi^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)^{-\frac{1}{a}}\right) \left(\frac{\Gamma\left(N - a\frac{N}{2}\right)}{a^{N-a\frac{N}{2}}}\right)^{\frac{1}{a}} +$$

$$+ 2^{\frac{1}{a}-1-\frac{N}{2}} \pi^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right)^{-1-\frac{1}{a}} \Gamma(N-1) \left(\frac{\Gamma(N-a(N-1))}{a^{N-a(N-1)}}\right)^{\frac{1}{a}} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 2^{-\frac{N}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right)^{\frac{1}{N}-2} \Gamma(N-1) (\Gamma(N-a(N-1)))^{\frac{1}{a}}$$

$$(N = 4, \ 5, \ \ldots)$$

(в последней оценке мы воспользовались тем, что $a \in [1, \ N(N-1)^{-1})$, и монотонным возрастанием функции $\Gamma(x)$ при $x > 1{,}46\ldots$). Так как $a \in [1, \ N(N-1)^{-1})$, то $N - a(N-1) \in (0, \ 1]$, и поэтому

$$(\Gamma(N-a(N-1)))^{\frac{1}{a}} = ((N-a(N-1))^{-1}\Gamma(N-a(N-1)+1))^{\frac{1}{a}} \leqslant$$
$$\leqslant (N-a(N-1))^{-1}$$

($\Gamma(x) \leqslant 1$ при $x \in [1, 2)$). Продолжая при помощи этого неравенства оценку нормы $G$, получаем

$$\|G\|_{L_a(\mathbb{R}^N)} \leqslant 1 + 2^{-\frac{N}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right)^{\frac{1}{N}-2} \Gamma(N-1)(N-a(N-1))^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 2^{-\frac{N}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right)^{\frac{1}{N}-2} \Gamma(N-1)(N-a(N-1))^{-1} \quad (N = 4, \ 5, \ \ldots),$$

где $c_1$ — некоторая не зависящая от $N$ и $a$ постоянная. При помощи формулы Стирлинга легко заключаем, что существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{N\to\infty} 2^{-N}\left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right)^{\frac{1}{N}-2} \Gamma(N-1)$. Поэтому, увеличивая $c_1$, можно заключить, что справедлива оценка

$$\|G\|_{L_a(\mathbb{R}^N)} \leqslant c_1 2^{\frac{N}{2}} (N - a(N-1))^{-1} \quad (N = 2, 3, \ldots). \tag{3.21}$$

Из (3.18) при помощи теоремы Юнга о свертках, равенства Парсеваля и (3.21) заключаем, что

$$\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^N)} = \|G * h_f\|_{L_q(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|G\|_{L_a(\mathbb{R}^N)} \|h_f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} =$$

$$= \|G\|_{L_a(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant c_1 2^{\frac{N}{2}} (N - a(N-1))^{-1} \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}^N)}$$

$$(N = 2, 3, \ldots), \tag{3.22}$$

где $q = 2a(2-a)^{-1} \in [2, 2N(N-2)^{-1})$. Переходя в (3.22) от $a$ к $q$, получаем (3.17). ■

Установим аналогичную лемму для функций в слое $C = \{\mathbf{x} = (t, x) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid t \in (0, T)\}$ пространства $\mathbb{R}^{N+1}$.

**Лемма 3.3.** *Для пространства $W_2^1(C)$ сохраняется справедливым утверждение леммы 3.2 с заменой $L_q(\mathbb{R}^N)$ и $N$ на $L_q(C)$ и $N+1$.*

Доказательство. Продолжим каждую функцию $f \in W_2^1(C)$ в функцию $f \in W_2^1(\mathbb{R}^{N+1})$ следующим образом. Сперва продолжим $f$ в функцию $\hat{f} \in W_2^1(\hat{C})$, где $\hat{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N+1} \mid t \in (-T, 2T)\}$, полагая для $t \in (-T, 0)$ $\hat{f}(\mathbf{x}) = -3f(-t, x) + 4f\left(-\frac{t}{2}, x\right)$, а для $t \in (T, 2T)$ $\hat{f}(\mathbf{x}) = -3f(2T-t, x) + 4f\left(\frac{3}{2}T - \frac{t}{2}, x\right)$ (мы использовали продолжение по Уитни и Хестенсу). Легко понять, что $\hat{f} \in W_2^1(\hat{C})$ и $\|\hat{f}\|_{W_2^1(\hat{C})} \leqslant 16\|f\|_{W_2^1(C)}$.

Далее, рассмотрим фиксированную функцию $\chi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, равную единице на $\left[-\frac{T}{3}, \frac{4}{3}T\right]$ и нулю вне $\left[-\frac{2}{3}T, \frac{5}{3}T\right]$. Положим $\hat{\hat{f}}(\mathbf{x}) = \chi(t)\hat{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N+1}$), где $\hat{f}$ доопределена вне $\hat{C}$ произвольным образом. Очевидно, $\hat{\hat{f}} \in W_2^1(\mathbb{R}^{N+1})$ и $\|\hat{\hat{f}}\|_{W_2^1(\mathbb{R}^{N+1})} \leqslant c_2\|\hat{f}\|_{W_2^1(\hat{C})}$ с некоторой зависящей только от $\chi$ константой $c_2$. Таким образом, $\|\hat{\hat{f}}\|_{W_2^1(\mathbb{R}^{N+1})} \leqslant 16c_2\|f\|_{W_2^1(C)}$. Применив теперь к $\hat{\hat{f}}$ лемму 3.2, получим при $q \in [2, 2(N+1)(N-1)^{-1})$

$$\|f\|_{L_q(C)} = \|\hat{\hat{f}}\|_{L_q(C)} \leqslant \|\hat{\hat{f}}\|_{L_q(\mathbb{R}^{N+1})} \leqslant$$



$$\leqslant c_1 2^{\frac{N+1}{2}} ((N+1)(2-q) + 2q)^{-1} \|\hat{\hat{f}}\|_{W_2^1(\mathbb{R}^{N+1})} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 2^{\frac{N+1}{2}} ((N+1)(2-q) + 2q)^{-1} \|f\|_{W_2^1(C)}, \quad c_3 = 16c_1c_2$$

$$(N = 1, 2, \ldots). \ ■$$

Следствие. Введем соболевское пространство $W_2^1(C, d\theta(\mathbf{x}))$ как пополнение всех функций $f(\mathbf{x})$ из $C^\infty(\tilde{Ц})$, аннулирующихся при $|x| \geqslant r_f$, относительно нормы, введенной в (3.12), где $Ц$ заменено $C$. Очевидно, $f(\mathbf{x}) \in W_2^1(C, d\theta(\mathbf{x}))$ тогда и только тогда, когда $(Uf)(\mathbf{x}) = (p_1(x_1) \ldots p_N(x_N))^{\frac{1}{2}} f(\mathbf{x}) \in W_2^1(C)$, причем соответствующие нормы этих двух функций равны. Поэтому при помощи леммы 3.3 заключаем, что *если $f \in W_2^1(C, d\theta(\mathbf{x}))$, то $Uf \in L_q(C)$ ($q \in [2, 2(N+1)(N-1)^{-1})$), причем*

$$\|Uf\|_{L_q(C)} \leqslant c_3 2^{\frac{N+1}{2}} ((N+1)(2-q) + 2q)^{-1} \|f\|_{W_2^1(C, d\theta(\mathbf{x}))} \tag{3.23}$$

$$(N = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство теоремы. Пусть $p_n(x_n) = \gamma_{\varepsilon_n}(x_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$). Обозначим inf в (3.9) через $\alpha \in \mathbb{R}^1$. На самосопряженность оператора $\mathcal{B}$ не влияет сдвиг потенциала $a(x)$ на произвольную вещественную постоянную. Поэтому самосопряженность не изменится, если вместо $a(x)$ будем рассматривать потенциал $a(x) - \alpha + 1$. Аналогично сдвигая его аппроксимации $a_p(x_1, \ldots, x_p)$, получаем, что без ограничения общности можно предполагать inf в (3.9) равным единице.

Для доказательства теоремы применим теорему 6.5 гл. 2. Сейчас $H = L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x))$, $A = \mathcal{B}'$. Этот оператор полуограничен снизу единицей. Действительно, выражения под знаком inf в (3.9) сходятся при $p \to \infty$ в $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x))$ к $\sum_{n=1}^\infty (\varepsilon_n^2 x_n^2 - \varepsilon_n) + a(x) = q(x)$. Так как все они были полуограничены снизу единицей, то и $\mathfrak{g}_\varepsilon$-почти для всех $x \in \mathbb{R}^\infty$ $q(x) \geqslant 1$. Из (3.6) и неотрицательности оператора $\mathcal{A}$, порожденного (3.5), следует утверждаемое.

Построим последовательность дифференциальных выражений

$$(\mathcal{M}_p u)(x) = -\sum_{n=1}^p \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)(x) - 2\varepsilon_n x_n \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)(x)\right) +$$

$$+ a_p(x_1, \dots, x_p)\,u(x) = -\sum_{n=1}^{p} (D_n^2 u)(x) +$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{p} (\varepsilon_n^2 x_n^2 - \varepsilon_n) + a_p(x_1, \dots, x_p)\right) u(x) \quad (p = 1, 2, \dots). \tag{3.24}$$

Пусть $A_p$ — оператор в $H$, задающийся соотношением $C^\infty_{\text{ц},b,2}(\mathbb{R}^\infty) = \mathfrak{D}(A_p) \ni u(x) \mapsto (\mathcal{M}_p u)(x)$; последовательность $(A_p)_{p=1}^\infty$ будет требуемой для применения теоремы 6.5 гл. 1.

В качестве множества $\Phi$ возьмем совокупность $C^\infty_{\text{ц},0}(\mathbb{R}^\infty)$ всех цилиндрических бесконечно дифференцируемых финитных функций, т. е. всех функций вида $\mathbb{R}^\infty \ni x \mapsto \varphi(x) = \varphi_{\text{ц}}(x_1, \dots, x_m)$, где $\varphi_{\text{ц}} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $m = m(\varphi)$. Несколько ниже мы докажем следующее утверждение.

