ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

П · Г · БЕРГМАН

И * Л

Государственное издательство

иностранной

литературы

*

INTRODUCTION
to the
THEORY OF RELATIVITY

by

PETER GABRIEL BERGMANN

With a Foreword

by

ALBERT EINSTEIN

1942

*

П. Г. БЕРГМАН

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

с предисловием
А. ЭЙНШТЕЙНА

*

Перевод с английского
П. КУНИНА и И. ТАКСАРА

под редакцией
Б. Л. ГИНЗБУРГА

*

Государственное издательство
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва
1947

ПРЕДИСЛОВИЕ АЛЬБЕРТА ЭЙНШТЕЙНА

Несмотря на то, что уже опубликовано значительное количество работ, посвященных изложению теории относительности, книга д-ра Бергмана, мне кажется, удовлетворяет определенным существующим запросам. Это прежде всего учебник для студентов — физиков и математиков, который может быть использован как в аудитории, так и для индивидуальных занятий. Все, что требуется для чтения этой книги, — знакомство с анализом и некоторые познания в области дифференциальных уравнений, классической механики и электродинамики.

Эта книга не только дает исчерпывающую, систематическую и логически полную трактовку главных черт теории относительности, но в ней достаточно полно представлены и ее опытные основания. Читатель, изучивший эту книгу, будет владеть физическими представлениями и математическими методами теории относительности и сможет самостоятельно разобраться в ее тонкостях. Он сможет также без особенных трудностей понимать специальную литературу в области теории относительности.

Я полагаю, что систематическому изучению теории относительности должно быть посвящено больше времени и усилий, чем это обычно делается в большинстве университетов. Правда, до сих пор теория относительности, особенно общая теория относительности, играла сравнительно скромную роль в установлении глубокой связи между опытными фактами и внесла мало нового в атомную физику и в наше понимание квантовых явлений. Вполне возможно, однако, что некоторые результаты общей теории относительности, такие, как общая ковариантность законов природы и их нелинейность, смогут помочь в преодолении трудностей, встречающихся в настоящее время в теории атомных и ядерных процессов. Независимо от этого, теория относительности обладает особенной привлекательностью благодаря своей внутренней стройности и логической простоте ее аксиом.

Значительные усилия были потрачены на то, чтобы сделать эту книгу логически и педагогически удовлетворительной; д-р Бергман провел со мной много часов, которые были посвящены этой цели. Я надеюсь, что большинство читателей охотно прочтут книгу и получат лучшее представление о достижениях и проблемах современной теоретической физики.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Настоящая книга по теории относительности рассчитана на студентов — физиков и математиков, не имеющих никаких предварительных знаний в этой области и математическая подготовка которых не выходит за пределы того, что необходимо для изучения классической теоретической физики. Поэтому специальный математический аппарат, используемый в теории относительности, т. е. тензорный анализ и анализ Риччи, рассматривается в самой книге. Особенное внимание уделено развитию основных идей теории относительности; именно благодаря этим идеям, а не специальным приложениям теория играет столь важную роль среди остальных областей теоретической физики.

Материал разделен на три части: специальная теория относительности, общая теория относительности и изложение единых теорий поля. Эти три части образуют единое целое. Автор представляет себе, что многие студенты интересуются теорией относительности главным образом в связи с ее применениями в атомной и ядерной физике. Он надеется, что эти читатели найдут все интересующие их сведения в первой части, посвященной специальной теории относительности. Те читатели, которые интересуются только специальной теорией относительности, могут опустить один раздел главы V и всю главу VIII, так как в них содержатся сведения, необходимые только для общей теории относительности.

Во второй части рассматривается общая теория относительности, включая работу Эйнштейна, Инфельда и Гофмана об уравнениях движения. В третьей части обсуждены некоторые попытки устранения дефектов общей теории относительности. Однако ни одна из этих теорий не является вполне удовлетворительной. Тем не менее, автору кажется, что такое обсуждение завершает рассмотрение общей теории относительности, намечая возможные пути дальнейшего исследования. Однако третья часть может быть при чтении опущена без ущерба для цельности предыдущего.

Автор выражает признательность за помощь профессору Эйнштейну, который прочел всю рукопись и сделал много ценных замечаний.

ВВЕДЕНИЕ

Почти все законы физики служат для описания поведения некоторых объектов в пространстве и во времени. Положение тела или местонахождение события можно определить только как положение относительно какого-либо другого, подходящего для этого тела. Например, в опыте с машиной Атвуда скорости и ускорения гирь измеряются относительно самой машины, т. е., в конечном счете, относительно земли. Астроном может описывать движение планет относительно центра тяжести Солнца. Всякое движение описывается как движение относительно некоторого тела отсчета.

Представим себе, по крайней мере умозрительно, что с этим телом отсчета твердо связан простирающийся в пространстве каркас из прямых прутьев. Используя этот воображаемый каркас в качестве декартовой системы координат в трех измерениях, мы сможем любое положение описывать тремя числами, координатами соответствующей точки пространства. Такой воображаемый каркас, твердо связанный с некоторым материальным телом и с какой-либо строго определенной точкой пространства, часто называют *системой отсчета*.

Некоторые тела с успехом могут быть использованы для установления системы отсчета, другие же тела для этого непригодны. Даже до построения теории относительности вопрос о выборе подходящей системы отсчета сыграл весьма важную роль в развитии науки. Галилей, создатель послесредневековой физики, считал выбор гелиоцентрической системы настолько важным, что рисковал свободой и даже жизнью ради того, чтобы новая система отсчета была принята его современниками. В сущности говоря, вопрос о выборе тела, с которым связывается система отсчета, и явился причиной его конфликта с властями.

После тех всеобъемлющих обобщений, которые сделал Ньютон в современной ему физике, гелиоцентрическая система отсчета стала общепринятой. Однако еще сам Ньютон чувствовал, что необходимо дальнейшее рассмотрение этого вопроса. Чтобы показать, что одни системы отсчета являются более подходящими для описания явлений природы, чем другие, он придумал знаменитый эксперимент с ведром, наполненным водой. Закручиванием поддерживающей ведро веревки, Ньютон заставлял его вращаться вокруг своей оси. По мере того как вода начинала принимать участие во вращении, ее поверхность меняла свою форму от плоской к параболической. Когда вода принимала ту же скорость, что и ведро, последнее останавливалось экспериментатором. По мере того как вода прекращала свое вращение, ее поверхность становилась опять все более плоской.

Это описание произведено с точки зрения системы отсчета, связанной с Землей. Закон, по которому изменяется поверхность воды, может быть сформулирован следующим образом: пока вода не вращается, ее поверхность представляет собой плоскость. При вращении воды ее поверхность является параболоидом. Состояние движения ведра не влияет на форму поверхности воды.

Опишем теперь тот же эксперимент с точки зрения системы отсчета, вращающейся относительно Земли с постоянной угловой скоростью, равной максимальной скорости вращения ведра. Вначале веревка, ведро и вода „вращаются“ с некоторой постоянной угловой скоростью относительно новой системы отсчета. При этом поверхность воды представляет собой плоскость. Затем веревка, а вслед за ней и ведро „останавливаются“; при этом вода постепенно „замедляется“, а ее поверхность становится параболоидом. После того как вода приходит в состояние „полного покоя“, ее поверхность еще является параболоидальной. Затем веревка, а также ведро снова начинают „вращаться“

относительно нашей системы отсчета (т. е. останавливаются относительно земли); вода начинает постепенно участвовать во „вращении", причем поверхность ее выпрямляется. В конце концов, когда вся система „вращается" с первоначальной угловой скоростью, поверхность воды становится опять плоской. Относительно этой системы отсчета тот же закон можно сформулировать следующим образом: поверхность воды является плоской только тогда, когда вода „вращается" с некоторой угловой скоростью. Отклонение формы поверхности от плоской возрастает с отклонением от такого состояния движения. В состоянии покоя поверхностью также является параболоид. Вращение ведра опять-таки не играет никакой роли.

Ньютоновский эксперимент с ведром очень ясно показывает, что понимается под „подходящей" системой отсчета. Можно описывать явления природы и управляющие ими законы, пользуясь произвольно выбранной системой отсчета. Однако может существовать система (или системы), в которой законы природы имеют особенно простой вид, т. е. содержат меньшее количество составных элементов, чем в других системах. Возьмем, например, ньютоновское вращающееся ведро. Если бы описание явлений природы производилось в системе отсчета, связанной с ведром, то многие физические законы должны были бы содержать добавочный элемент, угловую скорость ω ведра относительно „более удобной" системы отсчета, скажем, Земли.

Законы движения планет существенно упрощаются, если пользоваться гелиоцентрической системой отсчета, а не геоцентрической. Поэтому система Коперника и Галилея была предпочтительнее системы Птоломея еще до того, как Кеплером и Ньютоном были установлены законы движения планет.

Как только стало ясным, что выбор системы отсчета определяет форму законов природы, были предприняты исследования, имеющие целью выразить влияние выбора системы отсчета в математической форме.

Первой областью физики, все законы которой были полностью сформулированы математически, была механика.

Среди всех мыслимых систем отсчета существует совокупность таких систем, в которых закон инерции принимает свою обычную форму: в отсутствии сил пространственные координаты точечной массы являются линейными функциями времени. Эти системы отсчета называются **инерциальными системами**. Было установлено, что если законы механики сформулировать в одной из таких систем, то они будут иметь тот же вид во всех остальных инерциальных системах. В других системах отсчета физическое и математическое описание будет более сложным, как, например, в системе отсчета, связанной с ньютоновским вращающимся ведром. Описывать движение точечных масс в отсутствии сил можно и в этой системе отсчета, но математическая форма закона инерции усложнится. В этом случае пространственные координаты уже не будут линейными функциями времени.

Так как законы механики имеют один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчета, то все инерциальные системы эквивалентны с точки зрения механики. Движется ли данное тело ускоренно, можно определить, сравнивая его движение с движением точечной массы, не находящейся под действием сил. Но установить, „покоится" данное тело или „движется равномерно", таким образом нельзя, так как это зависит от выбора инерциальной системы, в которой явление описывается. Термины „покой" и „равномерное движение" не имеют абсолютного смысла. Принцип, устанавливающий, что при описании явлений природы все инерциальные системы эквивалентны, называется **принципом относительности**.

Когда Максвеллом были установлены уравнения электромагнитного поля, казалось, что они не совместимы с принципом относительности. Так, согласно теории Максвелла, электромагнитные волны должны распространяться в пустоте с универсальной постоянной скоростью c, равной примерно $3 \cdot 10^{10}$ см/сек, что представлялось невозможным одновременно по отношению к двум инерциальным системам, движущимся друг относительного друга. Если бы существовала одна система отсчета, в которой скорость электромагнитных волн была бы одной и той же во всех направлениях, ее можно было бы использовать для определения „абсолютного покоя" и „абсолютного движения". Многие экспериментаторы упорно пытались найти такую систему отсчета и определить движение Земли относительно нее.

Однако все эти попытки были безуспешны. Более того, все эксперименты, казалось, говорили о том, что принцип относительности так же хорошо применим к законам электродинамики, как и к законам механики. Г. А. Лорентц предложил новую теорию, в которой принималось существование одной привилегированной системы отсчета и в то же время объяснялось, почему ее нельзя обнаружить экспериментальным путем. Однако Лорентц должен был ввести ряд предположений, правильность которых нельзя было проверить ни при каких мыслимых экспериментах. С этой точки зрения его теория не вполне удовлетворительна. Только Эйнштейн полностью осознал, что лишь при помощи ревизии основных представлений о пространстве и времени можно устранить несоответствие между теорией и экспериментом. Лишь после того как такая ревизия была осуществлена, принцип относительности был распространен на всю физику. Соответствующая теория носит теперь название специальной теории относительности. Она устанавливает полную эквивалентность всех инерциальных систем, но полностью сохраняет их привилегированное положение по отношению к остальным системам отсчета. В так называемой общей теории относительности обсуждается, а затем устраняется привилегированный характер инерциальных систем, что дает возможность создать теорию гравитации.

В этой книге сначала будет рассмотрена с классической точки зрения роль различных систем отсчета в механике и, до некоторой степени, в электродинамике. Только после того, как читатель полностью осознает, какие неразрешимые противоречия возникают между выводами теории и результатами эксперимента в классической электродинамике, он сможет понять необходимость пересмотра классической физики с точки зрения теории относительности. Лишь усвоив новые представления о пространстве и времени, легко понять „релятивистскую механику“ и „релятивистскую электродинамику“.

Вторая часть книги посвящена общей теории относительности; в третьей части рассматриваются некоторые недавние попытки распространить теорию гравитации на электродинамику.

Часть

I

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*

Глава I

СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА, СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

*

О системах отсчета уже говорилось, причем упоминалась декартова система координат. В этой главе будет подробно исследована связь между различными системами отсчета и различными системами координат.

Преобразования координат, независящие от времени. В качестве типичного примера рассмотрим геоцентрическую систему отсчета, т. е. систему отсчета, твердо связанную с Землей. Для точного определения положения точки относительно Земли введем систему координат. Выберем начало координат, скажем в центре земного шара, и направления трех осей, например ось X можно направить из центра Земли в точку пересечения экватора с гринвичским меридианом, ось Y — в точку пересечения экватора с меридианом 90° восточной долготы и ось Z — через северный полюс. Положение любой точки определится тогда тремя действительными числами, координатами данной точки. Движение точки полностью описывается заданием ее трех координат как функций времени. Если эти функции являются постоянными, точка покоится относительно выбранной системы отсчета. Наряду с упомянутой системой отсчета с таким же успехом можно ввести и другие системы, также твердо связанные с Землей. Например, мы можем выбрать начало координат в любой точке поверхности Земли и направить ось X, скажем, на восток, ось Y — на север, а ось Z — вертикально вверх, т. е. от центра Земли (Земля предполагается сферической).

Связь между двумя координатными системами полностью определена, если координаты произвольной точки в одной системе заданы как функции ее координат в другой системе. Обозначим первую систему координат через S, а вторую — через S', координаты некоторой точки P относительно S — через (x, y, z), а координаты той же точки относительно S' — через $(x'\ y', z')$. Тогда x', y' и z' связаны с x, y и z уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + \overset{0}{x}', \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + \overset{0}{y}', \\ z' &= c_{31}z + c_{32}y + c_{33}z + \overset{0}{z}', \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

где $(\overset{0}{x}', \overset{0}{y}', \overset{0}{z}')$ — координаты начала координат системы S в системе S'. Постоянные c_{ik} являются косинусами углов между осями систем S и S', c_{11} соответствует углу между осями X и X', c_{12} — углу между Y и X', c_{21} — между X и Y', и так далее.

Переход от одной системы координат к другой называется *преобразованием координат*, а уравнения, связывающие координаты точки в двух системах координат, называются *уравнениями преобразования*.

Системы координат необходимы не только для описания положения, но и для представления векторов. Рассмотрим какое-либо векторное поле, например электростатическое поле, в окрестности точки P. Величина и направление напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ в P полностью определяются заданием компонент $\mathbf{E}$ относительно выбранной системы координат S. Обозначим компоненты $\mathbf{E}$ в точке P относительно системы S через E_x, E_y и E_z. Компоненты $\mathbf{E}$ в той же точке P относительно другой системы, например S', можно получить, зная уравнения преобразования системы координат S в S'. Эти новые компоненты E'_x, E'_y и E'_z не зависят от переноса начала координат, т. е. от постоянных $\overset{0}{x}'$, $\overset{0}{y}'$ и $\overset{0}{z}'$ в уравнениях (1.1). E'_x является суммой проекций E_x, E_y и E_z

на ось X'; E'_y и E'_z определяются аналогично и таким образом:

$$E'_x = c_{11}E_x + c_{12}E_y + c_{13}E_z,$$
$$E'_y = c_{21}E_x + c_{22}E_y + c_{23}E_z,$$
$$E'_z = c_{31}E_x + c_{32}E_y + c_{33}E_z.$$

Закон, определяющий преобразование компонент какой-либо величины в заданной точке из одной системы координат в другую, называется законом преобразования.

Преобразования координат, содержащие время. До сих пор мы рассматривали только такие преобразования, при которых обе системы координат были твердо связаны с одним и тем же телом, например с Землей. Однако преобразование координат дает возможность исследовать связь и между двумя движущимися друг относительно друга системами отсчета. В этом случае каждой системе отсчета соответствует своя система координат.

Сравним систему отсчета, твердо связанную с Землей, с системой, твердо связанной с ньютоновским ведром, вращающимся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Мы можем ввести две системы координат, которые дают возможность определить положение некоторой точки в каждой системе отсчета. Обозначим эти системы координат соответственно через S (это S не идентично с прежним S) и S^*, причем поместим начала координат обеих систем в одной и той же точке на оси ведра, а оси Z и Z^* пусть совпадают и направлены вертикально вверх. Если ведро вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно Земли и в момент $t=0$ ось X параллельна оси X^*, то уравнения преобразования имеют следующий вид (фиг. 1):

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \cos\omega t\cdot x + \sin\omega t\cdot y,\\ y^* &= -\sin\omega t\cdot x + \cos\omega t\cdot y,\\ z^* &= z. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Уравнения (1.2) по форме аналогичны уравнениям (1.1), однако здесь косинусы углов между осями уже не постоянные величины, а функции времени. Движение двух систем отсчета друг относительно друга определяется зависимостью c_{ik} от времени.

Уравнения (1.2) дают связь между двумя вращающимися друг относительно друга системами отсчета. Часто нас интересует связь между двумя системами, движущимися друг относительно друга равномерно и прямолинейно. В этом случае системы координат S и S^* удобно выбрать так, чтобы их соответствующие оси были параллельны и начала координат совпадали в момент $t=0$. Тогда уравнения преобразования имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x - v_x t, \\ y^* &= y - v_y t, \\ z^* &= z - v_z t, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

где v_x, v_y и v_z — компоненты скорости системы S^* относительно S.

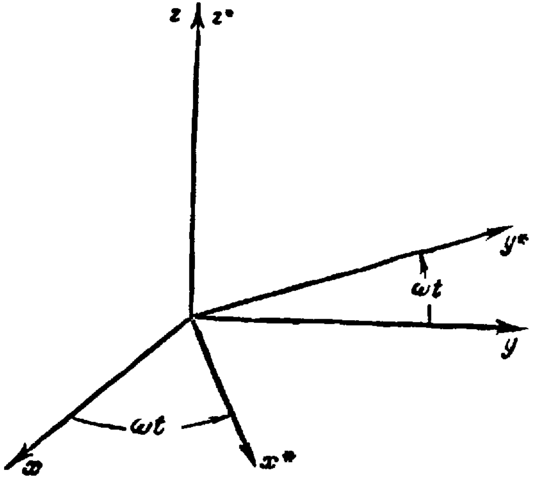
Вид уравнений преобразования (1.2) и (1.3) зависит, конечно, от относительного движения двух систем отсчета, но он зависит также и от определенных предположений относительно природы пространства и времени; мы предполагаем, что возможно определение времени t вне зависимости от выбора системы отсчета, другими словами, что возможно построить часы, ход которых не зависит от состояния их движения. Это предположение в уравнениях преобразования выражается в том, что отсутствует уравнение, дающее преобразование времени. При желании можно добавить уравнение

$$t^* = t, \tag{1.4}$$

явно выражающее универсальный характер времени.

Другое предположение касается измерения длин. Мы предполагаем, что расстояние между двумя точками (которые могут быть частицами) в данный момент времени не зависит от выбора системы отсчета, т. е. мы предполагаем, что можно построить твердые линейки (стержни), длина которых не зависит от их состояния движения. Уравнения (1.3) особенно ясно показывают, как это предположение отражается уравнениями преобразования. Так как расстояние между двумя точками P_1 и P_2 с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) равно

$$s_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \qquad (1.5)$$



Фиг. 1. Система координат S^* с координатами (x^*, y^*, z^*) вращается относительно системы координат S с координатами (x, y, z) с угловой скоростью ω.

то очевидно, что в любой момент времени справедливо равенство:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\ = \sqrt{(x_2^* - x_1^*)^2 + (y_2^* - y_1^*)^2 + (z_2^* - z_1^*)^2}. \qquad (1.6)$$

В дальнейшем нам придется возвратиться к этим предположениям.

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*

Закон инерции, инерциальные системы. Механика Галилея — Ньютона была первой областью физики, ставшей наиболее развитой экспериментальной наукой. Прежде всего был установлен закон инерции: *тела, не взаимодействующие с другими телами, продолжают оставаться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Другими словами, движение таких тел является неускоренным.*

Чтобы выразить закон инерции в математической форме, мы будем описывать положение тела его тремя координатами: x, y и z. Если тело не находится в состоянии покоя, его координаты являются функциями времени. Согласно закону инерции, когда на тело не действуют силы, вторые производные этих трех функций, т. е. ускорения, обращаются в нуль:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0. \tag{2.1}$$

$\left(\text{Мы пользуемся обычным обозначением } \ddot{x} \text{ вместо } \frac{d^2x}{dt^2}\right)$. Первый интеграл уравнений (2.1) выражает постоянство трех компонент скорости:

$$\dot{x} = \overset{0}{u}_x, \quad \dot{y} = \overset{0}{u}_y, \quad \dot{z} = \overset{0}{u}_z. \tag{2.2}$$

Уравнения, выражающие закон инерции, содержат координаты и относятся поэтому к определенной системе координат. Пока система координат не выбрана, закон инерции в том виде, как он сформулирован выше (см. курсив), еще не имеет точного смысла. Для любого тела мы всегда можем ввести систему отсчета, в которой оно покоится и, следовательно, не ускорено. Правильная формулировка такова: *существует система (или системы) координат, относительно которой все тела, не испытывающие действия сил, движутся неускоренно. Системы координат, обладающие такими свойствами, и соответствующие им системы отсчета называются инерциальными системами.*

Конечно, не все системы отсчета являются инерциальными. Например, будем исходить из инерциальной системы координат S и произведем преобразование (1.2) к системе S^*, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω относительно S. Чтобы получить законы преобразования уравнений (2.1) и (2.2), продифференцируем уравнения преобразования (1.2) сначала один, а затем второй раз по времени t. Получающиеся уравнения содержат x, y, z, x^*, y^*, z^* и их первые и вторые производные по времени.

Мы предположили, что система координат S инерциальна. Поэтому подставим вместо $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ и $\ddot{z}$ и $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ соответственно выражения (2.1) и (2.2). Таким образом, получаем для координат, отмеченных звездочкой и их производных,

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^* &= \omega y^* + \overset{0}{u}_x \cos\omega t + \overset{0}{u}_y \sin\omega t, \\ \dot{y}^* &= -\omega x^* + \overset{0}{u}_y \cos\omega t - \overset{0}{u}_x \sin\omega t, \\ \dot{z}^* &= \overset{0}{u}_z, \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}^* &= \omega^2 x^* + 2\omega\dot{y}^*, \\ \ddot{y}^* &= \omega^2 y^* - 2\omega\dot{x}^*, \\ \ddot{z}^* &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Оказывается, что в системе координат S^* не все вторые производные по времени исчезают. Иногда бывает удобно перейти к системе отсчета, в которой появляющиеся ускорения обусловлены не действительным взаимодействием тел. Умноженные на массы, эти ускорения трактуются как реальные силы и большей частью носят название „сил инерции". Несмотря на это название, они не являются настоящими силами; они только формально входят в уравнения так же, как обычные силы. В нашем случае первые члены $\omega^2 x^*$, $\omega^2 y^*$, умноженные на массу, называются „центробежными силами", а последние члены, также умноженные на массу, называются силами Кориолиса.

С другой стороны, существуют типы преобразований координат, оставляющие формы закона инерции (2.1) неизмененными. В качестве такого случая рассмотрим раньше всего преобразования типа (1.1), не связанные с переходом к новой системе отсчета. Дифференцированием (1.1) с подстановкой $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и так далее из (2.1) и (2.2) получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}' &= c_{11}\overset{0}{u}_x + c_{12}\overset{0}{u}_y + c_{13}\overset{0}{u}_z = \overset{0}{u}{}'_x, \\ \dot{y}' &= c_{21}\overset{0}{u}_x + c_{22}\overset{0}{u}_y + c_{23}\overset{0}{u}_z = \overset{0}{u}{}'_y, \\ \dot{z}' &= c_{31}\overset{0}{u}_x + c_{32}\overset{0}{u}_y + c_{33}\overset{0}{u}_z = \overset{0}{u}{}'_z, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

и

$$\ddot{x}' = \ddot{y}' = \ddot{z}' = 0. \tag{2.6}$$

Компоненты скорости, как и следовало ожидать, преобразуются, как компоненты вектора, а уравнения (2.1) воспроизводятся в новых координатах без изменения своего вида.

Другое преобразование, сохраняющее вид закона инерции, есть преобразование типа (1.3). Оно соответствует переходу от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно. Дифференцируя (1.3) два раза, получим:

$$\ddot{x}^* = \ddot{x}, \quad \ddot{y}^* = \ddot{y}, \quad \ddot{z}^* = \ddot{z}, \tag{2.7}$$

и, если движение тела в системе S подчиняется закону инерции (2.1), мы имеем также:

$$\ddot{x}^* = \ddot{y}^* = \ddot{z}^* = 0, \tag{2.8}$$

в то время как первые производные отмеченных звездочкой координат [если уравнения (2.2) относятся к неотмеченным звездочкой координатам] равны:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^* &= \overset{0}{u}_x - v_x = \overset{0}{u}{}^*_x, \\ \dot{y}^* &= \overset{0}{u}_y - v_y = \overset{0}{u}{}^*_y, \\ \dot{z}^* &= \overset{0}{u}_z - v_z = \overset{0}{u}{}^*_z. \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

Уравнения (2.8) показывают, что закон инерции выполняется в новой системе так же, как и в старой. Уравнения (2.9) выражают тот факт, что скорость в новой координатной системе S^* равна разности скорости в старой системе и относительной скорости обеих систем. Этот закон часто называют (классическим) законом сложения скоростей.

Системы отсчета и системы координат, в которых справедлив закон (2.1), являются инерциальными системами. Все декартовы системы координат, покоящиеся относительно инерциальной системы координат, сами являются также инерциальными системами. Декартовы системы координат, связанные с системой отсчета, равномерно и прямолинейно движущейся относительно некоторой инерциальной системы, также являются инерциальными системами. С другой стороны, если мы перейдем к новой системе отсчета, ускоренно движущейся относительно первой, то преобразования координат в этой новой системе не приведут к уравнениям (2.1). Ускорение новой системы отсчета относительно инерциальной системы проявляется в появлении ускорения тел, не связанного с наличием реальных сил.

Преобразования Галилея. Если какой-либо закон не изменяет своего вида при некоторых преобразованиях координат, т. е., если он одинаково выражается в различных координатах, говорят, что этот закон инвариантен или ковариантен относительно рассматриваемого преобразования. Закон инерции (2.1) ковариантен относительно преобразований (1.1) и (1.3), но не относительно (1.2).

Преобразования (1.1) и (1.3) весьма важны для дальнейшего. Обычно их называют преобразованиями Галилея. Согласно классической физике, любые две инерциальные системы связаны преобразованием Галилея.

Закон сил и его трансформационные свойства. Рассмотрим трансформационные свойства основных законов классической механики. Эти законы могут быть сформулированы следующим образом.

Тела, находящиеся под действием сил, приобретают ускорения, пропорциональные этим силам. Отношение силы к ускорению для данного тела есть величина постоянная, называемая массой тела.

Полная сила, действующая на тело, есть векторная сумма всех сил, обусловленных другими телами данной механической системы. Другими словами, полное взаимодействие системы тел составляется из взаимодействий отдельных пар. Силы, с которыми два тела действуют одно на другое, направлены по прямой, их соединяющей, равны по величине и противоположно направлены; то есть два тела могут либо отталкиваться, либо притягиваться друг к другу. Величина этих сил является функцией только расстояния между ними; ни скорости, ни ускорения тел на ее величине не сказываются.

Эти законы применимы для таких явлений, как гравитация, электростатика и силы Ван-дер-Ваальса; к электродинамике они неприменимы, так как взаимодействие между магнитными полями и электрическими зарядами приводит к силам, которые направлены не по прямой, соединяющей заряд и источник поля, и величина которых зависит не только от положений, но и от скоростей заряженных тел.

Но если только выполняются приведенные выше условия, то силы можно представить как отрицательный градиент потенциальной энергии. Последняя является суммой потенциальных энергий, характеризующих взаимодействие двух тел или „точечных масс“,

$$\left.\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} V_{ik}(s_{ik}), \quad i < k, \\ s_{ik} &= \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

Индексы i и k относятся к взаимодействию между i-й и k-й точечными массами, а s_{ik} — расстояние между ними. Функция $V_{ik}(s_{ik})$ определяется характером рассматриваемой задачи, например задается законом Кулона, законом тяготения Ньютона и т. д.

Сила, действующая на i-ю точечную массу, равна:

$$\left.\begin{aligned} f_{i,x} &= -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{dV_{ik}}{ds_{ik}} \frac{x_i - x_k}{s_{ik}} \\ f_{i,y} &= -\frac{\partial V}{\partial y_i} = -\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{dV_{ik}}{ds_{ik}} \frac{y_i - y_k}{s_{ik}} \\ f_{i,z} &= -\frac{\partial V}{\partial z_i} = -\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{dV_{ik}}{ds_{ik}} \frac{z_i - z_k}{s_{ik}} \end{aligned}\right\} k \neq i \quad (2.11)$$

Из вида системы уравнений (2.11) явствует, что компоненты силы, обусловленные взаимодействием только i-го и k-го тел, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, так что

$$\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_i} = -\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_k}.$$

Поэтому сумма всех сил, действующих на все n точечных масс, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i,x} = \sum_{i=1}^{n} f_{i,y} = \sum_{i=1}^{n} f_{i,z} = 0. \quad (2.12)$$

Дифференциальные уравнения движения тел таковы:

$$\left.\begin{aligned} m_l\ddot{x}_l &= f_{l,x}, \\ m_l\ddot{y}_l &= f_{l,y}, \\ m_l\ddot{z}_l &= f_{l,z}, \end{aligned}\right\}$$

где m_l — масса l-го тела.

Мы покажем теперь, что система уравнений, определяющая поведение механической системы — (2.10), (2.11) и (2.13), — *ковариантна относительно преобразований Галилея.*

Будем исходить из выражений (2.10). Функция V зависит от расстояний s_{lk} различных точечных масс друг от друга. Как будут преобразовываться s_{lk} при преобразовании координат (1.1) или (1.3)? Чтобы ответить на этот вопрос, надо иметь в виду, что координаты l-го и k-го тела должны быть взяты в один и тот же момент времени; другими словами, расстояние между двумя телами есть функция времени. Конечно, координаты различных точечных масс преобразуются независимо друг от друга, каждая совокупность (x_l, y_l, z_l) преобразуется согласно уравнениям (1.1) и (1.3).

Легко видеть, что при преобразовании (1.3), соответствующем равномерному прямолинейному движению, разности координат двух точек, например $x_l - x_k$, остаются неизменными

$$\overset{*}{x}_l - \overset{*}{x}_k = x_l - x_k. \tag{2.14}$$

Поэтому и s_{lk} имеют в новой системе координат S^* тот же вид, что и в старой системе S.

Уравнения преобразования (1.1) дают связь между двумя системами координат с непараллельными осями, покоящимися друг относительно друга. Очевидно, что расстояние между двумя точками выражается в таких системах координат одинаково, так что:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2}=\\&\quad=\sqrt{(x_i'-x_k')^2+(y_i'-y_k')^2+(z_i'-z_k')^2};\\&\qquad\qquad s_{ik}=s_{ik}'.\end{aligned}\right\}\quad(2.15)$$

Величина, не меняющая своего значения (в данной точке) при некотором преобразовании координат, называется инвариантом по отношению к этому преобразованию. Расстояние между двумя точками является, таким образом, инвариантом.

Мы видим, что аргументы функции V, т. е. величины s_{ik}, инвариантны относительно преобразования Галилея. Поэтому и сама функция V, полная потенциальная энергия механической системы, также инвариантна по отношению к этому преобразованию; в новой системе координат она имеет ту же форму и принимает те же значения, что и в первоначальной системе. Уравнение (2.10) ковариантно относительно преобразований Галилея.

Покажем теперь инвариантность уравнений (2.11) относительно преобразования (1.3). Правая часть уравнений (2.11) содержит производные по инвариантным величинам. Производные по новым координатам связаны с производными по старым координатам следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=\frac{\partial V}{\partial x_i^*},\quad \frac{\partial V}{\partial y_i}=\frac{\partial V}{\partial y_i^*},\quad \frac{\partial V}{\partial z_i}=\frac{\partial V}{\partial z_i^*};\qquad(2.16)$$

таким образом, правая часть уравнений (2.11) инвариантна относительно преобразования (1.3). Справедливо ли то же самое и для левой части, можно решить только после рассмотрения трансформационных свойств уравнений (2.13). Разумеется, уравнения остаются справедливыми и в новых координатах только в том случае, если обе их стороны преобразуются одинаковым образом. В противном случае они не ковариантны относительно рассматриваемого преобразования. Мы должны выяснить, являются ли трансформационные свойства правой части уравнений (2.11) совместимыми с трансформационными свойствами левой части уравнений (2.13), поскольку закон преобразования силы $\mathbf{f}_i$ определяется обеими этими системами уравнений.

Преобразуем сперва, согласно (1.1), правую часть уравнений (2.11). Применяя правила дифференцирования функций многих переменных, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_i} &= \frac{\partial V}{\partial x_i'}\cdot c_{11} + \frac{\partial V}{\partial y_i'}\cdot c_{21} + \frac{\partial V}{\partial z_i'}\cdot c_{31}, \\ \frac{\partial V}{\partial y_i} &= \frac{\partial V}{\partial x_i'}\cdot c_{12} + \frac{\partial V}{\partial y_i'}\cdot c_{22} + \frac{\partial V}{\partial z_i'}\cdot c_{32}, \\ \frac{\partial V}{\partial z_i} &= \frac{\partial V}{\partial x_i'}\cdot c_{13} + \frac{\partial V}{\partial y_i'}\cdot c_{23} + \frac{\partial V}{\partial z_i'}\cdot c_{33}. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

$3n$ уравнений (2.17) можно разбить на n групп, по 3 уравнения в каждой; группы отличаются друг от друга только значением i. Каждая из этих групп преобразуется, как компоненты вектора, т. е. компонента в направлении некоторой оси в одной системе равна сумме проекций на эту ось трех компонент в другой системе координат.

Преобразуются ли левые части уравнений (2.11) так же, как компоненты вектора, может быть решено после рассмотрения трансформационных свойств уравнений (2.13). Левые части уравнений (2.13) представляют собой произведение масс на ускорения. Мы уже установили, что в классической физике масса рассматривается как постоянная, характеризующая данное тело, не зависящая от его состояния движения и инвариантная относительно преобразования координат.

То, что ускорение тела инвариантно относительно преобразования (1.3), мы уже видели из уравнений (2.7). Поэтому левые части уравнений (2.13) преобразуются по (1.3) так же, как правые части уравнений (2.11).

Возвращаясь к преобразованиям (1.1), мы видим, что

$$\ddot{x}_i' = c_{11}\ddot{x}_i + c_{12}\ddot{y}_i + c_{13}\ddot{z}_i \quad \text{и т. д.,} \tag{2.18}$$

но так как c_{ab} представляют собой косинусы углов и величина этих косинусов не зависит от знака угла

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha),$$

то очевидно также, что

$$\ddot{x}_i' = c_{11}\ddot{x}_i + c_{21}\ddot{y}_i + c_{31}\ddot{z}_i \quad \text{и т. д.} \tag{2.18a}$$

Опять-таки, левые части уравнений (2.13) преобразуются точно таким же образом, как правые части уравнений (2.11), в этом случае, как n векторов.

Уравнения (2.13) можно рассматривать, как уравнения, определяющие силы $\mathbf{f}_i$. Отсюда заключаем, что сами силы преобразуются так, что оба уравнения (2.11) и (2.13) ковариантны. *По отношению к пространственным ортогональным преобразованиям координат силы являются векторами; силы инвариантны относительно преобразований, представляющих равномерное прямолинейное движение одной системы координат относительно другой.* Эти соотношения могут быть представлены в несколько иной форме. Исключая $\mathbf{f}_i$ из уравнений (2.11) и (2.13), получим из них следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_i} + m\ddot{x}_i &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y_i} + m\ddot{y}_i &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial z_i} + m\ddot{z}_i &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

Эти уравнения выражают те же физические положения, что и уравнения (2.11) и (2.13), но не выявляют столь ясно трансформационные свойства силы.

Результатом приведенных выше рассуждений является то, что обе стороны каждого из уравнений (2.11) и (2.13) преобразуются одинаковым образом, и поэтому эти уравнения остаются справедливыми после произвольного преобразования Галилея.

Уравнения, которые совершенно не изменяются при преобразовании (т. е. члены которых являются инвариантами) называются **инвариантными**. Уравнения, которые остаются справедливыми в силу того, что их члены, не являющиеся инвариантными, преобразуются по одним и тем же законам [как, например, члены $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ и $m\ddot{x}_i$ и тому подобные в уравнениях (2.19)], называются **ковариантными**.

Ковариантность уравнений является математическим свойством, которое соответствует существованию принципа относительности для физических законов, описывающихся этими уравнениями. Действительно, принцип относительности классической механики эквивалентен нашему результату, согласно которому законы механики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах, т. е. во всех тех системах координат, которые получаются из некоторой инерциальной системы произвольным преобразованием Галилея.

Другие разделы механики, такие, как механика сплошных сред (теория упругости и гидродинамика) или механика твердых тел, могут быть получены из механики точки путем введения соответствующих энергий взаимодействий типа (2.10) и некоторого предельного перехода. И без подробного рассмотрения этих областей механики очевидно, что полученные результаты применимы к ним в такой же мере, как и к рассмотренным выше законам движения свободных точечных масс.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА

*

Проблемы, стоящие перед классической оптикой. В течение XIX в. развилась новая отрасль физики, не укладывающаяся в рамки классической механики. Этой отраслью была электродинамика. Пока были известны только эффекты электростатического и магнитостатического характера, они могли трактоваться в рамках механики путем введения электростатических и магнитостатических потенциалов, зависящих лишь от расстояний между электрическими зарядами или магнитными полюсами.

Взаимосвязь электрических и магнитных полей требует иной трактовки. Это ясно следует уже из эксперимента Эрстеда, обнаружившего, что магнитная стрелка отклоняется от своего нормального направления север—юг током, текущим в том же направлении. С изменением направления тока, знак отклонения меняется на обратный. Очевидно, что магнитное действие электрических токов, т. е. движущихся зарядов, зависит не только от расстояния, но также и от скорости этих зарядов. Более того, сила в заданной точке не направлена по прямой, соединяющей эту точку с зарядом. Таким образом, идеи ньютоновской механики оказались здесь уже не применимыми.

Максвеллу удалось сформулировать законы электромагнетизма введением нового понятия — понятия о поле. Как мы видели в предыдущей главе, в механике система полностью описывается заданием положений составляющих ее точечных масс как функций времени. В теории Максвелла мы имеем дело с рядом переменных поля, каковыми являются компоненты напряженностей электрического и магнитного полей. В то время как координаты точек в механике определяются только как функции времени, переменные поля определяются для всех значений, как временной координаты, так и трех пространственных координат, и являются, таким образом, функциями четырех независимых переменных [1]).

В максвелловской теории поля предполагается далее, что изменение переменных поля во времени в заданной точке пространства зависит только от непосредственной окрестности этой точки. Возмущение поля в некоторой точке вызывает изменение поля в соседних точках, которые в свою очередь передают его дальше; таким образом, первоначальное возмущение распространяется с конечной скоростью и в конце концов передается на большие расстояния. Таким образом, «дальнодействие» может быть осуществлено полем, но всегда за конечный промежуток времени. Законы теории поля представляются дифференциальными уравнениями в частных производных, содержащими частные производные переменных поля по пространственным координатам и времени.

Сила, действующая на точечную массу, определяется полем в непосредственной окрестности этой точки. Наоборот, присутствие точечной массы может изменить и обычно изменяет поле.

Так как характер максвелловской теории электромагнетизма существенно отличен от механики Ньютона, то из справедливости принципа относительности в механике ни в коем случае не вытекает его справедливость в электродинамике. Вопрос о том, насколько применим этот принцип к электродинамике, должен быть предметом специального исследования.

Полное исследование такого рода должно было бы установить законы преобразования для интенсивностей электри-

---

[1]) В механике сплошных сред встречаются переменные, аналогичные переменным поля: плотность массы, плотность импульса, компоненты напряжений и т. д. Однако они имеют только статистический смысл, т. е. представляют собой полную массу среднего числа частиц на единицу объема и т. д. В электродинамике же переменные поля рассматриваются как основные физические величины.

ческого и магнитного полей при преобразовании Галилея, а затем выяснить, подчиняются ли эти трансформированные величины тем же законам в новых координатах. Такое исследование было осуществлено различными учеными, в частности Герцом и Лорентцом; однако наиболее важные результаты их исследований мы здесь получим более простым путем.

Вместо того чтобы исследовать уравнения Максвелла в общем виде, мы ограничимся рассмотрением одного частного случая, именно уравнения распространения электромагнитных волн.

Уже сам Максвелл установил, что электромагнитные возмущения, подобные тем, которые вызываются колеблющимися зарядами, распространяются в пространстве со скоростью, зависящей от свойств среды, заполняющей пространство. В пустоте их скорость распространения не зависит от направления и равна примерно $3 \cdot 10^{10}$ см/сек. Это есть скорость света, поэтому Максвелл предположил, что свет является одним из видов электромагнитного излучения. С тех пор как Герцу при помощи специальной установки удалось получить электромагнитное излучение, максвелловская теория электромагнитного поля и электромагнитная теория света стали составной частью нашего физического мировоззрения.

Электромагнитное излучение распространяется в пустоте с постоянной скоростью (в дальнейшем обозначаемой через c). Это заключение может быть формулировано без рассмотрения внутренней связи между электрическими и магнитными полями. Оно ценно для нас потому, что мы можем изучать трансформационные свойства этого закона распространения света, не прибегая к рассмотрению законов преобразования переменных поля.

Теперь можно решить, будут ли законы электромагнитного поля ковариантны относительно преобразования Галилея. Рассмотрим систему координат S, по отношению к которой справедлив закон постоянства скорости света. Проведя преобразование Галилея типа (1.3), соответствующее равномерному прямолинейному движению новой системы S^* относительно S, получим, что скорость одного и того же светового луча в новой системе S^* не может быть равна c во всех направлениях. Если направление светового луча в системе координат S характеризовать углами этого луча с осями α, β и γ, то компоненты его скорости в этой системе будут:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= c\cos\alpha, \\ u_y &= c\cos\beta, \\ u_z &= c\cos\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

где

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3.2}$$

Согласно (2.9), компоненты скорости в новой системе S^* получим в виде:

$$\left.\begin{aligned} u_x^* &= c\cos\alpha - v_x, \\ u_y^* &= c\cos\beta - v_y, \\ u_z^* &= c\cos\gamma - v_z, \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

отсюда скорость света зависит от направления и определяется уравнением

$$\sqrt{u_x^{*2} + u_y^{*2} + u_z^{*2}} =$$

$$= \sqrt{c^2 + v^2 - 2c\,(v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)}\,. \tag{3.4}$$

Она равна c только на некотором конусе направлений, осью которого является вектор $\mathbf{v}$. В направлении $\mathbf{v}$ скорость света в системе S^* равна $c - v$, в противоположном направлении она равна $c + v$.

Принцип относительности, таким образом, оказывается несовместимым с законами электромагнитного излучения, а потому и с теорией электромагнитного поля. Если принять, что уравнения Максвелла верны, то должна существовать система отсчета, скажем, инерциальная система, в которой они принимают свою обычную форму. Всякая другая система отсчета, движущаяся относительно вышеупомянутой, являлась бы менее удобной, по крайней мере с точки зрения электродинамики, даже если бы ее движение было равномерным и прямолинейным. Принцип относительности в таком виде, как мы его сформулировали в предыдущей главе, был бы в этом случае применим только к механике, но не ко всей физике.

С таким заключением трудно согласиться. Механика всегда считалась наиболее заслуживающей доверия областью физики, а принцип относительности — фундаментальным принципом всей природы. Было сделано много попыток преодолеть возникшие трудности. Мы рассмотрим наиболее важные из них.

Корпускулярная гипотеза. Одна из гипотез состояла в том, что скорость света равна c относительно системы отсчета, связанной с источником излучения, подобно тому, как скорость пули, выпущенной из движущегося поезда, должна быть отнесена к системе отсчета, связанной с поездом.

Это предположение не совместимо, однако, с волновой теорией света, предложенной Максвеллом, оно скорее соответствует корпускулярной теории света типа той, которую предлагал Ньютон. Однако оно совместимо с принципом относительности: законы распространения содержат явно скорости источников света. Таким образом, скорость света согласно этому предположению должна была бы трансформироваться так же, как скорости материальных тел, и закон распространения был бы ковариантен относительно преобразования Галилея.

Но экспериментальные данные свидетельствуют против этой гипотезы. Если бы скорость света зависела от скорости источников, то при наблюдении двойных звезд обнаруживались бы специфические явления. Расстояния между двойными звездами очень малы в сравнении с расстояниями от них до нашей солнечной системы. С другой стороны, двойные звезды движутся со сравнительно большими скоростями друг относительно друга. Поэтому следовало бы ожидать, что свет, испущенный ими одновременно в таком положении, когда одна из них быстро удаляется от нас, а другая приближается к нам, дошел бы до нас в различные моменты времени. Поэтому их движение в пространстве и друг относительно друга представлялось бы нам в искаженном виде. В некоторых случаях одни и те же двойные звезды наблюдались бы одновременно в различных местах, и эти «звездные привидения» появлялись бы и исчезали в согласии с их периодическим движением.

Эти эффекты были бы пропорциональны расстоянию двойных звезд от Земли, так как время следования света равно расстоянию, деленному на его скорость. Если v означает изменение скорости одной компоненты двойной звезды, мы имели бы

$$t=\frac{d}{c}, \quad \Delta c \sim v, \quad \frac{\Delta t}{\Delta c} \sim -\frac{d}{c^2}, \quad \Delta t \sim -\frac{vd}{c^2}.$$

(d — расстояние от двойной звезды до Земли, c — скорость света, t — среднее время, за которое свет достигает Земли). Разумные предположения о порядке величин v, d и c таковы:

$$c^2 \sim 10^{21} \text{ см}^2/\text{сек}^2,$$

$$v \sim 10^6 \text{ см/сек},$$

$$d > 10^{18} \text{ см},$$

откуда

$$\Delta t > 10^3 \text{ сек}.$$

Поскольку существует много двойных звезд с d, превышающим 10^{21} см, и с периодом, меньшим 10^6 сек, то этот эффект не мог бы ускользнуть от наблюдения.

Однако никаких следов этого эффекта не было обнаружено. Этого совершенно достаточно для исключения из рассмотрения корпускулярной гипотезы.

Передающая среда как система отсчета. Была выдвинута другая гипотеза, согласно которой в качестве «локальной» привилегированной системы отсчета принимается материальная среда, в которой происходит распространение света. В атмосфере Земли скорость света должна была бы быть постоянной относительно геоцентрической системы отсчета.

Эта гипотеза также неудовлетворительна во многих отношениях. Чтобы подтвердить это аргументацией, предположим, что имеется среда и задано ее состояние движения, чем определяется скорость света. Предположим теперь, что электромагнитное излучение распространяется из одной среды с некоторым состоянием движения во вторую среду с другим состоянием движения. Скорость света должна при этом меняться; это изменение зависит от относительной скорости двух сред и от направления распространения излучения (а также, конечно, и от разности коэфициентов преломления). Если этот эксперимент производить со все более и более разреженными средами, взаимодействие между средой и излучением будет становиться все меньше и меньше в отношении таких процессов, как отражение, рассеяние и т. д., но изменение скорости u останется тем же самым. В случае бесконечного разрежения, т. е. в вакууме, мы имели бы конечный скачок u без видимой причины.

Существует также экспериментальное доказательство, связанное с проверкой этой гипотезы. Чтобы выяснить влияние движения среды на скорость света, Физо проделал следующий опыт. Он направлял луч света вдоль трубы с движущейся жидкостью и измерял скорость света как вдоль потока, так и в противоположном направлении. Он определил эти скорости очень точно путем измерения положений интерференционных полос.

Эксперимент показал, что скорость света зависит от скорости потока жидкости, но не в такой степени, чтобы можно было просто складывать скорости света и среды. Если обозначить скорость света через c, скорость жидкости через v и коэфициент преломления через n, то согласно нашим предположениям можно ожидать, что наблюдаемая скорость света будет равна:

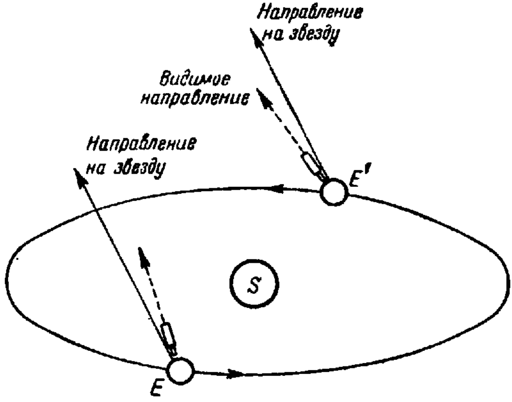
$$u = \frac{c}{n} \pm v, \tag{3.5}$$

где знак зависит от относительного направления скоростей света и жидкости. Фактически в пределах экспериментальной ошибки получается соотношение:

$$u = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \tag{3.6}$$

Приведенное выше возражение не относится к результату, полученному из опыта; при бесконечном разрежении среды показатель преломления n стремится к 1, зависимость u от v становится незаметной и в вакууме u просто становится равным c.

Другим эффектом, указывающим, что скорость света не зависит от движения разреженной передающей среды, является а б е р р а ц и я. Удаленные неподвижные звезды

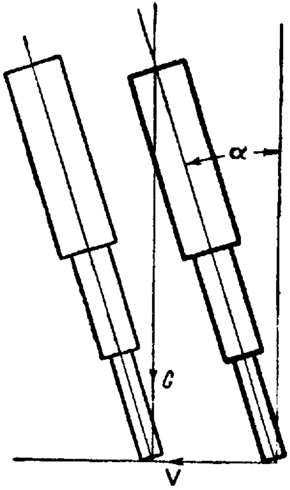


Фиг 2. Кажущееся измененне положения неподвижных звезд в течение года (аберрация). На чертеже это изменение преувеличено, в действительности оно составляет не более 20,5″.

систематически меняют свое положение на небе с периодом в один год. Их траекториями являются эллипсы с фиксированным центром и с большой осью, равной во всех случаях примерно 41″. Звезды, расположенные около небесного полюса, движутся приблизительно по окружностям, в то время как звезды, расположенные близ плоскости эклиптики, движутся почти по прямым линиям.

На фиг. 2 показано, каким образом мы видим звезду смещенной из своего нормального положения (в центре эллипса) в двух противоположных точках земной орбиты.

Аберрация может быть объяснена следующим образом (фиг. 3): поскольку телескоп твердо связан с землей, он движется в пространстве со скоростью приблизительно в $3 \cdot 10^6$ см/сек. Поэтому, когда световой луч попадает в телескоп, скажем, прямо сверху, последний должен быть наклонен таким образом, чтобы нижний его конец к моменту, когда его достигнет луч, оказался под предшествующим положением верхнего конца. Тангенс угла аберрации α есть отношение между расстояниями, которые проходят Земля и луч света за один и тот же промежуток времени, или просто отношение скорости Земли к скорости света. Это отношение равно:



Фиг. 3. Объяснение аберрации.

$$\frac{v_{\text{земли}}}{c} \sim \frac{3 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{10}} \sim 10^{-4};$$

угол, отвечающий этому тангенсу, равен *20,5″*; это соответствует наибольшей аберрации от центра эллипса.

Такое объяснение аберрации также противоречит предположению, что скорость света полностью определяется состоянием движения передающей среды. Действительно, если бы это предположение было справедливо, световой луч, попадая в атмосферу, «увлекался бы» ею, и явление аберрации не наблюдалось бы.

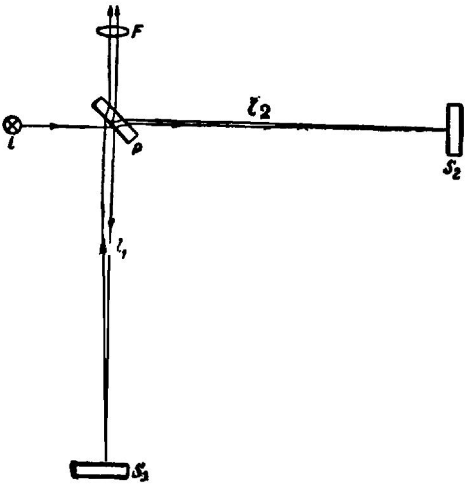
Абсолютная система отсчета. Все эти аргументы подтверждают независимость законов электромагнетизма как от движения источников, так и от движения передающей среды. Казалось бы, другой альтернативой является отказ от принципа относительности и допущение существования универсальной системы отсчета, в которой скорость света не зависит от направления распространения. Как указывалось выше, уравнения электромагнитного поля должны принять в такой системе отсчета свою обычную форму. Поскольку ускорения заряженных частиц пропорциональны полю, то можно было бы ожидать, что эта система будет инерциальной, так что ускорения обращались бы в нуль вместе с полем.

Эксперимент Майкельсона - Морлея. Основываясь на этом предположении, Майкельсон и Морлей поставили эксперимент, предназначенный для определения скорости Земли относительно привилегированной системы отсчета, в которой скорость света одинакова во всех направлениях. Основной идеей их эксперимента было сравнение наблюдаемых скоростей света в двух различных направлениях.

Перед тем как дать описание их экспериментальной установки, рассмотрим ожидаемые с точки зрения этой новой гипотезы результаты. Земля не может служить в качестве привилегированной системы отсчета, так как она постоянно испытывает гравитационное притяжение со стороны Солнца и в системе координат, связанной с центром инерции солнечной системы, имеет скорость порядка $3 \cdot 10^6$ см/сек. Эта скорость испытывает изменение порядка $6 \cdot 10^6$ см/сек в течение полугода в системе отсчета, апроксимирующей инерциальную систему гораздо лучше, чем система, связанная с Землей. Поэтому, если даже в некоторый момент времени движение Земли и совпадает с движением привилегированной системы отсчета, то через полгода скорость Земли по отношению к этой системе будет равна $6 \cdot 10^6$ см/сек.

Во всяком случае по отношению к некоторой инерциальной системе Земля в течение полугода обладает скоростью, не меньшей $3 \cdot 10^6$ см/сек. Скорость света равна $3 \cdot 10^{10}$ см/сек. Движение Земли можно обнаружить, если поставить эксперимент, в котором измерялась бы скорость света в двух перпендикулярных направлениях с относительной точностью, превышающей 10^{-4}, и если этот эксперимент осуществляется в течение периода, превышающего 6 месяцев.

Обратимся теперь к описанию опыта Майкельсона-Морлея (фиг. 4). Свет от земного источника L разделяется



Фиг. 4. Установка Майкельсона-Морлея.

на два луча в стеклянной пластинке P, покрытой тонким слоем серебра. На примерно равных расстояниях от P перпендикулярно друг к другу расположены два зеркала S_1 и S_2, отражающие свет обратно к P. Там лучи, отраженные от S_1 и S_2, соединяются вновь и наблюдаются в зрительной трубе F. Так как свет, исходящий из L, проходит почти равные по величине пути, соответственно $L - P - S_1 - P - F$ и $L - P - S_2 - P - F$, то наблюдаются интерференционные полосы, точное положение которых зависит от разности расстояний l_1 и l_2.

До сих пор мы предполагали, что скорость света одинакова во всех направлениях. Если этого предположения не делать, то положение интерференционных полос в F будет зависеть также и от разности скоростей в направлениях l_1 и l_2. Предположим, что Земля, а с ней и аппаратура, движется в направлении l_1 со скоростью v относительно «абсолютной» системы отсчета. Скорость света относительно прибора вдоль пути $P - S_1$ равна $(c - v)$, а вдоль пути $S_1 - P$ равна $(c + v)$. Время, необходимое для прохождения пути $P - S_1 - P$, будет

$$t_1 = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2\, l_1/c}{1 - v^2/c^2}. \tag{3.7}$$

Относительная скорость света, идущего по пути $P - S_2 - P$, также будет изменена. Пока свет проходит путь от P до S_2, весь прибор смещается в сторону на расстояние δ

$$\frac{\delta}{\sqrt{l_2^2 + \delta^2}} = \frac{v}{c}, \qquad \delta = \frac{v}{c}\frac{l_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{3.8}$$

и истинное расстояние, проходимое светом, равно

$$l_2^* = \sqrt{l_2^2 + \delta^2} = \frac{l_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.9}$$

На обратном пути свет проходит такое же расстояние. Время, за которое свет проходит путь $P - S_2 - P$, равно поэтому

$$t_2 = \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.10}$$

После поворота прибора на 90° вокруг его оси, время, необходимое для прохождения расстояний $P - S_1 - P$ и $P - S_2 - P$, станет, соответственно, равно

$$\left.\begin{aligned} \bar{t}_1 &= \frac{2l_1/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ \bar{t}_2 &= \frac{2l_2/c}{1 - v^2/c^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Разности времени, за которое свет проходит два различных пути, соответственно до и после поворота аппаратуры, равны:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{l_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - l_2\right) \quad (3.12)$$

и

$$\Delta \bar{t} = \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{2/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \quad (3.12a)$$

Изменение в Δt, обусловленное вращением аппаратуры, будет поэтому равно:

$$\Delta \bar{t} - \Delta t = -\frac{2/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(l_1 + l_2)\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right). \quad (3.13)$$

Мы разложим правую часть равенства (3.13) в ряд по степеням $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ и ограничимся первым неисчезающим членом, поскольку величина $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ порядка 10^{-8}. Тогда получим приближенно:

$$\Delta \bar{t} - \Delta t = -\frac{1}{c}(l_1 + l_2)\frac{v^2}{c^2}. \quad (3.14)$$

Вследствие этого изменения Δt следует ожидать смещения интерференционных полос в зрительной трубе. Отношение величины этого смещения к ширине полосы должно равняться разности $(\Delta \bar{t} - \Delta t)$, деленной на период колебания световой волны $\frac{1}{\nu}$:

$$\frac{\Delta s}{s} = -\frac{\nu}{c}(l_1 + l_2)\frac{v^2}{c^2}. \quad (3.15)$$

Скорость Земли относительно «абсолютной» системы отсчета v порядка $3 \cdot 10^6$ см/сек $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ поэтому порядка

10^{-8}; $\frac{\nu}{c}$ — волновое число, которое для видимого света равно примерно $2 \cdot 10^4$ см$^{-1}$. Отсюда мы имеем:

$$\frac{\Delta s}{s} \sim -\frac{l_1 + l_2}{5 \cdot 10^8}. \qquad (3.15а)$$

При помощи многократного отражения Майкельсон и Морлей сумели довести эффективные расстояния l_1 и l_2 до нескольких метров. После исключения ошибок, обусловленных такими причинами, как напряжения, температурные эффекты и т. п., обнаружилось, что отсутствует какой бы то ни было эффект.

Таким образом, возникла следующая трудность: не существует последовательной теории, согласующейся с экспериментами Физо, Майкельсона-Морлея и явлением аберрации света. В этом направлении было проделано много других экспериментов. Однако они не меняют существа дела, и мы их здесь не будем рассматривать. Требуются не дополнительные эксперименты, а новая теория, которая объяснила бы возникшие противоречия.

Гипотеза эфира. Прежде чем заняться этой новой теорией — теорией относительности, — скажем несколько слов о гипотезе, имеющей теперь лишь исторический интерес. Физики привыкли пользоваться главным образом механическими представлениями. Неудивительно, что, когда Фарадей, Максвелл и Герц создали первую теорию поля, многими физиками были сделаны попытки объяснить новые поля на основе механических понятий. Сами Максвелл и Герц также работали в этом направлении. Существует область механики, пользующаяся понятиями и методами, подобными тем, которые употребляются в теории поля, — это механика сплошных сред. Поэтому электромагнитное поле было объяснено напряжениями гипотетической материальной среды, так называемого эфира.

Однако эта интерпретация электромагнитного поля неудовлетворительна по многим причинам. Например, эфир должен обладать свойствами, которыми не обладает ни одно из известных веществ; он должен проникать сквозь все тела, не испытывая никакого сопротивления трения; он не обладает массой и не испытывает гравитационного притяжения. Кроме того, уравнения Максвелла во многом отличаются от уравнений, которым подчиняются упругие волны. «Продольные» упругие волны, например, не имеют аналогии в электродинамике.

В конце девятнадцатого столетия эфир, однако, рассматривался как наиболее обещающая и даже необходимая гипотеза. Конечно, делались попытки на основе этого представления решить проблему, обсуждавшуюся в этой главе, именно, найти систему координат, в которой скорость света была бы равна c во всех направлениях. Идея эфира предполагала наличие системы координат, в которой он покоится. Эта теория, однако, мало помогла в решении фундаментальной трудности. Она лишь по-другому сформулировала проблему, поскольку определить состояние движения эфира можно только путем измерения скорости света или в результате аналогичных экспериментов. На основании опытов Майкельсона-Морлея следует поэтому предположить, что по крайней мере в непосредственной близости от Земли эфир должен увлекаться ею. Движение небольших масс, как, например, в опыте Физо, также должно увлекать эфир, но не полностью. Однако существование эффекта аберрации совместимо с гипотезой эфира только в том случае, если эфир не увлекался бы Землей даже в непосредственной близости от ее поверхности, т. е. там, где свет попадает в телескоп. [1])

---

[1]) Более подробное обсуждение различных экспериментов, на которых базируется теория относительности, можно найти в книге С. И. Вавилова „Экспериментальные основания теории относительности“ ГИЗ, 1928 (*Прим. ред.*).

Глава IV

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНТЦА

*

Несколько десятилетий экспериментальных исследований показали, что невозможно обнаружить движение Земли сквозь «эфир». Все указывает на то, что существует «принцип относительности» в оптике и электродинамике, хотя преобразования Галилея и исключают эту возможность.

Тем не менее, Фицжеральд и особенно Лорентц сделали попытки сохранить обычные уравнения преобразования и в то же время теоретически объяснить результаты экспериментов. Лорентц сумел показать, что движение системы отсчета относительно эфира со скоростью v дает только «эффект второго порядка» т. е., что все наблюдаемые отклонения от законов, справедливых в системе отсчета, связанной с эфиром, пропорциональны не v/c, а $(v/c)^2$.

Один из этих ожидаемых эффектов второго порядка заключается в том, что в системе, движущейся относительно эфира, световой луч будет проходить некоторое расстояние в оба конца (т. е. туда и обратно), в направлении, параллельном движению системы, за большее время, чем то же расстояние в перпендикулярном направлении. Опыт Майкельсона-Морлея предназначался для измерения этого эффекта. Чтобы объяснить отрицательный результат эксперимента, Фицжеральд и Лорентц предположили, что масштабы и другие «твердые» тела, движущиеся сквозь эфир, сокращаются в направлении движения как раз в таком отношении, чтобы скомпенсировать изменения времени распространения света. Эта гипотеза полностью сохраняет привилегированный характер определенной системы отсчета (эфира). Отрицательный результат опыта Майкельсона-Морлея приписывается при этом не существованию оптического принципа относительности, а неблагоприятному сочетанию эффектов, которое делает невозможным экспериментальное обнаружение движения Земли сквозь эфир.

В противоположность этому Эйнштейн истолковал результаты экспериментов как решающее доказательство того, что принцип относительности справедлив в электродинамике так же, как и в механике. Поэтому он подверг анализу уравнения преобразования Галилея и постарался видоизменить их таким образом, чтобы они стали совместимы с принципом относительности в оптике. Мы воспроизведем теперь этот анализ с целью получения новых законов преобразования.

При написании уравнений преобразования мы всегда делали два предположения, на которые, впрочем, не всегда обращали особое внимание: именно, что существует универсальное время t, определенное независимо от системы координат или системы отсчета, и что расстояние между двумя одновременными событиями является инвариантом, значение которого не зависит от выбора системы координат.

Относительный характер одновременности. Рассмотрим первое предположение. Определяя универсальное время, мы сталкиваемся с необходимостью определения понятия одновременности. Мы можем сравнить и синхронизовать приборы, измеряющие время (часы), только если утверждение «два события A и B одновременны» имеет смысл независимо от системы отсчета. То, что это возможно, является одним из наиболее важных допущений классической физики. Это допущение стало составной частью нашего способа мышления, так что почти каждый испытывает большие трудности при анализе его фактической основы.

Для проверки этой гипотезы мы должны представить себе эксперимент, который позволит решить, являются ли два события одновременными. Без такого эксперимента (который может быть осуществлен по крайней мере принципиально) утверждение «два события A и B одновременны» лишено физического смысла.

Если два события происходят в близких точках пространства, мы можем пользоваться прибором, в некоторых отношениях подобным счетчикам, работающим на совпадениях, которые применяются при исследовании космических лучей. Этот прибор будет реагировать только на события, происходящие одновременно.

Если два события происходят на значительном расстоянии друг от друга, то такой прибор нельзя использовать для наших целей. В этом случае о том, что каждое событие произошло, наш прибор, работающий на совпадениях, должен оповещаться сигналами. Если бы существовали сигналы, распространяющиеся с бесконечно большой скоростью, не возникало бы никаких осложнений. Под «бесконечной скоростью» сигнализации мы понимаем такую ситуацию, при которой сигнал, идущий из точки P_1 в некоторую точку P_2 и обратно, возвращается в P_1 в тот же момент времени, в который он из нее вышел.

К сожалению, сигналов, обладающих такими свойствами, не существует. Все существующие сигналы требуют конечного времени для распространения в некоторую точку и обратно, причем это время увеличивается с проходимым сигналом расстоянием. При выборе типа сигнала мы, конечно, предпочтем сигналы, скорость распространения которых зависит от как можно меньшего числа факторов. С этой точки зрения электромагнитные волны наиболее подходящи, так как для их распространения не требуется присутствия материальной среды, их скорость в пустоте не зависит от направления, длины волны и интенсивности. Регистрирующим прибором могут служить два счетчика фотонов, работающие на совпадениях.

Чтобы учесть потерю времени на передачу сигналов, поместим наш прибор на середине прямой, соединяющей точки, в которых происходят события A и B. Каждое событие, когда оно происходит, сопровождается излучением светового сигнала, и мы назовем события одновременными, если оба сигнала одновременно достигают средней точки. Этот эксперимент может служить для определения одновременности двух событий без использования часов. Предполагается, что одновременность, определяемая этим экспериментом, «транзитивна», т. е., что из одновременности (по нашему определению) A и B и B и C следует одновременность A и C. Следует подчеркнуть, что это предположение является гипотезой, касающейся поведения электромагнитных сигналов.

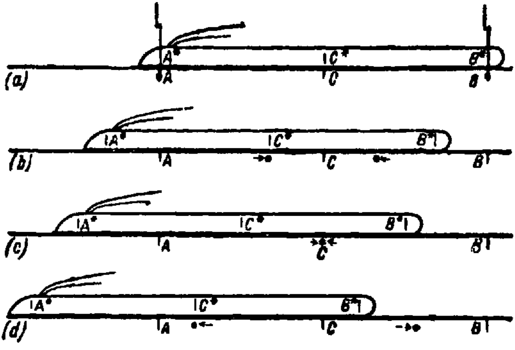
Даже в случае верности этой гипотезы, мы еще не можем быть уверены в том, что наше определение одновременности не зависит от системы отсчета, к которой мы относим описание природы. Локализация двух событий и построение средней точки на связывающей их прямой по необходимости предполагают использование определенной системы координат, находящейся в определенном состоянии движения.

Является ли наше определение одновременности инвариантным относительно перехода к другой системе, находящейся в ином состоянии движения? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим две системы отсчета: одну, связанную с Землей (S), и другую, связанную с длинным поездом (S^*), движущимся прямолинейно с постоянной скоростью. Представим себе двух наблюдателей, одного на земле около пути следования поезда, другого — в поезде. Пусть каждый из наблюдателей снабжен регистрирующим прибором описанного типа и измерительным масштабом. Их масштабы не должны быть обязательно одной и той же длины; существенно, чтобы каждый наблюдатель мог определить середину расстояния между двумя точками на своем теле отсчета — на земле или в поезде.

Предположим, далее, что ударяют две молнии, каждая поражает поезд и землю, оставляя при этом постоянный след. Пусть после этого каждый из наблюдателей обнаружит, что его регистрирующий аппарат находится как раз посередине между двумя следами, оставленными в его системе отсчета. На фиг. 5 отметки молний обозначены через A, B, A^*, B^*, а расположение приборов — через C и C^*. Возможно ли, что световые сигналы, исходящие из A, A^* и B, B^* и приходящие одновременно в C, приходят также одновременно и в C^*?

В тот момент, когда молния ударяет в A и A^*, эти две точки совпадают. То же справедливо для B и B^*.

Если окончательно окажется, что обе молнии ударили одновременно, как кажется наблюдателю на земле (т. е. в системе S), то C^* должно совпадать с C в тот момент, когда A совпадает с A^* и B с B^* (т. е. когда ударяют две молнии)[1].



Фиг. 5. Два события, происходящие в A, A^* и в B, B^*, кажутся одновременными наблюдателю, покоящемуся относительно земли (S), но не наблюдателю, покоящемуся относительно поезда (S^*). В (a) события совершаются, в (b) световой сигнал, вышедший из A, A^*, достигает C^*, в (c) световые сигналы об обоих событиях приходят в C, в (d) световой сигнал из B, B^* достигает C^*.

Из-за того, что требуется конечное время для достижения световым сигналом C и C^*, точка C^* успеет переместиться влево (фиг. 5, b, c, d). Поэтому сигнал, исходящий из A, A^*, достигает C только после прохождения C^* (фиг. 5, b, c), в то время как сигнал из B, B^* достигает C раньше, чем он попадает в C^* (фиг. 5, c, d). В результате наблюдатель в поезде обнаруживает, что сигнал из A, A^* достигает его регистрирующей аппаратуры раньше, чем сигнал из B, B^* (фиг. 5, b, d).

---

[1]) Иначе расстояния A^*C^* и B^*C^* не казались бы равными с точки зрения наблюдателя, находящегося на земле; позже мы объясним, почему мы не делаем предположения такого рода.

Из этого не следует, что земля обладает свойствами, не присущими поезду. Молния может ударить и так, что световые сигналы придут одновременно в точку C^*. В этом случае сигналы из A, A^* приходят в C позже, чем сигналы из B, B^*. Однако невозможен такой случай, чтобы оба прибора — в C и в C^* — указали на одновременность удара молний.

Из этого следует заключить, что два события, одновременные в одной системе отсчета, вообще говоря, не являются одновременными в другой системе отсчета.[1)]

Длина масштабов. Эти выводы заставляют нас изменить наши представления относительности измерения длины. Мы предположили, что наблюдатель на земле и наблюдатель в поезде могут производить измерение длин в своих собственных системах отсчета. Два стержня, покоящиеся в некоторой системе отсчета, считаются равными по длине, если возможно одновременно совместить их концы E с E^* и F с F^*. Два отрезка, отмеченные на телах, движущихся друг относительно друга, могут сравниваться тем же способом, если они параллельны друг другу и перпендикулярны направлению их относительного движения. Однако, если эти отрезки расположены на одной и той же прямой, которая параллельна направлению их относительного движения, их соответственные концы могут совпадать только в определенный момент времени. Два отрезка EF и E^*F^* считаются равными в том случае, когда эти совпадения происходят о д н о в р е м е н н о. Одновременность же этих событий зависит от системы отсчета наблюдателя. Так, в случае

---

1) Наше определение одновременности, конечно, до некоторой степени произвольно. Однако невозможно придумать эксперимент, при помощи которого одновременность можно было бы определить независимо от системы отсчета. Результаты опыта Майкельсона-Морлея указывают на то, что закон распространения света имеет один и тот же вид во всех инерциальных системах. Если бы результат опыта Майкельсона-Морлея был положительным, другими словами, если бы было возможно определить состояние движения эфира, то мы, естественно, определяли бы одновременность в системе отсчета, связанной с эфиром, и, таким образом, оно приобрело бы абсолютное значение.

удара молнии два отрезка AB и A^*B^* кажутся равными наблюдателю, находящемуся на земле, наблюдатель же в поезде найдет, что совпадение A с A^* произойдет раньше, чем совпадение B с B^*, и заключит, что A^*B^* больше, чем AB. Таким образом, не только одновременность событий, но и результаты измерения длин зависят от выбора системы отсчета.

Ход часов. Вопрос о синхронности двух часов, находящихся на значительном расстоянии друг от друга (т. е. вопрос о том, будут ли стрелки этих часов одновременно находиться в эквивалентных положениях), также определяется системой отсчета наблюдателя. Более того, если двое часов движутся друг относительно друга, мы не можем даже сравнивать их скорости хода, независимо от системы отсчета. Для иллюстрации этого рассмотрим двое часов D и D^*, одни из которых находятся на земле, а другие — в поезде. Предположим, что их показания совпадают, когда D^* проходит мимо D. Если их показания и в дальнейшем будут совпадать, можно считать, что ход D^* и D одинаков. Через определенное время часы D^* и D окажутся на значительном расстоянии друг от друга; тогда, согласно сказанному выше, их стрелки не смогут одновременно занимать эквивалентные положения с точки зрения обоих наблюдателей, находящихся на земле и в поезде.

Преобразования Лорентца. Предыдущие рассуждения помогают нам устранить кажущееся противоречие между законом распространения электромагнитных волн и принципом относительности. Поскольку определить универсальное время невозможно и длина твердых масштабов зависит от выбора системы отсчета, можно себе представить, что скорость света одинакова в различных системах отсчета, движущихся относительно друг друга. Теперь мы можем показать, что классические преобразования, связывающие две инерциальные системы (уравнения преобразования Галилея) могут быть заменены новыми уравнениями, которые не основываются на предположениях об универсальности времени и инвариантности длины масштабов, но предполагают с самого начала инвариантный характер скорости света.

Для получения этих новых уравнений преобразования мы примем, что принцип относительности является фундаментальным принципом, т. е. уравнения преобразования не должны содержать ничего такого, что выделяло бы одну инерциальную систему координат по сравнению с другими. Кроме того, мы предположим, что уравнения преобразования сохраняют однородность пространства; все точки пространства и времени должны быть эквивалентны с точки зрения преобразования. Поэтому уравнения преобразования должны быть линейными. По этой же причине мы считали расстояние A^*C^* равным B^*C^* и в системе S и в системе S^* (стр. 52).

Рассмотрим две инерциальные системы S и S^*. Пусть S^* движется относительно S вдоль оси X с постоянной скоростью v; в момент времени $t=0$ в системе S начала координат S и S^* совпадают. Ось X^* параллельна оси X и фактически совпадает с ней. Точки, покоящиеся относительно S^*, движутся со скоростью v в направлении оси X относительно S. Первое из наших уравнений преобразования принимает поэтому следующую форму:

$$x^* = a(x - vt), \tag{4.1}$$

где a — постоянная, которая будет определена ниже.

Не является очевидным, что прямая линия, перпендикулярная к оси X, будет также перпендикулярна к оси X^* (углы должны измеряться, соответственио, наблюдателями в S и S^*). Однако, если этого предположения не сделать, преобразование будет нарушать симметрию относительно оси X. По этим же причинам мы предположим, что оси Y и Z ортогональны с точки зрения любой системы и что то же самое справедливо относительно осей Y^* и Z^*.

Как указывалось ранее, мы можем инвариантным способом сравнивать длины движущихся стержней (отрезков), если они параллельны друг другу и перпендикулярны направлению их относительного движения. Из совпадения их соответствующих концов следует по принципу относительности, что они имеют одинаковую длину. В противном случае связь между S и S^* не была бы обратимой.

На основе этого можно записать два следующих уравнения преобразования:

$$\left.\begin{aligned} y^* &= y, \\ z^* &= z. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Для того чтобы система уравнений была полной, мы должны еще написать уравнение, связывающее t^*, т. е. время, измеренное в системе S^*, с временной и пространственными координатами системы S. Из-за принятой нами «однородности» пространства и времени t^* должно зависеть от x, y и z линейно. В силу симметрии предположим далее, что t^* не зависит от y и z. В противном случае показания двух часов, находящихся в плоскости Y^*Z^* системы S^*, не будут совпадать, с точки зрения наблюдателя, в S. Выбирая начало отсчета времени так, чтобы постоянный (не зависящий от координат) член в уравнениях преобразования обращался в нуль, получим

$$t^* = \beta t + \gamma x. \tag{4.3}$$

Наконец, мы должны определить постоянную α в (4.1) и постоянные β и γ в (4.3). Мы увидим, что они определяются двумя условиями: скорость света одинакова в обеих системах S и S^*, и новые уравнения преобразования должны переходить в классические, когда скорость v мала в сравнении со скоростью света c.

