И. С. БЕРЕЗИН и Н. П. ЖИДКОВ

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

ТОМ ПЕРВЫЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для высших учебных заведений

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

11-5-2

АННОТАЦИЯ

В первом томе книги рассмотрены действия с приближенными числами, теория интерполирования, численное дифференцирование и интегрирование, равномерные и среднеквадратичные приближения функций.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов механико-математических и физико-математических факультетов, специализирующихся по вычислительной математике, и лиц, интересующихся теорией и практикой численных методов.

Иван Семенович Березин и *Николай Петрович Жидков.*

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ, т. I.

Редакторы *Б. М. Будак* и *А. Д. Горбунов.*

Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.* Корректор *А. С. Бакулова.*

Печать с матриц. Подписано к печати 30/I 1962 г. Бум. $60 \times 90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 29,0. Условн. печ. л. 29,0. Уч.-изд. л. 31,68. Тираж 25 000 экз. Цена книги 1 р. 10 к. Заказ № 596.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, Б-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29

Отпечатано с матриц типографии № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза в типографии им. Котлякова Госфиниздата СССР, Ленинград, Садовая, 21. Заказ 308

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Введение 9

§ 1. Предмет вычислительной математики 9
§ 2. Метод вычислительной математики 10
1. Функциональные метрические пространства (10). 2. Функции, определенные на функциональных пространствах (12). 3. Метод вычислительной математики (13)
§ 3. Средства вычислений 16
1. Арифмометр. Клавишные вычислительные машины (17). 2. Счетно-аналитические машины (20). 3. Электронный вычислитель (27). 4. Универсальные электронные цифровые вычислительные машины (30). 5. Средства вычислении и задачи вычислительной математики (33).
§ 4. Методы вычислений как раздел вычислительной математики. Краткое содержание курса 35

Глава 1. **Действия с приближенными величинами** 38

§ 1. Классификация погрешностей 38
1. Источники погрешности результатов вычислений (38). 2. Задачи, возникающие при работе с приближенными величинами (39). 3. Правила округления чисел (40). 4. Классификация погрешностей (41).
§ 2. Неустранимая погрешность 42
1. Абсолютная и относительная погрешности числа (42). 2. Верные знаки числа (44). 3. Неустранимая погрешность значения функции для приближенных значений аргументов. Погрешности результатов арифметических операций (48).
§ 3. Погрешности округления 53
§ 4. Полная погрешность 57
§ 5. Понятие о статистических методах оценки погрешностей . . . 59
§ 6. Среднеквадратичные погрешности 64
1. Систематические и случайные ошибки (64). 2. Среднеквадратичные погрешности (66). 3. Обработка результатов по методу наименьших квадратов (68). 4. Среднеквадратичная погрешность функции (72). 5. Среднеквадратичная погрешность равномерно распределенной величины (74).

Упражнения 76
Литература 76

Глава 2. **Теория интерполирования и некоторые ее приложения** 77

§ 1. Постановка задачи 77
1 Линейные множества. Линейно независимые системы элементов (78). 2. Задача интерполирования (78). 3. Построение

интерполирующей функции (79). 4. Системы Чебышева (81). 5. Основные вопросы теории интерполирования (84).
§ 2. Интерполяционный многочлен Лагранжа 84
1. Построение интерполяционного многочлена Лагранжа (84). 2. Интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов (87). 3. Интерполяционная схема Эйткена (88).
§ 3. Погрешности интерполяционной формулы Лагранжа 90
1. Остаточный член формулы Лагранжа и его оценки (90). 2. Выбор узлов интерполирования (92). 3. Неустранимая погрешность формулы Лагранжа (96)
§ 4. Остаточный член общей интерполяционной формулы 98
§ 5. Интерполяционная формула Ньютона для неравных промежутков 102
1. Разделенные разности и их свойства (102). 2. Вывод формулы Ньютона для неравных промежутков (106). 3. Остаточный член формулы Ньютона (109).
§ 6. Интерполяционные формулы Ньютона для равных промежутков 112
1. Конечные разности и их свойства (113). 2. Вывод интерполяционных формул Ньютона (118). 3. Остаточные члены интерполяционных формул Ньютона (122).
§ 7. Интерполяционные формулы, использующие центральные разности 125
1. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя и Эверетта (125). 2. Остаточные члены интерполяционных формул с центральными разностями (136).
§ 8. Некоторые другие подходы к выводу формул интерполирования для равных промежутков 142
1. Диаграмма Фрезера (142). Понятие об операторном методе вывода формул интерполирования (145).
§ 9. Сходимость интерполяционного процесса 149
§ 10. Интерполирование периодических функций 152
§ 11. Общая задача интерполирования алгебраическими многочленами 163
1. Интерполяционный многочлен Эрмита (163). 2. Общий вид интерполяционного многочлена Эрмита (169). 3. Остаточный член интерполяционной формулы Эрмита (172). 4. Разделенные разности с повторяющимися значениями аргумента (173). 5. Обобщенная интерполяционная формула Ньютона с разделенными разностями (179).
§ 12. Интерполирование функций многих независимых переменных 181
1. Трудности задачи интерполирования функций многих переменных (181). 2. Обобщение интерполяционных формул Ньютона на случай функций многих переменных (186). 3. Другие способы построения интерполяционных многочленов для функций многих переменных (192).
§ 13. Интерполирование функций комплексного переменного 195
§ 14. Применение интерполирования для составления таблиц 196
§ 15. Обратное интерполирование 202
Упражнения 205
Литература 216
Глава 3. **Численное дифференцирование и интегрирование** . . . 217
§ 1. Задача численного дифференцирования 217
§ 2. Формулы численного дифференцирования 220
1. Формулы численного дифференцирования для неравноотстоящих узлов (220). 2. Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих узлов (226). 3. Безразностные формулы численного дифференцирования (230). 4. Метод неопределен-

ных коэффициентов (234). 5. Выражение разностей через производные (235).
§ 3. Задача численного интегрирования 237
§ 4. Формулы Ньютона — Котеса 240
1. Вывод формул (240). 2. Остаточные члены формул (243). 3. Формула трапеций и формула Симпсона (249).
§ 5. Формулы численного интегрирования Гаусса 254
1. Построение формул. Абсциссы формул Гаусса (254). 2. Остаточный член формул Гаусса (258). 3. Коэффициенты формул Гаусса (260). 4. Формула численного интегрирования Эрмита (264). 5. Формулы численного интегрирования Маркова (266).
§ 6. Формулы численного интегрирования Чебышева 269
1. Построение формул (269). 2. Остаточный член формул Чебышева (276).
§ 7. Сходимость квадратурных процессов 279
§ 8. Формула Эйлера 284
1. Числа и многочлены Бернулли (284). 2. Формула Эйлера и примеры ее применения (289).
§ 9. Формулы численного интегрирования, содержащие разности подынтегральной функции 297
1. Формула Грегори (297). 2. Формула Лапласа и другие формулы (302).
§ 10. Некоторые замечания по поводу формул численного интегрирования 305
1. Метод Рунге приближенной оценки погрешности численного интегрирования (306). 2. Замечание о вычислении интегралов с переменным верхним пределом (308).
§ 11. Вычисление несобственных интегралов 308
1. Метод выделения особенностей (309). 2. Специальные приемы (313).
§ 12. Приближенное вычисление кратных интегралов 315
1. Метод повторного применения квадратурных формул (315). 2. Метод замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом (319). 3. Метод Л. А. Люстерника и В. А. Диткина (322). 4. Замечание о методе Монте-Карло (324).
Упражнения 325
Литература 330
Глава 4. **Равномерные приближения** 331
§ 1. Наилучшее приближение в линейных нормированных пространствах 333
1. Линейное нормированное пространство (333). 2. Элемент наилучшего приближения (333). 3. Существование элемента наилучшего приближения (334). 4. Единственность элемента наилучшего приближения (336).
§ 2. Наилучшее равномерное приближение непрерывных функций обобщенными многочленами 337
1. Наилучшее приближение в пространстве C (337). 2. Теорема Хаара (337). 3. Теорема Чебышева (343).
§ 3. Алгебраические многочлены наилучшего равномерного приближения 347
1. Теорема Вейерштрасса (349). 2. Теоремы о порядке приближения с помощью многочленов Бернштейна (352).
§ 4. Тригонометрические многочлены наилучшего приближения . . 355
§ 5. Некоторые теоремы о порядке наилучшего равномерного приближения непрерывных функций 358

§ 6. Приближенное построение алгебраических многочленов наилучшего приближения 364
1. Предварительные замечания (365). 2. Первый способ приближенного построения многочлена наилучшего приближения (373). 3. Второй способ приближенного построения многочлена наилучшего приближения (378).

Упражнения 384
Литература 385

Глава 5. **Среднеквадратичные приближения** 386
§ 1. Гильбертовы пространства 387
§ 2. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве. Ряды Фурье 390
§ 3. Приближения в гильбертовом пространстве 395
1. Построение элемента наилучшего приближения (396).
§ 4. Среднеквадратичные приближения функций алгебраическими многочленами 398
1. Ортогональные системы многочленов (400). 2. Рекуррентные соотношения для ортогональных многочленов (401). 3 Тождество Кристофеля — Дарбу (403). 4 Свойства ортогональных многочленов (404). 5. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют ортогональные многочлены (405).
§ 5. Некоторые частные случаи ортогональных систем многочленов 406
1. Многочлены Якоби (406). 2. Многочлены Лежандра (411). 3. Многочлены Чебышева первого и второго рода (416). 4. Многочлены Лагерра и Эрмита (419).
§ 6. Сходимость рядов по ортогональным системам многочленов . 423
§ 7. Среднеквадратичные приближения функций тригонометрическими многочленами 433
§ 8. Приближение функций, заданных таблицей, по методу наименьших квадратов 434
§ 9. Приближения по методу наименьших квадратов алгебраическими многочленами 436
1. Система многочленов, ортогональных на множестве равноотстоящих точек (437).
§ 10. Применение метода наименьших квадратов для сглаживания результатов наблюдения 444
§ 11. Применение метода наименьших квадратов к построению эмпирических формул. Решение систем линейных алгебраических уравнений по методу наименьших квадратов 446
§ 12. Приближение функций, заданных таблицей, тригонометрическими многочленами по методу наименьших квадратов 451
§ 13. Схема Рунге вычисления коэффициентов a_0, a_k, b_k в случае $N = 4p$ 455

Упражнения 463
Литература 464

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой обработанный и расширенный курс лекций, прочитанных для студентов III и IV курсов механико-математического факультета Московского государственного университета, специализирующихся по вычислительной математике.

Авторы ставили своей задачей изложить с возможной строгостью сложившиеся в настоящее время методы численного решения важнейших математических задач. Развитие вычислительной техники за последние годы наложило свой отпечаток на вычислительную математику. Авторы старались отразить это в своем курсе. Но тут встретились большие трудности, вызванные двумя причинами. С одной стороны, требовалось дать не очень обширное систематическое изложение важнейших численных методов лицам, не знакомым со спецификой вычислительной работы. С другой стороны, многие направления современной вычислительной математики еще не сложились окончательно.

В последние годы в вычислительную математику все глубже и глубже проникают идеи функционального анализа. Благодаря этому лучше выясняется существо каждого отдельного метода, вскрывается глубокая связь между различными на первый взгляд методами. В настоящем курсе делается попытка использовать функциональноаналитическую базу при изложении каждого раздела. Так как знание функционального анализа не предполагается, то в курс введены посвященные ему параграфы. Эти параграфы вводятся в том месте, где возникает необходимость использовать соответствующий материал.

Изучение вычислительной математики немыслимо без решения значительного количества задач. Было бы затруднительно в одной книге дать разбор большого количества примеров на различные случаи, с которыми вычислитель может встретиться на практике. Поэтому здесь мы приводим лишь очень простые примеры, иллюстрирующие основной материал книги. В конце каждой главы приведены упражнения, решение которых должно способствовать лучшему усвоению излагаемого материала. Предполагается, что студенты параллельно со слушанием курса решают практические задачи под руководством преподавателя, от которого получают необходимые указания по практике вычислений.

Необходимо указать, что никакой курс не может дать окончательных рецептов для решения всех конкретных задач вычислительной математики. Вычислительная работа, как и всякая научная работа, требует творческого подхода. Изложенный здесь материал призван служить лишь подспорьем, позволяющим с большей скоростью и эффективностью находить пути для решения задач практики.

Для более углубленного изучения отдельных разделов авторы отсылают к соответствующей литературе, указанной в конце каждой главы.

План книги и рукопись обсуждались на кафедре вычислительной математики Московского университета. В процессе обсуждения было высказано много ценных замечаний и предложений. Авторы выражают глубокую благодарность участникам обсуждения: зав. кафедрой акад. С. Л. Соболеву, чл.-корр. АН СССР, проф. Л. А. Люстернику, профессорам А. А. Ляпунову и М. Р. Шуре-Буре, доцентам А. Д. Горбунову, В. Г. Карманову, В. В. Русанову, Ю. А. Шрейдеру и ассистенту Н. С. Бахвалову. Авторы выражают также глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР, проф. А. Н. Тихонову и доц. Б. М. Будаку за их труд по рецензированию книги и за ряд ценных предложений и замечаний.

Большой объем книги и широта охваченного материала вызвали большие трудности при ее написании. Конечно, эти трудности не всегда удавалось преодолеть наилучшим образом. Читатели, вероятно, смогут высказать много замечаний и дать свои предложения по улучшению книги. Авторы просят присылать им эти предложения и замечания и заранее благодарят за них читателей.

Книга разбита на два тома; первый из них содержит главы 1—5, второй — главы 6—10, что соответствует также разделению курса «Методов вычислений» на первую и вторую части, читаемые для студентов 3-го и 4-го годов обучения.

И. С. Березин, Н. П. Жидков

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предмет вычислительной математики

Современная математика достигла больших успехов. Однако до последнего времени главные усилия математиков были направлены на создание строгой логической базы для выработанных ранее методов, расширение множества объектов, к которым эти методы применимы, изучение качественной природы математических объектов. Гораздо меньше внимания уделялось разработке методов доведения математических исследований до числового результата, а это зачастую является интересной, трудной и чрезвычайно важной для практики задачей.

В самых разнообразных областях современной науки и техники все чаще приходится встречаться с такими математическими задачами, для которых невозможно получить точного решения классическими методами или же решение может быть получено в таком сложном виде, который совершенно неприемлем для практического использования. Так, например, очень часто приходится встречаться с необходимостью решения систем линейных алгебраических уравнений с десятками и сотнями неизвестных, с задачей отыскания корней алгебраических уравнений высоких степеней и корней трансцендентных уравнений, с необходимостью решения систем дифференциальных уравнений, которые не интегрируются в элементарных функциях, и т. д.

Количество задач такого рода особенно сильно возросло в последнее время в связи с бурным развитием науки и техники. От математиков потребовалось создание новых более мощных вычислительных методов, были поставлены новые вычислительные задачи, увеличился объем вычислений. С другой стороны, успехи науки и техники, в особенности физики и радиотехники, дали в руки математиков новые мощные вычислительные средства. В свою очередь новые вычислительные средства заставляют математиков пересмотреть существующие методы с точки зрения рациональности их реализации на новых машинах, поставили перед математиками ряд новых своеобразных задач.

По этим причинам в последнее время начала складываться область математики, которая призвана разрабатывать методы

доведения до числового результата основных задач математического анализа, алгебры и геометрии и пути использования для этой цели современных вычислительных средств. Эта область математики и получила название *вычислительной математики.*

§ 2. Метод вычислительной математики

Круг задач, с которыми приходится сталкиваться в вычислительной математике, очень широк. Разнообразны и методы, применяемые для решения этих задач. Однако можно заметить одну общую идею этих методов. Эта идея отчетливее всего выражается в терминах функционального анализа. Поэтому мы введем предварительно некоторые важнейшие понятия функционального анализа.

1. Функциональные метрические пространства. Основным предметом исследования в классическом математическом анализе является числовая функция. С появлением понятия функции одной и нескольких переменных, функции точки в евклидовом пространстве начался современный этап развития математики. Начиная с работ Ньютона и Лейбница и до конца XIX века подавляющее большинство математических исследований так или иначе было связано с этим понятием. Главным предметом изучения были числовые функции и их системы, заданные в n-мерной области, т. е. на некотором множестве n-мерного евклидова пространства.

Двадцатый век внес много нового в эту картину. Особо важную роль начинает играть понятие о функциональном множестве, о функциональных пространствах и о функциональных операторах, т. е. о функциях, аргументами которых также являются элементы функциональных пространств. Вместо евклидовых пространств рассматриваются абстрактные пространства, элементы которых могут иметь самую различную природу. Так, например, вводится понятие *метрического пространства* R как абстрактного множества, для любых двух элементов x и y которого определено понятие расстояния $\rho(x, y)$ удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда x совпадает с y.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых трех элементов x, y, z, принадлежащих R (аксиома треугольника).

Евклидовы пространства с обычным определением расстояния в них удовлетворяют всем этим условиям. Но могут быть и другие метрические пространства. Так, рассмотрим множество всевозможных непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Для любых двух таких функций $x(t)$ и $y(t)$ определим расстояние $\rho(x, y)$ равенством

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|. \qquad (1)$$

Нетрудно проверить, что так определенное расстояние удовлетворяет всем трем поставленным выше условиям. Таким образом, мы получили функциональное метрическое пространство, которое обычно называют *пространством C*.

Другим важным классом функциональных пространств являются пространства L_p. (Здесь p — действительное число $\geqslant 1$.) Измеримая на $[a, b]$ функция $f(t)$ принадлежит L_p, если суммируема $|f(t)|^p$ [1]).

Две функции $x(t)$ и $y(t)$, принадлежащие L_p, считаются эквивалентными, если они отличаются друг от друга лишь на множестве меры нуль. Расстояние $\rho(x, y)$ в L_p определяется следующим образом:

$$\rho(x, y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Так определенное расстояние удовлетворяет трем поставленным выше условиям.

Можно было бы значительно расширить примеры различных функциональных пространств, но мы на этом пока ограничимся.

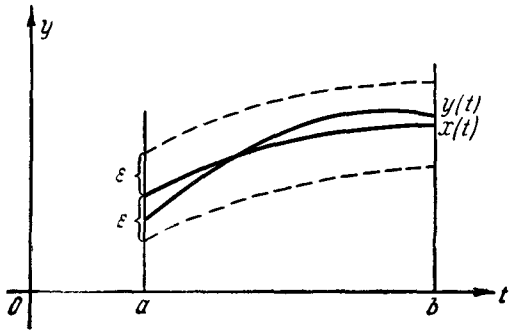

Рис. 1.

В каждом метрическом пространстве можно говорить об окрестности данной точки. Назовем *ε-окрестностью точки x* некоторого метрического пространства R совокупность его точек y, для которых выполняется неравенство

$$\rho(x, y) < \varepsilon. \tag{3}$$

В пространстве C это будет совокупность всех непрерывных на $[a, b]$ функций, лежащих в полосе $x(t) \pm \varepsilon$ (рис. 1). В пространстве L_p

[1]) О мере множеств, измеримых и суммируемых функциях можно прочесть, например, в книге И. П. Натансона «Теория функций вещественной переменной».

это будет совокупность всех функций, принадлежащих L_p, для которых

$$\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt < \varepsilon^p. \tag{4}$$

При этом в отдельных точках отклонение $y(t)$ от $x(t)$ может быть очень большим, а зато в других точках будет очень малым (рис. 2).

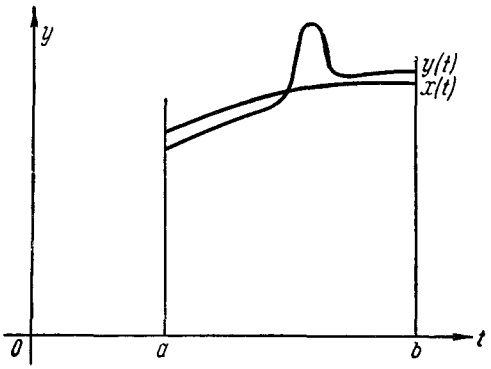

Рис. 2.

В вычислительной математике часто приходится заменять одну функцию $x(t)$ другой функцией, более удобной для вычислительных целей и в каком-то смысле близкой к первой. Обычно эту вторую функцию берут в некоторой ε-окрестности первой. Если ε-окрестность берется в пространстве C, то говорят о *равномерном приближении* функции $x(t)$. Если ε-окрестность берут в пространстве L_p, то говорят о *приближении в среднем*. В частности, при $p = 2$ говорят о *среднеквадратичном* приближении.

2. Функции, определенные на функциональных пространствах. Точно так же, как в классическом математическом анализе, можно ввести понятие функции, аргументом и значением которой будут элементы абстрактных пространств.

Пусть нам даны два абстрактных пространства R_1 и R_2. Пусть каждому элементу $x \in R_1$ поставлен в соответствие элемент $y \in R_2$. Тогда мы будем говорить, что нам задана функция

$$y = A(x) \tag{5}$$

с областью определения R_1 и областью значений, принадлежащей R_2. В частности, если R_2 является областью действительных или ком-

плексных чисел, то $A(x)$ называется *функционалом*. Простейшим примером функционала в пространстве C будет являться

$$I(x) = \int_a^b x(t)\,dt. \tag{6}$$

Пространство R_2 может совпадать с пространством R_1 и тогда будем называть $A(x)$ *оператором*. Область математики, изучающая свойства функциональных пространств и заданных на них функций, и носит название *функционального анализа*.

3. Метод вычислительной математики. Теперь можно охарактеризовать метод вычислительной математики.

В вычислительной математике приходится сталкиваться с самыми различными задачами. Но большинство этих задач может быть записано в виде

$$y = A(x), \tag{7}$$

где x и y принадлежат заданным пространствам R_1 и R_2 и $A(x)$ — некоторая заданная функция. Задача состоит либо в отыскании y по заданному x, либо в отыскании x по заданному y. В нашем курсе мы будем иметь дело только с такими задачами. Далеко не всегда с помощью средств современной математики удается точно решить эти задачи, применяя конечное число шагов. В этих случаях и прибегают к вычислительной математике. Иногда задача и может быть решена точно, но методы классической математики дают ответ после громоздких и трудоемких вычислений. Поэтому в задачи вычислительной математики входит также разработка приемов и методов наиболее рационального решения конкретных задач. Как это делается в различных случаях, будет видно из дальнейшего курса. Сейчас же мы выскажем некоторые общие сообщения.

Основным методом, при помощи которого в вычислительной математике решают поставленные выше задачи, является замена пространств R_1 и R_2 и функции A некоторыми другими пространствами $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ и функцией $\bar{A}$, более удобными для вычислительных целей. Иногда бывает достаточно произвести замену пространств R_1 и R_2 или даже одного из них. Иногда достаточно заменить только функцию A. Замена должна быть сделана так, чтобы решение новой задачи

$$\bar{y} = \bar{A}(\bar{x}), \tag{8}$$

$\bar{x} \in \bar{R}_1$, $\bar{y} \in \bar{R}_2$ — было в каком-то смысле близким к точному решению исходной задачи (7) и его возможно было бы практически отыскать с сравнительно небольшими трудностями.

Например, пусть необходимо вычислить интеграл

$$y = \int_a^b f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, причем неопределенный интеграл не берется в элементарных функциях. Чтобы получить достаточно точное приближенное значение интеграла, можно идти двумя путями.

1. Заменим функцию $f(x)$ алгебраическим многочленом $P(x)$, равномерно приближающим функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с необходимой степенью точности. Как будет показано в главе 4, это всегда сделать можно. Вместо интеграла $y = \int_a^b f(x)\,dx$ будем находить интеграл $y = \int_a^b P(x)\,dx$, вычисление которого не составляет труда.

Здесь мы, не меняя функционала $A(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx$, заменяем пространство C, которому принадлежит $f(x)$, пространством многочленов и вместо функции $f(x)$ берем многочлен $P(x)$ из некоторой ее ε-окрестности.

2. Из определения интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ следует, что всегда можно построить интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$, которая будет достаточно близка к значению интеграла. Следовательно, вместо вычисления интеграла $y = \int_a^b f(x)\,dx$ можно решать другую задачу — задачу вычисления конечной суммы

$$y = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Здесь мы уже заменяем функцию $A(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx$ новой функцией $\bar{A}(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$.

Для успешного применения указанного выше метода вычислительной математики необходимо в первую очередь иметь рациональные способы замены пространства R другим пространством $\bar{R}$.

Часто для этой цели в пространстве R отыскивают конечное множество элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,$$

которые бы, с одной стороны, достаточно хорошо аппроксимировали каждый элемент пространства R, а с другой стороны, были бы достаточно удобны для вычислительной работы. При этом в качестве $\bar{R}$ берут пространство, состоящее из этого конечного числа элементов, и элементу $\varphi \in R$ ставят в соответствие ближайший элемент $\varphi_i \in \bar{R}$ или один из ближайших, если таких элементов несколько. В дальнейшем мы увидим много примеров того, как это осуществляется.

Такой прием не всегда применим. Для того чтобы им можно было воспользоваться, необходимо наложить дополнительные ограничения на метрическое пространство R. Не вдаваясь в подробности, укажем на те свойства, которыми в этом случае должно обладать пространство R. Для любого $\varepsilon > 0$ должны существовать элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ такие, что какой бы элемент $\varphi \in R$ мы ни взяли, найдется такой элемент φ_i, для которого

$$\rho(\varphi, \varphi_i) < \varepsilon.$$

В этом случае элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ называют ε-*сетью пространства* R. Из наличия ε-сети при любом $\varepsilon > 0$ будет вытекать *компактность пространства* R *в себе*. Это означает, что из любой последовательности элементов $\{\psi_i\}$, принадлежащих R, можно выделить фундаментальную подпоследовательность, т. е. такую подпоследовательность $\{\psi_{i_k}\}$, что для любого $\delta > 0$ найдется целое положительное N, что при m и $n > N$ имеет место неравенство

$$\rho(\psi_{i_m}, \psi_{i_n}) < \delta.$$

Из наличия ε-сети при любом $\varepsilon > 0$ следует также *сепарабельность пространства* R, что означает существование счетного всюду плотного в R множества элементов, т. е. такого множества, что в любой окрестности элемента $\varphi \in R$ найдется хотя бы один элемент этого множества.

Однако из предыдущих рассуждений нельзя делать вывода, что конечные аппроксимирующие группы можно использовать только для компактных в себе пространств. Во-первых, нужно заметить, что современный функциональный анализ не связан каким-либо одним способом метризуемости. Наоборот, одна и та же функция может служить элементом самых различных пространств. Функциональные пространства могут целиком вкладываться в другие функциональные пространства с сохранением или потерей понятия близости, расстояния и других. Иногда возможно рассматривать пространство R как предельное множество его подпространств R_n, обладающих нужными нам свойствами.

Можно было бы многое говорить относительно различных применений функционального анализа в вычислительной математике. Однако удобнее это сделать при изложении конкретного материала курса.

Резюмируя сказанное выше, мы отметим, что в настоящее время перед вычислительной математикой стоят следующие основные *задачи:*

1. Приближение множеств в функциональных пространствах.
2. Приближение функций, заданных на функциональных пространствах.
3. Разработка рациональных алгоритмов и методов решения задач в условиях применения современных вычислительных машин.

§ 3. Средства вычислений

Исследуя методы решения конкретных задач, мы должны, естественно, учитывать те вычислительные средства, которые имеются в нашем распоряжении. Поэтому, не ставя своей целью дать техническое описание различных вычислительных машин и приборов, мы приведем здесь краткие характеристики наиболее важных из них. Некоторые из описанных здесь машин еще не получили у нас достаточного распространения в математических расчетах. Однако развитие счетной техники в ближайшие годы должно привести нас к тому, что ни одно более или менее серьезное научное учреждение не сможет обойтись без этих средств.

Математические машины и приборы делятся на две большие группы: непрерывного действия и дискретные, или цифровые. *Цифровые машины* производят математические операции с числами, принимающими дискретные значения и имеющими цифровое представление в той или иной системе счисления. Результат представляется в таком же виде. Если машина исправна и оператор не делает ошибок, то точность результата зависит от количества разрядов, с которыми работает машина. В *машинах непрерывного действия* числа выражаются посредством физических величин: длин, напряжений, углов и т. п. Чаще всего они являются машинами-аналогами, моделирующими тем или иным физическим процессом какую-нибудь математическую задачу. Из приборов непрерывного действия широкое распространение получила логарифмическая линейка. В Советском Союзе находят также применение следующие машины и приборы непрерывного действия: планиметры, интеграфы, гармонические анализаторы, электро- и гидроинтеграторы различных систем, дифференциальные анализаторы. Точность результата, полученного на машине непрерывного действия, зависит от многих факторов: точности устройства, искусства оператора, внешних факторов, характера ответной шкалы, и вследствие этого обычно бывает не очень велика. Поэтому машины непрерывного действия не получили широкого рас-

пространения при точных научных расчетах. Кроме того, как правило, *машины непрерывного действия приспособлены для узкого* класса задач и каждый тип машины резко отличен от другого. Мы здесь их описывать не будем.

1. Арифмометр. Клавишные вычислительные машины. Простейшей цифровой машиной является *арифмометр* (рис. 3). Исходные данные набираются на арифмометре с помощью установочных

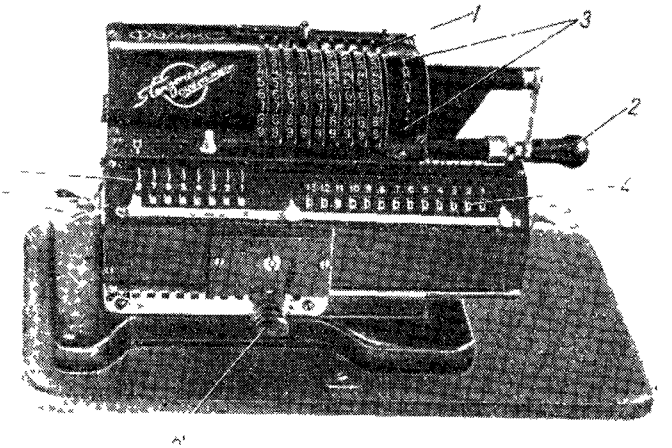

Рис. 3. Арифмометр.

рычагов *1*. Чтобы сложить два числа одно из слагаемых набирают на этих рычагах и поворачивают рукоятку *2* на один оборот в направлении, указанном стрелкой с значками «+», «×». Стрелка нарисована на передней части корпуса арифмометра *3*. При этом в счетчике результатов *4* окажется это слагаемое. В счетчике оборотов *5* будет видна цифра 1. Затем поступаем так же со вторым слагаемым. Тогда в счетчике результатов *4* получим искомую сумму. Для вычитания уменьшаемое переводим в счетчик результатов, как и первое слагаемое. После этого набираем на установочных рычагах вычитаемое и поворачиваем рукоятку на один оборот в направлении, указанном стрелкой со значками «—», «:». Результат опять будет виден в счетчике результатов. С помощью установочных рычагов можно набрать число, имеющее 9 разрядов. Счетчик результатов имеет 13 разрядов. Ясно, как производить последовательное сложение и вычитание.

Для производства умножения на арифмометре нужно набрать один из сомножителей с помощью установочных рычагов. Затем вращаем рукоятку в том же направлении, что и при сложении, произведя

Рис 4. Клавишная вычислительная машина ВК-2

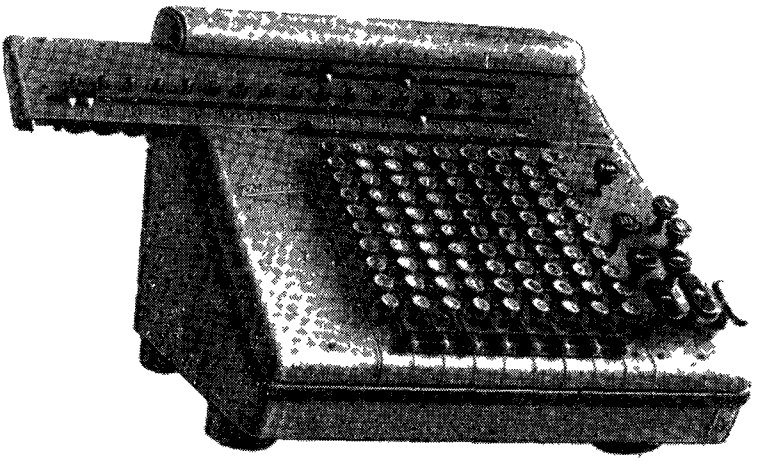

Рис. 5. Клавишная вычислительная машина «Рейп-металл».

столько оборотов, какова последняя цифра второго множителя. При этом в счетчике результатов будет стоять первый множитель, умноженный на последнюю цифру второго сомножителя, а в счетчике оборотов будут стоять нули, кроме последней цифры, указывающей число сделанных нами оборотов. После этого передвигаем каретку на один разряд вправо при помощи рычага 6 и вращаем рукоятку в том же направлении на столько оборотов, какова предпоследняя цифра второго сомножителя. Затем снова передвигаем каретку на один разряд вправо и т. д. Этот процесс повторяем до тех пор, пока не переберем все разряды второго сомножителя. В итоге в счетчике результатов получим искомое произведение, а в счетчике оборотов второй множитель.

Для производства деления нужно предварительно передвинуть каретку вправо на столько разрядов, сколько разрядов желают иметь в частном. После этого, как и при сложении, переносят делимое в счетчик результатов. При этом нужно стараться установить старший разряд делимого на установочных рычагах возможно левее, следя в то же время за тем, чтобы все делимое полностью перешло в счетчик результатов. Затем гасят цифру 1, появившуюся в счетчике оборотов, поворотом соответствующего барашка 7. После этого на установочных рычагах должно быть поставлено второе число — делитель. Его устанавливают так, чтобы старшие разряды делимого и делителя стояли друг против друга, если делимое больше делителя, или старший разряд делителя на один разряд правее старшего разряда делимого, если делимое меньше делителя (при этом делимое и делитель рассматриваются как целые числа с количеством разрядов, равным номеру самого левого из использованных установочных рычагов). Деление осуществляется повторным вычитанием. Поворачиваем рукоятку в том же направлении, что и при вычитании, до тех пор, пока число, установленное на рычагах, не станет больше числа в счетчике результатов. Если мы сделаем лишний оборот, то услышим звонок. Тогда нужно сделать один оборот в обратном направлении. Далее, передвигаем каретку на один разряд влево и повторяем наш процесс. Поступаем так до тех пор, пока каретка не займет крайнего левого положения. При этом в счетчике оборотов будет находиться частное, а в счетчике результатов — остаток.

При описании характера работы на арифмометре мы не касались такого рода вопросов, как определение положения запятой, ускоренные приемы счета и т. п. Детальный разбор их занял бы слишком много времени и они достаточно хорошо освещены в литературе. С другой стороны, приведенное здесь краткое описание будет полезно с той точки зрения, что более совершенные счетные цифровые машины по характеру работы сходны с арифмометром.

Нужно заметить, что уже такая простая вычислительная машина, как арифмометр, дает большую пользу при счетной работе. Производится меньше записей, вычисления становятся менее утомительными,

сокращается время каждого вычисления, уменьшается число ошибок. За 6 часов работы на арифмометре можно произвести примерно 750 умножений пятизначных чисел на четырехзначные с записью каждого произведения и примерно 570 делений пятизначных чисел на четырехзначные с записью каждого частного.

Клавишные вычислительные машины типа ВК-2, Мерседес, Рейн-металл и другие (см. рис. 4, 5, 6), находящиеся в употреблении в Советском Союзе, с точки зрения математика не отличаются значительно от арифмометра. В них рычажный набор заменен клавишным и ручной привод электромотором. Имеются и другие

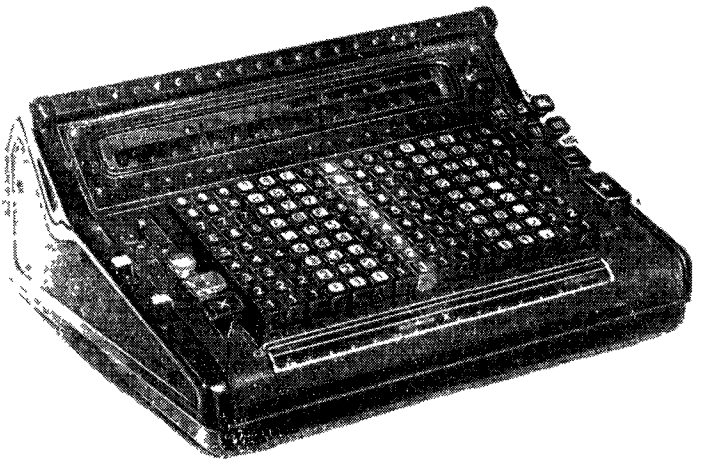

Рис. 6. Клавишная вычислительная машина «Мерседес».

незначительные усовершенствования. Однако и это дает много для ускорения вычислительных работ. Их применение резко увеличивает производительность. С помощью этих машин можно произвести примерно 1200 умножений пятизначных чисел на четырехзначные с записью произведений и примерно 1210 делений пятизначных чисел на четырехзначные с записью частных за 6 часов работы.

Недостатком описанных выше машин является то, что после выполнения каждого действия оператору необходимо установить на машине новые данные и нажать клавишу, указывающую следующую арифметическую операцию. Довольно часто приходится записывать на бумаге промежуточные результаты вычислений.

2. Счетно-аналитические машины. Дальнейшим шагом по пути усовершенствования вычислительной техники явились *автоматические вычислительные машины.* Обычно они состоят из

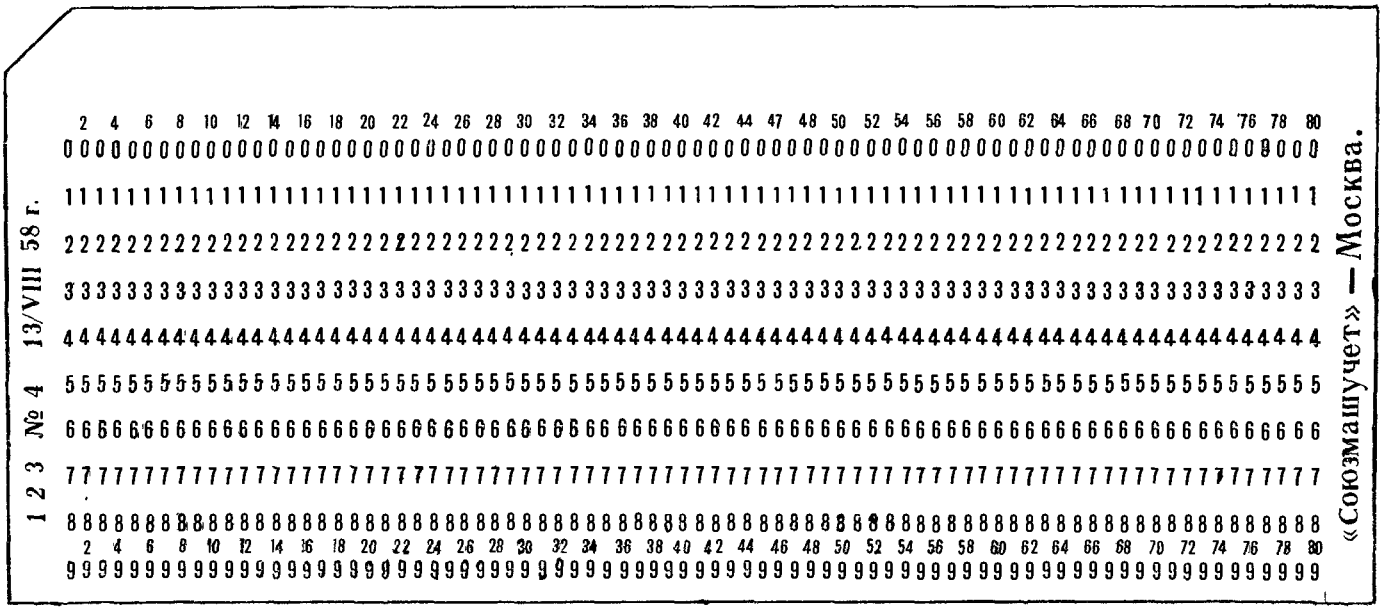

Рис. 7. 80-колонная перфокарта.

целого комплекса машин различного назначения. Простейшим из таких комплексов является *комплект счетно-аналитических машин.*

Исходные данные для работы на счетно-аналитических машинах пробиваются на специальных картонных карточках стандартных размеров — *перфокартах* (рис. 7). На перфокарте нанесены 45 или 80 колонок цифр от 0 до 9. (Число колонок зависит от системы

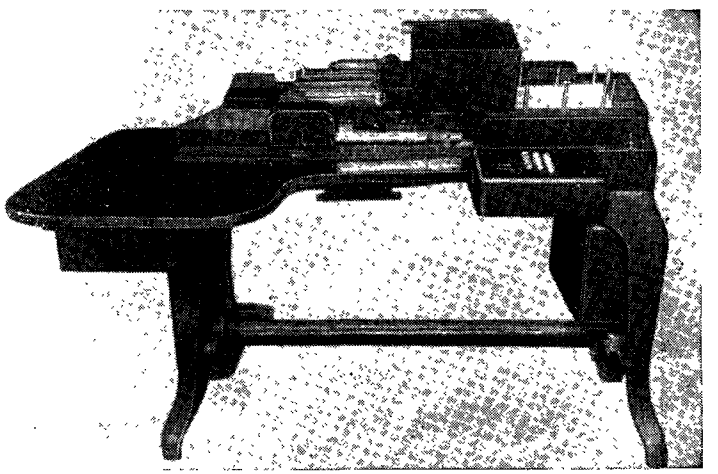

Рис. 8. Перфоратор П-80.

счетно-аналитических машин.) При помощи одной из машин комплекта — *перфоратора* (рис. 8) на перфокарте пробиваются отверстия. В каждой колонке может быть пробито отверстие, расположенное либо против одной из цифр, либо в одном из двух рядов выше цифр. Их называют соответственно 11 и 12-й дополнительной позицией. Можно также оставить данную колонку непробитой. Группируя определенным образом колонки перфокарты, мы можем нанести на нее значительное количество различных данных. Оператор может пробить на перфораторе примерно 230 карт в час.

Так как при работе на перфораторе оператором могут быть допущены ошибки, после пробивки данных необходимо произвести контроль. Это осуществляется с помощью специальной машины — *контрольника* (рис. 9). Для производства контроля на контрольнике оператор производит те же операции, что и на перфораторе. При этом воспринимающее устройство контрольника ощупывает карты. Если карта пробита правильно, то она беспрепятственно проходит через воспринимающее устройство. Если произошла

ошибка, то карта остановится, причем ошибочно пробитая колонка окажется над воспринимающим устройством. В этом случае карту изымают и пробивают нужные данные повторно на новой карте. Оператор может проверить примерно 250 карт в час.

Иногда возникает необходимость, прежде чем производить вычисления над данными, пробитыми на перфокартах, предварительно рассортировать их по тем или иным признакам. Это осуществляется на специальной машине — *сортировке* (рис. 10). Перфокарты вкладываются в магазин подачи сортировки. После этого с помощью

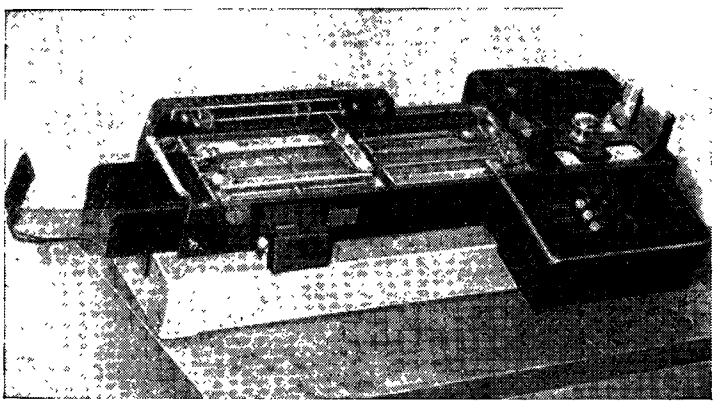

Рис. 9. Контрольник К-80.

рукоятки устанавливают, по какой колонке следует сортировать карты, и нажимают пусковую кнопку. При этом карты будут автоматически подаваться под воспринимающее устройство сортировки и затем складываться в ее карманы. Таких карманов в сортировке 13. Двенадцать карманов соответствуют возможным вариантам пробивок в одной колонке и тринадцатый карман предназначен для карт, не имеющих пробивок в данной колонке. В течение часа на сортировке можно пропустить примерно 24 000 карто-колонок.

Далее карты поступают на *табулятор* (рис. 11). Табулятор является счетно записывающей машиной. Он автоматически воспринимает исходные данные, пробитые на перфокартах. В соответствии с настройкой, осуществляемой при помощи соединений на коммутационной доске и установки выключателей, он производит необходимые подсчеты и печатает нужные результаты. Табулятор имеет несколько счетчиков, которые могут независимо друг от друга суммировать числа, пробитые в определенных колонках. Можно также суммировать одни и те же числа в разных счетчиках. Можно передавать итоги из одного счетчика в другой как со знаком плюс,

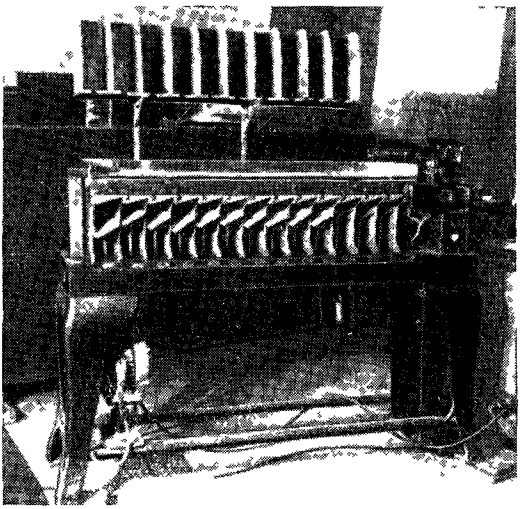

Рис. 10. Сортировка С-80.

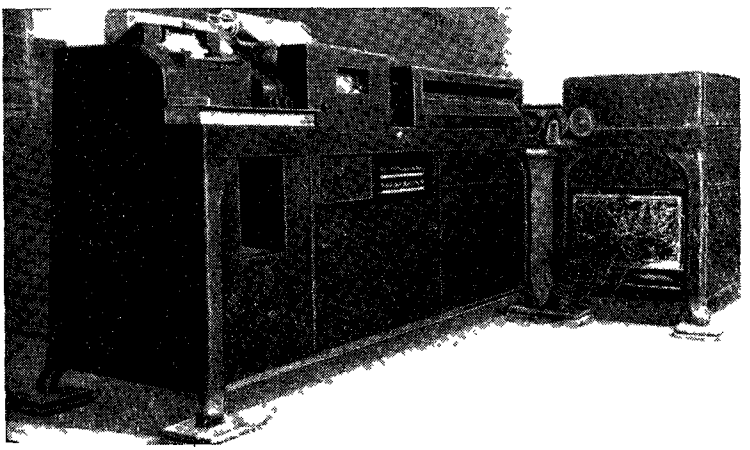

Рис 11. Табулятор Т-5.

так и со знаком минус. Можно печатать данные, пробитые на перфокартах, или итоги, полученные в счетчиках.

Приведем некоторые эксплуатационные данные отечественного табулятора Т-5. Он работает на 80-колонных картах. Имеет восемь 11-разрядных счетчиков. Механизм печати имеет семь секций. Шесть секций с первой по шестую содержат по 11 разрядов для записи цифр и один разряд для записи условных обозначений. Седьмая секция имеет только 11 цифровых разрядов. Счетчики не связаны с определенными секциями и соединяются с ними путем коммутации. На перфокарте наряду с числовыми данными могут быть пробиты

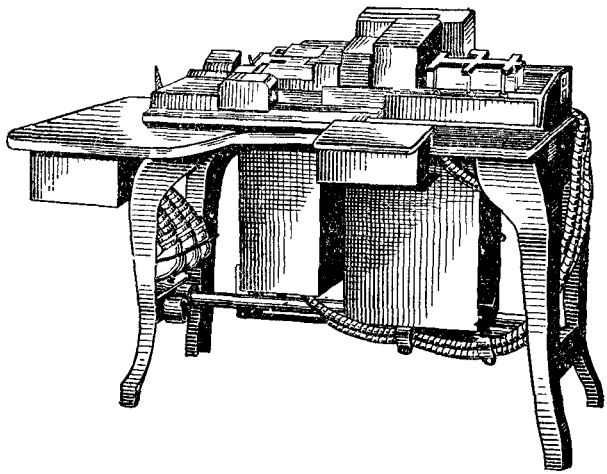

Рис 12. Итоговый перфоратор ИП-80.

признаки, отличающие одни числа от других. Эти признаки также представляют собой числа. Табулятор Т-5 снабжен контрольным аппаратом, воспринимающим признаки. Если у нас имеются числа с различными признаками, то после того, как карты, содержащие один признак, пройдут через табулятор и поступит первая карта, содержащая числа с другими признаками, контрольный аппарат даст сигнал и будет подведен итог по прошедшей группе карт.

Контроль может осуществляться по 20 колонкам. Табулятор Т-5 снабжен 17 селекторами. Восемь из них имеют по 11 разрядов и девять вспомогательных по одному разряду. Селекторы могут быть использованы для управления переменным вводом чисел с перфокарт в счетчики, переменным печатанием этих чисел, а также для выполнения переносов из одних счетчиков в другие и переменного печатания результатов, полученных в счетчиках.

Для того чтобы произвести печатание итогов по прошедшей группе карт, перенесение числа из счетчика в счетчик и некоторые

другие действия в соответствии с характером решаемой задачи, используются промежуточные ходы, во время которых машина работает без подачи карт. На табуляторе имеется импульсатор для посылки импульсов любой цифры во время карточных ходов и промежуточных ходов. Имеется также универсальный интервальный автомат, позволяющий регулировать продвижение бумаги как в рулонах, так и в отдельных листах. Скорость работы табулятора Т-5 с печатанием данных и итогов примерно 6000 карт в час и с печатанием итогов примерно 9000 карт в час. Очень часто результаты, полученные на табуляторе, должны быть снова использованы для работы на нем же. В этом случае выгодно не только печатать результаты, но и снова пробивать их на перфокартах. Это осуществляется при помощи *итогового перфоратора* (рис. 12). При совместной работе табулятора с итоговым перфоратором последний автоматически перфорирует призначные данные и итоги, полученные на счетчиках.

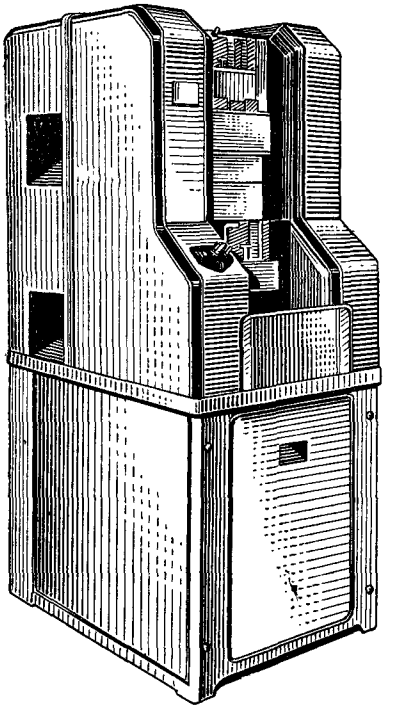

Рис. 13. Перфоратор-репродуктор.

В практике работы на счетно-аналитических машинах возникает необходимость перенести пробивки одного массива перфокарт или части этих пробивок на другой. Этот род работы призван осуществлять *перфоратор-репродуктор* (рис. 13). Используя перфоратор-репродуктор, мы можем переносить данные с одного массива карт на другой, изменяя при этом группировку данных, исключая ненужные нам данные, добавляя новые пробивки. Скорость работы перфоратора-репродуктора примерно 6000 карт в час.

На табуляторе очень затруднительно производить умножение. Чтобы восполнить этот пробел, создана еще одна машина — *умножающий перфоратор* (рис. 14). На умножающем перфораторе можно производить умножение чисел, пробитых на перфокартах и имеющих до восьми разрядов; можно также производить сложение и вычитание. Результаты получаются в виде пробивок на перфокартах. Возможно производить одновременно различные действия. При этом воспринимаются до пяти чисел с перфокарты. Скорость работы умножающего перфоратора зависит от характера работы. При умно-

жении шестизначных чисел на шестизначные и перфорации результата с двенадцатью знаками можно произвести до 1200 действий в час.

Счетно-аналитические машины работают на электромеханическом принципе. Это обусловливает сравнительно небольшую скорость их

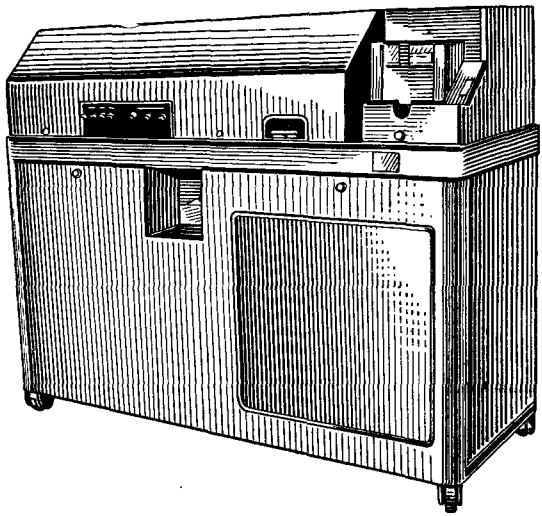

Рис. 14. Умножающий перфоратор.

работы. Во всем комплекте нет машин, осуществляющих деление. Приспособление комплекта для решения сложных математических задач сопряжено с большими трудностями.

3. Электронный вычислитель. Дальнейшим шагом по пути усовершенствования вычислительной техники является *электронный вычислитель* (рис. 15). Электронный вычислитель состоит из двух частей: *перфоратора* и *вычислителя*. Перфоратор предназначен для восприятия данных с перфокарт и пробивки результатов на перфокарты. Он работает на электромеханическом принципе со скоростью до 100 карт в минуту. В перфораторе имеется три магазина для закладывания карт: пробивной, средний и правый. Результаты пробиваются на картах, проходящих через пробивной механизм. Данные, пробитые на перфокартах, поступают в вычислитель.

Вычислитель представляет собой электронную быстродействующую вычислительную машину. Он состоит из следующих основных блоков: первичного хронизатора, программного устройства, фиксаторов, счетчика, устройства сдвига разрядов, схемы умножения, схемы деления и вспомогательных цепей. Восприятие чисел и их передача

в вычислитель производятся во время прохождения карт под воспринимающим устройством перфоратора. Вычисления производятся в тот период, когда очередная карта прошла через воспринимающее устройство, а следующая еще не поступила. За это время (примерно 110 миллисекунд) вычислитель успевает сделать 250—280 циклов сложения или вычитания. Расскажем немного о назначении основных блоков электронного вычислителя.

Первичный хронизатор предназначен для синхронизации работы всех узлов вычислителя. В нем формируются и распределяются

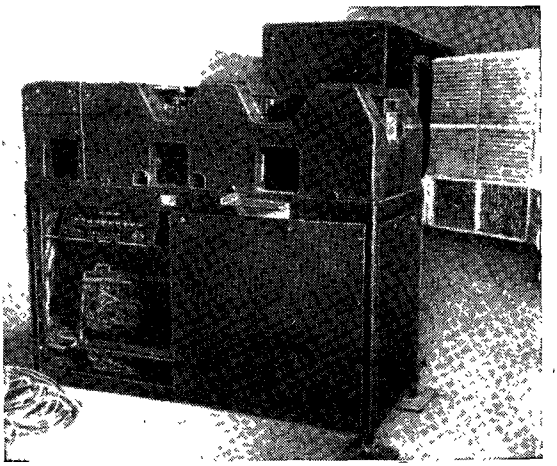

Рис. 15. Электронный вычислитель ЭВ-80.

импульсы напряжений, необходимые при вычислениях. Программное устройство предназначено для того, чтобы при помощи коммутационной доски управлять последовательностью вычислений в вычислителе. Для решения любой задачи необходимо разбить ее на ряд простейших операций, следующих друг за другом в определенной последовательности, и скоммутировать согласно этой программе коммутационную доску вычислителя. При вычислениях программное устройство будет последовательно переключать гнезда коммутационной доски и благодаря соответствующей коммутации управлять необходимой последовательностью операций.

Фиксаторами называются устройства, предназначенные для фиксации чисел при восприятии данных с карт, при вычислениях и при пробивке итогов. В электронном вычислителе имеется три типа фиксаторов: фиксаторы чисел, общие фиксаторы, фиксатор множителя-частного. Общие фиксаторы могут воспринимать числа с пер-

фокарт, хранить промежуточные результаты при вычислениях и с них может производиться перфорация итогов. Всего имеется четыре общих фиксатора: два трехразрядных и два пятиразрядных. Их можно объединять при помощи коммутации по два, образуя шестиразрядные или восьмиразрядные фиксаторы. Фиксаторы чисел отличаются от общих тем, что с них нельзя производить пробивку итогов. Всего имеется пять фиксаторов чисел: два трехразрядных, два пятиразрядных и один восьмиразрядный.

Трех- и восьмиразрядные фиксаторы можно объединять попарно. Фиксатор множителя — частного — восьмиразрядный. Он является общим фиксатором и, кроме того, используется как фиксатор одного из множителей при умножении и частного при делении. Электронный вычислитель работает в двоично-десятичной системе. Это означает, что каждое число, поступающее в вычислитель, записывается в десятичной системе, а каждая цифра этого числа — в двоичной. Для представления двоичного разряда в ЭВ служит триггер-электронная схема, имеющая два устойчивых положения. Одно из этих положений принимается за 0 другое за 1. Такая схема, обладая малой инерционностью, может быть с громадной скоростью переброшена из одного положения в другое. Для представления цифр от 0 до 9 требуется четыре триггера. В ЭВ имеется один шестнадцатиразрядный счетчик.

При сложении и вычитании в счетчик последовательно подаются слагаемые. При умножении в счетчике получается произведение. При делении в счетчик передается делимое, а после деления снимается остаток. Устройство сдвига разрядов предназначено для передачи чисел из фиксаторов и счетчика со сдвигом. Числа из фиксаторов могут передаваться в другие фиксаторы и счетчик со сдвигом до восьми разрядов влево. Из счетчика числа могут передаваться в фиксаторы со сдвигом до восьми разрядов вправо. Кроме того, при умножении и делении устройство сдвига автоматически производит сдвиг чисел. Схемы умножения и деления предназначены для управления автоматическим выполнением действий умножения и деления. Вспомогательные устройства еще расширяют возможности машин. В ЭВ имеется устройство округления, позволяющее производить округления по любому из девяти младших разрядов счетчика.

Имеется устройство проверки нуля. Если позволяет время, отведенное для вычислений, можно произвести одно и то же вычисление дважды и один результат вычесть из другого. Устройство проверки нуля обнаружит, получится ли при этом нуль, т. е. правильно ли произведены вычисления. Электронный вычислитель позволяет решать сложные математические задачи. К его недостаткам следует отнести небольшую емкость фиксаторов, что лимитирует количество данных, с которыми можно произвести вычисления. Перфоратор же, в который закладываются все исходные данные, работает медленно

сравнительно с вычислителем. С другой стороны, время, отводимое для вычислений, не очень велико, и поэтому часто бывает затруднительно провести в этот период сложные вычисления над данными, полученными с одной карты.

4. Универсальные электронные цифровые вычислительные машины. Указанные выше недостатки устранены в современных *быстродействующих вычислительных машинах с программным управлением*. Существует значительное количество различных типов таких машин. В настоящее время эта область вычислительной техники бурно развивается и пока еще преждевременно делать окончательные выводы о наиболее рациональных логических схемах и элементах таких машин. Однако все они имеют общие черты. Всякая электронная цифровая машина с программным управлением может быть изображена схемой на рис. 16.

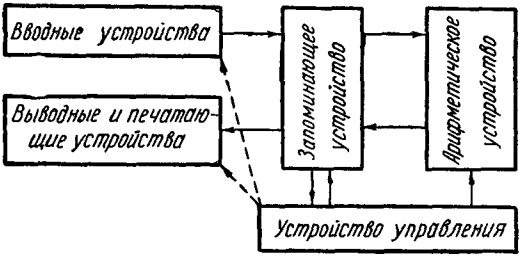

Рис. 16. Блок-схема электронной машины.

Процесс решения математической задачи на электронной цифровой машине в общих чертах может быть описан следующим образом. Математик разрабатывает метод решения. Затем процесс решения представляется в виде последовательности элементарных операций, которые может производить машина. Как принято сейчас говорить, составляется *программа*. В программе должны быть предусмотрены все особенности вычислительного процесса. Каждый последующий шаг должен однозначно определяться предыдущими и теми числами, которые будут находиться в машине в этот момент. Программа вместе с исходными данными для вычислений с помощью устройства ввода подается в запоминающее устройство машины. После этого начинается сам счет. В соответствии с программой машина выбирает необходимые данные из запоминающего устройства, подает их в арифметический блок, производит там нужные вычисления и направляет результаты либо снова в запоминающее устройство, либо на вывод машины для печатания. Блок управления предназначен для согласования работы всех узлов машины.

В Советском Союзе с 1952 г. работает быстродействующая электронная цифровая машина Академии наук СССР (БЭСМ) (рис. 17). Приведем некоторые ее характеристики. Вычисления на БЭСМ ведутся в двоичной системе. Числа в машине представляются в виде

$$x = a \cdot 2^p,$$

где $-1 < a < 1$ и p — целое (положительное или отрицательное число). Величину a называют мантиссой числа и p — порядком числа. Для записи мантиссы отводится 32 двоичных разряда, один разряд отводится для записи знака числа, пять двоичных разрядов отводится для порядка числа и один для указания знака порядка. Таким образом, на машине могут быть представлены числа, модули которых заключены между 2^{-31} и 2^{+31}. При желании количество знаков числа может быть удвоено. Этот способ записи чисел характеризует машины с плавающей запятой в отличие от машин с фиксированной запятой, в которых числа записываются обычным образом с фиксированным положением запятой, но налагается дополнительное требование, чтобы исходные данные, промежуточные и окончательные результаты лежали в определенном интервале, например (—1, 1). Машины с фиксированной запятой более просты по конструкции, но менее удобны для программирования.

БЭСМ — трехадресная машина. Это значит, что каждая инструкция программы содержит кроме числа, показывающего, какую операцию должна выполнить машина, еще три числа, два из которых показывают, откуда должны быть взяты числа, участвующие в данной операции, и одно показывает, куда должен быть направлен результат.

В БЭСМ предусмотрена 31 команда. К ним относятся команды для четырех арифметических операций, команда умножения с выводом удвоенного количества разрядов и деления с выводом остатка. Имеется несколько вспомогательных и логических команд. Все операции выполняются одним арифметическим устройством, сконструированным на триггерных ячейках. Арифметическое устройство состоит из приемных регистров и сумматора.

Запоминающих устройств на БЭСМ несколько. Наиболее быстрое из них использует электронно-лучевые трубки и рассчитано на 1023 числа. Время выборки или записи числа составляет 12 *мсек*. Вторым видом памяти является задающее устройство на германиевых диодах, рассчитанное на 376 чисел. Из него можно выбирать числа или команды, но в него нельзя записать результаты. Диодное запоминающее устройство используется в основном для типовых подпрограмм, для установки коэффициентов, меняющихся от варианта к варианту, для ручного управления ходом вычислительного процесса и т. п. Третий вид памяти БЭСМ более медленный и использует магнитный барабан с емкостью 5120 чисел. Наконец,

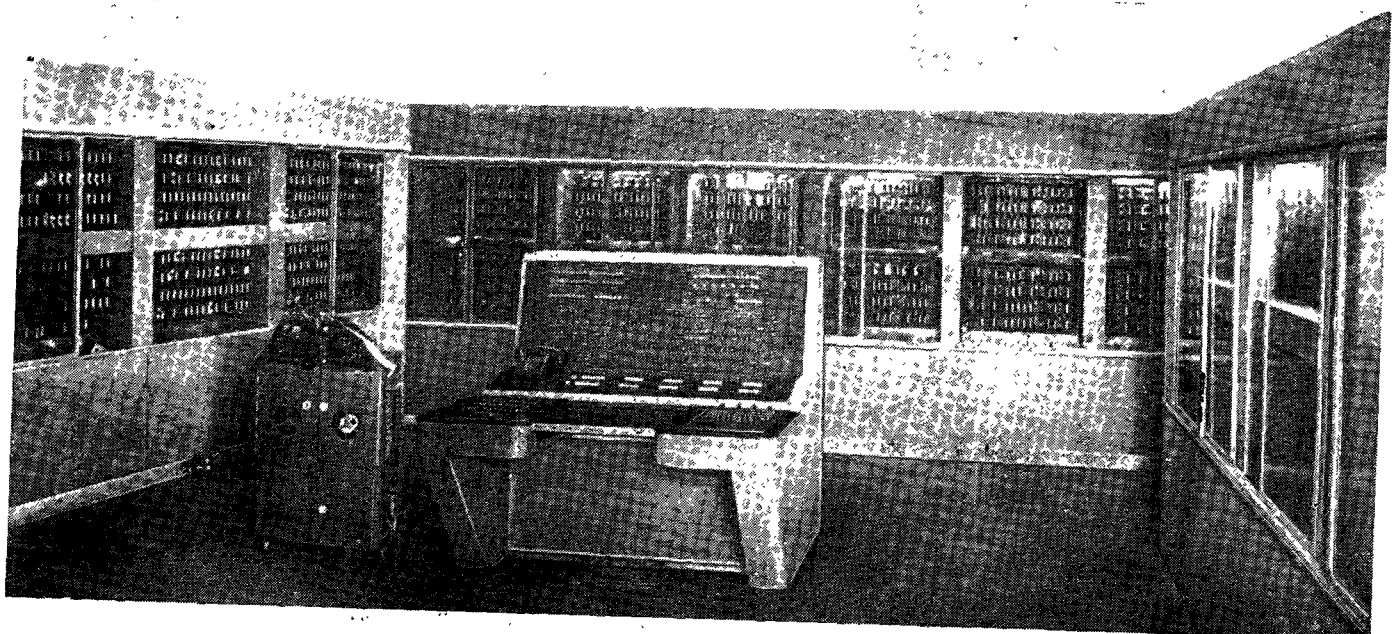

Рис. 17. Быстродействующая электронная счетная машина АН СССР.

четвертый вид использует четыре магнитофона с общей емкостью около 120 000 чисел.

Ввод чисел и команд в машину производится с перфоленты со скоростью 20 чисел в секунду. Если вводимые данные получены в результате счета на машине, то их записывают на магнитную ленту и вводят с этой ленты.

Вывод результатов производится путем записи их на магнитную ленту и последующего печатания на кинопленку. Скорость работы фотопечатающего устройства составляет 200 чисел в секунду. Кроме фотопечатающего устройства имеется электромеханическое печатающее устройство, работающее непосредственно от машины. Скорость печатания 1,5 числа в секунду.

Средняя скорость работы машины составляет 7000—8000 операций в секунду.

5. Средства вычислений и задачи вычислительной математики. Сделаем теперь некоторые выводы относительно влияния современных вычислительных машин на характер вычислительных работ. Прежде всего нужно иметь в виду, что цифровые машины способны производить только четыре основных арифметических действия и иногда еще некоторые операции. Следовательно, разрабатываемые нами методы решения задач должны, в конце концов, сводиться к последовательности этих операций. Далее, наличие счетных машин определяет и объем вычислительной работы, которую можно практически выполнить. Чем совершеннее у нас техника, тем крупнее вычислительные работы, которые с ее помощью можно осуществить. Многие работы, которые ранее считались практически неосуществимыми, проводятся сейчас сравнительно легко. С другой стороны, чем совершеннее техника, тем она дороже, дороже обходится и ее эксплуатация. Поэтому возникает задача о наиболее рациональном использовании различных вычислительных средств, умелом сочетании их друг с другом.

При всякой вычислительной работе важно уметь хорошо ее планировать. Умелый выбор алгоритма для решения задачи, рационального порядка действий, схемы записи будет способствовать более быстрому решению задачи, сокращению ошибок и меньшему утомлению вычислителей. Это становится особенно важным при применении современных электронных цифровых машин. Современная быстродействующая автоматическая вычислительная машина, производящая в секунду около 8000 операций за 8 часов работы, проделает примерно 200 000 000 операций. Это колоссальная вычислительная работа должна производиться автоматически без вмешательства человека. Но человек должен спланировать всю работу машины. Конечно, это не означает, что он должен знать и держать в памяти все операции, которые будут произведены. Но он должен предусмотреть все особенности, которые могут встретиться, и

обеспечить выполнение того алгоритма, который нужен для решения задачи. Сейчас успешно развивается специальный раздел вычислительной математики — теория программирования, который призван облегчить труд человека по составлению программ. В этом разделе находят широкое применение теория множеств, математическая логика, алгебра. Для составления программ используются и сами машины.

Большое значение при составлении программы для решения конкретной задачи имеет удачный выбор алгоритма. При этом возникают самые неожиданные и своеобразные задачи. Казалось бы, чего проще составить программу для вычисления многочлена. Однако и здесь можно удачным алгоритмом полнее использовать возможности машины. Известно, что на производство умножения и деления затрачивается больше времени, чем на сложение и вычитание. Следовательно, нужно стремиться составить алгоритм так, чтобы по возможности уменьшить число операций умножения и деления. Пусть, например, нам требуется подсчитать много раз значение многочлена:

$$x^4 + 2{,}2x^3 + 3{,}4x^2 + 4{,}2x + 5{,}4.$$

Если действовать непосредственно, то придется каждый раз делать по шести умножений. Однако этот многочлен можно записать в виде

$$[x(x + 1{,}1) + 1{,}9405 - x]\,[x(x + 1{,}1) + x + 1{,}2495] + 2{,}97534525.$$

При таком представлении нам потребуется всего лишь два умножения: одно для получения $x(x + 1{,}1)$ и второе для получения произведения квадратных скобок. Конечно, нельзя всегда считать, что второе представление лучше первого, но этим примером мы показали, как своеобразно может оказаться представление задачи для вычислительных целей. Вопросы, связанные с выбором наиболее рационального алгоритма для решения вычислительной задачи, сложны, и в настоящее время еще отсутствует общая теория, позволяющая указывать, как это делать. И в этом направлении могут помочь быстродействующие вычислительные машины.

При применении автоматических счетных машин возникает еще одна проблема. Часто в процессе вычислений приходится использовать те или иные трансцендентные функции. Вводить таблицы таких функций в машину неудобно, так как это сильно загромоздит ее запоминающее устройство. Поэтому сейчас особенно остро возникает необходимость получить достаточно хорошие представления наиболее часто встречающихся трансцендентных функций рациональными функциями.

При всякой вычислительной работе важно вести учет ошибок, возникающих в связи с производимыми округлениями и с приближенным характером применяемых методов. Но понятно, что

влияние этих факторов будет менее значительным при сравнительно небольшом объеме вычислительных работ при ручном счете и будет огромным при грандиозном объеме вычислительных работ с использованием быстродействующих вычислительных машин. Легко себе представить, что после того, как будут произведены сотни миллионов операций, ошибки округления могут совершенно исказить истинную картину, если даже не учитывать другие источники ошибок. Поэтому учет всевозможного рода ошибок становится сейчас совершенно необходимым и здесь предстоит еще большая работа.

Говоря в предыдущем абзаце об ошибках, мы имели в виду лишь естественные ошибки, возникающие вследствие округлений, приближенности методов, приближенности исходных данных и т. п. Мы не имели при этом в виду тех ошибок, которые могут произойти или вследствие невнимательности вычислителя, или неисправности машины. Однако и эти ошибки должны учитываться. Вычислитель, естественно, утомляется при длительной работе, а современная вычислительная машина содержит слишком много различных сложных устройств. Ошибки такого рода мы будем называть *просчетами*. Просчеты могут исказить результат в каком угодно направлении и в каких угодно границах в отличие от ошибок, о которых шла речь в предыдущем абзаце, влияние которых скажется лишь в определенных пределах. Чтобы вовремя заметить произведенный просчет, необходимо всегда так планировать вычисления, чтобы обеспечить постоянный тщательный контроль.

§ 4. Методы вычислений как раздел вычислительной математики. Краткое содержание курса

В одной книге невозможно изложить или хотя бы кратко затронуть весь круг вопросов современной вычислительной математики, поэтому мы ограничились кругом вопросов, относящихся к одному разделу вычислительной математики — *методам вычислений*.

Чтобы более ясно охарактеризовать вопросы, относящиеся к этому разделу вычислительной математики, рассмотрим процесс решения любой математической задачи, если ее решение необходимо довести до числового результата, используя наличные вычислительные средства. Этот процесс можно разбить на два крупных этапа. Первый этап — выбор численного метода решения задачи или, как мы говорили ранее, замена задачи $y = A(x)$, где x и y принадлежат к некоторым функциональным пространствам R_1 и R_2 и $A(x)$ — функция, определенная на R_1, задачей $\bar{y} = \bar{A}(\bar{x})$, более удобной для вычислительных целей, но решение которой в некотором смысле близко к решению исходной задачи. Второй этап — составление вычислительной схемы (при ручном счете) или

программы решения задачи $\bar{y} = \bar{A}(\bar{x})$ (при машинном счете) и сам процесс счета.

Для первого этапа необходимо наличие разработанных методов численного решения основных математических задач и должен быть известен сравнительный анализ различных методов решения одной и той же задачи с точки зрения их точности, границ применимости и целесообразности их реализации на тех или иных вычислительных машинах.

Разработка и анализ этих методов и составляют предмет методов вычислений, а их описание и обоснование составляют содержание настоящей книги.

В первой главе книги изложены основные правила действий с приближенными величинами и правила оценки их точности. В главах 2—5 изложены основные способы приближения функций (интерполирование, равномерное и среднеквадратичное приближение функций) и их приложения. В главе 3 изложены численные методы дифференцирования и интегрирования. В главах 6 и 8 описаны численные методы решения основных задач линейной алгебры: решение систем линейных алгебраических уравнений, обращение матриц, вычисление собственных значений и собственных векторов матриц. В главе 7 изложены способы численного решения алгебраических уравнений высоких степеней и трансцендентных уравнений. Наконец, главы 9 и 10 посвящены численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений. Более подробное содержание книги видно из ее оглавления.

В том или ином объеме эти вопросы излагаются во многих книгах и монографиях, а также в обширной журнальной литературе. Первым в мировой литературе курсом методов вычислений явилась книга академика А. Н. Крылова «Лекции о приближенных вычислениях», изданная в 1911 г. Этот курс не потерял своего значения и сейчас, но он естественно во многом устарел и не охватывает многих важных в настоящее время вопросов. Элементарным курсом методов вычислений, рассчитанным на инженеров и техников, является книга Я. Безиковича «Приближенные вычисления», первое издание которой относится к 1924 г. Неоднократно переиздавалась монография Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Приближенные методы высшего анализа», в которой описаны приближенные методы решения задач математической физики.

Из других, сравнительно давно изданных книг следует указать монографии В. Л. Гончарова «Теория интерполирования и приближения функций», Н. П. Натансона «Конструктивная теория функций», русский перевод книги Скарборро «Численные методы математического анализа». В послевоенные годы издан ряд отечественных и переводных книг и монографий, относящихся к этой области: В. Н. Фаддеева «Вычислительные методы линейной алгебры»,

Ш. Е. Микеладзе «Численные методы математического анализа», Милн «Численный анализ» и «Численное решение дифференциальных уравнений», Коллатц «Численные методы решения дифференциальных уравнений», Хаусхолдер «Основы численного анализа», В. С. Рябенький и А. Ф. Филиппов «Об устойчивости разностных уравнений», В. И. Крылов «Приближенное вычисление интегралов», Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева «Вычислительные методы линейной алгебры», Э. Д. Бут «Численные методы», В. К. Саульев «Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток», Р. Д. Рихтмайер «Разностные методы решения краевых задач», К. Ланцош «Практические методы прикладного анализа», Б. П. Демидович и И А. Марон «Основы вычислительной математики», Г. Н. Положий и др. «Математический практикум» и другие. Но ни одна из указанных выше книг не охватывает всех вопросов методов вычислений и не соответствует программе курса методов вычислений, читаемого студентам университетов, специализирующимся по вычислительной математике, и не может быть рекомендована в качестве основного учебного пособия по этому курсу.

Данная книга представляет попытку создания учебного пособия, отвечающего действующим университетским программам курса методов вычислений, и, как уже указывалось в предисловии, в основу ее легли лекции, читанные авторами на протяжении ряда лет в Московском университете.

Учитывая широкое использование цифровых вычислительных машин в практике расчетов в настоящее время, мы делали основной упор на численные методы решения задач и совсем мало касались аналитических методов приближенного решения математических задач. Там, где возможно, мы старались дать достаточно строгое обоснование излагаемых методов и хотя бы на простых примерах привести их иллюстрацию. Вполне естественно мы не могли и не ставили своей целью изложить все существующие методы решения даже основных математических задач, но старались подробно изложить наиболее распространенные или с нашей точки зрения перспективные. Многие очень важные вопросы, особенно вопросы оценки точности методов, мы не смогли изложить в книге, так как они еще не нашли полного решения.

ГЛАВА 1

ДЕЙСТВИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

§ 1. Классификация погрешностей

1. Источники погрешности результатов вычислений. Во введении мы уже говорили о том, насколько важно уметь оценивать точность полученного результата. Откуда же могут возникнуть ошибки? Таких причин много. Во-первых, исходные данные для вычислений часто получаются из эксперимента, а каждый эксперимент может дать результат с ограниченной точностью. Во-вторых, в процессе вычислений приходится использовать иррациональные величины, такие, например, как π, e, $\sqrt{2}$. Так как при вычислении на цифровых машинах мы можем использовать ограниченное количество разрядов, то эти числа также будут представлены лишь приближенно. В-третьих, во многих случаях существующие методы решения задач могут дать точный ответ лишь после бесконечного числа шагов. Так как практически это осуществить нельзя, то мы будем вынуждены остановиться на каком-то конечном шаге и, следовательно, не достигнем точного значения, например, при вычислении суммы ряда мы ограничиваемся суммой конечного числа первых членов. В-четвертых, уже при таких простейших операциях, как умножение и деление, у нас может сильно возрасти количество разрядов и результаты могут не помещаться в счетчиках или других устройствах машины. В этом случае мы будем вынуждены отбросить некоторое количество разрядов. Наконец, исходные погрешности будут последовательно переходить, преобразовываясь, от операции к операции и порождать новые погрешности.

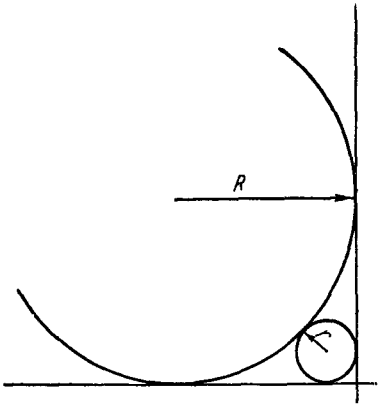

Рис. 18.

Влияние описанных выше погрешностей на точность результата может оказаться значительно большим, чем это обычно предста-

вляют даже при не очень сложных вычислениях. Представим себе, что нам требуется найти объем шара, касающегося цилиндра радиуса R и двух касательных к нему взаимно-перпендикулярных плоскостей (рис. 18). Легко найти, что радиус шара r будет равен

$$r = R\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1},$$

а объем

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3.$$

Но

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3 = (\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2}.$$

Подсчитаем последние три выражения, взяв за приближенные значения $\sqrt{2}$ два числа: $\frac{7}{5} = 1{,}4$ и $\frac{17}{12} = 1{,}4166\ldots$ Так как $\sqrt{2} = 1{,}4142135624\ldots$, то каждое из выбранных нами значений довольно близко к точному и второе из них точнее. Результаты вычислений сведем в таблицу:

$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}-1)^6$	$(3-2\sqrt{2})^3$	$99-70\sqrt{2}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{64}{15\,625} = 0{,}0050960$	$\frac{1}{125} = 0{,}00800$	1
$\frac{17}{12}$	$\frac{15\,625}{2\,985\,354} = 0{,}005238$	$\frac{1}{216} = 0{,}0046296$	$-\frac{1}{6} = -0{,}1666\ldots$

Мы получили значительно отличающиеся друг от друга ответы, и не видно сразу, какой из них ближе к верному. Из приведенного примера видно, с какой осторожностью нужно обращаться с приближенными числами.

2. Задачи, возникающие при работе с приближенными величинами. При работе с приближенными величинами математику приходится решать следующие задачи:

1. Давать математические характеристики точности приближенных величин.

2. Оценивать точность результата, когда известна точность исходных данных.

3. Находить точность исходных данных, обеспечивающую заданную точность результата.

4. Согласовывать точность различных исходных данных с тем, чтобы не затрачивать излишней работы при отыскании или вычислении одних данных, если другие данные слишком грубы.

5. Следить в процессе вычислений за точностью промежуточных результатов, с тем чтобы, с одной стороны, обеспечить необходимую точность окончательного результата и, с другой стороны, по возможности упростить вычисления. Последние два пункта имеют немаловажное значение. Академик А. Н. Крылов указывал, что ему приходилось рассматривать проекты, в которых 90% работы затрачивалось впустую на выписывание ненужных и неверных цифр. И все это из-за незнания правил действия с приближенными величинами!

3. Правила округления чисел. Прежде чем переходить к изучению этих правил, условимся относительно некоторой терминологии.

Будем всегда считать, что числа, с которыми нам придется иметь дело, могут быть записаны с помощью конечного числа разрядов в той или иной системе счисления. Таким образом, если за основание системы счисления взято натуральное число β и если мы допускаем числа, имеющие не более m разрядов, то их можно записать единственным способом в виде

$$\pm (a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + a_m\beta^{n-m+1}),$$

где a_i — целые положительные числа, $0 \leqslant a_i < \beta$. Интересно отметить, что уже здесь мы сталкиваемся с тем приемом, о котором говорилось во Введении. Вместо всего множества действительных чисел некоторого отрезка используется его конечное дискретное подмножество. В процессе вычислений иногда приходится и удается выходить за пределы этого подмножества, но во всех случаях количество разрядов остается ограниченным и мы опять будем иметь дело с конечным множеством чисел.

Может оказаться, что результаты вычислений будут иметь бесчисленное или очень большое количество разрядов, так что их невозможно поместить в машину или они оказываются слишком громоздкими при вычислениях на бумаге. Тогда приходится заменять результат некоторым числом из нашего основного подмножества. Естественно брать ближайшее число этого подмножества. Практически это сводится к следующему. Пусть мы получили в результате вычислений число

$$\pm (a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + a_m\beta^{n-m+1} + a_{m+1}\beta^{n-m} + \ldots).$$

Тогда, если

$$a_{m+1} + a_{m+2}\beta^{-1} + \ldots < \frac{1}{2}\beta,$$

то мы заменяем результат на

$$\pm (a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + a_m\beta^{n-m+1}).$$

Если же

$$a_{m+1} + a_{m+2}\beta^{-1} + \ldots > \frac{1}{2}\beta.$$

то заменяем результат на

$$\pm [a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + (a_m + 1)\beta^{n-m+1}].$$

Остается сомнительным случай

$$a_{m+1} + a_{m+2}\beta^{-1} + \ldots = \frac{1}{2}\beta.$$

Здесь безразлично, каким из двух данных выше чисел заменить результат. Тогда применяют различные соглашения, исходя или из простоты выполнения этой операции, или из удобства последующей работы над результатом. Так, в некоторых машинах, например в ЭВ, округление осуществляется путем прибавления к результату числа $\frac{1}{2}\beta^{n-m+1}$ и последующего отбрасывания всех младших разрядов, начиная с разряда, содержащего β^{n-m}. Это означает, что в сомнительном случае мы заменяем результат на

$$\pm [a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + (a_m + 1)\beta^{n-m+1}].$$

При вычислениях на бумаге в обычной десятичной системе счисления рекомендуется пользоваться в сомнительном случае следующим правилом. Если a_m — четное число, то заменяем результат на

$$\pm (a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_m \cdot 10^{n-m+1}),$$

если же a_m — нечетное число, то заменяем результат на

$$\pm [a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + (a_m + 1)\, 10^{n-m+1}].$$

Описанный нами процесс называют *округлением*. Если следовать последнему из описанных правил, то процесс последовательного округления числа 2,804953 будет выглядеть следующим образом:

2,80495; 2,8050; 2,805; 2,80; 2,8; 3.

4. Классификация погрешностей. Производя округления, мы заменяем данное нам число другим, представляющим его приближенно. Возникающую при этом погрешность будем называть *погрешностью округления*.

Исходные данные, как правило, не будут нам известны точно. Мы будем знать не сами числа, а некоторые области, в которых они помещаются. Будем называть их *областями неопределенности*. В результате вычислений мы также получим не точное значение, а некоторую область, в которой оно помещается, даже если все

последующие вычисления производились точно, без округлений. Границы этой области определят пределы погрешности, не зависящей от способа записи чисел. Ее мы назовем *неустранимой погрешностью.*

Существует третий вид погрешностей, не зависящий ни от погрешностей исходных данных, ни от способа записи чисел, ни от точности вычислений. Как уже говорилось во Введении, для решения задачи

$$y = A(x)$$

мы заменяем пространства R_1 и R_2 другими пространствами $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ и функцию A другой функцией $\bar{A}$. Поэтому даже при точных исходных данных и при точных вычислениях с этими данными мы решим задачу, отличающуюся от той, которая нам дана. Естественно, и решение будет отличаться от точного решения исходной задачи. Это отклонение мы будем называть *погрешностью метода.* В этой главе мы не будем касаться погрешностей метода, а отнесем изучение их к соответствующим разделам курса.

§ 2. Неустранимая погрешность

Условимся в дальнейшем обозначать точные значения каких-то величин латинскими буквами x, y, z, ..., а соответствующие им приближенные значения такими же латинскими буквами, но со звездочкой вверху: x^*, y^*, z^*, ...

Пусть нам требуется вычислить значения функции

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и точные значения аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нам не известны, а даны лишь их области неопределенности. Определить неустранимую погрешность y это значит найти область неопределенности этой величины. По существу это задача математического анализа и может быть решена любым из методов, выработанных для таких целей в математическом анализе. При более или менее сложной функции f применение точных методов математического анализа приводит к сложным и трудоемким вычислениям. Поэтому целесообразно иметь в своем распоряжении приемы, позволяющие решить нашу задачу более элементарно, хотя быть может и более грубо. Последнее оправдывается еще и тем, что сами области неопределенности x_i^* обычно бывают известны довольно грубо.

1. Абсолютная и относительная погрешности числа. Прежде чем перейти к этому вопросу, введем некоторые характеристики точности чисел.

Рассмотрим разность

$$\alpha_{x^*} = x - x^*$$

между точным значением некоторой величины и ее приближенным значением, с которым производится вычисление. Эту разность назовем *абсолютной погрешностью* числа x^*. Абсолютная погрешность и будет одной из характеристик точности чисел. Очевидно, она представляет только теоретический интерес, так как точного значения x мы в большинстве случаев не знаем. Но мы всегда можем указать границы, в которых изменяется абсолютная погрешность. Эти границы определяются тем способом, которым мы получили приближенное число x^*. Так, производя измерения обычной ученической линейкой, мы можем гарантировать, что модуль абсолютной погрешности не будет превышать 0,5 *мм*. Аналогично при производстве измерений штангенциркулем или микрометром мы получим соответственно, что абсолютные погрешности не могут превышать по модулю 0,1 и 0,01 *мм*. При замене иррационального числа конечной дробью величину погрешности также часто удается оценить. В связи с этим введем еще одно понятие, а именно: наименьшую из верхних границ $|\alpha_{x^*}|$, которую можно найти исходя из способа получения числа x^*, будем называть *предельной абсолютной погрешностью* и обозначать A_{x^*}. На практике часто за предельную абсолютную погрешность A_{x^*} принимают не наименьшую из верхних граней $|\alpha_{x^*}|$, а одну из верхних граней, достаточно близкую к наименьшей. В связи с грубостью оценок точности с помощью предельных абсолютных погрешностей мы не получим при этом заметной разницы. Таким образом, если $A_{x^*} = 0{,}005$, а $x^* = 2{,}18$, то $2{,}175 \leqslant x \leqslant 2{,}185$.

Абсолютная погрешность и предельная абсолютная погрешность еще не характеризуют точность результата, как ее обычно интуитивно понимают, если не указан сам результат. В самом деле, пусть предельная абсолютная погрешность результата измерения равна 1 *см*. Если при этом измерялась длина комнаты, то точность удовлетворительная. Если же измерялось расстояние между двумя пунктами различных городов, то точность очень велика. Поэтому мы введем ещу одну характеристику точности — относительную погрешность. *Относительной погрешностью* назовем отношение абсолютной погрешности к абсолютному значению приближенной величины. Будем обозначать относительную погрешность числа x^* через δ_{x^*}. Таким образом,

$$\delta_{x^*} = \frac{\alpha_{x^*}}{|x^*|}.$$

Точно так же вводится понятие *предельной относительной погрешности*, которую мы будем обозначать через Δ_{x^*}:

$$\Delta_{x^*} = \frac{A_{x^*}}{|x^*|}.$$

В отличие от абсолютной погрешности, которая чаще всего бывает размерной величиной, относительная погрешность будет величиной

безразмерной. В дальнейшем предельные абсолютные и относительные погрешности, если не будет опасности смешения, будем называть просто абсолютными и относительными погрешностями.

Посмотрим теперь, как изменяется предельная абсолютная погрешность при округлении числа. Пусть нам дано число

$$c^* = a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + a_m\beta^{n-m+1} + a_{m+1}\beta^{n-m} + \ldots,$$

и мы округляем его согласно приведенным в § 1 правилам до m старших разрядов. Если абсолютная погрешность числа c^* равна A_{c^*}, то

$$c^* - A_{c^*} \leqslant c \leqslant c^* + A_{c^*}.$$

После округления мы получим число

$$c^{**} = a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + a_{m-1}\beta^{n-m+2} + b_m\beta^{n-m+1},$$

где b_m равно a_m или $a_m + 1$. При этом $|c^{**} - c^*|$ будет равно наименьшему из двух чисел:

$$a_{m+1}\beta^{n-m} + a_{m+2}\beta^{n-m-1} + \ldots$$

или

$$\beta^{n-m+1} - (a_{m+1}\beta^{n-m} + a_{m+2}\beta^{n-m-1} + \ldots).$$

Таким образом, абсолютная погрешность $A_{c^{**}}$ числа c^{**} будет равна наименьшему из двух чисел:

$$A_{c^*} + a_{m+1}\beta^{n-m} + a_{m+2}\beta^{n-m-1} + \ldots$$

или

$$A_{c^*} + \beta^{n-m+1} - (a_{m+1}\beta^{n-m} + a_{m+2}\beta^{n-m-1} + \ldots).$$

При любых условиях $A_{c^{**}}$ не будет превышать $A_{c^*} + \frac{1}{2}\beta^{n-m+1}$. Могут быть такие случаи, когда $A_{c^{**}}$ окажется равной

$$A_{c^*} + \frac{1}{2}\beta^{n-m+1}.$$

2. Верные знаки числа. При записи приближенного числа мы обязательно должны указывать соответствующую ему область неопределенности. Наиболее аккуратный способ записи будет иметь вид: $(x^* - \alpha_1,\ x^* + \alpha_2)$, где $x^* - \alpha_1$ и $x^* + \alpha_2$ — границы области неопределенности. Можно также записывать приближенное число в виде $x^* \pm A_{x^*}$. Однако если нам нужно записать большую таблицу приближенных чисел, то оба способа будут неудобны. Поэтому в вычислительной практике часто прибегают к различным приемам, позволяющим по записи только самого приближенного числа судить о его погрешности. Один из наиболее распространенных приемов

состоит в следующем. Выбирают некоторое положительное число $\omega \leqslant 1$. В приближенном числе

$$c^* = a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + a_m\beta^{n-m+1} + \ldots$$

цифра a_k считается *верной*, если $A_{c^*} \leqslant \omega\beta^{n-k+1}$. В противном случае a_k считается *сомнительной* цифрой. Ясно, что если a_k является верной цифрой, то и все предыдущие цифры верные. Записывая приближенное число без указания его погрешности, требуют, чтобы все записанные цифры были верны. Так, например, если в десятичной системе будет записано приближенное число 3,14 и не будет указана его предельная абсолютная погрешность, то это означает, что она не превышает $\omega \cdot 10^{-2}$. Чтобы показать, что предельная абсолютная погрешность числа 314 000 не превышает $\omega \cdot 10^3$, его следует записать в виде $314 \cdot 10^3$.

Если исходное число имеет несколько сомнительных цифр и мы хотим использовать наш способ записи, его нужно предварительно округлить. К округлениям прибегают и в том случае, когда число разрядов чересчур велико. В связи с этим накладывается ограничение на наименьшее возможное значение ω. Действительно, как мы видели, при округлении числа до m старших разрядов абсолютная погрешность может возрасти на $\frac{1}{2}\beta^{n-m+1}$. Таким образом, нельзя брать $\omega < \frac{1}{2}$, так как при этом найдутся числа, у которых последняя цифра будет оставаться сомнительной, сколько бы мы ни округляли. При любом выборе ω найдутся такие числа, у которых последняя верная цифра после округления уже не станет верной. Найдем наименьшее ω так, чтобы после округления оставалась верной, по крайней мере, предпоследняя верная цифра числа. Пусть a_m является последней верной цифрой числа

$$c^* = a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + a_m\beta^{n-m+1} + a_{m+1}\beta^{n-m} + \ldots$$

Это значит, что

$$\omega\beta^{n-m} < A_{c^*} \leqslant \omega\beta^{n-m+1}.$$

После округления до $m-1$ старших разрядов предельная абсолютная погрешность может достигнуть

$$A_{c^*} + \frac{1}{2}\beta^{n-m+2}.$$

Нужно, чтобы она не превышала $\omega\beta^{n-m+2}$, т. е. нужно требовать, чтобы было

$$A_{c^*} + \frac{1}{2}\beta^{n-m+2} \leqslant \omega\beta^{n-m+2}.$$

Это неравенство должно быть выполнено и при замене A_{c^*} его наибольшим возможным значением, т. е. должно быть выполнено неравенство

$$\omega\beta^{n-m+1}+\frac{1}{2}\beta^{n-m+2}\leqslant\omega\beta^{n-m+2}.$$

Отсюда

$$\omega\geqslant\frac{0{,}5}{1-\frac{1}{\beta}}.$$

Наименьшее значение ω будет равно

$$\omega=\frac{0{,}5}{1-\frac{1}{\beta}}.$$

При $\beta=10$, т. е. в десятичной системе счисления получим:

$$\omega=\frac{0{,}5}{0{,}9}=0{,}555\ldots\approx 0{,}56.$$

При $\beta=2$, т. е. в двоичной системе счисления, будем иметь:

$$\omega=\frac{0{,}5}{0{,}5}=1.$$

Если допускать сдвиг последней верной цифры на два разряда влево, то в десятичной системе можно взять в качестве ω число

$$\omega=\frac{0{,}5}{1-\frac{1}{10^2}}=0{,}50505\ldots\approx 0{,}51.$$

При такой записи приближенных чисел мы будем иметь лишь грубое представление о истинной их погрешности. Чем больше мы будем брать ω, тем больше будет таких чисел, для которых истинная погрешность будет завышена. Поэтому, если наши числа появляются в результате вычислений по формулам с точными значениями исходных данных (например, при составлении таблиц трансцендентных функций), когда мы можем достигнуть практически любой заданной точности, выгоднее брать ω возможно меньшим. В этих случаях в десятичной системе выгодно брать ω возможно более близким к 0,5. Например, можно взять $\omega=0{,}56$ или $\omega=0{,}51$ и т. п. Другое дело, если наши приближенные числа получаются в результате измерений или в результате вычислений с недостаточно точными исходными данными, как это часто случается в технических расчетах. При этом малые значения ω будут связаны с необходимостью производить округления, снижающие точность результатов, и так недостаточно точных, и поэтому невыгодны. В этих случаях обычно берут $\omega=1$.

Условие о записи приближенных чисел, при котором все цифры, должны быть верными, нужно использовать лишь в тех случаях когда затруднительно указывать наряду с самими числами их погрешности. Отбрасывание сомнительных цифр, сопровождаемое округлениями, всегда увеличивает область неопределенности приближенного числа. Во всяком случае, если приближенные числа не носят окончательного характера и с ними предполагается производить еще какие-то вычисления, то следует сохранять одну или две сомнительные цифры.

Если мы знаем последнюю верную цифру приближенного числа, то можем сразу же дать оценку его абсолютной погрешности. Получим теперь формулы, позволяющие оценивать относительные погрешности чисел. Пусть дано приближенное число

$$c^* = a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + a_m\beta^{n-m+1} + a_{m+1}\beta^{n-m} + \ldots,$$

причем последней верной цифрой является a_m и $a_1 \neq 0$. Абсолютная погрешность A_{c^*} этого числа будет заключена в пределах

$$\omega\beta^{n-m} < A_{c^*} \leqslant \omega\beta^{n-m+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{\omega\beta^{n-m}}{a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + a_m\beta^{n-m+1} + a_{m+1}\beta^{n-m}} <$$

$$< \Delta_{c^*} \leqslant \frac{\omega\beta^{n-m+1}}{a_1\beta^n + a_2\beta^{n-1} + \ldots + a_m\beta^{n-m+1} + a_{m+1}\beta^{n-m} + \ldots}.$$

Получим отсюда более грубые, но зато и более удобные оценки. Для этого увеличим правую часть, заменив в ней $a_2, a_3, \ldots, a_m, \ldots$ нулями, и уменьшим левую часть, заменив в ней $a_2, a_3, \ldots, a_m, \ldots$ нулями и a_1 на $a_1 + 1$. Тогда будем иметь:

$$\frac{\omega}{(a_1+1)\beta^m} < \Delta_{c^*} \leqslant \frac{\omega}{a_1\beta^{m-1}}.$$

За грубое значение Δ_{c^*} можно принять

$$\Delta_{c^*} \approx \frac{\omega}{a_1\beta^{m-1}}.$$

Наши формулы позволяют также грубо оценить количество верных цифр или верных знаков приближенного числа, т. е. число m, если известна относительная погрешность. Пусть, например, в результате вычислений получено число 2,14865. Найдем, сколько оно имеет верных знаков, если $\Delta = 0{,}000023$ и $\omega = 0{,}5$. Нам нужно найти m, при котором

$$\frac{0{,}5}{3\cdot 10^m} < 0{,}000023 \leqslant \frac{0{,}5}{2\cdot 10^{m-1}}$$

или

$$1 < 0{,}000138\cdot 10^m \leqslant 15.$$

Оба неравенства будут выполнены при $m = 4$ или 5. Значит, мы можем уверенно сказать, что наш результат имеет четыре верных знака. Фактически при отыскании числа верных знаков мы должны отыскивать наименьшее m, при котором выполняется неравенство

$$\frac{\omega}{(a_1 + 1)\,\beta^m} < \Delta_{c^*}.$$

Заметим здесь же, что в вычислительной практике используют также термин *число верных десятичных знаков*. Под этим понимают число верных цифр после десятичной запятой. Так, например, если в числе

$$0{,}000304$$

все цифры верны, то говорят, что оно имеет шесть верных десятичных знаков. В то же время это число имеет три верных знака. При подсчете верных знаков нули, стоящие слева, не считаются.

3. Неустранимая погрешность значения функции для приближенных значений аргументов. Погрешности результатов арифметических операций. Перейдем теперь к отысканию областей неопределенности функций приближенных аргументов. Как мы уже говорили ранее, задача по существу сводится к отысканию экстремальных значений функций и может быть решена методами математического анализа. Здесь мы будем изучать более грубые способы определения абсолютной и относительной погрешностей функций. Для их применения нужно наложить некоторые ограничения на изучаемые функции и погрешности аргументов. Мы будем предполагать, что наши функции непрерывно дифференцируемы в рассматриваемых областях. Предположим также, что погрешности, с которыми мы будем иметь дело, определяются с небольшой точностью — один-два верных знака. Это позволит нам сократить работу по вычислению самих погрешностей. Далее, будем предполагать, что погрешности значительно меньше приближенных величин, так что ими можно пренебрегать в суммах, содержащих одновременно приближенную величину и ее погрешность. Это условие на практике обычно выполняется. Нам часто придется встречаться с значениями функций и их производных в некоторых точках области, определяемой областями неопределенности аргументов. Пользуясь нашими предположениями, мы будем фактически рассматривать их в других точках, более удобных для наших целей.

Найдем абсолютную и относительную погрешности функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, считая, что погрешности аргументов заданы. По формуле конечных приращений получим:

$$\alpha_{y^*} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\xi)\,\alpha_{x_i^*},$$

где $f'_{x_i}(\xi)$ — значения производных f'_{x_i}, взятых в некоторой точке отрезка, соединяющего точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(x_1, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Используя последнее замечание предыдущего абзаца, заменим $f'_{x_i}(\xi)$ на $f'_{x_i}(x^*)$. При этом получим:

$$\alpha_{y^*} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x^*)\,\alpha_{x_i^*}.$$

Таким образом,

$$A_{y^*} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| f'_{x_i}(x^*) \right| A_{x_i^*}.$$

Легко видеть, что при соответствующем выборе $\alpha_{x_i^*}$ правая часть последнего неравенства будет равна A_{y^*}. Отсюда

$$A_{y^*} = \sum_{i=1}^{n} \left| f'_{x_i}(x^*) \right| A_{x_i^*}.$$

Теперь нетрудно найти и относительную погрешность. Она будет равна

$$\Delta_{y^*} = \frac{A_{y^*}}{|f(x^*)|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f'_{x_i}(x^*)}{f(x^*)} \right| A_{x_i^*},$$

или

$$\Delta_{y^*} = \sum_{i=1}^{n} \left| \{\ln f(x^*)\}'_{x_i} \right| A^*_{x_i}.$$

Если нам нужно выразить относительную погрешность функции через относительные погрешности аргументов, то мы запишем наше выражение так:

$$\Delta_{y^*} = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i^* \{\ln f(x)\}'_{x_i} \right| \frac{A_{x_i^*}}{|x_i^*|}.$$

Отсюда

$$\Delta_{y^*} = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i^* \{\ln f(x^*)\}_{r_i} \right| \Delta_{x_i^*}.$$

Мы получили общие выражения для абсолютной и относительной погрешностей функции нескольких приближенных аргументов в предположении малости погрешностей аргументов.

Применим теперь наши общие формулы к некоторым частным случаям. Начнем с простейших арифметических операций. Пусть нам требуется найти сумму нескольких приближенных величин

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Мы будем отдельно рассматривать разность приближенных величин и поэтому предполагаем, что все $x_i > 0$. В нашем случае все $f'_{x_i}(x)$ равны 1, а все $\{\ln f(x^*)\}'_{x_i} = \frac{1}{x^*}$. Отсюда

$$A_{x^*} = \sum_{i=1}^{n} A_{x_i^*},$$

$$\Delta_{x^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{x^*} \Delta_{x_i^*}.$$

Таким образом, *при сложении приближенных величин их абсолютные погрешности складываются*. Заметим, что это равенство не является грубым и не зависит от тех предположений, которые мы высказали ранее.

Пусть M и m — соответственно наибольшая и наименьшая из относительных погрешностей слагаемых. Тогда на основании второго равенства получим:

$$\Delta_{x^*} \leqslant M \frac{x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*}{x^*} = M$$

и аналогично

$$\Delta_{x^*} \geqslant m \frac{x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*}{x^*} = m.$$

Таким образом, *при сложении приближенных величин относительная погрешность суммы будет заключена между наибольшей и наименьшей относительными погрешностями слагаемых.*

При производстве вычислений на автоматических вычислительных машинах нет смысла производить округления слагаемых перед производством сложения, если только они помещаются в машине. Это не ускорит вычислений, но расширит область неопределенности слагаемых, а следовательно и суммы. Другое дело при производстве вычислений вручную или на неавтоматической вычислительной машине. В этом случае большое количество разрядов будет связано с длительной установкой чисел, длительными вычислениями и громоздкими записями. Поэтому при вычислениях вручную или на неавтоматических вычислительных машинах производят предварительное округление слагаемых. При этом слагаемое, имеющее наименьшее количество десятичных знаков, оставляют неокругленным, а в остальных слагаемых оставляют на один или два десятичных знака больше.

Обратимся теперь к вычитанию. Рассмотрим разность

$$x^* = x_1^* - x_2^*,$$

предполагая, что $x_1^* > x_2^* > 0$. Тогда

$$A_{x^*} = A_{x_1^*} + A_{x_2^*},$$

$$\Delta_{x^*} = \frac{x_1^* \Delta_{x_1^*} + x_2^* \Delta_{x_2^*}}{x}.$$

И в этом случае *абсолютная погрешность будет равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого*, но относительная погрешность будет уже больше, чем каждая из относительных погрешностей. Если уменьшаемое значительно больше вычитаемого, то знаменатель последней дроби близок к x_1^* и сама дробь близка к $\Delta_{x_1^*}$. В этом случае нужно действовать также, как и при сложении. Совершенно другая картина получится, когда уменьшаемое и вычитаемое близки друг к другу. В этом случае знаменатель дроби очень мал и, следовательно, дробь будет очень велика. Получается большая потеря верных знаков. Поэтому там, где это возможно, надо стараться избегать вычитания близких по абсолютной величине чисел. Этого иногда удается достичь заменой вычитания близких чисел непосредственными измерениями или некоторым преобразованием формул. Так, например, пусть нам требуется вычислить объем, заключенный между двумя сферами с общим центром, если дан радиус меньшей сферы r и разность радиусов сфер равна a. Искомый объем будет равен

$$\frac{4}{3}\pi[(r+a)^3 - r^3],$$

и если a мало, то вычитание даст большую потерю точности. Выгоднее вычислять результат по формуле

$$\frac{4}{3}\pi[3r^2a + 3ra^2 + a^3].$$

Заметим, что формулы для вычисления погрешностей суммы и разности являются абсолютно точными и не используют тех предположений, о которых говорилось выше.

Рассмотрим теперь произведение приближенных величин. Пусть

$$x^* = x_1^* x_2 \dots x_n^*.$$

Тогда

$$A_{x^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^*}{x_i^*} A_{x_i^*},$$

$$\Delta_{x^*} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i^*}.$$

Таким образом, *при умножении приближенных величин относительные погрешности складываются*. Оценим грубо число верных знаков в произведении m множителей, заданных в десятичной системе счисления, имеющих одинаковое число k верных знаков, если m невелико (меньше 10). Обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_m$ первые цифры сомножителей, отличные от нуля (их называют первыми значащими цифрами). Тогда по данной ранее приближенной формуле

$$\Delta_{x_i^*} \approx \frac{\omega}{b_i \cdot 10^{k-1}}.$$

Отсюда

$$\Delta_{x^*} \approx \frac{\omega}{10^{k-1}} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i}.$$

Обозначив через b первую значащую цифру произведения, будем иметь:

$$(b+1)\Delta_{x^*} \approx (b+1)\frac{\omega}{10^{k-1}} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i}.$$

Заменим в правой части b на 9 и b_i на 1. Получим:

$$(b+1)\Delta_{x^*} < \frac{\omega}{10^{k-2}} m.$$

Так как m не превышает 10, то

$$(b+1)\Delta_{x^*} < \frac{\omega}{10^{k-3}}.$$

Таким образом, мы будем иметь по крайней мере $k-2$ верных знаков. Наша оценка очень груба, и практически мы будем иметь $k-1$ верных знаков, а иногда и k.

При умножении вручную или на неавтоматических вычислительных машинах двух сомножителей с целью экономии времени и сокращения записей более точный сомножитель округляют так, чтобы число его верных знаков было на 1 больше, чем у менее точного.

В случае частного двух величин

$$x^* = \frac{x_1^*}{x_2^*}$$

будем иметь:

$$A_{x^*} = \frac{|x_2^*| A_{x_1^*} + |x_1^*| A_{x_2^*}}{x_2^{*2}},$$

$$\Delta_{x^*} = \Delta_{x_1^*} + \Delta_{x_2^*}.$$

Таким образом, и в этом случае *относительные погрешности будут складываться* и будут действовать те же правила, что и при умножении.

Рассмотрим еще пример трансцендентной функции. Пусть

$$y^* = \lg x^*.$$

Тогда

$$A_{y^*} = \frac{A_{x^*}}{x^* \ln 10} = 0{,}434 \ldots \Delta_{x^*}.$$

Таким образом, абсолютная погрешность десятичного логарифма примерно равна половине относительной погрешности числа, стоящего под знаком логарифма. Если x^* имеет n верных знаков, то

$$\Delta_{x^*} \approx \frac{\omega}{a_1 \cdot 10^{n-1}}.$$

Итак, y^* будет иметь примерно n верных десятичных знаков. Обратно, по n-значным таблицам логарифмов можно найти само число с точностью до n верных знаков. Отсюда вывод. Чтобы не затруднять свою работу, с одной стороны, и не уменьшать точность, с другой, мы должны брать таблицы с таким количеством десятичных знаков, каково число верных знаков в аргументе под знаком логарифма.

Полученные нами формулы позволяют решать и обратную задачу теории погрешностей: находить допустимые погрешности одного из аргументов по заданным погрешностям функции и остальных аргументов.

В заключение еще раз хотим напомнить, что полученные в настоящем параграфе формулы и способы оценок погрешности справедливы только при тех предположениях, которые были высказаны выше. Эти предположения сводятся к тому, что при разложении разности значений функции при точных и приближенных значениях аргументов в ряд Тейлора по степеням погрешностей аргументов мы можем ограничиться только первыми членами, содержащими первые степени погрешностей аргументов. Если первыми степенями погрешностей ограничиться нельзя, то следует использовать формулу Тейлора до вторых, третьих и т. д. степеней.

§ 3. Погрешности округления

В предыдущем параграфе мы уже говорили о том, как погрешности округления влияют на абсолютную погрешность. В этом параграфе мы коснемся некоторых вопросов, связанных с округлениями, производимыми внутри быстродействующей вычислительной машины. Эти вопросы в настоящее время разработаны еще очень

слабо. Поэтому мы ограничимся лишь самыми предварительными соображениями.

Влияние округлений внутри машины на результат вычислений в различных машинах будет различное. Поэтому мы должны условиться, с какой машиной будем иметь дело. Для упрощения последующих рассуждений возьмем самый простой образец автоматической машины. Будем предполагать, что у нас имеется машина с фиксированной запятой, в которой все числа удовлетворяют условию $|x|<1$. Пусть машина имеет запоминающее устройство, в котором могут храниться числа, имеющие m разрядов. Предположим, что машина может производить операции сложения, вычитания и умножения, результаты которых помещаются в специальном накопителе, имеющем $2m$ разрядов. Если в этом накопителе перед началом выполнения очередной операции уже имелось какое-то число, то результат операции либо прибавляется к числу, имеющемуся в накопителе, либо вычитается из него. Пусть наша машина может производить и операцию деления, причем она помещает первые m разрядов величины $(x^*/y^*)+(\beta^{-m}/2)$ в специальный счетчик. Последнее наше предположение будет состоять в том, что наша машина может округлять числа в накопителе путем прибавления к ним $\beta^{-m}/2$ и отбрасывания последних m разрядов.

Для того чтобы можно было произвести на нашей машине действия сложения и вычитания, нужно только потребовать, чтобы

$$|x^*+y^*|<1, \quad |x^*-y^*|<1.$$

Округлять при этом не придется, и следовательно, ошибок округления не возникает.

Если нам нужно перемножить два каких-то числа, находящихся в каких-то ячейках запоминающего устройства, то модуль результата всегда будет меньше 1, а сам результат не может иметь более $2m$ разрядов. Таким образом, и в этом случае округлений не потребуется. Но если этот результат придется выводить в какую-то ячейку запоминающего устройства или выводить из машины, то придется сделать округление. При этом мы уже не получим точного произведения. Результат такой операции будем обозначать $x^*\times y^*$, отличая его тем самым от точного произведения x^*y^*, и будем называть псевдопроизведением. Итак,

$$|x^*y^*-x^*\times y^*|\leqslant\varepsilon=\frac{\beta^{-m}}{2},$$

где ε введено для упрощения последующих записей.

Точно так же при делении x^* на y^* мы будем получать не точное частное x^*/y^*, а псевдочастное $x^*:y^*$, причем

$$\left|\frac{x^*}{y^*}-x^*:y^*\right|\leqslant\varepsilon.$$

Пусть теперь нам нужно образовать сумму произведений. При этом мы можем сначала получить в специальном накопителе точную сумму произведений и лишь затем произвести округление. Такую псевдооперацию будем обозначать $\sum^* x_i^* y_i^*$. Таким образом,

$$\left|\sum x_i^* y_i^* - \sum^* x_i^* y_i^*\right| \leqslant \varepsilon.$$

Интересно отметить, что не все свойства обычных арифметических операций сохранятся для псевдоопераций. Так, например, имеет место с дистрибутивным законом. Выражение $(x^* + y^*) \times z^*$ может отличаться от $(x^* + y^*) z^*$ на ε, а $x^* \times z^* + y^* \times z^*$ от $x^* z^* + y^* z^*$ на 2ε, так как в первом случае производится одно псевдоумножение, а во втором два. Таким образом,

$$|(x^* + y^*) \times z^* - (x^* \times z^* + y^* \times z^*)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Но числа, разность которых стоит под знаком модуля, могут отличаться друг от друга лишь на величину, кратную 2ε (кратную единице последнего разряда), и следовательно,

$$|(x^* + y^*) \times z^* - (x^* \times z^* + y^* \times z^*)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Мы получили, что разность величин, стоящих под знаком модуля, не может превышать единицы последнего разряда. Что такая разность действительно может возникнуть, подтверждается простым примером. Предположим, что $m = 3$, и нам нужно найти

$$(0{,}364 + 0{,}423) \cdot 0{,}125.$$

При этом

$$(0{,}364 + 0{,}423) \times 0{,}125 = 0{,}098,$$

а

$$(0{,}364 \times 0{,}125 + 0{,}423 \times 0{,}125) = 0{,}099.$$

Мы как раз получили разницу в единицу последнего знака.

Порядок, в котором производятся операции умножения и деления, также будет иметь значение. Пусть нам требуется найти величину $x^* y^* z^*$. При этом

$$x^* \times (y^* \times z^*) - x^* y^* z^* =$$
$$= [x^* \times (y^* \times z^*) - x^* (y^* \times z^*)] + [x^* (y^* \times z^*) - x^* y^* z^*]$$

и, следовательно,

$$|x^* \times (y^* \times z^*) - x^* y^* z^*| \leqslant (1 + |x^*|)\varepsilon < 2\varepsilon.$$

Аналогично получим:

$$|(x^* \times y^*) \times z^* - x^* y^* z^*| \leqslant (1 + |z^*|)\varepsilon < 2\varepsilon.$$

Отсюда

$$|(x^* \times (y^* \times z^*) - (x^* \times y^*) \times z^*| \leqslant (2 + |x^*| + |z^*|)\varepsilon < 4\varepsilon.$$

Проводя те же рассуждения, что и в предыдущем случае, найдем:

$$|x^* \times (y^* \times z^*) - (x^* \times y^*) \times z^*| \leqslant 2\varepsilon.$$

И здесь нетрудно привести пример, когда такая разность достигается. Пусть $m = 3$ и нам нужно найти произведение $0{,}964 \cdot 0{,}836 \cdot 0{,}030$. При этом

$$0{,}964 \times 0{,}836 = 0{,}806$$

и

$$(0{,}964 \times 0{,}836) \times 0{,}030 = 0{,}024.$$

В то же время

$$0{,}836 \times 0{,}030 = 0{,}024$$

и

$$0{,}964 \times (0{,}836 \times 0{,}030) = 0{,}023.$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть нам требуется вычислить выражение

$$\frac{x^*}{y^* z^*}.$$

Будем предполагать, что x^*, y^* и z^* положительны и все операции возможно произвести на нашей машине. При вычислении этого выражения в различной последовательности получим разные результаты. Вычислим сначала $y^* \times z^*$ и затем найдем $x^* : (y^* \times z^*)$. При этом

$$\frac{x^*}{y^* z^*} - x^* : (y^* \times z^*) = \frac{x^*}{y^* z^*} - \frac{x^*}{y^* \times z^*} + \frac{x^*}{y^* \times z^*} - x^* : (y^* \times z^*) =$$

$$= \frac{x^*}{(y^* z^*)(y^* \times z^*)} [(y^* \times z^*) - (y^* z^*)] + \left[\frac{x^*}{y^* \times z^*} - x^* : (y^* \times z^*)\right].$$

Второй член правой части оценивается без труда:

$$\left|\frac{x^*}{y^* \times z^*} - x^* : (y^* \times z^*)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Оценим первый член, предполагая, что $y^* \times z^*$ мало, т. е. близко к 4ε. Для того чтобы было возможно произвести деление, придется потребовать, чтобы x^* было близко к 2ε. Так как

$$-\varepsilon \leqslant (y^* z^*) - (y^* \times z^*) < \varepsilon,$$

то $y^* z^*$ может быть близким к $4\varepsilon - \varepsilon = 3\varepsilon$ или $4\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon$. В первом случае оцениваемый член будет близок к

$$\frac{2\varepsilon}{3\varepsilon \cdot 4\varepsilon}[4\varepsilon - 3\varepsilon] = \frac{1}{6},$$

во втором — к

$$\frac{2\varepsilon}{5\varepsilon \cdot 4\varepsilon}[4\varepsilon - 5\varepsilon] = -\frac{1}{10}.$$

Точное частное при $x^* = 2\varepsilon$; $y^* z^* = 5\varepsilon$ будет $^2/_5$ и погрешность составляет около 25%.

Так как для некоторых значений x^*, y^*, z^* мы получили неудовлетворительный результат, то возьмем другую последовательность операций. Разделим сначала x^* на y^* и результат поделим на z^*. Оценим

$$\frac{x^*}{y^* z^*} - [(x^* : y^*) : z^*] = z^{*-1}\left[\frac{x^*}{y^*} - x^* : y^*\right] + \left[\frac{x^* : y^*}{z^*} - (x^* : y^*) : z^*\right].$$

Опять следует рассмотреть только первый член. Результат будет зависеть от того, что больше: y^* или z^*. Лучший результат получится при $z^* > y^*$. Это мы будем предполагать. Так как

$$y^* z^* > x^*$$

(иначе деление невозможно было бы выполнить на машине), то

$$z^* > \sqrt{x^*}.$$

Можно считать, что $x^* > 2\varepsilon$ и, следовательно,

$$z^* > \sqrt{2\varepsilon}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{x^*}{y^* x^*} - [(x^* : y^*) : z^*]\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + \varepsilon.$$

Этот результат лучше, чем предыдущий. Если $y^* z^*$ немало, то первый способ вычислений может оказаться лучше второго.

Приведенные здесь рассуждения относятся к конкретной машине, данные о которой приведены в начале параграфа, и являются примерными. До тех пор, пока не выработается стандарт в конструкции автоматических машин, необходимо производить аналогичный анализ для каждой машины в отдельности. Чтобы при этом не затрачивать чересчур много времени при разработке каждой частной программы, целесообразно провести его заранее для типичных вычислительных процессов.

§ 4. Полная погрешность

Мы уже говорили о том, что при решении математической задачи мы получаем приближенные результаты в силу различных причин: заданная нам задача заменяется другой, и в силу этого мы получаем ошибку — *погрешность метода*; числовые данные, с которыми производятся вычисления, неточны, и в силу этого измененная задача не может быть решена точно и возникает новая ошибка — *неустранимая погрешность*, и наконец, приближенные исходные данные будут подвергаться не тем операциям, которые требуются для измененной задачи, а псевдооперациям, так как мы вынуждены производить округления, и возникает третья ошибка — *погрешность округления*. Рассмотрим теперь, как будет складываться *полная погрешность* из отдельных погрешностей.

Пусть нам требуется решить задачу

$$y = A(x).$$

Для того чтобы эта задача могла быть численно решена, мы приводим ее к виду

$$\bar{y} = \bar{A}(\bar{x}).$$

Далее, благодаря неточности исходных данных и процессам округления мы фактически решим задачу

$$\bar{\bar{y}} = \bar{\bar{A}}(\bar{\bar{x}}).$$

Пусть для определенности, нам нужно по x найти y. Тогда

$$y - \bar{\bar{y}} = (y - \bar{y}) + (\bar{y} - \bar{\bar{y}}).$$

Первая из скобок справа и даст ошибку метода, вторая скобка определит влияние неустранимой погрешности и погрешности округления. Мы ее назовем *вычислительной погрешностью*. Таким образом, *полная погрешность является суммой погрешности метода и вычислительной погрешности.*

При анализе погрешности метода мы должны учитывать способ замены R на $\bar{R}$ и замены A на $\bar{A}$. При анализе вычислительной погрешности мы должны глубже учесть структуру функций $\bar{A}$ и $\bar{\bar{A}}$. Действительно, как это мы видели в предыдущем параграфе, величина погрешности округления существенно зависит от последовательности операций, производимых над числами. Поэтому мы будем рассматривать вычислительную погрешность лишь в том случае, когда над двумя приближенными числами производится одна операция. Пусть x и y — те числа, над которыми должна быть произведена некоторая операция ω. Фактически мы будем производить операцию не над ними, а над некоторыми приближениями к ним x^* и y^*. Кроме того, в действительности вследствие ошибок округления мы произведем не операцию ω, а другую операцию ω^*. Таким образом, вместо $x\omega y$ мы получим $x^*\omega^* y^*$. Но

$$x\omega y - x^*\omega^* y^* = (x\omega y - x^*\omega y^*) + (x^*\omega y^* - x^*\omega^* y^*).$$

Первая скобка в правой части в этом случае даст неустранимую погрешность одного шага программы, а вторая — погрешность округления. Таким образом, на одном шаге вычислительного процесса *вычислительная погрешность будет складываться из неустранимой погрешности и погрешности округления.*

При составлении программы желательно процесс вести так, чтобы одни погрешности компенсировали другие. Правда, часто это связано с большими затратами труда и времени на составление программы. Однако некоторые программы используются очень часто и следует хотя бы один раз произвести для них полный анализ погрешностей.