**Лемма 3.4.** *Для каждой* $\varphi \in C^\infty_{\text{ц},0}(\mathbb{R}^\infty)$ *и любого фиксированного* $\eta > 0$ *существует последовательность* $(\varphi_p(x_1, \dots, x_p))_{p=1}^\infty$, *где* $\varphi_p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$, *сходящаяся в* $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x))$ *к* $\varphi(x)$ *и такая, что*

*а) нормы* $\| \sum_{n=1}^{p} (D_n^2 \varphi_p)(x_1, \dots, x_p) \|_{L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x))}$ *относительно* $p = 1, 2, \dots$ *ограничены; б)* $|\varphi_p(x_1, \dots, x_p)|$ *равномерно по* $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ *и* $p = 1, 2, \dots$ *ограничены; в)* $\operatorname{supp} \varphi_p \subseteq \times_{n=1}^{p} (-l_{n,p}(\eta), l_{n,p}(\eta))$ *при* $p > N(\varphi)$, *где* $N(\varphi)$ *— достаточно большое.*

Пусть $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$, $\delta > 0$ и $T \in (0, b)$, где $b = \frac{\delta}{2}$, фиксированы. Построим согласно лемме 3.4 с $\eta = \frac{\delta}{2}$ последовательности $(\varphi_{0,p})_{p=1}^\infty$, $(\varphi_{1,p})_{p=1}^\infty$, сходящиеся соответственно к $\varphi_0$, $\varphi_1$. Для каждого $p$ рассмотрим следующую задачу Коши для гиперболического уравнения:

$$(D_0^2 v)(t, x^{(p)}) - \sum_{n=1}^{p} (D_n^2 v)(t, x^{(p)}) +$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{p} (\varepsilon_n^2 x_n^2 - \varepsilon_n) + a_p(x^{(p)})\right) v(t, x^{(p)}) = 0,$$

$$(t, x^{(p)}) = (t, x_1, \dots, x_p) \in [0, T] \times \mathbb{R}^p, \tag{3.25}$$

$$v(T, x^{(p)}) = \varphi_{0,p}(x^{(p)}), \quad (D_0 v)(T, x^{(p)}) = \varphi_{1,p}(x^{(p)}) \ (x^{(p)} \in \mathbb{R}^p).$$

Благодаря гладкости коэффициентов уравнения и начальных данных существует классическое решение $v(t, x^{(p)}) = v_p(t, x^{(p)})$ задачи (3.25). Так как $\varphi_{0,p}, \varphi_{1,p} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$, то и $v_p(t, x^{(p)})$ для каждого $t \in [0, T]$ будет функцией из $C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$. Поэтому $v_p(t, x^{(p)})$ можно интерпретировать как вектор-функцию $\varphi_p(t) = v_p(t, \cdot)$ со значениями в пространстве $H$ и так как $C_0^\infty(\mathbb{R}^p) \subset C^\infty_{b,2}(\mathbb{R}^p) \subset C^\infty_{\text{ц},b,2}(\mathbb{R}^\infty)$, то эти значения лежат в $\mathfrak{D}(A_p) = \mathfrak{D}(A) = C^\infty_{\text{ц},b,2}(\mathbb{R}^\infty)$ $(t \in [0, T])$. Гладкость функции $v_p(t, x^{(p)})$ как функции точки $(t, x^{(p)}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^p$ дает возможность рассматривать $[0, T] \ni t \mapsto \varphi_p(t)$ как сильное решение задачи Коши (6.23) гл. 2.



Согласно теореме 6.5 гл. 2 для доказательства существенной самосопряженности оператора $A = \mathcal{B}'$, т. е. самосопряженности $\mathcal{B}$, достаточно убедиться в соотношении (6.24) гл. 2. Согласно (3.24) и (3.8) для $\varphi_p(t) = v_p(t, x^{(p)})$ получаем $(A_p - A)\varphi_p(t) = (a_p(x^{(p)}) - a(x))v_p(t, x^{(p)})$, поэтому интеграл из соотношения (6.24) гл. 2 в нашем случае переписывается в виде

$$\Omega_p = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^\infty} u(t, x)\,(a_p(x^{(p)}) - a(x))\,\overline{v_p(t, x^{(p)})}\, dt\, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x), \tag{3.26}$$

где $u(t, x)$ — вектор-функция $u(t)$ со значениями в $H = L_2(\mathbb{R}^\infty, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x))$.

Оценим сверху интеграл (3.26) при $p$ достаточно больших. Скорость распространения возмущения для уравнения (3.25) при любом $p = 1, 2, \dots$ равна единице. Поэтому если supp начальных данных $\varphi_{0,p}(\cdot)$ и $\varphi_{1,p}(\cdot)$ из (3.25) лежит в $\times_{n=1}^{p} (-l_{n,p}(\eta), l_{n,p}(\eta))$, то при каждом $t \in [0, T]$ supp решения $v_p(t, \cdot)$ лежит в $\times_{n=1}^{p} (-l_{n,p}(\delta), l_{n,p}(\delta))$; нужно учесть, что $\delta = 2\eta$ и $T \in (0, b)$, где $b = \eta$. Такое расположение supp начальных данных будет иметь место согласно утверждению в) леммы 4.3 при $p > N_1 = \max(N(\varphi_0), N(\varphi_1))$.

Далее, из непрерывности вектор-функции $u(t)$ заключаем, что $c_1 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^\infty} |u(t, x)|^2\, dt\, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x) < \infty$. Учитывая сказанное, получаем при помощи неравенств Коши — Буняковского и Гельдера при $p > N_1$

$$|\Omega_p|^2 \leqslant c_1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^\infty} |a_p(x^{(p)}) - a(x)|^2\, |v_p(t, x^{(p)})|^2\, dt\, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x) =$$

$$= c_1 \int_0^T \int_{Q_p(\delta)} |a_p(x^{(p)}) - a(x)|^2\, |v_p(t, x^{(p)})|^2\, dt\, d\mathfrak{g}_\varepsilon(x) \leqslant \tag{3.27}$$

$$\leqslant c_1 T^{\frac{1}{p}} \left( \int_{Q_p(\delta)} |a_p(x^{(p)}) - a(x)|^{2p} (\gamma_{\varepsilon_1}(x_1) \dots \gamma_{\varepsilon_p}(x_p))^{-1} d\mathfrak{g}_\varepsilon(x) \right)^{\frac{1}{p}} I_p,$$

$$I_p = \left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^p} |v_p(t, x^{(p)})|^{\frac{2p}{p-1}} (\gamma_{\varepsilon_1}(x_1) \dots \gamma_{\varepsilon_p}(x_p))^{\frac{p}{p-1}} dt\, dx_1 \dots dx_p \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Покажем, что сомножитель $I_p$ из (3.27) оценивается сверху через $c_2 2^p$ ($p = N_1+1, N_1+2, \ldots$) с некоторой постоянной $c_2$.

Так как $v_p(t, x^{(p)})$ — решение задачи Коши (3.25) с финитными начальными данными $\varphi_{0,p}$, $\varphi_{1,p}$ то $v_p(t, x^{(p)}) = 0$ для всех $t \in [0, T]$ и $|x^{(p)}| \geqslant \rho$, где $\rho$ — некоторое зависящее от $\varphi_{0,p}$, $\varphi_{1,p}$ положительное число. Пусть $r > \rho$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{p+1}$ цилиндр $Ц = (0, T) \times K$, $K = \{x^{(p)} \in \mathbb{R}^p \mid |x^{(p)}| < r\}$. Функция $v_p(t, x^{(p)})$ аннулируется вместе с нормальной производной на боковой поверхности этого цилиндра. Кроме того, множитель при $v(t, x^{(p)})$ в уравнении (3.25) больше или равен единице. Поэтому к дифференциальному выражению из (3.25) и решению $v_p(t, x^{(p)})$ можно применить следствие из леммы 3.1. В результате неравенство (3.14) приводит к оценке (ниже $\mathcal{M}_p$ имеет вид (3.24))

$$\|v_p\|_{W_2^1(Ц,(dt)\otimes(dg_{\varepsilon_1}(x_1))\otimes\cdots\otimes(dg_{\varepsilon_p}(x_p)))} \leqslant$$

$$\leqslant 3\sum_{\alpha=0}^{1}\|\mathcal{M}_p\varphi_{\alpha,p}\|_{L_2(K,(dg_{\varepsilon_1}(x_1))\otimes\cdots\otimes(dg_{\varepsilon_p}(x_p)))} =$$

$$= 3\sum_{\alpha=0}^{1}\|\mathcal{M}_p\varphi_{\alpha,p}\|_{L_2(\mathbb{R}^\infty,dg_\varepsilon(x))} \leqslant 3\sum_{\alpha=0}^{1}\left\|\sum_{n=1}^{p} D_n^2\varphi_{\alpha,p}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^\infty,dg_\varepsilon(x))} +$$

$$+ 3\sum_{\alpha=0}^{1}\left\|\left(\sum_{n=1}^{p}(\varepsilon_n^2x_n^2 - \varepsilon_n) + a_p(x^{(p)})\right)\varphi_{\alpha,p}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^\infty,dg_\varepsilon(x))}. \qquad (3.28)$$

Согласно утверждению а) леммы 3.4 первая сумма в правой части (3.28) ограничена относительно $p = N_1+1, N_1+2, \ldots$ Согласно утверждению б) этой же леммы вторая сумма в правой части (3.28) не превосходит

$$c_3\left\|\sum_{n=1}^{p}(\varepsilon_n^2x_n^2 - \varepsilon_n) + a_p(x^{(p)})\right\|_{L_2(\mathbb{R}^\infty,dg_\varepsilon(x))} \leqslant$$

$$\leqslant c_4\|q\|_{L_2(\mathbb{R}^\infty,dg_\varepsilon(x))} \quad (p = N_1+1,\ N_1+2, \ldots).$$