Пусть в момент $t=0$ из начала координат системы S, которое в этот момент совпадает с началом системы S^*, излучается сферическая электромагнитная волна. Скорость ее распространения одинакова во всех направлениях и равна c в обеих системах. Распространение волны можно описывать любым из двух следующих уравнений:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \tag{4.4}$$

$$x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} = c^2t^{*2}. \tag{4.5}$$

Используя уравнения (4.1), (4.2) и (4.3), можно выразить координаты, отмеченные звездочками в (4.5), через x, y и z:

$$c^2(\beta t+\gamma x)^2=\alpha^2(x-vt)^2+y^2+z^2. \tag{4.6}$$

Собирая однородные члены, получим:

$$(c^2\beta^2-v^2\alpha^2)\,t^2=(\alpha^2-c^2\gamma^2)\,x^2+y^2+z^2-2\,(v\alpha^2+c^2\beta\gamma)\,xt. \tag{4.7}$$

Это уравнение переходит в уравнение (4.4) только в том случае, когда коэфициенты при t^2 и x^2 в уравнениях (4.7) и (4.4) равны, а коэфициент при xt в (4.7) исчезает. Поэтому:

$$\left.\begin{aligned} c^2\beta^2-v^2\alpha^2&=c^2,\\ \alpha^2-c^2\gamma^2&=1,\\ v\alpha^2+c^2\beta\gamma&=0. \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Эти три уравнения решаем относительно неизвестных α, β и γ. Исключением α^2 получаем:

$$\left.\begin{aligned} \beta(\beta+v\gamma)&=1,\\ c^2\gamma(\beta+v\gamma)&=-v. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Далее, путем исключения γ, получим для β^2:

$$\beta^2=\frac{1}{1-v^2/c^2}. \tag{4.10}$$

Таким образом, величина β, в отличие от классической теории, не равна единице. Однако, выбирая положительный знак корня в (4.10), мы увидим, что при малых v/c значение β почти равно единице, отличаясь от нее лишь во втором порядке. γ определяется уравнением:

$$\gamma=\frac{1-\beta^2}{v\beta}=-\frac{\beta v}{c^2}, \tag{4.11}$$

и наконец, для α находим:

$$\alpha^2=-\frac{c^2\beta\gamma}{v}=\beta^2. \tag{4.12}$$

Здесь опять выбираем положительное значение корня.

Подставляя найденные значения в уравнения (4.1) и (4.3), получаем новые уравнения преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y^* &= y, \\ z^* &= z, \\ t^* &= \frac{t - v/c^2 \cdot x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Это так называемые **уравнения преобразования Лорентца**. При малых значениях v/c они переходят в уравнения преобразования Галилея:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x - vt, \\ y^* &= y, \\ z^* &= z, \\ t^* &= t. \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

Различие между (4.13) и (4.14) всюду второго порядка относительно v/c (или x/ct). Справедливость уравнений Лорентца экспериментально можно проверить только в том случае, когда $(v/c)^2$ больше вероятной ошибки опыта. Майкельсон и Морлей в своем знаменитом эксперименте увеличили точность настолько, что сумели измерить эффекты второго порядка и доказать на опыте непригодность уравнений преобразования Галилея.

Решая уравнения (4.13) относительно x, y, z и t, получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x^* + vt^*}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y &= y^*, \\ z &= z^*, \\ t &= \frac{t^* + \frac{v}{c^2} x^*}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

Сравнивая (4.15) с (4.13), мы видим, что S имеет относительную скорость $(-v)$ по отношению к S^*. Это заключение не тривиально, поскольку ни единица длины, ни единица времени в S и в S^* непосредственно несравнимы.

Скорость светового сигнала, испущенного из любой точки в любой момент времени, равна c во всех системах координат, если она равна c в одной из них, так как пространственные и временные разности координат двух событий преобразуются точно так же, как и сами координаты x, y, z и t.

Преобразования Лорентца не совместимы с классическими представлениями о пространстве и времени. Они устанавливают справедливость принципа относительности по отношению к законам распространения света.

До сих пор мы сравнивали нашу теорию преобразований только с результатами опыта Майкельсона-Морлея. Будет ли она согласоваться также и с явлением а б е р р а ц и и? Мы должны сравиить направление приходящего света в двух системах отсчета: системе, связанной с Солнцем, и системе, связаиной с Землей. Величина аберрации зависит от угла между приходящим световым лучом и направлением относительного движения этих двух систем отсчета. Обозначим этот угол через α (в системе, связанной с Солнцем). Направим общую ось X обеих систем вдоль их относительного движения, причем световой луч пусть будет расположен в плоскости XY. В системе, связанной с Солнцем, траектория светового луча определяется посредством

$$x = ct \cdot \cos\alpha, \qquad y = ct \cdot \sin\alpha. \tag{4.16}$$

Уравнения движения в системе, связанной с движущейся Землей, получаются отсюда применением обратных преобразований Лорентца (4.15). Тогда (4.16) приобретает вид:

$$\left.\begin{aligned} x^* + vt^* &= c\left(t^* + \frac{v}{c^2}x^*\right)\cos\alpha, \\ y^*\sqrt{1 - v^2/c^2} &= c\left(t^* + \frac{v}{c^2}x^*\right)\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

Решая эти уравнения относительно x^* и y^*, получим:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= ct^* \frac{\cos\alpha - v/c}{1 - v/c\cdot\cos\alpha} = ct^*\cos\alpha^*, \\ y^* &= ct^* \frac{\sin\alpha}{1 - v/c\cdot\cos\alpha}\sqrt{1 - v^2/c^2} = ct^*\sin\alpha^*. \end{aligned}\right\} \quad (4.18)$$

Котангенс нового направления равен:

$$\operatorname{ctg}\alpha^* = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - v/c\cdot\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.19)$$

Соответственно классическому объяснению, данному на стр 40, этот угол должен был бы определяться соотношением:

$$\operatorname{ctg}\alpha^* = \operatorname{ctg}\alpha - v/c\cdot\operatorname{cosec}\alpha. \quad (4.20)$$

С авнивая (4.19) и (4.20), надо иметь в виду, что отношение $v\ c$ мало (порядка 10^{-4}). Поэтому разложим оба соотношения в ряды по степеням v/c. Тогда:

$$\operatorname{ctg}\alpha^*_{\text{rel}} = \operatorname{ctg}\alpha - v/c\cdot\operatorname{cosec}\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\operatorname{ctg}\alpha + \ldots, \quad (4.19a)$$

и

$$\operatorname{ctg}\alpha^*_{\text{class}} = \operatorname{ctg}\alpha - v/c\cdot\operatorname{cosec}\alpha. \quad (4.20a)$$

Наблюдаемый эффект — первого порядка, в то время как релятивистские поправки второго порядка находятся за пределами точности эксперимента. Таким образом, релятивистское уравнение (4.19) согласуется с наблюдаемыми фактами.

Таким же образом можно объяснить эксперимент Физо, связывая систему S с землей и систему S^* с движущейся жидкостью. По отношению S^* жидкость покоится, и уравнение движения светового луча таково:

$$x^* = \frac{c}{n}\left(t^* - t_0^*\right). \quad (4.21)$$

Применяя преобразования Лорентца (4.13), получим:

$$x - vt = \frac{c}{n}\left[\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) - t_0^*\sqrt{1 - v^2/c^2}\right]. \quad (4.22)$$

Скорость светового луча в системе S получается решением этого уравнения относительно x:

$$x = \left[\frac{c}{n} - \frac{\frac{1}{n^2} - 1}{1 + v/nc} v \right] t + \text{const}. \tag{4.23}$$

Наблюдаемый эффект оказывается опять первого порядка и находится в согласии с экспериментом.

«Кинематические» эффекты при преобразованиях Лорентца. Изучим теперь более подробно вопрос об измерении длины и времени в различных системах отсчета с точки зрения преобразований Лорентца.

Пусть часы расположены в некоторой точке (x_0^*, y_0^*, z_0^*) в системе S^*. Сравним время, показываемое этими часами, со временем t, измеренным в системе S. Согласно уравнению (4.15) имеем:

$$t = \frac{v/c^2 \cdot x_0^* + t^*}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Поэтому временный интервал $(t_2 - t_1)$ в системе S выражается через показания часов t_2^* и t_1^* следующим образом:

$$t_2 - t_1 = (t_2^* - t_1^*) / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{4.24}$$

Таким образом, с точки зрения системы S ход часов оказывается замедленным в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз. Но этого мало. Наблюдаемые из системы S часы в различных точках S^*, идя с одинаковой скоростью, тем не менее будут показывать различное время в зависимости от их положения. Чем дальше по оси X^* от начала координат системы S^* расположены часы, тем более отстают их показания с точки зрения системы S. Два события, одновременные в системе S, вообще говоря, не одновременны в системе S^*, и наоборот.

С другой стороны, можно рассматривать ход часов, находящихся в системе S, с точки зрения системы S^*. Пусть часы расположены в точке (x_1, y_1, z_1) и время в S^*

связано со временем в S уравнением

$$t^* = \frac{t - v/c^2 \cdot x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Как и прежде, показания S-часов связаны с временным интервалом в S^* соотношением:

$$t_2^* - t_1^* = (t_2 - t_1) / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (4.25)$$

S-часы с точки зрения системы S^* оказываются замедленными. Часы, находящиеся на положительной половине оси X, опережают часы, помещенные в начале координат.

Каким же образом наблюдатель в какой-либо системе отсчета обнаруживает, что часы в другой системе идут медленнее? Для того чтобы измерить скорость хода часов T, движущихся относительно наблюдателя, последний сравнивает их показания с показаниями всех часов в его системе, мимо которых проходят часы T. Иначе говоря, S-наблюдатель сравнивает о д н у пару S^*-часов с последовательностью S-часов, в то время как S^*-наблюдатель сравнивает о д н у пару S-часов с последовательностью S^*-часов. S^*-часы с течением времени проходят мимо S-часов, все дальше расположенных вдоль положительного направления оси X и поэтому все более и более опережающих часы S^*, поэтому наблюдателю в системе S кажется, что S^*-часы идут медленнее. Наоборот, S-часы проходят мимо S^*-часов, расположенных все дальше и дальше в отрицательном направлении оси X^* и поэтому все более опережающих часы S. Ход S-часов кажется замедленным с точки зрения системы S^*.

В случае измерений длин условия несколько более сложны, так как в уравнения преобразования y и z входят иначе, чем x (ось X — направление относительного движения). Твердый масштаб, перпендикулярный направлению движения, имеет одинаковую длину в обеих системах координат. Если же масштаб параллелен осям X и X^*, надо оговорить, как мы рассматриваем его, в движущейся или в покоящейся системе. Рассмотрим стержень, твердо связанный с S^*, концы которого имеют координаты $(x_1^*, 0, 0)$

и $(x_2^*, 0, 0)$. Его длина в S^* равна

$$l^* = x_2^* - x_1^*. \tag{4.26}$$

Наблюдатель в S определяет длину стержня как разность координат $(x_2 - x_1)$ его концов в один и тот же момент времени t. Координаты x_2^* и x_1^* связаны с координатами x_2, x_1 и t уравнениями (4.13):

$$\left.\begin{aligned} x_1^* &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ x_2^* &= \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

Отсюда разность координат

$$x_2^* - x_1^* = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{4.28}$$

Обозначая $(x_2 - x_1)$ через l, получим:

$$l = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot l^*. \tag{4.29}$$

Стержень кажется укороченным пропорционально множителю $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Этот эффект называется лорентцовым сокращением.

Аналогичное вычисление показывает, что стержень, покоящийся в системе S, кажется укороченным с точки зрения системы S^*.

Итак, получаем следующие правила: *часы, покоящиеся относительно наблюдателя, кажутся ему идущими с наибольшей скоростью. Если они движутся относительно наблюдателя со скоростью v, их ход кажется ему замедленным в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз. Твердое тело имеет с точки зрения наблюдателя наибольшую длину, когда оно по отношению к нему покоится. Движущееся тело кажется сокращенным в направлении движения пропорционально множителю $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, в то время как размеры его в перпендикулярных направлениях остаются неизменными.*

Собственное время. В противоположность классической теории преобразований временные и пространственные интервалы более не являются инвариантными. Однако инвариантный характер скорости света дает возможность ввести другой инвариант. Вернемся к уравнениям (4.1), (4.2), (4.3) и условию (4.8). Рассмотрим два события, пространственные и временные координаты которых соответственно (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2). Обозначим через τ_{12}^2 разность между квадратом временного интервала и квадратом пространственного интервала, деленным на c^2, так что

$$\tau_{12}^2 = (t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \right.$$
$$\left. + (z_2 - z_1)^2\right]. \tag{4.30}$$

Соответственно определим аналогичную величину в системе S^*:

$$\tau_{12}^{*2} = (t_2^* - t_1^*)^2 - \frac{1}{c^2}\left[(x_2^* - x_1^*)^2 + (y_2^* - y_1^*)^2 + \right.$$
$$\left. + (z_2^* - z_1^*)^2\right]. \tag{4.31}$$

Выражая теперь τ_{12}^{*2} в S-переменных, согласно (4.1), (4.2) и (4.3) [аналогично тому, как это мы делали с уравнением (4.5)], получим:

$$\tau_{12}^{*2} = \left(\beta^2 - \frac{\alpha^2 v^2}{c^2}\right)(t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2}\left[(\alpha^2 - c^2\gamma^2)(x_2 - x_1)^2 + \right.$$
$$\left. + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right] + 2\left(\frac{\alpha^2 v}{c^2} + \beta\gamma\right)(x_2 - x_1)(t_2 - t_1). \tag{4.32}$$

Учитывая, что постоянные α, β и γ подчинены условиям (4.8), легко видеть, что τ_{12}^2 является инвариантом по отношению к уравнениям преобразования (4.13), т. е.

$$\tau_{12}^{*2} = \tau_{12}^2. \tag{4.33}$$

Величина τ_{12} инвариантна также относительно пространственного ортогонального преобразования (1.1).

В дальнейшем мы будем называть все линейные преобразования, по отношению к которым τ_{12}^2 остается инвариантным, **преобразованиями Лорентца**, независимо от того, происходит относительное движение вдоль оси X или нет. Очевидно, что из инвариантности τ_{12}^2 следует инвариантность скорости света, так как для любых двух точек, лежащих на траектории светового луча, τ_{12}^2 равно нулю.

Каков физический смысл величины τ_{12}^2? Если существует система отсчета, по отношению к которой оба события происходят в одной и той же точке пространства, то τ_{12} (положительный корень из τ_{12}^2) представляет собой время между этими событиями, регистрируемое часами, находящимися в покое относительно этой системы отсчета. Поэтому τ_{12} называется **интервалом собственного времени**.

Всегда ли существует система отсчета, в которой два события происходят в одной и той же точке пространства? Если бы мы имели дело с классическими уравнениями преобразования, ответ был бы положительным при условии, что эти события не «одновременны». Уравнения преобразования Лорентца (4.13), однако, имеют особенность, когда относительная скорость систем отсчета равна скорости света, т. е, когда $v = c$. При v больших, чем c, x^* и t^* из уравнений (4.13) получаются мнимыми. Уравнения преобразования Лорентца определены, таким образом, только для того случая, когда относительная скорость двух систем отсчета меньше скорости света c. Поэтому если два события следуют столь быстро друг за другом, что временной интервал между ними меньше или равен времени, которое необходимо световому лучу для прохождения пространственного расстояния между этими событиями, то не существует системы отсчета, где данные события имели бы место в одной и той же точке пространства.

Рассмотрим два события, происходящих в двух различных точках пространства. Пусть в этот момент, когда происходит событие в первой точке, из нее выходит световой луч. Если этот луч достигает второй точки как раз в тот момент, когда в ней происходит событие, то интервал собственного времени τ_{12} между этими двумя событиями равен нулю. Если же этот световой луч приходит во вторую точку уже после того, как в ней произошло событие, интервал между событиями будет отрицательным. В этом случае вместо τ_{12}^2 можно ввести инвариант $\sigma_{12}^2 = -c^2\tau_{12}^2$, то есть

$$\sigma_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \\ - c^2(t_2 - t_1)^2. \tag{4.34}$$

Для любых двух событий либо τ_{12}, либо σ_{12} вещественно. Если вещественно σ_{12}, то преобразованием Лорентца можно свести $t_2^* - t_1^*$ к нулю. Другими словами, в этом случае существует система отсчета, в которой оба события одновременны. В этой системе отсчета пространственное расстояние между двумя событиями равно просто σ_{12}.

Обычно τ_{12} или σ_{12} выражают пространственно-временной интервал между двумя событиямн. Интервал называется *временно-подобным*, если τ_{12} вещественно, и *пространственно-подобным*, если σ_{12} вещественно. Являются ли интервалы между двумя событиями временно-подобными или пространственно-подобными, не зависит от выбора системы отсчета или системы координат. Это есть инвариантное свойство двух событий.

Как уже указывалось, уравнения преобразования Лорентца определены нами только для относительных скоростей, меньших скорости света. Если бы система отсчета могла двигаться со скоростью, равной или большей, чем скорость света, было бы совершенно невозможно распространение света в направлении движения этой системы, тем более со скоростью c.

Релятивистский закон сложения скоростей. Возможно ли найти две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга со скоростью, большей c, путем последовательного применения серии преобразований Лорентца? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим суперпозицию двух (или больше) преобразований Лорентца. Введем три системы отсчета S, S^* и S^{**}. Система S^* имеет скорость v относительно S, а S^{**} скорость w относительно S^*. Найдем уравнения преобразования, связывающие S^{**} с S. Будем исходить из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & y^* &= y, \\ t^* &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & z^* &= z, \\ x^{**} &= \frac{x^* - wt^*}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, & y^{**} &= y^*, \\ t^{**} &= \frac{t^* - \frac{w}{c^2}\cdot x^*}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, & z^{**} &= z^*. \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

Подставим первую систему во вторую. Непосредственное вычисление дает:

$$\left.\begin{aligned} x^{**} &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y^{**} &= y, \\ z^{**} &= z, \\ t^{**} &= \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

$$u = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}. \tag{4.37}$$

Таким образом, два последовательных преобразования Лорентца эквивалентны одному преобразованию. Однако при этом относительная скорость S^{**} и S не равна сумме v и w. Пока v/c и w/c малы в сравнении с единицей, u близко к $v + w$; но если хотя бы одна из двух скоростей приближается к c, результирующая скорость существенно отличается от суммы скоростей. Соотношение (4.37) может быть переписано в виде:

$$u = c\left[1 - \frac{(1 - v/c)(1 - w/c)}{1 + vw/c^2}\right]. \tag{4.37a}$$

Отсюда видно, что u не может быть большим или равным c, если v и w меньше c. Поэтому невозможна такая суперпозиция нескольких преобразований Лоренца, в результате которой была бы достигнута скорость, большая, чем c.

Соотношение (4.37) можно интерпретировать и несколько другим образом, так как тело, имеющее скорость w относительно S^*, имеет скорость u относительно S. Тогда соотношение (4.37) может рассматриваться, как закон сложения скоростей (в направлении оси X). В этом случае его лучше писать в виде:

$$u^* = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}, \tag{4.38}$$

где w заменено u^*. Мы видим, что тело, имеющее скорость, меньшую c в некоторой инерциальной системе, имеет скорость, меньшую c и в любой другой инерциальной системе.

Из уравнений преобразования Лоренца следует, что материальное тело не может иметь скорость, большую c, относительно какой-либо инерциальной системы отсчета. Действительно, само материальное тело может быть выбрано за тело отсчета; если это тело изолировано от других тел и не вращается вокруг своего центра масс, то связанная с ним система будет инерциальной. Тогда, если бы в некоторой системе тело обладало скоростью, большей c, то относительная скорость этой системы и системы, связанной с телом, также была бы больше c, что невозможно (см. выше).

Собственное время материального тела. Раньше мы говорили о пространственно-временном интервале между двумя событиями. Применение этого понятия к движению материального тела и к пространственно-временным точкам вдоль его пути имеет особенно большое значение в релятивистской механике. Поскольку скорость материального тела меньше c, такой интервал всегда будет временно-подобным. Если движение тела не является прямолинейным и равномерным, мы все же можем определить дифференциальный элемент из дифференциального уравнения:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \\ = \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\} dt^2. \tag{4.39}$$

τ является «собственным временем», т. е. временем, показываемым часами, твердо связанным с движущимся телом. Деля (4.39) на dt^2 и извлекая корень, получим связь между временной координатой и собственным временем:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - u^2/c^2}, \tag{4.40}$$

где u — скорость тела. Это соотношение верно и для ускоренных и для неускоренных тел.

Как $d\tau$, так и время τ, определяемое интегралом

$$\tau = \int \sqrt{1 - u^2/c^2}\, dt, \tag{4.40a}$$

инвариантны относительно преобразований Лоренца, в то время как dt и u неинвариантны.

Задачи

1. На стр. 62 обсуждался один из способов измерения длины движущегося стержня. Мы можем также определять длину движущегося стержня, вычисляя произведение его скорости на интервал времени между двумя последовательными прохождениями концов стержня мимо некоторой фиксированной точки. Показать, что, пользуясь таким определением, можно получить прежнее уравнение (4.29) для лоренцова сокращения.

2. Два параллельных стержня движутся друг относительно друга вдоль их общего направления. Объяснить кажущийся парадокс, заключающийся в том, что каждый

стержень может казаться длиннее в зависимости от состояния движения наблюдателя.

3. Пусть частота светового луча в системе S равна ν. Его частота ν^* в другой системе отсчета S^* зависит от угла α между направлением светового луча и направлением относительного движения S и S^*. Получить классическое и релятивистское уравнения, дающие связь между ν, ν^* и углом α.

Для этой цели свет удобно рассматривать как плоскую скалярную волну, движущуюся со скоростью c.

Ответ.

$$\nu^*_{\mathrm{cl}} = \nu\,(1 - \cos\alpha \cdot v/c),$$

$$\nu^*_{\mathrm{rel}} = \nu\,\frac{1 - \cos\alpha\cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \nu\left(1 - \cos\alpha\cdot\frac{v}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - \dots\right).$$

Эффект первого порядка, общий в обоих случаях, есть «классический» эффект Допплера; члены второго порядка дают так называемый «релятивистский» эффект Допплера. Он не зависит от угла α.

4. Лорентц создал теорию, которая являлась предшественницей современной теории относительности. Вместо того, чтобы попытаться обобщить принцип относительности на электродинамику, он предположил, что существует привилегированная система отсчета, по отношению к которой эфир покоится. Чтобы объяснить результат опыта Майкельсона-Морлея, он принял, что эфир воздействует на ход часов и длину масштабов, движущихся через него. Согласно этой гипотезе часы замедляют свой ход, а масштабы укорачиваются в направлении своего движения. С помощью этих представлений можно найти количественные соотношения, определяющие замедление часов и сокращение масштабов.

а) Предполагая справедливость уравнений преобразования Галилея, найти точное выражение для времени, которое необходимо световому лучу на прохождение прямолинейного отрезка l в обоих направлениях в установке Майкельсона-Морлея. Скорость установки относительно привилегированной системы считать равной v, а угол между траекторией луча и направлением v равным α.

Ответ.

$$t = \frac{2l}{c} \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2 \cdot \sin^2\alpha}}{1 - v^2/c^2} . \qquad (4.\mathrm{I})$$

б) Введем теперь гипотезу Лорентца и примем, что уравнение (4.I) применяется к сокращенной длине l и измененному углу α. Время, показываемое часами наблюдателя, является теперь не абсолютным временем t, а временем движущихся часов t^*. Более того, мы измеряем длины масштабами, которые сами сокращаются, т. е. мы измеряем не действительную сокращенную длину l, а кажущуюся, несокращенную длину l^*. Время движущихся часов t^* и кажущаяся длина l^* связаны соотношением:

$$t^* = \frac{2l^*}{c}, \qquad (4.\mathrm{II})$$

которое следует из результата опыта Майкельсона-Морлея. Обозначим множитель, характеризующий замедление хода часов через θ, и множитель, характеризующий сокращение масштабов в направлении v, через Λ. Получить соотношения, связывающие t с t^*, l с l^*, и определить Λ и θ так, чтобы уравнения (4.I) и (4.II) стали эквивалентными.

Ответ.

$$\left.\begin{aligned} t^* &= \theta t, \\ l^* &= l\sqrt{\sin^2\alpha + \Lambda^{-2}\cos^2\alpha}, \\ \Lambda &= \theta = \sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.\mathrm{III})$$

в) Чтобы получить полную систему уравнений преобразования Лорентца (4.13), введем две системы координат: одну покоящуюся, а другую движущуюся по отношению к эфиру (S и S^*). Найти кажущиеся расстояния точек на осях системы S^* от начала координат этой системы. Наконец, установить такую связь между показаниями движущихся и покоящихся часов, чтобы световой сигнал, исходящий из начала системы координат S^* в момент $t = t^* = 0$ имел кажущуюся скорость c во всех направлениях.

ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*

Классическая теория преобразований подразумевает существенное различие между пространственными и временной координатами. Поскольку интервалы времени в классической физике считаются инвариантными, временная координата всегда преобразуется сама в себя.

В релятивистской теории преобразований временная координата перестает занимать это обособленное положение, так как если две системы движутся друг относительно друга, то время в одной системе координат зависит не только от временной, но и от пространственных координат другой системы.

Законы классической физики всегда формулируются таким образом, что временная координата оказывается отделенной от пространственных; это обусловлено характером тех преобразований, относительно которых эти законы ковариантны.

Возможно и релятивистскую физику построить так, чтобы временная координата сохраняла свое специфическое положение, однако при этом законы теории относительности принимают громоздкий вид, что часто затрудняет их использование.

Для теории относительности нужно подобрать подходящий формализм. Уравнения преобразования Лорентца подсказывают целесообразность равноправной трактовки всех четырех координат: x, y, z и t. Как это должно быть сделано, было показано Г. Минковским. Мы увидим, что применение введенного им формализма упростит многие проблемы и сделает многие релятивистские законы и уравнения более ясными, чем их нерелятивистские аналоги.

Классическая физика характеризуется инвариантностью длин и времени. Формально релятивистскую физику можно характеризовать инвариантностью выражения:

$$\tau_{12}^2 = (t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]. \tag{5.1}$$

Инвариантность этой квадратичной формы относительно разностей координат ограничивает группу всех возможных линейных преобразований координат x, y, z и t преобразованиями Лорентца, так же как инвариантиость выражения

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{5.2}$$

определяет группу ортогональных преобразований в трехмерном пространстве. Четырехмерный континуум (x, y, z, t) с инвариантной формой τ_{12}^2 можно трактовать как четырехмерное „пространство“, в котором τ_{12} является „расстоянием“ между двумя „точками“: (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2). Благодаря этому оказывается возможным развить обобщенный векторный анализ в „мире Минковского“ и сформулировать все инвариантные соотношения в ясной и сжатой форме.

Мы начнем изучение этого математического метода с напоминания основ элементарного векторного исчисления, обращая внимание главным образом на формальную сторону. Затем мы обобщим формализм таким образом, чтобы стало возможным его применение к пространственно-временному континууму.

Ортогональные преобразования. Начнем с рассмотрения прямоугольной декартовой системы координат, причем обозначим ее три координаты через x_1, x_2 и x_3 (вместо x, y и z). Обозначим также разности координат между двумя точками P и P' через Δx_1, Δx_2 и Δx_3. Расстояние между двумя точками равно:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{3} \Delta x_i^2. \tag{5.2a}$$

Произведя линейное преобразование координат

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ik} x_k + \overset{0}{x'_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{5.3}$$

получим новые разности координат

$$\Delta x'_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ik} \Delta x_k, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.4}$$

Эти уравнения можно решить относительно Δx_k:

$$\Delta x_k = \sum_{i=1}^{3} c'_{ki} \Delta x'_i, \quad k = 1, 2, 3. \tag{5.5}$$

Уравнение (5.2а) в новых переменных имеет вид:

$$s^2 = \sum_{i, k, l=1}^{3} c'_{ik} c'_{il} \Delta x'_k \Delta x'_l. \tag{5.6}$$

Новая система координат является прямоугольной декартовой системой только в том случае, когда соотношение (5.6) формально идентично с (5.2а), т. е. если

$$\sum_{i=1}^{3} c'_{ik} c'_{il} = \left\{ \begin{matrix} 0, \text{ если } k \neq l \\ 1, \text{ если } k = l. \end{matrix} \right\} \tag{5.7}$$

(5.7) можно записать в более сжатой форме, употребляя символ Кронекера δ_{kl}, определяемый соотношениями

$$\left. \begin{matrix} \delta_{kl} = 0, & k \neq l, \\ \delta_{kl} = 1, & k = l. \end{matrix} \right\} \tag{5.8}$$

(5.7) запишется тогда в виде

$$\sum_{i=1}^{3} c'_{ik} c'_{il} = \delta_{kl}; \qquad k, l = 1, 2, 3. \tag{5.7a}$$

(5.7а) представит собой условие, которому должно удовлетворять уравнение преобразования (5.3), чтобы новая система была также декартовой.

Легко найти условия, которым должны удовлетворять коэфициенты c_{ik}. Подставляя (5.4) в (5.5), получим:

$$\Delta x_k = \sum_{i, l=1}^{3} c'_{ki} c_{il} \Delta x_l, \qquad k = 1,\ 2,\ 3, \tag{5.9}$$

и так как это справедливо для произвольного Δx_k, то

$$\sum_{i=1}^{3} c'_{ki} c_{il} = \delta_{kl}, \qquad k,\ l = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.10}$$

Умножим теперь (5.7а) на c_{lm} и просуммируем по трем возможным значениям l. В силу (5.10) и (5.7а), получим

$$\sum_{i, l=1}^{3} c'_{ik} c'_{il} c_{lm} = c'_{mk} = \sum_{l=1}^{3} \delta_{kl} c_{lm} = c_{km}. \tag{5.11}$$

Заменяя в уравнении (5.7а) c'_{ik} через c_{ki} и т. д., получим

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ki} c_{li} = \delta_{kl}; \qquad k,\ l = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.7б}$$

Уравнение (5.10) приобретает при этом вид

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ik} c_{il} = \delta_{kl}; \qquad k,\ l = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.10а}$$

Уравнения (5.7б) или (5.10а) вместе с (5.3) определяют группу ортогональных преобразований.

Детерминант преобразования. Исследуем несколько более подробно преобразования (5.3) и (5.7б).

Детерминант из коэфициентов c_{ik}

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix},$$

равен ± 1. Для доказательства этого мы используем правило умножения детерминантов, согласно которому произведение двух детерминантов $|a_{ik}|$ и $|b_{ik}|$ равно детерминанту $\left|\sum_l a_{il} b_{lk}\right|$. Далее составим детерминанты обеих сторон уравнения (5.7б):

$$\left|\sum_{i=1}^{3} c_{ki} c_{li}\right| = |\delta_{kl}|. \tag{5.12}$$

Согласно указанному закону умножения детерминантов, для левой части получим [см. также (5.10) и (5.11)]:

$$\left|\sum_{i=1}^{3} c_{ki} c_{li}\right| = \left|\sum_{i=1}^{3} c_{ki} c'_{il}\right| = |c_{ki}| \cdot |c'_{il}| =$$
$$= |c_{ki}| \cdot |c_{li}| = |c_{kl}|^2. \tag{5.13}$$

Правая часть уравнения (5.12) равна единице, так как

$$|\delta_{mn}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{5.14}$$

Отсюда:

$$|c_{ki}| = \pm 1. \tag{5.15}$$

Значение детерминанта $+1$ соответствует „собственному" вращению, в то время как значение -1 соответствует ортогональным преобразованиям, сопровождающимся зеркальным отражением.

Сокращенные обозначения. В большинстве уравнений, встречающихся в трехмерном векторном (и тензорном) анализе, каждый буквенный индекс, появляющийся в произведении один раз, может принимать три значения: 1, 2, 3, а каждый буквенный индекс, появляющийся в произведении дважды, представляет собой индекс, по которому производится суммирование. В дальнейшем мы будем всегда опускать знак суммы и все примечания типа (i, $k = 1, 2, 3$). При этом условимся, что:

1) каждый буквенный индекс, встречающийся в произведении один раз, принимает все возможные для него значения;

2) каждый буквенный индекс, встречающийся в произведении дважды, является индексом суммирования, причем суммирование проводится по всем возможным значениям этого индекса.

Например, уравнения (5.3) и (5.6) запишутся следующим образом:

$$x'_i = c_{ik} x_k + \overset{0}{x'_i},$$
$$s^2 = c'_{ik} c'_{il} \Delta x'_k \Delta x'_l.$$

Часто индексы суммирования называются просто **немыми индексами**. Значение выражения не изменится, если пару немых индексов обозначить другой буквой, например:

$$c_{ik} x_k = c_{il} x_l.$$

Векторы. Закон преобразования Δx_k, (5.4), является общим законом преобразования векторов относительно ортогональных преобразований. Иначе: вектор определяется как совокупность трех величин, преобразующихся как координатные разности:

$$a'_k = c_{kl} a_l. \tag{5.16}$$

Если координаты вектора заданы в некоторой декартовой системе координат, их можно найти и в любой другой системе.

Норма вектора определяется как сумма квадратов его компонент.

Покажем, что норма инвариантна относительно ортогональных преобразований, т. е.

$$a'_k a'_k = a_l a_l. \tag{5.17}$$

Подставляя вместо a'_k (5.16) и используя уравнения (5.10а), получим:

$$a'_k a'_k = c_{kl} a_l c_{kl} a_l = \delta_{il} a_i a_l = a_l a_l,$$

что и доказывает справедливость (5.17) при ортогональных преобразованиях.

Скалярное произведение двух векторов определяется как сумма произведений их соответствующих компонент:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\equiv a_i b_i. \tag{5.18}$$

Инвариантность этого выражения относительно ортогональных преобразований доказывается аналогично тому, как это было сделано для (5.17). Норма вектора есть скалярное произведение вектора на самого себя.

Слово скаляр часто употребляется в векторном и тензорном анализе вместо слова инвариант. „Скалярное произведение“ означает „инвариантное произведение“.

Суммы и разности векторов также являются векторами

$$\left.\begin{aligned} a_i + b_i &= s_i, \\ a_i - b_i &= d_i. \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

То, что новые величины s_i и d_i действительно преобразуются согласно (5.16), следует из линейного и однорядного характера этого закона преобразования.

Произведение вектора на скаляр (инвариант) есть вектор

$$s\cdot a_i = b_i. \tag{5.20}$$

Доказательство предоставляем читателю.

Обсуждение оставшейся алгебраической векторной операции — векторного произведения будет проведено ниже в этой главе, так как трансформационные свойства векторного произведения не совсем такие же, как у вектора.

Векторный анализ. Теперь можно перейти к простейшим дифференциальным операциям — нахождению градиента и дивергенции. Рассмотрим в трехмерном пространстве скалярное поле V, т. е. функцию трех координат x_i, инвариантную относительно преобразований координат. Вид функции V зависит от выбора системы координат, однако значение ее в каждой фиксированной точке P не меняется при преобразовании координат.

Каков будет закон преобразования производных по координатам от функции V

$$V_{,i}=\frac{\partial V}{\partial x_i}? \tag{5.21}$$

Мы должны выразить производные по x'_k через производные по x_l

$$\frac{\partial V}{\partial x'_k}=\frac{\partial x_l}{\partial x'_k}\frac{\partial V}{\partial x_l}. \tag{5.22}$$

Согласно (5.3), x'_k являются линейными функциями от x_i, и наоборот. Поэтому $\partial x_i/\partial x'_k$ постоянны и равны коэфициентам c'_{ik}, определяемым уравнениями (5.5). Отсюда

$$V_{,k'}=c'_{lk}V_{,l}$$

и согласно (5.11)

$$V_{,k'}=c_{ki}V_{,i}. \tag{5.23}$$

Три величины $V_{,i}$ преобразуются согласно уравнению (5.11); поэтому они являются компонентами вектора, который называется градиентом скалярного поля V.

Три функции координат $V_i(x_1, x_2, x_3)$ являются компонентами векторного поля, если в каждой точке пространства они преобразуются как компоненты вектора. Функции V'_i от координат x'_r определяются, таким образом, уравнениями

$$V'_i(x'_r)=c_{ik}V_k(x_s), \tag{5.11a}$$

где x_s и x'_r связаны уравнениями преобразования. Операция градиента приводит к образованию векторного поля из первоначального скалярного.

Операция дивергенции является в некотором смысле противоположной. При заданном векторном поле V_i мы образуем сумму производных каждой компоненты по координате с тем же индексом

$$\operatorname{div} V\equiv V_{i,i}. \tag{5.24}$$

Покажем, что это выражение является инвариантом (скаляром):

$$V'_{k,\,k'} = V_{i,\,i}. \tag{5.25}$$

Метод доказательства совершенно такой же, как и выше. Заменим штрихованные величины и производные нештрихованными

$$V'_{k,\,k'} = c'_{mk}(c_{kl}V_l)_{,\,m} = c_{kl}c'_{mk}V_{l,\,m}. \tag{5.26}$$

В силу уравнения (5.10) последнее выражение равно правой части уравнения (5.25).

Дивергенция градиента скалярного поля является лапласианом этого поля и представляет также скалярное поле:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} V \equiv V_{,\,ss} \equiv \nabla^2 V \tag{5.27}$$

Тензоры. Во многих разделах физики мы встречаемся с величинами, законы преобразования которых несколько сложнее, чем для векторов. В качестве примера рассмотрим так называемый „векторный градиент“. Если задано векторное поле V_i, можно образовать совокупность величин, определяющих изменение каждой компоненты V_l при переходе из точки с координатами x_k в произвольном направлении в бесконечно близкую точку с координатами $x_k + \delta x_k$. Приращениями величин V_l будут

$$\delta V_l = V_{l,\,k}\delta x_k, \tag{5.28}$$

девять величин $V_{l,\,k}$ называются векторным градиентом от V_i. Законы преобразования этих величин легко получить обычным способом:

$$V'_{m,\,n'} = c'_{kn}(c_{ml}V_l)_{,\,k} = c_{ml}c_{nk}V_{l,\,k}. \tag{5.29}$$

Векторный градиент является примером нового класса величин, тензоров, к рассмотрению которого мы теперь перейдем. В общем случае тензор имеет N индексов, каждый из которых может принимать значения от 1 до 3. Тензор имеет поэтому 3^N компонент. Эти 3^N компоненты преобразуются согласно следующему закону:

$$T'_{mns\ldots} = c_{mi}c_{nk}c_{sl}\ldots T_{ikl\ldots} \tag{5.30}$$

Число индексов N называется рангом тензора. Векторный градиент является тензором второго ранга, вектор — тензором первого ранга, а скаляр может быть назван тензором нулевого ранга.

Важным тензором является символ Кронекера. Его компоненты во всех координатных системах, согласно (5.30) и (5.7б), одни и те же:

$$\delta'_{kl} = c_{ki}c_{lj}\delta_{ij} = c_{ki}c_{li} = \delta_{kl}. \tag{5.31}$$

Сумма или разность двух тензоров одинакового ранга является тензором того же ранга. Запишем этот закон для тензоров третьего ранга:

$$T_{ikl} + U_{ikl} = V_{ikl}, \tag{5.32}$$

$$T_{ikl} - U_{ikl} = W_{ikl}. \tag{5.33}$$

Доказательство такое же, как для соответствующего векторного закона (5.19).

Произведение двух тензоров рангов M и N является новым тензором ранга $(M+N)$:

$$T_{ik\ldots}U_{lm\ldots} = V_{ik\ldots lm\ldots}. \tag{5.34}$$

Ранг тензора может быть понижен на 2 (или на любое четное число) посредством операции, называемой „свертыванием“. Любые два индекса могут быть превращены в пару немых индексов. Например, свертыванием тензора $T_{ikl\ldots}$ можно получить тензоры $T_{ssl\ldots}$, $T_{irr\ldots}$ и т. д. Очень просто доказать, что в результате свертывания получается тензор. Для первого из приведенных примеров оно проводится так:

$$T'_{ssl\ldots} = c_{si}c_{sk}c_{ln}\ldots T_{ikm\ldots}.$$

В силу (5.10а) правая часть равна

$$T'_{ssl\ldots} = \delta_{ik}c_{lm}\ldots T_{ikm\ldots} = c_{lm}\ldots T_{iim\ldots}. \tag{5.35}$$

При свертывании векторного градиента (тензор второго ранга) мы получаем дивергенцию (тензор нулевого ранга). Операции умножения (5.34) и свертывания могут быть скомбинированы так, что в результате получаются тензоры такие, как

$$T_{ik}U_{lk},\ T_{ik}U_{km},\ T_{ik}U_{ik},\ T_{ik}U_{kl}.$$

Тензоры могут обладать свойствами симметрии по отношению к своим индексам. Если тензор не меняется при перестановке двух или более индексов, он называется симметричным относительно этих индексов. Например:

$$t_{ikl}=t_{kil},$$
$$t_{iklm}=t_{ilkm}=t_{kilm}=t_{lkim}=t_{klim}=t_{likm}.$$

Первый тензор симметричен относительно первых двух индексов, второй тензор симметричен относительно первых трех индексов.

Если компоненты тензора остаются неизменными при четной перестановке индексов и меняют знак при нечетной перестановке, тензор называется антисимметричным (иногда кососимметричным) относительно этих индексов. Например,

$$t_{ikl}=-t_{kil},$$
$$t_{iklm}=t_{klim}=t_{likm}=-t_{ilkm}=-t_{kilm}=-t_{lkim}.$$

Все эти свойства симметрии тензоров являются инвариантными. Доказательство этого элементарно и предоставляется читателю.

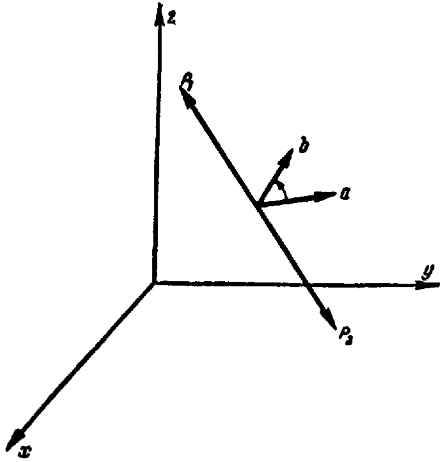
Тензор Кронекера симметричен относительно своих двух индексов.

Тензорный анализ. При дифференцировании тензора по координатам получается тензор, ранг которого выше на единицу. Доказательство опять очень просто:

$$T'_{mn\ldots,s'}=c'_{ls}(c_{mi}c_{nk}\ldots T_{ik\ldots})_{,l}=c_{mi}c_{nk}\ldots c_{sl}T_{ik\ldots,l}. \qquad (5.36)$$

Если тензор получается в результате свертывания по индексу дифференцирования и какому-либо другому индексу, например $T_{ik\ldots k}$, его часто называют дивергенцией.

Тензорные плотности. Векторное произведение двух векторов **a** и **b** обычно определяется как вектор, перпендикулярный к **a** и **b**, а по абсолютной величине равный $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Всегда существуют два вектора, удовлетворяющих этим условиям, как, например, $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ на фиг. 6. Выбор одного из них производится обычно



Фиг. 6. Векторное произведение. В правой системе координат P_1 представляет векторное произведение **a** и **b**.

наложением условия, что векторы **a**, **b** и **P** должны образовывать „винт" того же направления, что и оси координат, взятые в последовательности x, y, z. На фиг. 6 этому условию удовлетворяет вектор $\mathbf{P}_1$ в силу того, что мы выбрали „правую" систему координат. Если произвести зеркальное отражение (например изменить направление оси X на фиг. 6 на обратное), то $\mathbf{P}_2$ автоматически станет векторным произведением **a** и **b**.

Таким образом, векторное произведение не является обычным вектором, так как оно меняет знак при переходе от правой системы координат к левой, и наоборот. Такие величины называются „аксиальными векторами", в то время как обычные векторы называются „полярными векторами".

В декартовой системе координат компоненты **P** имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ P_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ P_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{aligned}\right\} \qquad (5.37)$$

Аналогично **ротор** векторного поля V_i определяется, как „аксиальный вектор" с компонентами

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= V_{3,\,2} - V_{2,\,3}, \\ C_2 &= V_{1,\,3} - V_{3,\,1}, \\ C_3 &= V_{2,\,1} - V_{1,\,2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.38)$$

С точки зрения тензорного анализа можно избежать понятия „аксиального вектора", представляя векторное произведение и ротор как антисимметричные тензоры второго ранга

$$P_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \qquad (5.37\text{a})$$

и

$$C_{ik} = V_{k,\,i} - V_{i,\,k}. \qquad (5.38\text{a})$$

Можно показать, что все уравнения, в которые входят „аксиальные векторы", могут быть записаны ковариантным образом с помощью таких антисимметричных тензоров. Однако такая трактовка недостаточно ясно показывает связь между законами преобразования антисимметричного тензора второго ранга и „аксиального вектора". В то же время, вводя наряду с понятием тензора новое понятие „тензорной плотности" [1]), мы попрежнему можем пользоваться методами обычного векторного анализа.

Тензорные плотности преобразуются так же, как обычные тензоры, с той лишь разницей, что они умножаются еще на детерминант преобразования (5.15). Пока этот детерминант равен $+1$, т. е. пока мы имеем „собственно

---

[1]) В русской литературе вместо термина „тензорная плотность" в случае ортогональных преобразований часто пользуются термином „псевдотензор". (*Прим. ред.*)

ортогональное преобразование" без отражений, не существует разницы между тензорами и тензорными плотностями. Однако при зеркальном отражении происходит изменение знака тензорных плотностей по сравнению со знаком тензоров. Таким образом, тензорные плотности находятся в таком же отношении к обычным тензорам, как „аксиальные векторы" к „полярным векторам". Их закон преобразования может быть записан в виде:

$$\mathfrak{T}'_{mn\ldots} = c_{mi} c_{n\text{ҡ}} \cdots |c_{ab}| \mathfrak{T}_{ik\ldots} \,. \tag{5.39}$$

Для них законы алгебры и анализа таковы: сумма или разность тензорных плотностей одинакового ранга является тензорной плотностью того же ранга. Произведение тензора на тензорную плотность является тензорной плотностью. Произведение двух тензорных плотностей дает тензор. Свертывание тензорной плотности приводит к новой тензорной плотности низшего ранга. Производные компонент тензорной плотности являются компонентами новой тензорной плотности, ранг которой на 1 выше ранга первоначальной тензорной плотности.

Тензорная плотность Леви-Чивита. Мы уже видели, что символ Кронекера представляет собой тензор, компоненты которого имеют одно и то же постоянное значение в любой системе координат. Точно так же существует постоянная тензорная плотность третьего ранга, тензорная плотность Леви-Чивита, определяемая следующим образом. Тензорная плотность δ_{ikl} антисимметрична относительно всех трех индексов; поэтому все ее компоненты, имеющие по крайней мере два одинаковых индекса, равны нулю. Ее неисчезающие компоненты равны ± 1, в зависимости от того, является ли (i, k, l) четной или нечетной перестановкой тройки чисел $(1, 2, 3)$.

Мы должны еще показать, что компоненты δ_{ikl} действительно являются компонентами тензорной плотности. Для этого рассмотрим тензорную плотность D_{ikl}, компоненты которой в одной из систем координат будут равны δ_{ikl}. Если окажется, что и в другой системе координат ее компонентами опять будут δ_{ikl}, наше утверждение будет доказано.

Найдем компоненты D_{ikl} в новой системе координат:

$$D'_{mns} = |c_{ab}|\, c_{mi} c_{nk} c_{sl} \delta_{ikl}. \tag{5.40}$$

Поскольку при преобразовании координат антисимметрия сохраняется, все компоненты D'_{mns}, по крайней мере с двумя одинаковыми индексами, исчезают. Поэтому выпишем только те компоненты, у которых все три индекса различны. Компонента D'_{123} равна:

$$D'_{123} = |c_{ab}|\, c_{1i} c_{2k} c_{3l} \delta_{ikl}. \tag{5.41}$$

Правая часть представляет собой просто квадрат $|c_{ab}|$ и равна единице, так как по определению δ_{ikl} выражение $c_{1i} c_{2k} c_{3l} \delta_{ikl}$ является детерминантом $|c_{ab}|$.

Зная, что D'_{123} равно единице, остальные компоненты легко получить из свойств симметрии:

$$D'_{123} = D'_{231} = D'_{312} = -D'_{132} = -D'_{213} = -D'_{321}. \tag{5.42}$$

Таким образом, D'_{mns} равны δ_{mns}, что и требовалось доказать.

Векторное произведение и ротор. С помощью тензорной плотности Леви-Чивита можно антисимметричный тензор второго ранга поставить в соответствие с векторной плотностью, так что

$$\mathfrak{m}_i = \frac{1}{2} \delta_{ikl} w_{kl}. \tag{5.43}$$

Отсюда

$$w_{kl} = \delta_{kli} \mathfrak{m}_i. \tag{5.44}$$

Применяя уравнение (5.43) к векторному произведению и ротору, определенными соответственно соотношениями (5.37) и (5.38), получим:

$$\mathfrak{P}_i = \delta_{ikl} a_k b_l, \tag{5.37б}$$

$$\mathfrak{C}_i = \delta_{ikl} a_{l,k}. \tag{5.38б}$$

Эти две векторные плотности $\mathfrak{P}_i$ и $\mathfrak{C}_i$ преобразуются аналогично обычным векторам, за исключением изменения знака при зеркальном отражении. Такие векторы в векторном исчислении называют „аксиальными" векторами с целью подчеркнуть, что они в некотором смысле связаны с „вращением".

Эти „аксиальные" векторы действительно связаны с вращением. Например, момент количества движения является векторным произведением радиуса-вектора на количество движения (импульс):

$$\mathfrak{T}_i = \delta_{ikl} x_k p_l. \tag{5.45}$$

Не считая изменения знака при отражении, этот вектор преобразуется как обычный вектор. Предположим, что из всех x_k только x_1 отлично от нуля и что $\mathbf{p}$ имеет только компоненту p_2. Тогда момент количества движения имеет только одну компоненту $\mathfrak{T}_3$. Зеркальное отражение можно произвести тремя различными способами: каждую координату x_i можно заменить на $(-x_i)$, оставляя при этом остальные две координаты неизменными. $\mathfrak{T}_3$ остается неизменным при изменении знака x_3 и меняет знак в двух других случаях. Обычный вектор изменил бы знак только при замене x_3 на $(-x_3)$.

Обобщение. Мы рассмотрели поведение векторов и тензоров в трехмерном пространстве по отношению к ортогональным преобразованиям. Теперь можно обобщить полученные результаты так, чтобы они могли быть использованы в дальнейшем при рассмотрении интересующих нас вопросов. Это обобщение проведем в два этапа. Во-первых, разовьем наш формализм так, чтобы он был применим к пространству произвольного (целого, положительного) числа измерений; во-вторых, рассмотрим преобразования более общего типа, чем ортогональные.

***n*-мерное пространство.** Первое обобщение совершенно тривиально. Вместо трех координат x_1, x_2, x_3 введем n координат $x_1, \ldots, x_n$, описывающих n-мерное многообразие. Предположим опять, что существует инвариантное расстояние между двумя точками

$$s^2 = \Delta x_i \Delta x_i, \tag{5.2б}$$

здесь предполагается суммирование по всем n значениям индекса i. Уравнение (5.2б) инвариантно относительно группы n-мерных ортогональных преобразований

$$x'_i = c_{ik} x_k + \overset{0}{x'_i}, \tag{5.3а}$$

где c_{ik} удовлетворяют условиям

$$c_{ik} c_{il} = \delta_{kl}. \tag{5.10б}$$

Все индексы принимают значения от 1 до n, суммирование также производится от 1 до n. Детерминант $|c_{ab}|$ опять равен ± 1.

Векторы определяются законами преобразования

$$a'_k = c_{ki} a_i, \tag{5.16а}$$

их алгебра и анализ таковы же, как векторные алгебра и анализ в трехмерном пространстве.

Тензоры и тензорные плотности определяются так же, как в трехмерном пространстве, только теперь все индексы пробегают значения от 1 до n. δ_{ik} попрежнему является симметричным тензором.

Тензорная плотность Леви-Чивита определяется следующим образом. $\delta_{ik\ldots s}$ есть тензорная плотность ранга n, антисимметричная по отношению ко всем своим n индексам. Неисчезающие ее компоненты равны ± 1, их знак зависит от четности или нечетности перестановки $(i, k, \ldots, s)$ относительно $(1, 2, \ldots, n)$. „Векторное произведение" не является более векторной плотностью. С помощью тензорной плотности Леви-Чивита из антисимметричного тензора ранга m $(m \leqslant n)$ можно образовать антисимметричную тензорную плотность ранга $(n - m)$. Только при $n = 3$ тензорная плотность, соответствующая тензору второго ранга („дуальная" ему), является векторной плотностью.

Обобщенные преобразования. „Длина" в пространстве Минковского, определяемая по (5.1), имеет вид, отличный от (5.2б). Поэтому в дальнейшем мы не будем ограничиваться преобразованиями, оставляющими инвариантным (5.2б), а рассмотрим более общие преобразования координат. Сперва может показаться, что мы уклоняемся от нашей основной цели, рассматривая преобразования гораздо более общего типа, чем преобразования Лорентца. Однако эти преобразования нам понадобятся в общей теории относительности; помимо этого, поскольку они во многих отношениях так же просты, как и менее общая группа преобразований Лорентца, мы в дальнейшем будем избавлены от ненужных повторений.

Рассмотрим пространство, в котором введена декартова система координат, так что длина определяется согласно (5.2б). Перейдем далее от декартовой системы координат к другой, недекартовой системе. Новые координаты обозначим через $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ (индексы наверху, конечно, не надо путать с показателями степени). Мы имеем тогда:

$$\xi^i = f^i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.46}$$

где n функций f^i произвольны; предполагается только, что они нужное число раз дифференцируемы, что якобиан преобразования

$$\det\left|\frac{\partial \xi^s}{\partial x_r}\right|$$

нигде не обращается в нуль, и что ξ^i действительны для всех действительных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

s^2 — квадратичная форма относительно Δx_i, вообще говоря, не является квадратичной формой относительно $\Delta\xi^i$. Однако квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками продолжает оставаться квадратичной формой по отношению к дифференциалам координат. В декартовых координатах бесконечно малое расстояние определяется соотношением

$$ds^2 = dx_k dx_k. \tag{5.47}$$

Дифференциалы dx_k выражаются через $d\xi^l$ следующим образом:

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi^l} d\xi^l. \tag{5.48}$$

Подставляя это в (5.47), получим:

$$ds^2 = \frac{\partial x_k}{\partial \xi^l} \frac{\partial x_k}{\partial \xi^l} d\xi^l d\xi^l. \tag{5.49}$$

Отсюда видно, что ds^2 является квадратичной формой $d\xi^l$, независимо от выбора системы координат. Это подтверждает, таким образом, что при общих преобразованиях координат роль разностей координат Δx_i и расстояния s, которыми удобно пользоваться в декартовой системе координат при ортогональных преобразованиях, играют дифференциалы координат $d\xi^l$ и дифференциал расстояния ds.

Векторы. Рассмотрим, как преобразуются дифференциалы при общем преобразовании координат. Пусть ξ^l и ξ'^l представляют собой два ряда недекартовых координат. Их дифференциалы связаны тогда уравнениями

$$d\xi'^l = \frac{\partial \xi'^l}{\partial \xi^l} d\xi^l. \tag{5.50}$$

Дифференциалы преобразованных координат $d\xi'^l$ являются линейными однородными функциями от $d\xi^l$; однако коэфициенты преобразования $(\partial \xi'^l / \partial \xi^l)$ не постоянны, а являются функциями от ξ^l. Их детерминант $|\partial \xi'^a / \partial \xi^b|$ также не постоянен. Этими величинами мы воспользуемся для введения геометрического понятия „контравариантного вектора“. Контравариантный вектор имеет n компонент, преобразующихся так же, как дифференциалы координат:

$$a'^l = \frac{\partial \xi'^l}{\partial \xi^l} a^l. \tag{5.51}$$

Сумма и разность контравариантных векторов, а также произведение контравариантного вектора на скаляр представляют собой контравариантные векторы.

Невозможно образовать скалярное произведение только из контравариантных векторов. Чтобы найти в нашем формализме величину, соответствующую скалярному произведению, рассмотрим скалярное поле $V(\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Изменение V при бесконечно малом смещении $\delta\xi^i$ равно:

$$\delta V = V_{,i}\delta\xi^i, \qquad V_{,i} = \frac{\partial V}{\partial \xi^i}. \tag{5.52}$$

Левая часть первого соотношения, очевидно, инвариантна. Правая часть имеет вид скалярного произведения; один из множителей является контравариантным вектором $\delta\xi^i$, второй представляет собой градиент V, т. е. $V_{,i}$.

Компоненты градиента V преобразуются по закону

$$V_{,i'} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^i} V_{,i}. \tag{5.53}$$

$V_{,i'}$ является линейной однородной функцией от $V_{,i}$. Закон преобразования (5.53) отличается от закона преобразования контравариантного вектора. Мы назовем градиент скалярного поля **ковариантным вектором**. В общем случае ковариантный вектор определяют как **совокупность n величин, преобразующихся согласно закону**

$$a_i' = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^i} a_i. \tag{5.54}$$

Сумма и разность ковариантных векторов и произведение ковариантного вектора на скаляр также представляют собой ковариантные векторы.

Для того чтобы различать контравариантные и ковариантные векторы, мы будем первые обозначать индексом сверху, а вторые — индексом снизу.

Коэфициенты преобразования контра- и ковариантных векторов различны, но связаны между собой. Коэфициенты $(\partial\xi'^i/\partial\xi^i)$ уравнения (5.51) и коэфициенты $(\partial\xi^i/\partial\xi'^i)$ уравнения (5.54) связаны друг с другом системой из n^2 соотношений

$$\frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^l}\frac{\partial \xi^k}{\partial \xi'^i} = \delta_l^k, \tag{5.55}$$

где δ_i^k опять означает символ Кронекера, обозначавшийся ранее через δ_{ik}. В силу (5.55) внутреннее (скалярное) произведение ко- и контравариантного векторов является инвариантом:

$$a'_i b'^i = a_i b^i. \tag{5.56}$$

Рассмотрим случай ортогональных преобразований. Их коэфициенты преобразований c_{ik} удовлетворяют (5.7б) и (5.10а). Производные, определяющие в общем случае переход от одних координат к другим, при ортогональном преобразовании равны

$$\frac{\partial x'_l}{\partial x_l} = c_{ll};$$

и так как (5.55) справедливо для любых преобразований, из (5.7б) следует, что также

$$\frac{\partial x_l}{\partial x'_l} = c_{ll}. \tag{5.57}$$

Поэтому, если ограничиться ортогональными преобразованиями, различие между контра- и ковариантными векторами исчезает.

Тензоры. Тензоры определяются как совокупность n^N величин (компонент) (N — ранг тензора), которые преобразуются относительно каждого своего индекса, как вектор. Они могут быть ковариантными во всех индексах, контравариантными во всех индексах или смешанными, т. е. в некоторых индексах ковариантными, а в остальных контравариантными. Те индексы, относительно которых тензор контравариантен, ставятся наверху, а те, относительно которых он ковариантен, ставятся внизу. Для иллюстрации этого определения приведем пример смешанного тензора третьего ранга:

$$t'_{mn\cdot}{}^{s} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^m} \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial \xi'^n} \cdot \frac{\partial \xi'^s}{\partial \xi^l} \cdot t_{ik\cdot}{}^{l}. \tag{5.58}$$

Свойства симметрии тензоров инвариантны относительно преобразований координат, если речь идет об индексах одного типа (ковариантных или контравариантных).

Символ Кронекера является смешанным тензором:

$$\delta'^{l}_{k} = \frac{\partial \xi'^{l}}{\partial \xi^{m}} \cdot \frac{\partial \xi^{n}}{\partial \xi'^{k}} \delta^{m}_{n} = \frac{\partial \xi'^{l}}{\partial \xi^{m}} \frac{\partial \xi^{m}}{\partial \xi'^{k}} = \delta^{l}_{k}. \tag{5.59}$$

Произведение двух тензоров рангов M и N дает тензор ранга $(M+N)$, причем каждый индекс каждого множителя продолжает оставаться ковариантным или контравариантным. Подобно тому как скалярное произведение ко- и контравариантного векторов приводит к скаляру, любые два индекса разного положения (т. е. верхний и нижний) можно использовать для суммирования, и в результате получить тензор на два ранга ниже. Примеры подобных произведений таковы:

$$a_{lt.}{}^{l}\, b^{mn}{}_{..s}, \quad a_{ik.}{}^{l}\, b^{kn}{}_{..s}, \quad a_{ik.}{}^{l}\, b^{kn}{}_{..l}.$$

Если соответствующие компоненты двух тензоров одинакового ранга складываются или вычитаются, их сумма или разность являются компонентами нового тензора в случае, если оба исходных тензора имеют одинаковое число индексов каждого типа.

Таковы простейшие правила тензорной алгебры. Они показывают, как образуются новые величины, преобразующиеся по законам типа (5.58).

Метрический тензор, римановы пространства. Выражение, входящее в (5.49), $g_{il} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi^l}$ при переходе от одной системы ξ^l к другой ξ'^m преобразуется как тензор

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial \xi'^m} \frac{\partial x_k}{\partial \xi'^n} &= \frac{\partial x_k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^m} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \xi^l} \frac{\partial \xi^l}{\partial \xi'^n}; \\ g'_{mn} &= \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^m} \frac{\partial \xi^l}{\partial \xi'^n} g_{il}. \end{aligned}\right\} \tag{5.60}$$

Другими словами, g_{il} является ковариантным симметричным тензором второго ранга. Он называется **метрическим тензором**.

Существуют „пространства", в которых невозможно ввести декартову систему координат. Одним из двумерных „пространств" такого типа является поверхность сферы. Если в качестве координат ввести широту и долготу φ и θ, то расстояние между двумя бесконечно близкими точками на поверхности сферы выразится следующим образом через дифференциалы координат:

$$ds^2 = R^2 (d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\theta^2).$$

Чтобы включить подобные непрерывные многообразия в круг разбираемых вопросов, рассмотрим пространства с некоторым метрическим тензором, не останавливаясь на вопросе о возможности введения в них декартовой системы координат. Образование, в котором задан „квадрат дифференциала длины", т. е. инвариантная однородная квадратичная функция дифференциалов координат, называется „метрическим пространством" или „римановым пространством". Если возможно в римановом пространстве ввести такую систему координат, в которой метрический тензор в каждой точке будет равен δ_{ik}, эта система координат будет декартовой, а пространство называется эвклидовым.

Если бесконечно малое расстояние определяется соотношением

$$ds^2 = g_{il} d\xi^i d\xi^l, \tag{5.61}$$

причем ds^2 инвариант, то g_{il} является ковариантным тензором. Наше предыдущее доказательство основывалось на предположении, что g_{il} равно выражению $\frac{\partial x_k}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \xi^l}$; другими словами, мы предполагали возможность введения декартовой системы координат. Для того чтобы показать, что трансформационные свойства g_{il} не зависят от этого предположения, рассмотрим следующее уравнение:

$$g_{il} d\xi^i d\xi^l = g'_{mn} d\xi'^m d\xi'^n, \tag{5.62}$$

выражающее инвариантность ds^2. Заменяя $d\xi^l$ слева через $(\partial\xi^l/\partial\xi'^m)\cdot d\xi'^m$, получим:

$$g_{ll}\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^m}\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^n}\,d\xi'^m\,d\xi'^n=g'_{mn}d\xi'^m\,d\xi'^n. \tag{5.63}$$

В силу произвольности $d\xi'^m$ можно приравнять коэфициенты с обеих сторон равенства, таким образом показывается справедливость соотношений (5.60).

Если детерминант компонент g_{ll} не равен нулю, можно ввести совокупность новых величин g^{ll} согласно соотношениям

$$g_{lk}g^{kl}=\delta^l_l. \tag{5.64}$$

Чтобы получить их трансформационные свойства, преобразуем сначала g_{lk}. Заменим их выражением

$$g_{lk}=\frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^l}\,\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}\,g'_{mn}, \tag{5.65}$$

тогда получим:

$$\frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^l}\,g'_{mn}\,\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}\,g^{kl}=\delta^l_l;$$

далее умножаем последнее соотношение на $\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^r}\cdot\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l}$. В силу (5.59) правая часть обращается в δ^s_r; для левой части получим:

$$\frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^l}\,\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^r}\,g'_{mn}\,\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}\,g^{kl}\,\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l}=\delta^m_r\,g'_{mn}\,\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}\,\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l}\,g^{kl}=$$

$$=g'_{rn}\,\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}\,\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l}\,g^{kl},$$

так что

$$g'_{rn}\,\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}\,\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l}\,g^{kl}=\delta^s_r. \tag{5.66}$$

Сравнение (5.66) с (5.64) дает

$$\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^k}\,\frac{\partial\xi'^s}{\partial\xi^l}\,g^{kl}=g'^{ns}, \tag{5.67}$$

т. е. g^{kl} являются компонентами контравариантного тензора. Тензор этот симметричен. Это можно показать, умножая (5.64) на $g_{ls}g^{ir}$. Тогда левая часть будет равна

$$g_{ik}g^{kl}g_{ls}g^{ir} = g_{kl}g^{ir}g^{kl}g_{sl} = \delta^r_k g^{kl}g_{sl} = g_{sl}\,g^{rl},$$

в то время как правая часть обращается в

$$\delta^l_i g_{ls}g^{ir} = g_{is}g^{ir} = g_{si}g^{ir} = \delta^r_s,$$

т. е. мы видим, что

$$g_{sl}g^{rl} = \delta^r_s,$$

и, сравнивая это соотношение с (5.64), находим

$$g^{kl} = g^{lk}. \tag{5.68}$$

Тензор g^{kl} называется контравариантным метрическим тензором. Значения его компонент, как ясно из (5.64), равны минорам от g_{kl}, деленным на детерминант $g = |\,g_{ab}|$:

$$g^{kl} = g^{-1}\cdot\text{minor}\ (g_{kl}). \tag{5.69}$$

В декартовой системе координат g^{kl} равно δ_{kl}.

Поднятие и опускание индексов. Ковариантный вектор может быть получен из контравариантного умножением на метрический тензор и суммированием по паре индексов:

$$a_i = g_{ik}a^k. \tag{5.70}$$

Обратный процесс производится умножением a_i на контравариантный метрический тензор:

$$a^k = g^{ik}a_i. \tag{5.71}$$

Из определения контравариантного метрического тензора (5.64) следует, что уравнение (5.71) эквивалентно уравнению (5.70), другими словами, уравнение (5.71) приводит к тому же контравариантному тензору, который фигурирует в (5.70). Два вектора a_i и a^k могут поэтому рассматриваться, как два равноправных описания одного и того же геометрического понятия. Операции (5.70) и (5.71) называются поднятием и опусканием индексов. Таким же образом поднимаются и опускаются индексы у тензоров

Норма вектора определяется скаляром

$$a^2 = g_{ik}a^i a^k = g^{ik}a_i a_k = a^i a_i, \tag{5.72}$$

скалярное произведение двух векторов может быть записано в любой из следующих форм:

$$a_i b^i = a^i b_i = g_{ik}a^i b^k = g^{ik}a_i b_k. \tag{5.73}$$

Тензорные плотности. Тензорная плотность Леви-Чивита. *Тензорной плотностью называется совокупность величин, преобразующихся по закону:*

$$\mathfrak{T}'^{m\dots}_{\cdot\dots n\dots} = \frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^i}\dots\frac{\partial\xi^k}{\partial\xi'^n}\dots\left|\frac{\partial\xi^a}{\partial\xi'^b}\right|^W \mathfrak{T}^{i\dots}_{\cdot\dots k\dots}, \tag{5.74}$$

где W—постоянная, величина является характеристикой данной тензорной плотности; эта постоянная называется весом тензорной плотности. Тензоры—это тензорные плотности веса нуль. В зависимости от числа индексов говорят также о скалярной и векторной плотностях.

Сумма двух тензорных плотностей с одинаковым числом индексов каждого типа и одинакового веса является тензорной плотностью с теми же характеристиками. При умножении их веса складываются.

Символы Леви-Чивита $\delta_{a_1\dots a_n}$ и $\delta^{a_1\dots a_n}$ представляют собой соответственно тензорные плотности с весом (-1) и $(+1)$, (n—числю измерений). Доказательство этого утверждения просто и аналогично тому, которое было дано при рассмотрении ортогональных преобразований.

Детерминант ковариантного метрического тензора

$$g = |g_{ik}| \tag{5.75}$$

является скалярной плотностью с весом 2.

Заметим, что с тензорными плотностями иам почти не придется иметь дела.

Тензорный анализ[1]**.** Рассмотрением тензорных плотностей мы полностью завершили изложение тензорной алгебры; точнее, мы описали последнюю настолько полно, насколько это нам потребуется. Теперь мы перейдем к тензорному анализу. Мы уже видели, что обыкновенные производные скалярного поля представляют собой компоненты ковариантного векторного поля. Однако в общем случае производные тензорного поля не образуют нового тензорного поля.

Рассмотрим производную вектора. Производная связывает значение вектора в одной точке с его значением в другой бесконечно близкой к ней точке. При преобразовании координат векторы в обеих точках имеют различные коэфициенты преобразования, так как последние являются функциями координат. Поэтому производные коэфициентов преобразования входят в закон преобразования производных вектора.

Однако существует способ получения новых тензоров в результате дифференцирования. Этот способ основан на аналогии с дифференцированием в декартовых координатах. Там мы получали производные вектора или тензора следующим образом: сначала вектор переносился в „соседнюю" точку без изменения величины своих компонент, т. е. *параллельно самому себе*. (Пока мы пользуемся декартовой системой координат, это понятие имеет инвариантный смысл, так как коэфициенты преобразования одинаковы в обеих точках.) Затем этот параллельно перенесенный вектор сравнивается с вектором (как функцией координат) в этой же точке. Их разность представляется как $A_{i,\,s}\,\delta x_s$. Если бы было возможно в соседней точке ввести понятия „тот же вектор" или „параллельный вектор", разность между параллельно перенесенным вектором

---

[1] Тензорный анализ в обобщенных координатах понадобится нам в дальнейшем для понимания общей теории относительности. Для изучения специальной теории относительности его знание не является необходимым. Поэтому читатели, не интересующиеся общей теорией относительности, могут пропустить этот и следующий разделы.

и вектором поля в этой точке преобразовывалась бы как вектор в этой же точке.

Определение параллельного переноса действительно можно ввести сравнительно простым образом. При этом величина смещенного вектора зависит как от исходного вектора, так и от направления переноса. Рассмотрим сперва эвклидово пространство, в котором можно ввести декартову систему координат. В этой системе закон параллельного переноса имеет вид

$$a_{l,\,k}\delta x_k = 0, \tag{5.76}$$

где δx_k представляет собой бесконечно малое смещение. Введем теперь произвольное преобразование координат (5.46). Компоненты вектора в новой системе координат отметим штрихами. Мы имеем:

$$a_l = \frac{\partial \xi^r}{\partial x_l} a'_r,$$

$$\frac{\partial a_l}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi^s}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial \xi^s}\left(\frac{\partial \xi^r}{\partial x_l} a'_r\right) = \frac{\partial \xi^s}{\partial x_k}\frac{\partial \xi^r}{\partial x_l}\frac{\partial a'_r}{\partial \xi^s} +$$

$$+ \frac{\partial \xi^s}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial \xi^s}\frac{\partial^2 \xi^r}{\partial x_l\,\partial x_l} a'_r.$$

Так как δx_k преобразуется согласно (5.48), получим

$$0 = a_{l,k}\delta x_k = \left\{\frac{\partial \xi^r}{\partial x_l}\frac{\partial a'_r}{\partial \xi^s} + \frac{\partial^2 \xi^r}{\partial x_l\,\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial \xi^s} a'_r\right\}\delta\xi^s. \tag{5.76a}$$

Величины $\frac{\partial a'_r}{\partial \xi^s}\delta\xi^s$ являются приращениями a'_r в результате смещения и могут быть обозначены чарез $\delta a'_r$. Умножая правую часть уравнения (5.76а) на $\frac{\partial x_l}{\partial \xi^t}$, получим окончательно $\left(\text{так как } \frac{\partial \xi^r}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial \xi_t} = \delta^r_t\right)$:

$$\delta a'_t = -\frac{\partial x_l}{\partial \xi^s}\frac{\partial x_l}{\partial \xi^t}\frac{\partial^2 \xi^r}{\partial x_l\,\partial x_l} a'_r\delta\xi^s. \tag{5.77}$$

Если нельзя ввести декартову систему координат, мы, сохраняя линейную форму последнего уравнения, предположим, что при параллельном переносе бесконечно малые изменения компонент вектора являются билинейной функцией компонент вектора и компонент бесконечно малого смещения:

$$\delta a^i = -\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^i_{kl} a^k \delta\xi^l, \tag{5.78}$$

$$\delta a_k = +\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^i_{kl} a_i \delta\xi^l. \tag{5.79}$$

Коэфициенты $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^i_{kl}$ и $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^i_{kl}$ этих новых предполагаемых законов остаются пока совершенно неопределенными. Однако можно найти их законы преобразования. δa^l является разностью векторов в двух точках с координатами ξ^l и $\xi^l + \delta\xi^l$. При преобразовании координат новые $\delta a'^k$ получаются следующим образом:

$$\delta a'^k = \left(\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s} a^s\right)_{\xi^l+\delta\xi^l} - \left(\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s} a^s\right)_{\xi^l} = \frac{\partial}{\partial\xi^l}\left(\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s} a^s\right)\delta\xi^l =$$

$$= \frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l} a^s\delta\xi^l + \frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s} a^s{}_{,l}\delta\xi^l = \frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l} a^s\delta\xi^l + \frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s}\delta a^s. \tag{5.80}$$

Уже указывалось, что δa^s не преобразуется как вектор, что явилось источником наших затруднений.

Подставим (5.80) в левую часть уравнения

$$\delta a'^k = -\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{mn} a'^m \delta\xi'^n$$

и заменим a'^m и $\delta\xi'^n$ их выражениями из (5.51) и (5.50). Тогда получим:

$$\frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l} a^s\delta\xi^l + \frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^s}\delta a^s = -\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{mn}\frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^s} a^s \frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^l}\delta\xi^l.$$

Подставляя далее δa^s из (5.78), найдем

$$\left(\frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l} - \frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^r}\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^r_{sl}\right) a^s\delta\xi^l = -\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{mn}\frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^s}\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^l} a^s\delta\xi^l.$$

Так как и a^s и $\delta\xi^l$ произвольны, коэфициенты при них должны быть равны:

$$\frac{\partial\xi'^m}{\partial\xi^s}\frac{\partial\xi'^n}{\partial\xi^l}\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{mn}=\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^r}\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^r_{sl}-\frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l}.$$

Закон преобразования для $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^r_{sl}$ получается после умножения на $\dfrac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\;\dfrac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^b}$:

$$\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{ab}=\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^b}\left(\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^r}\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^r_{sl}-\frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l}\right). \tag{5.81}$$

Последний член справа может быть записан в несколько иной форме:

$$-\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^b}\frac{\partial^2\xi'^k}{\partial\xi^s\,\partial\xi^l}=-\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\frac{\partial}{\partial\xi^s}\left(\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^b}\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^l}\right)+$$

$$+\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^l}\frac{\partial}{\partial\xi^s}\left(\frac{\partial\xi^l}{\partial\xi'^b}\right)=-\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^a}\frac{\partial}{\partial\xi^s}(\delta^k_b)+\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^l}\frac{\partial^2\xi^l}{\partial\xi'^a\,\partial\xi'^b}.$$

Первый член справа равен нулю, так как выражение в круглых скобках постоянно. (5.81), таким образом, дает:

$$\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}'^k_{ab}=\frac{\partial\xi'^k}{\partial\xi^l}\left(\frac{\partial\xi^r}{\partial\xi'^a}\frac{\partial\xi^s}{\partial\xi'^b}\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^l_{rs}+\frac{\partial^2\xi^l}{\partial\xi'^a\,\partial\xi'^b}\right). \tag{5.82}$$

Аналогичными рассуждениями из (5.79) получим закон преобразования для $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^k_{ab}$. Он таков же, как и для $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^k_{ab}$.