§ 5. Понятие о статистических методах оценки погрешностей

Пользуясь результатами предыдущих параграфов, мы можем получить оценку максимально возможных погрешностей. Однако на практике они далеко не всегда достигаются. Приведем следующий пример. Было произведено 440 опытов. В каждом опыте складывались 20 логарифмов, взятых с пятью десятичными знаками. Затем были найдены абсолютные погрешности каждого суммирования путем сложения тех же логарифмов с семью десятичными знаками. При этом оказалось, что эти погрешности распределены следующим образом:

Погрешности в единицах седьмого знака	Число случаев в %
От 0 до 100,5	65
» 100,5 » 200,5	28
» 200,5 » 300,5	6
» 300,5 » 400,5	1
» 400,5 » 1000	0

Если оценивать результаты на основании предыдущих результатов, то мы могли бы сказать лишь, что предельная абсолютная погрешность не превышает 1000 единиц седьмого знака. Для того чтобы было легче понять, в чем здесь дело, представим себе следующую условную картину. Складываются два числа, предельная абсолютная погрешность каждого из которых равна 5 каких-то единиц. Допустим, что абсолютная погрешность каждого из слагаемых может принимать только одно из следующих значений:

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5.$$

Предположим, кроме того, что появление каждого из этих значений одинаково вероятно, т. е. ни одно из них не имеет преимуществ перед другими. Предельная абсолютная погрешность суммы двух таких чисел будет равна 10, а абсолютная погрешность ее может принимать одно из следующих значений:

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5,\ \pm 6,\ \pm 7,\ \pm 8,\ \pm 9,\ \pm 10.$$

Абсолютная погрешность суммы, равная 0, получится, когда погрешность первого слагаемого принимает одно из написанных выше значений, а погрешность второго — равное по абсолютной величине, но противоположное по знаку значение. Всего таких комбинаций будет 11. Абсолютная погрешность суммы примет значение 1, когда погрешности первого и второго слагаемых примут следующие значения: —4 и 5; —3 и 4; —2 и 3; ...; 5 и —4. Всего таких

комбинаций 10. Произведя такие подсчеты для всех возможных случаев, получим следующую картину:

Погрешность	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число комбинаций	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Для отрицательных погрешностей картина будет симметрична. Мы видим, что число комбинаций, когда погрешность близка к максимальной, очень незначительно. Это будет еще более заметно при сложении трех и большего числа слагаемых. При этом непосредственный подсчет числа комбинаций будет затруднительным, и мы произведем его обходным путем.

Будем решать следующую задачу: рассматривается сумма

$$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

причем каждое слагаемое может независимо от других принимать все целочисленные значения от $-m$ до $+m$. Сколько возможно различных комбинаций значений x_i, при которых сумма принимает данное значение k? Две комбинации значений x_i считаются различными, если они отличаются хотя бы одним значением x.

Рассмотрим одночлены

$$t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \ldots t_n^{\alpha_n},$$

где t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — какие-то параметры и α_i независимо друг от друга пробегают все целочисленные значения от $-m$ до m. Сумма всех таких одночленов может быть записана в виде

$$\sum t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \ldots t_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{n} \left(t_k^{-m} + t_k^{-1} + \ldots + t_k^{-1} + t_k^0 + t_k + \ldots + t_k^m\right).$$

Положим в обеих частях равенства $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t$. Это даст

$$\sum_{k=-mn}^{mn} A_k t^k = \left(t^{-m} + t^{-(m-1)} + \ldots + t^{-1} + 1 + t + \ldots + t^m\right)^n.$$

Коэффициент A_k и будет равен числу искомых комбинаций, так как он равен числу различных комбинаций α_i, при которых

$$k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Общее число всех возможных вообще комбинаций получится, если мы положим $t = 1$, т. е. оно равно

$$B = (2m + 1)^n.$$

При больших значениях m и n это очень большое число. Поэтому удобно разыскивать не сами A_k, а отношение

$$P_k = \frac{A_k}{B}.$$

Выражение $\left(\sum_{k=-m}^{m} t^k\right)^n$ можно записать в виде

$$\left(\sum_{k=-m}^{m} t^k\right)^n = \frac{t^{-mn}(1-t^{2m+1})^n}{(1-t)^n} =$$

$$= t^{-mn}\left[1 - nt^{2m+1} + \frac{n(n-1)}{2} t^{4m+2} + \ldots\right]\left[1 + nt + \frac{n(n+1)}{2!} t^2 + \ldots\right].$$

Таким образом, нам нужно подсчитывать коэффициенты произведения многочлена и бесконечного ряда. Так как и здесь будет наблюдаться симметрия, то фактически придется искать коэффициенты выражения

$$\left[1 - nt^{2m+1} + \frac{n(n-1)}{2!} t^{4m+2} + \ldots\right]\left[1 + nt + \frac{n(n+1)}{2!} t^2 + \ldots\right]$$

до t^{mn}.

Пусть, например, складываются три слагаемых, погрешности которых могут принимать с одинаковой вероятностью любое целочисленное значение от -5 до $+5$. Предыдущее разложение в данном случае примет вид

$$\frac{(1-t^{11})^3}{(1-t)^3} = [1 - 3t^{11} + 3t^{22} - t^{33}] \times$$

$$\times\left[1 + 3t + 6t^2 + 10t^3 + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} t^n + \ldots\right] =$$

$$= 1 + 3t + 6t^2 + 10t^3 + 15t^4 + 21t^5 + 28t^6 + 36t^7 + 45t^8 + 55t^9 +$$

$$+ 66t^{10} + 75t^{11} + 82t^{12} + 87t^{13} + 90t^{14} + 91t^{15} + \ldots$$

Таким образом, мы получаем таблицу:

Погрешности	Число комбинаций	Погрешности	Число комбинаций
0	91	8	36
1	90	9	28
2	87	10	21
3	82	11	15
4	75	12	10
5	66	13	6
6	55	14	3
7	45	15	1

Погрешности, которым соответствует большое число комбинаций, будут чаще наблюдаться на практике.

При больших значениях n даже последний способ подсчета числа комбинаций очень громоздок. Поэтому приходится прибегать к различным приближенным формулам. Рассмотрим здесь одну из них. Прежде всего заметим, что коэффициет a_k при t^k ряда $F(t)$ по степеням t, сходящегося на границе единичного круга, может быть определен по формуле

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\varphi})\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi,$$

ибо

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\varphi})\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\varphi}\, d\varphi,$$

а

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\beta\varphi}\, d\varphi = \begin{cases} 2\pi & \text{при } \beta = 0, \\ 0 & \text{при целом } \beta \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому величина P_k, о которой говорилось выше, будет равна

$$P_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-(mn+k)\varphi i}\,[1 - e^{(2m+1)\,i\varphi}]^n}{(2m+1)^n\,(1 - e^{\varphi i})^n}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ik\varphi}\left[e^{-\frac{(2m+1)\,i\varphi}{2}} - e^{\frac{(2m+1)\,i\varphi}{2}}\right]^n}{(2m+1)^n \left(e^{-\frac{i\varphi}{2}} - e^{\frac{i\varphi}{2}}\right)^n}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ik\varphi}}{(2m+1)^n} \left[\frac{\sin\frac{2m+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\right]^n d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos k\varphi}{(2m+1)^n} \left(\frac{\sin\frac{2m+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)^n d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos k\varphi \left(\frac{\sin\frac{2m+1}{2}\varphi}{(2m+1)\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)^n d\varphi.$$

Можно показать, что при больших значениях n последний интеграл будет приближенно равен

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos k\varphi\, e^{-\frac{m(m+1)}{6} n\varphi^2}\, d\varphi.$$

Вычисление последнего интеграла приводит к формуле

$$P_k \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{6}{m(m+1)n}}\, e^{-\frac{3k^2}{2m(m+1)n}}.$$

Отсюда отношение числа комбинаций, для которых погрешности заключены в пределах $(-k, k)$, к числу всевозможных комбинаций будет приближенно равно

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{6}{m(m+1)n}} \sum_{j=-k}^{k} e^{-\frac{3j^2}{2m(m+1)n}}.$$

Обозначим

$$\frac{3j^2}{2m(m+1)n} = z^2.$$

Тогда последнюю сумму можно рассматривать как интегральную для

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-k\sqrt{\frac{3}{2m(m+1)n}}}^{k\sqrt{\frac{3}{2m(m+1)n}}} e^{-z^2}\,dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{k\sqrt{\frac{3}{2m(m+1)n}}} e^{-z^2}\,dz.$$

Для последнего интеграла составлены таблицы, которыми и можно воспользоваться в практических расчетах.

Применим наши выводы к примеру, приведенному в начале параграфа, — сложению 20 логарифмов. При этом получим:

Погрешности в единицах седьмого знака	Относительное число комбинаций в %
От 0 до 100,5	52,2
» 100,5 » 200,5	32,2
» 200,5 » 300,5	12,2
» 300,5 » 400,5	2,9
» 400,5 » 1000	0,5

Сравнение этой таблицы с таблицей, приведенной на стр. 59, показывает, что наши выводы близки к практическим результатам. Таким образом, видна необходимость наряду с оценкой предельных погрешностей находить возможности достижения отдельных погрешностей. Такой подход к оценкам погрешностей называют *статистическим* или *вероятностным*. Мы провели в этом параграфе вероятностную оценку погрешности для суммы n слагаемых. В более сложных случаях такая оценка потребует широкого привлечения теории вероятностей, а мы здесь не предполагаем

знакомства с этим разделом математики. Следует подчеркнуть еще, что хороший анализ погрешностей особенно важен для наиболее употребительных стандартных программ для электронных машин.

§ 6. Среднеквадратичные погрешности

1. Систематические и случайные ошибки. Мы начнем этот параграф с классификации ошибок, возникающих при измерении физических величин.

Когда говорят об измерении некоторой физической величины, то неявно предполагают, что данная физическая величина имеет вполне определенное числовое значение. Это предположение должно быть выполнено во всех тех измерениях, о которых будет идти речь в настоящем параграфе.

Опыт показывает, что в результате измерения мы получаем не точное значение измеряемой величины, а лишь приближенное, включающее некоторую ошибку. Появление ошибки может быть вызвано самыми различными причинами.

Инструмент, с помощью которого производят измерения, может быть недостаточно аккуратно выполнен. Например, деления измерительной линейки могут быть нанесены неточно. При этом в результате измерения всегда войдет ошибка, которую называют *инструментальной*.

Лицо, производящее измерения, имеет определенные навыки и определенные физические данные. Поэтому обычно при точных измерениях разные лица даже при одинаковых условиях получают разные результаты. Каждый результат обладает некоторой ошибкой, которую называют *личной*.

При некоторых измерениях мы можем не учесть каких-то физических факторов, существенно влияющих на результат измерения, и тем самым внести в результат ошибку. Такую ошибку мы совершили бы, например, если при определении широты места с помощью астрономических наблюдений забыли о преломлении луча при прохождении через атмосферу. Эти ошибки называют *теоретическими*.

Все указанные выше ошибки называют *систематическими*. В нужных случаях мы всегда сможем, хотя бы принципиально, либо исключить такие ошибки, либо сделать их как угодно малыми. Неисправный инструмент можно заменить исправным, личная ошибка может быть довольно точно определена и исключена, неучтенные физические факторы можно учесть с достаточно большой точностью. В данном параграфе мы предполагаем, что систематические ошибки отсутствуют.

Исключив систематические ошибки, мы еще не сделаем результаты измерения точными. Дело в том, что условия, при которых должен быть произведен опыт (температура, давление и т. п.), нельзя считать полностью стабильными и полностью совпадающими

с заданными условиями. Кроме того, при всяком опыте мы отвлекаемся от ряда физических факторов, влияние которых считаем ничтожным. Всякое изменение состояния этих факторов изменит результат на величину, которую мы не учитываем, а часто и не можем учесть. Так, при измерении широты мы не сможем полностью учесть состояния атмосферы в данный момент и в данном месте. Всякое изменение в состоянии атмосферы будет влиять на результат измерения. Все эти отклонения от заданных условий опыта вызовут появление ошибки в результате измерения. Эту ошибку называют *случайной*. Такое название оправдывается тем, что величина случайной ошибки определяется факторами, не управляемыми экспериментатором, и при разных обстоятельствах может быть различной.

Дадим теперь математическую характеристику случайной ошибки. Будем предполагать, что при измерении физической величины x мы можем получить результат, принадлежащий некоторому конечному или бесконечному множеству возможных результатов измерения. В дальнейшем для простоты рассуждений будем предполагать это множество конечным. Обозначим все возможные результаты измерения величины x через

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Эти возможные результаты измерения не всегда бывают равноценны в том смысле, что если производить измерения большое количество раз, то одни результаты будут появляться чаще, другие реже. В связи с этим мы будем предполагать, что каждому результату x_i можно сопоставить действительное число $q_i\left(0 \leqslant q_i \leqslant 1; \sum_{i=1}^{n} q_i = 1\right)$ — *вероятность появления* этого результата. Вероятность результата тем больше, чем чаще могут наблюдаться условия, при которых появляется данный результат. По терминологии теории вероятностей наши результаты измерения представляют собой *случайную величину*.

Выражение

$$\sum_{i=1}^{n} q_i x_i$$

в теории вероятностей называется *математическим ожиданием* случайной величины. В дальнейшем мы будем предполагать, что выполнено равенство

$$x = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i.$$

Это — математическая запись нашего предположения об отсутствии систематической ошибки.

2. Среднеквадратичные погрешности. Измерение физической величины обычно можно произвести различными способами и инструментами. При этом, вообще говоря, разным способам измерения будут соответствовать разные совокупности возможных результатов измерений или же одинаковые совокупности, но с различными вероятностями появления отдельных результатов. В связи с этим очень важно уметь давать количественную характеристику качества измерения. Для этого введем в рассмотрение величину

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} q_i (x - x_i)^2.$$

Корень квадратный из этой величины носит название *среднеквадратичной погрешности* измерения. Каждому измерению будем приписывать вес p, равный

$$p = \frac{K}{\sigma^2},$$

где K — величина, постоянная для всех способов измерения x. Чем больше вес, тем измерение считается лучше. В таком подходе к оценке качества измерения есть большая степень произвола. Но это и неизбежно в тех случаях, когда нам приходится вводить какие-то характеристики физических явлений.

До сих пор говорилось о вероятности появления отдельного значения случайной величины. В дальнейшем мы будем говорить также о вероятности принадлежности случайной величины к тому или иному множеству. Следует пояснить, что под этим будет пониматься. Условимся обозначать случайную величину одной буквой ξ. Символом $P(\xi \in S)$ будем обозначать вероятность того что случайная величина принадлежит множеству S. При этом, если

$$S = \{x_{i_1};\ x_{i_2};\ \ldots;\ x_{i_m}\},$$

то по определению

$$P(\xi \in S) = q_{i_1} + q_{i_2} + \ldots + q_{i_m}.$$

Нам будут полезны следующие две леммы:

Лемма 1. *Если случайная величина ξ принимает только неотрицательные значения, часть которых менее некоторой положительной величины α, то*

$$P(\xi < \alpha) > 1 - \frac{M(\xi)}{\alpha}.$$

Здесь через $M(\xi)$ обозначено математическое ожидание случайной величины ξ.

Положим для определенности, что $x_1, x_2, \ldots, x_k$ не превышают α и $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ превышают α. Математическое ожидание случайной величины ξ разобьем на две части:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{k} q_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} q_i x_i.$$

Так как все $x_i \geqslant 0$, то

$$M(\xi) \geqslant q_{k+1}x_{k+1} + q_{k+2}x_{k+2} + \ldots + q_n x_n >$$

$$> (q_{k+1} + q_{k+2} + \ldots + q_n)\alpha = [1 - (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)]\alpha.$$

Отсюда

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_k > 1 - \frac{M(\xi)}{\alpha},$$

и так как $q_1 + q_2 + \ldots + q_k = P(\xi \leqslant \alpha)$, то утверждение доказано.

Лемма 2. *Если a некоторое положительное число, то*

$$P(|\xi - M(\xi)| \leqslant a) > 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Для доказательства рассмотрим случайную величину $(\xi - M(\xi))^2$. На основании предыдущей леммы будем иметь:

$$P((\xi - M(\xi))^2 \leqslant a^2) = P(|\xi - M(\xi)| \leqslant a) > 1 - \frac{M((\xi - M(\xi))^2)}{a^2} =$$

$$= 1 - \frac{\sigma^2}{a^2},$$

что и требовалось доказать.

Из последней леммы следует, что чем меньше среднеквадратичная погрешность, тем меньше рассеяние значений случайной величины около ее математического ожидания.

Пусть теперь в последнем неравенстве $a = k\sigma$. Тогда получаем:

$$P(|\xi - M(\xi)| \leqslant k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2}.$$

В частности, при $k = 3$ будем иметь:

$$P(|\xi - M(\xi)| \leqslant 3\sigma) > 1 - \frac{1}{9} = 0{,}888\ldots$$

Это означает, что примерно в 90% случаев мы будем получать значения случайной величины, отличающиеся от математического ожидания не более чем на утроенную среднеквадратичную погрешность.

3. Обработка результатов по методу наименьших квадратов. Произведя несколько измерений некоторой физической величины x, мы получим несколько, вообще говоря, различных результатов:

$$x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}.$$

Каждый из этих результатов содержит какую-то случайную ошибку. По этим данным мы не можем найти точное значение измеряемой величины. Поэтому возникает задача: по $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ найти величину x^*, которую бы с наибольшим основанием можно было принять за приближенное значение x. В такой постановке задача еще очень неопределенна и решение ее может идти по самым различным направлениям. Мы коснемся здесь лишь одного подхода, основанного на минимизации среднеквадратичной погрешности.

Будем предполагать, что произведенные нами измерения были независимы. Это означает, что соответствующая каждому измерению совокупность возможных результатов измерения и вероятностей их появления не зависят от результатов других измерений.

Величину x^* будем искать в виде

$$x^* = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \ldots + \lambda_m x^{(m)}, \tag{1}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — некоторые постоянные, которые нам предстоит подобрать. Наряду с (1) будем рассматривать величины

$$x^*_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \lambda_1 x^{(1)}_{i_1} + \lambda_2 x^{(2)}_{i_2} + \ldots + \lambda_m x^{(m)}_{i_m}, \tag{2}$$

где $x^{(k)}_{i_k}$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) пробегает совокупность возможных результатов измерения при k-м измерении. Они будут играть роль возможных результатов измерения. Каждой из величин $x^*_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ припишем вероятность появления, равную $q^{(1)}_{i_1} q^{(2)}_{i_2} \ldots q^{(m)}_{i_m}$, где через $q^{(k)}_{i_k}$ обозначена вероятность появления $x^{(k)}_{i_k}$ при k-м измерении. Такое определение вероятности появления $x^*_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ есть следствие нашего предположения о независимости измерений.

Постоянные λ_k будем выбирать так, чтобы были выполнены следующие два условия:

1. Случайная величина $x^*_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ не должна иметь систематической ошибки, т. е. ее математическое ожидание должно равняться x.

2. Случайная величина $x^*_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ должна иметь наибольший возможный вес.

Как мы увидим, эти два условия определяют постоянные λ_k однозначно.

Прежде всего потребуем выполнения первого условия. Мы должны иметь:

$$x = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \ldots q_{i_m}^{(m)} \left(\lambda_1 x_{i_1}^{(1)} + \lambda_2 x_{i_2}^{(2)} + \ldots + \lambda_m x_{i_m}^{(m)}\right) =$$

$$= \lambda_1 \sum_{i_1} q_{i_1}^{(1)} x_{i_1}^{(1)} \sum_{i_2} q_{i_2}^{(2)} \ldots \sum_{i_m} q_{i_m}^{(m)} + \lambda_2 \sum_{i_1} q_{i_1}^{(1)} \sum_{i_2} q_{i_2}^{(2)} x_{i_2}^{(2)} \sum_{i_3} q_{i_3}^{(3)} \ldots$$

$$\ldots \sum_{i_m} q_{i_m}^{(m)} + \ldots + \lambda_m \sum_{i_1} q_{i_1}^{(1)} \ldots \sum_{i_{m-1}} q_{i_{m-1}}^{(m-1)} \sum_{i_m} q_{i_m}^{(m)} x_{i_m}^{(m)} =$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m)\, x,$$

так как

$$\sum_{i_k} q_{i_k}^{(k)} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i_k} q_{i_k}^{(k)} x_{i_k}^{(k)} = x.$$

Отсюда

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 1. \tag{3}$$

Будем теперь удовлетворять второму условию. Каждой разности

$$x - \left(\lambda_1 x_{i_1}^{(1)} + \lambda_2 x_{i_2}^{(2)} + \ldots + \lambda_m x_{i_m}^{(m)}\right) =$$

$$= \lambda_1 \left(x - x_{i_1}^{(1)}\right) + \lambda_2 \left(x - x_{i_2}^{(2)}\right) + \ldots + \lambda_m \left(x - x_{i_m}^{(m)}\right)$$

будет соответствовать вероятность появления

$$q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \ldots q_{i_m}^{(m)}.$$

Таким образом,

$$\sigma^2 = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \ldots q_{i_m}^{(m)} \left\{\lambda_1 \left(x - x_{i_1}^{(1)}\right) + \lambda_2 \left(x - x_{i_2}^{(2)}\right) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \lambda_m \left(x - x_{i_m}^{(m)}\right)\right\}^2 = \lambda_1^2 \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \ldots q_{i_m}^{(m)} \left(x - x_{i_1}^{(1)}\right)^2 +$$

$$+ \lambda_2^2 \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \ldots q_{i_m}^{(m)} \left(x - x_{i_2}^{(2)}\right)^2 + \ldots \lambda_m^2 \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \ldots$$

$$\ldots q_{i_m}^{(m)} \left(x - x_{i_m}^{(m)}\right)^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \ldots$$

$$\ldots q_{i_m}^{(m)} \left(x - x_{i_1}^{(1)}\right)\left(x - x_{i_2}^{(2)}\right) + \ldots$$

Но

$$\lambda_k \lambda_l \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \ldots q_{i_m}^{(m)} \left(x - x_{i_k}^{(k)}\right)\left(x - x_{i_l}^{(l)}\right) =$$

$$= \lambda_k \lambda_l \sum_{i_k} q_{i_k}^{(k)} \left(x - x_{i_k}^{(k)}\right) \sum_{i_l} q_{i_l}^{(l)} \left(x - x_{i_l}^{(l)}\right) \prod_{j \neq k,\, l} \sum_{i_j} q_{i_j}^{(j)} = 0,$$

так как

$$\sum_{i_k} q_{i_k}^{(k)} \left(x - x_{i_k}^{k}\right) = x - \sum_{i_k} q_{i_k}^{(k)} x_{i_k}^{(k)} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Далее,

$$\lambda_k^2 \sum_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \dots q_{i_m}^{(m)} \left(x - x_{i_k}^{(k)}\right)^2 =$$

$$= \lambda_k^2 \sum_{i_k} q_{i_k} \left(x - x_{i_k}^{(k)}\right)^2 = \lambda_k^2 \sigma_k^2 = \frac{K\lambda_k^2}{p_k},$$

где σ_k — среднеквадратичная погрешность и p_k — вес k-го измерения. Следовательно,

$$\sigma^2 = \frac{K}{p} = K\left[\frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_1} + \dots + \frac{\lambda_m^2}{p_m}\right].$$

Таким образом, чтобы удовлетворить второму требованию, мы должны подобрать λ_k так, чтобы выполнялось условие (3) и обращалось в минимум выражение

$$\frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \dots + \frac{\lambda_m^2}{p_m}. \tag{4}$$

Это — задача на условный экстремум. Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, будем разыскивать безусловный экстремум функции

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \dots + \frac{\lambda_m^2}{p_m} - \alpha(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m),$$

где α — некоторая постоянная. Приравнивая нулю частные производные по λ_k, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_k} = \frac{2\lambda_k}{p_k} - \alpha = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\lambda_1}{p_1} = \frac{\lambda_2}{p_2} = \dots = \frac{\lambda_m}{p_m} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m} = \frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_m}$$

и

$$\lambda_k = \frac{p_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k}.$$

Таким образом,

$$x^* = \frac{p_1 x^{(1)} + p_2 x^{(2)} + \dots + p_m x^{(m)}}{p_1 + p_2 + \dots + p_m}.$$

Вес этого результата будет равен

$$p = \frac{1}{\frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \dots + \frac{\lambda_m^2}{p_m}} = p_1 + p_2 + \dots + p_m.$$

Итак, постоянные λ_k найдены. Выражение (5) можно получить, если отыскивать значение ξ, дающее минимум функции

$$\varphi(\xi) = \sum_k p_k (x^{(k)} - \xi)^2.$$

Поэтому и говорят, что x^* находится по $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(m)}$ *методом наименьших квадратов.*

Чтобы вычислить среднеквадратичную погрешность величины x^*, нам нужно еще найти K. Для этого образуем случайную величину

$$\xi_{i_1 i_2 \dots i_m} = \frac{p_1 x_{i_1}^{(1)} + p_2 x_{i_2}^{(1)} + \dots + p_m x_{i_m}^{(m)}}{p_1 + p_2 + \dots + p_m}$$

и вычислим

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \dots q_{i_m}^{(m)} \left[\sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - \xi_{i_1 i_2 \dots i_m} \right)^2 \right].$$

Заметим, что внутреннее суммирование идет по индексу k. Используем следующие очевидные равенства:

$$\sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - x \right) = \left(\xi_{i_1 i_2 \dots i_m} - x \right) \sum_k p_k; \qquad \sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - \xi_{i_1 i_2 \dots i_m} \right) = 0.$$

Сначала преобразуем внутреннюю сумму. Ради краткости записи, мы опускаем индексы у $\xi_{i_1 i_2 \dots i_m}$. Будем иметь:

$$\begin{aligned}
\sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - \xi \right)^2 &= \sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - \xi \right) \left(x_{i_k}^{(k)} - x - \xi + x \right) = \\
&= \sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - \xi \right) \left(x_{i_k}^{(k)} - x \right) - (\xi - x) \sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - \xi \right) = \\
&= \sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - x - \xi + x \right) \left(x_{i_k}^{(k)} - x \right) = \\
&= \sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - x \right)^2 - (\xi - x) \sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - x \right) = \\
&= \sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - x \right)^2 - (\xi - x)^2 \sum_k p_k.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} q_{i_m}^{(m)} \left[\sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - \xi \right)^2 \right] = \\
&= \sum_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \dots q_{i_m}^{(m)} \left[\sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - x \right)^2 \right] - \\
&\qquad - \sum_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \dots q_{i_m}^{(m)} \left[(\xi - x)^2 \sum_k p_k \right].
\end{aligned}$$

Но

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \dots q_{i_m}^{(m)} \left[\sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - x \right)^2 \right] =$$

$$= \sum_k p_k \left\{ \sum_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \dots q_{i_m}^{(m)} \left(x_{i_k}^{(k)} - x \right)^2 \right\} = \sum_k p_k \frac{K}{p_k} = mK$$

и

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \dots q_{i_m}^{(m)} \left[(\xi - x)^2 \sum_k p_k \right] =$$

$$= \sum_k p_k \sum_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \dots q_{i_m}^{(m)} (\xi - x)^2 = \sum_k p_k \frac{K}{\sum p_k} = K.$$

Таким образом,

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{i_1}^{(1)} q_{i_2}^{(2)} \dots q_{i_m}^{(m)} \left[\sum_k p_k \left(x_{i_k}^{(k)} - \xi \right)^2 \right] = mK - K = (m-1)K.$$

Отсюда можно найти K, если мы знаем все возможные результаты измерения и вероятности их появления. Практически это обычно бывает неизвестно. Тогда в качестве приближенного значения для K берут

$$K \approx \frac{\sum_k p_k (x^{(k)} - x^*)^2}{m-1}.$$

При этом

$$\sigma^2 \approx \frac{\sum_k p_k (x^{(k)} - x^*)^2}{(m-1)\sum_k p_k}.$$

Если веса измерений будут одинаковы, как, например, при измерениях одним инструментом в примерно одинаковых условиях, то последняя формула примет вид

$$\sigma^2 \approx \frac{\sum_k (x^{(k)} - x^*)^2}{m(m-1)}.$$

В качестве x^* в данном случае нужно взять

$$x^* = \frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(m)}}{m}.$$

4. Среднеквадратичная погрешность функции. Проследим теперь, как преобразуются среднеквадратичные погрешности при производстве математических операций. Величины, над которыми производятся операции, будем предполагать независимыми в том смысле, как это указывалось ранее.

Начнем с операции сложения. Пусть

$$z = x + y,$$

где x и y подвержены некоторым случайным ошибкам. Через x^* и y^* будем обозначать фактически полученные нами значения x и y, через x_i и y_i — возможные результаты, а через q_i' и q_j'' — вероятности их появления. Тогда

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i,j} q_i' q_j'' [(x - x_i) + (y - y_j)]^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i,j} q_i' q_j'' (x - x_i)^2 + 2\sum_{i,j} q_i' q_j'' (x - x_i)(y - y_j) + \sum_{i,j} q_i' q_j'' (y - y_j)^2}.$$

Как и прежде, найдем:

$$\sum_{i,j} q_i' q_j'' (x - x_i)^2 = \sigma_x^2; \quad \sum_{i,j} q_i' q_j'' (x - x_i)(y - y_j) = 0;$$

$$\sum_{i,j} q_i' q_j'' (y - y_j)^2 = \sigma_y^2.$$

Итак,

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Аналогичный результат получится и для n слагаемых. Если

$$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

то

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2}.$$

В частности, если $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \ldots = \sigma_{x_n} = \sigma_x$, то

$$\sigma_y = \sigma_x \sqrt{n}.$$

Таким образом, среднеквадратичная погрешность суммы пропорциональна не числу слагаемых, как предельная абсолютная погрешность, а корню квадратному из числа слагаемых.

Рассмотрим теперь линейную функцию

$$y = Cx,$$

где C — точная величина. Тогда

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_i q_i C^2 (x - x_i)^2} = |C| \sqrt{\sum_i q_i (x - x_i)^2} = |C| \sigma_x.$$

Из последних двух результатов следует, что среднеквадратичная погрешность функции

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$$

будет равна

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_i C_i^2 \sigma_{x_i}^2}.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$z = f(x, y),$$

причем о $f(x, y)$ будем делать те же предположения, что и при изучении абсолютной и относительной погрешности. Тогда

$$\alpha_{z^*} = f(x, y) - f(x^*, y^*) = f'_x(\xi, \eta)\,\alpha_{x^*} + f'_y(\xi, \eta)\,\alpha_{y^*}.$$

В силу малости погрешностей можно положить

$$\alpha_{z^*} = f'_x(x^*, y^*)\,\alpha_{x^*} + f'_y(x^*, y^*)\,\alpha_{y^*}.$$

Мы получили линейную функцию. Воспользовавшись предыдущим, получаем:

$$\sigma_{z^*} = \sqrt{[f_x(x^*, y^*)]^2 \sigma_{x^*}^2 + [f'_y(x^*, y^*)]^2 \cdot \sigma_{y^*}^2}.$$

Аналогично для функции

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

будем иметь:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [f'_{x_i}(x^*)]^2 \sigma_{x_i}^2}$$

Применим эту формулу к произведению n величин

$$y = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

При этом получим:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y^*}{x_i^*}\right)^2 \sigma_{x_i}^2}.$$

Обозначим

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{|x|}$$

и будем называть это отношение *относительной среднеквадратичной погрешностью*. Тогда последняя формула примет вид

$$\varepsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{x_i}^2}.$$

В частности, если $\varepsilon_{x_1} = \varepsilon_{x_2} = \ldots = \varepsilon_{x_n} = \varepsilon_x$, то

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x \sqrt{n}.$$

5. Среднеквадратичная погрешность равномерно распределенной величины. Пусть известно, что приближенная величина x^* имеет предельную абсолютную погрешность A_{x^*}. При этом, вообще говоря,

ошибка может принимать любое значение между $-A_{x^*}$ и $+A_{x^*}$. Мы будем считать все эти значения одинаково возможными. Чтобы сделать множество возможных значений конечным, будем сначала предполагать, что ошибка может с одинаковой вероятностью принимать значения

$$-n\delta,\ -(n-1)\delta,\ \ldots,\ -\delta,\ 0,\ \delta,\ 2\delta,\ \ldots,\ (n-1)\delta,\ n\delta,$$

где $\delta = \frac{A_{x^*}}{n}$. Тогда среднеквадратичная погрешность будет равна

$$\sigma_{x^*} = \delta \sqrt{\frac{2(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{2n+1}}.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

и, следовательно,

$$\sigma_{x^*} = \sqrt{\frac{\delta^2 n(n+1)}{3}} = \sqrt{\frac{A_{x^*}^2 (n+1)}{3n}}.$$

Чтобы точнее отобразить наше предположение о том, что ошибка может принимать произвольное значение между $-A_{x^*}$ и A_{x^*}, мы должны увеличивать n. В пределе получим:

$$\sigma_{x^*} = \frac{A_{x^*}}{\sqrt{3}}.$$

Как следует из результатов предыдущего пункта, среднеквадратичная погрешность суммы n слагаемых, обладающих предельной абсолютной погрешностью A, будет равна

$$\sigma = A\sqrt{\frac{n}{3}}.$$

Иногда уславливаются при сложении n приближенных чисел ($n > 3$) с близкими среднеквадратичными погрешностями считать предельную абсолютную погрешность суммы равной

$$A' = 3\sigma.$$

Некоторым оправданием этого служит лемма 2 настоящего параграфа. Для примера суммы 20 слагаемых, приведенного в предыдущем параграфе, мы будем иметь:

$$A' = 390,$$

что довольно хорошо отражает реальное положение вещей. И в случае вычисления произвольной функции n переменных с достаточно большими основаниями можно заменять предельную абсолютную погрешность утроенной среднеквадратичной погрешностью.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Записать число e с тремя значащими верными цифрами и определить предельную абсолютную и относительную ошибки числа.

2. Сторона квадрата приблизительно 1 *м*. С какой точностью ее надо измерить, чтобы погрешность площади была не больше 1 $см^2$?

3. Длина периметра правильного вписанного 96-угольника, которым пользовался Архимед при вычислении π, выражается при $r = 1$ формулой

$$p = 96\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

Если вычислять непосредственно по этой формуле, желая получить π с точностью до 0,001, то с какой точностью нужно производить вычисления подкоренных величин?

4. Корни уравнения $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ нужно получить с четырьмя верными знаками. С каким числом знаков надо взять свободный член уравнения?

5. При измерении длины пролета строящегося моста на одном берегу отложена базисная линия, равная $200 \pm 0{,}01$ *м*. Измерены углы между базисом и направлением из концов его на точку за рекой. Они оказались $90° \pm 1°$ и $60° \pm 1°$. С какой точностью можно определить по этим данным длину моста?

6. В пятизначных логарифмических таблицах даны десятичные логарифмы чисел с точностью до $0{,}5 \cdot 10^{-6}$. Как велика может быть погрешность при нахождении числа по логарифму, если число заключено между 300 и 400?

7. Тот же вопрос в применении к таблице логарифмов синусов и логарифмов тангенсов, если угол около 45°.

8. Если $f(x) = 1 - \frac{x^2}{a}$, то итерация

$$x_{i+1} = x_i\left[1 + \frac{f(x_i)}{2}\right]$$

сходится к квадратному корню из a. Построить программу, основанную на этой итерации, для машины с такими данными, как было описано в § 3 этой главы и проанализировать погрешности

9. По образцу § 5 провести анализ распределения погрешностей при возведении x в степень n, если $x = 10$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, изд. 6, 1954.
2. Я. С. Безикович, Приближенные вычисления, изд. 6, Гостехиздат, 1949.
3. Хаусхолдер, Основы численного анализа, ИЛ, 1956.
4. А. А. Марков, Исчисление вероятностей, Москва, 1924.
5. Н. И. Идельсон, Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений, Геодезиздат, 1947.
6. Б. М. Щиголев, Математическая обработка наблюдений, Физматгиз, 1960.

ГЛАВА 2

ТЕОРИЯ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Постановка задачи

В вычислительной практике часто приходится иметь дело с функциями $f(x)$, заданными таблицами их значений для некоторого конечного множества значений x: $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.

В процессе же решения задачи необходимо использовать значения $f(x)$ для промежуточных значений аргумента. В этом случае строят функцию $\varphi(x)$, достаточно простую для вычислений, которая в заданных точках x_0, x_1, ..., x_n принимает значения $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$, а в остальных точках отрезка (a, b), принадлежащего области определения $f(x)$, приближенно представляет функцию $f(x)$ с той или иной степенью точности, и при решении задачи вместо функции $f(x)$ оперируют с функцией $\varphi(x)$. Задача построения такой функции $\varphi(x)$ называется *задачей интерполирования*. Чаще всего интерполирующую функцию $\varphi(x)$ отыскивают в виде алгебраического многочлена. Такой способ приближения имеет в своей основе гипотезу, что на небольших отрезках изменения x функция $f(x)$ может быть достаточно хорошо приближена с помощью параболы некоторого порядка, аналитическим выражением которой и будет алгебраический многочлен.

К интерполированию приходится иногда прибегать и в том случае, когда для функции $f(x)$ известно и аналитическое представление, с помощью которого можно вычислять ее значения для любого значения x из отрезка $[a, b]$, в котором она определена, но вычисление каждого значения сопряжено с большим объемом вычислений. Если в процессе решения задачи необходимо находить значения функции $f(x)$ для очень большого количества значений аргумента, то прямой способ потребовал бы громадной вычислительной работы. В этом случае для уменьшения объема вычислений прибегают к интерполированию, т. е. вычисляют несколько значений $f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и по ним строят простую интерполирующую функцию $\varphi(x)$, с помощью которой и вычисляют приближенные значения $f(x)$ в остальных точках.

В настоящей главе и будут рассмотрены способы построения интерполирующих функций, приведены оценки точности приближения с их помощью, а также будут изложены некоторые приложения теории интерполирования.

Прежде чем перейти к изложению этих вопросов, приведем более точную и общую постановку задачи интерполирования и некоторые необходимые понятия.

1. Линейные множества. Линейно независимые системы элементов. Множество M элементов $x, y, z, \ldots$ называется *линейным*, если в нем определены операция сложения, обозначаемая знаком «$+$», и умножения на числа (действительные или комплексные), не выводящие за пределы M и удовлетворяющие следующим условиям:

1. Сложение ассоциативно, т. е. $(x+y)+z=x+(y+z)$.
2. Существует нулевой элемент 0 такой, что $x+0=0+x=x$ при любом $x \in M$.
3. Для всякого x существует элемент, обозначаемый $-x$, такой, что $x+(-x)=0$.
4. Сложение коммутативно: $x+y=y+x$.
5. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.
6. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.
7. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$.
8. $1 \cdot x=x$.

Здесь латинскими буквами обозначены элементы M, а греческими — числа. Из первых трех аксиом вытекает единственность нулевого элемента, единственность обратного элемента $-x$ и правило, что если $x+z=y+z$ или $z+x=z+y$, то $x=y$. Используя условия 5, 8 и 2, можно доказать, что $(-1)x=-x$ и $0 \cdot x=0$ при любом x. Мы не будем это доказывать, предоставив возможность провести доказательства самому читателю.

В качестве примера возьмем множество R всех действительных функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Если сложение функций и умножение их на действительные числа осуществлять обычным образом, как это делается в анализе, то R будет линейным множеством.

В линейном множестве можно ввести *понятие линейной зависимости и линейной независимости элементов.* Совокупность элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного множества M называется линейно зависимой, если найдется такая система чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, не равных одновременно нулю, что

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n=0.$$

Если таких чисел c_i подобрать нельзя, то совокупность элементов x_i называется *линейно независимой.*

2. Задача интерполирования. Выберем в пространстве R действительных функций, определенных на $[a, b]$, конечную или счетную совокупность $\{\varphi_i\}$ его элементов, причем будем предполагать, что

любая конечная система этих элементов линейно независима. На практике чаще всего в качестве $\{\varphi_i\}$ берется последовательность степеней $x: 1, x, x^2, x^3, \ldots$; последовательность тригонометрических функций: $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$ или последовательность показательных функций: $1, e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots$, где $\{\alpha_i\}$ — некоторая числовая последовательность. Возьмем первые $n+1$ элементов $\{\varphi_i\}$ и образуем всевозможные линейные комбинации

$$a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$$

с действительными коэффициентами a_i. Каждая такая линейная комбинация принадлежит R. Множество всех линейных комбинаций, очевидно, само является линейным. Его обозначим через $\bar{R}_n$.

Имея R и $\bar{R}_n$, мы должны решить, каким образом произвольной функции из R ставить в соответствие функцию из $\bar{R}_n$. В разных случаях поступают по-разному. В теории интерполирования это делается так: выбирают некоторую конечную совокупность точек $x_0, x_1, \ldots, x_m$ $(x_i \neq x_j \ i \neq j)$, принадлежащих $[a, b]$, и для какой-либо функции $f \in R$ подбирают $\varphi \in \bar{R}$ так, чтобы в выбранных нами точках значения f и φ совпадали. Иными словами, находятся постоянные a_i так, чтобы имели место равенства

$$f(x_j) = a_0\varphi_0(x_j) + a_1\varphi_1(x_j) + \ldots + a_n\varphi_n(x_j) \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

и в качестве функции φ берут

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

с этими значениями a_i. Точки x_j называют *узлами интерполирования*. Если f и φ дифференцируемые функции, то иногда, кроме того, требуют совпадения производных в точках x_j или каких-либо других. При соответствующих условиях можно требовать совпадения производных высших порядков.

3. Построение интерполирующей функции. Займемся сначала простейшей задачей. Для определения коэффициентов a_i мы имеем систему $m+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными. Матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \ldots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix}.$$

Если мы хотим, чтобы коэффициенты a_i можно было подобрать для любой функции f, то нужно потребовать, чтобы ранг этой матрицы был равен $m+1$. В противном случае между значениями $f(x_j)$

должна была бы существовать определенная линейная зависимость. При этом n будет больше или равно m. Далее, чтобы решение этой задачи было однозначным, надо потребовать, чтобы $m = n$. Итак, будем предполагать, что $m = n$ и определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда при любых $f(x_j)$ система будет иметь решение и притом единственное. Выражение для a_i можно представить в виде

$$a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{1}$$

где Δ_i получается из Δ путем замены i-го столбца столбцом $f(x_j)$. Итак, функции $f \in R$ будет соответствовать функция $\varphi \in \bar{R}$, имеющая вид

$$\varphi = \frac{\Delta_0}{\Delta}\varphi_0(x) + \frac{\Delta_1}{\Delta}\varphi_1(x) + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta}\varphi_n(x). \tag{2}$$

Функцию φ можно записать в другой форме. Для этого разложим определитель Δ_i по элементам i-го столбца. Получим:

$$a_i = \frac{\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,\Delta_{ij}}{\Delta}. \tag{3}$$

Здесь Δ_{ij} — соответствующие алгебраические дополнения. Подставляя эти выражения в φ и собирая вместе члены с одинаковыми $f(x_j)$, будем иметь:

$$\varphi(x) = f(x_0)\,\Phi_0(x) + f(x_1)\,\Phi_1(x) + \dots + f(x_n)\,\Phi_n(x). \tag{4}$$

Функции $\Phi_i(x)$ являются линейными комбинациями функций $\varphi_i(x)$. Они не зависят от функции f и целиком определяются функциями $\varphi_i(x)$ и узлами интерполирования. Заметим, что при любой функции $f(x)$, т. е. при любой системе значений $f(x_j)$, должны выполняться равенства

$$f(x_j) = f(x_0)\,\Phi_0(x_j) + f(x_1)\,\Phi_1(x_j) + \dots + f(x_n)\,\Phi_n(x_j) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n). \tag{5}$$

Отсюда следует, что функции $\Phi_i(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases} \tag{6}$$

4. Системы Чебышева. Проанализируем теперь вопрос о том, какие нужно наложить условия на $\{\varphi_i(x)\}$ для того, чтобы определитель Δ не обращался в нуль. Для целей интерполирования важно использовать одну и ту же систему функций $\{\varphi_i(x)\}$ при различных совокупностях точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Поэтому будем отыскивать условия того, что Δ не обращается в нуль ни при какой системе чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$, $x_i \in [a, b]$. Линейной независимости функций уже становится недостаточно, хотя это условие и является необходимым. Так, например, функции 1 и $\sin x$ линейно независимы, но если взять $x_2 = \pi - x_1$, то определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin x_1 \\ 1 & \sin x_2 \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Если Δ равняется нулю для какой-то системы чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то это означает, что существуют такие постоянные $c_0, c_1, \ldots, c_n$, не все равные нулю, для которых

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$$

обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, нам надо наложить такие ограничения на $\{\varphi_i(x)\}$, при выполнении которых мы могли бы быть уверенными, что никакая линейная комбинация

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$$

не может иметь $n+1$ различных корней на $[a, b]$. Системы функций, обладающие этим свойством, будем называть *системами Чебышева*.

Наложим на функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ следующие ограничения: 1) $\varphi_i(x)$ дифференцируемы до порядка $n+1$ на $[a, b]$ и 2) все вронскианы

$$W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k] = \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_k(x) \\ \varphi_0'(x) & \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_k'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_0^{(k)}(x) & \varphi_1^{(k)}(x) & \ldots & \varphi_k^{(k)}(x) \end{vmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

отличны от нуля на $[a, b]$. Докажем следующее обобщение теоремы Ролля:

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ есть $n+1$ раз дифференцируемая функция на $[a, b]$ и имеет на этом промежутке $n+2$ корней. Тогда на $[a, b]$ найдется такая точка ξ, что*

$$L_{n+1}[f] = \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, f]}{W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]}$$

обращается в нуль в точке ξ.

Доказательство. Наряду с $L_{n+1}[f]$ будем рассматривать $L_{k+1}[\varphi(x)]$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$, определяемые равенствами

$$L_{k+1}[\varphi] = \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \varphi]}{W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k]}.$$

Здесь φ — произвольная $k+1$ раз дифференцируемая на $[a, b]$ функция. Покажем, что можно найти такие функции $b_0(x)$, $b_1(x)$, ..., $b_n(x)$, что

$$L_{k+1}[\varphi] = \frac{d}{dx} L_k[\varphi] - b_k(x) L_k[\varphi].$$

Действительно, $L_{k+1}[\varphi]$ — линейный дифференциальный оператор порядка $k+1$ с коэффициентом при старшей производной, равным единице. Далее,

$$L_{k+1}[\varphi_j] = 0 \qquad (j=0, 1, 2, \ldots, k).$$

Таким образом, функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_k(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L_{k+1}[\varphi]=0$. Оператор

$$\frac{d}{dx} L_k[\varphi] - b_k(x) L_k[\varphi] =$$

$$= \frac{W[\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}] \frac{d}{dx} W[\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi]}{W^2[\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}]} -$$

$$- \frac{W[\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi] \frac{d}{dx} W[\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}]}{W^2[\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}]} - b_k(x) L_k[\varphi]$$

— также линейный дифференциальный оператор порядка $k+1$ с коэффициентом при старшей производной, равным единице:

$$\frac{d}{dx} L_k[\varphi_j] - b_k(x) L_k[\varphi_j] \equiv 0 \qquad (j=0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

Определим $b_k(x)$ так, чтобы

$$\frac{d}{dx} L_k[\varphi_k] - b_k(x) L_k[\varphi_k] \equiv 0.$$

Для этого достаточно положить

$$b_k(x) = \frac{\frac{d}{dx} L_k[\varphi_k]}{L_k[\varphi_k]}.$$

Так как $L_k[\varphi_k]$ не обращается в нуль, то $b_k(x)$ будет непрерывная функция. Определив так $b_k(x)$, мы получим, что система $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_k(x)$ будет фундаментальной системой решений для уравнения

$$\frac{d}{dx} L_k[\varphi] - b_k(x) L_k[\varphi] = 0,$$

это означает, что

$$L_{k+1}[\varphi] \equiv \frac{d}{dx} L_k[\varphi] - b_k(x) L_k[\varphi].$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\psi_1(x) = f(x) e^{-\int_a^x b_0(x)\,dx}$$

Ее производная имеет вид

$$\psi_1'(x) = [f'(x) - b_0(x) f(x)] e^{-\int_a^x b_0(x)\,dx} = L_1[f(x)] e^{-\int_a^x b_0(x)\,dx};$$

$\psi_1(x)$, как и $f(x)$, обращается в нуль на $[a, b]$ $n+2$ раз. Следовательно, $\psi_1'(x)$, а поэтому и $L_1[f(x)]$ обращается на $[a, b]$ в нуль по крайней мере $n+1$ раз.

Далее, вводим функцию

$$\psi_2(x) = L_1[f(x)] e^{-\int_a^x b_1(x)\,dx}.$$

Проводя те же самые рассуждения, получим, что $L_2[f]$ обращается в нуль по крайней мере n раз. Продолжая этот процесс, получим, в конце концов, что найдется по крайней мере одна точка $\xi \in [a, b]$, для которой

$$L_{n+1}[f(\xi)] = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если* $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ $(n+1)$ *раз дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$ *и* $W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k] \neq 0$ *на* $[a, b]$ *при всех* $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, *то функции* $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ *образуют систему Чебышева.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда найдется такая линейная комбинация

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$$
$$(c_i\text{— действ., } c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2 \neq 0),$$

которая обращается в нуль по крайней мере в $n+1$ различных точках отрезка $[a, b]$. Тогда по только что доказанной теореме $L_n[f]$ обязана обращаться в нуль по крайней мере в одной точке $\xi \in [a, b]$. Но

$$L_n[f] = \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} f]}{W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}]} = c_n \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]}{W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}]}.$$

Так как

$$W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n] \quad \text{и} \quad W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}]$$

не обращается в нуль ни в одной точке $x \in [a, b]$, то должно быть $c_n = 0$. Таким образом, найдется $n+1$ различных точек отрезка $[a, b]$, в которых

$$f = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_{n-1}\varphi_{n-1}$$

обращается в нуль. Тогда, снова применяя обобщенную теорему Ролля, найдем, что $L_{n-1}[f]$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке $\xi \in [a, b]$. Проводя те же рассуждения, что и раньше, найдем, что $c_{n-1} = 0$. Продолжая этот процесс, мы придем, в конце концов, к выводу, что все коэффициенты c_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю вопреки нашему предположению.

5. Основные вопросы теории интерполирования. На этом пока прервем общие рассуждения и перейдем к рассмотрению различных частных случаев выбора функций $\{\varphi_i(x)\}$. Нас будет интересовать:

1) Вопрос об удобных способах фактического построения интерполяционных функций для каждого конкретного выбора функций $\{\varphi_i(x)\}$.

2) Интерполяционные функции будут совпадать с интерполируемой функцией в узлах интерполирования, но, вообще говоря, будут отличаться от нее в остальных точках промежутка $[a, b]$. Нужно найти практически пригодные оценки этого отклонения.

3) Возникнет вопрос о том, как выгоднее выбирать узлы интерполирования для того, чтобы эти оценки были наиболее выгодными.

4) Значения функции могут оказаться приближенными. Необходимо выяснить влияние этого фактора на погрешность интерполирования.

Мы рассмотрим обобщения поставленной задачи интерполирования, когда в узлах будут заданы не только значения функции, но и ее производных. Рассмотрим кратко задачу об интерполировании функций многих переменных. Сейчас мы начнем разбор наиболее важного случая интерполирования при помощи алгебраических многочленов.

§ 2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

1. Построение интерполяционного многочлена Лагранжа. Возьмем в качестве $\{\varphi_i(x)\}$ последовательность

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

Функции этой последовательности линейно независимы на любом отрезке. Действительно, если бы на каком-то отрезке имело место

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n \equiv 0, \qquad x \in [a, b],$$

то все $c_i = 0$, так как алгебраический многочлен степени n с отличными от нуля коэффициентами не может иметь более n корней. Определитель Δ в данном случае примет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Это — определитель Вандермонда. Он равен

$$\Delta = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

В силу наших предположений о x_i определитель отличен от нуля. Следовательно, при любых $f(x_j)$ однозначно определится $\varphi(x)$. Для определения вида $\varphi(x)$ будем отыскивать функции $\Phi_i(x)$. Как было указано выше, $\Phi_i(x)$ представляет собой линейную комбинацию функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Итак, для того чтобы отыскать $\Phi_i(x)$, нам нужно найти многочлен степени n, обращающийся в нуль в точках x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n и равный 1 в точке x_i. Отсюда

$$\Phi_i(x) = A(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n).$$

Так как $\Phi(x_i) = 1$, то

$$1 = A(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n).$$

Получаем окончательно:

$$\Phi_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

и

$$\varphi(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \dots + f(x_n) \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}. \quad (1)$$

Этот многочлен и решает задачу интерполирования. Будем называть его *интерполяционным многочленом Лагранжа* и, чтобы отличать

от других случаев интерполирования, обозначать $L_n(x)$, где n — степень интерполяционного многочлена. Введем обозначение

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n). \tag{2}$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа может быть записан в форме:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\,\omega_n'(x_i)}. \tag{3}$$

Рассмотрим некоторые примеры на построение интерполяционных многочленов Лагранжа.

Пример. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным:

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	3	2	5

В этом случае

$$L_3(x) = 1\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)} + 3\frac{x(x-3)(x-5)}{2(2-3)(2-5)} +$$

$$+ 2\frac{x(x-2)(x-5)}{3(3-2)(3-5)} + 5\frac{x(x-2)(x-3)}{5(5-2)(5-3)} = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1.$$

Пример. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным:

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	1	3	2	5	6

В этом случае

$$L_4(x) = 1\frac{(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)}{(-2)(-3)(-5)(-6)} + 3\frac{x(x-3)(x-5)(x-6)}{2(2-3)(2-5)(2-6)} +$$

$$+ 2\frac{x(x-2)(x-5)(x-6)}{3(3-2)(3-5)(3-6)} + 5\frac{x(x-2)(x-3)(x-6)}{5(5-2)(5-3)(5-6)} +$$

$$+ 6\frac{x(x-2)(x-3)(x-5)}{6(6-2)(6-3)(6-5)} = -\frac{11}{120}x^4 + \frac{73}{60}x^3 - \frac{601}{120}x^2 + \frac{413}{60}x + 1.$$

Мы в обоих примерах располагали многочлены по степеням x. Если $L_n(x)$ нужно подсчитывать лишь при некоторых значениях x, то никакой необходимости так располагать его нет.

Как видно из приведенных примеров, образование интерполяционных многочленов Лагранжа связано с большой вычислительной работой. Так же велика вычислительная работа при получении значения $L_n(x)$ для какого-то фиксированного значения x. Сравнение двух приведенных примеров показывает, что если даже мы имеем интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по значениям x_0, x_1, ..., x_n, то это мало помогает нам при построении интерполяционного многочлена Лагранжа по значениям его в точках x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}. Все это заставляет задумываться об усовершенствовании формулы Лагранжа с целью упрощения вычислительного процесса. Об этом мы сейчас и будем говорить.

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов. Рассмотрим случай, когда значения x_i являются равноотстоящими, т. е.

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h.$$

При этом, если ввести обозначение $\dfrac{x - x_0}{h} = t$, то получим:

$$\Phi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} =$$

$$= \frac{th\,(th-h)\ldots[th-(i-1)h]\,[th-(i+1)h]\ldots(th-nh)}{ih\,(i-1)h\ldots h\,(-h)\ldots[-(n-i)h]} =$$

$$= \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}\,\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} = (-1)^{n-i}C_n^i\,\frac{1}{t-i}\,\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{n!}.$$

Итак,

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) =$$

$$= (-1)^n\,\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,\frac{C_n^i y_i}{t-i}. \qquad (4)$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записей мы будем обозначать $f(x_i)$ через y_i. В последнем выражении коэффициенты, стоящие перед y_i:

$$(-1)^{n-i}C_n^i\,\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-i)\,n!},$$

не зависят ни от функции $f(x)$, ни от h — шага таблицы. Их можно табулировать и использовать в самых различных случаях. Такие таблицы составлены и известны под названием таблиц *коэффициентов Лагранжа*.

3. Интерполяционная схема Эйткена. Если значения x_i неравноотстоящие и требуется найти не общее выражение $L_n(x)$, а лишь его значения при некоторых x, то удобно пользоваться *интерполяционной схемой Эйткена*. По этой схеме значение интерполяционного многочлена для какого-то значения x находится путем последовательного применения единообразного процесса. Рассмотрим выражение

$$L_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}.$$

Это многочлен первой степени относительно x. При $x = x_0$ получим:

$$L_{01}(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & 0 \\ y_1 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = y_0.$$

Аналогично при $x = x_1$ будем иметь:

$$L_{01}(x_1) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x_1 \\ y_1 & 0 \end{vmatrix}}{(x_1 - x_0)} = y_1.$$

Так как многочлен первой степени, принимающий в точках x_0 и x_1 значения y_0 и y_1, единственный, то $L_{01}(x)$ и решает задачу интерполирования по двум данным. Точно так же мы сможем образовать $L_{12}(x)$, $L_{23}(x)$ и т. д. Эти выражения легко вычисляются на малых счетных машинах. В самом деле, вычисление определителя второго порядка сводится к вычислению разности двух произведений, что осуществляется очень легко. При этом на счетчике оборотов, если он оборудован переносом десятков, как это сделано в машинах Рейнметалл, Мерседес и других, получится разность $x_1 - x_0$, на которую и нужно разделить величину определителя.

Рассмотрим, далее,

$$L_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}.$$

Это — многочлен второй степени относительно x. При $x = x_0$ будем иметь:

$$L_{012}(x_0) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & 0 \\ L_{12}(x_0) & x_2 - x_0 \end{vmatrix} = y_0$$

При $x = x_1$ получим:

$$L_{012}(x_1) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} y_1 & x_0 - x_1 \\ y_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = y_1,$$

а при $x = x_2$

$$L_{012}(x_2) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} L_{01}(x_2) & x_0 - x_2 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix} = y_2.$$

Следовательно, $L_{012}(x)$ совпадает с интерполяционным многочленом Лагранжа, принимающим в точках x_0, x_1, x_2 соответственно значения y_0, y_1, y_2. Вообще,

$$L_{0123\ldots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} L_{012\ldots(n-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{123\ldots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}$$

будет интерполяционным многочленом Лагранжа, принимающим в точках x_0, x_1, ..., x_n соответственно значения y_0, y_1, ..., y_n. Очевидно, что порядок и нумерация точек при этом значения не имеют. Каждый многочлен $L_{012\ldots k}(x)$ получается из $L_{012\ldots k-1}(x)$ и $L_{123\ldots k}(x)$ так же, как и $L_{01}(x)$ получается из y_0 и y_1. Вычислительная схема для получения значения интерполяционного многочлена будет выглядеть следующим образом:

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,\,i}$	$L_{i-2,\,i-1,\,i}$	$L_{i-3,\,i-2,\,i-1,\,i}$	$L_{i-4,\,i-3,\,i-2,\,i-1,\,i}$
x_0	y_0	$x_0 - x$				
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$			
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	
x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	$L_{01234}(x)$
x_5	y_5	$x_5 - x$	$L_{45}(x)$	$L_{345}(x)$	$L_{2345}(x)$	$L_{12345}(x)$

Так, по данным второго примера этого параграфа получим следующие значения (здесь взято $x = 1$):

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,\,i}$	$L_{i-2,\,i-1,\,i}$	$L_{i-3,\,i-2,\,i-1,\,i}$	$L_{i-4,\,i-3,\,i-2,\,i-1,\,i}$
0	1	-1				
2	3	1	2			
3	2	2	4	$\frac{8}{3}$		
5	5	4	-1	$\frac{17}{3}$	$\frac{49}{15}$	
6	6	5	$+1$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{23}{3}$	4

Если подставить в полученный там многочлен значение $x = 1$, то получим ту же величину $L_4(1) = 4$.

Интересно то, что, применяя последнюю схему, мы можем постепенно подключать все новые и новые значения x_i до тех пор, пока сами вычисления не покажут нам, что точность уже не возрастает.

Исследуем теперь различного рода погрешности, получающиеся при применении интерполяционного многочлена Лагранжа.

§ 3. Погрешности интерполяционной формулы Лагранжа

1. Остаточный член формулы Лагранжа и его оценки. Если все вычисления произведены точно, то интерполяционный многочлен Лагранжа совпадает с заданной нам функцией $f(x)$ в узлах интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Однако, вообще говоря, он будет отличен от нее в остальных точках. Исключение представляет тот случай, когда сама функция $f(x)$ является многочленом степени не выше n. В последнем случае $f(x)$ и $L_n(x)$ будут тождественно совпадать.

Так как значения y_i могут оказаться приближенными, то возникнет дополнительная погрешность.

Кроме того, в процессе вычислений будет возникать новая погрешность за счет округлений.

Первая погрешность даст нам *погрешность метода*, вторая — *неустранимую погрешность* и третья — *погрешность округления*.

Начнем с изучения погрешности метода. Здесь мы должны сузить класс функций R, так как произвольная функция, совпадая с $f(x)$ в узлах интерполяции, может как угодно отличаться от нее в остальных точках. Можно было бы наложить на функции $f(x)$ сравнительно небольшие ограничения, но это будет связано с громоздкими выкладками при оценке погрешности. Мы наложим на $f(x)$ жесткие ограничения, а именно будем считать, что интерполируемая функция $f(x)$ обладает на $[a, b]$ непрерывными производными до порядка n и производная $f^{(n)}(x)$ дифференцируема на $[a, b]$. Такие предположения будут выполнены для большинства случаев, с которыми приходится сталкиваться на практике. Для оценки погрешности рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(z) - L_n(z) - K(z - x_0)(z - x_1) \ldots (z - x_n),$$

где K — некоторая постоянная. Очевидно, $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \ldots = \varphi(x_n) = 0$. Подберем K так, чтобы $\varphi(x)$, где x — та точка, для которой мы производим оценку, также обращалась бы в нуль. Это возможно, так как тогда

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)},$$

а знаменатель этой дроби отличен от нуля, ибо $x \neq x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Функция $\varphi(z)$ обращается в нуль на $[a, b]$ в $n+2$ точках $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, на основании теоремы Ролля производ-

ная $\varphi(z)$ обращается в нуль по крайней мере $n+1$ раз на интервале (a, b). Пусть эти значения z будут:

$$\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}.$$

Применим снова теорему Ролля к функции $\varphi'(z)$. Получим по крайней мере n точек $\xi_0^{(2)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_{n-1}^{(2)}$ таких, что

$$\varphi''(\xi_0^{(2)}) = \varphi''(\xi_1^{(2)}) = \ldots = \varphi''(\xi_{n-1}^{(2)}) = 0.$$

Продолжая этот процесс дальше, найдем, что существует по крайней мере одна точка ξ на интервале (a, b), в которой

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0,$$

но

$$\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - K(n+1)!,$$

так как производная порядка $n+1$ от многочлена $L_n(x)$ степени n равна нулю, а производная от многочлена $\omega_n(x)$ степени $n+1$ со старшим коэффициентом 1 равна $(n+1)!$. Положив в последнем равенстве $z = \xi$, получим:

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Отсюда

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) \qquad (1)$$

или, полагая $M_{n+1} = \sup\limits_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$, получим:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)|. \qquad (2)$$

Эти два выражения могут служить оценкой отклонения $f(x)$ от $L_n(x)$, если производная $f^{(n+1)}(\xi)$ может быть оценена. Приведем примеры таких оценок.

Пример. Оценить, с какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\ln 100{,}5$, если известны значения

$$\ln 100, \ln 101, \ln 102, \ln 103.$$

В данном случае

$$f(x) = \ln x, \quad n = 3, \quad a = 100, \quad b = 103, \quad f^{IV}(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad M_4 = \frac{6}{100^4}.$$

$$|\ln 100{,}5 - L(100{,}5)| \leqslant \frac{6}{100^4 \cdot 4!} 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1{.}5 \cdot 2{,}5 = 2{,}344 \cdot 10^{-9}.$$

Пример. С какой точностью можно вычислить $\sin 5°$ по формуле Лагранжа, если известны значения

$$\sin 0°, \sin 30°, \sin 45°, \sin 60°.$$

В данном случае $f(x)=\sin x$, $n=3$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{3}$, $f^{IV}(x)=\sin x$, $M_4=\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$|\sin 5^\circ - L_4(5^\circ)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{4!}\left|\left(\frac{5\pi}{180}-0\right)\left(\frac{5\pi}{180}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{5\pi}{180}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{180}-\frac{\pi}{3}\right)\right| \approx 0{,}0009.$$

2. Выбор узлов интерполирования. Как мы видели, отклонение $f(x)$ от $L_n(x)$ определяется величиной $f^{(n+1)}(\xi)$ и $\omega_n(x)$. Если о первой величине мы можем иногда сказать, в каких пределах она заключена, то вторую мы можем в некоторых случаях менять по нашему желанию, изменяя точки x_i. Поставим следующую задачу: как нужно выбрать узлы x_i для того, чтобы $\sup\limits_{[a,\,b]}|\omega_n(x)|$ была наименьшей. Для ответа на этот вопрос нам придется использовать многочлены Чебышева.

Многочлен Чебышева $T_n(x)$ определяется так:

$$T_n(x)=\cos[n\arccos x],\quad |x|\leqslant 1.$$

При $n=1$

$$T_1(x)=\cos(\arccos x)=x.$$

При $n=2$

$$T_2(x)=\cos[2\arccos x]=2\cos^2(\arccos x)-1=2x^2-1.$$

Далее, из тождества

$$\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n-1)\theta,$$

полагая $\theta=\arccos x$, получим:

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x).$$

Таким образом, $T_n(x)$ действительно являются многочленами, причем коэффициент при старшей степени x равен 2^{n-1}. Из рекуррентной формулы последовательно находим:

$$T_3(x)=4x^3-3x,$$
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$T_n(x)$ как многочлен степени n имеет ровно n корней. Из $\cos(n\arccos x)=0$ следует

$$n\arccos x=\frac{\pi}{2}(2m+1)\quad\text{или}\quad x=\cos\frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

Давая m значения $0, 1, \ldots, n-1$, получим n различных корней, причем все они оказываются заключенными между -1 и $+1$. Заметим также, что $\max|T_n(x)|$ на отрезке $[-1, 1]$ равен 1

и достигается в $n+1$ точках $x_m = \cos\frac{m\pi}{n}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$. Если в качестве отрезка интерполирования $[a, b]$ взять $[-1, 1]$ и в качестве узлов интерполирования — корни многочлена Чебышева x_m, то $\omega_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ и $\sup|\omega_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$. Покажем, что какой бы многочлен $P(x)$ степени n со старшим коэффициентом 1 мы ни взяли, $\sup\limits_{x\in[-1,+1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Действительно, если бы это было не так, то разность $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) - P(x)$ представляла бы собой многочлен степени $n-1$, принимающий в $n+1$ точках $x_m = \cos\frac{m\pi}{n}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$ попеременно то положительные, то отрицательные значения. Следовательно, он должен иметь по крайней мере n корней, что невозможно.

Таким образом, если ограничиться рассмотрением отрезка $[-1, 1]$, то $\omega_n(x)$ будет иметь наименьшее возможное значение $\sup|\omega_n(x)|$ при условии, что в качестве узлов интерполирования взяты корни многочлена Чебышева, и в этом случае наша оценка примет вид

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}. \tag{3}$$

Если интерполирование производится на произвольном отрезке $[a, b]$, то линейной заменой переменного

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)z + (b+a)],$$

$$z = \frac{1}{b-a}[2x - b - a]$$

его можно перевести в $[-1, 1]$. При этом корни многочлена $T_n(z)$ перейдут в

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\frac{2m+1}{2n}\pi + (b+a)\right].$$

Оценка для этого случая будет такова:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \tag{4}$$

Полученные нами результаты дают наилучшую оценку в целом по всему отрезку $[a, b]$. Мы воспользовались тем свойством многочленов $\overline{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$, что для них $\sup\limits_{x\in[-1,+1]} |\overline{T}_n(x)|$ имеет наименьшее значение среди всех многочленов степени n с коэффициентом при старшей степени, равным единице. Благодаря этому свойству многочлены $\overline{T}_n(x)$ получили название *многочленов, наименее*

отклоняющихся от нуля. Можно поставить и другую задачу: при фиксированных узлах интерполирования изучить, для каких промежутков изменения остаточный член будет принимать большие значения и для каких меньшие. Для решения этой задачи нам нужно изучить поведение функции $\omega_n(x)$ при фиксированных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Многочлен $\omega_n(x)$ обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, меняет знак, переходя через каждое из этих значений, и где-то в промежутках между ними принимает попеременно то максимальное, то

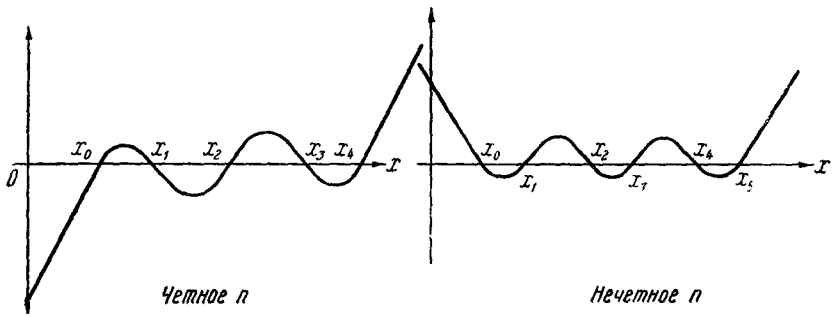

Рис. 19.

минимальное значение (рис. 19). Абсолютные значения этих экстремумов будут равны друг другу только в том случае, если $x_0, x_1, \ldots, x_n$ являются корнями многочлена

$$\cos\left[n \arccos \frac{2x-b-a}{b-a}\right].$$

В остальных случаях они будут различны. При интерполировании вблизи больших по абсолютной величине экстремумов можно ожидать большей погрешности, там же, где эти экстремумы будут принимать меньшие значения, следует ожидать меньшей погрешности. Исследование общего случая $\omega_n(x)$ при произвольном распределении узлов интерполяции довольно затруднительно. Поэтому мы ограничимся случаем равноотстоящих узлов, т. е. будем предполагать, что

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h.$$

Опять введем t при помощи соотношения $t = \frac{x - x_0}{h}$. Тогда

$$\omega_n(x) = \omega_n(x_0 + th) = h^{n+1} t(t-1)(t-2)\ldots(t-n),$$

и нам следует изучить поведение функции

$$\varphi(t) = t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)$$

при различных значениях t. Прежде всего заметим, что эта функция будет четной или нечетной относительно точки $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$ в зависимости от четности n. Действительно, если произвести замену $t - \frac{n}{2} = z$, то получим:

$$\varphi\left(z+\frac{n}{2}\right)=\left[z^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right]\ldots$$

Правая часть этого равенства будет четной функцией z, если n нечетно, и будет нечетной функцией z, если n четно. Далее, заметим, что

$$\varphi(t+1)=(t+1)\,t\,(t-1)\ldots(t+1-n)=\frac{t+1}{t-n}\varphi(t).$$

Таким образом, если разбить отрезок $[0, n]$ на части $[0, 1], [1, 2], \ldots, [(n-1), n]$, то значение функции в отрезке $[t, t+1]$ будет получаться из соответствующего значения функции в предыдущем отрезке путем умножения его на $\frac{t+1}{t-n}$. Последний множитель всегда отрицателен при изменении t от 0 до n. Поэтому знаки значений функции будут чередоваться при переходе от одного интервала к следующему. Абсолютная величина этого множителя будет меньше 1 на отрезке $\left[0, \frac{n-1}{2}\right]$. Таким образом, экстремальные значения $\varphi(t)$ будут убывать по абсолютной величине до середины отрезка $[0, n]$

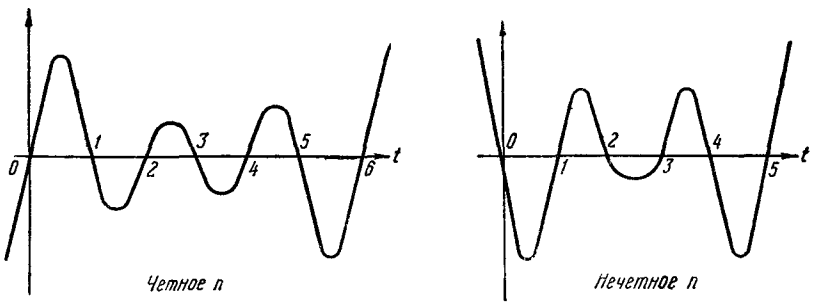

Рис. 20.

и затем в силу симметрии снова возрастать. Вне пределов отрезка $[0, n]$ функция $\varphi(t)$ быстро возрастает по абсолютной величине. Итак, графики функции будут следующих двух типов (рис. 20). Какие же выводы можно сделать о точности интерполирования из приведенного нами анализа? Во-первых, оценка остаточного члена формулы Лагранжа $R_n(f)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_n)$ будет особенно велика для значений x, лежащих вне отрезка $[x_0, x_n]$. Поэтому следует

ожидать, что если мы производим вычисления по интерполяционной формуле для значений x, лежащих вне отрезка $[x_0, x_n]$, или, как принято говорить, производим *экстраполирование*, то погрешности будут очень велики. Во-вторых, при интерполировании для значений x, лежащих не близко к узлам интерполирования, точность будет больше для средних отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ и меньше для крайних.

3. Неустранимая погрешность формулы Лагранжа. Изучим теперь неустранимую погрешность формулы Лагранжа, предполагая, что значения $f(x_j)$ приближенны, а значения x_j точны. Формулу Лагранжа возьмем в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\Phi_i(x).$$

Тогда

$$\alpha_L = \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x)\,\alpha_{f(x_i)}, \tag{5}$$

$$A_L = \sum_{i=0}^{n} |\Phi_i(x)|\,A_{f(x_i)}. \tag{6}$$

Ничего большего о неустранимой погрешности для случая, когда узлы интерполирования расположены произвольным образом, мы сказать не можем. Обратимся к случаю, когда узлы интерполирования равноотстоящие. Тогда, как мы видели,

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \frac{(-1)^n t(t-1)\quad(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{C_n^i y_i}{t-i},$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Следовательно, в этом случае

$$A_L = \left|\frac{t(t-1)\quad.\,(t-n)}{n!}\right|\sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i A_{y_i}}{|t-i|}.$$

Пусть все значения функции y_i известны с одинаковой точностью и предельная абсолютная погрешность каждого из них равна $A_{y_i} = \frac{1}{2}\rho$. Тогда предельная абсолютная погрешность A_L будет равна

$$A_L = \frac{1}{2}\rho\left|\frac{t(t-1)\;.\;(t-n)}{n!}\right|\sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i}{|t-i|}. \tag{7}$$

Приведем таблицу значений коэффициента при ρ в правой части этого равенства для различных значений n и t:

Коэффициенты при ρ				
t \ n	1	2	3	4
— 1	1,5	3,5	7,5	15
— 0,9	1,4	3,1	6,4	13
— 0,8	1,3	2,7	5,4	11
— 0,7	1,2	2,4	4,5	8,5
— 0,6	1,1	2,1	3,7	6,7
— 0,5	1,0	1,7	3,0	5,2
— 0,4	0,9	1,5	2,3	3,4
— 0,3	0,8	1,2	1,8	2,8
— 0,2	0,7	1,0	1,3	1,9
— 0,1	0,6	0,71	0,86	1,1
0,0	0 5	0,5	0,5	0,5
0,1	0,5	0,54	0,63	0,78
0,2	0,5	0,58	0,72	0,96
0,3	0,5	0,60	0,78	1,06
0,4	0,5	0,62	0,81	1,10
0,5	0,5	0,62	0,81	1,1
0,6	0,5	0,62	0,79	1,0
0,7	0,5	0,60	0,74	0,92
0,8	0,5	0,58	0,68	0,80
0 9	0,5	0,54	0,59	0,66
1,0	0,5	0,5	0,5	0,5
1,1	0,6	0,54	0,54	0,57
1,2	0,7	0,58	0,58	0,62
1,3	0,8	0,60	0,60	0,66
1,4	0,9	0,62	0,62	0,69
1,5	1,0	0,62	0,62	0,70
1,6	1,1	0,62	0,62	0,69
1,7	1,2	0,60	0,60	0,66
1,8	1,3	0,58	0,58	0,62
1,9	1,4	0,54	0,54	0,57
2 0	1,5	0,50	0,50	0,50

Как видно из этой таблицы, неустранимая погрешность интерполяционной формулы Лагранжа при изменении t на отрезке $[0, n]$ сравнительно невелика Она незначительно возрастает при увеличении n. Минимальные погрешности получаются в средних отрезках $[\iota, \iota + 1]$ при изменении t от 0 до n При экстраполяции опять получаются значительные погрешности.

Оценок ошибок округления мы здесь производить не будем, так как они целиком определяются программой вычислений В дальнейшем мы изучим ряд формул, являющихся видоизменениями формулы Лагранжа Эти формулы находят широкое применение в вычислительной практике. Поэтому целесообразно исследовать все эти формулы совместно с точки зрения тех ошибок, которые они дают, и с точки зрения удобства вычислений.

§ 4. Остаточный член общей интерполяционной формулы

В предыдущем параграфе мы нашли остаточный член формулы Лагранжа. Найдем теперь остаточный член общей интерполяционной формулы. На функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ наложим те же ограничения, что и в конце § 1, т. е. будем предполагать, что они дифференцируемы до порядка $n+1$ на $[a, b]$ и все вронскианы $W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k]$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ отличны от нуля на $[a, b]$.

Рассмотрим функцию двух переменных x и s:

$$K(x, s) = W^{-1}[\varphi_0(s), \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)] \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \varphi_0(s) & \varphi_1(s) & \ldots & \varphi_n(s) \\ \varphi_0'(s) & \varphi_1'(s) & \ldots & \varphi_n'(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(n-1)}(s) & \varphi_1^{(n-1)}(s) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(s) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n} g_i(s)\,\varphi_i(x).$$

Как функция x она является линейной комбинацией функций $\varphi_i(x)$ и, следовательно,

$$L_{n+1}[K(x, s)] \equiv 0,$$

где

$$L_{n+1}[f] = \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, f]}{W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]}$$

(см. § 1).

С другой стороны, очевидно,

$$\left.\frac{\partial^l K(x, s)}{\partial x^l}\right|_{x=s} = \begin{cases} 0 & \text{при } l \leqslant n-1, \\ 1 & \text{при } l = n. \end{cases}$$

Функция

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(x) + \int_a^x K(x, s)\,\psi(s)\,ds$$

при любых действительных постоянных α_i удовлетворяет уравнению

$$L_{n+1}[y] = \psi(x).$$

В самом деле,

$$L_{n+1}[y] = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_{n+1}[\varphi_i] + L_{n+1}\left[\int_a^x K(x, s)\,\psi(s)\,ds\right].$$

Первый член справа, очевидно, равен нулю. Для того чтобы найти значение второго члена, заметим, что

$$\frac{d}{dx}\int_a^x K(x, s)\,\psi(s)\,ds = K(x, x)\,\psi(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, s)}{\partial x}\,\psi(s)\,ds =$$

$$= \int_a^x \frac{\partial K(x, s)}{\partial x}\,\psi(s)\,ds.$$

Отсюда

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x K(x, s)\,\psi(s)\,ds = \frac{\partial K(x, x)}{\partial x}\psi(x) + \int_a^x \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x^2}\psi(s)\,ds = \int_a^x \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x^2}\psi(s)\,ds$$

и, вообще,

$$\frac{d^l}{dx^l}\int_a^x K(x, s)\,\psi(s)\,ds = \frac{\partial^{l-1} K(x, x)}{\partial x^{l-1}}\psi(x) + \int_a^x \frac{\partial^l K(x, s)}{\partial x^l}\psi(s)\,ds = \int_a^x \frac{\partial^l K(x, s)}{\partial x^l}\psi(s)\,ds$$

для всех $l \leqslant n$. Для $l = n+1$ получим:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\int_a^x K(x, s)\,\psi(s)\,ds = \frac{\partial^n K(x, x)}{\partial x^n}\psi(x) + \int_a^x \frac{\partial^{n+1} K(x, s)}{\partial x^{n+1}}\psi(s)\,ds = \psi(x) + \int_a^x \frac{\partial^{n+1} K(x, s)}{\partial x^{n+1}}\psi(s)\,ds.$$

Таким образом,

$$L_{n+1}\left[\int_a^x K(x, s)\,\psi(s)\,ds\right] = \left[\int_a^x K(x, s)\,\psi(s)\,ds\right]^{(n+1)} + a_1(x)\left[\int_a^x K(x, s)\,\psi(s)\,ds\right]^{(n)} + \ldots + a_{n+1}(x)\int_a^x K(x, s)\,\psi(s)\,ds = \psi(x) + \int_a^x L_{n+1}[K(x, s)]\,\psi(s)\,ds = \psi(x).$$

Этим наше утверждение доказано.

Заметим, что если мы вместо функций $\varphi_i(x)$ взяли бы любую другую систему $n+1$ линейно независимых решений уравнения

$$L_{n+1}[\varphi] = 0,$$

то получили бы ту же самую функцию $K(x, s)$. Действительно, если функции $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, ..., $\psi_n(x)$ образуют такую систему, то

$$\psi_i(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\varphi_j(x) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

и определитель

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. При этом

$$W^{-1}[\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n] = D^{-1} W^{-1}[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n],$$

а

$$\begin{vmatrix} \psi_0(s) & \psi_1(s) & \dots & \psi_n(s) \\ \psi_0'(s) & \psi_1'(s) & \dots & \psi_n'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_0^{(n-1)}(s) & \psi_1^{(n-1)}(s) & \dots & \psi_n^{(n-1)}(s) \\ \psi_0(x) & \psi_1(x) & \dots & \psi_n(x) \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} \varphi_0(s) & \varphi_1(s) & \dots & \varphi_n(s) \\ \varphi_0'(s) & \varphi_1'(s) & \dots & \varphi_n'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(n-1)}(s) & \varphi_1^{(n-1)}(s) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(s) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}.$$

При умножении последних выражений получим то же самое, что и раньше.

В частности, функции $\Phi_i(x)$, введенные в § 1, являются линейными комбинациями функций $\varphi_i(x)$. Они линейно независимы. В самом деле, если бы существовала линейная зависимость

$$c_0\Phi_0(x) + c_1\Phi_1(x) + \dots + c_n\Phi_n(x) \equiv 0$$

и c_i при некотором i отлично от нуля, то, полагая в этом тождестве $x = x_i$, мы получили бы $c_i = 0$ вопреки предположению. Здесь мы использовали свойства функций $\Phi_i(x)$, что

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, равный 1 при $i = j$ и равный 0 при $i \neq j$.

Таким образом, функцию $K(x, s)$ можно записать в виде

$$K(x, s) = \sum_{i=0}^{n} G_i(s)\,\Phi_i(x).$$

Но

$$K(x_j, s) = \sum_{i=0}^{n} G_i(s)\,\Phi_i(x_j) = G_j(s).$$

Итак,

$$K(x, s) = \sum_{i=0}^{n} K(x_i, s)\,\Phi_i(x)$$

Функция

$$y = \sum_{i=0}^{n} \beta_i\Phi_i(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \int_{x_i}^{x} G_i(s)\,\psi(s)\,ds$$

удовлетворяет уравнению $L_{n+1}[y] = \psi$ и принимает в точках x_i значения β_i. В частности, функция

$$h(x) = \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \int_{x_i}^{x} G_i(s)\,ds$$

удовлетворяет условиям

$$L_{n+1}[h] = 1; \quad h(x_i) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Функцня $h(x)$ не может обращаться в нуль нн в какой другой точке $x \in [a, b]$, так как мы получнлн бы тогда протнворечне с обобщенной теоремой Ролля.

Рассмотрнм разность

$$R(x) = f(x) - \varphi(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} f_i \Phi_i(x), \quad x \in [a, b];$$

$R(x)$ обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. То же самое можно сказать и про функцню

$$f(x) - \varphi(x) - Mh(x),$$

где M — пронзвольное постоянное чнсло. Пусть нам требуется оценнть $R(x)$ для некоторой точкн $x' \in [a, b]$ $(x' \neq x_i)$. Подберем M так, чтобы последнее выраженне обратнлось в нуль н в точке x'. Это возможно, так как $h(x') \neq 0$. Тогда

$$L_{n+1}[f(x) - \varphi(x) - Mh(x)] = L_{n+1}[f(x)] - M$$

на основанни обобщенной теоремы Ролля должно обратнться в нуль по крайней мере в одной точке $\xi \in [a, b]$. Такнм образом,

$$M = L_{n+1}[f(\xi)].$$

Отсюда

$$R(x') = f(x') - \varphi(x') = L_{n+1}[f(\xi)]\, h(x').$$

Это равенство, очевндно, сохраннт свою снлу н для того случая, когда $x' = x_i$. Итак, прн любом $x \in [a, b]$

$$R(x) = f(x) - \varphi(x) = L_{n+1}[f(\xi)]\, h(x). \tag{1}$$

Это н есть *остаточный член общей интерполяционной формулы.*

Получнм еще одну форму остаточного члена. Любая $n+1$ раз днфференцнруемая функцня $f(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяет уравненню

$$L_{n+1}[y] = L_{n+1}[f(x)].$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \Phi_i(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \int_{x_i}^{x} G_i(s)\, L_{n+1}[f(s)]\, ds =$$

$$= \varphi(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \int_{x_i}^{x} K(x_i, s)\, L_{n+1}[f(s)]\, ds. \tag{2}$$

Но $\int_{x_i}^{x} = \int_{a}^{x} - \int_{a}^{x_i}$, и поэтому

$$R(x) = f(x) - \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \int_{a}^{x} G_i(s)\, L_{n+1}[f(s)]\, ds -$$

$$- \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \int_{a}^{x_i} G_i(s)\, L_{n+1}[f(s)]\, ds =$$

$$= \int_{a}^{x} K(x, s)\, L_{n+1}[f(s)]\, ds - \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \int_{a}^{x_i} G_i(s)\, L_{n+1}[f(s)]\, ds.$$

Подставляя в полученное выражение b вместо a, будем нметь:

$$R(x) = \int_b^x K(x, s) L_{n+1}[f(s)]\, ds - \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \int_b^{x_i} G_i(s) L_{n+1}[f(s)]\, ds.$$

Полусумма последннх двух выраженнй дает нам:

$$R(x) = \int_a^b R(x, s) L_{n+1}[f(s)]\, ds, \tag{3}$$

где

$$2R(x, s) = K(x, s) \operatorname{sign}(x - s) - \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) G_i(s) \operatorname{sign}(x_i - s). \tag{4}$$

Через $\operatorname{sign} z$ здесь, как н обычно, обозначена функцня, прннмающая значение $+1$ прн положнтельных z н -1 прн отрнцательных z.

Полученное ранее выраженне для остаточного члена нмело более простой внд. Но оно было получено при нспользованнн обобщенной теоремы Ролля, для справедлнвостн которой нужно предполагать, что все $W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, отлнчны от нуля на $[a, b]$. Последнее выраженне будет верно в том случае, еслн $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ могут быть нспользованы для целей ннтерполнрования прн заданных узлах x_i н $W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n] \neq 0$ прн $x \in [a, b]$.

§ 5. Интерполяционная формула Ньютона для неравных промежутков

Вернемся снова к интерполированию при помощи алгебраических многочленов. В этом параграфе мы получим формулу Ньютона, являющуюся видоизменением формулы Лагранжа. Она интересна сама по себе и послужит нам источником получения ряда новых формул.

1. Разделенные разности и их свойства. Предварительно введем новое понятие — *разделенные разности*. Возьмем некоторую функцию $f \in R$ и систему узлов интерполяции $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_i \neq x_j$, при $i \neq j$, $x_i \in [a, b]$. Для этой функции и узлов образуем всевозможные отношения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0;\ x_1); \\ &\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_1;\ x_2), \ \ldots, \ \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f(x_{n-1};\ x_n). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Такие отношения называют *разделенными разностями первого порядка*. Получив разделенные разности первого порядка, мы можем образовать отношения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f(x_1; x_2)-f(x_0; x_1)}{x_2-x_0}=f(x_0; x_1; x_2),\\ &\frac{f(x_2; x_3)-f(x_1; x_2)}{x_3-x_1}=f(x_1; x_2; x_3),\ \ldots,\ \frac{f(x_{n-1}; x_n)-f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n-x_{n-2}}=\\ &\qquad =f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Эти отношения называют *разделенными разностями второго порядка*. Вообще, если мы уже определили разделенные разности k-го порядка $f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k})$, то разделенные разности $(k+1)$-го порядка находятся при помощи формулы

$$\frac{f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k})-f(x_{i-1}; x_i; \ldots; x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_{i-1}}=f(x_{i-1}; x_i; \ldots; x_{i+k}). \quad (3)$$

Иногда вместо $f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k})$ для обозначения разделенных разностей используют выражение $[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}]$. Условимся располагать таблицу разделенных разностей следующим образом:

x_0	$f(x_0)$			
		$f(x_0; x_1)$		
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0; x_1; x_2)$	
		$f(x_1; x_2)$		$f(x_0; x_1; x_2; x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1; x_2; x_3)$	
		$f(x_2; x_3)$		$f(x_1; x_2; x_3; x_4)$
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2; x_3; x_4)$	
		$f(x_3; x_4)$		
x_4	$f(x_4)$			

Так, для $f(x)=x^3$; $x_0=0$; $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=5$; $x_4=6$; $x_5=1$ эта таблица примет следующий вид:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i; x_{i+1})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3})$
0	0			
		4		
2	8		5	
		19		1
3	27		10	
		49		1
5	125		14	
		91		1
6	216		12	
		43		
1	1			

Нам потребуется использовать некоторые свойства разделенных разностей.

Прежде всего докажем, что *разделенная разность k-го порядка* $f(x_i;\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+k})$ *равна*

$$f(x_i;\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+k}) = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})\ldots(x_i - x_{i+k})} +$$

$$+ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})\ldots(x_{i+1} - x_{i+k})} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f(x_{i+k})}{(x_{i+k} - x_i)(x_{i+k} - x_{i+1})\ldots(x_{i+k} - x_{i+k-1})}. \qquad (4)$$

Доказательство будем вести по индукции. Для $k = 1$ это утверждение справедливо, так как

$$f(x_i;\ x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})} + \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)}.$$

Предположим, что оно справедливо для $k = l - 1$, и докажем его справедливость для $k = l$. В самом деле,

$$f(x_i;\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+l}) = \frac{f(x_{i+1};\ x_{i+2};\ldots;\ x_{i+l}) - f(x_i;\ x_{i+1};\ldots;\ x_{i+l-1})}{x_{i+l} - x_i} =$$

$$= \frac{1}{x_{i+l} - x_i}\left\{ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_{i+2})(x_{i+1} - x_{i+3})\ldots(x_{i+1} - x_{i+l})} + \right.$$

$$+ \frac{f(x_{i+2})}{(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_{i+3})\ldots(x_{i+2} - x_{i+l})} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f(x_{i+l})}{(x_{i+l} - x_{i+1})(x_{i+l} - x_{i+2})\ldots(x_{i+l} - x_{i+l-1})} -$$

$$- \left[\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})\ldots(x_i - x_{i+l-1})} + \right.$$

$$+ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})\ldots(x_{i+1} - x_{i+l-1})} + \ldots$$

$$\left.\left. \ldots + \frac{f(x_{i+l-1})}{(x_{i+l-1} - x_i)(x_{i+l-1} - x_{i+1})\ldots(x_{i+l-1} - x_{i+l-2})} \right] \right\}.$$

В полученном выражении $f(x_i)$ и $f(x_{i+l})$ встречаются по одному

разу и притом в виде

$$\frac{f(x_i)}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})\dots(x_i-x_{i+l})},$$

$$\frac{f(x_{i+l})}{(x_{i+l}-x_i)(x_{i+l}-x_{i+1})\dots(x_{i+l}-x_{i+l-1})},$$

т. е. так, как они должны входить в доказываемое равенство (4). Все остальные $f(x_j)$ входят дважды. Объединяя эти члены попарно, получим:

$$\frac{1}{x_{i+l}-x_i}\left[\frac{f(x_j)}{(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{j+l})}-\right.$$

$$\left.-\frac{f(x_j)}{(x_j-x_i)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{i+l-1})}\right]=$$

$$=\frac{f(x_j)}{(x_j-x_{i+1})\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{i+l-1})}\times$$

$$\times\frac{1}{(x_{i+l}-x_i)}\left[\frac{1}{x_j-x_{i+l}}-\frac{1}{x_j-x_i}\right]=$$

$$=\frac{f(x_j)}{(x_j-x_i)(x_j-x_{i+1})\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{i+l})},$$

что нам и требуется.

Из доказанного вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Разделенная разность суммы или разности функций равна сумме или разности разделенных разностей слагаемых, соответственно уменьшаемого и вычитаемого.*

Следствие 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак разделенной разности.*

Следствие 3. *Разделенная разность есть симметрическая функция своих аргументов*, т. е.

$$f(x_i;\ x_{i+1};\ \dots;\ x_{i+k})=f(x_{i+1};\ x_i;\ x_{i+2};\ \dots;\ x_{i+k})=$$

$$=f(x_{i+2};\ x_{i+1};\ x_i;\ x_{i+3};\ \dots;\ x_{i+k})=\dots$$

Разделенные разности обладают еще одним свойством, а именно: *разделенные разности k-го порядка от x^n являются однородными многочленами относительно своих аргументов степени $n-k$; при $k=n$ равны 1 и при $k>n$ равны 0.* Докажем это.

Для разностей первого порядка имеем:

$$f(x_i;\ x_{i+1})=\frac{x_{i+1}^n-x_i^n}{x_{i+1}-x_i}=x_{i+1}^{n-1}+x_{i+1}^{n-2}x_i+\dots+x_i^{n-1}.$$

Далее, если

$$f(x_i;\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+k}) = \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k=n-k} x_i^{\alpha_0} x_{i+1}^{\alpha_1} \ldots x_{i+k}^{\alpha_k}$$

для любых i, то

$$f(x_i;\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+k+1}) = \frac{f(x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+k+1}) - f(x_i;\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i} =$$

$$= \frac{f(x_{i+k+1};\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+k}) - f(x_i;\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i} =$$

$$= \frac{\sum x_{i+k+1}^{\alpha_0} x_{i+1}^{\alpha_1} \ldots x_{i+k+1}^{\alpha_k} - \sum x_i^{\alpha_0} x_{i+1}^{\alpha_1} \ldots x_{i+k}^{\alpha_k}}{x_{i+k+1} - x_i} =$$

$$= \sum_{\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{k+1}=n-k-1} x_i^{\beta_0} x_{i+1}^{\beta_1} \ldots x_{i+k+1}^{\beta_{k+1}}.$$

Таким образом, и это свойство доказано. На основании его и следствий 1 и 2 заключаем, что *разделенные разности порядка n от многочлена n-й степени постоянны, а разности более высокого порядка равны нулю*. Последним замечанием можно пользоваться для обнаружения ошибок в таблицах многочленов или функций, близких к ним.

12. Вывод формулы Ньютона для неравных промежутков. Перейдем теперь к выводу формулы Ньютона. Пусть $f \in R$, x_0, x_1, ..., x_n — узлы интерполирования и $L_k(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный для этой функции по узлам x_0, x_1, ..., x_k. Тогда

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + [L_2(x) - L_1(x)] + \ldots$$

$$\ldots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)]. \quad (5)$$

Рассмотрим отдельную разность, стоящую в правой части, $L_k(x) - L_{k-1}(x)$. Это будет многочлен степени k. Он обращается в нуль в точках x_0, x_1, ..., x_{k-1}. Поэтому $L_k(x) - L_{k-1}(x) = A(x - x_0) \times (x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})$ (A — постоянная). Для определения величины A положим $x = x_k$. При этом получим:

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1}).$$

Итак,

$$A = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})} - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} f(x_j)\dfrac{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{j-1})(x_k - x_{j+1})\dots(x_k - x_{k-1})}{(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_{k-1})}}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_k)} =$$

$$= f(x_0; x_1; \dots; x_k).$$

Отсюда

$$L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \dots$$

$$\dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) f(x_0; x_1; \dots; x_n). \qquad (6)$$

Эта форма записи интерполяционного многочлена Лагранжа и носит название *интерполяционного многочлена Ньютона для неравных промежутков*. Она более удобна для вычислений, чем формула Лагранжа. Добавление одного или нескольких узлов не приводит к повторению всей проделанной работы заново, как это было при вычислениях по формуле Лагранжа. Применим эту формулу к тем же примерам, которые были приведены в § 2.

		Разделенные разности		
x	y	1	2	3
0	1			
		1		
2	3		$-\frac{2}{3}$	
		-1		$\frac{3}{10}$
3	2		$\frac{5}{6}$	
		$\frac{3}{2}$		
5	5			

$$L_3(x) = 1 + x \cdot 1 + x(x-2)\left(-\frac{2}{3}\right) + x(x-2)(x-3)\frac{3}{10}.$$

x	y	Разделенные разности			
		1	2	3	4
0	1				
		1			
2	3		$-\frac{2}{3}$		
		-1		$\frac{3}{10}$	
3	2		$\frac{5}{6}$		$-\frac{11}{120}$
		$\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{4}$	
5	5		$-\frac{1}{6}$		
		1			
6	6				

$$L_4(x) = 1 + x \cdot 1 + x(x-2)\left(-\frac{2}{3}\right) + x(x-2)(x-3)\frac{3}{10} + \\ + x(x-2)(x-3)(x-5)\left(-\frac{11}{120}\right).$$

Если раскрыть скобки в полученных выражениях и расположить их по степеням x, то получим то же самое, что и в § 2.

При помощи интерполяционной формулы Ньютона можно получить представление разделенных разностей в виде отношения определителей. Действительно, как мы видели в § 1, коэффициенты при $\varphi_i(x)$ в интерполирующей функции равны $\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i получаются из Δ путем замены i-го столбца столбцом $f(x_j)$. В частности, при $\varphi_i = x^i$ и узлах интерполирования $x_0, x_1, \ldots, x_n$ коэффициент при x^n будет равен

$$\frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}}.$$

Коэффициент же при x^n в интерполяционной формуле Ньютона для неравных промежутков равен $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом,

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_n) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

Из этого выражения нетрудно получить все те свойства разделенных разностей, о которых говорилось ранее.

3. Остаточный член формулы Ньютона. Остаточный член формулы Ньютона точно такой же, как и у формулы Лагранжа. Но его можно записать и в другой форме. Для этого рассмотрим

$$f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) = \frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)} + \\ + \frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)} + \ldots \\ \ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n-x)(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})}. \tag{8}$$

Отсюда

$$f(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + \ldots \\ \ldots + f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} + \\ + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n). \tag{9}$$

Итак,

$$f(x) = L_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n). \tag{10}$$

Таким образом,

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \\ = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_n)f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n). \tag{11}$$

В частности, если $f(x)$ имеет производную порядка $n+1$, то получим:

$$f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{12}$$

Здесь ξ — некоторая точка, принадлежащая наименьшему промежутку, содержащему все точки $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$.

Разделенная разность $f(x; x_0; \ldots; x_n)$, входящая в выражение остаточного члена, может быть найдена только в том случае, когда нам известно $f(x)$. Но тогда нет большого смысла использовать интерполяционную формулу Ньютона. Однако в некоторых случаях последнюю форму остаточного члена можно использовать для фактической оценки погрешности, даваемой интерполяционной формулой Ньютона.

Пусть нам известно из каких-то дополнительных соображений, что разделенные разности порядков $n+1$ и $n+2$ сохраняют постоянные знаки на рассматриваемом отрезке. Тогда используем равенства

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} (x - x_0) \ldots (x - x_{i-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_i) + \\ + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n),$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n+1} (x - x_0) \ldots (x - x_{i-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_i) + \\ + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n+1}) f(x; x_0; x_1; \ldots; x_{n+1}).$$

Для данного x всегда можно подобрать x_{n+1} так, что R_n и R_{n+1} будут иметь различные знаки. Если $f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n)$ и $f(x; x_0; x_1; \ldots; x_{n+1})$ имеют одинаковые знаки, то берем $x_{n+1} > x$; если они имеют разные знаки, то берем $x_{n+1} < x$. Но тогда, если взять вместо $f(x)$ значения интерполяционных многочленов с $n+1$ и $n+2$ членами, то получим в одном случае значение, большее $f(x)$, в другом — меньшее. Следовательно, абсолютная величина ошибки, которая получается в результате использования первой формулы, не может превышать абсолютной величины

$$(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) f(x_0; x_1; x_2; \ldots; x_{n+1})$$

и имеет такой же знак, как и эта величина. В этом случае, если $f(x_{n+1})$ известно, мы можем фактически оценить R_n.

Рассмотрим еще один случай. Пусть на отрезке $[a, b]$, где берутся x и узлы интерполирования, функция $f(x)$ имеет производную $f^{(n+2)}(x)$, сохраняющую свой знак. Покажем, что в этом случае $f(x; x_0; \ldots; x_n)$ — монотонная функция x на $[a, b]$. Для этого образуем

$$z = \frac{f(\bar{x}; x_0; \ldots; x_n) - f(\bar{\bar{x}}; x_0; \ldots; x_n)}{\bar{x} - \bar{\bar{x}}},$$

где $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ — некоторые точки отрезка $[a, b]$. В силу симметрии разделенных разностей относительно своих аргументов будем иметь:

$$z = \frac{f(\bar{x}; x_0; \ldots; x_n) - f(x_0; x_1; \ldots; x_n; \bar{\bar{x}})}{\bar{x} - \bar{\bar{x}}},$$

а это есть не что иное, как разделенная разность $f(\bar{x};\ \bar{\bar{x}};\ x_0;\ \ldots;\ x_n)$ порядка $n+2$ функции $f(x)$. Но из равенства (12) получим:

$$z = f(\bar{x};\ \bar{\bar{x}};\ x_0;\ \ldots;\ x_n) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}.$$

Следовательно, z сохраняет свой знак на $[a, b]$. Если $f^{(n+2)}(x) > 0$, то при любых $\bar{x} \in [a, b]$ и $\bar{\bar{x}} \in [a, b]$ $(\bar{x} > \bar{\bar{x}})$ будем иметь:

$$f(\bar{x};\ x_0;\ x_1;\ \ldots,\ x_n) > f(\bar{\bar{x}};\ x_0;\ \ldots;\ x_n).$$

При $f^{(n+2)}(x) < 0$ и любых $\bar{x} \in [a, b]$, $\bar{\bar{x}} \in [a, b]$ будем иметь:

$$f(\bar{x};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n) < f(\bar{\bar{x}};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n).$$

В этих случаях R может быть оценено, если нам известны $f(a)$ и $f(b)$.

Как мы видели, для многочленов разделенные разности, начиная с некоторого порядка, обращаются в нуль. Для функций, не являющихся многочленами, этого не будет. Позже мы покажем, что для так называемых целых функций разделенные разности стремятся к нулю. Но эта картина будет нарушаться благодаря тому, что сами исходные данные обычно бывают приближенными, а в процессе вычисления разделенных разностей мы вынуждены делать округления. Чаще всего наблюдается такая картина: сначала разделенные разности убывают с повышением порядка, а затем ведут себя неправильно и снова растут.

Так, например, выглядит таблица разделенных разностей для функции $f(x) = \sin x$:

x_i	$\sin x_i$	$f(x_i;\ x_{i+1})$	$f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2})$	$f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2};\ x_{i+3})$
0°	0,0000			
		0,01731		
13°	0,2250		— 0,000033	
		0,01652		— 0,0000008
24°	0,4067		— 0,000063	
		0,01501		— 0,0000008
37°	0,6018		— 0,000094	
		0,01219		— 0,0000006
54°	0,8090		— 0,000120	
		0,00858		— 0,0000005
67°	0,9205		— 0,000140	
		0,00509		— 0,0000002
79°	0,9816		— 0,000149	
		0,00167		
90°	1,0000			

Разности четвертого порядка будут вести себя неправильно, разности пятого и более высоких порядков снова начнут возрастать. Ясно, что нет большого смысла использовать их в вычислениях, так как они сильно искажены различными погрешностями.

Узлы интерполяции, лежащие ближе всего к интерполируемому значению x, окажут большее влияние на интерполяционный многочлен, лежащие дальше — меньшее. Поэтому целесообразно за x_0 и x_1 взять ближайшие к x узлы интерполирования и произвести сначала линейную интерполяцию по этим узлам. Затем постепенно привлекать следующие узлы так, чтобы они возможно симметричнее располагались относительно x. Полученные при этом поправки будут обычно незначительны. Чтобы проиллюстрировать это, дадим здесь результаты вычислений по приведенной ниже таблице. При помощи интерполяционной формулы Ньютона были вычислены значения $\sin x$ для углов 5°, 10°, ... В первом столбце даны аргументы, во втором — результаты линейной интерполяции, в третьем — поправки за счет вторых и третьих разностей, в четвертом — окончательные результаты интерполяции и в пятом — точные значения $\sin x$ с четырьмя десятичными знаками:

5°	0,08655	0,00072	0,08727	0,0872
10°	0,17310	0,00066	0,17376	0,1736
15°	0,25804	0,00081	0,25885	0,2588
20°	0,34064	0,00137	0,34201	0,3420
25°	0,42171	0,00088	0,42259	0,4226
30°	0,49676	0,00323	0,49999	0,5000
35°	0,57181	0,00178	0,57359	0,5736
40°	0,63837	0,00487	0,64274	0,6428
45°	0,69932	0,00770	0,70702	0,7071
50°	0,76027	0,00572	0,76599	0,7660
55°	0,81758	0,00155	0,81913	0,8192
60°	0,86048	0,00554	0,86602	0,8660
65°	0,90338	0,00295	0,90633	0,9063
70°	0,93577	0,00386	0,93963	0,9397
75°	0,96122	0,00461	0,96583	0,9659
80°	0,98327	0,00152	0,98479	0,9848
85°	0,99162	0,00459	0,99621	0,9962

§ 6. Интерполяционные формулы Ньютона для равных промежутков

Естественно ожидать, что если промежутки между последовательными узлами интерполирования равны, т. е. $x_i - x_{i-1}$ — постоянная величина, то предыдущая формула упростится. Так оно и есть на самом деле. Прежде чем переходить к выводу формул, для этого случая введем понятие о конечных разностях.

1. Конечные разности и их свойства. Пусть для значений x: x_0, x_0+h, x_0+2h, ..., x_0+nh (h — шаг таблицы), нам известны значения функции $f(x)$: y_0, y_1, y_2, ..., y_n.

Назовем тогда разности

$$y_1-y_0,\quad y_2-y_1,\quad \ldots,\quad y_n-y_{n-1}$$

конечными разностями первого порядка.

В литературе используются самые различные обозначения конечных разностей:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{i+1}-y_i=\Delta y_i; & y_{i+1}-y_i=\nabla y_{i+1};\\ y_{i+1}-y_i=\delta y_{i+1/2}; & y_{i+1}-y_i=f^1_{i+1/2}. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Мы будем пользоваться последним обозначением.

Из разностей первого порядка можно образовать конечные разности второго порядка:

$$\left.\begin{array}{l} f^1_{3/2}-f^1_{1/2}=f^2_1;\quad f^1_{5/2}-f^1_{3/2}=f^2_2,\ \ldots,\ f^1_{(2i+1)/2}-f^1_{(2i-1)/2}=f^2_i,\ \ldots\\ \Delta y_1-\Delta y_0=\Delta^2 y_0,\quad \Delta y_2-\Delta y_1=\Delta^2 y_1,\ \ldots,\ \Delta y_{i+1}-\Delta y_i=\Delta^2 y_i,\ \ldots\\ \nabla y_2-\nabla y_1=\nabla^2 y_2,\ \nabla y_3-\nabla y_2=\nabla^2 y_3,\ \ldots,\ \nabla y_{i+1}-\nabla y_i=\nabla^2 y_{i+1},\ \ldots\\ \delta y_{3/2}-\delta y_{1/2}=\delta^2 y_1,\ \delta y_{5/2}-\delta y_{3/2}=\delta^2 y_2,\ \ldots,\ \delta y_{(2i+1)/2}-\delta y_{(2i-1)/2}=\delta^2 y_i\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Аналогично можно образовать разности третьего порядка, четвертого и так далее. Таблицу разностей обычно располагают следующим образом:

x	f	f^1	f^2	f^3
x_0	f_0			
		$f^1_{1/2}$		
x_1	f_1		f^2_1	
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$
x_2	f_2		f^2_2	
		$f^1_{5/2}$		$f^3_{5/2}$
x_3	f_3		f^2_3	
		$f^1_{7/2}$		
x_4	f_4			

Так, например, таблица конечных разностей для функции x^3 будет выглядеть следующим образом:

x	f	f^1	f^2	f^3
0	0			
		1		
1	1		6	
		7		6
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		
5	125			

Практические вычисления требуют наличия контролирующих операций на всех этапах работы. Это застрахует от грубых просчетов или по крайней мере сведет их к минимуму. Такие контролирующие операции чрезвычайно просто получаются при составлении таблицы разностей.

Очевидно,

$$f^1_{1/2}+f^1_{3/2}+\ldots+f^1_{n-1/2}=f_1-f_0+f_2-f_1+\ldots+f_n-f_{n-1}=f_n-f_0,$$

$$f^2_1+f^2_2+\ldots+f^2_{n-1}=$$

$$=f^1_{3/2}-f^1_{1/2}+f^1_{5/2}-f^1_{3/2}+\ldots+f^1_{n-1/2}-f^1_{n-3/2}=f^1_{n-1/2}-f^1_{1/2},$$

т. е. *сумма чисел в каждом столбце разностей равна разности крайних чисел предыдущего столбца.* Поэтому целесообразно ввести в дополнение к таблице еще две строки: строку Σ, равную сумме чисел, стоящих в столбце, и строку S, равную разности крайних чисел столбца, и использовать предыдущие рассуждения. Для предыдущего примера эти строки будут таковы:

Σ		125	60	18
S	125	60	18	0

В некоторых интерполяционных формулах используют наряду с теми значениями f_i и разностей, которые у нас имеются, еще сред-

ние арифметические:

$$\frac{f_0+f_1}{2}=f_{1/2},\quad \frac{f_1+f_2}{2}=f_{3/2},\ \ldots,\quad \frac{f_i+f_{i+1}}{2}=f_{i+1/2},\ \ldots$$

$$\frac{f^1_{1/2}+f^1_{3/2}}{2}=f^1_1,\quad \frac{f^1_{3/2}+f^1_{5/2}}{2}=f^1_2,\ \ldots,\quad \frac{f^1_{i-1/2}+f^1_{i+1/2}}{2}=f^1_i,\ \ldots \tag{3}$$

$$\frac{f^2_1+f^2_2}{2}=f^2_{3/2},\quad \frac{f^2_2+f^2_3}{2}=f^2_{5/2},\ \ldots,\quad \frac{f^2_i+f^2_{i+1}}{2}=f^2_{i+1/2},\ \ldots$$

. . . . . .

В тех случаях, когда для обозначения разностей употребляют значок δ, для средних арифметических используют значок $\mu\delta$. Так, последний столбец в этих обозначениях будет выглядеть следующим образом:

$$\mu\delta^0 y_{i+1/2},\quad \mu\delta y_i,\quad \mu\delta^2 y_{i+1/2},\ \ldots \tag{4}$$

Разберем теперь некоторые свойства конечных разностей. Прежде всего найдем *выражение разности любого порядка непосредственно через значения функции*. Будем иметь:

$$f^1_{i+1/2}=f_{i+1}-f_i,$$
$$f^2_i=f^1_{i+1/2}-f^1_{i-1/2}=f_{i+1}-2f_i+f_{i-1},$$
$$f^3_{i+1/2}=f^2_{i+1}-f^2_i=f_{i+2}-3f_{i+1}+3f_i-f_{i-1}.$$

Покажем, что общее выражение для f^k_i будет:

$$f^k_i=f_{i+k/2}-C^1_k f_{i-1+k/2}+C^2_k f_{i-2+k/2}-\ \ldots$$
$$\ldots+(-1)^m C^m_k f_{i-m+k/2}+\ \ldots\ +(-1)^k f_{i-k/2}. \tag{5}$$

Для $k=1$, 2, 3 эта формула верна, что видно из предыдущих выражений. Предположим, что она верна для всех $k\leqslant l$, и докажем, что тогда она справедлива и для $k=l+1$. Разность порядка $l+1$ f^{l+1}_i будет равна

$$f^{l+1}_i=f^l_{i+1/2}-f^l_{i-1/2}=\{f_{i+1/2+l/2}-C^1_l f_{i-1/2+l/2}+C^2_l f_{i-3/2+l/2}-\ \ldots$$
$$\ldots+(-1)^m C^m_l f_{i+1/2-m+l/2}+\ \ldots\ +(-1)^l f_{i+1/2-l/2}\}-$$
$$-\{f_{i-1/2+l/2}-C^1_l f_{i-3/2+l/2}+C^2_l f_{i-5/2+l/2}-\ \ldots$$
$$\ldots+(-1)^m C^m_l f_{i-1/2-m+l/2}+\ \ldots\ +(-1)^l f_{i-1/2-l/2}\}.$$

Но

$$C_l^m + C_l^{m+1} = \frac{l!}{m!\,(l-m)!} + \frac{l!}{(m+1)!\,(l-m-1)!} = \\ = \frac{(l+1)!}{(m+1)!\,(l-m)!} = C_{l+1}^{m+1}.$$

Следовательно,

$$f_i^{l+1} = f_{i+(l+1)/2} - C_{l+1}^1 f_{i-1+(l+1)/2} + \ldots \\ \ldots + (-1)^m C_{l+1}^m f_{i-m+(l+1)/2} + \ldots + (-1)^{l+1} f_{i-(l+1)/2},$$

что и требовалось доказать.

Из полученной формулы, в силу линейной зависимости f_i^k от f_i, выводим:

Следствие 1. *Конечные разности f_i^k суммы или разности функций $f = \varphi \pm g$ равны сумме или разности конечных разностей функций φ и g:*

$$f_i^k = \varphi_i^k \pm g_i^k.$$

Следствие 2. *При умножении функции на постоянный множитель конечные разности умножаются на тот же множитель.*

Установим еще *связь между конечными разностями и разделенными разностями для того* случая, когда $x_i - x_{i-1}$ постоянна. Будем иметь:

$$f(x_i;\ x_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1/2}^1}{h},$$

$$f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1};\ x_{i+2}) - f(x_i;\ x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} = \frac{f_{i+3/2}^1 - f_{i+1/2}^1}{2h \cdot h} = \frac{f_{i+1}^2}{2h^2}.$$

Вообще,

$$f(x_i;\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+k}) = \frac{f_{i+k/2}^k}{k!\,h^k}. \tag{6}$$

Доказательство опять будем вести методом индукции. Предполагая формулу справедливой для $k \leqslant l$, докажем ее справедливость для $k = l + 1$.

Действительно,

$$f(x_i;\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+l+1}) = \frac{f(x_{i+1};\ldots;\ x_{i+l+1}) - f(x_i;\ldots;\ x_{i+l})}{x_{i+l+1} - x_i} = \\ = \frac{f_{i+1+l/2}^l - f_{i+l/2}^l}{(l+1)\,h \cdot l!\,h^l} = \frac{f_{i+(l+1)/2}^{l+1}}{(l+1)!\,h^{l+1}}.$$

Как следствие этой формулы и результатов, полученных ранее для разделенных разностей, получаем:

Следствие 3. *Конечные разности n-го порядка от многочлена степени n постоянны, а конечные разности $(n+1)$-го порядка равны нулю.*

Последнее свойство позволяет дать простой *способ составления таблиц многочленов.* Непосредственно вычисляем значения многочлена для $n+1$ значений аргумента. По этим данным составляем таблицу разностей. В нее войдут разности до n-го порядка. Далее, заполняем столбец разностей n-го порядка, пользуясь тем, что они постоянны, затем заполняем столбец разностей $(n-1)$-го порядка. Для их получения складываем соответствующие разности $(n-1)$-го порядка с разностями n-го порядка. Затем последовательно заполняем столбец разностей $(n-2)$-го порядка, $(n-3)$-го порядка и так далее, пока не получим столбец $f(x_i)$. Так, например, полученная нами таблица функции $y=x^3$ будет продолжаться следующим образом:

x	f	f^1	f^2	f^3
0	0			
		1		
1	1		6	
		7		6
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		6
5	125		30	
		91		6
6	216		36	
		127		6
7	343		42	
		169		
8	512			

При практическом применении этого приема с целью исключения грубых просчетов целесообразно время от времени производить вычисления многочленов непосредственно. Это обеспечит и от накопления ошибок округления, если мы ведем вычисления не точно, а с каким-то заданным количеством десятичных знаков.

Интересно проследить *распространение ошибки, сделанной при вычислении $f(x)$ на конечные разности различных порядков.* В приведенной ниже таблице это указано в предположении, что ошибка величины ε сделана при вычислении f_i.

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
...	...	...			
x_{i-4}	f_{i-4}	$f^1_{i-7/2}$	...	...	
x_{i-3}	f_{i-3}	$f^1_{i-5/2}$	f^2_{i-3}	$f^3_{i-5/2}$	...
x_{i-2}	f_{i-2}	$f^1_{i-3/2}$	f^2_{i-2}	$f^3_{i-3/2}+\varepsilon$	$f^4_{i-2}+\varepsilon$
x_{i-1}	f_{i-1}	$f^1_{i-1/2}+\varepsilon$	$f^2_{i-1}+\varepsilon$	$f^3_{i-1/2}-3\varepsilon$	$f^4_{i-1}-4\varepsilon$
x_i	$f_i+\varepsilon$	$f^1_{i+1/2}-\varepsilon$	$f^2_i-2\varepsilon$	$f^3_{i+1/2}+3\varepsilon$	$f^4_i+6\varepsilon$
x_{i+1}	f_{i+1}	$f^1_{i+3/2}$	$f^2_{i+1}+\varepsilon$	$f^3_{i+3/2}-\varepsilon$	$f^4_{i+1}-4\varepsilon$
x_{i+2}	f_{i+2}	$f^1_{i+5/2}$	f^2_{i+2}	$f^3_{i+5/2}$	$f^4_{i+2}+\varepsilon$
x_{i+3}	f_{i+3}	$f^1_{i+7/2}$	f^2_{i+3}	...	...
x_{i+4}	f_{i+4}	...	...		
...	...				

Таким образом, ошибка с коэффициентами C_k^m распространится на разности порядка k. При этом максимальные по модулю ошибки будут иметь разности, ближайшие к строке, в которой находится f_i. Этот результат можно так же получить из формулы, связывающей конечные разности непосредственно со значениями функции.

2. Вывод интерполяционных формул Ньютона. Перейдем теперь к выводу интерполяционных формул Ньютона. Для этого рассмотрим формулу Ньютона для неравных промежутков, взяв в ней в качестве узлов интерполирования $x_0, x_1, \ldots, x_n$ точки $x_0, x_0+h, \ldots, x_0+nh$. При этом, заменяя разделенные разности их выражениями через конечные разности, получим:

$$L_n(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{h} f^1_{1/2} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} f^2_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!\,h^3} f^3_{3/2} + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!\,h^n} f^n_{n/2}. \quad (7)$$

Обозначим $\frac{x-x_0}{h}=t$, тогда наша формула примет вид

$$L_n(x_0+ht)=f_0+tf^1_{1/2}+\frac{t(t-1)}{2!}f^2_1+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}f^3_{3/2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{t(t-1)\ldots[t-(n-1)]}{n!}f^n_{n/2}. \qquad (8)$$

Полученную формулу называют *интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед*. Использованные в ней разности расположены по диагонали вниз, начиная с f_0:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
x_0	$\underline{f_0}$					
		$\underline{f^1_{1/2}}$				
x_1	f_1		$\underline{f^2_1}$			
		$f^1_{3/2}$		$\underline{f^3_{3/2}}$		
x_2	f_2		f^2_2		$\underline{f^4_2}$	
		$f^1_{5/2}$		$f^3_{5/2}$		$\underline{f^5_{5/2}}$
x_3	f_3		f^2_3		f^4_3	
		$f^1_{7/2}$		$f^3_{7/2}$		
x_4	f_4		f^2_4			
		$f^1_{9/2}$				
x_5	f_5					

Приведем пример на вычисление по интерполяционной формуле Ньютона для интерполирования вперед. Пусть нам даны $\sin 5°$, $\sin 7°$, $\sin 9°$, $\sin 11°$, $\sin 13°$, $\sin 15°$ и требуется найти $\sin 6°$. Таблица разностей будет выглядеть так:

x	$\sin x$	f^1	f^2	f^3	f^4
5°	0,087156				
		34713			
7°	0,121869		—148		
		34565		—42	
9°	0,156434		—190		—1
		34375		—43	
11°	0,190809		—233		+2
		34142		—41	
13°	0,224951		—274		
		33868			
15°	0,258819				

При написании разностей ради сокращения мы вносили в таблицу лишь значащие цифры; такой способ записи таблиц конечных разностей является общепринятым.

Изучая таблицу, обнаруживаем, что третьи разности почти постоянны, а разности четвертого и следующих порядков меняются неправильно. Это в значительной мере объясняется тем, что мы использовали приближенные значения $\sin x$. Ошибка каждого из них может достигать пяти единиц седьмого десятичного знака. Следовательно, абсолютная погрешность первых разностей может достигать единицы шестого знака, вторых — двух единиц шестого знака, третьих — четырех, а четвертых — восьми. Погрешность в четвертых разностях может превышать их величину. Поэтому в дальнейших вычислениях мы будем использовать только третьи разности.