Таким образом, правая часть (3.28) не превосходит некоторой постоянной $c_5$ при любом $p = N_1+1, N_1+2, \ldots$ С другой стороны, функция $v_p(t, x^{(p)})$ аннулируется вне $Ц$, поэтому если рассмотреть слой $C = \{(t, x^{(p)}) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid t \in (0, T)\}$, то

$$\|v_p\|_{W_2^1(C,(dt)\otimes(dg_{\varepsilon_1}(x_1))\otimes\cdots\otimes(dg_{\varepsilon_p}(x_p)))} =$$

$$= \|v_p\|_{W_2^1(Ц,(dt)\otimes(dg_{\varepsilon_1}(x_1))\otimes\cdots\otimes(dg_{\varepsilon_p}(x_p)))} \leqslant c_5 \qquad (3.29)$$

$$(p = N_1+1,\ N_1+2, \ldots).$$



Применяя к функции $v_p(t, x^{(p)})$ следствие к лемме 3.3, получаем в силу (3.23) и (3.29)

$$\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^p}|v_p(t, x^{(p)})(\gamma_{\varepsilon_1}(x_1)\ \ldots\ \gamma_{\varepsilon_p}(x_p))^{\frac{1}{2}}|^q\,dt dx_1\ \ldots,\ dx_p\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant c_3c_5 2^{\frac{p+1}{2}}((p+1)(2-q)+2q)^{-1}$$

$$(q \in [2,\ 2(p+1)(p-1)^{-1});\quad p = N_1+1,\ N_1+2, \ldots). \qquad (3.30)$$

Положим в (3.30) $q = 2p(p-1)^{-1} \in [2,\ 2(p+1)(p-1)^{-1})$. Это неравенство перейдет в оценку $I_p^{\frac{1}{2}} \leqslant c_3c_5 2^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{p}{2}}$, откуда $I_p \leqslant c_2 2^p$ ($p = N_1+1, N_1+2, \ldots$) с некоторой постоянной $c_2$.

Из полученной оценки $I_p$, (3.27) и условия (3.10) вытекает, что $\Omega_p \underset{p\to\infty}{\to} 0$. Иными словами, выполняется соотношение (6.24) гл. 2, и поэтому $\mathcal{B}$ самосопряжен. ■

Нам осталось доказать лемму 3.4.

Доказательство леммы. Зафиксируем $\varphi \in C_{ц,0}^\infty(\mathbb{R}^\infty)$. Пусть $\varphi(x) = \varphi_ц(x^{(m)})$ с некоторым $m = 1, 2, \ldots$ Построим последовательность $(\varphi_p(x^{(p)}))_{p=1}^\infty$, считая $\varphi_p$ при $p \leqslant m$ произвольными функциями из $C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$, а при $p > m$ полагая

$$\varphi_p(x^{(p)}) = \varphi_ц(x^{(m)})\chi_{m+1,p}(x_{m+1})\ \ldots\ \chi_{p,p}(x_p). \qquad (3.31)$$

Здесь $\chi_{n,p}$ ($n = m+1, \ldots, p$) — четная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, которая строится следующим образом. Зафиксируем некоторое $\alpha \in (0, \eta)$ и функцию $\theta(t) \in C^\infty([0, 1])$, равную единице при $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, нулю при $t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ и такую, что $0 \leqslant \theta(t) \leqslant 1$ ($t \in [0, 1]$). Положим $\chi_{n,p}(t)$ равной единице на $[0, l_{n,p}(\alpha))$, $\theta(t - l_{n,p}(\alpha))$ на $[l_{n,p}(\alpha), l_{n,p}(\alpha)+1]$ и нулю на $(l_{n,p}(\alpha), \infty)$ и затем продолжим эту функцию четно на всю ось. Для каждого $n$ $l_{n,p}(\eta) \to \infty$ при $p \to \infty$, причем это стремление для $l_{n,p}(\eta)$ более быстрое, чем для $l_{n,p}(\alpha)$. Кроме того, вследствие (3.4) $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда легко следует, что для построенных функций (3.31) будет выполняться условие в) леммы. Условие б) также, очевидно, выполняется. Ясно также, что можно считать $l_{n,p}(\alpha) \geqslant 1$ при $n = m+1, \ldots, p$ и $p > N(\varphi)$.

Проверим сходимость $\varphi_p$ к $\varphi$ в $L_2(\mathbb{R}^\infty, dg_\varepsilon(x))$. При $p > m$ имеем

$$\|\varphi - \varphi_p\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\infty,dg_\varepsilon(x))} = \int_{\mathbb{R}^\infty}|\varphi_ц(x^{(m)}) - \varphi_p(x^{(p)})|^2\,dg_\varepsilon(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi_{\text{ц}}(x^{(m)})|^2 \, dg_{\varepsilon_1}(x_1) \dots dg_{\varepsilon_m}(x_m) \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{p-m}} \left|1 - \prod_{n=m+1}^{p} \chi_{n,p}(x_n)\right|^2 \prod_{n=m+1}^{p} \gamma_{\varepsilon_n}(x_n)\, dx_{m+1} \dots dx_p.$$

Так как $1-\prod_{k=1}^{q} \alpha_k = (1-\alpha_1) + \sum_{k=2}^{q} \left(\prod_{j=1}^{k-1}\alpha_j\right)(1-\alpha_k)$, то при помощи неравенства Коши — Буняковского можно оценить сверху квадрат модуля, фигурирующий в последнем интеграле, через $(p-m)\times$ $\times \sum_{n=m+1}^{p} |1-\chi_{n,p}(x_n)|^2$ (нужно учесть, что $0 \leqslant \chi_{n,p}(x_n) \leqslant 1$). Поэтому

$$\|\varphi-\varphi_n\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\infty, d\varrho_\varepsilon(x))} \leqslant$$

$$\leqslant c_1(p-m)\sum_{n=m+1}^{p} \int_{\mathbb{R}^1} |1-\chi_{n,p}(x_n)|^2 \gamma_{\varepsilon_n}(x_n)\,dx_n \leqslant$$

$$\leqslant c_1 2\pi^{-\frac12}(p-m)\sum_{n=m+1}^{p} \varepsilon_n^{\frac12}\int_{l_{n,p}(\alpha)}^{\infty} e^{-\varepsilon_n x_n^2}\,dx_n <$$

$$< c_1 2\pi^{-\frac12}(p-m)\sum_{n=m+1}^{p} \varepsilon_n^{\frac12}\int_{l_{n,p}(\alpha)}^{\infty} x_n e^{-\varepsilon_n x_n^2}\, dx_n =$$

$$= c_1\pi^{-\frac12}(p-m)\sum_{n=m+1}^{p} \varepsilon^{-\frac12} e^{-\varepsilon_n (l_{n,p}(\alpha))^2} =$$

$$= c_1\pi^{-\frac12}(p-m)^2 p^{-2-\alpha} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0. \qquad (3.32)$$

Проверим выполнение условия а). Так как $(D_n^2\varphi_p)(x^{(p)}) = \gamma_{\varepsilon_n}^{-\frac12}(x_n)\dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}\left(\gamma_{\varepsilon_n}^{\frac12}(x_n)\,\varphi_p(x^{(p)})\right)$ $(n=1,\dots,p)$, то расписывая эту вторую производную с учетом (3.31) и подставляя в сумму, фигурирующую в а), легко получаем оценку (мы воспользовались сходимостью ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \|D_n^2 1\|_{L_2(\mathbb{R}^\infty, d\varrho_\varepsilon(x))}$, см. (3.4))

$$\sum_{n=m+1}^{p} \|(D_n^2\varphi_p)(x^{(p)})\|_{L_2(\mathbb{R}^\infty, d\varrho_\varepsilon(x))} \leqslant c_2 +$$



$$+ c_3\sum_{n=m+1}^{p}\left[\left(\int_{l_{n,p}(\alpha)}^{l_{n,p}(\alpha)+1} |(\gamma_n^{\frac12}(x_n))'|^2\,dx_n\right)^{\frac12} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{l_{n,p}(\alpha)}^{l_{n,p}(\alpha)+1}\gamma_n(x_n)\,dx_n\right)^{\frac12}\right] < c_2 +$$

$$+ c_3\pi^{-\frac14}\sum_{n=m+1}^{p}\left[\varepsilon_n^{\frac54}\left(\int_{l_{n,p}(\alpha)}^{\infty} x_n^2 e^{-\varepsilon_n x_n^2}\,dx_n\right)^{\frac12} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_n^{\frac14}\left(\int_{l_{n,p}(\alpha)}^{\infty} e^{-\varepsilon_n x_n^2}\,dx_n\right)^{\frac12}\right] \quad (p > N(\varphi)). \qquad (3.33)$$

Квадрат множителя при $\varepsilon_n^{\frac14}$ в (3.33) оценивается подобно (3.32) сверху через $\varepsilon_n^{-\frac12}p^{-2-\alpha}$, поэтому соответствующее слагаемое не превосходит $p^{-1-\frac{\alpha}{2}}$.

Оценим квадрат множителя при $\varepsilon_n^{\frac54}$. Интегрируя по частям, а затем поступая, как и выше, получаем

$$\int_{l_{n,p}(\alpha)}^{\infty} x_n^2 e^{-\varepsilon_n x_n^2}\,dx_n < \varepsilon_n^{-1}\int_{l_{n,p}(\alpha)}^{\infty} x_n\, d\left(e^{-\varepsilon_n x_n^2}\right) = \varepsilon_n^{-1}\left(l_{n,p}(\alpha)\, e^{-\varepsilon_n(l_{n,p}(\alpha))^2} + \right.$$

$$\left. + \int_{l_{n,p}(\alpha)}^{\infty} e^{-\varepsilon_n x_n^2}\,dx_n\right) < \varepsilon_n^{-\frac32}\left[(\ln \varepsilon_n^{-\frac12}p^{2+\alpha})^{\frac12}\,\varepsilon_n^{\frac12}\,p^{-2-\alpha} + p^{-2-\alpha}\right]. \qquad (3.34)$$

Так как $\varepsilon_n^{-\frac12}p^{2+\alpha} \geqslant c_4 > 0$, то благодаря оценке $\ln t \leqslant c_\rho t^\rho$ $(c_4 \leqslant t < \infty,\ \rho > 0;\ c_\rho > 0)$ можем оценить сверху правую часть (3.34) через

$$\varepsilon_n^{-\frac32}p^{-2-\alpha_1}\left(c_\rho^{\frac12}\,\varepsilon_n^{\frac12\left(1-\frac{\rho}{2}\right)} + p^{\alpha_1-\alpha}\right) \leqslant c_5\varepsilon_n^{-\frac32}p^{-2-\alpha_1}, \quad (c_5>0),$$

где обозначено $\alpha_1 = \alpha-\rho-\alpha\frac{\rho}{2}$ ($\rho > 0$ подобрано столь малым, чтобы $0<\alpha_1<\alpha$). Таким образом, соответствующее слагаемое в правой части (3.33) не превосходит $c_5^{\frac12}\varepsilon_n^{\frac12}p^{-1-\frac{\alpha_1}{2}}$. В конечном счете $n$-е слагаемое в последней сумме в (3.33) оценивается сверху через $c_6 p^{-1-\frac{\alpha_1}{2}}$ $(c_6>0)$, а сама эта сумма — через $c_6(p-m)\,p^{-1-\frac{\alpha_1}{2}}$.