Теперь можно наложить на $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^k_{ab}$ и $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^k_{ab}$ условия, совместимые с их законами преобразования. Эти формулы преобразования содержат два члена. Один из них зависит от Γ^k_{ab} в старой системе координат и имеет тот же вид, что и закон преобразования тензоров. Второй член не зависит от Γ^k_{ab} и симметричен в своих нижних индексах. Поэтому, если Γ^k_{ab} и равны нулю в одной системе координат, они все же будут отличны от нуля в другой системе. Однако симметрия Γ^k_{ab} по отношению к нижним индексам сохраняется во всех системах координат, если она существует хотя бы в одной из них. Это, в частности, справедливо, когда Γ^k_{ab} исчезает в одной из систем. Далее, если $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^k_{ab}$ и $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^k_{ab}$ равны в одной системе, они остаются равными при произвольном преобразовании координат. Мы увидим, что геометрические соображения приводят нас только к таким системам Γ^k_{ab}, которые обладают обоими упомянутыми свойствами.

Произведем параллельный перенос двух векторов a_l и b^l на бесконечно малое расстояние $\delta\xi^l$. Изменение их скалярного произведения $a_l b^l$ будет равно

$$\delta(a_l b^l) = a_l \delta b^l + b^l \delta a_l = a_l b^k \left(\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^l_{kl} - \overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^l_{kl} \right) \delta\xi^l. \quad (5.83)$$

П р и п а р а л л е л ь н о м п е р е н о с е д в у х в е к т о р о в и х с к а л я р н о е п р о и з в е д е н и е о с т а е т с я п о с т о я н н ы м т о г д а и т о л ь к о т о г д а, к о г д а $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^l_{kl}$ с о о т в е т с т в е н н о р а в н ы $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^l_{kl}$.

Фактически предположение о равенстве $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^l_{kl}$ и $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^l_{kl}$ основывается не только на том обстоятельстве, что в декартовых координатах скалярное произведение двух постоянных векторов постоянно, но и на более общих соображениях, не связанных с декартовыми системами координат.

Обобщая закон или определение „параллельного" переноса (5.78), (5.79) на тензоры, будем производить „параллельное" смещение согласно следующему правилу:

$$\delta t_{ik.}{}^{l} = \left(\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^r_{is} t_{rk.}{}^{l} + \overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}^r_{ks} t_{ir.}{}^{l} - \overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}^l_{rs} t_{ik.}{}^{r} \right) \delta\xi^s. \quad (5.84)$$

Это правило основывается на том предположении, что „параллельный перенос" произведения производится по тому же закону, и что дифференцирование произведения:

$$\delta(abc) = ab\ \delta c + ac\ \delta b + bc\ \delta a. \quad (5.85)$$

При параллельном переносе тензора Кронекера, согласно (5.84), получим:

$$\delta(\delta_i^k) = \left(\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}_{is}^r \delta_r^k - \overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}_{rs}^k \delta_i^r\right) \delta\xi^s = \left(\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}_{is}^k - \overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}_{is}^k\right) \delta\xi^s. \quad (5.86)$$

Далее, из (5.86) и (5.85) имеем для „параллельного переноса" произведения $a^i\delta_i^k$:

$$\delta(a^i\delta_i^k) = \delta_i^k\delta a^i + a^i\delta(\delta_i^k) = \delta a^k + a^i\delta(\delta_i^k).$$

С другой стороны, это произведение равно a^k. Отсюда:

$$\delta a^k = \delta a^k + a^i\delta(\delta_i^k)$$

и в силу этого $\delta(\delta_i^k)$ должно обращаться в нуль. Соответственно имеем:

$$\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}{}_{is}^k = \overset{\mathrm{I}}{\Gamma}{}_{is}^k. \quad (5.87)$$

В дальнейшем различительные индексы I и II будем опускать.

Как уже отмечалось, Γ_{is}^k симметричны в своих нижних индексах, если возможно ввести такую систему координат, в которой Γ_{is}^k равны нулю, хотя бы в локальной области. С этого момента следует все время иметь в виду, что в дальнейшем будут рассматриваться только симметричные Γ_{is}^k. При этом Γ_{is}^k остаются еще в значительной степени произвольными. Однако они определятся однозначно, если их связать с метрическим тензором g_{ik} с помощью следующего условия: результат параллельного смещения вектора **a** должен быть одним и тем же как при применении закона (5.78) к его контравариантным координатам, так и при применении закона (5.79) к его ковариантным координатам. В этих двух представлениях a^i и a_k соответственно имеют в точке $(\xi^s + \delta\xi^s)$ значения $(a^i + \delta a^i)$ и $(a_k + \delta a_k)$, где δa^i и δa_k даются с помощью (5.78) и (5.79). Условие того, что эти два вектора являются представлениями одного и того же вектора $(\mathbf{a}+\delta\mathbf{a})$ в точке $(\xi^s+\delta\xi^s)$, выражается формулой:

$$a_k+\delta a_k=(g_{ik}+\delta g_{ik})(a^i+\delta a^i), \tag{5.88}$$

где

$$\delta g_{ik}=g_{ik,l}\delta\xi^l.$$

С точностью до членов высшего порядка по отношению к дифференциалам формула (5.88) должна быть справедлива для произвольных a^i и $\delta\xi^s$. Раскрывая скобки в правой части (5.88), получим:

$$\delta a_k=a^i g_{ik,l}\ \delta\xi^l+g_{ik}\delta a^i.$$

Подставляя δa_k и δa^i из (5.78) и (5.79), найдем

$$\Gamma^i_{kl}a_i\delta\xi^l=a^i g_{ik,l}\ \delta\xi^l-g_{ik}\Gamma^i_{sl}\ a^s\delta\xi^l$$

или

$$a^s\delta\xi^l(g_{si}\Gamma^i_{kl}+g_{ik}\Gamma^i_{sl}-g_{sk,l})=0, \tag{5.88a}$$

где a^s и $\delta\xi^l$ произвольны; поэтому выражение в скобках должно равняться нулю.

Далее используем условия симметрии и выпишем обращающееся в нуль выражение, три раза переставляя индексы:

$$\Gamma^r_{is}g_{kr}+\Gamma^r_{ks}g_{ir}-g_{ik,s}=0,$$
$$\Gamma^r_{ik}g_{rs}+\Gamma^r_{sk}g_{ir}-g_{is,k}=0,$$
$$\Gamma^r_{ki}g_{rs}+\Gamma^r_{si}g_{rk}-g_{ks,i}=0.$$

Первое уравнение вычитаем из суммы двух других. После приведения подобных членов получим уравнение:

$$g_{rs}\Gamma^r_{ik}=\frac{1}{2}\ (g_{is,k}+g_{ks,i}-g_{ik,s}). \tag{5.89}$$

Отсюда умножением на g^{sl} найдем окончательное выражение для Γ^l_{ik}:

$$\Gamma^l_{ik}=\frac{1}{2}g^{ls}(g_{is,k}+g_{ks,i}-g_{ik,s}). \tag{5.90}$$

Это выражение обычно называют символом Кристоффеля второго рода и обозначают знаком $\left\{ {l \atop ik} \right\}$,

$$\left\{ {l \atop ik} \right\} = \frac{1}{2} g^{ls} (g_{is,k} + g_{ks,i} - g_{ik,s}). \qquad (5.90a)$$

Левая часть уравнения (5.89) называется символом Кристоффеля первого рода. Он обозначается знаком $[ik,\ s]$,

$$[ik,\ s] = \frac{1}{2}(g_{is,k} + g_{ks,i} - g_{ik,s}). \qquad (5.89a)$$

В декартовых координатах оба символа Кристоффеля обращаются в нуль.

Понятие параллельного переноса является независимым от существования метрического тензора. Пространство, в котором определен закон параллельного переноса, назовем пространством аффинной связности, а Γ^l_{ik} — коэфициентами аффинной связности (affine connection). Когда задана метрика, ковариантные и контравариантные векторы эквивалентны; при этом Γ^l_{ik} принимает значение $\left\{ {l \atop ik} \right\}$, так что параллельный перенос вектора не зависит от выбора одного из двух возможных представлений.

Вернемся теперь к нашей первоначальной задаче — к образованию новых тензоров при помощи дифференцирования. Рассмотрим „тензорное поле", т. е. тензор, компоненты которого являются функциями координат. Возьмем тензор в точке (ξ^s) и сместим его параллельно самому себе в точку $(\xi^s + \delta\xi^s)$. Вычтем из величины тензорного поля в точке $(\xi^s + \delta\xi^s)$ тензор, параллельно перенесенный в эту точку; эта разность также будет тензором. В случае смешанного тензора второго ранга его значение в точке $(\xi^s + \delta\xi^s)$ будет

$$t_{i\cdot}^{k} + t_{i\cdot,s}^{k}\,\delta\xi^s,$$

а для значения параллельно перенесенного тензора найдем:

$$t_{i\cdot}^{k} + \left(\left\{ {r \atop is} \right\} t_{r\cdot}^{k} - \left\{ {k \atop rs} \right\} t_{i\cdot}^{r}\right)\delta\xi^s.$$

Разность этих двух выражений равна

$$\left(t_{i\cdot,s}^{k} - \left\{ {r \atop is} \right\} t_{r\cdot}^{k} + \left\{ {k \atop rs} \right\} t_{i\cdot}^{r}\right)\delta\xi^s. \qquad (5.91)$$

То, что это выражение является тензором, видно из метода его получения. Так как $\delta\xi^s$ — произвольный вектор, выражение в скобках также является тензором. Этот тензор называется ковариантной производной от $t_{i\cdot}^{k}$ по ξ^s. Ковариантная производная идентична с обычной производной, если $\left\{ {l \atop ik} \right\}$ обращается в нуль, как это имеет место, например, в декартовых координатах. Приведем два из часто встречающихся обозначений ковариантной производной $\nabla_s t_{i\cdot}^{k}$ и $t_{i\cdot;s}^{\ k}$. Мы будем употреблять последнее.

Ковариантные производные произвольного тензора получаются прибавлением к обычным производным добавочных членов. Каждому контравариантному индексу соответствует добавочный член вида

$$t_{\ldots\ldots;s}^{\quad l} = \ldots + \left\{ {l \atop rs} \right\} t_{\ldots\ldots}^{\quad r} + \ldots,$$

а к ковариантному индексу член вида

$$t_{\ldots k \ldots;s} = \ldots - \left\{ {r \atop ks} \right\} t_{\ldots r \ldots} + \ldots .$$

Это определение удовлетворяет правилу дифференцирования произведения

$$(AB\ldots)_{;s} = A_{;s}B\ldots + AB_{;s}\ldots + \ldots,$$

независимо от того, будут ли некоторые из индексов у A, B, ... немыми.

Ковариантные производные метрического тензора равны нулю, так как равно нулю выражение в скобках в (5.88а), В силу того, что ковариантное дифференцирование согласуется с законом дифференцирования произведения, можно поднимать и опускать индексы под знаком дифференцирования:

$$a_{l;s} = g_{lk}a^{k}_{\ ;s} \text{ и т. д.} \tag{5.92}$$

Геодезические линии. Символы Кристоффеля связаны не только с ковариантным дифференцированием или с параллельным переносом. Они также тесно связаны с задачами, непосредственно относящимися к метрике пространства, например с задачей нахождения дифференциальных уравнений „прямых“ линий, т. е. кратчайших линий в пространстве обобщенных координат. В эвклидовом пространстве кратчайшей линией, соединяющей две точки, является прямая. В общем случае римановых пространств линии, обладающие свойствами прямой, могут и не существовать; однако, вообще говоря, можно однозначно определить линию, являющуюся кратчайшей между двумя точками. Например, на поверхности сферы этими линиями являются большие круги. Такие кратчайшие линии называются **геодезическими**. Длина произвольной линии, соединяющей две точки P_1 и P_2, равна

$$s_{12}=\int_{P_1}^{P_2} ds=\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{g_{ik}d\xi^i d\xi^k}=\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{g_{ik}\frac{d\xi^i}{dp}\frac{d\xi^k}{dp}}\,dp, \qquad (5.93)$$

где p — произвольный параметр.

Чтобы найти минимум выражения s_{12} при фиксированных пределах интегрирования, произведем варьирование согласно уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$\delta\int_A^B L(y_\alpha, y'_\alpha)\,dx=\int_A^B\sum_\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial y_\alpha}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'_\alpha}\right)\right]\delta y_\alpha dx. \qquad (5.94)$$

Экстремали при этом определяются уравнениями

$$\frac{\partial L}{\partial y_\alpha}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'_\alpha}\right)=0. \qquad (5.95)$$

В нашем случае лагранжианом является подинтегральная функция в последнем выражении уравнения (5.93), где роль переменных y_α играют координаты ξ^l. Производные $\frac{\partial L}{\partial \xi^l}$ и $\frac{\partial L}{\partial \xi^{l'}}$ даются выражениями $\left(\xi^{l'}\text{ обозначает здесь }\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)$:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^l}=\frac{\partial L}{\partial g_{ik}}g_{ik,l}=\frac{1}{2}\frac{g_{ik,l}\xi^{i'}\xi^{k'}}{\sqrt{g_{rs}\xi^{r'}\xi^{s'}}}=\frac{1}{2}g_{ik,l}\xi^{i'}\xi^{k'}\frac{dp}{ds},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^{l'}}=\frac{g_{il}\xi^{i'}}{\sqrt{g_{rs}\xi^{r'}\xi^{s'}}}=g_{il}\xi^{i'}\frac{dp}{ds}.$$

Далее

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^{l'}}\right)=\frac{dp}{ds}\left[g_{il,k}\xi^{i'}\xi^{k'}+g_{il}\xi^{i''}-g_{il}\xi^{i'}\frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2}\right].$$

Отсюда имеем:

$$\delta s_{12}=\int\limits_{P_1}^{P_2}\frac{dp}{ds}\left\{\left(\frac{1}{2}g_{ik,l}-g_{il,k}\right)\xi^{i'}\xi^{k'}-g_{il}\xi^{i''}+\right.$$

$$\left.+g_{il}\xi^{i'}\frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2}\right\}\delta\xi^l dp. \qquad (5.96)$$

Выражение в скобках симметризуем по индексам i и k, так как они умножаются на выражения, симметричные относительно этих индексов:

$$\delta s_{12}=-\int\limits_{P_1}^{P_2}\frac{dp}{ds}\left\{\frac{1}{2}\left(g_{il,k}+g_{kl,i}-g_{ik,l}\right)\xi^{i'}\xi^{k'}+\right.$$

$$\left.+g_{il}\xi^{i''}-g_{il}\xi^{i'}\frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2}\right\}\delta\xi^l dp. \qquad (5.97)$$

В скобках стоит то же самое выражение, что и в уравнении (5.89а). Дифференциальные уравнения геодезических линий, таким образом, получаем в виде

$$[ik,\, l]\,\xi^{i'}\xi^{k'}+g_{il}\xi^{i''}-g_{il}\xi^{i'}\frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2}=0,$$

или после умножения на g^{ls}:

$$\xi^{s''}+\left\{{s \atop ik}\right\}\xi^{i'}\xi^{k'}-\xi^{s'}\frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2}=0. \qquad (5.98)$$

Если за параметр выбрать длину дуги, последний член исчезает, и мы получаем

$$\frac{d^2\xi^l}{ds^2}+\left\{ {l \atop ik} \right\}\frac{d\xi^i}{ds}\frac{d\xi^k}{ds}=0. \tag{5.99}$$

В декартовой системе координат второй член тождественно равен нулю, и уравнение (5.99) в этом случае выражает просто тот факт, что ξ^l является линейной функцией от s.

Мир Минковского и преобразования Лорентца. Вернемся теперь к нашему исходному пункту: к теории относительности в трактовке Минковского. По представлениям Минковского, обычное трехмерное пространство и время образуют четырехмерный континуум, „мир" с инвариантной „длиной" или „интервалом", определением которых служит формула (5.1). „Мировая точка" — это обычная точка, рассматриваемая в определенный момент времени; ее четыре координаты x, y, z и t в дальнейшем часто будут обозначаться через x^1, x^2, x^3 и x^4. Вводя „метрический тензор" $\eta_{\mu\nu}$ с компонентами

$$\eta_{\mu\nu}=\left\{\begin{matrix} -\frac{1}{c^2}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{c^2}, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & -\frac{1}{c^2}, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & +1 \end{matrix}\right\}, \tag{5.100}$$

мы сможем записать **(5.1)** в виде

$$\tau_{12}^2=\eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu. \tag{5.101}$$

Преобразования Лорентца — это такие линейные преобразования координат, которые переводят метрический тензор $\eta_{\mu\nu}$ в самого себя. Поэтому инерциальные системы специальной теории относительности аналогичны декартовым системам координат обычной трехмерной эвклидовой геометрии, а преобразования Лорентца соответствуют обычным трехмерным ортогональным преобразованиям. Коэфициенты этих преобразований подчиняются условиям типа (5.10а).

При произвольном линейном преобразовании (не обязательно преобразовании Лорентца) уравнения преобразования имеют вид:

$$x^{*\varkappa} = \gamma^{\varkappa}_{\iota} x^{\iota} + x^{*\varkappa}_{0}, \tag{5.102}$$

разности координат при этом преобразуются, как контравариантные векторы:

$$\Delta x^{*\varkappa} = \gamma^{\varkappa}_{\iota} \Delta x^{\iota}. \tag{5.103}$$

Для того чтобы преобразование было лорентцовым, необходимо соблюдение следующих условий при произвольных Δx^{ι}:

$$\eta_{\mu\nu} \Delta x^{*\mu} \Delta x^{*\nu} = \eta_{\iota\varkappa} \Delta x^{\iota} \Delta x^{\varkappa}. \tag{5.104}$$

Подставляя $\Delta x^{*\mu}$ из (5.103), получим

$$\eta_{\mu\nu} \gamma^{\mu}_{\iota} \gamma^{\nu}_{\varkappa} \Delta x^{\iota} \Delta x^{\varkappa} = \eta_{\iota\varkappa} \Delta x^{\iota} \Delta x^{\varkappa}, \tag{5.105}$$

и в силу произвольности Δx^{ι}

$$\eta_{\mu\nu} \gamma^{\mu}_{\iota} \gamma^{\nu}_{\varkappa} = \eta_{\iota\varkappa}. \tag{5.106}$$

Таким условиям должны удовлетворять коэфициенты преобразований Лорентца, что соответствует условиям (5.10а) для ортогональных преобразований.

Разница между четырехмерным эвклидовым пространством и миром Минковского заключается в том, что в последнем инвариант τ^2_{12} не является положительно определенной формой. По этой причине не существует вещественных преобразований координат, переводящих форму (5.101) в форму (5.2б). Поэтому нам придется делать различие между ковариантными и контравариантными индексами.

Чтобы отличать координаты и тензоры в мире Минковского от координат и тензоров в обычном трехмерном пространстве, условимся относительно некоторых обозначений. Именно, латинские индексы будут относиться к обычному трехмерному пространству и пробегать значения от 1 до 3;

греческие индексы — к миру Минковского и пробегать значения от 1 до 4. Векторы и тензоры в мире Минковского мы будем называть „мировыми векторами“ и „мировыми тензорами“.

Контравариантный метрический тензор имеет компоненты

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} -c^2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -c^2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -c^2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & +1 \end{Bmatrix} \tag{5.107}$$

Если коэфициенты преобразования контравариантных тензоров γ^{ρ}_{σ} определяются условиями (5.106), то коэфициенты преобразования ковариантных тензоров являются решениями уравнений

$$\gamma^{\rho}_{\ \sigma}\gamma_{\rho}^{\ \tau} = \delta^{\tau}_{\sigma}. \tag{5.108}$$

Для получения явного выражения этих коэфициентов γ_{ρ}^{τ}, умножим уравнения преобразования ковариантного вектора

$$v^{*}_{\alpha} = \gamma_{\alpha}^{\ \beta} v_{\beta} \tag{5.109}$$

на $\eta^{\alpha\rho}$ и заменим v_{β} через $\eta_{\beta\sigma}v^{\sigma}$. В результате получим

$$\eta^{\alpha\rho}v^{*}_{\alpha} = \eta^{\alpha\rho}\gamma_{\alpha}^{\ \beta}\eta_{\beta\sigma}v^{\sigma}.$$

Выражение слева равно $v^{*\rho}$ и, следовательно, равно $\gamma^{\rho}_{\ \sigma}v^{\sigma}$, так что

$$\gamma^{\rho}_{\ \sigma}v^{\sigma} = \eta^{\rho\alpha}\gamma_{\alpha}^{\beta}\eta_{\beta\sigma}v^{\sigma}.$$

Далее в силу произвольности v^{σ} приравниваем коэфициенты:

$$\gamma^{\rho}_{\ \sigma} = \eta^{\rho\alpha}\gamma_{\alpha}^{\ \beta}\eta_{\beta\sigma}. \tag{5.110}$$

Наконец, умножая на $\eta_{\rho\mu}\eta^{\sigma\nu}$ и свертывая, получим

$$\gamma_{\mu}^{\nu} = \eta_{\mu\rho}\gamma^{\rho}_{\ \sigma}\eta^{\sigma\nu}. \tag{5.111}$$

Все алгебраические операции обобщенного тензорного исчисления применимы и к мировым тензорам. Детерминант коэфициентов преобразования, как и в случае ортогональных преобразований, принимает только значения ± 1. Поэтому тензорные плотности с четным весом преобразуются как тензоры, а тензорные плотности с нечетным весом — подобно „аксиальным" векторам трехмерного ортогонального формализма.

Компоненты метрического тензора $\eta_{\mu\nu}$ постоянны; соответственно, символы Кристоффеля равны нулю, и ковариантные производные совпадают с обычными производными. Такие обычные производные мы будем обозначать запятой:

$$\frac{\partial t^{\cdots}_{\cdots}}{\partial x^{\alpha}} = t^{\cdots}_{\cdots,\,\alpha}\,. \tag{5.112}$$

Теперь покажем, как коэфициенты преобразования Лорентца связаны с относительной скоростью двух систем координат: S и S^*. При равномерном и прямолинейном движении точки скорость ее определяется отношениями разностей координат любых двух мировых точек, лежащих на ее траектории:

$$u^i = \frac{\Delta x^i}{\Delta x^4}\,.$$

Скорость системы S относительно S^* есть скорость относительно S^* частицы P, покоящейся в системе S. В системе S первые три координатные разности частицы P, Δx^i равны нулю. Поэтому разности координат в системе S^* равны:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x^{*i} &= \gamma^i{}_4 \Delta x^4, \\ \Delta x^{*4} &= \gamma^4{}_4 \Delta x^4. \end{aligned}\right\} \tag{5.113}$$

Следовательно, скорость S относительно S^* будет равна:

$$v^{*i} = \frac{\gamma^i_4}{\gamma^4_4}\,. \tag{5.114}$$

С другой стороны, можно найти скорость S^* относительно S, используя коэфициенты „обратного" преобразования γ^{ν}_{μ}, определяемые уравнениями (5.108). Поскольку эти последние являются коэфициентами преобразования $S^* \longrightarrow S$, согласно (5.114), можно написать

$$v^l = \frac{\gamma_4{}^l}{\gamma_4{}^4}. \tag{5.115}$$

Используя уравнения (5.111), (5.100) и (5.107), правую часть можно записать в виде

$$v^l = -c^2 \frac{\gamma^4{}_l}{\gamma^4{}_4}. \tag{5.116}$$

Далее легко показать, что v^{*2} равно v^2. Образуем сперва трехмерную норму вектора v^{*l}, определяемого уравнением (5.114):

$$v^{*2} = \sum_{l=1}^{3} \frac{(\gamma^l{}_4)^2}{(\gamma^4{}_4)^2}.$$

В силу (5.106) для числителя можно написать

$$\sum_{l=1}^{3} (\gamma^l_4)^2 = c^2 [(\gamma^4{}_4)^2 - 1],$$

откуда найдем

$$v^{*2} = c^2 \frac{(\gamma^4{}_4)^2 - 1}{(\gamma^4{}_4)^2}. \tag{5.117}$$

Таким же образом преобразуем уравнение (5.116), имеем:

$$v^2 = c^4 \sum_{l=1}^{3} \frac{(\gamma^4{}_l)^2}{(\gamma^4{}_4)^2}.$$

Аналогично получаем

$$\sum_{l=1}^{3} (\gamma^4_l)^2 = \frac{1}{c^2} [(\gamma^4_4)^2 - 1]$$

и

$$v^2 = c^2 \frac{(\gamma^4_4)^2 - 1}{(\gamma^4_4)^2}. \tag{5.118}$$

Отсюда мы видим, что γ^4_4 всегда определяется выражением

$$\gamma^4_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (5.119)$$

Траектории, мировые линии. Обычно движение частицы вдоль траектории описывается заданием функциональной зависимости ее трех пространственных координат от времени t:

$$x^i = f^i(t). \qquad (5.120)$$

Компоненты скорости определяются производными

$$u^i = \frac{df^i}{dt} = \dot{x}^i. \qquad (5.121)$$

В теории относительности такой способ описания можно применять с таким же успехом, как и в нерелятивистской физике. Однако часто бывает удобно выбрать такой способ описания, при котором временная координата не играет обособленной роли по отношению к пространственным, как это имеет место в (5.120) и (5.121).

Движение точечной массы в мире Минковского изображается так называемой „мировой линией“, которую лучше всего описывать в параметрическом представлении

$$x^\mu = g^\mu(p), \qquad (5.122)$$

где p — произвольный параметр, определенный вдоль мировой линии. Такое параметрическое описание обычно употребляется в аналитической геометрии.

В трехмерной геометрии в качестве параметра p часто выбирают длину дуги. В мире Минковского таким параметром удобно считать собственное время τ вдоль мировой линии. Так же как длина дуги s в обычной геометрии определяется линейным интегралом

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

τ представляется интегралом дифференциала $d\tau$ вдоль мировой линии частицы

$$\int d\tau = \int \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)} =$$

$$= \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}\, d\tau. \qquad (5.123)$$

Поэтому траекторию можно описывать уравнениями вида

$$x^\mu = F^\mu(\tau), \qquad (5.124)$$

где τ связано с x^μ дифференциальным уравнением. Деля подинтегральное выражение в (5.123) на dt и учитывая (5.121), получим

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \qquad (5.125)$$

Обычное описание скорости тела с помощью (5.120) и (5.121) при четырехмерном описании заменяется рассмотрением направления мировой линии. Если тело покоится, эта линия параллельна оси X^4. При движении тела мировая линия будет направлена под углом к оси X^4. Ее направление можно описывать при помощи касательного вектора

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \qquad (5.126)$$

Четыре величины U^μ являются компонентами контравариантного единичного вектора

$$\eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1. \qquad (5.127)$$

Это легко проверить, подставляя в уравнение (5.126) $d\tau$ согласно его определению

$$d\tau = \sqrt{\eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu}.$$

Компоненты U^μ находятся в простой связи с компонентами скорости u^i, фигурирующей в уравнениях (5.121), используя (5.125), получим

$$\left.\begin{aligned} U^4 &= \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ U^i &= \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = u^i U^4. \end{aligned}\right\} \qquad (5.128)$$

В следующих главах будем считать, что u^i и U^μ имеют тот же смысл, что и в настоящей главе. v^i будет использоваться исключительно для обозначения относительного движения двух систем координат.

При равномерном движении тела его направление в мире Минковского постоянно, и мировая линия является прямой. При таком описании закон инерции принимает особенно простую форму:

$$U^\mu = \text{const}. \qquad (5.129)$$

Задачи

1. Доказать, что правая часть в (5.90а) преобразуется согласно (5.82).

2. Доказать инвариантность свойств симметрии относительно индексов, имеющих один и тот же трансформационный характер.

3. Определить в трехмерном римановом пространстве дифференциальные операции градиента (скаляра), дивергенции и ротора и доказать справедливость соотношения

$$\text{rot grad}\, V = 0.$$

Рассматривая „аксиальные" векторы как антисимметричные тензоры второго ранга, определить также дивергенцию аксиального вектора и доказать соотношение

$$\text{div rot}\, \mathbf{A} = 0,$$

где $\mathbf{A}$ — полярный вектор.

4. Доказать справедливость в трехмерном пространстве следующих соотношений:

$$\delta_{ikl}\delta^{lkm} = 2\delta_l^m; \quad \delta_{ikl}\delta^{lmn} = \delta_k^m\delta_l^n - \delta_k^n\delta_l^m.$$

Найти аналогичные соотношения в мире Минковского.

5. Пользуясь соотношениями задачи 4, доказать справедливость в декартовой трехмерной геометрии следующего тождества:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A},$$

где **A** может быть как полярным, так и аксиальным вектором.

6. Вычислить в трехмерном пространстве два тройных произведения полярных векторов:

$$[\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]], \ (\mathbf{A}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]).$$

7. Ввести на плоскости полярные координаты.

а) Найти компоненты метрического тензора.

б) Составить дифференциальные уравнения прямых линий.

8. На поверхности сферы радиуса R ввести так называемые однородные координаты Римана, которые характеризуются следующим выражением для бесконечно малого расстояния

$$ds^2 = f(\xi^2+\eta^2)(d\xi^2+d\eta^2), \text{ где } f(0)=1.$$

а) Найти функцию $f(\xi^2+\eta^2)$ и уравнения преобразования, связывающие римановы координаты с обычными координатами долготы и широты.

Ответ.

$$f = \left[\frac{R^2}{R^2+\frac{1}{4}(\xi^2+\eta^2)}\right]^2,$$

$$\xi = \frac{2R\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\cos\theta,$$

$$\eta = \frac{2R\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\sin\theta.$$

б) Найти дифференциальные уравнения больших кругов в обеих системах координат.

Замечание. Координаты Римана получаются при известном из теории функций комплексного переменного конформном преобразовании плоскости в сферу.

9. Оператор Лапласа в обобщенных координатах в n-мерном пространстве определяется, как дивергенция градиента скаляра:

$$\nabla^2 V = g^{rs} V_{;\,rs}.$$

а) Преобразовать правую часть, используя $\left\{ {i \atop mn} \right\}$.

б) Ввести систему координат, координатные линии которой всюду взаимно ортогональны, другими словами, в которой элемент длины имеет вид:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (h_i)^2 (d\xi^i)^2, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

где h_i являются функциями ξ^s.

Выразить лапласиан через h_i.

Ответ.

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\Pi} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Pi}{\varepsilon_i (h_i)^2} V_{,\,i} \right)_{,\,i}, \quad \Pi = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n.$$

Замечание. Это выражение часто используется для написания уравнения Шредингера в недекартовых координатах. Читатель легко может получить выражения для $\nabla^2 V$ в трех измерениях в сферических, цилиндрических и других координатах.

10. а) Показать справедливость следующего соотношения в n-мерном пространстве:

$$\left\{ {s \atop ms} \right\} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g})_{,\,m}, \quad g = |g_{ik}|.$$

б) Показать, что, если V^i является вектором, а F^{ik} — антисимметричным контравариантным тензором, то нижеследующие выражения представляют собой соответственно скаляр и вектор

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g}\, V^i)_{,\,i}; \quad \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g}\, F^{ik})_{,\,k}.$$

в) Выражение $\nabla^2 V$ в обобщенных координатах привести к форме, которая являлась бы обобщением соотношения, приведенного в ответе к задаче 9 (б).

11. Пусть V_i вектор, а F_{ik} — аитисимметричный тензор. Показать, что нижеследующие величины ведут себя как тензоры при произвольных преобразованиях, несмотря на то, что производные берутся не ковариантные, а обыкновенные:

$$V_{i,k} - V_{k,i};\quad F_{ik,l} + F_{kl,i} + F_{li,k}.$$

12. Неравенство Шварца

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^2$$

означает, что в n-мерном эвклидовом пространстве любая сторона треугольника меньше суммы двух других. Это утверждение можно записать в виде

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a} + \mathbf{b}|.$$

Возведя в квадрат, получаем

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \geqslant \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

Приводя подобные члены и возводя еще раз в квадрат, получим неравенство Шварца.

Вводя подходящую декартову систему координат, доказать неравенство Шварца, показав тем самым, что приведенное выше утверждение относительно сторон треугольника справедливо в пространстве любого числа измерений.

Другой метод доказательства может основываться на использовании положительной нормы векторного произведения

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} (a_i b_k - a_k b_i)^2 = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^2.$$

13. В n-мерном эвклидовом пространстве можно ввести m единичных взаимно ортогональных векторов $(\overset{1}{v}_i, \ldots, \overset{m}{v}_i)$; $m \leqslant n$;

$$\overset{k}{v}_i \overset{l}{v}_i = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, m; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Показать, что для любого вектора (f_i) справедливо неравенство Бесселя:

$$\sum_{s=1}^{n} \{ f_s^2 - [\sum_{a=1}^{m} (f_i \overset{a}{v}_i) \overset{a}{v}_s]^2 \} \geqslant 0.$$

Это неравенство переходит в равенство при $m = n$.

14. Доказать, что векторное поле V_i в n-мерном пространстве может быть представлено, как поле градиента скалярной функции в том и только в том случае, если его ротор равен нулю:

$$V_{i,k} - V_{k,i} = 0.$$

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА ТОЧЕЧНЫХ МАСС

*

Задачи релятивистской механики. В главе IV мы возвели только фундамент специальной теории относительности. Однако до сих пор мы рассматривали только равномерное прямолинейное движение. Употребляемые нами для определения значений координат часы и масштабы двигались без ускорений. Мы заменили уравнения преобразования Галилея (4.14), связывающие две инерциальные системы, уравнениями Лорентца (4.13). Так же как и уравнения Галилея, эти последние являются линейными уравнениями преобразования, т. е. новые значения координат (пространства и времени) являются линейными функциями старых. Поэтому неускоренное движение в некоторой инерциальной системе остается неускоренным и после преобразований Лорентца.

Закон инерции (2. 1) *инвариантен относительно преобразований Лорентца.*

В оставшихся главах I части рассмотрим ускоренное движение, другими словами, построим релятивистскую механику. Это более сложно, чем построение механики классической, так как возникают двоякие затруднения. Во-первых, уравнения классической механики ковариантны относительно преобразований Галилея, но не по отношению к преобразованиям Лорентца. Поэтому мы должны развить лорентц-инвариантный формализм так, чтобы наши положения не зависели от выбора системы координат.

Вторая трудность имеет еще более глубокий смысл. В классической механике сила, действующая на тело в некоторый момент времени, определяется положением всех взаимодействующих тел в тот же момент времени. Закон „дальнодействующих" сил может быть сформулирован только в том случае, если имеет смысл выражение „положение всех взаимодействующих тел в тот же момент времени", т. е. если понятие „тот же момент" не зависит от выбора системы отсчета. Как мы знаем, такое условие не совместимо с теорией относительности.

Поэтому невозможно автоматически преобразовать каждый классический закон сил в лорентц-ковариантную форму. Мы можем иметь дело только с такими теориями, из которых может быть исключено понятие действия на расстоянии. Такая возможность существует в теории столкновений, поэтому в этой главе мы ограничимся в основном рассмотрением сил, возникающих при соударениях тел.

„Дальнодействие" можно исключить также при рассмотрении движения электрических зарядов в электромагнитном поле. Оказалось, что закон Кулона, основывающийся на понятии действия на расстоянии, справедлив только в электростатике. В общем случае сила, действующая на заряженную частицу, определяется не только положением окружающих зарядов. Однако релятивистское выражение для электромагнитных пондеромоторных сил может быть дано лишь после того, как мы познакомимся с законами преобразования электромагнитных полей. Поэтому мы начнем с рассмотрения теории столкновений.

Теория столкновений фактически является идеализацией, применяемой в обычной механике системы точечных масс в том случае, когда радиус действия сил мал в сравнении с размерами механической системы.

Предполагается, что взаимодействие имеет место только в продолжение того промежутка времени, когда расстояния между двумя телами или точечными массами бесконечно малы. До и после этого бесконечно малого интервала времени тела движутся неускоренно. В течение короткого времени взаимодействия справедливы законы сохранения энергии и импульса. Если при ударе сохраняется кинетическая энергия, мы говорим об *упругом* ударе; если же часть или вся кинетическая энергия переходит в другие формы энергии (тепло и так далее), говорят о **неупругом** ударе. Естественно, что механизм упругого удара более прост.

Законы сохранения. В классической механике существуют четыре закона сохранения: три для трех компонент импульса изолированной системы и один для ее энергии. При преобразовании пространственных координат три закона сохранения импульса преобразуются, как компоненты трехмерного вектора, в то время как закон сохранения энергии является инвариантом.

По отношению к преобразованиям Галилея законы сохранения импульса инвариантны, в то время как закон сохранения энергии оказывается справедливым в новой системе только в силу соблюдения законов сохранения энергии *и* импульса в старой системе. Классические законы сохранения не ковариантны относительно преобразований Лорентца, содержащих время. Поэтому их нужно сделать лорентц-ковариантными, причем последние должны переходить в классические законы при малых скоростях.

Релятивистские законы преобразования должны иметь такие же трансформационные свойства относительно преобразования пространственных координат, как и классические законы; иначе говоря, это опять должны быть векторный закон (с тремя компонентами) в случае импульса и скалярный закон в случае энергии. Этим в значительной мере определяется форма релятивистских законов.

Состояние движения точечной массы (т. е. так называемой материальной точки) полностью определяется ее массой m и скоростью $\mathbf{u}$. Если „релятивистский импульс" точечной массы при преобразовании пространственных координат преобразуется как вектор, и если этот импульс зависит только от состояния движения массы, то вектор импульса должен быть параллелен скорости u^i [см. (5.121)], так как скорость является единственным вектором, имеющимся в нашем распоряжении, иначе говоря, количество движения точечной массы должно записываться в виде

$$p_s = \mu(m, u)\, u^s, \tag{6.1}$$

где u абсолютная величина скорости, а μ функция от m и u, которая еще должна быть определена.

По тем же соображениям энергия должна быть также некоторой функцией от m и u. Эта функция связана с μ тем условием, что изменение энергии является произведением изменения импульса во времени на пройденный путь, т. е. скалярным произведением изменения импульса на скорость:

$$dE = d\mathbf{p}\cdot\mathbf{u} = d(\mu\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} = d(\mu u^2) - \mu\mathbf{u}\,d\mathbf{u} =$$
$$= d(\mu u^2) - \mu u\,du = u d(\mu u),$$

или

$$\frac{dE}{dt} = u\frac{d}{dt}(\mu u). \tag{6.2}$$

Если функция μ известна, решая уравнение (6.2), можно определить функцию E.

Нахождение выражения для импульса. Для определения функции μ рассмотрим в качестве примера такое упругое соударение двух частиц, при котором в одной из систем координат скорости частиц до и после столкновения одинаковы. В этом случае μ будет постоянной величиной. Законы сохранения полностью определяют направления скоростей после столкновения. Далее можно показать, что при переходе к другой системе координат μ нужно выбрать единственным образом, совместимым с законами сохранения в новой системе.

Пусть две равные точечные массы m приближаются к началу координат системы S с противоположных направлений и достигают его в момент $t=0$. Их скорости соответственно имеют компоненты

$$\left.\begin{aligned} u_{1x} &= a = -u_{2x}, \\ u_{1y} &= b = -u_{2y}, \\ u_{1z} &= 0 = u_{2z}. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Уравнениями движения до столкновения будут:

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{x} &= at = -\underset{2}{x}, \\ \underset{1}{y} &= bt = -\underset{2}{y}, \\ \underset{1}{z} &= \underset{2}{z} = \quad 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Предположим, что после столкновения x-компоненты скоростей остаются неизменными, а y-компоненты меняют знак. Таким образом скорости масс после столкновения будут равны:

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{\bar{u}_x} &= -\underset{2}{\bar{u}_x} = a, \\ \underset{1}{\bar{u}_y} &= -\underset{2}{\bar{u}_y} = -b, \\ \underset{1}{\bar{u}_z} &= \quad \underset{2}{\bar{u}_z} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

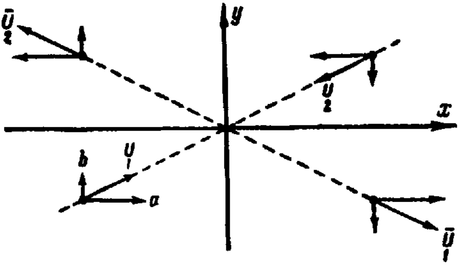
а уравнения движения

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{\bar{x}} &= -\underset{2}{\bar{x}} = at, \\ \underset{1}{\bar{y}} &= -\underset{2}{\bar{y}} = -bt, \\ \underset{1}{\bar{z}} &= \quad \underset{2}{\bar{z}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

Такое движение изображено на фиг. 7. Величина скоростей в результате столкновения не меняется, скорости обеих частиц остаются одинаковыми.

Несмотря на то, что до сих пор не делалось еще никаких предположений относительно функциональной зависимости μ от m и от u, можно быть уверенным, что наш пример не противоречит релятивистским закоиам сохранения. Таким образом, поведение частиц в нашем примере описано правильно, независимо от тех изменений законов классической механики, которые вызываются условиями релятивистской инвариантности.

В классической механике μ предполагается равным m (т. е. не зависит от u). Классические законы верны, по крайней мере приближенно, для малых (в сравнении с c) скоростей; поэтому μ при $u \to 0$ должно принять значение m. Для получения зависимости μ от u рассмотрим



Фиг. 7. Столкновение двух частиц, имеющих одинаковые массы и скорости.

поведение наших частиц в новой системе S^*. Система S^* связана с исходной системой S уравнениями (4.13) или (4.15). Чтобы избежать ненужных усложнений, выберем относительную скорость v систем S^* и S, равной постоянной a из равенств (6.3) и последующих.

Преобразуя уравнения (6.4) и (6.6), получим уравнения движения до столкновения

$$\left.\begin{aligned} &\underset{1}{x}^* = 0, && \underset{2}{x}^* = -\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}} t^*, \\ &\underset{1}{y}^* = \frac{bt^*}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && \underset{2}{y}^* = -\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}} bt^*, \end{aligned}\right\} \qquad (6.4a)$$

и после столкновения

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{1}{\bar{x}}{}^*=0, && \underset{2}{\bar{x}}{}^*=-\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}t^*,\\
&\underset{1}{\bar{y}}{}^*=-\frac{bt^*}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && \underset{2}{\bar{y}}{}^*=+\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}bt^*.
\end{aligned}\right\} \tag{6.6a}$$

Скорости до столкновения будут

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{1}{u}{}_x^*=0, && \underset{2}{u}{}_x^*=-\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}},\\
&\underset{1}{u}{}_y^*=\frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && \underset{2}{u}{}_y^*=-\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}b,\\
&\underset{1}{u}{}^*=\frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && \underset{2}{u}{}^*=\frac{\sqrt{4a^2+b^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{a^2}{c^2}},
\end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

а после столкновения

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{1}{\bar{u}}{}_x^*=0, && \underset{2}{\bar{u}}{}_x^*=-\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}},\\
&\underset{1}{\bar{u}}{}_y^*=-\frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && \underset{2}{\bar{u}}{}_y^*=\frac{\sqrt{1-a^2/c^2}}{1+a^2/c^2}b,\\
&\underset{1}{\bar{u}}{}^*=\frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}, && \underset{2}{\bar{u}}{}^*=\frac{\sqrt{4a^2+b^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{a^2}{c^2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Используя выражения (6.7) и (6.8), можно составить уравнения для „импульсов“, содержащие неизвестную функцию μ. Обозначим „импульсы“ отдельных частиц через $\underset{1}{\mathbf{p}}$ и $\underset{2}{\mathbf{p}}$, а их сумму, „полный импульс“, через $\mathbf{p}$. До столкновения имеем:

$$\left.\begin{aligned} p^*_x &= \underset{1}{p}{}^*_x + \underset{2}{p}{}^*_x = 0 - \mu(m, \underset{2}{u}{}^*) \frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}, \\ p^*_y &= \underset{1}{p}{}^*_y + \underset{2}{p}{}^*_y = \mu(m, \underset{1}{u}{}^*) \frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} - \\ &\quad - \mu(m, \underset{2}{u}{}^*) \frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}} b, \end{aligned}\right\} \qquad (6.9)$$

а после столкновения

$$\left.\begin{aligned} \overline{p}{}^*_x &= 0 - \mu(m, \underset{2}{\overline{u}}{}^*) \frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}, \\ \overline{p}{}^*_y &= -\mu(m, \underset{1}{\overline{u}}{}^*) \frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} + \mu(m, \underset{2}{\overline{u}}{}^*) \frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}} b. \end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

Закон сохранения для p^*_x удовлетворяется, если $\underset{2}{u}{}^*$ равно $\underset{2}{\overline{u}}{}^*$, в этом случае величина $\mu(m, \underset{2}{u}{}^*)$ равна $\mu(m, \underset{2}{\overline{u}}{}^*)$. С другой стороны, если $\underset{1}{u}{}^*$ равно $\underset{1}{\overline{u}}{}^*$, то p^*_y отличается от $\overline{p}{}^*_y$ только знаком. Отсюда следует, что закон сохранения для p^*_y требует, чтобы p^*_y обращалось в нуль. Таким образом, мы получаем функциональные уравнения для μ:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu(m, \underset{1}{u^*}) - \frac{1-\frac{a^2}{c^2}}{1+\frac{a^2}{c^2}}\mu(m, \underset{2}{u^*}) = 0,\\
&\underset{1}{u^*} = \frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}},\\
&\underset{2}{u^*} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{a^2}{c^2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Переходя к пределу $b \longrightarrow 0$, получим более простое уравнение:

$$\mu(m, 0) = \frac{1-\frac{a^2}{c^2}}{1+\frac{a^2}{c^2}}\mu\left(m, \frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}\right). \tag{6.12}$$

Уже было отмечено, что $\mu(m, 0)$ равно m. Для получения явного вида функции μ введем в качестве второго аргумента μ переменную u:

$$\left.\begin{aligned}
&u = \frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}, \quad a = \frac{c^2}{u}\left[1 \pm \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right],\\
&\frac{1-\frac{a^2}{c^2}}{1+\frac{a^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},
\end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

тогда уравнение (6.12) примет вид:

$$\mu(m, u) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{6.14}$$

Другими словами, если вообще существуют лорентц-ковариантные законы сохранения, то встречающиеся в них векторные величины должны иметь вид:

$$p_s = \sum_a \frac{\underset{a}{m}\underset{a}{u^s}}{\sqrt{1-\frac{\underset{a}{u^2}}{c^2}}}. \tag{6.15}$$

Это выражение называют „релятивистским" импульсом, чтобы отличать его от аналогичного классического вектора.

Релятивистская энергия одной точечной массы находится из (6.2):

$$\frac{dE}{dt} = u\frac{d}{dt}\left(\frac{um}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right), \tag{6.16}$$

иначе говоря, релятивистская кинетическая энергия равна

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + E_0, \tag{6.17}$$

где E_0 — постоянная интегрирования.

Лорентц-ковариантность новых законов сохранения. Не пользуясь формализмом, развитым в предыдущей главе было бы трудно доказать лорентц-ковариантный характер выражений (6.15) и (6.17). Однако, используя этот формализм, доказать ковариантность указанных выражений весьма просто. Так, сравнивая (6.15) с (5.128), увидим, что компоненты релятивистского импульса a-той частицы представляют собой первые три компоненты контравариантного мирового вектора $\underset{a}{m}\,\underset{a}{U^i}$, четвертой компонентой которого будет

$$\underset{a}{m}\,\underset{a}{U^4} = \frac{\underset{a}{m}}{\sqrt{1-\frac{\underset{a}{u^2}}{c^2}}}. \tag{6.18}$$

Это выражение в c^2 раз меньше релятивистской энергии (6.17) без постоянного члена. Четыре уравнения

$$\left.\begin{aligned} \sum_a \frac{m_a u_a^s}{\sqrt{1-\frac{u_a^2}{c^2}}} &= \text{const}, \\ \sum_a \frac{m_a}{\sqrt{1-\frac{u_a^2}{c^2}}} &= \text{const} \end{aligned}\right\} \qquad (6.19)$$

являются, таким образом, ковариантными. Первый член уравнения (6.17) называется полной (релятивистской) энергией частицы. В силу своих трансформационных свойств он должен рассматриваться как фундаментальное выражение для энергии. Так как это выражение не обращается в нуль при $\mathbf{u} \to 0$, то его часто разделяют на два выражения: mc^2 и

$$T = mc^2 \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right]. \qquad (6.20)$$

Величина mc^2 называется „энергией покоя“ частицы, а T — ее „релятивистской кинетической энергией“.

Связь между энергией и массой. Величину μ, выражающую зависимость импульса от массы, часто называют „релятивистской массой“ частицы, а m соответственно „массой покоя“. Релятивистская масса равна полной энергии, деленной на c^2; масса же покоя в c^2 раз меньше энергии покоя. Таким образом, в теории относительности существует весьма тесная связь между массой и энергией, не имеющая аналога в классической физике.

Эта связь делается еще более явной при рассмотрении неупругих соударений. Из классической физики известно, что при неупругих соударениях закон сохранения импульса применим без изменений, в то время как кинетическая энергия частично преобразуется в другие формы энергии.

Принимая во внимание преобразования Лорентца, мы найдем, что закон сохранения импульса выполняется только в том случае, если выполняется также закон сохранения энергии в форме (6.19); это означает, что если кинетическая энергия (6.20) механической системы уменьшается, должна увеличиваться ее энергия покоя, поэтому по крайней мере некоторые из входящих в систему масс покоя должны увеличиться. Таким образом, мы приходим к заключению, что все формы энергии свазаны с массой соотношением

$$\Delta E = c^2 \Delta m. \tag{6.21}$$

Установление эквивалентности энергии и массы является, по всей вероятности, важнейшим достижением релятивистской механики. Эта эквивалентность объясняет, например, дефект массы, наблюдающийся в атомных ядрах.

В классической физике существуют два отдельных закона сохранения: законы сохранения массы и энергии. В релятивистской механике имеется один общий закон сохранения полной энергии изолированной системы, причем массы покоя образующих систему точечных масс меняются при переходе кинетической энергии в другие формы энергии, и наоборот. Масса материального тела остается приблизительно постоянной, пока основная часть его энергии, энергия покоя, не участвует в подобных изменениях. Однако масса покоя меняется существенно, если энергии взаимодействия того же порядка величины, что и энергия покоя. Это имеет место во многих ядерных реакциях и особенно при рождении или аннигиляции электронно-позитронных пар.

При малых значениях $\frac{u}{c}$ релятивистская кинетическая энергия (6.20) переходит в классическое выражение, что легко видеть из разложения в ряд

$$mc^2 \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] = \frac{m}{2} u^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{u^2}{c^2} + \ldots \right). \tag{6.20a}$$

Четырехмерный вектор

$$p^\rho = mU^\rho \tag{6.22}$$

часто называют вектором энергии-импульса.

Эффект Комптона. Интересным приложением релятивистских законов сохранения является теория эффекта Комптона. Рассмотрим „столкновение" γ-кванта и свободного электрона. При этом можно определить длину волны γ-кванта и скорость электрона после соударения, не делая никаких предположений относительно природы сил взаимодействия.

Формулы (6.15) и (6.17) неприменимы для γ-кванта, так как знаменатель $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ обращается в нуль при u, равном c. Более того, не имеет смысла говорить о „массе покоя" фотона, так как не существует системы отсчета, в которой он покоился бы. Вместо (6.17) будем использовать квантово-механическую связь между частотой и энергией

$$E = h\nu, \tag{6.23}$$

где h — постоянная Планка.

Компоненты импульса и энергия, деленная на c^2, образуют контравариантный мировой вектор. С другой стороны, частота ν преобразуется так, что выражение

$$\nu t - \frac{\nu}{c} k_s x^s \tag{6.24}$$

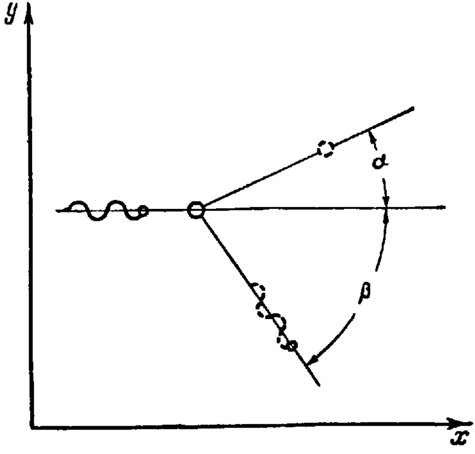
является инвариантом ($\mathbf{k}$ — трехмерный единичный вектор, перпендикулярный к фронту волны). Следовательно, величины $\left(-\frac{\nu}{c}\mathbf{k}, \nu\right)$ являются компонентами ковариантного мирового вектора, а величины $(+c\mathbf{k}\nu, \nu)$ в силу этого представляют контравариантные компоненты того же мирового вектора. Из уравнений преобразования, связывающих $\mathbf{p}$ с $\frac{E}{c^2}$, следует тогда, что импульс γ-кванта должен даваться выражением

$$\mathbf{p}_{\gamma} = h \frac{\nu}{c} \mathbf{k}, \tag{6.25}$$

а его величина равна

$$p_{\gamma} = h \frac{\nu}{c}. \tag{6.26}$$

Сформулируем теперь условия, определяющие столкновение γ-кванта с электроном. Предположим, что первоначально γ-квант движется параллельно оси X, электрон покоится (фиг. 8).



Фиг. 8. Эффект Комптона.

Массу покоя электрона обозначим через m. После столкновения электрон будет двигаться под некоторым углом α к оси X, а γ-квант другой частоты $\bar{\nu}$ движется после столкновения в другом направлении, определяемом углом β. Введем такие координаты, так чтобы все траектории лежали в плоскости X, Y.

До столкновения полная энергия E и полный импульс P задаются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} E &= mc^2 + h\nu, \\ P &= \frac{h\nu}{c}. \end{aligned}\right\} \tag{6.27}$$

После соударения энергия равна

$$\bar{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + h\bar{\nu}, \tag{6.28}$$

а компоненты полного импульса в направлениях x и y будут

$$\left.\begin{aligned} \bar{P}_1 &= \frac{h\bar{\nu}}{c}\cos\beta + \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cos\alpha, \\ \bar{P}_2 &= -\frac{h\bar{\nu}}{c}\sin\beta + \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

Принимая во внимание законы сохранения, получим

$$\left.\begin{aligned} mc^2 + h\nu &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + h\bar{\nu}, \\ \frac{h\nu}{c} &= \frac{h\bar{\nu}}{c}\cos\beta + \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\cos\alpha, \\ 0 &= -\frac{h\bar{\nu}}{c}\sin\beta + \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

Нас интересует $\bar{\nu}$ как функция угла рассеяния β. Поэтому исключим из уравнений сначала α, а затем u. Для исключения α изолируем в уравнениях для импульсов члены, содержащие α, затем возведем эти уравнения в квадрат и сложим. В результате вместо двух последних уравнений

(6.30) получим уравнение

$$\frac{h^2}{c^2}(\nu^2 - 2\nu\bar{\nu}\cos\beta + \bar{\nu}^2) = \frac{m^2u^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{6.31}$$

В первом уравнении (6.30) избавляемся от корня, изолируя член, его содержащий, и возводя в квадрат:

$$m^2c^2 + 2mh(\nu - \bar{\nu}) + \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 - 2\nu\bar{\nu} + \bar{\nu}^2) = \frac{m^2c^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{6.32}$$

Далее, вычитая (6.32) из (6.31), исключим u:

$$m(\nu - \bar{\nu}) - \frac{h}{c^2}(1 - \cos\beta)\nu\bar{\nu} = 0. \tag{6.33}$$

Для того чтобы получить обычно употребляющееся выражение, заменим $1 - \cos\beta$ на $2\sin^2\frac{\beta}{2}$ и вместо частоты введем длину волны согласно формуле:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \bar{\nu} = \frac{c}{\bar{\lambda}}. \tag{6.34}$$

Окончательно получим

$$\bar{\lambda} - \lambda = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\beta}{2}. \tag{6.35}$$

Наибольшее изменение длины волны имеет место, когда γ-квант рассеивается в обратном направлении. Оно равно в этом случае удвоенному значению так называемой комптоновской длины волны $\frac{h}{mc}$.

Релятивистская аналитическая механика. Теперь можно перейти к рассмотрению основ релятивистской аналитической механики. При этом предполагается, что читатель хорошо знаком с основными положениями классической аналитической механики, в силу чего последующий обзор будет затрагивать только те вопросы, которые имеют непосредственное отношение к содержанию этой книги.

Дифференциальные уравнения движения механической (классической) системы, подвергающейся действию консервативных сил, записываются в виде

$$\frac{\partial L}{\partial x^s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}\right)=0,\ L=T-V, \tag{6.36}$$

где T — кинетическая, а V — потенциальная энергия. Записанные так уравнения движения ковариантны не только относительно ортогональных преобразований пространственных координат, но и относительно произвольных преобразований n координат, соответствующих n степеням свободы системы.

Это так называемые уравнения Эйлера-Лагранжа для вариационной проблемы. Вариационная проблема — это проблема нахождения таких кривых, соединяющих две фиксированные точки, вдоль которых данный криволинейный интеграл принимает экстремальное значение. Рассмотрим $(n+1)$-мерное пространство с координатами x^s и t и криволинейный интеграл

$$I=\int_{P_1}^{P_2} L dt, \tag{6.37}$$

подинтегральная функция которого вдоль пути интегрирования зависит от координат x^s (и, возможно, t) и производных $\frac{dx^s}{dt}$. Варьируя при фиксированных конечных точках путь интегрирования на бесконечно малую величину, получим

$$\delta I=\int_{P_1}^{P_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^s}\delta x^s+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}\delta \dot{x}^s\right)dt=$$

$$=\int_{P_1}^{P_2}\left[\frac{\partial L}{\partial x^s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}\right)\right]\delta x^s dt, \tag{6.38}$$

где $\dot{x}^s$ обозначает $\frac{dx^s}{dt}$. Отсюда видно, что вдоль путей интегрирования, на которых величина I экстремальна, справедливы уравнения (6.36).

Импульсы определяются уравнениями

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}. \tag{6.39}$$

С помощью этих соотношений n дифференциальных уравнений (6.36) второго порядка могут быть преобразованы в $2n$ уравнений первого порядка. Для этого нужно решить n уравнений (6.39) относительно $\dot{x}^s$ и образовать так называемую функцию Гамильтона

$$H = -L + p_s \dot{x}^s, \tag{6.40}$$

где $\dot{x}^s$ предполагаются замененными решениями уравнений (6.39). Уравнения движения принимают теперь „канонически ческую" форму:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^s &= \frac{\partial H}{\partial p_s}, \\ \dot{p}_s &= -\frac{\partial H}{\partial x^s}. \end{aligned}\right\} \tag{6.41}$$

Этот формализм в целом ковариантен относительно общих преобразований трех пространственных координат (в действительности, даже относительно более общих преобразований). Особенностью, представляющей для нас специфический интерес, является возможность введения вместо времени t другого параметра. Обозначим этот параметр через θ и определим его уравнением

$$dt = \frac{dt}{d\theta} d\theta, \tag{6.42}$$

где $\frac{dt}{d\theta}$ предполагается заданным. Производные по t будем обозначать точками, а по θ — штрихами. Тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} I &= \int L^*(x^s, x^{s\prime}, t, t')\, d\theta, \\ L^* &= t' L\left(x^s, \frac{x^{s\prime}}{t'}, t\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.43}$$

Теперь уравнения Эйлера-Лагранжа можно выразить через новый лагранжиан от L^*. Производными от L^* по его аргументам будут

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial x^s} &= t'\frac{\partial L}{\partial x^s}, \quad \frac{\partial L^*}{\partial t} = t'\frac{\partial L}{\partial t},\\ \frac{\partial L^*}{\partial x^{s'}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}, \quad \frac{\partial L^*}{\partial t'} = L - \dot{x}^s\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s} = -H. \end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

В силу

$$\frac{d}{d\theta} = t'\frac{d}{dt}$$

уравнения Эйлера-Лагранжа приводятся к виду:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x^s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^s}\right) = 0,\\ &\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{dH}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

Отметим, что определение импульсов (6.39) инвариантно относительно такого преобразования параметра. Однако, помимо импульсов, нужно рассматривать также компоненту, канонически сопряженную времени t. Она равна $-H$. Обозначим эту новую компоненту через $\mathfrak{E}$.

$(n+1)$ уравнения, определяющие импульсы, могут быть опять решены относительно $(n+1)$ величины $x^{s'}$ и t', и новый гамильтониан может быть определен как

$$H^* = -L^* + p_s x^{s'} + \mathfrak{E}t' = t'(-L + p_s\dot{x}^s + \mathfrak{E}). \tag{6.46}$$

Этот гамильтониан равен нулю. Однако если $\mathfrak{E}$ рассматривать как независимую переменную, его частные производные не исчезают. Они связаны с производными гамильтониана (6.40) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H^*}{\partial x^s} &= t'\frac{\partial H}{\partial x^s}, \quad \frac{\partial H^*}{\partial t} = t'\frac{\partial H}{\partial t},\\ \frac{\partial H^*}{\partial p_s} &= t'\frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial H^*}{\partial \mathfrak{E}} = t'. \end{aligned}\right\} \tag{6.47}$$

Таким образом, мы можем прибавить к уравнениям (6.41) следующее:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{6.48}$$

Гамильтониан (6.40) представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий. Эта полная энергия изменяется во времени со скоростью $\frac{\partial H}{\partial t}$. Уравнение (6.48) не независимо от уравнений (6.41). Его можно получить из последних, не прибегая к методу преобразования параметра. Действительно, полный дифференциал H равен

$$dH=\frac{\partial H}{\partial x^s}dx^s+\frac{\partial H}{\partial p_s}dp_s+\frac{\partial H}{\partial t}dt$$

и в силу (6.41)

$$dH=-\frac{dp_s}{dt}dx^s+\frac{dx^s}{dt}dp_s+\frac{\partial H}{\partial t}dt.$$

Делением на dt получаем отсюда (6.48).

Преобразование параметра полезно в том отношении, что позволяет переходить от одного параметра t к другому параметру θ. Оба представления при этом эквивалентны.

Перейдем к рассмотрению релятивистской механики, причем сначала изучим движение частиц, на которые не действуют силы. Лагранжиан является некоторой функцией от $\frac{dx^s}{dt}$ (если за параметр выбрано t) или от $\frac{dx^s}{d\tau}$ (если параметр есть τ). В дальнейшем точками будем обозначать дифференцирование по t, а штрихами по собственному времени частицы τ. Производные лагранжиана по этим переменным дают значения импульсов. Импульсы, канонически сопряженные координатам x^s, определяются формулами (6.15). Четвертая компонента импульса (канонически сопряженная времени) согласно (6.44) равна

$$p_4=L^{(t)}-\dot{x}^s p_s, \tag{6.49}$$

где $L^{(t)}$ — лагранжиан, соответствующий параметру t.

Примем сначала за параметр время t. Из дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial L^{(t)}}{\partial \dot{x}^s}=\frac{m\dot{x}^s}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},\quad u^2=\dot{x}^s\dot{x}^s \tag{6.50}$$

видим, что $L^{(t)}$ равно:

$$L^{(t)}=mc^2\left(k-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right), \tag{6.51}$$

где k — постоянная интегрирования. При этом интеграл I принимает значение

$$I=\int_{t_1}^{t_2} L^{(t)}dt=mc^2\left[k(t_2-t_1)-\tau(P_2, P_1)\right], \tag{6.52}$$

где $\tau(P_2, P_1)$ — собственное время вдоль пути интегрирования между двумя конечными точками P_1 и P_2. Этот интеграл лорентц-инвариантен, если k равно нулю. Выражение

$$mc^2k(t_2-t_1)$$

не зависит от пути интегрирования. Поэтому этот член ничего не дает для вариации δI, если пределы интеграла не варьируются. Мы увидим, что величина k определяет значение постоянной интегрирования E_0 в (6.17). Поскольку этот член неинвариантен, мы его опустим при переходе к четырехмерному представлению.

Уравнения

$$p_s=\frac{m\dot{x}^s}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{6.15а}$$

могут быть разрешены относительно $\dot{x}^s$:

$$\dot{x}^s=\frac{\frac{p_s}{m}}{\sqrt{1+\frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2}}}. \tag{6.15б}$$

Гамильтониан определяется уравнением (6.40). В этом случае он равен

$$H^{( )}=mc^2\left[\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}-k\right]=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-k\right). \tag{6.53}$$

Если k выбрать равным 1, $H^{(t)}$ равен релятивистской кинетической энергии; а при k, равным нулю, — полной энергии.

Для уравнений Гамильтона получаем

$$\dot{x}^s=\frac{\partial H}{\partial p_s}=\frac{\frac{p_s}{m}}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}},\quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial x^s}=0. \tag{6.54}$$

Перейдем теперь к параметру τ. Согласно (6.43)

$$L^{(\tau)}=t'L^{(t)}=-mc^2\sqrt{t'^2-\frac{1}{c^2}x^{s'^2}}=$$
$$=-mc^2\sqrt{\eta_{\iota\varkappa}x^{\iota'}x^{\varkappa'}}. \tag{6.55}$$

Отсюда импульсы равны

$$\left.\begin{aligned}
p_i&=\frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x^{i'}}=\frac{\cdot\, mx^{i'}}{\sqrt{\eta_{\iota\varkappa}x^{\iota'}x^{\varkappa'}}};\\
p_4&=\frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x^{4'}}=-\frac{mc^2t'}{\sqrt{\eta_{\iota\varkappa}x^{\iota'}x^{\varkappa'}}},\quad p_\rho=-\frac{mc^2\eta_{\rho\sigma}x^{\sigma'}}{\sqrt{\eta_{\iota\varkappa}x^{\iota'}x^{\varkappa'}}}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.56}$$

Корни, входящие в уравнения (6.55) и (6.56), равны 1 [(см. (5.127)]. Если этого не учесть, решение уравнений (6.56) относительно $x^{\rho'}$ станет невозможным. Вообще говоря, можно было бы выбрать некоторый другой параметр вместо τ, скажем θ. При этом уравнения (6.56) имели бы точно такой же вид, только штрихи означали бы дифференцирование по θ. Однако в этом случае оказалось бы невозможным выразить $x^{\rho'}$ только через p_ρ. В рассмотренном же случае мы используем то обстоятельство, что $x^{\rho'}$ являются контравариантными компонентами единичного вектора, а $-\frac{p_\rho}{mc^2}$ — ковариантными компонентами того же единичного вектора. $x^{\rho'}$ идентично с U^ρ. Решение может быть записано в виде:

$$x^{\rho'} = -\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{\sqrt{\eta^{\iota\varkappa} p_\iota p_\varkappa}}, \tag{6.57}$$

который аналогичен (6.15б). Однако такой способ записи решения совершенно произволен.

Квадратный корень в знаменателе постоянен:

$$\sqrt{\eta^{\iota\varkappa} p_\iota p_\varkappa} = mc^2. \tag{6.58}$$

Поэтому решение может быть записано в общем виде:

$$x^{\rho'} = -\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{mc^2} \varphi\left(\eta^{\iota\varkappa} p_\iota p_\varkappa / mc^2\right), \quad \varphi(1) = 1, \tag{6.57a}$$

где φ обращается в 1, когда аргумент равен 1, а в остальном совершенно произвольна. Используя (6.57а), получим для $L^{(\tau)}$, $x^{\rho'} p_\rho$ и $H^{(\tau)}$:

$$\left.\begin{aligned} L^{(\tau)} &= -\sqrt{\eta^{\iota\varkappa} p_\iota p_\varkappa} \cdot \varphi, \\ x^{\rho'} p_\rho &= -\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\rho p_\sigma}{mc^2} \cdot \varphi, \\ H^{(\tau)} &= \left[\sqrt{\eta^{\rho\sigma} p_\rho p_\sigma} - \frac{\eta^{\rho\sigma} p_\rho p_\sigma}{mc^2}\right] \cdot \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{6.59}$$

Для краткости будем в дальнейшем обозначать квадратный корень через p. Для уравнений Гамильтона имеем

$$\left.\begin{aligned} p_\rho' &= -\frac{\partial H^{(\tau)}}{\partial x^\rho} = 0, \\ x^{\rho'} &= \frac{\partial H^{(\tau)}}{\partial p_\rho} = \frac{2\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{m^2 c^4}\left[p - \frac{p^2}{mc^2}\right]\varphi' + \\ &+ \left(\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{p} - 2\,\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{mc^2}\right) \cdot \varphi, \end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

где φ' означает производную от φ по ее аргументу. Первый член справа исчезает, так как выражение в квадратных скобках равно нулю. Второй член равен [см. (6.57a)]:

$$x^{\rho'} = -\frac{\eta^{\rho\sigma} p_\sigma}{mc^2} = -\frac{p^\rho}{mc^2}. \tag{6.60a}$$

Появление произвольной функции φ не случайно. Интеграл (6.52) при $k = 0$ равен длине дуги мировой линии в пространстве Минковского. Уравнения Эйлера-Лагранжа являются дифференциальными уравнениями геодезических линий, соответствующих уравнениям (5.99).

Дифференциальные уравнения (5.99) можно получить не только из вариационного интеграла (5.93), так как любой вариационный интеграл

$$I = \int_{P_1}^{P_2} \psi\left(g_{ik}\frac{d\xi^i}{ds}\ \frac{d\xi^k}{ds}\right) ds \tag{6.61}$$

имеет вариацию

$$\delta I = 2\int_{P_1}^{P_2} \left(g_{rn}\frac{d^2\xi^r}{ds^2} + [rt, n]\frac{d\xi^r}{ds}\frac{d\xi^t}{ds}\right)\psi'\, d\xi^n\, ds,$$

т. е. приводит к тем же уравнениям геодезических линий.

В нашем случае в качестве лагранжиана можно использовать любую функцию

$$\Lambda^{(\tau)} = \Phi\left(\eta_{\iota\varkappa}\, x^{\iota'}\, x^{\varkappa'}\right), \tag{6.62}$$

при этом импульсы определяются как

$$\pi_\rho = 2\eta_{\rho\mu}\, x^{\mu'}\Phi'\left(\eta_{\iota\varkappa}\, x^{\iota'}\, x^{\varkappa'}\right), \tag{6.63}$$

где Φ' — производная Φ по ее аргументу. Эти величины π_ρ идентичны импульсам (6.56), если

$$\Phi'(1) = -\frac{m}{2}c^2. \tag{6.64}$$

Таким же образом в качестве гамильтониана можно использовать любую функцию импульсов вида

$$H^{(\tau)} = X\left(\eta^{\iota\varkappa}\pi_\iota\pi_\varkappa\right). \tag{6.65}$$

Уравнениями, связывающими импульсы и скорости, будут:

$$x^{\rho\prime} = \frac{\partial H^{(\tau)}}{\partial \pi_\rho} = 2\eta^{\rho\mu} \pi_\mu X'. \tag{6.66}$$

Величины π_ρ идентичны с p_ρ, если

$$X'(1) = -\frac{1}{2mc^2}. \tag{6.67}$$

Сила в релятивистской механике. Сила, действующая на ускоренно движущуюся точечную массу, может быть определена различными способами. Можно просто воспользоваться классическим определением и определять силу как производную импульса по времени:

$$f_s = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^s}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right), \quad u^2 = \dot{x}^s \dot{x}^s. \tag{6.68}$$

Производя дифференцирование в правой части, получим весьма громоздкое выражение:

$$f_s = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} m \left[\delta_{st}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{\dot{x}^s\dot{x}^t}{c^2}\right]\ddot{x}^t. \tag{6.69}$$

Определенная таким образом сила, вообще говоря, не параллельна ускорению. Она параллельна ускорению только в тех случаях, когда последнее параллельно или перпендикулярно скорости. Когда ускорение параллельно скорости, (6.69) принимает вид:

$$f_s = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} m\ddot{x}^s. \tag{6.70}$$

Если же сила и скорость перпендикулярны друг другу, из (6.69) получаем:

$$f_s = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} m\ddot{x}^s. \tag{6.71}$$

Коэфициенты при ускорении в правых частях (6.70) и (6.71) иногда называют соответственно „продольной массой" и „поперечной массой".

Сила f_s, определяемая формулой (6.68), не обладает простыми трансформационными свойствами. Однако существует мировой вектор, являющийся близким аналогом трехмерной силы. Определим „мировую силу“ как производную импульса по собственному времени:

$$F_\rho = \frac{dp_\rho}{d\tau}. \tag{6.72}$$

Первые три ее компоненты равны выражениям (6.68), умноженным на $\frac{dt}{d\tau}$,

$$F_s = \frac{m\ddot{x}^s}{1-\frac{u^2}{c^2}} + \frac{mu\dot{u}\dot{x}^s}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}. \tag{6.73}$$

При малых значениях $\frac{u}{c}$ эти выражения стремятся к $m\ddot{x}^s$. Четвертая ее компонента равна

$$F_4 = -\frac{mu\dot{u}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}. \tag{6.74}$$

При малых $\frac{u}{c}$ ее значение приближается к величине работы, совершаемой за единицу времени, взятой с обратным знаком. Она равна сумме произведений трех первых компонент на $\dot{x}^s$, взятой со знаком минус.

Задачи

1. Исходя из лагранжиана (6.62), определить соответствующий гамильтониан. Показать, что уравнение (6.67) удовлетворяется, если гамильтониан получается из лагранжиана, удовлетворяющего уравнению (6.64).

2. Возбужденный атом с общей массой M, покоящийся в некоторой инерциальной системе, переходит в низшее энергетическое состояние, уменьшая свою энергию на ΔW. Он излучает фотон, испытывая при этом отдачу. Поэтому

частота фотона будет меньше, чем $\nu = \frac{\Delta W}{h}$. Найти эту частоту.

Ответ.

$$\nu = \frac{\Delta W}{h}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta W}{Mc^2}\right).$$

3. Показать, что интеграл „релятивистской силы" (6.68) вдоль трехмерного пути равен изменению релятивистской кинетической энергии (6.20) и что интеграл мирового вектора (6.72) вдоль мировой линии dx^ρ исчезает, если предположить, что масса покоя остается неизменной. Что произойдет, если масса покоя меняется во время движения?

Глава VII

★

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Когда Эйнштейном были получены законы преобразования уравнений Максвелла, четырехмерный формализм Минковского еще не был известен. Эйнштейн[1]) выражал производные, встречающиеся в уравнениях Максвелла, в новых координатах, связанных со старыми преобразованиями Лорентца. Исходя из принципа относительности, он потребовал, чтобы уравнения электродинамики имели в новой системе координат тот же вид, что и в старой. Поэтому он отождествлял линейные комбинации напряженностей полей, получающиеся после преобразований уравнений Максвелла, с напряженностями полей в новых координатах. Им было показано, что полученные таким образом законы преобразования обладают требуемыми свойствами, именно, что два последовательных преобразования эквивалентны одному преобразованию того же типа, и что обратное преобразование получается при изменении знака относительной скорости двух систем координат.

Однако такое непосредственное построение довольно громоздко. Мы пойдем несколько отличным путем, используя преимущества четырехмерного формализма, развитого в главе V.

Уравнения электромагнитного поля Максвелла. Мы всюду будем пользоваться электростатической системой единиц. Далее мы будем исходить из электронной теории Лорентца, согласно которой уравнения поля в пустоте

---

[1]) Цитированнная работа Эйнштейна, так же как другие основные оригинальные работы по теории относительности, собраны в сборнике „Принцип относительности“, ОНТИ (1935). *(Прим. ред.)*

(т. е. когда диэлектрическая постоянная и магнитная восприимчивость равны единице) справедливы также и в материальной среде, причем поляризация и намагничение этой среды являются результатом смещения реальных зарядов и частичной ориентации элементарных магнитиков. Уравнения Максвелла записываются тогда следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\sigma, \tag{7.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{7.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{7.3}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{I}, \tag{7.4}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, σ — плотность заряда, $\mathbf{I}$ — плотность тока. В пустоте плотности заряда и тока равны нулю.

Из уравнений (7.2) и (7.3) можно видеть, что напряженности поля могут быть выражены через производные скаляра φ и вектора $\mathbf{A}$ следующим образом:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{7.5}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{7.6}$$

Дифференцируя уравнение (7.1) по времени и образуя дивергенцию уравнения (7.4), получим закон сохранения плотностей заряда и тока

$$\operatorname{div} \mathbf{I} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \tag{7.7}$$

Предварительные замечания о трансформационных свойствах. По отношению к пространственным ортогональным преобразованиям величины φ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, σ и $\mathbf{I}$ преобразуются независимо друг от друга. Но не все они являются векторами одного и того же типа. В главе V было показано, что в трехмерном векторном исчислении существуют два типа векторов: «полярные» и «аксиальные».

По отношению к зеркальному отражению системы координат они ведут себя по-разному: «аксиальный вектор» при этом меняет свое направление на обратное. Ротор «полярного вектора» является аксиальным вектором, и наоборот.

В линейном уравнении все члены должны, конечно, преобразовываться одинаковым образом; в противном случае уравнение не будет ковариантно относительно отражений. Из уравнений (7.2) и (7.4) видно, что **E** и **H** не могут быть векторами одного типа.