За x_0 возьмем одно из ближайших значений к $x = 6°$, а именно возьмем $x_0 = 5°$. Тогда $t = \frac{x - x_0}{h} = {}^1/_2$ и вычисления примут следующий вид:

$$\begin{aligned} f_0 = \sin 5° &= 0{,}087156, \\ t f^1_{1/2} = 0{,}5 \cdot 0{,}034713 &= 0{,}0073565, \\ \frac{t(t-1)}{2} f^2_1 = \frac{1}{8} \cdot 0{,}000148 &= 0{,}0000185, \\ \frac{t(t-1)(t-2)}{6} f^3_{1/2} = -\frac{1}{16} \cdot 0{,}000042 &= -0{,}0000026, \\ \hline L_3(6°) = &\ 0{,}104528. \end{aligned}$$

Точное значение $\sin 6°$ с шестью верными десятичными знаками равно 0,104528. Таким образом, все знаки получились верными.

В процессе вычислений мы сохраняли седьмой десятичный знак. В окончательном ответе мы его округлили.

Выведем еще одну интерполяционную формулу Ньютона. Опять будем использовать интерполяционную формулу Ньютона для неравных промежутков, но теперь за узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ возьмем точки $x_0, x_0 - h, \ldots, x_0 - nh$. При этом получим:

$$\begin{aligned} L_n(x) = f(x_0) &+ (x - x_0) f(x_0;\ x_0 - h) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_0 + h) f(x_0;\ x_0 - h;\ x_0 - 2h) + \ldots \\ \ldots &+ (x - x_0)(x - x_0 + h) \ldots [x - x_0 + (n-1)h] \times \\ &\times f(x_0;\ x_0 - h;\ \ldots;\ x_0 - nh). \end{aligned}$$

Но в силу симметрии разделенных разностей относительно своих

аргументов будем иметь:

$$f(x_0;\ x_0-h;\ \ldots;\ x_0-ih)=$$
$$=f(x_0-ih;\ x_0-ih+h;\ \ldots;\ x_0-h;\ x_0),$$

Снова заменим разделенные разности конечными

$$f(x_0-ih;\ x_0-ih+h;\ \ldots;\ x_0)=\frac{f^i_{-i/2}}{i!\,h^i}.$$

Отсюда

$$L_n(x)=f_0+\frac{x-x_0}{h}f^1_{-1/2}+\frac{(x-x_0)(x-x_0+h)}{2!\,h^2}f^2_{-1}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_0+h)\ldots[x-x_0+(n-1)h]}{n!\,h^n}f^n_{-n/2}. \quad (9)$$

Заменяя, как и прежде, $\frac{x-x_0}{h}$ на t, получим:

$$L_n(x_0+th)=f_0+tf^1_{-1/2}+\frac{t(t+1)}{2!}f^2_{-1}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{t(t+1)\ldots[t+(n-1)\ ]}{n!}f^n_{-n/2}. \quad (10)$$

Это есть *интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад*. В ней используются разности, идущие по диагонали вверх, как это показано в таблице:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_{-4}	f_{-4}				
		$f^1_{-7/2}$			
x_{-3}	f_{-3}		f^2_{-3}		
		$f^1_{-5/2}$		$f^3_{-5/2}$	
x_{-2}	f_{-2}		f^2_{-2}		f^4_{-2}
		$f^1_{-3/2}$		$f^3_{-3/2}$	
x_{-1}	f_{-1}		f^2_{-1}		
		$f^1_{-1/2}$			
x_0	f_0				

Приведем вычислительный пример на использование формулы Ньютона для интерполирования назад. По тем же данным, что и в предыдущем примере, найдем $\sin 14°$. За x_0 в этом случае

возьмем 15°. Тогда $t = \frac{14° - 15°}{2°} = -\frac{1}{2}$ и вычисления дадут:

$$\begin{aligned} f_0 = \sin 15° &= 0{,}258819, \\ tf^1_{-1/2} = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}033868 &= -0{,}016934, \\ \frac{t(t+1)}{2} f^2_{-1} = \frac{1}{8} \cdot 0{,}000274 &= 0{,}00003425, \\ \frac{t(t+1)(t+2)}{6} f^3_{-3/2} = \frac{1}{16} \cdot 0{,}000041 &= 0{,}0000025, \\ \hline L_3(14°) &= 0{,}241922. \end{aligned}$$

Опять ответ получился с шестью верными десятичными знаками.

Мы получили две новые формулы интерполирования и несколько позже получим еще ряд таких формул. Но нужно твердо помнить, что каждая из них является другой формой записи интерполяционного многочлена Лагранжа. Поэтому, если отвлечься от различия в обозначениях и в форме записи, все эти формулы тождественны. При этом, конечно, предполагается, что в них использованы одни и те же узлы интерполирования. Однако специалисты-вычислители применяют в различных случаях разные формулы. Дело связано с тем, что обычно бывает удобнее вести вычисления, если при интерполировании сначала используются ближайшие к x узлы, а затем постепенно подключаются все более удаленные. При этом первые члены интерполяционных формул дадут основной вклад в искомую величину, а остальные будут давать лишь небольшие поправки. В этом случае легче избежать просчетов, легче установить, на какой разности следует закончить вычисления. Чаще всего интерполяционные формулы для равных промежутков применяют для значений t, не выходящих за пределы промежутка $[-1, 1]$. Но так как t в различных интерполяционных формулах имеют различный смысл, то разные интерполяционные формулы будут использовать разные участки изменения x в интерполяционной формуле Лагранжа. В § 3 мы видели, что точность интерполирования на разных участках изменения x разная. В этом смысле мы можем сравнивать по точности различные интерполяционные формулы.

3. Остаточные члены интерполяционных формул Ньютона. Сейчас мы перейдем к исследованию остаточных членов интерполяционных формул Ньютона для интерполирования вперед и назад. Для первой формулы получим:

$$R_n = (x - x_0)(x - x_0 - h) \ldots (x - x_0 - nh) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1)(t-2) \ldots (t-n). \qquad (11)$$

Для второй

$$R_n = (x - x_0)(x - x_0 + h) \dots (x - x_0 + nh) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t+1) \dots (t+n). \qquad (12)$$

В некоторых случаях, особенно когда значения f_i получены из эксперимента, бывает очень трудно оценить величину производной $f^{(n+1)}(\xi)$. Дадим здесь простой, хотя и очень грубый способ такой оценки. Как известно из предыдущего параграфа,

$$f(x_0;\ x_0 + h;\ \dots;\ x_0 + (n+1)h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \qquad (13)$$

С другой стороны,

$$f(x_0;\ x_0 + h;\ \dots;\ x_0 + (n+1)h) = \frac{f^{n+1}_{\frac{n+1}{2}}}{h^{n+1}(n+1)!}. \qquad (14)$$

Считая, что на рассматриваемом отрезке производная $f^{(n+1)}(x)$, следовательно и разности f_i^{n+1}, меняется не сильно, мы можем заменить производную, входящую в остаточный член, разностью и получить

$$R_n \approx \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}_{\frac{n+1}{2}}. \qquad (15)$$

Аналогично для второй формулы

$$R_n \approx \frac{t(t+1) \dots (t+n)}{(n+1)!} f^{n+1}_{-\frac{n+1}{2}}. \qquad (16)$$

Нужно еще раз подчеркнуть, что полученные формулы очень грубы и применять их можно только в случае крайней необходимости. Если не выполнено условие о том, что производная меняется незначительно, то можно получить совершенно нелепый результат. Так, например, рассмотрим функцию

$$f(x) = x + k \sin \pi x,$$

и пусть в качестве узлов интерполирования использованы целочисленные значения $x_i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots$ Тогда разности ведут себя очень хорошо и уже, начиная со второго порядка, точно равны нулю. Следовательно, на основании грубой оценки мы получили бы, что $f(x)$ — линейная функция. Однако на самом деле $x + k \sin \pi x$ при больших k будет сильно отличаться от линейной функции. По грубой оценке ошибка интерполяционной формулы равна первому отброшенному члену.

Для того чтобы можно было сравнивать по точности различные интерполяционные формулы, приведем здесь значения коэффициентов

$$\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!}$$

для значений t на отрезке $[-1, 1]$. Мы их будем брать по абсолютной величине. Эти абсолютные значения будут пригодны и для интерполяционной формулы Ньютона для интерполирования назад с заменой t на $-t$. Поэтому в левом столбце мы дадим значения t для формулы Ньютона для интерполирования вперед, а в самом правом — для интерполирования назад:

t \ n	1	2	3	4	n \ t
−1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	+1,0
−0,9	0,86	0,83	0,81	0,79	+0,9
−0,8	0,72	0,67	0,64	0,61	+0,8
−0,7	0,60	0,54	0,50	0,47	+0,7
−0,6	0,48	0,42	0,37	0,34	+0,6
−0,5	0,38	0,31	0,27	0,25	+0,5
−0,4	0,28	0,22	0,19	0,17	+0,4
−0,3	0,20	0,15	0,12	0,11	+0,3
−0,2	0,12	0,09	0,07	0,06	+0,2
−0,1	0,06	0,04	0,03	0,02	+0,1
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,0
+0,1	0,045	0,028	0,021	0,016	−0,1
+0,2	0,080	0,048	0,034	0,026	−0,2
+0,3	0,150	0,059	0,041	0,030	−0,3
+0,4	0,120	0,064	0,042	0,030	−0,4
+0,5	0,125	0,062	0,039	0,027	−0,5
+0,6	0,120	0,056	0,034	0,023	−0,6
+0,7	0,105	0,045	0,026	0,017	−0,7
+0,8	0,080	0,032	0,018	0,011	−0,8
+0,9	0,045	0,016	0,009	0,005	−0,9
+1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	−1,0

Как и всегда, погрешности экстраполяции значительно превышают погрешности интерполяции.

Приведем еще таблицу значений неустранимой погрешности для наших формул, точнее таблицу коэффициентов при ρ (см. (7) § 3). Значения взяты из таблицы на стр. 97 с соответствующим видоизменением значений t. Опять левый столбец будет соответствовать интерполяционной формуле Ньютона для интерполирования вперед, а правый для интерполирования назад.

t \ n	1	2	3	4	n \ t
— 1,0	1,5	3,5	7,5	15	+ 1,0
— 0,9	1,4	3,1	6,4	13	+ 0,9
— 0,8	1,3	2,7	5,4	11	+ 0,8
— 0,7	1,2	2,4	4,5	8,5	+ 0,7
— 0,6	1,1	2,1	3,7	6,7	+ 0,6
— 0,5	1,0	1,7	3,0	5,2	+ 0,5
— 0,4	0,9	1,5	2,3	3,4	+ 0,4
— 0,3	0,8	1,2	1,8	2,8	+ 0,3
— 0,2	0,7	1,0	1,3	1,9	+ 0,2
— 0,1	0,6	0,71	0,86	1,1	+ 0,1
0,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,0
+ 0,1	0,5	0,54	0,63	0,76	— 0,1
+ 0,2	0,5	0,58	0,72	0,96	— 0,2
+ 0,3	0,5	0,60	0,78	1,06	— 0,3
+ 0,4	0,5	0,62	0,81	1,10	— 0,4
+ 0,5	0,5	0,62	0,81	1,1	— 0,5
+ 0,6	0,5	0,62	0,79	1,0	— 0,6
+ 0,7	0,5	0,60	0,74	0,92	— 0,7
+ 0,8	0,5	0,58	0,68	0,80	— 0,8
+ 0,9	0,5	0,54	0,59	0,66	— 0,9
+ 1,0	0,5	0,5	0,5	0,5	— 1,0

На этом мы временно оставим интерполяционные формулы Ньютона и перейдем к выводу других формул. Недостатком формул Ньютона при интерполировании в промежутке изменения от —1 до 1 является то, что узлы интерполирования расположены несимметрично относительно x_0. Сейчас мы получим формулы, свободные от этого недостатка.

§ 7. Интерполяционные формулы, использующие центральные разности

1. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя и Эверетта. Опять воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона для неравных промежутков ((6) § 5) и возьмем в качестве узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ точки $x_0, x_0+h, x_0-h, \ldots, x_0+nh, x_0-nh, \ldots$

Тогда

$$L(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x_0; x_0+h) + (x-x_0) \times$$
$$\times (x-x_0-h) f(x_0; x_0+h; x_0-h) + \ldots + (x-x_0)(x-x_0-h) \times$$
$$\times (x-x_0+h) \ldots (x-x_0-nh)(x-x_0+nh) f(x_0; x_0+h; x_0-h; \ldots$$
$$\ldots; x_0+nh; x_0-nh; x_0+(n+1)h) + \ldots \quad (1)$$

Используя симметричность разделенных разностей относительно своих аргументов и их связь с конечными разностями, получим:

$$f(x_0; x_0+h; x_0-h; \ldots; x_0+kh; x_0-kh) = \frac{f_0^{2k}}{(2k)!\, h^{2k}}, \quad (2)$$

$$f(x_0;\ x_0+h;\ x_0-h;\ \ldots;\ x_0-(k-1)h;\ x_0+kh)=\frac{f^{2k-1}_{1/2}}{(2k-1)!\,h^{2k-1}}. \tag{3}$$

Отсюда

$$L(x)=f_0+\frac{x-x_0}{h}f^1_{1/2}+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!\,h^2}f^2_0+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)}{3!\,h^3}f^3_{1/2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\ldots(x-x_0+(n-1)h)}{(2n-1)!\,h^{2n-1}}f^{2n-1}_{1/2}+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\ldots(x-x_0+(n-1)h)(x-x_0-nh)}{(2n)!\,h^{2n}}f^{2n}_0+\ldots \tag{4}$$

Обозначив, как и ранее,

$$\frac{x-x_0}{h}=t,$$

получим:

$$L(x_0+th)=f_0+tf^1_{1/2}+\frac{t(t-1)}{2!}f^2_0+\frac{t(t^2-1)}{3!}f^3_{1/2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}f^{2n-1}_{1/2}+$$
$$+\frac{t(t^2-1^2)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}f^{2n}_0+\ldots \tag{5}$$

Это — *интерполяционная формула Гаусса*. В ней используются следующие разности (подчеркнуты черточкой):

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_{-3}	f_{-3}				
		$f^1_{-5/2}$			
x_{-2}	f_{-2}		f^2_{-2}		
		$f^1_{-3/2}$		$f^3_{-3/2}$	
x_{-1}	f_{-1}		f^2_{-1}		f^4_{-1}
		$f^1_{-1/2}$		$f^3_{-1/2}$	
x_0	$\underline{f_0}$		$\underline{f^2_0}$		$\underline{f^4_0}$
		$\underline{f^1_{1/2}}$		$\underline{f^3_{1/2}}$	
x_1	f_1		f^2_1		f^4_1
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$	
x_2	f_2		f^2_2		
		$f^1_{5/2}$			
x_3	f_3				

Если бы мы взяли узлы интерполирования в другом порядке, а именно: x_0, x_0-h, x_0+h, ..., x_0-nh, x_0+nh, то совершенно аналогично получили бы вторую формулу Гаусса:

$$L(x_0+th)=f_0+tf^1_{-1/2}+\frac{t(t+1)}{2!}f^2_0+\frac{t(t^2-1^2)}{3!}f^3_{-1/2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!}f^{2n-1}_{-1/2}+$$
$$+\frac{t(t^2-1^2)\ldots(t^2-(n-1)^2)(t+n)}{(2n)!}f^{2n}_0+\ldots \qquad (6)$$

Для того чтобы их можно было различить, будем называть *первую* из них *интерполяционной формулой Гаусса для интерполирования вперед, вторую — для интерполирования назад.* Интерполяционная формула Гаусса для интерполирования назад использует следующие разности:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_{-3}	f_{-3}				
		$f^1_{-5/2}$			
x_{-2}	f_{-2}		f^2_{-2}		
		$f^1_{-3/2}$		$f^3_{-3/2}$	
x_{-1}	f_{-1}		f^2_{-1}		f^4_{-1}
		$\underline{f^1_{-1/2}}$		$\underline{f^3_{-1/2}}$	
x_0	$\underline{f_0}$		$\underline{f^2_0}$		$\underline{f^4_0}$
		$f^1_{1/2}$		$f^3_{1/2}$	
x_1	f_1		f^2_1		f^4_1
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$	
x_2	f_2		f^2_2		
		$f^1_{5/2}$			
x_3	f_3				

Полусумма двух интерполяционных формул Гаусса даст нам:

$$L(x_0+th)=f_0+tf^1_0+\frac{t^2}{2!}f^2_0+\ldots$$
$$\ldots+\frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}f^{2n-1}_0+$$
$$+\frac{t^2(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}f^{2n}_0+\ldots, \qquad (7)$$

так как

$$\frac{1}{2}\left[\frac{t\,(t^2-1)\,(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]\,(t-n)}{(2n)!}+\right.$$

$$\left.+\frac{t\,(t^2-1^2)\,(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]\,(t+n)}{(2n)!}\right]=\frac{t^2\,(t^2-1^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!},$$

а

$$\frac{1}{2}\left[f^{2n-1}_{1/2}+f^{2n-1}_{-1/2}\right]=f^{2n-1}_{0}.$$

Мы получили *формулу Стирлинга*. В ней используются разности четного порядка с индексом 0 и полусуммы разностей нечетного порядка с индексами $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, как это показано в следующей таблице:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_{-2}	f_{-2}				
		$f^1_{-3/2}$			
x_{-1}	f_{-1}		f^2_{-1}		
		$\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} f^1_{-1/2} \\ f^1_{1/2} \end{matrix}\right\}$		$\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} f^3_{-1/2} \\ f^3_{1/2} \end{matrix}\right\}$	
x_0	$\underline{f_0}$		$\underline{f^2_0}$		$\underline{f^4_0}$
			f^2_1		
x_1	f_1	$f^1_{3/2}$			
x_2	f_2				

Приведем пример на вычисление по формуле Стирлинга. Пусть требуется найти $\sin 14°$ по значениям $\sin 9°$, $\sin 12°$, $\sin 15°$, $\sin 18°$, $\sin 21°$. Таблица разностей будет такова:

x	$\sin x$	f^1	f^2	f^3
9°	0,156434			
		51 478		
12°	0,207912		—571	
		50 907		—138
15°	0,258819		—709	
		50 198		—138
18°	0,309017		—847	
		49 351		
21°	0,358368			

За x_0 возьмем ближайшее к x узловое значение, т. е. 15°. Тогда $t = -\frac{1}{3}$ и вычисления дадут:

$$f_0 = \sin 15^\circ = 0{,}258819,$$

$$tf_0^1 = -\frac{1}{3} \cdot 0{,}0505525 = -168508,$$

$$\frac{t^2}{2!} f_0^2 = -\frac{1}{18} \cdot 0{,}000709 = -394,$$

$$\frac{t(t^2-1)}{3!} f_0^3 = -\frac{4}{81} \cdot 0{,}000138 = -69,$$

$$L(14^\circ) = 0{,}241922.$$

Все знаки верны.

Получим еще одну важную интерполяционную формулу. Для этого применим интерполяционную формулу Гаусса для интерполирования назад (6) к точке x_1. Тогда

$$L(x_1 + ht') = f_1 + t' f_{1/2}^1 + \frac{t'(t'+1)}{2!} f_1^2 + \frac{t'(t'^2-1^2)}{3!} f_{1/2}^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{t'(t'^2-1)\ldots[t'^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} f_{1/2}^{2n-1} +$$
$$+ \frac{t'(t'^2-1)\ldots[t'^2-(n-1)^2](t'+n)}{(2n)!} f_1^{2n} + \ldots \quad (8)$$

В этой формуле для обозначения параметра мы использовали t' вместо t, так как он равен $\frac{x-x_1}{h}$, а не $\frac{x-x_0}{h}$. Легко видеть, что $t' = t - 1$. Сделаем замену t' на t. Тогда получим:

$$L(x_0 + th) = f_1 + (t-1) f_{1/2}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_1^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f_{1/2}^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-2)^2](t-n+1)(t-n)}{(2n-1)!} f_{1/2}^{2n-1} +$$
$$+ \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!} f_1^{2n} + \ldots \quad (9)$$

Полусумма этой формулы и формулы Гаусса для интерполирования вперед (5) даст

$$L(x_0 + th) = f_{1/2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) f_{1/2}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_{1/2}^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!} f_{1/2}^{2n} +$$
$$+ \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)!} f_{1/2}^{2n+1}, \quad (10)$$

так как

$$\frac{1}{2}\left[\frac{t(t^2-1)\dots(t^2-n^2)}{(2n+1)!}+\frac{t(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n+1)(t-n)}{(2n+1)!}\right]=$$

$$=\frac{t(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)!},$$

а

$$\frac{1}{2}\left[f_1^2+f_0^{2n}\right]=f_{1/2}^{2n}.$$

Эта *формула* носит имя *Бесселя*. Она особенно удобна для интерполирования на середину, т. е. для $t=\frac{1}{2}$. Действительно, в этом случае все члены, содержащие разности нечетного порядка, обратятся в нуль. В формуле Бесселя используются следующие разности:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_{-2}	f_{-2}				
		$f^1_{-3/2}$			
x_{-1}	f_{-1}		f^2_{-1}		
		$f^1_{-1/2}$		$f^3_{-1/2}$	
x_0	f_0		f^2_0		f^4_0
	$\frac{1}{2}$	$f^1_{1/2}$	$\frac{1}{2}$	$f^3_{1/2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	f_1		f^2_1		f^4_1
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$	
x_2	f_2		f^2_2		
		$f^1_{5/2}$			
x_3	f_3				

В качестве примера на применение формулы Бесселя вычислим $\sin 16^\circ 30'$ по данным предыдущего примера. При этом, если в качестве x_0 взять снова 15°, то $t=\frac{1}{2}$. Вычисления дают:

$$f_{1/2}=\frac{1}{2}[f_0+f_1]=\frac{1}{2}(0{,}258819+0{,}309017)=0{,}283918,$$

$$\frac{t(t-1)}{2}f^2_{1/2}=-\frac{1}{16}[f^2_0+f^2_1]=-\frac{1}{16}(-709-847)\quad=\quad 972,$$

$$L(16^\circ 30')=0{,}284015.$$

Получили точное значение с шестью десятичными знаками.

Из используемых часто формул нам осталось получить еще только *формулу Эверетта*. Чтобы вывести ее, исключим разности нечетного порядка из формулы Гаусса для интерполирования вперед (5) при помощи соотношения

$$f^{2n+1}_{1/2}=f^{2n}_1-f^{2n}_0.$$

При этом у нас появятся члены с разностями f_1^{2n}, имеющие коэффициент

$$\frac{t(t^2-1^2)\dots(t^2-n^2)}{(2n+1)!},$$

и разности f_0^{2n} с коэффициентом

$$\frac{t(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}-\frac{t(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t^2-n^2)}{(2n+1)!}=$$

$$=\frac{t(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)(n+1-t)}{(2n+1)!}.$$

Преобразуем последнее выражение, заменив t на $1-\xi$. Получим:

$$\frac{(1-\xi)(1-\xi-1)(1-\xi+1)\dots(1-\xi-n+1)(1-\xi+n-1)(1-\xi-n)(n+1-1+\xi)}{(2n+1)!}=$$

$$=\frac{\xi(\xi^2-1^2)\dots(\xi^2-n^2)}{(2n+1)!}.$$

Окончательно *формула Эверетта* примет вид

$$L(x_0+th)=tf_1+\frac{t(t^2-1^2)}{3!}f_1^2+\dots+\frac{t(t^2-1^2)\dots(t^2-n^2)}{(2n+1)!}f_1^{2n}+\dots$$

$$\dots+\xi f_0+\frac{\xi(\xi^2-1^2)}{3!}f_0^2+\dots\quad(\xi=1-t).\quad(11)$$

В этой формуле используются разности, подчеркнутые в таблице черточкой:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_{-2}	f_{-2}				
		$f^1_{-3/2}$			
x_{-1}	f_{-1}		f^2_{-1}		
		$f^1_{-1/2}$		$f^3_{-1/2}$	
x_0	$\underline{f_0}$		$\underline{f_0^2}$		$\underline{f_0^4}$
		$f^1_{1/2}$		$f^3_{1/2}$	
x_1	$\underline{f_1}$		$\underline{f_1^2}$		$\underline{f_1^4}$
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$	
x_2	f_2		f_2^2		
		$f^1_{5/2}$			
x_3	f_3				

Формула Эверетта имеет некоторые особенности, отличающие ее от других выведенных нами формул. Прежде всего она содержит только разности четного порядка. Это особенно удобно при печатании таблиц, если в них необходимо поместить также и разности.

Далее, она содержит разности, соответствующие точкам x_0 и x_1. При этом количество вычислений не больше, чем по любой другой интерполяционной формуле. С другой стороны, этой особенностью можно иногда воспользоваться для сокращения работы при некоторых вычислительных процессах. Это, например, имеет место в процессах *субтабулирования*, т. е. в том случае, когда по данной таблице нужно составить новую таблицу с более мелким шагом. Действительно, при этом вторая строка формулы Эверетта перейдет в первую на следующем шаге и полученные нами на первом шаге ее значения могут быть использованы вторично. В качестве иллюстрации на применение формулы Эверетта мы и возьмем пример на субтабулирование. Пусть по заданным значениям $\sin 9°$, $\sin 12°$, $\sin 15°$, $\sin 18°$, $\sin 21°$ требуется найти значения синусов на отрезке $[9°, 21°]$ с шагом в $30'$. При этом t и ξ будут принимать значения $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$. Коэффициенты формулы Эверетта будут равны:

t	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{t(t^2-1)}{6}$	$-0{,}007006$	$-0{,}049383$	$-0{,}0625$	$-0{,}061728$	$-0{,}042498$

Значения синусов и вторых разностей возьмем из предыдущих примеров. Отсутствующие там вторые разности равны

$$f^2_{9°} = -0{,}000428 \quad \text{и} \quad f^2_{21°} = -0{,}000982.$$

Промежуточные вычисления можно свести в следующую таблицу:

x	t	tf_i	$\frac{t(t^2-1)}{6} f_i^2$	(3) + (4)	№
1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	0,0260723	0,0000115	0,026084	1
	$\frac{1}{3}$	0,0521446	0,0000119	0,052165	2
9°	$\frac{1}{2}$	0,0782170	0,0000267	0,078244	3
	$\frac{2}{3}$	0,1042893	0,0000264	0,104316	4
	$\frac{5}{6}$	0,1303616	0,0000180	0,130380	5

Продолжение

x	t	tf_i	$\frac{t(t^2-1)}{6} f_i^2$	(3) + (4)	№
1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	0,0346520	0,0000150	0,034667	6
	$\frac{1}{3}$	0,0693040	0,0000280	0,069332	7
12°	$\frac{1}{2}$	0,1039560	0,0000360	0,103992	8
	$\frac{2}{3}$	0,1386080	0,0000350	0,138643	9
	$\frac{5}{6}$	0,1732600	0,0000240	0,173284	10
	$\frac{1}{6}$	0,0431365	0,0000190	0,043156	11
	$\frac{1}{3}$	0,0862730	0,0000350	0,086308	12
15°	$\frac{1}{2}$	0,1294095	0,0000440	0,129453	13
	$\frac{2}{3}$	0,1725460	0,0000440	0,172590	14
	$\frac{5}{6}$	0,2156825	0,0000290	0,215712	15
	$\frac{1}{6}$	0,0515085	0,0000230	0,051526	16
	$\frac{1}{3}$	0,1030056	0,0000410	0,103047	17
18°	$\frac{1}{2}$	0,1545085	0,0000530	0,154562	18
	$\frac{2}{3}$	0,2060113	0,0000520	0,206063	19
	$\frac{5}{6}$	0,2575141	0,0000360	0,257550	20

Продолжение

x	t	tf_t	$\frac{t(t^2-1)}{6}f_t^2$	(3) + (4)	№
1	2	3	4	5	6
21°	$\frac{1}{6}$	0,0597280	0,0000270	0,059755	21
	$\frac{1}{3}$	0,1194560	0,0000480	0,119504	22
	$\frac{1}{2}$	0,1791840	0,0000610	0,179245	23
	$\frac{2}{3}$	0,2389120	0,0000600	0,238972	24
	$\frac{5}{6}$	0,2986400	0,0000410	0,298671	25

Получив эту таблицу, последовательно найдем значения синуса промежуточных аргументов. Так, $\sin 9°30'$ равен сумме чисел, стоящих в столбце 5 и строках 5 и 6, $\sin 10°$ равен сумме строк 4 и 7, $\sin 10°30'$ — сумме строк 3 и 8, $\sin 11°$ — сумме строк 2 и 9, $\sin 11°30'$ — сумме строк 1 и 10. Далее, $\sin 12°30'$ равен сумме чисел, стоящих в столбце 5 и строках 10 и 11, а затем так же, как и в предыдущем случае. Окончательно получим таблицу (в последнем столбце указана разность между полученным и точным значениями в единицах шестого десятичного знака):

x	$\sin x$	Разность	x	$\sin x$	Разность
9°	0,156434	0	15°	0,258819	0
9°30′	0,165047	−1	15°30′	0,267288	0
10°	0,173648	0	16°	0,275637	0
10°30′	0,182236	0	16°30′	0,284015	0
11°	0,190808	−1	17°	0,292371	−1
11°30′	0,199368	0	17°30′	0,300706	0
12°	0,207912	0	18°	0,309017	0
12°30′	0,216440	0	18°30′	0,317305	0
13°	0,224951	0	19°	0,325567	−1
13°30′	0,233445	0	19°30′	0,333807	0
14°	0,241922	0	20°	0,342019	−1
14°30′	0,250379	−1	20°30′	0,350203	1

Мы уже говорили о том, что при издании таблиц выгодно печатать только разности четного порядка и тем самым предполагать интерполирование по формуле Эверетта. При этом можно

достичь дальнейших упрощений. Пусть мы хотим использовать формулу Эверетта до членов с четвертыми разностями:

$$L(x_0+th)=tf_1+\frac{t(t^2-1^2)}{6}f_1^2+\frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)}{120}f_1^4+$$
$$+\xi f_0+\frac{\xi(\xi^2-1^2)}{6}f_0^2+\frac{\xi(\xi^2-1)(\xi^2-2^2)}{120}f_0^4.$$

Последние два члена первой и второй строк можно записать в виде

$$\frac{t(t^2-1^2)}{6}\left[f_1^2-kf_1^4\right]+\frac{t(t^2-1)}{6}\left[k-\frac{4-t^2}{20}\right]f_1^4$$

и

$$\frac{\xi(\xi^2-1^2)}{6}\left[f_0^2-kf_0^4\right]+\frac{\xi(\xi^2-1)}{6}\left[k-\frac{4-\xi^2}{20}\right]f_0^4,$$

где k — некоторая постоянная. Выражения $\frac{4-t^2}{20}$ и $\frac{4-\xi^2}{20}$, стоящие в последних квадратных скобках, изменяются незначительно при изменении t и ξ в промежутке $[0, 1]$, в котором обычно используют формулу Эверетта. Поэтому можно так подобрать k, что множители при четвертых разностях в последних членах будут очень малы. Если при этом и сами четвертые разности не очень велики, так что их произведение с этими множителями не окажет влияния на верные десятичные знаки $L(x_0+th)$, то последние члены можно целиком отбросить. Тогда мы можем печатать в таблице вместо настоящих вторых разностей f_i^2 *модифицированные разности* $f_i^2-kf_i^4$ и использовать формулу Эверетта только до вторых разностей.

Выберем k так, чтобы

$$\int_0^1\left[k-\frac{4-t^2}{20}\right]dt$$

был равен нулю. Это даст

$$k=\frac{1}{20}\left[4-\frac{1}{3}\right]=\frac{11}{60}=0{,}1833\ldots$$

На практике используют значение $k=0{,}184$. При этом $k-\frac{4-t^2}{20}$ и $k=\frac{4-\xi^2}{20}$ изменяются в пределах от $-0{,}016$ до $0{,}034$. Коэффициенты при f_i^4 меняются от $-0{,}00077$ до $0{,}00053$. Следовательно, даже если четвертые разности достигают 600 единиц последнего знака, наш прием будет применим.

Сказанное здесь о формуле Эверетта можно частично перенести и на другие интерполяционные формулы. Так можно использовать модифицированные разности и с другими формулами. Можно использовать симметрию коэффициентов многих интерполяционных формул.

2. Остаточные члены интерполяционных формул с центральными разностями. Перейдем теперь к сравнительному анализу различных интерполяционных формул с точки зрения их практического применения. Прежде всего исследуем остаточные члены.

Для формулы Гаусса для интерполирования вперед узлы брались в следующем порядке: x_0, x_0+h, x_0-h, x_0+2h, x_0-2h, ... Поэтому

$$R_{2n}=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\ldots$$
$$\ldots(x-x_0-nh)(x-x_0+nh),$$
$$R_{2n-1}=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\ldots$$
$$\ldots[x-x_0-(n-1)h][x-x_0+(n-1)h](x-x_0-nh)$$

или

$$R_{2n}=\frac{h^{2n+1}f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-n^2), \tag{12}$$

$$R_{2n-1}=\frac{h^{2n}f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n). \tag{13}$$

Если производные заменить разностями, помня, что мы говорили об этом при выводе остаточных членов формул Ньютона, то получим:

$$R_{2n}\approx\frac{f_{1/2}^{2n+1}}{(2n+1)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-n^2), \tag{14}$$

$$R_{2n-1}\approx\frac{f_0^{2n}}{(2n)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n). \tag{15}$$

Как и для формул Ньютона, ошибка оказывается приблизительно равной первому отброшенному члену интерполяционной формулы.

Для формулы Гаусса для интерполирования назад узлы брались в таком порядке: x_0, x_0-h, x_0+h, x_0-2h, x_0+2h, ... Поэтому

$$R_{2n}=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(x-x_0)(x-x_0+h)(x-x_0-h)\ldots$$
$$\ldots(x-x_0+nh)(x-x_0-nh)=$$
$$=\frac{h^{2n+1}f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-n^2) \tag{16}$$

и

$$R_{2n-1}=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x-x_0)(x-x_0+h)(x-x_0-h)\ldots$$
$$\ldots[x-x_0+(n-1)h][x-x_0-(n-1)h](x-x_0+nh)=$$
$$=\frac{h^{2n}f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2](t+n). \tag{17}$$

Грубые оценки примут вид:

$$R_{2n} \approx \frac{f^{2n+1}_{-1/2}}{(2n+1)!}\, t\,(t^2 - 1^2) \ldots (t^2 - n^2), \tag{18}$$

$$R_{2n-1} \approx \frac{f^{2n}_{0}}{(2n)!}\, t\,(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \ldots [t^2 - (n-1)^2](t + n). \tag{19}$$

Производные, входящие в оценку, целиком определяются выбранной функцией $f(x)$. Множители при этих производных зависят от выбранной формулы интерполирования. Приведем здесь таблицу абсолютных значений этих множителей при изменении t от -1 до 1. Индекс n означает степень взятого нами интерполяционного многочлена. В левом столбце даны значения t к формуле Гаусса для интерполирования вперед, в правом — для интерполирования назад.

t \ n	1	2	3	4	n \ t
— 1,0	1,00	0,000	0,000	0,0000	1,0
— 0,9	0,86	0,028	0,020	0,0046	0,9
— 0,8	0,72	0,048	0,034	0,0081	0,8
— 0,7	0,60	0,060	0,040	0,0104	0,7
— 0,6	0,48	0,064	0,042	0,0116	0,6
— 0,5	0,38	0,062	0,039	0,0117	0,5
— 0,4	0,28	0,056	0,034	0,0108	0,4
— 0,3	0,20	0,046	0,026	0,0089	0,3
— 0,2	0,12	0,032	0,018	0,0063	0,2
— 0,1	0,06	0,016	0,008	0,0033	0,1
0,0	0,00	0,000	0,000	0,0000	0,0
0,1	0,045	0,016	0,008	0,0033	— 0,1
0,2	0,080	0,032	0,014	0,0063	— 0,2
0,3	0,105	0,046	0,020	0,0089	— 0,3
0,4	0,120	0,056	0,022	0,0108	— 0,4
0,5	0,125	0,062	0,023	0,0117	— 0,5
0,6	0,120	0,064	0,022	0,0116	— 0,6
0,7	0,105	0,060	0,020	0,0104	— 0,7
0,8	0,080	0,048	0,014	0,0081	— 0,8
0,9	0,045	0,028	0,008	0,0046	— 0,9

Сравнивая с соответствующими значениями множителей для интерполяционных формул Ньютона, приведенными на стр. 124, мы видим, что формуле Гаусса нужно отдать предпочтение. Объяснение этому факту давалось на стр. 94—96.

Мы пользуемся в первом случае крайними частями приведенных там графиков, в последнем — средними. Это дает нам основание отдать формулам Гаусса предпочтение. Однако ими не всегда удается воспользоваться. Действительно, если значение x, для которого нужно произвести интерполирование, находится вблизи начала или конца таблицы, то нам не будут известны разности, необходимые

для использования формул Гаусса. В этих случаях мы будем вынуждены применять формулы Ньютона. Если x находится вблизи начала таблицы, используют формулу Ньютона для интерполирования вперед, если вблизи конца таблицы — для интерполирования назад. В остальных случаях применяют либо формулы Гаусса, либо формулы, полученные путем преобразования формул Гаусса.

Формула Эверетта получается путем исключения разностей нечетного порядка из формулы Гаусса для интерполирования вперед. Поэтому и остаточный член ее будет таков же, как и у формулы Гаусса для того случая, когда последняя использованная там разность имеет нечетный порядок $2n+1$, следовательно, остаточный член ее будет иметь вид

$$R_{2n+1} = \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-n^2)(t-n-1). \quad (20)$$

Рассмотрим теперь неустранимые погрешности формул Гаусса. Для этого выберем из таблицы, приведенной на стр. 97, нужные нам значения коэффициентов при ρ, учитывая определение t для обеих формул (n, как и прежде, будет означать степень интерполяционного многочлена). Левый столбец t будет относиться к формуле Гаусса для интерполирования вперед, правый — к формуле Гаусса для интерполирования назад.

t \ n	1	2	3	4	n \ t
— 1,0	1,5	0,5	0,5	0,5	1,0
— 0,9	1,4	0,54	0,62	0,57	0,9
— 0,8	1,3	0,58	0,72	0,62	0,8
— 0,7	1,2	0,60	0,78	0,66	0,7
— 0,6	1,1	0,62	0,81	0,69	0,6
— 0,5	1,0	0,62	0,81	0,70	0,5
— 0,4	0,9	0,62	0,79	0,69	0,4
— 0,3	0,8	0,60	0,74	0,66	0,3
— 0,2	0,7	0,58	0,68	0,62	0,2
— 0,1	0,6	0,54	0,59	0,57	0,1
0,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,0
0,1	0,5	0,54	0,54	0,57	— 0,1
0,2	0,5	0,58	0,58	0,62	— 0,2
0,3	0,5	0,60	0,60	0,66	— 0,3
0,4	0,5	0,62	0,62	0,69	— 0,4
0,5	0,5	0,62	0,62	0,70	— 0,5
0,6	0,5	0,62	0,62	0,69	— 0,6
0,7	0,5	0,60	0,60	0,66	— 0,7
0,8	0,5	0,58	0,58	0,62	— 0,8
0,9	0,5	0,54	0,54	0,57	— 0,9
1,0	0,5	0,5	0,5	0,5	— 1,0

Как мы видим и неустранимые погрешности для формул Гаусса меньше, чем для формул Ньютона.

Перейдем теперь к оценке погрешности интерполяционной формулы Стирлинга. Она является полусуммой формул Гаусса. Поэтому и остаточный член ее будет равен полусумме остаточных членов формул Гаусса. Отсюда

$$R_{2n} = h^{2n+1}\frac{f^{(2n+1)}(\xi_1)+f^{(2n+1)}(\xi_2)}{2}\frac{1}{(2n+1)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-n^2),$$

и так как производная $f^{(2n+1)}(\xi)$ наряду с $f^{(2n+1)}(\xi_1)$ и $f^{(2n+1)}(\xi_2)$ принимает все промежуточные значения, а среднее арифметическое двух чисел всегда заключено между наибольшим и наименьшим из них, то

$$\frac{f^{(2n+1)}(\xi_1)+f^{(2n+1)}(\xi_2)}{2} = f^{(2n+1)}(\xi)$$

и

$$R_{2n} = \frac{h^{2n+1}f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-n^2). \qquad (21)$$

Если последняя из использованных в формуле Стирлинга разностей имеет нечетный порядок, то остаточный член будет иметь вид

$$R_{2n-1} = \frac{h^{2n}}{2(2n)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots$$
$$\ldots[t^2-(n-1)^2][f^{(2n)}(\xi_1)(t-n)+f^{(2n)}(\xi_2)(t+n)]. \qquad (22)$$

Получилось более сложное выражение, чем в предыдущем случае, и его не удается упростить так, как это было сделано в первый раз. Однако если предположить, что $f^{(2n)}(x)$ постоянна или хотя бы что она меняется незначительно на рассматриваемом промежутке, то, заменяя $f^{(2n)}(\xi_1)$ и $f^{(2n)}(\xi_2)$ некоторым значением $f^{(2n)}(\xi)$, получим:

$$R_{2n-1} \approx \frac{h^{2n}f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]. \qquad (22')$$

Грубые оценки остаточных членов для формулы Стирлинга будут иметь вид:

$$R_{2n} \approx \frac{f_0^{2n+1}}{(2n+1)!}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-n^2), \qquad (23)$$

$$R_{2n-1} \approx \frac{f_0^{2n}}{(2n)!}t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]. \qquad (24)$$

Дадим и для этого случая таблицу абсолютных значений коэффициентов при $h^k f^{(k)}(\xi)$ в остаточном члене формулы Стирлинга. Для того случая, когда берется формула Стирлинга, оканчивающаяся на разностях нечетного порядка, будем предполагать, что возможны упрощения, которые мы проделали. (n, как и всегда,—степень интерполяционного многочлена.)

t \ n	1	2	3	4
0,0	0,000	0,000	0,0000	0,0000
0,1	0,005	0,016	0,0004	0,0033
0,2	0,020	0,032	0,0016	0,0063
0,3	0,045	0,045	0,0034	0,0089
0,4	0,080	0,056	0,0056	0,0107
0,5	0,125	0,062	0,0078	0,0117
0,6	0,180	0,064	0,0096	0,0116
0,7	0,245	0,059	0,0104	0,0104
0,8	0,320	0,048	0,0096	0,0081
0,9	0,405	0,028	0,0067	0,0045
1,0	0,500	0,000	0,0000	0,0000

Для отрицательных t получатся значения, симметричные относительно $t=0$.

Сравнивая приведенные значения с соответствующими значениями для формул Гаусса, видим, что при четных n значения одинаковы, а при нечетных n и при t, близких к нулю, значения получились значительно меньшими. Правда, последнее имеет место при почти постоянных соответствующих производных. Вообще говоря, *формулу Стирлинга выгодно применять, останавливаясь на разностях нечетного порядка, и при значениях t, близких к нулю.* На практике ее применяют для значений $|t| \leqslant \frac{1}{4}$.

Перейдем к формуле Бесселя. Ее мы получили как полусумму формулы Гаусса для интерполирования вперед и формулы Гаусса для интерполирования назад, но взятой со сдвигом на один шаг вперед. Для последней формулы остаточный член можно записать в одной из следующих двух форм:

$$R_{2n}=\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(\xi)\,t\,(t^2-1^2)\,(t^2-2^2)\ldots$$
$$\ldots[t^2-(n-1)^2]\,(t-n)\,(t-n-1),$$
$$R_{2n-1}=\frac{h^{2n}}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi)\,t\,(t^2-1)\,(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]\,(t-n).$$

Беря полусумму этих остаточных членов и соответствующих им остаточных членов формулы Гаусса для интерполирования вперед, получим остаточные члены формулы Бесселя:

$$R_{2n}=\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\frac{1}{2}\,\{f^{(2n+1)}(\xi_1)\,(t-n-1)+f^{(2n+1)}(\xi_2)\,(t+n)\}\times$$
$$\times\, t\,(t^2-1)\,(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]\,(t-n), \quad (25)$$
$$R_{2n-1}=\frac{h^{2n}}{(2n)!}\,\frac{1}{2}\,\{f^{(2n)}(\xi_1)+f^{(2n)}(\xi_2)\}\,t\,(t^2-1^2)\,(t^2-2^2)\ldots$$
$$\ldots[t^2-(n-1)^2]\,(t-n). \quad (26)$$

Предполагая опять, что производная $f^{(2n+1)}(\xi)$ либо постоянна, либо меняется незначительно в рассматриваемом промежутке, мы можем упростить первое выражение (25) и записать:

$$R_{2n} \approx \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\xi)\, t\,(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots \\ \ldots [t^2-(n-1)^2](t-n)\left(t-\frac{1}{2}\right). \quad (25')$$

Последнее выражение (26) упрощается, так же как и для формулы Стирлинга, путем использования свойства среднего арифметического и свойства производных. Оно может быть записано в виде

$$R_{2n-1} = \frac{h^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi)\, t\,(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n). \quad (26')$$

Грубые оценки остаточных членов записываются в виде

$$R_{2n} \approx \frac{f^{2n+1}_{1/2}}{(2n+1)!}\, t\,(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots \\ \ldots [t^2-(n-1)^2](t-n)\left(t-\frac{1}{2}\right), \quad (27)$$

$$R_{2n-1} \approx \frac{f^{2n}_{1/2}}{(2n)!}\, t\,(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n). \quad (28)$$

Здесь бросается в глаза следующий факт. При $t=\frac{1}{2}$ упрощенное выражение для R_{2n} обращается в нуль. Этого, вообще говоря, не будет в действительности. Погрешность R_{2n} обратится в нуль при $t=\frac{1}{2}$ в том случае, когда $f^{(2n+1)}(x)=\text{const}$. Таким образом, многочлен, представляемый формулой Бесселя, взятой до разностей порядка $2n$, будет давать точные значения $f(x)$ при $t=\frac{1}{2}$, если $f(x)$ — произвольный многочлен степени не выше $2n+1$. Разница между точным и упрощенным выражениями R_{2n} будет определяться производными порядка $f^{(2n+2)}(x)$. Используя выражение остаточного члена формулы Лагранжа, содержащее разделенные разности, можно было бы показать, что разность между точным и приближенным значениями R_{2n} примерно равна R_{2n+1}.

Приведем теперь абсолютные значения коэффициентов при $h^k f^{(k)}(\xi)$ в выражениях остаточных членов формулы Бесселя (n означает степень использованного интерполяционного многочлена). Для четных n использована упрощенная формула.

t \ n	1	2	3	4
— 1,0	1,00	0,500	0,0000	0,0000
— 0,9	0,86	0,401	0,0207	0,0058
— 0,8	0,72	0,312	0,0336	0,0087
— 0,7	0,60	0,240	0,0402	0,0096
— 0,6	0,48	0,176	0,0416	0,0091
— 0,5	0,38	0,127	0,0391	0,0078
— 0,4	0,28	0,084	0,0336	0,0060
— 0,3	0,20	0,053	0,0262	0,0040
— 0,2	0,12	0,028	0,0176	0,0025
— 0,1	0,06	0,012	0,0087	0,0010
0,0	0,00	0,000	0,0000	0,0000
0,1	0 045	0,006	0,0078	0,0006
0,2	0,080	0,008	0,0144	0,0009
0,3	0,105	0,007	0,0193	0,0008
0,4	0,120	0,004	0,0224	0,0004
0,5	0,125	0,000	0,0234	0,0000
0,6	0,120	0,004	0,0224	0,0004
0,7	0,105	0,007	0,0193	0,0008
0,8	0,080	0,008	0,0144	0,0009
0,9	0,045	0,006	0,0078	0,0006
1,0	0,000	0,000	0,0000	0,0000

Как видим из этой таблицы, *формула Бесселя имеет преимущества* перед формулами Гаусса и Стирлинга *при четных* n и особенно *при значениях* t, *близких к* $\frac{1}{2}$. Поэтому *ее выгодно применять, когда формула заканчивается на четных разностях и при значениях* t, *заключенных в промежутке* $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Заметим, что при упрощении остаточных членов формул Бесселя и Стирлинга мы использовали предположение о почти постоянстве соответствующих производных. Это предположение имеет под собой почву в практике интерполирования. Дело в том, что если производные велики и сильно изменяются, а это обычно выражается в неправильном поведении соответствующих разностей, то вряд ли можно ожидать большой точности интерполирования. В этом случае либо увеличивают порядок используемых разностей, либо уменьшают шаг интерполирования.

§ 8. Некоторые другие подходы к выводу формул интерполирования для равных промежутков

1. Диаграмма Фрезера. В этом параграфе мы кратко изложим некоторые другие способы получения формул интерполирования. Прежде всего дадим способ, предложенный Фрезером. Для сокра-

щения записей введем символ C_t^m, где m — натуральное число и t — произвольное действительное число, понимая его как

$$C_t^m = \frac{t(t-1)\dots(t-m+1)}{m!}. \tag{1}$$

Из всех свойств, которыми обладает C_t^m, нам понадобится лишь следующее:

$$C_p^q = C_{p+1}^{q+1} - C_p^{q+1}. \tag{2}$$

Оно легко получается из определения C_t^m. Действительно,

$$C_{p+1}^{q+1} - C_p^{q+1} = \frac{(p+1)\,p\,(p-1)\dots(p-q+1)}{(q+1)!} - \frac{p(p-1)\dots(p-q)}{(q+1)!} =$$

$$= \frac{p(p-1)\dots(p-q+1)}{q!}\,\frac{(p+1-p+q)}{q+1} = C_p^q.$$

Умножим полученное тождество на равенство

$$f_{r+1}^q - f_r^q = f_{r+1/2}^{q+1}.$$

Получим:

$$C_p^q f_{r+1}^q - C_p^q f_r^q = C_{p+1}^{q+1} f_{r+1/2}^{q+1} - C_p^{q+1} f_{r+1/2}^{q+1}, \tag{3}$$

или

$$C_p^q f_r^q + C_{p+1}^{q+1} f_{r+1/2}^{q+1} = C_p^q f_{r+1}^q + C_p^{q+1} f_{r+1/2}^{q+1}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь ромбовидную диаграмму, приведенную на рис. 21.

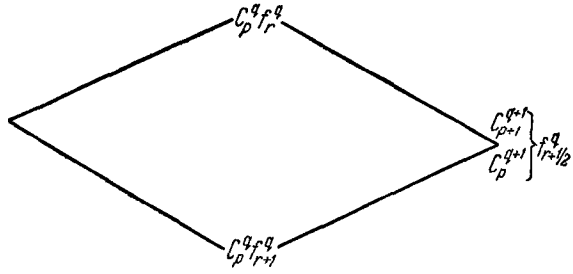

Рис. 21.

Из последнего равенства следует, что если, исходя из какой-то величины, помещенной в левой вершине ромба, двигаться по его верхним сторонам до правой вершины, прибавляя все встречающиеся по пути величины, то мы получим такой же результат, какой получится, если, исходя из той же величины, двигаться по нижним сторонам ромба, прибавляя все встречающиеся по пути величины.

Далее, если мы проведем диагональ ромба, соединяющую левую и правую вершины, и, продвигаясь по ней, будем брать полусуммы

чисел, стоящих непосредственно над и под ней, то, очевидно, получим такой же результат. Так, для построенного выше ромба мы получим на этом диагональном пути следующее выражение:

$$C_p^q f_{r+1/2}^q + \frac{1}{2}\left(C_{p+1}^{q+1} + C_p^{q+1}\right) f_{r+1/2}^{q+1}. \tag{5}$$

Составим теперь из таких элементарных ромбов сетку на плоскости. В каждой вершине поместим разность с соответствующим

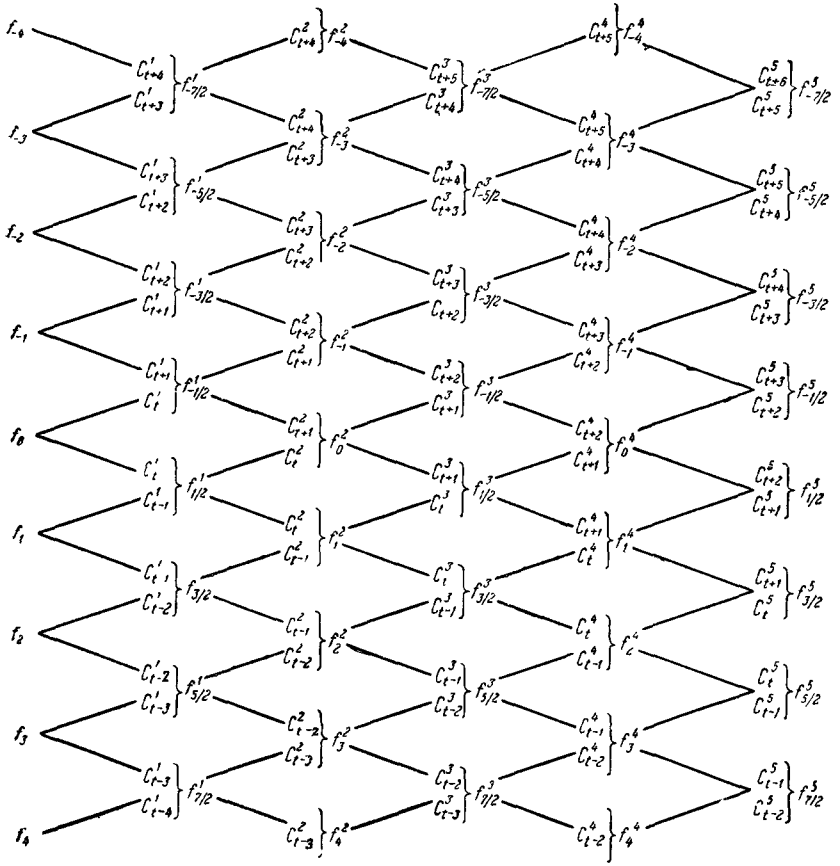

Рис. 22. Диаграмма Фрезера.

коэффициентом так, чтобы эти разности располагались так же, как и в таблице разностей. К разности $f_{1/2}^1$ возьмем в качестве коэффициентов C_t^1 и C_{t-1}^1. Получится ромбическая диаграмма, которую мы назовем *диаграммой Фрезера*.

Рассмотрим теперь произвольный путь, идущий слева направо от f_0 по сторонам ромбической диаграммы. Используя последовательно проведенные нами рассуждения для одного ромба, мы получим следующий результат: любой путь, идущий от f_0 направо по сторонам ромбов или их горизонтальным диагоналям и приходящий в ту же конечную точку, даст такую же сумму, что и первый

Построим диаграмму Фрезера для некоторого многочлена, хотя бы многочлена Лагранжа для некоторой функции $f(x)$. Разности, начиная с некоторого порядка, обращаются в нули. Отсюда следует, что любые два пути, начинающиеся с f_0 и продолженные до столбца постоянных разностей, дадут одинаковые суммы, так как их всегда можно свести в одну точку по столбцам с нулевыми разностями. Более того, учитывая, что имеет место соотношение

$$f_0 + tf^1_{1/2} = f_1 + (t-1)f^1_{1/2}, \tag{6}$$

мы можем использовать любые пути, начинающиеся в f_1 и заканчивающиеся на постоянных разностях, и получать тот же результат, а отсюда следует, что на любом пути, идущем от произвольного f_i до постоянных разностей, мы получим один и тот же результат.

Путь, идущий от f_0 по диагонали вниз, даст нам

$$f_0 + C^1_t f^1_{1/2} + C^2_t f^2_1 + C^3_t f^3_{3/2} + \ldots$$

Эта сумма по формуле Ньютона для интерполирования вперед равна $L_n(x_0 + th)$. Таким образом, выбирая произвольным образом

Рис. 22.

начальное значение f_i и путь, заканчивающийся на постоянных разностях, складывая все встречающиеся на пути величины, мы также получим $L_n(x_0 + th)$. Этим способом можно получить громадное количество самых различных формул.

Формула Гаусса для интерполирования вперед получится, если взять за начальную точку f_0 и избрать зигзагообразный путь, имеющий вид, приведенный на рис. 23. Мы получим формулу Стирлинга, если пойдем от f_0 по горизонтали направо; формулу Бесселя можно получить, если двигаться вдоль строки с индексом $\frac{1}{2}$.

2. Понятие об операторном методе вывода формул интерполирования. Дадим теперь операторные выводы интерполяционных формул.

Рассмотрим линейное множество R всех действительных функций, заданных на всей действительной прямой. Поставим в соответствие произвольной функции $f(x) \in R$ функцию

$$f(x+h) - f(x),$$

где h — фиксированное действительное число. Эта функция также принадлежит R. Следовательно, в соответствии с определением, данным во Введении, мы ввели некоторый оператор. Обозначим его через Δ. Итак,

$$\Delta[f(x)] = f(x+h) - f(x). \tag{7}$$

В дальнейшем мы часто будем опускать скобки, выделяющие аргументы операторов. Нами будут также использованы операторы ∇ и δ, которые вводятся следующим образом:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h), \tag{8}$$

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right). \tag{9}$$

Оператор A, определенный на линейном множестве R, называется *аддитивным*, если для произвольных $x \in R$ и $y \in R$ и любых действительных чисел c_1 и c_2 имеет место равенство

$$A(c_1 x + c_2 y) = c_1 Ax + c_2 Ay. \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что введенные нами операторы Δ, ∇ и δ являются аддитивными.

Введем понятие суммы и произведения операторов. Оператор C называется *суммой операторов* A и B, если все эти операторы определены на одном и том же линейном множестве R и для любого $x \in R$ имеет место равенство

$$Cx = Ax + Bx. \tag{11}$$

Эту связь операторов A, B и C мы будем обозначать так:

$$C = A + B. \tag{12}$$

В силу коммутативности сложения в линейном множестве имеет место

$$A + B = B + A. \tag{13}$$

Если оператор B преобразует любой элемент x линейного множества R в элемент cAx, где c — действительное число и A — некоторый оператор, то мы будем обозначать его через cA. Далее, будем называть оператор C *произведением операторов* A и B, если для любого элемента x некоторого множества R имеет место

$$Cx = A(Bx). \tag{14}$$

Очевидно,

$$(AB)C = A(BC). \tag{15}$$

Если R линейное множество, то имеют место также равенства

$$(A+B)C = AC + BC, \tag{16}$$

$$C(A+B) = CA + CB. \tag{17}$$

Вообще говоря, $AB \neq BA$. Будем обозначать через I оператор, для которого при любом $x \in R$ имеет место $Ix = x$. Назовем такой оператор *единичным*. Теперь мы можем определить $A^2 = AA$, $A^3 = A^2A$, ... Для степеней оператора имеет место равенство

$$A^{m+n} = A^m A^n = A^n A^m. \tag{18}$$

По определению, положим $A^0 = I$. Теперь мы можем рассматривать многочлены от операторов

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n. \tag{19}$$

Если в линейном пространстве R каким-то образом введено понятие предела, то мы можем рассматривать и ряды операторов

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n + \ldots, \tag{20}$$

понимая под этим такой оператор B, что

$$Bx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k A^k x. \tag{21}$$

Оператор B может быть вообще не определен или определен только на части пространства R.

Перейдем теперь к выводу интерполяционных формул. В дополнение к введенным ранее операторам Δ, ∇ и δ рассмотрим еще оператор $D = \frac{d}{dx}$. Если функция $f(x)$ разлагается в бесконечный степенной ряд, то

$$f(x_0 + \alpha) = \left(1 + \alpha \frac{d}{dx} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} + \ldots\right) f(x_0) = e^{\alpha D} f(x_0). \tag{22}$$

В частности,

$$f(x_0 + h) = e^{hD} f(x_0) = (I + \Delta) f(x_0). \tag{23}$$

Итак,

$$e^{hD} = I + \Delta$$

и

$$e^{thD} = (I + \Delta)^t.$$

Отсюда

$$f(x_0 + th) = e^{thD} f(x_0) = (I + \Delta)^t f(x_0). \tag{24}$$

В частности, если $f(x) = L_n(x)$, то все наши ряды превращаются в конечные суммы и произведенные нами операции являются

законными. Раскрывая последнее выражение, мы получим интерполяционную формулу Ньютона для интерполирования вперед:

$$L_n(x_0+th)=f(x_0)+t\Delta f(x_0)+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)+$$
$$+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)+\ldots$$

Для получения интерполяционной формулы Ньютона для интерполирования назад заметим, что

$$\Delta\nabla f(x)=\Delta[f(x)-f(x-h)]=$$
$$=f(x+h)-f(x)-f(x)+f(x-h)=\Delta f(x)-\nabla f(x).$$

Отсюда

$$\Delta\nabla=\Delta-\nabla, \tag{25}$$

$$\Delta=\nabla(I-\nabla)^{-1} \tag{26}$$

и, кроме того,

$$I+\Delta=(I-\nabla)^{-1}. \tag{27}$$

Итак,

$$L_n(x_0+ht)=(I+\Delta)^t f(x_0)=(I-\nabla)^{-t}f(x_0), \tag{28}$$

или

$$L_n(x_0+ht)=f(x_0)+t\nabla f(x_0)+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f(x_0)+$$
$$+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 f(x_3)+\ldots \tag{28'}$$

Это — интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад, но записанная в других обозначениях.

Связь оператора δ с оператором Δ значительно сложнее. Мы имеем:

$$\delta f(x)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

и

$$\delta^2 f(x)=f(x+h)-f(x)-f(x)+f(x-h)=\Delta f(x)-\nabla f(x)$$

или

$$\delta^2=\Delta-\nabla. \tag{29}$$

Отсюда

$$\delta^2=\Delta-\Delta(I+\Delta)^{-1}=\Delta^2(I+\Delta)^{-1}, \tag{30}$$

т. е. Δ является решением квадратного уравнения

$$\Delta^2-\delta^2\Delta-\delta^2=0. \tag{31}$$

Мы не будем входить в детали дальнейших рассуждений для получения формул центральных разностей

§ 9. Сходимость интерполяционного процесса

При практическом использовании интерполирования не всегда удается произвести оценку остаточных членов. Высшие производные, входящие в эти остаточные члены, не всегда доступны. Поэтому уверенность в том, что, выбрав достаточно большое количество узлов, мы достаточно хорошо приблизимся к интерполируемой функции, была бы очень полезна в практическом интерполировании. В связи с этим возникает *задача о сходимости интерполяционного процесса.*

Пусть нам задана треугольная матрица

$$\begin{array}{l} x_0^{(0)}, \\ x_0^{(1)},\ x_1^{(1)}, \\ x_0^{(2)},\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_0^{(n)},\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_n^{(n)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{1}$$

все элементы которой принадлежат отрезку $[a, b]$. Для некоторой заданной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ строится последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа $L_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, причем для построения $L_n(x)$ в качестве узлов интерполирования используются все элементы n-й строки нашей матрицы. *Интерполяционный процесс называется сходящимся, если*

$$\lim_{n \to \infty} L_n(x) = f(x), \quad x \in [a, b]. \tag{2}$$

Этот *процесс равномерно сходится, если сходимость последнего выражения равномерная.*

На первый взгляд кажется, что если элементы матрицы с повышением номера строки все плотнее и плотнее заполняют отрезок $[a, b]$, так что в любой его части, начиная с некоторого n, находится по крайней мере один узел, то должна быть равномерная сходимость $L_n(x)$ к $f(x)$ хотя бы для непрерывных функций. Однако это оказалось не так. Как было показано Фабером, *для любой заданной матрицы узлов вида* (1) *найдется такая непрерывная функция* $f(x)$, *что построенные для нее интерполяционные многочлены Лагранжа по этим узлам не сходятся равномерно на* $[a, b]$ *к* $f(x)$. Более того, как было показано Бернштейном, последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа $L_n(x)$, построенных для функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ по равноотстоящим узлам $\left(x_0^{(n)} = -1;\ x_n^{(n)} = 1\right)$, не

стремится с возрастанием n к $f(x)$ ни в одной точке, отличной от -1, 0, 1.

Вопросу сходимости интерполяционного процесса посвящена обширная литература. Для изучения этого вопроса привлекаются самые современные и тонкие методы математического анализа. Мы не имеем здесь возможности даже вкратце коснуться всех полученных в этом направлении результатов, не говоря уже о проведении доказательств. Дадим здесь лишь одну теорему, относящуюся к целым функциям. Дадим сначала определение целой функции.

Функция $f(x)$ называется целой, если ее можно представить в виде степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

сходящегося при всех значениях x.

Теорема. *Пусть $f(x)$ — целая функция. Тогда последовательность построенных для нее интерполяционных многочленов $L_n(x)$ по любой треугольной матрице указанного выше вида с элементами, принадлежащими отрезку $[a, b]$, равномерно на отрезке $[a, b]$ сходится к $f(x)$.*

Заметим, что на основании известных теорем анализа функция $f(x)$ имеет производные любого порядка. Следовательно, мы можем воспользоваться полученной ранее оценкой отклонения $f(x)$ от своего интерполяционного многочлена:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|. \tag{3}$$

Здесь

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \quad \text{и} \quad \omega_n(x) =$$

$$= (x - x_0^{(n)})(x - x_1^{(n)}) \ldots (x - x_n^{(n)}). \tag{4}$$

Но очевидно, что

$$|\omega_n(x)| < (b - a)^{n+1}.$$

Итак,

$$|f(x) - L_n(x)| < \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}. \tag{5}$$

Мы покажем, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности. Производная $f^{(n+1)}(x)$ функции $f(x)$ может быть записана в виде

$$f^{(n+1)}(x) = (n+1)!\, a_{n+1} + (n+2)(n+1) \ldots 2a_{n+2}(x - x_0) + \ldots$$

$$\ldots + (n+k)(n+k-1) \ldots k a_{n+k}(x - x_0)^{k-1} + \ldots$$

Отсюда

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant (n+1)!|a_{n+1}| + (n+2)(n+1)\ldots 2|a_{n+2}||x-x_0| + \ldots$$
$$\ldots + (n+k)(n+k-1)\ldots k|a_{n+k}||x-x_0|^{k-1} + \ldots,$$

тем более,

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant (n+1)^{n+1}|a_{n+1}| + (n+2)^{n+1}|a_{n+2}||x-x_0| + \ldots$$
$$\ldots + (n+k)^{n+1}|a_{n+k}||x-x_0|^{k-1} + \ldots$$

Из неравенства

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < e^x \quad \text{при} \quad x>0$$

следует

$$\left(\frac{n+k}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{k-1}{n+1}\right)^{n+1} < e^{k-1}.$$

Таким образом,

$$\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)^{n+1}} \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}|(e|x-x_0|) + \ldots$$
$$\ldots + |a_{n+k}|(e|x-x_0|)^{k-1} + \ldots$$

Умножим обе части последнего неравенства на S^{n+1}, где S — произвольное, но фиксированное положительное число. Тогда получим:

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} S^{n+1} \leqslant |a_{n+1}|S^{n+1} + |a_{n+2}|S^{n+1}(e|x-x_0|) + \ldots$$
$$\ldots + |a_{n+k}|S^{n+1}(e|x-x_0|)^{k-1} + \ldots$$

Обозначим через R наибольшее из двух чисел

$$S \quad \text{и} \quad \max_{x\in[a,\,b]}(e|x-x_0|).$$

Тогда

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} S^{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| R^k.$$

Так как последнее равенство имеет место при любом значении $x \in [a, b]$, то

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} S^{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| R^k. \tag{6}$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| R^k$ сходится. Следовательно, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| R^k$ и тем более

$\frac{M_{n+1}S^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Далее,

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Из разложения

$$e^{n+1} = 1 + (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2!} + \ldots + \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots$$

следует, что

$$e^{n+1} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Поэтому

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} < \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}[e(b-a)]^{n+1}. \tag{7}$$

Принимая $S = e(b-a)$, из неравенства (6) получим нужное предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = 0.$$

Требование, чтобы $f(x)$ была целой функцией, является существенным в условиях теоремы, что показывает приведенный ниже пример.

Рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна вместе со всеми своими производными на всей числовой прямой. Если выбирать узлы интерполирования только на отрезке $[-1, 0]$, то $L_n(x) \equiv 0$ и не стремится к $f(x)$ ни при каком положительном значении x.

§ 10. Интерполирование периодических функций

В тех случаях, когда интерполируемая функция $f(x)$ обладает свойством $f(a) = f(b)$, то естественно на базисные функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ накладывать такое же ограничение $\varphi_i(a) = \varphi_i(b)$. Такие функции можно рассматривать как периодические с периодом $\tau = b - a$. Для периодических функций можно также ввести понятие систем Чебышева на отрезке $[a, b]$. *Совокупность функций* φ_0, φ_1, φ_2, ..., φ_n, удовлетворяющих условию $\varphi_i(a) = \varphi_i(b)$, *будем называть периодической системой Чебышева на отрезке* $[a, b]$, *если любая линейная комбинация*

$$c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n,$$

не все коэффициенты которой нули, имеет на $[a, b]$ *не более* n *корней при условии, что* a *и* b *считаются за один корень*. Дока-

жем, что порядок n периодических систем Чебышева должен быть четным. Для доказательства рассмотрим определитель

$$D(x)=\begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n(x) & \varphi_n(x_1) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix},$$

где x_i — некоторые точки отрезка $[a, b]$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Не уменьшая общности, мы можем предполагать, что ни одна из точек x_i не совпадает ни с a, ни с b. В противном случае мы воспользовались бы периодичностью функций и сдвинули бы наш отрезок $[a, b]$ на некоторую величину вправо или влево.

Если функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ составляют систему Чебышева, то $D(x)$ не может обращаться в нуль ни в одной точке $x \in [a, b]$, за исключением x_i, в которых, конечно, он равен нулю. Докажем, что в этом случае $D(x)$ меняет знак при переходе через каждое из x_i. Предположим, что это не так и x_k — та точка, при переходе через которую $D(x)$ не меняет знака. Тогда рассмотрим определитель $\bar{D}(x)$, построенный так же, как и $D(x)$, за исключением $(k+1)$-го столбца, в котором $\varphi_i(x_k)$ заменены на $\varphi_i(x'_k)$, где x'_k — произвольная точка $[a, b]$, отличная от всех x_i. $\bar{D}(x)$ также является линейной комбинацией $\varphi_i(x)$. Она отлична от нуля в точке x_k, а в силу непрерывности функций $\varphi_i(x)$ и в некоторой окрестности x_k. Рассмотрим функцию

$$\psi(x)=D(x)-\lambda\bar{D}(x),$$

где λ — некоторое действительное число, имеющее такой знак, что $D(x)$ и $\lambda\bar{D}(x)$ в некоторой окрестности x_k имеют одинаковые знаки. Обозначим через 2ε наименьшее расстояние между точками $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n, x'_k$. Выберем λ настолько малым по абсолютной величине, что $\psi(x_k+\varepsilon)$ и $\psi(x_k-\varepsilon)$ имеет такой же знак, как и $D(x_k+\varepsilon)$ и $D(x_k-\varepsilon)$. Тогда $\psi(x)$ имеет в точках $x_k-\varepsilon$, x_k и $x_k+\varepsilon$ чередующиеся знаки и, следовательно, имеет по крайней мере два корня на интервале $(x_k-\varepsilon, x_k+\varepsilon)$. Кроме того, $\psi(x)$ обращается в нуль в точках $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$. Таким образом, эта функция имеет на отрезке $[a, b]$ $n+1$ корней. Но она является линейной комбинацией $\varphi_i(x)$, не равной тождественно нулю. Следовательно, она не может обращаться в нуль на отрезке $[a, b]$ более чем в n точках. Мы пришли к противоречию. Таким образом, мы доказали, что $D(x)$ при переходе через каждую из точек x_i меняет знак.

В силу периодичности $\varphi_i(x)$ $D(a)=D(b)$. Итак, при возрастании x от a до b определитель $D(x)$ n раз меняет знак и приходит

к прежнему значению. Это может быть только в том случае, когда n — четное число.

Простейшей периодической системой Чебышева является система

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots$$

Период этой системы равен 2π. Мы можем ее использовать и для интерполирования функций, имеющих другой период. Для этого нужно только предварительно линейной заменой независимого переменного сделать длину периода равной 2π. В силу предыдущих рассуждений мы должны рассматривать систему

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \cos nx.$$

Покажем, что такая система функций при любом n образует периодическую систему Чебышева. Для этого рассмотрим произвольный тригонометрический многочлен

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

коэффициенты которого комплексные или действительные числа. Будем говорить, что этот тригонометрический многочлен имеет порядок n, если по крайней мере один из коэффициентов a_n или b_n отличен от нуля. Если $a_n + ib_n \neq 0$ и $a_n - ib_n \neq 0$, то $T_n(x)$ имеет ровно $2n$ корней в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} x < 2\pi$. Действительно, производя замену независимого переменного $e^{ix} = z$, мы получим:

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k = z^{-n} P_{2n}(z),$$

где $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ при $k \geqslant 0$ и $c_k = \frac{a_k + ib_k}{2}$ при $k < 0$. $P_{2n}(z)$ является алгебраическим многочленом степени $2n$ относительно z. В силу наших предположений относительно коэффициентов $T_n(x)$ коэффициенты при z^{2n} и z^0 этого многочлена отличны от нуля. Следовательно, он имеет ровно $2n$ корней и ни один из корней не равен нулю. Каждому из этих корней в силу определения z будет соответствовать одно и только одно значение x, принадлежащее полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} x < 2\pi$. Это и будут корни $T_n(x)$. Других корней $T_n(x)$ иметь не может. Если условия, которые мы накладывали на a_n и b_n, не выполнены, то $T_n(x)$ может иметь в нашей полосе менее 2π нулей.

Как следствие предыдущих рассуждений получаем: *если два тригонометрических многочлена совпадают в $2n+1$ точках x_0, x_1, ..., x_{2n} при $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $x_i \in [0, 2\pi)$, то они совпадают тождественно.*

Перейдем теперь к фактическому отысканию тригонометрических интерполяционных многочленов. Пусть нам заданы $2n+1$ узлов x_0,

$x_1, \ldots, x_{2n}$, принадлежащих полуотрезку $[0, 2\pi)$. Определитель Δ в нашем случае примет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cos 2x_0 & \sin 2x_0 & \ldots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cos 2x_1 & \sin 2x_1 & \ldots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cos 2x_{2n} & \sin 2x_{2n} & \ldots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix} = W[1, \cos x, \sin x, \ldots].$$

Найдем величину этого определителя. Для этого представим каждую из тригонометрических функций в показательной форме. При этом получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{e^{ix_0}+e^{-ix_0}}{2} & \frac{e^{ix_0}-e^{-ix_0}}{2i} & \ldots & \frac{e^{nix_0}+e^{-nix_0}}{2} & \frac{e^{nix_0}-e^{-nix_0}}{2i} \\ 1 & \frac{e^{ix_1}+e^{-ix_1}}{2} & \frac{e^{ix_1}-e^{-ix_1}}{2i} & \ldots & \frac{e^{nix_1}+e^{-nix_1}}{2} & \frac{e^{nix_1}-e^{-nix_1}}{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{e^{ix_{2n}}+e^{-ix_{2n}}}{2} & \frac{e^{ix_{2n}}-e^{-ix_{2n}}}{2i} & \ldots & \frac{e^{nix_{2n}}+e^{-nix_{2n}}}{2} & \frac{e^{nix_{2n}}-e^{-nix_{2n}}}{2i} \end{vmatrix}.$$

Преобразуем этот определитель, вынося из столбцов общие множители $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2i}$ и прибавляя к каждому столбцу с четным номером столбец с нечетным номером, на единицу большим. В результате будем иметь:

$$\Delta = \frac{1}{2^{2n} i^n} \begin{vmatrix} 1 & 2e^{ix_0} & e^{ix_0}-e^{-ix_0} & \ldots & 2e^{inx_0} & e^{inx_0}-e^{-inx_0} \\ 1 & 2e^{ix_1} & e^{ix_1}-e^{-ix_1} & \ldots & 2e^{inx_1} & e^{inx_1}-e^{-inx_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2e^{ix_{2n}} & e^{ix_{2n}}-e^{-ix_{2n}} & \ldots & 2e^{inx_{2n}} & e^{inx_{2n}}-e^{-ix_{2n}} \end{vmatrix}.$$

Вынесем двойки за знак определителя из столбцов с четными номерами и вычтем эти столбцы из столбцов с нечетными номерами, на единицу большими. В полученном определителе

$$\Delta = \frac{(-1)^n}{2^n i^n} \begin{vmatrix} 1 & e^{ix_0} & e^{-ix_0} & \ldots & e^{nix_0} & e^{-nix_0} \\ 1 & e^{ix_1} & e^{-ix_1} & \ldots & e^{nix_1} & e^{-nix_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & e^{ix_{2n}} & e^{-ix_{2n}} & \ldots & e^{nix_{2n}} & e^{-inx_{2n}} \end{vmatrix}.$$

вынесем из каждой строки e^{-inx_j}, $j = 0, 1, 2, \ldots, 2n$. В результате этого найдем:

$$\Delta = \frac{(-1)^n e^{-ni\sum_{j=0}^{2n} x_j}}{2^n i^n} \begin{vmatrix} e^{nix_0} & e^{i(n+1)x_0} & e^{i(n-1)x_0} & \ldots & e^{2nix_0} & 1 \\ e^{nix_1} & e^{i(n+1)x_1} & e^{i(n-1)x_1} & \ldots & e^{2nix_1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{nix_{2n}} & e^{i(n+1)x_{2n}} & e^{i(n-1)x_{2n}} & \ldots & e^{2nix_{2n}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь переставим столбцы так, чтобы получился определитель Вандермонда. При этом придется произвести $n(n+1)$ транспозиций, а определитель примет вид

$$\Delta = \frac{(-1)^{n(n+2)}\, e^{-ni\sum_{j=0}^{2n} x_j}}{2^n i^n} \begin{vmatrix} 1 & e^{ix_0} & e^{2ix_0} & \dots & e^{2nix_0} \\ 1 & e^{ix_1} & e^{2ix_1} & \dots & e^{2nix_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{ix_{2n}} & e^{2ix_{2n}} & \dots & e^{2nix_{2n}} \end{vmatrix}.$$

Как известно, такой определитель равен:

$$\Delta = \frac{(-1)^{n(n+2)}\, e^{-ni\sum_{j=0}^{2n} x_j}}{2^n i^n} \prod_{2n \geqslant k > l \geqslant 0} \left(e^{ix_k} - e^{ix_l}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{n(n+2)}\, e^{-ni\sum_{j=0}^{2n} x_j}}{2^n i^n} \prod_{2n \geqslant k > l \geqslant 0} e^{\frac{i(x_k+x_l)}{2}} \left[e^{\frac{i(x_k-x_l)}{2}} - e^{\frac{-i(x_k-x_l)}{2}}\right],$$

а это выражение легко приводится к тригонометрическому виду:

$$\Delta = 2^{2n^2} \prod_{2n \geqslant k > l \geqslant 0} \sin \frac{x_k - x_l}{2}.$$

Пусть искомый тригонометрический многочлен имеет вид

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1}$$

Условия, налагаемые интерполяцией, можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0), \\ f(x_1) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_1 + b_k \sin kx_1), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(x_{2n}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_{2n} + b_k \sin kx_{2n}). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Будем рассматривать равенства (2) и равенство (1) как систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов при 1, $\cos kx$, $\sin kx$, $\cos kx_0$, $\sin kx_0$, и при $T_n(x)$, $f(x_0)$, ..., $f(x_{2n})$. Эта система имеет нетривиальное решение (коэффициенты

при $T_n(x)$, $f(x_i)$ равны -1). Следовательно, определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} T_n(x) & 1 & \cos x & \sin x & \dots & \cos nx & \sin nx \\ f(x_0) & 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \dots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ f(x_1) & 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \dots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_{2n}) & 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \dots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель по элементам первого столбца, получим:

$$T_n(x)\,\Delta - f(x_1)\,\Delta_1 + f(x_2)\,\Delta_2 - \dots - f(x_{2n})\,\Delta_{2n+1} = 0.$$

Здесь Δ_i означает определитель Δ, в котором i-я строка заменена первой строкой из написанного выше определителя. Так как эти определители имеют такое же строение, как и определитель Δ, то мы получим после очевидных сокращений:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} f(x_i) \times$$

$$\times \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x-x_1}{2}\dots\sin\frac{x-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x-x_{i+1}}{2}\dots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin\frac{x_i-x_0}{2}\sin\frac{x_i-x_1}{2}\dots\sin\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x_i-x_{i+1}}{2}\dots\sin\frac{x_i-x_{2n}}{2}}. \quad (3)$$

Что это действительно тригонометрический многочлен, обнаруживается простыми тригонометрическими преобразованиями. В числителе каждого слагаемого мы имеем произведение $2n$ множителей вида $\sin\frac{x-x_k}{2}$. Произведение двух таких множителей дает

$$\sin\frac{x-x_k}{2}\sin\frac{x-x_j}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x_j-x_k}{2} - \cos x\cos\frac{x_k+x_j}{2} - \sin x\sin\frac{x_k+x_j}{2}\right],$$

т. е. тригонометрический многочлен первого порядка. Теперь докажем, что произведение двух тригонометрических многочленов $T_m(x)$ и $T_n(x)$ соответственно порядков m и n даст тригонометрический многочлен порядка $m+n$. Действительно, в это произведение войдут члены вида $\sin kx\sin lx$, $\sin kx\cos lx$, $\cos kx\cos lx$. Но

$$\sin kx\sin lx = \frac{1}{2}[\cos(k-l)x - \cos(k+l)x],$$

$$\sin kx\cos lx = \frac{1}{2}[\sin(k+l)x + \sin(k-l)x],$$

$$\cos kx\cos lx = \frac{1}{2}[\cos(k-l)x + \cos(k+l)x].$$

Если коэффициенты многочлена $T_m(x)$ обозначить через $a_i^{(m)}$ и $b_i^{(m)}$, а коэффициенты многочлена $T_n(x)$ буквами $a_i^{(n)}$ и $b_i^{(n)}$, то коэффициент

при $\cos(m+n)x$ в произведении $T_m T_n$ будет равен $\frac{1}{2}\left[a_m^{(m)}a_n^{(n)} - b_m^{(m)}b_n^{(n)}\right]$, а коэффициент при $\sin(m+n)x$ — $\frac{1}{2}\left[a_m^{(m)}b_n^{(n)} + a_n^{(n)}b_m^{(m)}\right]$. По крайней мере один из этих коэффициентов отличен от нуля. Это и доказывает утверждение. Таким образом, каждое слагаемое написанной интерполяционной формулы является тригонометрическим многочленом порядка n и, следовательно, вся сумма также является тригонометрическим многочленом порядка не выше n.

Выполнение интерполяционных условий проверяется непосредственно. Таким образом, $T_n(x)$ решает поставленную задачу. Можно было бы не производить выкладок с определителями, а сразу написать выражение для $T_n(x)$ и проверить, что все условия будут выполнены.

Приведем пример на применение полученной интерполяционной формулы.

Построить тригонометрический многочлен второго порядка, который бы в точках $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ принимал соответственно значения $2, \frac{1}{2}, 0, 2, 0$. В этом случае получим:

$$T_2(x) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{4}} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)} +$$

$$+2\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}.$$

Числитель первой дроби будет равен

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{16}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{16}\sin 2x.$$

Знаменатель ее равен

$$\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{4}.$$

Итак, первая дробь равна

$$\frac{1}{2} + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x.$$

Числитель второго слагаемого даст

$$\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{8}\sin 2x,$$

а знаменатель

$$-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{6},$$

а второе слагаемое равно

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2x.$$

Числитель третьего слагаемого равен

$$\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)=$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{\sqrt{3}}{8}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{16}\cos 2x-\frac{1}{16}\sin 2x,$$

а знаменатель

$$\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{4},$$

и третье слагаемое равно

$$\frac{1}{2}-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 2x.$$

Складывая найденные выражения для каждого из слагаемых, получим:

$$T_2(x)=1+\cos 2x.$$

Проверкой убеждаемся, что действительно этот многочлен удовлетворяет всем условиям.

Если интерполируемая функция четная, то естественно искать четный интерполирующий многочлен. Точно так же для нечетных интерполируемых функций естественно разыскивать нечетный интерполирующий многочлен.

Рассмотрим сначала случай четных функций $f(x)$. Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, +\pi]$. В качестве базисной системы интерполирующих функций возьмем

$$1,\quad \cos x,\quad \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx.$$

Каждая из функций этой системы также четная. Поэтому мы можем задавать узлы интерполирования на какой-нибудь из половин рассматриваемого отрезка. Выберем полуотрезок $[0, \pi)$. Пусть на нем заданы узлы $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ и $y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ — соответствующие им значения функции $f(x)$. Если среди узлов имеется точка 0, то будем считать, что она соответствует x_0. Построим

тригонометрический интерполяционный многочлен порядка n, принимающий в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n, -x_1, -x_2, \ldots, -x_n$ соответственно значения $y_0, y_1, \ldots, y_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Мы можем применить предыдущие рассуждения, так как длина отрезка равна 2π. При этом получим:

$$T_n(x) =$$

$$= y_0 \frac{\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x+x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}\sin\frac{x+x_2}{2}\ldots\sin\frac{x-x_n}{2}\sin\frac{x+x_n}{2}}{\sin\frac{x_0-x_1}{2}\sin\frac{x_0+x_1}{2}\sin\frac{x_0-x_2}{2}\sin\frac{x_0+x_2}{2}\ldots\sin\frac{x_0-x_n}{2}\sin\frac{x_0+x_n}{2}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x+x_1}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x+x_{i-1}}{2}}{\sin\frac{x_i-x_0}{2}\sin\frac{x_i-x_1}{2}\sin\frac{x_i+x_1}{2}\ldots\sin\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x_i+x_{i-1}}{2}} \times$$

$$\times \frac{\sin\frac{x+x_i}{2}\ldots\sin\frac{x-x_n}{2}\sin\frac{x+x_n}{2}}{\sin\frac{x_i+x_i}{2}\ldots\sin\frac{x_i-x_n}{2}\sin\frac{x_i+x_n}{2}} + \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x-x_1}{2}}{\sin\frac{-x_i-x_0}{2}\sin\frac{-x_i-x_1}{2}} \times$$

$$\times \frac{\sin\frac{x+x_1}{2}\ldots\sin\frac{x+x_{i-1}}{2}\sin\frac{x-x_i}{2}\sin\frac{x-x_{i+1}}{2}}{\sin\frac{-x_i-x_1}{2}\ldots\sin\frac{-x_i+x_{i+1}}{2}\sin\frac{-x_i-x_i}{2}\sin\frac{-x_i-x_{i+1}}{2}} \times$$

$$\times \frac{\ldots\sin\frac{x-x_n}{2}\sin\frac{x+x_n}{2}}{\sin\frac{-x_i-x_n}{2}\sin\frac{-x_i+x_n}{2}}.$$

Используем формулы

$$\sin\frac{x-x_k}{2}\sin\frac{x+x_k}{2} = \frac{1}{2}(\cos x_k - \cos x)$$

и

$$\sin\frac{x_i-x_k}{2}\sin\frac{x_i+x_k}{2} = \frac{1}{2}(\cos x_k - \cos x_i).$$

Дробь, стоящая в первом слагаемом, примет вид

$$\frac{(\cos x - \cos x_1)(\cos x - \cos x_2)\ldots(\cos x - \cos x_n)}{(\cos x_0 - \cos x_1)(\cos x_0 - \cos x_2)\ldots(\cos x_0 - \cos x_n)}.$$

Объединим члены с одинаковыми y_i в первой и второй суммах. Они будут иметь общий множитель

$$\frac{(\cos x - \cos x_1)(\cos x - \cos x_2)\ldots(\cos x - \cos x_{i-1})}{(\cos x_i - \cos x_1)(\cos x_i - \cos x_2)\ldots(\cos x_i - \cos x_{i-1})} \times$$

$$\times \frac{(\cos x - \cos x_{i+1})\ldots(\cos x - \cos x_n)}{(\cos x_i - \cos x_{i+1})\ldots(\cos x_i - \cos x_n)}.$$

Члены, стоящие при этом общем множителе, дадут

$$\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_i}{2}}{\sin\frac{x_i-x_0}{2}\sin x_i}+\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x-x_i}{2}}{\sin\frac{x_i+x_0}{2}\sin x_i}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\left(\sin\frac{x+x_i}{2}\sin\frac{x_i+x_0}{2}+\sin\frac{x-x_i}{2}\sin\frac{x_i-x_0}{2}\right)}{\sin\frac{x_i-x_0}{2}\sin\frac{x_i+x_0}{2}\sin x_i}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\left[\cos\frac{x-x_0}{2}-\cos\left(\frac{x+x_0}{2}+x_i\right)+\cos\left(\frac{x+x_0}{2}-x_i\right)-\cos\frac{x-x_0}{2}\right]}{\frac{1}{2}\sin x\ (\cos x_0-\cos x_i)}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}\sin x_i}{\sin x_i\,(\cos x_0-\cos x_i)}=\frac{\cos x-\cos x_0}{\cos x_i-\cos x_0}.$$

Таким образом, $T_n(x)$ в этом случае будет иметь вид

$$T_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(\cos x-\cos x_0)(\cos x-\cos x_1)\ldots(\cos x-\cos x_{i-1})}{(\cos x_i-\cos x_0)(\cos x_i-\cos x_1)\ldots(\cos x_i-\cos x_{i-1})}\times$$

$$\times\frac{(\cos x-\cos x_{i+1})\ldots(\cos x-\cos x_n)}{(\cos x_i-\cos x_{i+1})\ldots(\cos x_i-\cos x_n)}. \qquad (4)$$

Это будет четный многочлен, принимающий при $x=x_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ $x_i\in[0, \pi)$ значения y_i.

Приведем следующий числовой пример.

Построить четный тригонометрический многочлен, который при $x=0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ принимает соответственно значения 2, 1, 0.

В этом случае будем иметь:

$$T_2(x)=2\frac{\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos 0-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos 0-\cos\frac{\pi}{2}\right)}+$$

$$+1\frac{(\cos x-\cos 0)\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{2}\cos^2 x-\cos x-\cos^2 x+\cos x\right)=1+\cos 2x.$$

Совершенно аналогично можно построить нечетный многочлен, который при $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x_i\in(0, \pi)$ принимает значения y_1,

$y_2, \ldots, y_n$. Для этого будем строить тригонометрический многочлен $T_n(x)$ порядка n, который в точках $-x_n, \ldots, -x_1, 0, x_1, \ldots, x_n$ принимает соответственно значения $-y_n, -y_{n-1}, \ldots$ $\ldots, -y_1, 0, y_1, \ldots, y_n$. В этом случае

$$T_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x+x_1}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x+x_{i-1}}{2}}{\sin\frac{x_i}{2}\sin\frac{x_i-x_1}{2}\sin\frac{x_i+x_1}{2}\ldots\sin\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x_i+x_{i-1}}{2}} \times$$

$$\times \frac{\sin\frac{x+x_i}{2}\sin\frac{x-x_{i+1}}{2}\sin\frac{x+x_{i+1}}{2}\ldots\sin\frac{x-x_n}{2}\sin\frac{x+x_n}{2}}{\sin\frac{x_i+x_i}{2}\sin\frac{x_i-x_{i+1}}{2}\sin\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\ldots\sin\frac{x_i-x_n}{2}\sin\frac{x_i+x_n}{2}} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x+x_1}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x+x_{i-1}}{2}}{\sin\frac{-x_i}{2}\sin\frac{-x_i-x_1}{2}\sin\frac{-x_i+x_1}{2}\ldots\sin\frac{-x_i-x_{i-1}}{2}\sin\frac{-x_i+x_{i-1}}{2}} \times$$

$$\times \frac{\sin\frac{x-x_i}{2}\sin\frac{x-x_{i+1}}{2}\sin\frac{x+x_{i+1}}{2}\ldots\sin\frac{x-x_n}{2}\sin\frac{x+x_n}{2}}{\sin\frac{-x_i-x_i}{2}\sin\frac{-x_i-x_{i+1}}{2}\sin\frac{-x_i+x_{i+1}}{2}\ldots\sin\frac{-x_i-x_n}{2}\sin\frac{-x_i+x_n}{2}}.$$

Как и прежде, обнаружим, что если объединить члены с одинаковыми y_i, то можно будет вынести общие множители:

$$\frac{\sin\frac{x}{2}(\cos x-\cos x_1)(\cos x-\cos x_2)\ldots(\cos x-\cos x_{i-1})}{\sin\frac{x_i}{2}(\cos x_i-\cos x_1)(\cos x_i-\cos x_2)\ldots(\cos x_i-\cos x_{i-1})} \times$$

$$\times \frac{(\cos x-\cos x_{i+1})\ldots(\cos x-\cos x_n)}{(\cos x_i-\cos x_{i+1})\ldots(\cos x_i-\cos x_n)}.$$

Коэффициентами при этих общих множителях будут

$$\frac{\sin\frac{x+x_i}{2}}{\sin x_i} - \frac{\sin\frac{x-x_i}{2}}{\sin x_i} = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x_i}{2}}{\sin x_i}.$$

Итак, окончательное выражение для $T_n(x)$ будет иметь вид

$$T_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\sin x(\cos x-\cos x_1)\ldots(\cos x-\cos x_{i-1})}{\sin x_i(\cos x_i-\cos x_1)\ldots(\cos x_i-\cos x_{-1})} \times$$

$$\times \frac{(\cos x-\cos x_{i+1})\ldots(\cos x-\cos x_n)}{(\cos x_i-\cos x_{i+1})\ldots(\cos x_i-\cos x_n)}. \qquad (5)$$

Это будет нечетный тригонометрический многочлен, принимающий при $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_i \in (0, \pi)$, значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Приведем и для этого случая числовой пример.

Построить нечетный тригонометрический многочлен, который при $x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ принимает значения $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1. По общей форме будем иметь:

$$T_2(x)=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sin x\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}\right)}+1\,\frac{\sin x\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)2\sin x\cos x-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin x\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sin x+\sin 2x.$$

Проверкой убеждаемся, что этот многочлен удовлетворяет поставленным условиям.

Как мы видели, практическое построение тригонометрических интерполяционных многочленов чрезвычайно громоздко. Естественно ожидать, что если узлы равноотстоящие, то задача упростится. Построение тригонометрических многочленов для случая равноотстоящих узлов составляет задачу гармонического анализа. К этому вопросу мы еще вернемся в разделе среднеквадратичных приближений.

Так как последние две задачи имеют всегда единственное решение, то системы функций 1, $\cos x$, $\cos 2x$, ..., $\cos nx$ и $\sin x$, $\sin 2x$, ..., $\sin nx$ первая на $[0, \pi)$, а вторая на $(0, \pi)$ образуют системы Чебышева.

§ 11. Общая задача интерполирования алгебраическими многочленами

1. Интерполяционный многочлен Эрмита. Рассмотрим теперь более общую задачу, чем та, которую мы решали. Пусть нам задана базисная система интерполяционных функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... на $[a, b]$. Требуется найти такую их линейную комбинацию

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{m}c_i\varphi_i(x), \tag{1}$$

что

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(x_0)=y_0,\quad \varphi'(x_0)=y_0',\quad \ldots,\quad \varphi^{(\alpha_0-1)}(x_0)=y_0^{(\alpha_0-1)},\\
&\varphi(x_1)=y_1,\quad \varphi'(x_1)=y_1',\quad \ldots,\quad \varphi^{(\alpha_1-1)}(x_1)=y_1^{(\alpha_1-1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi(x_n)=y_n,\quad \varphi'(x_n)=y_n',\quad \ldots,\quad \varphi^{(\alpha_n-1)}(x_n)=y_n^{(\alpha_n-1)},
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $y_i^{(j)}$ — заданные числа, а $x_i\in[a, b]$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n;\ x_i\neq x_j$ при $i\neq j)$. Так как число условий, которые мы накладываем

на $\varphi(x)$, равно $\alpha_0+\alpha_1+\ \ldots\ +\alpha_n$, то для того, чтобы наша задача всегда имела единственное решение, требуется, чтобы

$$m=\alpha_0+\alpha_1+\ \ldots\ +\alpha_n-1 \tag{3}$$

и

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0'(x_0) & \varphi_1'(x_0) & \ldots & \varphi_m'(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \varphi_0^{(\alpha_0-1)}(x_0) & \varphi_1^{(\alpha_0-1)}(x_0) & \ldots & \varphi_m^{(\alpha_0-1)}(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_m(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \varphi_0^{(\alpha_n-1)}(x_n) & \varphi_1^{(\alpha_n-1)}(x_n) & \ldots & \varphi_m^{(\alpha_n-1)}(x_n) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Мы не будем здесь входить в подробности общего случая, а ограничимся лишь алгебраическими многочленами, т. е. положим $\varphi_i(x)=x^i$.

Итак, нам требуется построить алгебраический многочлен степени не выше m, удовлетворяющий поставленным выше условиям. Предположим, что такой многочлен существует, и обозначим его через $H_m(x)$. Наряду с $H_m(x)$ рассмотрим интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$, принимающий в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Разность $H_m(x)-L_n(x)$ должна быть многочленом степени не выше m, обращающимся в нуль в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Следовательно,

$$H_m(x)-L_n(x)=\omega_n(x)\,H_{m-n}(x), \tag{5}$$

где

$$\omega_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ \ldots\ (x-x_n). \tag{6}$$

При любом многочлене $H_{m-n}(x)$ функция

$$H_m(x)=L_n(x)+\omega_n(x)\,H_{m-n}(x) \tag{7}$$

принимает в узлах интерполирования значения y_i. Подберем теперь $H_{m-n}(x)$ так, чтобы были выполнены и остальные условия. Дифференцируя обе части равенства (7), получим:

$$H_m'(x)=L_n'(x)+\omega_n'(x)\,H_{m-n}(x)+\omega_n(x)\,H_{m-n}'(x). \tag{8}$$

Полагая здесь $x=x_i$, будем иметь:

$$H_m'(x_i)=L_n'(x_i)+\omega_n'(x_i)\,H_{m-n}(x_i). \tag{9}$$

Так как $\omega_n'(x_i)\neq 0$, то в каждой точке, в которой задано $H_m'(x_i)$, мы найдем $H_{m-n}(x_i)$. Дифференцируя еще раз, получим:

$$H_m''(x)=L_n''(x)+\omega_n''(x)\,H_{m-n}(x)+2\omega_n'(x)\,H_{m-n}'(x)+ \\ +\omega_n(x)\,H_{m-n}''(x). \tag{10}$$

Полагая снова $x = x_i$, найдем:

$$H''_m(x_i) = L''_n(x_i) + \omega''_n(x_i) H_{m-n}(x_i) + 2\omega'_n(x_i) H'_{m-n}(x_i). \quad (11)$$

Из этого равенства мы сумеем найти $H'_{m-n}(x_i)$ в тех точках, в которых заданы $H''_m(x_i)$. Продолжим этот процесс далее. Каждый раз коэффициентом при старшей производной от $H_{m-n}(x)$ в точках x_i будет $\omega'_n(x_i)$. Таким образом, мы сведем нашу задачу об отыскании $H_m(x)$ к задаче об отыскании $H_{m-n}(x)$, удовлетворяющего условиям:

$$\left.\begin{array}{l} H_{m-n}(x_0) = z_0; \quad H'_{m-n}(x_0) = z'_0, \ \ldots, \ H^{(\alpha_0-2)}_{m-n}(x_0) = z_0^{(\alpha_0-2)}, \\ H_{m-n}(x_1) = z_1; \quad H'_{m-n}(x_1) = z'_1, \ \ldots, \ H^{(\alpha_1-2)}_{m-n}(x_1) = z_1^{(\alpha_1-2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{m-n}(x_n) = z_n; \quad H'_{m-n}(x_n) = z'_n, \ \ldots, \ H^{(\alpha_n-2)}_{m-n}(x_n) = z_n^{(\alpha_n-2)}, \end{array}\right\} \quad (12)$$

где $z_i^{(j)}$ — известные числа. К $H_{m-n}(x)$ применим точно такой же прием. Получим некоторые условия, наложенные на $H_{m-n}(x)$. В конце концов, нам потребуется построить интерполяционный многочлен Лагранжа по данным в некоторых точках x_i.

Посмотрим, какова же будет степень полученного таким образом многочлена $H_m(x)$. Эта степень будет равна числу узлов, в которых заданы y_i, плюс число узлов, в которых заданы y'_i, плюс число узлов, в которых заданы y''_i и т. д., плюс число узлов, в которых заданы самые старшие, входящие в условия, производные и минус единица.

Таким образом, эта степень равна

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ \ldots \ + \alpha_n - 1 = m,$$

что и требовалось.

Построенный нами многочлен единственный, который удовлетворяет поставленным условиям. Действительно, если бы имелось два таких многочлена $\overline{H}_m(x)$ и $\overline{\overline{H}}_m(x)$, то их разность

$$\overline{H}_m(x) - \overline{\overline{H}}_m(x)$$

представляла бы собой многочлен степени не выше m, имеющий на отрезке $[a, b]$ $m+1$ корней (с учетом кратности корней), что невозможно. Да и сам процесс построения в силу того, что все $H_{m-n_i}(x)$ определялись единственным образом, дает основания утверждать единственность построенного многочлена. Приведем примеры на построение таких многочленов, которые мы в дальнейшем будем называть *интерполяционными многочленами Эрмита*.

Пример. Пусть значения $f(x)$ и ее производных в точках $x=0,\ 1,\ 2$ заданы таблицей:

x	0	1	2
y	1	2	129
y'	0	7	448
y''	0		1344

Найти интерполяционный многочлен Эрмита.

Интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ в этом случае будет равен

$$L_2(x)=1\frac{(x-1)(x-2)}{2}+2\frac{x(x-2)}{-1}+129\frac{x(x-1)}{2}=63x^2-62x+1.$$

Отсюда

$$H_7(x)=63x^2-62x+1+x(x-1)(x-2)H_4(x).$$

Дифференцируя это выражение, находим:

$$H_7'(x)=126x-62+(3x^2-6x+2)H_4(x)+(x^2-3x^2+2x)H_4'(x).$$

Подставляя сюда значения $x=0,\ 1,\ 2$, получим:

$$H_4(0)=31;\quad H_4(1)=57;\quad H_4(2)=129.$$

Вторая производная от $H_7(x)$ имеет вид

$$H_7''(x)=126+(6x-6)H_4(x)+2(3x^2-6x+2)H_4'(x)+$$
$$+(x^3-3x^2+2x)H_4''(x).$$

Отсюда находим значения $H_4'(x)$ в точках 0 и 2:

$$H_4'(0)=15;\quad H_4'(2)=111.$$

Итак, нам надо найти многочлен $H_4(x)$, удовлетворяющий условиям:

$$H_4(0)=31;\quad H_4(1)=57;\quad H_4(2)=129;$$
$$H_4'(0)=15;\qquad\qquad H_4'(2)=111.$$

Записываем его в виде

$$H_4(x)=31\frac{(x-1)(x-2)}{2}+57\frac{x(x-2)}{-1}+129\frac{x(x-1)}{2}+$$
$$+x(x-1)(x-2)H_1(x)=23x^2+3x+31+(x^3-3x^2+2x)H_1(x).$$

Дифференцируя, находим:

$$H_4'(x) = 46x + 3 + (3x^2 - 6x + 2) H_1(x) + (x^3 - 3x^2 + 2x) H_1'(x).$$

Подставляя сюда $x = 0$ и 2, определяем

$$H_1(0) = 6, \quad H_1(2) = 8.$$

Отсюда

$$H_1(x) = x + 6$$

и

$$H_7(x) = (63x^2 - 62x + 1) + x(x-1)(x-2)[23x^2 + 3x + 31 + x(x-1)(x-2)(x+6)] = 1 + x^7.$$

Рассмотрим еще один пример.

Найти интерполяционный многочлен Эрмита, принимающий в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$ и имеющий там производные, равные $y_0', y_1', \ldots, y_n'$. В этом случае

$$H_m(x) = L_n(x) + \omega_n(x) H_{m-n}(x), \tag{13}$$

где

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Дифференцируя, найдем:

$$H_m'(x) = L_n'(x) + \omega_n'(x) H_{m-n}(x) + \omega_n(x) H_{m-n}'(x). \tag{14}$$

Отсюда

$$y_i' = L_n'(x_i) + \omega_n'(x_i) H_{m-n}(x_i), \tag{15}$$

и

$$H_{m-n}(x_i) = \frac{y_i' - L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)}.$$

Итак,

$$H_{m-n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i' - L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}. \tag{16}$$

Пусть

$$\frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)} = L_{ni}(x). \tag{17}$$

Тогда интерполяционный многочлен Эрмита можно записать в виде

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_{ni}(x) + \sum_{i=0}^{n} \omega_n(x) \frac{y_i' - L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} L_{ni}(x). \tag{18}$$

Последнюю сумму разобьем на две части:

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_n(x) \frac{y_i' - L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} L_{ni}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i' \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i)} L_{ni}(x) - \omega_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} L_{ni}(x).$$

Первое слагаемое в правой части запишем в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^{n} y_i' \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i)} L_{ni}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i' (x - x_i) L_{ni}^2(x).$$

Второй член подвергнем некоторым преобразованиям:

$$\omega_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{L_n'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} L_{ni}(x) = \omega_n(x) \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{y_j' L_{nj}'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} L_{ni}(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} y_j \sum_{i=0}^{n} \omega_n(x) \frac{L_{nj}'(x_i)}{\omega_n'(x_i)} L_{ni}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \sum_{j=0}^{n} \omega_n(x) \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)} L_{nj}(x).$$

Таким образом, искомый многочлен можно записать так:

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left\{ L_{ni}(x) - \sum_{j=0}^{n} \omega_n(x) \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)} L_{nj}(x) \right\} + \sum_{i=0}^{n} y_i' (x - x_i) L_{ni}^2(x). \quad (19)$$

Рассмотрим теперь выражение, стоящее в скобках под знаком первой суммы:

$$P_i(x) = L_{ni}(x) - \sum_{j=0}^{n} \omega_n(x) \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)} L_{nj}(x). \quad (20)$$

Это — многочлен степени $2n+1$. При $x = x_k$ получим:

$$P_i(x_k) = L_{ni}(x_k) = \delta_{ik}. \quad (21)$$

Итак, наш многочлен обращается в нуль при всех x_k $(k \neq i)$. Рассмотрим производную этого многочлена

$$P_i'(x) = L_{ni}'(x) - \omega_n'(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)} L_{nj}(x) - \omega_n(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)} L_{nj}'(x).$$

При $x = x_k$ получим:

$$P_i'(x_k) = L_{ni}'(x_k) - \omega_n'(x_k) \sum_{j=0}^{n} \frac{L_{ni}'(x_j)}{\omega_n'(x_j)} L_{nj}(x_k) =$$

$$= L_{ni}'(x_k) - L_{ni}'(x_k) = 0. \quad (22)$$

Таким образом, $P_i'(x)$ имеет двукратный корень при всех $x = x_k$, $k \neq i$. Следовательно, этот многочлен имеет в качестве множителя $\frac{\omega_n^2(x)}{(x - x_i)^2}$. Так как степень $P_i(x)$ равна $2n + 1$, то его можно записать в виде

$$P_i(x) = \frac{\omega_n^2(x)}{(x - x_i)^2} [A + B(x - x_i)]. \quad (23)$$

Определим коэффициенты A и B. Полагая в последнем равенстве $x = x_i$, получим:

$$1 = \omega_n'^2(x_i) A.$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{\omega_n'^2(x_i)}.$$

Дифференцируя равенство (23) и полагая затем $x = x_i$, найдем:

$$0 = P_i'(x_i) = \omega_n'(x_i) \omega_n''(x_i) A + \omega_n'^2(x_i) B.$$

Отсюда

$$B = -\frac{\omega_n''(x_i)}{\omega_n'^3(x_i)}.$$

Коэффициент $P_i(x)$ можно представить в другом виде:

$$P_i(x) = \frac{\omega_n^2(x)}{(x - x_i)^2 \omega_n'^2(x_i)} \left[1 - \frac{\omega_n''(x_i)}{\omega_n'(x_i)} (x - x_i)\right] =$$

$$= L_{ni}^2(x) \left[1 - \frac{\omega_n''(x_i)}{\omega_n'(x_i)} (x - x_i)\right].$$

Итак,

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left\{1 - \frac{\omega_n''(x_i)}{\omega_n'(x_i)} (x - x_i)\right\} L_{ni}^2(x) + \sum_{i=0}^{n} y_i'(x - x_i) L_{ni}^2(x).$$

Окончательно получаем:

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} \left\{y_i \left[1 - \frac{\omega_n''(x_i)}{\omega_n'(x_i)} (x - x_i)\right] + y_i'(x - x_i)\right\} L_{ni}^2(x). \quad (24)$$

2. Общий вид интерполяционного многочлена Эрмита. Найдем теперь общий вид интерполяционного многочлена Эрмита. Для этого

построим многочлены $H_{ij}(x)$ степени не выше m, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left.\begin{gathered} H_{ij}(x_k)=H'_{ij}(x_k)=\ldots=H_{ij}^{(\alpha_k-1)}(x_k)=0, \quad i\neq k, \\ H_{ij}(x_i)=H'_{ij}(x_i)=\ldots=H_{ij}^{(j-1)}(x_i)=H_{ij}^{(j+1)}(x_i)=H_{ij}^{(\alpha_i-1)}(x_i)=0, \\ H_{ij}^{(j)}=1 \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_i-1). \end{gathered}\right\} \tag{25}$$

Так как H_{ij} обладает в точках $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n$ нулями соответственно кратности $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{i-1},\ \alpha_{i+1},\ \ldots,\ \alpha_n$, а в точке x_i нулем кратности j, то

$$H_{ij}=(x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_{i-1})^{\alpha_{i-1}}(x-x_i)^j\times \\ \times(x-x_{i+1})^{\alpha_{i+1}}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}\bar{H}_{ij}(x), \tag{26}$$

где $\bar{H}_{ij}(x)$ — многочлен степени α_i-j-1, не обращающийся в нуль при $x=x_i$. Представим его в виде

$$\bar{H}_{ij}(x)=A_{ij}^{(0)}+A_{ij}^{(1)}(x-x_i)+\ldots+A_{ij}^{(\alpha_i-j-1)}(x-x_i)^{\alpha_i-j-1}. \tag{27}$$

Для определения коэффициентов $A_{ij}^{(k)}$ воспользуемся тем же приемом, что и в предыдущем примере. Пусть

$$\Omega(x)=(x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}. \tag{28}$$

Тогда

$$A_{ij}^{(0)}+A_{ij}^{(1)}(x-x_i)+\ldots+A_{ij}^{(\alpha_i-j-1)}(x-x_i)^{\alpha_i-j-1}= \\ =\frac{(x-x_i)^{\alpha_i-j}}{\Omega(x)}H_{ij}(x) \tag{29}$$

Подставляя сюда $x=x_i$, получим:

$$A_{ij}^{(0)}=\lim_{x\to x_i}\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}\,\frac{H_{ij}(x)}{(x-x_i)^j}\right]. \tag{30}$$

Первое отношение непрерывно при $x=x_i$. Следовательно,

$$\lim_{x\to x_i}\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}\right]=\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}\right]_{x=x_i}.$$

Предел второго отношения найдем по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_i}\left[\frac{H_{ij}(x)}{(x-x_i)^j}\right]=\lim_{x\to x_i}\frac{H_{ij}^{(j)}(x)}{j!}=\frac{1}{j!}.$$

Итак,

$$A_{ij}^{(0)}=\frac{1}{j!}\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}\right]_{x=x_i}. \tag{31}$$

Аналогично находим коэффициенты $A_{ij}^{(k)}$:

$$A_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k!} \lim_{x \to x_i} \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]. \tag{32}$$

Применим правило Лейбница для дифференцирования произведения

$$\frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_j)^j} \right] = \sum_{p=0}^{k} C_k^p \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(p)} \left[\frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]^{(k-p)}.$$

Производные

$$\left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(p)}$$

непрерывны в точке $x = x_i$. Поэтому

$$\lim_{x \to x_i} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(p)} = \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(p)}_{x = x_i}.$$

Для определения

$$\lim_{x \to x_i} \left[\frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]^{(k-p)}$$

воспользуемся таким же приемом, как и для отыскания $A_{ij}^{(k)}$. Многочлен $H_{ij}(x)$ имеет степень не выше m. Он делится на $(x - x_i)^j$. Следовательно, его можно записать в виде

$$H_{ij}(x) = B_{ij}^{(0)}(x - x_i)^j + B_{ij}^{(1)}(x - x_i)^{j+1} + \ldots + B_{ij}^{(m-j)}(x - x_i)^m$$

или

$$\frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} = B_{ij}^{(0)} + B_{ij}^{(1)}(x - x_j) + \ldots + B_{ij}^{(m-j)}(x - x_i)^{m-j}.$$

Отсюда

$$\lim_{x \to x_i} \left[\frac{H_{ij}(x)}{(x - x_j)^j} \right]^{(k-p)} = (k - p)!\, B_{ij}^{(k-p)}.$$

Но $B_{ij}^{(k-p)}$, будучи коэффициентами разложения $H_{ij}(x)$ по степеням $(x - x_i)$, записываются в виде

$$B_{ij}^{(k-p)} = \frac{H_{ij}^{(j+k-p)}(x_i)}{(j + k - p)!}.$$

В нашем случае

$$j + k - p \leqslant j + k \leqslant j + \alpha_i - j - 1 = \alpha_i - 1.$$

Таким образом, $B_{ij}^{(k-p)}$ отличны от нуля только при $p=k$, и в этом случае

$$B_{ij}^{(0)}=\frac{1}{j!}.$$

Итак,

$$A_{ij}^{(k)}=\frac{1}{k!}\lim_{x\to x_i}\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}\frac{H_{ij}(x)}{(x-x_i)^j}\right]=$$

$$=\frac{1}{k!\,j!}\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}\right]^{(k)}_{x=x_i} \tag{33}$$

и

$$H_{ij}(x)=\frac{1}{j!}\frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-j}}\sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1}\frac{1}{k!}\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}\right]^{(k)}_{x=x_i}(x-x_i)^k. \tag{34}$$

Используя построенные нами функции $H_{ij}(x)$, нетрудно написать выражение для $H_m(x)$. Легко видеть, что

$$H_m(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}y_i^{(j)}H_{ij}(x)$$

или

$$H_m(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}\sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1}y_i^{(j)}\frac{1}{k!}\frac{1}{j!}\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}\right]^{(k)}_{x=x_i}\frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-j-k}}. \tag{35}$$

3. Остаточный член интерполяционной формулы Эрмита. Произведем оценку остаточного члена интерполяционной формулы Эрмита. При этом мы будем требовать существования производной $(m+1)$-го порядка от интерполируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, на котором находятся узлы интерполирования и значение x, для которого производится интерполирование, и существования и непрерывности всех производных низшего порядка.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(z)=f(z)-H_m(z)-K\Omega(z), \tag{36}$$

где K — некоторая постоянная. Эта функция имеет нуль кратности α_0 в точке x_0, нуль кратности α_1 в точке x_1 и т. д., наконец, нуль кратности α_n в точке x_n. Подберем K так, чтобы $\psi(z)$ обратилась в нуль в точке x, для которой мы производим интерполирование. Это возможно, так как тогда

$$K=\frac{f(x)-H_m(x)}{\Omega(x)},$$

а $\Omega(x)\neq 0$. На основании теоремы Ролля производная $\psi'(z)$ обратится в нуль в $n+1$ точках в интервалах между $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ и, кроме того, будет иметь нули кратностей $\alpha_0-1, \alpha_1-1, \ldots, \alpha_n-1$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, т. е. всего $m+1$ нулей на проме-

жутке $[a, b]$. Далее, получим, что вторая производная будет иметь по крайней мере m нулей на этом промежутке, третья $m-1$ нулей и т. д. Наконец, производная $(m+1)$-го порядка будет иметь на отрезке $[a, b]$ по крайней мере один нуль. Итак, на отрезке $[a, b]$ найдется по крайней мере одна точка ξ такая, что

$$\psi^{(m+1)}(\xi) = 0. \tag{36'}$$

Но

$$\psi^{(m+1)}(z) = f^{(m+1)}(z) - (m+1)!K, \tag{37}$$

так как $H_m(z)$ есть многочлен степени не выше m и, следовательно, его производная $(m+1)$-го порядка равна нулю, а $\Omega(z)$ есть многочлен степени $m+1$ со старшим коэффициентом 1 и его производная порядка $m+1$ равна $(m+1)!$. Отсюда

$$K = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}. \tag{38}$$

Итак,

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\Omega(x). \tag{39}$$

Относительно практического применения этой формулы можно сказать то же самое, что говорилось ранее для многочлена Лагранжа. На основании этой формулы, так же как и ранее, можно доказать равномерную сходимость $H_m(x)$ к $f(x)$ на $[a, b]$, если только $f(x)$ — целая функция.

В тех случаях, когда интерполяционная формула Эрмита нужна нам лишь для целей интерполирования, а не для приближенного аналитического представления функции, то общая формула, которую мы получили, неудобна. Когда мы изучали формулу Лагранжа, то оказалось более выгодным преобразовать ее к форме Ньютона. Попробуем и в случае кратных узлов поступить аналогичным образом. Проще всего это сделать, перейдя к пределу в интерполяционной формуле Ньютона. Это приведет нас к понятию разделенных разностей с повторяющимися значениями аргумента.

4. Разделенные разности с повторяющимися значениями аргумента. Непосредственное определение разделенных разностей, данное ранее, непригодно в случае повторяющихся значений аргумента, так как при этом обязательно встретятся отношения вида $\frac{0}{0}$. Необходимы дополнительные определения. Положим

$$f(\underbrace{x_0; x_0; \ldots; x_0}_{k_0 \text{ раз}}; \underbrace{x_1; x_1; \ldots; x_1}_{k_1 \text{ раз}}; \ldots; \underbrace{x_n; x_n; \ldots; x_n}_{k_n \text{ раз}}) =$$

$$= \lim f\left(x_0; x_0^{(1)}; \ldots; x_0^{(k_0-1)}; x_1; x_1^{(1)}; \ldots; x_1^{(k_1-1)}; \ldots; x_n; x_n^{(1)}; \ldots; x_n^{(k_n-1)}\right), \tag{40}$$

когда $x_i^{(j)} \to x_i$ и все $x_i^{(j)}$ различны. Для существования такого предела нужны некоторые дополнительные условия на функцию $f(x)$. Так, например, согласно нашему определению

$$f(x_0;\ x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0),$$

и следовательно, мы должны предполагать существование производной $f'(x_0)$. В дальнейшем мы будем предполагать существование и непрерывность всех производных от $f(x)$, которые нам встретятся.

Для изучения разделенных разностей с повторяющимися значениями аргумента будем пользоваться полученным ранее представлением обычных разделенных разностей в виде отношения определителей

$$f(x_0;\ x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}}. \tag{41}$$

Для сокращения записей будем обозначать определитель, стоящий в знаменателе через $D(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, а определитель, стоящий в числителе, через $D(x_0, x_1, \ldots, x_n; f)$.

Нам нужно найти предел отношения

$$\frac{D\left(x_0, x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(k_0-1)}, x_1, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(k_1-1)}, \ldots, x_n, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}, f\right)}{D\left(x_0, x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(k_0-1)}, x_1, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(k_1-1)}, \ldots, x_n, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right)}$$

при $x_i^{(j)} \to x_i$ $x_i^{(j)} \neq x_k^{(l)}$. Непосредственная подстановка x_0 вместо $x_0^{(1)}$ ничего не дает, так как при этом числитель и знаменатель обращаются в нуль. Воспользуемся правилом Лопиталя. После дифференцирования числителя и знаменателя по $x_0^{(1)}$ и замены $x_0^{(1)}$ на x_0 вторая строка числителя будет иметь следующий вид:

$$0 \quad 1 \quad 2x_0 \quad \ldots \quad (p-1)\,x_0^{p-2}\,f'(x_0),$$

а вторая строка знаменателя перейдет в

$$0 \quad 1 \quad 2x_0 \quad \ldots \quad (p-1)\,x_0^{p-2} \quad p x_0^{p-1}.$$

Здесь через p обозначено выражение $k_0 + k_1 + \ldots + k_n - 1$. Остальные строки числителя и знаменателя не изменятся. Примене-

ние правила Лопиталя будет законно, если знаменатель окажется отличным от нуля. Проверку этого мы произведем в дальнейшем. Устремим теперь $x_0^{(2)}$ к x_0. Опять придется применять правило Лопиталя. После однократного дифференцирования числителя и знаменателя по $x_0^{(2)}$ и последующей замены $x_0^{(2)}$ на x_0 у нас совпадут вторые и третьи строки. Поэтому будем дифференцировать дважды и лишь после этого заменим $x_0^{(2)}$ на x_0. В результате третья строка числителя превратится в

$$0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \cdot 2x_0 \quad \ldots \quad (p-2)(p-1)\, x_0^{p-3}\, f''(x_0).$$

Третья строка определителя в знаменателе будет такова:

$$0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \cdot 2x_0 \quad \ldots \quad (p-2)(p-1)\, x_0^{p-3} \quad (p-1)\, p x_0^{p-2}.$$

Продолжим этот процесс дальше до тех пор, пока не переберем все $x_0^{(j)}$. При этом первые k_0 строк определителя, стоящего в числителе, будут таковы:

$$\begin{array}{llll}
1 & x_0 & x_0^2 \ldots x_0^{p-1} & f(x_0), \\
0 & 1 & 2x_0 \ldots (p-1)\, x_0^{p-2} & f'(x_0), \\
0 & 0 & 2 \ldots (p-1)(p-2)\, x_0^{p-3} & f''(x_0), \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 \ldots (p-1) \ldots (p-k_0+1)\, x_0^{p-k_0} & f^{(k_0-1)}(x_0).
\end{array}$$

В знаменателе будет аналогичная картина, только в качестве $f(x)$ нужно взять x^p.

После этого проделаем аналогичные операции с $x_1^{(j)}$, затем с $x_2^{(j)}$ и так далее, пока не переберем все $x_i^{(j)}$. Нетрудно представить, во что перейдут при этом числитель и знаменатель.