Отсюда следует, что (3.33) ограничено при $p \to \infty$, т. е. условие а) также выполняется. ■

Сделаем два простых замечания, касающиеся проверки условия (3.10).

1. Зафиксируем $p = 1, 2, \ldots$ и введем на функциях $\mathbb{R}^\infty \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}^1$, измеримых относительно σ-алгебры $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$, норму

$$\|f\|_p = 2^{\frac{p}{2}} \left( \int\limits_{Q_p(\delta)} |f(x)|^{2p} \gamma_{\varepsilon_1}^{-1}(x_1) \ldots \gamma_{\varepsilon_p}^{-1}(x_p)\, dg_\varepsilon(x) \right)^{\frac{1}{2p}} \leqslant \infty. \quad (3.35)$$

Условие (3.10) означает, что $\|a - a_p\|_p \underset{p\to\infty}{\to} 0$. Из неравенства треугольника для (3.35) заключаем, что если $a^{(1)}(x), \ldots, a^{(m)}(x) \in L_2(\mathbb{R}^\infty, dg_\varepsilon(x))$ удовлетворяют (3.10), то и $a(x) = \sum\limits_{j=1}^m a^{(j)}(x)$ ему удовлетворяет (нужно положить $a_p(x^{(p)}) = \sum\limits_{j=1}^m a_p^{(j)}(x^{(p)})$).

2. Будем рассматривать $a(x)$, представимые в виде сходящегося в $L_2(\mathbb{R}^\infty, dg_\varepsilon(x))$ ряда

$$a(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x_1, \ldots, x_n), \quad f_n \in L_2(\mathbb{R}^\infty, dg_\varepsilon(x)). \quad (3.36)$$

Если $\|f_n\|_p \leqslant \delta_n$ $(p = 1, \ldots, n-1)$ и $\sum\limits_{n=1}^\infty \delta_n < \infty$, то для $a(x)$ выполняется условие (3.10). В самом деле, положим $a_p(x^{(p)}) = \sum\limits_{n=1}^p f_n(x^{(p)})$, тогда

$$\|a - a_p\|_p = \left\| \sum_{n=p+1}^\infty f_n \right\|_p \leqslant \sum_{n=p+1}^\infty \|f_n\|_p \leqslant \sum_{n=p+1}^\infty \delta_n \underset{p\to\infty}{\to} 0.$$

Последнее замечание дает возможность рассмотреть случай аналитических потенциалов, представимых в виде ряда

$$a(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n (x_1 \ldots x_n)^{2N_n},$$

где $c_n \geqslant 0$ — некоторые коэффициенты, а $N_n = 0, 1, \ldots$ — заданные степени. Несложными вычислениями легко получить условия на $c_n$, обеспечивающие выполнение требований этого замечания.

В заключение отметим, что результаты этого пункта легко могут быть обобщены на случай замены весов $\gamma_{\varepsilon_n}(x_n)$ общими гладкими весами $p_n(x_n)$ и невозмущенного выражения (3.5) общим эллиптическим выражением второго порядка от бесконечного числа переменных с цилиндрическими коэффициентами. Точнее, пусть $D_n$ —



обставленная посредством $p_n$ производная $\frac{\partial}{\partial x_n}$. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$(\mathcal{M}u)(x) = -\sum_{j,k=1}^\infty (D_j(a_{jk}(x) D_k u))(x) +$$
$$+ 2i \sum_{j=1}^\infty b_j(x)(D_j u)(x) + i \sum_{j=1}^\infty (D_j b_j)(x) u(x) + q(x) u(x) \quad (3.37)$$
$$(x \in \mathbb{R}^\infty)$$

с вещественными коэффициентами $a_{jk}$, $b_j$, $q \in L_2(\mathbb{R}^\infty, d\theta(x))$. Предполагается, что $a_{jk}$, $b_j$ — бесконечно дифференцируемые цилиндрические функции, точнее, существует такое $N = 1, 2, \ldots$, что $a_{jk}(x) = a_{jk.\text{ц}}(x_1, \ldots, x_{\max(j,k,N)})$, $b_j(x) = b_{j.\text{ц}}(x_1, \ldots, x_{\max(j,N)})$, где $a_{jk.\text{ц}} \in C^\infty(\mathbb{R}^{\max(j,k,N)})$, $b_{j.\text{ц}} \in C^\infty(\mathbb{R}^{\max(j,N)})$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$. Будем считать выполненным условие эллиптичности

$$0 < \sum_{j,k=1}^\infty a_{jk}(x) \xi_j \bar{\xi}_k \leqslant c \sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^2 \quad (x \in \mathbb{R}^\infty)$$

для любой финитной последовательности $(\xi_j)_{j=1}^\infty$ комплексных чисел (постоянная $c$ не зависит от $x$, поэтому коэффициенты $a_{jk}(x)$ ограничены; это условие, обеспечивающее равномерную по $p$ конечность скорости распространения возмущения для соответствующих гиперболических уравнений типа (3.25), может быть ослаблено). Кроме того, должно быть выполнено условие, обобщающее (3.4):

$$\sum_{j,k=1}^\infty \|D_j(a_{jk}(x) D_k 1)\|_{L_2(\mathbb{R}^\infty, d\theta(x))} + \sum_{j=1}^\infty \|b_j(x) D_j 1\|_{L_2(\mathbb{R}^\infty, d\theta(x))} +$$
$$+ \sum_{j=1}^\infty \|D_j b_j\|_{L_2(\mathbb{R}^\infty, d\theta(x))} < \infty.$$

При указанных ограничениях выражение (3.37) порождает эрмитов в $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\theta(x))$ оператор $C^\infty_{\text{ц},b,2}(\mathbb{R}^\infty) \ni u(x) \mapsto (\mathcal{M}u)(x)$. При условиях на потенциал $q(x)$ типа фигурирующих в теореме 3.1 этот оператор будет существенно самосопряженным. Доказательство проводится по схеме п. 2, в частности подобно лемме 2.1 доказывается аналогичная лемма для обрезанных выражений (3.37).

В случае общего веса $p_n$ в выражении типа (3.7) первая сумма и $a$ в отдельности могут быть не полуограниченными снизу. Вместо (3.9) можно требовать полуограниченность $\mathcal{B}$, а также не предполагать сходимость $a_p$ к $a$ в среднем квадратичном.

# ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

## ВВЕДЕНИЕ

Сведения по топологическим пространствам изложены в книге Понтрягина [1, гл. 2], полезно также знакомство с рядом параграфов книги Архангельского и Пономарева [1]. Изложение теории меры и интегрирования см. в книгах Халмоша [1] и Гихмана и Скорохода [1], линейных топологических пространств — в книге Шефера [1]. Теорию операторов в гильбертовом пространстве мы используем примерно в объеме книги Ахиезера и Глазмана [1]; ряд полезных для нас точек зрения и подходов содержится в монографиях Плеснера [1] и Морена К. [2]. Полезно знакомство с рядом разделов книг Данфорда и Шварца Дж. [1, 2], содержащих большое число сведений по функциональному анализу, и Рида и Саймона [1], написанной с точки зрения потребностей квантовой теории поля. Теория обобщенных функций в требуемом нам аспекте дана в книгах Соболева [2], Шварца Л. [1], Гельфанда и Шилова [1, 2] и Владимирова [1].

## ГЛАВА 1

**§ 1.** Изложение теории пространств с негативной нормой следует гл. 1 книги Березанского [3], при этом мы упростили некоторые доказательства. Впоследствии методика пространств с негативной нормой проникла в ряд разделов функционального анализа и его приложений — в теорию краевых задач для уравнений с частными производными, в спектральную теорию дифференциальных операторов с операторными коэффициентами, в теорию расширения операторов и др. Соответствующие работы мы не указываем, так как они слишком далеки от рассматриваемой тематики. Отметим здесь лишь применения к теории меры и дифференциальным операторам с бесконечным числом переменных (Далецкий [4] ) и квантовой теории поля (см. книгу Саймона [2] ).

**§ 2.** Он основан на работе фон Неймана [1] о бесконечных тензорных произведениях гильбертовых пространств, однако изложение требуемых результатов этой работы модифицировано удобным для нас образом: сперва введено сепарабельное подпространство полного произведения при помощи задания базиса (п. 3), а затем — полное неймановское произведение (п. 10). Взвешенное тензорное произведение и бесконечные тензорные произведения цепочек (п. 4—6) введены и изучены для целей спектральной теории в работах Березанского, Гали, Жука [1], Березанского, Гали [1], Березанского, Уса [1, 2]. Тензорное произведение бесконечного числа операторов (п. 7) строится в соответствии с работами Березанского, Уса [1, 2], другие результаты по тензорному произведению бесконечного числа операторов, в том числе и неограниченных, см. в статьях Накагами [1—3], Араки и Накагами [1]. В п. 8, 9 излагается вариант с оснащением гильбертовыми пространствами теоремы Л. Шварца о ядре (Шварц Л. [1, 2]). Это изложение в основном такое же, как и в книге Березанского [3], однако формулировка теорем и их доказательства существенно улучшены. Тройки пространств (п. 11) введены Березанским [8]. Широкое и полезное обобщение конструкции бесконечного тензорного произведения как гильбертовых, так и ядерных пространств дал Марченко [1—3]. В этом обобщении вместо вложений



$\bigotimes_{n=1}^{p} H_n \to (\bigotimes_{n=1}^{p} H_n) \otimes e^{(p+1)} \subseteq \bigotimes_{n=1}^{p+1} H_n$, фигурирующих при построении бесконечного тензорного произведения, задается последовательность изометрий $i_p : G_p \to G_{p+1}$ $(p = 1, 2, \ldots)$, где $(G_p)_{p=1}^{\infty}$ — заданная последовательность гильбертовых пространств, играющих роль пространств $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n$. Роль бесконечного тензорного произведения сейчас играет $\operatorname{indlim}_{p\to\infty} G_p$.