Мы привыкли считать знак заряда не зависящим от ориентировки координатной системы. Напряженность электрического поля представляет собой силу, действующую на единичный заряд, поэтому ее направление не должно изменяться при отражении системы координат. Таким образом **E** является полярным вектором. Отсюда следует, что **H** — аксиальный вектор, а **I** и **A** — полярные векторы.

Мы видели, что в трех измерениях «аксиальные векторы» эквивалентны антисимметричным тензорам второго ранга. В силу этого они могут входить вместе с «полярными» величинами в линейные ковариантные уравнения. С точки зрения ковариантности часто бывает удобно выражать эту эквивалентность явно и представлять **H** в виде антисимметричного тензора с компонентами

$$\left.\begin{aligned} H_{12} &= -H_{21} = H_z, \\ H_{23} &= -H_{32} = H_x, \\ H_{31} &= -H_{13} = H_y. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

Запишем уравнения Максвелла в векторно-тензорной форме:

$$E_{s,s} = 4\pi\sigma, \tag{7.1a}$$

$$E_{s,r} - E_{r,s} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_{rs}}{\partial t} = 0, \tag{7.2a}$$

$$H_{rs,t} + H_{st,r} + H_{tr,s} = 0, \tag{7.3a}$$

$$H_{rs,s} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial I_r}{\partial t}. \tag{7.4a}$$

Для уравнений (7.5) и (7.6) таким же образом получим

$$H_{rs}=A_{s,r}-A_{r,s}. \tag{7.5a}$$

$$E_r=-\frac{1}{c}\frac{\partial A_r}{\partial t}-\varphi_{,r} \tag{7.6a}$$

Наконец, вместо уравнения (7.7) имеем

$$\mathbf{I}_{s,s}+\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0. \tag{7.7a}$$

Ковариантный характер этих уравнений по отношению ко всем пространственным ортогональным преобразованиям координат (включая отражения) очевиден. Если бы мы представили **H** в виде псевдовектора, то ковариантность была бы гораздо менее очевидной, как это видно, например, из уравнения (7.4), которое в этом случае имело бы вид

$$\mathfrak{H}_{2,1}-\mathfrak{H}_{1,2}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{I}_3 \text{ и т. д.}$$

Заметим, что только одно из уравнений (7.3a), в котором все три индекса различны, имеет нетривиальный смысл, остальные же удовлетворяются тождественно.

При переходе к новой, движущейся системе отсчета нельзя ожидать, что величины **E**, **H** и т. д. будут преобразовываться независимо друг от друга. Рассмотрим, например, электростатическое поле, в котором заряды покоятся по отношению к некоторой системе отсчета. В новой системе отсчета заряды будут находиться в движении, поэтому в ней будут наблюдаться токи, которых в первоначальной системе не было. Токи в свою очередь индуцируют магнитные поля, которых опять-таки не было в исходной системе. Наконец, в новой системе отсчета, в отличие от первоначальной, вектор **A**, соответствующий магнитному полю, не будет равен нулю. Этот пример показывает, что по отношению к преобразованиям Лорентца скалярный и векторный потенциалы преобразуются как компоненты одной и той же величины; то же самое справедливо для напряженностей электрических и магнитных полей и плотностей зарядов и токов. Поэтому нужно попытаться описать, например, напряженности электрического и магнитного полей одним мировым тензором, который при чисто пространственном преобразовании координат распадался бы на два трехмерных вектора.

Представление четырехмерных тензоров в трех плюс одном измерениях. В предыдущей главе мы видели, что различные трехмерные величины часто являются компонентами некоторой четырехмерной величины. Например, «релятивистская масса», представляющая собой скаляр относительно ортогональных пространственных преобразований, и «релятивистский импульс», являющийся пространственным вектором, рассматриваемые *совместно*, представляют собой компоненты одного мирового вектора — вектора энергии-импульса.

И обратно, рассматривая лишь группу одних пространственных преобразований вместо группы общих преобразований Лоренца, мировой вектор или тензор можно разложить на несколько частей, преобразующихся независимо друг от друга. В случае чисто пространственных преобразований четырехрядная матрица коэфициентов преобразования, $\{\gamma^{\iota}_{\varkappa}\}$, примет вид:

$$\left\{\begin{matrix} \gamma^{i}_{k}, & \gamma^{i}_{4} \\ \gamma^{4}_{k}, & \gamma^{4}_{4} \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} c_{ik}, & 0 \\ 0, & 1 \end{matrix}\right\}, \qquad (7.9)$$

где c_{ik} — коэфициенты ортогонального преобразования. Контравариантный мировой вектор V^{ι} преобразуется следующим образом:

$$V'^{i} = c_{ik}V^{k}, \quad V'^{4} = V^{4}. \qquad (7.10)$$

Мировой тензор второго ранга $V^{\iota\varkappa}$ подобным же образом можно разложить на трехмерный тензор, два трехмерных вектора и трехмерный скаляр:

$$\begin{aligned} V'^{ik} &= c_{im}c_{kn}V^{mn}, & V'^{i4} &= c_{im}V^{m4}, \\ V'^{4k} &= c_{kn}V^{4n}, & V'^{44} &= V^{44}. \end{aligned} \qquad (7.11)$$

Если мировой тензор $V^{\iota\varkappa}$ симметричен, трехмерный тензор будет также симметричен, а оба вектора будут равны друг другу. Если тензор $V^{\iota\varkappa}$ антисимметричен, трехмерный тензор также будет антисимметричным (и поэтому эквивалентным «аксиальному вектору»), векторы будут равны и противоположно направлены, а скаляр равен нулю. Ковариантные векторы и тензоры могут быть разложены подобным же образом.

Четырехмерные ковариантные операции и уравнения могут быть разложены таким же образом, как мировые векторы и тензоры разлагаются на трехмерные тензоры, векторы и скаляры. Обозначим две составные части мирового вектора V^{ι} через v_l и v. Дивергенция V^{ι} равна

$$W = V^{\iota}{}_{,\iota} = v_{l,l} + v_{,4} = \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{7.12}$$

Аналогично части, на которые раскладывается тензор $V^{\iota\varkappa}$, обозначим через v_{lk}, $\underset{1}{v_l}$, $\underset{2}{v_k}$ и v:

$$V^{\iota\varkappa} = \begin{Bmatrix} v_{lk}, & \underset{1}{v_l} \\ \underset{2}{v_k}, & v \end{Bmatrix}.$$

Дивергенция такого тензора W^{ι} может быть разложена на w_l и w.

Система уравнений

$$V^{\iota\varkappa}{}_{,\varkappa} = W^{\iota} \tag{7.13}$$

тогда разложится на две системы:

$$\left.\begin{aligned} V^{l\varkappa}{}_{,\varkappa} &= v_{lk,k} + \frac{\partial}{\partial t}(\underset{1}{v_l}) = w_l, \\ V^{4\varkappa}{}_{,\varkappa} &= \underset{2}{v}_{k,k} + \frac{\partial v}{\partial t} = w. \end{aligned}\right\} \tag{7.13a}$$

Если мировой тензор $V^{\iota\varkappa}$ антисимметричен, эти уравнения могут быть записаны так, что будут содержать только векторы. Вместо трехмерного антисимметричного тензора v_{lk}

можно ввести «аксиальный вектор» $\mathbf{t}_s$ при помощи соотношений:

$$v_{ik} = \delta_{iks} \mathbf{t}_s, \quad \mathbf{t}_s = \frac{1}{2} \delta_{iks} v_{ik}. \tag{7.14}$$

Дивергенция тензора $v_{ik,k}$ примет тогда вид:

$$v_{ik,k} = \delta_{iks} \mathbf{t}_{s,k}. \tag{7.15}$$

Согласно уравнению (5.38б) она является i-й компонентой $\operatorname{rot} \mathbf{t}$. Для первой совокупности уравнений (7.13а) тогда имеем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} + \frac{\partial}{\partial t} \underset{1}{\mathbf{v}} = \mathbf{w}. \tag{7.13б}$$

Как уже указывалось, если $V^{\iota\varkappa}$ антисимметричен, $\underset{2}{\mathbf{v}}$ равно $(-\underset{1}{\mathbf{v}})$.

Последнее уравнение в (7.13а) поэтому принимает вид

$$-\operatorname{div} \underset{1}{\mathbf{v}} = w. \tag{7.13в}$$

Антисимметричные производные раскладываются подобным же образом. Рассмотрим ковариантный мировой вектор B_ι с трехмерными составляющими b_i, b. Его четырехмерный ротор, $C_{\iota\varkappa}$, может быть разложен следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} C_{ik} &= b_{k,i} - b_{i,k}, \\ C_{i4} &= b_{,i} - \frac{\partial b_i}{\partial t} = \underset{1}{c}_i. \end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

Задавая «аксиальный вектор» $\mathfrak{D}_s$ уравнениями,

$$C_{ik} \delta_{iks} = \mathfrak{D}_s,$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \operatorname{rot} \mathbf{b}, \\ \underset{1}{\mathbf{c}} &= \operatorname{grad} b - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{7.16а}$$

Эти примеры показывают, как типичные четырехмерные соотношения распадаются на несколько кажущихся независимыми трехмерных векторных соотношений. Теперь можно перейти к рассмотрению уравнений поля Максвелла в четырехмерной форме.

Лорентц-ковариантность уравнений Максвелла. Если **H** отождествить с $\mathfrak{D}$, **A** с $\mathfrak{b}$, **E** с $\frac{1}{c}\underset{1}{\mathfrak{c}}$, φ с $-\frac{1}{c}b$, то уравнения (7.16а) перейдут в уравнения (7.5) и (7.6). Это означает, что уравнения (7.5) и (7.6) лорентц-ковариантны, если предположить, что **A** и $(-c\varphi)$ преобразуются как компоненты ковариантного мирового вектора, а **H** и c**E** представляют шесть компонент ковариантного антисимметричного мирового тензора.

Объединение **H** и **E** в один антисимметричный мировой тензор второго ранга образует основу релятивистской электродинамики. Мы покажем, что остальные уравнения поля также совместимы с таким законом преобразования.

Обозначим ковариантный мировой вектор с компонентами $(A_s, -c\varphi)$ через φ_ι и ковариантный тензор электромагнитного поля с компонентами

$$\left\{\begin{array}{cccc} 0, & -H_3, & +H_2, & -cE_1, \\ H_3, & 0, & -H_1, & -cE_2, \\ -H_2, & +H_1, & 0, & -cE_3, \\ +cE_1, & +cE_2, & +cE_3, & 0. \end{array}\right\} \tag{7.17}$$

через $\varphi_{\iota\varkappa}$. Уравнения (7.5) и (7.6) представляются тогда системой

$$\varphi_{\iota\varkappa} = \varphi_{\iota,\varkappa} - \varphi_{\varkappa,\iota}. \tag{7.18}$$

Антисимметричное выражение $\varphi_{\iota\varkappa}$, определяющее ротор вектора, удовлетворяет уравнениям

$$\varphi_{\iota\varkappa,\lambda} + \varphi_{\varkappa\lambda,\iota} + \varphi_{\lambda\iota,\varkappa} = 0. \tag{7.19}$$

Это легко проверить, подставляя выражение (7.18) в левую часть уравнения (7.19). Те из уравнений (7.19), в которых, по крайней мере, два индекса равны, удовлетворяются тождественно, независимо от того, удовлетворяет антисимметричный тензор $\varphi_{\iota\varkappa}$ уравнению (7.18) или нет. Например,

$$\varphi_{12,2}+\varphi_{22,1}+\varphi_{21,2}\equiv 0$$

просто из-за антисимметрии $\varphi_{\iota\varkappa}$. В четырехмерном мире остаются только четыре нетривиальных уравнения со следующими комбинациями индексов (2,3,4), (1,3,4), (1,2,4), (1,2,3).Подставляя выражения (7.17) в (7.19), получим уравнения (7.2) и (7.3). Таким образом, эти два уравнения эквивалентны тензорному соотношению (7.19).

Остаются еще уравнения (7.1) и (7.4). По форме они подобны уравнениям (7.13б) и (7.13в). Уравнения (7.13б, в) были получены как трехмерное представление дивергенции контравариантного антисимметричного мирового тензора второго ранга. Подымая оба индекса у ковариантного тензора $\varphi_{\iota\varkappa}$, получим контравариантный тензор

$$\varphi^{\iota\varkappa}=\left\{\begin{array}{cccc} 0\;, & -c^4H_3, & +c^4H_2, & +c^3E_1, \\ +c^4H_3, & 0\;, & -c^4H_1, & +c^3E_2, \\ -c^4H_2, & +c^4H_1, & 0\;, & +c^3E_3, \\ -c^3E_1, & -c^3E_2, & -c^3E_3, & 0\;. \end{array}\right\} \qquad (7.17а)$$

Дивергенция этого тензора имеет компоненты

$$\varphi^{\iota\varkappa}{}_{,\varkappa}=-c^4(\operatorname{rot}\mathbf{H})_\iota+c^3\frac{\partial E_\iota}{\partial t},$$
$$\varphi^{4\varkappa}{}_{,\varkappa}=-c^3\operatorname{div}\mathbf{E}.$$

Правые части равны $-4\pi c^3I_i$ и $-4\pi c^3\sigma$. Отсюда видно, что $\mathbf{I}$ и σ совместно образуют контравариантный мировой вектор, м и р о в у ю п л о т н о с т ь т о к а I^ρ, который связан с тензором поля $\varphi^{\iota\varkappa}$ уравнением

$$\varphi^{\iota\varkappa}{}_{,\varkappa}=-4\pi c^3I^\iota. \qquad (7.20)$$

Это уравнение эквивалентно уравнениям Максвелла (7.1) и (7.4).

При образовании дивергенции от (7.20) левая часть исчезает тождественно из-за антисимметрии $\varphi^{\iota\varkappa}$. Поэтому мы получаем одно уравнение, содержащее только компоненты I^{ι}:

$$I^{\iota}{}_{,\iota} = 0. \tag{7.21}$$

Это уравнение идентично с (7.7).

Уравнения поля Максвелла лорентц-ковариантны, если входящие в них величины отождествить указанным выше способом с компонентами мировых векторов и мировых тензоров. Прежде чем перейти к рассмотрению выражения для пондеромоторных сил, мы коротко остановимся на вопросе о физическом смысле законов преобразования.

Физический смысл законов преобразования. Запишем закон преобразования тензора $\varphi^{\iota\varkappa}$:

$$\varphi^{*\mu\nu} = \gamma^{\mu}{}_{\iota}\gamma^{\nu}{}_{\varkappa}\varphi^{\iota\varkappa}, \tag{7.22}$$

Разделяя компоненты **H** и **E**, получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{*mn} &= \gamma^{m}{}_{i}\gamma^{n}{}_{k}\varphi^{ik} + (\gamma^{m}{}_{i}\gamma^{n}{}_{4} - \gamma^{m}{}_{4}\gamma^{n}{}_{i})\,\varphi^{i4}, \\ \varphi^{*m4} &= \gamma^{m}{}_{i}\gamma^{4}{}_{k}\varphi^{ik} + (\gamma^{m}{}_{i}\gamma^{4}{}_{4} - \gamma^{m}{}_{4}\gamma^{4}{}_{i})\,\varphi^{i4}. \end{aligned}\right\} \tag{7.22а}$$

Вместо того чтобы рассматривать наиболее общие преобразования Лорентца (которые могут включать и пространственные ортогональные преобразования), ограничимся выбором специальной совокупности коэфициентов $\gamma^{\mu}{}_{\iota}$, а именно совокупности коэфициентов в уравнениях (4.13). Тогда уравнения (7.22а) перейдут в уравнения преобразования вида

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{*12} &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}(\varphi^{12} + v\varphi^{24}), \\ \varphi^{*13} &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}(\varphi^{13} + v\varphi^{34}), \\ \varphi^{*23} &= \varphi^{23}, \\ \varphi^{*14} &= \varphi^{14}, \\ \varphi^{*24} &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(\varphi^{24} - \frac{v}{c^2}\,\varphi^{21}\right), \\ \varphi^{*34} &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(\varphi^{34} - \frac{v}{c^2}\,\varphi^{31}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.22б}$$

Вводя E_s и H_s согласно (7.17а), получим:

$$\left.\begin{aligned}
H_3^* &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(H_3 - \frac{v}{c}E_2\right),\\
H_2^* &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(H_2 + \frac{v}{c}E_3\right),\\
H_1^* &= H_1,\\
E_1^* &= E_1,\\
E_2^* &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(E_2 - \frac{v}{c}H_3\right),\\
E_3^* &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left(E_3 + \frac{v}{c}H_2\right).
\end{aligned}\right\} \quad (7.22\text{в})$$

Члены, содержащие **H**, в преобразованном **E** (и обратно) пропорциональны v/c. Компоненты **H** и **E** в направлении v совсем не преобразуются.

Эти законы преобразования тесно связаны с законами Ампера и Фарадея. Рассмотрим точечный заряд, покоящийся в системе координат S. В системе S^*, движущейся относительно S, будет наблюдаться магнитное поле, равное векторному произведению напряженности электрического поля на скорость частицы в системе S^*, умноженному на $\frac{1}{c}$.

С другой стороны, рассмотрим магнитное поле, создаваемое постоянным магнитом, покоящимся в системе S. При переходе к новой системе S^* обнаружится электрическое поле, напряженность которого равна умноженному на $\frac{1}{c}$ векторному произведению скорости магнита (в системе S^*) на напряженность магнитного поля. Интеграл от **E** по замкнутому контуру, вообще говоря, не равен нулю.

Перейдем к рассмотрению законов преобразования **I** и σ. Пусть материальное тело конечных размеров с равномерно распределенным объемным зарядом покоится относительно системы S. Если объем тела V_0 и плотность заряда σ_0, то полный заряд C равен

$$C = V_0\sigma_0. \quad (7.23)$$

Произведем теперь преобразование Лорентца (4.13). Благодаря лорентцову сокращению в x-направлении полный объем тела в S^* будет:

$$V^* = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, V_0. \tag{7.24}$$

Плотность заряда в свою очередь преобразуется как четвертая компонента контравариантного вектора. В системе S ток равен нулю, и поэтому

$$\sigma^* = \gamma^4{}_4 \sigma_0 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \sigma_0. \tag{7.25}$$

Произведение V на σ остается неизменным; иначе говоря, заряд C является инвариантом.

Плотность тока имеет в системе S^* одну компоненту I^{*1}:

$$I^{*1} = \gamma^1{}_4 \sigma_0 = -(1 - v^2/c^2)^{-1/2} v \sigma_0 = -v\sigma^*. \tag{7.26}$$

Таким образом, плотность тока равна произведению плотности заряда на скорость. Поэтому релятивистский закон преобразования для σ и $\mathbf{I}$ согласуется с электронной теорией Лорентца, согласно которой всякий ток представляет собой движение зарядов.

Градиентное преобразование. Из так называемой второй серии уравнений Максвелла, т. е. из четырех уравнений (7.19), следует существование мирового вектора потенциала φ_ι, ротором которого является тензор поля $\varphi_{\iota\varkappa}$. Однако при заданном электромагнитном поле мировой вектор потенциала определяется неоднозначно. К мировому вектору φ_ι, удовлетворяющему уравнению (7.18), можно прибавить произвольное градиентное поле $\Phi_{,\iota}$; сумма

$$\bar{\varphi}_\iota = \varphi_\iota + \Phi_{,\iota} \tag{7.27}$$

будет попрежнему удовлетворять уравнениям (7.18), левые части которых останутся неизменными. Это преобразование мирового вектора потенциала путем прибавления градиента называется градиентным преобразованием.[1]) Гра-

---

[1]) Иногда пользуются терминами „калибровочное" преобразование и „калибровочная" инвариантность. (*Прим. ред.*)

диентное преобразование, конечно, не имеет ничего общего с преобразованием координат. Ни тензор поля $\varphi_{\iota\varkappa}$, ни мировой вектор плотности тока I^{ι} не изменяются при градиентных преобразованиях. Говорят, что эти величины и уравнения Максвелла (7.19) и (7.20) обладают **градиентной инвариантностью**.

Уравнения движения. Мы не можем непосредственно измерять электромагнитные поля. Мы наблюдаем только силы (т. е. ускорения), действующие на заряженные частицы. Поэтому, чтобы связать уравнения поля с непосредственными физическими наблюдениями, необходимо знать законы, определяющие поведение заряженных частиц. Классический закон устанавливает, что сила (сила Лорентца), действующая на частицу, равна:

$$m\dot{\mathbf{u}} = e\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{H}\right], \tag{7.28}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость частицы, а $\times$ означает векторное произведение. $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ представляют собой напряженности электромагнитного поля, из которого исключено поле, создаваемое самой частицей. Это последнее имеет, конечно, особенность [1]).

В компонентах (трехмерных) это уравнение записывается так:

$$m\dot{u}^s = e\left(E_s + \frac{1}{c} u^r H_{sr}\right), \quad u^s = \dot{x}^s \tag{7.29}$$

---

[1]) Как в классической теории поля, так и в специальной теории относительности в уравнениях движения принимается во внимание только та часть поля, которая не обусловлена рассматриваемой частицей. Такое разделение поля неудовлетворительно, в особенности из-за того, что подобное разделение поля не является однозначно определенной математической операцией. Только общая теория относительности подводит нас к формулировке законов движения, в которые входит полное поле (см. главу XV).

[Утверждение автора о том, что в специальной теории относительности в выражении для силы Лорентца никогда не учитывается собственное поле частицы, не точно. Собственное поле может быть, по крайней мере отчасти, учтено и фактически учитывается введением силы радиационного трения. Подробнее см. Ландау и Лифшиц, «Теория поля», ГТТИ (1941), и Паули, «Теория относительности», ГТТИ (1947). (*Прим. ред.*)]

Уравнения (7.28) и (7.29) являются уравнениями Эйлера-Лагранжа следующего вариационного принципа

$$\left.\begin{aligned} \delta \int L^{(c)}\, dt = 0, \\ L^{(c)} = \frac{m}{2} u^2 - e\varphi + \frac{e}{c} u^s A_s. \end{aligned}\right\} \tag{7.30}$$

Импульсы, канонически сопряженные координатам, равны

$$p_s^{(c)} = \frac{\partial L^{(c)}}{\partial u^s} = mu^s + \frac{e}{c} A_s, \tag{7.31}$$

а гамильтониан

$$\left.\begin{aligned} H^{(c)} = -L^{(c)} + u^s p_s^{(c)} = \frac{1}{2m}\left(p_s^{(c)} - \frac{e}{c} A_s\right)^2 + e\varphi = \\ = \frac{m}{2} u^2 + e\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

Рассмотрим лагранжиан $L^{(c)}$. Выражение

$$\varphi - \frac{1}{c} u^s A_s \tag{7.33}$$

отличается только множителем от лорентц-инвариантного скаляра. Действительно, умножая его на $(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, получим

$$(1 - u^2/c^2)^{-1/2}\left(\varphi - \frac{1}{c} u^s A_s\right) = \frac{dt}{d\tau}\left(-\frac{1}{c}\varphi_4 - \frac{1}{c} u_s \varphi_s\right) = \\ = -\frac{1}{c} U^\rho \varphi_\rho. \tag{7.34}$$

Что же касается первого члена в $L^{(c)}$, то, как мы знаем, в релятивистской механике он должен быть заменен выражением (6.51). Это выражение (при $k = 0$)

$$-mc^2\sqrt{1 - u^2/c^2} \tag{7.35}$$

также отличается от скаляра на тот же множитель $\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Таким образом, выражения (7.35) и (7.33) преобразуются одинаковым образом. Умноженные на dt, они становятся скалярами. Поэтому можно образовать следующий лоренц-инвариантный интеграл

$$I = \int\limits_{P_1}^{P_2} \left\{ -mc^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} - e\varphi + \frac{e}{c} u^s A_s \right\} dt. \quad (7.36)$$

Соответствующие ему уравнения Эйлера-Лагранжа также должны быть лоренц-ковариантны. Выбирая за параметр τ, для (7.36) получим

$$I = \int\limits_{P_1}^{P_2} \left\{ -mc^2 \sqrt{\eta_{\iota\varkappa} U^\iota U^\varkappa} + \frac{e}{c} U^\rho \varphi_\rho \right\} d\tau, \quad U^\rho = \frac{dx^\rho}{d\tau}. \quad (7.37)$$

Кроме того что этот интеграл лоренц-инвариантен, он обладает еще одним важным свойством. Мы видели, что φ_ρ определяется через $\varphi_{\rho\sigma}$ с точностью до градиента. Поэтому прибавление произвольного градиента к φ_ρ не должно влиять на получающиеся из лангранжиана уравнения движения. При замене φ_ρ в (7.37) через $\overline{\varphi}_\rho$ из (7.27) интеграл преобразуется в следующий:

$$\overline{I} = I + \int\limits_{P_1}^{P_2} \frac{e}{c} U^\rho \Phi_{,\rho}\, d\tau = I + \frac{e}{c} \int\limits_{P_1}^{P_2} \Phi_{,\rho}\, dx^\rho =$$

$$= I + \frac{e}{c} [\Phi(P_2) - \Phi(P_1)]. \quad (7.38)$$

Значение интеграла I меняется при градиентном преобразовании, но изменение это зависит только от значений Φ в конечных точках, а не вдоль всего пути интегрирования. Вариация I при фиксированных пределах интегрирования поэтому не меняется при градиентном преобразовании; другими словами, уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие вариационной проблеме

$$\delta I = 0,$$

обладают градиентной инвариантностью.

Первый член подинтегрального выражения в (7.37) может быть заменен любой скалярной функцией, удовлетворяющей уравнениям (6.62) и (6.64). Однако, если за параметр выбрано t, то (7.36) дает единственный лорентц-инвариантный лагранжиан, ведущий к градиентно-инвариантным уравнениям.

Используя сначала лагранжиан (7.36), получим для импульсов

$$p_s = \frac{\partial L^{(t)}}{\partial u^s} = \frac{mu^s}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{e}{c} A_s, \tag{7.39}$$

где u^s определяется из

$$u^s = \frac{1}{m}\left(p_s - \frac{e}{c} A_s\right)\left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{m^2c^2}\right]^{-1/2}. \tag{7.40}$$

Подставляя эти выражения в $L^{(t)}$ и $p_s u^s$ найдем

$$L^{(t)} = \left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{m^2c^2}\right]^{-1/2}\left(-mc^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{e}{c} A_s \frac{p_s - \frac{e}{c} A_s}{m}\right) - e\varphi \tag{7.41}$$

и

$$p_s u^s = \left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{m^2c^2}\right]^{-1/2} \frac{1}{m} p_s \left(p_s - \frac{e}{c} A_s\right); \tag{7.42}$$

отсюда для $H^{(t)}$ получаем:

$$H^{(t)} = mc^2\left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{mc^2}\right]^{1/2} + e\varphi. \tag{7.43}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие (7.36):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mu^s}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) = eE_s + \frac{e}{c} u^r H_{sr}. \tag{7.44}$$

Уравнения Гамильтона, соответствующие уравнению (7.43):

$$\left.\begin{aligned} u^s = \frac{\partial H^{(t)}}{\partial p_s} = \\ = \left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{m^2c^2}\right]^{-1/2} \frac{1}{m}\left(p_s - \frac{e}{c} A_s\right), \\ \dot{p}_s = -\frac{\partial H^{(t)}}{\partial x^s} = \\ = \frac{e}{m}\left[1 + \frac{\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)^2}{m^2c^2}\right]^{-1/2} \left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right) A_{k,s} - \\ - e\varphi_{,s} = eu^k A_{k,s} - e\varphi_{,s} \end{aligned}\right\} \tag{7.45}$$

при

$$\dot{p}_s = \frac{d}{dt}\left(\frac{mu^s}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) + \frac{e}{c}(A_{s,k}u^k + A_{s,4}). \tag{7.46}$$

Уравнения (7.45), конечно, эквивалентны уравнению (7.44). Уравнение (7.44) дает выражение, наиболее удобное для практических применений.

Можно получить формулы более симметричного вида, используя в качестве параметра τ. Заменим первый член в (7.37) выражением

$$-\frac{1}{2} mc^2 \eta_{\iota\varkappa} U^\iota U^\varkappa, \quad U^\iota = \frac{dx^\iota}{d\tau},$$

которое удовлетворяет уравнениям (6.62) и (6.64). Такой выбор функции Φ в уравнении (6.62), конечно, произволен, но с его помощью мы получим очень простые уравнения. Лагранжианом будет выражение

$$L^{(\tau)} = -\frac{1}{2} mc^2 \eta_{\iota\varkappa} U^\iota U^\varkappa + \frac{e}{c} U^\iota \varphi_\iota. \tag{7.47}$$

Импульсы равны

$$p_\rho = \frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial U^\rho} = -mc^2 U_\rho + \frac{e}{c}\varphi_\rho, \tag{7.48}$$

а уравнения Эйлера-Лагранжа принимают форму

$$+mc^2 \frac{dU_\rho}{d\tau} - \frac{e}{c} \varphi_{\rho,\sigma} U^\sigma + \frac{e}{c} U^\iota \varphi_{\iota,\rho} = 0$$

или

$$-mc^2 \eta_{\rho\sigma} \frac{dU^\sigma}{d\tau} = \frac{e}{c} \varphi_{\sigma\rho} U^\sigma. \tag{7.49}$$

Первые три уравнения (7.49) идентичны с уравнением (7.44), умноженным на $\frac{dt}{d\tau}$. Четвертое уравнение не является независимым от первых трех. Свертывание уравнения (7.49) с U^ρ приводит к тождеству

$$-mc^2 \eta_{\rho\sigma} U^\rho \frac{dU^\sigma}{d\tau} - \frac{e}{c} \varphi_{\sigma\rho} U^\sigma U^\rho \equiv 0. \tag{7.50}$$

Второй член тождественно обращается в нуль из-за антисимметричности $\varphi_{\sigma\rho}$. Первый член также равен нулю по следующей причине: компоненты U^ρ представляют собой компоненты единичного вектора; дифференциал же вектора постоянной длины всегда перпендикулярен самому вектору. Несколько иным путем это можно показать так:

$$\eta_{\rho\sigma} U^\rho \frac{dU^\sigma}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\eta_{\rho\sigma} U^\rho U^\sigma) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (1) \equiv 0. \tag{7.51}$$

Отсюда видно, что уравнение (7.49) содержит только три действительно независимых уравнения.

Вектор U^λ может быть выражен через импульсы посредством уравнений

$$U^\iota = -\frac{1}{mc^2} \left(p^\iota - \frac{e}{c} \varphi^\iota\right). \tag{7.52}$$

Теперь можно найти $H^{(\tau)}$:

$$H^{(\tau)} = -\frac{1}{2mc^2} \eta_{\iota\varkappa} \left(p^\iota - \frac{e}{c} \varphi^\iota\right) \left(p^\varkappa - \frac{e}{c} \varphi^\varkappa\right). \tag{7.53}$$

Уравнениями Гамильтона будут

$$\left.\begin{aligned} U^\rho &= \frac{\partial H^{(\tau)}}{\partial p_\rho} = -\frac{1}{mc^2} \left(p^\rho - \frac{e}{c} \varphi^\rho\right), \\ \frac{dp_\rho}{d\tau} &= +\frac{1}{mc^2} \left(p^\sigma - \frac{e}{c} \varphi^\sigma\right) \frac{e}{c} \varphi^\sigma{}_{,\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{7.54}$$

Они эквивалентны уравнениям (7.49).

Глава VIII

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

*

Предварительные замечания. Уравнения поля Максвелла содержат плотности заряда и тока. Известно, что в действительности заряд распределен в пространстве не непрерывно; заряд не равен нулю только в областях пространства, занятых элементарными частицами — электронами, протонами и т. д. Пока неизвестно, имеют ли эти области конечные размеры или являются „точками" и справедливы ли уравнения Максвелла внутри этих областей. Только при „макроскопической" трактовке при некоторых условиях возможно считать концентрированные заряды равномерно распределенными по некоторому объему и таким образом получить среднее электромагнитное поле.

С „макроскопической" точки зрения нас интересует в первую очередь поведение материи в целом, а не уравнения движения индивидуальных точечных масс и заряженных частиц. В этом смысле мы и будем в настоящей главе рассматривать „сплошные среды".

Однако если механика сплошных сред является лишь апроксимацией, то возникает вопрос, почему она существенна для развития теории относительности? С точки зрения теории относительности наиболее обещающими частями классической физики являются теории поля, так как теории дальнодействия не могут быть релятивистски модифицированы. В теории поля непрерывные переменные этого поля рассматриваются как основные физические величины, а не как средние беспорядочно распределенных точечных масс. Рассмотрение механики сплошных сред покажет нам, как ввести в теории поля, в частности в теорию электромагнитного поля, механические понятия энергии и импульса.

Нерелятивистская трактовка. При описании поведения так называемых сплошных сред — упругих тел, жидкостей и газов внимание фиксируется не на индивидуальных частицах, а на некотором выделенном элементе объема. С течением времени одни частицы попадают в этот объем, а другие его покидают. Движение каждой молекулы подчиняется общим законам механики, однако важно сформулировать эти законы так, чтобы в них входили не точечные массы и их положения, а локальные плотности массы, импульса и т. д. „Элемент объема" должен содержать достаточно большое количество отдельных частиц, чтобы средние значения имели смысл и являлись разумными непрерывными функциями четырех координат: x, y, z и t. Предположим, что можно определить локальные средние плотность и скорость. Вначале будем придерживаться нерелятивистской точки зрения. Обозначим плотность через ρ, а среднюю скорость через $\mathbf{u}$. Изменение плотности ρ в данном элементе объема определяется количеством втекающего в него вещества

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{8.1}$$

Это уравнение, „уравнение непрерывности", выражает закон сохранения массы.

Чтобы получить уравнения движения, введем понятия „частного" („локального") и „полного" („материального") дифференцирования по времени. Рассмотрим некоторую характеристику среды q (скаляр, компонента вектора и т. д.) и ее изменение во времени. Если описывается ее измеиение во времени в фиксированной точке (x^i), то в качестве производной нужно взять „частную или локальную производную" $\frac{\partial q}{\partial t}$. С другой стороны, это изменение можно относить к системе координат, движущейся вместе с выделенным элементом объема среды; иначе говоря, изменение q можно описывать так, как это представляется наблюдателю, движущемуся вместе с выделенным элементом материи. Тогда надо брать „полную или материальную производную", обозначаемую через $\frac{Dq}{Dt}$. Последняя связана с частной производной соотношением

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} q = \frac{\partial q}{\partial t} + u^s \cdot q_{,s}. \tag{8.2}$$

Обозначим силу, действующую на единичный объем материи, через g_i. Тогда уравнениями движения будут

$$\rho \frac{Du^i}{Dt} = g^i, \tag{8.3}$$

или, используя (8.2), получим:

$$\rho \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^s u^i{}_{,s} \right) = g^i. \tag{8.3a}$$

Левую часть можно преобразовать к виду:

$$\left.\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^s u^i{}_{,s} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u^i) - u^i \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u^s u^i)_{,s} - \\ - u^i (\rho u^s)_{,s} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u^i) + (\rho u^s u^i)_{,s} - \\ - u^i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u^s)_{,s} \right]. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

В силу уравнения непрерывности (8.1) выражение в квадратных скобках обращается в нуль, и мы имеем

$$g^i = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u^i) - (\rho u^i u^s)_{,s}. \tag{8.5}$$

Сами силы могут быть двух типов. Во-первых, среда может подвергаться действию гравитационных, электрических или тому подобных полей, в которых сила, действующая на заданный бесконечно малый элемент объема, пропорциональна его величине. Такие силы называются „объемными силами". Будем обозначать их через f^i. Кроме того, нужно принять во внимание и другой тип сил, являющихся результатом возникающих внутри материальной среды напряжений. Частицы, принадлежащие двум смежным элементам объема, могут взаимодействовать друг с другом, причем сила их взаимодействия будет пропорциональна площади соприкосновения этих объемов. Такие силы называются поэтому „поверхностными силами". Компоненты поверхностной силы dq^i линейно зависят от компонент вектора ориентированной площадки dA_k:

$$dq^i = -t^{ik} dA_k, \tag{8.6}$$

где вектор dA_k перпендикулярен площадке, а длина его равна площади последней. Сила dq^i является линейной функцией dA_k в силу того, что полная сила, действующая на бесконечно малый объем, зависит от его размера, но не от формы. Знак t^{ik} выбирается так, чтобы при направлении вектора dA_k по внешней нормали получалась сила, действующая со стороны окружающей среды на выбранный элемент объема. Это обычно принимаемое условие ведет к тому, что компоненты тензора напряжений, соответствующего обыкновенному изотропному давлению, становятся положительными.

t^{ik} должен быть симметричным в своих индексах:

$$t^{ik} = t^{ki}. \tag{8.7}$$

В противном случае момент количества движения изолированного тела ($\mathfrak{f} = 0$) будет меняться во времени:

$$\frac{dM_l}{dt} = \int\limits_V \delta_{ikl} t^{kl} dV,$$

где интегрирование производится по объему тела[1].

Сила, действующая на материю, заключенную в конечном объеме, равна:

$$G^i = \int\limits_V f^i dV - \oint\limits_S t^{ik} dA_k, \tag{8.8}$$

где f^i — плотность объемных сил. С помощью теоремы Гаусса второй интеграл по замкнутой поверхности можно преобразовать в объемный:

$$G^i = \int\limits_V (f^i - t^{ik}{}_{,k})\, dV. \tag{8.9}$$

---

[1] δ_{ikl} — тензорная плотность Леви-Чивита.

Таким образом, для плотности силы получаем:

$$g^l = f^l - t^{lk}{}_{,k}. \tag{8.10}$$

Сравнивая последнее уравнение с (8.5), получим нерелятивистские уравнения движения:

$$\frac{\partial(\rho u^l)}{\partial t} + (\rho u^l u^k + t^{lk})_{,k} - f^l = 0. \tag{8.11}$$

Эти три уравнения вместе с уравнением непрерывности (8.1) определяют поведение сплошной среды под действием напряжений и других сил.

Кроме того, существует закон сохранения энергии, согласно которому изменение энергии в элементе объема определяется балансом потока энергии, протекающего через этот элемент.

Поведение механической системы может быть полностью определено только в том случае, если известны t^{lk} и f^l. Объемные силы определяются внешними условиями, скажем, наличием гравитационного поля, в то время как напряжения зависят от внутренних деформаций или от потока материи. Например, в случае идеальной жидкости t^{lk} равно давлению p, умноженному на тензор Кронекера δ_{lk}. Само давление p является функцией плотности ρ и температуры, которая определяется из уравнения состояния жидкости. Нет необходимости определять компоненты напряжения, так как нас будут интересовать только их трансформационные свойства.

Специальная система координат. Для того чтобы получить лорентц-ковариантные законы, введем сначала специальную систему координат $\overset{0}{S}$, в которой среда покоится в мировой точке $\overset{0}{P}$. В этой мировой точке уравнения находятся особенно просто, так как все классические члены, в которые скорость входит не под знаком дифференциала, равны нулю. Первые производные от u^l равны при этом первым производным от U^l, а первая производная от U^4 исчезает. Сама компонента U^4 равна единице. Поскольку среда неподвижна, ее полная плотность энергии есть плотность энергии покоя и равна плотности массы c^2, умноженной на ρ. Единственные изменения, которые нужно внести в классические законы, обусловлены релятивистской связью потока энергии с импульсом. Поэтому поток энергии должен рассматриваться во всех законах сохранения.

Сформулировав законы в специальной системе координат, мы придадим им форму тензорных уравнений.

Вначале рассмотрим перенос энергии, обусловленный движением среды только под действием механических напряжений. В дальнейшем мы распространим наш формализм также и на электромагнитное взаимодействие. Имея в виду это ограничение, сформулируем сперва закон сохранения энергии.

Изменение полной энергии, содержащейся в некотором объеме, определяется количеством энергии, втекающей в данный объем и вытекающей из него. Благодаря релятивистскому соотношению между энергией и массой поток энергии представляет собой не что иное, как плотность импульса, умноженную на c^2. Последняя состоит из двух частей: во-первых, мы имеем произведение плотности массы на скорость, $\rho\mathbf{u}$; во-вторых, к нему прибавляется поток энергии, создаваемый напряжениями. Рассмотрим ориентированную бесконечно малую площадку $d\mathbf{A}$. С обеих ее сторон на среду действуют силы, равные: $t^{rs}dA_s$ — с той стороны, куда направлена нормаль, и $(-t^{rs}dA_s)$ — с другой стороны. Если среда в окрестности этой поверхности движется со скоростью $\mathbf{u}$, то работа, производимая на одной стороне, равна $u^r t^{rs}dA_s$, а на другой, соответственно, $(-u^r t^{rs}dA_s)$. Количество энергии, полученное одной стороной, равно количеству энергии, потерянному другой; другими словами, имеет место поток энергии через поверхность, а компонентами вектора этого потока являются $u^r t^{rs}$. Соответствующая ему плотность импульса меньше в c^2 раз. Таким образом, полная плотность импульса равна:

$$P^s = \rho u^s + \frac{1}{c^2} u^r t^{rs}. \tag{8.12}$$

В точке $\overset{0}{P}$ оба члена равны нулю, однако этого нельзя сказать об их производных. Для закона сохранения энергии получаем уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + P^s{}_{,s} = 0,$$

или

$$\rho_{,4} + \rho u^r{}_{,s} + \frac{1}{c^2} u^r{}_{,s} t^{rs} = 0. \tag{8.13}$$

Подобным же образом можно написать уравнение, связывающее изменение плотности импульса во времени с плотностью сил. При нашем выборе системы координат в точке $\overset{0}{P}$ нет разницы между „частными" и „полными" производными. Таким образом получаем:

$$\rho u^l{}_{,4} + \frac{1}{c^2} u^r{}_{,4} t^{rl} + t^{lr}{}_{,r} = f^l. \tag{8.14}$$

Уравнения (8.13) и (8.14) заменяют нерелятивистские уравнения (8.1) и (8.11).

Тензорная форма уравнений. Мы уже не раз убеждались, что релятивистские законы часто отличаются от классических только тем, что трехмерные векторы и тензоры заменяются соответствующими четырехмерными. Например, трехмерный импульс $m\mathfrak{u}$ должен быть заменен мировым вектором mU^ρ, трехмерный антисимметричный тензор H_{mn} — антисимметричным мировым тензором $\varphi_{\mu\nu}$ и т. д. Из нерелятивистских уравнений (8.11) видно, что в релятивистских уравнениях должен играть важную роль симметричный тензор второго ранга; он состоит из двух членов: первый соответствует нерелятивистскому члену $\rho u^i u^k$, а второй t^{ik}. В согласии с этим мы введем сначала симметричный мировой тензор $t^{\iota\varkappa}$, имеющий в специальной системе $\overset{0}{S}$ в точке $\overset{0}{P}$ следующие компоненты:

$$t^{\iota\varkappa} = \begin{Bmatrix} t^{ik}, & 0 \\ 0, & 0 \end{Bmatrix}. \tag{8.15}$$

Это означает, что он удовлетворяет ковариантным уравнениям

$$t^{i\varkappa}U_{\varkappa}=0. \tag{8.16}$$

С помощью этого мирового тензора можно иначе представить член $\frac{1}{c^2}u^r{}_{,4}t^{ri}$ из (8.14). Именно:

$$\frac{1}{c^2}u^r{}_{,4}t^{ri}=\frac{1}{c^2}(u^r t^{ri})_{,4}=(-U_r t^{ri})_{,4}=(-U_\rho t^{\rho i}+U_4 t^{4i})_{,4}. \tag{8.17}$$

В силу (8.16) первый член в скобках обращается в нуль, а во втором члене U^4 равно единице, так что можно записать

$$\frac{1}{c^2}u^r{}_{,4}t^{ri}=t^{i4}{}_{,4}. \tag{8.18}$$

Таким же образом в (8.13) можно преобразовать член $\frac{1}{c^2}u^r{}_{,s}t^{rs}$. Тогда получим:

$$\frac{1}{c^2}u^r{}_{,s}t^{rs}=\frac{1}{c^2}(u^r t^{rs})_{,s}=-(U_r t^{rs})_{,s}=$$

$$=+(U_4 t^{4s})_{,s}=t^{4s}{}_{,s}. \tag{8.19}$$

После этого (8.13) и (8.14) принимают вид:

$$\rho_{,4}+(\rho u^s+t^{4s})_{,s}=0, \tag{8.13a}$$

$$(\rho u^i+t^{4i})_{,4}+t^{ir}{}_{,r}=f^i. \tag{8.14a}$$

Как уже указывалось, U^4 равно единице, а его первые производные равны нулю. Поэтому замена u^i на U^i и умножение некоторых членов на U^4 меняют только форму уравнений:

$$(\rho U^4U^4)_{,4}+(\rho U^sU^4+t^{s4})_{,s}=0, \tag{8.13б}$$

$$(\rho U^iU^4+t^{i4})_{,4}+t^{is}{}_{,s}=f^i. \tag{8.14б}$$

Осталось еще только показать, что в первой скобке уравнения (8.13б) можно прибавить t^{44} и f^l заменить мировым вектором f^ι.

Согласно уравнению (8.16) компонента ${t^{44}}_{,4}$ может быть следующим образом выражена через другие компоненты:

$$ {t^{44}}_{,4} = (U_4 t^{44})_{,4} = -(U_s t^{s4})_{,4} = \frac{1}{c^2}(u^s t^{s4})_{,4}. \qquad (8.20) $$

И u^s и t^{s4} исчезают в $\overset{0}{P}$, поэтому производная от $u^s t^{s4}$ также обращается в нуль. В связи с этим в уравнении (8.13б) к выражению $(\rho U^4 U^4)_{,4}$ можно прибавить ${t^{44}}_{,4}$, не меняя значения первого члена.

По правой части уравнений (8.13б) и (8.14б) определяем мировой вектор f^ρ, компоненты которого в системе $\overset{0}{P}$ в точке $\overset{0}{S}$ равны $(f^l, 0)$. Он удовлетворяет ковариантному уравнению

$$ f^\rho U_\rho = 0. \qquad (8.21) $$

После этих изменений (8.13б) и (8.14б) можно объединить в четырехкомпонентный ковариантный закон

$$ {P^{\mu\nu}}_{,\nu} = f^\mu; \quad P^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + t^{\mu\nu}. \qquad (8.22) $$

Тензор $P^{\mu\nu}$ преобразуется, как контравариантный тензор, и его дивергенция является поэтому контравариантным вектором.

Рассмотрим вкратце физический смысл тензора $P^{\mu\nu}$ в системе координат, отличной от $\overset{0}{S}$. Произведем преобразование Лорентца наиболее простого типа, соответственно уравнениям (4.13), т. е. совершим переход к системе координат, в которой среда движется вдоль оси X со скоростью v. В этой системе координат компоненты тензора

$P^{\mu\nu}$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&P^{*11}=\frac{t^{11}+\rho v^2}{1-v^2/c^2}, \\
&P^{*12}=\frac{t^{12}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad P^{*13}=\frac{t^{13}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\
&P^{*22}=t^{22}, \quad P^{*23}=t^{23}, \quad P^{*33}=t^{33}, \\
&P^{*14}=-\frac{\rho v+\frac{v}{c^2}t^{11}}{1-v^2/c^2}, \\
&P^{*24}=-\frac{v}{c^2}\frac{t^{12}}{1-v^2/c^2}, \quad P^{*34}=-\frac{v}{c^2}\frac{t^{13}}{1-v^2/c^2}, \\
&P^{*44}=\frac{\rho+\frac{v^2}{c^4}t^{11}}{1-v^2/c^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.23}$$

Полная энергия свободно движущейся частицы превышает ее энергию покоя в $(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ раз. Рассматривая вместо энергии плотность энергии, нужно принять во внимание, что объем, содержащий заданное число молекул, при движении испытывает сокращение в $(1-u^2/c^2)^{1/2}$ раз. Оба эффекта вместе приводят к тому, что полная плотность энергии (а потому и плотность массы) превышает плотность энергии покоя (или плотность массы покоя) в $(1-u^2/c^2)^{-1}$ раз. [В нашем случае u равно $(-v)$.] При этом рассуждении не принимались во внимание напряжения, вызывающие движение среды, однако оно поясняет в основном, почему ρ в уравнениях (8.23) везде умножается на $(1-u^2/c^2)^{-1}$.

Что касается компонент P^{rs} (без индекса 4), то они содержат t^{rs}, умноженные на различные степени выражения $(1-u^2/c^2)^{-1/2}$, и „релятивистскую плотность массы" $(1-u^2/c^2)^{-1}\cdot\rho$, умноженную на $u^r u^s$.

Компоненты P^{r4} остаются компонентами плотности импульса; как указывалось выше, плотность импульса содержит члены, обусловленные наличием напряжений. P^{44} продолжает представлять собой плотность энергии. Член, обусловленный напряжениями, квадратичен относительно скорости среды.

Так же как в классической гидродинамике, система полностью определена, только если тензор $P^{\mu\nu}$ задан. Вернемся к случаю идеальной жидкости. В специальной системе координат $\overset{0}{S}$ тензор $P^{\mu\nu}$ имеет компоненты,

$$\begin{Bmatrix} p\delta_{ik}, 0 \\ 0 \quad \rho \end{Bmatrix},$$

иначе говоря, скалывающих напряжений нет, и давление изотропно. При преобразовании Лорентца $P^{\mu\nu}$ переходит в

$$\left\{\begin{aligned} P^{\mu\nu} &= \rho U^{\mu}U^{\nu} - \frac{1}{c^2}(\eta^{\mu\nu} - U^{\mu}U^{\nu})\,p = \\ &= \left(\rho + \frac{1}{c^2}p\right)U^{\mu}U^{\nu} - \frac{1}{c^2}p\eta^{\mu\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{8.24}$$

где ρ и p связаны друг с другом и с температурой уравнением состояния жидкости.

$P^{\mu\nu}$ обычно называют тензором энергии-импульса. В нашем частном случае он специализирован в том смысле, что его компоненты P^{r4} обращаются в нуль в специальной системе координат. Пользуясь языком алгебры квадратичных форм, можно сказать, что U^{ι} является собственным вектором матрицы $P^{\iota}_{\cdot\varkappa}$, а ρ — ее соответствующим собственным значением. Это не общее свойство тензора энергии-импульса; U^{ι} — собственный вектор матрицы $P^{\iota}_{\cdot\varkappa}$ только, пока рассматривается перенос энергии посредством механического взаимодействия. Перейдем теперь к рассмотрению электромагнитного взаимодействия, где U^{ι} уже не представляет собой собственного вектора матрицы $P^{\iota}_{\cdot\varkappa}$.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля. В предыдущей главе было показано, что действующая на заряженную точечную массу мировая сила $m\frac{dU^{\rho}}{d\tau}$, согласно (7.49), равна $\frac{e}{c^3}\varphi^{\rho}_{\cdot\sigma}U^{\sigma}$, где $\varphi^{\rho}_{\cdot\sigma}$ — (смешанный) тензор поля. Предположим теперь, что рассматриваемая в этой главе сплошная среда содержит заряженные частицы, например электроны, и в таком количестве, что полем каждой частицы в сравнении с общим полем можно пренебречь. Можно принять $\varphi^{\rho}{}_{\cdot\sigma}$ за среднее полное поле в окрестности рассматриваемой частицы. Пусть, далее, элемент объема $d\overset{0}{V}$ покоится в $\overset{0}{S}$. Обозначим через σ собственную плотность зарядов заряженных частиц, т. е. плотность заряда в системе $\overset{1}{S}$, в которой заряженные частицы покоятся. Будем, далее, обозначать мировой вектор скорости заряженных частиц через W^{ι}, а скорость системы $\overset{0}{S}$ — через U^{ι}. Объем $d\overset{0}{V}$ в системе $\overset{1}{S}$ сокращается в $\sqrt{1-\overset{1}{u}{}^2/c^2}$ раз ($\overset{1}{u}$ — относительная скорость систем $\overset{0}{S}$ и $\overset{1}{S}$). Поэтому полный заряд, содержащийся в $d\overset{0}{V}$, будет

$$e=\sigma\cdot\sqrt{1-\overset{1}{u}{}^2/c^2}\,d\overset{0}{V}. \tag{8.25}$$

Согласно (7.49) сила, действующая на этот заряд, равна:

$$\frac{dp^{\varkappa}}{d\overset{1}{\tau}}=\sigma\sqrt{1-\overset{1}{u}{}^2/c^2}\cdot d\overset{0}{V}\cdot\frac{1}{c^3}\,\varphi^{\varkappa}{}_{\cdot\sigma}W^{\sigma}, \tag{8.26}$$

где $p^{\varkappa}$ — мировой вектор импульса [см. уравнение (6.22)] и $\overset{1}{\tau}$ — время в системе $\overset{1}{S}$. По электронной теории Лорентца, собственная плотность заряда σ, умноженная на четырехмерную скорость W^{ι}, дает мировую плотность тока I^{ι}; поэтому можно написать

$$\frac{dp^{\varkappa}}{d\overset{1}{\tau}}=\sqrt{1-\frac{\overset{1}{u}{}^2}{c^2}}\,d\overset{0}{V}\frac{1}{c^3}\,\varphi^{\varkappa}{}_{\cdot\sigma}I^{\sigma}. \tag{8.26a}$$

С другой стороны, желательно ввести $\overset{0}{S}$-время вместо собственного времени $\overset{1}{\tau}$. Из-за увеличения временного интервала изменение импульса на единицу $\overset{0}{S}$-времени отличается от изменения на единицу $\overset{1}{S}$-времени на множитель $\sqrt{1-\frac{\overset{1}{u^2}}{c^2}}$. Этот множитель сокращается с таким же множителем в правой части уравнения (8.26а), так что получаем:

$$\frac{dp^x}{d\overset{0}{t}} = \frac{1}{c^3}\,\varphi^{x}_{\cdot\sigma}\,I^{\sigma}d\overset{0}{V}. \qquad (8.26б)$$

Это последнее уравнение не содержит более величин относящихся к системе $\overset{1}{S}$. Оно справедливо поэтому даже в том случае, когда среда содержит заряженные частицы различного рода (электроны, атомные ядра, ионы с различными массами и зарядами) с различными средними скоростями. Действительно, полная плотность тока равна сумме плотностей токов частиц каждого типа и, соответственно, производная по $\overset{0}{S}$-времени полной плотности импульса равна сумме производных плотностей импульсов различных частиц.

Уравнение (8.26б) поэтому справедливо постольку, поскольку среду можно считать непрерывной. Отсюда следует, что $\frac{1}{c^3}\varphi^{x}_{\cdot\sigma}\,I^{\sigma}$ можно рассматривать как мировую силу на единицу собственного объема и подставить ее в правую часть уравнения (8.22). Тогда получаем:

$$P^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{c^3}\,\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\,I^{\sigma}. \qquad (8.27)$$

Правую часть можно преобразовать так, чтобы она приняла вид дивергенции симметричного мирового тензора. Во-первых, I^{ι} определяем через напряженности поля из (7.20). Это дает:

$$P^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\frac{c^{-6}}{4\pi}\,\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\,\varphi^{\sigma\nu}{}_{,\nu}. \qquad (8.27а)$$

Во-вторых, интегрируем по частям:

$$\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\sigma\nu}{}_{,\nu} = -(\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\nu\sigma})_{,\nu} + \varphi^{\nu\sigma}\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma,\nu}. \qquad (8.28)$$

В последнем члене во втором множителе меняем местами индексы ν и σ. В силу антисимметрии $\varphi^{\nu\sigma}$ получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{\nu\sigma}\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma,\nu} &= \frac{1}{2}\varphi^{\nu\sigma}(\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma,\nu} - \varphi^{\mu}_{\cdot\nu,\sigma}) = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}(\varphi_{\rho\sigma,\nu} - \varphi_{\rho\nu,\sigma}) = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}(\varphi_{\rho\sigma,\nu} + \varphi_{\nu\rho,\sigma}). \end{aligned}\right\} \qquad (8.29)$$

Принимая во внимание (7.19), это последнее выражение приводится к виду

$$\varphi^{\nu\sigma}\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma,\nu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}\varphi_{\sigma\nu,\rho} = +\frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}(\varphi^{\nu\sigma}\varphi_{\nu\sigma})_{,\rho}. \qquad (8.29a)$$

Из (8.28) можно получить, заменяя некоторые немые индексы,

$$\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\sigma\nu}{}_{,\nu} = -\left(\varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\varphi^{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}\right)_{,\nu}. \qquad (8.28a)$$

Подставляя это выражение в (8.27a), окончательно находим:

$$\left[P^{\mu\nu} + \frac{c^{-6}}{4\pi}\left(\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\varphi^{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma} - \varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\nu\sigma}\right)\right]_{,\nu} = 0. \qquad (8.30)$$

Рассмотрим теперь по порядку компоненты этого нового четырехмерного тензора. Положим

$$\frac{c^{-6}}{4\pi}\left(\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\varphi^{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma} - \varphi^{\mu}_{\cdot\sigma}\varphi^{\nu\sigma}\right) \equiv M^{\mu\nu} \qquad (8.31)$$

и заменим $\varphi_{\mu\nu}$ и $\varphi^{\mu\nu}$ выражениями (7.17) и (7.17a). Различные компоненты $M^{\mu\nu}$ даются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} M^{44} &= \frac{1}{8\pi c^2}(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2), \\ M^{4s} &= M^{s4} = \frac{1}{4\pi c}\delta_{sik}E_i H_k, \\ M^{rs} &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\delta_{rs}(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2) - H_r H_s - E_r E_s\right]. \end{aligned}\right\} \quad (8.32)$$

M^{rs} являются компонентами тензора напряжений электромагнитного поля, который был известен еще Максвеллу; M^{4s} представляют собой компоненты вектора Пойнтинга, разделенные на c^2; наконец, M^{44} есть плотность энергии электромагнитного поля, деленная на c^2. Эта последняя фигурирует также и в классической теории электромагнетизма.

Плоская электромагнитная волна обладает определенными плотностью и потоком энергии и вызывает определенные напряжения. Плоская волна, распространяющаяся в направлении оси X, имеет четырехмерный тензор энергии-импульса с компонентами

$$\left.\begin{aligned} M^{44} &= \frac{1}{4\pi c^2}A^2, \\ M^{14} &= \frac{1}{4\pi c}A^2, \\ M^{11} &= \frac{1}{4\pi}A^2, \end{aligned}\right\} \quad (8.33)$$

где A — совпадающие значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, все остальные компоненты равны нулю. Напряжение в направлении распространения положительно и называется „давлением излучения“.

Задачи

1. Как трансформируются давление радиации, плотность импульса и плотность энергии плоской электромагнитной волны при преобразовании Лорентца (4.13), примененном к уравнению (8.33)?

2. Преобразовать частоту ν той же самой плоской волны. Предполагая, что энергия фотона равна $h\nu$, найти закон преобразования плотности фотона.

Глава IX

ПРИМЕНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*

Экспериментальные подтверждения специальной теории относительности. В главе IV указывалось, что только теория относительности объясняет результаты опытов Майкельсона-Морлея и Физо и явление аберрации.

Опыты Майкельсона-Морлея были впоследствии повторены в различных условиях много раз [1]. При этом все новые опыты, за исключением опытов Д. С. Миллера, подтвердили первоначальный результат. Трудно сказать, почему опыты Миллера указывают на „увлечение эфира" со скоростью 10 км/сек. Поскольку все остальные эксперименты свидетельствуют о точности уравнений преобразования Лорентца, естественно предположить, что результаты Миллера обусловлены систематической экспериментальной ошибкой, сущность которой до сих пор еще не ясна.

Не так давно уравнения преобразования Лорентца были совершенно иным путем подтверждены Айвсом [2]. Айвс измерял так называемый релятивистский эффект Допплера. Частота света не инвариантна относительно преобразования Лорентца (см. задачу 3 главы IV). Ее закон преобразования имеет вид:

$$\nu^* = \nu \frac{1 - \cos\alpha \cdot \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{9.1}$$

---

[1] R. J. Kennedy, Proc. Nat. Acad. Sci., **12**, 621 (1926); Astrophys. J., **68**, 367 (1928). Piccard and Stahel, Comptes Rendus, **183**, 420 (1926); **185**, 1198 (1928); Naturwissenschaften, **14**, 935 (1926); **16**, 25 (1928). D. C. Miller, Rev. Mod. Phys., **5**, 203 (1933), где приводятся дальнейшие ссылки. G. Joos, Ann. d. Physik, **7**, 385, (1930).

[2] H. E. Ives, J. Opt. Soc. Am., **28**, 215 (1938).

где α — угол между относительной скоростью двух систем координат и направлением распространения света в первоначальной системе координат. Этот релятивистский закон отличается от классического только знаменателем. Обычно релятивистский эффект второго порядка перекрывается классическим эффектом Допплера (зависящее от угла слагаемое в числителе), который является эффектом первого порядка относительно $\frac{v}{c}$.

Айвс измерял изменение частоты линии H_β, испускаемой каналовыми лучами водорода, пользуясь ускоряющими напряжениями до 18 000 вольт, т. е. скоростями до $1{,}8 \cdot 10^8$ см/сек $\left(\frac{v}{c} \sim 6 \cdot 10^{-3}\right)$. Чтобы отделить малый эффект второго порядка от гораздо большего эффекта первого порядка, Айвс измерял длину волны H_β каналовых лучей в двух направлениях: по и против направления их движения. При помощи зеркала обе смещенные линии и несмещенная линия покоящегося атома водорода одновременно фотографировались иа одну и ту же фотографическую пластинку.

В соответствии с релятивистским законом (9.1) частоты обеих смещенных линий соответственно равны

$$\overset{*}{\nu}_1 = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \overset{*}{\nu}_2 = \nu \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а их средним значением будет выражение:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.2}$$

Айвс измерял смещение $\bar{\nu}$ относительно частоты несмещенной линии ν. При этом был подтвержден релятивистский закон преобразования.

Важность этого эксперимента состоит в том, что в нем непосредственно измеряется „удлинение времени", кажущееся замедление движущихся часов [1]). Результат опыта Майкельсона-Морлея может быть объяснен, и впервые он так и был объяснен, только „лорентцовым сокращением", т. е. сокращением расстояния между полупосеребренной пластинкой и зеркалом в направлении „движения сквозь эфир".

С другой стороны, в экспериментах Айвса нет движущихся масштабов, а имеет место движение относительно наблюдателя „атомных часов" (каналовых лучей) и замедление этих „часов", которое является причиной „релятивистского эффекта Допплера".

Все эти подтверждения теории относительности касались только применения преобразования Лорентца к световым лучам. Мы перейдем теперь к рассмотрению других модификаций классической теории, приведенных в главах VI и VII.

Многие явления ядерной физики говорят в пользу того, что инертная масса эквивалентна энергии. Масса ядра всегда меньше суммы масс составляющих его протонов и нейтронов. В ряде случаев можно показать, что дефект массы в c^2 раз меньше энергии, выделяющейся при образовании ядер [2]). Самым замечательным примером исчезновения массы является аннигиляция электронно-позитронной пары.

---

[1]) „Замедление часов" особенно ярко проявляется при измерении времени жизни мезона в космических лучах. В то время как для покоящегося мезона $\tau = \tau_0 \approx 210^{-6}$ сек., для движущегося $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{\tau_0 E}{mc^2}$, где E — полная энергия движущегося мезона. Так как $mc^2 \approx 100$ MeV, то при наблюдаемых энергиях $E \sim 1000$ MeV, $\dfrac{\tau}{\tau_0} \sim 10$. Подробнее см. Е. Л. Фейнберг „Распад мезона" в сборнике „Мезон", ГТТИ (1947). (*Прим. ред.*)

[2]) Cf. Rasetti Franco, Elements of Nuclear Physics, Prentice-Hall, Inc., New-York, p. 165 (1936) [имеется русский перевод, ГТТИ (1940)].

Массы электрона и позитрона при этом полностью превращаются в энергию электромагнитного излучения. Если вблизи взаимодействующей системы нет третьей частицы (ядра), полный импульс при аннигиляции должен сохраняться. Так как скорости электрона и позитрона непосредственно перед аннигиляцией обычно малы, энергия и импульс будут сохраняться только в случае излучения двух γ-квантов в противоположных направлениях, так что их импульсы взаимно уничтожаются, а энергия каждого кванта соответствует массе одного электрона. Излучение с такой энергией — около 5.10^5eV — действительно наблюдается при аннигиляции позитронов.

Заряженные частицы в электромагнитном поле. Дальнейшая проверка специальной теории относительности основывается на изучении поведения частиц под действием сил. В главе IV был рассмотрен эффект Комптона, то есть „столкновения" γ-квантов с электронами. Теперь рассмотрим действие стационарных электромагнитных полей на заряженные частицы. Уравнениями движения будут уравнения (7.44):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=e\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{u}}{c}\times\mathbf{H}\right). \tag{9.3}$$

Для получения закона сохранения энергии умножим это уравнение скалярно на $\mathbf{u}$ и проинтегрируем обе стороны по частям. Слева получим

$$\left.\begin{aligned}
\underline{\mathbf{u}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)-\frac{m\mathbf{u}\dot{\mathbf{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\\
&=\frac{d}{dt}\left(\frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)-\frac{mu\dot{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\\
&=\frac{d}{dt}\left(\frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)+mc^2\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-u^2/c^2}\right)=\\
&=\underline{mc^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)},
\end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

а справа

$$\underline{e\mathbf{u}\mathbf{E}+\mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{u}}{c}\times\mathbf{H}\right)}=e\mathbf{u}\mathbf{E}=\underline{e\mathbf{u}\left(-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)}.$$

Таким образом, изменение энергии вдоль пути частицы определяется выражением

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right]=-e\mathbf{u}\left(\operatorname{grad}\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right). \tag{9.5}$$

Рассматривая изменение потенциала φ вдоль пути, можно выделить полный дифференциал из выражения $\mathbf{u}\operatorname{grad}\varphi$:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\varphi_{,s}\frac{dx^s}{dt}+\varphi_{,4}=\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{9.6}$$

Уравнение (9.5) принимает тогда вид

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}+e\varphi\right]=+e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{c}\mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right). \tag{9.7}$$

В статическом поле, где φ и **A** не меняются во времени, выражение слева в квадратных скобках остается постоянным.

Уравнение (9.7) дает возможность определить скорость частиц, попадающих в сильное электрическое поле с весьма малыми начальными скоростями. Их кинетическая энергия после прохождения разности потенциалов V будет

$$mc^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-1\right\}=eV, \tag{9.8}$$

а их скорость

$$u=\sqrt{\frac{2eV}{m}\cdot\frac{1+\frac{e}{m}\frac{V}{2c^2}}{\left(1+\frac{e}{m}\frac{V}{c^2}\right)^2}}. \tag{9.9}$$

Классическая формула

$$u_{\text{class}}=\sqrt{2\frac{e}{m}V},$$

является хорошим приближением, когда $\frac{e}{m}\frac{V}{c^2}$ мало в сравнении с единицей.

Формула (9.8) показывает, что изменение энергии частицы равно произведению ее заряда на разность потенциалов. Этой формулой пользуются во всех случаях, когда энергия частицы при эксперименте определяется ускоряющей разностью потенциалов, как, скажем, это имеет место в электростатическом генераторе Ван-де-Граафа.

В камере Вильсона скорость заряженной частицы обычно определяется измерением радиуса кривизны ее траектории в постоянном магнитном поле, перпендикулярном направлению скорости. Определим этот радиус.

Ускорение заряженной частицы в магнитном поле определяется уравнением (9.3)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)=\frac{e}{c}\,\mathbf{u}\times\mathbf{H}. \tag{9.10}$$

Из уравнения (9.7) видно, что, когда $\mathbf{H}$ не зависит от времени, скорость u остается постоянной. Поэтому можно заменить вектор $\mathbf{u}$ произведением постоянной скорости u на единичный вектор $\mathbf{s}$, параллельный $\mathbf{u}$ и меняющий с течением времени свое направление. Левая часть уравнения (9.10) переходит в

$$\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{d\mathbf{s}}{dt},$$

а правая равна:

$$\frac{e}{c}\,u\mathbf{s}\times\mathbf{H},$$

так что для (9.10) получаем

$$\frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\frac{e}{c}\,\mathbf{s}\times\mathbf{H}. \tag{9.10a}$$

Заменим теперь дифференцирование по t дифференцированием по длине дуги l. Так как $\frac{dl}{dt}$ есть скорость u, то вместо (9.10a) получим

$$\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{d\mathbf{s}}{dl}=\frac{e}{c}\,\mathbf{s}\times\mathbf{H}, \tag{9.11}$$

где $\mathbf{s}$ — единичный касательный вектор вдоль пути и, следовательно, $\frac{d\mathbf{s}}{dl}$ является кривизной, обратная величина которой представляет собой радиус кривизны R. Отсюда имеем

$$\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=R\cdot\frac{e}{c}\cdot H\cdot\sin(\mathbf{s},\mathbf{H}). \qquad (9.12)$$

Угол ($\mathbf{s}$, $\mathbf{H}$) постоянен вдоль пути. В этом легко убедиться путем скалярного умножения уравнения (9.10а) на $\mathbf{H}$, при этом правая часть обращается в нуль, в левую же часть в качестве множителя войдет производная от ($\mathbf{s}\cdot\mathbf{H}$) по t. Поэтому частица будет двигаться по винтовой линии. Если $\mathbf{s}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны, траекторией будет окружность. В этом случае произведение RH определяет величину релятивистского импульса частицы

$$RH=\frac{c}{e}\cdot\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{c}{e}p. \qquad (9.13)$$

Зная e и m, можно найти скорость и энергию частицы.

Иногда определяют отклонение заряженной частицы в электрическом поле, перпендикулярном ее траектории. Ускорение попрежнему определяется уравнением (9.3)

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right\}=e\mathbf{E}. \qquad (9.14)$$

Пока $\mathbf{E}$ и $\mathbf{u}$ взаимно перпендикулярны, скорость u остается постоянной. Вводя опять единичный вектор $\mathbf{s}$, вместо (9.14), получим:

$$\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{d\mathbf{s}}{dt}=e\mathbf{E}. \qquad (9.14а)$$

Переход к переменной длины дуги l приводит к уравнению

$$\frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{d\mathbf{s}}{dl}=e\mathbf{E}, \qquad (9.14б)$$

или, вводя радиус кривизны R,

$$\frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=eRE. \qquad (9.15)$$

В случае электрического поля траектории, конечно, не являются кругами. Уравнение (9.15) дает радиус кривизны только той части траектории, в которой направление движения перпендикулярно силовым линиям.

Для определения как массы покоя, так и скорости частицы необходимо исследовать ее поведение одновременно в электрическом и в магнитном полях. Можно, например, сообщить частице определенную энергию, ускоряя ее заданной разностью потенциалов [уравнение (9.8)], а затем по отклонению в магнитном поле определить ее импульс [уравнение (9.13)]; в таком случае одновременно вычисляются и масса и импульс частицы.

Опыты подобного рода использовались и для проверки релятивистских законов движения; при этом исследовалось множество частиц одного сорта, но обладавших различными скоростями. Все эти эксперименты подтвердили правильность релятивистских законов. Подробное описание этих экспериментов можно найти в статье В. Герлаха [1]).

Поле быстро движущейся частицы. Частицы, входящие в состав космических лучей, обычно движутся со скоростями, близкими к скорости света. Их электромагнитное поле родственно с электромагнитными волнами.

Определим поле такой быстро движущейся частицы. Для этого найдем сначала поле частицы в системе координат, в которой она покоится. Пусть в системе S^* частица всегда находится в начале координат: $x^* = y^* = z^* = 0$. Ее поле в этой системе чисто электрическое и задается уравнениями:

$$E_s^* = e x_s^* / r^{*3}. \tag{9.16}$$

Преобразование к другой системе координат S проведем в два этапа: сначала преобразуем компоненты электромагнитного поля, согласно уравнениям (7.22в), а затем выразим координаты, отмеченные звездочкой, через неотмеченные.

---

[1]) W. Gerlach, Handbuch d. Physik, **22**, pp. 61—62, Berlin, 1926.

Уравнения преобразования, обратные уравнениям (7.22в), получаются заменой знака при v противоположным. Так как все компоненты $\mathbf{H}^*$ равны нулю, то получаем

$$\left.\begin{aligned}
H_3 &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \cdot \frac{v}{c} \cdot E_2^*, \\
H_2 &= -(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \cdot \frac{v}{c} \cdot E_3^*, \\
H_1 &= 0, \\
E_1 &= E_1^*, \\
E_2 &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \cdot E_2^*, \\
E_3 &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \cdot E_3^*.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.17)$$

Векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ взаимно перпендикулярны.

Найдем E_s^* как функции S-координат. Расстояние r дается выражением:

$$r^{*^2} = x^{*^2} + y^{*^2} + z^{*^2},$$

или, если заменить эти координаты выражениями (4.13):

$$r^{*^2} = \frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2. \qquad (9.18)$$

Для трех компонент E_s^* имеем

$$\left.\begin{aligned}
E_1^* &= e\left[\frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{-3/2} \cdot \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\
E_2^* &= e\left[\frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{-3/2} \cdot y, \\
E_3^* &= e\left[\frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{-3/2} \cdot z.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.19)$$

Тогда три компоненты E_s равны

$$\left.\begin{aligned}
E_1 &= e\,\frac{x - vt}{N}, \\
E_2 &= e\,\frac{y}{N}, \quad E_3 = e\,\frac{z}{N}, \\
N &= \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot \left[\frac{(x - vt)^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2},
\end{aligned}\right\} \qquad (9.20)$$

а для компонент H_s получим:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= 0, \\ H_2 &= -\frac{v}{c}\, e\, \frac{z}{N}, \\ H_3 &= +\frac{v}{c}\, e\, \frac{y}{N}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.21)$$

Предположим, что скорость частицы космического излучения v почти равна скорости света, и рассмотрим поле этой частицы в некоторой точке (x, y, z), покоящейся в системе S. Амплитуда электрического поля

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2},$$

достигает максимума в момент времени $t_0 = \frac{x}{v}$; этот максимум тем более резко выражен, чем v ближе к c. В этот момент t_0 электрическое поле перпендикулярно оси X и по абсолютной величине равно напряженности магнитного поля. В фиксированной точке (x, y, z), находящейся на траектории частицы, поле быстро движущейся частицы приблизительно такое же, как поле узкого плоского волнового пакета.

Теория Зоммерфельда тонкой структуры водородных линий. Вскоре после того как Бору и Зоммерфельду удалось объяснить спектр атома водорода с помощью квантования адиабатических инвариантов, Зоммерфельд попытался в той же механической модели учесть релятивистские поправки. Он полагал, что релятивистские поправки объяснят расщепление термов, вырожденных в нерелятивистской теории, и что таким образом он получит теорию тонкой структуры.

Его попытка в случае атома водорода увенчалась успехом, но эта теория оказалась совершенно непригодной при объяснении спектров других атомов. Теперь известно, что объяснение тонкой структуры, данное Зоммерфельдом, неверно даже для водородного атома, так как оно не принимает во внимание спин электрона и не приводит к тем результатам, которые дает строгая волново-механическая релятивистская трактовка этой же задачи для частиц со спином 0[1]). Однако в теории Зоммерфельда две ошибки — отсутствие строгого волново-механического подхода и пренебрежение спином — в случае водородного атома взаимно компенсируют друг друга. Поэтому эта теория, несмотря на указанные ошибки, приводит к правильному результату. Работа Зоммерфельда тем не менее интересна с исторической точки зрения, так как в ней впервые появляется „постоянная тонкой структуры“ α. Поэтому здесь мы вкратце рассмотрим эту теорию.

Пусть электрон движется в поле протона, который вследствие его большой массы можно считать покоящимся. Уравнениями движения будут уравнения (9.14), где $\mathbf{E}$ задается следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad \varphi = \frac{e}{r}. \tag{9.22}$$

Интегралом этих уравнений будет интеграл энергии (9.8):

$$mc^2\left[\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}-1\right]-e\varphi(r) = W. \tag{9.23}$$

Другой интеграл, интеграл момента количества движения, получим, векторно умножая уравнение

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right\} = +e\operatorname{grad}\varphi \tag{9.24}$$

на радиус-вектор $\mathbf{r}$. Поскольку градиент φ всегда параллелен радиусу-вектору $\mathbf{r}$, правая часть обращается в нуль и получаем

$$0 = \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2/c^2}}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{r}\times\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)-\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{9.25}$$

Производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ в последнем члене равна $\mathbf{u}$, а векторное произведение $\mathbf{u}$ на самого себя равно нулю. Таким образом,

---

[1]) См., например, Л. де Бройль, „Магнитный электрон“, Харьков (1936). (*Прим. ред.*)

мы находим, что выражение

$$\frac{m(\mathbf{r}\times\mathbf{u})}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=p_\theta \tag{9.26}$$

является второй постоянной движения.