Проверим теперь, что ни один из получившихся у нас знаменателей не обратится в нуль, Как известно,

$$D\left(x_0, x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(k_0-1)}, \ldots, x_n, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right) =$$
$$= \prod \left(x_i^{(j)} - x_k^{(l)}\right) \qquad (i > k \quad \text{или} \quad i = k,\ j > l)$$

Выделим отсюда множители, содержащие $x_0^{(1)}$. Получим:

$$D\left(x_0, x_0^{(1)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right) =$$
$$= \left(x_0^{(1)} - x_0\right)\left(x_0^{(2)} - x_0^{(1)}\right) \ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_0^{(1)}\right) D\left(x_0, x_0^{(2)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right).$$

Таким образом, производная знаменателя по $x_0^{(1)}$ при $x_0^{(1)} = x_0$ будет равна

$$\left(x_0^{(2)} - x_0\right)\left(x_0^{(3)} - x_0\right) \ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_0\right) D\left(x_0, x_0^{(2)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right).$$

Выделяя здесь множители, содержащие $x_0^{(2)}$, получим:

$$\left(x_0^{(2)} - x_0\right)^2 \left(x_0^{(3)} - x_0^{(2)}\right) \ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_0^{(2)}\right)\left(x_0^{(3)} - x_0\right) \ldots$$
$$\ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_0\right) D\left(x_0, x_0^{(3)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right).$$

Вторая производная по $x_0^{(2)}$ от этого выражения при $x_0^{(2)} = x_0$ будет равна

$$2!\left(x_0^{(3)} - x_0\right)^2 \ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_0\right)^2 D\left(x_0, x_0^{(3)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right).$$

Аналогично находим, что третья производная от этого выражения по $x_0^{(3)}$ при $x_0^{(3)} = x_0$ будет равна

$$2!\,3!\left(x_0^{(4)} - x_0\right)^3 \ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_0\right)^3 D\left(x_0, x_0^{(4)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right).$$

Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не переберем все $x_0^{(j)}$. Окончательно получим:

$$2!\,3! \ldots (k_0 - 1)!\left(x_1 - x_0\right)^{k_0-1}\left(x_1^{(1)} - x_0\right)^{k_0-1} \ldots$$
$$\ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_0\right)^{k_0-1} D\left(x_0, x_1, x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right).$$

Перейдем теперь к дифференцированию по $x_1^{(j)}$. Выделим из последнего множителя предыдущего выражения $x_1^{(1)}$:

$$2!\,3! \ldots (k_0 - 1)!\left(x_1 - x_0\right)^{k_0-1}\left(x_1^{(1)} - x_0\right)^{k_0}\left(x_1^{(2)} - x_0\right)^{k_0-1} \ldots$$
$$\ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_0\right)^{k_0-1}\left(x_1^{(1)} - x_1\right)\left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right) \ldots$$
$$\ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_1^{(1)}\right) D\left(x_0, x_1, x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right).$$

Дифференцирование по $x_1^{(1)}$ и последующая подстановка x_1 вместо $x_1^{(1)}$ дадут:

$$2!\,3! \ldots (k_0 - 1)!\left(x_1 - x_0\right)^{2k_0-1}\left(x_1^{(2)} - x_0\right)^{k_0-1} \ldots$$
$$\ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_0\right)^{k_0-1}\left(x_1^{(2)} - x_1\right) \ldots$$
$$\ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_1\right) D\left(x_0, x_1, x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right).$$

Теперь выделяем из последнего множителя разности $x_1^{(2)} - x_i$, $x_1^{(2)} - x_i^{(j)}$, затем дифференцируем дважды по $x_1^{(2)}$ и полагаем $x_1^{(2)} = x_1$. Это даст:

$$2!\,3! \ldots (k_0 - 1)!\,2!\left(x_1 - x_0\right)^{3k_0-1}\left(x_1^{(3)} - x_0\right)^{k_0-1} \ldots$$
$$\ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_0\right)^{k_0-1}\left(x_1^{(3)} - x_1\right)^2 \ldots$$
$$\ldots \left(x_n^{(k_n-1)} - x_1\right)^2 D\left(x_0, x_1, x_1^{(3)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right).$$

Процесс продолжаем до тех пор, пока не переберем все $x_1^{(j)}$. В конце концов, получим:

$$2!\,3!\ldots(k_0-1)!\,2!\,3!\ldots(k_1-1)\,(x_1-x_0)^{k_1k_0-1}(x_2-x_0)^{k_0-1}\ldots$$
$$\ldots\left(x_n^{(k_n-1)}-x_0\right)^{k_0-1}\left(x_2-x_1\right)^{k_1-1}\ldots$$
$$\ldots\left(x_n^{(k_n-1)}-x_1\right)^{k_1-1}D\left(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_2^{(1)},\ \ldots,\ x_n^{(k_n-1)}\right).$$

Теперь будем дифференцировать по $x_2^{(j)}$, затем по $x_3^{(j)}$ и так далее, заканчивая на $x_n^{(k_n-1)}$. В итоге исходный определитель перейдет в

$$2!\,3!\ldots(k_0-1)!\,2!\,3!\ldots(k_1-1)!\ldots2!\,3!\ldots$$
$$\ldots(k_n-1)!\prod_{i>j}(x_i-x_j)^{k_ik_j-1}D(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

или, если вычислить $D(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$:

$$2!\,3!\ldots(k_0-1)!\,2!\,3!\ldots(k_1-1)!\ldots2!\,3!\ldots(k_n-1)\prod_{i>j}(x_i-x_j)^{k_ik_j}.$$

При наших предположениях о $x_i^{(j)}$ и x_i ни один из полученных таким образом определителей не обращается в нуль. Таким образом, наше определение разделенных разностей с повторяющимися значениями аргументов законно, и эти разности можно вычислять тем способом, который здесь приведен.

Рассмотрим, в частности, $f(\underbrace{x_0;\ \ldots;\ x_0}_{k\text{ раз}})$. Представление этой разности в виде отношения определителей будет выглядеть так:

$$f(\underbrace{x_0;\ x_0;\ \ldots;\ x_0}_{k\text{ раз}}) =$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{k-2} & f(x_0) \\ 0 & 1 & 2x_0 & \ldots & (k-2)\,x_0^{k-3} & f'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (k-2)! & f^{(k-2)}(x_0) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f^{(k-1)}(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{k-2} & x_0^{k-1} \\ 0 & 1 & 2x_0 & \ldots & (k-2)\,x_0^{k-3} & (k-1)\,x_0^{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (k-2)! & (k-1)!\,x_0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & (k-1)! \end{vmatrix}} = \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}. \quad (42)$$

Полученные нами выражения разделенных разностей с повторяющимися значениями аргументов слишком громоздки и не могут служить для практических вычислений. Перенесем на них способ вычисления обычных разделенных разностей через разности низшего порядка. Пусть нам требуется вычислить разделенную разность

$$f(\underbrace{x_0;\ x_0;\ \ldots;\ x_0}_{k_0\text{ раз}};\ \underbrace{x_1;\ x_1;\ \ldots;\ x_1}_{k_1\text{ раз}};\ \ldots;\ \underbrace{x_n;\ x_n;\ \ldots;\ x_n}_{k_n\text{ раз}}).$$

Предполагаем, что все разделенные разности низшего порядка уже вычислены. Будем предполагать также, что под знаком разделенной разности имеется по крайней мере два различных аргумента. Пусть хотя бы $x_0 \neq x_n$. Для случая, когда все аргументы под знаком разделенной разности совпадают, мы уже получили удобную формулу. По определению,

$$f(\underbrace{x_0;\ \ldots;\ x_0}_{k_0\text{ раз}};\ \underbrace{x_1;\ \ldots;\ x_1}_{k_1\text{ раз}};\ \ldots;\ \underbrace{x_n;\ \ldots;\ x_n}_{k_n\text{ раз}}) =$$

$$= \lim_{x_i^{(j)} \to x_i} f\left(x_0;\ x_0^{(1)};\ \ldots;\ x_0^{(k_0-1)};\ x_1;\ x_1^{(1)};\ \ldots\right.$$

$$\left.\ldots;\ x_1^{(k-1)};\ \ldots;\ x_n,\ x_n^{(1)};\ \ldots;\ x_n^{(k_n-1)}\right) \qquad \left(x_i^{(j)} \neq x_k^{(l)}\right).$$

Но

$$f\left(x_0;\ x_0^{(1)};\ \ldots;\ x^{(k_0-1)};\ x_1;\ x_1^{(1)};\ \ldots;\ x_1^{(k_1-1)};\ \ldots;\ x_n;\ x_n^{(1)};\ \ldots;\ x_n^{(k_n-1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0}\left[f\left(x_0^{(1)};\ \ldots;\ x_0^{(k_0-1)};\ x_1;\ x_1^{(1)};\ \ldots;\ x_1^{(k_1-1)};\ \ldots;\ x_n;\ x_n^{(1)};\ \ldots;\ x_n^{(k_n-1)}\right) -\right.$$

$$\left. - f\left(x_0;\ x_0^{(1)}\cdot\ \ldots;\ x_0^{(k_0-1)};\ x_1;\ x_1^{(1)};\ \ldots;\ x_1^{(k_1-1)};\ \ldots;\ x_n^{(1)};\ \ldots;\ x^{(k_n-1)}\right)\right].$$

Переходя к пределу в обеих частях равенства при $x_i^{(j)} \to x_i$, получим:

$$f(\underbrace{x_0;\ x_0;\ \ldots;\ x_0}_{k_0\text{ раз}};\ \underbrace{x_1;\ x_1;\ \ldots;\ x_1}_{k_1\text{ раз}};\ \ldots;\ \underbrace{x_n;\ x_n;\ \ldots;\ x_n}_{k_n\text{ раз}}) =$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0}\left[f(\underbrace{x_0;\ \ldots;\ x_0}_{k_0-1\text{ раз}};\ \underbrace{x_1;\ x_1;\ \ldots;\ x_1}_{k_1\text{ раз}};\ \ldots;\ \underbrace{x_n;\ x_n;\ \ldots;\ x_n}_{k_n\text{ раз}}) -\right.$$

$$\left. - f(\underbrace{x_0;\ x_0;\ \ldots;\ x_0}_{k_0\text{ раз}};\ \underbrace{x_1;\ \ldots;\ x_1}_{k_1\text{ раз}};\ \ldots;\ \underbrace{x_n;\ \ldots;\ x_n}_{k_n-1\text{ раз}})\right]. \qquad (43)$$

Отсюда получается простой способ составления таблицы разделенных разностей (р. р.). В первом столбце выписываем узлы интерполирования, причем каждый узел повторяем столько раз, какова его кратность. Во втором столбце выписываем соответствующие узлам значения функции. В третьем столбце помещаем разделенные разности, если соответствующие аргументы не совпадают, или первые производные, если аргументы совпадают. В четвертом столбце помещаем разделенные разности второго порядка, если они вычисляются так же, как это делалось ранее для обычных разделенных разностей, или же производные второго порядка, деленные на 2!, если аргументы, на которые нужно делить, совпадают. Продолжая так же и дальше, мы сумеем заполнить всю таблицу. Так, для примера, приведенного на стр. 166, таблица будет выглядеть следующим образом:

x	y	1 р. р.	2 р. р.	3 р. р.	4 р. р.	5 р. р.	6 р. р.	7 р. р.
0	1							
		0						
0	1		0					
		0		1				
0	1		1		4			
		1		5		11		
1	2		6		26		6	
		7		57		23		1
1	2		120		72		8	
		127		201		39		
2	129		321		150			
		448		351				
2	129		672					
		448						
2	129							

5. Обобщенная интерполяционная формула Ньютона с разделенными разностями. Перейдем теперь к обобщению интерполяционной формулы Ньютона для неравных промежутков на случай кратных узлов. Пусть нам поставлены такие же интерполяционные требования, как в п. 1 (условия (2)), причем y_i являются значениями некоторой функции $f(x)$, определенной и непрерывной на отрезке $[a, b]$, в узлах x_i, расположенных на этом отрезке вместе со значением x, а $y_i^{(j)}$ является значением j-й производной от $f(x)$ в узле x_i; все нужные производные предполагаются непрерывными. Будем рассматривать на $[a, b]$ наряду с узлами $x_0, x_1, \ldots, x_n$ еще узлы $x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(\alpha_1-1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(\alpha_n-1)}$, выбранные так, что среди всех узлов $x_0, x_0^{(1)}, \ldots, x^{(\alpha_0-1)}, x_1, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(\alpha_1-1)}, \ldots, x_n, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(\alpha_n-1)}$ нет равных.

Тогда

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;\ x_0^{(1)})+(x-x_0)(x-x_0^{(1)})f(x_0;\ x_0^{(1)};\ x_0^{(2)})+\ldots$$
$$\ldots+(x-x_0)(x-x_0^{(1)})\ldots(x-x_0^{(\alpha_0-1)})f(x_0;\ x_0^{(1)};\ \ldots;\ x_0^{(\alpha_0-1)};\ x_1)+$$
$$+(x-x_0)(x-x_0^{(1)})\ldots(x-x_0^{(\alpha_0-1)})(x-x_1)\times$$
$$\times f(x_0;\ x_0^{(1)};\ \ldots;\ x_0^{(\alpha_0-1)};\ x_1;\ x_1^{(1)})+\ldots+(x-x_0)(x-x_0^{(1)})\ldots$$
$$\ldots(x-x_n^{(\alpha_n-2)})f(x_0;\ x_0^{(1)};\ \ldots;\ x_n^{(\alpha_n-1)})+(x-x_0)(x-x_0^{(1)})\ldots$$
$$\ldots(x-x_n^{(\alpha_n-1)})f(x;\ x_0;\ x_0^{(1)};\ \ldots;\ x_n^{(\alpha_n-1)}). \qquad (44)$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $x_i^{(j)}\to x_i$. При этом получится:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;\ x_0)+(x-x_0)^2f(x_0;\ x_0;\ x_0)+\ldots$$
$$\ldots+(x-x_0)^{\alpha_0-1}f(\underbrace{x_0;\ x_0;\ \ldots;\ x_0}_{\alpha_0\text{ раз}})+(x-x_0)^{\alpha_0}f(\underbrace{x_0;\ \ldots;\ x_0}_{\alpha_0\text{ раз}};\ x_1)+$$
$$+(x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)f(\underbrace{x_0;\ \ldots;\ x_0}_{\alpha_0\text{ раз}};\ x_1;\ x_1)+\ldots$$
$$\ldots+(x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n-1}\times$$
$$\times f(\underbrace{x_0;\ \ldots;\ x_0}_{\alpha_0\text{ раз}};\ \underbrace{x_1;\ x_1;\ \ldots;\ x_1}_{\alpha_1\text{ раз}};\ \ldots;\ \underbrace{x_n;\ x_n;\ \ldots;\ x_n}_{\alpha_n\text{ раз}})+$$
$$+(x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots$$
$$\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}f(x;\ \underbrace{x_0;\ x_0;\ \ldots;\ x_0}_{\alpha_0\text{ раз}};\ \underbrace{x_1;\ \ldots;\ x_1}_{\alpha_1\text{ раз}};\ \ldots;\ \underbrace{x_n;\ x_n;\ \ldots;\ x_n}_{\alpha_n\text{ раз}}). \qquad (45)$$

Первые $m+1$ членов и дадут нам выражение для интерполяционного многочлена, а последний член будет являться остаточным членом. Покажем теперь, что полученный интерполяционный многочлен будет удовлетворять поставленным условиям. В связи с этим мы его будем обозначать через $H_m(x)$. Действительно, при $x=x_0$ $H_m(x_0)=y_0$, ..., $H_m^{(\alpha_0-1)}(x_0)=y_0^{(\alpha_0-1)}$, что видно из самой записи многочлена. С другой стороны, до перехода к пределу мы могли бы взять за начальную точку не x_0, а любую другую из x_i. При этом в силу единственности интерполяционного многочлена Лагранжа мы получили бы тот же самый многочлен, только лишь записанный в другой форме. Следовательно, и предел этого многочлена будет тот же самый. Но в этом случае начальные члены его будут иметь вид:

$$f(x_i)+(x-x_i)f(x_i;\ x_i)+\ldots+(x-x_i)^{\alpha_i-1}f(\underbrace{x_i;\ x_i;\ \ldots;\ x_i}_{\alpha_i\text{ раз}})+$$
$$+(x-x_i)^{\alpha_i}f(\underbrace{x_i;\ x_i;\ \ldots;\ x_i}_{\alpha_i\text{ раз}};\ x_j)+\ldots$$

и следовательно, он удовлетворяет интерполяционным условиям в точке x_i. Так как этот многочлен тождественен с $H_m(x)$, то и $H_m(x)$ удовлетворяет этим условиям. Итак,

$$f(x) = H_m(x) + (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_n)^{\alpha_n} \times \\ \times f(x; \underbrace{x_0; \dots; x_0}_{\alpha_0 \text{ раз}}; \underbrace{x_1; \dots; x_1}_{\alpha_1 \text{ раз}}; \underbrace{x_n; \dots; x_n}_{\alpha_n \text{ раз}}). \quad (46)$$

Ранее мы получили другое выражение для остаточного члена. Сравнение этих видов остаточных членов дает

$$f(x; \underbrace{x_0; \dots; x_0}_{\alpha_0 \text{ раз}}; \underbrace{x_1; \dots; x_1}_{\alpha_1 \text{ раз}}; \dots; \underbrace{x_n; \dots; x_n}_{\alpha_n \text{ раз}}) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}. \quad (47)$$

Применим полученную нами обобщенную формулу Ньютона для решения примера, указанного на стр. 166. В этом случае

$$H(x) = 1 + x \cdot 0 + x^2 0 + x^3 \cdot 1 + x^3(x-1) \cdot 4 + x^3(x-1)^2 \cdot 11 + \\ + x^3(x-1)^2(x-2) \cdot 6 + x^3(x-1)^2(x-2)^2 \cdot 1 = x^7 + 1.$$

Как и следовало ожидать, получилось то же самое, что и раньше.

Способ Эйткена в той форме, как он был описан у нас ранее, также может быть применен для интерполирования с кратными узлами.

В заключение этого параграфа получим выражения разделенных разностей с повторяющимися значениями аргумента в виде линейных комбинаций значений функции и ее производных. Для этого сравним коэффициенты при x^m в обобщенной формуле Ньютона и интерполяционной формуле Эрмита. Сравнение дает:

$$f(\underbrace{x_0; x_0; \dots; x_0}_{\alpha_0 \text{ раз}}; \underbrace{x_1; \dots; x_1}_{\alpha_1 \text{ раз}}; \dots; \underbrace{x_n; x_n; \dots; x_n}_{\alpha_n \text{ раз}}) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} y_i^{(j)} \frac{1}{j!(\alpha_i - 1 - j)!} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(\alpha_i - 1 - j)}.$$

§ 12. Интерполирование функций многих независимых переменных

1. Трудности задачи интерполирования функций многих переменных. Интерполирование функций многих переменных значительно сложнее, чем функций одной переменной. Это вызвано не только тем, что рассуждения становятся более громоздкими в силу наличия большого числа переменных, но и рядом принципиальных трудностей.

В дальнейшем ради краткости мы ограничимся случаем двух переменных. Пусть на плоскости (x, y) даны $n+1$ точек (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Будем разыскивать многочлен $P(x, y)$

относительно x и y возможно низшей степени, который бы в этих точках принимал соответственно значения $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Если искомый многочлен записать в виде

$$P(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_{m0}x^m + a_{m-1,1}x^{m-1}y + \ldots + a_{0m}y^m,$$

то, подставляя данные координаты точек и приравнивая левую часть соответствующему значению z_i, получим систему $n+1$ линейных алгебраических уравнений относительно $1+2+\ldots+(m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ неизвестных a_{ij}. Вообще говоря, эти уравнения независимы. Следовательно, если не накладывать на $P(x, y)$ никаких дополнительных условий, то $n+1$ должно быть равно $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$. Это — первое принципиальное затруднение. Мы уже не можем решить поставленную задачу при произвольном количестве узлов интерполирования.

Далее, рассмотрим определитель полученной системы уравнений. При $n = 2, 5$ этот определитель принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad (n=2), \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 \end{vmatrix} \quad (n=5).$$

Первый из них будет обращаться в нуль, если три точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) лежат на одной прямой. Второй будет обращаться в нуль, если шесть узлов интерполирования лежат на одной кривой второго порядка. Аналогично, если взять 10 узлов, то определитель системы обратится в нуль, если все они лежат на одной кривой третьего порядка. Это порождает второе принципиальное затруднение: узлы интерполирования не могут быть расположены произвольно. Проверка того, что определители не обращаются в нуль, чрезвычайно затруднительна.

Третье принципиальное затруднение возникает при оценке остаточных членов. Теорема Ролля, которой мы пользовались ранее, для того случая, который мы рассматриваем сейчас, действовать не будет.

Формулы интерполирования функции двух переменных будут громоздкими и потребуют большого количества записей. С целью

сокращения этих записей будем использовать векторные обозначения. Мы будем пользоваться следующими векторами:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_k &= (x - x_k)\bar{i} + (y - y_k)\bar{j}, \\ \bar{r}_{kl} &= (x_k - x_l)\bar{i} + (y_k - y_l)\bar{j}, \\ \bar{r}^*_{kl} &= (y_k - y_l)\bar{i} - (x_k - x_l)\bar{j}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Вектор $\bar{r}^*_{kl}$ получается из вектора $\bar{r}_{kl}$ путем поворота на 90° по часовой стрелке.

Пусть теперь заданы три узла интерполирования: (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) и нам требуется найти многочлен $P_1(x, y)$ первой степени, принимающий соответственно в этих узлах значения z_0, z_1, z_2. Будем разыскивать, как и в случае интерполирования функций одной переменной, многочлен $P_1(x, y)$ в виде

$$P_1(x, y) = z_0 P_{10}(x, y) + z_1 P_{11}(x, y) + z_2 P_{12}(x, y), \tag{2}$$

где $P_{1i}(x, y)$ — многочлены первой степени, равные единице в точке (x_i, y_i) и обращающиеся в нуль в остальных двух точках. Рассмотрим скалярное произведение $(\bar{r}_1, \bar{r}^*_{12})$. Это — многочлен первой степени относительно x и y. Он обращается в нуль в точке (x_1, y_1), так как при этом первый множитель скалярного произведения обращается в нуль. Он обращается в нуль и в точке (x_2, y_2), так как вектор $\bar{r}_{21}$ перпендикулярен к $\bar{r}^*_{12}$. В точке (x_0, y_0) $(\bar{r}_1, \bar{r}^*_{12})$ будет равно нулю в том и только в том случае, когда три точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) лежат на одной прямой. Но это и будет как раз тот случай, когда определитель обращается в нуль и, вообще говоря, не существует многочлена первой степени, принимающего в заданных точках заданные значения. Исключая этот случай, мы можем принять за $P_{10}(x, y)$ выражение

$$\frac{(\bar{r}_1, \bar{r}^*_{12})}{(\bar{r}_{01}, \bar{r}^*_{12})}.$$

Аналогично

$$\frac{(\bar{r}_2, \bar{r}^*_{20})}{(\bar{r}_{12}, \bar{r}^*_{20})}, \quad \frac{(\bar{r}_0, \bar{r}^*_{01})}{(\bar{r}_{20}, \bar{r}^*_{01})}$$

будут давать $P_{11}(x, y)$ и $P_{12}(x, y)$. Итак, искомый многочлен может быть записан в виде

$$P_1(x, y) = z_0 \frac{(\bar{r}_1, \bar{r}^*_{12})}{(\bar{r}_{01}, \bar{r}^*_{12})} + z_1 \frac{(\bar{r}_2, \bar{r}^*_{20})}{(\bar{r}_{12}, \bar{r}^*_{20})} + z_2 \frac{(\bar{r}_0, \bar{r}^*_{01})}{(\bar{r}_{20}, \bar{r}^*_{01})}. \tag{3}$$

Если раскрыть скалярные произведения, то получим более громоздкое выражение:

$$P_1(x, y) = z_0 \frac{(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)}{(x_0-x_1)(y_1-y_2)-(y_0-y_1)(x_1-x_2)} + \\ + z_1 \frac{(x-x_2)(y_2-y_0)-(y-y_2)(x_2-x_0)}{(x_1-x_2)(y_2-y_0)-(y_1-y_2)(x_2-x_0)} + \\ + z_2 \frac{(x-x_0)(y_0-y_1)-(y-y_0)(x_0-x_1)}{(x_2-x_0)(y_0-y_1)-(y_2-y_0)(x_0-x_1)}. \quad (4)$$

Возьмем теперь шесть точек (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5), не лежащих на одной кривой второго порядка. Будем разыскивать многочлен $P_2(x, y)$ второй степени, принимающий в этих точках соответственно значения z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5. Для этого построим определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} (\bar{r}_1, \bar{r}^*_{12})(\bar{r}_3, \bar{r}^*_{34}) & (\bar{r}_{51}, \bar{r}^*_{12})(\bar{r}_{53}, \bar{r}^*_{34}) \\ (\bar{r}_1, \bar{r}^*_{13})(\bar{r}_2, \bar{r}^*_{24}) & (\bar{r}_{51}, \bar{r}^*_{13})(\bar{r}_{52}, \bar{r}^*_{24}) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Этот определитель является многочленом второй степени относительно x и y. Он обращается в нуль в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), так как при этом обращаются в нуль элементы первого столбца. Он обращается в нуль и в точке (x_5, y_5), так как при этом первый и второй столбцы совпадают. Нужно еще убедиться, что наш определитель не обращается тождественно в нуль. Прежде всего заметим, что второй столбец в нуль не обращается. Действительно, если бы он обращался в нуль, то из выбранных нами шести точек по крайней мере четыре лежали на одной прямой. Но в этом случае все шесть выбранных нами точек лежали бы на одной кривой второго порядка, распадающейся на две прямые, одна из которых проходит через четыре указанные точки, а вторая — через две остальные. Если бы наш определитель тождественно обращался в нуль, то нашлись бы две постоянные a и b $(a^2 + b^2 \neq 0)$ такие, что

$$a(\bar{r}_1, \bar{r}^*_{12})(\bar{r}_3, \bar{r}^*_{34}) + b(\bar{r}_1, \bar{r}^*_{13})(\bar{r}_2, \bar{r}^*_{24}) \equiv 0.$$

Это невозможно. Тождественное обращение в нуль этого выражения будет только в том случае, если четыре точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) лежат на одной прямой. Поделив наш определитель (5) на

$$\begin{vmatrix} (\bar{r}_{01}, \bar{r}^*_{12})(\bar{r}_{03}, \bar{r}^*_{34}) & (\bar{r}_{51}, \bar{r}^*_{12})(\bar{r}_{53}, \bar{r}^*_{34}) \\ (\bar{r}_{01}, \bar{r}^*_{13})(\bar{r}_{02}, \bar{r}^*_{24}) & (\bar{r}_{51}, \bar{r}^*_{13})(\bar{r}_{52}, \bar{r}^*_{24}) \end{vmatrix}, \quad (6)$$

получим многочлен второй степени относительно x и y, обращающийся в нуль в точках (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ и равный единице в точке (x_0, y_0). Аналогично можно построить многочлены второй

степени, равные единице в каждой из точек (x_i, y_i) и обращающийся в нуль в остальных заданных точках. Тогда, так же как и в предыдущем случае, строим многочлен $P_2(x, y)$. Он может быть записан в виде

$$
\begin{aligned}
P_2(x, y) = {} & z_0 \frac{\begin{vmatrix} (\bar{r}_1, \bar{r}^*_{12})(\bar{r}_3, \bar{r}^*_{34}) & (\bar{r}_{51}, \bar{r}^*_{12})(\bar{r}_{53}, \bar{r}^*_{34}) \\ (\bar{r}_1, \bar{r}^*_{13})(\bar{r}_2, \bar{r}^*_{24}) & (\bar{r}_{51}, \bar{r}^*_{13})(\bar{r}_{52}, \bar{r}^*_{24}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\bar{r}_{01}, \bar{r}^*_{12})(\bar{r}_{03}, \bar{r}^*_{34}) & (\bar{r}_{51}, \bar{r}^*_{12})(\bar{r}_{53}, \bar{r}^*_{34}) \\ (\bar{r}_{01}, \bar{r}^*_{13})(\bar{r}_{02}, \bar{r}^*_{24}) & (\bar{r}_{51}, \bar{r}^*_{13})(\bar{r}_{52}, \bar{r}^*_{24}) \end{vmatrix}} + \\
& + z_1 \frac{\begin{vmatrix} (\bar{r}_2, \bar{r}^*_{23})(\bar{r}_4, \bar{r}^*_{45}) & (\bar{r}_{02}, \bar{r}^*_{23})(\bar{r}_{04}, \bar{r}^*_{45}) \\ (\bar{r}_2, \bar{r}^*_{24})(\bar{r}_3, \bar{r}^*_{35}) & (\bar{r}_{02}, \bar{r}^*_{24})(\bar{r}_{03}, \bar{r}^*_{35}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\bar{r}_{12}, \bar{r}^*_{23})(\bar{r}_{14}, \bar{r}^*_{45}) & (\bar{r}_{02}, \bar{r}^*_{23})(\bar{r}_{04}, \bar{r}^*_{45}) \\ (\bar{r}_{12}, \bar{r}^*_{24})(\bar{r}_{13}, \bar{r}^*_{35}) & (\bar{r}_{02}, \bar{r}^*_{24})(\bar{r}_{03}, \bar{r}^*_{35}) \end{vmatrix}} + \\
& + z_2 \frac{\begin{vmatrix} (\bar{r}_3, \bar{r}^*_{34})(\bar{r}_5, \bar{r}^*_{50}) & (\bar{r}_{13}, \bar{r}^*_{34})(\bar{r}_{15}, \bar{r}^*_{50}) \\ (\bar{r}_3, \bar{r}^*_{35})(\bar{r}_4, \bar{r}^*_{40}) & (\bar{r}_{13}, \bar{r}^*_{35})(\bar{r}_{14}, \bar{r}^*_{40}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\bar{r}_{23}, \bar{r}^*_{34})(\bar{r}_{25}, \bar{r}^*_{50}) & (\bar{r}_{13}, \bar{r}^*_{34})(\bar{r}_{15}, \bar{r}^*_{50}) \\ (\bar{r}_{23}, \bar{r}^*_{35})(\bar{r}_{24}, \bar{r}^*_{40}) & (\bar{r}_{13}, \bar{r}^*_{35})(\bar{r}_{14}, \bar{r}^*_{40}) \end{vmatrix}} + \\
& + z_3 \frac{\begin{vmatrix} (\bar{r}_4, \bar{r}^*_{45})(\bar{r}_0, \bar{r}^*_{01}) & (\bar{r}_{24}, \bar{r}^*_{45})(\bar{r}_{20}, \bar{r}^*_{01}) \\ (\bar{r}_4, \bar{r}^*_{40})(\bar{r}_5, \bar{r}^*_{51}) & (\bar{r}_{24}, \bar{r}^*_{40})(\bar{r}_{25}, \bar{r}^*_{51}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\bar{r}_{34}, \bar{r}^*_{45})(\bar{r}_{30}, \bar{r}^*_{01}) & (\bar{r}_{24}, \bar{r}^*_{45})(\bar{r}_{20}, \bar{r}^*_{01}) \\ (\bar{r}_{34}, \bar{r}^*_{40})(\bar{r}_{35}, \bar{r}^*_{51}) & (\bar{r}_{24}, \bar{r}^*_{40})(\bar{r}_{25}, \bar{r}^*_{51}) \end{vmatrix}} + \\
& + z_4 \frac{\begin{vmatrix} (\bar{r}_5, \bar{r}^*_{50})(\bar{r}_1, \bar{r}^*_{12}) & (\bar{r}_{35}, \bar{r}^*_{50})(\bar{r}_{31}, \bar{r}^*_{12}) \\ (\bar{r}_5, \bar{r}^*_{51})(\bar{r}_0, \bar{r}^*_{02}) & (\bar{r}_{35}, \bar{r}^*_{51})(\bar{r}_{30}, \bar{r}^*_{02}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\bar{r}_{45}, \bar{r}^*_{50})(\bar{r}_{41}, \bar{r}^*_{12}) & (\bar{r}_{35}, \bar{r}^*_{50})(\bar{r}_{31}, \bar{r}^*_{12}) \\ (\bar{r}_{45}, \bar{r}^*_{51})(\bar{r}_{40}, \bar{r}^*_{02}) & (\bar{r}_{35}, \bar{r}^*_{51})(\bar{r}_{30}, \bar{r}^*_{02}) \end{vmatrix}} + \\
& + z_5 \frac{\begin{vmatrix} (\bar{r}_0, \bar{r}^*_{01})(\bar{r}_2, \bar{r}^*_{23}) & (\bar{r}_{40}, \bar{r}^*_{01})(\bar{r}_{42}, \bar{r}^*_{23}) \\ (\bar{r}_0, \bar{r}^*_{02})(\bar{r}_1, \bar{r}^*_{13}) & (\bar{r}_{40}, \bar{r}^*_{02})(\bar{r}_{41}, \bar{r}^*_{13}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\bar{r}_{50}, \bar{r}^*_{01})(\bar{r}_{52}, \bar{r}^*_{23}) & (\bar{r}_{40}, \bar{r}^*_{01})(\bar{r}_{42}, \bar{r}^*_{23}) \\ (\bar{r}_{50}, \bar{r}^*_{02})(\bar{r}_{51}, \bar{r}^*_{13}) & (\bar{r}_{40}, \bar{r}^*_{02})(\bar{r}_{41}, \bar{r}^*_{13}) \end{vmatrix}}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Получилось очень громоздкое выражение. Оно станет еще более громоздким, если расписать все определители и скалярные произведения.

Идя по этому пути, можно написать явные выражения интерполяционных многочленов третьей и более высоких степеней. Мы здесь этого делать не будем, а рассмотрим один частный случай расположения узлов.

2. Обобщение интерполяционных формул Ньютона на случай функций многих переменных. Возьмем $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ узлов, расположенных следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} (x_0, y_0), \quad (x_1, y_0), \quad \ldots, \quad (x_{n-1}, y_0), \quad (x_n, y_0), \\ (x_0, y_1), \quad (x_1, y_1), \quad \ldots, \quad (x_{n-1}, y_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_0, y_{n-1}), \ (x_1, y_{n-1}), \qquad \begin{pmatrix} x_i \neq x_j & \text{при} & i \neq j, \\ y_i \neq y_j & \text{при} & i \neq j \end{pmatrix}. \\ (x_0, y_n) \end{array}\right\} \tag{8}$$

Значения x_i и y_j могут быть произвольными, так что взаимное расположение узлов может быть довольно общим. Проверим, что чет кривой n-го порядка, проходящей через все эти узлы. В самом деле, если бы такая кривая имелась, она содержала бы точки, расположенные в первом ряду. Этих точек $n+1$, и все они лежат на одной прямой. Следовательно, вся прямая также принадлежала бы кривой порядка n. В этом случае кривая порядка n распадается на прямую и кривую порядка $n-1$, проходящую через остальные $\frac{n(n+1)}{2}$ точек. Для нее можно было бы провести аналогичные рассуждения. Продолжая этот процесс, мы в конце концов пришли бы к заключению, что три точки (x_0, y_{n-1}), (x_1, y_{n-1}), (x_0, y_n) лежат на одной прямой. Этого нет. Следовательно, выбранные нами узлы не могут лежать на одной кривой порядка n.

Построим теперь интерполяционный многочлен по нашим узлам. Обозначим его через $P_n(x, y)$, а $P_n(x_i, y_j)$ через z_{ij}. Если рассмотреть только те из выбранных нами узлов, для которых $i+j<n$, то на тех же основаниях мы можем построить интерполяционный многочлен $P_{n-1}(x, y)$ степени $n-1$, принимающий в точках (x_i, y_j), $i+j<n$, значения z_{ij}. Образуем разность

$$P_n(x, y) - P_{n-1}(x, y).$$

Она будет являться многочленом степени не выше n, обращающимся в нуль в точках (x_i, y_j), $i+j<n$. Будем разыскивать ее в виде

$$\begin{aligned} P_n(x, y) - P_{n-1}(x, y) = {} & A_{n0}(x-x_0)(x-x_1)\ldots \\ & \ldots(x-x_{n-1}) + A_{n-1,1}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-2})(y-y_0) + \\ & + A_{n-2,2}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-3})(y-y_0)(y-y_1) + \ldots \\ & \ldots + A_{0n}(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_{n-1}). \end{aligned} \tag{9}$$

Покажем, что действительно можно так подобрать постоянные $A_{n-i,\,i}$, что этот многочлен, обращающийся в нуль в точках $(x_i,\ y_j)$, $i+j<n$, будет равен $P_n(x_i,\ y_j)-P_{n-1}(x_i,\ y_j)$ при $i+j=n$. В точке $(x_i,\ y_{n-i})$ все члены его обратятся в нуль, за исключением

$$A_{i,\,n-i}(x_i-x_0)\ \ldots\ (x_i-x_{i-1})(y_{n-i}-y_0)\ \ldots\ (y_{n-i}-y_{n-i-1}).$$

Таким образом, коэффициенты $A_{i,\,n-i}$ определятся однозначно. В силу единственности представления интерполяционного многочлена по выбранным нами узлам это и будет единственным значением разности. Итак,

$$P_n(x,\ y)=P_{n-1}(x,\ y)+\sum_{i=0}^{n}A_{n-i,\,i}(x-x_0)\ \ldots$$

$$\ldots\ (x-x_{n-i-1})(y-y_0)\ \ldots\ (y-y_{i-1}). \qquad (10)$$

Поступая так же с $P_{n-1}(x,\ y)$, а затем с $P_{n-2}(x,\ y)$ и так далее, получим:

$$P_n(x,\ y)=A_{00}+A_{10}(x-x_0)+A_{01}(y-y_0)+A_{20}(x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+A_{11}(x-x_0)(y-y_0)+A_{02}(y-y_0)(y-y_1)+\ \ldots$$
$$\ldots+A_{n0}(x-x_0)\ \ldots\ (x-x_{n-1})+A_{n-1,\,1}(x-x_0)(x-x_1)\ \ldots$$
$$\ldots\ (x-x_{n-2})(y-y_0)+\ \ldots\ +A_{0n}(y-y_0)(y-y_1)\ \ldots\ (y-y_{n-1}). \qquad (11)$$

Выразим теперь коэффициенты A_{ij} через значения функции $z_{kl}=f(x_k,\ x_l)$. Подставляя в правую и левую части равенства $(x_0,\ y_0)$, получим $A_{00}=f(x_0,\ y_0)$. В точке $(x_1,\ y_0)$ $P_n=f(x_1,\ y_0)$, а правая часть равенства (11) равна $A_{00}+A_{10}(x_1-x_0)$. Следовательно,

$$A_{10}=\frac{f(x_1,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{x_1-x_0}. \qquad (12)$$

Это отношение является разделенной разностью функции $f(x,\ y_0)$ при фиксированном $y=y_0$. Мы будем его обозначать $f(x_0;\ x_1;\ y_0)$. Аналогично получим $A_{01}=f(x_0;\ y_0;\ y_1)$. Зафиксируем теперь y, придав ему значение, равное y_0. Получим:

$$P(x,\ y_0)=A_{00}+A_{10}(x-x_0)+\ \ldots\ +A_{n0}(x-x_0)\ \ldots\ (x-x_{n-1}).$$

Это интерполяционный многочлен относительно x, принимающий в точке $(x_i,\ y_0)$ значение $f(x_i,\ y_0)$. Следовательно,

$$A_{i0}=f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_i;\ y_0). \qquad (13)$$

При $y = y_1$ наш интерполяционный многочлен примет вид

$$P(x, y_1) = [A_{00} + A_{01}(y_1 - y_0)] + [A_{10} + A_{11}(y_1 - y_0)](x - x_0) + \\ + [A_{20} + A_{21}(y_1 - y_0)](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + [A_{n-1,0} + A_{n-1,1}(y_1 - y_0)](x - x_0) \dots (x - x_{n-2}) + \\ + A_{n0}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Этот интерполяционный многочлен относительно x должен в точках (x_i, y_1) $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ принимать значения $f(x_i, y_1)$. Последний член при этих значениях x_i обращается в нуль. Следовательно, все члены правой части, кроме последнего, дают интерполяционный многочлен Ньютона степени $n-1$, принимающий в точках (x_i, y_1) $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ значения $f(x_i, y_1)$. Таким образом,

$$A_{k0} + A_{k1}(y_1 - y_0) = f(x_0; x_1; \dots; x_k; y_1).$$

Отсюда

$$A_{k1} = \frac{f(x_0; x_1; \dots; x_k; y_1) - f(x_0; x_1; \dots; x_k; y_0)}{y_1 - y_0}.$$

Выражение в правой части имеет вид разделенной разности по y и будет также называться разделенной разностью. Итак,

$$A_{k1} = f(x_0; x_1; \dots; x_k; y_0; y_1). \tag{14}$$

Вообще, если мы уже знаем, что

$$A_{ki} = f(x_0, x_1, \dots, x_k; y_0, y_1, \dots, y_i)$$

для всех $i < m$, то, рассматривая $P(x, y_m)$, получим

$$P(x, y_m) = [A_{00} + A_{01}(y_m - y_0) + \dots + A_{0m}(y_m - y_0)(y_m - y_1) \dots \\ \dots (y_m - y_{m-1})] + [A_{10} + A_{11}(y_m - y_0) + \dots \\ \dots + A_{1,m}(y_m - y_0)(y_m - y_1) \dots (y_m - y_{m-1})](x - x_0) + \dots$$

Рассуждая, как и прежде, найдем:

$$A_{k0} + A_{k1}(y_m - y_0) + \dots + A_{km}(y_m - y_0) \dots (y_m - y_{m-1}) = \\ = f(x_0, x_1, \dots, x_k; y_m).$$

Рассматривая это выражение как функцию y_m, получим снова

$$A_{ki} = f(x_0; x_1; \dots; x_k; y_0; y_1; \dots; y_i). \tag{15}$$

Таким образом, мы можем записать окончательно нашу интерполяционную формулу в виде

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(y - y_0) \dots \\ \dots (y - y_{j-1}) f(x_0; x_1; \dots; x_i; y_0; y_1; \dots; y_j). \tag{16}$$

Это — *обобщение интерполяционной формулы Ньютона для неравных промежутков на случай интерполирования функций двух переменных.*

Пример. Дана таблица функции двух переменных:

$$F(\alpha,\ \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},\quad k = \sin \alpha.$$

φ \ α	5°	20°	40°	50°	80°
10°	0,1745	0,1746	0,1749	0,1751	0,1754
20°	0,3491	0,3499	0,3520	0,3533	
30°	0,5233	0,5263	0,5334		
40°	0,6985	0,7043			
50°	0,8734				

Найти $F(10°,\ 15°)$.

Составляем таблицы разделенных разностей. Эти разности будут очень малы, и мы будем давать их в единицах четвертого десятичного знака:

φ	$F(\alpha_0; \alpha_1; \varphi)$	$F(\alpha_1; \alpha_2; \varphi)$	$F(\alpha_2; \alpha_3; \varphi)$	$F(\alpha_3; \alpha_4; \varphi)$
10°	0,07	0,15	0,2	0,1
20°	0,53	1,05	1,3	
30°	1,67	3,55		
40°	3,87			

α	$F(\alpha; \varphi_0; \varphi_1)$	$F(\alpha; \varphi_1; \varphi_2)$	$F(\alpha; \varphi_2; \varphi_3)$	$F(\alpha; \varphi_3; \varphi_4)$
5°	174,6	174,7	174,7	175,9
20°	175,3	176,4	181,4	
40°	177,1	178		
50°	178,2			

φ	$F(\alpha_0; \alpha_1; \alpha_2; \varphi)$	$F(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \varphi)$	$F(\alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \varphi)$
10°	0,002	0,002	— 0,002
20°	0,015	0,008	
30°	0,054		

α	$F(\alpha; \varphi_0; \varphi_1; \varphi_2)$	$F(\alpha; \varphi_1; \varphi_2; \varphi_3)$	$F(\alpha; \varphi_2; \varphi_3; \varphi_4)$
5° 20° 40°	0,005 0,055 0,045	0,000 0,25	0,06

$F(\alpha_0; \alpha_1; \varphi_0; \varphi_1)$	$F(\alpha_0; \alpha_1; \varphi_1; \varphi_2)$	$F(\alpha_0; \alpha_1; \varphi_2; \varphi_3)$	$F(\alpha_1; \alpha_2; \varphi_0; \varphi_1)$	$F(\alpha_1; \alpha_2; \varphi_1; \varphi_2)$	$F(\alpha_2; \alpha_3; \varphi_1; \varphi_2)$
0,046	0,114	0,22	0,09	0,25	0,11

Как мы видим, разделенные разности второго порядка малы и разности более высоких порядков мы учитывать не будем. Наша формула даст

$$F(10°, 15°) = 0{,}1745 + 0{,}000007 \cdot 5 + 0{,}01746 \cdot 5 + 0{,}0000002 \cdot 25 + \\ + 0{,}0000005 \cdot 25 + 0{,}0000046 \cdot 25 = 0{,}2620.$$

Точное значение $F(10°, 15°)$ с четырьмя десятичными знаками равно 0,2619.

В том случае, когда $x_i - x_{i-1} = \text{const}$ и $y_j - y_{j-1} = \text{const}$ наши формулы можно упростить. Пусть $x_i - x_{i-1} = h$, $y_j - y_{j-1} = k$. По аналогии с обычными конечными разностями введем двойные конечные разности:

$$\left.\begin{aligned}
f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j) &= \Delta_x f(x_i, y_j), \\
f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j) &= \Delta_y f(x_i, y_j), \\
\Delta_x f(x_{i+1}, y_j) - \Delta_x f(x_i, y_j) &= \Delta^2_{x^2} f(x_i, y_j), \\
\Delta_x f(x_i, y_{j+1}) - \Delta_x f(x_i, y_j) &= \Delta^2_{xy} f(x_i, y_j), \\
\Delta_y f(x_i, y_{j+1}) - \Delta_y f(x_i, y_j) &= \Delta^2_{y^2} f(x_i, y_j), \\
\Delta^2_{x^2} f(x_{i+1}, y_j) - \Delta^2_{x^2} f(x_i, y_j) &= \Delta^3_{x^3} f(x_i, y_j), \\
\Delta^2_{x^2} f(x_i, y_{j+1}) - \Delta^2_{x^2} f(x_i, y_j) &= \Delta^3_{x^2 y} f(x_i, y_j), \\
\Delta^2_{xy} f(x_i, y_{j+1}) - \Delta^2_{xy} f(x_i, y_j) &= \Delta^3_{xy^2} f(x_i, y_j), \\
\Delta^2_{y^2} f(x_i, y_{j+1}) - \Delta^2_{y^2} f(x_i, y_j) &= \Delta^3_{y^3} f(x_i, y_j), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

В этом случае мы можем заменить разделенные разности конечными по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&f(x_0; x_1; y_0) = \frac{1}{h}\Delta_x f(x_0; y_0); \quad f(x_0; y_0; y_1) = \\
&\qquad = \frac{1}{k}\Delta_y f(x_0, y_0), \\
&f(x_0; x_1; x_2; y_0) = \frac{1}{2!\,h^2}\Delta^2_{x^2} f(x_0, y_0); \quad f(x_0; x_1; y_0; y_1) = \\
&= \frac{1}{hk}\Delta^2_{xy} f(x_0, y_0); \quad f(x_0; y_0; y_1; y_2) = \frac{1}{2!\,k^2}\Delta^2_{y^2} f(x_0, y_0), \\
&f(x_0; x_1; x_2; x_3; y_0) = \frac{1}{3!\,h^3}\Delta^3_{x^3} f(x_0, y_0); \quad f(x_0; x_1; x_2; y_0; y_1) = \\
&\qquad = \frac{1}{2!\,h^2k}\Delta^3_{x^2y} f(x_0, y_0), \\
&f(x_0; x_1; y_0; y_1; y_2) = \frac{1}{2!\,hk^2}\Delta^3_{xy^2} f(x_0, y_0); \quad f(x_0; y_0; y_1; y_2; y_3) = \\
&\qquad = \frac{1}{3!\,k^3}\Delta^3_{y^3} f(x_0, y_0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Отсюда наша формула может быть приведена к виду

$$\begin{aligned}
P(x, y) = f(x_0, y_0) &+ \frac{x-x_0}{h}\Delta_x f(x_0, y_0) + \frac{y-y_0}{k}\Delta_y f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!\,h^2}\Delta^2_{x^2} f(x_0, y_0) + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{h^k}\Delta^2_{xy} f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)}{2!\,k^2}\Delta^2_{y^2} f(x_0, y_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!\,h^3}\Delta^3_{x^3} f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(y-y_0)}{2!\,h^2k}\Delta^3_{x^2y} f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{(x-x_0)(y-y_0)(y-y_1)}{2!\,hk^2}\Delta^3_{xy^2} f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{3!\,k^3}\Delta^3_{y^3} f(x_0, y_0) + \ldots
\end{aligned}$$

или, если обозначить $t = \frac{x-x_0}{h}$, $u = \frac{y-y_0}{k}$, то

$$\begin{aligned}
P(x_0 + ht, y_0 + ku) = f(x_0, y_0) &+ t\Delta_x f(x_0, y_0) + u\Delta_y f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2_{x^2} f(x_0, y_0) + tu\Delta^2_{xy} f(x_0, y_0) + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2_{y^2} f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3_{x^3} f(x_0, y_0) + \frac{t(t-1)u}{2!}\Delta^3_{x^2y} f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{tu(u-1)}{2!}\Delta^3_{xy^2} f(x_0, y_0) + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3_{y^3} f(x_0, y_0) + \ldots
\end{aligned} \quad (19)$$

Это — *обобщение формулы Ньютона для интерполирования вперед* функций двух переменных. Аналогично можно получить обобщения и других интерполяционных формул.

3. Другие способы построения интерполяционных многочленов для функций многих переменных. Возможен и другой подход к интерполированию функций многих переменных при помощи многочленов. Мы уже не будем требовать, чтобы степень интерполяционного многочлена была наименьшей, и будем рассматривать такие системы узлов, для которых решение поставленной интерполяционной задачи будет не единственным. Но сам способ интерполирования будет выделять из всего множества возможных интерполяционных многочленов один единственный интерполяционный многочлен.

Пусть, например, нам заданы следующие узлы интерполирования:

$$\left.\begin{array}{llll} (x_0, y_0), & (x_1, y_0), & \ldots, & (x_n, y_0), \\ (x_0, y_1), & (x_1, y_1), & \ldots, & (x_n, y_1), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ (x_0, y_m), & (x_1, y_m), & \ldots, & (x_n, y_m). \end{array}\right\} \tag{20}$$

и даны значения функции $f(x, y)$ в этих узлах. Возможен следующий способ приближенного определения значения функции f в некоторой точке (x, y), не совпадающей с узлами интерполирования. Сначала интерполируем нашу функцию как функцию одного переменного x при фиксированных значениях y_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$. При этом мы каждый раз используем одну строку заданной таблицы узлов. Таким образом, мы можем найти приближенные значения $f(x, y_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$. Затем по найденным значениям $f(x, y_i)$ путем интерполирования по y находим $f(x, y)$. Посмотрим, как будет выглядеть интерполяционная формула при таком способе интерполирования.

Применяя интерполяционную формулу Ньютона для неравных промежутков, будем иметь:

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & f(x, y_0) + (y - y_0) f(x; y_0; y_1) + \ldots \\ & \ldots + (y - y_0)(y - y_1) \ldots (y - y_{m-1}) f(x; y_0; y_1; \ldots; y_m) + \\ & + (y - y_0)(y - y_1) \ldots (y - y_m) f(x; y_0; y_1; \ldots; y_m; y). \end{aligned} \tag{21}$$

Снова применим интерполяционную формулу Ньютона для неравных промежутков к $f(x; y_0; y_1; \ldots; y_k)$; рассматривая эту разделенную разность как функцию x, получим:

$$\begin{aligned} & f(x; y_0; y_1; \ldots; y_k) = \\ & \quad = f(x_0; y_0; y_1; \ldots; y_k) + (x - x_0) f(x_0; x_1; y_0; y_1; \ldots; y_k) + \ldots \\ & \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n; y_0; y_1; \ldots; y_k) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) f(x_0; x_1; \ldots; x_n; x; y_0; y_1; \ldots; y_k). \end{aligned} \tag{22}$$

Подставляя эти выражения в предыдущую формулу, найдем:

$$f(x, y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(y-y_0)(y-y_1)\dots$$
$$\dots(y-y_{j-1})f(x_0; x_1; \dots; x_i; y_0; y_1; \dots; y_j)+(x-x_0)(x-x_1)\dots$$
$$\dots(x-x_n)\sum_{j=0}^{m}(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_{j-1})f(x; x_0; x_1; \dots; x_n; y_0; y_1; \dots$$
$$\dots; y_j)+(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_m)f(x; y; y_0; y_1; \dots; y_m). \quad (23)$$

Здесь при $i=0$ и $j=0$ получатся множители $(x-x_{-1})$ и $(y-y_{-1})$. Мы условимся считать их равными единице. Заметим далее, что

$$f(x; x_0; \dots; x_n; y)=\sum_{j=0}^{n}(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_{j-1})\times$$
$$\times f(x; x_0; x_1; \dots; x_n; y_0; y_1; \dots; y_j)+(y-y_0)(y-y_1)\dots$$
$$\dots(y-y_m)f(x; x_0; x_1; \dots; x_n; y_0; y_1; \dots; y_m; y). \quad (24)$$

Таким образом,

$$f(x, y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(y-y_0)(y-y_1)\dots$$
$$\dots(y-y_{j-1})f(x_0; x_1; \dots; x_i; y_0; y; \dots; y_j)+(x-x_0)(x-x_1)\dots$$
$$\dots(x-x_n)f(x; x_0; x_1; \dots; x_n; y)+(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_m)\times$$
$$\times f(x; y_0; y_1; \dots; y_m)-(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)(y-y_0)\times$$
$$\times(y-y_1)\dots(y-y_m)f(x; x_0; \dots; x_n; y; y_0; y_1; \dots; y_m). \quad (25)$$

Двойная сумма дает интерполяционную формулу, а остальные члены — остаточный член этой формулы. Остаточный член можно записать в другой форме. Действительно, рассматривая $f(x; x_0; \dots; x_n; y)$ как разделенную разность по x_i при фиксированном y, будем иметь:

$$f(x; x_0; x_1; \dots; x_n; y)=\frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}f(\xi, y),$$
$$\min[x, x_i]<\xi<\max[x, x_i].$$

Аналогично

$$f(x; y; y_0; y_1; \dots; y_m)=\frac{1}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}f(x, \eta),$$
$$\min[y, y_j]<\eta<\max[y, y_j].$$

Далее, считая x, x_0, ..., x_n фиксированными, будем иметь:

$$f(x; x_0; \ldots; x_n; y; y_0; \ldots; y_m) = \\ = \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}} f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n; \eta_1).$$

Снова используя представление разделенной разности через производную, получим:

$$f(x; x_0; \ldots; x_n; y; y_0; y_1; \ldots; y_m) = \\ = \frac{1}{(m+1)!} \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{m+n+2}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} f(\xi_1, \eta_1).$$

Таким образом, остаточный член может быть записан в виде

$$R = \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} f(\xi, y) + \frac{\omega_m(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}} f(x, \eta) - \\ - \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} \frac{\omega_m(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+n+2}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} f(\xi_1, \eta_1). \quad (26)$$

В случае, если разности $x_i - x_{i-1}$ и $y_j - y_{j-1}$ постоянны, мы можем, как и в предыдущем случае, получить формулы с двойными конечными разностями. Мы здесь их выписывать не будем.

В заключение этого параграфа отметим, что можно получить формулу, которая будет пригодна при любом расположении узлов. Опять для сокращения записей используем векторные обозначения. Наша формула будет иметь вид

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{(\bar{r}_1, \bar{r}_{i1})(\bar{r}_2, \bar{r}_{i2}) \ldots (\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_{i, i-1})(\bar{r}_{i+1}, \bar{r}_{i, i+1}) \ldots (\bar{r}_n, \bar{r}_{in})}{(\bar{r}_{i1}, \bar{r}_{i1})(\bar{r}_{i2}, \bar{r}_{i2}) \ldots (\bar{r}_{i, i-1}, \bar{r}_{i, i-1})(\bar{r}_{i, i+1}, \bar{r}_{i, i+1}) \ldots (\bar{r}_{in}, \bar{r}_{in})}. \quad (27)$$

Проверим, что она удовлетворяет интерполяционным условиям. Числитель каждого слагаемого представляет собой многочлен степени $n-1$ по x и y. Следовательно, и вся сумма будет являться многочленом по x и y степени не выше $n-1$. Если точка (x, y) совпадает с одним из узлов интерполирования, например с (x_i, y_j), то все слагаемые суммы, у которых индекс при z не совпадает с i, обратятся в нуль, так как в числителе обязательно встретится скалярное произведение $(\bar{r}_{jj}, \bar{r}_{ij})$, равное нулю. Если индекс при z равен j, то дробь соответствующего слагаемого обратится в 1 и $P(x, y)$ будет равно z_j.

Из самого вида формулы видно, что построение возможно при любом расположении узлов интерполирования. Действительно, знаменатели всех дробей отличны от нуля, если среди узлов нет совпадающих.

Построенный нами многочлен обладает следующими замечательными свойствами. Значение многочлена целиком определяется величинами z в узлах интерполирования, положением узлов на плоскости и положением точки, для которой проводится интерполирование, на плоскости. Оно не изменится при любом перемещении осей координат. Если все узлы интерполирования расположены на одной прямой, то значения $P(x, y)$ и значения интерполяционного многочлена Лагранжа на этой прямой совпадают. Изменение нумерации узлов интерполирования не меняет $P(x, y)$. Можно показать, что $P(x, y)$, удовлетворяющий этим условиям, будет однозначно определяться нашей формулой.

§ 13. Интерполирование функций комплексного переменного

Сделаем несколько замечаний относительно интерполирования функций комплексного переменного с помощью алгебраических многочленов. Очевидно, формула Лагранжа и все ее видоизменения, приспособленные для различных частных случаев расположения узлов, будут годны и для функций комплексного переменного. Но остаточные члены, которые мы ранее получали с помощью теоремы Ролля, в этом случае будут непригодны.

В этом параграфе мы дадим интегральное представление интерполяционного многочлена и остаточного члена для функций комплексного переменного.

Пусть C — простая замкнутая кривая и $f(z)$ — аналитическая на C и внутри C функция. Пусть, далее, узлы интерполирования $z_0, z_1, \ldots, z_n$ также лежат внутри C. Рассмотрим интеграл

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\omega(\zeta)(\zeta-z)} f(\zeta)\,d\zeta,$$

где $\omega(z)=(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_n)$. Подынтегральная функция аналитична на C и внутри C, за исключением точек $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Следовательно, интеграл будет равен сумме вычетов относительно каждой из этих точек. Но

$$\lim_{\zeta\to z_k} \frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\omega(\zeta)(\zeta-z)} f(\zeta)(\zeta-z_k)=f(z_k)\frac{\omega(z)}{\omega'(z_k)(z-z_k)}.$$

Отсюда

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n} f(z_k)\frac{\omega(z)}{\omega'(z_k)(z-z_k)}=L_n(z),$$

т. е. $P(z)$ является интерполяционным многочленом Лагранжа. Далее, представим $P(z)$ в виде разности

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{\omega(z)}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)(\zeta-z)}\,d\zeta.$$

Первый член в силу интегральной формулы Коши равен $f(z)$. Следовательно,

$$f(z) = P(z) + \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta.$$

Итак, остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа в нашем случае может быть представлен в виде

$$R(z) = \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta.$$

§ 14. Применение интерполирования для составления таблиц

Теория интерполирования имеет большие приложения при составлении таблиц функций. Получив задание на составление таблиц тех или иных функций, математик должен решить перед началом вычислений ряд вопросов. Должна быть выбрана формула, по которой будут производиться вычисления. Эта формула может изменятся от участка к участку. Обычно формулы для вычисления значений функции, использующие способ задания функции, бывают громоздкими и поэтому их используют для получения некоторых опорных значений и затем путем субтабулирования сгущают таблицу. Формула, дающая опорные значения функции, должна обеспечивать нужную точность таблиц с учетом последующего субтабулирования. Если предполагается составить таблицы с постоянным шагом, то должен быть определен шаг таблицы. Шаг таблицы связан с двумя факторами: объемом таблиц и интерполяционной формулой, по которой будут вычисляться промежуточные значения уже в готовой таблице. Чем больше будет шаг, тем больше членов интерполяционной формулы придется использовать при пользовании этой таблицей на практике. Это создает некоторые неудобства при использовании таблицы. С другой стороны, чем меньше шаг, тем больше объем таблиц, что также не очень удобно. Математик должен как-то согласовать действие этих противоположных факторов с учетом средств вычислений, имеющихся в распоряжении потребителя. Если таблица должна быть введена в быстродействующую машину, то особенно важно уменьшить ее объем. При этом можно отказаться от постоянства шага и использовать, например, узлы Чебышева на отдельных участках, для которых, как мы видели, получается наилучшая оценка остаточного члена интерполяционной формулы. При определении шага таблицы будут иметь значение и такие факторы, как наличие вычислительных средств и время, отведенное на вычисления.

Мы не можем здесь входить в детали каждого из поставленных вопросов и остановимся лишь на выборе шага и субтабулировании.

Чаще всего таблицы функций составляются так, чтобы была допустима линейная интерполяция (т. е. интерполяция с использованием первых двух членов формулы). В этом случае остаточный член будет иметь вид

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} h^2 t\,(t-1).$$

Здесь ξ принадлежит интервалу между двумя соседними табличными значениями аргумента, в котором лежит x, а t заключено между 0 и 1. Произведение $t(t-1)$ принимает наибольшее по модулю значение при $t=\frac{1}{2}$. Это значение равно $\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{8}.$$

Чтобы ошибка интерполирования не превышала по абсолютной величине α, необходимо выбирать h, удовлетворяющим условию

$$h \leqslant \sqrt{\frac{8\alpha}{M_2}}. \tag{1}$$

Нужно помнить, что наряду с этой ошибкой — ошибкой метода, при практическом вычислении промежуточных значений будут возникать еще неустранимая погрешность и погрешность округлений. Как мы видели ранее, неустранимая погрешность при линейной интерполяции будет равна погрешности табулированных значений функций. Погрешность округления будет зависеть от вычислительных средств и от программы вычислений. Поэтому здесь мы ее касаться не будем.

Совершенно аналогично можно исследовать квадратичную интерполяцию и интерполяцию более высоких порядков. Если, например, используется интерполяционная формула Эверетта, то остаточный член будет иметь вид

$$R_2(x) = \frac{f^{\mathrm{IV}}(\xi)}{24} h^4 t\,(t^2-1)\,(t-2),$$

и в этом случае наибольшее значение для $|t(t^2-1)(t-2)|$ на $[0,1]$ будет достигаться при $t=\frac{1}{2}$. Это значение равно $\frac{9}{16}$. Таким образом,

$$|R_2| < \frac{3}{128} h^4 M_4,$$

и для того чтобы ошибка квадратичной интерполяции не превышала α, нужно, чтобы шаг h удовлетворял условию

$$h \leqslant \sqrt[4]{\frac{128\alpha}{3M_4}}. \tag{2}$$

И здесь, кроме этой ошибки метода, возникают неустранимая ошибка и ошибка округления. Неустранимая ошибка будет такова же, как

и для формулы Гаусса, взятой до третьих разностей. Как видно из приведенной ранее таблицы, неустранимая погрешность не может больше чем в 1,4 раза превысить абсолютные погрешности табулированных значений.

Аналогично можно исследовать и другие формулы.

Рассмотрим теперь вопрос о *субтабулировании*. Как применяется формула Эверетта для субтабулирования, мы уже знаем. Приведем здесь еще один способ субтабулирования.

Пусть f_0, f_1, ... — данные последовательные значения функции, соответствующие шагу аргумента, равному h, и Δ, Δ^2, ... — их разности. Предположим, что нам нужно сгустить таблицу в k раз, т. е. новый шаг будет $\frac{h}{k}$. Обозначим новые значения функции соответственно через f_{00}, f_{01}, f_{02}, ..., $f_{0,k-1}$, f_{10}, f_{11}, ..., $f_{1,k-1}$, ... Здесь $f_{i0}=f_i$, а f_{is} — последовательные значения функции между x_i и x_{i+1}. Будем для определенности считать, что разности пятого порядка исходных значений функции постоянны. Найдем выражения для разностей значений функции с новым шагом через разности с прежним шагом. Для этого используем операторное исчисление, примененное нами ранее для вывода интерполяционных формул. По формуле Ньютона для интерполирования вперед будем иметь:

$$f_{01}=f\left(x_0+\frac{h}{k}\right)=f(x_0)+\frac{1}{k}\Delta f(x_0)+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(x_0)+$$
$$+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)}{3!}\Delta^3 f(x_0)+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)\left(\frac{1}{k}-3\right)}{4!}\Delta^4 f(x_0)+$$
$$+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)\left(\frac{1}{k}-3\right)\left(\frac{1}{k}-4\right)}{5!}\Delta^5 f(x_0). \qquad (3)$$

Обозначим через Δ_1 разность с шагом $\frac{h}{k}$. Тогда

$$\Delta_1 f(x_0)=\frac{1}{k}\Delta f(x_0)+\frac{1-k}{2!\,k^2}\Delta^2 f(x_0)+\frac{(1-k)(1-2k)}{3!\,k^3}\Delta^3 f(x_0)+$$
$$+\frac{(1-k)(1-2k)(1-3k)}{4!\,k^4}\Delta^4 f(x_0)+$$
$$+\frac{(1-k)(1-2k)(1-3k)(1-4k)}{5!\,k^5}\Delta^5 f(x_0). \qquad (4)$$

Таким образом, операторы Δ и Δ_1 связаны следующим соотношением:

$$\Delta_1=\frac{1}{k}\Delta+\frac{1-k}{2!\,k^2}\Delta^2+\frac{(1-k)(1-2k)}{3!\,k^3}\Delta^3+$$
$$+\frac{(1-k)(1-2k)(1-3k)}{4!\,k^4}\Delta^4+\frac{(1-k)(1-2k)(1-3k)(1-4k)}{5!\,k^5}\Delta^5. \qquad (5)$$

Следовательно, степени их будут связаны таким соотношением:

$$\Delta_1^n = \left\{ \frac{1}{k}\Delta + \frac{1-k}{2!\,k^2}\Delta^2 + \frac{(1-k)(1-2k)}{3!\,k^3}\Delta^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{(1-k)(1-2k)(1-3k)}{4!\,k^4}\Delta^4 + \frac{(1-k)(1-2k)(1-3k)(1-4k)}{5!\,k^5}\Delta^5 \right\}^n. \quad (6)$$

Отсюда последовательно получаем:

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{k^2}\Delta^2 + \frac{1-k}{k^3}\Delta^3 + \frac{(1-k)(7-11k)}{12k^4}\Delta^4 + \frac{(1-k)(1-2k)^2}{6k^5}\Delta^5,$$

$$\Delta_1^3 = \frac{1}{k^3}\Delta^3 + \frac{3(1-k)}{2k^4}\Delta^4 + \frac{(1-k)(5-7k)}{4k^5}\Delta^5,$$

$$\Delta_1^4 = \frac{1}{k^4}\Delta^4 + \frac{2(1-k)}{k^5}\Delta^5,$$

$$\Delta_1^5 = \frac{1}{k^5}\Delta^5.$$

После того как получены разности, нетрудно, используя постоянство разностей пятого порядка, произвести субтабулирование. Сначала заполняем столбец пятых разностей, затем четвертых и т. д., пока не придем к значениям функции. Эти формулы, связывающие Δ и Δ_1, можно получить и без операторного исчисления. Рассмотрим, как это делается на примере. Возьмем те же значения $\sin x$, которые мы использовали ранее в § 7, и получим таблицу с шагом в 30′. Таблица исходных значений функции и их разностей выглядит следующим образом:

x	$\sin x$	f^1	f^2	f^3
9°	0,156434			
		51478		
12°	0,207912		— 571	
		50907		— 138
15°	0,258819		— 709	
		50198		— 138
18°	0,309017		— 847	
		49351		
21°	0,358368			

В нашем случае $k = 6$. Последовательно получаем:

$$\sin 9° = \sin 9°,$$

$$\sin 9°\,30' = \sin 9° + \frac{1}{6}f^1_{1/2} - \frac{5}{72}f^2_1 + \frac{55}{1296}f^3_{3/2},$$

$$\sin 10° = \sin 9° + \frac{1}{3}f^1_{1/2} - \frac{1}{9}f^2_1 + \frac{5}{81}f^3_{3/2},$$

$$\sin 10°30' = \sin 9° + \frac{1}{2} f^1_{1/2} - \frac{1}{8} f^2_1 + \frac{1}{16} f^3_{3/2},$$

$$\sin 11° = \sin 9° + \frac{2}{3} f^1_{1/2} - \frac{1}{9} f^2_1 + \frac{4}{81} f^3_{3/2}.$$

Будем обозначать разности с новым шагом чертой сверху. Первые разности будут выражаться так через предыдущие разности:

$$\bar{f}^1_{1/2} = \frac{1}{6} f^1_{1/2} - \frac{5}{72} f^2_1 + \frac{55}{1296} f^3_{3/2},$$

$$\bar{f}^1_{3/2} = \frac{1}{6} f^1_{1/2} - \frac{1}{24} f^2_1 + \frac{25}{1296} f^3_{3/2},$$

$$\bar{f}^1_{5/2} = \frac{1}{6} f^1_{1/2} - \frac{1}{72} f^2_1 + \frac{1}{1296} f^3_{3/2},$$

$$\bar{f}^1_{7/2} = \frac{1}{6} f^1_{1/2} + \frac{1}{72} f^2_1 - \frac{17}{1296} f^3_{3/2}.$$

Вторые разности будут иметь вид:

$$\bar{f}^2_1 = \frac{1}{36} f^2_1 - \frac{5}{216} f^3_{3/2},$$

$$\bar{f}^2_2 = \frac{1}{36} f^2_1 - \frac{4}{216} f^3_{3/2},$$

$$\bar{f}^2_3 = \frac{1}{36} f^2_1 - \frac{3}{216} f^3_{3/2}.$$

Третьи разности будут равны:

$$\bar{f}^3_{3/2} = \frac{1}{216} f^2_{3/2},$$

$$\bar{f}^3_{5/2} = \frac{1}{216} f^3_{3/2}.$$

Подставляя сюда числовые значения, получим:

$$\bar{f}^1_{1/2} = \frac{1}{6} \cdot 0{,}051478 + \frac{5}{72} \cdot 0{,}000571 - \frac{55}{1296} \cdot 0{,}000138 = 0{,}00861346,$$

$$\bar{f}^2_1 = -\frac{1}{36} \cdot 0{,}000571 + \frac{5}{216} \cdot 0{,}000138 = -0{,}00001267,$$

$$\bar{f}^3_{3/2} = -\frac{1}{216} \cdot 0{,}000138 = -0{,}00000064.$$

Далее вычисления проводим так же, как в § 6, где мы продолжали таблицу многочлена. Сначала заполняем столбец третьих разностей, затем вторых, первых и, наконец, столбец значений функции. В узловых точках записываем данные нам значения. Расхождения могут произойти за счет округлений. Таблица выглядит так·

x	$\sin x$	f^1	f^2	f^3
9°	0,156434			
		8613,46		
9° 30′	0,165047		—12,67	
		8600,79		—0,64
10°	0,173648		—13,31	
		8587,48		—0,64
10° 30′	0,182236		—13,95	
		8573,53		—0,64
11°	0,190809		—14,59	
		8558,94		—0,64
11° 30′	0,199368		—15,23	
		8543,71		—0,64
12°	0,207912		—15,87	
		8527,84		—0,64
12° 30′	0,216440		—16,51	
		8511,33		—0,64
13°	0,224951		—17,15	
		8494,18		—0,64
13° 30′	0,233445		—17,79	
		8476,39		—0,64
14°	0,241922		—18,43	
		8457,96		—0,64
14° 30′	0,250380		—19,07	
		8438,89		—0,64
15°	0,258819		—19,71	
		8419,18		—0,64
15° 30′	0,267238		—20,35	
		8398,83		—0,64
16°	0,275637		—20,99	
		8377,84		—0,64
16° 30′	0,284014		—21,63	
		8356,21		—0,64
17°	0,292371		—22,27	
		8333,94		—0,64
17° 30′	0,300704		—22,91	
		8311,03		—0,64
18°	0,309017		—23,55	
		8287,48		—0,64
18° 30′	0,317304		—24,19	
		8263,29		—0,64
19°	0,325568		—24,83	
		8238,46		—0,64
19° 30′	0,333806		—25,47	
		8212,99		—0,64
20°	0,342019		—26,11	
		8186,88		
20° 30′	0,350206		—26,75	
		8160,13		
21°	0,358368			

Расхождения с точными значениями не превышают двух единиц шестого знака, да и то в конце таблицы.

§ 15. Обратное интерполирование

Часто на практике возникает задача об отыскании по заданному значению функции значения аргумента. Эта задача решается методами обратного интерполирования.

Если заданная функция монотонна, то обратное интерполирование проще всего осуществить путем замены функции аргументом и обратно и последующего интерполирования. Если заданная функция не монотонна, то этим приемом воспользоваться нельзя. Тогда, не меняя ролями функцию и аргумент, записываем ту или иную интерполяционную формулу; используя известные значения аргумента и считая функцию известной, решаем полученное уравнение относительно аргумента.

Оценка остаточного члена при использовании первого приема будет такова же, как и при прямом интерполировании, только производные от прямой функции заменятся производными от обратной функции. Оценим ошибку второго метода. Если нам задана функция $f(x)$ и $L_n(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный для этой функции по узлам $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \ldots (x - x_n).$$

Предположим, что нам надо найти значение $\bar{x}$, при котором $f(\bar{x}) = \bar{y}$ ($\bar{y}$ задано). Будем решать уравнение $L_n(x) = \bar{y}$. Получим некоторое значение $\bar{\bar{x}}$. Подставляя в предыдущее равенство, получим:

$$f(\bar{\bar{x}}) - L_n(\bar{\bar{x}}) = f(\bar{\bar{x}}) - \bar{y} = f(\bar{\bar{x}}) - f(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(\bar{\bar{x}}).$$

Применяя формулу Лагранжа (конечных приращений), будем иметь:

$$(\bar{\bar{x}} - \bar{x}) f'(\eta) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(\bar{\bar{x}}),$$

где η находится между $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$. Если $[a, b]$ — интервал, содержащий $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ и $\min\limits_{x \in [a, b]} |f'(x)| = m_1 \neq 0$, то из последнего выражения следует:

$$|\bar{\bar{x}} - \bar{x}| \leqslant \frac{M_{n+1}}{m_1 (n+1)!} |\omega_n(\bar{\bar{x}})|.$$

При этом, конечно, предполагается, что уравнение $L_n(x) = \bar{y}$ мы решили точно.

Рассмотрим примеры на обратное интерполирование тем и другим способом.

Пример. По заданным значениям функции:

x	1	2	2,5	3
y	-6	-1	5,625	16

найти значение x, для которого $y=0$.

Единственной информацией о функции является данная таблица. Судя по таблице, функция монотонна. Поэтому применим первый прием. Получим:

$$L_3(y)=1\frac{(y+1)(y-5{,}625)(y-16)}{(-5)(-11{,}625)(-22)}+2\frac{(y+6)(y-16)(y-5{,}625)}{5(-17)(-6{,}625)}+$$
$$+3\frac{(y+6)(y+1)(y-5{,}625)}{22\cdot 17\cdot 10{,}375}+2{,}5\frac{(y+6)(y+1)(y-16)}{11{,}625\cdot 6{,}625(-10{,}375)}.$$

Полагая здесь $y=0$, будем иметь:

$$x=2{,}122.$$

Пример. По заданным значениям функции:

x	0	-1	2
y	-5	-4	-1

найти значение x, при котором y будет равен -2.

В этом случае функция не монотонна. Поэтому применяем второй прием. Находим:

$$L_2(x)=-5\frac{(x+1)(x-2)}{1(-2)}-4\frac{x(x-2)}{(-1)(-3)}-1\frac{x(x+1)}{2\cdot 3}=x^2-5.$$

Полагая $L_2(x)=-2$, получим уравнение для определения x:

$$x^2-3=0.$$

Отсюда $x=\pm\sqrt{3}$.

Если число узлов велико, то применение второго приема приведет к решению алгебраического уравнения высокой степени. Способами решения таких уравнений мы займемся позже. Здесь же

остановимся только на итерационном способе. Будем рассматривать только случай равноотстоящих значений аргумента. Используем хотя бы интерполяционную формулу Ньютона для интерполирования вперед:

$$f(x_0+ht)=f_t=f_0+tf^1_{\frac{1}{2}}+\frac{t(t-1)}{2}f_1^2+\frac{t(t-1)(t-2)}{6}f^3_{\frac{3}{2}}+\ldots$$

При обратном интерполировании левая часть равенства известна и требуется определить t. Для этого разрешим это равенство относительно t, стоящего при разности первого порядка. Получим:

$$t=\frac{f_t-f_0}{f^1_{\frac{1}{2}}}-\frac{t(t-1)}{2}\frac{f_1^2}{f^1_{\frac{1}{2}}}-\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\frac{f^3_{\frac{3}{2}}}{f^1_{\frac{1}{2}}}+\ldots$$

Полученное уравнение относительно t будем решать методом последовательных приближений. За начальное приближение примем

$$t_0=\frac{f_t-f_0}{f^1_{\frac{1}{2}}}.$$

Подставляя t_0 в правую часть, получим:

$$t_1=\frac{f_t-f_0}{f^1_{\frac{1}{2}}}-\frac{t_0(t_0-1)}{2}\frac{f_1^2}{f^1_{\frac{1}{2}}}-\frac{t_0(t_0-1)(t_0-2)}{6}\frac{f^3_{\frac{3}{2}}}{f^1_{\frac{1}{2}}}-\ldots$$

Затем таким же способом из t_1 получим t_2, а затем t_3 и т. д. В значительном числе случаев этот процесс сходится и дает в пределе точное решение уравнения. Практически последовательные приближения заканчивают, когда два соседних приближения не отличаются друг от друга с той точностью, которая нам нужна. Нет необходимости каждый раз использовать все члены правой части. Обычно чем больше сделано приближений, тем больше используют членов.

Обратное интерполирование может быть применено для решения уравнений. Для этого составляют таблицу значений функции и находят, при каком значении x функция обращается в нуль. Рассмотрим пример как раз такого рода.

Пример. Найти корень уравнения $x^5-5x+3=0$, заключенный между 0 и 1.

Составляем таблицу значений функции $y=x^5-5x+3$ с шагом 0,1:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
0	3,00000					
		—49 999				
0,1	2,50001		30			
		—49 969		150		
0,2	2,00032		180		240	
		—49 789		390		120
0,3	1,50243		570		360	
		—49 219		750		120
0,4	1,01024		1 320		480	
		—47 899		1 230		120
0,5	0,53125		2 550		600	
		—45 349		1 830		120
0,6	0,07776		4 380		720	
		—40 969		2 550		120
0,7	—0,33193		6 930		840	
		—34 039		3 390		120
0,8	—0,67232		10 320		960	
		—23 719		4 350		120
0,9	—0,90951		14 670			
		—9 049				
1,0	—1,00000					

Перемена знака функции при переходе от 0,6 к 0,7 показывает, что $f(x)$ имеет корень в этом интервале. Формула Ньютона в этом случае примет вид:

$$0 = 0{,}07776 - t \cdot 0{,}40969 + \frac{t(t-1)}{2} 0{,}06930 +$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)}{6} 0{,}03390 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{24} 0{,}00960 +$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{120} 0{,}00120.$$

Отсюда

$$t = \frac{0{,}07776}{0{,}40969} + \frac{t(t-1)}{2} \frac{0{,}06930}{0{,}40969} + \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \frac{0{,}03390}{0{,}40969} +$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{24} \frac{0{,}00960}{0{,}40969} + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{120} \frac{0{,}00120}{0{,}40969}$$

или

$$t = 0{,}18980205 + t(t-1)\,0{,}08457614 +$$

$$+ t(t-1)(t-2) \cdot 0{,}01379092 + t(t-1)(t-2)(t-3) \cdot 0{,}00009763 +$$

$$+ t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\,0{,}00000244.$$

Последовательные приближения дают

$$t_0 = 0{,}19; \quad t_1 = 0{,}1868; \quad t_2 = 0{,}180752; \quad t_3 = 0{,}18092680;$$
$$t_4 = 0{,}18091906; \quad t_5 = 0{,}18091937; \quad t_6 = 0{,}18091936;$$
$$t_7 = 0{,}18091936.$$

Значения t_6 и t_7 совпадают. Поэтому в качестве x можно взять

$$x = 0{,}618091936.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что совокупность функций

$$\frac{1}{R(x)}, \quad \frac{x}{R(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{x^n}{R(x)},$$

где $R(x)$ — многочлен, образует систему Чебышева на всяком отрезке, на котором $R(x)$ не имеет корней.

2. Доказать, что функции

$$1, \quad \frac{1}{a_1 + x}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{a_n + x}$$

образуют систему Чебышева при $x > 0$, если $a_k > 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

3. Найти многочлен наименьшей степени, принимающий в заданных точках заданные значения:

x	1,45	1,36	1,14
y	3,14	4,15	5,65

Отв. $-14{,}2x^2 + 28{,}67x + 91{,}37$.

x	0	1	2	5
y	2	3	12	147

Отв. $x^3 + x^2 - x + 2$.

x	0	1,5	3,4	6,8
y	1,45	3,14	4,65	4,11

Отв. $-0{,}0205x^3 - 0{,}02x^2 + 2{,}73x + 1{,}45$.

x	11	13	14	18	19	21
y	1342	2210	2758	5850	6878	9282

Отв. $-4{,}1x^5+337{,}8x^4-11283{,}9x^3+182940{,}4x^2-1460817x+4593561{,}7$.

4. Используя способ Эйткена, найти указанные значения функции для следующих данных:

x	14	17	31	35
y	68,7	64,0	44,0	39,1

$f(27)=?$

Отв. 49,46.

x	93,0	96,2	100,0	104,2	108,7
y	11,38	12,80	14,70	17,07	19.91

$f(102)=?$

Отв. 15,38.

x	0	2	3	6	7	9
y	658 503	704 969	729 000	804 357	830 584	884 736

$f(5)=?$

Отв. 778 687.

5. Используя интерполяционный многочлен Лагранжа, доказать, что

$$\sum_{m=0}^{2p+1}\frac{(-1)^m}{(2p+1-2m)\,m!\,(2p+1-2m)!}=(-1)^p\frac{2^{2p+1}}{[(2p+1)!]^2}.$$

Указание. Рассмотреть $f(x)=1$ на $[-1, 1]$ и взять в качестве точек деления $x_m^{(2p+1)}=-1+\dfrac{2m}{2p+1}$ $(m=0, 1, 2, \ldots, 2p+1)$.

6. Доказать, что

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\frac{i}{n}C_{n+m}^{n+i}=(-1)^{m+1}\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,n!}.$$

Указание. Применить формулу Лагранжа к функции

$$f(x)=\frac{(n-x)(n-1-x)\ldots(2-x)}{n!}.$$

Положить $x_0=0$, $h=1$, $x=n+m$.

7. Используя интерполяционный многочлен Лагранжа, получить следующую формулу:

$$\frac{1}{m-n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{C_m^n C_n^k}{m-k} \qquad (m>n).$$

8. Используя интерполяционный многочлен Лагранжа, получить следующую формулу:

$$\frac{m}{m-n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{k}{m-k}C_m^n C_n^k \qquad (m>n).$$

9. Доказать, что

$$L_{0n}(x)+L_{1n}(x)+\ldots+L_{nn}(x)=1,$$
$$(x_0-x)^k L_{0n}(x)+(x_1-x)^k L_{1n}(x)+\ldots+(x_n-x)^k L_{nn}(x)=0,$$
$$(k=1, 2, \ldots, n),$$

где

$$L_{in}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

10. Доказать, что

$$L_{in}(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})}.$$

11. Пусть $L_n(x)$ — интерполяционный алгебраический многочлен степени n, построенный для функции $f(x)$ по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Получить интерполяционную формулу Лагранжа, разлагая дробь

$$\frac{L_n(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}$$

на простейшие.

12. Даны значения функции в $m+n$ точках. Доказать, что можно найти такую рациональную функцию, числитель которой имеет степень $m-1$, а знаменатель n, которая совпадает с заданными значениями в заданных точках.

13. Взяты три значения функции $f(x)$: $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, вблизи ее максимума или минимума. Показать, что значение x в максимуме или минимуме приблизительно равно

$$\frac{(b^2-a^2)f(a)+(c^2-a^2)f(b)+(a^2-b^2)f(c)}{2\{(b-c)f(a)+(c-a)f(b)+(a-b)f(c)\}}.$$

14. Для любых $n+1$ чисел $c_0, c_1, \ldots, c_n$ возможно и притом единственным образом построить многочлен $P(x)$ степени, меньшей или равной n, удовлетворяющий условиям

$$P(x_0)=c_0;\quad P'(x_1)=c_1, \ldots, \quad P^{(n)}(x_n)=c_n.$$

Числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$ произвольны. Доказать это и найти формулу для $P(x)$.

15. Пусть многочлен

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

имеет отличные друг от друга нули $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$\sigma_k = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x_\nu^k}{f'(x_\nu)} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant k \leqslant n-2, \\ a_0^{-1} & \text{при } k = n-1. \end{cases}$$

16. При тех же предположениях

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{k x_\nu^{k-1} f'(x_\nu) - x_\nu^k f''(x_\nu)}{[f'(x_\nu)]^3} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant k \leqslant 2n-2, \\ a_0^{-2} & \text{при } k = 2n-1. \end{cases}$$

17. Если, кроме того, x_ν отличны от 0 и -1, то

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^n f\left(x_\nu^{-1}\right)}{f'(x_\nu)(1+x_\nu)} = (-1)^n [1 - x_1 x_2 \ldots x_n].$$

18. Зная значения $\sin x$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, найти $\sin x$ при $x = \frac{\pi}{12}$. Оценить погрешность.

19. Зная $\cos x$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, найти $\cos x$ при $x = \frac{\pi}{12}$. Оценить погрешность.

20. Дана таблица:

x	340	350	360	370
$\lg x$	2,5314789	2,5440680	2,5563025	2,5682017

Найти $\lg 355$. Оценить погрешность.

21. Дана таблица:

x	0,176327	0,267949	0,363970	0,466308
$\operatorname{arc\,tg} x$	10°	15°	20°	25°

Найти $\operatorname{arc\,tg}\ 0{,}3$. Оценить погрешность.

22. Дана таблица:

x	33° 40′ 00″	33° 40′ 40″	33° 41′ 10″	33° 42′ 00″	33° 42′ 10″
$\cos x$	0,832277	0,832169	0,832089	0,831954	0,831927

Найти $\cos 33° 40′ 10″$ и $\sin 33° 40′ 10″$. Оценить погрешность.

23. Дана таблица:

x	18° 20′ 00″	18° 20′ 10″	18° 20′ 50″	18° 21′ 00″	18° 21′ 40″
$\cos x$	0,314545	0,314591	0,314775	0,314821	0,315005

Найти $\sin 18° 20′ 30″$. Оценить погрешность.

24. Пусть в качестве базисных функций для интерполирования выбраны

$$e^{\alpha_0 x},\ e^{\alpha_1 x},\ \ldots,\ e^{\alpha_n x},$$

где α_i — некоторые действительные числа, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Найти остаточный член соответствующей интерполяционной формулы.

25. Дана таблица значений многочлена третьей степени:

x	0	2	3	5	6	-1
$f(x)$	-1	113	381	1754	3029	-16

Известно, что допущена одна ошибка. Обнаружить ошибку и исправить ее. По формуле Ньютона для неравных промежутков вычислить $f(1)$, $f(4)$, $f(7)$. Восстановить исходный многочлен.

Отв. $14x^3 + x - 1$. Ошибка при $x = 3$; $f(3) = 380$.

26. Показать, что n-я разделенная разность многочлена n-й степени равна коэффициенту при x^n независимо от выбора узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

27. Показать, что если $f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, то $f(x_0; x_1; \ldots; x_p) = 0$ $(p < n)$.

28. Показать, что если аргументы умножить на одну и ту же постоянную c, а значения функции оставить неизменными, то разделенные разности $f(x_0; x_1; \ldots; x_n)$ умножатся на c^{-n}.

29. Показать, что разделенные разности не изменятся, если аргументы увеличить на одну и ту же величину, а значения функции оставить неизменными.

30. Доказать, что

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \int \ldots \int f^{(n-1)}(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n,$$

где интеграл распространяется на все положительные значения t_i, удовлетворяющие условию

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1.$$

31. Показать, что если $f(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$, то

$$f(a_0; a_1; \ldots; a_n) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(a_0; a_1; \ldots; a_i)\,\psi(a_{i+1}; a_{i+2}; \ldots; a_n).$$

32. Обобщить предыдущую формулу на случай k сомножителей, т. е. показать, что если $f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \dots \varphi_k(x)$, то

$$f(a_0; a_1; \dots; a_n) =$$

$$= \sum \varphi_1(a_0; a_1; \dots; a_{i_1}) \varphi_2(a_{i_1+1}; \dots; a_{i_2}) \dots \varphi_k(a_{i_{k-1}+1}; \dots; a_n),$$

где сумма распространена на все значения $i_1, i_2, \dots, i_{k+1}$, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_{k-1} \leqslant n.$$

33. Конечная разность первого порядка функции $f(x)$ имеет вид $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. Найти, какой вид имеет $f(x)$.

34. Дана таблица натуральных синусов с шагом в 1°. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции? Тот же вопрос, если шаг равен 1′, 1″?

35. Дана таблица натуральных логарифмов чисел от 1 до 10. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции, если шаг равен 0,001?

36. Таблица интеграла вероятности $\frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-z^2} dz$ от $x = 0$ до $x = 3$ дана с шагом 0,001. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции?

37. Таблица e^x дана от 0 до 1 с шагом 0,01. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции?

38. Дана таблица:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
20	0,229314955248	26	0,231422001936
22	0,230016702495	28	0,232125550246
24	0,230719052039	30	0,232829695032

Найти $f(21)$ и $f(29)$.

39. Дана таблица:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,51	0,5292437	0,55	0,5633233
0,52	0,5378987	0,56	0,5716157
0,53	0,5464641	0,57	0,5798158
0,54	0,5549392		

Найти $f(0{,}5124)$ и $f(0{,}5716)$.

40. Дана таблица:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1500	1 760 912 591	1503	1 769 589 805
1501	1 763 806 922	1504	1 772 478 361
1502	1 766 699 326		

Сгустить таблицу до шага 0,1.

41. Дана таблица значений полного эллиптического интеграла первого рода $K(\alpha)$:

α	$K(\alpha)$	α	$K(\alpha)$
75°	2,76806	80°	3,15339
76°	2,83267	81°	3,25530
77°	2,90256	82°	3,36987
78°	2,97857	83°	3,50042
79°	3,06173	84°	3,65186

Получить таблицу с шагом в 30′.

42. Дана таблица пятизначных логарифмов чисел:

x	300	310	320	330
$\log x$	2,47712	2,49136	2,50515	2,51851

Составить по ней таблицу с шагом 1. Сравнить результаты с табличными.

43. Дана таблица:

x	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
$\operatorname{ch} x$	1,04534	1,06188	1,08107	1,10297	1,12763	1,15510	1,18547

Сгустить таблицу в пять раз. Сравнить результаты с табличными.

44. Взяты $2r+1$ различных значений t: $0, \pm t_1; \pm t_2; \ldots; \pm t_r$. Выписать интерполяционную формулу, использующую узлы

$$x_0 = a, \quad x_{2r} = a - t_r h, \quad x_{2r-1} = a + t_r h.$$

Найти остаточный член этой формулы.

45. При обозначениях предыдущей задачи и при

$$P(t)=t\prod_{k=1}^{r}\left(t^2-t_k^2\right),\quad P_i(t)=t\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\left(t^2-t_k^2\right)$$

будут иметь место следующие формулы:

$$f(a+th)+f(a-th)=\sum_{k=1}^{r}\frac{tP_k(t)}{t_kP_k(t_k)}\left[f(a+t_kh)+f(a-t_kh)\right]+R,$$

где

$$R=2h^{2r+2t}P(t)\,f(a\pm th;\ a;\ a\pm t_1h;\ \ldots;\ a\pm t_rh)$$

и

$$f(a+th)-f(a-th)=\sum_{k=1}^{r}\frac{P_k(t)}{P_k(t_k)}\left[f(a+t_kh)-f(a-t_kh)\right]+R,$$

где

$$R=h^{2r+1}P(t)\left\{f(a+th;\ a;\ a\pm t_1h;\ \ldots;\ a\pm t_rh)+\right.$$
$$\left.+f(a-th;\ a;\ a\pm t_1h;\ \ldots;\ a\pm t_rh)\right.$$

46. Доказать, что при тех же обозначениях и при обозначениях

$$H(t)=\prod_{k=1}^{r}\left(t^2-t_k^2\right),\quad H_i(t)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\left(t^2-t_k^2\right)$$

будут иметь место следующие формулы:

$$f(a+th)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\frac{H_k(t)}{t_kH_k(t_k)}\left[(t+t_k)f(a+t_kh)-(t-t_k)f(a-t_kh)\right]+R,$$

где

$$R=h^{2r}H(t)\,f(a+th;\ a\pm t_1h;\ \ldots;\ a\pm t_rh)$$

и

$$f(a-ht)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\frac{H_k(t)}{t_kH_k(t_k)}\left[(t+t_k)f(a-t_kh)-(t-t_k)f(a+t_kh)\right]+R,$$

где

$$R=h^{2r}H(t)\,f(a-th;\ a\pm t_1h;\ \ldots;\ a\pm t_rh).$$

47. В прежних обозначениях имеют место следующие формулы:

$$f(a+th)+f(a-th)=\sum_{k=1}^{r}\frac{H_k(t)}{H_k(t_k)}\left[f(a+t_kh)+f(a-t_kh)\right]+R,$$

где

$$R=h^{2r}H(t)\left[f(a+th;\ a\pm t_1h;\ \ldots;\ a\pm t_rh)+f(a-th;\ a\pm t_1h;\ \ldots;\ a\pm t_rh)\right.$$

и

$$f(a+th)-f(a-th)=\sum_{k=1}^{r}\frac{tH_k(t)}{t_kH_k(t_k)}\left[f(a+t_kh)-f(a-t_kh)\right]+R,$$

где

$$R = 2h^{2r+1}tH(t)\,f(a \pm th;\ a \pm t_1 h;\ \ldots;\ a \pm t_r h).$$

48. Вывести формулу

$$f(a+th)+f(a-th) = 2f(a) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f_0^{2k}}{(2k)!} \prod_{i=0}^{k-1} (t^2 - i^2) + R,$$

где

$$R = 2\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\, h^{2n+2} \prod_{i=0}^{n} (t^2 - i^2).$$

49. Вывести формулу

$$f(a+th) - f(a-th) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2f_{\frac{1}{2}}^{2k-1} - f_0^{2k}}{(2k-1)!}\, t \prod_{i=1}^{k-1} (t^2 - i^2) + R,$$

где

$$R = 2\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}\, h^{2n+1} t \prod_{k=1}^{n} (t^2 - k^2).$$

50. Вывести формулу

$$f\left(a + \frac{h}{2} + th\right) + f\left(a + \frac{h}{2} - th\right) =$$

$$= f(a) + f(a+h) + 2\sum_{k=2}^{n} \frac{f_{\frac{1}{2}}^{2k-2}}{(2k-2)!} \prod_{i=2}^{k} \left[t^2 - \left(\frac{2i-3}{2}\right)^2\right] + R,$$

где

$$R = 2\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\, h^{2n} \prod_{k=1}^{n} \left[t^2 - \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\right].$$

51. Вывести формулу

$$f\left(a + \frac{h}{2} + th\right) - f\left(a + \frac{h}{2} - th\right) =$$

$$= 2tf'_{\frac{1}{2}} + 2\sum_{k=2}^{n} \frac{f_{\frac{1}{2}}^{2k-1}}{(2k-1)!}\, t \prod_{i=2}^{n} \left[t^2 - \left(\frac{2i-3}{2}\right)^2\right] + R,$$

где

$$R = 2\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}\, h^{2n+1} t \prod_{k=1}^{n} \left[t^2 - \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\right].$$

52. Построить интерполяционный многочлен Эрмита по следующим данным:

x	0	1	2
y	1	-1	0
y'	0	0	
y''	2		

Отв. $-\frac{37}{8}x^5+\frac{65}{4}x^4-\frac{117}{8}x^3+x^2+1$.

53. Построить интерполяционный многочлен Эрмита по следующим данным:

x	-1	0	1
y	-1	0	1
y'	0	0	0

Отв. $\frac{1}{2}x^3(5-3x^2)$.

54. Пусть интерполяционный многочлен Эрмита ищется методом неопределенных коэффициентов, т. е. рассматривается многочлен

$$P(x)=c_0+c_1x+\ \dots\ +c_mx^m$$

с неопределенными коэффициентами и $c_0, c_1, \dots, c_m$ подбираются так, чтобы

$$P^{(s)}(x_k)=y_k^{(s)},\quad \begin{matrix} s=0,1,\dots,\alpha_k-1,\\ k=1,2,\dots,n,\end{matrix}\qquad m=\alpha_1+\alpha_2+\ \dots\ +\alpha_n-1.$$

Показать, что получающийся при этом определитель отличен от нуля и вычислить его.

55. Показать, что

$$f(\underbrace{x_1;\dots;x_1}_{n_1};\underbrace{x_2;\dots;x_2}_{n_2};\dots;\underbrace{x_p;\dots;x_p}_{n_p})=$$

$$=\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1} dt_2\dots\int_0^{t_{p-2}}\Phi\cdot f^{(n-1)}(y)\,dt_{p-1},$$

где

$$y = (1 - t_1)\, x_1 + (t_1 - t_2)\, x_2 + \ldots + (t_{p-2} - t_{p-1})\, x_{p-1} + t_{p-1} x_p,$$

а

$$\Phi = \frac{(1 - t_1)^{n_1 - 1} (t_1 - t_2)^{n_2 - 1} \ldots (t_{p-3} - t_{p-1})^{n_{p-1} - 1} t_p^{n_p - 1}}{(n_1 - 1)!\,(n_2 - 1)! \ldots (n_p - 1)!}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. Е. Микеладзе, Численные методы математического анализа, Гостехиздат, 1953.
2. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, 1952.
3. В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1954.
4. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
5. Хаусхолдер, Основы численного анализа, ИЛ, 1956.
6. Милн, Численный анализ, ИЛ, 1951.
7. Э. Уиттекер, Г. Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений.
8. И. Ф. Стефенсен, Теория интерполяции, ОНТИ, 1936.

ГЛАВА 3

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В данной главе будут рассмотрены численные методы решения простейших, но очень распространенных задач математического анализа — дифференцирования и интегрирования функций.

Дифференцирование и интегрирование являются частными случаями функций, определенных на функциональных пространствах, о которых говорилось во Введении. При этом каждой функции некоторого функционального пространства R ставится в соответствие либо снова функция (при отыскании производной или неопределенного интеграла), либо некоторое число (если ищется производная в определенной точке или определенный интеграл). Например, понимая под R совокупность всех функций, имеющих на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную, можно рассматривать дифференцирование как функцию $A(f)$, определенную на R, с помощью которой элементу $f(x) \in R$ ставится в соответствие функция $\varphi(x) \in C$, где $\varphi(x) = f'(x)$, т. е. $A(f) = f'(x)$ или $A \equiv \frac{d}{dx}$.

Во многих случаях значения этих функций не могут быть найдены точно использованием методов дифференциального и интегрального исчисления. Тогда прибегают к приближенному решению этих задач, используя общий метод, описанный во Введении. В этой главе мы будем рассматривать методы численного дифференцирования и интегрирования, основанные на замене пространства R другим пространством $\bar{R}$. т. е. будем заменять задачу $A(f) = \varphi$ $f \in R$ задачей $A(\bar{f}) = \bar{\varphi}$, $\bar{f} \in \bar{R}$.

В основу замены R на $\bar{R}$ положим уже рассмотренный метод приближения — интерполирование.

§ 1. Задача численного дифференцирования

К численному дифференцированию приходится прибегать в том случае, когда функция $f(x)$, для которой нужно найти производную, задана таблично или же функциональная зависимость x и $f(x)$ имеет очень сложное аналитическое выражение. В первом случае методы

дифференциального исчисления просто неприменимы, а во втором случае их использование вызывает значительные трудности.

В этих случаях вместо функции $f(x)$ рассматривают интерполирующую функцию $\varphi(x)$ и считают производную от $f(x)$ приближенно равной производной от $\varphi(x)$. Естественно, что при этом производная от $f(x)$ будет найдена с некоторой погрешностью.

Функцию $f(x)$ можно записать в таком виде:

$$f(x) = \varphi(x) + R(x),$$

где $\varphi(x)$ — интерполирующая функция, а $R(x)$ — остаточный член интерполяционной формулы. Дифференцируя это тождество k раз (в предположении, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные k-го порядка), получим:

$$f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + R^{(k)}(x).$$

Так как за приближенное значение $f^{(k)}(x)$ принимается $\varphi^{(k)}(x)$, то погрешность есть $R^{(k)}(x)$. При замене $f(x)$ интерполирующей функцией $\varphi(x)$ предполагается, что остаточный член мал, но из этого совсем не следует, что мало $R^{(k)}(x)$, ибо производные от малой функции могут быть весьма велики. И на самом деле, практика показывает, что при таком способе вычисления производных $f^{(k)}(x)$ получается сравнительно большая погрешность, особенно при вычислении производных высших порядков.

Рассмотрим формулы дифференцирования в общем случае, когда интерполирующая функция $\varphi(x)$ строится как линейная комбинация базисных функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, образующих систему Чебышева на рассматриваемом отрезке $[a, b]$.

Пользуясь результатами предыдущей главы (см. (2) § 4 гл. 2), запишем функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \int_{x_i}^{x} K(x_i, s)\, L_{n+1}[f(s)]\, ds. \qquad (1)$$

Здесь $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \Phi_i(x)$ — интерполяционный многочлен, $\Phi_i(x)$ — линейная комбинация базисных функций $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющая условиям

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij},$$

x_i — узлы интерполирования,

$$K(x, s) = W^{-1}[\varphi_0(s), \ldots, \varphi_n(s)] \cdot \begin{vmatrix} \varphi_0(s) & \varphi_1(s) & \ldots & \varphi_n(s) \\ \varphi_0'(s) & \varphi_1'(s) & \ldots & \varphi_n'(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(n-1)}(s) & \varphi_1^{(n-1)}(s) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(s) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

$$L_{n+1}[f(s)] = W[\varphi_0(s), \ldots, \varphi_n(s), f(s)]\, W^{-1}[\varphi_0(s), \ldots, \varphi_n(s)]. \qquad (3)$$

Дифференцируем обе части равенства. Получим:

$$f'(x) = \varphi'(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi_i'(x) \int_{x_i}^{x} K(x_i, s) L_{n+1}[f(s)]\, ds + \\ + \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) K(x_i, x) L_{n+1}[f(x)].$$

Но

$$\sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) K(x_i, x) L_{n+1}[f(x)] = L_{n+1}[f(x)] \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \sum_{j=0}^{n} \Phi_j(x_i) G_j(x) = \\ = L_{n+1}[f(x)] \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) G_i(x) = L_{n+1}[f(x)] K(x, x) = 0.$$

Таким образом,

$$f'(x) = \varphi'(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi_i'(x) \int_{x_i}^{x} K(x_i, s) L_{n+1}[f(s)]\, ds. \tag{4}$$

При численном дифференцировании за приближенное значение производной берут $\varphi'(x)$. Тогда второй член справа будет давать остаточный член.

Дифференцируя последнее равенство еще раз, найдем:

$$f''(x) = \varphi''(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi_i''(x) \int_{x_i}^{x} K(x_i, s) L_{n+1}[f(s)]\, ds + \\ + \sum_{i=0}^{n} \Phi_i'(x) K(x_i, x) L_{n+1}[f(x)]$$

И в этом случае

$$\sum_{i=0}^{n} \Phi_i'(x) K(x_i, x) L_{n+1}[f(x)] = L_{n+1}[f(x)] \sum_{i=0}^{n} \Phi_i'(x) \sum_{j=0}^{n} \Phi_j(x_i) G_j(x) = \\ = L_{n+1}[f(x)] \sum_{i=0}^{n} \Phi_i'(x) G_i(x) = L_{n+1}[f(x)] \frac{\partial K(x, s)}{\partial x}\Big|_{x=s} = 0.$$

Поэтому

$$f''(x) = \varphi''(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi_i''(x) \int_{x_i}^{x} K(x_i, s) L_{n+1}[f(s)]\, ds. \tag{5}$$

Опять первый член справа дает приближенное значение производной, а второй — остаточный член.

Эти рассуждения можно провести для производных любого порядка, меньшего или равного n.

Из полученных выражений остаточных членов видно, что формулы численного дифференцирования дают точное значение для производных, если $f(x)$ является произвольной линейной комбинацией базисных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

В следующем параграфе будут рассмотрены конкретные формулы численного дифференцирования, в основе которых лежит интерполирование с помощью алгебраических многочленов.

§ 2. Формулы численного дифференцирования

1. Формулы численного дифференцирования для неравноотстоящих узлов. Будем исходить из интерполяционной формулы Ньютона для неравных промежутков:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;\ x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0;\ x_1;\ x_2)+\ldots$$
$$\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)+(x-x_0)(x-x_1)\ldots$$
$$\ldots(x-x_n)f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n). \qquad (1)$$

Для сокращения записей обозначим $x-x_i=\alpha_i$. Дифференцируя обе части равенства (1) один раз, будем иметь:

$$f'(x)=f(x_0;\ x_1)+(\alpha_0+\alpha_1)f(x_0;\ x_1;\ x_2)+$$
$$+(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)f(x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3)+\ldots$$
$$\ldots+(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}+\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)+$$
$$+\frac{d\omega_n(x)}{dx}f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)+\omega_n(x)\frac{df(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)}{dx}. \qquad (2)$$

За приближенное значение первой производной при численном дифференцировании будет приниматься

$$L_n'(x)=f(x_0;\ x_1)+(\alpha_0+\alpha_1)f(x_0;\ x_1;x_2)+$$
$$+(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)f(x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3)+\ldots$$
$$\ldots+(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}+\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})\times$$
$$\times f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n). \qquad (3)$$

Остаточный член будет выглядеть так:

$$R=\frac{d\omega_n(x)}{dx}f(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)+\omega_n(x)\frac{df(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)}{dx}. \qquad (4)$$

Упростим второй член справа. По определению

$$\frac{df(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)}{dx}=\lim_{x'\to x}\frac{f(x';\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)-f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)}{x'-x}=$$
$$=\lim_{x'\to x}f(x';\ x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)=f(x;\ x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n).$$

Таким образом,

$$R=\frac{d\omega_n(x)}{dx}f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)+\omega_n(x)f(x;\ x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n) \qquad (5)$$

или, если использовать связь разделенных разностей с производными,

$$R = \frac{d\omega_n(x)}{dx}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} + \omega_n(x)\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}. \quad (6)$$

В узлах интерполирования $x_0, x_1, \ldots, x_n$ второй член справа обращается в нуль и выражение остаточного члена будет более простым.

Дифференцируя еще раз, получим:

$$f''(x) = 2f(x_0; x_1; x_2) + 2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \ldots$$
$$\ldots + 2(\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-3} + \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-4}\alpha_{n-2} + \ldots + \alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}) \times$$
$$\times f(\widehat{x_0; x_1}; \ldots; x_n) + \frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2} f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) +$$
$$+ 2\frac{d\omega_n(x)}{dx}\frac{df}{dx}(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + \frac{d^2f(x; x_0; \ldots; x_n)}{dx^2}\omega_n(x). \quad (7)$$

За приближенное значение второй производной при численном дифференцировании будет приниматься

$$L_n''(x) = 2[f(x_0; x_1; x_2) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \ldots$$
$$\ldots + (\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-3} + \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-4}\alpha_{n-2} + \ldots + \alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}) \times$$
$$\times f(x_0; x_1; \ldots; x_n)]. \quad (8)$$

Остаточный член будет иметь вид

$$R = \frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2} f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) +$$
$$+ 2\frac{d\omega_n(x)}{dx}\frac{df(x; x_0; \ldots; x_n)}{dx} + \omega_n(x)\frac{d^2f(x; x_0; \ldots; x_n)}{dx^2}. \quad (9)$$

Второй член справа упрощается так же, как это делалось для первой производной. Упростим третий член. В силу определения производной и свойств разделенных разностей будем иметь:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x; x_0; \ldots; x_n) = \frac{d}{dx} f(x; x; x_0; \ldots; x_n) =$$
$$= \lim_{x' \to x} \frac{f(x'; x'; x_0; x_1; \ldots; x_n) - f(x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n)}{x' - x} =$$
$$= \lim_{x' \to x} \frac{f(x'; x'; x_0; x_1; \ldots; x_n) - f(x'; x; x_0; x_1; \ldots; x_n)}{x' - x} +$$
$$+ \lim_{x' \to x} \frac{f(x'; x; x_0; x_1; \ldots; x_n) - f(x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n)}{x' - x} =$$
$$= \lim_{x' \to x} f(x'; x'; x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + \lim_{x' \to x} f(x'; x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n) =$$
$$= 2f(x; x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n).$$

Таким образом, остаточный член в этом случае примет следующий вид:

$$R = \frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2} f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + \\ + 2\frac{d\omega_n(x)}{dx} f(x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + 2\omega_n(x) f(x; x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n) \tag{10}$$

или

$$R = \frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} + 2\frac{d\omega_n(x)}{dx}\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!} + 2\omega_n(x)\frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}. \tag{11}$$

Если x принимает одно из значений $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то последний член справа обратится в нуль и остаточный член упростится. Аналогичные рассуждения можно провести и для любого $k \leqslant n$. В общем случае получим:

$$f^{(k)}(x) = k![f(x_0; x_1; \ldots; x_k) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k) f(x_0; x_1; \ldots; x_{k+1}) + \\ + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \ldots + \alpha_k\alpha_{k+1}) \times \\ \times f(x_0; x_1; \ldots; x_{k+2}) + \ldots + (\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-k} + \ldots \\ \ldots + \alpha_{k+1}\alpha_{k+2} \ldots \alpha_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n)] + \\ + \frac{d^k}{dx^k}[\omega_n(x) f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n)]. \tag{12}$$

Для упрощения остаточных членов нам понадобятся выражения

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) \qquad (m \leqslant n).$$

Покажем, что

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) = m! f(\underbrace{x; x; \ldots; x}_{m+1 \text{ раз}}; x_0; x_1; \ldots; x_n). \tag{13}$$

Как это следует из предыдущего, при $m = 1$ и 2 эта формула справедлива. Предположим, что она справедлива при $m = r$, и докажем ее справедливость при $m = r + 1$. В силу нашего предположения

$$\frac{d^r}{dx^r} f(x; x_0; \ldots; x_n) = r! f(\underbrace{x; x; \ldots; x}_{r+1 \text{ раз}}; x_0; x_1; \ldots; x_n)$$

и

$$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) = r!\frac{d}{dx} f(\underbrace{x; x; \ldots; x}_{r+1 \text{ раз}}; x_0; x_1; \ldots; x_n).$$

Воспользуемся опять определением производной

$$\frac{d^{r+1}f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n)}{dx^{r+1}} =$$

$$= r! \lim_{x' \to x} \frac{f(\underbrace{x'; x'; \ldots; x'}_{r+1 \text{ раз}}; x_0; x_1; \ldots; x_n) - f(\underbrace{x; x; \ldots; x}_{r+1 \text{ раз}}; x_0; x_1; \ldots; x_n)}{x' - x}$$

Выражение в числителе последней дроби можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{r+1} \{f(\underbrace{x'; x'; \ldots; x'}_{k \text{ раз}}; \underbrace{x; x; \ldots; x}_{r+1-k \text{ раз}}; x_0; \ldots; x_n) -$$

$$- f(\underbrace{x'; x'; \ldots; x'}_{k-1 \text{ раз}}; \underbrace{x; x; \ldots; x}_{r+2-k \text{ раз}}; x_0; x_1; \ldots; x_n)\} =$$

$$= (x' - x) \sum_{k=1}^{r+1} f(\underbrace{x'; x'; \ldots; x'}_{k \text{ раз}}; \underbrace{x; x; \ldots; x}_{r+2-k \text{ раз}}; x_0; x_1; \ldots; x_n).$$

Таким образом,

$$\frac{d^{r+1}f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n)}{dx^{r+1}} =$$

$$= r! \lim_{x' \to x} \sum_{k=1}^{r+1} f(\underbrace{x'; \ldots; x'}_{k \text{ раз}}; \underbrace{x; \ldots; x}_{r+2-k \text{ раз}}; x_0; x_1; \ldots; x_n) =$$

$$= (r+1)! f(\underbrace{x; x; \ldots; x}_{r+2 \text{ раз}}; x_0; x_1; \ldots; x_n),$$

и формула (13) доказана. В силу доказанной формулы остаточный член при численном отыскании производной порядка k может быть представлен в виде

$$R = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{d^i}{dx^i} f(x; x_0; \ldots; x_n) \frac{d^{k-i}\omega_n(x)}{dx^{k-i}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} f(\underbrace{x; \ldots; x}_{i+1 \text{ раз}}; x_0; x_1; \ldots; x_n) \frac{d^{k-i}\omega_n(x)}{dx^{k-i}} \qquad (14)$$

или

$$R = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!\,(n+i+1)!} f^{(n+i+1)}(\xi_i)\, \omega_n^{(k-i)}(x), \qquad (15)$$

где ξ_i — некоторые точки, заключенные в интервале между наибольшим и наименьшим из чисел x, x_0, x_1, ..., x_n.

Если точка x находится вне отрезка, содержащего точки x_0, x_1, ., x_n, то остаточный член может быть представлен более простым выражением. Для этого рассмотрим многочлен

$$Q(x) = L_n(x) + C\omega_n(x) \qquad (C = \text{const}).$$

Он совпадает с функцией $f(x)$ в точках x_0, x_1, ..., x_n. Подберем постоянную C так, чтобы в точке x', для которой производится оценка, имело место равенство

$$Q^{(k)}(x') = L_n^{(k)}(x') + C\omega_n^{(k)}(x') = f^{(k)}(x').$$

Это возможно, так как все корни уравнения $\omega_n^{(k)}(x) = 0$ лежат в наименьшем отрезке, содержащем x_0, x_1, ..., x_n. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - C\omega_n(x).$$

Эта функция обращается в нуль в точках x_0, x_1, ..., x_n. Следовательно, первая производная ее обращается на наименьшем отрезке, содержащем точки x_0, x_1, ..., x_n, в нуль по крайней мере n раз. Проводя те же рассуждения дальше, получим, что производная порядка k обратится на этом отрезке в нуль по крайней мере $n+1-k$ раз. Но в силу выбора C она обратится в нуль и в точке x', лежащей вне этого отрезка. Таким образом, она обращается в нуль по крайней мере в $n+2-k$ точках. Снова будем последовательно применять теорему Ролля. В конце концов, придем к выводу, что производная порядка $n+1$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке ξ. Но

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - C\omega_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - C(n+1)!$$

Отсюда

$$C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

и

$$f^{(k)}(x') - L_n^{(k)}(x') = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n^{(k)}(x'). \tag{16}$$

Получили более простое выражение остаточного члена.

Рассмотрим пример на применение формул численного дифференцирования.

Пример. По таблице

x	10°	14°	16°	20°
$\sin x$	0,173648	0,241922	0,275637	0,342020

используя формулы численного дифференцирования, найти $\cos 15°$ и $\sin 15°$.

Составляем таблицу разделенных разностей:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i;\ x_{i+1})$	$f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2})$	$f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2};\ x_{i+3})$
10°	0,173648			
		17068,50		
14°	0,241922		— 35,17	
		16857,50		— 0,84
16°	0,275637		— 43,62	
		16595,75		
20°	0,342020			

Отсюда получаем, учитывая, что в нашем случае $\alpha_0 = 5$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$:

$$\cos 15° = [f(x_0;\ x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1) f(x_0;\ x_1;\ x_2) + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2) f(x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3)] \frac{180}{\pi} =$$

$$= [0{,}0170685 - 0{,}000211 + 0{,}00000084] \cdot 57{,}295779 = 0{,}965912.$$

Множитель $\frac{180}{\pi}$ справа появился за счет того, что у нас x взято в градусном измерении. Точное значение с шестью верными знаками $\cos 15° = 0{,}965926$. Используя формулу для второй производной, получим:

$$\sin 15° = -2 [f(x_0;\ x_1;\ x_2) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3)] \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 =$$

$$= 2 [0{,}00003517 + 5 \cdot 0{,}00000084] 3282{,}8063 = 0{,}257027.$$

Точное значение $\sin 15°$ с шестью знаками равно 0,258819. Расхождения получились довольно значительными. Это и естественно, так как функции могут быть и очень близки друг к другу, но иметь сильно различающиеся производные.

Произведем оценку погрешности. В первом случае остаточный член будет иметь следующий вид:

$$R = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} \omega_3'(x) + \frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!} \omega_3(x).$$

При этом

$$\omega_3(x) = (x - 10°)(x - 14°)(x - 16°)(x - 20°)\left(\frac{\pi}{180}\right)^4,$$

$$\omega_3'(x) = [(x - 14°)(x - 16°)(x - 20°) + (x - 10°)(x - 16°)(x - 20°) + (x - 10°)(x - 14°)(x - 20°) + (x - 10°)(x - 14°)(x - 16°)]\left(\frac{\pi}{180}\right)^3.$$

При $x=15°$ получим:

$$\omega_3(15°)=25\cdot 0{,}000000092,\quad \omega_3'(15°)=0.$$

Таким образом,

$$|R|<\frac{25}{120}\cdot 0{,}000000092\approx 0{,}000000019\,.$$

Эта величина значительно меньше фактически полученной погрешности. В данном случае вычислительная погрешность значительно перекрывает погрешность метода.

Во втором случае

$$R=\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}\omega_3''(x)+2\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!}\omega_3'(x)+2\frac{f^{(6)}(\xi_3)}{6!}\omega_3(x).$$

При этом

$$\omega_3''(15°)=\left(\frac{\pi}{180}\right)^2[-52]\approx -0{,}0003\cdot 52=-0{,}00156.$$

Таким образом,

$$|R|<\frac{0{,}00156}{24}+\frac{2\cdot 25\cdot 0{,}000000092}{720}\approx 0{,}000065.$$

И в этом случае вычислительная погрешность очень велика.

2. Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих узлов. Если узлы интерполирования расположены через равные промежутки, то удобнее использовать соответствующие интерполяционные формулы. Так, например, взяв интерполяционную формулу Ньютона для интерполирования вперед

$$f(x)=f(x_0+th)=f_0+tf_{\frac12}^1+\frac{t(t-1)}{2!}f_1^2+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}f_{\frac32}^3+$$
$$+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}f_2^4+\ldots, \tag{17}$$

в результате последовательного дифференцирования получим:

$$\left.\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{df}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{h}\left[f_{\frac12}^1+\frac{2t-1}{2!}f_1^2+\frac{3t^2-6t+2}{3!}f_{\frac32}^3+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!}f_2^4+\ldots\right],\\
f''(x)&=\frac{1}{h^2}\left[f_1^2+\frac{6t-6}{3!}f_{\frac32}^3+\frac{12t^2-36t+22}{4!}f_2^4+\ldots\right],\\
f'''(x)&=\frac{1}{h^3}\left[f_{\frac32}^3+\frac{24t-36}{4!}f_2^4+\ldots\right].
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

В частности, при $x = x_0$ будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h}\left[\mathring{f}^1_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mathring{f}^2_1 + \frac{1}{3}\mathring{f}^3_{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\mathring{f}^4_2 + \ldots\right], \\ f''(x_0) &= \frac{1}{h^2}\left[\mathring{f}^2_1 - \mathring{f}^3_{\frac{3}{2}} + \frac{11}{12}\mathring{f}^4_2 - \ldots\right]. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Если использовать значок Δ для разностей, то последние формулы будут иметь следующий, легко запоминающийся операторно-символический вид:

$$\left(h\frac{d}{dx}\right)^n f(x_0) = \{\ln(1+\Delta)\}^n f(x_0). \tag{20}$$

Здесь предполагается, что формальное разложение $\ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \ldots$, доведенное до постоянных разностей, формально возводится в степень как многочлен. Дадим операторный вывод этой формулы. Если оператор $\frac{d}{dx}$ обозначить буквой D, то формула Тейлора

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \ldots$$

может быть записана так:

$$f(x_0+h) = \left(1 + hD + \frac{h^2}{2!}D^2 + \ldots\right)f(x_0)$$

или

$$(1+\Delta)f(x_0) = e^{hD}f(x_0).$$

Отсюда

$$1 + \Delta = e^{hD}.$$

Беря логарифмы от обеих частей равенства, получим:

$$D = \frac{1}{h}\ln(1+\Delta)$$

или

$$D^n = \frac{1}{h^n}\{\ln(1+\Delta)\}^n.$$

Получили как раз то выражение, которое было дано выше.

Проверим наши формулы на примере многочлена, для которого они должны давать точные значения производных.

Пример. Найти методом численного дифференцирования производные первых трех порядков для многочлена $x^3 - 2x - 5$ в точке $x = 1$.