**§ 3.** Теорию позитивных соболевских пространств см. в книгах Соболева [1, 2]. Негативные соболевские пространства и их свойства как в ограниченной, так и в неограниченной областях (п. 3, 4, 6—8) излагаются в соответствии с работами Березанского [3, 7], однако результаты усилены и уточнены (в связи с уточнением этих результатов см. заметку Влока [1]). В п. 5, 11 изложена теорема о ядре в пространствах суммируемых с квадратом функций в ограниченной или неограниченной области; эти результаты несколько уточняют соответствующие факты книги Березанского [3]. То же можно сказать и относительно п. 12, касающегося цепочек, построенных по положительно определенному ядру. Факты п. 9, 10 хорошо известны.

**§ 4.** По поводу гауссовских мер, фигурирующих в этом параграфе, а также в гл. 2, § 3 и в гл. 3, § 1, 3, см. книги Гельфанда, Виленкина [1], Шилова, Фан Дык Тиня [1], Гихмана, Скорохода [2], Скорохода [1]. Теорема 4.2 принадлежит Шварцу Л. [1]. Понятие и свойства взвешенного бесконечного тензорного произведения ядерных пространств, лежащего в основе введения в этом параграфе основных и обобщенных функций бесконечного числа переменных (п. 3), принадлежат Березанскому и Самойленко [1]. Введение и изучение важных классов пространств основных и обобщенных функций бесконечного числа переменных — пространств $\mathcal{A}(\mathbb{R}^\infty)$, $\mathcal{H}(\mathbb{R}^\infty)$ и их сопряженных (п. 5, 6) — принадлежит Кондратьеву и Самойленко [1, 2]; теорема 4.6 по существу развивает результат Пич [1]. Конструкция взвешенного тензорного произведения обобщена Корсунским [2] на бесконечные тензорные произведения локально выпуклых пространств. Изоморфизм Сигала переводит построенные в § 4 оснащения пространства $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\gamma(x))$ в оснащения, причем ядерные, и пространства Фока. Неядерные пространства Фока были введены в работе Кристенсена, Мейлбо, Поулсена [1], некоторые факты по оснащению пространства Фока содержатся в статье Напюрковского [1]. Первоначальное изложение теоремы Колмогорова — Хинчина содержится в их работе [1]. Отметим, что соболевские пространства функций бесконечного числа переменных фиксированной гладкости введены и изучены Фроловым [1, 2], однако для них в связи с отсутствием взвешивания несправедливы факты типа квазиядерности вложения. Другой путь построения теории обобщенных функций бесконечного числа переменных предложен Фоминым [1, 2], он развивался в ряде работ (Авербух, Смолянов, Фомин [1, 2], Далецкий, Фомин [1], Угланов [1], Дудин [1] ). Основная идея этого подхода заключается в том, что в связи с отсутствием на бесконечномерном пространстве стандартной меры типа лебеговой переходят от двойственности между основными и обобщенными функциями к двойственности между основными функциями и мерами или к двойственности между основными мерами (гладкими в определенном смысле) и обобщенными функциями.

## ГЛАВА 2

**§ 1.** Развитый подход к изучению семейства коммутирующих нормальных операторов при помощи построения с. р. е. во всяком случае для счетного числа операторов встречался и раньше (Плеснер, Рохлин [1], Плеснер [1] ). Изложение п. 1, 2 следует статьям Березанского [4—6]. Для § 2 существенно изучение носителя с. р. е. и сужения с. р. е. на замкнутое множество из $G_\sigma(\mathbb{R}^X)$. Вместе с тем носитель меры обычно рассматривается в случае мер на локально компактных пространствах; для мер на тихоновских произведениях возможны необычные ситуации (см. п. 6). Значительная часть результатов п. 4, 5, 7—10 по существу содержится в статьях Березанского [5, 12]. Техника их получения достаточно стандартна для теории случайных процессов (Гихман, Скороход [2], Вентцель [1]), правда, в этой теории редко используется важная для нас тихоновская топологизация. Первоначальное изложение теоремы Колмогорова содержится в его книге [3], доказательство теоремы Тихонова (Тихонов [1]) — в книге Понтрягина [1]. В связи с изучением мер на тихоновских произведениях см. книгу Бурбаки [2] и работы Прохорова [1], Винокурова [1] и Смолянова и Фомина [1].

**§ 2.** Результаты этого параграфа в менее совершенной форме были получены и применялись к представлениям функционалов типа Уайтмэна в работах Березанского [4—6]; в форме, близкой к изложенной, они анонсированы в его заметке [12]. Подчеркнем, что улучшение результатов касается лишь ситуации, когда операторов более чем счетное число; этот случай вызывает существенные трудности (см. п. 5—7). Здесь значительную стимулирующую для автора роль сыграла статья Морена К. [4]. Лемма 2.3, обобщающая так называемую лемму о сепарабельности (Наймарк [1, гл. 8, § 40, п. 2]), принадлежит Кондратьеву. Первой работой по разложению по обобщенным собственным векторам самосопряженного оператора была статья Гельфанда и Костюченко [1], затем появилась работа Березанского [1], в которой рассматривались разложения с оснащением гильбертовыми пространствами. В книге Березанского [3] имеется подробная библиография работ в этом направлении до 1965 г. Сейчас укажем лишь, что на конструкции гл. 2 повлияли работы Гординга [1], Морена К. [1], Каца [1—3]. Отметим некоторые последующие работы, посвященные как общим вопросам теории разложений по обобщенным собственным векторам, так и некоторым близким этой книге специальным ситуациям и применениям: Герлах [1, 2], Гиршфельд [1], Гирц [1], Гоулд [1], Итагаки [1], Дерзко [1], Влока [2], Насбаум [3, 4], Напюрковский [1—5]; Бирман, Энтина [1], Самойленко [1], Беббит [1], Корсунский [1, 3], Пруговечки [1, 2], Фредрикс [1], Кошманенко, Самойленко [1], Кошманенко [1, 2]. Ряд вопросов, связанных с разложениями по обобщенным собственным функциям, содержится в книгах Морена К. [3] и Котляра [1].

**§ 3.** Его результаты являются некоторой интерпретацией хорошо известных фактов (Наймарк [1], Морен К. [3]) и изложенного в § 1, 2. Исключение, возможно, составляет теорема 3.1.

**§ 4.** Большинство результатов п. 2 анонсировано в работе Березанского [12], п. 3 — в заметке Березанского, Гали, Кондратьева [1]. В связи с понятиями, фигурирующими в этом параграфе, см. книги Шефера [1], Понтрягина [1], Гельфанда, Райкова, Шилова [1], Наймарка [1]. Соображения об уменьшении множества, где сосредоточено с. р. е., в случае семейства операторов $(A_x)_{x\in X}$, обладающих алгебраическими связями, использовались Корсунским [1, 3] (в этих работах применялись более слабые по сравнению с § 2 факты о разложениях). Результаты теорем 4.1 и 4.3 в случаях локально компактной коммутативной группы $X$ и нормированной, а не топологической, алгебры $X$ известны (Наймарк [1, гл. 6, § 31, п. 7; гл. 4, § 17, п. 4]). Сделаем еще некоторые замечания, касающиеся теоремы 4.3. Возможно другое обобщение теоремы Стоуна на случай, когда $X$ — вещественное гильбертово пространство. Можно воспользоваться теоремой Минлоса — Сазонова (Минлос [1], Сазонов [1], Гихман, Скороход [2, гл. 5, § 5], Скороход [1, гл. 1, § 4]) о том, что положительно определенная функция $k(x)$ на $X$, непрерывная в так называемой $J$-топологии, представима в виде $k(x) = \int_X e^{i(\lambda, x)_X}\, d\rho(\lambda)$ $(x \in X)$. Применяя это представление к положительно определенной функции $k(x) = (U_x f, f)_{H_0}$ $(f \in H_0)$, нетрудно получить формулу типа (4,12) (этот подход по существу



содержится в книге Гельфанда, Виленкина [1, гл. 4, § 5, п. 4] и у Корсунского [3]). Для получения такого результата необходимо требовать слабую непрерывность представления $X \ni x \to U_x$ в $J$-топологии взамен условий теоремы 4.3. С другой стороны, теорема 4.3 дает возможность с иных позиций взглянуть на теоремы типа Минлоса—Сазонова. Этот круг вопросов, к которому имеют отношение и статьи Березанского, Гали, Жука [1], Березанского, Гали [1], будет обсуждаться в книге, о которой шла речь в предисловии. В ней же будут выяснены связи между результатами типа теоремы 4.4 и обобщенной степенной проблемой моментов (Березанский [4, 6—8], Березанский, Шифрин [1]). Сейчас уместно сказать, что в подобных вопросах существенную роль играют результаты, изложенные в § 2 гл. 2 и примененные для случая гильбертова пространства, построенного при помощи положительно определенного ядра (см. гл. 1, § 1, п. 7). Идея подобных рассмотрений основывается на работах Крейна М. Г. [1, 2].