Введение полярных координат r, θ в плоскости движения приводит оба интеграла к виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=mc^2+\frac{e^2}{r}+W,\\ &\frac{mr^2\dot{\theta}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=I_\theta\,, \quad u^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2. \end{aligned}\right\} \tag{9.27}$$

Согласно Зоммерфельду, интеграл

$$\oint I_\theta d\theta,$$

взятый по полному периоду θ, должен быть целым, кратным h:

$$mr^2\dot{\theta}=n_\theta\cdot\hbar\cdot\sqrt{1-u^2/c^2}, \quad \hbar=\frac{h}{2\pi}. \tag{9.28}$$

Чтобы сформулировать второе квантовое условие, нужно найти радиальную компоненту импульса

$$p_r=\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{9.29}$$

С помощью двух интегралов движения (9.27) можно выразить p_r как функцию только от r. Действительно, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} p_r^2&=m^2\frac{\dot{r}^2}{1-u^2/c^2}=m^2\frac{u^2-r^2\dot{\theta}^2}{1-u^2/c^2}=\\ &=m^2c^2\left(\frac{1}{1-u^2/c^2}-1\right)-\frac{m^2r^2\dot{\theta}^2}{1-u^2/c^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9.30}$$

Сперва найдем выражение $\frac{1}{1-u^2/c^2}$ из интеграла энергии, т. е. из первой формулы в (9.27):

$$\frac{1}{1-u^2/c^2}=\left(\frac{mc^2+\frac{e^2}{r}+W}{mc^2}\right)^2. \tag{9.31}$$

Затем вычислим последний член в (9.30), исходя из квантовых условий (9.28). Имеем:

$$\frac{m^2r^2\dot{\theta}^2}{1-u^2/c^2}=\left(\frac{n_\theta\cdot\hbar}{r}\right)^2. \tag{9.32}$$

Подставляя выражения (9.31), (9.32) в (9.30), получим

$$p_r^2=m^2c^2\left[\left(\frac{mc^2+\frac{e^2}{r}+W}{mc^2}\right)^2-1\right]-\left(\frac{n_\theta\hbar}{r}\right)^2. \tag{9.33}$$

Второе квантовое условие гласит, что интеграл

$$\oint p_r dr,$$

взятый по полному периоду изменения переменной r, должен быть также целым, кратным h:

$$\oint\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(W+\frac{e^2}{r}\right)\left(W+\frac{e^2}{r}+2mc^2\right)-\left(\frac{n_\theta\hbar}{r}\right)^2}\,dr=n_r h. \tag{9.34}$$

Подинтегральное выражение

$$\left.\begin{aligned}2mW\left(1+\frac{W}{2mc^2}\right)+2e^2m\left(1+\frac{W}{mc^2}\right)\frac{1}{r}-\\-\frac{n_\theta^2\hbar^2}{r^2}\left(1-\frac{\alpha^2}{n_\theta^2}\right),\\ \alpha=\frac{e^2}{\hbar c}\end{aligned}\right\} \tag{9.35}$$

отличается от аналогичного нерелятивистского выражения вторыми членами в каждой скобке, представляющими собой релятивистские поправки.

Выражение (9.35) при отрицательных значениях W имеет два корня в области положительных r, что соответствует перигелию и афелию электронной орбиты. Интегрирование в (9.34) должно производиться от одного корня до другого и обратно с измененным знаком перед квадратным корнем в подинтегральном выражении. Оно может быть проведено либо элементарными методами, либо при помощи перехода в комплексную плоскость [1]). В результате получаем:

---

[1]) См., например, A. Sommerfeld, Atomic Structure and Spectral Lines, Annex, или П. Бриллюэн, Атом Бора, гл. VIII, ОНТИ, 1935.

$$\oint \sqrt{-A+2B/r-C/r^2}\,dr = 2\pi\left(\frac{B}{\sqrt{A}}-\sqrt{C}\right), \quad (9.36)$$

где A, B и C — положительные постоянные. Подставляя их значения из уравнений (9.34), (9.35), найдем

$$2\pi\left\{\frac{me^2\left(1+\frac{W}{mc^2}\right)}{\sqrt{-2mW\left(1+\frac{W}{2mc^2}\right)}} - n_\theta \hbar \sqrt{1-\frac{\alpha^2}{n_\theta^2}}\right\} = n_r h. \quad (9.37)$$

Решая это уравнение относительно W, получим формулу тонкой структуры Зоммерфельда:

$$\left.\begin{aligned} W &= -mc^2\left\{1+\frac{\alpha^2}{\left[n_r+\sqrt{n_\theta^2-\alpha^2}\right]^2}\right\}^{-1/2}+mc^2 = \\ &= \frac{me^4}{2(n_r+n_\theta)^2\hbar^2}\left\{1+\frac{\alpha^2}{(n_r+n_\theta)^2}\left(\frac{n_r}{n_\theta}+\frac{1}{4}\right)+\ldots\right\}\end{aligned}\right\} \quad (9.38)$$

Волны де Бройля. После Бора и Зоммерфельда следующий шаг в направлении развития строгой квантовой теории был сделан де Бройлем. Он предположил, что движение частицы вдоль траектории связано с распространением волн. Если траектория частицы замкнута, как, например, в атоме водорода, волны интерферируют между собой. Если на траектории умещается целое число длин волн, волны взаимно усиливаются. В противном случае они гасятся. Те траектории, вдоль которых волны усиливают друг друга, и являются „разрешенными" орбитами теории Бора-Зоммерфельда.

Рассмотрим свободную частицу, покоящуюся в некоторой системе координат S. Пусть ее масса покоя и энергия покоя будут соответственно равны m и mc^2. Мы не можем связать с этой частицей распространяющуюся волну, так как нет никаких данных, благодаря которым было бы выделено определенное направление распространения. Однако частице можно сопоставить частоту ν в соответствии с законом Эйнштейна

$$E = h\nu, \quad (9.39)$$

так что частота покоящейся частицы будет равна

$$\nu = \frac{mc^2}{h}. \tag{9.40}$$

Волна де Бройля может быть представлена в виде „волновой функции“

$$\psi = \psi_0 e^{2\pi i \nu t}. \tag{9.41}$$

Произведем теперь преобразование Лорентца (4.13), (4.15). Энергия и импульс частицы в системе S^* даются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} p_x^* &= -\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p_y^* = p_z^* = 0; \\ E^* &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

Далее преобразуем волновую функцию ψ. Предположим, что ψ — скаляр. В этом случае ее зависимость от координат определяется формулой:

$$\psi = \psi_0 \cdot \exp\left\{2\pi i \nu \frac{t^* + \frac{v}{c^2}\cdot x^*}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\}. \tag{9.43}$$

Частота и длина волны имеют значения

$$\nu^* = \frac{\nu}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mc^2/h}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{E^*}{h}, \tag{9.44}$$

$$\lambda^* = \frac{c^2}{v\nu}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{h}{mv}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{h}{p^*}. \tag{9.45}$$

Найдем скорость распространения в пространстве плоской гармонической волны де Бройля; эта скорость равна произведению частоты на длину волны:

$$w = \nu^*\lambda^* = \frac{E^*}{p^*} = \frac{c^2}{v}. \tag{9.46}$$

Эта скорость, так называемая фазовая скорость, превышает c; ее произведение на v равно c^2. Поскольку фаза волны де Бройля не может быть использована для передачи сигнала, уравнение (9.46) не противоречит основам теории относительности.

Рассмотрим, с другой стороны, волну де Бройля, не являющуюся строго гармонической, но состоящую из двух гармонических волн почти равной частоты. Амплитуда результирующей волны не будет постоянной, ее максимумы и минимумы будут двигаться в пространстве с некоторой скоростью, называемой „групповой скоростью". Определим эту групповую скорость w_g. Запишем составляющие волны в виде

$$\overset{1}{\psi} = \psi_0 \exp\left\{2\pi i\left(\overset{1}{\nu} t - \frac{x}{\overset{1}{\lambda}}\right)\right\}$$

и

$$\overset{2}{\psi} = \psi_0 \exp\left\{2\pi i\left(\overset{2}{\nu} t - \frac{x}{\overset{2}{\lambda}}\right)\right\}, \quad \overset{2}{\nu} = \overset{1}{\nu} + 2\delta\nu, \quad \overset{2}{\lambda} = \overset{1}{\lambda} + 2\delta\lambda.$$

Результирующей волной будет

$$\psi = \psi_0 \left[e^{2\pi i\left(\overset{1}{\nu} t - \frac{x}{\overset{1}{\lambda}}\right)} + e^{2\pi i\left(\overset{2}{\nu} t - \frac{x}{\overset{2}{\lambda}}\right)}\right]. \qquad (9.47)$$

Квадратные скобки можно преобразовать с помощью соотношения

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Тогда имеем

$$\psi = 2\psi_0 \cos\left[2\pi\left(\delta\nu\cdot t + \frac{\delta\lambda}{\overset{1}{\lambda}\overset{2}{\lambda}}\cdot x\right)\right] e^{2\pi i\left[(\overset{1}{\nu}+\delta\nu)t - \frac{\overset{1}{\lambda}+\delta\lambda}{\overset{1}{\lambda}\overset{2}{\lambda}}x\right]} \qquad (9.48)$$

Отсюда скорость распространения амплитуды равна

$$w_g = -\frac{\overset{1}{\lambda}\overset{2}{\lambda}\delta\nu}{\delta\lambda},$$

или, рассматривая $\delta\nu$ и $\delta\lambda$ как дифференциалы[1]),

---

[1]) Формула (9.49) является, как известно, общим выражением для групповой скорости, получаемым не только в результате рассмотрения двух волн, а путем исследования распространения некоторого волнового пакета (см., например, А. Марх, Основы квантовой механики, ГТТИ (1943). (*Прим. ред.*)

$$w_g = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}\,. \tag{9.49}$$

В волне де Бройля $\frac{1}{\lambda}$ равно $\frac{p}{h}$, а ν равно $\frac{E}{h}$. Поэтому для групповой скорости получим:

$$w_g = \frac{dE}{dp}\,. \tag{9.50}$$

Далее, E и p связаны соотношением

$$E^2 - \frac{p^2}{c^2} = m^2c^4, \tag{9.51}$$

согласно которому абсолютная величина вектора энергии-импульса равна энергии покоя. Из

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \frac{p^2}{c^2}}$$

находим, что

$$\frac{dE}{dp} = \frac{\frac{p}{c^2}}{E} = u, \tag{9.52}$$

т. е. скорости частицы. Таким образом, групповая скорость волны де Бройля равна скорости частицы.

Задачи

1. Найти скорость электронов и протонов, ускоряемых разностью потенциалов 3.10^6 вольт.

2. а) Считая, что ускоряющий потенциал V в уравнении (9.9) настолько мал, что $\frac{u}{c}$ мало в сравнении с единицей, написать приближенные уравнения, дающие к классическим уравнениям релятивистскую поправку второго порядка относительно $\frac{u}{c}$.

б) Считая V настолько большим, что u близко к c, найти приближенное соотношение, определяющее разность между u и c как функцию разности потенциалов V.

3. Зная радиус кривизны траектории в камере Вильсона, найти скорость и энергию частицы, если ее масса и заряд известны.

4. Найти приближенное соотношение между энергией и импульсом частицы, движущейся со скоростью, близкой к скорости света. Такое условие выполняется для частиц в космических лучах.

Часть

II

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*

Глава X

ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

*

Введение. Специальная теория относительности возникла при развитии электродинамики. Общая теория относительности является релятивистской теорией гравитации.

Некогда проблема гравитации положила начало новой эры в физике — эры ньютоновской классической механики. Три родоначальника научной физики — Галилей, Кеплер и Ньютон — изучили гравитацию: Галилей — квазиоднородное поле на поверхности земли, Кеплер и Ньютон — действие тяжелой точки большой массы на другую, значительно меньшей массы. Галилей сформулировал закон инерции и установил, что сила, действующая на тело, измеряется его ускорением (а не скоростью, как предполагалось ранее). Ньютон количественно определил гравитационное действие одной точечной массы на другую. Эта гравитационная сила всегда является силой притяжения и величина ее равна

$$f = \varkappa \frac{mM}{r^2}, \qquad (10.1)$$

где m и M — массы двух материальных точек, r — расстояние между ними и $\varkappa$ — универсальная постоянная, имеющая значение

$$\varkappa = 6{,}66 \cdot 10^{-8} \text{ дин. см}^2 \text{ г}^{-2}. \qquad (10.2)$$

Сила, действующая на тело массы m, равна взятому со знаком минус градиенту гравитационного потенциала G_M, помноженному на эту массу m, причем на расстоянии r от точечной массы M

$$G_M = -\varkappa \frac{M}{r}. \qquad (10.3)$$

Потенциальная энергия системы, состоящей из двух тел m и M, равна

$$U = mG_M = -\varkappa \frac{mM}{r}. \qquad (10.4)$$

Эта теория гравитации является типичным и в сущности наиболее важным примером механической теории. Сила, действующая на точечную массу P_m в момент времени t, полностью определяется расстоянием всех остальных точечных масс от P_m в момент t, их массами и массой m самой материальной точки P_m. Поэтому существенно, чтобы одновременность отдаленных событий и расстояние между двумя точечными массами имели инвариантную определенность. Теория гравитации Ньютона ковариантна по отношению к преобразованию Галилея, но, конечно, не по отношению к преобразованию Лорентца.

Работы Фарадея, Максвелла и Герца в области электродинамики внесли новые концепции, значительно отличающиеся от концепций классической механики. Действие на расстоянии одной точечной массы на другую, типичное для механики, в электродинамике заменилось действием поля на точечную массу и зависимостью поля от положений и скоростей точечных масс. Другими словами, взаимодействие происходит не непосредственно между двумя удаленными точечными массами, а между точками поля, находящимися на бесконечно малых расстояниях друг от друга.

В дорелятивистской физике механическая теория гравитации и теория электромагнитного поля были основаны на одних и тех же представлениях о пространстве и времени; поэтому, несмотря на фундаментальные различия обеих теорий, они не противоречили друг другу. Однако после того, как анализ трансформационных свойств уравнений Максвелла привел к созданию специальной теории относительности, эти теории перестали быть совместимыми. В то время как теория Максвелла исключает действие на расстоянии только из сферы электродинамики, трансформационные уравнения Лорентца устраняют действие на расстоянии из всей физики за счет лишения времени и пространства их абсолютного характера. Для того чтобы теория гравитации соответствовала этим представлениям, она должна быть превращена в релятивистскую теорию. Однако анализ основных положений ньютоновской теории с точки зрения теории поля показывает, что „релятивизация" теории гравитации необходимо связана с обобщением специальной теории относительности, получившим теперь название общей теории относительности. Проследим за теми рассуждениями, которые приводят к необходимости такого обобщения.

Принцип эквивалентности. Сила тяготения отличается от всех других сил тем, что она пропорциональна массе того тела, на которое действует. С другой стороны, в уравнениях движения классической механики (2.13) компоненты силы, действующей на тело, также пропорциональны его массе. Поэтому постоянный множитель m_l с обеих сторон сокращается, и мы получаем, что ***ускорение тела в гравитационном поле не зависит от его массы.***

Теория гравитации Ньютона констатирует этот факт, но не объясняет его. С точки зрения классической физики едва ли даже можно требовать какого-либо „объяснения". Другие силовые законы — закон Кулона для электростатических сил, природа сил Ван-дер-Ваальса — также не могут быть „объяснены". Однако закон Ньютона имеет особое, более широкое значение. Масса тела, отношение силы к ускорению, является постоянной, характеризующей поведение тела под действием сил. Эту постоянную можно назвать „инертной массой", так как она является мерой „инертной сопротивляемости ускорению". Электростатическая сила, действующая на частицу, есть произведение напряженности электрического поля, не зависящего от частицы, на заряд частицы, который является ее характеристикой. Точно так же гравитационная сила есть произведение „напряженности гравитационного поля" [отрицательного градиента гравитационного потенциала (10.3)] на массу частицы. В том случае, когда масса играет роль „гравитационного заряда", мы будем ее называть „гравитационной или тяжелой масс о й*. Согласно ньютоновской теории гравитации инертная и гравитационная массы одного и того же тела всегда равны. Это положение по причинам, которые будут ясны из дальнейшего, носит название **принципа эквивалентности**.

Вообще говоря, могло бы случиться, что „инертная" и „гравитационная" массы большинства тел только приблизительно равны, что это приближенное равенство случайно и что при точном измерении обе массы в действительности окажутся различными. К счастью, утверждаемое равенство инертной и гравитационной масс возможно подвергнуть очень точной проверке. Для этого достаточно показать равенство ускорений всех тел в одном и том же гравитационном поле.

Ускорения свободно падающих тел нельзя измерять непосредственно, так как невозможно с достаточной степенью точности измерять интервалы времени; поэтому необходимо прибегнуть к косвенным методам. Существует тип ускорения, „инерциальное ускорение", которое определенно не зависит от массы ускоряемого тела. Если относить движение тел к неинерциальной системе отсчета, возникают ускорения, обусловленные не действующими на тело силами, а ускорением выбранной системы отсчета относительно какой-либо инерциальной системы. В главе II эти „силы инерции" были исследованы в специальном случае, когда система отсчета вращается с постоянной угловой скоростью относительно инерциальной системы.

„Сила инерции" пропорциональна „инертной массе" тела. Поэтому, если на тело одновременно действуют и „силы инерции" и гравитационные силы, направление равнодействующей будет зависеть от отношения „инертной" массы тела к „гравитационной". Определение направления этой равнодействующей для различных тел является чувствительным критерием того, одинаково ли это отношение для всех испытуемых тел.

Необходимая экспериментальная установка создана самой природой: Земля, вращающаяся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью, является неинерциальной системой. На тело, покоящееся относительно Земли, действуют две силы: гравитационное притяжение Земли и „центробежная сила". Полное ускорение этого тела относительно Земли получается векторным сложением гравитационного и „центробежного" ускорений. Для точек, расположенных не на экваторе, эти две составляющие не параллельны, и направление равнодействующей является мерой отношения инертной массы к гравитационной.

Этвеш[1]) подвешивал на коромыслах крутильных весов две гири из различных материалов, но с одной и той же гравитационной массой. Если бы их инертные массы не были равны, результирующие силы, действующие на гири, были бы не параллельны, и весы получили бы крутильный момент. Отсутствие такого момента показывает, что отношение инертной массы к гравитационной одно и то же для различных материалов. Этот результат был получен с относительной точностью 10^{-8}.

В специальной теории относительности было показано, что по крайней мере часть инертной массы тела обусловлена внутренней энергией. В радиоактивных веществах эта прибавка к полной массе значительна. Является ли эта часть „инертной массы" также и „гравитационной массой"? Ответ на этот вопрос был дан Саузернсом[2]), который повторил эксперимент Этвеша с радиоактивными веществами. Результат был тот же: „гравитационная масса" оказалась равной „инертной массе", хотя последняя в известной степени была обусловлена энергией связи. Принцип эквивалентности, таким образом, является основным свойством гравитационных сил.

Предварительные соображения о релятивистской теории гравитации. Прежде чем строить релятивистскую теорию гравитации, необходимо сформулировать ньютоновскую теорию таким образом, чтобы действие на расстоянии было исключено. Сделать это довольно легко.

---

1) Math. und Naturw. Ber. aus Ungarn, 8, 65 (1890).
2) Proc. Roy. Soc., 84A, 325 (1910).

Гравитационное притяжение некоторого тела массы m несколькими другими телами может быть представлено суммой „гравитационных потенциалов“ (10.3) этих тел; эта сумма дает потенциальную энергию U_m выбранного тела, деленную на его массу m. Сила, действующая на тело, есть отрицательный градиент его потенциальной энергии:

$$\mathbf{f} = -m \operatorname{grad} G. \tag{10.5}$$

Гравитационный потенциал зависит от расположения остальных тел. Потенциал, создаваемый каждой точечной массой, дается (10.3). Вводя „гравитационную напряженность поля“

$$\mathbf{g} = -\operatorname{grad} G, \tag{10.6}$$

мы видим, что, как и в электростатике, силовые линии гравитационного поля не начинаются и не кончаются вне масс, и что на массе M кончается $4\pi\varkappa M$ силовых линий. Отсюда заключаем, что

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi\varkappa\rho,$$

где ρ — плотность массы. Потенциал G удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} G \equiv \nabla^2 G = 4\pi\varkappa\rho \tag{10.7}$$

Это уравнение, впервые полученное Пуассоном, является классическим уравнением гравитационного поля. Система уравнений (10.5) и (10.7) эквивалентна уравнениям ньютоновской теории, построенным на основе дальнодействия.

Уравнение Пуассона (10.7) не является лорентц-инвариантным. Всюду, где ρ равно нулю, представляется разумным предположить, что трехмерный оператор Лапласа ∇^2 должен быть заменен его четырехмерным аналогом, оператором

$$\eta^{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \, \partial x^\sigma} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2.$$

В присутствии материи нужно помнить, что плотность ρ является не скаляром, а компонентой тензора $P^{\mu\nu}$. Мы стоим перед альтернативой: заменить ρ лорентц-инвариантным скаляром $\eta_{\mu\nu}P^{\mu\nu}$ или заменить нерелятивистский скаляр G мировым тензором $G^{\mu\nu}$.

Об инерциальных системах. Пусть перед нами стоит задача нахождения инерциальной системы отсчета. Согласно определению, данному в главе II, инерциальной является такая система координат, в которой все тела, не подвергающиеся действию сил, не обладают ускорениями. Такое определение, однако, недостаточно, коль скоро прежде всего необходимо определить, действуют ли на данное тело силы. Согласно классической механике все (реальные) силы представляют собой взаимодействие тел друг с другом. Следовательно, тело, достаточно удаленное[1]) от других тел, не испытывает действия сил.

Этот критерий удовлетворителен с точки зрения классической механики. Но в теории относительности мы должны избегать концепций, связанных с конечными пространственными расстояниями. Такое понятие, как „достаточно далеко" не является лорентц-инвариантным. Определение инерциальной системы должно основываться на свойствах непосредственной окрестности наблюдателя.

Мы можем определить, является ли данная система инерциальной, если сумеем найти ускорения испытуемых тел, или, что то же, если мы знаем гравитационное и электромагнитное поле в их окрестности. Но существует только один метод измерения полей: измерение ускорений пробных тел. Получается порочный круг.

Вместе с тем существует глубокое различие между электромагнитным и гравитационным полями. Ничто не мешает нам выбрать в качестве пробных тел тела незаряженные и неполяризованные, тогда действие на них электромагнитного поля сведется к нулю. Действие гравитационного поля на пробное тело исключить, однако, нельзя, так как ускорение тела в гравитационном поле не зависит от его массы.

---

[1]) Строго говоря, „достаточно далеко" означает бесконечно далеко. Наше условие может таким образом соблюдаться только приближенно.

Действие гравитационного поля на тело не отличимо от „инерциальных ускорений“. Как гравитационное, так и инерциальное ускорения не зависят от характеристик пробного тела. Поэтому невозможно отделить гравитационные ускорения от инерциальных и найти таким образом инерциальную систему.

В этом смысле эквивалентность гравитационного и инерциального полей является следствием равенства гравитационной и инертной масс. Эквивалентность гравитационного и инерциального полей как раз и послужила основанием для названия „принцип эквивалентности“.

С этой точки зрения инерциальные системы не представляют собой особого класса систем координат; по существу нет никакой разницы между инерциальной системой отсчета в гравитационном поле и неинерциальной системой.

„Лифт“ Эйнштейна. Для иллюстрации эквивалентности инерциальной и неинерциальной систем отсчета Эйнштейн привел в пример человека, помещающегося в кабине лифта. Пока лифт покоится, человек может одним из обычных методов определить напряженность гравитационного поля на поверхности земли, которая приблизительно равна 981 см/сек$^{-2}$. Он может это сделать, измеряя, скажем, время, в течение которого тело падает на пол с высоты 100 см. Напряженность гравитационного поля в этом случае равна

$$g = \frac{100 \times 2}{t^2}. \qquad (10.8)$$

Предположим, что человек в лифте не имеет возможности получать информацию извне. Вместо того чтобы сделать заключение, что он и кабина находятся в покое в гравитационном поле, он может рассуждать также следующим образом: „Все тела в кабине испытывают ускорение в 981 см/сек$^{-2}$, пока они не будут остановлены столкновением с другими телами или с полом кабины. Так как это ускорение не зависит от индивидуальных характеристик испытуемых тел, то непохоже, что ускорения соответствуют реальным силам, которые действуют на эти тела.

Вероятно, моя система отсчета (связанная с кабиной) не является инерциальной системой, а по каким-то мне неизвестным причинам движется вверх относительно инерциальной системы с ускорением в 981 $см/сек^{-2}$. Те тела внутри кабины, которые, хотя бы временно, не принуждены участвовать в этом ускоренном движении, подчиняются закону инерции и отстают от этого движения, пока не наталкиваются на пол кабины*.

Представим себе теперь, что трос подъемника оборвался, и что кабина, не снабженная автоматически останавливающим приспособлением, свободно падает в гравитационном поле земли. Во время этого падения тела внутри кабины испытывают такое же ускорение, как и сама кабина, и поэтому не ускоряются относительно нее. Наблюдатель внутри кабины может это интерпретировать так, что ускорение кабины прекратилось и что его система отсчета стала инерциальной.

С другой стороны, можно рассмотреть и более фантастический „мысленный эксперимент". Пусть кабина помещена в область пространства, где нет гравитационного поля. Если кабину предоставить самой себе и если она не вращается вокруг оси, проходящей через ее центр инерции, она будет представлять собой инерциальную систему. Предположим теперь, что кто-то начинает тянуть с постоянной силой трос, прикрепленный к потолку кабины. Тогда кабина перестает быть инерциальной системой. Если тело внутри кабины не находится в контакте с другими телами, оно, подчиняясь закону инерции, будет отставать от ускоряющейся кабины, т. е. оно будет, так сказать, „падать" на пол. Человек в кабине может ошибиться и приписать ускорение испытуемых тел действию гравитационного поля.

Принцип общей ковариантности. Для того чтобы развить теорию гравитации, включающую в себя как составную часть и принцип эквивалентности, нужно отбросить представление о привилегированных инерциальных системах отсчета. Все системы отсчета одинаково пригодны для описания законов природы.

Как выразить в математической форме эту эквивалентность всех систем отсчета? Поскольку мы всегда представляем систему отсчета в виде системы координат, а инерциальную систему, в частности, в виде лорентцовой системы координат, очевидно, что в общем случае нельзя ограничиться преобразованием координат Лорентца. Линейное преобразование координат с произвольными коэфициентами недостаточно, так как переход от одной системы отсчета к другой, ускоренно движущейся относительно первой, не может быть представлен преобразованием координат, линейным относительно временной координаты.

История развития общей теории относительности показала, что для построения общей релятивистской теории гравитации необходимо рассмотреть группу всех непрерывных дифференцируемых преобразований координат с неисчезающим якобианом. Вот почему теория гравитации называется общей теорией относительности.

Во второй части главы V были рассмотрены некоторые свойства произвольного преобразования координат. В эвклидовом пространстве всегда возможно ввести криволинейную систему координат. Все операции векторного и тензорного анализа могут быть с одинаковым успехом выражены как в прямоугольной декартовой, так и в криволинейной системе координат. Однако при введении криволинейных координат и произвольных преобразований, чтобы сформулировать многочисленные тензорные соотношения, нужно еще ввести метрический тензор g_{mn}, компоненты которого являются функциями координат. При этом прямая линия, например, не может быть представлена более простым способом, чем при помощи дифференциальных уравнений (5.99). Хотя любые геометрические соотношения можно представить в криволинейных координатах и в эвклидовом пространстве, в последнем все же обычно бывает предпочтительнее пользоваться декартовыми координатами.

В эвклидовом пространстве использование декартовых систем координат и ортогональных преобразований позволяет развить тензорное исчисление с меньшим числом базисных элементов, чем в общем формализме. Поскольку метрический тензор вырождается в тензор δ_{ik}, он не является уже независимым элементом геометрии. В римановом пространстве введение декартовой системы координат невозможно. В нем должен быть использован общий формализм, ковариантный относительно общего преобразования координат.

В теории гравитации мы сталкиваемся с подобной же ситуацией. Мы можем сформулировать специальную теорию относительности, пользуясь криволинейными системами координат и обобщенными преобразованиями в четырехмерном мире. Однако при этом возможно ввести такие системы координат, в которых компоненты метрического тензора принимают постоянные значения $\eta_{\mu\nu}$ и где коэфициенты аффииной связности обращаются в нуль. Формализм, ковариантный только по отношению к преобразованиям, переводящим некоторую систему координат этого типа в систему такого же типа, не требует введения ряда геометрических понятий, являющихся составной частью формализма, ковариантного по отношению к общему преобразованию координат. Системы координат, в которых компоненты метрического тензора имеют постоянные значения $\eta_{\mu\nu}$ являются инерциальными, а преобразования одних инерциальных систем координат в другие инерциальные же системы являются преобразованиями Лорентца.

Эквивалентность всех систем отсчета должна выражаться эквивалентностью всех систем координат. В гравитационном поле невозможно ввести привилегированную систему координат Лорентца. Всегда, когда введение лорентцовой системы координат невозможно, мы, расширяя терминологию главы V, будем называть четырехмерное пространство Минковского — р и м а н о в ы м.

В пространстве Римана компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ во всех системах отсчета являются не постоянными, а функциями координат. Если ограничиться преобразованиями Лорентца, формализм не упростится. Гипотеза, что геометрия физического пространства лучше всего представляется формализмом, ковариантным относительно общих преобразований координат, и что ограничение менее общей группой преобразований не упростит формализма, называется **принципом общей ковариантности**. Он является математическим выражением принципа эквивалентности. Развитие теории гравитации, удовлетворяющей принципу общей ковариантности, дало теоретической физике теорию поля, наилучшую из всех до сих пор предложенных.

Природа гравитационного поля. Из принципа эквивалентности, казалось бы, можно заключить, что гравитационных полей вообще не существует, что они являются лишь проявлением „сил инерции". Однако каждый инстинктивно чувствует, что это не так.

Измеряя с большой точностью направление ускоряющей силы земли, человек в кабине лифта нашел бы, что силовые линии сходятся к центру земли. Это открытие не дало бы ему возможности отделить гравитационное поле от инерциального, но оно указало бы ему на то, что поле не полностью инерциально. В силу сходимости силовых линий не существует системы отсчета, в которой гравитационное поле исчезло бы всюду. Римановский характер пространства, т. е. невозможность введения лорентцовой системы координат, и выражает невозможность введения такой системы отсчета, которая всюду имела бы свойства инерциальной системы.

Если невозможно введение системы координат, в которой компоненты метрического тензора принимали бы постоянные, наперед заданные значения, то метрический тензор сам становится частью поля, и в этом случае должны существовать уравнения поля, ограничивающие и до некоторой степени определяющие функциональную зависимость $g_{\mu\nu}$ от четырех мировых координат.

Каков же физический смысл этого тензора поля $g_{\mu\nu}$? Рассмотрим область пространства, в которой гравитационное поле отсутствует. Если ввести неинерциальную систему координат, то относительно нее будут ускоряться свободные тела, несмотря на то, что они движутся вдоль прямой мировой линии. Если выразить закон инерции в произвольной криволинейной системе координат, то согласно (5.99), уравнениями движения будут

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = -\left\{ {\alpha \atop \iota\ \varkappa} \right\} U^\iota U^\varkappa, \tag{10.9}$$

где $\left\{ {\alpha \atop \iota\ \varkappa} \right\}$ линейны относительно первых производных $g_{\mu\nu}$:

$$\left\{ {\alpha \atop \iota\ \varkappa} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\iota\beta,\varkappa} + g_{\varkappa\beta,\iota} - g_{\iota\varkappa,\beta}). \tag{10.10}$$

Тензор $g_{\mu\nu}$ фигурирует здесь, как потенциал „инерциального поля". Поэтому разумно предположить, что в гравитационном поле компоненты $g_{\mu\nu}$ также являются потенциалами, определяющими ускорения свободных тел; другими словами, $g_{\mu\nu}$ являются потенциалами гравитационного поля. Эти гравитационные потенциалы должны удовлетворять дифференциальным уравнениям, подобным четырехмерным уравнениям Лапласа и Пуассона. Ниже мы убедимся в том, что существует только один класс уравнений такого типа, ковариантный относительно общего преобразования координат.

Как бы то ни было, мы увидим, что пространства, с которыми имеет дело теория гравитации, не являются „квази-эвклидовыми", т. е. в них не могут быть введены инерциальные системы координат. Прежде чем продолжить изучение гравитационных полей, необходимо более подробно, чем это было сделано в главе V, изучить геометрию римановых пространств. В частности, необходимо найти математический критерий, определяющий, является ли пространство эвклидовым или нет.

Глава XI

ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ РИМАНА-КРИСТОФФЕЛЯ

*

Характерные особенности римановых пространств. Согласно определению, данному в главе V, эвклидовыми пространствами называются такие пространства, в которых можно ввести декартовы координаты; все остальные пространства не являются эвклидовыми.

Даже если нам известно, что в некотором частном случае компоненты метрического тензора являются известными функциями координат в некоторой системе координат, все же и в этом случае немыслимо перебрать все возможные преобразования координат, чтобы выяснить, не приводит ли какое-либо из них к декартовой системе. Поэтому необходимо найти подходящий критерий, который всегда давал бы возможность определить, является ли пространство эвклидовым или же нет.

Неэвклидовы пространства, с которыми мы обычно имеем дело, представляют собой двумерные кривые поверхности, которые можно рассматривать как подпространства в обычном трехмерном пространстве. Казалось бы, что геометрические свойства этих подпространств нельзя рассматривать вне связи с пространством, в которое они вложены. В действительности же это не так, по крайней мере по отношению к вопросу об эвклидовости или неэвклидовости пространства. Выберем, например, в качестве поверхности плоский лист разграфленной бумаги. Линии на бумаге представляют декартову систему координат, так что эта плоскость без сомнения является эвклидовой поверхностью. Изменим теперь связь этой поверхности с трехмерным пространством, свертывая лист бумаги; линии на нем будут при этом попрежнему образовывать декартову систему координат. Как до, так и после свертывания бумаги расстояние между двумя бесконечно близкими точками на листе определяется уравнением

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Иначе говоря, метрический тензор имеет следующие компоненты:

$$g_{ik} = \delta_{ik}. \tag{11.1}$$

Более того, линии, образовавшиеся из прямых в результате свертывания, остаются кратчайшими линиями, которые можно провести между двумя точками, не выходя за пределы двумерного подпространства.

Эвклидов характер пространства зависит только от метрики. Необходимо, таким образом, найти метод, при помощи которого можно было бы отличить эвклидову метрику от неэвклидовой.

Интегрируемость аффинной связности. Чтобы найти такой метод, вернемся к понятию параллельного переноса вектора, введенному в главе V. Параллельный перенос вектора вдоль кривой при коэфициентах аффинной связности Γ^l_{ik} возможен единственным способом в соответствии со следующими дифференциальными законами:

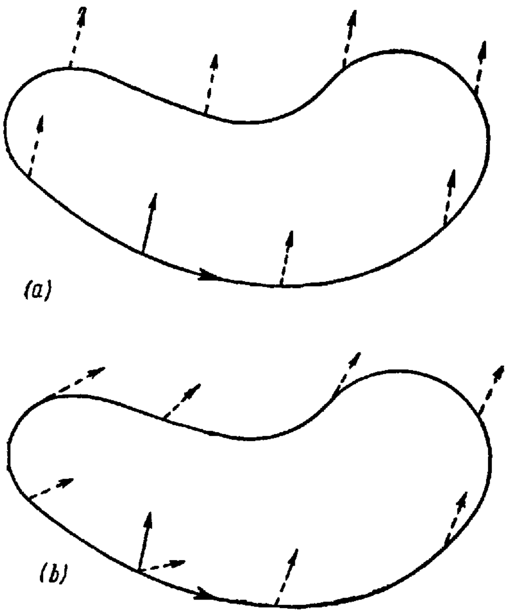
$$\left.\begin{aligned} \delta a^l &= -\Gamma^l_{ik} a^i \delta\xi^k, \\ \delta b_i &= +\Gamma^l_{ik} b_l \delta\xi^k. \end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

Метрический тензор g_{ik} определяет частный вид аффинной связности $\left\{ {l \atop i\ k} \right\}$, где

$$\left\{ {l \atop i\ k} \right\} = \frac{1}{2} g^{ls} (g_{is,\,k} + g_{ks,\,i} - g_{ik,\,s}). \tag{11.3}$$

Если коэфициентами аффинной связности являются символы Кристоффеля, результат параллельного переноса вектора не зависит от того, применяются ли законы (11.2) к его ковариантным или контравариантным компонентам.

Будем параллельно переносить вектор вдоль замкнутой кривой (фиг. 9), пока не вернемся в исходную точку. При этом перенесенный вектор либо будет совпадать с исходным, либо будет от него отличаться. Если получается тот же самый вектор независимо от выбора исходного вектора



Фиг. 9. Интегрируемость аффинной связности. В (*a*) аффинная связность интегрируема, в (*b*) — нет.

и формы замкнутой кривой, аффинную связность называют интегрируемой. В этом случае говорят также о „дистанционном параллелизме"; это означает, что при параллельном переносе вектора из точки P_1 в точку P_2 составляющие полученного вектора не зависят от выбора кривой, связывающей эти точки. Если аффинная связность интегрируема, задание вектора в одной точке определяет полное поле параллельных векторов во всем пространстве.

Эвклидовость и интегрируемость. Если коэфициенты аффинной связности определяются метрическим тензором при помощи уравнений (11.3), можно показать, что эвклидовость пространства находится в непосредственной связи с интегрируемостью аффинной связности.

Если пространство эвклидово, можно ввести декартову систему координат, в которой компоненты метрического тензора постоянны:

$$g_{ik} = \delta_{ik}. \tag{11.4}$$

Согласно уравнениям (11.3), в такой системе координат $\left\{ \begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right\}$ равны нулю, δa^l и δb_l, согласно (11.2), также обращаются в нуль. Параллельные векторы в этом случае имеют одинаковые составляющие во всех точках; такая аффинная связность является, конечно, интегрируемой. Интегрируемость по определению есть инвариантное свойство аффинной связности, не зависимое от выбора системы координат. Таким образом, *аффинная связность эвклидова пространства всегда интегрируема.*

С другой стороны, покажем непосредственным построением, что, если аффинная связность (11.3) интегрируема, всегда можно ввести декартову систему координат. Для того чтобы это положение было справедливо, требуется некоторое обобщение определения эвклидова пространства. До сих пор мы определяли эвклидово пространство, как такое пространство, в котором при помощи вещественного преобразования координат можно ввести систему координат с постоянными коэфициентами метрического тензора g_{ik}, равными δ_{ik}. Согласно такому определению четырехмерное пространство Минковского неэвклидово. Основное различие между эвклидовым пространством и пространством Минковского заключается в том, что в первом квадратичная форма дифференциалов координат положительно определена;

$$ds^2 = dx_i dx_i \geqslant 0 \tag{11.5}$$

при произвольных вещественных значениях dx_i. В пространстве Минковского с квадратичной формой

$$d\tau^2 = (dx^4)^2 - \frac{1}{c^2} dx^i dx^i \tag{11.6}$$

$d\tau^2$ может принимать и положительные, и отрицательные значения, соответственно чему интервал будет „пространственно-подобным" или „временно-подобным" (см. главу IV). В силу этого невозможно при помощи вещественного преобразования координат перейти от (11.5) к (11.6).

Формы (11.5) и (11.6) однако очень похожи друг на друга по своим аналитическим свойствам. В конце главы V указывалось, что символ $\left\{ {l \atop i\ k} \right\}$, соответствующий метрической форме (11.6), равен нулю: компоненты параллельно перенесенного вектора в этом случае постоянны, а параллельный перенос „интегрируем". Вообще говоря, это справедливо всегда, когда в пространстве можно ввести систему координат, в которой компоненты метрического тензора постоянны. Такое пространство будем называть плоским. Плоские пространства представляют собой более общий класс по сравнению с эвклидовыми, так как в них метрика не должна быть обязательно положительно определена.

Имея в виду сказанное выше, можно утверждать, что *если параллельный перенос, определяемый уравнениями (11.2) и (11.3), интегрируем, пространство является плоским, другими словами, в этом случае существует система координат, в которой метрическая форма имеет вид:*

$$ds^2 = \sum_i \varepsilon_i dx^i dx^i, \quad \varepsilon_i = \pm 1. \tag{11.7}$$

Доказательство проведем в две стадии. Если коэфициенты аффинной связности симметричны в своих нижних индексах, в силу интегрируемости аффинной связности можно построить систему координат, в которой коэфициенты аффинной связности равны нулю. Это обстоятельство не зависит от существования метрики и будет доказано без помощи уравнения (11.3). Далее, если метрика определена, обращение в нуль $\left\{ {l \atop i\ k} \right\}$ эквивалентно постоянству компонент метрического тензора.

Рассмотрим n линейно независимых ковариантных векторов $\overset{s}{b}_l$ в точке P (n — число измерений пространства). В силу линейной независимости они должны удовлетворять неравенству

$$\Delta \equiv \delta^{l_1 \ldots l_n} \overset{1}{b}_{l_1} \ldots \overset{n}{b}_{l_n} \neq 0, \tag{11.8}$$

где $\delta^{l_1 \ldots l_n}$ контравариантная тензорная плотность Леви-Чивита. Сместим теперь эти n векторов $\overset{s}{b}_l$ вдоль одного и того же отрезка пути. Изменение Δ будет равно

$$\left.\begin{aligned} \delta\Delta &= \delta^{l_1 \ldots l_n} [\Gamma^k_{l_1 s} \overset{1}{b}_k \overset{2}{b}_{l_2} \ldots \overset{n}{b}_{l_n} + \ldots + \Gamma^k_{l_n s} \overset{1}{b}_{l_1} \ldots \overset{n}{b}_k]\, \delta\xi^s = \\ &= \overset{1}{b}_{l_1} \ldots \overset{n}{b}_{l_n} [\delta^{k l_2 \ldots l_n} \Gamma^{l_1}_{ks} + \ldots + \delta^{l_1 \ldots k} \Gamma^{l_n}_{ks}]\, \delta\xi^s. \end{aligned}\right\} \tag{11.9}$$

Это выражение можно значительно упростить. Прежде всего, скобки справа антисимметричны во всех индексах $i_1 \ldots i_n$. Так, например, если поменять местами i_1 и i_2, скобки переходят в

$$\left.\begin{aligned} &\delta^{k l_1 \ldots l_n} \Gamma^{l_2}_{ks} + \delta^{l_2 k \ldots l_n} \Gamma^{l_1}_{ks} + \ldots + \delta^{l_2 l_1 \ldots k} \Gamma^{l_n}_{ks} = \\ &= -[\delta^{l_1 k \ldots l_n} \Gamma^{l_2}_{ks} + \delta^{k l_2 \ldots l_n} \Gamma^{l_1}_{ks} + \ldots + \delta^{l_1 l_2 \ldots k} \Gamma^{l_n}_{ks}]. \end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

Далее, k может принимать только те же значения, что и смещенные индексы i_s, так как для всех остальных значений компоненты тензорной плотности Леви-Чевита обращаются в нуль. Поэтому квадратные скобки в уравнении (11.9) можно заменить выражением

$$\delta^{k l_2 \ldots l_n} \Gamma^{l_1}_{ks} + \ldots + \delta^{l_1 \ldots k} \Gamma^{l_n}_{ks} = \delta^{l_1 \ldots l_n} \Gamma^k_{ks}, \tag{11.11}$$

а само уравнение (11.9) перейдет в

$$\partial\Delta = \Delta\cdot\Gamma^k_{ks}\cdot\partial\xi^s. \tag{11.9a}$$

Вдоль произвольного пути Δ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению первого порядка. Поэтому Δ не может обращаться в нуль в какой-либо точке этого пути, если оно неравно нулю тождественно.

Отсюда заключаем, что, *если n векторов $\overset{s}{b}_l$ линейно независимы, они сохраняют это свойство и при параллельном переносе.*

Предположим теперь, что аффинная связность симметрична в своих индексах и интегрируема, тогда каждый из векторов $\overset{s}{b}_l$ образует поле параллельных векторов. Каждое из этих полей удовлетворяет дифференциальным уравнениям вида

$$\overset{s}{b}_{i,k} = \Gamma^l_{ik}\overset{s}{b}_l. \tag{11.12}$$

Правая часть симметрична в индексах i и k. Поэтому ротор $\overset{s}{b}_i$ равен нулю:

$$\overset{s}{b}_{i,k} - \overset{s}{b}_{k,i} = 0. \tag{11.13}$$

Из этого уравнения видно, что каждое из n полей $\overset{s}{b}_i$ является градиентным полем, т. е. существует n скаляров $\overset{s}{b}$, так что

$$\overset{s}{b}_i = \overset{s}{b}_{,i}. \tag{11.14}$$

Эти n скаляров $\overset{s}{b}$ можно рассматривать, как n координат новой системы. Согласно уравнению (11.8) якобиан преобразования координат не равен нулю. Теперь можно показать, что *в новой системе координат Γ^l_{ik} исчезают*

Преобразуем коэфициенты аффинной связности согласно уравнению (5.81):

$$\Gamma^{*l}_{ik} = \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^{*l}} \frac{\partial \xi^b}{\partial \xi^{*k}} \left(\frac{\partial \xi^{*l}}{\partial \xi^c} \Gamma^c_{ab} - \frac{\partial^2 \xi^{*l}}{\partial \xi^a \partial \xi^b} \right). \qquad (11.15)$$

В соответствии с уравнениями (11.14) производные $\partial \xi^{*l}/\partial \xi^c$ являются компонентами векторов $\overset{l}{b}_c$, так что выражение в скобках в (11.15) равно

$$\frac{\partial \xi^{*l}}{\partial \xi^c} \Gamma^c_{ab} - \frac{\partial^2 \xi^{*l}}{\partial \xi^a \partial \xi^b} = \overset{l}{b}_c \Gamma^c_{ab} - \overset{l}{b}_{a,\, b}. \qquad (11.16)$$

В силу (11.12) это выражение равно нулю, благодаря этому Γ^{*l}_{ik} в (11.15) также обращаются в нуль.

Возвратимся к рассмотрению метрического тензора. Уравнение (11.3) можно решить относительно производных g_{mn}. Сложим два уравнения:

$$\frac{1}{2}(g_{ik,\, l} + g_{il,\, k} - g_{kl,\, i}) = \left\{ \begin{matrix} s \\ k\ l \end{matrix} \right\} g_{si}$$

и

$$\frac{1}{2}(g_{kl,\, i} + g_{kl,\, i} - g_{il,\, k}) = \left\{ \begin{matrix} s \\ i\ \ l \end{matrix} \right\} g_{sk}. \qquad (11.17)$$

Получим:

$$g_{ik,\, l} = \left\{ \begin{matrix} s \\ k\ l \end{matrix} \right\} g_{si} + \left\{ \begin{matrix} s \\ i\ l \end{matrix} \right\} g_{sk}. \qquad (11.18)$$

Таким образом, если $\left\{ \begin{matrix} s \\ k\ l \end{matrix} \right\}$ *равны нулю*, g_{ik} *постоянны.*

Приведение постоянных g_{ik} к форме (11.7) есть чисто алгебраическая задача. Она решается при помощи стандартных процессов ортогонализации и нормировки и не представляет для нас интереса. Любое пространство, в котором компоненты метрического тензора постоянны, является тем самым плоским.

Критерий интегрируемости. Если аффинная связность пространства симметрична и интегрируема, уравнения параллельного переноса (11.2) могут рассматриваться не только как обыкновенные дифференциальные уравнения вдоль заданного пути, но и как уравнения в частных производных для векторного поля в целом. Их можно записать в виде

$$a^n{}_{,l} = -\Gamma^n_{sl} a^s. \tag{11.19}$$

Аналогичные уравнения имеют место для ковариантных векторных полей. Эти уравнения переопределены, так как для определения n составляющих вектора имеется n^2 уравнений. Для того чтобы существовали решения, должен удовлетворяться ряд дифференциальных тождеств. Вид этих тождеств хорошо известен. Дифференцируя уравнения (11.19) по ξ^k, получим:

$$a^n{}_{,ik} = -\Gamma^n_{si,k} a^s - \Gamma^n_{si} a^s{}_{,k} = (-\Gamma^n_{li,k} + \Gamma^n_{si}\Gamma^s_{lk})\, a^l. \tag{11.20}$$

Вычитая отсюда такое же выражение с переставленными индексами i и k, найдем условия, которые должны удовлетворяться в силу того, что порядок дифференцирования не играет роли:

$$0 = -(\Gamma^n_{li,k} - \Gamma^n_{lk,i} - \Gamma^n_{si}\Gamma^s_{lk} + \Gamma^n_{sk}\Gamma^s_{li})\, a^l. \tag{11.21}$$

Так как значения a^l в одной точке можно выбрать произвольно, окончательные условия интегрируемости имеют вид:

$$R_{ikl}{}^n_{\cdot} \equiv \Gamma^n_{li,k} - \Gamma^n_{lk,i} - \Gamma^n_{si}\Gamma^s_{lk} + \Gamma^n_{sk}\Gamma^s_{li} = 0. \tag{11.22}$$

Эти условия не только необходимы, но и достаточны. Доказательство этого проводится таким же путем, как и доказательство теоремы о том, что ковариантное векторное поле является градиентным полем тогда и только тогда, когда ротор обращается в нуль (см. задачу 14, главы V).

Перестановочные соотношения для ковариантного дифференцирования, тензорный характер $R_{ikl}{}^n$. Обращение в нуль выражения $R_{ikl}{}^n_{\cdot}$ в уравнении (11.22) эквивалентно интегрируемости аффинной связности и поэтому должно быть инвариантным свойством. Однако существуют пространства, не являющиеся плоскими и в которых $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$ отлично от нуля (например, поверхность сферы). Выясним, по каким законам преобразуются величины $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$.

Чтобы ответить на этот вопрос, найдем тензорные уравнения, в которых фигурируют $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$. Таковыми являются перестановочные соотношения для ковариантного дифференцирования. Вычислим величину

$$A^n{}_{;ik} - A^n{}_{;ki}.$$

Согласно определению ковариантного дифференцирования имеем

$$A^n{}_{;i} = A^n{}_{,i} + \Gamma^n_{li} A^l. \tag{11.23}$$

Вторичное ковариантное дифференцирование приводит к выражению

$$\left.\begin{aligned} A^n{}_{;ik} &= (A^n{}_{;i})_{,k} + \Gamma^n_{sk} A^s{}_{;i} - \Gamma^s_{ik} A^n{}_{;s} = \\ &= \underline{A^n{}_{,ik}} + \Gamma^n_{li,k} A^l + \underline{\Gamma^n_{li} A^l{}_{,k} + \Gamma^n_{sk} A^s{}_{,i}} + \\ &+ \Gamma^n_{sk}\Gamma^s_{li} A^l - \underline{\Gamma^s_{ik} A^n{}_{,s}} - \underline{\Gamma^s_{ik}\Gamma^n_{ls} A^l}. \end{aligned}\right\} \tag{11.24}$$

Предположим, что коэфициенты аффинной связности симметричны в своих нижних индексах. После вычитания из (11.24) уравнения с переставленными i и k подчеркнутые члены уничтожаются в силу их симметрии относительно i и k. В результате получаем соотношение

$$A^n{}_{;ik} - A^n{}_{;ki} = R_{ikl.}^{\ \ \ n} A^l. \tag{11.25}$$

Это уравнение является перестановочным соотношением для ковариантного дифференцирования. В плоском пространстве ковариантное дифференцирование коммутативно, подобно обычному дифференцированию. Это можно было предвидеть, так как в плоском пространстве существуют системы координат, в которых ковариантное и обыкновенное дифференцирования эквивалентны.

Если пространство не является плоским, коммутатор зависит только от непродифференцированного вектора.

Перестановочное соотношение для ковариантного дифференцирования ковариантных векторов имеет вид:

$$A_{l;\,ik} - A_{l;\,ki} = -R_{ikl.}^{\ \ \ \ n} A_n. \tag{11.26}$$

Левые части в (11.25) и (11.26) преобразуются как тензоры. Следовательно, правые их части тоже являются тензорами. Из произвольности множителей A^l и A_n следует, что $R_{ikl.}^{\ \ \ \ n}$ сами являются компонентами тензора. Тензор

$$R_{ikl.}^{\ \ \ \ n} = \Gamma^n_{il,\,k} - \Gamma^n_{lk,\,i} - \Gamma^n_{si}\Gamma^s_{lk} + \Gamma^n_{sk}\Gamma^s_{li} \tag{11.27}$$

называется тензором кривизны (тензором Римана-Кристоффеля)[1].

Свойства тензора кривизны. Тензор кривизны определяется аффинной связностью. Однако некоторыми свойствами симметрии он обладает только при том условии, что коэфициентами аффинной связности являются символы Кристоффеля (11.3), определяемые метрикой. Рассмотрим сначала те свойства тензора кривизны, которые не зависят от связи Γ^l_{ik} с метрикой.

1) Тензор $R_{ikl.}^{\ \ \ \ n}$ антисимметричен относительно индексов i и k

$$R_{ikl.}^{\ \ \ \ n} + R_{kil.}^{\ \ \ \ n} = 0. \tag{11.28}$$

Выражение (11.27) удовлетворяет этому соотношению независимо от свойств симметрии Γ^l_{ik}.

---

[1] В этой книге приняты индексные обозначения Леви-Чивита. К сожалению, не существует общепринятого правила написания индексов в тензоре кривизны. Многие авторы пишут наш последний индекс на первом месте, наш третий индекс — на втором, а наши первый и второй индексы — соответственно, на третьем и четвертом местах. В дальнейшем мы строго будем придерживаться обозначений, соответствующих (11.27).

Если коэфициенты аффинной связности симметричны в своих нижних индексах, тензор кривизны обладает еще одним свойством симметрии и, кроме того, удовлетворяет ряду дифференциальных тождеств.

2) Сумма компонент тензора кривизны, получающихся при циклической перестановке первых трех индексов, равна нулю

$$R_{ikl.}^{\;\;\;\;n} + R_{kli.}^{\;\;\;\;n} + R_{lik.}^{\;\;\;\;n} = 0. \tag{11.29}$$

Доказательство производится непосредственным вычислением выражения (11.29).

3) Получим дифференциальные тождества следующим образом. Ковариантно продифференцируем соотношения (11.26) по новым координатам

$$A_{s;\,ikl} - A_{s;\,kil} = -R_{iks.\;;l}^{\;\;\;\;n} A_n - R_{iks.}^{\;\;\;\;n} A_{n;\,l}, \tag{11.30}$$

произведем циклическую перестановку индексов i, k, l и сложим. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned}(A_{s;\,ikl} - A_{s;\,ilk}) + (A_{s;\,kli} - A_{s;\,kil}) + (A_{s;\,lik} - A_{s;\,lki}) = \\ = -A_n (R_{iks.\;;l}^{\;\;\;\;n} + R_{kls.\;;i}^{\;\;\;\;n} + R_{lis.\;;k}^{\;\;\;\;n}) - \\ - (R_{iks.}^{\;\;\;\;n} A_{n;\,l} + R_{kls.}^{\;\;\;\;n} A_{n;\,i} + R_{lis.}^{\;\;\;\;n} A_{n;\,k}).\end{aligned}\right\} \tag{11.31}$$

Все скобки слева представляют собой левые части перестановочных соотношений для ковариантного дифференцирования. Как легко показать, эти перестановочные соотношения для ковариантного тензора второго ранга имеют вид:

$$B_{lm;\,ik} - B_{lm;\,ki} = -R_{ikl.}^{\;\;\;\;n} B_{nm} - R_{ikm.}^{\;\;\;\;n} B_{ln}. \tag{11.32}$$

Применяя этот закон ко всем скобкам в левой части (11.31), получим, например, для первых из них:

$$A_{s;\,ikl} - A_{s;\,ilk} = -R_{kls.}^{\;\;\;\;n} A_{n;\,i} - R_{kli.}^{\;\;\;\;n} A_{s;\,n}. \tag{11.33}$$

При подстановке этого выражения в (11.31) первый член правой части (11.33) сократится со вторым членом последних скобок правой части (11.31). В силу (11.29) второй член в правой части (11.33) сокращается совместно с членами, получаемыми из только что указанного путем циклической перестановки.

В результате получаем:

$$A_n (R_{lks.\,;\,i}^{\;\;\;\;n} + R_{kls.\,;\,i}^{\;\;\;\;n} + R_{lis.\,;\,k}^{\;\;\;\;n}) \equiv 0. \tag{11.34}$$

Вектор A_n здесь произволен, поэтому тензор кривизны должен удовлетворять следующим тождествам:

$$R_{iks.\,;\,l}^{\;\;\;\;n} + R_{kls.\,;\,i}^{\;\;\;\;n} + R_{lis.\,;\,k}^{\;\;\;\;n} \equiv 0, \tag{11.35}$$

которые называются тождествами Бьянки.

Ковариантная форма тензора кривизны. До сих пор мы не вводили метрики. Если метрика определена и Γ_{ik}^l связаны с нею уравнениями (11.3), тензор кривизны удовлетворяет еще дополнительным алгебраическим тождествам. Полностью ковариантный тензор кривизны получается опусканием индекса n в уравнении (11.27):

$$R_{iklm} = R_{ikl.}^{\;\;\;\;n} g_{mn}. \tag{11.36}$$

Этот ковариантный тензор кривизны может быть выражен через „символы Кристоффеля первого рода", которые получаются из коэфициентов аффинной связности $\left\{ {s \atop ik} \right\}$ умножением на g_{ls}:

$$[ik, l] = g_{ls} \left\{ {s \atop ik} \right\} = \frac{1}{2} (g_{kl,\,i} + g_{il,\,k} - g_{ik,\,l}). \tag{11.37}$$

Первый член в R_{iklm} может быть записан в виде:

$$\left. \begin{aligned} g_{mn} \left\{ {n \atop li} \right\}_{,k} &= [li, m]_{,k} - \left\{ {n \atop li} \right\} g_{mn,\,k} = \\ &= [li, m]_{,k} - \left\{ {n \atop li} \right\} ([nk, m] + [mk, n]). \end{aligned} \right\} \tag{11.38}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (11.36), получим

$$\begin{aligned} R_{iklm} = [li, m]_{,k} - [lk, m]_{,i} + g^{rs} ([mi, r]\,[lk, s] - \\ - [mk, s]\,[li, r]). \end{aligned} \tag{11.39}$$

Записав ковариантный тензор кривизны в таком виде, можно убедиться в том, что к тождествам (1) и (2) можно добавить еще два алгебраических тождества.

4) Ковариантный тензор кривизны антисимметричен в своих последних двух индексах:

$$R_{iklm}+R_{ikml}\equiv 0. \tag{11.40}$$

Действительно, скобки в (11.39), очевидно, антисимметричны по отношению к m и l. Первые же два члена содержат только следующую комбинацию вторых производных компонент метрического тензора

$$[li, m]_{,k}-[lk, m]_{,i}=\frac{1}{2}[(g_{mi,lk}-g_{li,mk})+(g_{lk,mi}-g_{mk,li})].$$

Это выражение также антисимметрично по отношению к m и l.

5) Ковариантный тензор кривизны симметричен относительно перестановки обеих его пар индексов:

$$R_{iklm}\equiv R_{lmik}. \tag{11.41}$$

Это соотношение проверяется так же, как (11.40).

В оставшейся части этой главы мы будем рассматривать только метрические пространства, коэфициенты аффинной связности которого определяются формулой (11.3).

Свертывание тензора кривизны. При помощи свертывания из тензора кривизны можно получить тензоры более низкого ранга, а именно, следующие тензоры: $R_{ikl\cdot}^{\;\;\;\;i}, R_{ikl\cdot}^{\;\;\;\;k}, R_{ikl\cdot}^{\;\;\;\;n}\, g^{il}, R_{ikl\cdot}^{\;\;\;\;n}\, g^{kl}$; все остальные свернутые тензоры равны нулю в силу антисимметрии R_{iklm} относительно индексов (i, k) и (l, m).

Приведенные выше четыре тензора второго ранга равны между собой с точностью до знака, так как они получаются один из другого перестановкой индексов в одной из пар или перестановкой самих пар индексов. Свернутый тензор $R_{ikl\cdot}^{\;\;\;\;i}$ принято обозначать через R_{kl}. В силу свойств симметрии $R_{ikl\cdot}^{\;\;\;\;n}$ тензор R_{kl} симметричен в своих индексах.

Свертывая, далее, R_{kl}, получим так называемую скалярную кривизну R:

$$R = g^{kl} R_{kl}, \quad R_{kl} = R_{ikl\cdot}^{\ \ \ \ i}\ . \tag{11.42}$$

R_{kl} выражается через символы Кристоффеля следующим образом:

$$R_{kl} = \left\{ {s \atop ls} \right\}_{,k} - \left\{ {s \atop lk} \right\}_{,s} - \left\{ {r \atop sr} \right\} \left\{ {s \atop lk} \right\} + \left\{ {s \atop rk} \right\} \left\{ {r \atop ls} \right\}. \tag{11.43}$$

Симметрия относительно индексов k и l очевидна во всех членах, кроме первого. Выражение $\left\{ {s \atop ls} \right\}$, из которого получается первый член, может быть представлено в виде

$$\left\{ {s \atop ls} \right\} = \frac{1}{2} g^{rs} (g_{rl,\,s} + g_{rs,\,l} - g_{ls,\,r}).$$

Разность $g_{rl\,,\,s} - g_{ls,\,r}$ антисимметрична относительно r и s и после умножения на g^{rs} обращается в нуль. В скобках остается только второй член:

$$\left\{ {s \atop ls} \right\} = \frac{1}{2} g^{rs} g_{rs,l} = \frac{1}{2} \frac{g_{,l}}{g} = (\log \sqrt{g})_{,l}, \quad g = |g_{ab}| \tag{11.44}$$

Первый член в (11.43) поэтому равен

$$\left\{ {s \atop ls} \right\}_{,k} = (\log \sqrt{g})_{,lk}, \tag{11.45}$$

и тоже симметричен в l и k.

Свернутые тождества Бьянки. Дважды свертывая тождества Бьянки (11.35), получим тождества, содержащие только свернутый тензор кривизны. Свернем сначала (11.35) по i и n:

$$R_{ks;\,l} + R_{kls\cdot\,;r}^{\ \ \ \ r} + R_{lrs\cdot\,;k}^{\ \ \ \ r} \equiv 0.$$

Меняя в последнем члене местами индексы l и r, в силу (11.28) получим:

$$R_{ks;\,l} + R_{kls\cdot\,;r}^{\ \ \ \ r} - R_{ls;\,k} \equiv 0,$$

или

$$R_{k.\,;l}^{s} + R_{kl..\,;r}^{sr} - R_{l.\,;k}^{s} \equiv 0.$$

Далее, переставим контравариантные индексы s и r во втором члене

$$R_{kl..}^{sr} = -R_{kl..}^{rs},$$

и свернем по индексам k и s. Тогда

$$R_{;l} - 2R_{l.\,;r}^{r} \equiv 0,$$

или

$$\left(R^{ls} - \frac{1}{2} g^{ls} R\right)_{;s} \equiv 0. \qquad (11.46)$$

Выражение в скобках обычно обозначают через G^{ls}:

$$G^{ls} = R^{ls} - \frac{1}{2} g^{ls} R. \qquad (11.47)$$

Число алгебраически независимых компонент тензора кривизны. Компоненты ковариантного тензора кривизны R_{iklm} удовлетворяют алгебраическим соотношениям (11.28), (11.29) (в обеих этих формулах индекс n предполагается опущенным), (11.40) и (11.41). Поэтому количество алгебраически независимых его компонент уменьшается. В этом разделе мы покажем, что их число в n-мерном пространстве равно

$$N = \frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1). \qquad (11.48)$$

В двумерном пространстве тензор кривизны имеет только одну отличную от нуля компоненту: одного скаляра R уже достаточно, чтобы полностью охарактеризовать кривизну[1]. В трехмерном пространстве существует шесть алгебраически независимых компонент тензора кривизны. Такое же количество независимых компонент имеет и свернутый тензор R_{kl}, в

---

[1] Можно показать, что в двумерном пространстве тензор кривизны следующим образом зависит от R:

$$R_{ikl.}^{\;\;\;n} = \frac{1}{2} (\delta_l^n g_{ki} - \delta_k^n g_{li}) R.$$

этом случае им полностью определяется тензор кривизны[1]. В четырехмерном пространстве N равно 20, в то время как свернутый тензор кривизны имеет только 10 независимых компонент. Кривизна пространства, число измерений которого меньше четырех, полностью определяется свернутым тензором кривизны R_{kl}.

Перейдем к выводу формулы (11.48). Разделим компоненты $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$ на три группы: к первой группе отнесем компоненты, у которых индексы во второй паре имеют те же значения, что и индексы в первой паре, например R_{1212}; ко второй — компоненты, в которых только один индекс встречается дважды, например R_{1213}; наконец, в последнюю группу войдут компоненты, у которых все четыре индекса различны, например R_{1234}.

В первой группе, где различны только два индекса, первые и вторые индексы пар должны быть одинаковыми, так как в силу уравнений (11.28) и (11.40) два индекса одной пары не могут равняться друг другу. Эти компоненты имеют вид R_{ikik} (помнить: здесь одинаковые индексы не знак суммы). R_{ikki} отличается от R_{ikik} только знаком. Количество компонент такого типа равно числу пар (i, k) при $i \neq k$.

Индекс i может принимать n различных значений. Так как $k \neq i$, при заданном i, k может принимать только $n-1$ различных значений. Ввиду того что последовательность i и k безразлична, произведение $n(n-1)$ нужно разделить на 2. Отсюда число различных пар (i, k) $(i \neq k)$ равно

$$N_p = \frac{1}{2} n (n-1), \qquad (11.49)$$

---

[1] В трехмерном пространстве $R_{ikl.}^{\ \ \ n}$ выражается через R_{kl} следующим образом:

$$R_{ikl.}^{\ \ \ n} = \delta_i^n R_{kl} - \delta_k^n R_{il} + g_{kl} R_{i.}^{\ n} - g_{il} R_{k.}^{\ n} - \frac{1}{2} (\delta_i^n g_{kl} - \delta_k^n g_{il}) R.$$

и количество алгебраически независимых компонент с двумя индексами будет также

$$N_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}n(n-1). \qquad (11.50)$$

Циклические тождества (11.29) не уменьшают этого числа, так как они будут независимы от других алгебраических тождеств, только если все четыре индекса различны. Действительно, если два из четырех индексов i, k, l, m равны, (11.29) приводятся к одной из следующих форм:

$$R_{ikli}+\langle R_{klii}\rangle+R_{liki}=0,$$

или

$$R_{iklm}+R_{klim}+\langle R_{likm}\rangle=0 \text{ [1]}.$$

Эти уравнения являются следствием уравнений (11.28), (11.40) и (11.41).

Рассмотрим теперь вторую группу компонент, которые имеют по три различных индекса. Применением (11.28) и (11.40) все эти компоненты могут быть приведены к форме R_{iklm}. Значение i может быть выбрано n способами. Из оставшихся $(n-1)$ чисел нужно выбирать пары различных чисел для k и m. Согласно (11.49) это можно сделать $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ способами. Соответственно этому число алгебраически независимых компонент второго типа равно

$$N_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2). \qquad (11.51)$$

Циклические тождества и в этом случае не уменьшают их числа.

В компонентах третьей группы все четыре индекса различны. Поэтому первую пару индексов можно выбрать $\frac{1}{2}n(n-1)$ различными способами. Из оставшихся $(n-2)$

---

[1] Скобками $\langle\,\rangle$ выделены члены, тождественно равные нулю в силу того, что у них одинаковы индексы одной пары [см. (11.28) и (11.40)].

чисел вторую пару индексов можно выбрать $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ различными способами. Согласно (11.41), последовательность обеих пар безразлична, поэтому результат нужно еще разделить на 2. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n-1)\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

способов выбора двух совершенно различных пар индексов.

Однако в этом случае число алгебраически независимых компонент уменьшается еще и за счет существования тождеств (11.29). Например, каждая из трех компонент R_{1234}, R_{2314} и R_{3124} имеет различную комбинацию пар индексов, но любая из них может быть выражена через две других. Число алгебраически независимых компонент R_{iklm} с четырьмя различными индексами поэтому равно

$$N_{\text{III}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n-1)\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-3)=$$

$$=\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3). \qquad (11.52)$$

Полное число алгебраически независимых компонент R_{iklm} получается суммированием N_{I}, N_{II} и N_{III}, что приводит к (11.48).

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*

Уравнение движения в гравитационном поле. В этой главе мы выведем уравнения гравитационного поля и уравнения движения масс в этом поле.

К сожалению, мы не можем пока рассматривать уравнения движения со всей полнотой, мы должны сейчас ограничиться рассмотрением движения малых частиц, наличие которых лишь незначительно сказывается на общем поле.

Принцип эквивалентности определяет законы движения таких частиц. Их движение в гравитационном поле не должно ничем отличаться от движения по инерции, т. е. их траекториями должны быть геодезические мировые линии:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d \tau^2} = -\left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\} \frac{d \xi^\rho}{d \tau} \frac{d \xi^\sigma}{d \tau}, \quad d\tau^2 = g_{\rho\sigma} d \xi^\rho d \xi^\sigma. \quad (12.1)$$

Этот закон движения более сложен, чем, например, закон движения электрических зарядов в специальной теории относительности. В то время как уравнение (7.49) линейно относительно напряженностей поля, уравнение (12.1) не является линейным по отношению к $g_{\mu\nu}$ и их производным. Эта нелинейность характерна для уравнений, ковариантных относительно общих преобразований координат; она является поэтому следствием принципа эквивалентности.

Представление материи в уравнениях поля. Прежде чем приступить к нахождению дифференциальных уравнений гравитационного поля, остановимся кратко на представлении гравитационной массы в уравнениях и их решениях.

Гравитационное поле создается гравитационными массами, так же как электромагнитное поле создается электрическими зарядами. Эти заряды могут рассматриваться в двух совершенно различных аспектах. Когда Максвелл получил свои уравнения поля, еще не был известен атомистический характер электрических зарядов. Максвелл предполагал, что заряд равномерно распределяется по объему заряженного диэлектрика, по поверхности проводника и т. п. Соответственно этому он ввел понятия плотности заряда и плотности тока. Эти четыре плотности представляются нашим мировым вектором I^{ρ}, который входит в систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Аналогичным образом можно составить уравнения поля, в которых гравитационная масса представляется мировым тензором $P^{\mu\nu}$, тензором энергии-импульса. Десять компонент этого тензора $P^{\mu\nu}$ должны быть равны десяти дифференциальным выражениям второго порядка, образованным из компонент метрического тензора. Эти десять выражений должны, конечно, преобразовываться как $P^{\mu\nu}$, т. е. как компоненты симметричного тензора второго ранга. Только в этом случае уравнения поля будут ковариантны.

После того как физиками была обнаружена атомистическая структура электрического заряда, т. е. выяснено, что носителями заряда обязательно являются отдельные частицы — электроны и ионы (а теперь можно добавить — и мезоны), Лорентц описал электромагнитные свойства материи при помощи новой модели. С его точки зрения в подавляющей части пространства не содержится электрических зарядов. Электрические заряды он рассматривал, как точечные, представляющие собой особые (сингулярные) точки электромагнитного поля. Вне зарядов электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла для свободного от зарядов пространства. В месте нахождения каждого точечного заряда уравнения не удовлетворяются — такая точка является особой точкой поля. Хотя уравнения поля теряют смысл в некоторых точках, все же благодаря тому, что уравнения поля справедливы в окрестностях каждой такой сингулярной области, содержащей особую точку, величина заряда в этой сингулярной области остается неизмененной. Полный заряд внутри замкнутой поверхности, окружающей особую точку, определяется интегралом

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}),$$

а его изменение во времени равно

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{\partial E}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right).$$

Если уравнения поля удовлетворяются на всей поверхности S (т. е. если через поверхность S не течет электрический ток), то согласно формуле (7.4), правая часть которой предполагается равной нулю, можно заменить $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ через $c \operatorname{rot} \mathbf{H}$. Но по теореме Стокса интеграл по замкнутой поверхности от rot равен нулю; отсюда убеждаемся, что ε не меняется с течением времени, даже если не делать никаких предположений относительно поля внутри поверхности.

Несмотря на предположение о наличии особых областей, поле вне этих областей остается строго определенным. Благодаря этому Лоренц сумел показать, что старая теория Максвелла, предполагающая непрерывное распределение зарядов и токов, является апроксимацией его собственной теории, в которой заряды рассматриваются, как особые точки поля.

Мы можем использовать указанную точку зрения Лоренца для представления материи в теории гравитации. Вместо того чтобы представлять материю при помощи тензора энергии-импульса $P^{\mu\nu}$, предположим, что гравитационная масса заключена в небольших областях пространства, в остальном совершенно свободного от гравитационной материи. Дифференциальные уравнения гравитационного поля будут справедливы только вне областей нахождения массы: это будут уравнения поля в пустом пространстве.

Области, в которых сосредоточена масса, т. е. „точечные массы“, будут являться сингулярными областями поля.

Представление материи с помощью тензора поля $P^{\mu\nu}$ можно рассматривать, как усреднение по большому числу точечных масс и их состояниям движения, точно так же как понятие плотности электрического заряда может рассматриваться как среднее число элементарных зарядов на единицу объема. С другой стороны, описание материи при помощи точечных масс также может быть использовано в качестве удобной апроксимации в том случае, когда компоненты тензора $P^{\mu\nu}$ отличны от нуля только в небольших изолированных областях пространства. Это имеет место, например, в солнечной системе, где материя сконцентрирована главным образом внутри небесных тел, тогда как вне этих областей все компоненты $P^{\mu\nu}$ равны нулю. Каждая из этих областей может быть заменена точечной массой, благодаря чему рассмотрение всей системы сильно упрощается.

Оба представления материи — при помощи точечных масс или как сплошной среды — оказываются недостаточными при более строгом подходе, так как ни одно из них не является удовлетворительным при рассмотрении квантовых эффектов атомной физики. В обычной же области применения теории гравитации — астрономии — встречаются примеры использования обоих представлений. При определении внутренних напряжений в звезде или при описании поведения целой туманности, содержащей миллионы отдельных звезд, материю можно рассматривать как сплошную среду. С другой стороны, если стоит задача описания движения небольшого числа небесных тел, например тел, составляющих солнечную систему, материя может считаться состоящей из отдельных точечных масс.

Независимо от того, рассматривается ли материя как сплошная среда или как отдельные точечные массы, мы предположим, что число уравнений поля равно числу переменных поля, т. е. десяти. Кроме того, эти уравнения должны быть дифференциальными уравнениями второго порядка относительно $g_{\mu\nu}$, так как они должны содержать неоднородности напряженности гравитационного поля[1]); кроме того, они должны быть ковариантны относительно общих преобразований координат.

Если рассматривать материю как сплошную среду, тензорное поле $P^{\mu\nu}$ должно всюду быть приравнено к некоторому тензорному полю (которое еще необходимо найти), содержащему дифференциальные выражения второго порядка относительно $g_{\mu\nu}$. С другой стороны, если материю представлять в виде точечных масс, те же самые дифференциальные выражения должны обращаться в нуль всюду, кроме некоторых изолированных областей, в которых находятся точечные массы. В этих областях решения уравнений поля имеют особенность.

Дифференциальные тождества. Такой физический закон, как уравнения гравитационного поля, не может быть получен путем чисто логических рассуждений. Однако класс возможных уравнений поля уже ограничен нашими требованиями того, что поле должно представляться десятью дифференциальными уравнениями второго порядка относительно $g_{\mu\nu}$, ковариантными по отношению к общему преобразованию координат. В этом разделе мы наложим на уравнения поля дополнительное условие, которое исключит все возможности, кроме одной.

Д е с я т ь д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й д л я $g_{\mu\nu}$ н е м о г у т б ы т ь п о л н о с т ь ю н е з а в и с и м ы д р у г о т д р у г а, о н и д о л ж н ы у д о в л е т в о р я т ь ч е т ы р е м т о ж д е с т в а м. Это условие непосредственно связано с условием общей ковариантности. Предположим, что нами получена система десяти ковариантных уравнений для $g_{\mu\nu}$ и что известно одно из решений этих уравнений. В этом случае новые решения этих уравнений можно получить просто преобразованием координат. Зависимость преобразованных компонент метрического тензора $g^*_{\mu\nu}$ от $\xi^{*\rho}$ будет иной, чем зависимость $g_{\mu\nu}$ от ξ^{ρ}. Эти формально

[1]) На то, что уравнения поля должны быть второго порядка указывают также соображения, связанные с переходом к нерелятивистским уравнениям гравитации, т. е. к уравнению Пуассона (*Прим. ред.*).