Составляем таблицу разностей:

x	f	f^1	f^2	f^3
1	-6			
		5		
2	-1		12	
		17		6
3	16		18	
		35		6
4	51		24	
		59		
5	110			

По нашим формулам получаем:

$$h\frac{df}{dx}=\Delta f-\frac{\Delta^2 f}{2}+\frac{\Delta^3 f}{3},\quad h=1,\quad f'(1)=5-6+2=1,$$

$$h^2\frac{d^2f}{dx^2}=\left(\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}\right)^2 f=\Delta^2 f-\Delta^3 f,\quad f''(1)=12-6=6,$$

$$h^3\frac{d^3f}{dx^3}=\left(\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}\right)^3 f=\Delta^3 f,\quad f'''(1)=6.$$

Если использовать другие формулы интерполирования, то можно получить другие формулы численного дифференцирования. Возьмем, например, формулу Стирлинга

$$f(x)=f(x_0+ht)=f_0+tf_0^1+\frac{t^2}{2!}f_0^2+$$
$$+\frac{t(t^2-1)}{3!}f_0^3+\frac{t^2(t^2-1)}{4!}f_0^4+\ldots \quad (21)$$

Последовательные производные будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} hf'(x)&=f_0^1+tf_0^2+\frac{3t^2-1}{3!}f_0^3+\frac{4t^3-2t}{4!}f_0^4+\ldots,\\ h^2f''(x)&=f_0^2+tf_0^3+\frac{12t^2-2}{4!}f_0^4+\ldots,\\ h^3f'''(x)&=f_0^3+tf_0^4+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

В частности, при $x=x_0$

$$\left.\begin{aligned} hf'(x_0)&=f_0^1-\frac{1}{3!}f_0^3+\frac{(2!)^2}{5!}f_0^5-\ldots.,\\ h^2f''(x_0)&=f_0^2-\frac{2}{4!}f_0^4+\ldots.,\\ h^3f'''(x_0)&=f_0^3-\frac{3!(1^2+2^2)}{5!}f_0^5+\ldots. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Если взять формулу Бесселя

$$f(x)=f_{\frac{1}{2}}+\left(t-\frac{1}{2}\right)f^1_{\frac{1}{2}}+\frac{t(t-1)}{2!}f^2_{\frac{1}{2}}+\frac{t(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{3!}f^3_{\frac{1}{2}}+$$
$$+\frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots, \qquad (24)$$

то получится:

$$\left.\begin{aligned} hf'(x) &= f^1_{\frac{1}{2}}+\frac{2t-1}{2}f^2_{\frac{1}{2}}+\frac{3t^2-3t+\frac{1}{2}}{3!}f^3_{\frac{1}{2}}+\\ &+\frac{4t^3-6t^2-2t+2}{4!}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots,\\ h^2f''(x) &= f^2_{\frac{1}{2}}+\frac{6t-3}{3!}f^3_{\frac{1}{2}}+\frac{12t^2-12t-2}{4!}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots,\\ h^3f'''(x) &= f^3_{\frac{1}{2}}+\frac{24t-12}{4!}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

и при $x=x_0$

$$\left.\begin{aligned} hf'(x_0) &= f^1_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}f^2_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{12}f^3_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{12}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots,\\ h^2f''(x_0) &= f^2_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}f^3_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{12}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots,\\ h^3f'''(x_0) &= f^3_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Мы уже получили выражение оператора дифференцирования D через операторы Δ, Δ^2, Δ^3, ... Найдем теперь выражение этого оператора через другие разностные операторы. Так как

$$1+\Delta=\frac{1}{1-\nabla},$$

то

$$hD=-\ln(1-\nabla)=\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}+\frac{\nabla^4}{4}+\ldots$$

Далее,

$$\delta=e^{\frac{hD}{2}}-e^{-\frac{hD}{2}}=2\operatorname{sh}\left(\frac{hD}{2}\right),$$

$$\mu=\frac{e^{\frac{hD}{2}}+e^{-\frac{hD}{2}}}{2}=\operatorname{ch}\left(\frac{hD}{2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{d\delta}{d(hD)} = \mu = \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$hD = \int_0^{\delta} \left(1 + \frac{z^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dz = \delta - \frac{1}{3!}\frac{\delta^3}{2^2} - \frac{1^2 - 3^2}{5!}\frac{\delta^5}{2^4} - \ldots$$

Неудобство этой формулы состоит в том, что производная в точке x выражается через значения f в точках $x \pm k\frac{h}{2}$. Чтобы получить выражение производной через значения функции в точках $x \pm kh$, заметим, что $\frac{hD}{\mu} = v$ формально удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right)\frac{dv}{d\delta} + \frac{\delta}{4}v = 1.$$

Так как v — нечетная функция δ, то можно пытаться искать решение этого дифференциального уравнения в виде

$$v = a_1\delta + a_3\delta^3 + a_5\delta^5 + \ldots$$

Подстановкой в уравнение найдем:

$$v = \delta - \frac{1}{3!}\delta^3 + \frac{(2!)^2}{5!}\delta^5 - \frac{(3!)^2}{7!}\delta^7 + \ldots$$

Далее,

$$\frac{d[(hD)^2]}{d\delta} = 2hD\frac{d(hD)}{d\delta} = 2h\,D\mu.$$

Отсюда

$$h^2D^2 = 2\int_0^{\delta}\left[z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{(2!)^2}{5!}z^5 - \ldots\right]dz =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2!}\delta^2 - \frac{1}{4!}\delta^4 + \frac{(2!)^2}{6!}\delta^6 - \frac{(3!)^2}{8!}\delta^8 + \ldots\right].$$

По индукции показывается, что

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right)\frac{d[h^{2k+1}D^{2k+1}/\mu]}{d\delta} + \frac{\delta}{4}\frac{h^{2k+1}D^{2k+1}}{\mu} = (2k+1)\,h^{2k}D^{2k}$$

$$\frac{d[h^{2k}D^{2k}]}{d\delta} = 2k\frac{h^{2k-1}D^{2k-1}}{\mu}.$$

Таким образом, можно последовательно найти h^3D^3, h^4D^4, ...

3. Безразностные формулы численного дифференцирования. В некоторых случаях выгоднее выражать формулы численного дифференцирования не через разности, а непосредственно через

значения функции. Для получения таких формул удобно воспользоваться вариантом формулы Лагранжа для случая равных промежутков, приведенным в предыдущей главе:

$$f(x) = \frac{(-1)^n t(t-1)\ldots(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i C_n^i y_i}{t-i} + \\ + h^{n+1} t(t-1)\ldots(t-n) f(x; x_0; \ldots; x_n). \quad (27)$$

Дифференцируя один раз, получим:

$$hf'(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{C_n^i y_i}{n!}\frac{d}{dt}\left[\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}\right] + \\ + h^{n+1} f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n)\frac{d}{dt}[t(t-1)\ldots(t-n)] + \\ + h^{n+2} f(x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n) t(t-1)\ldots(t-n). \quad (28)$$

В частности, при $x = x_k$ будем иметь:

$$hf'(x_k) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{C_n^i y_i}{n!}\frac{d}{dt}\left[\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}\right]_{t=k} + \\ + \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\frac{d}{dt}[t(t-1)\ldots(t-n)]_{t=k}. \quad (29)$$

Для второй производной будем иметь:

$$h^2 f''(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{C_n^i y_i}{n!}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}\right] + \\ + h^{n+1} f(x; x_0; \ldots; x_n)\frac{d^2}{dt^2}[t(t-1)\ldots(t-n)] + \\ + 2h^{n+2} f(x; x; x_0; \ldots; x_n)\frac{d}{dt}[t(t-1)\ldots(t-n)] + \\ + 2h^{n+3} f(x; x; x; x_0; \ldots; x_n) t(t-1)\ldots(t-n) \quad (30)$$

и при $x = x_k$

$$h^2 f''(x_k) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{C_n^i y_i}{n!}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}\right]_{t=k} + \\ + h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}\frac{d^2}{dt^2}[t(t-1)\ldots(t-n)]_{t=k} + \\ + 2h^{n+2}\frac{f^{(n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!}\frac{d}{dt}[t(t-1)\ldots(t-n)]_{t=k}. \quad (31)$$

Выпишем готовые выражения для производных первого и второго порядка при различных значениях n.

$n=2$ (три точки):

$$y_0' = \frac{1}{2h}[-3y_0 + 4y_1 - y_2] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{2h}[y_2 - y_0] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{2h}[y_0 - 4y_1 + 3y_2] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi).$$

$n=3$ (четыре точки):

$$y_0' = \frac{1}{6h}[-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3] - \frac{h^3}{4} f^{(IV)}(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{6h}[-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3] + \frac{h^3}{12} f^{(IV)}(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{6h}[y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3] - \frac{h^3}{12} f^{(IV)}(\xi);$$

$$y_3' = \frac{1}{6h}[-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3] + \frac{h^3}{4} f^{(IV)}(\xi).$$

$n=4$ (пять точек):

$$y_0' = \frac{1}{12h}[-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4] + \frac{h^4}{5} f^{(V)}(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{12h}[-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4] - \frac{h^4}{20} f^{(V)}(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{12h}[y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4] + \frac{h^4}{30} f^{(V)}(\xi);$$

$$y_3' = \frac{1}{12h}[-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4] + \frac{h^4}{20} f^{(V)}(\xi);$$

$$y_4' = \frac{1}{12h}[3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4] + \frac{h^4}{5} f^{(V)}(\xi).$$

$n=5$ (шесть точек):

$$y_0' = \frac{1}{60h}[-137y_0 + 300y_1 - 300y_2 + 200y_3 - 75y_4 + 12y_5] - \frac{h^5}{6} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{60h}[-12y_0 - 65y_1 + 120y_2 - 60y_3 + 20y_4 - 3y_5] + \frac{h^5}{30} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{60h}[3y_0 - 30y_1 - 20y_2 + 60y_3 - 15y_4 + 2y_5] - \frac{h^5}{60} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_3' = \frac{1}{60h}[-2y_0 + 15y_1 - 60y_2 + 20y_3 + 30y_4 - 3y_5] + \frac{h^5}{60} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_4' = \frac{1}{60h}[3y_0 - 20y_1 + 60y_2 - 120y_3 + 65y_4 + 12y_5] - \frac{h^5}{30} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_5' = \frac{1}{60h}[-12y_0 + 75y_1 - 200y_2 + 300y_3 - 300y_4 + 137y_5] + \frac{h^5}{6} f^{(VI)}(\xi).$$

$n=6$ (семь точек):

$$y_0'=\frac{1}{60h}[-147y_0+360y_1-450y_2+ \\ +400y_3-225y_4+72y_5-10y_6]+\frac{h^6}{7}f^{(VII)}(\xi);$$

$$y_1'=\frac{1}{60h}[-10y_0-77y_1+150y_2-100y_3+ \\ +50y_4-15y_5+2y_6]-\frac{h^6}{42}f^{(VII)}(\xi);$$

$$y_2'=\frac{1}{60h}[2y_0-24y_1-35y_2+80y_3-30y_4+8y_5-y_6]+\frac{h^6}{105}f^{(VII)}(\xi);$$

$$y_3'=\frac{1}{60h}[-y_0+9y_1-45y_2+45y_4-9y_5+y_6]-\frac{h^6}{140}f^{(VII)}(\xi);$$

$$y_4'=\frac{1}{60h}[y_0-8y_1+30y_2-80y_3+ \\ +35y_4+24y_5-2y_6]+\frac{h^6}{105}f^{(VII)}(\xi);$$

$$y_5'=\frac{1}{60h}[-2y_0+15y_1-50y_2+ \\ +100y_3-150y_4+77y_5+10y_6]-\frac{h^6}{42}f^{(VII)}(\xi);$$

$$y_6'=\frac{1}{60h}[10y_0-72y_1+225y_2-400y_3+ \\ +450y_4-360y_5+147y_6]+\frac{h^6}{7}f^{(VII)}(\xi).$$

Сравнивая различные формулы, мы видим, что наиболее простые выражения получаются при четных n в средних точках. При этом и коэффициенты при производных в остаточных членах получаются самыми маленькими. Поэтому на практике, по возможности, следует применять эти формулы.

Приведем соответствующие выражения для вторых производных.

$n=2$ (три точки):

$$y_0''=\frac{1}{h^2}[y_0-2y_1+y_2]-hf'''(\xi_1)+\frac{h^2}{6}f^{(IV)}(\xi_2);$$

$$y_1''=\frac{1}{h^2}[y_0-2y_1+y_2]-\frac{h^2}{12}f^{(IV)}(\xi);$$

$$y_2''=\frac{1}{h^2}[y_0-2y_1+y_2]+hf'''(\xi_1)-\frac{h^2}{6}f^{(IV)}(\xi_2).$$

$n=3$ (четыре точки):

$$y_0''=\frac{1}{6h^2}[12y_0-30y_1+24y_2-6y_3]+\frac{11}{12}h^2f^{(IV)}(\xi_1)-\frac{h^3}{10}f^{(V)}(\xi_2);$$

$$y_1''=\frac{1}{6h^2}[6y_0-12y_1+6y_2]-\frac{1}{12}h^2f^{(IV)}(\xi_1)-\frac{h^3}{30}f^{(V)}(\xi_2);$$

$$y_2''=\frac{1}{6h^2}[6y_1-12y_2+6y_3]-\frac{1}{12}h^2f^{(IV)}(\xi_1)-\frac{h^3}{30}f^{(V)}(\xi_2);$$

$$y_3''=\frac{1}{6h^2}[-6y_0+24y_1-30y_2+12y_3]+\frac{11}{12}h^2f^{(IV)}(\xi_1)-\frac{h^3}{10}f^{(V)}(\xi_2).$$

$n=4$ (пять точек):

$$y_0''=\frac{1}{24h^2}[70y_0-208y_1+228y_2-112y_3+22y_4]-$$
$$-\frac{5}{6}h^3f^{(V)}(\xi_1)+\frac{h^4}{15}f^{(VI)}(\xi_2);$$
$$y_1''=\frac{1}{24h^2}[22y_0-40y_1+12y_2+8y_3-2y_4]+$$
$$+\frac{1}{12}h^3f^{(V)}(\xi_1)-\frac{h^4}{60}f^{(VI)}(\xi_2);$$
$$y_2''=\frac{1}{24h^2}[-2y_0+32y_1-60y_2+32y_3-2y_4]+\frac{h^4}{90}f^{(VI)}(\xi_1);$$
$$y_3''=\frac{1}{24h^2}[-2y_0+8y_1+12y_2-40y_3+22y_4]-$$
$$-\frac{1}{12}h^3f^{(V)}(\xi_1)+\frac{h^4}{60}f^{(VI)}(\xi_2);$$
$$y_4''=\frac{1}{24h^2}[22y_0-112y_1+228y_2-208y_3+70y_4]+$$
$$+\frac{5}{6}h^3f^{(V)}(\xi_1)-\frac{h^4}{15}f^{(VI)}(\xi_2).$$

И в этом случае наиболее выгодные формулы получаются для четных n и для средних точек.

4. Метод неопределенных коэффициентов. Можно получить аналогичные формулы и для произвольного расположения узлов. При этом, чтобы не вычислять громоздкие выражения многочлена Лагранжа, удобнее использовать *метод неопределенных коэффициентов*. Для этого записываем искомую формулу в виде

$$y^{(k)}(x_i)=\sum_{i=0}^{n}c_iy_i+R(f)$$

и подбираем коэффициенты c_i из условия $R(f)=0$, когда $f=1, x, x^2, \ldots, x^n$. Получится следующая система для определения коэффициентов c_i:

$$\begin{aligned}
c_0+c_1+\ldots+c_n&=0,\\
c_0x_0+c_1x_1+\ldots+c_nx_n&=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_0x_0^{k-1}+c_1x_1^{k-1}+\ldots+c_nx_n^{k-1}&=0,\\
c_0x_0^{k}+c_1x_1^{k}+\ldots+c_nx_n^{k}&=k!,\\
c_0x_0^{k+1}+c_1x_1^{k+1}+\ldots+c_nx_n^{k+1}&=(k+1)!\,x_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_0x_0^{n}+c_1x_1^{n}+\ldots+c_nx_n^{n}&=n(n-1)\ldots(n-k+1)\,x_i^{n-k}.
\end{aligned}$$

5. Выражение разностей через производные. Иногда возникает необходимость получить выражения разностей через производные. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) - \lambda \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где λ — некоторая постоянная. Очевидно,

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n)}(0) = 0.$$

При $m \leqslant n$ по формуле Маклорена будем иметь:

$$\varphi^{(m)}(x) = \frac{x^{n-m+1}}{(n-m+1)!} \varphi^{(n+1)}(\xi).$$

С другой стороны, из определения $\varphi(x)$ следует:

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \lambda.$$

Итак,

$$\varphi^{(m)}(x) = \frac{x^{n-m+1}}{(n-m+1)!} [f^{(n+1)}(\xi) - \lambda].$$

Рассмотрим разделенную разность $\varphi(x_0; x_1; \ldots; x_m)$ (рассмотренный уже случай $x_0 = x_1 = \ldots = x_m = 0$ исключается). Тогда

$$\varphi(x_0; x_1; \ldots; x_m) = f(x_0; x_1; \ldots; x_m) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \left[\sum_{l=0}^{m} \frac{x_l^k}{\omega_m'(x_l)} \right] - \frac{\lambda}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{m} \frac{x_l^{n+1}}{\omega_m'(x_l)}.$$

В силу свойств разделенных разностей

$$\sum_{l=0}^{m} \frac{x_l^{n+1}}{\omega_m'(x_l)} = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m} [x^{n+1}] \Big|_{x=\xi} = C_{n+1}^m \xi^{n-m+1},$$

где ξ находится между наибольшим и наименьшим из чисел x_i. Если все x_i положительны или отрицательны, то $\xi \neq 0$ и можно так подобрать λ, что $\varphi(x_0; x_1; \ldots; x_n) = 0$. Отсюда находим $\lambda = f^{(n+1)}(\eta)$. Следовательно,

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_m) = \sum_{k=m}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \left[\sum_{l=0}^{m} \frac{x_l^k}{\omega_m'(x_l)} \right] + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{m} \frac{x_l^{n+1}}{\omega_m'(x_l)}. \quad (32)$$

Положив $x_0 = a$, $x_i = x_{i-1} + h$, получим:

$$\Delta^m f(a) = \sum_{k=m}^{n} f^{(k)}(0) \frac{\Delta^m a^k}{k!} + f^{(n+1)}(\xi) \frac{\Delta^{m+1} a^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (33)$$

Полагая $a=0$, $\psi(x)=f(0+x)$, получим *формулу Маркова*:

$$\Delta^m\psi(x)=\sum_{k=m}^{n}\psi^{(k)}(x)\frac{\Delta^m 0^k}{k!}+\psi^{n+1}(\xi)\frac{\Delta^{m+1}0^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (34)$$

Здесь $\Delta^m 0^k$ — так называемые *разности нуля*. Они являются конечными разностями x^k при $x=0$. Приведем таблицу значений этих разностей:

k	$\Delta 0^k$	$\Delta^2 0^k$	$\Delta^3 0^k$	$\Delta^4 0^k$	$\Delta^5 0^k$	$\Delta^6 0^k$	$\Delta^7 0^k$	$\Delta^8 0^k$
1	1							
2	1	2						
3	1	6	6					
4	1	14	36	24				
5	1	30	150	240	120			
6	1	62	540	1 560	1 800	720		
7	1	126	1 806	8 400	16 800	15 120	15 040	
8	1	254	5 796	40 824	126 000	191 520	141 120	40 320

В инженерной практике иногда прибегают к графическому дифференцированию. Этот способ вряд ли может быть рекомендован,

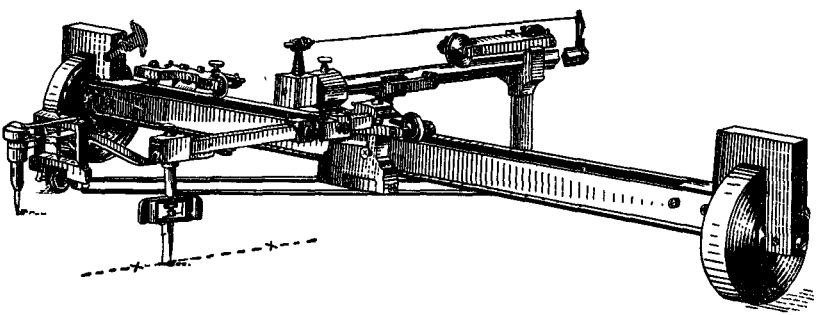

Рис. 24. Интеграф Коради.

так как точность при этом получается незначительная, а объем работы не меньше, чем по приведенным нами формулам. Используются также различные моделирующие приборы. Наиболее точными из них являются интеграфы. На рис. 24 приведен интеграф Коради, использующийся в Советском Союзе.

§ 3. Задача численного интегрирования

Если для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, можно найти примитивную $F(x)$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ можно вычислить по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Но, как правило, найти примитивную $F(x)$ через элементарные функции не удается. Поэтому приходится прибегать к приближенному вычислению интеграла.

Хотя из определения интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ и следует, что с помощью интегральной суммы $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ можно найти интеграл с любой степенью точности, но этот прием замены интеграла интегральной суммой практически мало пригоден из-за медленной сходимости S_n к $\int_a^b f(x)\,dx$.

Для построения формул приближенного вычисления интегралов используем замену функции $f(x)$ интерполирующей функцией $\varphi(x)$. Изложим общую идею построения таких формул, обобщив несколько постановку задачи, введя еще весовую функцию.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx. \tag{2}$$

Здесь $p(x)$ — некоторая фиксированная функция, удовлетворяющая условию $p(x) > 0$ на $[a, b]$. Ее называют *весовой* функцией. Представляем $f(x)$ в виде

$$f(x) = \varphi(x) + R(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — интерполяционный многочлен, а $R(x)$ — остаточный член. Тогда

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = \int_a^b p(x)\varphi(x)\,dx + \int_a^b p(x) R(x)\,dx. \tag{4}$$

Первый член справа будет давать формулу численного интегрирования, а второй — остаточный член этой формулы. Интерполяционный многочлен $\varphi(x)$ можно представить в виде

$$\varphi(x) = f(x_0)\Phi_0(x) + f(x_1)\Phi_1(x) + \ldots + f(x_n)\Phi_n(x). \qquad (5)$$

Будем предполагать, что интегралы

$$\int_a^b p(x)\Phi_i(x)\,dx = c_i \qquad (6)$$

мы умеем вычислять точно. Они не зависят от функции $f(x)$. Поэтому их можно вычислить раз и навсегда и использовать для вычисления интегралов

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx$$

при произвольных $f(x)$. Сама формула численного интегрирования будет иметь вид

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_n f(x_n). \qquad (7)$$

При численном интегрировании (а также и при численном дифференцировании) можно использовать интерполяционные формулы с кратными узлами. Тогда формула численного интегрирования примет вид

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)f(x)\,dx \approx{}& c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_n f(x_n) + \\ &+ c_0^{(1)} f'(x_0) + c_1^{(1)} f'(x_1) + \ldots + c_n^{(1)} f'(x_n) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ c_0^{(\alpha_0-1)} f^{(\alpha_0-1)}(x_0) + c_1^{(\alpha_1-1)} f^{(\alpha_1-1)}(x_1) + \ldots + c_n^{(\alpha_n-1)} f^{(\alpha_n-1)}(x_n). \qquad (8)\end{aligned}$$

Специальным выбором узлов x_i иногда удается добиться того, что часть коэффициентов $c_i^{(j)}$ обратится в нуль. Мы не будем пока входить в подробности этого случая и ограничимся формулами вида

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + R[f]. \qquad (9)$$

Остаточный член этой формулы обращается в нуль, если в качестве $f(x)$ взять любую из функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Учитывая последнее замечание, мы можем встретиться со случаем когда он обратится в нуль и для некоторых других функций $\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \ldots, \varphi_m(x)$, таких, что

$W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m] \neq 0$ на $[a, b]$. Тогда, согласно второй главе (см. (3) § 5 гл. 2), запишем $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \varphi_j(x) + \int_a^x K(x, s) L_{m+1}[f(s)]\, ds \qquad (m \geqslant n). \tag{10}$$

Умножим обе части равенства на $p(x)$ и проинтегрируем в пределах от a до b. Получим:

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \int_a^b p(x) \varphi_j(x)\, dx + \int_a^b p(x) \left\{ \int_a^x K(x, s) L_{m+1}[f(s)]\, ds \right\} dx. \tag{11}$$

Но

$$\int_a^b p(x) \varphi_j(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_j(x_i) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m).$$

Поэтому

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \int_a^b p(x) \varphi_j(x)\, dx = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \left[\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_j(x_i) \right] = \sum_{i=0}^{n} c_i \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \varphi_j(x_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) - \sum_{i=0}^{n} c_i \int_a^{x_i} K(x_i, s) L_{m+1}[f(s)]\, ds.$$

Итак,

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + \int_a^b p(x) \left\{ \int_a^x K(x, s) L_{m+1}[f(s)]\, ds \right\} dx - \sum_{i=0}^{n} c_i \int_a^{x_i} K(x_i, s) L_{m+1}[f(s)]\, ds. \tag{12}$$

Первый член справа даст приближенное значение интеграла, а остальные — остаточный член. Остаточный член может также быть записан в виде:

$$R[f] = -\int_a^b p(x) \left\{ \int_x^b K(x, s) L_{m+1}[f(s)]\, ds \right\} dx + \sum_{i=0}^{n} c_i \int_{x_i}^b K(x_i, s) L_{m+1}[f(s)]\, ds. \tag{13}$$

Полусумма двух представлений остаточных членов даст нам

$$R[f] = \int_a^b G(s) L_{m+1}[f(s)]\, ds. \tag{14}$$

где

$$2G(x) = \int_a^b p(x) K(x, s) \operatorname{sign}(x - s)\, ds - \sum_{i=0}^{n} c_i K(x_i, s) \operatorname{sign}(x_i - s). \quad (15)$$

На этом мы закончим изложение общих методов численного интегрирования и перейдем к более подробному изучению формул, получающихся при использовании интерполирования алгебраическими многочленами.

§ 4. Формулы Ньютона — Котеса

1. Вывод формул. В этом параграфе мы рассмотрим формулы для приближенного вычисления интегралов

$$\int_c^d f(x)\, dx, \quad (1)$$

которые получаются путем замены подынтегрального выражения интерполяционным многочленом Лагранжа с узлами, разбивающими промежуток интегрирования на равные части. Эти формулы носят название *формул Ньютона — Котеса.*

Пусть узлы интерполирования расположены так:

$$x_i = a + ih \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (2)$$

Здесь a либо совпадает с c, и тогда будем предполагать, что $d = a + (n+1)h$, либо $a + h = c$, и тогда предполагаем, что $a + nh = d$. В первом случае узлы интерполирования не содержат точек c и d, а промежуток интегрирования разбивается этими узлами на $n+1$ равных частей. Во втором случае концы промежутка интегрирования являются узлами интерполирования и промежуток интегрирования разбивается узлами на $n-1$ равных частей. Формулы численного интегрирования, которые получатся в первом случае, будем называть *формулами открытого типа*, а во втором случае — *формулами замкнутого типа.* Чтобы не проводить рассуждения дважды, положим

$$c = a + (1 - k)h, \qquad d = a + (n + k)h. \quad (3)$$

Для формул открытого типа $k = 1$, а для формул замкнутого типа $k = 0$. Обозначим $F(y) = f(a + hy)$. Тогда

$$\int_c^d f(x)\, dx = h \int_{1-k}^{n+k} F(y)\, dy. \quad (4)$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный для функции $f(x)$ по узлам x_i, при такой замене независимого переменного перейдет в

$$L(y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(y-1)(y-2)\dots(y-i+1)(y-i-1)\dots(y-n)}{(i-1)(i-2)\dots(1)(-1)\dots(i-n)}F(i). \quad (5)$$

Таким образом,

$$\int_c^d f(x)\,dx=h\int_{1-k}^{n+k}F(y)\,dy=h\int_{1-k}^{n+k}L(y)\,dy+$$

$$+h\int_{1-k}^{n+k}(y-1)(y-2)\dots(y-n)F(y;\ 1;\ 2;\ \dots;\ n)\,dy=$$

$$=h\sum_{i=1}^{n}F(i)\int_{1-k}^{n+k}(-1)^{n-i}\frac{(y-1)(y-2)\dots(y-n)}{(i-1)!\,(n-i)!\,(y-i)}\,dy+$$

$$+h\int_{1-k}^{n+k}(y-1)(y-2)\dots(y-n)F(y;\ 1;\ 2;\ \dots;\ n)\,dy=$$

$$=(d-c)\sum_{i=1}^{n}I_{i,k}^{(n)}f(a+ih)+$$

$$+h\int_{1-k}^{n+k}(y-1)(y-2)\dots(y-n)F(y;\ 1;\ 2;\ \dots;\ n)\,dy. \quad (6)$$

Здесь через $I_{i,k}^{(n)}$ обозначены выражения

$$I_{i,k}^{(n)}=\frac{(-1)^{n-i}}{(n-1+2k)\,(i-1)!\,(n-i)!}\int_{1-k}^{n+k}\frac{(y-1)(y-2)\dots(y-n)}{y-i}\,dy. \quad (7)$$

Они не зависят от промежутка интегрирования и могут быть вычислены раз и навсегда. Кроме того, вычисления облегчаются благодаря тому, что

$$I_{i,k}^{(n)}=I_{n-i+1,k}^{(n)}, \quad (8)$$

т. е. равноотстоящие от концов коэффициенты формулы Ньютона — Котеса равны. В самом деле,

$$I_{n-i+1,k}^{(n)}=\frac{(-1)^{i-1}}{(n-1+2k)\,(n-i)!\,(i-1)!}\int_{1-k}^{n+k}\frac{(y-1)(y-2)\dots(y-n)}{(y-n+i-1)}\,dy.$$

Заменяя под знаком интеграла y на $n-z+1$, получим:

$$I^{(n)}_{n-i+1,\,k} = \frac{(-1)^i}{(n-1+2k)\,(n-i)!\,(i-1)!} \int_{n+k}^{1-k} \frac{(n-z)\,(n-z-1)\ldots(-z+1)}{i-z}\,dz =$$

$$= \frac{(-1)^{n-i}}{(n-1+2k)\,(n-i)!\,(i-1)!} \int_{1-k}^{n+k} \frac{(z-1)\,(z-2)\ldots(z-n)}{z-i}\,dz = I^{(n)}_{i,\,k},$$

что и требовалось доказать.

С возрастанием n коэффициенты $I^{(n)}_{i,\,k}$ становятся все более и более громоздкими. Как было показано Р. О. Кузьминым,

$$\left|I^{(2m+1)}_{i,\,0}\right|$$

с возрастанием m неограниченно возрастает. Так как, с другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{n} I^{(n)}_{i,\,k} = 1, \tag{9}$$

то среди $I^{(2m+1)}_{i,\,0}$ должны иметься значения различных знаков. Приведем числовые значения $I^{(n)}_{i,\,k}$ для различных i, k и n. Каждый из коэффициентов $I^{(n)}_{i,\,k}$ является рациональной дробью. Для сокращения таблиц мы будем брать знаменатели этих дробей при фиксированном n одинаковыми и эти общие знаменатели указывать в последнем столбце. В предшествующих столбцах будут даны только числители.

$k = 0$ (формулы замкнутого типа):

n \ i	1	2	3	4	5	6	Знаменатели
2	1						2
3	1	4					6
4	1	3					8
5	7	32	12				90
6	19	75	50				288
7	41	216	27	272			840
8	751	3 577	1 323	2 989			17 280
9	989	5 888	— 928	10 496	— 4 540		28 350
10	2 857	15 741	1 080	19 344	5 778		89 600
11	16 067	106 300	— 48 525	272 400	— 260 550	427 368	598 752

$k = 1$ (формулы открытого типа):

n \ i	1	2	3	4	5	Знаменатели
2	1					2
3	2	— 1				3
4	11	1				24
5	11	— 14	26			20
6	611	— 453	562			1 440
7	460	— 954	2 196	— 2 459		945
8	1 787	— 2 803	4 967	— 1 711		4 480
9	4 045	— 11 690	33 340	— 55 070	67 822	9 072
10	2 752 447	— 6 603 199	— 15 673 880	— 17 085 616	8 891 258	7 257 600

2. Остаточные члены формул. Исследуем теперь остаточные члены формул Ньютона — Котеса. Как мы видели, они имеют вид:

$$R_{n,k}(f) = h \int_{1-k}^{n+k} (y-1)(y-2)\dots(y-n)\,F(y;\ 1;\ 2;\ \dots;\ n)\,dy. \quad (10)$$

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части. Возьмем сначала $n = 2m - 1$ и рассмотрим

$$\rho_{2m-1} = \int_{1-k}^{2m-1+k} (y-1)(y-2)\dots(y-2m+1) \times \times F(y;\ 1;\ 2;\ \dots;\ 2m-1)\,dy. \quad (11)$$

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \int_{1-k}^{x} (y-1)(y-2)\dots(y-2m+1)\,dy. \quad (12)$$

Очевидно, $\varphi(1-k) = 0$. Точно так же и $\varphi(2m-1+k) = 0$. В самом деле,

$$\varphi(2m-1+k) = \int_{1-k}^{2m-1+k} (y-1)(y-2)\dots(y-2m+1)\,dy.$$

Произведем замену переменных под знаком интеграла, положив

$$y = 2m - z.$$

Тогда

$$\varphi(2m-1+k) = -\int_{2m-1+k}^{1-k} (2m-z-1)(2m-z-2)\ldots(-z+1)\,dz =$$

$$= (-1)^{2m+1}\int_{1-k}^{2m-1+k} (z-1)(z-2)\ldots(z-2m+1)\,dz =$$

$$= -\varphi(2m-1+k).$$

Отсюда и следует утверждение. Покажем далее, что $\varphi(x)$ нигде не обращается в нуль на интервале $(0, 2m)$. Для этого исследуем сначала подынтегральную функцию

$$\psi(y) = (y-1)(y-2)\ldots(y-2m+1). \tag{13}$$

На отрезке $[0, 2m]$ она обращается в нуль в точках $1, 2, \ldots 2m-1$ и только в них. Она меняет знак при переходе через эти точки. Далее,

$$\psi(2m-y) = (2m-y-1)(2m-y-2)\ldots(2m-y-2m+1) =$$

$$= (-1)^{2m-1}\psi(y) = -\psi(y), \tag{14}$$

т. е. график этой функции центрально симметричен относительно точки $y=m$. Покажем, что абсолютные величины интегралов

$$I_i = \int_i^{i+1} \psi(y)\,dy$$

убывают, когда i возрастает от нуля до $m-1$. В самом деле,

$$I_{i+1} = \int_{i+1}^{i+2} \psi(y)\,dy.$$

Произведем замену $y = z+1$. Тогда

$$I_{i+1} = \int_i^{i+1} z(z-1)\ldots(z-2m+2)\,dz = \int_i^{i+1} \frac{y\psi(y)}{y-2m+1}\,dy.$$

Так как $\psi(y)$ не меняет знака на отрезке $[i, i+1]$, то

$$I_{i+1} = \frac{\xi}{\xi-2m+1}\int_i^{i+1} \psi(y)\,dy = \frac{\xi}{\xi-2m+1} I_i,$$

где $i < \xi < i+1$. Но

$$\left|\frac{\xi}{\xi-2m+1}\right| < \frac{m}{2m-1-m+1} = 1.$$

Итак,

$$|I_0| > |I_1| > \ldots > |I_{m-1}|$$

и

$$|I_0| = |I_{2m-1}|, \quad |I_1| = |I_{2m-2}|, \ldots$$

Отсюда и следует, что $\varphi(x) \neq 0$ при $x \in (1-k,\ 2m-1+k)$.

Вернемся к исследованию ρ_{2m-1}. Произведем в (11) интегрирование по частям. Получим:

$$\rho_{2m-1} = \varphi(y)\, F(y;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m-1)\Big|_{1-k}^{2m-1+k} - \int_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)\, \frac{d}{dy} F(y;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m-1)\, dy = - \int_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)\, F(y;\ y;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m-1)\, dy,$$

так как $\varphi(1-k) = \varphi(2m-1+k) = 0$, и

$$\frac{d}{dy} F(y;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m-1) = F(y;\ y;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m-1).$$

В силу знакопостоянства $\varphi(y)$ можно применить теорему о среднем. Поэтому

$$\rho_{2m-1} = -F(\xi;\ \xi;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m-1) \int_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)\, dy \qquad (15)$$

или после замены разделенной разности производной

$$\rho_{2m-1} = -\frac{F^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \int_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)\, dy. \qquad (16)$$

Рассмотрим теперь случай четного n, $n = 2m$. При этом

$$\rho_{2m} = \int_{1-k}^{2m+k} (y-1)(y-2)\ldots(y-2m)\, F(y;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m)\, dy. \qquad (17)$$

Разобьем последний интеграл на сумму двух интегралов:

$$\rho_{2m} = \int_{1-k}^{2m+k-1} (y-1)\ldots(y-2m)\, F(y;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m)\, dy + \int_{2m+k-1}^{2m+k} (y-1)\ldots(y-2m)\, F(y;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m)\, dy = S_1 + S_2. \qquad (18)$$

Заменим в S_1 произведение $(y-2m)F(y;\ 1;\ \ldots;\ 2m)$ на равное ему, в силу определения разделенных разностей, выражение

$$F(y;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m-1)-F(1;\ 2;\ \ldots;\ 2m).$$

При этом

$$S_1=\int_{1-k}^{2m+k-1}(y-1)\ldots(y-2m+1)F(y;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m-1)\,dy=\rho_{2m-1}, \tag{19}$$

так как

$$\int_{1-k}^{2m+k-1}F(1;\ 2;\ \ldots;\ 2m)(y-1)\ldots(y-2m+1)\,dy=$$
$$=F(1;\ 2;\ \ldots;\ 2m)\varphi(2m+k-1)=0.$$

К S_2 можно применить теорему о среднем, так как $(y-1)\ldots(y-2m)$ на отрезке $[2m+k-1,\ 2m+k]$ не меняет знака. Следовательно,

$$S_2=F(\xi;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 2m)\int_{2m+k-1}^{2m+k}(y-1)\ldots(y-2m)\,dy=$$
$$=\frac{F^{(2m)}(\xi_1)}{(2m)!}\int_{2m+k-1}^{2m+k}(y-1)\ldots(y-2m)\,dy. \tag{20}$$

Отсюда для ρ_{2m} получаем следующее выражение:

$$\rho_{2m}=\frac{F^{(2m)}(\xi_1)}{(2m)!}\int_{2m+k-1}^{2m+k}(y-1)(y-2)\ldots(y-2m)\,dy-$$
$$-\frac{F^{(2m)}(\xi_2)}{(2m)!}\int_{1-k}^{2m+k-1}\varphi(y)\,dy. \tag{21}$$

Это выражение можно преобразовать так, что оно будет содержать лишь одну производную $F^{(2m)}(\xi)$, что более выгодно при производстве оценок. Покажем, что

$$A_{1,\,k}=\int_{2m+k-1}^{2m+k}(y-1)\ldots(y-2m)\,dy \quad\text{и}\quad A_{2,\,k}=-\int_{1-k}^{2m+k-1}\varphi(y)\,dy$$

имеют одинаковые знаки. Рассмотрим два случая: $k=0$ и $k=1$. При $k=0$ имеем:

$$A_{1,0}=\int_{2m-1}^{2m}(y-1)(y-2)\ldots(y-2m)\,dy.$$

Подынтегральное выражение при $y\in(2m-1,\ 2m)$ отрицательно. Поэтому $A_{1,0}<0$. Рассмотрим

$$A_{2,0}=-\int_{1}^{2m-1}\varphi(y)\,dy.$$

Здесь

$$\varphi(y)=\int_{1}^{y}(z-1)(z-2)\ldots(z-2m+1)\,dz.$$

Мы уже знаем, что на интервале $(1,\ 2m-1)$ функция $\varphi(y)$ не меняет знака. Далее,

$$\psi(z)=(z-1)\ldots(z-2m+1)$$

на интервале $(1,\ 2)$ положительна. Следовательно, $\varphi(2)>0$, и поэтому $\varphi(y)>0$ при всех $y\in(1,\ 2m-1)$. Но тогда $A_{2,0}<0$, т. е. имеет такой же знак, что и $A_{1,0}$.

Пусть теперь $k=1$. Тогда

$$A_{1,1}=\int_{2m}^{2m+1}(y-1)(y-2)\ldots(y-2m)\,dy.$$

Так как подынтегральное выражение положительно при $y\in(2m,\ 2m+1)$, то $A_{1,1}>0$. Теперь

$$A_{2,1}=-\int_{0}^{2m}\varphi(y)\,dy.$$

Функция

$$\varphi(y)=\int_{0}^{y}(z-1)(z-2)\ldots(z-2m+1)\,dz$$

не меняет знака на интервале $(0,\ 2m)$. Но при $z\in(0,\ 1)$ подынтегральное выражение отрицательно. Следовательно, $\varphi(y)<0$ для всех $y\in(0,\ 2m)$. Но тогда $A_{2,1}>0$ и опять имеет такой же знак, что и $A_{1,1}$.

Воспользовавшись свойством производной принимать все промежуточные значения и тем, что $A_{1,\,k}$ и $A_{2,\,k}$ имеют одинаковые знаки, мы можем записать:

$$\rho_{2m} = (A_{1,\,k} + A_{2,\,k}) \frac{F^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} =$$

$$= \frac{F^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \left[\int_{2m+k-1}^{2m+k} (y-1) \dots (y-2m)\, dy - \int_{1-k}^{2m+k-1} \varphi(y)\, dy \right]. \quad (22)$$

Выразим теперь производные от функции $F(y)$ через производные от функции $f(x)$. Очевидно,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dy} f(a+hy) = hf'(x); \\ &\frac{d^2}{dy^2} f(a+hy) = h^2 f''(x), \dots, \frac{d^n}{dy^n} f(a+hy) = h^n f^{(n)}(x). \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Следовательно,

$$\rho_{2m-1} = -\frac{h^{2m} f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \int_{1-k}^{2m+k-1} \varphi(y)\, dy,$$

$$\rho_{2m} = \frac{h^{2m} f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \left[\int_{2m+k-1}^{2m+k} (y-1) \dots (y-2m)\, dy - \int_{1-k}^{2m+k-1} \varphi(y)\, dy \right]. \quad (24)$$

Окончательно получаем следующие формулы численного интегрирования с остаточными членами: при $n = 2m-1$

$$\int_c^d f(x)\, dx = (d-c) \sum_{i=1}^{2m-1} I_{i,\,k}^{(2m-1)} f(a+ih) -$$

$$- \frac{h^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \int_{1-k}^{2m+k-1} \varphi(y)\, dy, \quad h = \frac{d-c}{2m-2+2k} \quad (25)$$

и при $n = 2m$

$$\int_c^d f(x)\, dx = (d-c) \sum_{i=1}^{2m} I_{i,\,k}^{(2m)} f(a+ih) +$$

$$+ \frac{h^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \left[\int_{2m+k-1}^{2m+k} (y-1) \dots (y-2m)\, dy - \right.$$

$$\left. - \int_{1-k}^{2m+k-1} \varphi(y)\, dy \right], \quad h = \frac{d-c}{2m-1+2k}. \quad (26)$$

Приведем значения коэффициентов при производных в выражениях остаточных членов для различных значений n и k:

n	$k=0$	$k=1$
2	$-\frac{1}{12}h^3$	$\frac{3}{4}h^3$
3	$-\frac{1}{90}h^5$	$\frac{14}{45}h^5$
4	$-\frac{3}{80}h^5$	$\frac{95}{144}h^5$
5	$-\frac{8}{945}h^7$	$\frac{41}{140}h^7$
6	$-\frac{275}{12\,096}h^7$	$\frac{5\,257}{8\,640}h^7$
7	$-\frac{9}{1\,400}h^9$	$\frac{3\,956}{14\,175}h^9$
8	$-\frac{8\,183}{518\,400}h^9$	$\frac{25\,713}{44\,800}h^9$
9	$-\frac{2\,368}{467\,775}h^{11}$	$\frac{80\,335}{299\,376}h^{11}$
10	$-\frac{4\,671}{394\,240}h^{11}$	
11	$-\frac{673\,175}{163\,459\,296}h^{13}$	

Как видно из приведенной таблицы, формулы с нечетным числом ординат имеют, вообще говоря, преимущество в смысле точности.

3. Формула трапеций и формула Симпсона. Рассмотрим теперь подробнее формулы замкнутого типа при $n=2$ и 3. Ввиду важности этих формул мы независимо от предыдущего получим коэффициенты формулы и остаточные члены. При $n=2$ интерполяционный многочлен будет иметь первую степень. Таким образом, если перейти на геометрический язык, мы заменяем кривую $y=f(x)$ хордой, соединяющей конечные точки кривой (рис. 25).

Интеграл от интерполяционного многочлена даст площадь трапеции $ABCD$. Поэтому и соответствующая формула численного

интегрирования получила название *формулы трапеций*. Площадь трапеции $ABCD$, очевидно, равна

$$\frac{d-c}{2}[f(c)+f(d)].$$

Таким образом,

$$\int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{2}[f(c)+f(d)] + R_2(f). \tag{27}$$

Остаточный член будет иметь вид

$$R_2(f) = \int_c^d (x-c)(x-d)\,f(x;\,c;\,d)\,dx =$$

$$= \frac{f''(\eta)}{2!}\int_c^d (x-c)(x-d)\,dx = -\frac{(d-c)^3}{12}f''(\eta). \tag{28}$$

Погрешность формулы трапеций обычно бывает очень велика. Эту погрешность можно значительно снизить, если применять формулу трапеций не сразу ко всему отрезку $[c, d]$, а разбить его сначала на части и к каждой части в отдельности применить формулу трапеций. При этом надо стремиться разбивать на части так, чтобы интеграл от соответствующей вписанной ломаной был возможно более близким к интегралу от $f(x)$. В частности, если разбивать отрезок $[c, d]$ на m равных частей длины

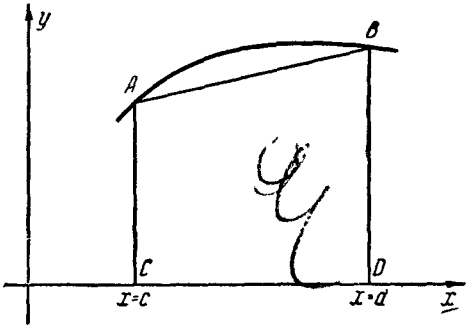

Рис. 25.

$h = \frac{d-c}{m}$ и обозначить через $y_0, y_1, \ldots, y_m$ последовательные ординаты, то получим:

$$\int_c^d f(x)\,dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{m-1} + y_m] -$$

$$- \frac{h^3}{12}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \ldots + f''(\xi_m)],$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Выражение во второй квадратной скобке равно $mf''(\xi)$ $(c < \xi < d)$. Поэтому наша формула может быть записана так:

$$\int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{2m}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{m-1} + y_m] -$$

$$- \frac{(d-c)^3}{12m^2}f''(\xi). \tag{29}$$

Назовем эту формулу *обобщенной формулой трапеций*. Если подынтегральная функция вычисляется несложно, то, взяв достаточно большое m, мы несложными вычислениями получим достаточно точное значение интеграла.

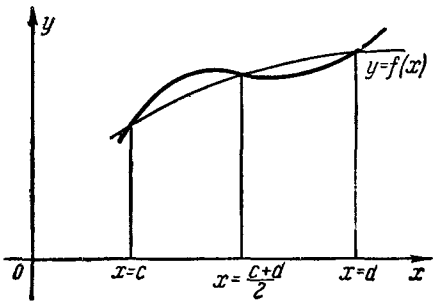

Рис. 26.

Возьмем теперь $n = 3$. В этом случае узлами интерполирования будут являться точки c, $\frac{c+d}{2}$, d. Интерполяционный многочлен будет иметь вторую степень. Выражаясь геометрически, мы проводим параболу через конечные и среднюю точки кривой (рис. 26). Уравнением этой параболы будет

$$P_2(x) = \frac{\left(x - \frac{c+d}{2}\right)(x-d)}{\left(c - \frac{c+d}{2}\right)(c-d)} f(c) + \frac{(x-c)(x-d)}{\left(\frac{c+d}{2} - c\right)\left(\frac{c+d}{2} - d\right)} f\left(\frac{c+d}{2}\right) + \\ + \frac{(x-c)\left(x - \frac{c+d}{2}\right)}{(d-c)\left(d - \frac{c+d}{2}\right)} f(d).$$

Интегрирование дает

$$\int_c^d P_2(x)\,dx = \frac{d-c}{6}\left[f(c) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f(d)\right].$$

Таким образом,

$$\int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{6}\left[f(c) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f(d)\right] + R_3(f). \qquad (30)$$

Для отыскания остаточного члена построим интерполяционный многочлен Эрмита, совпадающий с $f(x)$ в точках c, $\frac{c+d}{2}$ и d и имеющий в точке $\frac{c+d}{2}$ производную, равную $f'\left(\frac{c+d}{2}\right)$. Этот многочлен $H_3(x)$ можно записать в виде

$$H_3(x) = P_2(x) + K(x-c)\left(x - \frac{c+d}{2}\right)(x-d),$$

где K — соответствующая постоянная. Тогда

$$f(x)=P_2(x)+K(x-c)\left(x-\frac{c+d}{2}\right)(x-d)+$$
$$+(x-c)\left(x-\frac{c+d}{2}\right)^2(x-d)\,f\left(x;\ c;\ \frac{c+d}{2};\ \frac{c+d}{2}d\right).$$

Заметим, что

$$\int_c^d (x-c)\left(x-\frac{c+d}{2}\right)(x-d)\,dx=0.$$

Поэтому остаточный член нашей формулы численного интегрирования будет равен

$$R_3(f)=\int_c^d (x-c)\left(x-\frac{c+d}{2}\right)^2(x-d)\,f\left(x;\ c;\ \frac{c+d}{2};\ \frac{c+d}{2}d\right)dx.$$

Здесь применима теорема о среднем, так как $(x-c)\left(x-\frac{c+d}{2}\right)^2(x-d)$ не меняет знака на $[c,\ d]$. Поэтому

$$R_3(f)=\frac{f^{(\mathrm{IV})}(\eta)}{4!}\int_c^d (x-c)\left(x-\frac{c+d}{2}\right)^2(x-d)\,dx=-\frac{(d-c)^5 f^{(\mathrm{IV})}(\eta)}{2^5\cdot 90}.$$

Итак,

$$\int_c^d f(x)\,dx=\frac{d-c}{6}\left[f(c)+4f\left(\frac{c+d}{2}\right)+f(d)\right]-\left(\frac{d-c}{2}\right)^5\frac{f^{(\mathrm{IV})}(\eta)}{90}. \quad (31)$$

Мы получили *формулу Симпсона*. Формула Симпсона также может быть применена не сразу ко всему отрезку, а к отдельным частям его. Требования к выбору этих частей таковы же, как и в предыдущем случае. Если, в частности, мы разобьем $[c,\ d]$ на $2m$ равных отрезков, то получим:

$$\int_c^d f(x)\,dx=\frac{d-c}{6m}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ \dots$$
$$\dots+4y_{2m-1}+y_{2m}]-\left(\frac{d-c}{2}\right)^5\frac{f^{(\mathrm{IV})}(\eta)}{90m^4}. \quad (32)$$

Это — *обобщенная формула Симпсона*. Коэффициенты этой формулы немногим сложнее коэффициентов формулы трапеций, но точность существенно больше.

Приведем пример на вычисления по полученным нами формулам численного интегрирования.

Пример. Вычислить

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}=0{,}78539816$$

по обобщенной формуле трапеций, по обобщенной формуле Симпсона и по формуле Ньютона — Котеса, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

В данном случае

$$y_0=1,\ y_1=0{,}99009900,\ y_2=0{,}96158846,\ y_3=0{,}91743119,$$
$$y_4=0{,}86206896,\ y_5=0{,}8,\ y_6=0{,}73529411,\ y_7=0{,}67114093,$$
$$y_8=0{,}60975609,\ y_9=0{,}55248618,\ y_{10}=0{,}5.$$

Коэффициенты формулы Котеса при $n=10$ равны

$$I^{(11)}_{1,0}=I^{(11)}_{11,0}=0{,}026834148,\quad I^{(11)}_{2,0}=I^{(11)}_{10,0}=0{,}17753594,$$
$$I^{(11)}_{3,0}=I^{(11)}_{9,0}=-0{,}08104357,\quad I^{(11)}_{4,0}=I^{(11)}_{8,0}=0{,}45494628,$$
$$I^{(11)}_{5,0}=I^{(11)}_{7,0}=-0{,}43515512,\quad I^{(11)}_{6,0}=0{,}71376463.$$

Вычисления по обобщенной формуле трапеций дают:

$$I\approx\frac{1}{20}[y_0+2y_1+2y_2+\ \dots\ +2y_9+y_{10}]=0{,}78498149.$$

По обобщенной формуле Симпсона получим:

$$I\approx\frac{1}{30}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ \dots\ +4y_9+y_{10}]=0{,}78539815.$$

По формуле Ньютона — Котеса будем иметь:

$$I\approx I^{(11)}_{1,0}y_0+I^{(11)}_{2,0}y_1+\ \dots\ +I^{(11)}_{11,0}y_{10}=0{,}78539818.$$

Вычисления по формуле Ньютона — Котеса и формуле Симпсона дали примерно одинаковую точность, но работы по последней формуле было значительно больше.

Оценим остаточные члены каждой из формул. Функция

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

является производной от $y=\operatorname{arc\,tg} x$. Найдем производные от этой функции через производные обратной функции. Получим:

$$x=\operatorname{tg} y;\quad y'=\frac{1}{x'}=\cos^2 y,\quad y''=-2\cos y\sin y\cdot y'=-2\cos^3 y\sin y.$$

Запишем эти производные в несколько иной форме:

$$y'=\cos y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right),\quad y''=\cos^2 y\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

По индукции можно получить:

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда остаточный член обобщенной формулы трапеций будет оцениваться следующим образом:

$$|R(f)| \leqslant \frac{2}{12 \cdot 100} = \frac{1}{600} = 0{,}00166\ldots$$

Для формулы Симпсона будем иметь:

$$|R(f)| \leqslant \frac{4!}{2^5 \cdot 90 \cdot 5^4} = \frac{24}{180 \cdot 10^4} = 0{,}0000133.$$

Для формулы Ньютона — Котеса получим:

$$|R(f)| \leqslant \frac{4671 \cdot 10^1}{394\,240 \cdot 10^{11}} \approx 0{,}0000004.$$

Наши оценки, естественно, дали завышенные погрешности.

§ 5. Формулы численного интегрирования Гаусса

1. Построение формул. Абсциссы формул Гаусса. В предыдущем параграфе мы получили формулы численного интегрирования путем замены подынтегральной функции алгебраическим интерполяционным многочленом с равноотстоящими узлами интерполирования. Можно ожидать, что, избавившись от последнего требования, мы можем получить формулы, обладающие теми или иными преимуществами. В этом параграфе мы будем получать формулы, дающие возможно большую точность. Прежде всего надо условиться, что́ мы будем понимать под точностью формулы численного интегрирования. При замене подынтегральной функции алгебраическим интерполяционным многочленом, построенным по n узлам интерполяции, мы получим такую формулу численного интегрирования, для которой остаточный член обращается в нуль, если подынтегральная функция является произвольным многочленом степени не выше $n-1$. Как мы видели, в случае формул Ньютона — Котеса с нечетным числом ординат остаточный член обращается в нуль, если подынтегральная функция является произвольным многочленом степени n. Может оказаться, что при каком-то другом расположении узлов эта степень еще может быть повышена. При использовании одинакового числа узлов будем считать ту формулу численного интегрирования более точной, для которой эта степень будет больше. Это определение точности формул численного интегрирования несколько условно, так как могут быть такие случаи, что менее точная в нашем понимании формула даст более точный результат. Но мы получаем все же какую-то характеристику точности.

Наши формулы численного интегрирования будут иметь вид

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = C_1^{(n)} f(x_1) + C_2^{(n)} f(x_2) + \ldots + C_n^{(n)} f(x_n) + R(f). \quad (1)$$

Здесь $p(x) > 0$ — фиксированная весовая функция, $C_i^{(n)}$ — постоянные коэффициенты, не зависящие от функции $f(x)$, $R(f)$ — остаточный член.

Если $R(f)$ обращается в нуль, когда

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m, \quad (2)$$

где коэффициенты a_i произвольны, то

$$a_0 \int_a^b p(x)\,dx + a_1 \int_a^b p(x)\,x\,dx + a_2 \int_a^b p(x)\,x^2\,dx + a_m \int_a^b p(x)\,x^m\,dx =$$

$$= c_1 \left[a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_m x_1^m\right] +$$

$$+ c_2 \left[a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_2^m\right] +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ c_n \left[a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_m x_n^m\right]. \quad (2')$$

Обозначим

$$\int_a^b p(x)\,x^k\,dx = \mu_k. \quad (3)$$

Эти величины целиком определятся выбором весовой функции и отрезка интегрирования. В силу произвольности a_i равенство (2) будет эквивалентно следующим:

$$\left.\begin{aligned} c_1^{(n)} + c_2^{(n)} + \ldots + c_n^{(n)} &= \mu_0, \\ c_1^{(n)} x_1 + c_2^{(n)} x_2 + \ldots + c_n^{(n)} x_n &= \mu_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_1^{(n)} x_1^m + c_2^{(n)} x_2^m + \ldots + c_n^{(n)} x_n^m &= \mu_n. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Получили систему $m+1$ уравнений для определения $2n$ неизвестных величин $c_i^{(n)}$ и x_i. Отсюда следует, что максимальное значение для m будет $m = 2n - 1$. Правда, остается еще неясным, разрешима ли будет при этом система, будут ли ее решения действительными и будут ли все x_i принадлежать отрезку $[a, b]$. Непосредственное исследование системы слишком громоздко, и мы пойдем по другому пути.

Будем отыскивать многочлен

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n), \tag{5}$$

где x_i — искомые абсциссы. Оказывается, $\omega_n(x)$ удовлетворяет довольно несложному необходимому и достаточному условию, которое позволяет во многих случаях его явно определить. Покажем, что

$$\int_a^b p(x)\,\omega_n(x)\,q(x)\,dx = 0, \tag{6}$$

если $q(x)$ — произвольный многочлен степени не выше $n-1$. Действительно,

$$f(x) = \omega_n(x)\,q(x)$$

является многочленом степени не выше $2n-1$. Следовательно, $R(f) = 0$. Таким образом,

$$\int_a^b p(x)\,\omega_n(x)\,q(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)}\omega_n(x_i)\,q(x_i) = 0,$$

так как $\omega_n(x_i) = 0$.

Обратно, если мы найдем такой многочлен $\omega_n(x)$ степени n, что

$$\int_a^b p(x)\,\omega_n(x)\,q(x)\,dx = 0,$$

когда $q(x)$ — произвольный многочлен степени не выше $n-1$, и корни этого многочлена примем за узлы интерполирования, то в полученной при этом формуле численного интегрирования $R(f)$ будет обращаться в нуль, когда f является произвольным многочленом степени не выше $2n-1$.

Действительно, пусть $f(x)$ является таким многочленом. Тогда

$$f(x) = \omega_n(x)\,q(x) + r(x),$$

где $q(x)$ и $r(x)$ — многочлены степени не выше $n-1$. Отсюда

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,\omega_n(x)\,q(x)\,dx + \int_a^b p(x)\,r(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,r(x)\,dx$$

в силу нашего предположения. Но

$$\int_a^b p(x)\,r(x)\,dx = c_1^{(n)}r(x_1) + c_2^{(n)}r(x_2) + \ldots + c_n^{(n)}r(x_n),$$

так как $r(x)$ как многочлен степени не выше $n-1$ совпадает со своим интерполяционным многочленом, построенным по узлам x_1, x_2, ..., x_n. Кроме того,

$$f(x_i) = \omega_n(x_i)\, q(x_i) + r(x_i) = r(x_i).$$

Таким образом,

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)} f(x_i)$$

и $R(f) = 0$, что и требовалось доказать.

В главе 5 мы покажем способы построения системы ортогональных многочленов при произвольных $p(x)$. В этой главе мы найдем общий вид $\omega_n(x)$ при $p(x) = 1$. Обозначив

$$\int_a^x \omega_n(x)\, dx = \varphi_1(x),$$

$$\int_a^x \varphi_1(x)\, dx = \varphi_2(x), \ \ldots, \ \int_a^x \varphi_{n-1}(x)\, dx = \varphi_n(x), \tag{7}$$

будем вычислять интеграл

$$\int_a^b \omega_n(x)\, q(x)\, dx,$$

где $q(x)$ — произвольный многочлен степени не выше $n-1$, путем последовательного применения формулы интегрирования по частям. Будем иметь:

$$0 = \int_a^b \omega_n(x)\, q(x)\, dx =$$

$$= \left[\varphi_1(x)\, q(x) - \varphi_2(x)\, q'(x) + \ldots + (-1)^{n-1} \varphi_n(x)\, q^{(n-1)}(x)\right]_{x=a}^{x=b}.$$

При $x = a$ правая часть равна нулю, так как $\varphi_i(a) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда следует в силу произвольности $q(x)$, что

$$\varphi_1(b) = \varphi_2(b) = \ldots = \varphi_n(b) = 0. \tag{8}$$

Итак, $\varphi_n(x)$ обладает корнями кратности n при $x = a$ и $x = b$ Следовательно,

$$\varphi_n(x) = C(x-a)^n (x-b)^n, \tag{9}$$

где C — какая-то постоянная. Отсюда

$$\omega_n(x) = C \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n (x-b)^n\right].$$

C подбирается из того условия, что коэффициент при x^n в $\omega_n(x)$ равен 1. Легко видеть, что

$$C = \frac{n!}{(2n)!}.$$

Окончательно получаем:

$$\omega_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n]. \tag{10}$$

Последовательное применение теоремы Ролля показывает, что все корни уравнения

$$\omega_n(x) = 0$$

действительны, различны и заключены в интервале (a, b). Таким образом, их действительно можно использовать в качестве узлов интерполяции и полученная при этом формула численного интегрирования будет удовлетворять поставленным условиям. В главе 5 будет показано, что и при произвольном весе $p(x)$ многочлены $\omega_n(x)$ будут иметь n действительных различных корней, принадлежащих интервалу (a, b).

2. Остаточный член формул Гаусса. Исследуем теперь остаточный член полученных формул численного интегрирования. Пусть $f(x)$ — произвольная, достаточное количество раз дифференцируемая функция. Построим интерполяционный многочлен Эрмита, принимающий в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (корнях $\omega_n(x) = 0$) значения $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ и имеющий в этих точках производные, равные соответственно $f'(x_1), f'(x_2), \ldots, f'(x_n)$. Если обозначить этот многочлен через $H(x)$, то

$$f(x) = H(x) + (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \ldots$$
$$\ldots (x-x_n)^2 f(x; x_1; x_1; x_2; x_2; \ldots; x_n; x_n). \tag{11}$$

Многочлен $H(x)$ имеет степень $2n-1$. Следовательно,

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = \int_a^b p(x)H(x)\,dx +$$
$$+ \int_a^b p(x)\omega_n^2(x)f(x; x_1; x_1; x_2; x_2; \ldots; x_n; x_n)\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^n c_i^{(n)} H(x_i) + \int_a^b p(x)\omega_n^2(x)f(x; x_1; x_1; x_2; x_2; \ldots; x_n; x_n)\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^n c_i^{(n)} f(x_i) + \int_a^b p(x)\omega_n^2(x)f(x; x_1; x_1; x_2; x_2; \ldots; x_n; x_n)\,dx. \tag{12}$$

Таким образом, остаточный член будет иметь вид

$$R(f)=\int_a^b p(x)\,\omega_n^2(x)\,f(x; x_1; x_1; x_2; x_2; \ldots; x_n; x_n)\,dx. \qquad (13)$$

Так как $p(x)\,\omega_n^2(x)$ не меняет знака на $[a, b]$, то

$$R(f)=f(\xi; x_1; x_1; x_2; x_2; \ldots; x_n; x_n)\int_a^b p(x)\,\omega_n^2(x)\,dx=$$

$$=\frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\int_a^b p(x)\,\omega_n^2(x)\,dx, \quad (\xi,\ \eta\in(a, b)).$$

И в этом случае при $p(x)\equiv 1$ можно упростить выражение для интеграла, стоящего в правой части. Будем иметь:

$$\int_a^b \omega_n(x)\,\omega_n(x)\,dx=-\int_a^b \varphi_1(x)\,\omega_n'(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b \varphi_2(x)\,\omega_n''(x)\,dx=\ \ldots\ =(-1)^n\int_a^b \varphi_n(x)\,\omega_n^{(n)}(x)\,dx=$$

$$=(-1)^n n!\int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Далее, снова применяя последовательное интегрирование по частям, получим:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx=\frac{n!}{(2n)!}\int_a^b (x-a)^n(x-b)^n\,dx=$$

$$=-\frac{n!\,n}{(2n)!}\int_a^b \frac{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}{n+1}\,dx=\ \ldots\ =$$

$$=(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\int_a^b \frac{(x-a)^{2n}}{(n+1)\ldots 2n}\,dx=\frac{(-1)^n(n!)^3(b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2(2n+1)}.$$

Итак, при $p(x)\equiv 1$

$$R(f)=(-1)^n n!\,(-1)^n\frac{(n!)^3(b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2(2n+1)}\frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}=$$

$$=\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)}f^{(2n)}(\xi). \qquad (14)$$

3. Коэффициенты формул Гаусса. Найдем теперь выражения для коэффициентов при $f(x_i)$, полученных формул численного интегрирования. Для этого рассмотрим функцию

$$\psi_{k,\,n}(x)=\frac{\omega_n(x)}{x-x_k}.$$

Квадрат этой функции является многочленом степени $2n-2$. Следовательно,

$$\int_a^b p(x)\,\psi_{k,\,n}^2(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}c_i^{(n)}\psi_{k,\,n}^2(x_i)=c_k^{(n)}\psi_{k,\,n}^2(x_k).$$

Отсюда

$$c_k^{(n)}=\frac{\int_a^b p(x)\,\psi_{k,\,n}^2(x)\,dx}{\psi_{k,\,n}^2(x_k)}=\frac{\int_a^b p(x)\,\psi_{k,\,n}^2(x)\,dx}{\omega_n'^2(x_k)}. \tag{15}$$

Отметим здесь же, что все $c_k^{(n)}$ положительны.

При $p(x)\equiv 1$ можно получить более удобные выражения для $c_k^{(n)}$. Для этого применим к числителю правило интегрирования по частям. Будем иметь:

$$\int_a^b \psi_{k,\,n}^2(x)\,dx=\int_a^b\frac{\omega_n^2(x)\,dx}{(x-x_k)^2}=\left[-\frac{\omega_n^2(x)}{x-x_k}\right]_{x=a}^{x=b}+$$

$$+2\int_a^b\frac{\omega_n(x)\,\omega_n'(x)\,dx}{x-x_k}=\frac{\omega_n^2(a)}{a-x_k}-\frac{\omega_n^2(b)}{b-x_k}+$$

$$+2\int_a^b\frac{\omega_n(x)\,\omega_n'(x)}{x-x_k}\,dx.$$

Подсчитаем значения $\omega_n^2(a)$ и $\omega_n^2(b)$. По формуле Лейбница имеем:

$$\omega_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n(x-b)^n\right]=$$

$$=\frac{n!}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{d^k}{dx^k}\left[(x-a)^n\right]\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[(x-b)^n\right].$$

Отсюда

$$\omega_n(a)=\frac{n!}{(2n)!}\,n!\,(a-b)^n=(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,(b-a)^n$$

и

$$\omega_n(b)=\frac{n!}{(2n)!}\,n!\,(b-a)^n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,(b-a)^n.$$

Таким образом,

$$\frac{\omega_n^2(a)}{a-x_k}-\frac{\omega_n^2(b)}{b-x_k}=\frac{(n!)^4(b-a)^{2n}}{[(2n)!]^2}\left[\frac{1}{x_k-b}-\frac{1}{x_k-a}\right]=$$

$$=\frac{(n!)^4(b-a)^{2n+1}}{(x_k-a)(x_k-b)[(2n)!]^2}.$$

Функция

$$\frac{\omega_n(x)\,\omega_n'(x)}{x-x_k}$$

является многочленом степени $2n-2$. Поэтому

$$2\int_a^b\frac{\omega_n(x)\,\omega_n'(x)}{x-x_k}\,dx=2\sum_{i=1}^{n}c_i^{(n)}\frac{\omega_n(x_i)\,\omega_n'(x_i)}{x_i-x_k}=2c_k^{(n)}\omega_n'^2(x_k).$$

Итак,

$$c_k^{(n)}\omega_n'^2(x_k)=\int_a^b\psi_{k,n}^2(x)\,dx=\frac{(n!)^4(b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2(x_k-a)(x_k-b)}+2c_k^{(n)}\omega_n'^2(x_k).$$

Отсюда

$$c_k^{(n)}=\frac{(n!)^4(b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2(x_k-a)(b-x_k)\,\omega_n'^2(x_k)}. \tag{16}$$

Это и есть искомые выражения для коэффициентов $c_k^{(n)}$.

Произведем в $\varphi_n(x)$ замену x на $\frac{b+a}{2}+y$. Получим:

$$\varphi_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\left[y^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]^n,$$

т. е. $\varphi_n(x)$ симметрична относительно прямой $x=\frac{a+b}{2}$. Отсюда следует, что и корни уравнения $\omega_n(x)=0$ будут симметричны относительно точки $x=\frac{a+b}{2}$. Но тогда, если занумеровать их в порядке возрастания

$$x_1<x_2<\ldots<x_n,$$

то получим:

$$(x_k-a)(x_k-b)\,\omega_n'^2(x_k)=(x_{n-k+1}-a)(x_{n-k+1}-b)\,\omega_n'^2(x_{n-k+1}).$$

Следовательно,

$$c_k^{(n)}=c_{n-k+1}^{(n)}, \tag{17}$$

т. е. коэффициенты при $f(x_k)$ и $f(x_{n-k+1})$ будут совпадать.

Полученные здесь формулы численного интегрирования были впервые найдены Гауссом. Поэтому мы будем называть их *формулами Гаусса.*

Было бы невыгодно каждый раз, как нам нужно использовать формулу численного интегрирования Гаусса, заново находить $\omega_n(x)$, вычислять корни уравнения $\omega_n(x)=0$ и подсчитывать коэффициенты $c_k^{(n)}$. Для случая $p(x)\equiv 1$ и отрезка интегрирования $[-1, 1]$ такие вычисления были произведены для различных n. Произвольный отрезок $[a, b]$ может быть приведен к отрезку $[-1, 1]$ простой заменой переменной интегрирования:

$$x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t.$$

Приведем некоторые значения коэффициентов $c_k^{(n)}$ и абсцисс для формул численного интегрирования

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)} f(x_i)+\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)} f^{(2n)}(\xi).$$

$n=1$:

$$x_1=0,\quad \frac{1}{2}c_1^{(1)}=1,\quad R_1=\frac{1}{3}f''(\xi);$$

$n=2$:

$$-x_1=x_2=0{,}577\ 350\ 269\ 189\ 6258,\quad \frac{1}{2}c_1^{(2)}=\frac{1}{2}c_2^{(2)}=\frac{1}{2},$$

$$R_2=\frac{1}{135}f^{(4)}(\xi);$$

$n=3$:

$$-x_1=x_3=0{,}774\ 596\ 669\ 241\ 4834,\quad x_2=0,$$

$$\frac{1}{2}c_1^{(3)}=\frac{1}{2}c_3^{(3)}=\frac{5}{18},\quad \frac{1}{2}c_2^{(3)}=\frac{4}{9},\quad R_3=\frac{1}{15\,750}f^{(6)}(\xi);$$

$n=4$:

$$-x_1=x_4=0{,}861\ 136\ 311\ 594\ 0492,$$

$$-x_2=x_3=0{,}339\ 981\ 043\ 584\ 8646,$$

$$\frac{1}{2}c_1^{(4)}=\frac{1}{2}c_4^{(4)}=0{,}173\ 927\ 422\ 568\ 7284,$$

$$\frac{1}{2}c_2^{(4)}=\frac{1}{2}c_3^{(4)}=0{,}326\ 072\ 577\ 431\ 2716,$$

$$R_4=\frac{1}{3\,472\,875}f^{(8)}(\xi);$$

$n=5$:

$$-x_1=x_5=0{,}906\ 179\ 845\ 938\ 6640$$

$$-x_2=x_4=0{,}538\ 469\ 310\ 105\ 6830,\quad x_3=0$$

$$\frac{1}{2}c_1^{(5)}=\frac{1}{2}c_5^{(5)}=0{,}118\ 463\ 442\ 528\ 0945$$

$$\frac{1}{2}c_2^{(5)}=\frac{1}{2}c_4^{(5)}=0{,}239\ 314\ 335\ 249\ 6832$$

$$\frac{1}{2}c_3^{(5)}=\frac{64}{225}=0{,}284\ 444\ 444\ 444\ 4444$$

$$R_5=\frac{1}{1\,237\,732\,650}f^{(10)}(\xi);$$

$n=6$:

$$-x_1=x_6=0{,}932\ 469\ 514\ 203\ 1520$$

$$-x_2=x_5=0{,}661\ 209\ 386\ 466\ 2644$$

$$-x_3=x_4=0{,}238\ 619\ 186\ 083\ 1970$$

$$\frac{1}{2}c_1^{(6)}=\frac{1}{2}c_6^{(6)}=0{,}085\ 662\ 246\ 189\ 5852$$

$$\frac{1}{2}c_2^{(6)}=\frac{1}{2}c_5^{(6)}=0{,}180\ 380\ 786\ 524\ 0693$$

$$\frac{1}{2}c_3^{(6)}=\frac{1}{2}c_4^{(6)}=0{,}233\ 956\ 967\ 286\ 3455$$

$$R_6=\frac{1}{648\,984\,486\,150}f^{(12)}(\xi);$$

$n=7$:

$$-x_1=x_7=0{,}949\ 107\ 912\ 342\ 7596$$

$$-x_2=x_6=0{,}741\ 531\ 185\ 599\ 3944$$

$$-x_3=x_5=0{,}405\ 845\ 151\ 377\ 3970,\quad x_4=0$$

$$\frac{1}{2}c_1^{(7)}=\frac{1}{2}c_7^{(7)}=0{,}064\ 742\ 483\ 084\ 4348$$

$$\frac{1}{2}c_2^{(7)}=\frac{1}{2}c_6^{(7)}=0{,}139\ 852\ 695\ 744\ 6384$$

$$\frac{1}{2}c_3^{(7)}=\frac{1}{2}c_5^{(7)}=0{,}190\ 915\ 025\ 252\ 5595$$

$$\frac{1}{2}c_4^{(7)}=\frac{256}{1225}=0{,}208\ 979\ 591\ 836\ 7347$$

$$R_7=\frac{1}{470\,050\,192\,111\,500}f^{(14)}(\xi).$$

Как видно из этой таблицы, коэффициенты $c_k^{(n)}$ и абсциссы x_i очень громоздки. Поэтому формулы Гаусса следует применять в тех случаях, когда требуется большая точность и значения функции при большом числе аргументов получить затруднительно.

4. Формула численного интегрирования Эрмита. Если взять в качестве $p(x)$ функцию

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{18}$$

и в качестве отрезка интегрирования отрезок $[-1, +1]$, то получим формулу численного интегрирования

$$\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sum_{i=1}^{n}c_i^{(n)}f(x_i)+R(f). \tag{19}$$

Если x_i являются корнями многочлена $\omega_n(x)$, ортогонального с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ произвольному многочлену $q(x)$ степени $\leqslant n-1$, то $R(f)$ обращается в нуль, когда $f(x)$ является произвольным многочленом степени $\leqslant 2n-1$. Как будет показано в главе 5, в качестве $\omega_n(x)$ можно взять

$$\omega_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x), \tag{20}$$

т. е. многочлены Чебышева, о которых говорилось в предыдущей главе. Следовательно,

$$x_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{21}$$

и

$$c_i^{(n)}=\int_{-1}^{+1}\frac{\omega_n(x)\,dx}{(x-x_i)\,\omega_n'(x_i)\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(x)}{(x-x_i)\,T_n'(x_i)\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{22}$$

Для $c_i^{(n)}$ можно найти числовые значения. Для этого произведем под знаком интеграла замену переменного, положив $x=\cos\theta$. Получим:

$$c_i^{(n)}=\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta\,d\theta}{(\cos\theta-\cos\theta_i)\,T_n'(\cos\theta_i)}.$$

Но

$$T_n'(\cos\theta_i)=\frac{n\sin n\theta_i}{\sqrt{1-\cos^2\theta_i}}=\frac{n\sin n\theta_i}{\sin\theta_i},$$

а

$$\frac{\cos n\theta}{\cos\theta-\cos\theta_i}=B_0+B_1\cos\theta+B_2\cos 2\theta+\ldots+B_{n-1}\cos(n-1)\theta,$$

так как левая часть последнего равенства является четной функцией θ и числитель ее обязан делиться на знаменатель нацело, ибо $T_n(x)$ делится на $x - x_k$. Отсюда

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_i}\, d\theta = \pi B_0.$$

Чтобы найти B_0 в предпоследнем равенстве, положим там

$$\theta = \theta_i,\quad \theta_i + \frac{2\pi}{n},\quad \theta_i + 2\frac{2\pi}{n},\quad \ldots,\quad \theta_i + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

и воспользуемся соотношениями

$$\frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_i}\Big|_{\theta=\theta_i} = \frac{\cos' n\theta}{\cos'\theta}\Big|_{\theta=\theta_i} = \frac{n\sin n\theta_i}{\sin\theta_i};\quad \frac{\cos n\left(\theta_i + k\frac{2\pi}{n}\right)}{\cos\left(\theta_i + k\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\theta_i} =$$

$$= \frac{\cos[n\theta_i + 2k\pi]}{\cos\left(\theta_i + k\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\theta_i} = 0.$$

Получим:

$$B_0 + B_1\cos\theta_i + B_2\cos 2\theta_i + \ldots + B_{n-1}\cos(n-1)\theta_i = \frac{n\sin n\theta_i}{\sin\theta_i},$$

$$B_0 + B_1\cos\left(\theta_i + \frac{2\pi}{n}\right) + B_2\cos 2\left(\theta_i + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + B_{n-1}\cos(n-1)\left(\theta_i + \frac{2\pi}{n}\right) = 0,$$

. . . . . .

$$B_0 + B_1\cos\left[\theta_i + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right] + B_2\cos 2\left[\theta_i + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right] + \ldots$$

$$\ldots + B_{n-1}\cos(n-1)\left[\theta_i + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right] = 0.$$

Складывая эти равенства, будем иметь:

$$nB_0 = \frac{n\sin n\theta_i}{\sin\theta_i} \quad \text{и} \quad B_0 = \frac{\sin n\theta_i}{\sin\theta_i},$$

так как

$$\sum_{j=0}^{n-1}\cos k\left(\theta_i + j\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{k\pi}{n}}\sum_{j=0}^{n-1} 2\cos k\left(\theta_i + j\frac{2\pi}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{k\pi}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\sin k\left[\theta_i + \frac{(2j+1)\pi}{n}\right] - \sin k\left[\theta_i + \frac{(2j-1)\pi}{n}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{k\pi}{n}}\left\{\sin k\left[\theta_i + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right] - \sin k\left[\theta_i - \frac{\pi}{n}\right]\right\} = 0$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Отсюда

$$c_i^{(n)} = \frac{\pi B_0}{T_n'(x_i)} = \frac{\pi}{n}. \tag{23}$$

Получили формулу численного интегрирования

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)\,dx}{2^{2n-2}\sqrt{1-x^2}},$$

$$x_i = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi. \tag{24}$$

Остаточный член может быть упрощен, если воспользоваться результатами главы 5:

$$R(f) = \frac{\pi}{(2n)!\,2^{n-1}} f^{(2n)}(\xi). \tag{25}$$

Эта формула является частным случаем формул Гаусса и носит название *формулы Эрмита.*

5. Формулы численного интегрирования Маркова. Если пользоваться классификацией, приведенной в предыдущем параграфе, то формулы численного интегрирования Гаусса следует отнести к формулам открытого типа, так как концы отрезка интегрирования не принадлежат к числу узлов. А. А. Марков рассмотрел формулы численного интегрирования, для которых $R(f)$ обращается в нуль, когда $f(x)$ является произвольным многочленом степени $\leqslant 2n-2$ при дополнительном требовании, что либо $x_1 = a$, либо $x_n = b$, и формулы численного интегрирования, для которых $R(f)$ обращается в нуль, когда $f(x)$ является произвольным многочленом степени $\leqslant 2n-3$ при дополнительном требовании, что $x_1 = a$ и $x_n = b$.

Рассмотрим сначала первый случай. Обозначим через $\theta_n(x)$ многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, корни которого равны искомым узлам. Рассуждениями, как и при выводе формул Гаусса, покажем, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\theta_n(x)$ удовлетворял поставленным условиям, будет

$$\int_a^b p(x)\,\theta_n(x)\,q(x)\,dx = 0, \tag{26}$$

где $q(x)$ — произвольный многочлен степени $\leqslant n-2$. Отсюда

$$\int_a^b p(x)\,[\theta_n(x) - \omega_n(x)]\,q(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,\theta_n(x)\,q(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,\omega_n(x)\,q(x)\,dx = 0.$$

Поэтому $\theta_n(x) - \omega_n(x)$ может лишь постоянным множителем отличаться от $\omega_{n-1}(x)$:

$$\theta_n(x) - \omega_n(x) = \alpha_n \omega_{n-1}(x).$$

Для получения постоянной α_n положим в этом равенстве $x = a$. Получим:

$$\alpha_n = -\frac{\omega_n(a)}{\omega_{n-1}(a)}.$$

Итак,

$$\theta_n(x) = \omega_n(x) + \alpha_n \omega_{n-1}(x). \tag{27}$$

И в этом случае $\theta_n(x)$ имеет n действительных корней, один из которых равен a, а остальные расположены между a и b. Доказательство полностью совпадает с тем, которое проводится в главе 5 для $\omega_n(x)$.

Для отыскания коэффициентов $D_i^{(n)}$ формулы численного интегрирования возьмем в качестве $f(x)$ функцию

$$f(x) = \frac{\theta_n(x)}{x - x_i'},$$

где x_i' — один из корней уравнения $\theta_n(x) = 0$. $f(x)$ — многочлен степени $n - 1$. Поэтому

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} D_k^{(n)} f(x_k') = D_i^{(n)} \theta_n'(x_i')$$

и

$$D_i^{(n)} = \int_a^b \frac{p(x)\, \theta_n(x)\, dx}{(x - x_i')\, \theta_n'(x_i')}. \tag{28}$$

Остаточный член будет иметь вид:

$$R(f) = \frac{f^{(2n-1)}(\xi)}{(2n-1)!} \int_a^b p(x) \frac{\theta_n^2(x)}{x - a}\, dx. \tag{29}$$

Аналогично можно построить формулу численного интегрирования

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} E_i^{(n)} f(x_i'') + \frac{f^{(2n-1)}(\xi)}{(2n-1)!} \int_a^b p(x) \frac{\psi_n^2(x)}{x - b}\, dx, \tag{30}$$

где x_i'' — корни уравнения $\psi_n(x) = 0$;

$$\psi_n(x) = \omega_n(x) + \beta_n \omega_{n-1}(x), \quad \beta_n = -\frac{\omega_n(b)}{\omega_{n-1}(b)}, \tag{31}$$

$$E_i^{(n)} = \int_a^b \frac{p(x)\, \psi_n(x)}{(x - x_i'')\, \psi_n'(x_i'')}\, dx. \tag{32}$$

Наконец, в последнем случае узлы x_i''' будут корнями уравнения $\zeta_n(x)=0$, где

$$\zeta_n(x)=\begin{vmatrix}\omega_n(x) & \omega_n(a) & \omega_n(b)\\ \omega_{n-1}(x) & \omega_{n-1}(a) & \omega_{n-1}(b)\\ \omega_{n-2}(x) & \omega_{n-2}(a) & \omega_{n-2}(b)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}\omega_{n-1}(a) & \omega_{n-1}(b)\\ \omega_{n-2}(a) & \omega_{n-2}(b)\end{vmatrix}. \tag{33}$$

Коэффициенты $F_i^{(n)}$ формулы

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}F_i^{(n)}f\left(x_i'''\right)+R_n(f) \tag{34}$$

определятся из равенств

$$F_i^{(n)}=\int_a^b \frac{\zeta_n(x)\,p(x)\,dx}{\left(x-x_i'''\right)\zeta_n'\left(x_i'''\right)} \tag{35}$$

и остаточный член будет иметь вид:

$$R(f)=\frac{f^{(2n-2)}(\xi)}{(2n-2)!}\int_a^b \frac{p(x)\,\zeta_n^2(x)}{(x-a)(x-b)}\,dx. \tag{36}$$

Приведем значения x_i''' и $F_i^{(n)}$ для некоторых значений n при $p(x)=1$ и $a=-1$, $b=1$.

$n=3$: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$,

$F_1=\frac{1}{3}$, $F_2=\frac{4}{3}$, $F_3=\frac{1}{3}$;

$n=4$: $x_1=-1$, $x_2=-0{,}2$, $x_3=0{,}2$, $x_4=1$,

$F_1=\frac{1}{6}$, $F_2=\frac{5}{6}$, $F_3=\frac{5}{6}$, $F_4=\frac{1}{6}$;

$n=5$: $x_1=-1$, $x_2=-\frac{3}{7}$, $x_3=0$, $x_4=\frac{3}{7}$, $x_5=1$,

$F_1=0{,}1$, $F_2=\frac{49}{90}$, $F_3=\frac{64}{90}$, $F_4=\frac{49}{90}$, $F_5=0{,}1$.

В заключение приведем вычислительный пример на применение формул Гаусса и Маркова.

Пример. Вычислить по формулам Маркова и Гаусса интеграл

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

взяв $n=5$.

Преобразуем интеграл к промежутку $[-1, +1]$. Получим:

$$I = 2\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{4+(x+1)^2}.$$

В формуле Гаусса:

$$f(x_1) = 0{,}24945107, \quad f(x_2) = 0{,}23735995, \quad f(x_3) = 0{,}2,$$
$$f(x_4) = 0{,}15706261, \quad f(x_5) = 0{,}13100114.$$

Вычисления дают $I \approx 0{,}78539816$. Все знаки верны.

В формуле Маркова:

$$f(x_1) = 0{,}25, \quad f(x_2) = 0{,}24276181, \quad f(x_3) = 0{,}2,$$
$$f(x_4) = 0{,}14841465, \quad f(x_5) = 0{,}125.$$

Вычисления дают $I \approx 0{,}78539214$.

§ 6. Формулы численного интегрирования Чебышева

1. Построение формул. В предыдущем параграфе мы получили как частный случай формул Гаусса формулы численного интегрирования Эрмита. Они характеризуются тем, что все коэффициенты при $f(x_i)$ равны. Это оказывается существенным, когда значения $f(x_i)$ подвержены случайным ошибкам (например, получены из эксперимента). Тогда выражение

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n)$$
$$(c_1 + c_2 + \ldots + c_n \text{ фиксировано})$$

будет иметь наименьшую случайную ошибку при $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$.

В связи с этим П. Л. Чебышев поставил следующую задачу: найти абсциссы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и коэффициент K так, чтобы в формуле численного интегрирования

$$\int_{-1}^{+1} p(x) f(x)\, dx = K \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + R(f) \tag{1}$$

остаточный член $R(f)$ обращался в нуль, когда $f(x)$ является произвольным многочленом возможно большей степени. Так как в нашем распоряжении находится $n+1$ величин $K, x_1, x_2, \ldots, x_n$, то степень эта не меньше n.

Коэффициент K находится без труда. Полагая $f(x) \equiv 1$, получим:

$$\int_{-1}^{+1} p(x)\, dx = Kn.$$

Отсюда

$$K=\frac{1}{n}\int_{-1}^{+1}p(x)\,dx. \tag{2}$$

Как и в предыдущем параграфе, вместо того чтобы отыскивать сами абсциссы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, найдем многочлен

$$\omega_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \tag{3}$$

Возьмем в качестве $f(x)$ функцию

$$f(x)=\frac{1}{z-x}, \tag{4}$$

где z — произвольное число, $|z|>1$. Тогда

$$\int_{-1}^{+1}\frac{p(x)\,dx}{z-x}=K\left[\frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}+\cdots+\frac{1}{z-x_n}\right]+R\left(\frac{1}{z-x}\right). \tag{5}$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$\int_{-1}^{+1}\frac{p(x)\,dx}{z-x}=K\frac{\omega_n'(z)}{\omega_n(z)}+R\left(\frac{1}{z-x}\right). \tag{6}$$

Проинтегрируем обе части равенства по z. Получим:

$$\int_{-1}^{+1}p(x)\ln|z-x|\,dx=K\ln\frac{\omega_n(z)}{C}+\int R\left(\frac{1}{z-x}\right)dz.$$

Здесь C — постоянная интегрирования. Потенцированием находим:

$$\omega_n(z)\,e^{\frac{1}{K}\int R\left(\frac{1}{z-x}\right)dz}=Ce^{\frac{1}{K}\int_{-1}^{+1}p(x)\ln|z-x|\,dx} \tag{7}$$

Представим показательную функцию, стоящую множителем в левой части равенства, в виде ряда по убывающим степеням z. Имеем:

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z\left(1-\frac{x}{z}\right)}=\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\frac{x^2}{z^3}+\cdots+\frac{x^n}{z^{n+1}}+\frac{x^{n+1}}{z^{n+2}}+\cdots \tag{8}$$

Ряд справа при $|x|\leqslant 1$ и $|z|>\alpha>1$ будет равномерно и абсолютно сходиться. Далее,

$$R\left(\frac{1}{z-x}\right)=R\left(\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\cdots+\frac{x^n}{z^{n+1}}\right)+R\left(\frac{x^{n+1}}{z^{n+2}}+\frac{x^{n+2}}{z^{n+3}}+\cdots\right). \tag{9}$$

В силу нашего предположения первый член справа равен нулю. Но

$$R\left(\frac{x^{n+1}}{z^{n+2}}+\frac{x^{n+2}}{z^{n+3}}+\ldots\right)=\int_{-1}^{+1}p(x)\left[\frac{x^{n+1}}{z^{n+2}}+\frac{x^{n+2}}{z^{n+3}}+\ldots\right]dx-$$

$$-K\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i^{n+1}}{z^{n+2}}+\frac{x_i^{n+2}}{z^{n+3}}+\ldots\right].$$

Таким образом, $R\left(\frac{1}{z-x}\right)$ будет представляться сходящимся рядом по убывающим степеням z, причем наивысшей степенью будет $-(n+2)$:

$$R\left(\frac{1}{z-x}\right)=\frac{\alpha_1}{z^{n+2}}+\frac{\alpha_2}{z^{n+3}}+\ldots \tag{10}$$

Поэтому

$$\int R\left(\frac{1}{z-x}\right)dz=-\left[\frac{\alpha_1}{(n+1)\,z^{n+1}}+\frac{\alpha_2}{(n+2)\,z^{n+2}}+\ldots\right]=M(z). \tag{11}$$

Итак,

$$e^{\frac{1}{K}\int R\left(\frac{1}{z-x}\right)dz}=1+\frac{M(z)}{K1!}+\frac{M^2(z)}{K^2\,2!}+\frac{M^3(z)}{K^3\,3!}+\ldots, \tag{12}$$

т. е. эта показательная функция представляется рядом

$$e^{\frac{1}{K}\int R\left(\frac{1}{z-x}\right)dz}=1+\frac{\beta_1}{z^{n+1}}+\frac{\beta_2}{z^{n+2}}+\ldots \tag{13}$$

Произведение

$$\omega_n(z)\,e^{\frac{1}{K}\int R\left(\frac{1}{z-x}\right)dz}$$

может быть представлено в виде ряда

$$\omega_n(z)\,e^{\frac{1}{K}\int R\left(\frac{1}{z-x}\right)dz}=\omega_n(z)+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\ldots, \tag{14}$$

так как наивысшая степень z в $\omega_n(z)$ равна n. Отсюда следует, что и

$$e^{\frac{1}{K}\int_{-1}^{+1}p(x)\ln(z-x)\,dx} \tag{15}$$

разлагается в такой же ряд и члены с положительными степенями z дадут $\omega_n(z)$. Будем называть эти члены правильной частью ряда и обозначать

$$Ee^{\frac{1}{K}\int_{-1}^{+1}p(x)\ln|z-x|\,dx} \tag{16}$$

Таким образом, мы показали, что $\omega_n(z)$ в формулах численного интегрирования Чебышева определяется из равенства

$$\omega_n(z) = CEe^{\frac{1}{K}\int_{-1}^{+1} p(x)\ln|z-x|\,dx} \tag{17}$$

Здесь C подбирается так, чтобы коэффициент при z^n в $\omega_n(z)$ был равен 1.

Дадим еще один способ получения $\omega_n(z)$. В формуле

$$\int_{-1}^{+1} p(x)f(x)\,dx = K\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + R(f) \tag{1}$$

возьмем

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \tag{18}$$

где a_0, a_1, a_2, ..., a_n — произвольные действительные числа. Получим:

$$a_0\int_{-1}^{+1} p(x)\,dx + a_1\int_{-1}^{+1} p(x)\,x\,dx + \ldots + a_n\int_{-1}^{+1} p(x)\,x^n\,dx =$$

$$= a_0Kn + a_1K[x_1 + x_2 + \ldots + x_n] + a_2K\times$$

$$\times[x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2] + \ldots + a_nK[x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n],$$

так как $R(f)$ в этом случае должен обращаться в нуль. Введем обозначение

$$\mu_i = \int_{-1}^{+1} p(x)\,x^i\,dx. \tag{19}$$

В силу произвольности a_i должны иметь место следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_0 &= Kn,\\
\mu_1 &= K[x_1 + x_2 + \ldots + x_n],\\
\mu_2 &= K[x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mu_n &= K[x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n].
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Первое равенство дает:

$$K = \frac{\mu_0}{n} = \frac{1}{n}\int_{-1}^{+1} p(x)\,dx,$$

т. е. то же, что и раньше. Деля остальные равенства на K и обозначая $\frac{\mu_i}{K} = m_i$, получим систему n уравнений для определения x_i:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= m_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 &= m_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n &= m_n. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Опять будем разыскивать многочлен $\omega_n(x)$, корнями которого являются $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие этой системе. Пусть

$$\omega_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n. \tag{22}$$

Нам нужно найти $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Имеем:

$$\omega_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_n(x)}{x - x_i} \tag{23}$$

и

$$\omega_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)\,b_1 x^{n-2} + (n-2)\,b_2 x^{n-3} + \ldots + b_{n-1}. \tag{24}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n(x)}{x - x_i} = x^{n-1} &+ (b_1 + x_i)\,x^{n-2} + \left(b_2 + b_1 x_i + x_i^2\right) x^{n-3} + \ldots \\ &\ldots + \left(b_{n-1} + b_{n-2}x_i + \ldots + b_1 x_i^{n-2} + x_i^{n-1}\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Отсюда и из равенства (23) получаем:

$$\begin{aligned} \omega_n'(x) = nx^{n-1} &+ (nb_1 + m_1)\,x^{n-2} + (nb_2 + b_1 m_1 + m_2)\,x^{n-3} + \ldots \\ &\ldots + (nb_{n-1} + b_{n-2}m_1 + \ldots + b_1 m_{n-2} + m_{n-1}). \end{aligned} \tag{26}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в равенствах (24) и (26), находим:

$$\left.\begin{aligned} nb_1 + m_1 &= (n-1)\,b_1, \\ nb_2 + b_1 m_1 + m_2 &= (n-2)\,b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ nb_{n-1} + b_{n-2}m_1 + \ldots + b_1 m_{n-2} + m_{n-1} &= b_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Отсюда последовательно можно найти b_1, b_2, ..., b_{n-1}. Для получения коэффициента b_n рассмотрим сумму

$$\omega_n(x_1) + \omega_n(x_2) + \ldots + \omega_n(x_n).$$

С одной стороны, эта сумма равна нулю, так как $\omega_n(x_i) = 0$. С другой стороны, складывая представления $\omega_n(x_i)$ в виде многочлена по возрастающим степеням x_i при различных i получим:

$$m_n + b_1 m_{n-1} + b_2 m_{n-2} + \ldots + b_{n-1} m_1 + n b_n = 0. \tag{28}$$

Отсюда определится b_n.

Итак, мы показали, что для каждого n можно найти $\omega_n(x)$ такое, что если корни $\omega_n(x) = 0$ принять за абсциссы формулы численного интегрирования, то все коэффициенты c_i этой формулы будут равны между собой. Очевидно, $\omega_n(x)$, полученное вторым способом, будет совпадать с $\omega_n(x)$, полученным первым способом.

Рассмотрим теперь частный случай формул Чебышева, когда $p(x) \equiv 1$. При этом

$$K = \frac{1}{n} \int_{-1}^{+1} dx = \frac{2}{n}, \tag{29}$$

а абсциссы x_1, x_2, ..., x_n являются корнями уравнения

$$Ee^{\frac{n}{2} \int_{-1}^{+1} \ln|z-x|\,dx} = 0. \tag{30}$$

Но при $z > 1$

$$\int_{-1}^{+1} \ln|z-x|\,dx = (z+1)\ln(z+1) - (z-1)\ln(z-1) - 2 =$$

$$= 2\ln z + (z+1)\ln\left(1+\frac{1}{z}\right) + (1-z)\ln\left(1-\frac{1}{z}\right) - 2 =$$

$$= 2\ln z + (z+1)\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \ldots\right] - (1-z)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + \ldots\right] - 2 = 2\ln z - \frac{2}{2\cdot 3z^2} - \frac{2}{4\cdot 5z^4} - \frac{2}{6\cdot 7z^6} - \ldots.$$

Отсюда

$$\omega_n(z) = CE\left\{z^n e^{-\frac{n}{2\cdot 3\cdot z^2} - \frac{n}{4\cdot 5\cdot z^4} - \frac{n}{6\cdot 7z^6} - \ldots}\right\}. \tag{31}$$

Дадим n значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Получим следующие уравнения для получения x_i:

$$\left.\begin{aligned}
&x = 0,\\
&x^2 - \frac{1}{3} = 0,\\
&x^3 - \frac{1}{2}x = 0,\\
&x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45} = 0,\\
&x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{72}x = 0,\\
&x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{105} = 0,\\
&x^7 - \frac{7}{6}x^5 + \frac{119}{360}x^3 - \frac{149}{6480}x = 0,\\
&x^9 - \frac{3}{2}x^7 + \frac{27}{40}x^5 - \frac{57}{560}x^3 + \frac{2217}{22\,400}x = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Можно было бы получить $\omega_n(x)$ и для других значений n, но, как показал академик С. Н. Бернштейн, при этом уравнение $\omega_n(x) = 0$ будет иметь комплексные корни и, следовательно, соответствующая формула Чебышева не может быть использована. Абсциссы формул Чебышева при различных значениях n и i даются следующей таблицей:

$n = 2$ $\quad -x_1 = x_2 = 0{,}577350;$

$n = 3$ $\quad -x_1 = x_3 = 0{,}707107, \quad x_2 = 0;$

$n = 4$ $\quad -x_1 = x_4 = 0{,}794654, \quad -x_2 = x_3 = 0{,}187592;$

$n = 5$ $\quad -x_1 = x_5 = 0{,}832498, \quad -x_2 = x_4 = 0{,}374541, \quad x_3 = 0;$

$n = 6$ $\quad -x_1 = x_6 = 0{,}866247, \quad -x_2 = x_5 = 0{,}422519,$
$\quad -x_3 = x_4 = 0{,}266635;$

$n = 7$ $\quad -x_1 = x_7 = 0{,}883862, \quad -x_2 = x_6 = 0{,}529657;$
$\quad -x_3 = x_5 = 0{,}323912, \quad x_4 = 0;$

$n = 9$ $\quad -x_1 = x_9 = 0{,}911589, \quad -x_2 = x_8 = 0{,}601019;$
$\quad -x_3 = x_7 = 0{,}528762, \quad -x_4 = x_6 = 0{,}167906, \quad x_5 = 0.$

Рассмотрим пример на вычисление интеграла по формуле Чебышева.

Пример. Вычислить по формуле Чебышева интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}78539816\ldots,$$

взяв $n = 7$.

Как и в предыдущем параграфе, преобразуем предварительно интеграл к отрезку [—1, 1]. Последовательные значения ординат будут таковы:

$$f(x_1) = 0{,}249159, \quad f(x_2) = 0{,}236898, \quad f(x_3) = 0{,}224361,$$
$$f(x_4) = 0{,}200000, \quad f(x_5) = 0{,}173831,$$
$$f(x_6) = 0{,}157732, \quad f(x_7) = 0{,}132469.$$

Вычисления дают

$$I = 0{,}785400.$$

Ошибка не превышает двух единиц шестого знака.

2. Остаточный член формул Чебышева. Получим теперь остаточные члены формул численного интегрирования Чебышева. Ограничимся случаем $p(x) \equiv 1$. Пусть число ординат, использованных в формуле Чебышева, равно n. Соответствующий остаточный член будем обозначать $R_n(f)$. Как известно, $R_n(f) = 0$, когда $f(x)$ является произвольным многочленом степени n. Если n — четное число, то $R_n(f)$ обращается в нуль и для произвольного многочлена степени не выше $n+1$. В самом деле, если

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1},$$

то

$$R_n(f) = R_n(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) + R_n(a_{n+1} x^{n+1}).$$

Первый член справа, очевидно, равен нулю, а

$$R_n(a_{n+1} x^{n+1}) = \int_{-1}^{+1} a_{n+1} x^{n+1}\, dx - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} a_{n+1} x_i^{n+1}.$$

Но интеграл, стоящий в правой части, равен нулю, так как x^{n+1} является нечетной функцией x. Точно так же обращается в нуль и сумма в правой части, так как корни уравнения $\omega_n(x) = 0$ симметричны относительно начала координат. Итак, $R_n(a_{n+1} x^{n+1}) = 0$ и $R_n(f) = 0$. Утверждение доказано.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция, обладающая на отрезке $[-1, +1]$ непрерывными производными до порядка $m+1$ включительно. Здесь m равно n, если n — нечетное число, и равно $n+1$, если n — четное. По формуле Тейлора имеем:

$$f(x) = f(-1) + (x+1) f'(-1) + \frac{(x+1)^2}{2!} f''(-1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x+1)^m}{m!} f^{(m)}(-1) + \frac{1}{m!} \int_{-1}^{x} f^{(m+1)}(s)\,(x-s)^m\, ds. \qquad (33)$$

Отсюда, в силу наших предыдущих рассуждений,

$$R_n(f) = R_n\left[\frac{1}{m!} \int_{-1}^{x} f^{(m+1)}(s)\,(x-s)^m\, ds\right]$$

или

$$R_n(f)=\frac{1}{m!}\int_{-1}^{+1}dx\int_{-1}^{x}f^{(m+1)}(s)\,(x-s)^m\,ds-$$

$$-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m!}\int_{-1}^{x_i}f^{(m+1)}(s)\,(x_i-s)^m\,ds. \qquad (34)$$

Меняя порядок интегрирования в первом члене справа, получим:

$$R_n(f)=\frac{1}{m!}\int_{-1}^{+1}f^{(m+1)}(s)\,\frac{(1-s)^{m+1}}{m+1}\,ds-\frac{2}{m!\,n}\sum_{i=1}^{n}\int_{-1}^{x_i}f^{(m+1)}(s)\,(x_i-s)^m\,ds. \qquad (35)$$

Введем обозначение

$$\overline{(x-s)}^m=\begin{cases}(x-s)^m & \text{при } x>s,\\ 0 & \text{при } x\leqslant s.\end{cases} \qquad (36)$$

Тогда наш остаточный член (35) можно записать в виде

$$R_n(f)=\frac{1}{m!}\int_{-1}^{+1}f^{(m+1)}(s)\left[\frac{(1-s)^{m+1}}{m+1}-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{(x_i-s)}^m\right]ds. \qquad (37)$$

Исследуем функции

$$\varphi_k(s)=\frac{(1-s)^{k+1}}{k+1}-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{(x_i-s)}^k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

На отрезке $[-1,\ x_1]$ они положительны, если k нечетно, и отрицательны, если k четно. Действительно, так как $k\leqslant m$, то

$$\frac{(1-s)^{k+1}}{k+1}-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{(x_i-s)}^k=\frac{(1-s)^{k+1}}{k+1}-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-s)^k=$$

$$=\frac{(1-s)^{k+1}}{k+1}-\int_{-1}^{+1}(x-s)^k\,dx=$$

$$=\frac{(1-s)^{k+1}}{k+1}-\frac{(1-s)^{k+1}}{k+1}+\frac{(-1-s)^{k+1}}{k+1}=(-1)^{k+1}\frac{(1+s)^{k+1}}{k+1}$$

Отсюда и следует утверждение. Далее,

$$\varphi_k'(s)=-(1-s)^k+\frac{2k}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{(x_i-s)}^{k-1}$$

или

$$\frac{\varphi_k'(s)}{k}=-\varphi_{k-1}(s) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

В частности,

$$\varphi_1'(x) = -\left[(1-s) - \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n}(\overline{x_i - s})^0\right] = 1 + s.$$

Правая часть неотрицательна при $s \geqslant -1$ и так как $\varphi_1(s) > 0$ при $-1 < s \leqslant x_1$, то $\varphi_1(s) > 0$ при $s > -1$. Но

$$\frac{\varphi_2'(s)}{2} = -\varphi_1(s) < 0 \quad \text{при} \quad s > -1,$$

и так как $\varphi_2(s) < 0$ при $-1 < s \leqslant x_1$, то $\varphi_2(s) < 0$ при $s > -1$. Отсюда получаем, что $\varphi_3(s) > 0$ при $s > -1$, и, продолжая также дальше, придем, в конце концов, к заключению, что $\varphi_m(s) > 0$ при $s > -1$ (m нечетно!).

В силу доказанного, к выражению для $R_n(f)$ применима теорема о среднем и

$$R_n(f) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{m!}\int_{-1}^{+1}\left[\frac{(1-s)^{m+1}}{m+1} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x_i - s})^m\right]ds. \tag{38}$$

Таким образом,

$$R_n(f) = M_n f^{(m+1)}(\xi), \tag{39}$$

где постоянная M_n не зависит от вида функции $f(x)$. Для отыскания постоянной M_n проще всего поступить следующим образом. В качестве функции $f(x)$ возьмем x^{m+1}. Тогда предыдущее равенство даст

$$(m+1)!\,M_n = \int_{-1}^{+1} x^{m+1}\,dx - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \frac{2}{m+2} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}.$$

Отсюда

$$M_n = \frac{2}{(m+1)!}\left[\frac{1}{m+2} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}\right]. \tag{40}$$

При этом нам придется разыскивать суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}$, где $m+1$ равно или $n+1$ или $n+2$. Здесь удобны формулы Ньютона:

$$s_{n+1} + b_1 s_n + b_2 s_{n-1} + \ldots + b_{n-1} s_2 + b_n s_1 = 0,$$
$$s_{n+2} + b_1 s_{n+1} + b_2 s_n + \ldots + b_{n-1} s_3 + b_n s_2 = 0,$$

где

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k,$$

а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ являются коэффициентами уравнения $\omega_n(x) = 0$:

$$\omega_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0.$$

При помощи этих формул s_{n+1} и s_{n+2} выражаются через $s_n, s_{n-1}, \ldots$ Последние находятся при помощи равенства:

$$\int_{-1}^{+1} x^k\,ds = \frac{2}{k+1} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k = \frac{2}{n}s_k \qquad (k = 0, 2, 4, \ldots, k < m),$$

$$s_k = 0 \qquad (k = 1, 3, \ldots, k \leqslant m).$$

Приведем готовые выражения остаточных членов для тех значений n, для которых формулы Чебышева существуют:

$$R_1(f)=\frac{1}{3}f''(\xi); \qquad R_2(f)=\frac{1}{135}f^{(4)}(\xi);$$

$$R_3(f)=\frac{1}{360}f^{(4)}(\xi); \qquad R_4(f)=\frac{2}{42525}f^{(6)}(\xi);$$

$$R_5(f)=\frac{13}{544320}f^{(6)}(\xi); \qquad R_6(f)=\frac{1}{3969000}f^{(8)}(\xi),$$

$$R_7(f)=\frac{281}{1959552000}f^{(8)}(\xi); \quad R_9(f)=\frac{74747}{11200\cdot 9\cdot 11!}f^{(10)}(\xi).$$

При выводе остаточного члена для формул Чебышева мы по существу следовали тому пути, который был указан в § 3.

§ 7. Сходимость квадратурных процессов

Формулы численного интегрирования, которые мы рассматривали, имели следующий вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)+\ \dots\ +c_n f(x_n).$$

Мы получали их путем замены подынтегрального выражения интерполяционным многочленом Лагранжа. Мыслимы и другие способы замены. В связи с этим рассмотрим следующий вопрос. Функционалу

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

ставится в соответствие последовательность функционалов

$$L_n(f)=\sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)} f\left(x_i^{(n)}\right), \tag{2}$$

где $c_i^{(n)}$ выбираются из некоторой бесконечной треугольной матрицы:

$$\left.\begin{array}{l} c_1^{(1)}, \\ c_1^{(2)},\ c_2^{(2)}, \\ c_1^{(3)},\ c_2^{(3)},\ c_3^{(3)}, \\ \dots\dots\dots, \end{array}\right\} \tag{3}$$

а $x_i^{(n)}$ — из другой заданной бесконечной треугольной матрицы:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)}, \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}, \\ x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ x_3^{(3)}, \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{4}$$

Предполагается, что все $x_i^{(n)}$ принадлежат отрезку $[a, b]$. При каких условиях, наложенных на $c_i^{(n)}$ и $x_i^{(n)}$, для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ будет иметь место

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx? \tag{5}$$

Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой:

Теорема. *Для того чтобы* $L_n(f) \to \int_a^b f(x)\,dx$ *при* $n\to\infty$ *для любой непрерывной на* $[a, b]$ *функции* $f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы это имело место для любого многочлена и чтобы* $\sum_{k=1}^{n} |c_k^{(n)}| < M$ *для любого* n.

Докажем сначала достаточность этих условий. При этом мы будем ссылаться на следующую теорему Вейерштрасса:

Для всякой непрерывной на $[a, b]$ *функции* $f(x)$ *и для всякого* $\varepsilon > 0$ *можно найти такой многочлен* $P(x)$, *что* $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ *при любом* $x \in [a, b]$.

Доказательство этой теоремы мы приведем в следующей главе.

Рассмотрим разность

$$\int_a^b f(x)\,dx - L_n(f) = \int_a^b [f(x) - P(x)]\,dx + \left[\int_a^b P(x)\,dx - L_n(P)\right] - L_n(f - P) \tag{6}$$

В силу теоремы Вейерштрасса можно найти такой многочлен $P(x)$, что

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in [a, b]. \tag{7}$$

Пусть $P(x)$ в предыдущем равенстве и будет таким многочленом. Тогда абсолютная величина первого члена правой части не может превышать $\varepsilon(b - a)$. В силу первого условия доказываемой теоремы

второе слагаемое в (6) при достаточно большом n может быть сделано меньше ε по абсолютной величине. Далее,

$$L_n[f-P]=\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)}\left[f\left(x_k^{(n)}\right)-P\left(x_k^{(n)}\right)\right]. \tag{8}$$

Таким образом,

$$|L_n[f-P]|\leqslant \sum_{k=1}^{n}|c_k^{(n)}|\left|f\left(x_k^{(n)}\right)-P\left(x_k^{(n)}\right)\right|\leqslant \varepsilon M. \tag{9}$$

Отсюда получаем:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-L_n(f)\right|\leqslant \varepsilon(b-a+1+M), \tag{10}$$

т. е. левая часть может быть сделана сколь угодно малой, что и доказывает достаточность условий.

Необходимость первого условия очевидна, так как многочлены являются непрерывными функциями. Поэтому нужно доказать только необходимость второго условия. Доказательство будем вести от противного. Пусть $\sum_{k=1}^{n}|c_k^{(n)}|$ не ограничены. Для каждого n построим функцию $\varphi_n(x)$, обладающую следующими свойствами:

1. $\varphi_n\left(x_k^{(n)}\right)$ равно $+1$, если $c_k^{(n)}>0$ и равно -1, если $c_k^{(n)}<0$;
2. $\varphi_n(x)$ — непрерывная функция;
3. $|\varphi_n(x)|\leqslant 1$.

Очевидно,

$$L_n(\varphi_n)=\sum_{k=1}^{n}|c_k^{(n)}|. \tag{11}$$

Обозначим для сокращения записей последнее выражение через M_n.

Возьмем некоторую из построенных нами функций $\varphi_{n_1}(x)$. Для нее должно иметь место

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\varphi_{n_1})=\int_a^b \varphi_{n_1}(x)\,dx. \tag{12}$$

Но $|\varphi_{n_1}(x)|\leqslant 1$. Следовательно,

$$\left|\int_a^b \varphi_{n_1}(x)\,dx\right|\leqslant b-a \tag{13}$$

и найдется такое N_1, что при $n>N_1$ будет

$$|L_n(\varphi_{n_1})|<e(b-a) \tag{14}$$

(здесь e — основание натуральных логарифмов). Далее, найдется такое $n_2 \geqslant N_1$, что $M_{n_2} > 2 \cdot 2!$. Рассмотрим функцию

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}. \tag{15}$$

Она непрерывна. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} L_n\left[\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}\right] = \int_a^b \left[\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}\right] dx.$$

Но

$$\left|\int_a^b \left[\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}\right] dx\right| \leqslant \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)(b-a) < (e-1)(b-a). \tag{16}$$

Поэтому найдется такое N_2, что при $n > N_2$ будет

$$\left|L_n\left[\frac{\varphi_{n_1}}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}}{2!}\right]\right| < e(b-a). \tag{17}$$

Найдем такое $n_3 \geqslant N_2$, что $M_{n_3} > 3 \cdot 3!$, и продолжим наше построение дальше.

Пусть мы уже нашли N_m. Тогда находим $n_{m+1} > N_m$ такое, что $M_{n_{m+1}} > (m+1)(m+1)!$, и строим функцию

$$\psi_{m+1}(x) = \frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi_{n_{m+1}}(x)}{(m+1)!}. \tag{18}$$

Она непрерывна. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\psi_{m+1}) = \int_a^b \psi_{m+1}(x)\,dx. \tag{19}$$

Но

$$\left|\int_a^b \psi_{m+1}(x)\,dx\right| \leqslant \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(m+1)!}\right) \times \times (b-a) \leqslant (e-1)(b-a). \tag{20}$$

Находим N_{m+1} такое, что при $n > N_{m+1}$

$$|L_n(\psi_{m+1})| < e(b-a), \tag{21}$$

и продолжим построение дальше.

Таким образом, мы получим ряд

$$\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi_{n_m}(x)}{m!} + \ldots \tag{22}$$

Этот ряд будет равномерно сходиться, и следовательно, его сумма будет непрерывной функцией. Обозначим ее $f(x)$.

Возьмем любое натуральное число k и представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}+\frac{\varphi_{n_k}(x)}{k!}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}. \tag{23}$$

При этом

$$L_{n_k}(f)=L_{n_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right)+L_{n_k}\left(\frac{\varphi_{n_k}(x)}{k!}\right)+L_{n_k}\left(\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right). \tag{24}$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Так как $n_k > N_{k-1}$, то

$$\left|L_{n_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i}\right)\right|<e(b-a). \tag{25}$$

Далее,

$$\left|\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right|\leqslant\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{i!}=\frac{1}{(k+1)!}\left[1+\frac{1}{k+2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\ldots\right]\leqslant\frac{1}{(k+1)!}\left[1+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{k+2}}=\frac{k+2}{(k+1)!\,(k+1)}<\frac{k+1}{(k+1)!\,k}=\frac{1}{k\cdot k!}.$$

Таким образом,

$$\left|L_{n_k}\left(\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right)\right|<\frac{1}{k\cdot k!}M_{n_k}. \tag{26}$$

Функционал от среднего члена будет равен

$$L_{nk}\left(\frac{\varphi_{n_k}(x)}{k!}\right)=\frac{M_{nk}}{k!}. \tag{27}$$

Сопоставляя соотношения (24), (25), (26), (27), получим:

$$L_{n_k}(f)>\frac{M_{nk}}{k!}-\frac{M_{nk}}{k\cdot k!}-e(b-a).$$

Но $M_{nk}>k\cdot k!$ и, следовательно,

$$L_{n_k}(f)>k\cdot k!\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{k\cdot k!}\right)-e(b-a)=k-1-e(b-a), \tag{28}$$

а последнее выражение неограниченно возрастает с возрастанием k. Поэтому $L_{n_k}(f)$ не может стремиться к $\int_a^b f(x)\,dx$. Мы пришли к противоречию. Таким образом, необходимость условий доказана.

При доказательстве теоремы мы считали коэффициенты совершенно произвольными. В рассмотренных ранее случаях эти коэффициенты получались путем интегрирования интерполяционных многочленов. Такой процесс будем называть *интерполяционно-квадратурным*.

Для интерполяционно-квадратурных процессов сходимость наверняка имеет место для любого многочлена и первое условие теоремы можно опустить. Далее, беря $f(x) = 1$, получим:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} = \int_a^b dx = b - a.$$

Поэтому, если все $c_k^{(n)}$ положительны, то и второе условие теоремы будет выполнено. Такой случай как раз имел место в формулах Гаусса. Поэтому *квадратурный процесс по формулам Гаусса всегда сходится*.

При изучении формул Ньютона—Котеса мы видели, что у них имеются отрицательные коэффициенты. Можно показать, что для формул Ньютона—Котеса условие $\sum_{k=1}^{n} |c_k^{(n)}| < M$ не выполнено.

О сходимости формул Чебышева при $p(x) \equiv 1$ вопрос ставить нельзя, так как при $n \geqslant 10$ формул Чебышева не существует.

§ 8. Формула Эйлера

Формула, к выводу которой мы хотим приступить, имеет самые разнообразные применения: численное интегрирование, суммирование рядов, разложение функций в ряд и т. д. Ее часто называют формулой Эйлера — Маклорена, хотя впервые она была получена Эйлером. Формула Эйлера не связана непосредственно с теорией интерполирования и потребует некоторых сведений о многочленах и числах Бернулли.

1. Числа и многочлены Бернулли. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t, x) = \frac{xe^{tx}}{e^x - 1}.$$

Она может быть разложена в ряд по возрастающим степеням x, равномерно сходящийся при $|x| \leqslant \alpha < 2\pi$, так как ближайшей к началу координат особой точкой этой функции является

$$x = 2\pi i.$$

Запишем ряд в виде

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n. \tag{1}$$

$B_n(t)$ называются *многочленами Бернулли*. Что они действительно являются многочленами, мы обнаружим немного позднее. Многочлены Бернулли широко используются в теории чисел. При $t = 0$ получим:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \tag{2}$$

где через B_n обозначено $B_n(0)$. Числа B_n называются *числами Бернулли*. Прежде всего убедимся, что $B_n(t)$ — многочлены, и укажем более удобную, чем (1), формулу для их получения. Умножая обе части равенства (1) на $e^x - 1$ и разлагая $e^x - 1$ и xe^{tx} в ряды по степеням x, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n.$$

Приравнивая коэффициенты при x^n в левой части и в правой, после умножения рядов будем иметь:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{B_{n-1}(t)}{1!\,(n-1)!} + \frac{B_{n-2}(t)}{2!\,(n-2)!} + \ldots + \frac{B_0(t)}{n!\,1!}$$

или

$$nt^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k B_{n-k}(t). \tag{3}$$

Отсюда при $n = 1$ получаем $B_0(t) = 1$ и, полагая далее $n = 2, 3, 4, \ldots$, будем последовательно получать все $B_n(t)$. При этом непосредственно видно, что все $B_n(t)$ будут многочленами.

Многочлены Бернулли обладают двумя характеристическими свойствами. Рассмотрим

$$\varphi(t+1,\ x) - \varphi(t,\ x).$$

С одной стороны, эта разность равна

$$\frac{xe^{(t+1)x}}{e^x - 1} - \frac{xe^{xt}}{e^x - 1} = xe^{tx} = x + \frac{x^2 t}{1!} + \frac{x^3 t^2}{2!} + \ldots,$$

с другой,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t+1) - B_n(t)}{n!} x^n.$$

Приравнивая коэффициенты при x^n, имеем:

$$nt^{n-1} = B_n(t+1) - B_n(t). \tag{4}$$

Это и есть одно из характеристических свойств $B_n(t)$. Продифференцируем теперь (1) по t. Получим:

$$\frac{x^2 e^{xt}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n'(t)}{n!} x^n$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n'(t)}{n!} x^n.$$

Приравнивая опять коэффициенты при x^n, будем иметь:

$$B_n'(t) = nB_{n-1}(t). \tag{5}$$

Это — второе характеристическое свойство многочленов Бернулли. Свойства (4) и (5) в свою очередь определяют $B_n(t)$. В самом деле, на основании формулы Тейлора

$$nt^{n-1} = B_n(t+1) - B_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} B_n^{(k)}(t).$$

Используя (5), получим:

$$B_n^{(k)}(t) = n(n-1)\ldots(n-k+1) B_{n-k}(t).$$

Следовательно,

$$nt^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k B_{n-k}(t).$$

Снова получили (3), однозначно определяющее $B_n(t)$.

Рассмотрим еще ряды

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{1}{2} x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{6}$$

$$x \frac{e^{xt} - 1}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) x^n. \tag{7}$$

Сравнивая (6), (7) с (1) и (2), видим, что $b_n = \frac{B_n}{n!}$, если $n \neq 1$, а $b_1 = B_1 + \frac{1}{2}$ и $P_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n}{n!}$.