**§ 5.** Результаты п. 1, 5, 6 являются некоторым обобщением и уточнением соответствующих фактов книги Березанского [3]. Теорема 5.2 принадлежит Кацу [1, 3], ее доказательство — модернизированное рассуждение из указанной книги Березанского [3]. Результаты п. 3, 4 принадлежат Березанскому, Гейдарову (Гейдаров [1]), они являются развитием соответствующих фактов из книги Березанского [3], дающим возможность их применять к более широким классам операторов, в частности к операторам типа Шредингера с сингулярным потенциалом. Одновременно разложение по собственным функциям оператора Шредингера с сингулярным потенциалом получено в работе Семенова [1]; в статьях Белого, Коваленко, Семенова [1] и Коваленко, Семенова [1] детально изучены такие разложения (см. также более раннюю работу Гестрина [1]). Отметим, что основная идея п. 3 принадлежит Кацу и Березанскому [3]. Мультипликативные формулы типа (5.32) впервые появились в 1958 г. у Далецкого [1—3] и Троттера [1], причем первый автор сперва изучал возмущение полугруппы ограниченным оператором, но $f$ могла быть обобщенной функцией, а второй — используемое нами возмущение неограниченным оператором; последний результат ясно изложен в работе Чернова [1].

**§ 6.** Впервые идея метода доказательства самосопряженности, развиваемого в этом параграфе, появилась для случая оператора Шредингера и волнового уравнения у Повзнера [1]. Общая схема подобного подхода к вопросу самосопряженности предложена в работах Березанского [2, 3]. В п. 1 излагается модернизация и уточнение этой схемы; сведения по эволюционным уравнениям см. в книге Крейна С. Г. [1]. Теорема 6.4 является абстрактным изложением схемы работ Левитана [1], Орочко [1]; теоремы 6.5 и 6.6 принадлежат Березанскому [9—11]. Применение изложенного способа доказательства самосопряженности см. в работах Березанского [2, 3, 9, 11], Чауса [1, 2], Чумака [1], этот способ и его комбинации с другими приемами — у Орочко [1—3] (другие работы Левитана и Орочко содержат ряд применений метода гиперболических уравнений к иным вопросам спектральной теории). Близкий прием доказательств самосопряженности, использующий гиперболические системы, применил Чернов [3, 5]. Развитие этого приема принадлежит Като [2], Рауху, Тейлору [1]. Понятие аналитического вектора и критерий самосопряженности в терминах таких векторов — Нелсону [1]. Понятие квазианалитического вектора введено Исмагиловым [1]; в приведенном в § 6 виде — Насбаумом [1] (после последней работы понятие такого вектора стало весьма популярным). Этим же авторам принадлежат применения квазианалитических векторов к вопросам самосопряженности. Другие доказательства и обобщение на банаховы пространства содержатся в статьях Хасегавы [1], Чернова [2]. Стилтьесовским векторам и их применениям посвящены работы Насбаума [2], Мессона, Мак-Клери [1], Саймона [1]. Изложенное в п. 3 простое сведение «квазианалитических критериев» к «эволюционным критериям» (Березанский [7, 8]), по существу, содержалось еще в книге Березанского [3, гл. 8, § 5, п. 4]. Отметим обзор по «квазианалитическим критериям» Чернова [4]. Теорема 6.11 принадлежит Березанскому [2, 3]; ссылки см. также в книге Березанского [3].

## ГЛАВА 3

**§ 1.** Его результаты принадлежат Березанскому, Усу [1, 2], Усу [1]. Преобразование Фурье — Винера (п. 2) в «классическом» изложении содержится в работах Камерона, Мартина [1], Гусейнова [1, 2]. Теорема 1.2 в случае $L(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ и в несколько другом виде принадлежит Морен Л. и Морену К. [1], Морену К. [3].

**§ 2.** Результаты п. 1 — модернизированное и уточненное изложение соответствующих результатов из книги Березанского [3]. Результаты п. 2, 3 принадлежат Березанскому, Усу [1, 2]. Построения, близкие к теореме 2.3, содержались у Стрейта [1] и Рида [2]. Часть теоремы 2.7, относящаяся к самосопряженности $\mathscr{A}_{\min}$, впервые установлена другим способом Ридом [2]. Первоначальное изложение теоремы Колмогорова о трех рядах см. в его работах [1, 2]. Теорема 2.8 по существу принадлежит Винтнеру [1].

**§ 3.** Дифференциальным операторам с бесконечным числом переменных посвящено большое число работ. Такие операторы будут более подробно изучены в готовящейся книге. Здесь ограничимся лишь упоминанием некоторых математиков, впервые занявшихся тем или иным аспектом теории: Е. М. Полищук и М. Н. Феллер, Ю. Л. Далецкий, Г. Е. Шилов, С. В. Фомин и О. Г. Смолянов, М. И. Вишик, Л. Гросс, М. А. Пич, П. Кри и многие другие, работающие в квантовой теории поля (см. Саймон [2], Саймон, Хёэг-Крон [1]). Вместе с тем вопросы самосопряженности таких операторов уместно более подробно осветить сейчас. Результаты § 3 принадлежат Березанскому [11], Березанскому, Михайлюк [1], метод, при помощи которого доказывались леммы 3.2 и 3.3,— Ароншайну, Смиту [1], Лизоркину [1]. Доказательство обобщения леммы 3.1, необходимого для рассмотрения (3.37), аналогично статье Березанского [9]. Введению дифференциальных операторов типа п. 1 и некоторым их свойствам посвящены работы Умемура [1], Хида [1], вопросам самосопряженности при возмущении оператора с разделяющимися переменными потенциалом — Далецкого [4—6], Рида [1], Фролова [2] и (на несколько другом языке) Марченко [1, 2], а также недавние результаты Н. Н. Фролова, Ю. А. Клевчихина и Н. Н. Фролова, М. А. Перельмутера и Ю. А. Семенова.

Укажем на обзоры Горбачук, Самойленко и Уса [1] и Березанского, Самойленко и Уса [1], в которых рассматривается ряд вопросов, затронутых в этой книге.

# ЛИТЕРАТУРА

*Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В.*
1. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. 1. Дифференцируемые меры. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1971, **24**, с. 133—174.
2. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. 2. Дифференциальные операторы и их преобразование Фурье. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1972, **27**, с. 247—262.

*Араки, Накагами* (Araki H., Nakagami Y.)
1. A remark on an infinite tensor product of von Neumann algebras. — Publ. RIMS, Kyoto University, 1972, **8**, № 2, p. 363—374.

*Ароншайн, Смит* (Aronszajn N., Smith K. T.)
1. Theory of Bessels potentials. P. 1. — Ann. Inst. Fourier, 1961, **11**, p. 385—475.

*Архангельский А. В., Пономарев В. И.*
1. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., «Наука», 1974. 424 с.

*Ахиезер Н. И., Глазман И. М.*
1. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966. 544 с.

*Беббит* (Babbit D.)
1. Rigged Hilbert spaces and one-particle Schrödinger operators. — Repts Math. Phys., 1972, **3**, № 1, p. 37—42.

*Бейтмен Г., Эрдейи А.* (Bateman H., Erdéyi A.)
1. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., «Наука», 1966. 296 с.

*Белый А. Г., Коваленко В. Ф., Семенов Ю. А.*
1. On the continuity of generalized eigenfunctions of Schrödinger operator.— Repts Math. Phys., 1977, **12**, № 3, p. 307—310.

*Березанский Ю. М.*
1. О разложении по собственным функциям общих самосопряженных дифференциальных операторов. — ДАН СССР, 1956, **108**, № 3, с. 379—382.
2. Одно обобщение многомерной теоремы Бохнера.— ДАН СССР, 1961, **136**, № 5, с. 1011—1014.
3. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., «Наук. думка», 1965. 800 с.
4. Интегральное представление положительно определенных функционалов типа Уайтмана. — Укр. мат. журн., 1967, **19**, № 1, с. 89—95.
5. Разложение по обобщенным собственным векторам и интегральное представление положительно определенных ядер в форме континуального интеграла.— Сиб. мат. журн., 1968, **9**, № 5, с. 998—1013.
6. Представление функционалов типа Вайтмана посредством континуальных интегралов. — Функц. анализ и его прил., 1969, **3**, № 2, с. 1—18.
7. Обобщенная степенная проблема моментов. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1970, **21**, с. 47—102.
8. Об обобщенной степенной проблеме моментов. — Укр. мат. журн., 1970, **22**, № 4, с. 435—460.
9. Самосопряженность эллиптических операторов с сингулярным потенциалом.— Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 5, с. 579—590.

10. Одно замечание относительно существенной самосопряженности степеней оператора. — Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 6, с. 790—793.
11. Самосопряженность эллиптических операторов с бесконечным числом переменных. — Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 6, с. 729—742.
12. О разложении по совместным обобщенным собственным векторам произвольного семейства коммутирующих нормальных операторов.— ДАН СССР, 1976, **229**, № 3, с. 531—533.

*Березанский Ю. М., Гали И. М.*
1. Положительно определенные функции бесконечного числа переменных в слое. — Укр. мат. журн., 1972, **24**, № 4, с. 435—464.

*Березанский Ю. М., Гали И. М., Жук В. А.*
1. О положительно определенных функциях бесконечного числа переменных. — ДАН СССР, 1972, **203**, № 1, с. 13—15.

*Березанский Ю. М., Гали И. М., Кондратьев Ю. Г.*
1. Теорема Стоуна для аддитивной группы гильбертова пространства. — Функц. анализ и его прил., 1977, **11**, № 4, с. 68—69.

*Березанский Ю. М., Михайлюк Т. А.*
1. Об условиях самосопряженности эллиптических операторов с бесконечным числом переменных.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 2, с. 157—165.

*Березанский Ю. М., Самойленко Ю. С.*
1. Ядерные пространства функций бесконечного числа переменных. — Укр. мат. журн., 1973, **25**, № 6, с. 723—737.

*Березанский Ю. М., Самойленко Ю. С., Ус Г. Ф.*
1. Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. — В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах. Новосибирск, «Наука», 1977, с. 20—41.

*Березанский Ю. М., Ус Г. Ф.*
1. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, допускающих разделение бесконечного числа переменных.— ДАН СССР, 1973, **213**, № 5, с. 1005—1008.
2. Eigenfunction expansions of operators admitting separation of an infinite number of variables. — Repts Math. Phys., 1975, 7, № 1, p. 103—126.

*Березанский Ю. М., Шифрин С. Н.*
1. Обобщенная степенная симметрическая проблема моментов. — Укр. мат. журн., 1971, **23**, № 3, с. 291—306.

*Бирман М. Ш., Энтина С. Б.*
1. Стационарный подход в абстрактной теории рассеяния.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1967, **31**, № 2, с. 401—430.