различные решения в сущности являются эквивалентными представлениями одного и того же физического состояния, так как их различие отражает только возможность произвольного выбора систем отсчета, в которых может быть описано гравитационное поле. Таким образом, действительно отличных друг от друга гравитационных полей гораздо меньше, чем формально различных решений уравнений поля.

Чтобы ограничить число формальных решений, на систему координат следует наложить дополнительное условие. Так как преобразования координат содержат четыре произвольные функции (в четырехмерном пространстве), то можно составить четыре уравнения для $g_{\mu\nu}$, которые не должны быть ковариантными. Эти уравнения должны быть выбраны таким образом, чтобы, исходя из произвольной совокупности $g_{\mu\nu}$, им можно было бы удовлетворить после соответствующего преобразования координат. Такие уравнения называются координатными условиями.

При добавлении к десяти ковариантным уравнениям поля четырех координатных условий получается система из четырнадцати уравнений, имеющая то же множество неэквивалентных решений, что и система десяти уравнений поля, взятая отдельно, но с меньшим числом формально различных решений.

Четырнадцать полностью независимых уравнений для десяти переменных имели бы слишком мало решений. Эти решения соответствуют либо плоской метрике, либо, в лучшем случае, они определяют значительно меньшее количество действительно различных состояний, чем то, которое можно получить, допуская произвольное распределение материи в пространстве. Поэтому, кроме четырнадцати уравнений, $g_{\mu\nu}$ должны удовлетворять четырем тождествам.

Четыре координатные условия являются в значительной степени произвольными. Они могут быть любыми нековариантными уравнениями, содержащими $g_{\mu\nu}$, которые можно удовлетворить любой метрикой после соответствующего выбора системы координат. Так как выбор конкретных координатных условий не влияет на характер решений, необходимо, чтобы тождества содержали только ковариантные уравнения поля и чтобы они были независимы от координатных условий.

Предыдущие рассуждения показывают, что десять уравнений поля в силу их ковариантности должны удовлетворять четырем тождествам. Однако до сих пор мы еще ничего не знаем о форме самих уравнений и природе соответствующих им тождеств. Чтобы решить эти вопросы, используем свойства тензора $P^{\mu\nu}$. Если рассматривать материю как сплошную среду, правыми частями уравнений гравитационного поля будут величины $P^{\mu\nu}$, подобно тому, как компоненты мирового вектора тока образуют правые части уравнений Максвелла. Аналогично тому, что закон сохранения электрического заряда выражается уравнением

$$I^{\rho}_{;\rho}=0,$$

закон сохраиения энергии и импульса может быть выражен уравнением

$$P^{\mu\nu}_{;\nu}=0. \qquad (12.2)$$

Поэтому можно ожидать, что десять величин, стоящих в левых частях уравнений поля, являются компонентами симметричного тензора второго ранга, а четыре тождества имеют вид дивергенций.

Уравнения поля. В главе XI мы встречались с тензорными выражениями, обладающими подобными свойствами. Таковым является тензор $G^{\mu\nu}$, определенный с помощью (11.47). Можно показать, что не существует другого тензора, десять компонент которого зависели бы только от $g_{\mu\nu}$, а его дивергенция тождественно обращалась бы в нуль[1]). Поэтому уравнения гравитационного поля мы запишем в следующем виде:

$$G^{\mu\nu}+\alpha P^{\mu\nu}=0, \quad G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R, \qquad (12.3)$$

---

[1]) Конечно, кроме самого тензора $g_{\mu\nu}$. *(Прим. ред.)*

где материя представляется тензором $P^{\mu\nu}$. Если же материя представляется точечными массами, уравнения гравитационного поля вне точечных масс будут иметь вид

$$G^{\mu\nu} = 0, \tag{12.4}$$

однако они перестают быть справедливыми в местах расположения точечных масс. Постоянная α в уравнениях (12.3) будет определена ниже.

Уравнения поля (12.4) удовлетворяют тождествам

$$G^{\mu\rho}{}_{;\rho} \equiv 0, \tag{12.5}$$

в силу чего уравнения (12.2) являются непосредственным следствием уравнений (12.3):

$$0 = (G^{\mu\rho} + \alpha P^{\mu\rho})_{;\rho} \equiv \alpha P^{\mu\rho}{}_{;\rho}. \tag{12.6}$$

Линейное приближение и нормальные координатные условия. Полученные уравнения поля и законы движения в гравитационном поле нелинейны относительно переменных поля $g_{\mu\nu}$. Однако известно, что линейная теория — теория Ньютона — с большой степенью точности описывает движение тел под действием сил. Поэтому необходимо предположить, что гравитационные поля (т. е. отклонение истинной метрики от плоской), с которыми мы встречаемся, например, в небесной механике, настолько слабы, что нелинейный характер уравнений поля ведет лишь к эффектам второго порядка. В метрической системе единиц, которой обычно пользуются при измерениях, наблюдаемые в природе гравитационные ускорения — порядка единицы, в то время как скорость света c — весьма большая величина. В теории гравитации удобно пользоваться другими единицами, в которых скорость света равна не 3.10^{10}, а 1. Сохраним сантиметр в качестве единицы длины, а за единицу времени и собственного времени выберем величину, в 3.10^{10} раз меньшую, чем секунда. В этих единицах метрический тензор плоской метрики имеет компоненты:

$$\varepsilon_{\rho\sigma} = \begin{Bmatrix} -1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & +1 \end{Bmatrix}^{1)} \qquad (12.7)$$

То обстоятельство, что скорости большинства материальных тел малы по сравнению со скоростью света, в новых единицах выражается в том, что U^l, пространственные компоненты U^ρ, малы в сравнении с единицей.

Предположим, что, используя новые единицы времени, можно ввести такие системы координат, в которых компоненты метрического тензора разлагаются в ряды

$$g_{\rho\sigma} = \varepsilon_{\rho\sigma} + \lambda \underset{1}{h}_{\rho\sigma} + \lambda^2 \underset{2}{h}_{\rho\sigma} + \ldots, \qquad (12.8)$$

где параметром разложения является малая постоянная λ.

Контравариантный метрический тензор имеет в этом случае компоненты

$$\left.\begin{aligned} g^{\rho\sigma} &= \varepsilon^{\rho\sigma} + \lambda \underset{1}{h}^{\rho\sigma} + \lambda^2 \underset{2}{h}^{\rho\sigma} + \ldots, \\ \varepsilon^{\rho\sigma} &= \varepsilon_{\rho\sigma}, \\ \underset{1}{h}^{\rho\sigma} &= -\varepsilon^{\rho\alpha}\varepsilon^{\sigma\beta}\underset{1}{h}_{\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.9)$$

Детерминант метрического тензора равен

$$g \equiv |g_{\rho\sigma}| = -(1 + \lambda\varepsilon^{\rho\sigma}\underset{1}{h}_{\rho\sigma} + \ldots). \qquad (12.10)$$

---

[1]) В дальнейшем через $\varepsilon_{\rho\sigma}$ всегда будут обозначаться компоненты метрического тензора плоского пространства, выраженные в новых единицах времени, обозначение же $\eta_{\rho\sigma}$ мы сохраним для тех случаев, когда будут использоваться обычные метрические единицы.

Перейдем к рассмотрению уравнений движения. Они записываются в виде:

$$\frac{dU^\rho}{d\tau} = -g^{\rho\sigma}[\iota\varkappa, \sigma]\, U^\iota U^\varkappa. \tag{12.11}$$

Символы Кристоффеля $[\iota\varkappa,\sigma]$ будут малыми величинами первого порядка относительно λ. Пренебрегая величинами высших порядков, заменим $g^{\rho\sigma}$ на $\varepsilon^{\rho\sigma}$. Далее, пока скорости малы по сравнению с c, можно пренебречь членами, содержащими U^i в качестве множителей, а U^4 — считать равным единице. Тогда (12.11) заменится приближенным уравнением

$$\frac{dU^\rho}{d\tau} \sim -\varepsilon^{\rho\sigma}[44, \sigma] \sim -\frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}\lambda\,(2\underset{1}{h}_{4\sigma,4} - \underset{1}{h}_{44,\sigma}). \tag{12.12}$$

Наконец, если поле медленно меняется во времени — это соответствует тому, что образующие поле точечные массы движутся с небольшими скоростями, — можно пренебречь производными по ξ^4, которые малы по сравнению с производными по пространственным координатам ξ^i. Тогда для первых трех уравнений (12.12) получим:

$$\frac{dU^i}{d\tau} \sim -\frac{1}{2}\lambda\underset{1}{h}_{44,i}. \tag{12.13}$$

Сравнивая это уравнение с классическим выражением для силы (10.5), увидим, что $\frac{1}{2}\lambda\underset{1}{h}_{44}$ играет роль ньютоновского гравитационного потенциала. Это обстоятельство поможет нам в дальнейшем интерпретировать решения уравнений поля.

Перейдем теперь к нахождению линейного приближения для уравнений поля. Ограничиваясь линейными выражениями, можно значительно упростить вид этих уравнений.

В тензоре

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \\ &= \left\{{\rho \atop \nu\rho}\right\}_{,\mu} - \left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\}_{,\rho} - \left\{{\sigma \atop \rho\sigma}\right\}\left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\} + \\ &+ \left\{{\sigma \atop \mu\rho}\right\}\left\{{\rho \atop \nu\sigma}\right\} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\left(\left\{{\rho \atop \alpha\rho}\right\}_{,\beta} - \right. \\ &\left. - \left\{{\rho \atop \alpha\beta}\right\}_{,\rho} - \left\{{\sigma \atop \rho\sigma}\right\}\left\{{\rho \atop \alpha\beta}\right\} + \left\{{\sigma \atop \alpha\rho}\right\}\left\{{\rho \atop \beta\sigma}\right\}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (12.14)$$

можно пренебречь всеми членами, не линейными относительно $\underset{1}{h}_{\mu\nu}$. Это относится ко всем членам, не линейным относительно символов Кристоффеля; в оставшихся членах все непродифференцированные $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ заменим на $\varepsilon_{\mu\nu}$ и $\varepsilon^{\mu\nu}$. Тогда получим „линеаризованные“ выражения

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} \sim \frac{\lambda}{2}\Big[&\underset{1}{h}_{,\nu\mu} + \varepsilon^{\rho\sigma}(\underset{1}{h}_{\mu\nu,\rho\sigma} - \underset{1}{h}_{\mu\rho,\nu\sigma} - \underset{1}{h}_{\nu\rho,\mu\sigma}) - \\ &- \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon^{\rho\sigma}(\underset{1}{h}_{,\rho\sigma} - \varepsilon^{\iota\varkappa}\underset{1}{h}_{\rho\iota,\sigma\varkappa})\Big], \\ \underset{1}{h} = \varepsilon^{\rho\sigma}&\underset{1}{h}_{\rho\sigma}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.15)$$

Выражение (12.15) может быть несколько упрощено введением обозначений

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} &= \underset{1}{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\underset{1}{h}, \\ \underset{1}{h}_{\mu\nu} &= \underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\underset{1}{\gamma}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.16)$$

Выражая линеаризованные $G_{\mu\nu}$ через $\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu}$, получим

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\sim \frac{\lambda}{2}(\varepsilon^{\rho\sigma}\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu,\rho\sigma} - \sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu} + \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon^{\rho\sigma}\sigma_{\rho,\sigma}), \\ \sigma_\mu &= \varepsilon^{\rho\sigma}\underset{1}{\gamma}_{\mu\rho,\sigma}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.17)$$

При решении уравнений поля (12.3) и (12.4) еще остаются значительные трудности, так как каждая линеаризованная компонента $\underset{1}{G}_{\mu\nu}$ (12.17) зависит от нескольких компонент $\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu}$, и поэтому десять уравнений поля должны решаться одновременно. Однако задачу можно значительно упростить благодаря возможности введения координатных условий. Мы покажем, что всегда возможно произвести такое преобразование координат, в результате которого выражение σ_μ обращается в нуль.

Рассмотрим преобразования координат вида

$$\xi^{*\alpha} = \xi^\alpha + \lambda v^\alpha(\xi^\rho), \tag{12.18}$$

при которых изменение значений координат пропорционально параметру λ. Обратными преобразованиями с точностью до величин первого порядка относительно λ будут:

$$\xi^\alpha = \xi^{*\alpha} - \lambda v^\alpha(\xi^\rho) \sim \xi^{*\alpha} - \lambda v^\alpha(\xi^{*\rho}). \tag{12.19}$$

Компоненты метрического тензора (12.8) в том же приближении преобразуются по следующему закону:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{g}_{\mu\nu} &= \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\xi^{*\mu}}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\xi^{*\nu}} g_{\alpha\beta} \sim \\ &\sim (\delta^\alpha_\mu - \lambda v^\alpha_{,\mu*})(\delta^\beta_\nu - \lambda v^\beta_{,\nu*})(\varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda \underset{1}{h}_{\alpha\beta}) \sim \\ &\sim \varepsilon_{\mu\nu} + \lambda(\underset{1}{h}_{\mu\nu} - \varepsilon_{\alpha\nu} v^\alpha_{,\mu*} - \varepsilon_{\alpha\mu} v^\alpha_{,\nu*}). \end{aligned}\right\} \tag{12.20}$$

Отсюда получаем закон преобразования $\underset{1}{h}_{\mu\nu}$:

$$\underset{1}{\overset{*}{h}}_{\mu\nu} = \underset{1}{h}_{\mu\nu} - \varepsilon_{\alpha\nu} v^\alpha_{,\mu*} - \varepsilon_{\alpha\mu} v^\alpha_{,\nu*}. \tag{12.20a}$$

$\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu}$ преобразуются следующим образом:

$$\underset{1}{\overset{*}{\gamma}}_{\mu\nu} = \underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} - \varepsilon_{\alpha\nu} v^\alpha_{,\mu*} - \varepsilon_{\alpha\mu} v^\alpha_{,\nu*} + \varepsilon_{\mu\nu} v^\rho_{,\rho*}, \tag{12.21}$$

а выражения σ_μ согласно закону

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\sigma}_\mu = \sigma_\mu - \varepsilon_{\mu\alpha}\varepsilon^{\rho\sigma}\overset{\alpha}{v}_{,\rho*\sigma*} = \sigma_\mu - \varepsilon^{\rho\sigma}v_{\mu,\rho\sigma}, \\ v_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha}v^\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (12.22)$$

Все эти соотношения справедливы с точностью до членов первого порядка относительно λ.

Система координат, в которой σ_μ равны нулю, получается в результате преобразования координат (12.18) с v^α, удовлетворяющими следующим дифференциальным уравнениям

$$\varepsilon^{\rho\sigma}v_{\alpha,\rho\sigma} = \sigma_\alpha. \qquad (12.23)$$

Эти уравнения, дифференциальные уравнения Пуассона в четырех измерениях, всегда имеют решения.

В линейном приближении уравнения поля заменяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \lambda\varepsilon^{\rho\sigma}\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu,\rho\sigma} + 2aP_{\mu\nu} = 0, \\ \varepsilon^{\rho\sigma}\underset{1}{\gamma}_{\mu\rho,\sigma} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (12.3а)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^{\rho\sigma}\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0, \\ \varepsilon^{\rho\sigma}\underset{1}{\gamma}_{\mu\rho,\sigma} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12.4а)$$

Таким образом, мы добились разделения переменных в дифференциальных уравнениях второго порядка, благодаря чему рассмотрение их решений сильно упрощается.

Решение линеаризованных уравнений поля. Рассмотрим сначала статические решения уравнений поля, т. е. решения, не зависящие от ξ^4. Предполагая, что переменные поля зависят только от трех координат ξ^s, линеаризованные уравнения приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} -\lambda\Gamma^2\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} + 2aP_{\mu\nu} = 0, \\ \underset{1}{\gamma}_{\mu s,s} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12.24)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} &= 0, \\ \underset{1}{\gamma}_{\mu s, s} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.25}$$

Обычно компонента $P_{44} = P^{44} = \rho$ велика по сравнению с остальными компонентами тензора $P_{\mu\nu}$. Поэтому рассмотрим следующий случай:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda \nabla^2 \underset{1}{\gamma}_{44} + 2a\rho &= 0, \\ \nabla^2 \underset{1}{\gamma}_{\mu i} &= 0, \\ \underset{1}{\gamma}_{\mu s, s} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.26}$$

Эти уравнения могут быть решены в предположении что из всех величин $\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu}$ только компонента $\underset{1}{\gamma}_{44}$ отлична от нуля. $\underset{1}{\gamma}_{44}$ удовлетворяет уравнению Пуассона в трех измерениях. Решение представляется интегралом

$$\lambda \underset{1}{\gamma}_{44}(\mathbf{r}) = -\frac{a}{2\pi} \int\limits_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{12.27}$$

Мы уже видели, что величина $\frac{1}{2} \lambda \underset{1}{h}_{44}$ должна играть роль классического гравитационного потенциала G, входящего в уравнения (10.5) и (10.7). Так как из всех $\underset{1}{\gamma}_{\mu\nu}$ только $\underset{1}{\gamma}_{44}$ отлична от нуля, для $\underset{1}{h}_{44}$ получаем выражение

$$\underset{1}{h}_{44} = \underset{1}{\gamma}_{44} - \frac{1}{2} \varepsilon_{44} \varepsilon^{44} \underset{1}{\gamma}_{44} = \frac{1}{2} \underset{1}{\gamma}_{44}. \tag{12.28}$$

Отсюда видно, что $\underset{1}{h}_{44}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-2\nabla^2 \underset{1}{h}_{44} + a\rho = 0. \tag{12.29}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (10.7), найдем, что постоянная a равна

$$a = 8\pi\varkappa. \tag{12.30}$$

Теория гравитации, в которой материя рассматривается как сплошная среда, остается неполной, пока неизвестно уравнение состояния среды. Если материя настолько разрежена, что не существует взаимодействия между соседними элементами объема, тензор $P^{\mu\nu}$ можно заменить через

$$P^{\mu\nu} = \rho U^{\mu} U^{\nu},$$

где U^{μ} удовлетворяет уравнению (12.1), а изменение ρ определяется законами сохранения

$$(\rho U^{\mu} U^{\nu})_{;\nu} = 0,$$
$$(\rho U^{\mu} U^{\nu})_{;\nu} U_{\mu} \equiv (\rho U^{\nu})_{;\nu} = 0.$$

Во всех остальных случаях необходимо делать какие-то предположения относительно характера внутренних сил в среде. При этом еще не так легко выяснить, совместимы ли эти предположения с принципами теории относительности. Например, с релятивистской точки зрения понятия абсолютно твердого тела или несжимаемой жидкости не имеют смысла. В таких средах упругие волны должны распространяться с бесконечно большой скоростью, в противоречии с основным принципом теории относительности о невозможности распространения сигнала со скоростью, большей c. Если бы существовала релятивистская теория, описывающая взаимодействие отдельных частиц среды, можно было бы найти уравнение состояния, не противоречащее принципу теории относительности. В действительности это сделано лишь для немногих типов молекулярных взаимодействий.

Поле точечной массы. Рассмотрим теперь представление материи в виде отдельных точечных масс, в связи с чем обратимся к линеаризованным уравнениям поля (12.4а).

Прежде всего определим поле, создаваемое покоящейся точечной массой. Оно будет статическим и сферически симметричным. Поместим точечную массу в начало координат. Единственными решениями уравнения Лапласа, исчезающими на бесконечности и не имеющими особенностей во всем пространстве, кроме начала координат, являются производные различных порядков от функции $\frac{1}{r}$ и их линейные комбинации. Для того чтобы решить первую систему уравнений (12.25), предположим, что

$$\left.\begin{aligned} \lambda \underset{1}{\gamma}_{44} &= \frac{a}{r}, \\ \lambda \underset{1}{\gamma}_{4s} &= b\left(\frac{1}{r}\right)_{,s}, \\ \lambda \underset{1}{\gamma}_{st} &= c\left(\frac{1}{r}\right)_{,st} + f\frac{1}{r}\delta_{st}, \end{aligned}\right\} \tag{12.31}$$

где a, b, c и f — постоянные, которые нужно определить. Удовлетворим теперь второй системе уравнений (12.25), т. е. координатным условиям. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \lambda \sigma_4 &= -b\left(\frac{1}{r}\right)_{,ss} \equiv 0, \\ \lambda \sigma_s &= -c\left(\frac{1}{r}\right)_{,stt} - f\left(\frac{1}{r}\right)_{,s} \equiv -f\left(\frac{1}{r}\right)_{,s}. \end{aligned}\right\} \tag{12.32}$$

Постоянная f должна обращаться в нуль, тогда как остальные постоянные остаются произвольными. Однако при более внимательном рассмотрении можно убедиться, что члены, содержащие постоянные b и c, зависят от выбора системы координат. Производя преобразование координат (12.18), эти члены можно исключить, выбирая функции v^{α} следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} v^4 &= \frac{b}{r}, \\ v^s &= -\left(\frac{c}{r}\right)_{,s}. \end{aligned}\right\} \tag{12.33}$$

В соответствии с законом преобразования (12.21), найдем, что наше решение при этом примет вид

$$\left.\begin{aligned} \lambda \underset{1}{\gamma}_{44} &= \frac{a}{r}, \\ \underset{1}{\gamma}_{4s} = 0, &\quad \underset{1}{\gamma}_{st} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.31a}$$

Остающаяся постоянная a определяется образующей поле массой. Ньютоновский потенциал поля, образуемого массой M, равен:

$$G = -\frac{\varkappa M}{r}.$$

Так как $\frac{1}{2}\lambda \underset{1}{h}_{44}$ соответствует G, то в силу уравнения (12.28) находим, что постоянная a связана с массой M соотношением

$$M = -\frac{a}{4\varkappa}. \tag{12.34}$$

Гравитационные волны. Рассмотренные до сих пор решения уравнений поля аналогичны решениям классической теории гравитации. Однако существуют еще решения, типичные для рассматриваемой теории поля. Наиболее важными из них являются „гравитационные волны“ — быстро меняющиеся поля, возникающие всегда, когда точечные массы испытывают ускорения.

Рассмотрим плоские волновые поля, зависящие только от ξ^4 и ξ^1. В этом случае существуют волны, распространяющиеся только в положительном и отрицательном направлениях оси Ξ^1. Общий вид компонент волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ξ^1, будет

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{\gamma}_{44} &= \underset{1}{\gamma}_{44}(\xi^1 - \xi^4), \\ \underset{1}{\gamma}_{4s} &= \underset{1}{\gamma}_{4s}(\xi^1 - \xi^4), \\ \underset{1}{\gamma}_{rs} &= \underset{1}{\gamma}_{rs}(\xi^1 - \xi^4). \end{aligned}\right\} \tag{12.35}$$

Уравнения поля удовлетворяются автоматически. Координатные условия принимают вид

$$\underset{1}{\gamma}_{\mu 4,4}-\underset{1}{\gamma}_{\mu 1,1}=-(\gamma'_{\mu 4}+\gamma'_{\mu 1})=0, \tag{12.36}$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу $(\xi^1-\xi^4)$. Отсюда получаем условия

$$\left.\begin{aligned}&\underset{1}{\gamma}'_{44}=\underset{1}{\gamma}'_{11}=-\underset{1}{\gamma}'_{14},\\&\underset{1}{\gamma}'_{12}=-\underset{1}{\gamma}'_{42},\\&\underset{1}{\gamma}'_{13}=-\underset{1}{\gamma}'_{43},\end{aligned}\right\} \tag{12.36a}$$

остальные компоненты $\underset{1}{\gamma}_{22}$, $\underset{1}{\gamma}_{23}$ и $\underset{1}{\gamma}_{33}$ остаются произвольными функциями аргумента $(\xi^1-\xi^4)$.

Некоторые из этих компонент не имеют физического смысла и могут быть исключены преобразованием координат. Если при преобразовании координат (12.18) v^α считать зависящим только от аргумента $(\xi^1-\xi^4)$, то закон преобразования (12.21) примет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\underset{1}{\gamma}^*_{11}=\underset{1}{\gamma}_{11}+v^{1\prime}+v^{4\prime},\\&\underset{1}{\gamma}^*_{12}=\underset{1}{\gamma}_{12}-v^{2\prime},\quad \underset{1}{\gamma}^*_{13}=\underset{1}{\gamma}_{13}-v^{3\prime},\\&\underset{1}{\gamma}^*_{14}=\underset{1}{\gamma}_{14}-v^{4\prime}-v^{1\prime},\\&\underset{1}{\gamma}^*_{22}=\underset{1}{\gamma}_{22}-v^{1\prime}+v^{4\prime},\quad \underset{1}{\gamma}^*_{33}=\underset{1}{\gamma}_{33}-v^{1\prime}+v^{4\prime},\\&\underset{1}{\gamma}^*_{23}=\underset{1}{\gamma}_{23},\\&\underset{1}{\gamma}^*_{24}=\underset{1}{\gamma}_{24}+v^{2\prime},\quad \underset{1}{\gamma}^*_{34}=\underset{1}{\gamma}_{34}+v^{3\prime},\\&\underset{1}{\gamma}^*_{44}=\underset{1}{\gamma}_{44}+v^{4\prime}+v^{1\prime}.\end{aligned}\right\} \tag{12.37}$$

Подходящим выбором четырех функций v^α можно перейти к системе координат, в которой все компоненты, у которых хотя бы один из индексов равен 1 или 4, обращаются в нуль, и в которых обращается в нуль также выражение $\underset{1}{\gamma}_{22}+\underset{1}{\gamma}_{33}$. Не могут быть исключены преобразованиями координат только такие волны, для которых

$$\underset{1}{\gamma}_{22}=-\underset{1}{\gamma}_{33}\neq 0, \tag{12.38}$$

а также волны, для которых

$$\underset{1}{\gamma}_{23}\neq 0. \tag{12.39}$$

При повороте системы пространственных координат вокруг оси Ξ^1 на угол $\frac{\pi}{4}$ (45°) эти два типа волн переходят друг в друга.

Гравитационные волны не имеют аналога в классической теории. Такие волны должны излучаться осциллирующими системами, какими, например, являются двойные звезды, планеты и т. д. К сожалению, интенсивность излучаемых ими волн настолько мала, что их невозможно обнаружить при помощи имеющихся в нашем распоряжении средств.

Эйнштейн и Розен[1]) исследовали волновые решения точных нелинейных уравнений поля. Ими было показано, что в этом случае не существует решений в виде плоских волн, но существует решение в виде цилиндрических волн. Этот результат был получен ими чисто формальным путем, однако возможна его физическая интерпретация. Гравитационные волны, так же как и электромагнитные, переносят энергию[2]). Плотность этой энергии сама является источником стационарного гравитационного поля, которое деформирует метрику, благодаря чему гравитационные волны должны распространяться в пространстве с измененной метрикой. В плоской волне плотность энергии постоянна во всем пространстве, поэтому искривление метрики будет

---

[1]) „On Gravitational Waves", Journal Franklin Inst., **223**, 43 (1937).

[2]) Понятие энергии в общей теории относительности будет рассмотрено в конце этой главы.

увеличиваться до бесконечности во всех направлениях. Цилиндрические волны обладают особенностями на оси симметрии, и существуют решения, при которых с бесконечным возрастанием ρ (в эвклидовом пространстве ρ означает расстояние от оси) амплитуда волны стремится к нулю, а амплитуда стационарного поля — к бесконечности.

Таким образом, в результате рассмотрения „линеаризованных" уравнений поля релятивистской теории гравитации, мы убедились, что, кроме решений, соответствующих ньютоновским полям, существуют решения, не имеющие аналогов в классической теории; это гравитационные волны, распространяющиеся со скоростью света. После того как мы установили, что классическая теория гравитации является апроксимацией решений релятивистских уравнений, перейдем к рассмотрению формальных свойств этих релятивистских уравнений поля.

Вариационный принцип. Классические уравнения поля (10.7) могут рассматриваться, как уравнения Эйлера-Лагранжа вариационной задачи (или принципа Гамильтона)

$$\delta \int_V (\operatorname{grad} G)^2\, dV = 0, \tag{12.40}$$

где интеграл распространяется по всему трехмерному объему V; вариация G произвольна внутри области интегрирования V и исчезает на ее границах. Вариацию интеграла (12.40) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta \int_V (\operatorname{grad} G)^2\, dV &= 2 \int_V (\operatorname{grad} G \cdot \delta \operatorname{grad} G)\, dV = \\ &= 2 \int_V (\operatorname{grad} G \cdot \operatorname{grad} \delta G)\, dV = \\ &= 2 \int_V \operatorname{div} (\operatorname{grad} G \cdot \delta G)\, dV - 2 \int_V \nabla^2 G\, \delta G\, dV = \\ &= 2 \oint_s \delta G\, (\operatorname{grad} G \cdot \mathbf{dS}) - 2 \int_V \nabla^2 G\, \delta G\, dV.\end{aligned}$$

Первый интеграл последнего выражения равен нулю в силу того, что δG исчезает на границах. Поэтому

$$\delta \int\limits_V (\operatorname{grad} G)^2 dV = -2 \int\limits_V \nabla^2 G\, \delta G\, dV, \qquad (12.41)$$

и из того, что δG произвольно внутри V, следует, что интеграл $\int\limits_V (\operatorname{grad} G)^2\, dV$ экстремален только, когда G удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 G = 0. \qquad (12.42)$$

Аналогично релятивистские уравнения поля (12.4) могут рассматриваться, как уравнения Эйлера-Лагранжа принципа Гамильтона. В этом случае интеграл распространяется по четырехмерному объему

$$\left. \begin{aligned} I &= \int\limits_D R \sqrt{-g}\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \\ \delta I &= 0, \end{aligned} \right\} \qquad (12.43)$$

Вариации $g_{\mu\nu}$ (и их первых производных) попрежнему произвольны внутри четырехмерной области интегрирования D и должны исчезать на ее границах.

Интеграл I является инвариантом. Подинтегральное выражение

$$\mathfrak{R} = \sqrt{-g}\, R \qquad (12.44)$$

представляет собой скалярную плотность, преобразующуюся по закону

$$\mathfrak{R}^* = \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^{*\beta}} \right| \mathfrak{R};$$

поэтому I преобразуется следующим образом:

$$I^* = \int \mathfrak{R}^* d\xi^{*1} d\xi^{*2} d\xi^{*3} d\xi^{*4} = \int \mathfrak{R} \det \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^{*\beta}} \right| d\xi^{*1} d\xi^{*2} d\xi^{*3} d\xi^{*4}.$$

Из теории кратных интегралов известно, что при переходе к новым переменным интегрирования подинтегральное выражение умножается на якобиан преобразования, другими словами, I^* — тот же интеграл, что и I:

$$I^* = I.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа выражают необходимые условия стационарности некоторого интеграла относительно вариации переменных, входящих в его подинтегральную функцию. Если интеграл инвариантен относительно преобразования координат, соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа выражают условия, которые не могут зависеть от выбора координат; другими словами, уравнения Эйлера-Лагранжа для инвариантного принципа Гамильтона являются ковариантными дифференциальными уравнениями.

Выразим теперь вариацию интеграла

$$\left.\begin{aligned} I = \int \Bigg(\left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\}_{,\nu} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}_{,\rho} - \left\{ {\sigma \atop \sigma\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + \\ + \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \nu\sigma} \right\} \Bigg) g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \mathbf{d}\xi, \\ \mathbf{d}\xi = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4 \end{aligned}\right\} \qquad (12.45)$$

через вариации $g^{\mu\nu}$ [1]). Разобьем вариацию интеграла на две части следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \delta \int R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \mathbf{d}\xi = \int \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \mathbf{d}\xi + \\ + \int R_{\mu\nu} \delta \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) \mathbf{d}\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (12.46)$$

Предварительно выразим вариацию $R_{\mu\nu}$ через вариации символов Кристоффеля:

$$\left.\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} = \left(\delta \left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} \right)_{,\nu} - \left(\delta \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \right)_{,\rho} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \delta \left\{ {\sigma \atop \rho\sigma} \right\} - \\ - \left\{ {\sigma \atop \rho\sigma} \right\} \delta \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + \left\{ {\rho \atop \nu\sigma} \right\} \delta \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} + \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \delta \left\{ {\rho \atop \nu\sigma} \right\} \end{aligned}\right\} \qquad (12.47)$$

---

[1]) Здесь за независимые переменные удобно принять контравариантные компоненты тензора $g^{\mu\nu}$. Конечный результат расчета не будет зависеть от такого выбора, поскольку $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ однозначно определяют друг друга.

Известно, что символы Кристоффеля не являются тензорами, так как они преобразуются согласно закону (5.81). Однако если в одном и том же пространстве определить две различные аффинные связности, то их разность $\Gamma^{\lambda}_{\iota\varkappa}-\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\iota\varkappa}$ будет преобразовываться как смешанный тензор третьего ранга, так как последний член в уравнении (5.81) сократится с подобным ему. Вариация символа Кристоффеля $\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix}$ является тензором, ибо она представляется разностью двух аффинных связностей, варьированного и неварьированного символов Кристоффеля.

Так как левая часть (12.47) является тензором, то правая часть может содержать только ковариантные производные тензора $\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix}$. Действительно, непосредственное вычисление показывает, что правая часть (12.47) равна

$$\delta R_{\mu\nu}=\left(\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\rho\end{Bmatrix}\right)_{;\nu}-\left(\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\right)_{;\rho}. \tag{12.48}$$

Возможность такого упрощения (12.47) впервые была указана Палатини. Умножим обе части равенства (12.48) на $g^{\mu\nu}$. Здесь $g^{\mu\nu}$ можно ввести под знак дифференцирования, поскольку ковариантная производная метрического тензора равна нулю:

$$\left.\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}&=\left(g^{\mu\nu}\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\rho\end{Bmatrix}\right)_{;\nu}-\left(g^{\mu\nu}\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\right)_{;\rho}=\\ &=\left(g^{\mu\sigma}\delta\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\rho\end{Bmatrix}-g^{\mu\nu}\delta\begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\right)_{;\sigma}.\end{aligned}\right\} \tag{12.49}$$

Это выражение представляет собой ковариантную дивергенцию вектора. В задаче 10, б) главы V было установлено, что ковариантная дивергенция $V^{\sigma}_{;\sigma}$ может быть представлена в виде

$$V^{\sigma}_{;\sigma}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\,V^{\sigma}\right)_{,\sigma}. \tag{12.50}$$

Используя эту формулу для подинтегрального выражения первого интеграла правой части уравнения (12.46), получим:

$$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \\ = \left[\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\delta \begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\rho \end{Bmatrix} - g^{\mu\nu}\delta \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix}\right)\right]_{,\sigma}. \quad (12.51)$$

Это выражение является, таким образом, обычной дивергенцией. По теореме Гаусса (которая в n-мерном пространстве так же справедлива, как и в трехмерном) интеграл

$$\int \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d\xi$$

может быть преобразован в интеграл по граничной поверхности; этот интеграл равен нулю в силу того, что вариация $\delta \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix}$ исчезает на всей граничной поверхности.

Остается второй интеграл уравнения (12.46). $\delta(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})$ равно просто выражению:

$$\delta(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} g^{\mu\nu}\delta g^{\rho\sigma}\right); \quad (12.52)$$

что после умножения на $R_{\mu\nu}$ дает

$$R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right)\delta g^{\mu\nu} = \\ = \sqrt{-g}\, G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (12.53)$$

Отсюда для вариации I получаем выражение:

$$\delta \int R \sqrt{-g}\, d\xi = \int G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d\xi. \quad (12.54)$$

Таким образом, уравнения (12.4) являются уравнениями Эйлера-Лагранжа для принципа Гамильтона (12.43).

Наличие одновременно гравитационного и электромагнитного поля. До сих пор гравитационные поля рассматривались в отсутствии электромагнитных полей. При наличии электромагнитного поля уравнения комбинированного поля можно получить, заменяя $P^{\mu\nu}$ в уравнениях (12.3) выражениями (8.31).

В этом случае имеем:

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} - \frac{\varkappa}{c^6}\left(2\varphi_{\mu\rho}\varphi_{\nu}{}^{\rho}{}_{\cdot} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}\right) = 0, \\ \varphi^{\mu\rho}{}_{;\rho} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (12.55)$$

Эти уравнения поля являются уравнениями Эйлера-Лагранжа, соответствующими интегралу

$$I = \int\limits_D \left(R - \frac{\varkappa}{c^6}\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}\right)\sqrt{-g}\, d\xi, \qquad (12.56)$$

который варьируется по 14 переменным $g^{\mu\nu}$ и φ_μ.

Уравнения движения заряженных точечных масс имеют вид

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} + \left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\} U^\rho U^\sigma - \frac{e}{mc^3}\varphi^{\mu\rho}U_\rho = 0. \qquad (12.57)$$

Законы сохранения в общей теории относительности[1]. Тензор энергии-импульса $P^{\mu\nu}$ представляет в уравнениях (12.3) плотности энергии и импульса и напряжения среды, исключая энергию, импульс и напряжения гравитационного поля. Он удовлетворяет уравнению непрерывности

$$P^{\mu\rho}{}_{;\rho} = 0. \qquad (12.58)$$

Эти уравнения ковариантны, они преобразуются как компоненты вектора. Именно поэтому они не могут быть названы законами сохранения в обычном смысле слова. В обычном законе сохранения изменение во времени некоторого пространственного трехмерного интеграла определяется поверхностным интегралом другого выражения, представляющим поток через поверхность, ограничивающую трехмерный

---

[1]) В этом разделе рассматривается понятие переноса энергии в общей теории относительности. Поскольку понятия энергии и импульса не играют существенной роли в общей теории относительности, читатель может опустить этот раздел без ущерба для понимания последующих глав.

объем. Другими словами, истинный закон сохранения имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V P d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3\right) = -\oint_S (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}),$$

или после применения к поверхностному интегралу теоремы Гаусса:

$$\int_V \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{F}\right] d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = 0, \quad P_{,4} + F^s{}_{,s} = 0. \qquad (12.59)$$

В общей теории относительности закон сохранения электрического заряда имеет такую форму:

$$(\sqrt{-g}\,\varphi^{\mu\rho})_{,\rho\mu} = 0, \qquad (12.60)$$

а выражения $\int_V (\sqrt{-g}\,\varphi^{4\rho})_{,\rho} d\xi$, $\quad \int_S (\sqrt{-g}\,\varphi^{1\rho})_{,\rho} d\xi^2 d\xi^3$

и т. д. представляют собой заряд, содержащийся в объеме V, ток через поверхность, параллельную плоскости (X^2, X^3), и т. д.

В то время как ковариантная дивергенция вектора эквивалентна обычной дивергенции векторной плотности, ковариантная дивергенция симметричного тензора второго ранга не эквивалентна обычной дивергенции соответствующей тензорной плотности. Однако можно найти четыре выражения, удовлетворяющие четырем обычным законам сохранения и не являющихся при этом компонентами тензора.

Уравнения

$$\left.\begin{aligned} 0 = \sqrt{-g}\,P_{\mu\cdot;\nu}^{\cdot\nu} = \sqrt{-g}\Big(P_{\mu\cdot,\nu}^{\cdot\nu} + \begin{Bmatrix}\nu\\ \rho\nu\end{Bmatrix} P_{\mu\cdot}^{\cdot\rho} - \\ - \begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix} P_{\rho\cdot}^{\cdot\nu}\Big) = (\sqrt{-g}\,P_{\mu\cdot}^{\cdot\nu})_{,\nu} - \sqrt{-g}\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix} P_{\rho\cdot}^{\cdot\nu}\end{aligned}\right\} \qquad (12.61)$$

без последнего члена имеют вид четырех законов сохранения. Покажем теперь, что последний член $\left(-\sqrt{-g}\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix} P_{\rho\cdot}^{\cdot\nu}\right)$ может быть представлен в виде обычной дивергенции.

Прежде всего, в силу уравнений поля (12.3), $P_{\rho}^{\cdot\nu}$ можно заменить через $-\frac{1}{a}G_{\rho}^{\cdot\nu}$. Далее рассмотрим выражение $\frac{1}{a}\sqrt{-g}\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} G_{\rho}^{\cdot\nu}$, содержащее только $g_{\mu\nu}$ и его производные. Заменяя символ Кристоффеля производными метрического тензора, получим:

$$\sqrt{-g}\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} G_{\rho}^{\cdot\nu} = \sqrt{-g}\,[\mu\nu, \rho]\, G^{\rho\nu} = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\nu\rho,\,\mu} G^{\rho\nu}. \qquad (12.62)$$

Для доказательства того, что последнее выражение есть обычная дивергенция 16 величин, используем тот факт, что выражения $\sqrt{-g}\,G_{\mu\nu}$ являются левыми частями уравнений Эйлера-Лагранжа вариационного принципа.

Сперва покажем, что существует вариационный интеграл, который содержит только первые производные метрического тензора и приводит к тем же уравнениям Эйлера-Лагранжа, что и интеграл (12.43).

Прибавление к подинтегральной функции $R\sqrt{-g}$ (обычной) дивергенции ведет к тому, что к интегралу (12.43) прибавляется выражение, которое с помощью теоремы Гаусса может быть записано в виде поверхностного интеграла. При таком варьировании подинтегрального выражения, когда вариации переменных и их производных исчезают на границах, добавочный член, обусловленный дивергенцией, остается неизменным. Поэтому уравнения Эйлера-Лагранжа не меняются при прибавлении дивергенции к $(\sqrt{-g}R)$ в уравнении (12.43).

Рассмотрим теперь интеграл (12.45). Первые два члена могут быть преобразованы следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\}_{,\nu} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}_{,\rho}\right)\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} = \\ &= \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\}\right)_{,\nu} - \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}\right)_{,\rho} - \\ &- \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right)_{,\nu}\left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} + \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right)_{,\rho}\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.63)$$

Первые два члена правой части имеют вид дивергенции. В силу сказанного выше уравнения Эйлера-Лагранжа останутся неизменными, если вычесть эти члены из $(\sqrt{-g}\,R)$. В оставшихся членах заменим всюду производные метрического тензора символами Кристоффеля согласно формуле

$$g_{\mu\nu,\rho} \equiv [\mu\rho,\nu] + [\nu\rho,\mu]. \tag{12.64}$$

Комбинируя их с остальными членами подинтегрального выражения (12.45), получим уравнение:

$$\left.\begin{aligned} &\delta I = \delta \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = \int \mathfrak{H} d\xi, \\ &\mathfrak{H} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\left(\begin{Bmatrix}\sigma\\ \rho\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\rho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho\\ \nu\sigma\end{Bmatrix}\right). \end{aligned}\right\} \tag{12.65}$$

Функция $\mathfrak{H}$ не является, конечно, скалярной плотностью, а $\mathbf{W}$ не инвариантно относительно преобразования координат. Однако уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие интегралу $\mathbf{W}$, ковариантны. Рассматривая $\mathfrak{H}$ как функцию $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}{}_{,\rho}$, для $G_{\mu\nu}$ получим:

$$\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}} - \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\rho}}\right)_{,\rho} \tag{12.66}$$

Умножая это уравнение на $g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}$, найдем:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} &= -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} - \\ -\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\right)_{,\rho} \cdot g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} &= \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} - \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\rho}} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}\right)_{\rho} + \\ &+ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\rho}}\, g^{\mu\nu}{}_{,\rho\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{12.67}$$

Сумма первого и последнего членов справа представляет собой производную $\mathfrak{H}$ по ξ^{α}. $\mathfrak{H}$ зависит от координат не непосредственно, а через $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}{}_{,\rho}$. Поэтому имеем

$$\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = \left(\delta^\rho_\alpha \mathfrak{H} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}} \cdot g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} \right)_{,\rho} \equiv$$

$$\equiv -(\sqrt{-g}\, \mathrm{t}^\rho_\alpha)_{,\rho}. \qquad (12.68)$$

На этом доказательство, в сущности, заканчивается. Действительно, выражение слева равно

$$\sqrt{-g} G_{\mu\nu} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = -\sqrt{-g}\, G^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha}, \qquad (12.69)$$

откуда находим, что уравнения (12.61) приводятся к виду

$$0 = \left[\sqrt{-g}\left(P_{\mu\cdot}^{\cdot\nu} + \frac{1}{2\alpha}\, \mathrm{t}^\nu_\mu\right)\right]_{,\nu} = \left[\sqrt{-g}\left(P_{\mu\cdot}^{\cdot\nu} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{16\pi\varkappa}\, \mathrm{t}^\nu_\mu\right)\right]_{,\nu}. \qquad (12.70)$$

Выражения

$$\mathrm{T}^\nu_\mu = P_{\mu\cdot}^{\cdot\nu} + \frac{1}{16\pi\varkappa}\, \mathrm{t}^\nu_\mu \qquad (12.71)$$

не являются компонентами тензора. Однако они все же называются компонентами „псевдотензора"[1]) энергии-импульса общей теории относительности, так как удовлетворяют четырем законам сохранения (12.70)

Компоненты энергии-импульса гравитационного поля t^ν_μ содержат только первые производные от $g_{\mu\nu}$; можно сказать, что они являются алгебраическими функциями гравитационных „напряженностей поля". Для общей теории относительности характерно, что величины такого типа не могут быть тензорами. Всегда возможно найти такую систему отсчета, в которой «напряженность гравитационного поля" в данной точке

---

[1]) Величины t^ν_μ ведут себя как тензор относительно линейных преобразований. Во избежание путаницы, следует помнить, что в русской литературе термин „псевдотензор" часто применяется также взамен термина „тензорная плотность"; однако между T^ν_μ и тензорной плотностью нет ничего общего. (*Прим. ред.*)

исчезает, и тогда компоненты энергии-импульса t_μ^ν в этой точке также обращаются в нуль.

Обратно, в плоском пространстве можно выбрать систему отсчета, в которой наблюдаются „силы инерции“. По принципу эквивалентности в данной точке „силы инерции“ нельзя отличить от гравитационных полей; поэтому компоненты t_μ^ν отличны от нуля в неинерциальной системе координат.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*

Уравнения поля общей теории относительности нелинейны. Пока мы нашли решения только приближенных линейных уравнений. В этой главе будут рассмотрены случаи, в которых возможно решение точных уравнений в конечном виде.

Общего метода нахождения точных решений уравнений поля не существует. Однако точное решение возможно в тех немногих случаях, когда число переменных можно уменьшить, используя условия симметрии.

Решение Шварцшильда. Рассмотрим сначала решение, соответствующее покоящейся точечной массе. Предположим, что решение сферически симметрично и что ни одна из переменных не зависит от ξ^4. Если ввести переменную

$$r=\sqrt{\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2}}, \tag{13.1}$$

наиболее общим видом линейного элемента с указанными свойствами будет

$$\left.\begin{aligned} d\tau^2 &= A(r)d\xi^{4^2}+2B(r)\chi_s d\xi^4 d\xi^s - C(r)\,\delta_{rs}\,d\xi^r d\xi^s + \\ &\quad + D(r)\,\chi_r\chi_s d\xi^r d\xi^s, \\ \chi_r &= \frac{\xi^r}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

где A, B, C и D являются функциями от r. Этот линейный элемент не меняет своего вида при повороте пространственных координат ξ^s вокруг оси, проходящей через начало координат.

Подходящим преобразованием координат можно исключить две из четырех неизвестных функций A, B, C и D, не нарушая при этом статического характера задачи и сферической симметрии линейного элемента. Производя сначала преобразование координат

$$\xi^{*4}=\xi^4+f(r), \quad \xi^{*s}=\xi^s, \tag{13.3}$$

можно исключить члены, содержащие произведения $d\xi^s$ и $d\xi^4$. Компоненты g_{4s} преобразуются при этом согласно уравнению

$$\overset{*}{g}_{4s}=g_{44}\frac{\partial\xi^4}{\partial\xi^{*s}}+g_{4s}$$

или

$$B^*=B-\frac{df}{dr}\cdot A. \tag{13.4}$$

Выбирая f так, чтобы оно удовлетворяло уравнению

$$\frac{df}{dr}=\frac{B}{A}, \tag{13.5}$$

можно исключить член, содержащий B.

Рассмотрим далее метрику с компонентами

$$\left.\begin{aligned} &g_{44}=A, \quad g_{4s}=0, \\ &g_{rs}=-C\delta_{rs}+D\chi_r\chi_s. \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

Преобразуя пространственные координаты следующим образом

$$\left.\begin{aligned} &\xi^{*s}=g(r)\,\xi^s, \\ &\xi^s=\psi(r^*)\,\xi^{*s}, \quad r=\psi\cdot r^*, \quad \chi_s^*=\chi_s, \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

получим новую систему координат, в которой метрика сохраняет прежний вид (13.6), но где функция C — постоянная и равна единице. Компоненты g_{rs} преобразуются по закону

$$
\left.\begin{aligned}
\overset{*}{g}_{rs} &= \frac{\partial\xi^i}{\partial\xi^{*r}}\frac{\partial\xi^k}{\partial\xi^{*s}}\, g_{ik} = \\
&= \left(\psi\delta^i_r + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\chi_i\chi_r\right)\left(\psi\delta^k_s + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\chi_k\chi_s\right)\times \\
&\qquad \times\left(-C\delta_{ik} + D\chi_i\chi_k\right) = \\
&= -\psi^2 C\delta_{rs} + \left[\left(\psi + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\right)^2 D - \right. \\
&\left. - r^*\frac{d\psi}{dr^*}\times\left(2\psi + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\right)C\right]\chi_r\chi_s.
\end{aligned}\right\} \qquad (13.8)
$$

В полученной системе координат C будет равно единице, если ψ в (13.7) выбрать следующим образом:

$$
\psi = C^{-1/2}. \qquad (13.9)
$$

Остаются только две неизвестные функции A и D. Вместо них введем две другие функции от r, функции — μ и ν, с помощью которых решение уравнений поля значительно упрощается. Новые функции зададим уравнениями:

$$
\left.\begin{aligned}
& g_{44} = A = e^{\mu}, \\
& g_{4s} = 0, \\
& g_{rs} = -\delta_{rs} + D\chi_r\chi_s = -\delta_{rs} + (1 - e^{\nu})\chi_r\chi_s, \\
& \qquad\qquad \nu = \log(1 - D).
\end{aligned}\right\} \qquad (13.10)
$$

Для компонент контравариантного метрического тензора получим:

$$
\left.\begin{aligned}
& g^{44} = e^{-\mu}, \\
& g^{4s} = 0, \\
& g^{rs} = -\delta_{rs} + (1 - e^{-\nu})\chi_r\chi_s
\end{aligned}\right\} \qquad (13.11)
$$

Найдем теперь символы Кристоффеля и компоненты тензора $G_{\mu\nu}$. Для символов Кристоффеля первого рода имеем

$$\left.\begin{aligned}
&[44,\ s] = -\frac{1}{2}\mu' e^{\mu}\chi_s,\\
&[4s,\ 4] = \frac{1}{2}\mu' e^{\mu}\chi_s,\\
&[rs,\ \ t] = \chi_t\left[\frac{1-e^{\nu}}{r}(\delta_{rs}-\chi_r\chi_s) - \frac{1}{2}\nu' e^{\nu}\chi_r\chi_s\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (13.12)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по r. Компоненты, в которые индекс 4 входит нечетное число раз, равны нулю. Символы Кристоффеля второго рода имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{ {s \atop 44} \right\} = \frac{1}{2}\mu' e^{\mu-\nu}\chi_s,\\
&\left\{ {4 \atop 4s} \right\} = \frac{1}{2}\mu'\chi_s\\
&\left\{ {t \atop rs} \right\} = \chi_t\left[\frac{1-e^{-\nu}}{r}(\delta_{rs}-\chi_r\chi_s) + \frac{1}{2}\nu'\chi_r\chi_s\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (13.13)$$

Как и в предыдущем случае, компоненты, в которые индекс 4 входит нечетное число раз, обращаются в нуль.

Вычислим компоненты свернутого тензора кривизны $R_{\mu\nu}$:

$$\left.\begin{aligned}
&R_{44} = -e^{\mu-\nu}\left\{\frac{1}{2}\mu'' + \frac{1}{r}\mu' + \frac{1}{4}\mu'(\mu'-\nu')\right\},\\
&R_{4s} = 0,\\
&R_{rs} = \left\{\frac{1}{2}\mu'' - \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{4}\mu'(\mu'-\nu')\right\}\chi_r\chi_s +\\
&+\left\{\frac{1}{r^2} - e^{-\nu}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}(\mu'-\nu')\right]\right\}(\chi_r\chi_s - \delta_{rs}),
\end{aligned}\right\} \qquad (13.14)$$

тогда компоненты тензора $G_{\mu\nu}$ будут равны

$$\left.\begin{aligned} G_{44} &= e^{\mu}\left\{e^{-\nu}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\nu'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}\right\}, \\ G_{4s} &= 0, \\ G_{rs} &= -\left\{\frac{\mu'}{r}+\frac{1-e^{\nu}}{r^2}\right\}\chi_r\chi_s+\left\{\frac{1}{2}\mu''+\right. \\ &\left.+\frac{1}{4}\mu'(\mu'-\nu')+\frac{1}{2r}(\mu'-\nu')\right\}e^{-\nu}(\chi_r\chi_s-\delta_{rs}) \end{aligned}\right\} \quad (13.15)$$

Рассмотрим сначала гравитационное поле в пустоте, где удовлетворяются уравнения (12.4). Нужно решить следующие три уравнения для двух неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} \nu'-\frac{1}{r}(1-e^{\nu}) &= 0, \\ \mu'+\frac{1}{r}(1-e^{\nu}) &= 0, \\ \mu''+\frac{1}{2}\mu'(\mu'-\nu')+\frac{1}{r}(\mu'-\nu') &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (13.16)$$

Эти три уравнения не независимы, так как они должны удовлетворять свернутым тождествам Бьянки (11.46).

Из первого и второго уравнений видно, что сумма μ' и ν' равна нулю:

$$\mu'+\nu'=0. \quad (13.17)$$

Решим первое уравнение относительно ν. Для этого введем величину x:

$$x=e^{-\nu}, \quad \nu=-\log x. \quad (13.18)$$

Тогда вместо первого уравнения (13.16) получим уравнение для x:

$$\frac{dx}{dr}+\frac{x-1}{r}=0,$$

решением которого будет

$$x = 1 - \frac{a}{r}, \quad \nu = -\log\left(1 - \frac{a}{r}\right),$$

$$D = -\frac{a}{r - a}, \tag{13.19}$$

где a — постоянная интегрирования. В силу (13.17) функция может быть представлена в виде:

$$\mu = \log\left(1 - \frac{a}{r}\right) + \beta, \tag{13.20}$$

где β — новая постоянная. Решения (13.19) и (13.20) удовлетворяют и третьему уравнению (13.16). Таким образом, для компонент метрического тензора находим:

$$\left.\begin{aligned} g_{44} &= e^{\beta}\left(1 - \frac{a}{r}\right), \\ g_{4s} &= 0, \\ g_{rs} &= -\delta_{rs} + \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{a}{r}}\right)\chi_r\chi_s = \\ &= -\delta_{rs} - \frac{a}{r - a}\chi_r\chi_s. \end{aligned}\right\} \tag{13.21}$$

При больших r компоненты метрического тензора должны стремиться к значениям $\varepsilon_{\mu\nu}$ уравнения (12.7). Для этого необходимо положить β равной нулю. Оставшаяся постоянная a должна характеризовать массу частицы, образующей поле (13.21).

Согласно (12.13) ньютоновский потенциал, создаваемый точечной массой поля (13.21), равен

$$G = -\frac{1}{2}\frac{a}{r}. \tag{13.22}$$

С другой стороны, G связано с массой уравнением

$$G = -\frac{\varkappa m}{r}, \tag{13.23}$$

откуда находим связь постоянной a с массой m:

$$a = 2\varkappa m. \tag{13.24}$$

Гравитационное поле точечной массы поэтому дается выражениями

$$\left.\begin{aligned} g_{44} &= 1 - \frac{2\varkappa m}{r}, \\ g_{4s} &= 0, \\ g_{rs} &= -\delta_{rs} - \frac{2\varkappa m}{r - 2\varkappa m}\chi_r\chi_s. \end{aligned}\right\} \tag{13.25}$$

Это решение было получено Шварцшильдом[1]).

Решение Шварцшильда замечательно тем, что оно представляет собой единственное статическое сферически симметричное решение уравнений поля в пустоте, переходящее в плоскую метрику на бесконечности. Остальные решения уравнений поля в пустоте, обладающие теми же свойствами, получаются из решения Шварцшильда путем преобразования координат. Более того, Биркгоффом[2]) было показано, что все сферически симметричные решения уравнений поля в пустоте, удовлетворяющие граничным условиям на бесконечности, эквивалентны полю Шварцшильда, т. е. что их зависимость от времени может быть исключена подходящим преобразованием координат.

Пусть ограниченная область пространства заполнена материей, создающей сферически симметричную метрику. Тогда согласно сказанному выше гравитационное поле вне области, занятой материей, должно быть полем Шварцшильда. Создающая поле материя может даже пульсировать (сферически симметрично), не меняя поля вне ее. При этом, конечно, предполагается, что нет потока материи или электромагнитного излучения из области, занятой материей, наружу.

Особенность решения Шварцшильда. Решение (13.23) классических уравнений поля (10.7) имеет особую точку $r = 0$. Поле Шварцшильда имеет аналогичную особенность

---

[1]) Berl. Ber., 1916, p. 189.

[2]) Birkhoff, Relativity and Modern Physics, Harvard University Press, 1923, p. 253.

в той же точке. Кроме того, оно имеет сферическую поверхность особых точек $r=2\varkappa m$. На этой поверхности компонента g_{44} равна нулю, а некоторые из пространственных компонент обращаются в бесконечность.

Робертсон показал, что если бы пробное тело двигалось в поле Шварцшильда к центру, собственное время, необходимое для пересечения „особенности Шварцшильда", было бы конечно, хотя координатное время при этом обращается в бесконечность. Отсюда он заключил, что, по крайней мере частично, особый характер поверхности $r=2\varkappa m$ обусловлен выбором системы координат.

В действительности, масса никогда не может так сконцентрироваться, чтобы особая поверхность Шварцшильда оказалась в пустоте. Эйнштейн исследовал поле системы многих точечных масс, каждая из которых движется под действием поля всей системы по окружности $r=\text{const.}$[1]). Если предположить, что оси этих окружностей ориентированы беспорядочно, система в целом будет сферически симметрична. Целью исследования было определить, могут ли частицы сконцентрироваться столь близко от центра, чтобы в полном поле обнаруживалась особенность Шварцшильда. Исследование показало, что еще перед тем, как достигается критическая концентрация частиц, некоторые (наружные) частицы начинают двигаться со скоростью света, т. е. вдоль нулевой мировой линии. Поэтому невозможно так сконцентрировать частицы системы, чтобы в поле возникла особенность. (Особенности, обусловленные каждой отдельной точечной массой, при этом, конечно, не рассматриваются.)

При таком подходе Эйнштейну не пришлось рассматривать термодинамических вопросов или вводить давление, так как частицы его системы не испытывают соударений, а траектории их точно известны. В этом отношении система Эйнштейна имеет свойства, не встречающиеся в природе. Тем не менее, естественно предположить, что

---

[1]) Annals of Mathematics, **40**, 922 (1939).

результаты Эйнштейна могут быть обобщены и на такие системы частиц, в которых движение каждой частицы не ограничивается искусственно, как в разобранном примере.

Поле электрически заряженной точечной массы. Перейдем теперь к рассмотрению электрически заряженных точечных масс. Электростатическое поле характеризуется скалярным потенциалом φ_4, который является функцией r. Ковариантные компоненты электромагнитного поля равны

$$\varphi_{4s} = \varphi_{4,s} = \varphi_4' \chi_s, \quad \varphi_{rs} = 0. \tag{13.26}$$

Компонентами электромагнитного тензора энергии-импульса будут

$$\left.\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4} g_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma} - \varphi_{\mu\rho}\varphi_{\nu.}^{\ \rho}\right], \\ M_{44} &= -\frac{1}{8\pi}\varphi_{4s}\varphi_{4r}g^{sr} = \frac{1}{8\pi}(\varphi_4')^2 e^{-\nu}, \\ M_{4s} &= 0, \\ M_{rs} &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2} g_{rs}\varphi_{4t}\varphi^{4t} - \varphi_{r4}\varphi_{s.}^{\ 4}\right] = \\ &= \frac{1}{8\pi}(\varphi_4')^2 e^{-(\mu+\nu)}\left[-e^{\nu}\chi_r\chi_s + (\delta_{rs} - \chi_r\chi_s)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{13.27}$$

Комбинируя уравнения (12.3), (12.30) и (13.5), получим:

$$\left.\begin{aligned} & e^{\mu}\left\{e^{-\nu}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\right\} + \varkappa e^{-\nu}(\varphi_4')^2 = 0, \\ & -\left(\frac{\mu'}{r} + \frac{1 - e^{\nu}}{r^2}\right) - \varkappa(\varphi_4')^2 e^{-\mu} = 0, \\ & -\left\{\frac{1}{2}\mu'' + \frac{1}{2r}(\mu' - \nu') + \frac{1}{4}\mu'(\mu' - \nu')\right\}e^{-\nu} + \\ & \qquad + \varkappa(\varphi_4')^2 e^{-(\mu+\nu)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.28}$$

Кроме того, имеем электромагнитное уравнение

$$\varphi^{4\rho}_{\ ;\rho} = 0.$$

Это соотношение можно представить в виде

$$\varphi^{4s}{}_{,s} + \varphi^{4m}\left\{ {\rho \atop m\rho} \right\} = 0.$$

Для φ^{4s} получим

$$\varphi^{4s} = g^{44} g^{rs} \varphi_{4s} = - e^{-(\mu+\nu)} \varphi_4' \chi_r,$$

откуда

$$[e^{-(\mu+\nu)} \varphi_4' \chi_s]_{,s} + \frac{1}{2} e^{-(\mu+\nu)} \varphi_4' (\mu' + \nu') = 0,$$

или

$$\varphi_4'' + \frac{2}{r} \varphi_4' - \frac{1}{2} (\mu' + \nu') \varphi_4' = 0. \qquad (13.29)$$

Первым интегралом этого последнего уравнения будет

$$r^2 e^{-\frac{1}{2}(\mu+\nu)} \varphi_4' = - \varepsilon, \qquad (13.30)$$

где постоянная интегрирования ε представляет собой заряд.

С помощью этого интеграла можно исключить φ_4' из уравнений поля (13.28). Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} e^{-\nu}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^4} = 0, \\ e^{-\nu}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\mu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^4} = 0, \\ -e^{-\nu}\left[\frac{1}{2}\mu'' + \frac{1}{2r}(\mu' - \nu') + \frac{1}{4}\mu'(\mu' - \nu')\right] + \\ + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^4} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13.31)$$

Далее, комбинация первых двух уравнений приводит к уравнению (13.17). Введением переменной x согласно уравнению (13.18) первое уравнение (13.31) переводится в дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dr} + \frac{x-1}{r} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^3} = 0, \qquad (13.32)$$

решением которого будет

$$x = 1 - \frac{2\varkappa m}{r} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^2}. \tag{13.33}$$

Метрический тензор имеет компоненты

$$\left.\begin{aligned} g_{44} &= 1 - \frac{2\varkappa m}{r} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^2}, \\ g_{4s} &= 0, \\ g_{rs} &= -\delta_{rs} + \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{2\varkappa m}{r} + \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^2}}\right)\chi_r\chi_s. \end{aligned}\right\} \tag{13.34}$$

Уравнение (13.30) принимает вид

$$\varphi_4' = \frac{-\varepsilon}{r^2 - 2m\varkappa r + \varkappa\varepsilon^2}, \tag{13.30a}$$

с решением

$$\varphi_4 = + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varkappa\varepsilon^2 - \varkappa^2 m^2}} \operatorname{arcctg}\left[\frac{r - \varkappa m}{\sqrt{\varkappa\varepsilon^2 - \varkappa^2 m^2}}\right]. \tag{13.35}$$

Решение с осевой симметрией. Вейлю и Леви-Чивита удалось найти статические решения, обладающие только осевой симметрией, но не сферической[1]). Если с самого начала предположить, что „статичность" означает как независимость $g_{\mu\nu}$ от ξ^4, так и обращение в нуль компонент g_{4s}, то можно показать, что метрический тензор с осевой симметрией может быть представлен в виде:

$$\left.\begin{aligned} &g_{44} = e^{\mu}, \quad g_{4s} = 0,\ g_{43} = 0, \\ &g_{33} = -e^{\nu-\mu},\ g_{3r} = 0, \\ &g_{rs} = e^{-\mu}\left[-\delta_{rs} + (1 - e^{-\nu})\,\chi_r\chi_s\right], \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} &r, s = 1,2 \ (\text{но не } 3) \\ &\chi_r = \frac{\xi^r}{\rho}, \\ &\rho^2 = \xi^{1^2} + \xi^{2^2}, \end{aligned}\right\} \tag{13.36}$$

---

1) Weyl, Annalen d. Physik, **54**, 117 (1917); **59**, 185 (1919). Bach and Weyl. Mathematische Zeitschrift, **13**, 142 (1921). Levi-Civita, Rend. Acc. dei Lincei, Several Notes (1918—1919).

где μ и ν — функции двух переменных,

$$\rho = \sqrt{\xi^{1^2} + \xi^{2^2}} \text{ и } z = \xi^3.$$

Тензор $G_{\mu\nu}$ имеет компоненты

$$\left.\begin{aligned}
G_{44} &= e^{2\mu-\nu}\left\{-\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}\right) + \right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]\right\},\\
G_{33} &= \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\nu}{\partial\rho} - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right],\\
G_{3s} &= \left\{-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\nu}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right\}\chi_s,\\
G_{rs} &= \left\{-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\nu}{\partial\rho} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\chi_r\chi_s + \\
&\quad + \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]\right\}e^{-\nu}(\delta_{rs} - \chi_r\chi_s)\\
G_{4s} &= 0, \quad G_{43} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (13.37)$$

В чисто гравитационном поле имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa_1 &\equiv \frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\mu}{\partial z^2} = 0,\\
\varkappa_2 &\equiv \frac{\partial\nu}{\partial\rho} - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right] = 0,\\
\varkappa_3 &\equiv \frac{\partial\nu}{\partial z} - \rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial z} = 0,\\
\varkappa_4 &\equiv \frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (13.38)$$

Из этих четырех уравнений два являются тождествами, именно, свернутыми тождествами Бьянки с индексами

3 и s ($s=1,2$). Можно убедиться, что последнее уравнение (13.38) вытекает из трех предыдущих:

$$\varkappa_4 \equiv \frac{\partial \varkappa_2}{\partial \rho} + \frac{\partial \varkappa_3}{\partial z} + \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \varkappa_1. \tag{13.39}$$

Первые три уравнения в свою очередь связаны соотношением

$$\frac{\partial \varkappa_2}{\partial z} - \frac{\partial \varkappa_3}{\partial \rho} \equiv \rho \frac{\partial \mu}{\partial z} \varkappa_1. \tag{13.40}$$

Две функции μ и ν должны обращаться в нуль на бесконечности. Далее, из уравнений (13.36) видно, что g_{rs} имеют особенность (т. е. неопределенны) на оси Ξ^3, если только $(1-e^{-\nu})$ не обращается на ней в нуль, т. е. если ν не равно нулю при $\rho=0$.

Первое уравнение (13.38), ($\varkappa_1=0$), является линейным однородным уравнением только для μ; кроме того, оно является уравнением Лапласа в цилиндрических координатах для функций, обладающих осевой симметрией. Известно, что решения уравнения Лапласа, не считая решения $\mu=0$, удовлетворяют граничным условиям на бесконечности только в том случае, если они имеют особенность в какой-либо точке, находящейся на конечном расстоянии от начала координат. Особенности вне оси Ξ^3 всегда представляют собой окружности, в то время как на оси Ξ^3 могут быть особенности точечного типа, вида $\sum\limits_i [\rho^2+(z-a_i)^2]^{-1/2}$ или n-е производные по z от таких „полюсов".

Однако не все эти решения совместимы с дифференциальными уравнениями для ν, $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$. Если уравнение $\varkappa_1=0$ удовлетворяется в некоторой односвязной области пространства ρ, z ($\rho \geqslant 0$), то в силу (13.40) уравнения для $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$ имеют решения. Но при наличии особенностей пространство ρ, z уже не будет односвязным.

Рассмотрим сначала особенности вне оси Ξ^3. Если выбрать решение μ уравнения $\varkappa_1=0$ с произвольной окружностью особых точек, интеграл по замкнутому контуру, окружающему такую особенность в плоскости ρ, z,

$$\left.\begin{aligned}&\oint\left(\frac{\partial\nu}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial\nu}{\partial z}dz\right)=\\&=\oint\left\{\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]d\rho+\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial z}dz\right\},\end{aligned}\right\}\qquad(13.41)$$

вообще говоря, не будет обращаться в нуль. Однако если интеграл (13.41) не исчезает, функция ν не будет однозначно определена вне особенности; иначе говоря, обращение в нуль интеграла (13.41) является необходимым условием существования решения.

Перейдем к рассмотрению особенностей на оси Ξ^3. Вне особенности $\frac{\partial\nu}{\partial z}$ равно нулю на оси Ξ^3, следовательно, если предположить, что ν обращается в нуль в некоторой точке на оси Ξ^3, оно будет равно нулю на всей оси Ξ^3, до особой точки. Сама особая точка должна быть такова, что должен обращаться в нуль интеграл от дифференциала

$$d\nu\equiv\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]d\rho+\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial z}dz,\qquad(13.42)$$

взятый по малой полуокружности около особенности от одной точки пересечения этой полуокружности с осью Ξ^3 до другой.

Рассмотрим типичную особенность на оси Ξ^3

$$\overset{(1)}{\mu}=(\rho^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}.\qquad(13.43)$$

Производные от $\overset{(1)}{\mu}$ равны

$$\frac{\partial\overset{(1)}{\mu}}{\partial\rho}=-\frac{\rho}{r^3},\quad\frac{\partial\overset{(1)}{\mu}}{\partial z}=-\frac{z}{r^3},\qquad r=\sqrt{\rho^2+z^2}.$$

Дифференциал (13.42) принимает вид:

$$d\nu=\left(\frac{\rho}{2}\;\frac{\rho^2-z^2}{r^6}\;d\rho+\frac{\rho^2z}{r^6}dz\right).\qquad(13.44)$$

Проведем интегрирование по малой полуокружности. Для этого введем угол φ.

$$\left.\begin{array}{ll} \rho = r\cos\varphi, & d\rho = -z\cdot d\varphi, \\ z = r\sin\varphi, & dz = \rho\cdot d\varphi, \end{array}\right\} r = \mathrm{const}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (13.44), получим:

$$d\nu = \frac{1}{2r^2}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi, \quad r = \mathrm{const}. \tag{13.45}$$

Интегрирование производим от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Имеем

$$[\nu]_{\varphi=-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{1}{2r^2}\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4r^2}[\sin^2\varphi]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 0. \tag{13.46}$$

Решение $\overset{(1)}{\mu}$ [уравнение (13.43)] совместимо с условиями регулярности для ν.

Рассмотрим теперь случай наличия двух особенностей. В одной особой точке решение с особенностью в другой точке можно разложить в степенной ряд по ρ^2 и z и предположить, что вблизи от начала координат μ имеет вид

$$\overset{(2)}{\mu} = \frac{a}{r} + \sum_{m,\,n} a_{m,\,n}\,\rho^{2m}z^n. \tag{13.47}$$

Перед тем как снова вычислять интеграл, заметим, что только некоторые коэфициенты разложения могут входить в интеграл по полуокружности. Значение интеграла, конечно, не зависит от размеров полуокружности, т. е. от r, до тех пор, пока эта окружность не охватывает никакой другой особой точки, кроме первоначальной ($r = 0$). Поэтому не должны рассматриваться все коэфициенты $a_{m,n}$, делающие значение интеграла зависящим от r. Кроме того, регулярная часть $\overset{(2)}{\mu}$ сама по себе не может ничего прибавить к неисчезающему интегралу, поэтому нужно рассматривать только перекрестные произведения сингулярной и регулярной частей $\overset{(2)}{\mu}$. Производные сингулярной части $\overset{(2)}{\mu}$ (при заданном φ) убывают как r^{-2}. Они умножаются на ρ, на дифференциалы координат (и ρ и эти дифференциалы возрастают, как r^{+1}) и на производные от регулярной части $\overset{(2)}{\mu}$. Поэтому для нас представляют интерес только те члены разложения, производные которых зависят только от φ, но не от r. Единственным таким членом будет $\rho^0 z^{+1}$. Заменим поэтому выражение (13.47) на

$$\overset{(2)}{\mu}=\frac{a}{r}+bz+\ldots \qquad (13.47\text{a})$$

Вычислим выражение

$$d\nu=-\rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z}(bz)\,d\rho+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{a}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z}(bz)\,dz+\ldots \qquad (13.48)$$

Только выписанные члены могут привести к неисчезающим значениям интеграла. Получим:

$$d\nu=\frac{ab}{r^3}\rho\,(z\,d\rho-\rho\,dz)=-ab\cos\varphi\,d\varphi=$$
$$=-ab\,d\,(\sin\varphi). \qquad (13.49)$$

Интеграл этого выражения в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ не равен нулю.

Мы нашли, что в окрестности одной из особых точек производная по z от регулярной части μ должна обращаться в нуль. Это исключает возможность одновременного существования нескольких особых точек на оси Ξ^3. Это выглядит так, как будто сами уравнения поля исключают движения точечных масс, не совместимые с уравнениями движения. В главе XV мы увидим, что это действительно так.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*

Как мы видели в первой части этой книги, существует много экспериментальных подтверждений того, что физические законы лорентц-ковариантны. Однако в пользу общей теории относительности до сих пор наиболее убедительными остаются теоретические аргументы. Резюмируем их, прежде чем обратиться к экспериментальным доказательствам общей теории относительности.

Только теория гравитации, ковариантная относительно общих преобразований координат, может объяснить принцип эквивалентности и сделать этот принцип своей неотъемлемой частью. Теория гравитации, из которой вытекает этот принцип, должна считаться более удовлетворительной, чем теории, хотя и совместимые с принципом эквивалентности, но органически с ним не связанные, т. е. для своего вывода не требующие его справедливости; такие теории с небольшими модификациями могут быть сохранены, если „гравитационную“ и „инертную“ массы считать различными независимыми величинами.

В настоящий момент общая теория относительности является наиболее совершенной из известных теорий поля. В следующей главе будет показано, что законы движения в общей теории относительности не независимы от уравнений поля, а полностью ими определяются.

Перейдем к экспериментальным подтверждениям общей теории относительности. Существуют три явления, в отношении которых общая теория относительности приводит к наблюдаемым эффектам. Все эти три явления наблюдаются на опыте; однако в двух из них величина эффекта лишь незначительно превышает пределы экспериментальных ошибок, так что количественное согласие эксперимента с теорией остается пока сомнительным.

Общая теория относительности объясняет движение перигелия орбиты Меркурия, которое было известно еще до создания новой теории. Кроме того, общая теория относительности правильно предсказала отклонение светового луча, проходящего близ поверхности Солнца, и красное смещение спектральных линий света, испускаемого звездами большой плотности („белыми карликами").

Движение перигелия Меркурия. Рассмотрим движение небольшого тела в поле Шварцшильда, создаваемом телом массы значительно большего размера. При этом удобно ввести полярные координаты, определяемые следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \xi^{*1} &= r = \sqrt{\xi^{1^2} + \xi^{2^2} + \xi^{3^2}}, \\ \xi^{*2} &= \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi^3}{\sqrt{\xi^{1^2} + \xi^{2^2}}}\right), \\ \xi^{*3} &= \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi^2}{\xi^1}\right), \\ \xi^{*4} &= \xi^4. \end{aligned}\right\} \tag{14.1}$$

В этих координатах метрический тензор имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} g_{44} &= 1 - \frac{2\varkappa m}{r}, \\ g_{11} &= -\frac{1}{1 - \frac{2\varkappa m}{r}}, \\ g_{22} &= -r^2, \\ g_{33} &= -r^2\cos^2\theta, \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

а все остальные его компоненты равны нулю.