Изучим свойства b_n и $P_n(t)$. Заменим в (6) x на $-x$. Получим: слева

$$-\frac{x}{e^{-x} - 1} - \frac{1}{2} x = \frac{xe^x}{e^x - 1} - \frac{1}{2} x =$$

$$= x + \frac{x}{e^x - 1} - \frac{1}{2} x = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{1}{2} x$$

и справа

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n x^n.$$

Следовательно, все b_n с нечетными индексами равны нулю:

$$b_{2i-1}=0. \tag{8}$$

Найдем теперь $P_n'(t)$:

$$P_n'(t)=\frac{B_n'(t)}{n!}=\frac{B_{n-1}(t)}{(n-1)!}.$$

Таким образом, для всех $n>2$

$$P_n'(t)=P_{n-1}(t)+b_{n-1}. \tag{9}$$

При $n=2$ получим $P_2'(t)=B_1(t)$. Из (3) следует

$$2t=2B_1(t)+B_0(t), \quad B_1(t)=t-\frac{1}{2}.$$

Итак,

$$P_2'(t)=t-\frac{1}{2}. \tag{10}$$

Положим в (7) $t=0$. Получим:

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(0)\,x^n.$$

Следовательно,

$$P_n(0)=0. \tag{11}$$

Полагая в (7) $t=1$, будем иметь:

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)\,x^n.$$

Следовательно,

$$P_n(1)=0 \quad \text{при} \quad n\neq 1. \tag{12}$$

Положим еще в (7) $t=\frac{1}{2}$, получим:

$$x\frac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\left(\frac{1}{2}\right)x^n.$$

Заменим здесь x на $-x$:

$$-x\frac{e^{-\frac{1}{2}x}-1}{e^{-x}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P_n\left(\frac{1}{2}\right)x^n.$$

Вычитая друг из друга последние два равенства, будем иметь:

$$x\,\frac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{e^{x}-1}+x\,\frac{e^{-\frac{1}{2}x}-1}{e^{-x}-1}=x\,\frac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{e^{x}-1}+$$

$$+x\,\frac{e^{x}-e^{\frac{1}{2}x}}{e^{x}-1}=x=2\sum_{k=1}P_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)x^{2k-1}.$$

Итак,

$$P_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad P_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0\quad\text{при}\quad k\geqslant 2. \tag{13}$$

Покажем теперь, что при $k\geqslant 1$ $P_{2k+1}(t)$ нигде не обращается в нуль на отрезке $[0, 1]$ кроме точек $t=0,\ \frac{1}{2},\ 1$, а $P_{2k}(t)$ нигде не обращается в нуль, кроме $t=0$ и 1. Из (10) следует

$$P_2(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+C,$$

а из (11) $C=0$. Следовательно, для $P_2(t)$ наше утверждение справедливо. $P_3(t)$ будет многочленом третьей степени и в силу (11), (12), (13) обращается в нуль при $t=0,\ \frac{1}{2},\ 1$. Других нулей $P_3(t)$ иметь не может и для него утверждение также справедливо. Допустим теперь, что утверждение справедливо для $P_{2k-1}(t)$. Положим, для определенности, что $P_{2k-1}(t)>0$ при $0<t<\frac{1}{2}$ и $P_{2k-1}(t)<0$ при $\frac{1}{2}<t<1$. Тогда в силу (8), (9), (11) и (12):

$$P'_{2k}(t)>0\quad\text{при}\quad 0<t<\frac{1}{2},$$

$$P'_{2k}(t)<0\quad\text{при}\quad \frac{1}{2}<t<1.$$

$P_{2k}(0)=P_{2k}(1)=0$. Следовательно, $P_{2k}(t)$ имеет максимум при $t=\frac{1}{2}$ и этот максимум единственный на $[0, 1]$. $P_{2k}(t)$ не обращается в нуль на $[0, 1]$ и имеет знак $P_{2k-1}(\xi)$, где ξ некоторая точка отрезка $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. Далее,

$$P'_{2k+1}(t)=P_{2k}(t)+b_{2k}.$$

Так как $P'_{2k}(t)$ на интервале (0, 1) обращается в нуль только в одной точке, то $P_{2k}(t)+b_{2k}$ может обращаться в нуль на отрезке [0, 1] только в двух точках, а $P_{2k+1}(t)$ — только в трех точках. Следовательно, $t=0$, $\frac{1}{2}$, 1 являются единственными нулями $P_{2k+1}(t)$. Так как знак $P_{2k}(t)$ не меняется на отрезке [0, 1], а знак $P'_{2k+1}(t)$ меняется, то b_{2k} имеет знак, противоположный знаку $P_{2k}(t)$, и по абсолютной величине меньше, чем $\max|P_{2k}(t)|$. Поэтому нуль $P_{2k+1}(t)$ при $t=\frac{1}{2}$ простой. Далее, $P_{2k}(0)=0$. Следовательно, $P'_{2k+1}(\xi)$, а поэтому и $P_{2k+1}(\xi)$ при ξ, близких к нулю, имеет знак b_{2k}, противоположный знаку $P_{2k}(\xi)$, а следовательно и знаку $P_{2k-1}(t)$. Таким образом, $P_{2k+1}(t)$ будут иметь чередующиеся по k знаки. Это же будет справедливо и для b_{2k}.

2. Формула Эйлера и примеры ее применения. После этих предварительных рассуждений перейдем к выводу формулы Эйлера.

Рассмотрим

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — некоторая, достаточное число раз дифференцируемая функция. Произведем замену переменных, положив $x=a+th$. Тогда наш интеграл будет равен

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = h\int_0^1 f(a+th)\,dt = h\int_0^1 \varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)=f(a+th)$. К последнему интегралу применим правило интегрирования по частям:

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt = t\varphi(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 t\varphi'(t)\,dt = \varphi(1) - \int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)\varphi'(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\varphi(1)+\frac{1}{2}\varphi(0) = \frac{1}{2}\varphi(0)+\frac{1}{2}\varphi(1) - \int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)\varphi'(t)\,dt.$$

Первые два члена здесь дают формулу численного интегрирования трапеций, последний член — поправку к ней. Воспользуемся теперь формулами (9), (10) и свойствами $P_n(t)$ и b_n для преобразования

последнего члена. Снова, интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)\varphi'(t)\,dt = \int_0^1 P_2'(t)\,\varphi'(t)\,dt = [P_2(t)\,\varphi'(t)]_0^1 -$$

$$-\int_0^1 P_2(t)\,\varphi''(t)\,dt = -\int_0^1 [P_3'(t)-b_2]\,\varphi''(t)\,dt =$$

$$= b_2[\varphi'(1)-\varphi'(0)] - \int_0^1 P_3'(t)\,\varphi''(t)\,dt = b_2[\varphi'(1)-\varphi'(0)] -$$

$$-[P_3(t)\,\varphi'''(t)]_0^1 + \int_0^1 P_3(t)\,\varphi'''(t)\,dt =$$

$$= b_2[\varphi'(1)-\varphi'(0)] + \int_0^1 P_3(t)\,\varphi'''(t)\,dt.$$

В последнем интеграле можно заменить $P_3(t)$ на $P_4'(t)$ и еще раз повторить интегрирование по частям. При этом добавится член

$$b_4[\varphi'''(1)-\varphi'''(0)],$$

а вместо последнего интеграла будем иметь:

$$\int_0^1 P_5(t)\,\varphi^{(V)}(t)\,dt.$$

Повторив наши операции r раз, получим:

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}[\varphi(0)+\varphi(1)] - b_2[\varphi'(1)-\varphi'(0)] -$$

$$-b_4[\varphi'''(1)-\varphi'''(0)] - \ldots - b_{2r}[\varphi^{(2r-1)}(1)-\varphi^{(2r-1)}(0)] + R_{2r},$$

где R_{2r} можно записать в двух видах:

$$R_{2r} = -\int_0^1 P_{2r+1}(t)\,\varphi^{(2r+1)}(t)\,dt = \int_0^1 P_{2r+2}(t)\,\varphi^{(2r+2)}(t)\,dt.$$

Возвратимся к старым переменным и выразим b_n через числа Бернулли. Будем иметь:

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(a)+f(a+h)] - \frac{B_2h^2}{2!}[f'(a+h)-f'(a)] -$$

$$-\frac{B_4h^4}{4!}[f'''(a+h)-f'''(a)] - \ldots -$$

$$-\frac{B_{2r}h^{2r}}{(2r)!}\left[f^{(2r-1)}(a+h)-f^{(2r-1)}(a)\right] + R_{2r},$$

где

$$R_{2r} = -h^{2r+2}\int_0^1 P_{2r+1}(t)\,f^{(2r+1)}(a+th)\,dt = \\ = h^{2r+3}\int_0^1 P_{2r+2}(t)\,f^{(2r+2)}(a+th)\,dt.$$

Если применить последнюю формулу к отрезкам

$$[a,\ a+h],\quad [a+h,\ a+2h],\quad \ldots,\quad [a+(n-1)h,\ a+nh]$$

и сложить полученные выражения, то и получим *формулу Эйлера*:

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+\right. \\ \left.+f(a+(n-1)h)+\frac{1}{2}f(a+nh)\right]-\frac{B_2h^2}{2!}[f'(a+nh)-f'(a)]- \\ -\frac{B_4h^4}{4!}[f'''(a+nh)-f'''(a)]-\ldots- \\ -\frac{B_{2r}h^{2r}}{(2r)!}\left[f^{(2r-1)}(a+nh)-f^{(2r-1)}(a)\right]+R_{2r}, \quad (14)$$

где

$$R_{2r} = -h^{2r+2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 P_{2r+1}(t)\,f^{(2r+1)}[a+h(t+k)]\,dt = \\ = h^{2r+3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 P_{2r+2}(t)\,f^{(2r+2)}[a+h(t+k)]\,dt. \quad (15)$$

Остаточный член можно записать в другой форме, если воспользоваться тем, что $P_{2r+2}(t)$ не меняет знака на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$R_{2r} = nh^{2r+3}f^{(2r+2)}(\xi)\int_0^1 P_{2r+2}(t)\,dt,$$

где ξ — некоторая точка промежутка $[a, a+nh]$. Но по (9)

$$0 = \int_0^1 P'_{2r+3}(t)\,dt = \int_0^1 P_{2r+2}(t)\,dt + \int_0^1 b_{2r+2}\,dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 P_{2r+2}(t)\,dt = -b_{2r+2} = -\frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!}.$$

Поэтому остаточный член можно записать в форме

$$R_{2r} = -nh^{2r+3}\frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!}f^{(2r+2)}(\xi). \tag{16}$$

В некоторых случаях об остаточном члене можно судить по самим вычислениям по формуле Эйлера. Так, пусть все производные нечетного порядка функции $f(x)$ имеют одинаковые постоянные знаки на рассматриваемом отрезке и монотонны там, например монотонно возрастающие. Тогда на основании второй теоремы о среднем из первого выражения (15) получим, что знак R_{2r} будет определяться знаком

$$\int_{\xi}^{1} P_{2r+1}(t)\,dt,$$

которые будут чередоваться вместе с r. Таким образом, остаточные члены будут иметь чередующиеся знаки и истинное значение интеграла будет заключено между суммой r и $r+1$ членов формулы Эйлера.

Для удобства пользования формулой Эйлера приведем значения чисел Бернулли и выражения многочленов Бернулли для некоторых значений n:

$$B_0(x) = 1; \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}; \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6};$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x; \quad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30};$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x;$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42};$$

$$B_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x;$$

$$B_8(x) = x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30};$$

$$B_9(x) = x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x;$$

$$B_{10}(x) = x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66};$$

$$B_0 = 1; \quad B_1 = -\frac{1}{2}; \quad B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_4 = -\frac{1}{30}; \quad B_6 = \frac{1}{42};$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}; \quad B_{10} = \frac{5}{66}; \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}; \quad B_{14} = \frac{7}{6};$$

$$B_{16} = -\frac{3617}{510}.$$

Рассмотрим, как ведут себя числа Бернулли B_{2r} для больших значений r. Для этого воспользуемся известным разложением

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2+4\pi^2k^2}.$$

Положим

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}.$$

Разложим $\frac{x^2}{x^2+4\pi^2k^2}$ в ряд по степеням x. Будем иметь:

$$\frac{x^2}{x^2+4k^2\pi^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{x}{2k\pi}\right)^{2n}.$$

Отсюда

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2S_n}{(2\pi)^{2n}}x^{2n}.$$

Таким образом,

$$B_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}S_{2n}.$$

S_{2n} стремится к 1 при $n\to\infty$. Поэтому B_{2n} стремится к бесконечности с возрастанием n.

Дадим примеры различных приложений формулы Эйлера.

Пример. Вычислить с помощью формулы Эйлера интеграл

$$\ln 2=\int_{10}^{20}\frac{dx}{x}.$$

Здесь

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2},\quad f'''(x)=-\frac{6}{x^4},\quad f^{(V)}(x)=-\frac{120}{x^6},\ \ldots$$

$$\ln 2=\frac{1}{2\cdot 10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{19}+\frac{1}{2\cdot 20}-\frac{B_2}{2}\left(\frac{1}{10^2}-\frac{1}{20^2}\right)-$$

$$-\frac{B_4}{4}\left(\frac{1}{10^4}-\frac{1}{20^4}\right)-\frac{B_6}{6}\left(\frac{1}{10^6}-\frac{1}{20^6}\right)-\cdots$$

Вычисления дают:

0,050 000 000 0
0,090 909 090 9
0,083 333 333 3
0,076 923 076 9
0,071 428 571 4
0,066 666 666 7
0,062 500 000 0
0,058 823 529 4
0,055 555 555 6
0,052 631 578 9
0,025 000 000 0
0,693 771 403 1

$$-\frac{1}{12}\cdot(0{,}01-0{,}0025)=-0{,}000\,625$$

$$\frac{1}{120}\cdot(0{,}000\,1-0{,}000\,006\,25)=$$

$$=0{,}000\,000\,833-0{,}000\,000\,052\,1$$

$$-\frac{1}{252}\cdot 0{,}000\,001\left(1-\frac{1}{64}\right)=$$

$$=-0{,}000\,000\,003\,9$$

$$\frac{1}{240}\cdot 0{,}000\,000\,01\left(1-\frac{1}{256}\right)=$$

$$=0{,}000\,000\,000\,0\ldots$$

$$-0{,}000\,624\,222\,7$$

$$\ln 2=0{,}693\,147\,180\,4$$

Точное значение

$$\ln 2=0{,}693\,147\,180\,5\ldots$$

Здесь как раз было применимо замечание, сделанное относительно оценки остаточного члена, когда производные нечетного порядка функции $f(x)$ знакопостоянны и монотонны.

Пример. Вычислить сумму $\sum_{k=1}^{n} k^p$, где p — целое положительное число.

Положим в формуле Эйлера $a=0$, $h=1$, $f(x)=x^p$. Тогда

$$\int_0^n x^p\,dx=\frac{1}{2}0+1^p+2^p+\ldots+(n-1)^p+\frac{1}{2}n^p-$$

$$-\frac{B_2}{2!}pn^{p-1}-\frac{B_4}{4!}p(p-1)(p-2)n^{p-3}-\ldots$$

Здесь ряд обязательно оборвется на каком-то шаге, так как производные с некоторого порядка будут равны нулю. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} k^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+\frac{pn^{p-1}}{12}-\frac{p(p-1)(p-2)}{720}n^{p-3}+$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{30420}n^{p-5}+\ldots$$

Так, для $p=2$, 3, 4, 5 получим следующие выражения:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{3n^2}{12}=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{4n^3}{12} - \frac{24n}{720} = \frac{1}{30} n (n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{60n^2}{720} = \frac{n}{12}(2n^5 + 6n^4 + 5n^3 - n).$$

Пример. Вычислить сумму ряда

$$S = \frac{1}{101^2} + \frac{1}{103^2} + \frac{1}{105^2} + \frac{1}{107^2} + \ldots$$

В формуле Эйлера положим $h = 2$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 101$, $n = \infty$. Тогда

$$\frac{1}{2}\int_{101}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101^2} + \frac{1}{103^2} + \frac{1}{105^2} + \ldots + \\ + \frac{2^2 B_2}{2!}\left[\frac{2}{101^3}\right] + \frac{2^4 B_4}{4!}\left[\frac{24}{101^5}\right] + \frac{2^6 B_6}{6!}\left[\frac{720}{101^7}\right] + \ldots$$

Вычисления дают

$$S = 0{,}004\,999\,833\,35.$$

Пример. Используя формулу Эйлера, разложить в ряд по степеням x функцию $\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

В формуле Эйлера полагаем $f(x) = \cos x$, $a = -\frac{h}{2}$, $n = 1$. Тогда

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos x\, dx = \frac{h}{2}\cos\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\cos\left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{B_2 h^2}{2!}\left[\sin\left(\frac{h}{2}\right) - \sin\left(-\frac{h}{2}\right)\right] - \\ - \frac{B_4 h^4}{4!}\left[\sin\left(\frac{h}{2}\right) - \sin\left(-\frac{h}{2}\right)\right] + \\ + \ldots - \frac{B_{2r} h^{2r}}{(2r)!}\left[(-1)^r \sin\left(\frac{h}{2}\right) - (-1)^r \sin\left(-\frac{h}{2}\right)\right] + R_{2r}.$$

Отсюда

$$2\sin\frac{h}{2} = h\cos\frac{h}{2} - 2\sum_{k=1}^{r}(-1)^k \frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!}\sin\frac{h}{2} + R_{2r}.$$

Деля на $2\sin\frac{h}{2}$ и перенося $\frac{h}{2}\operatorname{ctg}\frac{h}{2}$ в левую сторону, получим:

$$\frac{h}{2}\operatorname{ctg}\frac{h}{2} = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k} - \frac{R_{2r}}{2\sin\frac{h}{2}}.$$

Это и есть искомое разложение. Необходимо только исследовать остаточный член. Для нашего случая

$$\frac{R_{2r}}{2\sin\frac{h}{2}} = -h^{2r+3}\frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!}(-1)^{r+1}\frac{\cos\xi}{2\sin\frac{h}{2}}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{R_{2r}}{2\sin\frac{h}{2}}\right| < \frac{|h|}{2\left|\sin\frac{h}{2}\right|}\frac{|h^{2r+2}B_{2r+2}|}{(2r+2)!}.$$

Воспользуемся выражением для B_{2n}, полученным ранее

$$\left|\frac{R_{2r}}{2\sin\frac{h}{2}}\right| < \frac{|h|}{2\left|\sin\frac{h}{2}\right|}\frac{|h|^{2r+2}2(2r+2)!}{(2\pi)^{2r+2}(2r+2)!}S_{2r+2}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{R_{2r}}{2\sin\frac{h}{2}}\right| < \frac{|h|}{\left|\sin\frac{h}{2}\right|}\left|\frac{h}{2\pi}\right|^{2r+2}S_{2r+2}.$$

Таким образом, при $|h|<2\pi$ остаточный член стремится к нулю.

В заключение дадим вывод *формулы Стирлинга* асимптотического представления $n!$. Для этого в формуле Эйлера положим $a=1$, $h=1$, $f(x)=\ln x$. Тогда

$$\int_1^n \ln x\,dx = \frac{1}{2}\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln(n-1)+$$
$$+\frac{1}{2}\ln n-\frac{B_2}{2!}\left[\frac{1}{n}-1\right]-\frac{B_4}{4!}\left[\frac{2}{n^3}-\frac{2}{1}\right]-\ldots$$
$$\ldots-\frac{B_{2r}}{(2r)!}\left[\frac{(2r-2)!}{n^{2r-1}}-\frac{(2r-2)!}{1}\right]+R_{2r}.$$

Отсюда

$$n(\ln n-1)+1=\ln(n!)-\frac{1}{2}\ln n+C-\frac{B_2}{2n}-\frac{B_4}{12n^3}-\ldots,$$
$$\ln(n!)=C+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{1}{12n}+\frac{1}{360n^3}+\ldots,$$

где C — некоторая постоянная. Для ее определения воспользуемся формулой Валлиса:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}[n!]^4}{[(2n)!]^2(2n+1)}.$$

Логарифмируя ее, получим:

$$\ln\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\{4n\ln 2 + 4\ln(n!) - 2\ln[(2n)!] - \ln(2n+1)\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{4n\ln 2 + 4\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + C\right] -\right.$$

$$\left. - 2\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\ln(2n) - 2n + C\right] - \ln(2n+1)\right\} = -2\ln 2 + 2C.$$

Следовательно,

$$C = \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\,e^{-n}\left[1 + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \ldots\right].$$

Это и есть формула Стирлинга.

§ 9. Формулы численного интегрирования, содержащие разности подынтегральной функции

1. Формула Грегори. Перейдем теперь к изучению формул численного интегрирования, содержащих разности подынтегральной функции. Пусть нам задана функция $f(x)$ в точках a, $a+h$, ..., $a+nh$.

Составим таблицу разностей:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
a_0	f_0	$f^1_{1/2}$				
$a+h$	f_1	$f^1_{3/2}$	f^2_1	$f^3_{3/2}$		
$a+2h$	f_2	$f^1_{5/2}$	f^2_2	$f^3_{5/2}$	f^4_2	$f^5_{5/2}$
$a+3h$	f_3	$f^1_{7/2}$	f^2_3	$f^3_{7/2}$	f^4_3	
$a+4h$	f_4	$f^1_{9/2}$	f^2_4			
$a+5h$	f_5					

Представим $f(x)$ на интервале $(a,\ a+h)$ при помощи формулы Ньютона для интерполирования вперед:

$$f(x) = f(a+th) = f_0 + tf^1_{1/2} +$$

$$+ \frac{t(t-1)}{2!}f^2_1 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}f^n_{n/2} + R_{n1}, \qquad (1)$$

где

$$t=\frac{x-a}{h},\quad R_{n1}=\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi_1)\ (a<\xi_1<a+h). \quad (2)$$

Интегрируя обе части равенства по интервалу изменения x от a до $a+h$ и деля на h, получим:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx=f_0+\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!}\,dt f^k_{k/2}+\int_0^1 R_{n1}\,dt. \quad (3)$$

Нам часто будут встречаться интегралы

$$\int_0^1\frac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!}\,dt.$$

Поэтому для сокращения записей будем обозначать их через A_k. Положив $A_0=1$, будем иметь:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n}A_k f^k_{k/2}+\int_0^1 R_{n1}\,dt. \quad (4)$$

Перейдем теперь к интервалу $(a+h,\ a+2h)$. Если мы возьмем за начальное значение f_1, то уже нельзя будет воспользоваться формулой Ньютона, если мы хотим дойти до разностей n-го порядка, так как $f^n_{(n/2)+1}$ отсутствует в нашей таблице. Поэтому мы воспользуемся диаграммой Фрезера и выберем путь, идущий от f_1 по диагонали вниз до $f^{n-1}_{(n+1)/2}$ и затем по диагонали вверх до $f^n_{n/2}$. (В таблице он показан сплошной линией.) Соответствующая формула будет иметь вид

$$f(x)=f(a+h+ht)=f_1+tf^1_{3/2}+$$
$$+\frac{t(t-1)}{2!}f^2_2+\dots+\frac{t(t-1)\dots(t-n+2)}{(n-1)!}f^{n-1}_{(n+1)/2}+$$
$$+\frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}f''_{n/2}+R_{n2}. \quad (5)$$

где

$$t=\frac{x-a-h}{h};$$

$$R_{n2}=\frac{(t+1)t(t-1)\dots(t-n+1)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi_2)\ \ (a+h<\xi_2<a+2h).$$

Интегрируя по интервалу изменения x от $a+h$ до $a+2h$ и деля на h, получим:

$$\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} A_k f^{k}_{(k/2)+1} + A_n f^{n}_{n/2} + \int_0^1 R_{n2}\,dt. \qquad (6)$$

Для интервала $(a+2h,\ a+3h)$ выбираем путь, начинающийся с f_2 и идущий по диагонали вниз до разностей $(n-2)$-го порядка и далее по диагонали вверх. Соответствующая формула после интегрирования будет иметь вид

$$\frac{1}{h}\int_{a+2h}^{a+3h} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-2} A_k f^{k}_{(k/2)+2} + A_{n-1} f^{n-1}_{(n+1)/2} +$$

$$+ f^{n}_{n/2}\int_0^1 \frac{(t+1)\,t\,(t-1)\ldots(t-n+2)}{n!}\,dt + \int_0^1 R_{n3}(t)\,dt. \qquad (7)$$

Продолжим этот процесс далее. Для последнего интервала $[a+(n-1)h,\ a+nh]$ получим:

$$\frac{1}{h}\int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x)\,dx = f_{n-1} + A_1 f^{1}_{n-1/2} + A_2 f^{2}_{n-1} +$$

$$+ f^{3}_{n-3/2}\int_0^1 \frac{(t+1)\,t\,(t-1)}{3!}\,dt + f^{4}_{n-2}\int_0^1 \frac{(t+2)\,(t+1)\,t\,(t-1)}{4!}\,dt + \ldots$$

$$\ldots + f^{n}_{n/2}\int_0^1 \frac{(t+n-2)\ldots(t+1)\,t\,(t-1)}{n!}\,dt + \int_0^1 R_{nn}\,dt. \qquad (8)$$

Сложим теперь все полученные интегралы. В левой части будем иметь:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx.$$

Первые слагаемые справа дадут в сумме

$$f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}.$$

Вторые слагаемые дадут

$$A_1\left[f^{1}_{1/2} + f^{1}_{3/2} + \ldots + f^{1}_{n-1/2}\right] = A_1\left[f_n - f_0\right].$$

Но $A_1 = \frac{1}{2}$. Складывая последнюю сумму и предыдущую, получим:

$$\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n.$$

При сложении членов с вторыми разностями не будем учитывать вклада от последнего интеграла, при сложении членов с третьими разностями не будем учитывать вкладов последних двух интегралов и т. д. Тогда сумма остальных членов с k-ми разностями даст

$$A_k \left[f^{k-1}_{n-(k-1)/2} - f^{k-1}_{(k-1)/2} \right] \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Соберем теперь оставшиеся члены с k-ми разностями. Они дадут

$$f^k_{n-k/2} \left[A_k + \int_0^1 \frac{(t+1)\, t\, (t-1) \ldots (t-k+2)}{k!}\, dt + \right.$$

$$+ \int_0^1 \frac{(t+2)\,(t+1)\, t\, (t-1) \ldots (t-k+3)}{k!}\, dt + \ldots$$

$$\left. \ldots + \int_0^1 \frac{(t+k-2) \ldots (t+1)\, t\, (t-1)}{k!}\, dt \right].$$

Если обозначить через $\varphi(t)$ произведение $t(t-1) \ldots (t-k+1)$, то последнее выражение можно записать в виде

$$f^k_{n-k/2} \left[\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{k!}\, dt + \int_0^1 \frac{\varphi(t+1)}{k!}\, dt + \ldots + \int_0^1 \frac{\varphi(t+k-2)}{k!}\, dt \right],$$

или если заменить во втором интеграле $t+1$ на t, в третьем $t+2$ на t и т. д., то квадратная скобка примет вид

$$B_k = \int_0^{k-1} \frac{t\,(t-1) \ldots (t-k+1)}{k!}\, dt.$$

Если k — нечетное число, то в силу показанной ранее симметрии функции $\varphi(t)$ относительно середины интервала $(0, k-1)$ это выражение будет равно нулю. Пусть теперь k четное. Тогда $B_{k+1} = 0$. Но

$$B_{k+1} = \int_0^k \frac{t\,(t-1) \ldots (t-k)}{(k+1)!}\, dt = \int_0^1 \frac{t\,(t-1) \ldots (t-k)}{(k+1)!}\, dt +$$

$$+ \int_1^k \frac{t\,(t-1) \ldots (t-k)}{(k+1)!}\, dt = 0.$$

Первый интеграл равен A_{k+1}. Во втором произведем замену

$$t = y + 1.$$

Тогда он примет вид

$$\int_0^{k-1} \frac{(y+1)\,y\,(y-1)\,\ldots\,(y-k+1)}{(k+1)!}\,dy =$$

$$= \int_0^{k-1} \frac{y\,(y-1)\,\ldots\,(y-k+1)\,[(y-k)+(k+1)]}{(k+1)!}\,dy =$$

$$= \int_0^{k-1} \frac{y\,(y-1)\,\ldots\,(y-k)}{(k+1)!}\,dy + \int_0^{k-1} \frac{y\,(y-1)\,\ldots\,(y-k+1)}{k!}\,dy =$$

$$= A_{k+1} + B_k + \int_1^{k-1} \frac{y\,(y-1)\,\ldots\,(y-k)}{(k+1)!}\,dy.$$

Последний интеграл равен нулю, так как и область интегрирования и подынтегральная функция симметричны относительно точки $t = \frac{k}{2}$. Таким образом,

$$2A_{k+1} + B_k = 0$$

или

$$A_{k+1} + B_k = -A_{k+1}.$$

Если теперь использовать найденные нами значения B_k и прибавить их к соответствующим, ранее найденным членам, то получим, что коэффициенты при разностях нечетного порядка не изменятся, а члены четного порядка примут следующий вид:

$$-A_{k+1}\left[f^k_{n-k/2} + f^k_{k/2}\right].$$

Это будет иметь место до разностей порядка $n-1$. Если n нечетное число, то $B_n = 0$ и последний член пропадает. Если же n четное, то разности $(n-1)$-го порядка будут умножены на $(A_{n+1} + B_n)$.

Мы получили *формулу Грегори*:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{2}f_n + A_2\left[f^1_{n-1/2} - f^1_{1/2}\right] - A_3\left[f^2_{n-1} + f^2_1\right] +$$

$$+ A_4\left[f^3_{n-3/2} - f^3_{3/2}\right] - A_5\left[f^4_{n-2} + f^4_2\right] + \ldots + R. \qquad (9)$$

Остаточный член R этой формулы будет такой же, как и у формулы Ньютона — Котеса замкнутого типа с таким же n. Да и сама эта формула является преобразованной формулой Ньютона — Котеса, так как на каждом отрезке мы интегрировали интерполяционный

многочлен, построенный по узлам a, $a+h$, ..., $a+nh$. Конечно, это верно лишь в том случае, когда при использовании формулы Грегори мы доходим до разностей порядка n.

Коэффициенты A_k можно определить при помощи интегрирования. Еще проще их отыскивать, если воспользоваться разложением

$$(1+y)^t = 1 + ty + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!}y^k + \ldots \quad |y| < 1.$$

Интегрируя обе части равенства по t в пределах от 0 до 1, получим:

$$\frac{y}{\ln(1+y)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k y^k; \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k y^k \left[y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \ldots\right]. \quad (10)$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях y, будем иметь:

$$A_0\frac{1}{k} - A_1\frac{1}{k-1} + A_2\frac{1}{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}A_{k-1} = 0, \quad A_0 = 1. \quad (11)$$

Это рекуррентное соотношение позволяет последовательно находить все A_k. Первые восемь значений A_k таковы:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{12}, \quad A_3 = \frac{1}{24}, \quad A_4 = -\frac{19}{720},$$
$$A_5 = \frac{3}{160}, \quad A_6 = -\frac{863}{60\,480}, \quad A_7 = \frac{275}{24\,192}.$$

Формулу Грегори можно было бы получить из формулы Эйлера, если заменить входящие туда производные их выражениями через разности.

Нужно заметить, что работа по составлению таблицы разностей для использования ее в формуле Грегори не может считаться излишней, так как она позволяет обнаружить ошибки при вычислении $f(x)$ в точках a, $a+h$, ..., $a+nh$.

2. Формула Лапласа и другие формулы. Если нам известны значения $f(x)$ для x, выходящих за пределы отрезка интегрирования, то можно получить еще ряд формул. Так, если $f(x)$ задана в точках a, $a+h$, ..., $a+(n+m)h$, то для каждой из точек a, $a+h$, ..., $a+(n-1)h$ можно написать формулу Ньютона для интерполирования вперед, доходящую до разностей порядка m. Интегрируя каждую из них в пределах изменения t от 0 до 1 и складывая, получим:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{1}{2}f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n + \sum_{k=2}^{m} A_k\left[f^{k-1}_{n+(k-1)/2} - f^{k-1}_{(k-1)/2}\right] + R_m, \quad (12)$$

где

$$R_m = \frac{nh^{m+1}f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} A_{m+1}. \tag{13}$$

Это — *формула Лапласа.*

Можно брать и формулы центральных разностей. Например, интегрирование интерполяционной формулы Бесселя по t в пределах от 0 до 1 даст

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx = f_{1/2} + \int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right) f^1_{1/2}\,dt + \int_0^1 \frac{t(t-1)}{2!} f^2_{1/2}\,dt +$$

$$+ \int_0^1 \frac{t(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{3!} f^3_{1/2}\,dt + \int_0^1 \frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!} f^4_{1/2}\,dt + \ldots + \int_0^1 R\,dt.$$

Коэффициентами при разностях нечетного порядка будут интегралы

$$\int_0^1 \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots(t^2-k^2)(t-k-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{(2k+3)!}\,dt.$$

Произведем замену переменных, положив $t-\frac{1}{2}=\tau$. Тогда числитель под знаком интеграла примет вид:

$$\tau\left[\tau^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\tau^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\ldots\left[\tau^2-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right],$$

а пределы интегрирования перейдут в $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$. Таким образом, эти интегралы обратятся в нуль. Интегралы, являющиеся коэффициентами при разностях четного порядка, имеют вид

$$\int_0^1 \frac{t(t^2-1)\ldots(t^2-k^2)(t-k-1)}{(2k+2)!}\,dt.$$

Обозначим их через D_k. Тогда

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_1 + D_0 f^2_{1/2} + D_1 f^1_{1/2} + \ldots + \int_0^1 R\,dt.$$

Сложив такие интегралы, взятые по отрезкам

$$[a,\ a+h],\ [a+h,\ a+2h],\ \ldots,\ [a+(n-1)h,\ a+nh],$$

получим:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{1}{2}f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n + \\ + D_0\left(f^2_{1/2} + f^2_{3/2} + \ldots + f^2_{n+1/2}\right) + \\ + D_1\left(f^4_{1/2} + f^4_{3/2} + \ldots + f^4_{n+1/2}\right) + \ldots + \overline{R}.$$

Но

$$f^{2k}_{1/2} + f^{2k}_{3/2} + \ldots + f^{2k}_{n+1/2} = \\ = \frac{1}{2}\left[f^{2k}_1 + f^{2k}_0 + f^{2k}_2 + f^{2k}_1 + \ldots + f^{2k}_n + f^{2k}_{n-1}\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[f^{2k-1}_{n+1/2} - f^{2k-1}_{1/2} + f^{2k-1}_{n-1/2} - f^{2k-1}_{-1/2}\right] = f^{4k-1}_n - f^{2k-1}_0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n + \\ + D_0\left[f^1_n - f^1_0\right] + D_1\left[f^3_n - f^3_0\right] + \ldots + \overline{R}. \quad (14)$$

Найдем вид $\overline{R}$. Остаточный член формулы Бесселя, если последняя используемая разность имеет нечетный порядок $2m+1$, выглядит так:

$$\frac{t\,(t^2-1)\,(t^2-2^2)\ldots(t^2-m^2)\,(t-m-1)}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi)\,h^{2m+2}.$$

Следовательно, в этом случае

$$\overline{R} = nD_m h^{2m+2} f^{(2m+2)}(\xi). \quad (15)$$

Коэффициенты D_i имеют следующие значения:

$$D_0 = -\frac{1}{12}, \quad D_1 = \frac{11}{720}, \quad D_2 = -\frac{191}{60\,480}, \quad D_3 = \frac{2497}{3\,628\,800}.$$

Интегрируя интерполяционную формулу Стирлинга, получим:

$$\frac{1}{h}\int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} f(x)\,dx = f_0 + f^2_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{2}\,dt + f^4_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{t^2\,(t^2-1)}{4!}\,dt + \ldots \\ \ldots + f^{2k}_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2\,(t^2-1^2)\ldots(t^2-k^2)}{(2k+2)!}\,dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} R\,dt.$$

Обозначая

$$E_{k+1}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{t^2\cdot(t^2-1^2)\ \dots\ (t^2-k^2)}{(2k+2)!}\,dt, \tag{16}$$

последнее выражение можно записать в виде

$$\frac{1}{h}\int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} f(x)\,dx=f_0+\sum_{i=1}^{k}E_i f_0^{2i}+h^{2k+2}E_{k+1}f^{(2k+2)}(\xi). \tag{17}$$

Складывая n таких выражений, найдем:

$$\frac{1}{h}\int_{a-\frac{h}{2}}^{a+n\frac{h}{2}} f(x)\,dx=f_0+f_1+\ \dots\ +f_{n-1}+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}E_i\left[f_{n-1/2}^{2i-1}-f_{-1/2}^{2i-1}\right]+\overline{R}. \tag{18}$$

Коэффициенты E_i имеют следующие значения:

$$E_1=\frac{1}{24},\quad E_2=-\frac{17}{5760},\quad E_3=\frac{367}{967\,680},\quad E_4=-\frac{27\,859}{464\,486\,400}.$$

И в этом случае нетрудно написать остаточный член. Он будет равен

$$\overline{R}=nh^{2k+2}E_{k+1}f^{(2k+2)}(\xi). \tag{19}$$

Все последние формулы используют значения функции для x, лежащих вне отрезка интегрирования. Их можно использовать как для интегрирования, так и для суммирования.

Можно было бы значительно расширить набор такого рода формул численного интегрирования. Некоторые новые формулы будут получены в главе 9, посвященной численному интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Сам читатель сможет теперь без труда получать нужные ему для тех или иных целей формулы.

§ 10. Некоторые замечания по поводу формул численного интегрирования

Мы получили ряд формул численного интегрирования. Возникает вопрос: какую формулу нужно применять в том или другом случае, какие формулы более выгодны и какие менее выгодны. На этот

вопрос нельзя ответить однозначно. Все зависит от того, каким способом задана подынтегральная функция, каковы у нас вычислительные средства, какова требуемая точность и т. п. В такой общей постановке вопроса ответить можно лишь так: та формула лучше, которая в данном случае дает ответ с нужной нам точностью при наименьшей затрате труда и времени.

Если вычисления ведутся вручную или с помощью малых вычислительных машин, то имеют значение формулы, содержащие разности. Меньшее значение имеют формулы Гаусса и Чебышева, так как вычисления с многозначными коэффициентами и абсциссами в этом случае затруднительны. Из формул, не содержащих разности, чаще всего применяется формула Симпсона.

При вычислениях на автоматических счетных машинах наибольшее значение имеют безразностные формулы. Особенно выгодны наиболее точные формулы Гаусса, так как они требуют наименьшего числа операций для получения интеграла с нужной точностью.

Здесь необходимо сделать некоторые замечания относительно более точных и менее точных формул. Эти термины были введены нами при выводе формул численного интегрирования и в них вкладывался определенный смысл. Нужно ясно себе представлять, что более точная в этом смысле формула не всегда дает практически более точный результат. В самом деле, возьмем наиболее точную из формул — формулу Гаусса. Она имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i), \tag{1}$$

где коэффициенты c_i и абсциссы x_i зафиксированы и зависят только от n и $[a, b]$. Может случиться, что подынтегральная функция обращается в нуль в каждой из точек x_i, а абсолютная величина интеграла от нее велика. Тогда разность между точным значением интеграла и приближенным, полученным по формуле Гаусса, будет также очень велика. В связи с этим нужно сказать, что при выборе той или иной формулы численного интегрирования бывает целесообразно изучить поведение подынтегральной функции и сравнить его с поведением интерполяционного многочлена, интегрированием которого получается формула численного интегрирования. Иногда возникает необходимость разбивать отрезок интегрирования на отдельные участки так, чтобы лучше описать поведение функции интерполяционными многочленами.

1. Метод Рунге приближенной оценки погрешности численного интегрирования. При пользовании любой приближенной формулой важно иметь представление о ее точности. В этой главе для каждой из полученных формул мы дали выражения остаточных чле-

нов. Однако эти остаточные члены содержат производные высоких порядков, которые в большинстве практических случаев или не могут быть оценены или могут быть оценены очень грубо, так что фактическая погрешность будет значительно меньше, чем полученная ее оценка. Поэтому на практике часто прибегают к следующему приему грубой оценки погрешностей формул численного интегрирования, предложенному Рунге. Остаточный член каждой из формул численного интегрирования может быть записан в виде

$$R = h^k M, \tag{2}$$

где h — длина отрезка интегрирования или какой-то его доли, k — фиксированное число и M — произведение постоянной на производную подынтегральной функции порядка k — 1 в какой-то точке промежутка интегрирования. Если J — точное значение интеграла, а I — приближенное его значение, то

$$J = I + h^k M. \tag{3}$$

Вычислим тот же самый интеграл, по той же формуле численного интегрирования, но взяв вместо h величину $\frac{h}{2}$. При этом, чтобы получить значение интеграла по всему отрезку, придется применять формулу численного интегрирования дважды. Обозначим сумму полученных результатов через I_1. Тогда

$$J = I_1 + \left(\frac{h}{2}\right)^k M_1 + \left(\frac{h}{2}\right)^k M_2. \tag{4}$$

Последние два члена правой части дают погрешности при каждом интегрировании. Будем предполагать, что производная, входящая в M, меняется не сильно на рассматриваемом промежутке. Тогда мы можем приближенно считать

$$J \approx I_1 + 2\left(\frac{h}{2}\right)^k M. \tag{5}$$

Исключая из (3) и (5) точное значение интеграла J, найдем:

$$R = h^k M = \frac{I_1 - I}{1 - \frac{1}{2^{k-1}}}. \tag{6}$$

Такой процесс часто употребляют для отыскания погрешностей формул не только при численном интегрировании.

Разработано очень много различных графических способов вычисления интегралов. Нужно сказать, что все они очень грубы и требуют сравнительно большой работы. Поэтому их можно рекомендовать лишь в исключительных случаях, когда интегрирование должно быть произведено в процессе других графических работ. Мы не будем здесь останавливаться на способах графического интегрирования.

Для приближенного интегрирования можно использовать специальные приборы: планиметры и интеграфы. На рис. 24 и 27 приведен общий вид этих приборов. Приемы работы на этих приборах достаточно хорошо описаны в прилагаемых к ним инструкциях.

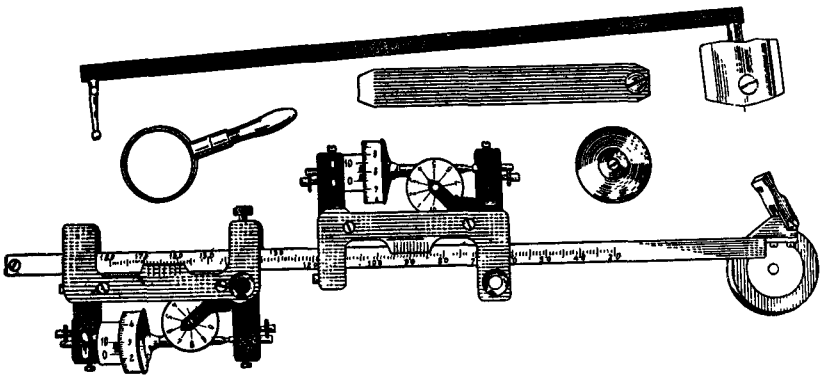

Рис. 27. Планиметр.

2. Замечание о вычислении интегралов с переменным верхним пределом. Вычисление интегралов с переменным верхним пределом можно производить по тем же формулам, что и для определенных интегралов. При этом верхнему пределу придают определенные значения и последовательно находят нужные интегралы.

В главе 9 будут приведены многочисленные формулы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Все они пригодны для вычисления неопределенных интегралов.

§ 11. Вычисление несобственных интегралов

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, связанными с вычислением несобственных интегралов. Это могут быть интегралы с бесконечными пределами или интегралы с конечными пределами, но подынтегральной функцией, обращающейся в бесконечность на отрезке интегрирования.

Несобственный интеграл с бесконечными пределами всегда можно преобразовать в несобственный интеграл или даже собственный с конечными пределами. Для этого достаточно произвести подходящую замену переменного под знаком интеграла или взять интеграл в конечных, но достаточно больших пределах так, что отбрасываемая часть интеграла значительно меньше, чем заданная нам точность вычисления интеграла. В последнем случае часто пользуются асимптотическими выражениями подынтегральных функций для оценки отбрасываемой части интеграла или для учета ее вклада в интеграл.

Мы не будем подробнее останавливаться на этом вопросе, так как во многом успех при вычислении несобственного интеграла с бесконечными пределами зависит от искусства вычислителя.

1. Метод выделения особенностей. При вычислении несобственных интегралов с конечными пределами интегрирования удобнее всего использовать *метод выделения особенностей.* Существует два метода выделения особенностей: *мультипликативный* и *аддитивный.*

Суть мультипликативного способа выделения особенностей состоит в следующем. Пусть нам требуется вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

где функция $f(x)$ обращается в бесконечность в одной или нескольких точках отрезка $[a, b]$. Мы представляем эту функцию в виде

$$f(x) = \varphi(x)\,p(x), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — ограниченная функция на $[a, b]$, обладающая там достаточным количеством непрерывных производных, а $p(x) > 0$ на $[a, b]$. Рассматривают $p(x)$ как весовую функцию и строят соответствующую формулу численного интегрирования теми приемами, которые указаны выше. За приближенное значение интеграла (1) принимают результат применения полученной формулы численного интегрирования к функции $\varphi(x)$.

Пусть, например, нам нужно вычислить интеграл

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{3}$$

Подынтегральная функция обращается в бесконечность в точках ± 1. Представим ее в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{4}$$

и будем рассматривать функцию

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5}$$

как весовую. Тогда будет применима формула численного интегрирования Эрмита:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+x_k^2}} \qquad \left(x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\,\pi\right). \tag{6}$$

При $n = 6$ получим:

$$I \approx \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 15^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 45^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 75^\circ}}\right] = 2{,}221329. \tag{7}$$

Значение интеграла с шестью верными знаками после запятой равно

$$I = 2{,}221441. \tag{8}$$

Аддитивный способ выделения особенностей состоит в следующем. Подынтегральную функцию представляют в виде

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x), \tag{9}$$

где $\varphi(x)$ не имеет особенностей и обладает достаточным числом непрерывных производных, а интеграл от $\psi(x)$ может быть найден точными методами интегрального исчисления. Возьмем в качестве примера следующий интеграл:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx. \tag{10}$$

Подынтегральную функцию представим в виде

$$\ln \sin x = \ln x + \ln \frac{\sin x}{x}. \tag{11}$$

Тогда

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin x}{x} \, dx. \tag{12}$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x \, dx = \frac{\pi}{2}\left(\ln \frac{\pi}{2} - 1\right) = -0{,}861451. \tag{13}$$

Подынтегральная функция в I_2 не имеет особенностей на отрезке интегрирования. Вычислим I_2 по формуле Симпсона, взяв $n = 1$. Получим:

$$I_2 \approx \frac{\pi}{12}[0 - 0{,}4200356 - 0{,}4515825] = -0{,}228189. \tag{14}$$

Таким образом,

$$I \approx I_1 + I_2 = -1{,}089640. \tag{15}$$

Значение интеграла с шестью верными знаками после запятой равно

$$I = -1{,}089045. \tag{16}$$

Л. В. Канторович, предложивший этот способ, указал также и на некоторые приемы представления подынтегральной функции в виде (9).

Пусть $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=(x-c)^{\alpha}\varphi(x), \tag{17}$$

где $c\in[a, b]$, $\alpha>-1$ и $\varphi(x)$ может быть представлена на отрезке $[a, b]$ формулой Тейлора по степеням $(x-c)$ с остаточным членом, зависящим от производной порядка m. Тогда $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x)=\left[\varphi(c)(x-c)^{\alpha}+\frac{\varphi'(c)}{1!}(x-c)^{\alpha+1}+\frac{\varphi''(c)}{2!}(x-c)^{\alpha+2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{\alpha+k}\right]+(x-c)^{\alpha}\left[\varphi(x)-\varphi(c)-\right.$$
$$\left.-\frac{\varphi'(c)}{1!}(x-c)-\frac{\varphi''(c)}{2!}(x-c)^2-\ldots-\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right] \tag{18}$$
$$(k<m).$$

Первая квадратная скобка правой части является степенной функцией и поэтому интегрируется без труда. Вторая квадратная скобка обращается в нуль при $x=c$ вместе со всеми производными до порядка k включительно. Следовательно, ее произведение с $(x-c)^{\alpha}$ не будет иметь никаких особенностей при $x=c$. Более того, при $x=c$ это произведение будет обладать непрерывными производными до порядка $k+[\alpha]$ включительно. Поэтому можно ожидать, что применение формул численного интегрирования к нему даст хорошие результаты.

Указанный прием можно применить и в том случае, когда подынтегральная функция имеет вид

$$f(x)=(x-c)^{\alpha}\ln^{p}(x-c)\varphi(x), \tag{19}$$

где p — натуральное число и α, c и $\varphi(x)$ таковы же, как и ранее. В этом случае получим разложение

$$f(x)=\ln^{p}(x-c)\left[\varphi(c)(x-c)^{\alpha}+\frac{\varphi'(c)}{1!}(x-c)^{\alpha+1}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{\alpha+k}\right]+\ln^{p}(x-c)(x-c)^{\alpha}\times$$
$$\times\left[\varphi(x)-\varphi(c)-\frac{\varphi'(c)}{1!}(x-c)-\ldots-\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right]. \tag{20}$$

Опять интеграл от первого слагаемого правой части выражается в конечном виде через элементарные функции, если применить интегрирование по частям. Второе слагаемое правой части будет гладкой функцией.

Прием можно обобщить, взяв несколько особенностей на промежутке интегрирования. Пусть, например,

$$f(x)=(x-c_1)^{\alpha_1}(x-c_2)^{\alpha_2}\dots(x-c_n)^{\alpha_n}\varphi(x), \tag{21}$$

где $\alpha_i>-1$, $c_i\neq c_j$ $(i\neq j)$, $c_i\in[a, b]$, а $\varphi(x)$ обладает на $[a, b]$ непрерывными производными достаточно высокого порядка. При этом последовательно исключаем особенности в каждой из точек c_i. Сначала, как и при наличии одной особенности, представляем $f(x)$ в виде

$$f(x)=(x-c_1)^{\alpha_1}\left[a_0^{(1)}+a_1^{(1)}(x-c_1)+\dots+a_{k_1}^{(1)}(x-c_1)^{k_1}\right]+\psi_1(x), \tag{22}$$

где $\psi_1(x)$ — достаточно гладкая функция в точке c_1. Затем таким же образом исключаем особенности в точке c_2 у $\psi_1(x)$, в точке c_3 у $\psi_2(x)$, ..., в точке c_n у $\psi_{n-1}(x)$. В конце концов, дело сведется к вычислению суммы интегралов

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{k_j}a_i^{(j)}(x-c_j)^{\alpha_j+i}\,dx+\int_a^b\psi_n(x)\,dx, \tag{23}$$

где $\psi_n(x)$ уже не имеет особенностей на $[a, b]$.

И в этом случае можно ввести дополнительные логарифмические множители.

Рассмотрим еще один случай. Пусть

$$f(x)=\varphi[\psi(x)], \tag{24}$$

где $\psi(x)$ — гладкая функция, принимающая в точке $x=c\in[a, b]$ значение, при котором φ имеет особенность. Представим $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x)=[\psi(c)+\psi'(c)(x-c)]+[\psi(x)-\psi(c)-\psi'(c)(x-c)]. \tag{25}$$

Тогда

$$f(x)=\varphi[\psi(c)+\psi'(c)(x-c)]+\{\varphi[\psi(x)]-\varphi[\psi(c)+\psi'(c)(x-c)]\}. \tag{26}$$

Предполагаем, что $\varphi[\psi(c)+\psi'(c)(x-c)]$ можно проинтегрировать в конечном виде. Интегрирование второго слагаемого можно осуществить по формулам численного интегрирования, так как фигурная скобка не имеет особенности при $x=c$. Приведенный выше пример (10) принадлежит как раз к такому типу.

Данные нами методы выделения особенностей можно применять не только для вычисления несобственных интегралов, а и в том случае, когда подынтегральная функция ограничена, но не обладает достаточно большим числом ограниченных производных. При этом, как показывают выражения остаточных членов, формулы численного

интегрирования дадут, вообще говоря, большую погрешность. Метод выделения особенностей позволит иногда представить подынтегральное выражение в виде суммы функции, интегрируемой в конечном виде, и достаточно гладкой функции.

2. Специальные приемы. Если известен характер поведения подынтегральной функции вблизи особенности, то можно построить специальные формулы, учитывающие особенность и позволяющие получить значение интеграла на некотором небольшом отрезке, содержащем особенность. Интеграл по остальной части отрезка интегрирования будет вычисляться по обычным формулам численного интегрирования. Пусть, например, левый конец отрезка интегрирования есть 0 и функция $f(x)$ вблизи него может быть представлена в виде

$$f(x)=\alpha x^{-\frac{1}{2}}+\beta x^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Подберем коэффициенты c_1 и c_2 так, чтобы имело место

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = h\,[c_1 f(h)+c_2 f(2h)] \tag{28}$$

при любых α, β и h. Из (28) следует

$$2\alpha(2h)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(2h)^{\frac{3}{2}}\beta = c_1\left[\alpha h^{\frac{1}{2}}+\beta h^{\frac{3}{2}}\right]+c_2\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}}h^{\frac{1}{2}}+\beta\sqrt{2}h^{\frac{3}{2}}\right]. \tag{29}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} 2\sqrt{2} &= c_1+c_2\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{4}{3}\sqrt{2} &= c_1+c_2\sqrt{2}, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

или

$$c_1=\frac{8}{3}\sqrt{2};\quad c_2=-\frac{4}{3}. \tag{31}$$

Итак, в нашем случае

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = h\left[\frac{8\sqrt{2}}{3}f(h)-\frac{4}{3}f(2h)\right]. \tag{32}$$

Аналогично находим:

$$\int_0^{3h}\left(\alpha x^{-\frac{1}{2}}+\beta x^{\frac{1}{2}}\right)dx = h\cdot 2\sqrt{3}f(h), \tag{33}$$

$$\int_0^{3h}\left(\alpha x^{-\frac{1}{2}}+\beta x^{\frac{1}{2}}+\gamma x^{\frac{3}{2}}\right)dx = h\left[\frac{14}{5}\sqrt{3}f(h)-\frac{8}{5}\sqrt{6}f(2h)+\frac{17}{5}f(3h)\right], \tag{34}$$

$$\int_0^{2h}\left(\alpha x^{\frac{1}{2}}+\beta x^{\frac{3}{2}}\right)dx=h\left[\frac{16}{15}\sqrt{2}f(h)+\frac{4}{15}f(2h)\right], \tag{35}$$

$$\int_0^{3h}\left(\alpha x^{\frac{1}{2}}+\beta x^{\frac{3}{2}}\right)dx=h\left[\frac{6}{5}\sqrt{3}f(h)+\frac{4}{5}f(3h)\right], \tag{36}$$

$$\int_0^{3h}\left(\alpha x^{\frac{1}{2}}+\beta x^{\frac{3}{2}}+\gamma x^{\frac{5}{2}}\right)dx=h\left[\frac{6}{7}\sqrt{3}f(h)+\frac{12}{35}\sqrt{6}f(2h)+\frac{16}{35}f(3h)\right]. \tag{37}$$

Во всех этих случаях $f(x)$ означает подынтегральную функцию. Точно таким же способом можно получить формулы для вычисления интегралов вблизи особенностей другого характера.

В качестве примера используем формулу (32) для вычисления интеграла

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}. \tag{38}$$

Подынтегральная функция имеет особенность при $x=1$ как раз такого характера, который учитывается этой формулой. Возьмем $h=0{,}1$ и представим интеграл (38) в виде

$$I=\int_{0{,}8}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^{0{,}8}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{39}$$

Первый интеграл вычислим по формуле (32). Это даст

$$\int_{0{,}8}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0{,}1\left[\frac{8\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}9)^2}}-\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}8)^2}}\right]=$$

$$=0{,}1\left[\frac{8\sqrt{2}}{3}\cdot 2{,}294157-\frac{4}{3}\cdot 1{,}666667\right]=\frac{0{,}1}{3}\,19{,}287761. \tag{40}$$

Второй интеграл вычислим по формуле Симпсона, взяв $h=0{,}1$ и $n=4$. Получим:

$$\int_0^{0{,}8}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{0{,}1}{3}\left[1+\frac{4}{\sqrt{1-(0{,}1)^2}}+\frac{2}{\sqrt{1-(0{,}2)^2}}+\frac{4}{\sqrt{1-(0{,}3)^2}}+\right.$$

$$+\frac{2}{\sqrt{1-(0{,}4)^2}}+\frac{4}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}+\frac{2}{\sqrt{1-(0{,}6)^2}}+\frac{4}{\sqrt{1-(0{,}7)^2}}+$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}8)^2}}\right]=\frac{0{,}1}{3}\cdot 27{,}823303. \tag{41}$$

Таким образом,

$$I \approx \frac{1}{3} \cdot 4{,}7111064 = 1{,}570369. \tag{42}$$

Точное значение интеграла таково:

$$I = 1{,}570796. \tag{43}$$

Приемы и методы вычисления несобственных интегралов, приведенные в этом параграфе, не могут исчерпать всего многообразия случаев, которые могут встретиться на практике. Да и невозможно в одной книге, какая объемистая бы она не была, дать рецепты на все случаи жизни. Однако высказанные здесь идеи могут помочь читателю найти подход к решению конкретной задачи, с которой он встретится.

§ 12. Приближенное вычисление кратных интегралов

1. Метод повторного применения квадратурных формул. Как известно из анализа, вычисление кратных интегралов может быть осуществлено путем повторного вычисления однократных интегралов. Поэтому одним из простейших путей получения формул для приближенного вычисления кратных интегралов является повторное применение полученных нами формул численного интегрирования однократных интегралов. Проиллюстрируем это на примере вычисления двойного интеграла

$$I = \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy, \tag{1}$$

где область G представляет собой прямоугольник $\{a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d\}$. Интеграл (1) можно записать в виде

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy. \tag{2}$$

Применим формулу Симпсона для вычисления внешнего интеграла. Это даст

$$I = \frac{b-a}{6}\left[\int\limits_c^d f(a, y)\, dy + 4\int\limits_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy + \int\limits_c^d f(b, y)\, dy\right] + R_1. \tag{3}$$

Каждый из интегралов внутри квадратной скобки будем также вычислять по формулам численного интегрирования. Применим,

например, снова формулу Симпсона. Будем иметь:

$$\int_c^d f(a, y)\,dy = \frac{d-c}{6}\left[f(a, c) + 4f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f(a, d)\right] + R_2, \tag{4}$$

$$\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right)dy = \frac{d-c}{6}\left[f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + 4f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)\right] + R_3, \tag{5}$$

$$\int_c^d f(b, y)\,dy = \frac{d-c}{6}\left[f(b, c) + 4f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f(b, d)\right] + R_4. \tag{6}$$

Подставляя (4), (5), (6) в (3), найдем:

$$I = \frac{(b-a)(d-c)}{36}\left\{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) + 4\left[f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)\right] + 16f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\right\} + R. \tag{7}$$

Остаточный член этой формулы

$$R = R_1 + \frac{b-a}{6}[R_2 + 4R_3 + R_4] \tag{8}$$

равен нулю, если под знаком интеграла стоит произвольный многочлен степени не выше 3.

Для остаточного члена можно получить оценку. Заметим, что

$$R_1 = \int_a^b \left\{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) \times \int_c^d f\left(x; a; \frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}; b; y\right)dy\right\} dx, \tag{9}$$

$$R_2 = \int_c^d \left\{(y-c)\left(y - \frac{c+d}{2}\right)^2 (y-d) f\left(a; y; c; \frac{c+d}{2}; \frac{c+d}{2}; d\right)\right\} dy, \tag{10}$$

$$R_3 = \int_c^d \left\{(y-c)\left(y - \frac{c+d}{2}\right)^2 (y-d) \times f\left(\frac{a+b}{2}; y; c; \frac{c+d}{2}; \frac{c+d}{2}; d\right)\right\} dy, \tag{11}$$

$$R_4 = \int_c^d \left\{(y-c)\left(y - \frac{c+d}{2}\right)^2 (y-d) f\left(b; y; c; \frac{c+d}{2}; \frac{c+d}{2}; d\right)\right\} dy. \tag{12}$$

Таким образом,

$$\frac{(b-a)}{6}[R_2+4R_3+R_4]=\frac{b-a}{6}\int_c^d (y-c)\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2(y-d)\times$$
$$\times\left[f\left(a;\, y;\, c;\, \frac{c+d}{2};\, \frac{c+d}{2};\, d\right)+4f\left(\frac{a+b}{2};\, y;\, c;\, \frac{c+d}{2};\, \frac{c+d}{2};\, d\right)+\right.$$
$$\left.+f\left(b;\, y;\, c;\, \frac{c+d}{2};\, \frac{c+d}{2};\, d\right)\right]dy. \quad (13)$$

Но

$$\frac{b-a}{6}\left[f\left(a;\, y;\, c;\, \frac{c+d}{2};\, \frac{c+d}{2};\, d\right)+4f\left(\frac{a+b}{2};\, y;\, c;\, \frac{c+d}{2};\, \frac{c+d}{2};\, d\right)+\right.$$
$$\left.+f\left(b;\, y;\, c;\, \frac{c+d}{2};\, \frac{c+d}{2};\, d\right)\right]=$$
$$=\int_a^b f\left(x;\, y;\, c;\, \frac{c+d}{2};\, \frac{c+d}{2};\, d\right)dx+R_5, \quad (14)$$

где

$$R_5=-\int_a^b f\left(x;\, a;\, \frac{a+b}{2};\, \frac{a+b}{2};\, b;\, y;\, c;\, \frac{c+d}{2};\, \frac{c+d}{2};\, d\right)\times$$
$$\times(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx. \quad (15)$$

Собирая все необходимые члены, находим:

$$R=\int_a^b\left\{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\times\right.$$
$$\left.\times\int_c^d f\left(x;\, a;\, \frac{a+b}{2};\, \frac{a+b}{2};\, b;\, y\right)dy\right\}dx+$$
$$+\int_c^d\left\{(y-c)\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2(y-d)\times\right.$$
$$\left.\times\int_a^b f\left(x;\, y;\, c;\, \frac{c+d}{2};\, \frac{c+d}{2};\, d\right)dx\right\}dy-$$
$$-\int_c^d\left\{(y-c)\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2(y-d)\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\times\right.$$
$$\left.\times f\left(x;\, a;\, \frac{a+b}{2};\, \frac{a+b}{2};\, b;\, y;\, c;\, \frac{c+d}{2};\, \frac{c+d}{2};\, d\right)dx\right\}dy. \quad (16)$$

Это выражение теми же рассуждениями, что и в главе 2, можно привести к виду

$$R = -\frac{(b-a)^5(d-c)}{2^6 \cdot 45}\frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta_1)}{\partial x^4} - \frac{(d-c)^5(b-a)}{2^6 \cdot 45}\frac{\partial^4 f(\xi_2, \eta_2)}{\partial y^4} - \frac{(d-c)^5(b-a)^5}{2^{12} \cdot 45^2}\frac{\partial^8 f(\xi_3, \eta_3)}{\partial x^4 \partial y^4}. \quad (17)$$

Таким способом можно получить и другие формулы для приближенного вычисления кратных интегралов. При этом можно брать разные формулы численного интегрирования для вычисления внутреннего и внешнего интегралов. Можно также при повторном применении формул численного интегрирования для разных интегралов брать разные формулы.

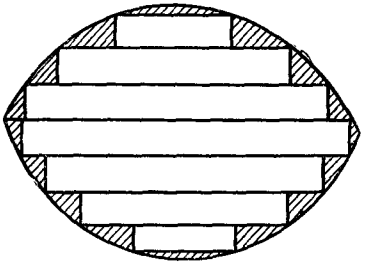

Рис. 28.

Если область интегрирования не является прямоугольником со сторонами, параллельными осями координат, или если стороны прямоугольника очень велики, то целесообразно разбить область интегрирования на частичные области, одни из которых являются нужными прямоугольниками, а интегралами по другим можно пренебречь. Пример такого возможного разбиения приведен на рис. 28. Частичные области, которые нужно отбросить, на рисунке заштрихованы.

В некоторых случаях такой процесс становится невыгодным, так как приводит к большим вычислениям и большим погрешностям. Тогда можно разбить область интегрирования на несколько областей вида

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \quad (18)$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — заданные кривые. Интеграл по области (18) можно записать так:

$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \quad (19)$$

К нему можно применить те же рассуждения, что и к интегралу по прямоугольной области. Обозначим

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \quad (20)$$

Применяем для вычисления интеграла

$$I = \int_a^b F(x)\,dx \tag{21}$$

некоторую формулу численного интегрирования. Получим:

$$I \approx \sum_{k=1}^{n} c_k F(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\varphi_1(x_k)}^{\varphi_2(x_k)} f(x_k, y)\,dy. \tag{22}$$

Для вычисления каждого из интегралов

$$I_k = \int_{\varphi_1(x_k)}^{\varphi_2(x_k)} f(x_k, y)\,dy \tag{23}$$

применяем свою формулу численного интегрирования

$$I_k \approx \sum_{i=1}^{n_k} c_i^{(k)} f(x_k, y_i). \tag{24}$$

В результате будем иметь:

$$I \approx \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{i=1}^{n_k} c_i^{(k)} f(x_k, y_i). \tag{25}$$

Варьируя различные формулы численного интегрирования, можно получить различные формулы типа (25). Аналогичный прием можно применять и в том случае, когда частичные области записываются в виде

$$c \leqslant y \leqslant d, \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y). \tag{26}$$

Все приведенные выше рассуждения можно перенести на n-кратные интегралы при $n > 2$.

Нужно заметить, что данный нами способ обычно приводит к таким формулам для приближенного вычисления кратных интегралов, для применения которых требуется вычислить подынтегральную функцию в значительном числе точек. Так, если область прямоугольная и при первом интегрировании используется формула с n ординатами, а при втором — с m ординатами, то нам придется вычислять подынтегральную функцию в mn точках. В связи с этим, чтобы не уменьшать точность и не увеличивать число точек, для которых нужно подсчитывать подынтегральную функцию, целесообразно использовать наиболее точные квадратурные формулы, такие, например, как формулы Гаусса и Чебышева.

2. Метод замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом. Другой путь для получения формул приближенного вычисления кратных интегралов состоит в замене

подынтегральной функции некоторым интерполяционным многочленом. В главе 2 мы получили много таких формул. Все они имеют вид

$$L(x, y) = f(x_1, y_1) P_1(x, y) + f(x_2, y_2) P_2(x, y) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_n, y_n) P_n(x, y). \qquad (27)$$

Используя (27), получим:

$$I = \int_G \int f(x, y)\, dx\, dy \approx \int_G \int L(x, y)\, dx\, dy =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \int_G \int P_i(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i, y_i), \qquad (28)$$

где

$$c_i = \int_G \int P_i(x, y)\, dx\, dy. \qquad (29)$$

Так как функции $P_i(x, y)$ являются многочленами, то вычисление коэффициентов c_i для простых областей G не вызывает затруднений.

Рассмотрим снова случай прямоугольной области. Возьмем какую-то сетку на ней, образованную прямыми:

$$x_i = a + ih, \quad y_j = c + jl$$
$$\left(i = 0, 1, \ldots, n; \; j = 0, 1, \ldots, m; \; h = \frac{b-a}{n}, \; l = \frac{d-c}{m}\right). \qquad (30)$$

В главе 2 мы получили следующую интерполяционную формулу, использующую узлы (x_i, y_j):

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_i, y_j) \frac{\omega_n(x)\, \omega_m(y)}{(x - x_i)(y - y_j)\, \omega_n'(x_i)\, \omega_m'(y_j)} + R, \qquad (31)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \omega_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n), \\ \omega_m(y) &= (y - y_0)(y - y_1) \ldots (y - y_m). \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Интегрирование ее дает

$$I = \int_G \int f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_i, y_j) \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\, \omega_n(x_i)}\, dx \times$$
$$\times \int_c^d \frac{\omega_m(y)}{(y - y_j)\, \omega_m'(y_j)}\, dy + \int_G \int R\, dx\, dy. \qquad (33)$$

Интегралы

$$\int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\, \omega_n'(x_i)}\, dx, \quad \int_c^d \frac{\omega_m(y)}{(y - y_j)\, \omega_m'(y_j)}\, dy \qquad (34)$$

являются коэффициентами формул численного интегрирования для однократных интегралов. Поэтому применение формулы (31) для получения формул приближенного вычисления кратных интегралов эквивалентно повторному интегрированию.

Остаточный член R интерполяционной формулы (31) имеет вид

$$R = \omega_n(x) f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n; y) + \omega_m(y) f(x; y; y_0; \ldots; y_m) - \\ - \omega_n(x)\,\omega_m(y) f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n; y; y_0; \ldots; y_m). \quad (35)$$

Интегрируя его, мы получим остаточный член формулы (33). Оценка последнего может быть произведена использованием тех же рассуждений, которые были применены при выводе формул Ньютона — Котеса. Мы не будем приводить здесь получающихся при этом формул, так как читатель без труда сможет получить их сам.

Можно разбивать отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ не на равные части, как это у нас сделано, а на произвольные. Если опять обозначить точки деления через $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $y_0, y_1, \ldots, y_m$ и в качестве узлов в формуле (31) взять точки пересечения прямых $x = x_i$ и $y = y_j$, то снова придем к формуле вида (33). При этом можно пытаться подбирать узлы так, чтобы по возможности упростить формулу. Упрощение понимается по-разному. Можно считать, что формула проста, если ее коэффициенты, абсциссы x_i и ординаты y_j достаточно удобны для вычислений. Гораздо более важно получать формулы, в которых при заданной точности требуется вычислять значения подынтегральной функции в возможно меньшем количестве точек. При практическом использовании формулы, если в нашем распоряжении имеется хорошая вычислительная техника, вычисление выражения

$$\sum_{i,j} c_{ij} f(x_i, y_j) \quad (36)$$

не встречает затруднений при любых c_{ij}, x_i и y_i. Однако если функция $f(x, y)$ вычисляется сложно, то экономия даже в одном таком вычислении имеет существенное значение.

Такой экономии можно достичь, например, если взять в качестве x_i и y_j абсциссы соответствующих квадратурных формул Гаусса для отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$. Так, при $n = 1$ можно получить формулу

$$\int\int_G f(x, y)\,dx\,dy = \frac{(b-a)(d-c)}{4}\left[f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2\sqrt{3}}\right) + \right. \\ + f\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \frac{c+d}{2} - \frac{d-c}{2\sqrt{3}}\right) + \\ \left. + f\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \frac{d+c}{2} - \frac{d-c}{2\sqrt{3}}\right)\right] + R, \quad (37)$$

где

$$R = \int_a^b dx \int_c^d \omega_1^2(y) f(x; y; y_0; y_0; y_1; y_1)\, dy + \\ + \int_a^b \left\{ \omega_1^2(x) \int_c^d f(x; x_0; x_0; x_1; x_1; y)\, dy \right\} dx - \\ - \int_a^b \left\{ \omega_1^2(x) \int_c^d \omega_1^2(y) f(x; x_0; x_0; x_1; x_1; y; y_0; y_0; y_1; y_1)\, dy \right\} dx \quad (38)$$

и

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \\ y_0 &= \frac{d+c}{2} - \frac{d-c}{2\sqrt{3}}, \quad y_1 = \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2\sqrt{3}}, \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(x) &= (x - x_0)(x - x_1), \\ \omega_1(y) &= (y - y_0)(y - y_1). \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Упрощая, как и при выводе формулы Гаусса, найдем:

$$R = \frac{(d-c)^5 (b-a)}{24^3 \cdot 5} \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta_1)}{\partial y^4} + \frac{(b-a)^5 (d-c)}{24^3 \cdot 5} \frac{\partial^4 f(\xi_2, \eta_2)}{\partial x^4} - \\ - \frac{(b-a)^5 (d-c)^5}{24^6 \cdot 25} \frac{\partial^8 f(\xi_3, \eta_3)}{\partial x^4 \partial y^4} \quad (41)$$

Получили формулу, для использования которой требуется вычислить значение подынтегральной функции лишь в четырех точках. Остаточный член этой формулы даже несколько лучше, чем у формулы Симпсона, хотя последняя использует девять значений подынтегральной функции.

В предыдущих рассуждениях мы использовали интерполяционную формулу (31). С таким же успехом можно использовать и другие интерполяционные формулы для функций многих переменных, полученные в предыдущей главе. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе, так как получение самих формул не вызывает затруднений, а исследование остаточных членов довольно громоздко.

3. Метод Л. А. Люстерника и В. А. Диткина. Рассмотрим еще один путь получения формул для приближенного вычисления кратных интегралов. Пусть мы хотим получить формулу вида:

$$\int\int \dots \int_G f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n \approx \sum_{i=1}^{s} c_i f\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\right), \quad (42)$$

где коэффициенты c_i и точки $\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)$ не зависят от выбора функции f. Предполагаем, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно разложить по формуле Маклорена во всей области G:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(0, 0, \ldots, 0). \quad (43)$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{x_1 D_1 + x_2 D_2 + \ldots + x_n D_n} f(0, 0, \ldots, 0), \quad (44)$$

где $D_1, D_2, \ldots, D_n$ — операторы частного дифференцирования.

Интегрируя (43) по области G, получим некоторое выражение, зависящее от частных производных функции f в точке $(0, 0, \ldots, 0)$. Подставляя в правую часть (42) правые части (43) при соответствующих значениях $\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)$, также получим некоторое выражение, зависящее от производных функции f в точке $(0, 0, \ldots, 0)$ и, кроме того, от $\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)$ и c_i. Потребуем, чтобы коэффициенты при одинаковых производных порядка, меньшего или равного r, в правой и левой частях совпадали. Это эквивалентно тому, что формула (42) дает точные значения для интеграла, если под знаком интеграла стоит произвольный многочлен степени не выше r. Естественно условиться считать ту формулу более точной, для которой r больше. Наше требование можно сформулировать иначе, а именно можно искать такие формулы (42), для которых разложение

$$\int\int \ldots \int_G e^{x_1 d_1 + x_2 d_2 + \ldots + x_n d_n} dx_1 dx_2 \ldots dx_n -$$

$$- \sum_{i=1}^{s} c_i e^{x_1^{(i)} d_1 + x_2^{(i)} d_2 + \ldots + x_n^{(i)} d_n} =$$

$$= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=r+1}^{\infty} c_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \ldots d_n^{\alpha_n} \quad (45)$$

по степеням параметров $d_1, d_2, \ldots, d_n$ должно начинаться с членов размерности не менее $r+1$. Последнее следует из представления (44). Такой прием и был предложен чл.-корр. АН СССР, проф. Л. А. Люстерником и проф. В. А. Диткиным.

Условие (45) дает некоторые уравнения, связывающие коэффициенты c_i и точки $\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)$. Эти уравнения можно было бы получить и методом неопределенных коэффициентов. Мы не будем выписывать их здесь для общего случая, а ограничимся рассмотрением одного примера.

Пусть область G будет квадрат со сторонами, равными 2 и параллельными осям координат. Центр квадрата пусть находится в начале координат. При этом

$$\iint\limits_G e^{xd_1+yd_2}\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{+1} e^{xd_1}\,dx \int\limits_{-1}^{+1} e^{yd_2}\,dy =$$

$$= 4\left[1+\frac{d_1^2}{3!}+\ldots+\frac{d_1^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{d_2^2}{3!}+\ldots+\frac{d_2^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots\right] \qquad (46)$$

и

$$\sum_{i=1}^{s} c_i e^{x_i d_1+y_i d_2} = \sum_{i=1}^{s} c_i\left\{\left[1+x_i d_1+\frac{x_i^2 d_1^2}{2!}+\ldots+\frac{x_i^n d_2^n}{n!}+\ldots\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+y_i d_2+\frac{y_i^2 d_2^2}{2!}+\ldots+\frac{y_i^n d_i^n}{n!}+\ldots\right]\right\}. \qquad (47)$$

Таким образом, уравнения, связывающие c_i, x_i и y_i, в нашем случае будут таковы:

$$\left.\begin{aligned}
4 &= \sum_{i=1}^{s} c_i,\\
0 &= \sum_{i=1}^{s} c_i x_i = \sum_{i=1}^{s} c_i y_i,\\
\frac{2}{3} &= \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i x_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i y_i^2}{2};\quad 0 = \sum_{i=1}^{s} c_i x_i y_i,\\
0 &= \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i x_i^3}{3!} = \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i y_i^3}{3!} = \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i x_i^2 y_i}{2!} = \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i x_i y_i^2}{2!},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

Фиксируя s и подбирая значения c_i, x_i и y_i, удовлетворяющие соответствующей системе, мы будем получать формулы приближенного интегрирования.

4. Замечание о методе Монте-Карло. С увеличением кратности интеграла резко возрастает число точек, в которых приходится подсчитывать значения подынтегральной функции, чтобы обеспечить нужную точность. Если при вычислении однократного интеграла для обеспечения нужной точности требуется s узлов, то для вычисления соответствующего n-кратного интеграла придется брать примерно s^n

узлов. При больших n эти вычисления могут оказаться практически невыполнимыми. В связи с этим в последнее время усиленно разрабатывались вероятностные методы вычисления кратных интегралов. Их называют *методом Монте-Карло*. Мы не будем входить в подробности этого метода и лишь кратко наметим один из его вариантов.

Пусть нам требуется вычислить n-кратный интеграл

$$I = \int\limits_G \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \tag{49}$$

где область G является единичным кубом n-мерного пространства

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{50}$$

и функция f удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant f \leqslant 1. \tag{51}$$

Если G и f ограничены, то всегда можно добиться выполнения (50) и (51).

Предположим, что у нас имеется способ получить с равной возможностью любую комбинацию из $n+1$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, удовлетворяющих условиям (50) и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Получив такую группу, мы вычисляем $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и проверяем выполнение неравенства

$$y \leqslant f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{52}$$

Отношение числа m случаев, в которых условие (52) будет выполнено, к числу M всех произведенных испытаний должно стремиться к I. При больших значениях M мы получим приближенное значение для I.

Применение этого метода также сопряжено с большими трудностями. Нужно уметь получать равновозможные последовательности из $n+1$ чисел. Эти числа не могут полностью заполнить единичный $(n+1)$-мерный куб, так как каждое отдельное число дается в дискретной форме с конечным числом разрядов. Это создает дополнительные погрешности. Трудно оценить полную погрешность.

Несколько слов относительно вычисления несобственных кратных интегралов. Здесь применимы все те приемы, о которых говорилось для случая однократных интегралов.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить следующие интегралы:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad \int\limits_1^3 \frac{dx}{1+x}, \quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, \quad \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx, \quad \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$$

с точностью до 10^{-4} по приближенным формулам трапеций, Симпсона, Чебышева, Гаусса.

2. Получить следующие формулы приближенного интегрирования:

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} f(x)\,dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) \sin^2\frac{k\pi}{n},$$

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x)\,dx \approx \frac{4\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\right) \sin\frac{2k\pi}{n},$$

$$\int_{0}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos^2\frac{(2k+1)\,\pi}{2n}\right),$$

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x(1-x)} f(x)\,dx \approx \frac{\pi}{4n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\right) \sin\frac{2\pi k}{n},$$

$$\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{x}} f(x)\,dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos^2\frac{k\pi}{n}\right) \sin\frac{2\pi k}{n}.$$

Найти остаточные члены.

3. Показать, что формула

$$\int_{-0}^{+\infty} e^{-x} f(x)\,dx \approx \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$$

даст точные значения, если $f(x)$ многочлен степени не выше 3.

4. Показать, что формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6}\left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4f(0) + f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

дает точные значения, если $f(x)$ многочлен степени не выше 5.

5. Вычислить по формуле Эйлера $\int_{100}^{105} \frac{dx}{x}$ с точностью до девятого десятичного знака.

6. Вычислить с точностью до девятого десятичного знака сумму

$$\frac{1}{201^2} + \frac{1}{202^2} + \ldots + \frac{1}{299^2}.$$

7. Вычислить с точностью до десятого десятичного знака сумму

$$\frac{1}{11^3}+\frac{1}{12^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{14^5}+\ldots$$

8. Показать, что сумма седьмых и пятых степеней первых n натуральных чисел равна удвоенному квадрату суммы их третьих степеней.

9. Вычислить $\log(79!)$.

10. Показать, что

$$\frac{1}{n}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+\ldots+f\left(a+nh-\frac{h}{2}\right)+$$
$$+\frac{h}{24}[f'(a+nh)-f'(a)]-\frac{7h^3}{5760}[f'''(a+nh)-f'''(a)]+$$
$$+\frac{31h^5}{157\,680}[f^{(V)}(a+nh)-f^{(V)}(a)]-\ldots$$

11. Используя формулу Эйлера, разложить в ряд по степеням x функцию $\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

12. Доказать равенство

$$B_n(x)=(-1)^n B_n(1-x).$$

13. Получить из предыдущего равенства, что

$$B_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)=B_{2n-1}(1)=B_{2n-1}(0)=0.$$

14. Показать, что $B_{2n}(x)$ симметричны относительно $x=\frac{1}{2}$.

15. Показать, что

$$\int_x^{x+1} B_n(x)\,dx=x^n.$$

16. Показать, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^m=\int_1^{n+1} B_m(x)\,dx.$$

17. Рассмотрим функцию $\overline{B}_{2n}(x)$, равную $B_{2n}(x)$ на $[0,1]$ и продолженную периодически в обе стороны с периодом 1. Показать, что коэффициенты Фурье этой функции при ее разложении в ряд Фурье на отрезке $[0,1]$ имеют вид

$$a_0=0,\quad a_k=\frac{(-1)^{n+1}\,2\,(2n)!}{(2\pi k)^{2n}},\quad b_k=0.$$

18. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, показать, что

$$B_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{2\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}.$$

19. Определить постоянную Эйлера

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

20. Получить при $m>1$ формулу

$$\sum_{n=a}^{\infty}\frac{1}{n^m}=\frac{1}{(m-1)\,a^{m-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{a^m}+\frac{B_2}{2!}\frac{m}{a^{m+1}}+\frac{B_4}{4!}\frac{m(m-1)(m-2)}{a^{m+3}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{B_{2r}}{(2r)!}\frac{m(m+1)\ldots(m+2r-2)}{a^{m+2r-1}}\theta.\qquad 0<\theta<1.$$

21. Вычислить с точностью до 10^{-7} следующие суммы:

$$\sum_{n=1}^{10\,000}\frac{1}{n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}.$$

22. Получить формулу

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh}f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}f\left[a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right]+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{k-1}-1}{2^{2k-1}}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k-1}\times$$

$$\times\left[f^{(2k-1)}(a+nh)-f^{(2k-1)}(a)\right]+\frac{nh^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\left[f^{(2n)}(\xi)-\frac{1}{2^{n+1}}f^{(2n)}(\xi_1)\right].$$

23. Показать, что коэффициенты A_k в формуле Грегори могут быть вычислены по формуле

$$A_k=(-1)^{k-1}\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0\ldots\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0\ldots\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0\ldots\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ldots\end{vmatrix}\qquad[(k+1)\text{ строка}].$$

24. Вычислить по формуле Грегори $\int_{100}^{105}\frac{dx}{x}$ с точностью до седьмого знака.

25. Получить следующую формулу:

$$f_0+f_{1/m}+f_{2/m}+\ldots+f_r=m(f_0+f_1+\ldots+f_r)-\frac{m-1}{2}(f_r+f_0)-$$

$$-\frac{m^2-1}{12m}\left[f^1_{r-1/2}-f^1_{1/2}\right]-\frac{m^2-1}{24m}\left(f^2_{r-1}+f^2_1\right)-\frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{720m^3}\times$$

$$\times\left(f^3_{r-1/2}-f^3_{1/2}\right)-\frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{480m^3}\left(f^4_{m-2}+f^4_2\right)-\ldots,$$

где $f_{1/m}$, $f_{2/m}$, ... — значения $f(x)$ в точках деления интервала $(a+kh,\ a+(k+1)h)$ на m равных частей.

26. Получить следующие формулы численного интегрирования, дающие точные значения для интеграла, если $f(x)$ — многочлен степени не выше пятой:

$$\int_a^{a+6} f(x)\,dx \approx \frac{3}{10}(f_a + 5f_{a+1} + f_{a+2} + 6f_{a+3} + f_{a+4} + 5f_{a+5} + f_{a+6}),$$

$$\int_a^{a+6} f(x)\,dx \approx 0{,}28\,(f_a + f_{a+6}) + 1{,}62\,(f_{a+1} + f_{a+5}) + 2{,}2f_{a+3},$$

$$\int_a^{a+10} f(x)\,dx \approx \frac{5}{126}\{8\,(f_a + f_{a+10}) + 35\,(f_{a+1} + f_{a+3} + f_{a+7} + f_{a+9}) + 15\,(f_{a+2} + f_{a+4} + f_{a+6} + f_{a+8}) + 36f_{a+5}\}.$$

27. Показать, что если пренебречь пятыми разностями, то

$$\int_a^{a+6n} f(x)\,dx \approx 0{,}28\,(f_a + 2f_{a+6} + 2f_{a+n} + \ldots + f_{a+6n}) + 1{,}62\,(f_{a+1} + f_{a+3} + \ldots) + 0{,}58\,(f_{a+3} + f_{a+9} + \ldots),$$

$$\int_a^{a+6n} f(x)\,dx \approx \frac{3}{10}[(f_a + f_{a+2} + f_{a+4} + \ldots + f_{a+6n}) + 5(f_{a+1} + f_{a+5} + \ldots + f_{a+6n-1}) + (f_{a+3} + f_{a+6} + \ldots + f_{a+6n-3})].$$

28. Показать, что

$$\frac{8}{3h}\int_0^{3ph} f(x)\,dx \approx y_0 + 3\,(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_7 + y_8 + \ldots) + y_{3p} + 2\,(y_3 + y_6 + y_9 + \ldots + y_{3p-3})$$

и найти остаточный член.

29. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

с точностью до 10^{-7}.

30. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$$

с точностью до 10^{-7}.

31. Используя различные формулы для приближенного вычисления кратных интегралов, вычислить с точностью до 10^{-7} объем полушара радиуса единица.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. Е. Микеладзе, Численные методы математического анализа, Гостехиздат, 1953.
2. С. М. Никольский, Квадратурные формулы, Физматгиз, 1958.
3. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
4. В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1954.
5. Хаусхолдер, Основы численного анализа, ИЛ, 1956.
6. Милн, Численный анализ, ИЛ, 1951.
7. И. Ф. Стефенсен, Теория интерполяции, ОНТИ, 1936.
8. В. И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов, Физматгиз, 1959.

ГЛАВА 4

РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В практике вычислений, особенно при работе на электронных цифровых вычислительных машинах, часто приходится встречаться с многократными вычислениями значений заданной функции $f(x)$, например с вычислениями значений элементарных функций e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$ и т. д. Вводить в машину эти функции в виде таблиц нецелесообразно, так как таблицы загромождают память машины и на выборку нужных значений тратится сравнительно большое время. Значительно целесообразней каждый раз вычислять нужное значение функции с заданной точностью ε, используя какой-либо алгоритм для ее вычисления. Очень часто для этой цели заменяют рассматриваемую функцию $f(x)$ другой, легко вычислимой функцией $\varphi(x)$ (например, многочленом), значения которой на всем рассматриваемом отрезке $[a, b]$ изменения x отличаются от значений $f(x)$ не больше чем на ε, и в процессе вычислений работают с функцией $\varphi(x)$.

Рассмотрим пример. Пусть нужно многократно вычислять значения функции $f(x) = \sin x$ при $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ с точностью $0{,}5 \cdot 10^{-7}$. Разлагая $\sin x$ в степенной ряд и удерживая пять членов, будем иметь при $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$:

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\right)\right| \leqslant \left(\frac{\pi}{4}\right)^{11} \frac{1}{11!} < 0{,}2 \cdot 10^{-8}.$$

Следовательно, с заданной точностью вместо значений $\sin x$ на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ можно брать соответствующие значения многочлена

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!},$$

вычисление которых не составляет труда.

Среди многочленов, степень которых не выше девяти, построенный многочлен не является единственным многочленом, дающим на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ приближение $\sin x$ с заданной точностью. Более того, нетрудно построить многочлен седьмой степени, приближающий $\sin x$

на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ с заданной точностью $0{,}5 \cdot 10^{-7}$. В самом деле, в § 3 гл. 2 мы видели, что для многочленов Чебышева $T_n(x)$ имеет место неравенство

$$|T_n(x)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in [-1, +1].$$

Но

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x.$$

Отсюда при $x \in [-1, +1]$

$$\frac{1}{2^8}|T_9(x)| = \left|x^9 - \frac{9}{4}x^7 + \frac{27}{16}x^5 - \frac{15}{32}x^3 + \frac{9}{256}x\right| \leqslant \frac{1}{2^8}.$$

Если в многочлене $\varphi(x)$ заменить x^9 многочленом $\frac{9}{4}x^7 - \frac{27}{16}x^5 + \frac{15}{32}x^3 - \frac{9}{256}x$, т. е. рассмотреть многочлен

$$\varphi_1(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{9!}\left(-\frac{9}{256}x + \frac{15}{32}x^3 - \frac{27}{16}x^5 + \frac{9}{4}x^7\right),$$

то на отрезке $[-1, +1]$ он будет отличаться от $\varphi(x)$ не больше чем на $\frac{1}{9!}\frac{1}{2^8} \approx 0{,}11 \cdot 10^{-7}$, а это значит, что $\sin x$ отличается от $\varphi_1(x)$ на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ не больше чем на $0{,}2 \cdot 10^{-8} + 0{,}11 \cdot 10^{-7} = 0{,}13 \cdot 10^{-7}$, т. е. удовлетворяет нашим требованиям к точности.

Естественно, что при заданной функции $f(x)$ и заданной точности ε нужно выбирать функцию $\varphi(x)$, наиболее удобную для вычислений (в данном примере нужно выбирать многочлен возможно меньшей степени, так как вычисление его значений потребует наименьшего числа операций и ячеек памяти).

Таким образом, мы приходим к следующим задачам:

1. *Даны класс R функций, определенных на отрезке $[a, b]$, и некоторое подмножество $\overline{R}$ функций этого класса. Для заданной функции $f(x) \in R$ и заданного числа $\varepsilon > 0$ требуется найти такую функцию $\varphi(x) \in \overline{R}$, чтобы имело место неравенство*

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad x \in [a, b].$$

В качестве R обычно рассматривается множество C непрерывных функций, а в качестве $\overline{R}$ — некоторое множество алгебраических или обобщенных многочленов.

2. *Для данной функции $f(x) \in R$ найти функцию $\varphi_0(x) \in \overline{R}$, для которой имеет место неравенство*

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi_0(x)| = \inf_{\varphi \in \overline{R}} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)|.$$

Если такая функция существует, то ее называют *функцией наилучшего равномерного приближения к $f(x)$ в классе $\overline{R}$.*

В связи с этими двумя задачами возникает ряд вопросов, изложению которых и посвящена настоящая глава. Мы изложим их сначала в общей постановке, а затем подробнее рассмотрим вопросы равномерного приближения в пространстве C непрерывных функций.

§ 1. Наилучшее приближение в линейных нормированных пространствах

1. Линейное нормированное пространство. Будем говорить, что множество R является *линейным нормированным пространством*, если это множество линейно и, кроме того, каждому элементу $f \in R$ поставлено в соответствие действительное число $\|f\|$ — *норма* f, — удовлетворяющее условиям:

1) $\|f\| \geqslant 0$, причем $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$;
2) $\|cf\| = |c| \|f\|$ для любого c;
3) $\|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|$.

Линейные нормированные пространства всегда являются метрическими пространствами. Действительно, в качестве расстояния $\rho(f_1, f_2)$ можно взять просто

$$\rho(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|.$$

Без труда проверяется, что все аксиомы метрического пространства при этом выполнены.

2. Элемент наилучшего приближения. Пусть теперь дано некоторое линейное нормированное пространство R. Возьмем в нем $n+1$ линейно независимых элементов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и образуем $(n+1)$-мерное линейное нормированное подпространство $\overline{R}$ всевозможных линейных комбинаций

$$\Phi = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n. \tag{1}$$

Числовое множество

$$\Delta(f, \Phi) = \|f - \Phi\| \quad (\text{элемент } f \in R \text{ фиксирован}) \tag{2}$$

ограничено снизу (нормы — неотрицательные числа).

Поэтому существует точная нижняя грань значений $\Delta(f, \Phi)$:

$$\Delta(f) = \inf_{\Phi \in \overline{R}} \Delta(f, \Phi). \tag{3}$$

Выясним вопрос: существует ли элемент $\Phi_0 \in \overline{R}$, для которого эта нижняя грань достигается, т. е. существует ли такой элемент $\Phi_0 \in \overline{R}$, для которого имеет место равенство

$$\Delta(f) = \|f - \Phi_0\|? \tag{4}$$

Каждый из элементов $\Phi_0 \in \overline{R}$, для которого выполняется равенство (4), будем называть *элементом наилучшего приближения*

для f в $\overline{R}$ или *проекцией* f на $\overline{R}$. При замене пространства R пространством $\overline{R}$ элементу $f \in R$ мы будем ставить в соответствие его проекцию на $\overline{R}$. Если норма выбрана удачно, то такая замена будет чаиболее выгодна.

3. Существование элемента наилучшего приближения. Теорема. *Для любого элемента $f \in R$ в $\overline{R}$ существует элемент наилучшего приближения.* Для произвольных элементов $f \in R$ и $\Phi \in \overline{R}$ введем обозначения:

$$\|\Phi\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i \right\| = g(a_0, a_1, \ldots, a_n), \tag{5}$$

$$\|f - \Phi\| = \left\| f - \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i \right\| = h(a_0, a_1, \ldots, a_n). \tag{6}$$

Если зафиксировать f и заставить пробегать Φ все множество $\overline{R}$, то получим две функции g и h, определенные в каждой точке $(n+1)$-мерного пространства $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Докажем непрерывность этих функций. Рассмотрим, например, функцию $g(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Зафиксируем некоторую точку $\left(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}\right)$ рассматриваемого нами пространства и оценим разность

$$\left| g(a_0, a_1, \ldots, a_n) - g\left(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}\right) \right| = \left| \left\| \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i \right\| - \left\| \sum_{i=0}^{n} a_i^{(0)} \varphi_i \right\| \right|.$$

Из свойств нормы, приведенных выше, без труда находим:

$$\left| \|f_1\| - \|f_2\| \right| \leqslant \|f_1 - f_2\|. \tag{7}$$

В самом деле,

$$\|f_1\| = \|f_2 + (f_1 - f_2)\| \leqslant \|f_2\| + \|f_1 - f_2\|$$

и аналогично

$$\|f_2\| = \|f_1 + (f_2 - f_1)\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2 - f_1\|.$$

Отсюда

$$\|f_1\| - \|f_2\| \leqslant \|f_1 - f_2\| \quad \text{и} \quad \|f_2\| - \|f_1\| \leqslant \|f_1 - f_2\|,$$

а это и есть неравенство (7), которое мы доказываем, только записанное без знака абсолютной величины.

Из доказанного неравенства следует, что

$$\left| g(a_0, a_1, \ldots, a_n) - g\left(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}\right) \right| \leqslant \left\| \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i - \sum_{i=0}^{n} a_i^{(0)} \varphi_i \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n} \left| a_i - a_i^{(0)} \right| \|\varphi_i\|.$$

Если $\max_i \|\varphi_i\| = N > 0$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{(n+1)N}$, то при $|a_i - a_i^0| < \delta$ будем иметь:

$$|g(a_0, a_1, \ldots, a_n) - g(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots, a_0^{(0)}| < \varepsilon,$$

т. е. непрерывность g доказана. Аналогично доказывается непрерывность функции h.

Функция $h(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ неотрицательна. Обозначим точную нижнюю границу ее значений через m. Докажем, что найдутся такие значения $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, при которых эта точная нижняя граница достигается. Для этого рассмотрим множество точек $(n+1)$-мерного евклидова пространства $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, для которых

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2 = 1,$$

т. е. единичную сферу этого пространства. Это ограниченное замкнутое множество. Следовательно, непрерывная положительная функция g должна достигать на нем своей точной нижней границы μ. Очевидно, $\mu > 0$, так как в противном случае существовала бы точка $(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})$ $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i^{(0)2} = 1\right)$, в которой

$$g(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) = \left\| \sum_{i=0}^{n} a_i^{(0)} \varphi_i \right\| = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=0}^{n} a_i^{(0)} \varphi_i = 0,$$

что невозможно в силу линейной независимости элементов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Обозначим через r величину

$$r = \frac{m + 1 + \|f\|}{\mu}$$

и разобьем все пространство $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ на две части R_1 и R_2, отнеся к R_1 все точки, для которых $\sum_{i=0}^{n} a_i^2 \leqslant r^2$, а к R_2 — все остальные точки. Рассмотрим значения функции $h(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ на множестве R_2. Пусть $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R_2$. Тогда $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 = \lambda^2 > r^2$ и

$$h(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left\| f - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\| \geqslant \left| \left\| \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\| - \|f\| \right| =$$

$$= \left| |\lambda| \left\| \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{|\lambda|} \varphi_i \right\| - \|f\| \right| \geqslant |\lambda| \left\| \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{|\lambda|} \varphi_i \right\| - \|f\| \geqslant$$

$$\geqslant |\lambda| \mu - \|f\| > r\mu - \|f\| = m + 1.$$

Таким образом, m есть нижняя грань значений функции h на множестве R_1. Но это множество ограничено и замкнуто. Следовательно, функция $h(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, непрерывная на этом множестве, обязана достигать в некоторой точке своей нижней грани. Если обозначить эту точку через $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$, то

$$m = h(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \left\| f - \sum_{i=0}^{n} \beta_i \varphi_i \right\|.$$

Итак, в $\overline{R}$ *всегда существует элемент наилучшего приближения.*

4. Единственность элемента наилучшего приближения. Вообще говоря, такой элемент будет не один. Приведем сейчас достаточное условие, обеспечивающее единственность элемента наилучшего приближения. Назовем нормированное линейное пространство *строго нормированным*, если в условии

$$\|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|$$

знак равенства достигается только тогда, когда $f_2 = \alpha f_1$, $\alpha > 0$.

Теорема. *Если пространство R строго нормированно, то элемент наилучшего приближения является единственным.* Предположим обратное, т. е. допустим, что имеются два различных элемента наилучшего приближения для $f \in R$:

$$\Phi_1 = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$$

и

$$\Phi_2 = b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + \ldots + b_n\varphi_n.$$

Таким образом,

$$\|f - \Phi_1\| = \|f - \Phi_2\| = m.$$

Очевидно, $m \neq 0$, так как иначе элементы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ оказались бы линейно зависимыми. Далее,

$$\left\| f - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i + b_i}{2} \varphi_i \right\| = \left\| \frac{f - \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i}{2} + \frac{f - \sum_{i=1}^{n} b_i\varphi_i}{2} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|f - \Phi_1\| + \frac{1}{2}\|f - \Phi_2\| = m.$$

Так как норма, стоящая в левой части, не может быть меньше m, то

$$\left\| \frac{f - \Phi_1}{2} + \frac{f - \Phi_2}{2} \right\| = \frac{1}{2}\|f - \Phi_1\| + \frac{1}{2}\|f - \Phi_2\|$$

или в силу строгой нормированности пространства R

$$f - \Phi_1 = \alpha[f - \Phi_2].$$

Здесь α должно равняться 1, так как в противном случае f представлялся бы в виде линейной комбинации φ_i, следовательно, m равнялось бы нулю. Но при этом

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i-b_i)\varphi_i=0$$

и элементы φ_i линейно зависимы или $a_i=b_i$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. И тот и другой случай приводят к противоречию с нашими предположениями.

§ 2. Наилучшее равномерное приближение непрерывных функций обобщенными многочленами

1. Наилучшее приближение в пространстве C. Возьмем теперь в качестве линейного множества R совокупность C всех непрерывных на $[a,\ b]$ функций. В качестве нормы $f\in R$ примем:

$$\|f\|=\sup_{x\in[a,\ b]}|f(x)|.$$

Нетрудно проверить, что все условия, требуемые от нормы, при этом выполнены. Наша норма определяет метрику пространства C, о котором говорилось во Введении. Пусть $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ — какие-то $n+1$ линейно независимых функций из C. В качестве $\overline{R}$ возьмем совокупность линейных комбинаций $\Phi(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(x)$ с действительными коэффициентами.

Элемент Φ_0, принадлежащий $\overline{R}$, будет являться элементом наилучшего равномерного приближения для $f\in R$, если

$$\sup_{x\in[a,\ b]}|f-\Phi_0|$$

принимает наименьшее возможное значение. На основании результатов предыдущего параграфа можно заключить, что такой элемент всегда существует. Но полученное нами достаточное условие единственности элемента наилучшего приближения здесь неприменимо. Действительно, пусть $a=0$, $b=1$, $f_1\equiv 1$, $f_2\equiv x$. Тогда

$$\|f_1\|=1,\quad \|f_2\|=1,\quad \|f_1+f_2\|=2,$$

т. е.

$$\|f_1+f_2\|=\|f_1\|+\|f_2\|,$$

хотя функции f_1 и f_2 независимы на $[0,\ 1]$, т. е. наше пространство C не является строго нормированным.

2. Теорема Хаара. Для пространства R, которое мы сейчас рассматриваем, Хааром была доказана следующая теорема:

Для того чтобы для любой заданной функции $f\in R$ существовал единственный обобщенный многочлен наилучшего при-

ближения, необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *образовывали систему Чебышева, т. е. любой обобщенный многочлен по этой системе функций имел на отрезке* $[a, b]$ *не более* n *различных нулей.*

Докажем эту теорему. Для доказательства *необходимости* покажем, что если существует обобщенный многочлен

$$\Phi_0(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) \not\equiv 0,$$

имеющий на $[a, b]$ больше n нулей, то существует непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$, для которой имеется несколько обобщенных многочленов наилучшего приближения. Пусть $\Phi_0(x)$ обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $x_i \in [a, b]$:

$$\Phi_0(x_i) = a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + \ldots + a_n\varphi_n(x_i) = 0$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Так как $\Phi_0(x) \not\equiv 0$, то среди чисел a_i по крайней мере одно отлично от нуля и, следовательно,

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Это значит, что между строками матрицы имеется линейная зависимость, т. е. существуют такие, не равные одновременно нулю числа $b_0, b_1, \ldots, b_n$, что при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$b_0\varphi_k(x_0) + b_1\varphi_k(x_1) + \ldots + b_n\varphi_k(x_n) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что для любого обобщенного многочлена $\Phi(x)$ имеет место равенство

$$b_0\Phi(x_0) + b_1\Phi(x_1) + \ldots + b_n\Phi(x_n) = 0. \qquad (1)$$

Пусть λ — некоторое положительное число, удовлетворяющее условию

$$\lambda \sup_{x \in [a, b]} |\Phi_0(x)| \leqslant 1.$$

Построим непрерывную на $[a, b]$ функцию $g(x)$ так, чтобы в точке x_i она принимала значение $+1$, если b_i положительно, и -1, если b_i отрицательно, а во всех остальных точках отрезка $[a, b]$ по абсолютной величине не превосходила бы 1. Функция

$$f(x) = g(x)[1 - \lambda|\Phi_0(x)|]$$

будет обладать теми же свойствами. Покажем, что для $f(x)$ существует бесчисленное множество обобщенных многочленов наилучшего

приближения. Действительно, для любого обобщенного многочлена $\Phi(x)$ уклонение $\Delta(f, \Phi)$ не меньше 1, т. е.

$$\sup_{x\in[a,\,b]} |f(x) - \Phi(x)| \geqslant 1.$$

Если бы для некоторого многочлена $\Phi_1(x)$ уклонение $\Delta(f, \Phi_1)$ было меньше 1, то в точке x_i знак $\Phi_1(x_i)$ совпадал со знаком $f(x_i)$ (так как $f(x_i) = \pm 1$), т. е. со знаком b_i, а в этом случае было бы невозможно равенство (1). Таким образом, $\Delta(f) \geqslant 1$.

С другой стороны, при любом ε, удовлетворяющем условию $|\varepsilon| \leqslant 1$, будем иметь:

$$\begin{aligned} |f(x) - \varepsilon\lambda\Phi_0(x)| &\leqslant |f(x)| + \lambda|\varepsilon\,\Phi_0(x)| = \\ &= |g(x)|[1 - \lambda|\Phi_0(x)|] + \lambda|\varepsilon||\Phi_0(x)| \leqslant \\ &\leqslant 1 - \lambda|\Phi_0(x)| + \lambda|\varepsilon||\Phi_0(x)| \leqslant 1. \end{aligned}$$

Итак, для любого многочлена $\Phi_\varepsilon(x) = \varepsilon\lambda\Phi_0(x)$

$$\Delta(f, \Phi_\varepsilon(x)) = 1,$$

т. е. $\Phi_\varepsilon(x)$ являются многочленами наилучшего приближения при любом ε, $|\varepsilon| \leqslant 1$.

Теперь докажем *достаточность условий Хаара*, т. е. докажем, что если система $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ удовлетворяет им, то для любой непрерывной на $[a, b]$ функции не может существовать двух различных многочленов наилучшего приближения. Для этого предварительно докажем несколько свойств систем Чебышева.

1. Если существуют точки $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k$ $(l < k < n)$, для которых

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(x_i) & \varphi_{i+1}(x_i) & \ldots & \varphi_k(x_i) \\ \varphi_i(x_{i+1}) & \varphi_{i+1}(x_{i+1}) & \ldots & \varphi_k(x_{i+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_i(x_k) & \varphi_{i+1}(x_k) & \ldots & \varphi_k(x_k) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то для произвольного натурального числа q $(k < q \leqslant n)$ можно найти такие точки $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_q$, что

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(x_i) & \varphi_{i+1}(x_i) & \ldots & \varphi_q(x_i) \\ \varphi_i(x_{i+1}) & \varphi_{i+1}(x_{i+1}) & \ldots & \varphi_q(x_{i+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_i(x_q) & \varphi_{i+1}(x_q) & \ldots & \varphi_q(x_q) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим обобщенный многочлен

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} \varphi_i(x_i) & \varphi_{i+1}(x_i) & \ldots & \varphi_k(x_i) & \varphi_{k+1}(x_i) \\ \varphi_i(x_{i+1}) & \varphi_{i+1}(x_{i+1}) & \ldots & \varphi_k(x_{i+1}) & \varphi_{k+1}(x_{i+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_i(x_k) & \varphi_{i+1}(x_k) & \ldots & \varphi_k(x_k) & \varphi_{k+1}(x_k) \\ \varphi_i(x) & \varphi_{i+1}(x) & \ldots & \varphi_k(x) & \varphi_{k+1}(x) \end{vmatrix}.$$

Так как коэффициент при $\varphi_{k+1}(x)$ отличен от нуля, то $\Phi(x) \not\equiv 0$. Поэтому найдется такая точка x_{k+1}, в которой $\Phi(x_{k+1}) \neq 0$. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(x_i) & \varphi_{i+1}(x_i) & \dots & \varphi_k(x_i) & \varphi_{k+1}(x_i) \\ \varphi_i(x_{i+1}) & \varphi_{i+1}(x_{i+1}) & \dots & \varphi_k(x_{i+1}) & \varphi_{k+1}(x_{i+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_i(x_k) & \varphi_{i+1}(x_k) & \dots & \varphi_k(x_k) & \varphi_{k+1}(x_k) \\ \varphi_i(x_{k+1}) & \varphi_{i+1}(x_{k+1}) & \dots & \varphi_k(x_{k+1}) & \varphi_{k+1}(x_{k+1}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Повторяя эти рассуждения $q-k$ раз, получим точки $x_{k+1}, \dots, x_q$, существование которых утверждалось.

2. Если $x_0, x_1, \dots, x_k$ ($k < n$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$) — произвольные различные точки отрезка $[a, b]$, то по крайней мере один из определителей $(k+1)$-го порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) & \dots & \varphi_n(x_k) \end{Vmatrix}$$

отличен от нуля.

Будем доказывать это свойство методом индукции. Пусть $k = 0$, т. е матрица состоит из одной строки

$$\| \varphi_0(x_0) \ \varphi_1(x_0) \dots \varphi_n(x_0) \|.$$

Допустим, что все элементы этой строки равны нулю. Возьмем любую точку $y_1 \neq x_0$, для которой $\varphi_1(y_1) \neq 0$, и, используя первое свойство, найдем такие точки $y_2, y_3, \dots, y_n$, что

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(y_1) & \dots & \varphi_n(y_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(y_n) & \dots & \varphi_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим многочлен

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_0(y_1) & \varphi_1(y_1) & \dots & \varphi_n(y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(y_n) & \varphi_1(y_n) & \dots & \varphi_n(y_n) \end{vmatrix}.$$

Он не равен тождественно нулю, так как коэффициент при $\varphi_0(x)$ отличен от нуля. Но $\Phi(x_0) = \Phi(y_1) = \dots = \Phi(y_n) = 0$, т. е. Φ имеет $n+1$ нуль на $[a, b]$, что невозможно, так как по предположению $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ удовлетворяют условиям Хаара. Таким образом, свойство 2 имеет место при $k = 0$. Пусть оно имеет место при $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ и предположим, не нарушая общности, что

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_m) & \dots & \varphi_m(x_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

На основании свойства 1 найдутся такие точки $y_{m+1}, \dots, y_n$, что

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(y_n) & \varphi_2(y_n) & \dots & \varphi_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Но тогда обобщенный многочлен

$$\Phi(x)=\begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(y_n) & \varphi_1(y_n) & \dots & \varphi_n(y_n) \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль тождественно. Если бы при $k=m$ наше утверждение было неверно, т. е. все определители исходной матрицы при $k=m$ обращались в нуль, то многочлен $\Phi(x)$ имел бы $n+1$ нулей $x_0, x_1, \dots, y_n$, что невозможно. Итак, и второе утверждение доказано.

3. Если уравнение

$$|f(x)-\Phi(x)|=\Delta(f,\Phi),\quad f(x)\in R,\quad \Phi(x)=\sum_{i=0}^{n}\beta_i\varphi_i$$

имеет на $[a, b]$ меньше, чем $n+1$ различных корней, то $\Phi(x)$ не является многочленом наилучшего приближения функции $f(x)$.

Пусть $x_0, x_1, \dots, x_m$ $(m<n,\ x_i\neq x_j$ при $i\neq j)$ — все корни нашего уравнения. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_0\varphi_0(x_k)+\alpha_1\varphi_1(x_k)+\dots+\alpha_n\varphi_n(x_k)=f(x_k)-\Phi(x_k)\qquad (k=0,\ 1,\dots,\ m)$$

относительно неизвестных $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. По второму свойству матрица этой системы имеет ранг $m+1$, совпадающий с числом уравнений. Следовательно, система совместна. Пусть $\left(\alpha_0^{(0)}, \alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)}\right)$ — одно из ее решений. Рассмотрим обобщенный многочлен

$$\Phi_0(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i^{(0)}\varphi_i(x)$$

и функцию $R(x)=f(x)-\Phi(x)$. Для каждой точки x_k $(k=0, 1, \dots, m)$ выберем столь малую окрестность U_k, чтобы имели место неравенства:

$$\mu_k=\inf_{x\in U_k}|R(x)|>0,\quad \inf_{x\in U_k}|\Phi_0(x)|>\frac{\Delta(f,\Phi)}{2}.$$

Это возможно, так как $|R(x_k)|=\Delta(f,\Phi)\neq 0$ и $|\Phi_0(x_k)|=\Delta(f,\Phi)$. Пусть

$$M_k=\sup_{x\in U_k}|\Phi_0(x)|,\quad M=\sup_{x\in U^*}|\Phi_0(x)|,\quad L^*=\sup_{x\in U^*}|R(x)|,$$

где U^* есть совокупность точек отрезка $[a, b]$, не принадлежащих окрестностям $U_0, U_1, \dots, U_m$. Разность

$$\mu=\Delta(f,\Phi)-L^*$$

— строго положительное число. Пусть ε — положительное число, удовлетворяющее условию

$$\varepsilon<\inf_{k=0,\ 1,\dots,\ m}\left\{\frac{\mu}{M},\ \frac{\mu_k}{M_k}\right\}.$$

Положим $\gamma_i=\beta_i+\varepsilon\alpha_i^{(0)}$ $(i=0, 1, \dots, n)$ и $\Phi_1(x)=\sum_{i=0}^{n}\gamma_i\varphi_i$. Тогда

$$|f(x)-\Phi_1(x)|=|f(x)-\Phi(x)-\varepsilon\Phi_0(x)|=|R(x)-\varepsilon\Phi_0(x)|.$$

Если $x \in U_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, то

$$|f(x) - \Phi_1(x)| = |R(x)| \left|1 - \frac{\varepsilon \Phi_0(x)}{R(x)}\right| \leqslant \Delta(f, \Phi)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Если же $x \in U^*$, то

$$|f(x) - \Phi_1(x)| \leqslant |R(x)| + \varepsilon |\Phi_0(x)| \leqslant L^* + \varepsilon M < L^* + \mu = \Delta(f, \Phi).$$

Итак,

$$\Delta(f, \Phi_1) < \Delta(f, \Phi)$$

и $\Phi(x)$ не является многочленом наилучшего приближения.

Теперь можно доказать достаточность условий Хаара. Допустим противное, т. е. предположим, что для функции $f(x) \in R$ имеются два многочлена наилучшего приближения:

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(x) \quad \text{и} \quad \Phi_2(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \varphi_i(x),$$

т. е.

$$\Delta(f, \Phi_1) = \Delta(f, \Phi_2) = \Delta(f).$$

Рассмотрим многочлен

$$\Phi_3(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \varphi_i(x).$$

Для него имеет место неравенство

$$|f(x) - \Phi_3(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x) - \Phi_1(x)| + \frac{1}{2}|f(x) - \Phi_2(x)| \leqslant \Delta(f),$$

т. е.

$$\Delta(f, \Phi_3) \leqslant \Delta(f).$$

Но так как

$$\Delta(f) = \inf_{\Phi \in \overline{R}} \Delta(f, \Phi),$$

то

$$\Delta(f, \Phi_3) = \Delta(f).$$

Таким образом, Φ_3 является многочленом наилучшего приближения а следовательно, уравнение

$$|f(x) - \Phi_3(x)| = \Delta(f)$$

имеет на отрезке $[a, b]$ по крайней мере $n + 1$ различных корней $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Но для того, чтобы имело место равеиство

$$|f(x_i) - \Phi_3(x_i)| = \Delta(f),$$

необходимо наличие равенств

$$f(x_i) - \Phi_1(x_i) = f(x_i) - \Phi_2(x_i) = \pm \Delta(f),$$

т. е.

$$\Phi_1(x_i) = \Phi_2(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда обобщенный многочлен

$$\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \varphi_i(x)$$

должен обращаться в нуль в $n + 1$ различных точках отрезка $[a, b]$, что невозможно, так как функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ образуют систему Чебышева. Доказательство теоремы Хаара закончено.

3. Теорема Чебышева. Докажем еще одну теорему, являющуюся обобщением теоремы Чебышева. Будем опять предполагать, что мы рассматриваем линейное нормированное пространство R непрерывных на $[a, b]$ функций $f(x)$ с нормой

$$\|f(x)\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

и его подпространство $\bar{R}$, образованное всевозможными линейными комбинациями

$$\Phi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ с действительными постоянными коэффициентами. Функции $\varphi_i(x)$ принадлежат R и образуют систему Чебышева. Для функций $f \in R$ и $\Phi_0 \in \bar{R}$ обозначим

$$L = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \Phi_0(x)|.$$

Тогда *теорема Чебышева* может быть сформулирована следующим образом:

Для того чтобы функция $\Phi_0(x)$ являлась обобщенным многочленом наилучшего приближения для функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы на $[a, b]$ нашлись по крайней мере $n+2$ точки $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$, в которых $f(x) - \Phi_0(x)$ принимает поочередно значения $+L$ и $-L$.

Докажем сначала необходимость условий. Пусть $\Phi_0(x)$ является многочленом наилучшего приближения для $f(x)$. Докажем, что для него выполнены сформулированные в теореме условия. Предположим обратное, т. е. что таких точек, о которых говорится в теореме, $q+1 < n+2$ (существование по крайней мере одной такой точки очевидно). Пусть эти точки будут:

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_q \leqslant b.$$

Выберем на отрезке $[a, b]$ q точек $y_1, y_2, \ldots, y_q$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $a \leqslant x_0 < y_1 < x_1 < \ldots < y_q < x_q \leqslant b$;

2) в точках y_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ разность $f(x) - \Phi_0(x)$ не равна ни L, ни $-L$;

3) на каждом из отрезков $[a, y_1]$, $[y_1, y_2]$, $\ldots$, $[y_q, b]$ разность $f(x) - \Phi_0(x)$ достигает один или несколько раз значений $+L$ или $-L$, но не может достигать и того и другого значения.

Тогда найдется такое положительное значение $\mu < \frac{L}{2}$, что на отрезках $[a, y_1]$, $[y_1, y_2]$, $\ldots$, $[y_q, b]$ будут поочередно выполняться неравенства

$$-L + \mu < f(x) - \Phi_0(x) \leqslant L; \quad -L \leqslant f(x) - \Phi_0(x) < L - \mu$$

и, кроме того,

$$-L+\mu<f(y_q)-\Phi_0(y_q)<L-\mu.$$

На интервале (y_q, x_q) можно выбрать точку Y так, что при любом $x\in[y_q, Y]$ также будет выполнено неравенство

$$-L+\mu<f(x)-\Phi_0(x)<L-\mu.$$

На интервале (y_q, Y) выберем произвольным образом точки

$$y_{q+1}<y_{q+2}<\ldots<y_{q+2m},$$

где m — максимальное число, для которого

$$q+2m\leqslant n.$$

Если $q+2m=n$, то получим последовательность точек

$$y_1<y_2<\ldots<y_n.$$

Если же $q+2m=n-1$, то, приняв за y_n точку b, получим такую же последовательность точек.

По точкам y_i построим обобщенный многочлен

$$\Phi_1(x)=W[x, y_1, \ldots, y_n]=\begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_0(y_1) & \varphi_1(y_1) & \ldots & \varphi_n(y_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(y_n) & \varphi_1(y_n) & \ldots & \varphi_n(y_n) \end{vmatrix}.$$

Коэффициентами при $\varphi_i(x)$ этого многочлена являются миноры n-го порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_0(y_1) & \varphi_1(y_1) & \ldots & \varphi_n(y_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(y_n) & \varphi_1(y_n) & \ldots & \varphi_n(y_n) \end{Vmatrix}.$$

В силу второго свойства систем Чебышева, использованного при доказательстве теоремы Хаара, по крайней мере один из них отличен от нуля. Следовательно, $\Phi_1(x)\not\equiv 0$. Наш обобщенный многочлен обращается в нуль в точках $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и не может обращаться в нуль ни при каком другом значении x. В частности, при $x\in(a, y_1)$

$$\Phi_1(x)=W[x, y_1, \ldots, y_n]\neq 0.$$

Если мы будем изменять значения $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, сохраняя соотношения

$$a\leqslant x<y_1<y_2<\ldots<y_n\leqslant b,$$

то

$$W[x, y_1, y_2, \ldots, y_n]$$

будет сохранять постоянный знак. Таким образом, как бы мы ни выбирали значения $z_0, z_1, \ldots, z_n$, лишь бы они удовлетворяли неравенствам

$$a\leqslant z_0<z_1<\ldots<z_n\leqslant b,$$

определитель

$$W[z_0, z_1, \ldots, z_n]$$

всегда имеет один и тот же знак. Положим $z_0 = x$, $z_1 = y_1$, $\ldots$, $z_n = y_n$. Тогда

$$W[z_0, z_1, \ldots, z_n] = W[x, y_1, \ldots, y_n] = \Phi_1(x)$$

для значений $x \in (a, y_1)$. Положим теперь $z_0 = y_1$, $z_1 = x$, $z_2 = y_2$, $\ldots$, $z_n = y_n$. При этом

$$W[z_0, z_1, \ldots, z_n] = W[y_1, x, y_2, \ldots, y_n] = \\ = -W[x, y_1, y_2, \ldots, y_n] = -\Phi_1(x)$$

для $x \in (y_1, y_2)$. Таким образом, $\Phi_1(x)$ меняет знак, когда x переходит из интервала (a, y_1) в интервал (y_1, y_2). Далее, если положить $z_0 = y_1$, $z_1 = y_2$, $z_2 = x$, $z_3 = y_3$, $\ldots$, $z_n = y_n$, то получим:

$$W[z_0, z_1, \ldots, z_n] = W[y_0, y_1, x, y_2, \ldots, y_n] = \\ = W[x, y_1, y_2, \ldots, y_n] = \Phi_1(x)$$

для $x \in (y_2, y_3)$. Итак, $\Phi_1(x)$ снова изменила свой знак при переходе через точку y_2. Аналогично показывается, что $\Phi_1(x)$ меняет свой знак при переходе через каждую из точек y_k.

Рассмотрим теперь многочлен

$$\Phi_2(x) = \Phi_0(x) + \varepsilon\Phi_1(x),$$

где ε выбрано так, чтобы

$$\max_{x \in [a, b]} |\varepsilon\Phi_1(x)| < \mu$$

и на интервале (a, y_1) знак $\varepsilon\Phi_1(x)$ совпадал бы со знаком $f(x_0) - \Phi_0(x_0)$. В силу выбора точек y_i и только что доказанного свойства функции $\Phi_1(x)$ знак $\varepsilon\Phi_1(x)$ будет совпадать со знаком $f(x_k) - \Phi_0(x_k)$ при $x \in [y_k, y_{k+1}]$ для всех $k < q$. Вследствие этого и того, что $f(y_k) - \Phi_0(y_k) \neq \pm L$, мы будем иметь на отрезке $[a, y_q]$:

$$|f(x) - \Phi_2(x)| < L.$$

Далее, так как на отрезке $[y_q, Y]$ имеет место неравенство

$$-L + \mu < f(x) - \Phi_0(x) < L - \mu,$$

а

$$|\varepsilon\Phi_1(x)| < \mu,$$

то при $x \in [y_q, Y]$ имеет место неравенство

$$|f(x) - \Phi_2(x)| < L.$$

На интервале (y_q, Y) мы взяли четное число точек y_{q+1}, $\ldots$, y_{q+2m}. Поэтому знак $\varepsilon\Phi_1(x)$ на полуотрезке $[y_{q+2m}, b)$ будет такой же, как и у $f(x_q) - \Phi_0(x_q)$. Следовательно, при $q + 2m = n$ и при

$q+2m=n-1$ (но x_q не равном b) и на отрезке $[y_{q+2m}, b]$ будет выполнено последнее неравенство. Рассмотрим еще случай, когда $y_n = b$ и $x_q = b$. При этом последнее неравенство будет выполнено для всех точек полуоткрытого интервала $[a, b)$, но в точке b будем иметь

$$|f(b) - \Phi_2(b)| = L.$$

Найдем тогда такой обобщенный многочлен $\Phi_3(x)$, который бы в точке b не обращался в нуль. Такой многочлен всегда существует, так как $\varphi_i(x)$ образуют систему Чебышева и не могут все одновременно обратиться в нуль (см. доказательство теоремы Хаара). Можно считать, что

$$\Phi_3(b)[f(b) - \Phi_0(b)] > 0,$$

так как в противном случае мы умножили бы $\Phi_3(x)$ на -1. При достаточно малом $\delta > 0$ и в последнем случае мы имели бы тогда

$$|f(x) - \Phi_2(x) - \delta\Phi_3(x)| < L$$

для всех $x \in [a, b]$.