*Бурбаки Н.* (Bourbaki N.)
1. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. М., «Наука», 1970. 320 с.
2. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. М., «Наука», 1977. 600 с.

*Вентцель А. Д.*
1. Курс теории случайных процессов. М., «Наука», 1975. 320 с.

*Виленкин Н. Я.*
1. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965. 588 с.

*Винокуров В. Г.*
1. Компактные меры и произведения пространств Лебега. — Мат. сб., 1967, **74**, № 3, с. 434—472.

*Винтнер* (Wintner A.)
1. The Fourier transforms of propability distributions. Baltimore, 1947. 190 p.

*Владимиров В. С.*
1. Обобщенные функции в математической физике. М., «Наука», 1976. 280 с.

*Влока* (Wloka J.)
1. Über eine Abschätzung der Sobolevschen Konstanten.— Arch. Math., 1967, **18**, № 4, S. 411—413.



2. Gelfand triplets and spectral theory.— In: Summer school on topological vector spaces. Lect. notes math. № 331, Berlin e. a., 1973, p. 163—182.

*Вул Е. Б.*
1. О теоремах единственности для одного класса интегральных представлений.— ДАН СССР, 1959, **129**, № 4, с. 722—725.

*Гейдаров А. Г.*
1. О разложении по собственным функциям самосопряженных эллиптических операторов с сингулярным потенциалом. — Тр. Всесоюзн. конференции по уравнениям с частными производными. Москва, 1976. М., 1978.

*Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.*
1. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., Физматгиз, 1961. 472 с.

*Гельфанд И. М., Костюченко А. Г.*
1. О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов. — ДАН СССР, 1955, **103**, № 3, с. 349—352.

*Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.*
1. Коммутативные нормированные кольца. М., Физматгиз, 1960. 316 с.

*Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.*
1. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959. 472 с.
2. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958. 308 с.

*Герлах* (Gerlach E.)
1. On spectral representation for self-adjoint operators, expansions in generalized eigenelements.— Ann. Inst. Fourier, 1965, **15**, № 2, p. 537—574.
2. On the analyticity of generalized eigenfunctions.— Ann. Inst. Fourier, 1968, **18**, № 2, p. 11—16.

*Гестрин Г. Н.*
1. О разложении по собственным функциям оператора Шредингера с сингулярным потенциалом.— Мат. заметки, 1974, **15**, № 3, с. 455—465.

*Гирц* (Giertz M.)
1. On generalized elements with respect to linear operators.— Pacif. J. Math., 1967, **23**, № 1, p. 47—67.

*Гиршфельд* (Hirschfeld R. A.)
1. Expansions in eigenfunctionals.— Indagationes Math., 1965, 27, № 3.

*Гихман И. И., Скороход А. В.*
1. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965. 656 с.
2. Теория случайных процессов. Т. I. М., «Наука», 1971. 664 с.

*Горбачук В. И., Самойленко Ю. С., Ус Г. Ф.*
1. Спектральная теория самосопряженных операторов и бесконечномерный анализ. — Успехи мат. наук, 1976, **31**, № 1, с. 203—216.

*Гординг* (Gårding L.)
1. Разложение по собственным функциям.— В кн.: Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., 1966, с. 309—332.

*Гоулд* (Gould G. G.)
1. The spectral representation of normal operators on a rigged Hilbert space.— J. London Math. Soc., 1968, **43**, № 4, p. 745—754.

*Гусейнов Р. В.*
1. К теории преобразования Фурье — Винера.— Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, 1970, № **4**, с. 17—25.
2. Некоторые свойства преобразования Фурье — Винера. — Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, 1970, № 4, с. 39—49.

*Далецкий Ю. Л.*
1. О представимости решений операторных уравнений в виде континуальных интегралов. — ДАН СССР, 1960, **134**, № 5, с. 1013—1016.
2. Фундаментальные решения операторного уравнения и континуальные интегралы. — Изв. вузов. Сер. Математика, 1961, № 3, с. 27—48.
3. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями. — Успехи мат. наук, 1962, **17**, № 5, с. 3—115.

4. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения. — Успехи мат. наук, 1967, **22**, № 4, с. 3—54.
5. О самосопряженности и максимальной диссипативности дифференциальных операторов для функций бесконечномерного аргумента. — ДАН СССР, 1976, **227**, № 4, с. 784—787.
6. Вероятностные методы в некоторых задачах бесконечномерного анализа. — В кн.: Предельные теоремы для случайных процессов. (Случайные операторы и распределения в банаховых пространствах). К., 1977, с. 108—124.

*Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.*
1. Обобщенные меры в гильбертовом пространстве и прямое уравнение Колмогорова. — ДАН СССР, 1972, **205**, № 4, с. 759—762.

*Данфорд Н., Шварц Дж.* (Dunford N., Schwartz J. T.)
1. Линейные операторы. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.
2. Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1966. 1064 с.

*Дерзко* (Derzko N. A.)
1. Generalized eigenfunctions and real axis limits of the resolvent. — Trans. Amer. Math. Soc., 1972, № 2, **174**, p. 489—506.

*Дудин Д. И.*
1. Обобщенные меры, или распределения на гильбертовом пространстве.— Тр. Моск. мат. об-ва, 1973, 28, с. 135—158.

*Исмагилов Р. С.*
1. Самосопряженные расширения системы коммутирующих симметричных операторов.— ДАН СССР, 1960, **133**, № 3, с. 511—514.

*Итагаки* (Itagaki Y.)
1. The eigenfunction expansions of the symmetric operators associated with Gelfand triplet.— Tôhoku Math. J., 1971, **23**, № 2, p. 259—271.

*Камерон, Мартин* (Cameron R. H., Martin W. T.)
1. Fourier — Wiener transforms of analytic functionals.— Duke Math. J., 1945, **12**, № 3, p. 489—507.

*Като* (Kato T.)
1. Schrödinger operators with singular potentials.— Isr. J. Math., 1972, **13**, № 1-2, p. 135—148.
2. A remark to the preceding paper by Chernoff.— J. Funct. Anal., 1973, **12**, № 4, p. 415—417.

*Кац Г. И.*
1. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов.— ДАН СССР, 1958, **119**, № 1, с. 19—22.
2. Обобщенные элементы гильбертова пространства. — Укр. мат. журн., 1960, **12**, № 1, с. 13—24.
3. Спектральные разложения самосопряженных операторов по обобщенным элементам гильбертова пространства.—Укр. мат. журн., 1961, **13**, № 4, с. 13—33.

*Коваленко В. Ф., Семенов Ю. А.*
1. Некоторые вопросы разложения по обобщенным собственным функциям оператора Шредингера с сильно сингулярными потенциалами. — Успехи мат. наук, 1978, **33**, № 4.

*Колмогоров А. Н.*
1. Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen. — Math. Ann., 1928, **99**, № 1-2, S. 309—319.
2. Bemerkungen zu meiner Arbeit «Über die Summen zufälliger Grossen». — Math. Ann., 1929, **102**, № 3, S. 484—488.
3. Основные понятия теории вероятностей. М. — Л., ОНТИ, 1936. 80 с.

*Колмогоров А. Н., Хинчин А. Я.*
1. Über Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufalle bestimmt verden. — Мат. сб., 1925, **32**, № 4, с. 668—677.

*Кондратьев Ю. Г., Самойленко Ю. С.*
1. Интегральное представление обобщенных положительно определенных ядер бесконечного числа переменных. — ДАН СССР, 1976, **227**, № 4, с. 800—803.
2. The spaces of trial and generalized functions of infinitely many variables.— Repts Math. Phys., 1978, **14**, № 3.

*Корсунский Л. М.*
1. Разложение по обобщенным собственным векторам и интегральное представление инвариантных положительно определенных ядер.— Укр. мат. журн., 1972, **24**, № 3, с. 341—351.
2. О бесконечных тензорных произведениях локально выпуклых пространств.— Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 1, 13—23.
3. Интегральные представления инвариантных положительно определенных ядер.— В кн.: Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ. К., 1976, с. 26—87.

*Котляр* (Cotlar M.)
1. Equipacion con espacios de Hilbert. Buenos Aires, 1968. 366 p.

*Кошманенко В. Д.*
1. Теория рассеяния в терминах билинейных функционалов.— ДАН СССР, 1975, **224**, № 2, с. 277—280.
2. Scattering theory with different state spaces.— Repts Math. Phys., 1978, **14**, № 2.

*Кошманенко В. Д., Самойленко Ю. С.*
1. Об изоморфизме между пространством Фока и пространством функций бесконечного числа переменных.— Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 5, с. 669—674.

*Крейн М. Г.*
1. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения.— ДАН СССР, 1946, **53**, № 1, с. 3—6.
2. Про ермітові оператори з напрямними функціоналами.— Збірник праць Ін-ту матем. АН УРСР, 1948, **10**, с. 83—106.

*Крейн С. Г.*
1. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967. 464 с.
2. Функциональный анализ. Под. ред. С. Г. Крейна. М., «Наука», 1972. 544 с.

*Кристенсен, Мейлбо, Поулсен* (Kristensen P., Mejlbo L., Poulsen E. T.)
1. Tempered distributions in infinitely many dimensions. 1. Canonical field operators.— Communs Math. Phys., 1965, **1**, № 3, p. 175—214.

*Левитан Б. М.*
1. Об одной теореме Титчмарша и Сиерса.— Успехи мат. наук., 1961, **16**, № 4, с. 175—178.

*Лизоркин П. И.*
1. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p(E_n)$. Теоремы вложения.— Мат. сб., 1963, **60**, № 3, с. 325—353.

*Мандельбройт С.* (Mandelbrojt S.)
1. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М., Изд-во иностр. лит., 1955. 268 с.

*Марченко А. В.*
1. Об индуктивных пределах линейных пространств и операторов и их приложениях.— Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, 1974, № 2, с. 26—33.
2. Самосопряженные дифференциальные операторы с бесконечным числом независимых переменных.— Мат. сб., 1975, **96**, № 2, с. 276—293.
3. Пространства функций от бесконечного числа переменных как индуктивные пределы локально выпуклых функциональных пространств.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1975, № 24, с. 86—98.