Уравнениями движения малой частицы в этом поле Шварцшильда будут

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \left\{ {\mu \atop \rho\,\sigma} \right\} \frac{d\xi^\rho}{d\tau}\frac{d\xi^\sigma}{d\tau} = 0. \tag{14.3}$$

Вычислим символы Кристоффеля $\left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\}$. Если для краткости ввести обозначение

$$e^{\mu} = 1 - \frac{2\varkappa m}{r}, \tag{14.4}$$

для неисчезающих символов Кристоффеля получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{ {4 \atop 14} \right\} = \frac{1}{2}\mu', \quad \left\{ {1 \atop 44} \right\} = \frac{1}{2}e^{2\mu}\mu', \quad \left\{ {1 \atop 11} \right\} = -\frac{1}{2}\mu', \\
&\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -e^{\mu}r, \quad \left\{ {1 \atop 33} \right\} = -e^{\mu}r\cos^2\theta, \\
&\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ {2 \atop 33} \right\} = \cos\theta\sin\theta, \\
&\left\{ {3 \atop 13} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ {3 \atop 23} \right\} = -\operatorname{tg}\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

Если упростить нашу механическую задачу, предполагая, что движение происходит в плоскости $\theta = 0$, то уравнения движения получим в виде следующих дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2t}{d\tau^2} + \mu'\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} &= 0, \\
\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{1}{2}e^{2\mu}\mu'\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}\mu'\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - e^{\mu}r\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 &= 0, \\
\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{14.6}$$

Один из интегралов этих уравнений дает определение дифференциала собственного времени

$$e^{\mu}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - e^{-\mu}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 1. \tag{14.7}$$

Первое уравнение (14.6) имеет интеграл

$$e^{\mu}\frac{dt}{d\tau} = k. \tag{14.8}$$

Последнее уравнение (14.6) дает интеграл момента количества движения

$$r^2\frac{d\varphi}{d\tau}=h. \tag{14.9}$$

Интеграл (14.8) соответствует интегралу энергии. Три уравнения (14.7), (14.8) и (14.9) заменяют уравнения второго порядка (14.6). Наконец, с помощью уравнения (14.8) можно исключить координатное время t, в результате чего получаем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2-\frac{2\varkappa m}{r}&=k^2-1+2\varkappa mr\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2,\\ r^2\frac{d\varphi}{d\tau}&=h,\end{aligned}\right\} \tag{14.10}$$

где e^{μ} заменено его значением $1-\dfrac{2\varkappa m}{r}$. Отличие этих уравнений от классических уравнений движения тела в ньютоновском поле состоит в том, что последний член первого уравнения (14.10) отсутствует в нерелятивистских уравнениях и что дифференцирование производится по собственному времени, а не по координатному. Классическими интегралами энергии и момента количества движения будут

$$\left.\begin{aligned}\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2-\frac{2\varkappa m}{r}&=\frac{2E}{m'},\\ r^2\dot{\varphi}&=\frac{I}{m'},\end{aligned}\right\} \tag{14.11}$$

где m' — масса движущегося тела.

Уравнения (14.10) нельзя решить точно. Однако возможно найти такое приближенное решение, в котором первое приближение соответствует классической траектории тела, а второе приближение показывает отклонение решений релятивистских уравнений (14.10) от классических (14.11).

Умножим первое уравнение (14.10) на $\left(\dfrac{d\tau}{d\varphi}\right)^2$ и подставим значение этого множителя из второго уравнения. Тогда получим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = -(1-k^2)\frac{r^4}{h^2} + \frac{2\varkappa m}{h^2}r^3 - r^2 + 2\varkappa m r, \qquad (14.12)$$

которое после введения функции $u = \frac{1}{r}$ переходит в

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -\frac{1-k^2}{h^2} + \frac{2\varkappa m}{h^2}u - u^2 + 2\varkappa m u^3. \qquad (14.13)$$

Дифференцируя по φ, получим отсюда уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\varkappa m}{h^2}(1 + 3h^2u^2). \qquad (14.14)$$

Отличие этого релятивистского уравнения от соответствующего классического обусловлено вторым членом в круглых скобках, $3h^2u^2$. Согласно (14.9) этот член равен

$$3h^2u^2 = 3\left(r\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2; \qquad (14.15)$$

другими словами, он приблизительно пропорционален квадрату компоненты скорости, перпендикулярной радиусу-вектору. В „релятивистских единицах“ времени, в которых скорость света равна единице, скорость звезд, например, мала по сравнению с единицей. Релятивистский член в уравнении (14.14) является поэтому поправкой высшего порядка.

Решением уравнения

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + u_0 = \frac{\varkappa m}{h^2} \qquad (14.16)$$

будет

$$u_0 = \frac{\varkappa m}{h^2}\left[1 + \varepsilon\cos(\varphi - \omega)\right], \qquad (14.17)$$

где ε и ω — постоянные интегрирования. ε представляет собой эксцентриситет эллипса, а ω определяет положение перигелия.

Решения уравнений (14.14), которые апроксимируются эллипсами, являются периодическими. Уравнение (14.13) каждому значению u ставит в соответствие два значения $\frac{du}{d\varphi}$, отличающиеся только знаком. Решения будут периодическими, если правая часть уравнения (14.13) имеет два нуля в области положительных значений u и положительна между этими двумя нулями. В этом случае решение будет осциллировать между этими двумя нулями. Приближенное решение (14.17) имеет период 2π, т. е. представляется замкнутыми орбитами. Периоды точных решений уравнения (14.14) будут, однако, отличаться от 2π малой величиной.

Разложим периодические решения уравнения

$$u'' + u = a(1 + \lambda u^2) \tag{14.18}$$

в ряды Фурье

$$u = a_0 + a_1 \cos \rho\varphi + a_2 \cos 2\rho\varphi + \cdots \tag{14.19}$$

Если λ малая постоянная, решение может быть апроксимировано выражением

$$u_0 = a(1 - \varepsilon \cos \varphi). \tag{14.20}$$

Предположим поэтому, что a_0 в этом приближении равно a, а a_2 и другие коэфициенты, по крайней мере, порядка λ. Иначе говоря, выражение (14.19) мы заменяем рядом

$$u = a + \lambda\beta_0 + a\varepsilon \cos \rho\varphi + \lambda \sum_2^\infty \beta_\nu \cos \nu\rho\varphi. \tag{14.21}$$

Подставим это выражение в (14.18), пренебрегая членами второго и высшего порядков относительно λ. Для u'' получим

$$u'' = -\rho^2 \left[a\varepsilon \cos \rho\varphi + \lambda \sum_2^\infty \nu^2 \beta_\nu \cos \nu\rho\varphi \right].$$

Для λu^2 имеем

$$\lambda u^2 \sim \lambda a^2 [1 + 2\varepsilon \cos \rho\varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \rho\varphi] =$$
$$= \lambda a^2 \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\varepsilon \cos \rho\varphi + \frac{\varepsilon^2}{2} \cos 2\rho\varphi \right].$$

Уравнение (14.18) поэтому переходит в

$$\left.\begin{aligned} a+\lambda\beta_0+a\varepsilon(1-\rho^2)\cos\rho\varphi-\\ -\lambda\sum_2^\infty(\nu^2-1)\beta_\nu\cos\nu\rho\varphi\sim\\ \sim a\left[1+\lambda a^2\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}+2\varepsilon\cos\rho\varphi+\frac{\varepsilon^2}{2}\cos 2\rho\varphi\right]\right.. \end{aligned}\right\}\quad(14.18a)$$

Приравнивая постоянные члены и коэфициенты при $\cos\rho\varphi$ и при $\cos 2\rho\varphi$, получим соотношения

$$\left.\begin{aligned} \beta_0&=a^3\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right),\\ 1-\rho^2&=2\lambda a^2,\\ -3\beta_2&=+a^3\frac{\varepsilon^2}{2}. \end{aligned}\right\}\quad(14.22)$$

Нас интересует только второе соотношение, определяющее ρ. Легко видеть, что ρ мало отличается от единицы:

$$\rho=\sqrt{1-2\lambda a^2}\sim 1-\lambda a^2. \quad (14.23)$$

Подставляя для λ и a их значения, определяемые (14.14), найдем

$$\rho\sim 1-3\frac{\varkappa^2 m^2}{h^2}. \quad (14.24)$$

Угол между двумя последовательными перигелиями поэтому равен

$$\Phi\sim 2\pi\left(1+3\frac{\varkappa^2 m^2}{h^2}\right)=2\pi+6\pi\frac{\varkappa^2 m^2}{h^2}. \quad (14.25)$$

Смещение перигелия планетной орбиты на $6\pi\frac{\varkappa^2 m^2}{h^2}$ радиан за время полного оборота может быть наблюдаемо у Меркурия, для которого оно составляет 43" в столетие. Предсказываемое и наблюдаемое значения смещения хорошо согласуются в пределах экспериментальных ошибок астрономических наблюдений.

Специальная теория относительности также предсказывает прецессионный эффект при движении тела в поле с потенциалом $\frac{a}{r}$. Однако количественно она дает результат, отличный от полученного в общей теории относительности.

Чтобы убедиться в этом, возвратимся к рассмотренной в главе IX релятивистской трактовке атома водорода, данной Зоммерфельдом. Уравнения (9.27) соответствуют уравнениям (14.7), (14.8) и (14.9) настоящей главы. Их можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} mc^2\frac{dt}{d\tau} &= E+\frac{e^2}{r}, \\ r^2\frac{d\theta}{d\tau} &= h' \\ \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2\right] &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{14.26}$$

$\frac{dt}{d\tau}$ в последнем уравнении можно заменить его выражением из первого уравнения, что приводит к уравнению, не содержащему t:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2=c^2\left[\left(\frac{E+\frac{e^2}{r}}{mc^2}\right)^2-1\right]. \tag{14.27}$$

Умножая это уравнение на

$$\left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2=\frac{r^4}{h'^2},$$

получим:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=c^2\frac{r^4}{h'^2}\left[\left(\frac{E+\frac{e^2}{r}}{mc^2}\right)^2-1\right]-r^2. \tag{14.28}$$

Вводя опять новую функцию $u=\frac{1}{r}$, найдем дифференциальное уравнение для u:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{c^2}{h'^2}\left[\left(\frac{E+e^2u}{mc^2}\right)^2-1\right]-u^2. \tag{14.29}$$

Дифференцироваиие по θ приводит к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left[1-\frac{e^4}{m^2c^2h'^2}\right]u=\frac{e^2E}{m^2h'^2c^2}, \tag{14.30}$$

которое имеет следующие решения:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{e^2E}{m^2h'^2c^2}\left\{1+\varepsilon\cos\left[\sqrt{1-\frac{e^4}{m^2c^2h'^2}}(\theta-\omega)\right]\right\}\sim \\ &\sim\frac{e^2E}{m^2h'^2c^2}\left\{1+\varepsilon\cos\left[\left(1-\frac{e^4}{2m^2c^2h'^2}\right)(\theta-\omega)\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{14.31}$$

Отсюда получаем величину смещения перигелия за один период

$$\delta\omega\sim\frac{\pi e^4}{m^2c^2h'^2}. \tag{14.32}$$

Чтобы сравнить это выражение с (14.24), нужно заменить e^2 (коэфициент кулоновского взаимодействия) на $\varkappa mm'$ (коэфициент гравитационного взаимодействия в законе Ньютона). Далее, постоянную h' нужю положить равной $\frac{h}{c}$ [h — постоянная, фигурирующая в уравнении (14.24)], так как τ в уравнении (14.25) измеряется в метрических единицах. Таким образом, вместо (14.32) получаем

$$\delta\omega\sim\pi\frac{\varkappa^2m^2}{h^2}, \tag{14.32a}$$

т. е. смещение, в шесть раз меньшее, чем в общей теории относительности.

Отклонение света в шварцшильдовском поле. Световые лучи распространяются вдоль нулевых геодезических мировых линий. Эти линии уже не являются решениями, соответствующими вариационному принципу, так как для нулевых линий вариация подинтегрального выражения $\sqrt{g_{\iota\varkappa}\xi^{\iota\prime}\xi^{\varkappa\prime}}$ в (5.93) не является линейной функцией вариаций $\delta\xi^{\varkappa}$ и $\delta\xi^{\varkappa\prime}$. Однако эти нулевые линии таковы, что вектор их касательной имеет ковариантную производную в направлении самой касательной, равную нулю. Таким свойством обладают также и ненулевые геодезические линии, поэтому оно может быть использовано для общёго определения и нулевых и ненулевых геодезических линий. В плоской метрике и в лорентцовой системе координат нулевые геодезические линии являются „прямыми“ нулевыми линиями, т. е. ξ^1, ξ^2, ξ^3 являются линейными функциями ξ^4.

Для нулевых линий вектор касательной равен нулю, поэтому величина его не может быть нормирована. В связи с этим параметр τ, которым мы пользовались до сих пор, нужно заменить параметром s, остающимся до некоторой степени неопределенным. Тогда дифференциальные уравнения геодезических линий примут вид:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2}+\left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\}\frac{d\xi^\rho}{ds}\frac{d\xi^\sigma}{ds}=0,\quad g_{\rho\sigma}\frac{d\xi^\rho}{ds}\frac{d\xi^\sigma}{ds}=0. \tag{14.3a}$$

Если метрика соответствует полю Шварцшильда, эти уравнения совпадают по форме с уравнениями (14.6), с той только разницей, что τ всюду заменено на s. Первые интегралы (14.7), (14.8) и (14.9) сохраняют свой вид, только в (14.7) правая часть должна теперь равняться нулю, а не единице:

$$\left.\begin{aligned} e^{\mu}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2-e^{-\mu}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0,\\ e^{\mu}\frac{dt}{ds}=k,\\ r^2\frac{d\varphi}{ds}=h. \end{aligned}\right\} \tag{14.33}$$

Соединяя эти три уравнения в одно с помощью примененного выше метода, получим соотношение, связывающее r и φ:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\frac{k^2}{h^2}r^4-r^2\left(1-\frac{2\varkappa m}{r}\right). \tag{14.34}$$

Вводя снова переменную u, найдем:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\frac{k^2}{h^2}-u^2+2\varkappa m u^3. \tag{14.35}$$

Последний член справа учитывает влияние гравитационного поля на траекторию светового луча. Решениями уравнения

$$\left(\frac{du_0}{d\varphi}\right)^2=\frac{k^2}{h^2}-u_0^2$$

будут

$$u_0=\frac{1}{R}\cos(\varphi-\varphi_0),\quad R=\frac{h}{k}, \tag{14.36}$$

где R — расстояние светового луча от начала координат, а φ_0 — постоянная интегрирования.

Угловое расстояние между двумя нулями функции u_0 (т. е. угол между двумя асимптотами траектории светового луча) равно π. Пусть $u(\varphi)$ является решением уравнения (14.35). Тогда нас интересует отклонение углового расстояния между двумя нулями $u(\varphi)$ от π. Оно равно удвоенному отклонению от $\frac{\pi}{2}$ углового расстояния между максимумом u, $\bar{u}$, и ближайшим к $\frac{\pi}{2}$ нулем. $\bar{u}$ определяется из уравнения

$$0=\frac{\varkappa^2}{h^2}-\bar{u}^2+2\varkappa m\bar{u}^3. \tag{14.37}$$

Вычитая это уравнение из (14.35), получим:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=(\bar{u}^2-u^2)-2\varkappa m(\bar{u}^3-u^3), \tag{14.38}$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{du}=[(\bar{u}^2-u^2)-2\varkappa m(\bar{u}^3-u^3)]^{-1/2} \tag{14.39}$$

Угловое расстояние между максимумом u и ближайшим нулем равно интегралу правой части (14.39), взятому от $u=0$ до $u=\bar{u}$. Этот интеграл не может быть вычислен в замкнутом виде. Однако нам известно, что такой же интеграл от правой части уравнения

$$\frac{d\varphi}{du_0}=(\bar{u}_0^2-u_0^2)^{-1/2} \tag{14.40}$$

равен $\frac{\pi}{2}$. Отклонение первого интеграла от $\frac{\pi}{2}$ поэтому равно

$$\frac{1}{2}\delta\varphi = \int\limits_{u=0}^{\bar{u}} \left\{ \left[(\bar{u}^2 - u^2) - 2\varkappa m\,(\bar{u}^3 - u^3) \right]^{-1/2} - \right.$$

$$\left. - \bar{u}^2 - u^2)^{-1/2} \right\} du. \qquad (14.41)$$

Так как мы считаем, что релятивистский член (зависящий от m) мал в сравнении с классическим, выражение $[f(x+\varepsilon) - f(x)]$ можно заменить через $\varepsilon f'(x)$. В результате получим интеграл

$$\frac{1}{2}\delta\varphi \sim \int\limits_{u=0}^{\bar{u}} \frac{\varkappa m\,(\bar{u}^3 - u^3)}{(\bar{u}^2 - u^2)^{3/2}}\,du, \qquad (14.42)$$

вычисление которого дает

$$\left.\begin{aligned}
&\underline{\int\limits_{u=0}^{\bar{u}} \frac{\varkappa m\,(\bar{u}^3 - u^3)}{(\bar{u}^2 - u^2)^{3/2}}\,du} = \varkappa m\bar{u} \int\limits_{x=0}^{1} \frac{1 - x^3}{(1 - x^2)^{3/2}}\,dx = \\
&= \varkappa m\bar{u} \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1 - \sin^3\theta}{\cos^3\theta}\,d(\sin\theta) = \varkappa m\bar{u} \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1 - \sin^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \\
&= \varkappa m\bar{u} \left[\operatorname{tg}\theta - \cos\theta - \cos^{-1}\theta \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = \underline{2\varkappa m\bar{u}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.43)$$

Поэтому полное отклонение от π углового расстояния между двумя последовательными нулями функции u равно

$$\delta\varphi \sim 4\varkappa m\bar{u} \sim \frac{4\varkappa m}{R}. \qquad (14.44)$$

Отклонение светового луча, проходящего около тела большой массы, может наблюдаться во время затмения Солнца, когда становятся видимыми звезды, находящиеся в непосредственной близости от его диска. Величина отклонения, даваемая теорией, не превышает 1,75", что лишь незначительно выходит за пределы экспериментальных ошибок. Поэтому количественное согласие теории с экспериментальными данными не может иметь особого значения.

Гравитационное смещение спектральных линий. Неоднородность окружающего гравитационного поля не сказывается на внутренних силах изолированного атома. Частота фотона, испускаемого таким атомом при переходе из одного квантового состояния в другое, *измеренная в единицах собственного времени атома*, также не будет зависеть от окружающего гравитационного поля. Рассмотрим атомы, образующие внешний (газообразный) слой раскаленной звезды. Атомы, излучающие соответствующие им спектральные линии, движутся в гравитационном поле звезды, причем их скорости распределены беспорядочно. Средняя частота излучения соответствует излучению атома, покоящегося в данный момент относительно звезды.

Гравитационное поле звезды описывается в системе координат, в которой единицы координатного времени и собственного времени не совпадают. Собственная частота колебательного процесса в атоме равна числу колебаний в единицу собственного времени,

$$\nu_0 = \frac{dN}{d\tau}, \qquad (14.45)$$

а координатная частота — числу колебаний в единицу координатного времени,

$$\nu = \frac{dN}{d\xi^4}. \qquad (14.46)$$

Обе эти частоты связаны между собой соотношением

$$\frac{dN}{d\xi^4} = \frac{dN}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\xi^4} = \frac{dN}{d\tau} \sqrt{g_{\iota\varkappa} \frac{d\xi^\iota}{d\xi^4} \frac{d\xi^\varkappa}{d\xi^4}}. \qquad (14.47)$$

В системе координат, в которой звезда покоится, а средняя скорость атомов внешнего слоя равна нулю, выражение (14.47) для средней частоты переходит в

$$\nu = \sqrt{g_{44}}\,\nu_0. \qquad (14.48)$$

Это обусловлено тем, что три дифференциальных выражения $\frac{d\xi^s}{d\xi^4}$ обращаются в иуль.

Координатная частота ν — это частота, измеряемая наблюдателем, покоящимся относительно звезды и находящимся на столь большом расстоянии от нее, что в месте его нахождения g_{44} равно единице. Благодаря статическому характеру поля Шварцшильда координатное время, необходимое для прохождения светового сигнала от поверхности звезды до наблюдателя, постоянно. Поэтому наблюдатель будет получать периодические сигналы с той же координатной частотой, с которой они были излучены с поверхности звезды.

Если радиус звезды равен R, а масса m, значение g_{44} на поверхности звезды равно $\left(1-2\frac{\varkappa m}{R}\right)$, и уравнение (14.48) принимает вид

$$\nu=\sqrt{1-2\frac{\varkappa m}{R}}\,\nu_0\sim\left(1-\frac{\varkappa m}{R}\right)\nu_0. \tag{14.49}$$

„Гравитационное смещение" спектральных линий поэтому будет определяться уравнением

$$\delta\nu\sim-\frac{\varkappa m}{R}\nu_0. \tag{14.50}$$

Для Солнца это смещение едва заметно, и, повидимому, согласуется с (14.47). Но для спутника Сириуса, который является чрезвычайно плотной звездой („белым карликом"), красное смещение примерно в 30 раз больше, чем для Солнца. И в этом случае согласие теории и эксперимента удовлетворительное.

Глава XV

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*

Законы сил в классической механике и электродинамике. Ньютоновская физика основывается на движении точечных масс. Сила действующая на данную точечную массу, является результирующей сил, с которыми действуют на рассматриваемую точечную массу все остальные точечные массы в мире. Эта сила однозначно определяется положениями всех этих масс и остается конечной, пока ни одна из них не совпадает с рассматриваемой точечной массой.

Развитие электродинамики показало, что действующая на тело сила определяется не столь просто, как полагал Ньютон. Действие одного заряда на другой зависит не только от расстояния между ними но и от их относительного движения. С изменением скорости одного из зарядов меняется сила, с которой он действует на другой заряд. Это изменение силы не происходит, однако, мгновенно, так как возмущение электромагнитного поля распространяется с конечной скоростью, равной скорости света c. Поэтому сила, действующая на заряженную точечную массу, определяется не положениями всех остальных зарядов и даже не их положениями и скоростями, а электромагнитным полем в непосредственной окрестности рассматриваемой частицы.

Это электромагнитное поле невозможно разложить на составляющие поля, каждое из которых соответствовало бы действию одной из частиц, так как само поле не определяется однозначно движениями зарядов. Правда, поле определится однозначно положениями и скоростями зарядов, если на него наложить такие граничные и начальные условия, которые исключают волны, идущие к особой точке (сходящиеся волны). При этом оставляются только волны, исходящие из особой точки (расходящиеся волны), хотя и те и другие формально являются решениями уравнений Максвелла. Однако неизвестно, соответствуют ли эти условия действительности, т. е. выполняются ли они в природе. Возможно, они являются следствием только наших механических представлений о том, что источником возмущений всегда должна быть точечная масса.

Во всяком случае, поле допускает адэкватную трактовку только, если оно рассматривается как целое, а не как сумма полей, соответствующих отдельным точечным массам. Тем не менее, рассмотрение законов движения требует разложения поля на две части: на поле, создаваемое рассматриваемой частицей, и поле остальных частиц. Поле точечного заряда имеет особенность в месте его нахождения. Для того чтобы получить закон сил, необходимо отбросить часть поля, содержащую особенность. Оставшееся поле, которое существовало бы в отсутствии частицы, определяет силу, действующую на частицу.

Такое разделение ни в какой мере не является, однако, однозначно определенной математической операцией. Движущаяся частица с заданными зарядом и скоростью может создавать различные типы полей: поле „запаздывающего потенциала“ (расходящиеся волны), поле „опережающего потенциала“ (сходящиеся волны) или смесь обоих типов волн. Эта неоднозначность не вызывает серьезных затруднений при практических применениях, пока ускорение рассматриваемых частиц невелико, т. е. пока поля излучения, связанные с частицей, малы в сравнении со стационарными полями (поле Кулона и поле Ампера).

Операция разделения полей, хотя и не является однозначной, все же имеет определенный смысл. Поскольку уравнения поля линейны и однородны, сумма двух их решений также будет решением. Поэтому разность между полным полем и полем, создаваемым частицей, также будет решением уравнений Максвелла, регулярным в месте нахождения частицы. Однако, несмотря на необходимость разделения полей для получения уравнений движения, эта операция остается противоречащей самой концепции поля.

Закон движения в общей теории относительности. В теории гравитации, казалось бы, дело должно обстоять еще хуже. Точечные массы представляют собой особенности гравитационного поля, и чтобы сформулировать закон сил необходимо знать поле, которое создалось бы в месте нахождения точечной массы, если бы последней там не было. В отличие от уравнений электромагнитного поля Максвелла, уравнения гравитационного поля нелинейны, и разность их двух решений сама не будет являться решением уравнений поля. Поэтому движение точечной массы возможно рассматривать только в таком поле, на которое наличие этой массы практически не влияет; таково, например, движение планет в поле Солнца. Истинная проблема двух тел, например двойных звезд, может рассматриваться только мало надежными приближенными методами, не основывающимися на строгой теории. По этой причине некоторые авторы получили противоречивые результаты уже в первом приближении, в котором сказываются релятивистские эффекты [1]).

В электродинамике закон движения заряда нельзя получить из уравнений поля; другими словами, может случиться, что заряд не подчиняется закону сил Лорентца, хотя уравнения поля Максвелла удовлетворяются. Действительно, в классической электродинамике это имеет место, когда на заряды, кроме сил Лорентца, действуют еще силы неэлектрического происхождения.

Иначе обстоит дело в теории гравитации. Точечные массы могут находиться под действием не только гравитационных сил. Однако негравитационные силы связаны с возникновением напряжений, плотности энергии и потоком энергии поля, т. е. они ведут к появлению тензора энергии-импульса и тем самым изменяют уравнения гравитационного поля.

Поэтому ясно, что связь между уравнениями поля и законом движения в теории гравитации должна быть сильнее, чем в электродинамике.

---

[1]) Robertson, Annals of Mathematics, 93, 101 (1938), примечание на стр. 103 и 104.

Действительно, существуют важные указания на то, что уравнения поля для $g_{\mu\nu}$ не могут быть удовлетворены в окрестностях особых точек, если последние движутся не по мировым линиям, определяемым законом движения.

В конце главы XIII было показано, что не существует статических решений с осевой симметрией, соответствующих двум изолированным незаряженным покоящимся точечным массам. В 1937 г. А. Эйнштейн, Л. Инфельд и Б. Гоффман доказали, что движение точечных масс действительно определяется уравнениями поля [1]).

Приближенный метод. В релятивистской теории гравитации, так же как в электродинамике, электрические заряды и массы представляются особыми точками переменных поля. При наличии особенностей изменение поля во времени полностью не определяется. Рассмотрим, например, поле Шварцшильда. Вблизи начала координат имеется особая область, сферическая поверхность $r = 2\varkappa m$. Окружим эту особую область небольшой двумерной поверхностью S, снаружи которой поле везде регулярно и удовлетворяет уравнениям поля.

Поле Шварцшильда статично. Однако если мы ничего не знаем относительно поля внутри S, то может возникнуть излучение электромагнитных или гравитационных волн через поверхность S изнутри наружу. Если это излучение имеет преимущественное направление, произойдет „отдача", т. е. ускорение всей особой области в противоположном направлении.

Другими словами, нельзя ожидать, что закон движения справедлив для всякой особенности. Движение особенности

---

[1]) Annals of Mathematics, 39, 65 (1938). В более поздней статье A. Einstein'a u L. Infeld'a, Annals of Mathematics, 41. 455, (1940) содержатся важные поправки к первой статье. [Полный вывод уравнений движения из уравнений гравитационного поля независимо от указанных авторов был дан В. А. Фоком. ЖЭТФ, 9, 375 (1939). (*Прим. ред.*)]

может быть определено, если она не является источником излучения. Поэтому закон движения может быть получен только в предположении, что особенность является и остается простым полюсом (уравнения поля могут также иметь решения, соответствующие „диполям масс" и т. п.) и что не происходит спонтанного излучения.

Эти условия трудно сформулировать инвариантным образом. Существуют, например, гравитационные волны, связанные с ускоренным движением точечной массы. Различие между „спонтанными" волнами и „гравитационным тормозным излучением" имеет простой физический смысл, однако его математическая формулировка не представляется возможной.

Чтобы избежать этих трудностей, Эйнштейн и его сотрудники вынуждены были получать законы движения с помощью приближенного метода, при котором математическая формулировка необходимых предположений значительно проще.

Их метод аппроксимации аналогичен обычному методу, описанному в главе XII, который в первом приближении приводит к „линеаризации" уравнений поля. Однако он отличается от последнего одним важным обстоятельством. Предположение, что спонтанного излучения не происходит, эквивалентно предположению, что переменные поля меняются со временем не быстрее, чем этого требует движение особенности. Скорость последнего мала в сравнении со скоростью света. Поэтому предполагается, что дифференцирование по ξ^4 (измеренному в релятивистских единицах) приводит к величинам высшего порядка.

Это предположение можно сформулировать несколько иным способом. Если снова ввести метрические единицы (т. е. если в качестве метрического тензора плоского пространства использовать $\eta_{\rho\sigma}$ вместо $\varepsilon_{\rho\sigma}$), скорости материальных тел будут порядка единицы, а дифференцирование переменных поля по ξ^4 не будет менять их порядка величины. С другой стороны, c^{-2} будет тогда рассматриваться, как малая величина, которая может служить параметром разложения переменных поля в степенные ряды (параметр λ главы XII). Тензор $g_{\mu\nu}$, например, примет вид

$$\left.\begin{aligned} g_{44} &= 1 + c^{-2}\underset{1}{h}_{44} + c^{-4}\underset{2}{h}_{44} + c^{-6}\underset{3}{h}_{44} + \ldots, \\ g_{4s} &= \qquad\qquad\quad c^{-4}\underset{2}{h}_{4s} + c^{-6}\underset{3}{h}_{4s} + \ldots, \\ g_{rs} &= -c^{-2}\delta_{rs} + c^{-4}\underset{2}{h}_{rs} + c^{-6}\underset{3}{h}_{rs} + \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{15.1}$$

Член $c^{-2}\underset{1}{h}_{4s}$ опускается, так как в противном случае g^{4s} было бы порядка единицы, в связи с чем первое приближение стало бы нелинейным. Как и в главе XII, введем величины $\gamma_{\mu\nu}$ при помощи уравнений

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}, \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \tag{15.2}$$

$\gamma_{\mu\nu}$ также разложим в степенные ряды по c^{-2}:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{44} &= c^{-2}\underset{1}{\gamma}_{44} + c^{-4}\underset{2}{\gamma}_{44} + \ldots, \\ \gamma_{4s} &= \qquad\qquad c^{-4}\underset{2}{\gamma}_{4s} + c^{-6}\underset{3}{\gamma}_{4s} + \ldots, \\ \gamma_{rs} &= \qquad\qquad c^{-4}\underset{2}{\gamma}_{rs} + c^{-6}\underset{3}{\gamma}_{rs} + \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{15.3}$$

Покоящиеся точечные массы представляются решениями уравнений поля, которые в первом приближении даются уравнениями (12.31а) и (12.34) или в метрических единицах выражениями

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{\gamma}_{44} &= -\frac{4\varkappa M}{r}, \\ \underset{2}{\gamma}_{4s} &= 0, \\ \underset{2}{\gamma}_{rs} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

Поэтому предположим, что величины $\underset{2}{\gamma}_{rs}$ равны нулю. Для получения в том же приближении поля точечной массы нужно произвести преобразование Лорентца; $g_{\mu\nu}$ преобразуется согласно закону:

$$g^*_{\mu\nu} = \gamma^\alpha_\mu \gamma^\beta_\nu g_{\alpha\beta}, \tag{15.5}$$

где γ^α_μ имеют те же значения, что и в главе V (уравнение (5.111)). Величины $h_{\mu\nu}$,

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu},$$

преобразуется по тому же закону, что и $g_{\mu\nu}$, так как закон преобразования линеен, и $\eta_{\mu\nu}$ остаются неизменными.

По тому же закону преобразуются и $\gamma_{\mu\nu}$, что может быть проверено непосредственным вычислением. Применяя эти законы преобразования к уравнению (15.4), получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} \gamma^*_{44} &= (\gamma^4_4)^2\,\gamma_{44}, \\ \gamma^*_{4s} &= \gamma^4_4 \gamma^4_s \gamma_{44}, \\ \gamma^*_{rs} &= \gamma^4_r \gamma^4_s \gamma_{44}. \end{aligned}\right\} \tag{15.6}$$

Коэфициенты γ^4_4 отличаются от единицы только малыми величинами — порядка c^{-2}. Коэфициенты $\gamma^4{}_s$ представляются выражениями

$$\gamma^4{}_s = \eta_{sr}\eta^{44}\gamma^r{}_4 = -\frac{1}{c^2}\gamma^s{}_4 = -\frac{1}{c^2}\frac{u_s}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{15.7}$$

и таким образом являются малыми величинами порядка c^{-2}. Отсюда видно, что величины γ^*_{4s}, к которым приводит преобразование, того же порядка, а величины γ^*_{rs} — порядка c^{-4}. Величины $\underset{2}{\gamma_{rs}}$ для поля точечной массы исчезают, даже если эта масса движется.

В первом приближении естественно принять, что полное поле является просто суммой полей различных точечных масс. Разложение γ_{rs} будем начинать, согласно сказанному, с члена, содержащего c^{-6}.

Подставляя разложения (15.1) и (15.3) в уравнения поля и приравнивая коэфициенты при членах с одинаковыми степенями c^{-2}, получим ряд систем уравнений. Метод

Эйнштейна, Инфельда и Гофмана и заключается в получении и решении таких систем уравнений. Каждая последующая система уравнений содержит ряд величин $\underset{n}{\gamma}_{\rho\sigma}$, не входивших в предыдущие системы, и, кроме того, ряд других $\underset{n}{\gamma}_{\rho\sigma}$, определенных ранее. „Новые" величины всегда входят линейно, так что на каждой последующей стадии приближенного метода приходится решать только линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Определение движения особенностей производится следующим образом. На каждой стадии метода приближения нужно решить десять линейных неоднородных уравнений относительно десяти величин $\underset{n}{\gamma}_{\rho\sigma}$. Левые части этих уравнений, содержащие еще неизвестные величины, не независимы друг от друга, а удовлетворяют четырем дифференциальным тождествам. Если правые части (которые содержат уже определенные величины) не удовлетворяли бы тем же тождествам, дифференциальные уравнения были бы не совместимы друг с другом. Таким образом, каждая стадия приближенного метода налагает условия на предыдущую. В отсутствии особенностей эти условия ничего не дают, однако при наличии особенностей они являются как раз уравнениями движения.

Эйнштейн и его сотрудники при помощи этого метода довели вычисления до той стадии, на которой начинают сказываться релятивистские эффекты. Мы ограничимся приближением, приводящим к классическим уравнениям движения, так как на этой стадии уже можно видеть связь между уравнениями поля и уравнениями движения.

Разложим компоненты тензора кривизны, символы Кристоффеля и ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора в степенные ряды по c^{-2} и приравняем коэфициенты разложения по индексам, написанным под каждым символом, причем нижний индекс n будет относиться к коэфициенту при c^{-2n}. Например, $\underset{0}{G}_{44}$ будет означать ту часть G_{44}, которая умножается на c^0;

h_{rs} — ту часть h_{rs}, которая умножается на c^{-6}, и так
3

далее.

Используя выражения для метрического тензора (15.1), найдем, что разложения в ряды компонент $G_{\mu\nu}$ начинаются со следующих степеней c^{-2}: $G_{44} - c^0$, G_{4s} и $G_{rs} - c^{-2}$. В дальнейшем нам понадобятся только первые неисчезающие члены разложения каждой компоненты, т. е. $\underset{0}{G}_{44}$, $\underset{1}{G}_{4s}$, $\underset{1}{G}_{rs}$, и, кроме того, величина $\underset{2}{G}_{rs}$. Чтобы получить их значения, вычислим $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, символы Кристоффеля первого и второго рода и $R_{\rho\sigma}$ с точностью до членов с c^{-2}.

Первое приближение и закон сохранения массы. В первом приближении используем следующие значения компонент:

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{h}_{44} &= \frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}_{44}, \\ \underset{2}{h}_{4s} &= \underset{2}{\gamma}_{4s}, \\ \underset{2}{h}_{rs} &= \frac{1}{2}\delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44}. \end{aligned}\right\} \tag{15.8}$$

С их помощью образуем символы Кристоффеля первого рода:

$$\left.\begin{aligned} [\underset{1}{44}, 4] &= \frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,4}, \\ [\underset{1}{44}, t] &= -\frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,t}, \\ [\underset{1}{4r}, 4] &= \frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,r}, \\ [\underset{2}{4r}, t] &= \frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4t,r} - \underset{2}{\gamma}_{4r,t}) + \frac{1}{4}\delta_{rt}\underset{1}{\gamma}_{44,4}, \\ [\underset{2}{rs}, 4] &= \frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4r,s} + \underset{2}{\gamma}_{4s,r}) - \frac{1}{4}\delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44,4}, \\ [\underset{2}{rs}, t] &= \frac{1}{4}(\delta_{rt}\underset{1}{\gamma}_{44,s} + \delta_{st}\underset{1}{\gamma}_{44,r} - \delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44,t}), \end{aligned}\right\} \tag{15.9}$$

и символы Кристоффеля второго рода:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix}4\\44\\1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,\,4},\\
&\left\{\begin{matrix}t\\44\\0\end{matrix}\right\} = \frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,\,t},\\
&\left\{\begin{matrix}4\\4r\\1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,\,r},\\
&\left\{\begin{matrix}t\\4r\\1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4r,\,t} - \underset{2}{\gamma}_{4t,\,r}) - \frac{1}{4}\delta_{rt}\underset{1}{\gamma}_{44,\,4},\\
&\left\{\begin{matrix}4\\rs\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4r,\,s} + \underset{2}{\gamma}_{4s,\,r}) - \frac{1}{4}\delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44,\,4},\\
&\left\{\begin{matrix}t\\rs\\1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{4}(\delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44,\,t} - \delta_{rt}\underset{1}{\gamma}_{44,\,s} - \delta_{st}\underset{1}{\gamma}_{44,\,r}).
\end{aligned}\right\} \quad (15.10)$$

Для компонент метрического тензора получаем выражения

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{0}{R}_{44} = -\left\{\begin{matrix}t\\44\\0\end{matrix}\right\}_{,\,t} = -\frac{1}{4}\underset{1}{\gamma}_{44,\,tt},\\
&\underset{1}{R}_{4s} = \left\{\begin{matrix}4\\44\\1\end{matrix}\right\}_{,\,s} + \left\{\begin{matrix}t\\4t\\1\end{matrix}\right\}_{,\,s} - \left\{\begin{matrix}4\\4s\\1\end{matrix}\right\}_{,\,4} - \left\{\begin{matrix}t\\4s\\1\end{matrix}\right\}_{,\,t} =\\
&= -\frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}_{44,\,4s} + \frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4t,\,s} - \underset{2}{\gamma}_{4s,\,t})_{,\,t},\\
&\underset{1}{R}_{rs} = \left\{\begin{matrix}4\\r4\\1\end{matrix}\right\}_{,\,s} + \left\{\begin{matrix}t\\rt\\1\end{matrix}\right\}_{,\,s} - \left\{\begin{matrix}t\\rs\\1\end{matrix}\right\}_{t} = -\frac{1}{4}\delta_{rs}\underset{1}{\gamma}_{44,\,tt},\\
&\underset{0}{R} = \underset{0}{R}_{44} - \underset{1}{R}_{tt} = +\frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}_{44,\,tt},
\end{aligned}\right\} \quad (15.11)$$

а уравнения поля в первом приближении запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{0}{G}_{44} \equiv -\frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}_{44,\,tt} = 0,\\
&\underset{1}{G}_{4s} \equiv -\frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}_{44,\,4s} + \frac{1}{2}\left(\underset{2}{\gamma}_{4t,\,s} - \underset{2}{\gamma}_{4s,\,t}\right)_{,\,t} = 0,\\
&\underset{1}{G}_{rs} \equiv 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.12)$$

В качестве решения первого уравнения можно выбрать выражение

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{1}{\gamma}_{44} = -\sum_{k=1}^{N}\frac{\overset{k}{\mu}(\xi^4)}{\overset{k}{r}} \equiv \varphi,\\
&\text{где}\\
&\overset{k}{r} = \left\{\left[\xi^1 - \overset{k}{y}{}^1(\xi^4)\right]^2 + \left[\xi^2 - \overset{k}{y}{}^2(\xi^4)\right]^2 + \right.\\
&\qquad\left. + \left[\xi^3 - \overset{k}{y}{}^3(\xi^4)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.13)$$

Это решение соответствует случаю N точечных масс. Все полюса высших порядков мы из рассмотрения исключили. Масса k-й точечной массы, согласно (12.34), равна:

$$\overset{k}{M} = \frac{1}{4\varkappa}\overset{k}{\mu}. \qquad (15.14)$$

Возможно предположить, что эта масса может еще зависеть от временной координаты ξ^4, но вскоре будет показано, что в действительности массы постоянны. $3N$ функций $\overset{k}{y}{}^s$ от ξ^4 определяют положения N точечных масс в каждый момент времени ξ^4.

Докажем теперь с помощью трех уравнений G_{4s}, что параметры $\overset{k}{\mu}$ (а поэтому и массы $\overset{k}{M}$) постоянны. Это доказательство проводится с помощью метода, последующий этап приближения которого способствует нам в выводе (классических) уравнений движения. Прежде всего докажем следующую лемму: если выражение, зависящее от нескольких индексов, антисимметрично по отношению к двум из них, скажем s и t, то его обыкновенная дивергенция по одному из этих индексов, скажем по t, эквивалентна ротору, компоненты которого характеризуются вторым (не немым) антисимметричным индексом (в нашем случае s). При этом, как обычно, предполагается, что s и t пробегают значения от 1 до 3. Доказательство проводится путем непосредственного составления интересующих нас величин. Пусть $A_{lk\cdots st}$ антисимметрично в s и t. Обозначим

$$A_{lk\ldots 12} = -A_{lk\ldots 21} \text{ через } B_3,$$
$$A_{lk\ldots 23} = -A_{lk\ldots 32} \text{ через } B_1 \text{ и}$$
$$A_{lk\ldots 31} = -A_{lk\ldots 13} \text{ через } B_2.$$

Выражения $A_{lk\ldots 1t,\, t}$ тогда равны следующим:

$$A_{lk\ldots 1t,\, t} = B_{3,2} - B_{2,3} = (\mathrm{rot}\, \mathbf{B})_1, \qquad (15.15)$$

аналогичные соотношения справедливы и для других двух дивергенций.

Вернемся к уравнениям $\underset{1}{G}_{4s}$. Они содержат величину $\frac{1}{2}(\underset{2}{\gamma}_{4s,\,t} - \underset{2}{\gamma}_{4t,\,s})_{,\,t}$, являющуюся дивергенцией антисимметричного выражения. Эта дивергенция эквивалентна ротору, компоненты которого нумеруются индексом s. По теореме Стокса интеграл ротора по замкнутой поверхности равен нулю. Другими словами,

$$\frac{1}{2}\oint (\underset{2}{\gamma}_{4s,\,t} - \underset{2}{\gamma}_{4t,\,s})_{,\,t} \cdot \cos(s, n)\, dS \equiv 0, \qquad (15.16)$$

здесь $\cos(s, n)$ означает косинус угла между координатой ξ^s и нормалью к элементу поверхности $\mathbf{dS}$. Применим (15.16) к замкнутой поверхности, окружающей p-ю особенность, но выбранную так, чтобы на самой поверхности не было особенностей. На поверхности (но не внутри ее) должны удовлетворяться уравнения поля, поэтому имеем

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \oint\limits_S G_{4s} \cos(s, n)\, dS = \\ &= -\frac{1}{2} \oint\limits_S \underset{1}{\gamma}_{44,\,4s} \cos(s, n)\, dS = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^4} \left\{ \oint (\operatorname{grad} \underset{1}{\gamma}_{44} \cdot d\mathbf{S}) \right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.17)$$

Это уравнение выражает собой то условие, что параметры $\overset{k}{\mu}$ остаются постоянными, ибо интеграл $\oint (\operatorname{grad} \psi \cdot d\mathbf{S})$ представляет собой просто „число силовых линий", исходящих из области S, и поэтому пропорционален $\overset{k}{\mu}$. Уравнение (15.17) соответствует условию

$$\frac{d\overset{k}{\mu}}{d\xi^4} = 0, \quad k = 1 \ldots N. \qquad (15.18)$$

Последнее, что можно сделать в первом приближении, это решить дифференциальные уравнения G_{4s} относительно $\underset{2}{\gamma}_{4s}$,

$$\left.\begin{aligned} \underset{2}{\gamma}_{4t,\,ts} - \underset{2}{\gamma}_{4s,\,tt} &= \underset{1}{\psi}_{,\,4s}, \\ \psi &= -\sum_k \frac{\overset{k}{\mu}}{\overset{k}{r}}, \end{aligned}\right\} \qquad (15.19)$$

где $\overset{k}{\mu}$ теперь рассматриваются как постоянные. Уравнения (15.6) и (15.7) показывают, что эти уравнения удовлетворяются выражениями:

$$\gamma_{\underset{2}{}4r} = +\sum_{k=1}^{N} \dot{\overset{k}{y}}{}^{r} \frac{\overset{k}{\mu}}{\underset{r}{k}} \equiv \psi_r \tag{15.20}$$

(точкой обозначено дифференцирование по ξ^4), что доказывается просто подстановкой в (15.19).

Для получения уравнений движения необходимо перейти ко второму приближению.

Второе приближение и уравнения движения. Во втором приближении необходимо использовать следующие контравариантные компоненты метрического тензора:

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{h}{}^{44} &= -\underset{1}{h}{}_{44} = -\frac{1}{2}\psi, \\ \underset{1}{h}{}^{4s} &= \underset{1}{h}{}_{4s} = \psi_s, \\ \underset{0}{h}{}^{rs} &= -\underset{2}{h}{}_{rs} = -\frac{1}{2}\delta_{rs}\psi. \end{aligned}\right\} \tag{15.21}$$

С их помощью находим выражения для символов Кристоффеля:

$$\left.\begin{aligned} [\underset{2}{44},4] &= \frac{1}{2}\underset{2}{h}{}_{44,4}, \\ [\underset{2}{44},t] &= -\frac{1}{2}\underset{2}{h}{}_{44,t} + \psi_{t,4}, \\ [\underset{2}{4r},4] &= \frac{1}{2}\underset{2}{h}{}_{44,r}, \\ [\underset{3}{4r},t] &= \frac{1}{2}(\underset{3}{h}{}_{4t,r} - \underset{3}{h}{}_{4r,t} + \underset{3}{h}{}_{rt,4}), \\ [\underset{3}{rs},t] &= \frac{1}{2}(\underset{3}{h}{}_{rt,s} + \underset{3}{h}{}_{st,r} - \underset{3}{h}{}_{rs,t}), \end{aligned}\right\} \tag{15.22}$$

и

$$
\left.
\begin{aligned}
&\underset{2}{\left\{\begin{matrix}4\\44\end{matrix}\right\}}=\underset{2}{[44,4]}+\underset{1}{h}^{44}\underset{1}{[44,4]}+\underset{1}{h}^{4n}\underset{1}{[44,n]}=\\
&\qquad=\frac{1}{2}\underset{4}{h}_{44,4}-\frac{1}{8}\psi\psi_{,4}-\frac{1}{4}\psi_n\psi_{,n},\\
&\underset{1}{\left\{\begin{matrix}t\\44\end{matrix}\right\}}=-\underset{2}{[44,t]}+\underset{0}{h}^{tn}\underset{1}{[44,n]}=\\
&=\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{44,}-\ \psi_{t,4}+\frac{1}{8}\psi\psi_{,t},\\
&\underset{2}{\left\{\begin{matrix}4\\4r\end{matrix}\right\}}=\underset{2}{[4r,4]}+\underset{1}{h}^{44}\underset{1}{[4r,4]}=\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{44,r}-\frac{1}{8}\psi\psi_{,r},\\
&\underset{2}{\left\{\begin{matrix}t\\4r\end{matrix}\right\}}=-\underset{3}{[4r,t]}+\underset{0}{h}^{tn}\underset{2}{[4r,n]}+\underset{1}{h}^{t4}\underset{1}{[4r,4]}=\\
&\qquad=\frac{1}{2}(\underset{3}{h}_{4r,t}-\underset{3}{h}_{4t,r}-\underset{3}{h}_{rt,4})+\\
&+\frac{1}{4}\psi(\psi_{r,t}-\psi_{t,r})-\frac{1}{8}\delta_{rt}\psi\psi_{,4}+\frac{1}{4}\psi_t\psi_{,r},\\
&\underset{2}{\left\{\begin{matrix}t\\rs\end{matrix}\right\}}=-\underset{3}{[rs,t]}+\underset{0}{h}^{tn}\underset{2}{[rs,n]}=\\
&\qquad=\frac{1}{2}(\underset{3}{h}_{rs,t}-\underset{3}{h}_{rt,s}-\underset{3}{h}_{st,r})+\\
&\qquad+\frac{1}{8}\psi(\delta_{rs}\psi_{,t}-\delta_{rt}\psi_{,s}-\delta_{st}\psi_{,r}).
\end{aligned}
\right\}
\tag{15.23}
$$

В этом приближении компоненты свернутого тензора кривизны представляются довольно громоздкими выражениями. Если уравнения первого приближения удовлетворяются, то во втором приближении $R_{\mu\nu}$ имеет компоненты

$$
\left.
\begin{aligned}
&\underset{1}{R}_{44}=\underset{1}{\left\{\begin{matrix}\rho\\4\rho\end{matrix}\right\}}_{,4}-\underset{1}{\left\{\begin{matrix}4\\44\end{matrix}\right\}}_{,4}-\underset{1}{\left\{\begin{matrix}t\\44\end{matrix}\right\}}_{,t}-\\
&\qquad-\underset{0}{\left\{\begin{matrix}t\\44\end{matrix}\right\}}\underset{1}{\left\{\begin{matrix}\rho\\t\rho\end{matrix}\right\}}+2\underset{0}{\left\{\begin{matrix}t\\44\end{matrix}\right\}}\underset{1}{\left\{\begin{matrix}4\\4t\end{matrix}\right\}}=\\
&=-\frac{1}{2}\underset{2}{h}_{44,tt}-\frac{3}{4}\psi_{,44}+\psi_{t,t4}+\frac{1}{8}\psi_{,t}\psi_{,t}
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\underset{2}{R}_{4s} = {} & \underset{2}{\begin{Bmatrix} \rho \\ s\rho \end{Bmatrix}}_{,4} - \underset{2}{\begin{Bmatrix} 4 \\ 4s \end{Bmatrix}}_{,4} - \underset{2}{\begin{Bmatrix} t \\ 4s \end{Bmatrix}}_{,t} - \\
& - \underset{1}{\begin{Bmatrix} 4 \\ 4s \end{Bmatrix}} \underset{1}{\begin{Bmatrix} \rho \\ 4\rho \end{Bmatrix}} - \underset{1}{\begin{Bmatrix} t \\ 4s \end{Bmatrix}} \underset{1}{\begin{Bmatrix} \rho \\ t\rho \end{Bmatrix}} + \underset{1}{\begin{Bmatrix} 4 \\ 44 \end{Bmatrix}} \underset{1}{\begin{Bmatrix} 4 \\ s4 \end{Bmatrix}} + \\
& + \underset{0}{\begin{Bmatrix} t \\ 44 \end{Bmatrix}} \underset{2}{\begin{Bmatrix} 4 \\ st \end{Bmatrix}} + \underset{1}{\begin{Bmatrix} 4 \\ 4t \end{Bmatrix}} \underset{1}{\begin{Bmatrix} t \\ s4 \end{Bmatrix}} + \underset{1}{\begin{Bmatrix} n \\ 4m \end{Bmatrix}} \underset{1}{\begin{Bmatrix} m \\ sn \end{Bmatrix}} = \\
& = \frac{1}{2}\left(\underset{3}{h}_{4t,st} - \underset{3}{h}_{4s,tt} + \underset{3}{h}_{st,4t} - \underset{3}{h}_{tt,s4}\right) + \\
& + \frac{1}{4}\left[\psi\left(\psi_{t,s} - \psi_{s,t}\right)\right]_{,t} - \frac{1}{4}\left(\psi\psi_{,s}\right)_{,4} - \\
& - \frac{1}{4}\left(\psi_t \psi_{,s}\right)_{,t} + \frac{1}{8}\psi_{,4}\psi_{,s} + \frac{1}{4}\psi_{,t}\psi_{s,t}, \\
\underset{2}{R}_{rs} = {} & \underset{2}{\begin{Bmatrix} \rho \\ r\rho \end{Bmatrix}}_{,s} - \underset{2}{\begin{Bmatrix} 4 \\ rs \end{Bmatrix}}_{,4} - \underset{2}{\begin{Bmatrix} t \\ rs \end{Bmatrix}}_{,t} - \\
& - \underset{1}{\begin{Bmatrix} t \\ rs \end{Bmatrix}} \underset{1}{\begin{Bmatrix} \rho \\ t\rho \end{Bmatrix}} + \underset{1}{\begin{Bmatrix} 4 \\ r4 \end{Bmatrix}} \underset{1}{\begin{Bmatrix} 4 \\ s4 \end{Bmatrix}} + \underset{1}{\begin{Bmatrix} n \\ rm \end{Bmatrix}} \underset{1}{\begin{Bmatrix} m \\ sn \end{Bmatrix}} = \\
= {} & \frac{1}{2}\left(\underset{3}{h}_{rt,st} + \underset{3}{h}_{st,rt} - \underset{3}{h}_{rs,tt} + \underset{2}{h}_{44,rs} - \underset{3}{h}_{tt,rs}\right) + \\
& + \frac{1}{4}\delta_{rs}\psi_{,44} - \frac{1}{2}\left(\psi_{r,s4} - \psi_{s,r4}\right) - \\
& - \frac{1}{8}\psi_{,r}\psi_{,s} - \frac{1}{4}\psi\psi_{,rs} - \frac{1}{8}\delta_{rs}\psi_{,t}\psi_{,t}, \\
\underset{1}{R} = {} & \underset{3}{h}_{mm,nn} - \underset{2}{h}_{44,tt} - \underset{3}{h}_{mn,mn} - \frac{3}{2}\psi_{,44} + \\
& + 2\psi_{t,t4} + \frac{5}{8}\psi_{,t}\psi_{,t}.
\end{aligned}
\right\} \quad (15.24)
$$

Для получения уравнений движения необходимо иметь выражения для $\underset{2}{G}_{rs}$:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{2}{G}_{rs} = {} & \frac{1}{2}\left[\underset{3}{h}_{rt,\, st} + \underset{3}{h}_{st,\, rt} - \underset{3}{h}_{rs,\, tt} + \underset{2}{h}_{44,\, rs} - \right.\\
& - \underset{3}{h}_{tt,\, rs} + \delta_{rs}\left(\underset{3}{h}_{mm,\, nn} - \underset{2}{h}_{44,\, tt} - \right.\\
& \left.\left. - \underset{3}{h}_{mn,\, mn}\right)\right] - \frac{1}{2}\delta_{rs}\psi_{,\,44} - \frac{1}{2}\left(\psi_{r,\, s4} - \right.\\
& \left. - \psi_{s,\, r4}\right) + \delta_{rs}\psi_{t,\, t4} - \frac{1}{8}\psi_{,\, r}\psi_{,\, s} - \\
& - \frac{1}{4}\psi\psi_{,\, rs} + \frac{3}{16}\delta_{rs}\psi_{,\, t}\psi_{,\, t} = \frac{1}{2}\left[\underset{3}{\gamma}_{rt,\, st} + \right.\\
& \left. + \underset{3}{\gamma}_{st,\, rt} - \underset{3}{\gamma}_{rs,\, tt} - \delta_{rs}\underset{3}{\gamma}_{mn,\, mn}\right] - \frac{1}{2}\left(\psi_{r,\, s4} - \right.\\
& \left. - \psi_{s,\, r4}\right) + \delta_{rs}\psi_{t,\, t4} - \frac{1}{2}\delta_{rs}\psi_{,\, 44} - \\
& - \frac{1}{8}\psi_{,\, r}\psi_{,\, s} - \frac{1}{4}\psi\psi_{,\, rs} + \frac{3}{16}\delta_{rs}\psi_{,\, t}\psi_{,\, t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.25)$$

Некоторые члены этих выражений могут быть представлены как дивергенции антисимметричных величин. Поэтому для квадратной скобки имеем:

$$\left.\begin{aligned}
& \underset{3}{\gamma}_{rt,\, st} + \underset{3}{\gamma}_{st,\, rt} - \underset{3}{\gamma}_{rs,\, tt} - \delta_{rs}\underset{3}{\gamma}_{mn,\, mn} = \\
& = \left(\underset{3}{\gamma}_{rt,\, s} - \underset{3}{\gamma}_{rs,\, t}\right)_{,\, t} + \left(\delta_{rt}\underset{3}{\gamma}_{sn,\, n} - \delta_{rs}\underset{3}{\gamma}_{tn,\, n}\right)_{,\, t}
\end{aligned}\right\} \qquad (15.26)$$

и кроме того,

$$-\frac{1}{2}\psi_{s,\, r4} + \frac{1}{2}\delta_{rs}\psi_{t,\, t4} = \frac{1}{2}\left(\delta_{rs}\psi_{t,\, 4} - \delta_{rt}\psi_{s,\, 4}\right)_{,\, t}. \qquad (15.27)$$

С этого момента доказательство проводится так же, как и доказательство закона сохранения массы. Интегралы от $\underset{2}{G}_{rs}\cos(s, n)$ по замкнутой поверхности S, на которой нет особенностей, должны равняться нулю. С другой стороны, интегралы от выражений, эквивалентных ротору, независимо обращаются в нуль. Поэтому должны сами по себе обращаться в нуль и интегралы от остальных членов. *Эти оставшиеся члены состоят только из величин, найденных в первом приближении. Если существует второе приближение, то равенство нулю интеграла от оставшихся членов является тем интегральным условием, которому должны удовлетворять величины первого приближения.* Следующие три интеграла должны обращаться в нуль:

$$\left.\begin{aligned} \oint\limits_S \Big\{ \frac{1}{2} (\delta_{rs}\psi_{t,t4} - \psi_{r,s4}) - \frac{1}{2}\,\delta_{rs}\psi_{,44} - \frac{1}{8}\,\psi_{,r}\psi_{,s} - \\ - \frac{1}{4}\,\psi\psi_{,rs} + \frac{3}{16}\,\delta_{rs}\psi_{,t}\psi_{,t} \Big\} \cos(s, n)\, dS = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (15.28)$$

Если внутри поверхности S нет особенностей, условия (15.28) удовлетворяются тождественно, так как в этом случае, пользуясь теоремой Гаусса, поверхностный интеграл можно преобразовать в объемный, подинтегральное выражение которого тождественно равно нулю. Обозначая подинтегральное выражение поверхностного интеграла через K_{rs}, получим

$$\oint\limits_S K_{rs} \cos(s, n)\, dS \equiv \oint\limits_S \underset{2}{G}_{rs} \cos(s, n)\, dS = $$
$$= \int\limits_V \underset{2}{G}_{rs,s}\, d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3. \qquad (15.29)$$

Покажем с помощью тождеств Бьянки, что подинтегральное выражение $\underset{2}{G}_{rs,s}$ равно нулю. Обозначим еще выражения $G^{\rho}_{\mu;\rho}$ через B_μ. Разлагая B_μ в степенные ряды по

c^{-2}, для $\underset{1}{B_r}$ получим

$$\left.\begin{aligned}\underset{1}{B_r} = -\underset{2}{G}_{rs,s} + \underset{1}{G}_{r4,4} + \underset{0}{h}^{mn}\underset{1}{G}_{rm,n} - \\ -\underset{1}{\left\{\begin{matrix}4\\ r\,4\end{matrix}\right\}}\underset{0}{G}_{44} + \underset{1}{\left\{\begin{matrix}m\\ r\,n\end{matrix}\right\}}\underset{1}{G}_{mn} + \underset{1}{\left\{\begin{matrix}s\\ mn\end{matrix}\right\}}\underset{1}{G}_{rs} - \underset{0}{\left\{\begin{matrix}s\\ 44\end{matrix}\right\}}\underset{1}{G}_{rs}.\end{aligned}\right\} \quad (15.30)$$

Так как уже предполагается, что уравнения первого приближения $\underset{0}{G}_{44}$, $\underset{1}{G}_{4r}$, $\underset{1}{G}_{rs}$ удовлетворяются в области V, то находим, что первый член, $-\underset{2}{G}_{rs,s}$, обращается в нуль, даже если уравнения второго и высших приближений не удовлетворяются.

Условия (15.28) существенны, только если внутри поверхности S имеются особые точки. Значение интегралов (15.28) зависит от особенностей, находящихся внутри S, но не зависит от формы и размеров этой поверхности. Выберем S в виде малой сферы радиуса R, центром которой является p-особенность.

Вычислим далее явно три интеграла (15.28). Для выражений $\frac{1}{R}(\xi^s - \overset{p}{y}{}^s)$, являющихся косинусами углов (s, n), введем сокращенные обозначения η_s. Производными от η_s по ξ^r и ξ^4 будут:

$$\left.\begin{aligned}\eta_{s,r} &= \frac{1}{R}(\delta_{sr} - \eta_s\eta_r),\\ \eta_{s,4} &= \frac{1}{R}(\eta_s\eta_r - \delta_{sr})\,\dot{\overset{p}{y}}{}^r.\end{aligned}\right\} \quad (15.31)$$

Вычисление упрощается, если подинтегральные выражения уравнений (15.28) разложить в степенные ряды по R. Поэтому удобно вместо трех координат ξ^s ввести радиус R и направляющие косинусы η_s, удовлетворяющие соотношению

$$\eta_s\eta_s = 1. \quad (15.32)$$

Поскольку значения интегралов не зависят от формы и размеров поверхности S, они не зависят также и от R. Если подинтегральные выражения K_{rs} разложить в степенные ряды по R (степенные ряды, содержащие и положительные и отрицательные степени), то будут отличны от нуля только интегралы от членов, содержащих R^{-2}. Это объясняется тем, что „площадь" поверхности S пропорциональна R^2, и только члены подинтегрального выражения, пропорциональные R^{-2}, могут сделать интегралы, не зависящими от R. Поэтому необходимые вычисления можно сократить, разлагая подинтегральные выражения K_{rs} в ряды и отбрасывая все члены, которые не умножаются на R^{-2}.

Далее, если бы $\overset{p}{\mu}$ обращались в нуль, т. е. если бы p-я особенность не существовала, интегралы (15.28) равнялись бы нулю тождественно. В силу этого, все члены, не зависящие от $\overset{p}{\mu}$, в значение интегралов ничего не вносят, и, следовательно, ими можно пренебречь. Разложим ψ и ψ_s каждую на две части:

$$\left.\begin{aligned} &\psi=\iota+\lambda, \qquad \iota=\frac{\overset{p}{\mu}}{R}, \qquad \lambda=\sum_{k=1}^{N}{}'\,\frac{\overset{k}{\mu}}{\overset{k}{r}}, \\ &\psi_s=\iota_s+\lambda_s \quad \iota_s=\overset{\dot p}{y}{}^{s}\frac{\overset{p}{\mu}}{R}, \quad \lambda_s=\sum_{k=1}^{N}{}'\,\overset{\dot k}{y}{}^{s}\frac{\overset{k}{\mu}}{\overset{k}{r}}, \end{aligned}\right\} \tag{15.33}$$

где сумма $\sum'$ распространяется на все значения k, кроме $k=p$.

В K_{rs} входят как линейные относительно ψ и ψ_s члены, так и квадратичные. В линейных членах нужно рассматривать только выражения, зависящие от ι и ι_s. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\iota_{l,4}=-\overset{\ddot p}{y}{}^{l}\,\eta_{lt}\frac{\overset{p}{\mu}}{R^2}+\text{ члены, зависящие от } R^{-3}, \\ &\iota_{r,s4}=-\overset{\ddot p}{y}{}^{r}\,\eta_{ls}\frac{\overset{p}{\mu}}{R^2}+\ldots, \\ &\iota_{,44}=-\overset{\ddot p}{y}\;\eta_{lt}\frac{\overset{p}{\mu}}{R^2}+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{15.34}$$

Линейные члены, интеграл которых не равен нулю, умноженные на

$$\cos(s, n) = \eta_s,$$

равны

$$\frac{1}{2}\frac{\overset{p}{\mu}}{R^2}\ddot{y}^r.$$

После интегрирования по S они дают

$$2\pi\overset{p}{\mu}\overset{\ddot{p}}{y}{}^r \equiv L_r. \tag{15.35}$$

Обратимся теперь к квадратичным членам. ι и ι_s умножаются на R^{-1}, их первые производные по пространственным координатам — на R^{-2}, и их вторые производные — на R^{-3}. Очевидно, что все члены, квадратичные относительно $\overset{p}{\mu}$, умножаются на R^{-4}, и поэтому ничего не вносят в интегралы. Таким образом, необходимо рассматривать только члены, билинейные относительно выражений ι и λ. Кроме выражений ι, нам еще понадобятся $\iota_{,r}$ и $\iota_{,rs}$, которые имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \iota_{,r} &= +\frac{\overset{p}{\mu}}{R^2}\eta_r, \\ \iota_{,rs} &= \frac{\overset{p}{\mu}}{R^3}(\delta_{rs} - 3\eta_r\eta_s). \end{aligned}\right\} \tag{15.36}$$

Эти ι-выражения умножаются на λ и ее производные. Само λ умножается на вторые производные ι, т. е. на выражения, пропорциональные R^{-3}. Поэтому для вычисления интеграла существенны только те члены в степенном разложении λ, которые пропорциональны R^{+1}. По тем же причинам для вычисления интегралов (15.28) будут существенны только те члены первых производных от λ, которых умножаются на R^0; эти члены являются первыми производными от интересующих нас членов в разложении самого λ. Наконец, во вторых производных нас интересовали бы члены, пропорциональные R^{-1}, но они равны нулю, так как λ регулярна внутри S.

Для получения степенных рядов для λ, разложим сперва выражения $\overset{k}{r}$. Запишем $\overset{k}{r}$ в виде

$$\left.\begin{aligned} \overset{k}{r} &= [(\xi^t - \overset{k}{y}{}^t)(\xi^t - \overset{k}{y}{}^t)]^{1/2} = \\ &= ([\overset{p,k}{y}{}^t + R\,\eta_t)(\overset{p,k}{y}{}^t + R\,\eta_t)]^{1/2}, \\ \overset{p,k}{y}{}^t &= \overset{p}{y}{}^t - \overset{k}{y}{}^t. \end{aligned}\right\} \qquad (15.37)$$

Обозначим „координатные расстояния“ между p-й и k-й точечными массами $[(\overset{p}{y}{}^t - \overset{k}{y}{}^t)(\overset{p}{y}{}^t - \overset{k}{y}{}^t)]^{1/2}$ через $r_{p,k}$; тогда для $\overset{k}{r}$ получим степенное разложение:

$$\left.\begin{aligned} \overset{k}{r} &= r_{p,k}\left[1 + 2\,\frac{\overset{p,k}{y}{}^t \eta_t}{(r_{p,k})^2} R + \frac{R^2}{(r_{p,k})^2}\right]^{1/2} = \\ &= r_{p,k}\left[1 + \frac{\overset{p,k}{y}{}^t \eta_t}{(r_{p,k})^2} R + \ldots\right], \end{aligned}\right\} \qquad (15.38)$$

а разложение для λ примет вид

$$\lambda = -\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\overset{k}{\mu}}{r_{p,k}}\left(1 - \frac{\overset{p,k}{y}{}^t \eta_t}{(r_{p,k})^2} R + \ldots\right). \qquad (15.39)$$

Только второй член этого разложения

$$\lambda = \ldots + \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\overset{k}{\mu}}{(r_{p,k})^3} \overset{p,k}{y}{}^t \eta_t R + \ldots, \qquad (15.40)$$

существен для интегралов (15.28). Его производные равны

$$\lambda_{,r} = \ldots \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\overset{k}{\mu}}{(r_{p,k})^3} \overset{p,k}{y}{}^r + \ldots . \qquad (15.41)$$

Нелинейными членами в интегралах (15.28) тогда будут

$$-\frac{1}{8}\,(\iota_{,r}\lambda_{,s} + \iota_{,s}\lambda_{,r}) - \frac{1}{4}\,\lambda\iota_{,rs} + \frac{3}{8}\,\delta_{rs}\iota_{,t}\lambda_{,t} \equiv N_{rs}. \qquad (15.42)$$

Подставляя выражения (15.36) и (15.41) в уравнение (15.42), получим для N_{rs}:

$$N_{rs}=\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\overset{p}{\mu}\overset{k}{\mu}}{(r_{p,k})^3}\frac{1}{R^2}\Big[-\frac{1}{8}(\eta_r \overset{p,k}{y^s}+\eta_s \overset{p,k}{y^r})+$$

$$+\eta_t \overset{p,k}{y^t}\left(\frac{1}{8}\delta_{rs}+\frac{3}{4}\eta_r\eta_s\right)\Big], \qquad (15.43)$$

а для произведения N_{rs} на $\cos(s, n)$:

$$N_{rs}\eta_s=\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\overset{p}{\mu}\overset{k}{\mu}}{(r_{p,k})^3}\frac{1}{R^2}\Big[-\frac{1}{8}\overset{p,k}{y^r}+\frac{3}{4}\eta_t\cdot \overset{p,k}{y^t}\,\eta_r\Big]. \qquad (15.44)$$

Это выражение нужно проинтегрировать по поверхности S. Для этого рассмотрим интеграл

$$\oint_S \eta_t \overset{p,k}{y^t}\,\eta_r dS.$$

Нужно отдельно вычислить два интеграла:

$$\oint_S \overset{p,k}{y^r}(\eta_r)^2\,dS \text{ (не суммировать по } r!) \qquad (15.45)$$

и

$$\oint_S \eta_t \overset{p,k}{y^t}\,\eta_r dS \quad t\neq r. \qquad (15.46)$$

Сферу S можно разделить на две полусферы, на одной из которых η_r положительно, а на другой — отрицательно. η_t в свою очередь будет положительно на одной половине каждой полусферы и отрицательно — на другой. Интеграл (15.46) обращается в нуль, так как интегралы по соответствующим четвертям сфер взаимно уничтожаются. Для вычисления интеграла (15.45) введем полярные координаты с полюсами в двух точках $\eta_r=1$. Тогда получим:

$$\oint_S \overset{p,k}{y^r}(\eta_r)^2\,dS=2\pi\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \overset{p,k}{y^r}\cdot\sin^2\theta\cdot R^2\cos\theta\, d\theta=\frac{4}{3}\pi R^2\overset{p,k}{y^r}.$$

Наконец, находим, что интеграл от выражения (15.44) равен

$$\oint\limits_S N_{rs}\,\eta_s\,dS = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\overset{p}{\mu}\,\overset{k}{\mu}\,\overset{p,k}{y^r}}{(r_{p,k})^3} \equiv Q_r\,. \qquad (15.47)$$

Наше условие заключается в том, что сумма из L_r выражения (15.35) и Q_r должна равняться нулю:

$$4\overset{p}{\mu}\overset{p}{\ddot{y}}{}^{r} + \sum_{k=1}^{N}{}'\frac{\overset{p}{\mu}\,\overset{k}{\mu}}{(r_{p,k})^3}\overset{p,k}{y^r} = 0\,. \qquad (15.48)$$

Деля это уравнение на $\overset{p}{\mu}$ и подставляя вместо $\overset{k}{\mu}$ его значение из уравнения (15.14), получим классические уравнения движения

$$\overset{p}{\ddot{y}}{}^{r} = -\sum_{k=1}^{N}{}'\frac{\varkappa\,\overset{k}{M}}{(r_{p,k})^3}\overset{p,k}{y^r}\,. \qquad (15.49)$$

Метод Эйнштейна, Инфельда и Гофмана применим также и при наличии одновременно гравитационного и электромагнитного полей. И в этом случае во втором приближении уравнения поля имеют решения только тогда, когда первое приближение удовлетворяет некоторым интегральным условиям. Эти условия эквивалентны уравнению (15.48). с добавочным членом, соответствующим кулонову полю.

Заключение. Очень важно выяснить, почему в одной теории поля (теории гравитации) уравнения движения получаются из уравнений поля, в то время как в другой теории (теории Максвелла) этого не происходит. Основная причина состоит в том, что уравнения гравитационного поля удовлетворяют четырем тождествам, тогда как уравнения Максвелла только одному. Значение этих тождеств для уравнений движения было показано как Вейлем при исследовании точных решений с осевой симметрией, так и Эйнштейном, Инфельдом и Гофманом в их приближенном методе.

Благодаря этим тождествам уравнения поля общей теории относительности являются одновременно как бы „переопределенными" и „недоопределенными". Уравнения поля линейны относительно вторых производных. Однако разрешить их относительно второй производной такой координаты, как ξ^4, невозможно, так как четыре из десяти уравнений поля, G_{4s} и G_{44}, содержат только первые производные по ξ^4. Поэтому невозможно произвольно задать все переменные поля и их первые производные по ξ^4 на некоторой гиперповерхности $\xi^4 = \text{const}$; на этой гиперповерхности эти величины должны удовлетворять четырем условиям. В этом смысле уравнения переопределены.

Но в то же время, если задать переменные и их первые производные по ξ^4 на гиперповерхности $\xi^4 = \text{const}$ в согласии с четырьмя уравнениями G_{4s} и G_{44}, то останутся только шесть уравнений, определяющих поведение десяти переменных в направлении ξ^4; вторые производные по ξ^4 от четырех переменных остаются произвольными. В этом смысле уравнения недоопределены. Однако можно показать, что благодаря четырем свернутым тождествам Бьянки четыре уравнения G_{4s} и G_{44} продолжают удовлетворяться и вне выбранной гиперповерхности в том случае, если они удовлетворяются на этой гиперповерхности и если шесть уравнений G_{rs} удовлетворяются во всем пространстве.

Если же на выбранной гиперповерхности $\xi^4 = \text{const}$ имеются изолированные области, в которых уравнения не удовлетворяются, то эти области можно окружить (пространственными) поверхностями, так что тождества заменятся условиями обращения в нуль четырех интегралов по этим поверхностям. Одно тождество, которому удовлетворяют уравнения Максвелла, дает для изолированных областей только одно условие — условие сохранения заряда (см. главу XII). Однако в этом случае количество тождеств недостаточно для получения уравнений движения.

Уравнения гравитационного поля отличаются от уравнений электромагнитного поля Максвелла и в другом отношении: они нелинейны. В силу этого линейная комбинация нескольких решений не является решением уравнений. Если бы решения получались как линейные комбинации, это означало бы отсутствие взаимодействия точечных масс друг с другом. Приближенный метод Эйнштейна, Инфельда и Гофмана показывает, что даже классическое взаимодействие точечных масс обусловлено нелинейными членами в уравнениях поля.

Отсюда явствует, что из теории поля законы движения вытекают только в том случае, когда уравнения поля нелинейны и удовлетворяют, по крайней мере, четырем тождествам. В общей теории относительности нелинейность уравнений поля обусловлена их ковариантностью относительно общих преобразований координат. Взаимодействие точечных масс является, таким образом, еще одним аргументом в пользу принципа общей ковариантности.

Прежде чем закончить обсуждение общей теории относительности, отметим еще некоторые возникающие здесь проблемы. Общая теория относительности дает нам логически стройную теорию гравитации. Однако электромагнитное поле остается логически независимым от гравитационного; общей теории относительности не удалось объединить эти два типа полей в единое целое. Был предпринят ряд попыток создать „единую“ теорию поля, в которой и электромагнитное и гравитационное поля являлись бы составными частями геометрической структуры пространства. Некоторые из этих попыток будут рассмотрены в третьей части книги.

Далее, общая теория относительности не дает нам удовлетворительной теории строения материи. Существующие в природе элементарные частицы обладают определенными характеристическими массами, зарядами и т. д. Однако теория относительности, в которой частицы представляют собой особенности поля, не может объяснить этого обстоятельства.

Квантовые явления целиком находятся вне сферы рассмотрения общей теории относительности. Волновая механика является нерелятивистской, так как она не может обойтись без представления о действии на расстоянии. Первоначальная теория электрона Дирака описывает лорентц-ковариантным образом действие электромагнитного поля на один электрон; однако, поскольку само поле неквантовано, эта теория не определяет надлежащим образом поля самого электрона, поэтому в ней не могут рассматриваться проблемы, касающиеся взаимодействия нескольких заряженных частиц.

Попытки получения релятивистской квантовой теории квантованием самого электромагнитного поля оказались весьма успешными. Однако все „квантовые теории поля" неудовлетворительны с математической точки зрения в том отношении, что их решения всегда расходятся. Таким образом, в настоящее время не существует удовлетворительной квантовой теории, лорентц-ковариантной или ковариантной относительно общих преобразований координат.

И теория относительности и квантовая теория являются огромными достижениями современной физики по сравнению с физикой девятнадцатого столетия. Однако эти достижения поставили нас лицом к лицу с новыми, в настоящее время еще не решенными проблемами. Невозможно предсказать, как будут преодолены возникшие трудности, несомненно, однако, что будущие теории включат то лучшее, что имеется в квантовой теории и в теории относительности.

Задача

Получить уравнения движения электрически заряженных точечных масс (закон Кулона).