Тем самым мы показали, что $\Phi_0(x)$ не является многочленом наилучшего приближения, вопреки нашему предположению. Полученное противоречие доказывает необходимость условий теоремы Чебышева.

Докажем теперь достаточность. Пусть для $\Phi_0(x)$ выполнены условия теоремы, но $\Phi_0(x)$ не является многочленом наилучшего приближения. Пусть, далее, $\Phi_1(x)$ является многочленом наилучшего приближения для $f(x)$ на $[a, b]$. Рассмотрим разность

$$\Phi_1(x) - \Phi_0(x) = [f(x) - \Phi_0(x)] - [f(x) - \Phi_1(x)].$$

Первая квадратная скобка справа принимает в некоторых точках

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b$$

поочередно значения L и $-L$. Вторая квадратная скобка по абсолютной величине меньше L. Поэтому рассматриваемая нами разность будет иметь различные знаки при x_i и при x_{i+1} для всех i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Следовательно, она обращается в нуль по крайней мере один раз в каждом из интервалов (x_i, x_{i+1}). Всего таких интервалов $n+1$. Обобщенный многочлен

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) - \Phi_0(x)$$

должен обращаться в нуль на $[a, b]$ по крайней мере $n+1$ раз. Это невозможно. Тем самым мы доказали и достаточность условий Чебышева. Теорема доказана полностью.

Сделаем теперь несколько замечаний.

1. Пусть $\Phi(x)$ — некоторый обобщенный многочлен и на $[a, b]$ существуют такие $n+2$ точек

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1},$$

что разность

$$f(x) - \Phi(x)$$

принимает в них значения с чередующимися знаками. Тогда если m — наименьшее по абсолютной величине из этих значений, то

$$\Delta(f) \geqslant |m|.$$

Для доказательства достаточно предположить обратное и рассмотреть разность между многочленом Φ и многочленом наилучшего приближения, как это делалось при доказательстве достаточности условий Чебышева.

Это замечание позволяет дать оценку величины $\Delta(f)$. Действительно, если

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \Phi(x)|,$$

то

$$M \geqslant \Delta(f) \geqslant |m|.$$

2. При доказательстве теоремы Хаара и обобщенной теоремы Чебышева мы считали, что все функции определены на некотором отрезке $[a, b]$. Фактически это при доказательствах не использовалось. Если проанализировать доказательства, то легко обнаружить, что теорема Хаара будет справедлива, если в качестве области определения взять произвольное замкнутое ограниченное множество евклидова пространства любого числа измерений. Обобщенная теорема Чебышева будет справедлива, если все функции определены на некотором замкнутом множестве, принадлежащем отрезку $[a, b]$, содержащем не менее $(n+2)$-х точек.

§ 3. Алгебраические многочлены наилучшего равномерного приближения

Как уже известно из второй главы, функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ образуют систему Чебышева на любом отрезке $[a, b]$. Следовательно, вся полученная нами теория наилучших приближений применима к этой системе функций. Обозначим через $H_n(P)$ множество всех алгебраических многочленов степени не выше n. Если $f(x)$ — некоторая непрерывная на $[a, b]$ функция, а $P_n(x) \in H_n(P)$, то отклонение $f(x)$ от $P_n(x)$ на $[a, b]$, т. е.

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)|$$

будем обозначать $E_n(f, P_n)$. Нижнюю грань значений $E_n(f, P_n)$, когда $P_n(x)$ пробегает все множество $H_n(P)$, обозначим через $E_n(f)$ и будем называть *наименьшим отклонением*. На основании результатов предыдущих параграфов можно утверждать, что существует

единственный многочлен $P_n(x) \in H_n(P)$, для которого $E_n(f, P_n) = E_n(f)$. На отрезке $[a, b]$ имеется $n+2$ точек

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1},$$

в которых разность $f(x) - P_n(x)$ поочередно принимает значения $+E_n(f)$ и $-E_n(f)$. Для обнаружения того, что некоторый многочлен $Q_n(x) \in H_n(P)$ является многочленом наилучшего приближения для функции $f(x)$ на $[a, b]$, достаточно проверить, что на $[a, b]$ найдутся такие $n+2$ точек

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1},$$

в которых $f(x) - Q_n(x)$ поочередно принимает значения $+E_n(f, Q_n)$ и $-E_n(f, Q_n)$. (Здесь мы не требуем, чтобы $E_n(f, Q_n)$ было наименьшим отклонением.) Этим свойством часто удается воспользоваться для фактического отыскания многочленов наилучшего приближения. Так, например, можно утверждать, что для функции $y = \sin 4x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ многочленом наилучшего приближения в $H_0(P)$, $H_1(P)$, ..., $H_6(P)$ будет $P(x) \equiv 0$. Действительно,

$$E_n(\sin 4x, 0) = 1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и

$$\sin 4x - 0$$

достигает последовательно значений $+1$ и -1 в точках

$$\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8},$$

т. е. в восьми точках.

Вспомним также *многочлены Чебышева, наименее отклоняющиеся от нуля*, о которых говорилось во второй главе. Эти многочлены можно получить здесь, решая следующую задачу.

Найти многочлен $Q_{n-1}(x) \in H_{n-1}(P)$, наименее уклоняющийся от функции $y = x^n$ на отрезке $[-1, 1]$.

Как мы видели ранее,

$$\overline{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$$

является многочленом степени n со старшим коэффициентом, равным единице. Этот многочлен на отрезке $[-1, 1]$ имеет экстремальные значения $\frac{1}{2^{n-1}}$ и $-\frac{1}{2^{n-1}}$ и достигает этих экстремальных значений поочередно в точках

$$x_k = \cos\frac{(n-k)\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Представляя $\overline{T}_n(x)$ в виде

$$x^n - Q_{n-1}(x),$$

мы и найдем $Q_{n-1}(x)$.

1. Теорема Вейерштрасса. Изучим теперь, как ведет себя $E_n(f)$ при $n \to \infty$. Для этого предварительно докажем следующую *теорему Вейерштрасса*:

Если $f(x) \in C$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P(x)$, что при всех $x \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Начнем с доказательства следующих тождеств:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x). \tag{2}$$

Первое тождество следует из биноминальной формулы

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = (a+b)^n,$$

если в ней положить $a = x$, $b = 1 - x$. Для доказательства второго представим левую часть его как сумму трех членов:

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} -$$

$$- 2nx \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + n^2 x^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Последняя сумма в правой части в силу тождества (1) равна единице. Для второй суммы имеем, используя снова тождество (1):

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j-1)!} x^{j+1} (1-x)^{n-j-1} = nx \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} x^j (1-x)^{n-j-1} =$$

$$= nx \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^j (1-x)^{n-1-j} = nx.$$

Для первой суммы имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{n!}{j!\,(n-j-1)!}\, x^{j+1} (1-x)^{n-j-1} =$$

$$= nx \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!}\, x^j (1-x)^{n-1-j} =$$

$$= nx \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} j C_{n-1}^j x^j (1-x)^{n-j-1} + \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^j (1-x)^{n-j-1} \right\} =$$

$$= nx\{(n-1)x + 1\} = n^2x^2 - nx^2 + nx.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= n^2x^2 - nx^2 + nx - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx(1-x),$$

и тождество (2) доказано.

Из тождества (2) следует, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеет место неравенство

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}, \tag{3}$$

ибо при $0 \leqslant x \leqslant 1$ справедливо неравенство $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

Пусть теперь задано некоторое положительное число δ. Рассмотрим те значения k, для которых имеет место неравенство

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \geqslant \delta, \tag{4}$$

где x — фиксированное число, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum{}' C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}, \tag{5}$$

где $\sum'$ означает суммирование по тем значениям k, для которых справедливо (4). В самом деле, для этих значений

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \geqslant 1,$$

а следовательно, используя неравенство (3), имеем:

$$\sum{}' C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sum{}' \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{n^2\delta^2} \sum{}' (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n^2\delta^2} \frac{n}{4} = \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Без ограничения общности можно считать, что отрезок $[a, b]$ совпадает с отрезком $[0, 1]$, так как этого всегда можно достичь линейным преобразованием переменного x.

Рассмотрим многочлен

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \tag{6}$$

который принято называть *многочленом Бернштейна*, и покажем, что при достаточно большом n он удовлетворяет требованиям теоремы.

В силу первого тождества

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

откуда

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{7}$$

Для оценки этой разности заметим, что в силу равномерной непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых x', $x'' \in [0, 1]$ имеет место неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

как только $|x' - x''| < \delta$.

Пусть x — любая фиксированная точка отрезка $[0, 1]$. Разобьем сумму, стоящую в правой части равенства (7), на две суммы:

$$S_1 = \sum{}' \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \tag{8}$$

где $\sum{}'$ означает суммирование по тем k, для которых $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta$, и

$$S_2 = \sum{}'' \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \tag{9}$$

где $\sum''$ означает суммирование по остальным значениям k. Оценим каждую сумму в отдельности. Для S_1 получим, обозначая, как обычно, $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ и применяя неравенство (5):

$$|S_1| \leqslant \sum{}' \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum{}' C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant 2M \frac{1}{4n\delta^2} = \frac{M}{2n\delta^2}. \qquad (10)$$

Для S_2 будем иметь:

$$|S_2| \leqslant \sum{}'' \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \sum{}'' C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (11)$$

ибо $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$, а $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

Выберем теперь n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда из неравенств (10) и (11) получится

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant |S_1| + |S_2| < \frac{M}{2n\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а это и следовало доказать.

2. Теоремы о порядке приближения с помощью многочленов Бернштейна. Из теоремы Вейерштрасса следует, что $E_n(f)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Некоторое представление о порядке стремления к нулю $E_n(f)$ дадут приведенные ниже теоремы для многочленов Бернштейна. Более точные оценки будут приведены позже.

Говорят, что *функция* $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[0, 1]$ *условию Липшица* с константой L, если для любых $x', x'' \in [0, 1]$ имеет место неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < L|x' - x''|.$$

Докажем теорему:

Если функция $f(x)$ *удовлетворяет на отрезке* $[0, 1]$ *условию Липшица с константой* L, *то*

$$|B_n(x) - f(x)| < \frac{L}{2\sqrt{n}}.$$

Заметим, что

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1],$$

и в силу условия Липшица

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant L \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k}{n} - x \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

По неравенству Буняковского

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k}{n} - x \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}.$$

В силу тождества (1) и неравенства (3) правая часть не превосходит $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Следовательно, при всех $x \in [0, 1]$ имеет место неравенство

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{L}{2\sqrt{n}},$$

а отсюда следует:

$$\Delta(f, B_n) \leqslant \frac{L}{2\sqrt{n}}. \tag{12}$$

Показано, что порядок этой оценки улучшить нельзя.

Естественно ожидать, что чем больше требований мы наложим на функцию $f(x)$, тем быстрее будет стремиться к нулю отклонение $\Delta(f, B_n)$. Однако это не совсем так.

Приведем без доказательства следующую теорему:

Если функция $f(x) \in C$ имеет в точке x конечную производную второго порядка $f''(x)$, то

$$B_n(x) - f(x) = \frac{f''(x)}{2n} x(1-x) + \frac{\rho_n}{n}, \tag{13}$$

где ρ_n стремится к нулю при возрастании n.

Из этой теоремы следует, что во всех случаях, за исключением случая, когда $f(x)$ — линейная функция, порядок стремления к нулю уклонения $\Delta(f, B_n)$ не может быть больше $\frac{1}{n}$.

Интересно отметить, что при некоторых дополнительных условиях на функцию $f(x)$ будет иметь место не только равномерная сходимость многочленов Бернштейна к функции $f(x)$, но и сходимость их производных к соответствующим производным функции. Так имеет место следующая теорема:

Теорема. *Если функция $f(x)$ всюду на $[0, 1]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то $B_n'(x)$ равномерно сходится к $f'(x)$.*

В самом деле,

$$B_n'(x)=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k k x^{k-1}(1-x)^{n-k}-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k (n-k)\, x^k (1-x)^{n-k-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) C_n^{k+1}(k+1)\, x^k (1-x)^{n-k-1}-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k (n-k)\, x^k (1-x)^{n-k-1}.$$

Но

$$(k+1)C_n^{k+1}=(n-k)C_n^k=nC_{n-1}^k.$$

Отсюда

$$B_n'(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1}.$$

По формуле Лагранжа о конечных приращениях

$$n\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=f'\left(z_k^{(n)}\right)\qquad\left(\frac{k}{n}<z_k^{(n)}<\frac{k+1}{n}\right),$$

поэтому

$$B_n'(x)=\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(z_k^{(n)}\right)C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1}$$

или

$$B_n'(x)=\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n-1}\right)C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left[f'\left(z_k^{(n)}\right)-f'\left(\frac{k}{n-1}\right)\right]C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1}.$$

В правой части последнего равенства первая сумма представляет из себя многочлен Бернштейна $(n-1)$-го порядка для производной $f'(x)$ и будет равномерно сходиться к $f'(x)$ на отрезке $[0, 1]$.

Далее, так как

$$\frac{k}{n}<z_k^{(n)}<\frac{k+1}{n},\quad \frac{k}{n}<\frac{k}{n-1}\leqslant\frac{k+1}{n},$$

то

$$\left|z_k^{(n)}-\frac{k}{n-1}\right|<\frac{1}{n}.$$

В силу равномерной непрерывности $f'(x)$ для любого заданного $\varepsilon > 0$ для всех n, начиная с некоторого n_0, будет иметь место неравенство

$$\left| f'\left(z_k^{(n)}\right) - f'\left(\frac{k}{n-1}\right)\right| < \varepsilon$$

при всех k. В силу этого неравенства и тождества (1) вторая сумма при $n \geqslant n_0$ будет меньше ε, а это означает, что вторая сумма равномерно на $[0, 1]$ сходится к нулю, а следовательно, $B_n'(x)$ равномерно сходится к $f'(x)$.

Справедлива и более общая теорема:

Если $f(x)$ имеет на $[0, 1]$ непрерывную производную k-го порядка $f^{(k)}(x)$, то $B_n^{(k)}(x)$ равномерно на $[0, 1]$ сходится к $f^{(k)}(x)$.

Как следует из теоремы Вейерштрасса, $E_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$. Порядок этого стремления будет зависеть от структурных свойств функции и сам в свою очередь определяет эти свойства. Мы позже посвятим этому отдельный параграф.

§ 4. Тригонометрические многочлены наилучшего приближения

Из второй главы нам известно, что тригонометрические функции

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx$$

также образуют систему Чебышева на полуотрезке $[0, 2\pi)$. Поэтому и к ним применима общая теория, изложенная в § 2. И в этом случае $E_n(f, T_n)$ — отклонение функции $f(x)$ от тригонометрического многочлена наилучшего приближения — будет стремиться к нулю, что подтверждается следующей теоремой, носящей название *второй теоремы Вейерштрасса*:

Если $f(x)$ непрерывная периодическая функция с периодом 2π, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ имеет место неравенство

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство. Докажем сначала *лемму*:

Если $\varphi(x)$ — непрерывная на $[0, \pi]$ функция, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует четный тригонометрический многочлен $T(x)$, удовлетворяющий неравенству

$$|\varphi(x) - T(x)| < \varepsilon \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

В самом деле, сделаем замену независимого переменного $x = \arccos y$. Тогда функция $\psi(y) = \varphi(\arccos y)$ будет непрерывна на отрезке $[-1, +1]$, и по первой теореме Вейерштрасса найдется

такой алгебраический многочлен $P_n(y)=\sum_{k=0}^{n} c_k y^k$, что для всех $y\in[-1, +1]$ будет иметь место неравенство

$$|\varphi(\arccos y - P_n(y)| < \varepsilon.$$

Возвращаясь к старому переменному, будем иметь:

$$\left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \cos^k x\right| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x\in[0, \pi].$$

Но

$$T(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k \cos^k x = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$$

есть четный тригонометрический многочлен, ибо

$$\cos^k x = \left\{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right\}^k = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k} C_k^l e^{i(2l-k)x} =$$

$$= \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k} C_k^l \cos(2l-k)x + \frac{i}{2^k}\sum_{l=0}^{k} C_k^l \sin(2l-k)x.$$

В последнем равенстве вторая сумма равна нулю, так как члены, равноотстоящие от концов, имеют противоположные знаки и взаимно уничтожаются. Следовательно,

$$\cos^k x = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k} C_k^l \cos(2l-k)x.$$

Заменяя в $\sum_{k=0}^{n} c_k \cos^k x$ степени $\cos x$ и приводя подобные члены, получим:

$$T(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx,$$

и лемма доказана.

Для доказательства самой теоремы рассмотрим функции

$$f(x)+f(-x) \quad \text{и} \quad [f(x)-f(-x)]\sin x.$$

Это — четные периодические функции с периодом 2π, непрерывные для всех x. В соответствии с леммой при заданном $\varepsilon>0$ можно найти такие четные тригонометрические многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$, что при всех $x\in[0, \pi]$ будут иметь место неравенства:

$$|f(x)+f(-x)-T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|[f(x)-f(-x)]\sin x - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу четности всех функций, входящих в эти неравенства, они останутся справедливыми и для $x \in [-\pi, 0]$, а по периодичности и для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Таким образом,

$$f(x) + f(-x) = T_1(x) + \alpha(x),$$
$$[f(x) - f(-x)] \sin x = T_2(x) + \beta(x),$$

где $|\alpha(x)|, |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех x.

Умножая первое из этих равенств на $\sin^2 x$, а второе на $\sin x$ и беря их полусумму, получим:

$$f(x) \sin^2 x = T_3(x) + \gamma(x), \tag{2}$$

где

$$T_3(x) = \frac{1}{2}[T_1(x) \sin^2 x + T_2(x) \sin x],$$

$$|\gamma(x)| = \frac{1}{2}|\alpha(x) \sin^2 x + \beta(x) \sin x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Рассмотрим теперь функцию $f\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$. Эта функция снова принадлежит к $C_{2\pi}$. Следовательно, имеется тригонометрический многочлен $T_4(y)$, для которого справедливо аналогичное равенство:

$$f\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 y = T_4(y) + \delta(y),$$

где $|\delta(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $y \in (-\infty, +\infty)$.

Заменим здесь $y - \frac{\pi}{2}$ на x. Получим:

$$f(x) \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x) \cos^2 x =$$

$$= T_4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = T_5(x) + \delta_1(x), \tag{3}$$

где $|\delta_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех x. Складывая почленно равенства (2) и (3), получим:

$$f(x) = [T_3(x) + T_5(x)] + \gamma(x) + \delta_1(x).$$

Так как $|\gamma(x) + \delta_1(x)| < \varepsilon$ при всех x, то, вводя обозначение

$$T(x) = T_3(x) + T_5(x),$$

будем иметь:

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

для всех x, что требовалось доказать.

Вторая теорема Вейерштрасса может быть сформулирована и следующим образом:

Непрерывная периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности тригонометрических многочленов. Из нее также следует высказанное в начале параграфа утверждение.

§ 5. Некоторые теоремы о порядке наилучшего равномерного приближения непрерывных функций

Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π, а $\bar{E}_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение $f(x)$ в совокупности тригонометрических многочленов $H_n(T)$ вида $a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, где n — фиксированное целое число. Из второй теоремы Вейерштрасса следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{E}_n(f)=0$. Возникает вопрос: как быстро $\bar{E}_n(f)$ стремится к нулю при $n\to\infty$? Оказывается, что скорость сходимости к нулю $\bar{E}_n(f)$ зависит от свойств функции $f(x)$, и чем более гладка функция $f(x)$, тем быстрей $\bar{E}_n(f)$ стремится к нулю. Мы здесь рассмотрим две *теоремы Джексона*, дающие оценку скорости убывания $\bar{E}_n(f)$ в зависимости от гладкости функции $f(x)$.

Теорема 1. *Если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая условию Липшица*

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2| \text{ для любых } x_1 \text{ и } x_2,$$

то

$$\bar{E}_n(f)\leqslant\frac{CM}{n},$$

где C — абсолютная константа.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$U_n(x)=\frac{\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\left[\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4dt}{\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4dt}$$

и покажем, что эта функция является тригонометрическим многочленом порядка $2n-2$. В самом деле,

$$\left[\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right]^2=\left[\frac{e^{\frac{nui}{2}}-e^{-\frac{nui}{2}}}{e^{\frac{ui}{2}}-e^{-\frac{ui}{2}}}\right]^2=e^{-(n-1)ui}\left[e^{(n-1)ui}+e^{(n-2)ui}+\ldots+1\right]^2=$$

$$=e^{-(n-1)ui}\sum_{k=0}^{2n-2}a_ke^{iku}=\sum_{k=0}^{2n-2}a_ke^{i(k+1-n)u}=\sum_{l=-(n-1)}^{n-1}a_{n+l-1}e^{ilu},$$

где $a_k = a_{2n-k-2} = k+1$ при $k \leqslant n-1$. Но так как при $0 \leqslant l \leqslant n-1$ $a_{n+l-1} = a_{n-l-1} = n-l$, то

$$\left[\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right]^2 = n + \sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\left(e^{ilu}+e^{-ilu}\right) = n + 2\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\cos lu,$$

т. е. $\left[\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right]^2$ есть тригонометрический многочлен порядка $n-1$. Возводя его в квадрат и преобразуя квадраты и произведения косинусов в косинусы кратных узлов, а затем приводя подобные члены, получим:

$$\left[\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 = \sum_{k=0}^{2n-2} c_k \cos k(t-x).$$

Далее,

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt = \int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{k=0}^{2n-2} c_k \cos k(t-x)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi-x}^{\pi-x}\sum_{k=0}^{2n-2} c_k \cos k\eta\,d\eta = \int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{k=0}^{2n-2} c_k \cos k\eta\,d\eta = c_0 > 0,$$

а

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sum_{k=0}^{2n-2} c_k \cos k(t-x)\,at =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-2}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$a_k = c_k\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k = c_k\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin kt\,dt.$$

Итак, $U_n(x)$ есть тригонометрический многочлен порядка $2n-2$. Заметим для дальнейшего, что постоянный член в $U_n(x)$ равен $\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt$.

Рассмотрим теперь разность

$$U_n(x)-f(x)=\frac{\int_{-\pi}^{+\pi}[f(t)-f(x)]\left[\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt}{\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt}=$$

$$=\frac{\int_{-\pi+x}^{\pi+x}[f(t)-f(x)]\left[\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt}{\int_{-\pi+x}^{\pi+x}\left[\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt}.$$

Сделав здесь замену $\frac{t-x}{2}=\eta$, получим:

$$|U_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2\eta)-f(x)]\left[\frac{\sin n\eta}{\sin\eta}\right]^4 d\eta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin n\eta}{\sin\eta}\right]^4 d\eta}\right|$$

или, учитывая, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, будем иметь:

$$|U_n(x)-f(x)|\leqslant 2M\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\eta|\left[\frac{\sin n\eta}{\sin\eta}\right]^4 d\eta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin n\eta}{\sin\eta}\right]^4 d\eta}=2M\frac{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\eta\left[\frac{\sin n\eta}{\sin\eta}\right]^4 d\eta}{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin n\eta}{\sin\eta}\right]^4 d\eta}.$$

Так как $\sin\eta \leqslant \eta$ при $\eta > 0$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 n\eta}{\sin^4 \eta}\, d\eta \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 n\eta}{\eta^4}\, d\eta > \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin^4 n\eta}{\eta^4}\, d\eta = n^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \xi}{\xi^4}\, d\xi = c_2 n^3,$$

где $c_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \xi}{\xi^4}\, d\xi$. Далее, так как при $0 \leqslant \eta \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $\sin\eta \geqslant \frac{2\eta}{\pi}$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \frac{\sin^4 n\eta}{\sin^4 \eta}\, d\eta < \frac{\pi^4}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 n\eta}{\eta^3}\, d\eta = \frac{\pi^4}{16} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin^4 n\eta}{\eta^3}\, d\eta + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 n\eta}{\eta^3}\, d\eta \right].$$

Но

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin^4 n\eta}{\eta^3}\, d\eta = n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \xi}{\xi^3}\, d\xi = c_3 n^2 \qquad \left(c_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \xi}{\xi^3}\, d\xi \right),$$

а

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 n\eta}{\eta^3}\, d\eta < \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\eta}{\eta^3} < \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} = \frac{2n^2}{\pi^2} = c_4 n^2 \qquad \left(c_4 = \frac{2}{\pi^2} \right).$$

Отсюда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \frac{\sin^4 n\eta}{\sin^4 \eta}\, d\eta < c_5 n^2 \qquad \left(c_5 = \frac{\pi^4}{16} (c_3 + c_4) \right),$$

т. е.

$$|U_n(x) - f(x)| < \frac{2c_5 n^2 M}{c_2 n^3} = \frac{2\frac{c_5}{c_2} M}{n}.$$

Положив $C = \frac{4c_5}{c_2}$ для всех n и x, будем иметь неравенство

$$|U_n(x) - f(x)| < \frac{CM}{2n};$$

откуда следует, что

$$\bar{E}_{2n-2}(f) < \frac{CM}{2n}$$

и

$$\bar{E}_{2n-1}(f) \leqslant \bar{E}_{2n-2}(f) < \frac{CM}{2n} < \frac{CM}{2n-1}; \quad \bar{E}_{2n}(f) \leqslant \bar{E}_{2n-2}(f) < \frac{CM}{2n}$$

или, вообще,

$$\bar{E}_n(f) < \frac{CM}{n}.$$

Теорема 2. *Если непрерывная периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π имеет производную p-го порядка, удовлетворяющую условию Липшица*

$$|f^{(p)}(x_1) - f^{(p)}(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|,$$

то имеет место неравенство

$$\bar{E}_n(f) \leqslant \frac{C^{p+1}M}{n^{p+1}},$$

где C — та же константа, что и в теореме 1.

Доказательство. Из теоремы 1 следует неравенство

$$\bar{E}_n(f^{(p)}) < \frac{CM}{n},$$

т. е. существуют многочлены $T_n^{(p)}(x)$ порядка n, не содержащие постоянных членов, для которых

$$|f^{(p)}(x) - T_n^{(p)}(x)| < \frac{CM}{n}.$$

Обозначим через $U_n^{(p-1)}(x)$ тригонометрический многочлен порядка n, являющийся интегралом от $T_n^{(p)}(x)$, не содержащим постоянного члена. Тогда

$$\left|\left[f^{(p-1)}(x) - U_n^{(p-1)}(x)\right]'\right| < \frac{CM}{n},$$

т. е. функция $f^{(p-1)}(x) - U_n^{(p-1)}(x)$, имея ограниченную производную, наверняка удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{CM}{n}$. Но тогда по теореме 1

$$\bar{E}_n\left(f^{(p-1)} - U_n^{(p-1)}\right) < \frac{C^2M}{n^2},$$

т. е. существует такой многочлен $V_n^{(p-1)}(x)$ степени n, не имеющий постоянного члена, что

$$\left|f^{(p-1)}(x) - U_n^{(p-1)}(x) - V_n^{(p-1)}(x)\right| < \frac{C^2M}{n^2}.$$

Полагая

$$U_n^{(p-1)}(x) + V_n^{(p-1)}(x) = T_n^{(p-1)}(x),$$

можно записать последнее неравенство в таком виде:

$$\left|f^{(p-1)}(x) - T_n^{(p-1)}(x)\right| < \frac{C^2M}{n^2}.$$

Повторяя p раз проведенные рассуждения, придем, наконец, к неравенству

$$|f(x) - T_n(x)| < \frac{C^{p+1}M}{n^{p+1}}.$$

которое означает, что

$$\bar{E}_n(f) < \frac{C^{p+1}M}{n^{p+1}}.$$

Используя теоремы 1 и 2, легко дать оценку наилучшего приближения $E_n(f)$ в случае, когда мы функцию $f(x)$, непрерывную на $[a, b]$, приближаем на отрезке $[a, b]$ с помощью алгебраических многочленов.

Заметим прежде всего, что не ограничивая общности, можно считать, $a = -1$, $b = +1$.

Теорема. *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке* $[-1, 1]$ и *удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2| \qquad (x_1, x_2 \in [-1, +1]),$$

то

$$E_n(f) < \frac{CM}{n},$$

где C — абсолютная константа.

Доказательство. Сделаем замену независимого переменного $x = \cos t$. Функция $\psi(t) = f(\cos t)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет условию Липшица с той же константой, так как

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| = |f(\cos t_1) - f(\cos t_2)| \leqslant M|\cos t_1 - \cos t_2| \leqslant M|t_1 - t_2|$$
$$(t_1, t_2 \in [-\pi, +\pi]).$$

По теореме 1 для функции $\psi(t)$ можно подобрать такой тригонометрический многочлен $T(t)$ порядка n, что

$$|\psi(t) - T(t)| < \frac{CM}{n}.$$

Так как $\psi(t)$ — четная периодическая функция с периодом 2π, то можно считать, что $T(t)$ не содержит синусов. Поэтому обратная подстановка дает

$$|f(x) - T(\arccos x)| < \frac{CM}{n}.$$

Но $T(\arccos x)$ есть алгебраический многочлен степени n, следовательно

$$E_n(f) < \frac{CM}{n}.$$

Теорема. *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке* $[-1, +1]$ *и имеет непрерывную производную $f^{(p)}(x)$, удовлетворяющую условию Липшица*

$$|f^{(p)}(x_1) - f^{(p)}(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2| \qquad (x_1, x_2 \in [-1, +1]),$$

то

$$E_n(f) < \frac{c_p M}{n^{p+1}} \qquad \left(c_p = \frac{C^{p+1}(p+1)^{p+1}}{(p+1)!}\right).$$

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что

$$E_{n-p}(f^{(p)}) < \frac{CM}{n-p},$$

т. е. существуют многочлены $P^{(p)}(x)$ степени $n-p$ такие, что

$$|f^{(p)}(x) - P^{(p)}(x)| < \frac{CM}{n-p}$$

или

$$|[f^{(p-1)}(x) - P^{(p-1)}(x)]'| < \frac{CM}{n-p},$$

т. е. функция $f^{(p-1)}(x) - P^{(p-1)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $CM/(n-p)$. В таком случае

$$E_{n-p+1}(f^{(p-1)} - P^{(p-1)}) < \frac{C^2M}{(n-p)(n-p+1)}$$

и, следовательно,

$$E_{n-p+1}(f^{(p-1)}) < \frac{C^2M}{(n-p)(n-p+1)}.$$

Продолжая рассуждения, придем, наконец, к неравенству

$$E_n(f) < \frac{C^{p+1}M}{(n-p)(n-p+1)\dots n}.$$

Так как при $n \geqslant p+1$ справедливо неравенство $n-k \geqslant \frac{p+1-k}{p+1}n$, то

$$E_n(f) < \frac{C^{p+1}M(p+1)^{p+1}}{(p+1)!\,n^{p+1}} = \frac{c_pM}{n^{p+1}}.$$

Из этих оценок мы видим, что если функция $f(x)$ достаточно гладкая то $E_n(f)$ стремится к нулю очень быстро. Ранее же мы видели, что $\Delta(f, B_n)$ стремится к нулю не быстрей $\frac{1}{n}$ при любой гладкости $f(x)$, лишь бы $f(x)$ не была линейной функцией. Поэтому для приближения функции $f(x)$ имеет прямой смысл строить многочлены наилучшего равномерного приближения.

§ 6. Приближенное построение алгебраических многочленов наилучшего приближения

Как уже указывалось во Введении, в вычислительной практике часто приходится приближать трудно вычислимые функции более простыми, например алгебраическими многочленами. При этом часто требуется приблизить функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ алгебраическим многочленом $P(x)$ так, чтобы его отклонение от функции $f(x)$ по абсолютной величине не превосходило заданного числа ε на всем отрезке $[a, b]$, т. е.

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Из теоремы Вейерштрасса, доказанной в этой главе, следует, что для функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$ при любом $\varepsilon > 0$, такой многочлен построить можно. Но для практики важно, чтобы такой многочлен имел возможно меньшую степень. Таким многочленом будет многочлен наилучшего равномерного приближения к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в совокупности $H_n(P)$ многочленов степени не выше n при таком n, для которого имеет место неравенство

$$E_n(f) \leqslant \varepsilon < E_{n-1}(f).$$

К сожалению, способов построения многочленов наилучшего приближения к данной функции $f(x)$ нет, поэтому большое значение приобретают способы приближенного построения таких многочленов. Хотя разработанные до сих пор методы приближенного построения многочленов наилучшего равномерного приближения недостаточно эффективны, так как требуют выполнения большой вычислительной работы, мы изложим два способа, сравнительно простых по идее и их осуществлению.

1. Предварительные замечания. Сделаем несколько общих замечаний и докажем несколько существенных для дальнейшего изложения утверждений.

1. В § 2 этой главы мы отмечали, что вся теория наилучшего равномерного приближения функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с помощью многочленов (в том числе и алгебраических) остается в силе, если мы будем рассматривать вместо отрезка $[a, b]$ любое замкнутое множество G, лишь бы оно состояло не меньше чем из $(n+2)$-х точек. В частности, справедлива теорема:

Для того чтобы многочлен $P_n(x) \in H_n(P)$ был многочленом наилучшего приближения к функции $f(x)$ на замкнутом множестве G, содержащем не менее $n+2$ точек, необходимо и достаточно существование таких $n+2$ точек

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \qquad (x_i \in G), \tag{1}$$

что

$$f(x_i) - P_n(x_i) = \alpha(-1)^i L$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n+2;\ \alpha = +1 \text{ или } -1), \tag{2}$$

где $L = \max\limits_{x \in G} |f(x) - P_n(x)|$. *При этом* $L = E_n(f, G)$ — *наилучшее приближение функции* $f(x)$ *на* G *в* $H_n(P)$.

Точки (1), для которых выполняется условие (2), будем называть *чебышевским альтернансом*.

Справедлива также и следующая *теорема* (*Валле — Пуссен*):

Если $P(x) \in H_n(P)$ *и точки* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ $(x_i \in G)$ *таковы, что*

$$\operatorname{sign}[f(x_1) - P(x_1)] = -\operatorname{sign}[f(x_2) - P(x_2)] =$$

$$= \operatorname{sign}[f(x_3) - P(x_3)] = \ldots = (-1)^{n+1} \operatorname{sign}[f(x_{n+2}) - P(x_{n+2})], \tag{3}$$

то

$$E_n(f, G) \geqslant \mu = \min_{i=1, 2, \ldots, n+2} \{|f(x_i) - P(x_i)|\}. \tag{4}$$

При фиксированных $f(x)$ и $P(x)$ величина μ зависит от выбора комбинации $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, удовлетворяющей условию (3). Верхнюю границу для μ при выборе всевозможных таких комбинаций обозначим через A. Если $G = [a, b]$, то A можно найти следующим образом. Рассматриваем разность $\Delta(x) = f(x) - P(x)$. Пусть

$L = \max\limits_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)|$. Возьмем число $R\,(0 < R < L)$ и обозначим через F и S два замкнутых множества точек отрезка $[a, b]$, на которых выполняются соответственно неравенства $\Delta(x) \geqslant R$ и $\Delta(x) \leqslant -R$. Дополнением суммы этих множеств до наименьшего отрезка $[c, d]$, содержащего эту сумму, будет открытое множество, состоящее из конечного или счетного множества интервалов. Те интервалы, которые одновременно граничат с F и S, обозначим через $I_1, I_2, \ldots$ (рис. 29). Если их число больше n, то наверняка

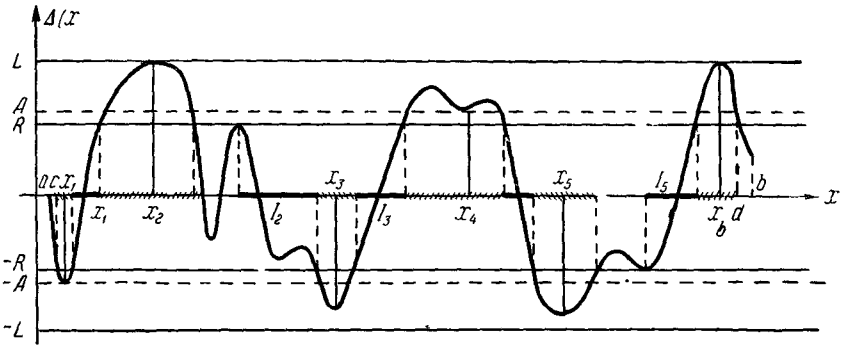

Рис. 29.

имеет место неравенство $E_n(f) \geqslant R$, так как в этом случае на $[a, b]$ найдутся $n+2$ точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, для которых будет иметь место (3) и

$$|\Delta(x_i)| = |f(x_i) - P(x_i)| \geqslant R \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2).$$

Если одно значение μ известно, то, полагая $R = \mu$, мы получим случай, когда число интервалов $I_1, I_2, \ldots$ не меньше $n+1$. Дальше увеличиваем R до тех пор, пока число их все еще остается не меньше $n+1$. Это предельное значение R и будет A. Его можно определить, практически исследуя на экстремум функцию

$$\Delta(x) = f(x) - P(x).$$

Заметим без доказательства, что если $|P(x)| \leqslant 2M$, где

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

то для длин интервалов $I_1, I_2, \ldots$ существует положительная нижняя граница $l(R)$, зависящая только от R (а не от $P(x)$), причем $l(R) \to 0$ только при $R \to 0$.

2. Найдем выражение $E_n(f, G)$ через значения функции $f(x)$ в точках чебышевского альтернанса. Пусть $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ — много-

член наилучшего приближения к $f(x)$ на множестве G в $H_n(P)$, а $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ — чебышевский альтернанс для него, т. е.

$$f(x_i) - P_n(x_i) = \alpha(-1)^i E_n(f, G), \tag{5}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n+2; \qquad \alpha = +1 \text{ или } -1).$$

Рассмотрим определители

$$D_{n,i} = D_{n,i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 & \ldots & x_{i-1}^n \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & \ldots & x_{i+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+2} & x_{n+2}^2 & \ldots & x_{n+2}^n \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2). \tag{6}$$

Все определители $D_{n,i}$ положительны, так как $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$. Далее, при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$x_1^k D_{n,1} - x_2^k D_{n,2} + x_3^k D_{n,3} - \ldots + (-1)^{n+1} x_{n+2}^k D_{n,n+2} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^k & 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ x_2^k & 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n+2}^k & 1 & x_{n+2} & x_{n+2}^2 & \ldots & x_{n+2}^n \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Умножая (5) на $(-1)^i D_{n,i}$ и суммируя по i от 1 до $n+2$, будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n+2} (-1)^i D_{n,i} \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k \right\} = \sum_{i=1}^{n+2} [(-1)^i f(x_i) + \alpha E_n(f, G)] D_{n,i}.$$

Меняя слева порядок суммирования и учитывая (7), убеждаемся в равенстве нулю левой части, т, е.

$$\alpha E_n(f, G) \sum_{i=1}^{n+2} D_{n,i} = \sum_{i=1}^{n+2} (-1)^{i-1} f(x_i) D_{n,i} = D_n,$$

где

$$D_n = D_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f) = \begin{vmatrix} f(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ f(x_2) & 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(x_{n+2}) & 1 & x_{n+2} & x_{n+2}^2 & \ldots & x_{n+2}^n \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Таким образом,

$$\alpha E_n(f, G) = \frac{\sum_{i=1}^{n+2} (-1)^{i-1} f(x_i) D_{n,i}}{\sum_{i=1}^{n+2} D_{n,i}} = \frac{D_n}{\sum_{i=1}^{n+2} D_{n,i}}, \tag{9}$$

а

$$E_n(f, G) = \frac{|D_n|}{\sum_{i=1}^{n+2} D_{n,i}}. \tag{10}$$

Из (5) и (9) следует, что

$$\operatorname{sign}[f(x_1) - P_n(x_1)] = -\operatorname{sign} D_n. \tag{11}$$

Если в (9) числитель и знаменатель разделить на

$$\prod_{n+2 \geqslant k > i \geqslant 1} (x_k - x_i)$$

и ввести обозначение

$$d_{n,i} = \frac{1}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i) \dots (x_{n+2} - x_i)}, \tag{12}$$

то получим:

$$E_n(f, G) = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n+2} (-1)^{i-1} f(x_i) d_{n,i} \right|}{\sum_{i=1}^{n+2} d_{n,i}}. \tag{13}$$

В частности, если $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n+2})$ имеют чередующиеся знаки, то

$$E_n(f, G) = \frac{\sum_{i=1}^{n+2} |f(x_i)| d_{ni}}{\sum_{i=1}^{n+2} d_{n,i}} \tag{14}$$

и

$$m \leqslant E_n(f, G) \leqslant M,$$

где

$$m = \min_{i=1, 2, \dots, n+2} \{|f(x_i)|\}, \quad M = \max_{i=1, 2, \dots, n+2} \{|f(x_i)|\}.$$

3. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_{n+2}$ — произвольные точки множества G, расположенные в порядке возрастания $y_1 < y_2 < \dots < y_{n+2}$.

Положим

$$\rho(y_1, y_2, \dots, y_{n+2}) = \frac{|D_n(y_1, y_2, \dots, y_{n+2}, f)|}{\sum_{i=1}^{n+2} D_{n,i}(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+2})}. \tag{15}$$

Эта величина обладает тем свойством, что

1) $$\rho(y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}) \leqslant E_n(f, G); \tag{16}$$

2) существует система точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ $(x_i \in G)$, для которой

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = E_n(f, G). \tag{17}$$

Эта система точек образует чебышевский альтернанс и, следовательно,

$$\operatorname{sign}[f(x_1) - P_n(x_1)] = -\operatorname{sign} D_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f), \tag{18}$$

где $P_n(x)$ — многочлен наилучшего приближения к $f(x)$ на G.

Для доказательства этих утверждений обозначим через S множество, состоящее из $(n+2)$-х указанных точек $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}$, через $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены наилучшего приближения к функции $f(x)$ соответственно на множествах G и S в $H_n(P)$, а через $E_n(f, G)$ и $E_n(f, S)$ — соответствующие наилучшие приближения.

Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ — чебышевский альтернанс для $f(x)$ на G. По доказанному ранее (см. (10))

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = E_n(f, G).$$

Так как множество S состоит только из $(n+2)$-х точек $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}$, то они образуют чебышевский альтернанс $f(x)$ по отношению к S, а следовательно,

$$\rho(y_1, y_2, \ldots, y_{n+2},) = E_n(f, S).$$

Далее,

$$E_n(f, S) = \max_{x \in S} |f(x) - Q_n(x)| \leqslant \max_{x \in S} |f(x) - P_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x \in G} |f(x) - P_n(x)| = E_n(f, G).$$

Отсюда

$$\rho(y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}) = E_n(f, S) \leqslant E_n(f, G),$$

и неравенство (16) доказано.

Если $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ есть чебышевский альтернанс функции $f(x)$ на G, то $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = E_n(f, G)$, а так как в силу теоремы существования многочлена наилучшего приближения и теоремы Чебышева он всегда существует в G, то $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_{n+2})$ достигает своей верхней границы на любом из этих альтернансов.

Пусть теперь S есть множество точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, для которых

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = E_n(f, G), \tag{*}$$

а $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены наилучшего приближения к $f(x)$ в $H_n(P)$ соответственно на множествах G и S. Из равенства (*) следует, что

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = E_n(f, S) = E_n(f, G).$$

Но $S \subseteq G$. Следовательно,

$$E_n(f, G) = \max_{x \in G} |f(x) - P_n(x)| \geqslant \max_{x \in S} |f(x) - P_n(x)| \geqslant$$

$$\geqslant \max_{x \in S} |f(x) - Q_n(x)| = E_n(f, S).$$

Но так как

$$E_n(f, S) = E_n(f, G),$$

то

$$\max_{x \in S} |f(x) - P_n(x)| = \max_{x \in S} |f(x) - Q_n(x)|.$$

Это означает, что $P_n(x)$ есть многочлен наилучшего приближения к $f(x)$ на S и в силу единственности многочлена наилучшего приближения

$$P_n(x) = Q_n(x) \qquad (x \in S).$$

Но так как S состоит из $(n+2)$-х различных точек, то

$$P_n(x) \equiv Q_n(x).$$

Это и доказывает, что множество $S = \{x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n+2}\}$ есть альтернанс к $f(x)$ на G, а поэтому имеет место и равенство (18) (см. (11)).

4. Предыдущие рассуждения позволяют с помощью конечного числа шагов построить многочлен наилучшего приближения к $f(x)$ в $H_n(P)$ на множестве G, состоящем из конечного числа точек m $(m \geqslant n+2)$.

Рассмотрим сначала случай $m = n+2$.

Располагая точки этого множества в порядке возрастания $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, вычисляем $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$, используя равенства (15), (6), (8). Значение $\rho = E_n(f, S)$. Зная знак определителя $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f)$, определяем знак разности $f(x_1) - P_n(x_1)$ с помощью равенства (18).

Далее, пишем систему равенств

$$f(x_i) - P_n(x_i) = \alpha(-1)^i E_n(f, S) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2), \quad (19)$$

где $\alpha = +1$, если $D_n > 0$, и $\alpha = -1$, если $D_n < 0$.

Из этой системы равенств находим значения искомого многочлена $P_n(x)$ в точках x_i:

$$P_n(x_i) = f(x_i) - \alpha(-1)^i E_n(f, S) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2). \quad (20)$$

Этими значениями многочлен полностью определяется. Найти его можно, строя интерполяционный многочлен по любым $n+1$ значе-

ниям. Лишнее значение можно использовать для контроля, так как полученный интерполяционный многочлен должен принимать заранее вычисленное значение в неиспользованном узле.

Если множество G состоит из m точек $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$ $(m > n+2)$, то рассматриваем всевозможные комбинации из $(n+2)$-х точек этого множества $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{n+2}}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+2}$, и для каждой из них вычисляем $\rho(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{n+2}})$. Из конечного числа значений ρ выбираем наибольшее. Система точек $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{n+2}}$, для которой ρ имеет максимальное значение, будет давать альтернанс для $f(x)$ на G, и построение многочлена наилучшего приближения к $f(x)$ на G сводится к построению многочлена наилучшего приближения к $f(x)$ на множестве из этих $(n+2)$-х точек. Построение этого многочлена мы уже описали. Основная трудность заключается в том, что приходится вычислять значения ρ для всевозможных комбинаций $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{n+2}}$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+2})$, число которых равно C_m^{n+2}, т. е. при большом m может быть очень большим.

5. Для дальнейшего имеет важное значение следующая

Теорема. *Если $f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, а $\{P_{n,k}(x)\}_{k=1,2,\ldots}$ — последовательность многочленов из $H_n(P)$, для которых имеет место неравенство*

$$\Delta(f, P_{n,k}) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_{n,k}(x)| < E_n(f) + \varepsilon_k, \qquad (21)$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, то последовательность $\{P_{n,k}(x)\}_{k=1,2,\ldots}$ равномерно на $[a, b]$ сходится к многочлену наилучшего приближения $P_n(x)$ функции $f(x)$ на $[a, b]$ в $H_n(P)$.

Доказательство этой теоремы существенно опирается на лемму:

Из всякой последовательности многочленов $\{Q_{n,k}(x)\}_{k=1,2,\ldots}$ $(Q_{n,k}(x) \in H_n(P))$, ограниченных на $[a, b]$ одной и той же константой M, можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[a, b]$ к многочлену $Q_n(x) \in H_n(P)$.

Для доказательства леммы прежде всего докажем, что если

$$Q_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} x^j, \quad N_k = \sum_{j=0}^{n} |a_j^{(k)}| \quad \text{и} \quad M_k = \max_{x \in [a,b]} |Q_{n,k}(x)|,$$

то существуют такие постоянные A и B, не зависящие от k, что

$$N_k < AM_k, \qquad (22)$$

$$M_k < BN_k. \qquad (23)$$

В самом деле, если положить $B = \max\limits_{\substack{x \in [a,b] \\ j=0,1,2,\ldots,n}} |x^i|$, то при $x \in [a, b]$

$$|Q_{n,k}(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{n} |a_j^{(k)}| |x^j| \leqslant B \sum_{j=0}^{n} |a_j^{(k)}| = BN_k.$$

Отсюда

$$\max_{x\in[a,\,b]} |Q_{n,\,k}(x)| = M_k \leqslant BN_k,$$

и неравенство (23) доказано. Для доказательства неравенства (22) возьмем на $[a, b]$ некоторые точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \neq x_j$ при $i \neq j$). Тогда по интерполяционной формуле Лагранжа

$$Q_{n,\,k}(x) = \sum_{i=0}^{n} Q_{n,\,k}(x_i)\, L_{n,\,i}(x),$$

где $L_{n,\,i}(x)$ — многочлен степени n, обладающий свойством

$$L_{n,\,i}(x_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases}$$

Пусть $L_{n,\,i}(x) = \sum_{l=0}^{n} \beta_l^{(i)} x^l$. Тогда

$$a_l^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} Q_{n,\,k}(x_i)\, \beta_l^{(i)}.$$

Отсюда

$$N_k = \sum_{l=0}^{n} |a_l^{(k)}| \leqslant \sum_{l=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |Q_{n,\,k}(x_i)|\,|\beta_l^{(i)}| \leqslant M_k \sum_{l=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |\beta_l^{(i)}|.$$

Полагая $A = \sum_{l=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |\beta_l^{(i)}|$ (A не зависит от k), получим неравенство (22).

Теперь перейдем к непосредственному доказательству леммы. Многочлен $Q_{n,\,k}(x)$ вполне определяется его коэффициентами $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}$. Поэтому вместо последовательности многочленов $\{Q_{n,\,k}(x)\}_{k=1,\,2,\,\ldots}$ рассмотрим последовательность точек $R_k = (a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})$ $(n+1)$-мерного евклидова пространства. Так как $|Q_{n,\,k}(x)| < M$ ($x \in [a, b]$, $k = 1, 2, \ldots$), то по неравенству (22) $\sum_{i=0}^{n} |a_i^{(k)}| < MA$, т. е. $\{R_k\}$ — ограниченная последовательность точек, а следовательно, из нее можно выбрать некоторую подпоследовательность $\{R_{k_i}\}$, сходящуюся к некоторой точке $R = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, коэффициентами которого являются координаты точки R. Из неравенства (23) следует, что

$$\max_{x\in[a,\,b]} |Q_{n,\,k_i}(x) - Q(x)| \leqslant B \sum_{j=0}^{n} |a_j^{(k_i)} - a_j|.$$

Правая часть стремится к нулю при $k_i \to \infty$, а это и означает, что $\{Q_{n,\,k_i}(x)\}_{k_i}$ равномерно на $[a, b]$ сходится к $Q(x) \in H_n(P)$.

Используя эту лемму, докажем сформулированную выше теорему. Из неравенства (21) и условия, что $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, следует существование такой постоянной K, что

$$|P_{n,k}(x)| < K \qquad (x \in [a, b], \quad k = 1, 2, \ldots),$$

ибо

$$|P_{n,k}(x)| = |P_{n,k}(x) - f(x) + f(x)| \leqslant |P_{n,k}(x) - f(x)| + |f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \Delta(f, P_{n,k}) + \max_{x \in [a,b]} |f(x)| < E_n(f) + \varepsilon + M,$$

где ε — верхняя грань $\{\varepsilon_k\}$, а $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Поэтому за K можно взять $E_n(f) + \varepsilon + M$. Так как последовательность $\{P_{n,k}(x)\}_{k=1,2,\ldots}$ ограничена одним и тем же числом K, то по лемме из нее можно выбрать подпоследовательность $\{P_{n,k_i}(x)\}_{k_i}$, равномерно сходящуюся к некоторому многочлену $Q_n(x) \in H_n(P)$. Для этой подпоследовательности имеем:

$$\Delta(f, P_{n,k_i}) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_{n,k_i}(x)| \leqslant E_n(f) + \varepsilon_{k_i}.$$

Переходя к пределу при $k_i \to \infty$, получим:

$$\Delta(f, Q_n) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - Q_n(x)| \leqslant E_n(f),$$

но так как $E_n(f) = \inf\limits_{Q \in H_n(P)} \Delta(f, Q)$, то

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - Q_n(x)| = E_n(f)$$

и, следовательно, $Q_n(x)$ есть многочлен наилучшего приближения к $f(x)$ на $[a, b]$ в $H_n(P)$. В силу единственности многочлена наилучшего приближения $Q_n(x) = P_n(x)$.

Таким образом, подпоследовательность $\{P_{n,k_i}(x)\}_{k_i}$ равномерно на $[a, b]$ сходится к $P_n(x)$.

Из единственности многочлена наилучшего приближения следует, что и вся последовательность $\{P_{n,k}(x)\}_{k=1,2,\ldots}$ будет равиомерно сходиться к $P_n(x)$. Если бы это было не так, то из нее можно было бы выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторому другому многочлену $P_n^*(x) \in H_n(P)$. Этот многочлен должен был бы быть многочленом наилучшего приближения в $H_n(P)$ к $f(x)$, но это противоречит единственности многочлена наилучшего приближения.

2. Первый способ приближенного построения многочлена наилучшего приближения. Пусть для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, требуется построить многочлен, близкий

к многочлену наилучшего приближения $P_n(x)$ в $H_n(P)$. Для построения такого многочлена возьмем на отрезке $[a, b]$ $m+1$ точек $(m > n+1)$

$$x_j = a + j\frac{b-a}{m} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{24}$$

Обозначим это множество через G. Методом, описанным ранее, строим многочлен наилучшего приближения к $f(x)$ на G в $H_n(P)$. Этот многочлен обозначим через $P_{n,\,m+1}(x)$. Докажем, что при $m \to \infty$ последовательность многочленов $\{P_{n,\,m+1}(x)\}_{m=n+1,\ldots}$ равномерно на $[a, b]$ сходится к $P_n(x)$.

Обозначим через $2L$ колебание функции $f(x)$ на $[a, b]$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\max_{x\in[a,\,b]} f(x) = -\min_{x\in[a,\,b]} f(x), \quad \text{т. е.} \quad -L \leqslant f(x) \leqslant L.$$

Очевидно,

$$|P_{n,\,m+1}(x_j)| < L + E_n(f) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{25}$$

Пусть $|P_{n,\,m+1}(x)|$ достигает на $[a, b]$ максимума M_{m+1} в точке x^*. Среди точек x_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, m)$ найдется точка, удаленная от x^* не больше чем на $\frac{b-a}{2m}$. Пусть это точка x_k. Тогда

$$P_{n,\,m+1}(x^*) - P_{n,\,m+1}(x_k) = (x^* - x_k)\left[\frac{d}{dx}P_{n,\,m+1}(x)\right]_{x=\xi}, \tag{26}$$

где ξ лежит между x^* и x_k.

Воспользуемся *неравенством Маркова*, утверждающим, что если $P(x)$ — многочлен степени n, а $M = \max\limits_{x\in[a,\,b]} |P(x)|$, то при $x \in [a, b]$

$$|P'(x)| < \frac{2n^2 M}{(b-a)}. \tag{27}$$

Используя это неравенство, получим:

$$\left|\frac{dP_{n,\,m+1}(x)}{dx}\right| < \frac{2n^2 M_{m+1}}{b-a}. \tag{28}$$

Из (25), (26) и (28) имеем:

$$M_{m+1} - L - E_n(f) \leqslant P_{n,\,m+1}(x^*) - P_{n,\,m+1}(x_k) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2n^2 M_{m+1}}{b-a}\,\frac{b-a}{2m} = \frac{n^2}{m}\,M_{m+1}. \tag{29}$$

Таким образом,

$$M_{m+1}\left(1 - \frac{n^2}{m}\right) \leqslant L + E_n(f).$$

Если $m > n^2$, то

$$M_{m+1} \leqslant \frac{L + E_n(f)}{1 - \dfrac{n^2}{m}}. \tag{30}$$

Пусть теперь x — произвольная фиксированная точка отрезка $[a, b]$, а x_j — ближайшая к ней точка из рассматриваемой системы $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Снова, применяя неравенство Маркова (27) и оценку (30) для M_{m+1}, имеем:

$$|P_{n,\,m+1}(x) - P_{n,\,m+1}(x_j)| = |x - x_j| \left|\frac{dP_{n,\,m+1}(\xi)}{dx}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b-a}{2m}\frac{2n^2 M_{m+1}}{b-a} \leqslant \frac{n^2}{m}\frac{(L + E_n(f))}{1-\frac{n^2}{m}} = [L + E_n(f)]\frac{n^2}{m-n^2}. \quad (31)$$

Далее, на $[a, b]$ найдется точка $\bar{x}$, в которой имеет место равенство

$$\Delta(f, P_{n,\,m+1}) = \max_{x \in [a,\,b]} |f(x) - P_{n,\,m+1}(x)| = |f(\bar{x}) - P_{n,\,m+1}(\bar{x})|.$$

Пусть x_j — ближайшая к ней из рассматриваемых точек (24). Тогда

$$\Delta(f, P_{n,\,m+1}) = |f(\bar{x}) - P_{n,\,m+1}(\bar{x})| \leqslant |f(x_j) - P_{n,\,m+1}(x_j)| +$$
$$+ |f(x) - f(x_j)| + |P_{n,\,m+1}(x_j) - P_{n,\,m+1}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant E_n(f) + \omega\left(\frac{b-a}{2m}\right) + [L + E_n(f)]\frac{n^2}{m-n^2}, \quad (32)$$

где через $\omega(\delta)$ обозначен модуль непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ [1]). Обозначая сумму последних двух членов в правой части неравенства (32) через ε_m:

$$\varepsilon_m = \omega\left(\frac{b-a}{2m}\right) + [L + E_n(f)]\frac{n^2}{m-n^2}, \quad (33)$$

будем иметь:

$$\Delta(f, P_{n,\,m+1}) \leqslant E_n(f) + \varepsilon_m. \quad (34)$$

Очевидно, что $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$, следовательно, применима теорема п. 5, из которой следует, что $\{P_{n,\,m+1}(x)\}_{m=n+1,}$ равномерно сходится к $P_n(x)$.

Этим доказана сходимость нашего процесса приближенного построения многочленов наилучшего приближения.

Для оценки близости $P_{n,\,m+1}(x)$ к многочлену наилучшего приближения, т. е. величины

$$\Delta(f, P_{n,\,m+1}) - E_n(f),$$

---

[1]) Модулем непрерывности функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, называют величину $\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''| \leqslant \delta} |f(x'') - f(x')|$ $(x', x'' \in [a, b])$. При $\delta \to 0$, очевидно, $\omega(\delta) \to 0$.

можно пользоваться таким приемом. Находим

$$M_{m+1}=\max_{x\in[a,\,b]}|f(x)-P_{n,\,m+1}(x)|$$

и $E_n(f,\,G)$, где G—множество точек $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_m$. Тогда

$$\Delta(f,\,P_{n,\,m+1})-E_n(f)\leqslant M_{m+1}-E_n(f,\,G). \tag{35}$$

Пример. Для функции $f(x)=|x|$ в $H_2(P)$ найти многочлен наилучшего приближения на отрезке $[-1,\,+1]$.

Рассмотрим сначала множество G из четырех точек:

$$x_0=-1,\quad x_1=-\frac{1}{3},\quad x_2=\frac{1}{3},\quad x_3=1,$$

и найдем многочлен $P_{2,\,4}(x)$ наилучшего приближения к $f(x)$ на множестве G:

$$f(x_0)=1;\quad f(x_1)=\frac{1}{3};\quad f(x_2)=\frac{1}{3};\quad f(x_3)=1.$$

Отсюда

$$D_2(x_0,\,x_1,\,x_2,\,x_3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, $E_2(f,\,G)=0$.

Далее, составляем систему уравнений для определения значений многочлена $P_{2,\,4}(x)$:

$$f(x_0)-P_{2,\,4}(x_0)=0;\quad f(x_1)-P_{2,\,4}(x_1)=0;$$
$$f(x_2)-P_{2,\,4}(x_2)=0;\quad f(x_3)-P_{2,\,4}(x_3)=0.$$

Отсюда

$$P_{2,\,4}(x_0)=1;\quad P_{2,\,4}(x_1)=P_{2,\,4}(x_2)=\frac{1}{3};\quad P_{2,\,4}(x_3)=1.$$

Следовательно,

$$P_{2,\,4}(x)=P_{2,\,4}(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+P_{2,\,4}(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+$$
$$+P_{2,\,4}(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=1\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}+$$
$$+\frac{1}{3}\frac{(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)}+\frac{1}{3}\frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4};$$

$$\max_{x\in[-1,\,+1]}|f(x)-P_{2,\,4}(x)|=\frac{1}{4};\quad E_2(f,\,G)=0.$$

Таким образом,

$$\Delta(f, P_{2,4}) - E_2(f) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Приближение недостаточно хорошее.

Рассматриваем теперь множество G_1 из пяти точек:

$$x_0 = -1; \quad x_1 = -0{,}5; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0{,}5; \quad x_4 = 1.$$

Всего возможных комбинаций из четырех точек, расположенных в порядке возрастания, будет 5. Для каждой из них нужно вычислить величину ρ. Вычисления сведем в таблицу:

	Возможные комбинации	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	D_2	ρ
x_i		$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	0,5	1,0		
$f(x_i)$		1,0	0,5	0	0,5	1,0		
$D_{2,\,i}$	x_0, x_1, x_2, x_3	0,25	0,75	0,75	0,25	—	$-0{,}25$	0,125
$D_{2,\,i}$	x_0, x_1, x_2, x_4	0,75	2	1,5	—	0,25	$-0{,}5$	$\frac{1}{9}$
$D_{2,\,i}$	x_0, x_1, x_3, x_4	0,75	1,5	—	1,5	0,75	0	0
$D_{2,\,i}$	x_0, x_2, x_3, x_4	0,25	—	1,5	2	0,75	$-0{,}5$	$\frac{1}{9}$
$D_{2,\,i}$	x_1, x_2, x_3, x_4	—	0,25	0,75	0,75	0,25	0,25	0,125

$\max\rho = 0{,}125 = E_2(f, G_1)$ достигается для первой и последней комбинаций. Возьмем первую комбинацию. Система для отыскания значений $P_{2,5}(x)$ в точках этой комбинации имеет вид:

$$\begin{aligned} 1 - P_{2,5}(x_0) &= -0{,}125, \\ 0{,}5 - P_{2,5}(x_1) &= 0{,}125, \\ 0 - P_{2,5}(x_2) &= -0{,}125, \\ 0{,}5 - P_{2,5}(x_3) &= 0{,}125. \end{aligned}$$

Отсюда

$$P_{2,5}(-1) = 1{,}125; \quad P_{2,5}(-0{,}5) = 0{,}375;$$
$$P_{2,5}(0) = 0{,}125; \quad P_{2,5}(0{,}5) = 0{,}375$$

и

$$P_{2,5}(x) = 1{,}125\,\frac{(x+0{,}5)\,x}{(-0{,}5)(-1)} + 0{,}375\,\frac{x(x+1)}{(-0{,}5)(0{,}5)} + \\ + 0{,}125\,\frac{(x+1)(x+0{,}5)}{1\cdot 0{,}5} = x^2 + 0{,}125.$$

Для контроля вычислим $P_{2,5}(x_3)$:

$$P_{2,5}(0{,}5) = 0{,}5^2 + 0{,}125 = 0{,}375;$$

$$M_5 = \max_{x \in [-1, +1]} |f(x) - P_{2,5}(x)| = 0{,}125;$$

$$\Delta(f, P_{2,5}) - E_2(f) \leqslant 0{,}125 - 0{,}125 = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta(f, P_{2,5}) = E_2(f).$$

Следовательно, многочлен $P_{2,5}(x)$ совпадает с многочленом наилучшего приближения $P_2(x)$ функции $f(x) = |x|$ для отрезка $[-1, +1]$, т. е.

$$P_2(x) = x^2 + 0{,}125.$$

3. Второй способ приближенного построения многочлена наилучшего приближения. Этот способ состоит в следующем. За начальное приближение многочлена наилучшего приближения к непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в $H_n(P)$ берется некоторый многочлен $P_{n,0}(x) \in H_n(P)$, такой, что на отрезке $[a, b]$ должна существовать система из $(n+2)$-х точек $x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_{n+2}$, в которых разность $\Delta_0(x_i) = f(x_i) - P_{n,0}(x_i)$ имеет чередующиеся знаки. Исследуя на экстремум функцию $\Delta_0(x)$, находим такую комбинацию точек

$$x_1^{(0)} < x_2^{(0)} < \ldots < x_{n+2}^{(0)}, \tag{36}$$

на которой $\Delta_0\left(x_i^{(0)}\right)$ имеет чередующиеся знаки при возрастании i от 1 до $n+2$, а наибольшее и наименьшее значения $\left|\Delta_0\left(x_i^{(0)}\right)\right|$ соответственно равны L_0 и A_0, где $L_0 = \max\limits_{x \in [a, b]} |\Delta_0(x)|$, а A_0 — наилучшая нижняя граница для $E_n(f)$, которую можно получить из исследования $\Delta_0(x) = f(x) - P_{n,0}(x)$, как говорилось в начале этого параграфа.

Многочлен $P_{n,0}(x)$ целесообразно строить как многочлен наилучшего приближения к функции $f(x)$ на множестве точек $y_1 < y_2 < \ldots$ $\ldots < y_{n+2}$, где

$$y_i = \frac{b-a}{2} \cos \frac{(n+i)\pi}{n+1} + \frac{a+b}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2). \tag{37}$$

(Это — точки, соответствующие точкам экстремума многочлена Чебышева $T_{n+1}(t)$ на отрезке $[-1, +1]$, если с помощью преобразования $y = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$ отрезок $[-1, +1]$ преобразовать в отрезок $[a, b]$.) Далее, ищется поправка $P_0(x)$ к этому многочлену как многочлен наилучшего приближения в $H_n(P)$ к функции $\Delta_0(x) = f(x) - P_{n,0}(x)$ на множестве точек G_0 (36). Значения много-

члена $P_0(x)$ в точках $x_i^{(0)}$ определяются из системы

$$\Delta_0(x_1^{(0)}) - P_0(x_1^{(0)}) = -[\Delta_0(x_2^{(0)}) - P_0(x_2^{(0)})] = [\Delta_0(x_3^{(0)}) - P_0(x_3^{(0)})] = \ldots$$
$$\ldots = (-1)^{n+1}[\Delta_0(x_{n+2}^{(0)}) - P_0(x_{n+2}^{(0)})] = \alpha\rho(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n+2}^{(0)}) = \alpha\rho_0, \tag{38}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \operatorname{sign}\Delta_0(x_1^{(0)});\ \rho_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+2} d_{n,i}^{(0)} |\Delta_0(x_i^{(0)})|}{\sum\limits_{i=1}^{n+2} d_{n,i}^{(0)}}; \\ &d_{n,i}^{(0)} = \frac{1}{(x_i^{(0)} - x_1^{(0)})(x_i^{(0)} - x_2^{(0)})\ldots(x_i^{(0)} - x_{i-1}^{(0)})(x_{i+1}^{(0)} - x_i^{(0)})\ldots(x_{n+2}^{(0)} - x_i^{(0)})}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Найдя $P_0(x)$, получим первое приближение многочлена наилучшего приближения:

$$P_{n,1}(x) = P_{n,0}(x) + P_0(x). \tag{40}$$

Исследуя на экстремум функцию

$$\Delta_1(x) = f(x) - P_{n,1}(x) = \Delta_0(x) - P_0(x), \tag{41}$$

находим множество точек G_1:

$$x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < x_3^{(1)} < \ldots < x_{n+2}^{(1)},$$

в которых $\Delta_1(x_i^{(1)})$ имеет чередующиеся знаки, а наибольшее и наименьшее значения среди $|\Delta_1(x_i^{(1)})|$ равны соответственно L_1 и A_1 (L_1 и A_1 имеют такой же смысл для $\Delta_1(x)$, что и L_0 и A_0 для $\Delta_0(x)$). Затем строим многочлен наилучшего приближения $P_1(x)$ к функции $\Delta_1(x)$ на множестве G_1, используя (38) и (39) с заменой $x_i^{(0)}$ на $x_i^{(1)}$. Многочлен $P_{n,2}(x) = P_{n,1}(x) + P_1(x) = P_{n,0}(x) + P_0(x) + P_1(x)$ будет следующим приближением. Оценку точности приближения можно проводить так же, как и в первом способе, т. е. вычислив

$$M_m = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_{n,m}(x)|$$

для разности $\Delta(f, P_{n,m}) - E_n(f)$, характеризующей точность приближения, будем иметь неравенство

$$0 \leqslant \Delta(f, P_{n,m}) - E_n(f) \leqslant M_m - \rho_m. \tag{42}$$

Сходимость этого процесса получается из следующих соображений. Прежде всего имеет место следующее неравенство:

$$A_i < \rho_i = \rho(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n+2}^{(i)}) \leqslant A_{i+1}. \tag{43}$$

В самом деле, $\Delta_{i+1}(x)$ принимает по очереди значения $\rho_i \operatorname{sign}\Delta_i(x_1^{(i)})$ и $-\rho_i \operatorname{sign}\Delta_i(x_1^{(i)})$ в $(n+2)$-х точках $x_1^{(i)} < x_2^{(i)} < \ldots < x_{n+2}^{(i)}$.

Следовательно,

$$\min_{j=1,\,2,\,\ldots,\,n+2} \left|\Delta_{i+1}\left(x_j^{(i)}\right)\right| = \rho_i.$$

Но за A_{i+1} мы по определению принимаем наибольшую из нижних границ $\left\{\left|\Delta_{i+1}(x_j)\right|\right\}_{j=1,\,2,\,\ldots,\,n+2}$ для всевозможных комбинаций точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, для которых

$$\operatorname{sign}\Delta_{i+1}(x_1) = -\operatorname{sign}\Delta_{i+1}(x_2) =$$
$$= \operatorname{sign}\Delta_{i+1}(x_3) = \ldots = (-1)^{n+1}\operatorname{sign}\Delta_{i+1}(x_{n+2}),$$

т. е.

$$A_{i+1} \geqslant \rho_i,$$

а так как

$$\rho_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+2} d_{n,\,j}^{(i)} \left|\Delta_i\left(x_j^{(i)}\right)\right|}{\sum\limits_{j=1}^{n+2} d_{n,\,j}^{(i)}}, \tag{44}$$

то ρ_i заключено между наименьшим и наибольшим из значений $\left|\Delta_i\left(x_j^{(i)}\right)\right|$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+2)$, т. е.

$$A_i < \rho_i < L_i.$$

Следовательно, неравенство (43) справедливо. Последовательные точки в системе $x_1^{(i)} < x_2^{(i)} < \ldots < x_{n+2}^{(i)}$ не могут находиться друг от друга на расстоянии меньшем, чем минимум длин интервалов $I_1^{(i)}$, $I_2^{(i)}$, ..., о которых мы говорили в начале параграфа при определении величины A_i. Но, как мы отмечали, минимум длин этих интервалов при фиксированных n, $f(x)$ и $[a, b]$ зависит лишь от R, которое в данном случае равно A_i, и может стремиться к нулю только при $R \to 0$. Но так как в нашем случае при переходе к каждому следующему приближению величина A_i не убывает, то эта нижняя граница длин интервалов для всех i может быть выбрана одна, пусть она будет $l_0 > 0$. Отсюда следует, что

$$l_0 \leqslant x_j^{(i)} - x_k^{(i)} \leqslant b - a \quad (j > k;\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+2;\ i = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Отсюда следует, что и $d_{n,\,j}^{(i)}$ ограничены снизу и сверху положительными числами d_0 и D_0. Учитывая способ выбора точек $x_j^{(i)}$, можно заключить, что имеется такое фиксированное число θ $(0 < \theta < 1)$, что

$$\rho_i - A_i > (1 - \theta)(L_i - A_i). \tag{45}$$

Тем более, будет иметь место неравенство

$$A_{i+1} - A_i > (1 - \theta)[E_n(f) - A_i]. \tag{46}$$

Из неравенства (46) следует, что

$$E_n(f) - A_{i+1} < \theta\,[E_n(f) - A_i], \tag{47}$$

из которого получаем, что

$$E_n(f) - A_{i+1} < \theta^{i+1}[E_n(f) - A_0], \tag{48}$$

т. е.

$$\lim_{i\to\infty} A_i = E_n(f). \tag{49}$$

Далее

$$L_i - E_n(f) < L_i - A_i < \frac{\rho_i - A_i}{1-\theta} < \frac{E_n(f) - A_i}{1-\theta}. \tag{50}$$

Отсюда

$$\lim_{i\to\infty} L_i = E_n(f), \tag{51}$$

т. е.

$$L_i = E_n(f) + \delta_i \qquad (\delta_i \to 0 \text{ при } i\to\infty), \tag{52}$$

а это означает (по теореме п. 5), что последовательность многочленов $\{P_{n,i}(x)\}_{i=0,1,\ldots}$ равномерно на $[a, b]$ сходится к многочлену наилучшего приближения $P_n(x)$ для функции $f(x)$ на $[a, b]$ в $H_n(P)$.

Пример. Для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $[-1 \leqslant x \leqslant 1]$ найти приближенно многочлен $P_3(x)$ наилучшего приближения в $H_3(P)$ так, чтобы отклонение $\Delta(f, P_3(x))$ отличалось от $E_3(f)$ не больше чем на 0,0001.

За начальное приближение $P_{3,0}(x)$ возьмем многочлен наилучшего приближения к данной функции $f(x)$ на множестве G точек экстремума многочлена Чебышева $T_4(x)$ на отрезке $[-1, +1]$. Это будут точки:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_5 = 1,$$

$$f(x_1) = \frac{1}{2}; \quad f(x_2) = \frac{2}{3}; \quad f(x_3) = 1; \quad f(x_4) = \frac{2}{3}; \quad f(x_5) = \frac{1}{2}.$$

Находим наилучшее приближение $E_3(f, G)$:

$$E_3(f, G) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} f(x_i)\, d_{3,i}\right|}{\sum_{i=1}^{5} d_{3,i}},$$

$$d_{3,1} = d_{3,5} = \frac{1}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-0)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+1)} = 1,$$

$$d_{3,2} = d_{3,4} = \frac{1}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 2,$$

$$d_{3,3} = \frac{1}{(0+1)\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)(1-0)} = 2.$$

Отсюда

$$E_3(f, G) = \frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 2 + 1\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1\right|}{1+2+2+2+1} = \frac{1}{24}.$$

Система для определения значений $P_{3,0}(x_i)$ имеет вид:

$$\frac{1}{2} - P_{3,0}(x_1) = \frac{1}{24}; \quad \frac{2}{3} - P_{3,0}(x_1) = -\frac{1}{24}; \quad 1 - P_{3,0}(x_3) = \frac{1}{24};$$

$$\frac{2}{3} - P_{3,0}(x_4) = -\frac{1}{24}; \quad \frac{1}{2} - P_{3,0}(x_5) = \frac{1}{24}.$$

Отсюда

$$P_{3,0}(-1) = P_{3,0}(1) = \frac{11}{24};$$

$$P_{3,0}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = P_{3,0}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{17}{24}; \quad P_{3,0}(0) = \frac{23}{24};$$

$$P_{3,0}(x) = \frac{11}{24}\frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1)\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} +$$

$$+\frac{17}{24}\frac{(x+1)x\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} + \frac{23}{24}\frac{(x+1)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} +$$

$$+\frac{17}{24}\frac{(x+1)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{x^2}{2} + \frac{23}{24};$$

$$\Delta_0(x) = f(x) - P_{3,0}(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{23}{24}.$$

Эта функция на $[-1, +1]$ достигает экстремальных значений в точках:

$$x_1^{(0)} = -1; \quad x_2^{(0)} = -\sqrt{\sqrt{2}-1}; \quad x_3^{(0)} = 0; \quad x_4^{(0)} = \sqrt{\sqrt{2}-1}; \quad x_5^{(0)} = 1.$$

Значения $\Delta_0(x)$ в этих точках следующие:

$$\Delta_0(x_1^{(0)}) = \Delta_0(x_3^{(0)}) = \Delta_0(x_5^{(0)}) = \frac{1}{24}; \quad \Delta_0(x_2^{(0)}) = \Delta_0(x_4^{(0)}) = \frac{24\sqrt{2}-35}{24}.$$

Эти значения имеют чередующиеся знаки.

Находим поправку $P_0(x)$ к $P_{3,0}(x)$ как многочлену наилучшего приближения к $\Delta_0(x)$ на множестве точек $G_0 = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, x_5^{(0)}\}$:

$$d_{3,1}^{(0)} = d_{3,5}^{(0)} = \frac{1}{\left(1-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\cdot 1\cdot\left(1+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\cdot 2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4},$$

$$d_{3,2}^{(0)} = d_{3,4}^{(0)} = \frac{1}{\left(1-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot 2\sqrt{\sqrt{2}-1}\left(1+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)} = \frac{3\sqrt{2}+4}{4},$$

$$d_{3,3}^{(0)} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot 1} = \sqrt{2}+1,$$

$$\rho_0 = E_3(f, G_0) = \frac{2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{24} + 2\,\frac{35-24\sqrt{2}}{24}\cdot\frac{3\sqrt{2}+4}{4} + (\sqrt{2}+1)\frac{1}{24}}{2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{4} + 2\,\frac{3\sqrt{2}+4}{4} + \sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = 0{,}04289.$$

Система для определения значений многочлена $P_0(x)$ в $x_i^{(0)}$ имеет вид:

$$\frac{1}{24} - P_0\left(x_1^{(0)}\right) = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}; \quad \frac{24\sqrt{2}-35}{24} - P_0\left(x_2^{(0)}\right) = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4};$$

$$\frac{1}{24} - P_0\left(x_3^{(0)}\right) = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}; \quad \frac{24\sqrt{2}-35}{24} - P_0\left(x_4^{(0)}\right) = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4};$$

$$\frac{1}{24} - P_0\left(x_5^{(0)}\right) = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}.$$

Отсюда

$$P_0\left(x_i^{(0)}\right) = \frac{12\sqrt{2}-17}{24} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Следовательно,

$$P_0(x) \equiv \frac{12\sqrt{2}-17}{24}, \quad P_{3,1}(x) = P_{3,0}(x) + P_0(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{2\sqrt{2}+1}{4},$$

$$\Delta_1(x) = f(x) - P_{3,1}(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{2\sqrt{2}+1}{4}.$$

Точки экстремума $\Delta_1(x)$ на $[-1, +1]$ будут:

$$x_1^{(1)} = -1; \quad x_2^{(1)} = -\sqrt{\sqrt{2}-1}; \quad x_3^{(1)} = 0; \quad x_4^{(1)} = \sqrt{\sqrt{2}-1}; \quad x_5^{(1)} = 1;$$

$$\Delta_1\left(x_1^{(1)}\right) = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}; \quad \Delta_1\left(x_2^{(1)}\right) = \frac{2\sqrt{2}-3}{4}; \quad \Delta_1\left(x_3^{(1)}\right) = \frac{3-2\sqrt{2}}{4};$$

$$\Delta_1\left(x_4^{(1)}\right) = \frac{2\sqrt{2}-3}{4}; \quad \Delta_1\left(x_5^{(1)}\right) = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}.$$

Это означает, что

$$P_{3,1}(x) \equiv P_3(x); \quad E_3(f) = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = 0{,}04289,$$

т. е. мы нашли точное выражение многочлена наилучшего приближения $P_3(x)$ и наилучшее приближение $E_3(f)$.

Замечание. При построении многочлена наилучшего приближения в $H_n(P)$ на множестве S из $n+2$ точек иногда бывает проще вместо того, чтобы находить $E_n(f, S)$ по общей формуле (15), а затем по значениям $P_n(x_i)$, определяемым из системы (19), строить интерполяционный многочлен по любым $n+1$ значениям, рассматривать систему (19) как систему с $n+2$ неизвестными: $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (коэффициенты искомого многочлена) и $l = \alpha E_n(f, S)$, и решать ее непосредственно.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Среди многочленов вида $Ax+B$ найти многочлен наилучшего приближения для функции $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ на отрезке $[0, 1]$. Используя его, показать, что если a и b — катеты прямоугольного треугольника ($a \geqslant b$), то с точностью до 4,5% величины a гипотенуза треугольника c равна $0{,}955a + 0{,}414b$.

2. Среди всех многочленов вида

$$Ax^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,$$

где A — заданное число, не равное нулю, найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a, b]$.

3. Среди всех тригонометрических многочленов вида

$$A\cos nx + B\sin nx + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

где A и B — заданные числа ($A^2 + B^2 \neq 0$), найти тот, который наименее уклоняется от нуля на отрезке $[-\pi, +\pi]$.

4. Показать, что

$$P_n(x) = \frac{1}{x-a} - R_n(x) \qquad (a > 1),$$

где

$$R_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n [ax - 1 + \sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]}{2(x-a)(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} + \\ + \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n [ax - 1 - \sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]}{2(x-a)(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}$$

есть многочлен степени не выше n, являющийся многочленом наилучшего приближения к функции $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ на отрезке $[-1, 1]$. Найти величину наилучшего приближения $E_n(f)$.

5. Среди всех многочленов $P_n(x)$ степени n, принимающих в точке ξ, лежащей вне отрезка $[-1, +1]$, значение η, найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, +1]$.

Отв $P_n(x) = \eta \dfrac{T_n(x)}{T_n(\xi)}$.

6. Найти многочлены Бернштейна $B_n(x)$ для функции $f(x) = e^x$ на отрезке $[-0, 1]$.

7. В $H_3(P)$ найти многочлен наилучшего приближения к функции $f(x) = |x|$ на множестве точек: $x = -0{,}5;\ -0{,}25;\ 0;\ 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$.

8. В $H_2(P)$ найти приближенно многочлен наилучшего приближения к функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1; 0{,}5]$ так, чтобы

$$\Delta(f, P_2) \leqslant E_2(f) + 0{,}0001.$$

9. В $H_3(P)$ найти приближенно многочлен наилучшего приближения к функции $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ на отрезке $[-1, +1]$ так, чтобы $\Delta(f, P_3) \leqslant F_3(f) + 0{,}0001$.

10. Показать, что среди многочленов степени не выше n многочлен

$$P(x) = \frac{2a^{n+1}}{(1-a^2)^2} \frac{1}{x-1}\left[T_{n+1}\left(\frac{x}{M}\right) - 2aT_n\left(\frac{x}{M}\right) + a^2 T_{n-1}\left(\frac{x}{M}\right)\right] + \frac{1}{x-1}$$

дает наилучшее приближение к функции $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ на отрезке $[-M, +M]$, где $M < 1$, а $a = \dfrac{1}{M} - \sqrt{\dfrac{1}{M^2} - 1}$.

Указание. Воспользоваться упражнением 4 и соотношением

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
2. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимаций, Гостехиздат, 1947.
3. В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1954.
4. Е. Я. Ремез, Общие вычислительные методы чебышевского приближения, Изд. АН УССР, 1957.
5. С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, ОНТИ, 1937.

ГЛАВА 5

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В данной главе, так же как и в гл. 2 и 4, будут рассмотрены вопросы приближения функций $f(x)$, принадлежащих к некоторому классу R, функциями $\varphi(x)$ из более узкого класса $\overline{R}$, но за меру близости будет приниматься величина

$$\delta = \sqrt{\int_a^b p(x)\,[f(x) - \varphi(x)]^2\,dx}$$

или

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\,[f(x_i) - \varphi(x_i)]^2}\,,$$

где $p(x)$ — заданная неотрицательная функция, называемая весом.

Такое понятие близости имеет смысл по следующим причинам:

1. Во многих случаях нет никакой необходимости требовать близости $f(x)$ и $\varphi(x)$ в каждой точке $x \in [a, b]$, т. е. требовать равномерного приближения, а достаточно лишь «интегральной» близости функций.

2. Очень часто приближаемая функция $f(x)$ задана лишь таблицей ее значений, причем последние получены из эксперимента, т. е. имеют случайные погрешности. Если в процессе решения задачи требуется находить значения $f(x)$ для промежуточных значений или иметь аналитическое представление функции $f(x)$, то нецелесообразно прибегать к интерполированию, так как совсем не естественно требовать точного совпадения приближающей и приближаемой функций в некоторых точках, так как значения самой приближаемой функции неточны. Практика показывает, что приближающие функции, построенные по методу среднеквадратичного приближения, значительно лучше представляют реальную функцию $f(x)$, чем интерполяционные многочлены

3. Так определенная мера близости позволяет расширить класс R приближаемых функций. При рассмотрении равномерного приближения мы ограничивались классом C непрерывных функций, и это было существенное требование, если ставить задачу равномерного

приближения функции $f(x)$ многочленами с любой заданной точностью. Здесь же требование непрерывности излишне. Нужно лишь требовать существования $\int_a^b p(x) f^2(x)\,dx$, т. е. можно рассматривать приближение функций из класса $L_2(p)$ функций, интегрируемых с квадратом с весом $p(x)$.

Для упрощения изложения начнем его с общей задачи приближения в гильбертовом пространстве, а затем уже рассмотрим и конкретные вопросы среднеквадратичного приближения и их приложения.

§ 1. Гильбертовы пространства

Введем еще одно очень важное понятие функционального анализа. Пусть R — некоторое линейное множество. Будем говорить, что в нем определено *скалярное произведение*, если каждой паре его элементов f_1 и f_2, взятых в определенном порядке, поставлено в соответствие комплексное число (f_1, f_2), называемое скалярным произведением этих элементов, удовлетворяющее следующим условиям:

1) скалярные произведения (f_1, f_2) и (f_2, f_1) являются комплексно-сопряженными числами

$$(f_1, f_2) = \overline{(f_2, f_1)}; \tag{1}$$

2) для любых элементов $f_1, f_2, f_3 \in R$ и любых комплексных чисел α_1 и α_2 имеет место равенство

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, f_3) = \alpha_1 (f_1, f_3) + \alpha_2 (f_2, f_3); \tag{2}$$

3) скалярное произведение элемента f на самого себя есть неотрицательное число, равное нулю тогда и только тогда, когда $f = 0$, т. е.

$$(f, f) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad (f, f) = 0 \quad \text{только при} \quad f = 0. \tag{3}$$

Из этих свойств скалярного произведения следует, что

$$(f_1, \alpha_1 f_2 + \alpha_2 f_3) = \bar{\alpha}_1 (f_1, f_2) + \bar{\alpha}_2 (f_1, f_3). \tag{4}$$

В самом деле,

$$(f_1, \alpha_1 f_2 + \alpha_2 f_3) = \overline{(\alpha_1 f_2 + \alpha_2 f_3, f_1)} = \overline{\alpha_1 (f_2, f_1) + \alpha_2 (f_3, f_1)} =$$
$$= \bar{\alpha}_1 \overline{(f_2, f_1)} + \bar{\alpha}_2 \overline{(f_3, f_1)} = \bar{\alpha}_1 (f_1, f_2) + \bar{\alpha}_2 (f_1, f_3).$$

Далее, для любых элементов $f, g \in R$ имеет место неравенство

$$|(f, g)|^2 \leqslant (f, f)(g, g), \tag{5}$$

называемое *неравенством Буняковского.*

Действительно, если $(f, g) = 0$, то доказываемое неравенство очевидно. Пусть теперь $(f, g) = \alpha \neq 0$. Скалярный квадрат

элемента $\bar{\beta}f+\lambda g$, где λ — произвольное действительное число, а $\beta=\frac{\alpha}{|\alpha|}=\frac{(f,\ g)}{|(f,\ g)|}$ по свойству 3 скалярного произведения есть неотрицательное число, т. е.

$$0\leqslant(\bar{\beta}f+\lambda g,\ \bar{\beta}f+\lambda g)=\beta\bar{\beta}(f,\ f)+\beta\lambda(g,\ f)+\bar{\beta}\lambda(f,\ g)+\lambda^2(g,\ g)=$$
$$=(f,\ f)+2\lambda|(f,\ g)|+\lambda^2(g,\ g).$$

Так как это неравенство справедливо для любого действительного числа λ, то дискриминант квадратного трехчлена относительно λ, стоящего в правой части неравенства, отрицателен, т. е.

$$|(f,\ g)|^2-(f,\ f)(g,\ g)\leqslant 0.$$

Заметим, что знак равенства достигается здесь тогда и только тогда, если при некотором λ $\bar{\beta}f+\lambda g=0$.

Если в линейном множестве R определено скалярное произведение, то его можно нормировать, определив норму элемента $f\in R$ следующим образом:

$$\|f\|=\sqrt{(f,\ f)}. \tag{6}$$

При этом все свойства нормы будут выполнены. В самом деле, $\|f\|=\sqrt{(f,\ f)}\geqslant 0$ и $\|f\|=0$ только при $f=0$:

$$\|cf\|=\sqrt{(cf,\ cf)}=\sqrt{c\bar{c}(f,\ f)}=|c|\|f\|;$$
$$\|f+g\|^2=(f+g,\ f+g)=(f,\ f)+(g,\ f)+(f,\ g)+(g,\ g)=$$
$$=\|f\|^2+2Re(f,\ g)+\|g\|^2,$$

но по неравенству Буняковского

$$Re(f,\ g)\leqslant|(f,\ g)|\leqslant\sqrt{(f,\ f)(g,\ g)}=\|f\|\,\|g\|.$$

Отсюда

$$\|f+g\|^2\leqslant\|f\|^2+2\|f\|\cdot\|g\|+\|g\|^2=(\|f\|+\|g\|)^2,$$

т. е.

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|.$$

Знак равенства будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$Re(f,\ g)=|(f,\ g)|=\sqrt{(f,\ f)(g,\ g)}=\|f\|\cdot\|g\|.$$

Следовательно, в этом случае,

$$(f,\ g)=\sqrt{(f,\ f)}\cdot\sqrt{(g,\ g)}.$$

Как мы заметили при доказательстве неравенства Буняковского, тогда найдутся $\bar{\beta}\neq 0$ и действительное λ такие, что

$$\bar{\beta}f+\lambda g=0.$$

Отсюда

$$f=\alpha g,\quad \alpha=-\frac{\lambda}{\overline{\beta}}.$$

Подставляя это выражение для f в предыдущее равенство, получим

$$\alpha(g,\ g)=\sqrt{(f,\ f)}\cdot\sqrt{(g,\ g)},$$

или

$$\alpha=\frac{\sqrt{(f,f)}}{\sqrt{(g,\ g)}}>0,$$

если только $f\neq 0$, $g\neq 0$. Таким образом, наше множество строго нормировано (см. § 1 гл. 4).

Итак, линейное множество, в котором определено скалярное произведение, становится линейным нормированным пространством, а следовательно и метрическим пространством. Поэтому в нем можно ввести все те понятия, о которых говорилось во Введении и в четвертой главе.

Линейное пространство R, в котором введено понятие скалярного произведения, называется *гильбертовым пространством*, если оно ***сепарабельно,*** т. е. в нем существует счетное всюду плотное множество элементов.

В линейном множестве с определенным в нем скалярным произведением легко установить линейную зависимость или независимость системы элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Для этого введем понятие определителя Грамма системы.

Определителем Грамма системы элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n\in R$ назовем определитель

$$G(f_1, f_2, \ldots, f_n)=\begin{vmatrix}(f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \ldots & (f_1, f_n)\\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \ldots & (f_2, f_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (f_n, f_1) & (f_n, f_2) & \ldots & (f_n, f_n)\end{vmatrix}. \tag{7}$$

Имеет место теорема:

Для того чтобы система элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ множества R была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы определитель Грамма этой системы обращался в нуль.

Докажем сначала необходимость, т. е. покажем, что если система $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно зависима, то $G(f_1, f_2, \ldots, f_n)=0$. Если $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — линейно зависимая система элементов R, то существует такая система чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, среди которых имеются отличные от нуля, что

$$f_1+\alpha_2 f_2+\ldots+\alpha_n f_n=0.$$

Умножая скалярно это равенство слева последовательно на $f_1, f_2, \ldots, f_n$, получим:

$$\begin{aligned}
&\bar{\alpha}_1(f_1, f_1)+\bar{\alpha}_2(f_1, f_2)+\ldots+\bar{\alpha}_n(f_1, f_n)=0,\\
&\bar{\alpha}_1(f_2, f_1)+\bar{\alpha}_2(f_2, f_2)+\ldots+\bar{\alpha}_n(f_2, f_n)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\bar{\alpha}_1(f_n, f_1)+\bar{\alpha}_2(f_n, f_2)+\ldots+\bar{\alpha}_n(f_n, f_n)=0.
\end{aligned}$$

Рассматривая полученные равенства как систему уравнений с неизвестными $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n$, мы видим, что она имеет нетривиальное решение. Следовательно, ее определитель, являющийся определителем Грамма системы элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$, равен нулю.

Докажем теперь достаточность, т. е. предположим, что $G(f_1, f_2, \ldots, f_n)=0$, и покажем, что система $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно зависима. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$:

$$\begin{aligned}
&\beta_1(f_1, f_1)+\beta_2(f_1, f_2)+\ldots+\beta_n(f_1, f_n)=0,\\
&\beta_1(f_2, f_1)+\beta_2(f_2, f_2)+\ldots+\beta_n(f_2, f_n)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\beta_1(f_n, f_1)+\beta_2(f_n, f_2)+\ldots+\beta_n(f_n, f_n)=0.
\end{aligned}$$

Так как определитель этой системы $G(f_1, f_2, \ldots, f_n)=0$, то она имеет нетривиальное решение. Пусть это решение будет $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Обозначим через f элемент множества R, равный $\bar{\alpha}_1 f_1+\bar{\alpha}_2 f_2+\ldots+\bar{\alpha}_n f_n$. Тогда из системы уравнений имеем:

$$(f_1, f)=0, \quad (f_2, f)=0, \ldots, (f_n, f)=0.$$

Отсюда

$$(\bar{\alpha}_1 f_1+\bar{\alpha}_2 f_2+\ldots+\bar{\alpha}_n f_n, f)=(f, f)=0,$$

а это означает, что $f=0$, т. е.

$$\bar{\alpha}_1 f_1+\bar{\alpha}_2 f_2+\ldots+\bar{\alpha}_n f_n=0,$$

а так как среди чисел $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n$ имеется хотя бы одно, отличное от нуля, то это означает, что система $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно зависима.

§ 2. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве Ряды Фурье

Два элемента f и g гильбертова пространства называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. $(f, g)=0$. Элемент f называется *нормированным*, если его норма равна единице.

Конечную или бесконечную систему элементов мы назовем *ортогональной системой*, если любые два ее элемента ортогональны. Система называется *ортонормированной*, если она ортогональна и элементы ее нормированы.

Ортонормированная система всегда линейно независима, так как определитель Грамма ее равен единице.

Докажем следующую теорему:

Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — *система линейно независимых элементов гильбертова пространства, то можно построить такую ортонормированную систему* $g_1, g_2, \ldots, g_n$, *что элементы ее будут линейными комбинациями элементов системы* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, *и наоборот.* Так как $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — система линейно независимых элементов, то среди них нет нулевого элемента. Поэтому $\|\varphi_i\| = \sqrt{(\varphi_i, \varphi_i)} > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Будем строить ортонормированную систему последовательно. Положим $g_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$. Очевидно $\|g_1\| = 1$. Рассмотрим далее элемент $\psi_2 = \varphi_2 + \alpha g_1$ и подберем α так, чтобы $(\psi_2, g_1) = 0$. Получим:

$$0 = (\psi_2, g_1) = (\varphi_2, g_1) + \alpha (g_1, g_1), \quad \alpha = -(\varphi_2, g_1).$$

Очевидно, $\|\psi_2\| \neq 0$, так как в противном случае было бы $\varphi_2 + \alpha g_1 = \varphi_2 + \frac{\alpha}{\|\varphi_1\|}\varphi_1 = 0$, что невозможно в силу линейной независимости φ_1 и φ_2. Положим теперь $g_2 = \frac{\psi_2}{\|\psi_2\|}$. Тогда $\|g_2\| = 1$ и $(g_1, g_2) = 0$. Пусть уже построены элементы $g_1, g_2, \ldots, g_k$ такие, что $\|g_1\| = \|g_2\| = \ldots = \|g_k\| = 1$, $(g_i, g_j) = 0$ при $i \neq j$ и элемент g_i является линейной комбинацией элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i$. Построим элемент

$$\psi_{k+1} = \varphi_{k+1} + \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_k g_k$$

и подберем числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ так, чтобы $(\psi_{k+1}, g_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Получим:

$$0 = (\psi_{k+1}, g_i) = (\varphi_{k+1}, g_i) + \alpha_i (g_i, g_i) = (\varphi_{k+1}, g_i) + \alpha_i,$$

т. е.

$$\alpha_i = -(\varphi_{k+1}, g_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Элемент ψ_{k+1} есть линейная комбинация $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \varphi_{k+1}$. Он не может быть нулевым элементом, так как φ_{k+1} входит в ψ_{k+1} с коэффициентом 1 (в $g_1, g_2, \ldots, g_k$ элемент φ_{k+1} не входит) и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \varphi_{k+1}$ по условию линейно независимы. Поэтому $\|\psi_{k+1}\| > 0$. Положим теперь $g_{k+1} = \frac{\psi_{k+1}}{\|\psi_{k+1}\|}$. Очевидно, что $\|g_{k+1}\| = 1$ и $(g_{k+1}, g_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Кроме того, g_{k+1} есть линейная комбинация элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k+1}$. Таким образом, по индукции можно заключить, что существует система элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$,

являющаяся ортонормированной системой, каждый элемент которой есть линейная комбинация элементов исходной системы. Так как

$$\varphi_{k+1} = \|\psi_{k+1}\| g_{k+1} - \alpha_1 g_1 - \ldots - \alpha_k g_k,$$

то и обратно, элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ являются линейными комбинациями элементов системы $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Назовем ортонормированную систему *полной*, если не существует никакого другого элемента, отличного от нулевого, который ортогонален ко всем элементам системы. Другими словами, полнота системы означает, что ее нельзя расширить присоединением новых элементов до более широкой ортонормированной системы.

Докажем теорему:

В гильбертовом пространстве любая ортонормированная система не более чем счетна.

Так как гильбертово пространство сепарабельно, то существует счетное всюду плотное в нем множество элементов $\{\varphi_k\}$. Пусть $\{g\}$ — некоторая ортонормированная система элементов пространства R. Пусть g — некоторый элемент этой системы. Для него можно найти такой элемент φ_k, что $\|\varphi_k - g\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Покажем, что не может существовать другого элемента из системы $\{g\}$, для которого имело бы место такое же неравенство. Пусть такой элемент g' существует, т. е. $\|\varphi_k - g'\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда, с одной стороны,

$$\|g - g'\| = \|(g - \varphi_k) + (\varphi_k - g')\| \leqslant \|g - \varphi_k\| + \|\varphi_k - g'\| < \sqrt{2},$$

а с другой стороны,

$$\|g - g'\| = \sqrt{(g - g', g - g')} = \sqrt{(g, g) + (g', g')} = \sqrt{2},$$

что невозможно, а это уже означает, что множество $\{g\}$ не более чем счетно.

Докажем следующую теорему:

Во всяком гильбертовом пространстве существует не более чем счетная полная ортонормированная система элементов. Рассмотрим в гильбертовом пространстве счетное всюду плотное множество элементов $\{\varphi_k\}$. Опустим в нем нулевой элемент, если он имеется, а также все элементы, линейно зависящие от предыдущих. Оставшуюся систему элементов ортогонализируем и нормируем так, как это было показано ранее. Получим не более чем счетную ортонормированную систему элементов $\{g_k\}$. Докажем, что эта система полна. В самом деле, пусть f является элементом гильбертова пространства, ортогональным ко всем элементам системы $\{g_k\}$, т. е. $(f, g_k) = 0$ при всех k. Так как каждый элемент φ_i системы $\{\varphi_k\}$ есть линейная комбинация элементов $g_1, g_2, \ldots, g_i$, то $(f, \varphi_k) = 0$ при всех k. При любом $\varepsilon > 0$, в силу плотности множества $\{\varphi_k\}$ в R,

можно найти такой элемент φ_j, что $\|f-\varphi_j\|<\varepsilon$. Тогда, используя неравенство Буняковского и равенство $(\varphi_j, f)=0$, получим:

$$\|f\|^2=(f,f)=(f,f)-(\varphi_j,f)=(f-\varphi_j,f)\leqslant\|f-\varphi_j\|\cdot\|f\|<\varepsilon\|f\|.$$

Следовательно, $\|f\|<\varepsilon$, а так как ε — произвольное число, то $\|f\|=0$. Это означает, что $f=0$, т. е. система $\{g_k\}$ есть полная ортонормированная система элементов.

Пусть теперь $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ — какая-то ортонормированная система элементов гильбертова пространства R. Скалярные произведения $\alpha_i=(f, g_i)$ назовем *коэффициентами Фурье элемента* f по ортонормированной системе $\{g_k\}$. Элементу f можно поставить в соответствие ряд (или конечную сумму, если ортонормированная система конечна)

$$f\sim\alpha_1g_1+\alpha_2g_2+\ldots+\alpha_ng_n+\ldots, \tag{1}$$

называемый *рядом Фурье* элемента f по ортонормированной системе $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$

Для коэффициентов Фурье имеет место важное неравенство, называемое неравенством Бесселя. Рассмотрим квадрат нормы разности f и s_n, где s_n — n-я частичная сумма ряда Фурье. Получим:

$$\|f-s_n\|^2=(f-s_n, f-s_n)=(f,f)-(s_n,f)-(f,s_n)+(s_n,s_n)=$$
$$=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(g_k,f)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(f,g_k)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\bar{\alpha}_j(g_k,g_j)=$$
$$=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\bar{\alpha}_k-\sum_{k=1}^{n}\bar{\alpha}_k\alpha_k+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\bar{\alpha}_k=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\geqslant 0.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\leqslant\|f\|^2. \tag{2}$$

Так как это неравенство справедливо при всех n, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2\leqslant\|f\|^2. \tag{3}$$

Это и есть *неравенство Бесселя.*

Докажем теорему:

Если гильбертово пространство R полно, то ряд Фурье элемента f по ортонормированной системе $\{g_k\}$ сходится.

Пусть

$$\alpha_1g_1+\alpha_2g_2+\ldots+\alpha_ng_n+\ldots$$

является рядом Фурье элемента f, т. е. $\alpha_i = (f, g_i)$. Оценим величину

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k g_k \right\|^2.$$

Так как система $\{g_k\}$ ортонормирована, то

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2.$$

В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ сумма $\sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2$ стремится к нулю при неограниченно возрастающих n и m, т. е. последовательность частных сумм s_n есть последовательность фундаментальная, а в силу полноты пространства R должен существовать элемент s, являющийся пределом этой последовательности, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

Докажем, что разность $f - s$ ортогональна ко всем элементам ортонормированной системы $\{g_k\}$. Действительно,

$$(f - s, g_k) = (f, g_k) - (s, g_k) = (f, g_k) - (s - s_n, g_k) - (s_n, g_k).$$

Пусть $n > k$, тогда

$$(f - s, g_k) = \alpha_k - (s - s_n, g_k) - \alpha_k = -(s - s_n, g_k),$$

откуда по неравенству Буняковского

$$0 \leqslant |(f - s, g_k)| \leqslant \|s - s_n\| \|g_k\| = \|s - s_n\|.$$

Правая часть стремится к нулю при неограниченном возрастании n, а левая часть от n не зависит. Следовательно,

$$(f - s, g_k) = 0 \quad \text{при всех } k.$$

Если ортонормированная система $\{g_k\}$ полная, то из этих равенств следует, что $f - s = 0$, т. е. $f = s$, и мы доказали теорему:

В полном гильбертовом пространстве R ряд Фурье любого элемента по полной ортонормированной системе элементов сходится к этому элементу.

В этом случае, так как

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2, \tag{4}$$

то, переходя к пределу, получим:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2, \tag{5}$$

т. е. вместо неравенства Бесселя имеем равенство, называемое *равенством Парсеваля.*

§ 3. Приближения в гильбертовом пространстве

Пусть H есть линейное подпространство гильбертова пространства R, а f — некоторый элемент из R. Можно поставить такую задачу: в подпространстве H найти элемент h_0, дающий наилучшее приближение элемента f, т. е. элемент, для которого

$$\|f - h_0\| = \inf_{h \in H} \|f - h\|. \tag{1}$$

Докажем теорему:

Если в H существует элемент h_0, дающий наилучшее приближение к элементу f, то разность $f - h_0$ ортогональна ко всем элементам подпространства H.

Допустим противное, т. е. предположим, что существует элемент $h_1 \in H$, для которого $(f - h_0,\ h_1) = \alpha \neq 0$. Можно считать, что норма h_1 равна 1, так как в противном случае вместо h_1 можно было бы взять $\frac{h_1}{\|h_1\|}$. Рассмотрим элемент $h_2 = h_0 + \alpha h_1$ и оценим норму $f - h_2$:

$$\|f - h_2\|^2 = (f - h_2,\ f - h_2) = ([f - h_0] - \alpha h_1,\ [f - h_0] - \alpha h_1) =$$

$$= (f - h_0,\ f - h_0) - \alpha (h_1,\ f - h_0) - \bar{\alpha} (f - h_0,\ h_1) + \alpha\bar{\alpha} (h_1,\ h_1) =$$

$$= \|f - h_0\|^2 - \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha} = \|f - h_0\|^2 - |\alpha|^2.$$

Отсюда

$$\|f - h_2\|^2 < \|f - h_0\|^2,$$

что невозможно, так как h_0 — по условию элемент наилучшего приближения.

Из доказанной теоремы следует, что *в H не может существовать двух элементов наилучшего приближения*. В самом деле, допустим, что для элемента $f \in R$ существуют два элемента наилучшего приближения: h_0 и $h_0' \in H$. Тогда

$$(f - h_0,\ h) = 0 \quad \text{для всех} \quad h \in H,$$

$$(f - h_0',\ h) = 0 \quad \text{для всех} \quad h \in H.$$

В частности,

$$(f - h_0,\ h_0 - h_0') = 0 \quad \text{и} \quad (f - h_0',\ h_0 - h_0') = 0.$$

Но

$$\|h_0 - h_0'\|^2 = (h_0 - h_0',\ h_0 - h_0') = ((h_0 - f) + (f - h_0'),\ h_0 - h_0') =$$

$$= (h_0 - f,\ h_0 - h_0') + (f - h_0',\ h_0 - h_0') = 0,$$

а это означает, что $h_0 = h_0'$.

Если $H = H_n$ образовано всевозможными линейными комбинациями некоторых n линейно независимых элементов R: $h_1, h_2, \ldots, h_n$, то на основании результатов предыдущей главы элемент наилучшего

приближения всегда существует. Этот элемент будет единственным на основании только что проведенных рассуждений. Для конечномерного случая единственность будет также следовать из строгой нормированности гильбертова пространства.

1. Построение элемента наилучшего приближения. Рассмотрим теперь вопрос о построении элемента наилучшего приближения.

Пусть подпространство H_n порождено элементами $h_1, h_2, \ldots, h_n$, а h_0 — элемент наилучшего приближения к $f \in R$ в H_n. h_0 как элемент H_n может быть представлен в виде

$$h_0 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \ldots + \alpha_n h_n. \tag{2}$$

Следовательно, задача построения элемента наилучшего приближения сводится к отысканию коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Мы видели, что

$$(f - h_0,\ h) = 0 \quad \text{для всех } h \in H_n \tag{3}$$

и только для этого элемента имеет место это свойство. Но это требование равносильно n условиям:

$$(f - h_0,\ h_i) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Из этих условий для отыскания $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 (h_1, h_1) + \alpha_2 (h_2, h_1) + \ldots + \alpha_n (h_n, h_1) = (f, h_1), \\ &\alpha_1 (h_1, h_2) + \alpha_2 (h_2, h_2) + \ldots + \alpha_n (h_n, h_2) = (f, h_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1 (h_1, h_n) + \alpha_2 (h_2, h_n) + \ldots + \alpha_n (h_n, h_n) = (f, h_n). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Определитель этой системы есть $G(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, а так как $h_1, h_2, \ldots, h_n$ линейно независимы, то он не равен нулю и система имеет единственное решение. Решая ее, мы найдем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а следовательно и $h_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$. Найдем теперь наилучшее приближение элемента f в H_n, т. е. величину $\delta = \|f - h_0\|$. Имеем:

$$\begin{aligned} \delta^2 = \|f - h_0\|^2 = (f - h_0,\ f - h_0) &= (f - h_0,\ f) - (f - h_0,\ h_0) = \\ &= (f - h_0,\ f) = (f, f) - (h_0, f). \end{aligned} \tag{6}$$

Отсюда

$$\delta^2 = (f, f) - \alpha_1 (h_1, f) - \alpha_2 (h_2, f) - \ldots - \alpha_n (h_n, f).$$

Исключая отсюда и из системы для определения α_i все α_i, получим:

$$\begin{vmatrix} (h_1, h_1) & (h_2, h_1) & \ldots & (h_n, h_1) & (f, h_1) \\ (h_1, h_2) & (h_2, h_2) & \ldots & (h_n, h_2) & (f, h_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (h_1, h_n) & (h_2, h_n) & \ldots & (h_n, h_n) & (f, h_n) \\ (h_1, f) & (h_2, f) & \ldots & (h_n, f) & \delta^2 - (f, f) \end{vmatrix} = 0.$$

Итак,

$$\delta^2 = \frac{G(h_1, h_2, \ldots, h_n, f)}{G(h_1, h_2, \ldots, h_n)}. \tag{7}$$

Заметим, что при $n=1$ $G(h_1)=(h_1, h_1)>0$. При $n=2$ и $h_2=f$ тогда будем иметь:

$$\frac{G(h_1, h_2)}{G(h_1)} = \delta^2 > 0, \quad \text{т. е.} \quad G(h_1, h_2) > 0.$$

По индукции легко показать, что вообще *определитель Грамма системы линейно независимых элементов положителен.*

Построение элемента наилучшего приближения особенно просто, если $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — ортонормированная система элементов, так как в этом случае система уравнений (5) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (f, h_1), \\ \alpha_2 &= (f, h_2), \\ &\cdots\cdots \\ \alpha_n &= (f, h_n), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

т. е. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ являются коэффициентами Фурье элемента f по системе $h_1, h_2, \ldots, h_n$, и элементом наилучшего приближения будет

$$h_0 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \ldots + \alpha_n h_n.$$

Величина отклонения δ может быть также легко вычислена:

$$\delta^2 = (f, f) - \alpha_1(h_1, f) - \alpha_2(h_2, f) - \ldots - \alpha_n(h_n, f) =$$
$$= \|f\|^2 - \alpha_1\bar{\alpha}_1 - \alpha_2\bar{\alpha}_2 - \ldots - \alpha_n\bar{\alpha}_n,$$

т. е.

$$\delta = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2}. \tag{9}$$

Наконец, рассмотрим в R полную ортонормированную систему элементов $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ и предположим, что R — полное гильбертово пространство. Рассмотрим последовательность подпространств $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$, где H_n порождено элементами $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Для $f \in R$ будем последовательно находить элементы наилучшего приближения в $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ При этом элементом наилучшего приближения $h_0^{(k)}$ для f в H_k будет являться k-я частичная сумма ряда Фурье для f по ортонормированной системе функций $\{h_n\}$. Величина наилучшего приближения

$$\delta_k = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2} \tag{10}$$

стремится к нулю при $k \to \infty$, а последовательность $\{h_0^{(k)}\}$ сходится к элементу f.

§ 4. Среднеквадратичные приближения функций алгебраическими многочленами

Возьмем в качестве R множество функций, интегрируемых с квадратом на $[a, b]$. Можно показать, что это множество линейно. Ограничимся случаем действительных функций и будем рассматривать линейные комбинации с действительными коэффициентами. Определим скалярное произведение функций $f \in R$ и $g \in R$ следующим образом:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx. \tag{1}$$

Нетрудно проверить, что все свойства скалярного произведения имеют место, если считать функции, отличающиеся друг от друга не более чем на множестве меры нуль, равными. Норма функции $f \in R$ будет равна

$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{2}$$

Будем также рассматривать и более общие множества R_1. Возьмем некоторую фиксированную функцию $p(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$ и обращающуюся там в нуль не более чем на множестве меры нуль. Будем считать, что $f(x) \in R_1$, если существует

$$\int_a^b p(x) f^2(x)\, dx.$$

В качестве скалярного произведения возьмем

$$(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx. \tag{3}$$

Мы получили два гильбертовых пространства. Будем первое из них обозначать L_2, а второе $L_2(p)$. Сходимость в первом пространстве есть хорошо известная из анализа *сходимость в среднем*, а сходимость во втором — *сходимость в среднем с весом* $p(x)$.

Функции $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ линейно независимы на $[a, b]$ и принадлежат как к L_2, так и к $L_2(p)$. Совокупность многочленов с действительными коэффициентами степени не выше n $H_n(P)$ можно рассматривать как линейное множество, построенное на функциях $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Поэтому на основании общей теории § 3 в $H_n(p)$ найдется один и только один многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \tag{4}$$

который дает наилучшее приближение функции $f(x) \in L_2(p)$ в смысле метрики пространства $L_2(p)$, т. е. такой, для которого

$$\delta_n^2 = \|f(x) - P_n(x)\|^2 = \int_a^b p(x)\,[f(x) - P_n(x)]^2\,dx = \\ = \inf_P \int_a^b p(x)\,[f(x) - P(x)]^2\,dx, \qquad P \in H_n(p). \tag{5}$$

(Мы не будем здесь отдельно писать выражения для L_2, так как L_2 можно рассматривать как частный случай $L_2(p)$ при $p(x) \equiv 1$.)

Если ввести обозначения

$$s_i = \int_a^b p(x)\,x^i\,dx, \quad m_i = \int_a^b p(x)\,f(x)\,x^i\,dx, \tag{6}$$

то коэффициенты многочлена наилучшего приближения могут быть найдены как решение системы

$$\left.\begin{aligned} a_0 s_0 + a_1 s_1 + \ldots + a_n s_n &= m_0, \\ a_0 s_1 + a_1 s_2 + \ldots + a_n s_{n+1} &= m_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_0 s_n + a_1 s_{n+1} + \ldots + a_n s_{2n} &= m_n, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

которая всегда имеет единственное решение, так как определитель этой системы как определитель Грамма линейно независимых на $[a, b]$ функций $1, x, x^2, \ldots, x^n$ всегда положителен.

Величина δ_n наилучшего приближения определится равенством

$$\delta_n^2 = \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n & m_0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} & m_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & s_{2n} & m_n \\ m_0 & m_1 & m_2 & \ldots & m_n & (f,f) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & s_{2n} \end{vmatrix}}. \tag{8}$$

Изложенный способ получения многочлена наилучшего приближения имеет тот недостаток, что для отыскания коэффициентов приходится решать систему алгебраических уравнений, что при больших n сопряжено с большой вычислительной работой. Мы видели ранее, что система значительно упростится, если в $H_n(p)$ выбрать ортогональный в смысле $L_2(p)$ базис.

1. Ортогональные системы многочленов. Метод ортогонализации, изложенный в § 2, позволяет построить ортогональную в $L_2(p)$ систему многочленов

$$Q_0(x),\ Q_1(x),\ \ldots,\ Q_n(x),\ \ldots \tag{9}$$

($Q_k(x)$ — в точности многочлен k-й степени) последовательно возрастающих степеней, т. е. многочленов, для которых имеют место соотношения

$$\int_a^b p(x)\,Q_k(x)\,Q_l(x)\,dx = 0 \qquad (k \neq l). \tag{10}$$

Покажем, что *с точностью до постоянных множителей эта система единственна.* В самом деле, пусть

$$Q_0(x),\ Q_1(x),\ \ldots,\ Q_n(x),\ \ldots \text{ и } R_0(x),\ R_1(x),\ \ldots,\ R_n(x),\ \ldots \tag{11}$$

— две ортогональные в $L_2(p)$ системы многочленов последовательно возрастающих степеней. Докажем, что

$$R_k(x) = \alpha_k Q_k(x) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{12}$$

Сначала покажем, что многочлены различных степеней и разных систем ортогональны, т. е.

$$\int_a^b p(x)\,Q_k(x)\,R_l(x)\,dx = 0 \qquad (k \neq l). \tag{13}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $k > l$. Многочлен $R_l(x)$ можно единственным образом представить в виде

$$R_l(x) = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j Q_j(x). \tag{14}$$

Отсюда, учитывая (13),

$$\int_a^b p(x)\,Q_k(x)\,R_l(x)\,dx = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j \int_a^b p(x)\,Q_k(x)\,Q_j(x)\,dx = 0,$$

так как $j \leqslant l < k$. Докажем, что в представлении $R_l(x)$ через многочлены $Q_j(x)$ все коэффициенты α_j при $j < l$ равны нулю. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int_a^b p(x)\,Q_i(x)\,R_l(x)\,dx,$$

где $l < l$. С одной стороны, по доказанному, этот интеграл равен нулю, а с другой стороны,

$$\int_a^b p(x) Q_i(x) R_l(x) dx = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j \int_a^b p(x) Q_i(x) Q_j(x) dx = \\ = \alpha_i \int_a^b p(x) Q_i^2(x) dx.$$

Так как интеграл в правой части отличен от нуля, то $\alpha_i = 0$. Итак, $\alpha_i = 0$ при всех $l < l$, т. е.

$$R_l(x) = \alpha_l Q_l(x), \tag{15}$$

что и требовалось доказать.

Если ввести еще какие-либо дополнительные условия на ортогональные многочлены, например потребовав, чтобы коэффициент при старшей степени всегда равнялся единице или чтобы коэффициент при старшей степени был положителен, а норма многочлена равнялась единице, то система ортогональных многочленов на данном отрезке $[a, b]$ при заданном весе $p(x)$ будет единственна в полном смысле этого слова.

Вполне естественно, что с изменением веса $p(x)$, а также отрезка $[a, b]$ мы будем получать разные системы ортогональных многочленов.

Когда ортогональная система многочленов (9)

$$Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x), \ldots$$

будет построена, то многочлен наилучшего приближения $P_n(x) \in H_n(p)$ запишется в виде

$$P_n(x) = c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) + \ldots + c_n Q_n(x), \tag{16}$$

где коэффициенты c_k (на основании общей теории) запишутся в виде

$$c_k = \frac{\int_a^b p(x) f(x) Q_k(x) dx}{\int_a^b p(x) Q_k^2(x) dx}. \tag{17}$$

Величина наилучшего приближения определится по формуле

$$\delta_n^2 = \int_a^b p(x) f^2(x) dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \int_a^b p(x) Q_k^2(x) dx. \tag{18}$$

2. Рекуррентные соотношения для ортогональных многочленов. Построение системы ортогональных многочленов по общим правилам, указанным в § 2, практически неудобно. Сейчас мы

покажем, что ортогональные многочлены удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям, которые и дадут возможность их быстро находить.

Многочлен $xQ_n(x)$ имеет степень $n+1$. Следовательно, его можно представить в виде

$$xQ_n(x) = \alpha_0 Q_0(x) + \alpha_1 Q_1(x) + \ldots + \alpha_{n+1} Q_{n+1}(x); \tag{19}$$

умножим обе части равенства на $p(x)\,Q_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-2)$ и проинтегрируем в пределах от a до b. Получим:

$$\int_a^b p(x)\,Q_n(x)\,[xQ_i(x)]\,dx = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j \int_a^b p(x)\,Q_i(x)\,Q_j(x)\,dx.$$

Интеграл в левой части всегда равен нулю, так как $xQ_i(x)$ является многочленом степени не выше $n-1$ и, следовательно, представляется в виде линейной комбинации $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $\ldots$, $Q_{n-1}(x)$. В правой части отличен от нуля только один интеграл при $j = i$. Итак,

$$0 = \alpha_i \int_a^b p(x)\,Q_i^2(x)\,dx$$

и $\alpha_i = 0$. Таким образом,

$$\alpha_{n+1}Q_{n+1}(x) + (\alpha_n - x)\,Q_n(x) + \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x) = 0. \tag{20}$$

Коэффициенты α_{n-1}, α_n, α_{n+1} в (20) можно найти, если проделать те же операции при $i = n-1$, n, $n+1$. При этом получим:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= \frac{\int_a^b p(x)\,xQ_{n-1}(x)\,Q_n(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,Q_{n-1}^2(x)\,dx}, \quad \alpha_n = \frac{\int_a^b p(x)\,xQ_n^2(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,Q_n^2(x)\,dx}, \\ \alpha_{n+1} &= \frac{\int_a^b p(x)\,xQ_n(x)\,Q_{n+1}(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,Q_{n+1}^2(x)\,dx}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Если $Q_i(x)$ нормированы, т. е.

$$\int_a^b p(x)\,Q_i^2(x)\,dx = 1 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{22}$$

то выражения (21) для этих коэффициентов упростятся:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= \int_a^b p(x)\, xQ_{n-1}(x)\, Q_n(x)\, dx, \\ \alpha_n &= \int_a^b p(x)\, xQ_n^2(x)\, dx, \\ \alpha_{n+1} &= \int_a^b p(x)\, x\, Q_n(x)\, Q_{n+1}(x)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Обозначим в этом случае

$$a_{i,\,k} = \int_a^b p(x)\, xQ_i(x)\, Q_k(x)\, dx. \tag{24}$$

Рекуррентная формула для нормированных многочленов примет вид

$$a_{n,\,n+1}Q_{n+1}(x) + (a_{n,\,n} - x)\, Q_n(x) + a_{n-1,n}Q_{n-1}(x) = 0. \tag{25}$$

Она имеет смысл при $n \geqslant 1$, но если положить $Q_{-1}(x) \equiv 0$, то она будет иметь смысл и при $n = 0$.