*Мессон, Мак-Клери* (Masson D., McClary W.)
1. Classes of $C^\infty$ vectors and essential self-adjointness.— J. Funct. Anal., 1972, **10**, № 1, p. 19—32.

*Минлос Р. А.*
1. Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1959, 8, с. 497—518.

*Морен К.* (Maurin K.)
1. Eine Bemerkung zur allgemeinen Eigenfunktionsentwicklungen für vertauschbare

Operatorensysteme beliebiger Mächtigkeit.— Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1960, 8, № 6, p. 381—384.
2. Методы гильбертова пространства. М., «Мир»,1965. 572 с.
3. General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups. Warszawa, PWN, 1968. 368 p.
4. A remark on Berezanski version of spectral theorem.— Stud. math., 1970, 34, № 2, p. 165—167.
*Морен Л., Морен К.* (Maurin L., Maurin K.)
1. Spektraltheorie separierbarer Operatoren.—Stud. math., 1963, 23, № 1, p. 1—29.
*Наймарк М. А.*
1. Нормированные кольца. М., «Наука», 1968. 664 с.
*Накагами* (Nakagami Y.)
1. Infinite tensor product of von Neumann algebras. 1.—Kōdai Math. Semin. Repts, 1970, 22, № 3, p. 341—354.
2. Infinite tensor product of von Neumann algebras. 2.— Publ. RIMS, Kyoto University, 1970, 6, № 10, p. 257—292.
3. Infinite tensor products of operators.— Publ. RIMS, Kyoto University, 1974, 10, № 1, p. 111—145.
*Напюрковский* (Napiórkowski K.)
1. Continuous tensor products of Hilbert spaces and product operators.— Stud. math., 1971, 39, № 3, p. 307—327.
2. On generalized eigenfunctions of operators in a Hilbert space.— Stud. math., 1973, 46, № 1, p. 79—82.
3. Good and bad generalized eigenvectors.— Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1974, 22, № 12, p. 1215—1218.
4. Good and bad generalized eigenvectors. 2.— Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1975, 23, № 3, p. 251—252.
5. A characterization of families of good generalized eigenvectors.— Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1976, 24, № 11, p. 957—960.
*Насбаум* (Nussbaum A. E.)
1. Quasi-analytic vectors.— Ark. mat., 1965, 6, № 10, p. 179—191.
2. A note on quasi-analytic vectors.— Stud. math., 1969, 33, № 3, p. 305—309.
3. Integral representation of functions and distributions positive definite relative to the orthogonal group.—Trans. Amer. Math. Soc., 1973, 175, № 2, p. 355—387.
4. On functions positive definite relative to the orthogonal group and the representation of functions as Hankel — Stieltjes transforms.— Trans. Amer. Math. Soc., 1973, 175, № 2, p. 389—408.
*Нейман* (Neumann J. von)
1. On infinite direct products.— Compos. math., 1939, 6, № 1, p. 1—77.
*Нелсон* (Helson E.)
1. Analytic vectors.— Ann. Math., 1959, 70, № 3, p. 572—615.
*Орочко Ю. Б.*
1. Теорема єдиності самоспряженого розширення оператора Шредінгера.— ДАН УРСР, 1966, № 11, с. 1391—1394.
2. Замечание о существенной самосопряженности оператора Шредингера с сингулярным потенциалом.— Мат. заметки, 1976, 20, № 4, с. 571—580.
3. Достаточное условие существенной самосопряженности многочленов от оператора Шредингера.— Мат. сб., 1976, 99, № 2, с. 192—210.
*Пич* (Piech M. A.)
1. The Ornstein-Uhlenbeck semigroup in an infinite dimensional $L^2$ setting.—J. Funct. Anal., 1975, 18, № 3, p. 271—285.
*Плеснер А. И.*
1. Спектральная теория линейных операторов. М., «Наука», 1965. 624 с.
*Плеснер А. И., Рохлин В. А.*
1. Спектральная теория линейных операторов.— Успехи мат. наук, 1946, 1, № 1, с. 71—191.



*Повзнер А. Я.*
1. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$.— Мат. сб., 1953, 32, № 1, с. 109—156.
*Понтрягин Л. С.*
1. Непрерывные группы. М., Гостехиздат, 1954. 516 с.
*Прохоров Ю. В.*
1. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятностей и ее применение, 1956, 1, с. 177—238.
*Пруговечки* (Prugovečki E.)
1. The bra and ket formalism in extenden Hilbert space.— J. Math. Phys., 1973, 14, № 10, p. 1410—1422.
2. Eigenfunction expansions for stationary scattering theory in spaces with negative norm.— Repts Math. Phys., 1975, 7, № 1, p. 127—151.
*Раух, Тейлор* (Rauch J., Taylor M.)
1. Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic mixed problem.— J. Funct. Anal., 1973, 12, № 4, p. 491—493.
*Рид* (Reed M.)
1. The damped self-interaction.—Communs Math. Phys., 1969, 11, № 4, p. 346—357.
2. On self-adjointness in infinite tensor product spaces.— J. Funct. Anal., 1970, 5, № 1, p. 94—124.
*Рид М., Саймон Б.* (Reed M., Simon B.)
1. Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ. М., «Мир», 1977. 360 с.
*Сазонов В. В.*
1. Замечание о характеристических функционалах.— Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 2, с. 201—205.
*Саймон Б.* (Simon B.)
1. The theory of semi-analytic vectors: A new proof of a theorem of Masson and McClary.— Indiana Univ. Math. J., 1970/71, 20, p. 1145—1151.
2. Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. М., «Мир», 1976. 360 с.
*Саймон, Хёэг-Крон* (Simon B., Hoegh-Krohn R.)
1. Hypercontractive semigroups and two-dimensional self-coupled Bose fields. — J. Funct. Anal., 1972, 9, № 2, p. 121—180.
*Самойленко Ю. С.*
1. Матричные ядра типа функционалов Вайтмана.— В кн.: Методы функционального анализа в задачах математической физики. К., 1971, с. 201—254.
*Семенов Ю. А.*
1. On the theory of eigenfunctions expansion of the Schrödinger operator.— Lett. Math. Phys., 1977, 3, № 1, p. 28—33.
*Скороход А. В.*
1. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1975. 232 с.
*Смолянов О. Г., Фомин С. В.*
1. Меры на топологических линейных пространствах.— Успехи мат. наук, 1976, 31, № 4, с. 3—56.
*Соболев С. Л.*
1. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1950. 256 с.
2. Введение в теорию кубатурных формул. М., «Наука», 1974. 808 с.
*Стрейт* (Streit L.)
1. Test function spaces for direct product representations of the canonical commutation relations.—Communs Math. Phys., 1967, 4, № 1, p. 22—31.
*Тихонов А. Н.*
1. Sur les espaces abstraits.— C. r. Acad. sci., 1926, 182, № 25, p. 1519—1520.
*Троттер* (Trotter H. F.)
1. On the product of semigroups of operators.— Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 4, p. 545—551.

*Угланов А. В.*
1. Дифференцируемые меры в оснащенном гильбертовом пространстве.— Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, 1972, № 5, с. 14—24.

*Умемура* (Umemura Y.)
1. On the infinite dimensional Laplacian operator.— J. Mat. Kyoto Univ., 1965, **4**, № 3, p. 477—492.

*Ус Г. Ф.*
1. Спектральное разложение самосопряженных операторов, являющихся функциями операторов, действующих по различным переменным.— ДАН СССР, 1976, **229**, № 4, с. 812—815.

*Фомин С. В.*
1. Дифференцируемые меры в линейных пространствах. — Успехи мат. наук, 1968, **23**, № 1, с. 221—222.
2. Обобщенные функции бесконечного числа переменных и их преобразования Фурье.— Успехи мат. наук, 1968, **23**, № 2, с. 215—216.

*Фредрикс* (Fredricks D.)
1. Tight riggigs for a complete set of commuting observables.— Repts Math. Phys., 1975, 8, № 2, p. 277—293.

*Фролов Н. Н.*
1. Теоремы вложения для функций счетного числа переменных и их приложения к задаче Дирихле.— ДАН СССР, 1972, **203**, № 1, с. 39—42.
2. О неравенстве коэрцитивности для эллиптического оператора с бесконечным числом независимых переменных.— Мат. сб., 1973, **90**, № 3, с. 403—414.

*Халмош П.* (Halmos P. R.)
1. Теория меры. М., Изд-во иностр. лит., 1953. 292 с.

*Хасегава* (Hasegawa M.)
1. On quasi-analytic vectors for dissipative operators.— Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **29**, № 1, p. 81—84.

*Хида* (Hida T.)
1. Note on the infinite dimensional Laplacian operator.— Nagoya Math. J., 1970, **38**, p. 13—19.

*Чаус Н. Н.*
1. О классах единственности решений задачи Коши и представлениях положительно определенных ядер.— ДАН СССР, 1965, **163**, № 1, с. 36—39.
2. Классы единственности решения задачи Коши и представление положительно определенных ядер.— Тр. семинара по функцион. анализу. К., 1968, № 1.

*Чернов* (Chernoff P. D.)
1. Note on product formulas for operator semigroups.— J. Funct. Anal., 1968, № 2, p. 238—242.
2. Some remarks on quasi-analytic vectors. — Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **167**, № 1, p. 105—113.
3. Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations.— J. Funct. Anal., 1973, **12**, № 4, p. 401—414.
4. Quasi-analytic vectors and quasi-analytic functions.— Bull. Amer. Math. Soc., 1975, **81**, № 4, p. 637—646.
5. Schrödinger and Dirac operators with singular potentials and hyperbolic equations.— Pacif. J. Math., 1977, **72**, № 2, p. 361—382.

*Чумск А. А.*
1. Самосопряженность оператора Бельтрами — Лапласа на полном паракомпактном римановом многообразии без края.— Укр. мат. журн., 1973, **25**, № 6.

*Шварц Л.* (Schwartz L.)
1. Théorie des distributions. T. 1, 2. Paris, Herman Cie., 1950. 318 p.
2. Théorie des noyaux.— Proc. Int. Congr. Math., 1952, **1**, p. 220—230.

*Шефер Х.* (Schaefer H. H.)
1. Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971. 360 с.

*Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь.*
1. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. М., «Наука», 1967.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