3. Тождество Кристофеля — Дарбу. Из этой формулы можно получить важное для исследования сходимости *тождество Кристофеля — Дарбу*. Для этого умножаем (25) на $Q_n(t)$ и записываем в виде

$$xQ_n(x)\, Q_n(t) = a_{n,\,n+1}Q_{n+1}(x)\, Q_n(t) + \\ + a_{nn}Q_n(x)\, Q_n(t) + a_{n-1,\,n}Q_{n-1}(x)\, Q_n(t).$$

Поменяем ролями x и t. Получим:

$$tQ_n(t)\, Q_n(x) = a_{n,\,n+1}Q_{n+1}(t)\, Q_n(x) + \\ + a_{nn}Q_n(t)\, Q_n(x) + a_{n-1,\,n}Q_{n-1}(t)\, Q_n(x).$$

Вычитаем из последнего равенства предыдущее. Будем иметь:

$$(t - x)\, Q_n(t)\, Q_n(x) = a_{n,\,n+1}[Q_{n+1}(t)\, Q_n(x) - Q_{n+1}(x)\, Q_n(t)] - \\ - a_{n-1,\,n}[Q_n(t)\, Q_{n-1}(x) - Q_n(x)\, Q_{n-1}(t)].$$

Складывая соответствующие равенства при $n = 0, 1, 2, \ldots, k$, получим:

$$(t - x)\sum_{n=0}^{k} Q_n(t)\, Q_n(x) = a_{k,\,k+1}[Q_{k+1}(t)\, Q_k(x) - Q_{k+1}(x)\, Q_k(t)]$$

или

$$\sum_{n=0}^{k} Q_n(x)\, Q_n(t) = a_{k,\,k+1}\frac{Q_{k+1}(t)\, Q_k(x) - Q_{k+1}(x)\, Q_k(t)}{t - x}. \tag{26}$$

Это и есть *тождество Кристоффеля — Дарбу* для нормированных ортогональных многочленов.

4. Свойства корней ортогональных многочленов. Покажем, что $Q_n(x)$ *имеет на отрезке* $[a, b]$ *ровно* n *различных нулей.* Предположим обратное. Тогда $Q_n(x)$ можно представить в виде

$$Q_n(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)R_{n-k}(x) = P_k(x)R_{n-k}(x) \quad (k<n),$$

где через α_i обозначены все корни нечетной кратности многочлена $Q_n(x)$, расположенные на $[a, b]$. При этом $R_{n-k}(x)$ не меняет знака на $[a, b]$. Интеграл

$$\int_a^b p(x)Q_n(x)P_k(x)\,dx$$

должен обращаться в нуль, так как степень $P_k(x)$ равна $k<n$. С другой стороны, этот интеграл можно записать в виде

$$\int_a^b p(x)Q_n(x)P_k(x)\,dx = \int_a^b p(x)P_k^2(x)R_{n-k}(x)\,dx.$$

Так как подынтегральное выражение не меняет знака, то интеграл в нуль обращаться не может. Получили противоречие. Таким образом, $k=n$. Утверждение доказано.

Докажем, что *если* $x_1^{(n-1)} < x_2^{(n-1)} < \ldots < x_{n-1}^{(n-1)}$ — *нули* $Q_{n-1}(x)$, а $x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)}$ — *нули* $Q_n(x)$, *то* $x_1^{(n)} < x_1^{(n-1)} < x_2^{(n)} < x_2^{(n-1)} < \ldots < x_{n-1}^{(n-1)} < x_n^{(n)}$. Прежде всего заметим, что два последовательных многочлена ортогональной системы не могут одновременно обращаться в нуль. Действительно, если $Q_{n+1}(x)$ и $Q_n(x)$ обращаются в нуль в некоторой точке ξ, то в силу рекуррентной формулы (25) $Q_{n-1}(\xi)=0$. Но тогда в силу той же рекуррентной формулы и $Q_{n-2}(\xi)=0$. Продолжая эти рассуждения, мы придем к выводу, что $Q_0(\xi)=0$. Но $Q_0(x)=\text{const}\neq 0$, и это приводит к противоречию.

Если условиться брать $Q_n(x)$ нормированными и с положительными коэффициентами при старших членах, то $a_{n,\,n+1}>0$. В самом деле,

$$a_{n,\,n+1} = \int_a^b p(x)Q_{n+1}(x)[xQ_n(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b p(x)Q_{n+1}(x)[\alpha_{n+1}Q_{n+1}(x) + \ldots]\,dx = \alpha_{n+1}\int_a^b p(x)Q_{n+1}^2(x)\,dx,$$

где α_{n+1} и интеграл — положительные величины.

При этом, если в некоторой точке ξ $Q_n(\xi)=0$, то $Q_{n-1}(\xi)$ и $Q_{n+1}(\xi)$ имеют различные знаки. Действительно, применяя рекуррентную формулу (25), получим:

$$a_{n,\,n+1}Q_{n+1}(\xi)+a_{n-1,\,n}Q_{n-1}(\xi)=0,$$

а это может быть при положительных $a_{n,\,n+1}$ и $a_{n-1,\,n}$ только в том случае, когда $Q_{n+1}(\xi)$ и $Q_{n-1}(\xi)$ имеют различные знаки.

Разделение нулей $Q_0(x)$ и $Q_1(x)$ тривиально. Пусть нули $Q_{n-1}(x)$ и $Q_n(x)$ также разделены:

$$x_1^{(n)}<x_1^{(n-1)}<x_2^{(n)}<\ldots<x_{n-1}^{(n)}<x_{n-1}^{(n-1)}<x_n^{(n)}.$$

Тогда в силу того, что $Q_i(b)>0$, будем иметь:

$$\operatorname{sign}Q_{n-1}\left(x_i^{(n)}\right)=\operatorname{sign}(-1)^{n-i}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sign}Q_{n+1}\left(x_i^{(n)}\right)=\operatorname{sign}(-1)^{n-i+1}.$$

5. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют ортогональные многочлены. Будем теперь предполагать, что вес $p(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{a+bx}{c+dx+ex^2}, \tag{27}$$

причем $p(x)(c+dx+ex^2)$ обращается в нуль на концах отрезка a и b.. Мы наложили сильное ограничение на вес, но веса с таким свойством как раз и порождают наиболее важные ортогональные многочлены.

Пусть $P_m(x)$ — произвольный многочлен степени $m<n$. Рассмотрим интеграл

$$I=\int_a^b P_m(x)\frac{d}{dx}\left[(c+dx+ex^2)p(x)Q_n'(x)\right]dx. \tag{28}$$

Производя два раза интегрирование по частям и пользуясь тем, что $p(x)(c+dx+ec^2)\Big|_a^b=0$, получим:

$$I=\int_a^b Q_n(x)\frac{d}{dx}\left[(c+dx+ex^2)p(x)P_m'(x)\right]dx. \tag{29}$$

Воспользовавшись тем, что $(c+dx+ex^2)p'(x)=p(x)(a+bx)$, найдем:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[(c+dx+ex^2)p(x)P_m'(x)\right]&=(d+2ex)p(x)P_m'(x)+\\&+(a+bx)p(x)P_m'(x)+(c+dx+ex^2)p(x)P_m''(x)=\\&=p(x)\left[(d+2ex)P_m'(x)+(a+bx)P_m'(x)+(c+dx+ex^2)P_m''(x)\right].\end{aligned}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части, является многочленом степени не выше m. Поэтому

$$I = \int_a^b p(x) Q_n(x) \left[(d + 2ex) P'_m(x) + \right.$$
$$\left. + (a + bx) P'_m(x) + (c + dx + ex^2) P''_m(x)\right] dx = 0. \quad (30)$$

Подынтегральное выражение исходного интеграла (28) можно преобразовать так:

$$\frac{d}{dx}\left[(c + dx + ex^2) p(x) Q'_n(x)\right] = (d + 2ex) p(x) Q'_n(x) +$$
$$+ (a + bx) p(x) Q'_n(x) + (c + dx + ex^2) p(x) Q''_n(x) =$$
$$= p(x)\left[(d + 2ex) Q'_n(x) + (a + bx) Q'_n(x) + (c + dx + ex^2) Q''_n(x)\right].$$

Обозначим выражение, стоящее в квадратных скобках справа, через $R_n(x)$. Это многочлен степени не выше n. В силу того, что $I = 0$, мы получим:

$$\int_a^b p(x) R_n(x) P_m(x) dx = 0$$

для любого многочлена степени не выше $n - 1$. Следовательно, $R_n(x)$ принадлежит ортогональной системе многочленов с весом $p(x)$. Как мы видели ранее, многочлены одинаковых степеней двух ортогональных систем при одном и том же весе могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем. Таким образом,

$$R_n(x) = \alpha_n Q_n(x).$$

Отсюда

$$(c + dx + ex^2) Q''_n(x) + \left[(a + d) + (b + 2e) x\right] Q'_n(x) - \alpha_n Q_n(x) = 0. \quad (31)$$

Итак, мы показали, что при наших предположениях о весе $p(x)$ многочлены ортогональной системы $\{Q_n(x)\}$ удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению, написанному выше. На этом мы ограничимся в рассмотрении общих свойств ортогональных многочленов и перейдем к изучению некоторых частных случаев.

§ 5. Некоторые частные случаи ортогональных систем многочленов

1. Многочлены Якоби. Так называют многочлены вида

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} (1 - x)^{-\alpha} (1 + x)^{-\beta} \times$$
$$\times \frac{d^n}{dx^n}\left[(1 - x)^{\alpha + n} (1 + x)^{\beta + n}\right] \qquad (\alpha, \beta > -1). \quad (1)$$

Что это действительно многочлены, нетрудно убедиться, если воспользоваться формулой Лейбница для производной от произведения двух функций. Покажем, что многочлены Якоби ортогональны на отрезке $[-1, +1]$ с весом

$$p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}. \tag{2}$$

Для этого рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{+1} (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \times$$

$$\times \frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}\right] \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] dx.$$

Будем предполагать, что $m \leqslant n$. Для сокращения записей обозначим

$$y_m(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}\right],$$

$$\varphi_n(x) = (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}.$$

Очевидно, $\varphi_n^{(k)}(x)$ обращаются в нуль при $x = \pm 1$ для всех $k < n$. Выполним m раз интегрирование по частям в интеграле

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} y_m(x)\,\varphi_n^{(n)}(x)\,dx.$$

Получим:

$$I_1 = (-1)^m \int_{-1}^{+1} y_m^{(m)}(x)\,\varphi_n^{(n-m)}(x)\,dx.$$

Если $m < n$, то, интегрируя по частям, еще один раз получим:

$$I_1 = (-1)^{m+1} \int_{-1}^{+1} y_m^{(m+1)}(x)\,\varphi_n^{(n-m-1)}(x)\,dx.$$

Так как $y_m(x)$ является многочленом степени m, то $I_1 = 0$. При $m = n$ будем иметь:

$$I_1 = (-1)^n \int_{-1}^{+1} y_n^{(n)}(x)\,\varphi_n(x)\,dx.$$

Если обозначить старший коэффициент $y_n(x)$ через a_n, то

$$I_1 = (-1)^n a_n n! \int_{-1}^{+1} \varphi_n(x)\,dx.$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\,dx.$$

Для этого произведем замену переменных, положив $x = 2t - 1$ При этом

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_n(x)\,dx = 2^{\alpha+\beta+2n+1} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+n} t^{\beta+n}\,dt =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+2n+1} B(\beta+n+1,\ \alpha+n+1) = 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

Подсчитаем теперь a_n. Полагаем $x > 1$. Тогда

$$(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n} = x^{\alpha+\beta+2n}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha+n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\beta+n} =$$

$$= x^{\alpha+\beta+2n} + (\beta-\alpha)\,x^{\alpha+\beta+2n-1} + \ldots$$

Отсюда

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] = (\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)\ldots$$

$$\ldots(\alpha+\beta+n+1)\,x^{\alpha+\beta+n} + (\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2n-1)\times$$

$$\times(\alpha+\beta+2n-2)\ldots(\alpha+\beta+n)\,x^{\alpha+\beta+n-1} + \ldots =$$

$$= \gamma_n x^{\alpha+\beta+n} + \delta_n x^{\alpha+\beta+n-1} + \ldots$$

Поэтому

$$y_n(x) = (-1)^n x^{-\alpha-\beta}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\beta}\times$$

$$\times\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}\right] = (-1)^n\left(1+\frac{\alpha}{x}+\ldots\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\beta}{x}-\ldots\right)(\gamma_n x^{\alpha+\beta+n} + \delta_n x^{\alpha+\beta+n-1} + \ldots)\,x^{-\alpha-\beta} =$$

$$= (-1)^n\gamma_n x^n + (-1)^n[\delta_n + \alpha\gamma_n - \beta\gamma_n]\,x^{n-1} + \ldots$$

Таким образом,

$$a_n = (-1)^n\gamma_n = (-1)^n(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)\ldots$$

$$\ldots(\alpha+\beta+n+1) = (-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Теперь мы можем подсчитать и норму $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Собирая нужные нам выражения, находим:

$$\left\|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\right\|^2 = \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \left[P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} 2^{\alpha+\beta+2n+1} n! \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (3)$$

Найдем теперь коэффициенты рекуррентной формулы для многочленов Якоби. Мы не будем вычислять выписанные ранее интегралы, определяющие эти коэффициенты, а найдем их другим способом. Рекуррентную формулу (20) § 4 запишем в виде

$$xP_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \alpha_{n+1} P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) + \alpha_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \alpha_{n-1} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (4)$$

Для определения α_{n+1} приравняем коэффициенты при старших степенях x в правой и левой частях равенства. В левой части этот коэффициент будет равен старшему коэффициенту $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, т. е.

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

В правой части он будет равен старшему коэффициенту $P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x)$, умноженному на α_{n+1}, т. е.

$$\alpha_{n+1} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}.$$

Отсюда находим:

$$\alpha_{n+1} = \frac{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

Для отыскания α_n сравним коэффициенты при x^n левой и правой частей. При этом придется использовать выражения для вторых по старшинству коэффициентов многочлена Якоби. Такие выражения нами также были найдены. Применяя те же обозначения, что и ранее, получим:

$$\frac{\delta_n + \alpha\gamma_n - \beta\gamma_n}{2^n \cdot n!} = \alpha_{n+1} \frac{\delta_{n+1} + \alpha\gamma_{n+1} - \beta\gamma_{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} + \alpha_n \frac{\gamma_n}{2^n \cdot n!}.$$

Отсюда

$$\alpha_n = \frac{\delta_n + (\alpha-\beta)\gamma_n}{\gamma_n} - \alpha_{n+1} \frac{\delta_{n+1} + (\alpha-\beta)\gamma_{n+1}}{2(n+1)!\gamma_n}.$$

Подставляя сюда известные выражения для δ_n, γ_n, δ_{n+1}, γ_{n+1}, α_{n+1} и производя несложные алгебраические преобразования, найдем:

$$\alpha_n = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

Перепишем нашу формулу в виде

$$x\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|} = \alpha_{n+1}\frac{\|P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}\|}{\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|}\cdot\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{\|P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}\|} + \alpha_n\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\|} + \\ + \alpha_{n-1}\frac{\|P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\|}{\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|}\cdot\frac{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{\|P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\|}.$$

Таким образом, $a_{n,\,n+1}$, введенное в предыдущем параграфе, имеет вид

$$a_{n,\,n+1} = \alpha_{n+1}\frac{\|P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}\|}{\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|} = \frac{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}\frac{\|P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}\|}{\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|}.$$

Коэффициент $a_{n-1,\,n}$ получится отсюда простой заменой n на $n-1$. Следовательно,

$$a_{n,\,n-1} = \alpha_{n-1}\frac{\|P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\|}{\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|} = \frac{2n(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n)}\frac{\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|}{\|P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\|}.$$

Отсюда

$$\alpha_{n-1} = \frac{2n(\alpha+\beta+n)\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2}{(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n)\|P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\|^2} = \\ = \frac{2n(\alpha+\beta+n)\,2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\times \\ \times\frac{(n-1)!\,\Gamma(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2n-1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+1)} = \frac{2(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)}.$$

Итак, формула (4) после освобождения от знаменателей примет вид

$$(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)\,xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \\ = 2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)\,P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \\ + (\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2n+1)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + 2(\alpha+n)\times \\ \times(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (5)$$

Весовая функция $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta)x}{1-x^2}.$$

Следовательно, многочлены Якоби удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\times \\ \times\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]' + k_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0.$$

Для определения k_n приравняем нулю коэффициент при x^n в левой части. Получим:

$$-n(n-1)-(\alpha+\beta+2)n+k_n=0.$$

Отсюда

$$k_n = n[\alpha+\beta+n+1].$$

Таким образом, многочлены Якоби удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]' + \\ + n(\alpha+\beta+n+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0. \quad (6)$$

2. Многочлены Лежандра. Многочлены Лежандра являются частным случаем многочленов Якоби, когда $\alpha=0$, $\beta=0$. При этом $p(x)\equiv 1$. Для них имеет место *формула Родрига*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \quad (7)$$

Они обладают свойством

$$\int_{-1}^{+1} L_n(x)L_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m\neq n, \\ \dfrac{2\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{n!(2n+1)\Gamma(n+1)} = \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } m=n. \end{cases} \quad (8)$$

Из формулы Родрига видно, что многочлены Лежандра четной степени содержат лишь четные степени переменного x, а многочлены нечетной степени содержат лишь нечетные степени x.

Рекуррентная формула для многочленов Лежандра примет вид

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0. \quad (9)$$

Преобразовывая формулу Родрига по формуле Лейбница для дифференцирования произведения, получим:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^{n-k}(x-1)^n}{dx^{n-k}}\,\frac{d^k(x+1)^n}{dx^k}.$$

Отсюда следует

$$L_n(1)=1, \quad L_n(-1)=(-1)^n. \quad (10)$$

Дифференциальное уравнение для многочленов Лежандра примет вид

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dL_n}{dx}\right] + n(n+1)L_n = 0. \quad (11)$$

Докажем, что для многочленов Лежандра имеет место следующая *формула Лапласа*:

$$L_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^n d\theta. \tag{12}$$

Действительно, при $n = 0$ и 1 получим:

$$L_0(x) = 1; \quad L_1(x) = x.$$

Проверим, что для $L_n(x)$, определяемого равенством (12), справедлива рекуррентная формула (9), которая имеет место для многочленов Лежандра. Обозначим

$$Z = x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta$$

и запишем:

$$(n+1)L_{n+1} - (2n+1)xL_n + nL_{n-1}$$

в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} WZ^{n-1}\,d\theta.$$

Здесь

$$W = (n+1)\left[x^2 + 2x\sqrt{x^2-1}\cos\theta + (x^2-1)\cos^2\theta\right] -$$
$$-(2n+1)\,x\left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right] + n = -nx^2 + x\sqrt{x^2-1}\cos\theta +$$
$$+(n+1)(x^2-1)\cos^2\theta + n = -n(x^2-1)(1-\cos^2\theta) +$$
$$+x\sqrt{x^2-1}\cos\theta + (x^2-1)\cos^2\theta = -n(x^2-1)\sin^2\theta +$$
$$+\left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right]\sqrt{x^2-1}\cos\theta.$$

Обозначая

$$U = -n(x^2-1)\sin^2\theta, \quad V = \left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right]\sqrt{x^2-1}\cos\theta,$$

получим:

$$\int_0^{\pi} WZ^{n-1}\,d\theta = \int_0^{\pi} UZ^{n-1}\,d\theta + \int_0^{\pi} VZ^{n-1}\,d\theta.$$

Но

$$\int_0^{\pi} VZ^{n-1}\,d\theta = \sqrt{x^2-1}\int_0^{\pi} Z^n\cos\theta\,d\theta = \sqrt{x^2-1}\times$$
$$\times\left\{Z^n\sin\theta\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\sin\theta\, nZ^{n-1}\sqrt{x^2-1}\sin\theta\,d\theta\right\} =$$
$$= n(x^2-1)\int_0^{\pi} Z^{n-1}\sin^2\theta\,d\theta = -\int_0^{\pi} UZ^{n-1}\,d\theta.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\pi} WZ^{n-1}\,d\theta = 0.$$

Раз $L_0(x)$ и $L_1(x)$ совпадают с нулевым и первым многочленами Лежандра и так как выполнена рекуррентная формула, то будет совпадение при всех n, и формула Лапласа доказана.

С помощью формулы Лапласа нетрудно произвести оценки величины многочленов Лежандра на отрезке $[-1, +1]$. Прежде всего заметим, что

$$|x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta| = \sqrt{x^2 + (1-x^2)\cos^2\theta} =$$
$$= \sqrt{x^2\sin^2\theta + \cos^2\theta} \leqslant 1, \quad x \in [-1, +1].$$

Отсюда

$$|L_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta|^n\,d\theta \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta = 1. \qquad (13)$$

Для внутренних точек отрезка $[-1, +1]$ имеет место более точная оценка:

$$|L_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}}. \qquad (14)$$

В самом деле,

$$|x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta| = \sqrt{x^2 + (1-x^2)\cos^2\theta} = \sqrt{1 - (1-x^2)\sin^2\theta}.$$

Таким образом,

$$|L_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [1 - (1-x^2)\sin^2\theta]^{\frac{n}{2}}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - (1-x^2)\sin^2\theta]^{\frac{n}{2}}\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [1 - (1-x^2)\sin^2\theta]^{\frac{n}{2}}\,d\theta.$$

Сделав во втором интеграле замену θ на $\pi - \theta$, получим:

$$|L_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - (1-x^2)\sin^2\theta]^{\frac{n}{2}}\,d\theta.$$

Так как при $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $\frac{2}{\pi}\theta \leqslant \sin\theta$, а при неотрицательных α неравенство $1-\alpha < e^{-\alpha}$, то

$$|L_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1-(1-x^2)\sin^2\theta]^{\frac{n}{2}}\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1-(1-x^2)\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right]^{\frac{n}{2}} d\theta \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2n}{\pi^2}(1-x^2)\theta^2}\,d\theta <$$

$$< \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2n}{\pi^2}(1-x^2)\theta^2}\,d\theta.$$

Полагая здесь $\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2n(1-x^2)}}t$, получим:

$$|L_n(x)| < \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{\sqrt{2n(1-x^2)}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{2n(1-x^2)}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}},$$

что и требовалось доказать.

С помощью многочленов Лежандра легко для заданной функции $f(x) \in L_2$ построить в $H_n(P)$ многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения на отрезке $[-1, +1]$.

Если такой многочлен искать в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x), \tag{15}$$

то коэффициенты c_k найдутся по формуле

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,L_k(x)\,dx, \tag{16}$$

а наилучшее приближение

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^{+1} f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}c_k^2. \tag{17}$$

Пример. Найти наилучшее среднеквадратичное приближение функции $\sin x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ в совокупности многочленов степени не выше третьей и вычислить величину наилучшего приближения.

Сделаем линейную замену переменного, переводящую отрезок $[-\pi, \pi]$ в отрезок $[-1, +1]$. Для этого положим $x = \pi t$. Тогда $f(t) = \sin \pi t$,

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \sin \pi t\, dt = 0, \qquad c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} t \sin \pi t\, dt = \frac{3}{\pi},$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \sin \pi t\, dt = 0,$$

$$c_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \sin \pi t\, dt = \frac{7}{\pi} - \frac{105}{\pi^3}.$$

Отсюда

$$P_3(t) = \frac{3}{\pi} L_1(t) + \left(\frac{7}{\pi} - \frac{105}{\pi^3}\right) L_3(t) = \frac{15}{2\pi}\left(\frac{21}{\pi^2} - 1\right) t + \frac{35}{2\pi}\left(1 - \frac{15}{\pi^2}\right) t^3.$$

Многочлен наилучшего приближения к функции $\sin x$ на отрезке $[-\pi, +\pi]$ будет:

$$P_3(x) = \frac{15}{2\pi^3}\left(\frac{21}{\pi^2} - 1\right) x + \frac{35}{2\pi^4}\left(1 - \frac{15}{\pi^2}\right) x^3 = 0{,}8570x - 0{,}09339x^3.$$

Далее,

$$\delta^2 = \int_{-1}^{+1} \sin^2 \pi t\, dt - \frac{9}{\pi^2}\frac{2}{3} - \frac{49}{\pi^2}\left(1 - \frac{15}{\pi^2}\right)^2 \frac{2}{7} \approx 0{,}0088.$$

Для сравнения приведем таблицу значений $\sin x$ и $P_3(x)$ в некоторых точках отрезка и величину их отклонений:

x	$\sin x$	$P_3(x)$	$P_3(x) - \sin x$
0	0,0000	0,0000	0,0000
$\frac{\pi}{4}$	0,7071	0,6278	— 0,0793
$\frac{\pi}{2}$	1,0000	0,9842	— 0,0158
$\frac{3\pi}{2}$	0,7071	0,7976	0,0905
π	0,0000	— 0,2033	— 0,2033

Многочлены Лежандра находят широкое применение и в ряде других вопросов; в частности, они участвуют в образовании сферических функций, в которых решаются ряд задач математической физики.

3. Многочлены Чебышева первого и второго рода. Возьмем теперь в качестве веса

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что многочлены Чебышева

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leqslant 1, \tag{19}$$

о которых мы уже говорили ранее, будут ортогональны на отрезке $[-1, +1]$ с этим весом. Действительно, производя в интеграле

$$I_{m,n} = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)\, T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

замену

$$x = \cos t,$$

получим:

$$I_{m,n} = \int_0^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt = \begin{cases} \pi & \text{при} \quad m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при} \quad m = n \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq n. \end{cases} \tag{20}$$

Рекуррентную формулу для многочленов Чебышева (будем их называть многочленами Чебышева первого рода) мы уже получили ранее.

Дифференциальное уравнение для многочленов Чебышева первого рода будет иметь вид

$$(1-x^2)\, T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0. \tag{21}$$

Если для функции $f(x) \in L_2(p)$, где $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, искать наилучшее среднеквадратичное приближение с весом $p(x)$ на отрезке $[-1, +1]$ в виде

$$P_n(x) = c_0 + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \ldots + c_n T_n(x), \tag{22}$$

то коэффициенты c_k будут находиться по формулам:

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, d\theta, \\ c_k &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} f(x)\, T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) \cos k\theta\, d\theta \\ &\qquad\qquad (k \geqslant 1), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

а отклонение — по формуле

$$\delta^2 = \int_{-1}^{+1} [f(x) - P_n(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{f^2(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2}\left[2c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2\right]. \qquad (24)$$

Пример. Для функции $f(x) = \arccos x$ найти на отрезке $[-1, +1]$ наилучшее среднеквадратичное приближение с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в совокупности многочленов степени не выше седьмой.

Будем искать этот многочлен в виде

$$P_7(x) = c_0 + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \ldots + c_7 T_7(x).$$

Коэффициенты многочлена будут иметь вид

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2};$$

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\arccos x \cos k \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt\,dt = \frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right].$$

Таким образом,

$$c_0 = \frac{\pi}{2}, \quad c_1 = -\frac{4}{\pi}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{4}{9\pi},$$

$$c_4 = 0, \quad c_5 = -\frac{4}{25\pi}, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = -\frac{4}{49\pi}$$

и

$$P_7(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} T_1(x) - \frac{4}{9\pi} T_3(x) - \frac{4}{25\pi} T_5(x) - \frac{4}{49\pi} T_7(x) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{76}{105} x - \frac{248}{315} x^3 - \frac{288}{175} x^5 - \frac{64}{49} x^7\right].$$

Ниже приведена таблица значений $\arccos x$ и $P_7(x)$, показывающая точность приближения, которой мы при этом достигаем:

x	$\arccos x$	$P_7(x)$	$P_7(x) - \arccos x$
— 1,0	3,14159	3,06242	— 0,07917
— 0,5	2,09440	2,10440	0,01000
0,0	1,57080	1,57080	0,00000
0,5	1,04720	1,03720	— 0,01000
1,0	0,00000	0,07918	0,07918

На том же отрезке $[-1, +1]$ при весе $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ будут ортогональны функции

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{25}$$

называемые ортогональными *многочленами Чебышева второго рода*.

В самом деле,

$$\int_{-1}^{+1} U_k(x)\, U_i(x) \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{\sin[(k+1)\arccos x] \sin[(i+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

и, сделав замену $x = \cos t$, получим:

$$\int_{-1}^{+1} U_k(x)\, U_i(x) \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(k+1)t \sin(i+1)t\, dt = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } k = i. \end{cases} \tag{26}$$

Для того чтобы показать, что $U_n(x)$ действительно являются многочленами степени n, вычислим производную от многочлена Чебышева первого рода $T_{n+1}(x)$:

$$T'_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}[\cos(n+1)\arccos x] =$$

$$= (n+1)\sin[(n+1)\arccos x]\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (n+1)\, U_n(x).$$

Следовательно,

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}\, T'_{n+1}(x), \tag{27}$$

а так как $T_{n+1}(x)$ есть многочлен степени $n+1$, то $T'_{n+1}(x)$ есть многочлен степени n.

Рекуррентная формула для многочленов Чебышева второго рода примет вид

$$U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x). \tag{28}$$

Дифференциальное уравнение для многочленов Чебышева второго рода выглядит так:

$$(1-x^2)\,U''_n(x) - 3xU'_n(x) + (n^2-4n)\,U_n(x) = 0. \tag{29}$$

Если на отрезке $[-1, +1]$ нужно найти наилучшее среднеквадратичное приближение функции $f(x) \in L_2(p)$, где $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, в совокупности многочленов степени не выше n, то ищем его в виде

$$P_n(x) = c_0 + c_1U_1(x) + c_2U_2(x) + \ldots + c_nU_n(x), \tag{30}$$

где коэффициенты c_k находятся по формулам:

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} f(x)\,U_k(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \\ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta)\sin\theta\sin(k+1)\theta\,d\theta. \tag{31}$$

Величина же наилучшего приближения найдется из равенства

$$\delta^2 = \int_{-1}^{+1} f^2(x)\sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n} c_k^2. \tag{32}$$

Приближение, получаемое с помощью многочленов $\{U_k(x)\}$ в большей степени учитывает значения приближаемой функции в середине отрезка $[-1, +1]$.

4. Многочлены Лагерра и Эрмита. Возьмем теперь в качестве интервала (a, b) полупрямую $[0, \infty)$ и в качестве веса

$$p(x) = x^\alpha e^{-x}, \tag{33}$$

где $\alpha > -1$. *Многочленами Лагерра* называют выражения

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha}e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}). \tag{34}$$

Что это действительно многочлены, нетрудно убедиться, если применить формулу Лейбница для дифференцирования к

$$\frac{d^n}{dx^n}[x^{\alpha+n}e^{-x}].$$

Старший коэффициент в этом случае всегда равен 1.

Покажем, что многочлены Лагерра ортогональны с весом $x^\alpha e^{-x}$ на полупрямой $[0, \infty)$. Для этого рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_m^{(\alpha)}(x)\, L_n^{(\alpha)}(x)\, dx = (-1)^n \int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x)\, \varphi_n^{(n)}(x)\, dx,$$

где через $\varphi_n(x)$ обозначено

$$\varphi_n(x) = x^{\alpha+n} e^{-x}.$$

Пусть $m \leqslant n$. Интегрируем m раз по частям. Получим:

$$I = (-1)^{n+m} \int_0^{+\infty} [L_m^{(\alpha)}(x)]^{(m)}\, \varphi_n^{(n-m)}(x)\, dx.$$

Если $m < n$, то, интегрируя еще один раз по частям, получим под знаком интеграла в качестве множителя $[L_m^{(\alpha)}(x)]^{(m+1)}$, и так как $L_m^{(\alpha)}(x)$ — многочлен степени m, то $I = 0$. При $m = n$ будем иметь:

$$I = \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x)]^{(n)}\, \varphi_n(x)\, dx = n! \int_0^\infty \varphi_n(x)\, dx,$$

так как старший коэффициент $L_n^{(\alpha)}(x)$ равен 1. Итак,

$$\|L_n^{(\alpha)}\|^2 = \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x)]^2\, x^\alpha e^{-x}\, dx = n! \int_0^\infty x^{\alpha+n} e^{-x}\, dx = n!\Gamma(\alpha + n + 1). \tag{35}$$

Если $f(x)$ разлагается в ряд по многочленам Лагерра, то

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^\infty c_k L_k^{(\alpha)}(x), \tag{36}$$

где

$$c_k = \frac{1}{k!\Gamma(\alpha + k + 1)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} f(x)\, L_k^{(\alpha)}(x)\, dx. \tag{37}$$

Дифференциальное уравнение для многочленов Лагерра примет вид

$$x \cdot [L_n^{(\alpha)}(x)]'' + (\alpha + 1 - x)\, [L_n^{(\alpha)}(x)]' + n L_n^{(\alpha)}(x) = 0. \tag{38}$$

Рекуррентная формула в данном случае будет выглядеть так:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (x - \alpha - 2n - 1)\, L_n^{(\alpha)}(x) + n(\alpha + n)\, L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0. \tag{39}$$

Иногда многочленами Лагерра называют частный случай рассмотренных нами многочленов при $p(x) = e^{-x}$.

Если весовая функция $p(x) = e^{-x^2}$ и мы рассматриваем приближения $f(x) \in L_2(p)$ на всей действительной оси, то ортогональную систему образуют *многочлены Эрмита*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \tag{40}$$

которые несложно выписать. Первые многочлены Эрмита имеют вид

$$H_0(x) = 1,$$
$$H_1(x) = 2x,$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2,$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Проверим их ортогональность и вычислим их норму. Имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\, dx.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\, dx =$$

$$= (-1)^n \left[H_m(x) \frac{d^{n-1} e^{-x^2}}{dx^{n-1}} \right|_{-\infty}^{+\infty} - (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m'(x) \frac{d^{n-1} e^{-x^2}}{dx^{n-1}}\, dx =$$

$$= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m'(x) \frac{d^{n-1} e^{-x^2}}{dx^{n-1}}\, dx = \ldots = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(n)}(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Если $n > m$, то $H_m^{(n)}(x) \equiv 0$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = 0.$$

Так как m и n равноправны, то это имеет место при всех $m \neq n$. При $m = n$ $H_m^{(n)} = 2^n n!$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2^n \cdot n! \sqrt{\pi}.$$

Отсюда

$$(H_m, H_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 2^n \cdot n! \sqrt{\pi} & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (41)$$

Для многочленов Эрмита имеет место рекуррентное соотношение

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad (42)$$

которое нетрудно проверить непосредственно.

Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0. \tag{43}$$

Коэффициенты многочлена наилучшего квадратичного приближения с весом $p(x) = e^{-x^2}$ к функции $f(x) \in L_2(p)$ среди многочленов степени не выше n, если его записать в виде

$$P_n(x) = c_0 + c_1H_1(x) + c_2H_2(x) + \ldots + c_nH_n(x), \tag{44}$$

вычисляются по формулам:

$$c_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x)\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{d^k e^{-x^2}}{dx^k}\, dx. \tag{45}$$

При этом лучше всего учитываются значения $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$, так как вес в этой окрестности имеет максимальное значение.

Пример. Приблизить функцию $f(x) = xe^{\frac{x^2}{4}}$ с помощью многочлена степени не выше 5-й, наилучшим образом учитывающего значения функции вблизи начала координат.

Будем искать этот многочлен в виде

$$P_5(x) = c_0 + c_1H_1(x) + c_2H_2(x) + c_3H_3(x) + c_4H_4(x) + c_5H_5(x).$$

Коэффициенты его вычисляем по указанным выше формулам (45). Будем иметь:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{3x^2}{4}}\, dx = 0; \quad c_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{3x^2}{4}} \cdot 2x\, dx = \frac{4}{3\sqrt{3}};$$

$$c_2 = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{3x^2}{4}} (4x^2 - 1)\, dx = 0;$$

$$c_3 = \frac{1}{8 \cdot 6\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{3x^2}{4}} (8x^3 - 12x)\, dx = \frac{1}{9\sqrt{3}};$$

$$c_4 = \frac{1}{16 \cdot 24\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{3x^2}{4}} (16x^4 - 48x^2 + 12)\, dx = 0;$$

$$c_5 = \frac{1}{32 \cdot 120\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{3x^2}{4}} (32x^5 - 160x^3 + 120x)\, dx = \frac{1}{8 \cdot 27\sqrt{3}}.$$

Таким образом,

$$P_5(x) = \frac{1}{8\cdot 27\sqrt{3}}(32x^5 - 160x^3 + 120x) + \frac{1}{9\sqrt{3}}(8x^3 - 12x) + \\ + \frac{4}{3\sqrt{3}}x = \frac{1}{27\sqrt{3}}[4x^5 + 4x^3 + 51x].$$

Ниже для сравнения приведена таблица значений $xe^{\frac{x^2}{4}}$ и $P_5(x)$ в некоторых точках:

x	$xe^{-\frac{x^2}{4}}$	$P_5(x)$	$P_5(x) - xe^{\frac{x^2}{4}}$
0	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,1002	0,1091	0,0089
0,2	0,2020	0,2188	0,0168
0,4	0,4163	0,4419	0,0256
0,6	0,6565	0,6794	0,0229
0,8	0,9388	0,9443	0,0055
1,0	1,2840	1,2616	0,0224
2,0	5,4365	5,6024	— 0,1659
3,0	28,4631	26,3657	— 2,0974

Если в качестве приближающего многочлена взять сумму трех первых членов степенного ряда для функции $xe^{\frac{x^2}{4}}$, то для значений x между нулем и единицей эта сумма даст лучшее приближение к заданной функции, но при $x = 2$ она будет отличаться от точного значения уже на —0,4365, а при $x = 3$ на —11,1198, т. е. при $x = 3$ приближение отрезком степенного ряда будет в пять раз хуже приближения с помощью нашего многочлена.

§ 6. Сходимость рядов по ортогональным системам многочленов

Как мы видели, для сходимости ряда Фурье для некоторого элемента гильбертова пространства к этому элементу в смысле нормы пространства требуются полнота пространства и полнота ортогональной системы, по которой строится ряд Фурье.

Для доказательства того, что это имеет место в рассматриваемом нами случае, нам будут нужны некоторые сведения из теории функций действительного переменного.

Приведем пока две теоремы:

Теорема Леви. *Если на* $[a, b]$ *дан ряд неотрицательных измеримых функций*

$$U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$$

и если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b U_k(x)\,dx < +\infty,$$

то почти везде на $[a, b]$ *сходится ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$. (Почти везде на $[a, b]$ означает, что всюду за исключением, быть может, множества меры нуль.)

Теорема Фату. *Если* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ — *последовательность неотрицательных измеримых функций, заданных на* $[a, b]$, *почти везде сходящаяся к функции* $\psi(x)$, *и если при всех* k

$$\int_a^b \varphi_k(x)\,dx \leqslant A,$$

то и

$$\int_a^b \psi(x)\,dx \leqslant A.$$

Доказательств этих теорем здесь приводить не будем и отсылаем читателя к любому более или менее полному курсу теории функций действительного переменного.

Относительно веса $p(x)$ будем предполагать, что $p(x) > 0$ почти всюду на $[a, b]$ и суммируем на этом промежутке.

Докажем следующую теорему, показывающую полноту пространства $L_2(p)$:

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ $(f_n(x) \in L_2(p))$ *сходится в себе, то она имеет предел, также принадлежащий* $L_2(p)$.

Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$, $f_n \in L_2(p)$ сходится в себе в пространстве $L_2(p)$. Тогда можно найти такую последовательность натуральных чисел

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots,$$

что

$$\|f_l(x) - f_m(x)\| < \frac{1}{k!}$$

при любых l и m, бо́льших n_k. Здесь $\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x)\,dx}$.

В частности,

$$\|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\| < \frac{1}{k!}$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right\|$$

будет сходиться. Применим неравенство Буняковского к функциям $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ и 1. Получим:

$$\int_a^b p(x)\,|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_a^b p(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b p(x)\,|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|^2\,dx} =$$

$$= \sqrt{\int_a^b p(x)\,dx} \cdot \|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\|.$$

Следовательно, сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b p(x)\,|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\,dx.$$

По теореме Леви почти везде сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(x)\,|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|,$$

а следовательно, и ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \{f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\}.$$

Таким образом, последовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ имеет предел почти всюду на $[a, b]$. Обозначим его через $f(x)$.

Покажем, что $f(x)$ принадлежит к $L_2(p)$ и что она является пределом последовательности $f_n(x)$ в смысле метрики $L_2(p)$.

Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем такое k, что при $n > n_k$ будет:

$$\|f_n - f_{n_k}\| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство будет выполнено, если мы закрепим n и будем произвольным образом увеличивать k.

Применим теорему Фату, взяв в качестве $\varphi_k(x)$ функции

$$p(x)\,[f_n(x) - f_{n_k}(x)]^2$$

и в качестве функции $\psi(x)$ — функции

$$p(x)\,[f_n(x) - f(x)]^2.$$

Тогда получим:

$$\int_a^b p(x)\,[f_n(x) - f(x)]^2\,dx \leqslant \varepsilon^2.$$

Следовательно, функция $f_n(x) - f(x)$, а поэтому и $f(x)$ принадлежат к $L_2(p)$. Более того, мы доказали, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем с весом $p(x)$ к $f(x)$.

Докажем теперь теорему:

Множество M всех измеримых ограниченных функций на $[a, b]$, множество C непрерывных на $[a, b]$ функций и множество $H(P)$ всех многочленов всюду плотные множества в $L_2(p)$.

Пусть $f \in L_2(p)$. На основании свойств интеграла Лебега для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что как только мера произвольного множества $e \in [a, b]$ будет меньше δ, то

$$\int_e p(x) f^2(x)\, dx < \varepsilon^2$$

(это свойство называют абсолютной непрерывностью).

Функция $f(x)$ почти всюду конечна. Поэтому можно указать такое n, что мера множества, на котором $f(x) > n$, будет меньше δ. Закрепив это n, положим

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |f(x)| \leqslant n, \\ 0 & \text{при } |f(x)| > n. \end{cases}$$

Очевидно, $g \in M$ и

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b p(f-g)^2\, dx = \int_{(f \neq g)} p(f-g)^2\, dx = \int_{(f \neq g)} pf^2\, dx < \varepsilon^2.$$

Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы находим $g(x) \in M$ такую, что $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $|g| \leqslant K$. Н. Н. Лузиным была доказана теорема, утверждающая, что для любого $\delta > 0$ существует такая непрерывная функция $\varphi(x)$, которая отличается от $g(x)$ лишь на множестве меры, не превышающей δ, и удовлетворяющая неравенству $|\varphi(x)| \leqslant K$. При этом получим:

$$\|g - \varphi\|^2 = \int_{(g \neq \varphi)} p(x) [g(x) - \varphi(x)]^2\, dx \leqslant 4K^2 \int_{(g \neq \varphi)} p(x)\, dx.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега последний интеграл может быть сделан меньше чем $\frac{\varepsilon^2}{16K^2}$. Таким образом,

$$\|f - \varphi\| \leqslant \|f - g\| + \|g - \varphi\| < \varepsilon.$$

Перейдем к третьей части. Найдем непрерывную функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условию $\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$. В силу теоремы Вейер-

штрасса можно найти такой многочлен $P(x)$, что

$$|P(x)-\varphi(x)|<\delta.$$

Тогда

$$\|f-P\|\leqslant\|f-\varphi\|+\|\varphi-P\|<\frac{\varepsilon}{2}+\delta\sqrt{\int_a^b p(x)\,dx},$$

и если $\delta\sqrt{\int_a^b p(x)\,dx}<\frac{\varepsilon}{2}$, то $\|f-P\|<\varepsilon$. Теорема доказана полностью.

Из теоремы следует, что в $L_2(p)$ многочлены с рациональными коэффициентами также образуют всюду плотное множество. Это множество счетно. Следовательно, $L_2(p)$ — сепарабельное пространство. Кроме того, отсюда следует, что построенные на степенях x: $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, ортогональные многочлены образуют полную систему.

В результате наших рассуждений мы можем утверждать, что образованные нами ряды по ортогональным многочленам будут сходиться к разлагаемой в ряд функции в смысле метрики $L_2(p)$, т. е. если $S_n(x)$ — частичная сумма соответствующего ряда, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b p(x)\,[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=0.$$

Во многих случаях, встречающихся на практике, полученная нами сходимость в среднем бывает недостаточна. Нужна либо обычная сходимость, либо даже равномерная сходимость.

Пусть $\{Q_n(x)\}$ — ортонормированная на $[a, b]$ система многочленов с весом $p(x)$. Тогда функции $f(x)\in L_2(p)$ будет соответствовать ряд Фурье по этой ортонормированной системе

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_kQ_k(x),$$

где

$$c_k=\int_a^b p(t)\,f(t)\,Q_k(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kQ_k(x)=\sum_{k=0}^{n}Q_k(x)\int_a^b p(t)\,f(t)\,Q_k(t)\,dt=$$

$$=\int_a^b p(t)\,f(t)\sum_{k=0}^{n}Q_k(x)\,Q_k(t)\,dt.$$

Обозначим

$$K_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(x) Q_k(t).$$

На основании тождества Кристофеля — Дарбу

$$K_n(x, t) = a_{n, n+1} \frac{Q_{n+1}(t) Q_n(x) - Q_{n+1}(x) Q_n(t)}{t - x}.$$

Таким образом,

$$S_n(x) = \int_a^b p(t) f(t) a_{n, n+1} \frac{Q_{n+1}(t) Q_n(x) - Q_{n+1}(x) Q_n(t)}{t - x} dt.$$

В частности, если $f(x) \equiv 1$, то при любом n

$$S_n(x) = f(x)$$

и, следовательно,

$$1 = \int_a^b p(t) a_{n, n+1} \frac{Q_{n+1}(t) Q_n(x) - Q_{n+1}(x) Q_n(x)}{t - x} dt.$$

Умножая обе части последнего равенства на $f(x)$ и пользуясь тем, что интегрирование ведется по t, мы можем записать:

$$f(x) = a_{n, n+1} \int_a^b p(t) f(x) \frac{Q_{n+1}(t) Q_n(x) - Q_{n+1}(x) Q_n(t)}{t - x} dt.$$

Отсюда

$$S_n(x) - f(x) =$$

$$= a_{n, n+1} \int_a^b p(t) \frac{f(t) - f(x)}{t - x} [Q_{n+1}(t) Q_n(x) - Q_{n+1}(x) Q_n(t)] dt.$$

Оценим величину

$$a_{n, n+1} = \int_a^b p(x) x Q_{n+1}(x) Q_n(x) dx.$$

Если предполагать, что коэффициенты при старших членах $Q_n(x)$ положительны, то $a_{n, n+1} > 0$. Далее,

$$a_{n, n+1} \leqslant C \int_a^b p(x) | Q_{n+1}(x) Q_n(x) | dx,$$

где через C обозначено наибольшее из чисел $|a|$ и $|b|$. По неравенству Буняковского

$$a_{n,\,n+1} \leqslant C \sqrt{\int_a^b p(x)\,Q_{n+1}^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b p(x)\,Q_n^2(x)\,dx} = C.$$

Обозначим

$$a_{n,\,n+1} = C\theta_n.$$

При этом $0 < \theta_n < 1$ и получаем:

$$S_n(x) - f(x) =$$

$$= \theta_n C \int_a^b p(t)\,\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\,[Q_{n+1}(t)\,Q_n(x) - Q_{n+1}(x)\,Q_n(t)]\,dt.$$

Пусть функция

$$\varphi(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

принадлежит $L_2(p)$. Обозначим коэффициенты Фурье этой функции по ортогональной системе $Q_k(x)$ через d_k. Очевидно, $d_k \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому если $Q_k(x)$ равномерно ограничены в точке x, то

$$\lim_{n\to\infty} [S_n(x) - f(x)] = \lim_{n\to\infty} \theta_n C\,[Q_n(x)\,d_{n+1} - Q_{n+1}(x)\,d_n] = 0$$

и

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Q_k(x).$$

Если многочлены $Q_n(x)$ равномерно ограничены на всем отрезке $[a, b]$, то наше утверждение будет справедливо для любой точки $x \in [a, b]$ при меньших предположениях о $\varphi(t)$, а именно достаточно потребовать, чтобы существовал интеграл

$$\int_a^b p(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Выражение

$$\int_a^b p(t)\,|K_n(x, t)|\,dt = L_n(x)$$

называют *функцией Лебега* ортонормированной системы $\{Q_n(x)\}$. Справедлива теорема:

Если $f(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x)\,E_n(f) = 0,$$

то ее ряд Фурье по ортогональной системе $Q_n(x)$ сходится в точке x.

Действительно, если $P_n(x)$ является многочленом наилучшего равномерного приближения для $f(x)$, то

$$|P_n(x) - f(x)| \leqslant E_n(f).$$

Следовательно,

$$|P_n(x) - S_n(x)| = \left| \int_a^b p(t)\,[P_n(t) - f(t)]\,K_n(x, t)\,dt \right| \leqslant L_n(x)\,E_n(f).$$

Но тогда

$$|f(x) - S_n(x)| \leqslant |f(x) - P_n(x)| + |P_n(x) - S_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant E_n(f) + L_n(x)\,E_n(f)$$

и правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. Будем называть $L_n = \sup\limits_{x \in [a, b]} L_n(x)$ *числами Лебега*. Если

$$\lim_{n \to \infty} L_n E_n(f) = 0,$$

то, как следует из последней оценки, ряд Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{Q_n(x)\}$ будет равномерно сходиться к $f(x)$.

При различных весах $p(x)$ мы получим различные условия, которые нужно наложить на функцию $f(x)$ для того, чтобы ее ряд Фурье по соответствующей ортогональной системе сходился к $f(x)$. Но при любом весе свойство непрерывности $f(x)$ не обеспечивает такой сходимости в каждой точке отрезка $[a, b]$. Это было показано В. Ф. Николаевым. Исследование сходимости рядов по ортогональным многочленам очень сложно, и мы не имеем возможности излагать здесь все тонкости вопроса. Ограничимся перечислением некоторых фактов, связанных с теми ортогональными системами, которые были приведены ранее.

Для многочленов Якоби справедлива следующая теорема:

Если $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка p, где p — наименьшее целое число, большее или равное $2\max(\alpha, \beta)+2$, а $\max(\alpha, \beta) \geqslant -\frac{1}{2}$, то ее ряд Фурье по многочленам Якоби равномерно сходится к $f(x)$.

В частности, для многочленов Лежандра $p = 2$. Для многочленов Чебышева первого рода $p = 1$. Можно показать, что равномерная сходимость в этом случае будет иметь место, если потребовать лишь ограниченность первой производной. Для многочленов Чебышева второго рода $p = 3$. Здесь также возможно уточнение теоремы, а именно достаточно потребовать выполнения для функции $f(x)$ условия Дини — Липшица:

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) \ln \delta = 0$$

($\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$), т. е. $\omega(\delta) = \sup\limits_{|x-y|\leqslant\delta} |f(x) - f(y)|$, для того чтобы обеспечить сходимость ряда по многочленам Чебышева второго рода на отрезке $[-1, -1]$ и равномерную сходимость на всяком отрезке $[-1+h, 1-h]$, $1 > h > 0$.

Для сходимости рядов по многочленам Лагерра достаточно потребовать, чтобы функция $f(x)$ была кусочно-гладкой на $[0, \infty)$, и сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} |f(x)|\, dx.$$

При этом в точках непрерывности $f(x)$ ряд сходится к $f(x)$, а в точках разрыва к $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Аналогичные условия достаточны для сходимости рядов по многочленам Эрмита. Первое требование здесь сохраняется, а вместо предыдущего интеграла требуется ограниченность

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, e^{-x^2} f^2(x)\, dx.$$

Равномерная сходимость рядов по ортогональным многочленам к заданной функции имеет практический интерес, так как если нам необходимо достаточно хорошее равномерное приближение функции с помощью многочленов, то в случае равномерной сходимости ряда за приближающий многочлен можно принять частную сумму ряда, построение которого во многих случаях достаточно просто.

Пример. Построить многочлен, равномерно приближающий функцию

$$f(x) = \ln\left(\frac{17}{16} - \frac{x}{2}\right)$$

на отрезке $[-1, +1]$ с точностью 0,0005.

Функция $f(x)$ непрерывна вместе с производной $f'(x)$ на отрезке $[-1, +1]$. Следовательно, ряд Фурье этой функции по многочленам Чебышева первого рода сходится к ней равномерно. Поэтому будем искать многочлен, равномерно приближающий функцию $f(x)$, как частную сумму ряда Фурье по многочленам Чебышева. Разложение $f(x)$ по многочленам Чебышева легко получить следующим образом. Известно разложение

$$\ln(1 - 2a\cos\theta + a^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos n\theta \qquad (|a| < 1),$$

Положив здесь $\cos\theta = x$ и $a = \frac{1}{4}$, получим:

$$\ln\left(\frac{17}{16} - \frac{x}{2}\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n}\cos(n \arccos x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n} T_n(x)$$

$$(-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Если за приближение функции будем принимать сумму первых n членов этого разложения, то погрешность не будет превосходить величины

$$|\rho_n(x)| \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k k}|T_k(x)| \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k k} <$$

$$< \frac{2}{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{2}{3(n+1)4^n}.$$

Нам необходимо взять n таким, чтобы

$$|\rho_n(x)| < 0{,}0005, \quad |x| \leqslant 1.$$

Для этого достаточно потребовать, чтобы имело место неравенство

$$\frac{2}{3(n+1)4^n} < 0{,}0005.$$

Наименьшее целое значение n, удовлетворяющее этому условию, будет $n = 5$. Таким образом, за многочлен, приближающий $f(x)$ с точностью до 0,0005, можно взять

$$S_5(x) = -\frac{1}{2}T_1(x) - \frac{1}{16}T_2(x) - \frac{1}{96}T_3(x) - \frac{1}{512}T_4(x) -$$

$$-\frac{1}{2560}T_5(x) = \frac{31}{512} - \frac{241}{512}x - \frac{7}{64}x^2 - \frac{13}{384}x^3 - \frac{x^4}{64} - \frac{x^5}{160}.$$

Используя то же самое разложение по многочленам Чебышева, можно получить многочлен пятой степени, дающий на отрезке $[-1, +1]$ приближение функции $f(x)$ с точностью до 0,0001. Для этого нужно поступить следующим образом. За приближающий многочлен возьмем $S_6(x)$. Многочлен $S_6(x)$ уклоняется от $f(x)$ на отрезке $[-1, +1]$ не более чем на

$$\frac{2}{3 \cdot 7 \cdot 4^6} \approx 0{,}00002.$$

В $S_6(x)$ многочлен $T_6(x)$ войдет с коэффициентом $-\frac{2}{6 \cdot 4^6}$, а x^6 — с коэффициентом $-\frac{32 \cdot 2}{6 \cdot 4^6}$. Из теории наилучших приближений

мы знаем, что на отрезке $[-1, +1]$ наименее уклоняется от нуля многочлен

$$\frac{1}{2^5} T_6(x) = x^6 - \frac{3}{2} x^4 + \frac{9}{16} x^2 - \frac{1}{32},$$

причем величина этого уклонения равна $\frac{1}{2^5}$. Таким образом, если мы заменим x^6 многочленом

$$P_4(x) = \frac{3}{2} x^4 - \frac{9}{16} x^2 + \frac{1}{32},$$

являющимся многочленом наилучшего приближения к x^6 на отрезке $[-1, +1]$ в совокупности многочленов степени не выше пятой, то мы совершим погрешность не более $\frac{1}{32}$. Заменяя в $S_6(x)$ член $-\frac{2x^6}{6 \cdot 4^6}$ многочленом $-\frac{2P_4(x)}{6 \cdot 4^6}$, мы совершим погрешность не более чем

$$\frac{32 \cdot 2}{6 \cdot 4^6} \cdot \frac{1}{2^5} \approx 0{,}00008.$$

После подстановки и приведения подобных членов получим многочлен пятой степени, уклоняющийся от $f(x)$ на отрезке $[-1, +1]$ не более чем на

$$0{,}00002 + 0{,}00008 = 0{,}0001,$$

т. е. мы получим в пять раз лучшую точность приближения с помощью многочлена той же пятой степени.

Аналогично можно показать, что многочлен $S_5(x)$, уклонение которого от $f(x)$ на отрезке $[-1, +1]$ меньше 0,0005, можно тем же приемом преобразовать в многочлен четвертой степени, уклонение которого от $f(x)$ также не превосходит 0,0005.

На этом пути часто удается построить многочлены, дающие очень хорошие приближения к заданной функции $f(x)$.

§ 7. Среднеквадратичные приближения функций тригонометрическими многочленами

Если исследуемая функция $f(x)$ является периодической, то естественно приближать ее также периодическими функциями. При этом если вес $p(x) \equiv 1$, то мы приходим к хорошо известной теории тригонометрических рядов Фурье. Так как теория тригонометрических рядов Фурье достаточно широко излагается в курсах математического анализа, мы не будем ее излагать здесь. Отметим лишь, что тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) \in L_2$ всегда сходится в среднем к этой функции. При некоторых ограничениях на $f(x)$ имеет место и равномерная сходимость, что позволяет строить достаточно точные равномерные приближения функций тригонометрическими многочленами.

§ 8. Приближение функций, заданных таблицей, по методу наименьших квадратов

До сих пор мы рассматривали функции, заданные в каждой точке некоторого отрезка $[a, b]$. Пусть теперь нам задана функция $f(x)$, известная своими значениями в конечном числе точек отрезка $[a, b]$: $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Для тех или иных целей бывает необходимо найти удобное и точное в каком-то смысле аналитическое представление этой функции на всем отрезке $[a, b]$. Один из таких способов представления мы уже рассмотрели в главе об интерполировании. Но интерполяционный способ нельзя считать наиболее удобным по двум причинам. Во-первых, если число узлов велико, то мы получаем громоздкие выражения для интерполяционных многочленов. Во-вторых, если табличные значения функции подвержены каким-то случайным ошибкам, например ошибкам измерения, то эти ошибки будут внесены в интерполяционный многочлен и тем самым исказят истинную картину поведения функции.

В этом параграфе мы введем другие принципы построения аналитических выражений для табличных функций. Пусть снова $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ — какая-то система линейно независимых функций на $[a, b]$, $m \leqslant n$. Будем разыскивать обобщенный многочлен, составленный из этих функций, так, чтобы

$$\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - \Phi(x_i)]^2 \tag{1}$$

имело наименьшее возможное значение. В тех случаях, когда известно что значения $f(x_i)$ имеют неодинаковую точность, можно вводить веса $p_i > 0$, $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$, и минимизировать сумму

$$\sum_{i=0}^{n} p_i [f(x_i) - \Phi(x_i)]^2. \tag{2}$$

Теорию построения таких обобщенных многочленов можно ввести в рамки той общей теории, которая развита в начале этой главы.

Для этого рассматриваем в качестве множества R всевозможные функции, заданные на $[a, b]$. Функции $f(x) \in R$ и $g(x) \in R$ считаются тождественными, если $f(x_i) = g(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Нулевым элементом будем считать любую функцию, обращающуюся в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Операции сложения элементов и умножения их на числа вводятся естественным образом.

В этом множестве вводим скалярное произведение

$$(f, g) = \sum_{i=0}^{n} p_i f(x_i) g(x_i), \tag{3}$$

где p_i — заданные положительные числа. Очевидно, все свойства скалярного произведения выполнены. Норма элемента вводится обычным образом:

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} p_i f^2(x_i)}. \tag{4}$$

Всевозможные линейные комбинации функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ образуют линейное $(m+1)$-мерное подмножество R. Следовательно, на основании общей теории в этом подмножестве найдется элемент наилучшего приближения для $f \in R$ в смысле той метрики, которую мы ввели. Этот элемент будет единствен. Но нужно помнить, что за этим элементом будет скрываться целое множество функций нашего подмножества, принимающих в точках x_i заданные значения.

Будем теперь предполагать, что функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ образуют систему Чебышева. Тогда обобщенный многочлен, принимающий в точках x_i заданные значения, будет единствен. Действительно, если бы имелось два таких многочлена, $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$, то их разность $\Phi_1(x) - \Phi_2(x)$ обращалась бы в нуль в $n+1$ точках x_i. Но мы предположили, что $m \leqslant n$. Следовательно, $\Phi_1(x) \equiv \Phi_2(x)$. При $m = n$ единственное решение поставленной задачи даст интерполяционный многочлен. Если $m < n$, то мы будем говорить, что нами получено приближение по методу наименьших квадратов.

Практическое отыскание многочлена наилучшего приближения по методу наименьших квадратов также не выходит за рамки общей теории. Если

$$\Phi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x) \tag{5}$$

является многочленом наилучшего приближения для $f \in R$, то должно быть

$$\sum_{j=0}^{m} c_j(\varphi_j, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m), \tag{6}$$

или, вводя обозначения

$$s_{jk} = \sum_{i=0}^{n} p_i\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i); \quad r_k = \sum_{i=0}^{n} p_i f(x_i)\varphi_k(x_i), \tag{7}$$

найдем, что c_k удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} c_0s_{00} + c_1s_{10} + \ldots + c_ms_{m0} &= r_0, \\ c_0s_{01} + c_1s_{11} + \ldots + c_ms_{m1} &= r_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_0s_{0m} + c_1s_{1m} + \ldots + c_ms_{mm} &= r_m. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Определитель этой системы как определитель Грамма системы линейно независимых элементов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ положителен и $c_0, c_1, \ldots, c_m$ найдутся единственным образом.

Можно было бы даже не изменять обозначений предыдущей части этой главы, если бы мы там ввели скалярное произведение как

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, d\sigma(x),$$

где $\sigma(x)$ — некоторая фиксированная функция ограниченной вариации, а интеграл берется в смысле Лебега — Стильтьеса. При этом мы пришли бы к результатам этого параграфа, если взяли бы в качестве $\sigma(x)$ некоторую функцию, имеющую $n+1$ точек роста $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

§ 9. Приближения по методу наименьших квадратов алгебраическими многочленами

Функции $1, x, \ldots, x^m$ образуют систему Чебышева на любом отрезке. Поэтому вся теория предыдущего параграфа будет применима. Приведем пример на применение этой теории.

Пример. Для функции $\sin \pi x$ на отрезке $[-1, +1]$ найти среди многочленов степени не выше трех многочлен, дающий наилучшее приближение по методу наименьших квадратов, если используются значения функции в точках

$$x_0 = -1; \quad x_1 = -0{,}5; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0{,}5; \quad x_4 = 1.$$

Для отыскания коэффициентов c_0, c_1, c_2, c_3 многочлена

$$P_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

имеем систему:

$$\begin{aligned}
c_0 s_{00} + c_1 s_{10} + c_2 s_{20} + c_3 s_{30} &= r_0,\\
c_0 s_{01} + c_1 s_{11} + c_2 s_{21} + c_3 s_{31} &= r_1,\\
c_0 s_{02} + c_1 s_{12} + c_2 s_{22} + c_3 s_{32} &= r_2,\\
c_0 s_{03} + c_1 s_{13} + c_2 s_{23} + c_3 s_{33} &= r_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
s_{00} &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5,\\
s_{01} = s_{10} &= -1 - 0{,}5 - 0 + 0{,}5 + 0 = 0,\\
s_{02} = s_{11} = s_{20} &= 1 + 0{,}25 + 0 + 0{,}25 + 1 = 2{,}5,\\
s_{03} = s_{12} = s_{21} = s_{30} &= -1 - 0{,}125 + 0 + 0{,}125 + 1 = 0,\\
s_{04} = s_{13} = s_{22} = s_{31} = s_{40} &= 1 + 0{,}0625 + 0 + 0{,}0625 + 1 = 2{,}125,
\end{aligned}$$

$$s_{05} = s_{14} = s_{23} = s_{32} = s_{41} = s_{50} = -1 - 0{,}03125 + 0 + 0{,}3125 + 1 = 0,$$

$$s_{06} = s_{15} = s_{24} = s_{33} = s_{42} = s_{51} = s_{60} = 1 + 0{,}015625 + 0 + 0{,}015625 + 1 = 2{,}03125$$

$$r_0 = 0 - 1 + 0 + 1 + 0 = 0,$$

$$r_1 = 0 + 0{,}5 + 0 + 0{,}5 + 0 = 1,$$

$$r_2 = 0 - 0{,}25 + 0 + 0{,}25 + 0 = 0,$$

$$r_3 = 0{,}125 + 0{,}125 = 0{,}25,$$

т. е.

$$5c_0 + 2{,}5c_2 = 0, \quad 2{,}5c_1 + 2{,}125c_3 = 1,$$

$$2{,}5c_0 + 2{,}125c_2 = 0, \quad 2{,}125c_1 + 2{,}03125c_3 = 0{,}25.$$

Отсюда

$$c_0 = c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{8}{3}, \quad c_2 = -\frac{8}{3}$$

и

$$P_3(x) = \frac{8}{3}(x - x^3).$$

Изложенный здесь метод имеет два существенных недостатка:

1) для отыскания коэффициентов этого многочлена приходится решать систему из $m+1$ уравнений, что при больших m затруднительно;

2) если мы выбрали m и построили многочлен наилучшего приближения и оказалось, что точность приближения недостаточна, то, увеличив m, нам придется заново повторять все вычисления.

1. Система многочленов, ортогональных на множестве равноотстоящих точек. Мы освободимся от этих недостатков, если найдем систему ортогональных многочленов в смысле того скалярного произведения, которое нами введено. Естественно, что система ортогональных многочленов будет зависеть от расположения узлов и от весов p_i. Мы ограничимся простейшим случаем, когда веса $p_i = 1$, а узлы равноотстоящие. Пусть нам дано $n+1$ узлов x_0, $x_1, \ldots, x_n$, $x_i - x_{i-1} = h$. Если предварительно выполнить замену $x' = \frac{x - x_0}{h}$, то точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ перейдут соответственно в $0, 1, 2, \ldots, n$. Будем считать, что эта замена уже выполнена, и вместо x' снова писать x.

Будем теперь строить многочлены $P_{k,n}(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m \leqslant n)$ последовательно возрастающих степеней ($P_{k,n}(x)$ — многочлен в точности степени k), обладающие свойством

$$\sum_{i=0}^{n} P_{k,n}(i) P_{l,n}(i) = 0 \qquad (k \neq l). \tag{1}$$

Так же как и в том случае, когда рассматривались значения многочленов во всех точках отрезка $[a, b]$, можно доказать, что наши многочлены определятся однозначно, с точностью до постоянного множителя. Чтобы определить их совсем однозначно, потребуем, чтобы при $x = 0$ они равнялись единице.

Прежде чем переходить к построению многочленов $P_{k,n}(x)$, рассмотрим некоторые свойства факториальных многочленов. *Факториальным многочленом* $x^{(n)}$ порядка n называют многочлен степени n с коэффициентом при старшей степени, равным единице, обращающийся в нуль в точках 0, 1, ..., $n-1$, т. е.

$$x^{(n)} = x(x-1)\ldots(x-n+1). \tag{2}$$

Очевидно, что любой многочлен степени n можно представить как линейную комбинацию факториальных многочленов степеней, не превосходящих n.

Имеют место следующие тождества:

$$(x+1)^{(n)} - x^{(n)} = nx^{(n-1)}, \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{n}(x+j)^{(k)} = \frac{(x+n+1)^{(k+1)} - x^{(k+1)}}{k+1}. \tag{4}$$

Первое из них легко проверяется:

$$(x+1)^{(n)} - x^{(n)} =$$
$$= x(x-1)\ldots(x-n+2)[(x+1)-(x-n+1)] = nx^{(n-1)}.$$

Для доказательства второго выпишем последовательность первых тождеств, взяв n равным $k+1$, сдвигая каждый раз аргумент на единицу:

$$(x+1)^{(k+1)} - x^{(k+1)} = (k+1)x^{(k)},$$
$$(x+2)^{(k+1)} - (x+1)^{(k+1)} = (k+1)(x+1)^{(k)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x+n+1)^{(k+1)} - (x+n)^{(k+1)} = (k+1)(x+n)^{(k)}.$$

Складывая эти тождества почленно, получим:

$$(x+n+1)^{(k+1)} - x^{(k+1)} = (k+1)\sum_{j=0}^{n}(x+j)^{(k)}.$$

Отсюда и следует утверждение.

Искомый многочлен будем искать в виде

$$P_{m,n}(x) = 1 + b_1x^{(1)} + b_2x^{(2)} + \ldots + b_mx^{(m)} \tag{5}$$

и потребуем его ортогональности к

$$(x+k)^{(k)} = (x+k)(x+k-1)\ldots(x+1)$$

при всех $k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$, т. е.

$$\sum_{i=0}^{n}(i+k)^{(k)}P_{m,n}(i)=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1). \tag{6}$$

Имеем:

$$(x+k)^{(k)}P_{m,n}(x)=(x+k)^{(k)}+b_1(x+k)^{(k)}x^{(1)}+$$
$$+b_2(x+k)^{(k)}x^{(2)}+\ \ldots\ +b_m(x+k)^{(k)}x^{(m)}=$$
$$=(x+k)^{(k)}+b_1(x+k)^{(k+1)}+\ \ldots\ +b_m(x+k)^{(k+m)}.$$

Отсюда, используя второе тождество, получим:

$$\sum_{i=0}^{n}(i+k)^{(k)}P_{m,n}(i)=\sum_{i=0}^{n}(i+k)^{(k)}+b_1\sum_{i=0}^{n}(i+k)^{(k+1)}+\ \ldots$$
$$\ldots+b_m\sum_{i=0}^{n}(i+k)^{(k+m)}=$$
$$=\frac{(k+n+1)^{(k+1)}-k^{(k+1)}}{k+1}+b_1\frac{(k+n+1)^{(k+2)}-k^{(k+2)}}{k+2}+\ \ldots$$
$$\ldots+b_m\frac{(k+n+1)^{(k+m+1)}-k^{(k+m+1)}}{k+m+1}=$$
$$=(k+n+1)^{(k+1)}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{nb_1}{k+2}+\frac{n^{(2)}b_2}{k+3}+\ \ldots\ +\frac{n^{(m)}b_m}{k+m+1}\right]. \tag{7}$$

Таким образом, для отыскания коэффициентов b_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ получаем систему из m уравнений:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{nb_1}{k+2}+\frac{n^{(2)}b_2}{k+3}+\ \ldots\ +\frac{n^{(m)}b_m}{k+m+1}=0$$
$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1) \tag{8}$$

или, полагая $n^{(i)}b_i=a_i$, систему

$$\frac{1}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\frac{a_2}{k+3}+\ \ldots\ +\frac{a_m}{k+m+1}=0$$
$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1). \tag{9}$$

Для решения этой системы применим следующий прием. Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{x+1}+\frac{a_1}{x+2}+\frac{a_2}{x+3}+\ \ldots\ +\frac{a_m}{x+m+1}=$$
$$=\frac{Q(x)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m+1)}=\frac{Q(x)}{(x+m+1)^{(m+1)}}. \tag{10}$$

Здесь $Q(x)$ есть многочлен степени не выше m. В силу наших уравнений $Q(x)$ обращается в нуль в точках $x=0, 1, 2, \ldots, m-1$. Следовательно,

$$Q(x)=Cx^{(m)}.$$

Для отыскания постоянной C умножим последнее равенство на $x+1$ и положим $x=-1$. Получим:

$$1=\frac{C(-1)^{(m)}}{m^{(m)}}=\frac{C(-1)^m m!}{m!}=C(-1)^m,$$

т. е. $C=(-1)^m$, и

$$Q(x)=(-1)^m x^{(m)}. \tag{11}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{x+1}+\frac{a_1}{x+2}+\ldots+\frac{a_m}{x+m+1}=\frac{(-1)^m x^{(m)}}{(x+m+1)^{(m+1)}}. \tag{12}$$

Освобождаясь от знаменателей и полагая $x=-(k+1)$, получим:

$$a_k(m-k)(m-k-1)\ldots 1\,(-1)(-2)\ldots(-k)=$$
$$=(-1)^m(-k-1)(-k-2)\ldots(-k-m)$$

или

$$a_k=\frac{(-1)^k(k+1)(k+2)\ldots(k+m)}{k!\,(m-k)!}=(-1)^k C_m^k C_{m+k}^k, \tag{13}$$

а

$$b_k=\frac{(-1)^k C_m^k C_{m+k}^k}{n^{(k)}}. \tag{14}$$

Подставляя эти значения в равенство (12), получим:

$$P_{m,n}(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k C_m^k C_{m+k}^k}{n^{(k)}}x^{(k)}. \tag{15}$$

Так как произвольный многочлен степени $j<m$ можно представить как линейную комбинацию $(x+k)^{(k)}$ при $k=0, 1, \ldots, j$, то $P_{m,n}(x)$ будет ортогонален к любому многочлену степени $j<m$. В частности,

$$\sum_{i=0}^{n}P_{k,n}(i)\,P_{m,n}(i)=0 \qquad (k\neq m). \tag{16}$$

Вычислим теперь

$$\sum_{i=0}^{n}P_{m,n}^2(i).$$

Для этого представим $P_{m,n}(x)$ в виде

$$P_{m,n}(x)=\sum_{k=0}^{m}B_k(x+k)^{(k)}. \tag{17}$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{n} P_{m,n}^2(i) = \sum_{i=0}^{n} P_{m,n}(i) \sum_{k=0}^{m} B_k (i+k)^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} B_k \left\{ \sum_{i=0}^{n} (i+k)^{(k)} P_{m,n}(i) \right\} = B_m \sum_{i=0}^{n} P_{m,n}(i)\,(i+m)^{(m)} =$$

$$= B_m (m+n+1)^{(m+1)} \left[\frac{1}{m+1} + \frac{nb_1}{m+2} + \ldots + \frac{n^{(m)} b_m}{2m+1} \right], \quad (18)$$

или используя равенство (12) при $x = m$, получим:

$$\sum_{i=0}^{n} P_{m,n}^2(i) = B_m (m+n+1)^{(m+1)} \frac{(-1)^m m^{(m)}}{(2m+1)^{(m+1)}}.$$

Наконец, учитывая, что $B_m = b_m = \dfrac{(-1)^m (2m)^{(m)}}{m!\, n^{(m)}}$, найдем:

$$\sum_{i=0}^{n} P_{m,n}^2(i) = \frac{(m+n+1)^{(m+1)}}{(2m+1)\, n^{(m)}}, \quad (19)$$

Ортогональные многочлены $P_{m,n}(x)$ связаны следующим рекуррентным соотношением:

$$\left(x - \frac{n}{2}\right) P_{m,n}(x) + \frac{(m+1)(n-m)}{2(2m+1)} P_{m+1,n}(x) +$$

$$+ \frac{m(n+m+1)}{2(2m+1)} P_{m-1,n}(x) = 0 \qquad (m \geqslant 1). \quad (20)$$

В самом деле, многочлен $xP_{m,n}(x)$ можно записать в следующем виде:

$$xP_{m,n}(x) =$$

$$= \alpha_0 P_{m+1,n}(x) + \alpha_1 P_{m,n}(x) + \alpha_2 P_{m-1,n}(x) + \ldots + a_{m+1} P_{0,n}(x).$$

Для отыскания коэффициентов $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{m+1}$ умножим обе части равенства на $P_{k,n}(x)$ $(k \leqslant m-2)$, заменим x на i и просуммируем по i от 0 до n. Тогда будем иметь слева:

$$\sum_{i=0}^{n} iP_{k,n}(i) P_{m,n}(i),$$

что равно нулю, так как многочлен $xP_{k,n}(x)$ имеет степень меньше m, а следовательно ортогонален $P_{m,n}(x)$. Справа, в силу ортогональности многочленов, останется только один член:

$$\alpha_{m-k+1} \sum_{i=0}^{n} P_{k,n}^2(i).$$

Таким образом,

$$\alpha_{m-k+1}\sum_{i=0}^{n}P_{k,\,n}^{2}(i)=0 \qquad \text{при} \qquad k\leqslant m-2,$$

т. е. $\alpha_3=\alpha_4=\ldots=\alpha_{m+1}=0$, и мы будем иметь:

$$xP_{m,\,n}(x)=\alpha_0P_{m+1,\,n}(x)+\alpha_1P_{m,\,n}(x)+\alpha_2P_{m-1,\,n}(x).$$

Для отыскания коэффициентов α_0, α_1, α_2 нужно составить три уравнения. Эти уравнения мы получим, приравнивая коэффициенты при x^{m+1} в обеих частях нашего равенства, а также полагая в обеих частях $x=0$ и $x=1$.

Заметим, что

$$P_{m,\,n}(0)=1; \quad P_{m,\,n}(1)=1+b_1,$$

а коэффициент при старшей степени x^m в $P_{m,\,n}(x)$ равен

$$b_m=\frac{(-1)^m(2m)^{(m)}}{m!\,n^{(m)}}.$$

Из сравнения коэффициентов при x^{m+1} получим:

$$\frac{(-1)^m(2m)^{(m)}}{m!\,n^{(m)}}=\alpha_0(-1)^{m+1}\frac{(2m+2)^{(m+1)}}{(m+1)!\,n^{(m+1)}},$$

или

$$\alpha_0=-\frac{(m+1)(n-m)}{2(2m+1)}.$$

Далее, при $x=0$ получаем:

$$0=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2,$$

а при $x=1$

$$1-\frac{m(m+1)}{n}=\alpha_0\left[1-\frac{(m+1)(m+2)}{n}\right]+$$
$$+\alpha_1\left[1-\frac{m(m+1)}{n}\right]+\alpha_2\left[1-\frac{(m-1)m}{n}\right]$$

или, учитывая, что $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=0$, вместо последнего уравнения получаем уравнение

$$1-\frac{m(m+1)}{n}=-\frac{(m+1)(m+2)}{n}\alpha_0-\frac{m(m+1)}{n}\alpha_1-\frac{(m-1)m}{n}\alpha_2.$$

Подставляя найденное значение для α_0, получим следующие уравнения:

$$\alpha_1+\alpha_2=\frac{(m+1)(n-m)}{2(2m+1)},$$

$$m(m+1)\alpha_1+(m-1)m\alpha_2=m(m+1)-n+\frac{(m+1)^2(m+2)(n-m)}{2(2m+1)},$$

откуда

$$\alpha_1=\frac{n}{2}; \quad \alpha_2=-\frac{m(n+m+1)}{2(2m+1)}$$

или

$$xP_{m,\,n}(x) = -\frac{(m+1)(n-m)}{2(2m+1)}P_{m+1,\,n}(x) + \\ + \frac{n}{2}P_{m,\,n}(x) - \frac{m(n+m+1)}{2(2m+1)}P_{m-1,\,n}(x),$$

что и требовалось доказать.

Так как

$$P_{0,\,n}(x) = 1; \quad P_{1,\,n}(x) = 1 - \frac{2x}{n},$$

то из рекуррентного соотношения при $m = 1$ имеем:

$$\left(x - \frac{n}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{n}x\right) + \frac{2(n-1)}{2\cdot 3}P_{2,\,n}(x) + \frac{n+2}{6} = 0,$$

или

$$P_{2,\,n}(x) = 1 - \frac{6x}{n-1} + \frac{6x^2}{n(n-1)}.$$

Полагая $m = 2$, получим:

$$\left(x - \frac{n}{2}\right)\left[1 - \frac{6x}{n-1} + \frac{6x^2}{n(n-1)}\right] + \frac{3(n-2)}{2\cdot 5}P_{3,\,n}(x) + \\ + \frac{2(n+3)}{2\cdot 5}\left(1 - \frac{2}{n}x\right) = 0,$$

или

$$P_{3,\,n}(x) = 1 - \frac{2(6n^2-3n+2)}{n(n-1)(n-2)}x + \frac{30}{(n-1)(n-2)}x^2 - \frac{20x^3}{n(n-1)(n-2)}$$

и т. д.

Имея ортогональные многочлены $P_{k,\,n}(x)$ при всех $k < n$, легко построить в $H_m(\rho)$ многочлен, дающий наилучшее приближение к элементу $f \in R$ в смысле метрики этого пространства. Этот многочлен ищем в виде

$$P_m(x) = c_0P_{0,\,n}(x) + c_1P_{1,\,n}(x) + \ldots + c_mP_{m,\,n}(x). \qquad (21)$$

В соответствии с общей теорией для отыскания коэффициентов получаем следующую систему:

$$c_i(P_{i,\,n},\ P_{i,\,n}) = (f,\ P_{i,\,n}) \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Отсюда

$$c_i = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} f(k)P_{i,\,n}(k)}{\sum\limits_{k=0}^{n} P_{i,\,n}^2(k)} = \frac{(2i+1)\,n^{(i)}}{(i+n+1)^{(i+1)}}\sum_{k=0}^{n} f(k)P_{i,\,n}(k). \qquad (22)$$

Величина наилучшего приближения δ_m находится из равенства

$$\delta_m^2 = \sum_{k=0}^{n}[f(k) - P_m(k)]^2 = \sum_{k=0}^{n} f^2(k) - \sum_{k=0}^{m}\frac{(k+n+1)^{(k+1)}}{(2k+1)\,n^{(k)}}c_k^2. \qquad (23)$$

Пример. Построение многочлена наилучшего приближения в смысле метода наименьших квадратов для примера предыдущего параграфа будет выглядеть следующим образом.

Учитывая, что

$$P_{0,4}(y)=1,\quad P_{1,4}(y)=1-\frac{y}{2},\quad P_{2,4}(y)=1-2y+\frac{y^2}{2},$$

$$P_{3,4}(y)=1-\frac{43}{6}y+5y^2-\frac{5y^3}{6},$$

для коэффициентов многочлена

$$P_3(y)=c_0P_{0,4}(y)+c_1P_{1,4}(y)+c_2P_{2,4}(y)+c_3P_{3,4}(y)$$

имеем:

$$c_0=\frac{1}{5}[0-1+0+1+0]=0,$$

$$c_1=\frac{3\cdot4}{6\cdot5}\left[0\cdot1-1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot0+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot(-1)\right]=-\frac{2}{5},$$

$$c_2=\frac{5\cdot4\cdot3}{7\cdot6\cdot5}\left[0\cdot1-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot(-1)+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot1\right]=0,$$

$$c_3=\frac{7\cdot4\cdot3\cdot2}{8\cdot7\cdot6\cdot5}\left[0\cdot1-1\cdot(-2)+0\cdot\frac{40}{3}+1\cdot2+0\cdot(-1)\right]=\frac{2}{5}.$$

Следовательно,

$$P_3(y)=-\frac{2}{5}\left(1-\frac{y}{2}\right)+\frac{2}{5}\left(1-\frac{43}{6}y+5y^2-\frac{5y^3}{6}\right).$$

Делая замену $y=2x+2$, получим многочлен наилучшего приближения к функции $f(x)=\sin\pi x$ на отрезке $[-1, +1]$ в совокупности многочленов степени не выше третьей:

$$\bar{P}_3(x)=\frac{8}{3}(x-x^3).$$

Для практического использования многочленов, ортогональных на множестве точек 0, 1, 2, ..., n, составлены таблицы этих многочленов (см., например, Милн, Численный анализ).

§ 10. Применение метода наименьших квадратов для сглаживания результатов наблюдения

Пусть в результате наблюдений получена таблица значений функции $f(x)$ для значений аргумента $x_0, x_1, \ldots, x_N$. Будем предполагать, что значения аргумента $x_0, x_1, \ldots, x_N$ найдены точно или во всяком случае значительно точнее, чем значения функции $f(x_i)$. Будем предполагать, что систематические погрешности, а также грубые ошибки в значениях $f(x_i)$ исключены. С целью уменьшения случайных ошибок и получения более плавного течения

функции $f(x)$ применяют процесс сглаживания, состоящий в том, что наблюденные значения $f(x_i)$ заменяют значениями $\bar{f}(x_i)$, полученными в процессе вычислений, зависящих от выбранного способа сглаживания.

Мы изложим способ сглаживания, основанный на методе наименьших квадратов, предполагая, что значения $x_0, x_1, \ldots, x_N$ равноотстоящие, а все значения $f(x_i)$ имеют одинаковую точность. Этот способ заключается в следующем. Предполагается, что функция $f(x)$ на некотором участке, охватывающем $n+1$ значений аргумента x, может быть достаточно хорошо приближена многочленом степени m ($m \leqslant n$). Для того чтобы найти сглаженное значение $\bar{f}(x_i)$ в точке x_i, выбирают $n+1$ значений аргумента (из заданных x_j) так, чтобы x_i по возможности находилось посредине. По наблюденным значениям функции в этих точках методом наименьших квадратов строят многочлен степени m, приближающий функцию $f(x)$, и за значение $\bar{f}(x_i)$ принимают значение этого многочлена в точке x_i. Полученные при этом значения $\bar{f}(x_i)$ обычно бывают довольно близки к истинным.

Для практического использования можно заранее найти выражение $\bar{f}(x_i)$ через наблюденные значения $f(x_i)$ при заданных m и n. Часто выбирают n четным числом, а m нечетным. В этом случае точка x_i будет являться средней из точек, по которым строится приближающий многочлен.

Ниже приводится несколько таких выражений. Для краткости вместо $f(x_i)$ мы записываем f_i.

$$m = 1$$

$$n = 2: \quad \bar{f}(x_i) = \frac{1}{3}[f_{i-1} + f_i + f_{i+1}];$$

$$n = 4: \quad \bar{f}(x_i) = \frac{1}{5}[f_{i-2} + f_{i-1} + f_i + f_{i+1} + f_{i+2}];$$

$$n = 6: \quad \bar{f}(x_i) = \frac{1}{7}[f_{i-3} + f_{i-2} + f_{i-1} + f_i + f_{i+1} + f_{i+2} + f_{i+3}].$$

$$m = 3$$

$$n = 4: \quad \bar{f}(x_i) = \frac{1}{35}[-3f_{i-2} + 12f_{i-1} + 17f_i + 12f_{i+1} - 3f_{i+2}];$$

$$n = 6: \quad \bar{f}(x_i) = \frac{1}{21}[-2f_{i-3} + 3f_{i-2} + 6f_{i-1} + 7f_i + 6f_{i+1} + 3f_{i+2} - 2f_{i+3}];$$

$$n = 8: \quad \bar{f}(x_i) = \frac{1}{231}[-21f_{i-4} + 14f_{i-3} + 39f_{i-2} + 54f_{i-1} + 59f_i + 54f_{i+1} + 39f_{i+2} + 14f_{i+3} - 21f_{i+4}].$$

$$m=5$$

$$n=6:\quad \bar{f}(x_i)=\frac{1}{231}[5f_{i-3}-30f_{i-2}+75f_{i-1}+131f_i+$$
$$+75f_{i+1}-30f_{i+2}+5f_{i+3}];$$

$$n=8:\quad \bar{f}(x_i)=\frac{1}{429}[15f_{i-4}-55f_{i-3}+30f_{i-2}+135f_{i-1}+$$
$$+179f_i+135f_{i+1}+30f_{i+2}-55f_{i+3}+15f_{i+4}];$$

$$n=10:\quad \bar{f}(x_i)=\frac{1}{429}[18f_{i-5}-45f_{i-4}-10f_{i-3}+60f_{i-2}+120f_{i-1}+$$
$$+143f_i+120f_{i+1}+60f_{i+2}-10f_{i+3}-45f_{i+4}+18f_{i+5}].$$

Иногда сглаживание приходится производить несколько раз, но при этом нужно иметь в виду, что многократное сглаживание может сильно исказить истинную картину.

§ 11. Применение метода наименьших квадратов к построению эмпирических формул. Решение систем линейных алгебраических уравнений по методу наименьших квадратов

Пусть две переменные x и y связаны известной функциональной зависимостью

$$y=f(x;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m), \tag{1}$$

содержащей m параметров $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$. Пусть при $x=x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\ (n>m)$ известны с некоторой точностью значения $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$. Требуется найти значения параметров $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$.

С такой задачей приходится встречаться при построении эмпирических формул, выражающих в аналитической форме закономерность изменения одной величины в зависимости от изменения другой, если в результате наблюдений получена таблица значений величины y при соответствующих значениях x.

Вид функциональной зависимости f и число параметров m в некоторых случаях известны из каких-либо дополнительных соображений, в других случаях вид функциональной зависимости усматривается из графика, построенного по наблюденным значениям y_i, а число параметров и их значения подбираются так, чтобы эмпирическая формула наилучшим образом отображала результаты наблюдений и была достаточно проста. В некоторых случаях, когда не удается построить достаточно простую эмпирическую формулу, выражающую достаточно просто зависимость y от x на всем диапазоне изменения аргумента x, прибегают к построению ряда эмпирических формул, выражающих эту зависимость в определенных более узких пределах изменения x.

Вернемся к поставленной задаче. Если бы значения y_i при $x = x_i$ были известны точно, то задача принципиально решалась бы просто. Нужно было бы из системы

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f(x_1;\ a_1, a_2, \ldots, a_m),\\ y_2 &= f(x_2;\ a_1, a_2, \ldots, a_m),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n &= f(x_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_m) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

взять m уравнений и найти из них значения параметров a_i (предполагается, что эта система имеет единственное решение). При этих значениях параметров были бы в точности удовлетворены все остальные уравнения системы. Если же y_i, как и бывает практически, являются приближенными значениями, то, найдя из каких-либо m уравнений значения параметров $a_1, a_2, \ldots, a_m$, мы столкнемся с тем фактом, что эти значения параметров не будут удовлетворять остальным уравнениям, причем разность между правой и левой частями для некоторых уравнений может быть значительной. Наша система чаще всего будет несовместна. Возникает задача так определить значения параметров, чтобы в некотором смысле все уравнения системы были удовлетворены с наименьшей погрешностью, т. е. найти те значения параметров, при которых искомая эмпирическая формула наилучшим образом согласуется с результатами наблюдений.

Одним из способов отыскания этих значений параметров $a_1, a_2, \ldots, a_m$ является следующий. Отыскиваются приближенные значения параметров $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0$, например решая систему, составленную из каких-либо m уравнений системы. Далее, ищутся поправки к этим значениям

$$a_i = a_i^0 + \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3)$$

Предполагая, что поправки α_i достаточно малы, а функция f — достаточно гладкая функция, разлагают правые части уравнений системы в ряд Тейлора в окрестности точки $(a_1^0, a_2^0, \ldots a_m^0)$, удерживая лишь члены первого порядка относительно поправок, т. е. $f(x_k;\ a_1, a_2, \ldots, a_m) =$

$$= f(x_k;\ a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0) + \sum_{i=1}^{m} f'_{a_i}(x_k;\ a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0)\alpha_i. \qquad (4)$$

Вводя для сокращения записи обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &f'_{a_i}(x_k;\ a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0) = b_{k,i} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m),\\ &y_k - f(x_k;\ a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0) = l_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Вернемся к поставленной задаче. Если бы значения y_i при $x = x_i$ были известны точно, то задача принципиально решалась бы просто. Нужно было бы из системы

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f(x_1;\ a_1, a_2, \ldots, a_m),\\ y_2 &= f(x_2;\ a_1, a_2, \ldots, a_m),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n &= f(x_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_m) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

взять m уравнений и найти из них значения параметров a_i (предполагается, что эта система имеет единственное решение). При этих значениях параметров были бы в точности удовлетворены все остальные уравнения системы. Если же y_i, как и бывает практически, являются приближенными значениями, то, найдя из каких-либо m уравнений значения параметров $a_1, a_2, \ldots, a_m$, мы столкнемся с тем фактом, что эти значения параметров не будут удовлетворять остальным уравнениям, причем разность между правой и левой частями для некоторых уравнений может быть значительной. Наша система чаще всего будет несовместна. Возникает задача так определить значения параметров, чтобы в некотором смысле все уравнения системы были удовлетворены с наименьшей погрешностью, т. е. найти те значения параметров, при которых искомая эмпирическая формула наилучшим образом согласуется с результатами наблюдений.

Одним из способов отыскания этих значений параметров $a_1, a_2, \ldots, a_m$ является следующий. Отыскиваются приближенные значения параметров $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0$, например решая систему, составленную из каких-либо m уравнений системы. Далее, ищутся поправки к этим значениям

$$a_i = a_i^0 + \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3)$$

Предполагая, что поправки α_i достаточно малы, а функция f — достаточно гладкая функция, разлагают правые части уравнений системы в ряд Тейлора в окрестности точки $(a_1^0, a_2^0, \ldots a_m^0)$, удерживая лишь члены первого порядка относительно поправок, т. е. $f(x_k; a_1, a_2, \ldots, a_m) =$

$$= f(x_k; a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0) + \sum_{i=1}^{m} f'_{a_i}(x_k; a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0)\alpha_i. \qquad (4)$$

Вводя для сокращения записи обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &f'_{a_i}(x_k; a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0) = b_{k,i} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m),\\ &y_k - f(x_k; a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0) = l_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Решая систему нормальных уравнений одним из известных способов (подробнее об этом будет рассказываться в следующей главе), найдем значения неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, которые для нашей исходной задачи являются поправками к начальным значениям параметров, а суммы $a_i^0 + \alpha_i$ можно принять за искомые значения параметров a_i в эмпирической формуле.

Предыдущий способ дает удовлетворительные результаты только в том случае, когда результаты измерений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ имеют одинаковую точность, т. е. их среднеквадратичные погрешности примерно одинаковы (см. гл. 1). Если этого нет, то целесообразно сначала все условные уравнения привести к «одинаковому весу». Это делается следующим способом. Пусть среднеквадратичные ошибки величин

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

суть

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n.$$

Вычисляем величину

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_n^2}{n}}$$

и находим веса

$$p_1 = \frac{\mu}{\mu_1}, \quad p_2 = \frac{\mu}{\mu_2}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{\mu}{\mu_n}.$$

Затем каждое условное уравнение умножаем на соответствующее p_i. Очевидно, получим систему, эквивалентную исходной, в которой правыми частями будут величины

$$l_1 \frac{\mu}{\mu_1}, \quad l_2 \frac{\mu}{\mu_2}, \quad \ldots, \quad l_n \frac{\mu}{\mu_n},$$

имеющие одну и ту же среднюю ошибку μ.

Это равносильно составлению нормальных уравнений из условия минимума

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} p_k \left[l_k - \sum_{i=1}^{m} b_{ki} \alpha_i \right]^2.$$

Заметим, что для упрощения вычислений вместо среднеквадратичных ошибок можно брать величины, им пропорциональные, так как это не меняет нормальной системы.

Наконец, отметим, что на задачу приближения функций, заданной таблицей значений, с помощью алгебраического многочлена степени m по методу наименьших квадратов можно смотреть как на задачу построения эмпирической формулы в виде многочлена степени m. Роль параметров в этом случае играют коэффициенты многочлена, причем система условных уравнений будет иметь вид

$$f(x_i) = \sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а коэффициенты многочлена наилучшего приближения в смысле метода наименьших квадратов будут находиться как решение системы нормальных уравнений.

Пример. Известно, что некоторая величина J зависит от времени t следующим образом:

$$J = \alpha e^{-pt}.$$

Измерения величины J, произведенные с одинаковой точностью, дали следующую таблицу зависимости J от t:

t	0	1	2	3
J	2,010	1,210	0,740	0,450

Найти значение параметров α и p в этой функциональной зависимости.

Исходные уравнения будут иметь вид

$$2{,}010 = \alpha,$$
$$1{,}210 = \alpha e^{-p},$$
$$0{,}740 = \alpha e^{-2p},$$
$$0{,}450 = \alpha e^{-3p}.$$

Решая приближенно первые два уравнения, найдем:

$$\alpha_0 = 2{,}010, \quad p_0 = 0{,}510.$$

Ищем поправки:

$$\beta = \alpha - \alpha_0, \quad q = p - p_0.$$

Так как

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = e^{-pt}, \quad \frac{\partial J}{\partial p} = -\alpha t e^{-pt},$$

то

$$b_{11} = 1, \quad b_{21} = e^{-0{,}51} = 0{,}600, \quad b_{31} = e^{-1{,}02} = 0{,}361,$$
$$b_{41} = e^{-1{,}53} = 0{,}216,$$
$$b_{12} = 0, \quad b_{22} = -2{,}01e^{-0{,}51} = -1{,}206,$$
$$b_{32} = -4{,}02e^{-1{,}02} = -1{,}451, \quad b_{42} = -6{,}03e^{-1{,}53} = -1{,}302,$$
$$l_1 = 2{,}010 - 2{,}01e^{-0{,}51 \cdot 0} = 0,$$
$$l_2 = 1{,}210 - 2{,}01e^{-0{,}51 \cdot 1} = 0{,}004,$$
$$l_3 = 0{,}740 - 2{,}01e^{-0{,}51 \cdot 2} = 0{,}014,$$
$$l_4 = 0{,}450 - 2{,}01e^{-1{,}53} = 0{,}016.$$

Система условных уравнений запишется так:

$$\begin{aligned} \beta &= 0, \\ 0{,}600\beta - 1{,}206q &= 0{,}004, \\ 0{,}361\beta - 1{,}451q &= 0{,}014, \\ 0{,}216\beta - 1{,}302q &= 0{,}016. \end{aligned}$$

Система нормальных уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} &[1^2 + 0{,}600^2 + 0{,}361^2 + 0{,}216^2]\beta - [1{,}206 \cdot 0{,}600 + 1{,}451 \cdot 0{,}361 + \\ &\quad + 1{,}302 \cdot 0{,}216]q = 0{,}004 \cdot 0{,}600 + 0{,}014 \cdot 0{,}361 + 0{,}016 \cdot 0{,}216, \\ &\quad - [0{,}600 \cdot 1{,}206 + 0{,}361 \cdot 1{,}451 + 0{,}216 \cdot 1{,}302]\beta + \\ &\quad + [1{,}206^2 + 1{,}451^2 + 1{,}302^2]q = \\ &\qquad = -[0{,}004 \cdot 1{,}206 + 0{,}014 \cdot 1{,}451 + 0{,}016 \cdot 1{,}302], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 1{,}537\beta - 1{,}529q &= 0{,}011, \\ -1{,}529\beta + 5{,}255q &= -0{,}046, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \beta &= -0{,}004, \quad q = -0{,}009, \\ \alpha &= 2{,}006, \quad p = 0{,}501, \end{aligned}$$

а

$$J = 2{,}006e^{-0{,}501t}.$$

§ 12. Приближение функций, заданных таблицей, тригонометрическими многочленами по методу наименьших квадратов

В § 8 мы рассмотрели общий случай приближения табличной функции по методу наименьших квадратов с помощью функций некоторой системы Чебышева. Пусть теперь узлы расположены на отрезке $(0, 2\pi]$:

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leqslant 2\pi,$$

и в качестве системы Чебышева возьмем тригонометрические функции:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx. \qquad (1)$$

Будем предполагать, что $N \geqslant 2n + 1$. В этом случае согласно общей теории будет однозначно определяться тригонометрический многочлен

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (2)$$

наилучшего приближения в смысле метода наименьших квадратов для произвольной функции, заданной в точках x_i. Коэффициенты этого тригонометрического многочлена будут удовлетворять системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&Na_0+\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\sum_{l=1}^{N}\cos kx_l+b_k\sum_{l=1}^{N}\sin kx_l\right\}=\sum_{k=1}^{N}f(x_l),\\
&a_0\sum_{l=1}^{N}\cos ix_l+\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\sum_{l=1}^{N}\cos kx_l\cos ix_l+\right.\\
&\qquad\left.+b_k\sum_{l=1}^{N}\sin kx_l\cos ix_l\right\}=\sum_{l=1}^{N}f(x_l)\cos ix_l,\\
&a_0\sum_{l=1}^{N}\sin ix_l+\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\sum_{l=1}^{N}\cos kx_l\sin ix_l+\right.\\
&\left.+b_k\sum_{l=1}^{N}\sin kx_l\sin ix_l\right\}=\sum_{l=1}^{N}f(x_l)\sin ix_l\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Решив эту систему, мы сумеем найти приближающий многочлен.

Как мы знаем, система упростится, если функции системы Чебышева ортогональны в смысле той метрики, которая нами вводится при изучении табличных функций. Для тригонометрических многочленов оказывается, что не нужно производить никакой ортогонализации, если $p_i=1$ и узлы равноотстоящие.

Пусть

$$x_1=\alpha,\quad x_2=2\alpha;\quad\ldots,\quad x_N=N\alpha,\ \alpha=\frac{2\pi}{N}.\tag{4}$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{N}\cos kx_l=\sum_{l=1}^{N}\sin kx_l=0\qquad(k\neq Np,\ p\text{ — целое число}),\\
&\sum_{l=1}^{N}\cos kx_l\cos rx_l=\sum_{l=1}^{N}\sin kx_l\sin rx_l=0,
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

если $k+r$ и $k-r$ не являются кратными N и $k\neq r$.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{N}\cos kx_l\sin rx_l=0\qquad\text{при всех } k,\ r;\\
&\sum_{l=1}^{N}\cos^2 kx_l=\sum_{l=1}^{N}\sin^2 kx_l=\frac{N}{2}\qquad(2k\neq Np).
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Таким образом, в этом случае сами функции тригонометрической системы ортогональны.

Чтобы доказать написанные нами равенства, рассмотрим

$$\sum_{l=1}^{N} e^{ikx_l} = \sum_{l=1}^{N} e^{ikl\alpha} = \frac{e^{ik(N+1)\alpha} - e^{ik\alpha}}{e^{ik\alpha} - 1} = \frac{(e^{i2k\pi} - 1)\, e^{i\frac{2k\pi}{N}}}{e^{ik\alpha} - 1} = 0$$

при $k \neq Np$.

Отделяя здесь действительную и мнимую части, получим первое равенство. Далее,

$$\sum_{l=1}^{N} \cos kx_l \cos rx_l = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} \cos(k+r)x_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} \cos(k-r)x_l;$$

$$\sum_{l=1}^{N} \sin kx_l \sin rx_l = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} \cos(k-r)x_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} \cos(k+r)x_l.$$

Суммы, стоящие в правых частях, равны нулю, если $k+r$ и $k-r$ не являются кратными N. Аналогично

$$\sum_{l=1}^{N} \cos kx_l \sin rx_l = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} \sin(k+r)x_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} \sin(k-r)x_l = 0$$

при всех k и r.

Наконец,

$$\sum_{l=1}^{N} \cos^2 kx_l = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} [1 + \cos 2kx_l] = \frac{N}{2},$$

$$\sum_{l=1}^{N} \sin^2 kx_l = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} [1 - \cos 2kx_l] = \frac{N}{2},$$

если $2k$ не кратно N. Если же $2k$ кратно N, то

$$\sum_{l=1}^{N} \cos^2 kx_l = N, \quad \text{а} \quad \sum_{l=1}^{N} \sin^2 kx_l = 0.$$

В силу полученных нами равенств система для определения коэффициентов упростится и примет вид

$$\left.\begin{aligned} Na_0 &= \sum_{l=1}^{N} f(x_l), \\ \frac{N}{2} a_i &= \sum_{l=1}^{N} f(x_l) \cos i x_l, \\ \frac{N}{2} b_i &= \sum_{l=1}^{N} f(x_l) \sin i x_l \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

или

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} f(x_l), \\ a_i &= \frac{2}{N} \sum_{l=1}^{N} f(x_l) \cos i x_l, \\ b_i &= \frac{2}{N} \sum_{l=1}^{N} f(x_l) \sin i x_l \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Последние формулы носят название *формул Бесселя*. Заметим, что формулы Бесселя можно получить из формул для коэффициентов Фурье функции $f(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \\ \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx, \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

если вычислять входящие в них интегралы приближенно, используя формулу трапеций, полагая $f(0) = f(2\pi)$.

Укажем также на связь коэффициентов, полученных по формулам Бесселя, и коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$, если эта функция разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Учитывая наши равенства и беря $N = 2p$, будем иметь:

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} f(x_l) = \frac{1}{2p}\sum_{l=1}^{2p}\left[\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx_l + \beta_k \sin kx_l)\right] = \alpha_0 +$$

$$+ \frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k \sum_{l=1}^{2p}\cos kx_l + \beta_k \sum_{l=1}^{2p}\sin kx_l\right\} = \alpha_0 + \alpha_{2p} + \alpha_{4p} + \ldots,$$

$$a_r = \frac{2}{N}\sum_{l=1}^{N} f(x_l)\cos rx_l = \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{2p}\left[\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx_l + \beta_k \sin kx_l)\right] \times$$

$$\times \cos rx_l = \frac{\alpha_0}{p}\sum_{l=1}^{2p}\cos rx_l + \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k \sum_{l=1}^{2p}\cos kx_l \cos rx_l + \beta_k \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{l=1}^{2p}\sin kx_l \cos rx_l\right\} = \alpha_r + \alpha_{2p-r} + \alpha_{2p+r} + \alpha_{4p-r} + \alpha_{4p+r} + \ldots,$$

$$b_r = \frac{2}{N}\sum_{l=1}^{N} f(x_l)\sin rx_l = \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{2p}\left[\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx_l + \beta_k \sin kx_l)\right] \times$$

$$\times \sin rx_l = \frac{\alpha_0}{p}\sum_{l=1}^{2p}\sin rx_l + \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k \sum_{l=1}^{2p}\cos kx_l \sin rx_l + \right.$$

$$\left. + \beta_k \sum_{l=1}^{2p}\sin kx_l \sin rx_l\right\} = \beta_r - \beta_{2p-r} + \beta_{2p+r} - \beta_{4p-r} + \beta_{4p+r} - \ldots$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 + \alpha_{2p} + \alpha_{4p} + \alpha_{6p} + \ldots, \\ a_r &= \alpha_r + \alpha_{2p-r} + \alpha_{2p+r} + \alpha_{4p-r} + \alpha_{4p+r} + \ldots, \\ b_r &= \beta_r - \beta_{2p-r} + \beta_{2p+r} - \beta_{4p-r} + \beta_{4p+r} - \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Если коэффициенты α_k, β_k быстро убывают, то основное значение имеют первые члены этих рядов. При небольших r a_r и b_r будут близки к α_r и β_r, а при больших r расхождение будет, вообще говоря, больше.

§ 13. Схема Рунге вычисления коэффициентов a_0, a_k, b_k в случае $N = 4p$

Значения $\cos ix_l$ и $\sin ix_l$, входящие в формулы Бесселя, будут совпадать или различаться лишь знаком даже при различных значениях i. Этим часто пользуются, чтобы создать различные удобные вычислительные схемы. Одну из таких схем мы и рассмотрим

в этом параграфе. Как уже указано в заголовке, берем $N = 4p$. В этом случае $n \leqslant 2p - 1$. Будем разыскивать многочлен в виде

$$T(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_{2p-1} \cos (2p-1)x + \\ + a_{2p} \cos 2px + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_{2p-1} \sin (2p-1)x. \quad (1)$$

Для коэффициентов a_k, b_k многочлена наилучшего приближения мы имеем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4p} \sum_{l=1}^{4p} f(x_l); & a_{2p} &= \frac{1}{4p} \sum_{l=1}^{4p} (-1)^l f(x_l); \\ a_k &= \frac{1}{2p} \sum_{l=1}^{4p} f(x_l) \cos kx_l; & b_k &= \frac{1}{2p} \sum_{l=1}^{4p} f(x_l) \sin kx_l \\ & & (k &= 1, 2, \ldots, 2p-1). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Выражения для a_{2p} мы не имели. Получим его. Для отыскания a_{2p} мы имеем уравнение

$$a_{2p} \sum_{l=1}^{4p} \cos^2 2px_l = \sum_{l=1}^{4p} f(x_l) \cos 2px_l.$$

Так как $x_l = \alpha l = \frac{\pi l}{2p}$, то $\cos 2px_l = \cos \pi l = (-1)^l$. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{4p} \cos^2 2px_l = 4p; \quad \sum_{l=1}^{4p} f(x_l) \cos 2px_l = \sum_{l=1}^{4p} (-1)^l f(x_l) \\ &\text{и} \\ &a_{2p} = \frac{1}{4p} \sum_{l=1}^{4p} (-1)^l f(x_l). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Займемся упрощением сумм, входящих в выражения для коэффициентов. Для этого заметим, что

$$\left.\begin{aligned} \cos kx_{4p-l} &= \cos \frac{k(4p-l)\pi}{2p} = \cos \frac{kl\pi}{2p} = \cos kx_l, \\ \sin xk_{\ p-l} &= \sin \frac{k(4p-l)\pi}{2p} = -\sin \frac{kl\pi}{2p} = -\sin kx_l. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Следовательно, в суммах можно объединить члены, равноудаленные от концов. Вводя обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &s_0 = f(x_{4p}); & &s_{2p} = f(x_{2p}); \\ &s_l = f(x_l) + f(x_{4p-l}); & &d_l = f(x_l) - f(x_{4p-l}) \ (l = 1, 2, \ldots, 2p-1), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

можно выражения для коэффициентов переписать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4p}\sum_{l=0}^{2p} s_l; \qquad a_{2p} = \frac{1}{4p}\sum_{l=0}^{2p}(-1)^l s_l; \\ a_k &= \frac{1}{2p}\sum_{l=0}^{2p} s_l \cos kx_l; \quad b_k = \frac{1}{2p}\sum_{l=1}^{2p} d_l \sin kx_l \ (k = 1, 2, \ldots, 2p-1). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Далее, для четных значений k $(k = 2j)$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} \cos kx_{2p-l} &= \cos 2j\frac{(2p-l)\pi}{2p} = \cos\frac{2jl\pi}{2p} = \cos 2jx_l = \cos kx_l, \\ \sin kx_{2p-l} &= \sin 2j\frac{(2p-l)\pi}{2p} = -\sin\frac{2jl\pi}{2p} = -\sin 2jx_l = -\sin kx_l, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

а для нечетных значений k $(k = 2j-1)$:

$$\left.\begin{aligned} \cos kx_{2p-l} &= \cos(2j-1)\frac{(2p-l)\pi}{2p} = -\cos\frac{(2j-1)l\pi}{2p} = -\cos kx_l, \\ \sin kx_{2p-l} &= \sin(2j-1)\frac{(2p-l)\pi}{2p} = +\sin\frac{2jl\pi}{2p} = \sin kx_l. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Таким образом, можно снова объединить члены, равноотстоящие от концов. Если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned} \sigma_p &= s_p, \\ \sigma_l &= s_l + s_{2p-l}, \\ \delta_l &= s_l - s_{2p-l} \end{aligned}\right\} \ (l = 0, 1, \ldots, p-1),$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_p &= d_p, \\ \sigma'_l &= dl + d_{2p-l}, \\ \delta'_l &= d_l - d_{2p-l} \end{aligned}\right\} \ (l = 1, 2, \ldots, p-1), \tag{9}$$

то формулы можно записать в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4p}\sum_{l=0}^{p}\sigma_l, & a_{2p} &= \frac{1}{4p}\sum_{l=0}^{p}(-1)^l\sigma_l, \\ a_{2j} &= \frac{1}{2p}\sum_{l=0}^{p}\sigma_l\cos 2jx_l, & a_{2j-1} &= \frac{1}{2p}\sum_{l=0}^{p-1}\delta_l\cos(2j-1)x_l, \\ b_{2j} &= \frac{1}{2p}\sum_{l=1}^{p-1}\delta'_l\sin 2jx_l, & b_{2j-1} &= \frac{1}{2p}\sum_{l=1}^{p}\sigma'_l\sin(2j-1)x_l. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Вычисления сумм и разностей удобно располагать следующим образом:

		f_1	f_2	f_3	$\dots$	f_{2p-1}	f_{2p}
	f_{4p}	f_{4p-1}	f_{4p-2}	f_{4p-3}	$\dots$	f_{2p+1}	
Суммы . . .	s_0	s_1	s_2	s_3	$\dots$	s_{2p-1}	s_{2p}
Разности . .		d_1	d_2	d_3	$\dots$	d_{2p-1}	
	s_0	s_1	s_2	s_3	$\dots$	s_{p-1}	s_p
	s_{2p}	s_{2p-1}	s_{2p-2}	s_{2p-3}	$\dots$	s_{p+1}	
Суммы . . .	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	$\dots$	σ_{p-1}	σ_p
Разности . .	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3	$\dots$	δ_{p-1}	
		d_1	d_2	d_3	$\dots$	d_{p-1}	d_p
		d_{2p-1}	d_{2p-2}	d_{2p-3}	$\dots$	d_{p+1}	
Суммы . . .		σ'_1	σ'_2	σ'_3	$\dots$	σ'_{p-1}	σ'_p
Разности . .		δ'_1	δ'_2	δ'_3	$\dots$	δ'_{p-1}	

А Случай 12 ординат.

В этом случае будем иметь:

		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
	f_{12}	f_{11}	f_{10}	f_9	f_8	f_7	
Суммы . . .	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
Разности . .		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	

	s_0	s_1	s_2	s_3		d_1	d_2	d_3
	s_6	s_5	s_4			d_5	d_4	
Суммы . . .	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	Суммы . . .	σ'_1	σ'_2	σ'_3
Разности . .	δ_0	δ_1	δ_2		Разности . .	δ'_1	δ'_2	

Дальнейшие вычисления удобно производить по схеме:

$\sin 30° = 0{,}500$ $\sin 60° = 0{,}866$ $\sin 90° = 1{,}000$ $\sin 90° = 1{,}000$	σ_0 σ_2	σ_1 σ_3	δ_2 δ_0	δ_1	$-\sigma_2$ σ_0	σ_1 $-\sigma_3$	δ_0	δ_2
Суммы	I	II	I	II	I	II	I	II
Суммы $I+II$ Разности $I-II$	$12a_0$ $12a_6$		$6a_1$ $6a_5$		$6a_2$ $6a_4$		$6a_3$	

Продолжение

sin 30° = 0,500 sin 60° = 0,866 sin 90° = 1,000	σ_1' σ_3'	σ_2'	δ_1'	δ_2'	σ_1'	σ_3'		
Суммы	I	II	I	II	I	II		
Суммы I + II Разности I — II	$6b_1$ $6b_5$		$6b_2$ $6b_4$		$6b_3$			

При вычислениях по этой схеме нужно выполнить умножение величин, стоящих в столбцах, на синусы углов, стоящих в соответствующих строках, и найти суммы произведений по столбцам. Далее, составляя суммы I + II и разности I — II, найдем коэффициент a_k и b_k, умноженные на указанные в таблице множители.

Б. Случай 24 ординат.

		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
	f_{24}	f_{23}	f_{22}	f_{21}	f_{20}	f_{19}	f_{18}	f_{17}	f_{16}	f_{15}	f_{14}	f_{13}	
Суммы . . .	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}
Разности . .		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	
				s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6			
				s_{12}	s_{11}	s_{10}	s_9	s_8	s_7				
Суммы . . .				σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6			
Разности . .				δ_0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5				
				d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6				
				d_{11}	d_{10}	d_9	d_8	d_7					
Суммы . . .				σ_1'	σ_2'	σ_3'	σ_4'	σ_5'	σ_6'				
Разности . .				δ_1'	δ_2'	δ_3'	δ_4'	δ_5'					

Дальнейшие вычисления можно расположить по схеме, приведенной на следующей странице. Порядок вычислений по этой схеме такой же, как и в случае 12 ординат.

Имеется ряд других схем для вычисления коэффициентов по формулам Бесселя. Широкое применение находят наборы шаблонов, например шаблоны Лопшица. Разработаны и разнообразные графические методы гармонического анализа кривых, а также существуют разнообразные конструкции особых приборов — гармонических анализаторов.

Подробно о методах гармонического анализа можно прочесть в монографии М. Г. Серебрянникова «Гармонический анализ».

cos 0°	$\sigma_0+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_6$	$\sigma_1+\sigma_3+\sigma_5$	δ_0		$\sigma_0-\sigma_6$		$\delta_0-\delta_4$		$\sigma_0+\sigma_6$	$-\sigma_3$	δ_0		$\sigma_0-\sigma_6$	$\sigma_4-\sigma_2$
cos 15°				δ_1								δ_5		
cos 30°			δ_2			$\sigma_1-\sigma_5$					$-\delta_2$			
cos 45°				δ_3				$\delta_1-\delta_3-\delta_5$				$-\delta_3$		
cos 60°			δ_4		$\sigma_2-\sigma_4$				$-\sigma_2-\sigma_4$	$\sigma_1+\sigma_5$	δ_4			
cos 75°				δ_5								δ_1		
Суммы	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
I + II	$24a_0$		$12a_1$		$12a_2$		$12a_3$		$12a_4$		$12a_5$		$12a_6$	
I − II	$24a_{12}$		$12a_{11}$		$12a_{10}$		$12a_9$		$12a_8$		$12a_7$			
sin 15°	σ_1'								σ_5'					
sin 30°		σ_2'	$\delta_1'+\delta_5'$							σ_2'				
sin 45°	σ_3'				$\sigma_1'+\sigma_3'-\sigma_5'$				$-\sigma_3'$					

sin 60°		σ_4'		$\delta_2'+\delta_4'$			$\delta_1'-\delta_5'$	$\delta_2'-\delta_4'$		$-\sigma_4'$				
sin 75°	σ_5'								σ_1'					
sin 90°		σ_6'	δ_3'			$\sigma_2'-\sigma_6'$				σ_0'	$\delta_1'+\delta_5'$	$-\delta_3'$		
Суммы	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
I + II	$12b_1$		$12b_2$		$12b_3$		$12b_4$		$12b_5$		$12b_6$			
I − II	$12b_{11}$		$12b_{10}$		$12b_9$		$12b_8$		$12b_7$					

Пример. Найти коэффициенты тригонометрического многочлена, наилучшим образом приближающего функцию $f(x)$, заданную таблицей:

x_l^0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
f_l	2,611	3,102	2,912	2,105	0,612	− 1,321	− 1,906	− 2,412	− 2,802	− 2,703	− 1,610	1,500

	1,500	2,611 − 1,610	3,102 − 2,703	2,912 − 2,802	2,105 − 2,412	0,612 − 1,906	− 1,321		
Суммы S Разности d	1,500	1,001 4,221	0,399 5,805	0,110 5,714	− 0,307 4,517	− 1,294 2,518	− 1,321		

Продолжение примера

	1,500 −1,321	1,001 −1,294	0,399 −0,307	0,110		4,221 2,518	5,805 4,517	5,714	
Суммы σ Разности δ	0,179 2,821	−0,293 2,295	0,092 0,706	0,110	Суммы σ' Разности δ'	6,739 1,703	10,322 1,288	5,714	
sin 30° = 0,500 sin 60° = 0,866 sin 90° = 1,000 sin 90° = 1,000	0,179 0,092	−0,293 0,110		0,706 2,821	2,295	−0,092 0,179	−0,293 −0,110	2,821	0,706
Суммы	0,271	−0,183		3,174	1,987	0,133	−0,256	2,821	0,706
Суммы I + II Разности I − II	$12a_0 = 0{,}088$ $12a_6 = 0{,}454$			$6a_1 = 5{,}161$ $6a_5 = 1{,}187$		$6a_2 = -0{,}123$ $6a_4 = 0{,}389$		$6a_3 = 2{,}115$	
sin 30° = 0,500 sin 60° = 0,866 sin 90° = 1,000	6,739 5,714	10,322		1,703	1,288	6,739		5,714	
Суммы	9,084	8,939		1,475	1,115	6,739		5,714	
Суммы I + II Разности I − II	$6b_1 = 18{,}023$ $6b_5 = 0{,}145$			$6b_2 = 2{,}590$ $6b_4 = 0{,}360$		$6b_3 = 1{,}025$			

$a_0 = 0{,}007$; $a_1 = 0{,}860$, $a_2 = -0{,}020$; $a_3 = 0{,}352$; $a_4 = 0{,}065$, $a_5 = 0{,}198$;

$a_6 = 0{,}038$; $b_1 = 3\,004$ $b_2 = 0{,}432$; $b_3 = 0{,}171$, $b_4 = 0{,}060$, $b_5 = 0{,}024$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Разложить на отрезке $[-1, +1]$ функцию $f(x) = |x|$ по многочленам Лежандра

$$Отв.\ |x| \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-2)!\,(4n+1)}{2^{2n}\,(n-1)!\,(n+1)!} L_{2n}(x).$$

2. Разложить при $x > 0$ по многочленам Лагерра функцию $f(x) = e^{-ax}$

$$Отв.\ f(x) \sim \frac{1}{1+a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^n L_n^{(0)}(x).$$

3. Используя разложение по многочленам Чебышева, найти многочлен наименьшей степени, равномерно приближающий на отрезке $[-1, +1]$ функцию $f(x) = \dfrac{10+x}{101+20x}$ с точностью 10^{-5}

Указание. Воспользоваться разложением

$$\frac{1 - a\cos t}{1 - 2a\cos t + a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nt \qquad (|a| < 1)$$

4. Найти по методу наименьших квадратов приближенное представление функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ по ее значениям в точках $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ многочленом четвертой степени.

5. Аппроксимировать следующие данные многочленом второй степени:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	87	156	210	238	252	239	211	158	90	−5

6. В результате эксперимента получены следующие значения функции $f(x)$ с периодом 2π:

x_l^0	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
f_l	1,31	1,84	2,33	2,51	2,54	2,39	2,12	2,08	2,48	3,44	3,81	3,63
x_l^0	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°
f_l	3,19	2,01	0,92	−0,64	−1,73	−1,98	−1,76	−1,68	−1,57	−1,32	−0,32	−0,62

Найти представление этой функции тригонометрическим многочленом

7. По методу наименьших квадратов решить систему уравнений

$$x + y = 3{,}0, \quad x + 3y = 7{,}0,$$

$$2x - y = 0{,}2, \quad 3x + y = 5{,}0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И П. Натансон, Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
2. Н И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947.
3. М. Г. Серебрянников, Гармонический анализ, Гостехиздат, 1948.
4. Б М Щиголев, Математическая обработка наблюдений, Физматгиз, 1960.
5. К. Ланцош, Практические методы прикладного анализа, Физматгиз, 1961.