Часть

III

ЕДИНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ

*

Глава XVI

ГРАДИЕНТНО-ИНВАРИАНТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ВЕЙЛЯ

*

В общей теории относительности гравитационное поле образует основу геометрической структуры метрического пространства, в то время как электромагнитное поле не имеет никакого отношения к геометрии пространства. Было сделано много попыток построить новую теорию гравитации и электромагнетизма на основе измененной геометрии, в которой наряду с метрическим тензором нужно было бы ввести и другие геометрические величины. Одной из наиболее удачных геометрий такого типа несомненно является градиентно-инвариантная геометрия Г. Вейля. [1]) Несмотря на красоту геометрических концепций, удовлетворительной теории с ее помощью создать, однако, не удалось.

В этой главе мы рассмотрим геометрию Вейля и соответствующие ей теории поля. Формализм, которым мы будем пользоваться, отличается от вейлевского, но он ему эквивалентен в отношении образования ковариантных величин. Все ковариантные построения вейлевского формализма соответствуют рассматриваемым здесь ковариантным построениям, и наоборот. Однако в нашем формализме нет одной неинвариантной особенности вейлевского формализма — градиентного параметра и соответствующих ему градиентных преобразований.

Геометрия. В метрическом пространстве пространственно-временной интервал между двумя бесконечно близкими мировыми точками $d\tau$ инвариантен. Каждой мировой точке соответствует инвариантный „конус“, „световой конус“, в направлении которого $d\tau$ равно нулю. Идея Вейля заключается в таком видоизменении геометрии, чтобы при

---

[1]) H. Weyl, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., стр. 465 (1918); Ann. d. Physik, 59, 101 (1919).

этом сохранялась бы инвариантность светового конуса, но в то же время $d\tau$ терял бы свой инвариантный характер. Вопрос о том, соответствует ли это опыту, остается открытым. Трудно сомневаться в том, что возможные направления световых лучей являются инвариантными свойствами физического пространства. Но существуют также „атомные часы“, которые являются универсальным стандартом для единиц собственного времени. Конечно, возможно, что частота стандартных спектральных линий в действительности несколько меняется, так что, строго говоря, не существует точных эталонов для измерений собственного времени. Тем не менее, мы попытаемся построить геометрию, удовлетворяющую основным положениям Вейля.

Нулевые направления полностью определяются отношениями различных компонент метрического тензора. Поэтому Вейль ввел, наряду с преобразованиями координат, „градиентные преобразования“, при которых компоненты метрического тензора умножаются на произвольную функцию координат. При этом линейный элемент $d\tau$ умножается на тот же множитель и, следовательно, не является „градиентным инвариантом“. Возможно построить геометрию, инвариантную и относительно градиентных преобразований и относительно преобразований координат.

Вместо градиентных преобразований введем „условия нормировки“ произвольного множителя линейного элемента и потребуем, чтобы детерминант $g_{\mu\nu}$ равнялся -1:

$$|g_{\mu\nu}| = -1. \tag{16.1}$$

Если бы характер преобразования $g_{\mu\nu}$ был сохранен, это условие нормировки не было бы инвариантным. Поэтому предположим в этой главе, что $g_{\mu\nu}$ преобразуются как компоненты тензорной плотности с весом $-{}^1/_2$;

$$g^*_{\mu\nu} = \left|\frac{\partial\xi^{*\alpha}}{\partial\xi^\beta}\right|^{1/2} \frac{\partial\xi^\iota}{\partial\xi^{*\mu}} \frac{\partial\xi^\varkappa}{\partial\xi^{*\nu}} g_{\iota\varkappa}. \tag{16.2}$$

Линейный элемент $d\tau$,

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} d\xi^\mu \, d\xi^\nu,$$

таким образом, уже не является инвариантным. Детерминант может быть представлен в виде произведения метрических тензоров и тензорных плотностей Леви-Чивита:

$$|g_{\mu\nu}| \equiv \delta^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \cdot \delta^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} \cdot g_{\alpha_1\beta_1} \cdot g_{\alpha_2\beta_2} \cdot g_{\alpha_3\beta_3} \cdot g_{\alpha_4\beta_4} \qquad (16.3)$$

Каждая тензорная плотность Леви-Чивита имеет вес $+1$, поэтому детерминант является скаляром, а уравнение (16.1) представляет инвариантное условие. В силу условия нормировки (16.1) метрическая тензорная плотность, имеющая вес $^1/_2$, имеет только девять алгебраически независимых компонент.

Производные в градиентно-инвариантной геометрии. Чтобы получить уравнения поля в геометрии Вейля, надо опять ввести аффинную связность и кривизну. Так как в этой геометрии тензорные плотности с весом играют основную роль, то нужно на них распространить понятие ковариантного дифференцирования. Для этого введем совокупность переменных с одним индексом φ_μ, которые входят в определение ковариантного дифференцирования:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}^{\iota\ldots}{}_{\varkappa\ldots;\sigma} &= \mathfrak{A}^{\iota\ldots}{}_{\varkappa\ldots,\sigma} + \\ &+ \Gamma^{\iota}_{\rho\sigma}\mathfrak{A}^{\rho\ldots}{}_{\varkappa\ldots} - \Gamma^{\rho}_{\varkappa\sigma}\mathfrak{A}^{\iota\ldots}{}_{\rho\ldots} - n\mathfrak{A}^{\iota\ldots}{}_{\varkappa\ldots}\varphi_\sigma. \qquad (16.4)\end{aligned}$$

Здесь n — вес тензорной плотности $\mathfrak{A}^{\iota\ldots}{}_{\varkappa\ldots}$. Чтобы получить закон преобразования φ_μ, достаточно рассмотреть ковариантные производные скалярной плотности D веса n. Эти производные образуют векторную плотность веса n.

$$D^*{}_{;\sigma^*} = \left|\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\xi^{*\beta}}\right|^n \frac{\partial\xi^\iota}{\partial\xi^{*\sigma}} D_{;\iota}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\left(\left|\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\xi^{*\beta}}\right|^n D\right)_{,\iota} \frac{\partial\xi^\iota}{\partial\xi^{*\sigma}} - n\varphi^*_\sigma\left|\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\xi^{*\beta}}\right|^n D &= \\ = \left|\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\xi^{*\beta}}\right|^n (D_{,\iota} - n\varphi_\iota D)\frac{\partial\xi^\iota}{\partial\xi^{*\sigma}};\end{aligned}$$

и поэтому

$$n\left[\left(\log\left|\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\xi^{*\beta}}\right|\right)_{,\iota}\frac{\partial\xi^\iota}{\partial\xi^{*\sigma}} - n\varphi^*_\sigma\right] D = -n\varphi_\iota \frac{\partial\xi^\iota}{\partial\xi^{*\sigma}} D. \qquad (16.5)$$

Логарифмическая производная детерминанта может быть представлена просто, как

$$\left(\log\left|\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial\xi^{*\beta}}\right|\right)_{,\iota}=\frac{\partial\xi^{*\beta}}{\partial\xi^{\alpha}}\frac{\partial\xi^{*\sigma}}{\partial\xi^{\iota}}\frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial\xi^{*\beta}\partial\xi^{*\sigma}}=-\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial\xi^{*\beta}}\frac{\partial^2\xi^{*\beta}}{\partial\xi^{\alpha}\partial\xi^{\iota}}. \quad (16.6)$$

Отсюда получаем, наконец, закон преобразования:

$$\varphi^*_{\sigma}=\frac{\partial\xi^{\iota}}{\partial\xi^{*\sigma}}\varphi_{\iota}+\frac{\partial\xi^{*\beta}}{\partial\xi^{\alpha}}\frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial\xi^{*\beta}\partial\xi^{*\sigma}}=\frac{\partial\xi^{\iota}}{\partial\xi^{*\sigma}}\left(\varphi_{\iota}-\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial\xi^{*\beta}}\frac{\partial^2\xi^{*\beta}}{\partial\xi^{\alpha}\partial\xi^{\iota}}\right) \quad (16.7)$$

В римановой геометрии из условия обращения в нуль ковариантной производной тензора Кронекера δ^{κ}_{ι} следует равенство $\overset{\mathrm{I}}{\Gamma}$ и $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}$ (см. главу V). Определив понятие ковариантного дифференцирования для тензоров с весом, естественно постулировать обращение в нуль ковариантных производных тензорной плотности Леви-Чивита. Это условие связывает величины φ_{μ} с коэфициентами аффинной связности:

$$\begin{gathered}\delta^{\rho\iota_2\iota_3\iota_4}\Gamma^{\iota_1}_{\rho\sigma}+\delta^{\iota_1\rho\iota_3\iota_4}\Gamma^{\iota_2}_{\rho\sigma}+\delta^{\iota_1\iota_2\rho\iota_4}\Gamma^{\iota_3}_{\rho\sigma}+\\+\delta^{\iota_1\iota_2\iota_3\rho}\Gamma^{\iota_4}_{\rho\sigma}-\delta^{\iota_1\iota_2\iota_3\iota_4}\varphi_{\sigma}=0.\end{gathered} \quad (16.8)$$

Левая часть антисимметрична относительно четырех индексов $\iota_1, \ldots, \iota_4$, что может быть проверено непосредственно. Из уравнений (16.8) только те не являются тождествами, в которых все эти четыре индекса имеют различные значения. В этих уравнениях суммирование по ρ в первом члене сводится к подстановке $\rho=\iota_1$, во втором — к $\rho=\iota_2$, и т. д. Следовательно, первые четыре члена (16.8) равны

$$\delta^{\iota_1\iota_2\iota_3\iota_4}\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma},$$

и условия (16.8) сводятся к уравнениям

$$\varphi_{\sigma}=\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}. \quad (16.9)$$

В геометрии Вейля метрическая тензорная плотность с весом $^1/_2$ играет ту же роль, что метрический тензор в римановой геометрии. Поэтому предположим, что его ковариантные производные равны нулю. Если, как и прежде, еще предположить, что коэфициенты аффинной связности симметричны в своих нижних индексах, получим уравнения:

$$g_{\mu\nu;\rho} \equiv g_{\mu\nu,\rho} - g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - g_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\varphi_{\rho} = 0. \quad (16.10)$$

Эти уравнения можно решить, если ввести „контравариантную метрическую тензорную плотность" с весом $+{}^1/_2$, $g^{\mu\nu}$

$$g_{\iota\mu}g^{\mu\nu} = \delta^{\nu}_{\iota}. \quad (16.11)$$

Решение уравнения (16.10) тогда запишется в виде

$$\Gamma^{\lambda}_{\iota\varkappa} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(g_{\iota\sigma,\varkappa} + g_{\varkappa\sigma,\iota} - g_{\iota\varkappa,\sigma}) +$$

$$+ \frac{1}{4} g^{\lambda\sigma}(g_{\iota\sigma}\varphi_{\varkappa} + g_{\varkappa\sigma}\varphi_{\iota} - g_{\iota\varkappa}\varphi_{\sigma}) \equiv (^{\lambda}_{\iota\varkappa}). \quad (16.12)$$

Для свернутой аффинной связности $(^{\iota}_{\iota\varkappa})$ снова получим уравнение (16.9). Псевдовектор φ_{ι} и метрическая тензорная плотность с весом ${}^1/_2$ $g_{\mu\nu}$ независимы друг от друга. Оба они необходимы для образования коэфициентов аффинной связности.

Тензор кривизны $R_{\iota\varkappa\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ антисимметричен в ι и $\varkappa$, обладает циклической симметрией, выражаемой формулой (11.29) и удовлетворяет тождествам Бьянки (11.35), так как эти тождества справедливы для любого тензора кривизны, образованного при помощи симметричных $\Gamma^{\lambda}_{\iota\varkappa}$. Однако он не обладает другими свойствами симметрии тензора кривизны римановой геометрии. Свернутый тензор $R_{\iota\varkappa\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\iota}$ также не является симметричным относительно индексов $\varkappa$ и λ. Поэтому при образовании свернутых тождеств Бьянки следует соблюдать некоторую осторожность.

Свернем сначала тождества

$$R_{\iota\varkappa\sigma\cdot;\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + R_{\varkappa\lambda\sigma\cdot;\iota}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + R_{\lambda\iota\sigma\cdot;\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\nu} \equiv 0 \quad (16.13)$$

по индексам ι и ν. Тогда получим тождества:

$$R_{\rho\varkappa\sigma\cdot;\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\rho} + R_{\varkappa\lambda\sigma\cdot;\rho}^{\cdot\cdot\cdot\rho} + R_{\lambda\rho\sigma\cdot;\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\rho} = R_{\rho\varkappa\sigma\cdot;\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\rho} + R_{\varkappa\lambda\sigma\cdot;\rho}^{\cdot\cdot\cdot\rho} -$$

$$- R_{\rho\lambda\sigma\cdot;\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\rho} \equiv 0 \quad (16.14)$$

Поднимая далее индекс σ и свертывая по $\varkappa$ и σ, получим

$$R_{\rho\sigma\cdot\cdot;\lambda}^{\ \ \sigma\rho}+R_{\sigma\lambda\cdot\cdot;\rho}^{\ \ \sigma\rho}-R_{\rho\lambda\cdot\cdot;\sigma}^{\ \ \sigma\rho}\equiv 0, \tag{16.15}$$

где величины R являются п л о т н о с т я м и.

В римановой геометрии тензор кривизны антисимметричен в последних двух индексах, благодаря чему, как было показано, второй и третий члены в (16.15) становятся равными. В геометрии Вейля эти соображения неприменимы. В этой геометрии аналогичной величиной, симметричной в последних двух индексах, является ковариантная тензорная плотность кривизны $R_{\iota\varkappa\lambda\mu}$. Введем обозначения

$$\begin{aligned}(\iota\varkappa,\lambda)=g_{\lambda\sigma}\left\{{\sigma \atop \iota\varkappa}\right\}=\frac{1}{2}\,(g_{\iota\lambda,\varkappa}+g_{\varkappa\lambda,\iota}-g_{\iota\varkappa,\lambda})+\\ +\frac{1}{4}\,(g_{\iota\lambda}\varphi_\varkappa+g_{\varkappa\lambda}\varphi_\iota-g_{\iota\varkappa}\varphi_\lambda),\end{aligned} \tag{16.16}$$

где $g_{\iota\varkappa,\lambda}$ — производные метрического тензора. Тогда

$$g_{\iota\varkappa,\lambda}=(\varkappa\lambda,\iota)+(\iota\lambda,\varkappa)-\frac{1}{2}\,g_{\iota\varkappa}\varphi_\lambda. \tag{16.17}$$

С помощью $(\iota\varkappa,\lambda)$ ковариантная тензорная плотность кривизны может быть представлена в виде

$$\left.\begin{aligned}R_{\iota\varkappa\lambda\mu}=(\lambda\iota,\mu)_{,\varkappa}+\frac{1}{2}\,(\lambda\iota,\mu)\,\varphi_\varkappa-(\lambda\varkappa,\mu)_{,\iota}-\\ -\frac{1}{2}\,(\lambda\varkappa,\mu)\,\varphi_\iota+g^{\rho\sigma}\left[(\lambda\varkappa,\rho)\,(\mu\iota,\sigma)-(\lambda\iota,\rho)\,(\mu\varkappa,\sigma)\right]=\\ =\overline{R}_{\iota\varkappa\lambda\mu}+\frac{1}{4}\left[g_{\iota\mu}\varphi_{\lambda,\varkappa}-g_{\varkappa\mu}\varphi_{\lambda,\iota}+g_{\lambda\mu}\,(\varphi_{\iota,\varkappa}-\varphi_{\varkappa,\iota})+\right.\\ \left.+g_{\varkappa\lambda}\varphi_{\mu,\iota}-g_{\iota\lambda}\varphi_{\mu,\varkappa}\right].\end{aligned}\right\} \tag{16.18}$$

В $\overline{R}_{\iota\varkappa\lambda\mu}$ справа включены все члены, обладающие всеми теми же алгебраическими свойствами симметрии, что и римановский тензор кривизны; остальные члены этими свойствами не обладают. Последние обладают только свойствами симметрии (11.28) и (11.29). Если образовать выражение $R_{\iota\varkappa\lambda\mu}+R_{\iota\varkappa\mu\lambda}$, равное нулю в римановой геометрии, получим

$$R_{\iota\varkappa\lambda\mu}=-R_{\iota\varkappa\mu\lambda}+2g_{\lambda\mu}\,(\varphi_{\iota,\varkappa}-\varphi_{\varkappa,\iota}). \tag{16.19}$$

Хотя φ_ι и не является вектором, его антисимметричные производные

$$\varphi_{\iota\varkappa}=\varphi_{\iota,\varkappa}-\varphi_{\varkappa,\iota} \tag{16.20}$$

образуют тензор, что может быть проверено с помощью (16.7).

Видоизменяя второй член (16.15) с помощью (16.19), получим

$$R_{\rho\sigma\cdot\cdot;\lambda}^{\ \ \ \sigma\rho}-2R_{\rho\lambda\cdot\cdot;\sigma}^{\ \ \ \sigma\rho}+2g^{\rho\sigma}\varphi_{\sigma\lambda;\rho}\equiv 0. \tag{16.21}$$

Это тождество можно преобразовать так, чтобы в него вошла симметрическая часть выражения $R_{\rho\varkappa\lambda\cdot}^{\ \ \ \ \rho}$,

$$R_{\varkappa\lambda}=\frac{1}{2}(R_{\rho\varkappa\lambda\cdot}^{\ \ \ \ \rho}+R_{\rho\lambda\varkappa\cdot}^{\ \ \ \ \rho}). \tag{16.22}$$

Из (16.18) находим, что $R_{\varkappa\lambda}$ и $R_{\rho\varkappa\lambda\cdot}^{\ \ \ \ \rho}$ связаны следующим образом:

$$R_{\rho\varkappa\lambda\cdot}^{\ \ \ \ \rho}=R_{\varkappa\lambda}+\frac{1}{2}\varphi_{\lambda\varkappa}. \tag{16.23}$$

Подставляя это выражение в (16.21) получим свернутые тождества Бьянки в виде

$$\left(R^{\lambda\sigma}-\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}R\right)_{;\sigma}+\frac{1}{2}\varphi^{\lambda\sigma}_{\ \ ;\sigma}=0. \tag{16.24}$$

Заметим, что $\varphi^{\lambda\sigma}$ является тензорной плотностью с весом 1, и, следовательно, $\varphi^{\lambda\sigma}{}_{;\sigma}$, представляет собой о б ы ч н у ю дивергенцию от $\varphi^{\lambda\sigma}$, т. е.

$$\varphi^{\lambda\sigma}{}_{;\sigma}\equiv\varphi^{\lambda\sigma}{}_{,\sigma}. \tag{16.25}$$

Физическая интерпретация геометрии Вейля. В геометрии Вейля геометрическая структура пространства характеризуется симметрической тензорной плотностью с весом $^1/_2$ $g_{\mu\nu}$ и „псевдовектором" φ_μ. Казалось бы естественным предположить, что $g_{\mu\nu}$ представляет гравитационное поле, а φ_μ являются компонентами мирового вектора потенциала. В первоначальном формализме Вейля величины φ_μ преобразовывались как вектор при преобразовании координат, но изменялись на градиент при градиентном преобразовании. Это и является исторической причиной, почему прибавление градиента к электромагнитному мировому вектору потенциалу носит название градиентного преобразования.

Составим теперь уравнения поля для $g_{\mu\nu}$ и φ_μ.

Вариационный принцип Вейля. Вейль стремился получить уравнения поля, как уравнения Лагранжа-Эйлера вариационного принципа. Покажем следующее: если вариационный принцип инвариантен относительно преобразования координат, то эти уравнения всегда удовлетворяют необходимому количеству тождеств.

Рассмотрим вариационный принцип в виде:

$$\delta I \equiv \delta \int\limits_V \mathfrak{R}(y_A, y_{A,\rho}, \ldots)\, d\xi = 0, \tag{16.26}$$

где индексы A, $B, \ldots$ служат для нумерации переменных поля y. Если варьировать y_A так, чтобы вариации и их производные вплоть до нужного порядка исчезали на границе области V, то вариация интеграла (16.26) примет вид

$$\delta I = \int\limits_V \sum_A \mathfrak{R}^A\, \delta y_A d\xi, \tag{16.27}$$

и уравнения

$$\mathfrak{R}^A = 0 \tag{16.28}$$

будут уравнениями Эйлера-Лагранжа вариационного принципа (16.26). Будем изменять переменные y_A на величины, соответствующие бесконечно малым преобразованиям координат

$$\xi^{*\alpha} = \xi^\alpha + \delta\xi^\alpha(\xi^\rho). \tag{16.29}$$

Если $\delta\xi^\alpha$ и их производные исчезают на границе V, то значение I не изменится при вариации, независимо от того, удовлетворяются уравнения (16.28) или нет.

При преобразовании координат (16.29) функции y_A претерпевают бесконечно малые изменения δy_A, которые зависят от $\delta\xi^\alpha$ и от специального вида закона преобразования y_A. Рассмотрим случай, когда некоторые из y_A являются компонентами контравариантного вектора Y^ρ. При переходе от координат ξ^α к координатам $\xi^{*\alpha}$ преобразованные компоненты вектора станут новыми функциями от ξ^α; кроме того, аргументы этих функций ξ^α должны быть заменены на $\xi^{*\alpha}$. Если выразить преобразованные компоненты векторного поля $\overline{Y}^\rho(\xi^\alpha)$, как функции первоначальных координат, получим

$$\overline{Y}^\rho(\xi^\alpha) = Y^\rho(\xi^\alpha) + (\delta\xi^\rho)_{,\sigma} Y^\sigma(\xi^\alpha). \tag{16.30}$$

В каждой мировой точке величины $\overline{Y}^\rho(\xi^\alpha)$ равны $Y^{*\rho}(\xi^{*\alpha})$, т. е.

$$\overline{Y}^\rho(\xi^\sigma) = Y^{*\rho}(\xi^{*\alpha}), \tag{16.31}$$

где ξ^α и $\xi^{*\alpha}$ — соответственно первоначальные и новые координаты в одной и той же мировой точке. Чтобы найти разность значений функций $\overline{Y}^\rho$ и $Y^{*\rho}$ для одинаковых значений соответствующих аргументов, нужно сравнить $\overline{Y}^\rho$ в мировой точке с координатами $\xi^\alpha = \overset{0}{\xi}{}^\alpha$ с $Y^{*\rho}$ в мировой точке с координатами $\xi^{*\alpha} = \overset{0}{\xi}{}^\alpha$. Тогда получим

$$Y^{*\rho}(\overset{0}{\xi}{}^\alpha) = \overline{Y}^\rho(\overset{0}{\xi}{}^\alpha - \delta\xi^\alpha) = \overline{Y}^\rho(\overset{0}{\xi}{}^\alpha) - Y^\rho{}_{,\sigma}\,\delta\xi^\sigma; \tag{16.32}$$

и поэтому бесконечно малым изменением функции Y^ρ будет

$$\delta Y^\rho = (\delta\xi^\rho)_{,\sigma} Y^\sigma - Y^\rho{}_{,\sigma}\,\delta\xi^\sigma. \tag{16.33}$$

Вообще говоря, компоненты тензоров и тензорных плотностей преобразуются согласно законам типа

$$\delta y_A = -y_{A,\sigma}\,\delta\xi^\sigma + \sum_B F^{B\rho}_{A\sigma} y_B (\delta\xi^\sigma)_{,\rho}, \tag{16.34}$$

где постоянные $F^{B\rho}_{A\sigma}$ зависят от особенностей законов преобразования. В законе преобразования φ_μ имеется один член, не относящийся к типу (16.34). Чтобы его учесть, предположим, что рассматриваемые переменные поля преобразуются согласно закону

$$\delta y_A = -y_{A,\sigma}\,\delta\xi^\sigma + \sum_B F^{B\rho}_{A\sigma} y_B (\delta\xi^\sigma)_{,\rho} + G^{\rho\tau}_{A\sigma}(\delta\xi^\sigma)_{,\rho\tau}, \tag{16.35}$$

где $G^{\rho\tau}_{A\sigma}$ — добавочные постоянные.

Чтобы найти условие инвариантности I относительно общих преобразований координат, заменим δy_A в (16.27) его выражением (16.35). Тогда δI должно обращаться в нуль при произвольных $\delta\xi^\alpha$, если только $\delta\xi^\alpha$ и его первые и вторые производные исчезают на границе области V. Имеем

$$\left.\begin{aligned}\delta I = \int\limits_V \sum_A \mathfrak{R}^A \{ -y_{A,\sigma}\,\delta\xi^\sigma + \sum_B F^{B\rho}_{A\sigma}\, y_B (\delta\xi^\sigma)_{,\rho} + \\ + G^{\rho\tau}_{A\sigma} (\delta\xi^\sigma)_{,\rho\tau} \}\, d\xi \equiv 0.\end{aligned}\right\} \quad (16.36)$$

Производя ряд интегрирований по частям, получим отсюда

$$\int\limits_V \sum_A \{ G^{\rho\tau}_{A\sigma} \mathfrak{R}^A_{,\rho\tau} - \sum_B F^{B\rho}_{A\sigma} (y_B \mathfrak{R}^A)_{,\rho} - y_{A,\sigma} \mathfrak{R}^A \}\, \delta\xi^\sigma\, d\xi \equiv 0,$$

и если $\delta\xi^\sigma$ произвольны внутри V, то уравнения Эйлера-Лагранжа должны удовлетворять четырем дифференциальным тождествам

$$\sum_A \{ G^{\rho\tau}_{A\sigma} \mathfrak{R}^A_{,\rho\tau} - \sum_B F^{B\rho}_{A\sigma} (y_B \mathfrak{R}^A)_{,\rho} - y_{A,\sigma} \mathfrak{R}^A \} \equiv 0. \quad (16.37)$$

Рассмотрим теперь вариационный принцип в градиентно-инвариантной теории Вейля. Подинтегральное выражение инвариантного интеграла должно быть скалярной плотностью с весом $+1$. Скалярная плотность кривизны

$$R = g^{\varkappa\lambda} R_{\varkappa\lambda} \quad (16.38)$$

имеет вес $+{}^1/_2$. Поэтому лангранжиан вариационного принципа должен быть квадратичной функцией кривизны. Существует несколько скалярных плотностей с весом $+1$, которые могут быть образованы из компонент тензора кривизны, именно:

$$R^2;\ R_{\varkappa\lambda} R^{\varkappa\lambda};\ R_{\iota\varkappa\lambda\mu} R^{\iota\varkappa\lambda\mu};\ \varphi_{\varkappa\lambda} \varphi^{\varkappa\lambda}. \quad (16.39)$$

Первые три из них являются дифференциальными величинами четвертого порядка относительно $g_{\mu\nu}$. Наиболее общий лагранжиан такого порядка должен быть линейной комбинацией четырех выражений (16.39). Вариации десяти

$g_{\mu\nu}$ независимы друг от друга, но связаны добавочным условием неизменности нормировки детерминанта g:

$$g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}=0. \tag{16.40}$$

Это дополнительное условие легко учесть, применяя метод неопределенных множителей Лагранжа. Появляющийся, таким образом, в уравнениях добавочный параметр можно, однако, исключить, тогда в конечном счете получим тринадцать дифференциальных уравнений для тринадцати переменных $g_{\mu\nu}$, φ_μ ($g_{\mu\nu}$ удовлетворяет условию (16.1)). Эти тринадцать уравнений удовлетворяют четырем дифференциальным тождествам (16.37).

Существуют два основных возражения относительно уравнений этого типа. Во-первых, они являются дифференциальными уравнениями четвертого порядка относительно $g_{\mu\nu}$. Имеются все основания полагать, что уравнения такого высокого порядка имеют гораздо больше решений, чем уравнения поля второго порядка, поэтому очень трудно объяснить, почему решения этих гипотетических уравнений четвертого порядка так хорошо аппроксимируются в природе решениями уравнений второго порядка. Во-вторых, лагранжиан вариационного принципа не является однозначно определенным, так как для него годится любая линейная комбинация выражений (16.39). Таким образом, не достигается желательной унификации поля, так как остается еще чисто „электромагнитная" скалярная плотность [последнее выражение (16.39)], которая может входить в лагранжиан с произвольным коэфициентом.

Уравнения $G_{\mu\nu}=0$. Эйнштейн и автор этой книги сделали попытку найти уравнения поля в т о р о г о порядка, аналогичные по структуре уравнениям общей теории относительности[1]. В частности, они исследовали дифференциальные уравнения

$$G_{\mu\nu}=0, \tag{16.41}$$

[1]) Эта работа не опубликована.

которые представляют собой десять уравнений для тринадцати переменных; они не удовлетворяют дифференциальным тождествам и совершенно независимы друг от друга. В соответствии с уравнениями (16.24), уравнения Максвелла

$$\varphi^{\mu\sigma}{}_{,\sigma} = 0 \tag{16.42}$$

являются следствием этих уравнений поля. Оказалось, что эти уравнения имеют сферически симметричные статические решения с двумя произвольными параметрами, которые можно интерпретировать соответственно, как массу и заряд. Если φ_μ равно нулю, уравнения (16.41) для $g_{\mu\nu}$ формально идентичны с уравнениями поля общей теории относительности; решение с зарядом, равным нулю, оказывается решением Шварцшильда, детерминант которого равен -1. Однако, если „электрический заряд" не равен нулю, то граничные условия на бесконечности не могут быть удовлетворены, и отклонение метрического тензора от $\varepsilon_{\rho\sigma}$ возрастает с увеличением r. Этот результат является убедительным доказательством того, что уравнения поля (16.41) также не согласуются с нашими основными физическими представлениями.

Глава XVII

ПЯТИМЕРНАЯ ТЕОРИЯ КАЛУЗА И ПРОЕКТИВНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ

*

Теория Калуза. Остановимся еще на одной попытке создания геометрии (принадлежащей Калуза), в которой как гравитационный, так и электромагнитный потенциалы определяли бы структуру пространства[1]). В то время как Вейль пошел по пути создания нериманововой геометрии, Калуза решил увеличить число компонент метрического тензора, изменив число измерений пространства. Он предположил, что, кроме четырех измерений физического пространства, существует еще пятое измерение, не имеющее прямого физического смысла.

Количество компонент симметричного тензора второго ранга в n измерениях равно

$$N=\frac{1}{2}n(n+1). \tag{17.1}$$

В пятимерном пространстве метрический тензор имеет, таким образом, пятнадцать компонент. Для того, чтобы учесть четырехмерный характер физического мира, Калуза предположил, что при соответствующем выборе координат компоненты метрического тензора не будут зависеть от пятой координаты. Наконец, чтобы уменьшить количество переменных на единицу, он принял, что в той системе координат, где переменные поля не зависят от ξ^5, компонента метрического тензора с индексами (5,5) — постоянная и равна единице. Исходя из этих предположений, Калуза показал, что, по крайней мере в первом приближении, четырнадцать дифференциальных уравнений:

$$G_{\mu\nu}=0\,(\mu,\nu=1,\ldots,5, \text{ кроме } G_{55}=0) \tag{17.2}$$

---

[1]) Th. Kaluza, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., стр. 966 (1921).

эквивалентны четырнадцати уравнениям поля (12.55), определяющим гравитационное и электромагнитные поля, если компоненты метрического тензора, в которых один индекс равен 5, отождествить с электромагнитными потенциалами.

Вскоре было показано, что эта эквивалентность является не приближенной, а точной, если за гравитационные потенциалы принять „собственные“ комбинации компонент метрического тензора.

Чтобы облегчить сравнение теории Калуза с другими теориями, разовьем сначала общий формализм, применимый и в некоторых других теориях, а затем возвратимся к строгой формулировке предположений Калуза.

Четырехмерный формализм в пятимерном пространстве. Рассмотрим пятимерное пространство с координатами ξ^α $(\alpha = 1, \ldots, 5)$ и метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$. В дальнейшем в этой главе и в главе XVIII предполагается, что греческие индексы пробегают значения от 1 до 5, в то время как латинские индексы — от 1 до 4. В этом пространстве мы введем четыре п а р а м е т р а x^a $(a = 1, \ldots, 4)$, которые являются функциями координат ξ^α. Производные этих четырех параметров по координатам $x^a{}_{,\alpha}$ должны быть линейно независимы во всех отношениях:

$$\left.\begin{array}{l}\delta_{a_1a_2a_3a_4}\,\delta^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta}\,x^{a_1}{}_{,\alpha_1}\cdot x^{a_2}{}_{,\alpha_2}\cdot x^{a_3}{}_{,\alpha_3}\cdot x^{a_4}{}_{,\alpha_4}\neq 0,\\ \text{по крайней мере для одного из значений } \beta.\end{array}\right\}\qquad(17.3)$$

В пятимерном пространстве эти четыре параметра определяют совокупность кривых $x^a = \text{const}$. Через каждую точку пятимерного пространства проходит одна из этих кривых. Будем рассматривать эти кривые, как новую инвариантную структуру в пятимерном пространстве. Эта структура остается неизменной при „параметрических преобразованиях“

$$x^{*a} = f^a(x^b). \qquad (17.4)$$

Покажем, что возможно ввести величины, преобразующиеся при параметрических преобразованиях, как четырехмерные тензоры. В физической интерпретации, на которой мы остановимся ниже, многообразие, характеризуемое параметрами x^a, будет рассматриваться как физическое пространство; поэтому исследуем, насколько геометрия пространства x^a связана с геометрией обычного четырехмерного риманова пространства.

Совокупность функций от ξ^α, характеризующихся индексами, пробегающими значения от 1 до 4, и преобразующихся при параметрических преобразованиях, как четырехмерные тензоры, назовем „p-т е н з о р о м" (сокращение от „parameter tensor"). Производные x^a по координатам

$$\gamma^a_\alpha = x^a{}_{,\alpha} \tag{17.5}$$

являются контравариантными p-векторами и ковариантными (обычными) векторами. С помощью этих величин можно ввести векторное поле A^α, определяемое векторами, касательными к кривым $x^a = \text{const}$, которое удовлетворяет уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \gamma^a_\alpha A^\alpha &= 0, \\ \gamma_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{17.6}$$

Эти пять условий полностью определяют **A**-поле.

С помощью γ^a_α и A^α можно определить поле „взаимное γ", γ^α_a, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} \gamma^a_\alpha \gamma^\alpha_b &= \delta^a_b, \\ A_\alpha \gamma^\alpha_a &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.7}$$

Эти двадцать условий полностью определяют γ^α_a.

Каждому (обычному) вектору V^α или W_β можно поставить в соответствие скаляр или p-вектор:

$$\left.\begin{aligned} V^a &= \gamma^a_\alpha V^\alpha, \\ V &= A_\alpha V^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{17.8}$$

$$\left.\begin{aligned} W_b &= \gamma^\beta_b W_\beta, \\ W &= A^\beta W_\beta. \end{aligned}\right\} \tag{17.9}$$

Скаляр представляет собой часть **V** или **W**, параллельную **A**, тогда как p-вектор — часть, нормальную к **A**.

С другой стороны, p-вектору U^a можно поставить в соответствие обычный вектор

$$U^\alpha = \gamma^\alpha_a U^a \tag{17.10}$$

(условие суммирования распространяется и на p-индексы); этот вектор ортогонален **A**, независимо от выбора U^a (в силу последних четырех уравнений (17.7)).

Метрическому тензору $\gamma_{\alpha\beta}$ можно сопоставить ковариантный p-тензор

$$g_{ab} = \gamma^\alpha_a \gamma^\beta_b \gamma_{\alpha\beta}, \tag{17.11}$$

который мы будем называть метрическим p-тензором или p-метрикой.

Смешанные γ-величины обоего типа и вектор A^α дают нам возможность разложить каждое пятимерное соотношение на „четырехмерное" и скалярное соотношения. Смешанные γ-величины „проектируют" пятимерное пространство на наше четырехмерное. Если их произведение свернуть по p-индексам, получим типичный проективный тензор

$$\left.\begin{array}{l} \gamma^a_\alpha \gamma^\beta_a = \varepsilon^\beta_\alpha, \\ \varepsilon^\beta_\alpha A_\beta = 0, \quad \varepsilon^\beta_\alpha A^\alpha = 0, \quad \varepsilon^\beta_\alpha \varepsilon^\gamma_\beta = \varepsilon^\gamma_\alpha. \end{array}\right\} \tag{17.12}$$

Произведение любого вектора на ε^β_α ортогонально **A**. Легко показать, что ε^β_α может быть выражен через символ Кронекера и вектор **A**:

$$\varepsilon^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - A_\alpha A^\beta. \tag{17.13}$$

Доказательство производится посредством умножения выражения $(\delta^\beta_\alpha - A_\alpha A^\beta - \varepsilon^\beta_\alpha)$ на пять линейно независимых пятикомпонентных совокупностей γ^α_a, A^α. Все пять произведений

$$(\delta^\beta_\alpha - A_\alpha A^\beta - \varepsilon^\beta_\alpha)\,\gamma^\alpha_a = 0,$$

$$(\delta^\beta_\alpha - A_\alpha A^\beta - \varepsilon^\beta_\alpha)\,A^\alpha = 0$$

равны нулю. Но если произведение пятирядной матрицы на пять независимых „векторов" равно нулю, то такая матрица будет нулевой матрицей.

Каждый вектор может быть представлен через соответствующие ему p-вектор и скаляр следующим образом:

$$U^{\alpha} = \gamma^{\alpha}_{a} U^{a} + A^{\alpha} U. \tag{17.14}$$

Действительно, если заменить U^{α} и U выражениями (17.8), то для правой части (17.14) получим

$$\gamma^{\alpha}_{a} \gamma^{a}_{\beta} U^{\beta} + A^{\alpha} A_{\beta} U^{\beta} = (\varepsilon^{\alpha}_{\beta} + A^{\alpha} A_{\beta}) U^{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} U^{\beta} = U^{\alpha}.$$

Анализ в p-формализме. Кроме дифференциальных ковариантов риманова пятимерного пространства, существуют еще дифференциальные коварианты, свойственные только рассматриваемому здесь формализму. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Внутреннее произведение (обычной) производной p-тензора на вектор A^{α}

$$t^{l\ldots}{}_{k\ldots,\alpha} A^{\alpha}$$

является p-тензором того же типа. Доказательство проводится непосредственным вычислением. Будем называть этот тип ковариантного дифференцирования A-дифференцированием. p-тензор, A-производная которого равна нулю, будем называть полем, цилиндрическим относительно А-поля, или, короче, A-цилиндрическим.

Рассмотрим теперь некоторые из таких A-производных. В первую очередь остановимся на A-производной метрического p-тензора, $g_{mn,\alpha} A^{\alpha}$. Покажем, что она может быть выражена через ковариантные производные А-поля. Величины $g_{mn,\alpha} A^{\alpha}$ можно заменить выражением

$$g_{mn,\alpha} A^{\alpha} = \gamma^{\rho}_{m} \gamma^{\sigma}_{n} \cdot \gamma^{r}_{\rho} \gamma^{s}_{\sigma} g_{rs,\alpha} A^{\alpha}.$$

Преобразуем произведение, стоящее справа от точки:

$$\gamma^r_\rho\gamma^s_\sigma g_{rs,\,\alpha}A^\alpha=[(\gamma^r_\rho\gamma^s_\sigma g_{rs})_{,\alpha}-(\gamma^r_\rho\gamma^s_\sigma)_{,\alpha}g_{rs}]\,A^\alpha=$$
$$=[(\gamma_{\rho\sigma}-A_\rho A_\sigma)_{,\alpha}-(\gamma^r_{\alpha,\,\rho}\gamma^s_\sigma+\gamma^r_\rho\gamma^s_{\alpha,\,\sigma})\,g_{rs}]\,A^\alpha=$$
$$=[\gamma_{\rho\sigma,\,\alpha}-A_{\rho,\,\alpha}A_\sigma-A_{\sigma,\,\alpha}A_\rho]\,A^\alpha+$$
$$+(\gamma^r_\alpha\gamma^s_\sigma A^\alpha{}_{,\,\rho}+\gamma^r_\rho\gamma^s_\alpha A^\alpha{}_{,\,\sigma})\,g_{rs}=$$
$$=(\gamma_{\rho\sigma,\,\alpha}-A_{\rho,\,\alpha}A_\sigma-A_{\sigma,\,\alpha}A_\rho)\,A^\alpha+$$
$$+(\gamma_{\alpha\sigma}-A_\alpha A_\sigma)\,A^\alpha{}_{,\,\rho}+(\gamma_{\sigma\rho}-A_\alpha A_\rho)\,A^\alpha{}_{,\,\sigma}=$$
$$=(\gamma_{\rho\sigma,\,\alpha}-A_{\rho,\,\alpha}A_\sigma-A_{\sigma,\,\alpha}A_\rho)\,A^\alpha+$$
$$+(A_{\sigma,\,\rho}+A_{\rho,\,\sigma})-A^\alpha(\gamma_{\alpha\sigma,\,\rho}+\gamma_{\alpha\rho,\,\sigma})+$$
$$+A^\alpha(A_\sigma A_{\alpha,\,\rho}+A_\rho A_{\alpha,\,\sigma}).$$

Теперь можно сгруппировать члены таким образом, чтобы получить выражение (пятимерного) тензора:

$$\left.\begin{aligned}\gamma^r_\rho\gamma^s_\sigma g_{rs,\,\alpha}A^\alpha&=(A_{\rho,\,\sigma}+A_{\sigma,\,\rho}-2\,[\rho\sigma,\,\alpha]\,A^\alpha)-\\&-(A_{\rho\alpha}A_\sigma+A_{\sigma\alpha}A_\rho)\,A^\alpha=\\&=A_{\rho;\,\sigma}+A_{\sigma;\,\rho}-(B_\rho A_\sigma+B_\sigma A_\rho),\end{aligned}\right\}\qquad(17.15)$$

где $A_{\rho\sigma}$ и B_ρ — соответственно тензор и вектор, определяемые выражениями:

$$A_{\rho\sigma}=A_{\rho,\,\sigma}-A_{\sigma,\,\rho},\qquad(17.16)$$
$$B_\rho=A_{\rho\sigma}A^\sigma.\qquad(17.17)$$

Для A-производной метрического тензора, находим, таким образом:

$$g_{mn,\,\alpha}A^\alpha=\gamma^\rho_m\gamma^\sigma_n\,(A_{\rho;\,\sigma}+A_{\sigma;\,\rho}).\qquad(17.18)$$

Квадрат линейного элемента

$$d\tau^2=\gamma_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta,$$

равен сумме квадратов p-линейного элемента

$$ds^2=g_{ab}\,\gamma^a_\alpha\gamma^b_\beta\,d\xi^\alpha\,d\xi^\beta,\qquad(17.19)$$

и компоненты дифференциала координатного вектора в A-направлении

$$d\tau_A^2 = (A_\alpha d\xi^\alpha)^2.$$

Рассмотрим произвольную кривую в пятимерном пространстве, конечные точки которой суть P_1 и P_2. Если всю кривую сместить так, чтобы все ее точки сдвинулись вдоль A-кривых на одно и то же расстояние, то p-длина кривой

$$s_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2} ds \tag{17.20}$$

останется неизменной, если p-метрика является A-цилиндрической. A-длина кривой останется неизменной, если вектор B_ρ равен нулю:

$$B_\rho = 0, \tag{17.21}$$

а (пятимерная) длина кривой не изменится, если **А**-поле удовлетворяет уравнению Киллинга

$$A_{\rho;\sigma} + A_{\sigma;\rho} = 0. \tag{17.22}$$

Для того, чтобы p-метрика была цилиндрической, достаточно, чтобы правая часть уравнения (17.15) равнялась нулю. Это условие слабее, чем условие Киллинга, так как произведение правой части уравнения (17.15) на A^ρ тождественно равно нулю; другими словами, существует только десять алгебраически независимых компонент уравнения (17.15), в то время как уравнения Киллинга имеют пятнадцать компонент. Очевидно, что из одновременной цилиндричности p-метрики и цилиндричности „A-метрики" следует цилиндричность (пятимерной) метрики, и наоборот.

Далее рассмотрим A-производную от антисимметричного p-тензора φ_{rs},

$$\varphi_{rs} = \gamma_r^\rho \gamma_s^\sigma A_{\rho\sigma}. \tag{17.23}$$

Этот тензор φ_{rs} впоследствии будет интерпретирован, как тензор электромагнитного поля. Его A-производными будут

$$\begin{aligned} \varphi_{rs,\alpha} A^\alpha &= \gamma_r^\rho \gamma_s^\sigma \cdot \gamma_\rho^m \gamma_\sigma^n \varphi_{mn,\alpha} A^\alpha = \\ &= \gamma_r^\rho \gamma_s^\sigma \cdot [\varphi_{\rho\sigma,\alpha} - \varphi_{mn} (\gamma_\rho^m \gamma_\sigma^n)_{,\alpha}] A^\alpha, \end{aligned}$$

$$\varphi_{\rho\sigma} = \gamma_\rho^r \gamma_\sigma^s \varphi_{rs}.$$

В квадратных скобках исключим γ^m_ρ и γ^n_σ. Это можно сделать при помощи следующего преобразования:

$$\varphi_{mn}(\gamma^m_\rho\gamma^n_\sigma)_{,\alpha}A^\alpha=\varphi_{mn}(\gamma^m_{\alpha,\rho}\gamma^n_\sigma+\gamma^m_\rho\gamma^n_{\alpha,\sigma})A^\alpha=$$
$$=-\varphi_{mn}(\gamma^m_\alpha\gamma^n_\sigma A^\alpha{}_{,\rho}+\gamma^m_\rho\gamma^n_\alpha A^\alpha{}_{,\sigma})=$$
$$=\varphi_{\sigma\alpha}A^\alpha{}_{,\rho}-\varphi_{\rho\alpha}A^\alpha{}_{,\sigma}.$$

Поэтому имеем:

$$\varphi_{rs,\alpha}A^\alpha=\gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s[\varphi_{\rho\sigma,\alpha}A^\alpha+\varphi_{\rho\alpha}A^\alpha{}_{,\sigma}-\varphi_{\sigma\alpha}A^\alpha{}_{,\rho}].$$

Так как произведение $\varphi_{\rho\alpha}$ на A^α равно нулю, имеем

$$\varphi_{rs,\alpha}A^\alpha=\gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s(\varphi_{\rho\sigma,\alpha}+\varphi_{\sigma\alpha,\rho}+\varphi_{\alpha\rho,\sigma})A^\alpha=$$
$$=\gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s[(\varepsilon^\mu_\rho\varepsilon^\nu_\sigma A_{\mu\nu})_{,\alpha}+(\varepsilon^\mu_\sigma\varepsilon^\nu_\alpha A_{\mu\nu})_{,\rho}+$$
$$+(\varepsilon^\mu_\alpha\varepsilon^\nu_\rho A_{\mu\nu})_{,\sigma}]A^\alpha.$$

Чтобы вычислить выражение в квадратных скобках, примем во внимание, что циклическая производная от $A_{\mu\nu}$ равна нулю и что $A^\mu A^\nu A_{\mu\nu}$ также равно нулю. Учитывать при этом нужно только те члены, в которых один из двух множителей ε^μ_ρ заменем на δ^μ_ρ, а другой — на $(-A^\mu A_\rho)$. Тогда получим

$$\varphi_{rs,\alpha}A^\alpha=-\gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s[(A_{\mu\sigma}A^\mu A_\rho+A_{\rho\mu}A^\mu A_\sigma)_{,\alpha}+$$
$$+(A_{\alpha\mu}A^\mu A_\rho+A_{\mu\rho}A^\mu A_\alpha)_{,\sigma}+(A_{\sigma\mu}A^\mu A_\alpha+A_{\mu\alpha}A^\mu A_\sigma)_{,\rho}]A^\alpha=$$
$$=\gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s[(B_\sigma A_\rho-B_\rho A_\sigma)_{,\alpha}+(B_\alpha A_\rho-B_\rho A_\alpha)_{,\sigma}+$$
$$+(B_\sigma A_\alpha-B_\alpha A_\sigma)_{,\rho}]A^\alpha.$$

После проведения дифференцирования большинство членов выпадает, либо в силу того, что $B_\alpha A^\alpha$ равно нулю, либо благодаря тому, что непродифференцированные A_ρ умножаются на γ^ρ_r. Окончательным результатом будет

$$\varphi_{rs,\alpha}A^\alpha=\gamma^\rho_r\gamma^\sigma_s(B_{\rho,\sigma}-B_{\sigma,\rho}). \tag{17.24}$$

Рассмотрев „A-дифференцирование“, перейдем к рассмотрению другой дифференциальной операции, „p-дифференцирования“. Назовем выражение

$$V_{|a}\equiv V_{,\alpha}\gamma^\alpha_a \tag{17.25}$$

p-производной от V по x^a. Если функция A-цилиндрическая, p-производная будет обычной производной от V по аргументу x^a. (A-цилиндрическая функция может рассматриваться как функция только параметров x^a.)

p-производные скаляра образуют p-вектор.

Вообще говоря, p-производные не коммутируют. Их перестановочными соотношениями будут

$$V_{|ab} - V_{|ba} = V_{,\rho}(\gamma^\rho_{a|b} - \gamma^\rho_{b|a}). \tag{17.26}$$

Если V A-цилиндрическая функция, ее p-производные, являющиеся обычными производными, должны коммутировать, т. е. правая часть уравнения (17.26) обращается в нуль. Поэтому выражение в скобках пропорционально A^ρ:

$$\gamma^\rho_{a|b} - \gamma^\rho_{b|a} = A^\rho Q_{ab}. \tag{17.27}$$

Q_{ab} можно найти, умножая уравнение (17.27) на A_ρ:

$$Q_{ab} = A_\rho(\gamma^\rho_{a|b} - \gamma^\rho_{b|a}) = \gamma^\rho_b A_{\rho|a} - \gamma^\rho_a A_{\rho|b} = \gamma^\alpha_a \gamma^\beta_b A_{\beta\alpha} = \varphi_{ba}.$$

Отсюда имеем:

$$\gamma^\rho_{a|b} - \gamma^\rho_{b|a} = A^\rho \varphi_{ba} \tag{17.28}$$

и

$$V_{|ab} - V_{|ba} = V_{,\rho} A^\rho \varphi_{ba}. \tag{17.26a}$$

p-производные от p-тензора, вообще говоря, не ковариантны. Однако антисимметричные p-производные от p-вектора образуют p-тензор, а циклическая p-производная антисимметричного p-тензора второго ранга также является p-тензором.

Особенный интерес представляет собой p-тензор $\varphi_{rs|t} + \varphi_{st|r} + \varphi_{tr|s}$. Этот тензор можно выразить через антисимметричные производные от A_ρ:

$$\varphi_{rs|t} + \varphi_{st|r} + \varphi_{tr|s} = (\gamma^\rho_r \gamma^\sigma_s A_{\rho\sigma})_{,\tau} \gamma^\tau_t + (\gamma^\sigma_s \gamma^\tau_t A_{\sigma\tau})_{,\rho} \gamma^\rho_r + (\gamma^\tau_t \gamma^\rho_r A_{\tau\rho})_{,\sigma} \gamma^\sigma_s.$$

В силу того, что циклическая производная $A_{\rho\sigma}$ равна нулю, нужно оставить только следующие члены:

$$\varphi_{rs\,|\,t}+\varphi_{st\,|\,r}+\varphi_{tr\,|\,s}=A_{\mu\nu}\left[\gamma_r^\nu(\gamma_{t\,|\,s}^\mu-\gamma_{s\,|\,t}^\mu)+\right.$$
$$\left.+\gamma_s^\nu(\gamma_{r\,|\,t}^\mu-\gamma_{t\,|\,r}^\mu)+\gamma_t^\nu(\gamma_{s\,|\,r}^\mu-\gamma_{r\,|\,s}^\mu)\right].$$

Пользуясь (17.28), антисимметричные p-производные от γ_t^μ можно исключить и окончательным результатом будет

$$\varphi_{rs\,|\,t}+\varphi_{st\,|\,r}+\varphi_{tr\,|\,s}=$$
$$=\gamma_r^\rho\gamma_s^\sigma\gamma_t^\tau(B_\rho A_{\tau\sigma}+B_\sigma A_{\rho\tau}+B_\tau A_{\sigma\rho}). \qquad (17.29)$$

Введем теперь понятие ковариантного дифференцирования p-тензоров. Если V^a является p-вектором, то легко показать, что дифференциальные выражения

$$V^a{}_{,\rho}+\Gamma_{s\rho}^a V^s$$

образуют смешанный тензор (p-вектор относительно a, вектор относительно ρ), если коэфициенты $\Gamma_{s\rho}^a$ преобразуются согласно закону

$$\Gamma_{s\rho}^{*a}=\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial\xi^{*\rho}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{*s}}\left(\frac{\partial x^{*a}}{\partial x^l}\Gamma_{k\sigma}^l-\gamma_\sigma^l\frac{\partial^2 x^{*a}}{\partial x^l\partial x^k}\right). \qquad (17.30)$$

Имеется $5\times4\times4$ величин $\Gamma_{b\rho}^a$. Чтобы их найти, нужно задать такое же количество связывающих их соотношений. Условия

$$\gamma_{a;\,\rho}^a=0 \qquad (17.31)$$

слишком жестки, так как их больше, чем нужно, с другой стороны, условий

$$g_{ab;\,\rho}=0 \qquad (17.32)$$

слишком мало. Необходимые условия должны зависеть от трех индексов, одного координатного и двух параметрических. Условия

$$\gamma_\alpha^a\gamma_{s;\,\rho}^a=0 \qquad (17.33)$$

являются как раз условиями такого типа. Непосредственное вычисление показывает, что эти условия удовлетворяются, если $\Gamma^b_{a\rho}$ принимают значения

$$\Gamma^b_{a\rho} = \gamma^b_\beta \gamma^\alpha_a \begin{Bmatrix} \beta \\ a\rho \end{Bmatrix} - \gamma^b_{\rho\,|\,a} \equiv \begin{Bmatrix} b \\ a\rho \end{Bmatrix}. \tag{17.34}$$

Можно также показать, что при таком выборе $\Gamma^b_{a\rho}$ удовлетворяются и условия (17.32). Однако условия (17.31) не удовлетворяются, вместо них имеем

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha_{a;\,\rho} &= A^\alpha A_\varkappa \left(\gamma^\varkappa_{a,\,\rho} + \begin{Bmatrix} \varkappa \\ \sigma\rho \end{Bmatrix} \gamma^\sigma_a \right) = \\ &= A^\alpha A_\varkappa \gamma^\varkappa_{a;\,\rho} = - \gamma^\varkappa_a A^\varkappa A_{\varkappa;\,\rho}. \end{aligned} \tag{17.35}$$

Ковариантную p-производную тензора или p-тензора по x^a определим, как ковариантную производную по ξ^α, умноженную на γ^α_a.

$$V^a{}_{;\,b} = V^a_{\,|\,b} + \begin{Bmatrix} a \\ \rho b \end{Bmatrix} V^\rho, \quad \begin{Bmatrix} a \\ \rho b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ \rho\beta \end{Bmatrix} \gamma^\beta_b \tag{17.36}$$

и

$$V^a{}_{;\,b} = V^a_{\,|\,b} + \begin{Bmatrix} a \\ sb \end{Bmatrix} V^s, \quad \begin{Bmatrix} a \\ sb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ s\beta \end{Bmatrix} \gamma^\beta_b. \tag{17.37}$$

$\begin{Bmatrix} a \\ sb \end{Bmatrix}$ симметричны в s и b. Известно также, что выражения $g_{ab;\,s}$ равны нулю, если они образованы с помощью выражений (17.34). Отсюда следует, что $\begin{Bmatrix} s \\ ab \end{Bmatrix}$ имеют значения

$$\begin{Bmatrix} s \\ ab \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{sr} (g_{ar\,|\,b} + g_{br\,|\,a} - g_{ab\,|\,r}). \tag{17.38}$$

Обратимся теперь к различным типам тензоров кривизны, которые можно образовать с помощью различных типов аффинной связности. Наиболее просто получить их, составляя различные перестановочные соотношения. В первую очередь естественно отметить перестановочное соотношение Римана

$$V^{\nu}_{\cdot;\,\iota\varkappa} - V^{\nu}_{\cdot;\,\varkappa\iota} = R_{\iota\varkappa\lambda\cdot}^{\ \ \ \ \nu} V^{\lambda}. \qquad (17.39)$$

Для получения перестановочных соотношений для производных p-векторов понадобятся ковариантные производные от $\gamma^{a\cdot}_{\alpha\cdot}$:

$$\gamma^{a}_{\alpha;\,\rho} = A_{\alpha} A^{\varkappa} \left(\gamma^{a}_{\varkappa,\,\rho} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \varkappa\rho \end{matrix} \right\} \gamma^{a}_{\sigma} \right) = A_{\alpha} A^{\varkappa} \gamma^{a}_{\varkappa;\,\rho} =$$
$$= - A_{\alpha} \gamma^{a}_{\varkappa} A^{\varkappa}_{\ ;\,\rho}. \qquad (17.40)$$

Отсюда получаем перестановочные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} V^{n}_{\ ;\,\iota\varkappa} - V^{n}_{\ ;\,\varkappa\iota} &= (\gamma^{n}_{\nu} V^{\nu})_{;\,\iota\varkappa} - (\gamma^{n}_{\nu} V^{\nu})_{;\,\varkappa\iota} = \\ &= \gamma^{n}_{\nu} (V^{\nu}_{\ ;\,\iota\varkappa} - V^{\nu}_{\ ;\,\varkappa\iota}) + V^{\nu} (\gamma^{n}_{\nu;\,\iota\varkappa} - \\ &- \gamma^{n}_{\nu;\,\varkappa\iota}) = V^{\lambda} \gamma^{n}_{\nu} R_{\iota\varkappa\lambda\cdot}^{\ \ \ \ \nu} + \\ &+ (\gamma^{n}_{\nu;\,\iota\varkappa} - \gamma^{n}_{\nu;\,\varkappa\iota}) V^{\nu}. \end{aligned} \right\} \qquad (17.41)$$

Выражение $\gamma^{n}_{\nu;\,\iota\varkappa} - \gamma^{n}_{\nu;\,\varkappa\iota}$ может быть преобразовано следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \gamma^{n}_{\nu;\,\iota\varkappa} - \gamma^{n}_{\nu;\,\varkappa\iota} &= (\gamma^{n}_{\sigma} A^{\sigma}_{\ ;\,\varkappa} A_{\nu})_{;\,\iota} - (\gamma^{n}_{\sigma} A^{\sigma}_{\ ;\,\iota} A_{\nu})_{;\,\varkappa} = \\ &= (\gamma^{n}_{\sigma;\,\iota} A^{\sigma}_{\ ;\,\varkappa} - \gamma^{n}_{\sigma;\,\varkappa} A^{\sigma}_{\ ;\,\iota}) A_{\nu} + \\ &+ \gamma^{n}_{\sigma} A_{\nu} (A^{\sigma}_{\ ;\,\varkappa\iota} - A^{\sigma}_{\ ;\,\iota\varkappa}) + \\ &+ \gamma^{n}_{\sigma} (A^{\sigma}_{\ ;\,\varkappa} A_{\nu;\,\iota} - A^{\sigma}_{\ ;\,\iota} A_{\nu;\,\varkappa}) = \\ &= \gamma^{n}_{\sigma} [A^{\sigma}_{\ ;\,\varkappa} A_{\nu;\,\iota} - A^{\sigma}_{\ ;\,\iota} A_{\nu;\,\varkappa} - \\ &- R_{\iota\varkappa\rho\cdot}^{\ \ \ \ \sigma} A^{\rho} A_{\nu}], \end{aligned} \right\} \qquad (17.42)$$

так как здесь скобки второй строки обращаются в нуль. Подставляя это в (17.41), после небольших преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} V^{n}_{\ ;\,\iota\varkappa} - V^{n}_{\ ;\,\varkappa\iota} &= R_{\iota\varkappa l\cdot}^{\ \ \ \ n} V^{l}, \\ R_{\iota\varkappa l\cdot}^{\ \ \ \ n} &= \gamma^{n}_{\nu} \gamma^{\lambda}_{l} (R_{\iota\varkappa\lambda\cdot}^{\ \ \ \ \nu} + A^{\nu}_{\ ;\,\varkappa} A_{\lambda;\,\iota} - A^{\nu}_{\ ;\,\iota} A^{\lambda}_{\ ;\,\varkappa}). \end{aligned} \right\} \qquad (17.43)$$

„Смешанный" тензор кривизны $R_{\iota\varkappa l.}^{\;\;\;\;n}$ также может быть выражен через $\begin{Bmatrix} b \\ a\sigma \end{Bmatrix}$:

$$R_{\iota\varkappa l.}^{\;\;\;\;n} = \begin{Bmatrix} n \\ l\iota \end{Bmatrix}_{,\varkappa} - \begin{Bmatrix} n \\ l\varkappa \end{Bmatrix}_{,\iota} - \begin{Bmatrix} n \\ s\iota \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ l\varkappa \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ s\varkappa \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ l\iota \end{Bmatrix}. \quad (17.44)$$

Найдем далее перестановочные соотношения для ковариантных p-производных (обычного) вектора:

$$\left.\begin{aligned} V^{\nu}{}_{;lk} - V^{\nu}{}_{;kl} &= \gamma_k^{\varkappa}(\gamma_l^{\iota} V^{\nu}{}_{;\iota})_{;\varkappa} - \gamma_l^{\iota}(\gamma_k^{\varkappa} V^{\nu}{}_{;\varkappa})_{;\iota} = \\ &= \gamma_l^{\iota}\gamma_k^{\varkappa}(V^{\nu}{}_{;\iota\varkappa} - V^{\nu}{}_{;\varkappa\iota}) + \\ &+ V^{\nu}{}_{;\rho}(\gamma_k^{\sigma}\gamma^{\rho}_{l;\sigma} - \gamma_l^{\sigma}\gamma^{\rho}_{k;\sigma}) = \\ &= \gamma_l^{\iota}\gamma_k^{\varkappa}[R_{\iota\varkappa\lambda.}^{\;\;\;\;\;\nu} V^{\lambda} + A_{\varkappa\iota}A^{\rho}V^{\nu}{}_{;\rho}]. \end{aligned}\right\} \quad (17.45)$$

Аналогичные вычисления дают перестановочные соотношения для p-производных p-вектора:

$$\left.\begin{aligned} V^{n}{}_{;lk} - V^{n}{}_{;kl} &= (\gamma^{n}_{\nu;lk} - \gamma^{n}_{\nu;kl})V^{\nu} + \\ &+ \gamma^{n}_{\nu}(V^{\nu}{}_{;lk} - V^{\nu}{}_{;kl}) = \\ &= \gamma_l^{\iota}\gamma_k^{\varkappa}(R_{\iota\varkappa l.}^{\;\;\;\;n} V^{l} + A_{\varkappa\iota}A^{\rho}V^{n}{}_{;\rho}) = \\ &= \gamma_l^{\iota}\gamma_k^{\varkappa}[(R_{\iota\varkappa l.}^{\;\;\;\;n} + A_{\varkappa\iota}\gamma^{n}_{\nu}\gamma^{\lambda}_{l}A^{\nu}{}_{;\lambda})V^{l} + A_{\varkappa\iota}A^{\rho}V^{n}{}_{,\rho}]. \end{aligned}\right\} \quad (17.46)$$

С другой стороны, эти же перестановочные соотношения можно выразить через $\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}$:

$$\left.\begin{aligned} &V^{n}{}_{;ik} - V^{n}{}_{;ki} = R_{lki.}^{\;\;\;\;n} V^{l} + V^{n}{}_{,\rho}A^{\rho}\varphi_{kl}, \\ &R_{lki.}^{\;\;\;\;n} = \begin{Bmatrix} n \\ l\,i \end{Bmatrix}_{,k} - \begin{Bmatrix} n \\ l\,k \end{Bmatrix}_{|i} - \begin{Bmatrix} n \\ s\,i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ l\,k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ s\,k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ l\,i \end{Bmatrix}. \end{aligned}\right\} \quad (17.47)$$

Сравнение правых частей уравнений (17.47), (17.46) (17.43) дает соотношения, связывающие величины $R_{lkl.}^{\;\;\;\;n}$ и $R_{\iota\varkappa\lambda.}^{\;\;\;\;\;\nu}$:

$$R_{\iota kl.}^{\;\;\;\;n} = \gamma_l^{\iota}\gamma_k^{\varkappa}\gamma_l^{\lambda}\gamma_{\nu}^{n}(R_{\iota\varkappa\lambda.}^{\;\;\;\;\;\nu} + A^{\nu}{}_{;\lambda}A_{\varkappa\iota} + A^{\nu}{}_{;\varkappa}A_{\lambda;\iota} - A^{\nu}{}_{;\iota}A_{\lambda;\varkappa}). \quad (17.48)$$

Особенно существенными для применения этого формализма к теории Калуза являются выражения, получающиеся в результате двойного свертывания этих уравнений;

$$
\left.\begin{aligned}
&\delta_n^l g^{kl} R_{ikl\cdot}^{\cdot\cdot\cdot n} = \\
&\quad = \varepsilon_\nu^\iota (\gamma^{\varkappa\lambda} - A^\varkappa A^\lambda [R_{\iota\varkappa\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + A^\nu{}_{;\lambda} A_{\varkappa\iota} + \\
&\quad + A^\nu{}_{;\varkappa} A_{\lambda;\iota} - A^\nu{}_{;\iota} A_{\lambda;\varkappa}] = \\
&\quad = (\delta_\nu^\iota - A^\iota A_\nu)(\gamma^{\varkappa\lambda} - A^\varkappa A^\lambda) R_{\iota\varkappa\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \\
&\quad + (\gamma^{\varkappa\lambda} - A^\varkappa A^\lambda)[A^\rho{}_{;\lambda} A_{\varkappa\rho} + \\
&\quad + A^\rho{}_{;\varkappa} A_{\lambda;\rho} - A^\rho{}_{;\rho} A_{\lambda;\varkappa}] = \\
&\quad = R - 2A^\varkappa A^\lambda R_{\varkappa\lambda} + \gamma^{\varkappa\lambda} [A^\rho{}_{;\lambda} A_{\varkappa\rho} + \\
&\quad + A^\rho{}_{;\varkappa} A_{\lambda;\rho} - A^\rho{}_{;\rho} A_{\lambda;\varkappa}] + B_\rho B^\rho = \\
&\quad = R - 2A^\varkappa A^\lambda R_{\varkappa\lambda} + 2A^\rho{}_{;\sigma} A^\sigma{}_{;\rho} - \\
&\quad - \gamma^{\rho\sigma} A^\tau{}_{;\rho} A_{\tau;\sigma} - (A^\rho{}_{;\rho})^2 + B_\rho B^\rho.
\end{aligned}\right\} \qquad (17.49)
$$

Член $(-2A^\varkappa A^\lambda R_{\varkappa\lambda})$, входящий в это выражение, представим в несколько иной форме:

$$
\begin{aligned}
A^\varkappa A^\lambda R_{\iota\varkappa\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\iota} = A^\varkappa (A^\iota{}_{;\iota\varkappa} - A^\iota{}_{;\varkappa\iota}) = A^\varkappa (A^\iota{}_{;\iota})_{,\varkappa} - \\
- B^\iota{}_{;\iota} + A^\varkappa{}_{;\iota} A^\iota{}_{;\varkappa}.
\end{aligned} \qquad (17.50)
$$

Подставляя (17.50) в (17.49), найдем, что скалярная p-кривизна связана с (обычной) скалярной кривизной соотношением

$$
\begin{aligned}
\delta_n^l g^{kl} R_{ikl\cdot}^{\cdot\cdot\cdot n} = R - \gamma^{\rho\sigma} A^\tau{}_{;\rho} A_{\tau;\sigma} - \\
- (A^\rho{}_{;\rho})^2 + B_\rho B^\rho - 2A^\varkappa (A^\iota{}_{;\iota})_{,\varkappa} + 2B^\iota{}_{;\iota}.
\end{aligned} \qquad (17.51)
$$

Следует подчеркнуть, что с точки зрения теории инвариантов развитый здесь формализм представляет собой не что иное, как теорию поля единичных векторов в метрическом пространстве. Значение такого представления состоит в том, что в единых теориях поля, использующих пятимерный формализм для описания физического мира, четыре параметра x^a предполагаются представляющими четыре координаты нашего физического пространства.

Специальный тип системы координат. Отвлекаясь от ковариантных предположений, касающихся поля **A**, которое характеризует данную единую теорию поля, следует отметить, что большинство авторов ограничивается рассмотрением специального типа системы координат, в которой параметры $x^1, \ldots, x^4$ отождествляются с первыми четырьмя координатами $\xi^1, \ldots, \xi^4$, в то время как пятая координата выбирается так, чтобы компонента A^5 вектора **A** равнялась едииице. Остальные четыре компоненты $A^1, \ldots, A^4$ равны иулю. Систему координат, удовлетворяющую этим условиям, назовем „специальной системой координат“. Единственными преобразованиями координат, переводящими одну „специальную систему координат“ в другую, будут преобразования типа

$$\left.\begin{aligned} &\xi^{*a} = f^a(\xi^s) \text{ совместно с } x^{*a} = f^a(x^s), \\ &\xi^{*5} = \xi^5 + f^5(\xi^s). \end{aligned}\right\} \qquad (17.52)$$

Такие преобразования назовем „специальными преобразованиями координат“.

В специальной системе координат метрический тензор имеет компоненты

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} g_{ab} + \varphi_a\varphi_b, & \varphi_a \\ \varphi_b, & 1 \end{Bmatrix}, \quad \gamma^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} g^{ab}, & -g^{as}\varphi_s \\ -g^{bs}\varphi_s, & 1 + g^{rs}\varphi_r\varphi_s \end{Bmatrix}, \qquad (17.53)$$

где φ_a представляют собой первые четыре ковариантных компоненты **A**:

$$A_\rho = (\varphi_r, 1). \qquad (17.54)$$

Закон преобразования g_{ab} таков же, как и для p-тензоров, и поэтому не зависит от функции f^5 в (17.52). С другой стороны, φ_r преобразуются согласно законам

$$\varphi_r^* = \frac{\partial \xi^s}{\partial \xi^{*r}}(\varphi_s - f^5{}_{,s}). \qquad (17.55)$$

Таковы законы преобразования гравитационных и электромагнитных потенциалов относительно „координатных" и „градиентных" преобразований. (Выражение „градиентное преобразование" не следует понимать в смысле градиентных преобразований Вейля.)

Различные дифференциальные операции, рассмотренные в настоящей главе, принимают в специальной системе координат специфическую форму. A-дифференцирование сводится просто к дифференцированию по ξ^5:

$$V^{i\ldots}{}_{k\ldots,\alpha}A^\alpha = V^{i\ldots}{}_{k\ldots,5}. \tag{17.56}$$

Чтобы получить выражение для p-производных, найдем сперва значения γ^a_α и γ^α_a в специальной системе координат:

$$\gamma^a_\alpha = \left\{\begin{array}{c|c} \alpha = 1, \ldots, 4 & \alpha = 5 \\ \delta^a_\alpha & 0 \end{array}\right\},$$

$$\gamma^\alpha_a = \left\{\begin{array}{c|c} \alpha = 1, \ldots, 4 & \alpha = 5 \\ \delta^\alpha_a & -\varphi_a \end{array}\right\}. \tag{17.57}$$

Для p-производных получим выражения

$$V_{|a} = V_{,a} - \varphi_a V_{,5}. \tag{17.58}$$

p-тензор φ_{rs} приводится к виду

$$\varphi_{rs} = \gamma^\rho_r \gamma^\sigma_s A_{\rho\sigma} = \varphi_{r,s} - \varphi_{s,r} - \varphi_s\varphi_{r,5} + \varphi_r\varphi_{s,5}. \tag{17.59}$$

Вектор B_ρ имеет компоненты

$$B_\rho = (\varphi_{s,5}, 0), \tag{17.60}$$

а для скаляра $A^\rho{}_{;\rho}$ получим

$$A^\rho{}_{;\rho} = A^\rho{}_{,\rho} + \left\{ {\rho \atop \sigma\rho} \right\} A^\sigma = \left\{ {\rho \atop 5\rho} \right\} = \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma,5} =$$

$$= \frac{1}{2}(\log|\gamma_{\alpha\beta}|)_{,5}.$$

Детерминант $|\gamma_{\alpha\beta}|$ можно выразить только через g_{rs}. Умножая последний столбец его [см. (17.53)] на φ_b и вычитая результат из первого столбца, получим

$$|\gamma_{\alpha\beta}| = \begin{vmatrix} g_{ab} + \varphi_a\varphi_b, & \varphi_a \\ \varphi_b \quad , & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{ab}, & \varphi_a \\ 0\ , & 1 \end{vmatrix} = |g_{ab}|. \tag{17.61}$$

Отсюда найдем для $A^{\rho}{}_{;\rho}$:

$$A^{\rho}{}_{;\rho}=\frac{1}{2}(\log|g_{rs}|)_{,5}=\frac{1}{2}g^{rs}g_{rs,5}. \qquad (17.62)$$

В специальной системе координат производные A-цилиндрического p-тензора по ξ^5 равны нулю. Если производные (обычного) тензора по ξ^5 равны нулю в одной специальной системе координат, то они равны нулю в каждой специальной системе координат, и мы будем называть такой пятимерный тензор A-цилиндрическим.

Оказывается, что (обычные) производные тензоры по ξ^5 образуют тензор того же типа. В общей системе координат эти дифференциальные выражения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} V^{\iota\ldots}{}_{\varkappa\ldots,5} &= V^{\iota\ldots}{}_{\varkappa\ldots,\rho}A^{\rho}-A^{\iota}{}_{,\rho}V^{\rho\ldots}{}_{\varkappa\ldots}-\ldots \\ &\quad +A^{\rho}{}_{,\varkappa}V^{\iota\ldots}{}_{\rho\ldots}+\ldots \\ &= V^{\iota\ldots}{}_{\varkappa\ldots;\rho}A^{\rho}-A^{\iota}{}_{;\rho}V^{\rho\ldots}{}_{\varkappa\ldots}-\ldots \\ &\quad +A^{\rho}{}_{;\varkappa}V^{\iota\ldots}{}_{\rho\ldots}+\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (17.63)$$

Если этот тензор равен нулю, то тензор $V^{\iota\ldots}{}_{\varkappa\ldots}$ называется A-цилиндрическим. Как и выше, метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ будет A-цилиндрическим в том случае, когда удовлетворяются уравнения Киллинга (17.22). Согласно обобщенному определению A-цилиндричности, γ^{a}_{α} A-цилиндричны, в то время как γ^{α}_{a}, вообще говоря, таковыми не являются.

Ковариантная формулировка теории Калуза. Ограничения, наложенные Калуза на пятимерную метрику, эквивалентны предположению, что она является A-цилиндрической, т. е., что A_{ρ} удовлетворяют уравнениям Киллинга (17.22). Вследствие этого векторы B_{ρ} равны нулю, и A-кривые являются геодезическими. Из уравнения (17.18) следует, что p-метрика также является A-цилиндрической.

Далее, в силу уравнений (17.24), φ_{rs} также является A цилиндрическим тензором. В p-тензоре $(\varphi_{rs|t}+\varphi_{st|r}+$ $+\varphi_{tr|s})$ черточки могут быть заменены запятыми — обычным дифференцированием по параметру x^a. В силу (17.29), этот p-тензор равен нулю:

$$\varphi_{rs,t} + \varphi_{st,r} + \varphi_{tr,s} = 0. \qquad (17.64)$$

Эта совокупность уравнений является условием, которое должно удовлетворяться в том случае, когда φ_{rs} представляет собой антисимметричные производные четырехмерной функции Φ_r. Эти четыре функции определяются φ_{rs} с точностью до произвольного аддитивного градиента.

В „специальной системе координат“, в силу уравнений (17.60) и (17.59), величины φ_r и их антисимметричные производные φ_{rs},

$$\varphi_{rs} = \varphi_{r,s} - \varphi_{s,r}, \qquad (17.65)$$

не зависят от ξ^5.

Мы видим, что в теории Калуза при выборе специальной системы координат как g_{rs}, так и φ_r, не зависят от ξ^5 и что антисимметричные производные от φ_r образуют p-тензор. Если не использовать специальной системы координат, то определить φ_r становится невозможным, но p-тензор φ_{rs} тем не менее удовлетворяет второй паре уравнений Максвелла (17.64), а g_{rs} и φ_{rs} являются функциями только четырех аргументов x^a. Поэтому g_{rs} и φ_{rs} обладают всеми свойствами, соответственно, гравитационных потенциалов и электромагнитных напряженностей поля общей теории относительности.

Чтобы получить уравнения поля, Калуза предположил, что лагранжианом вариационного принципа является пятимерная скалярная кривизна R, умноженная на квадратный корень из детерминанта $|\gamma_{\alpha\beta}|$. Пятимерная скалярная кривизна связана со скалярной p-кривизной с помощью (17.51). Так как B_ρ в теории Калуза обращается в нуль, и так как только антисимметрические части ковариантных производных A_ρ не исчезают, (17.51) сводится к следующему виду:

$$R = \delta^l_n g^{kl} R_{lkl\cdot}{}^{n} + \frac{1}{4} A_{\rho\sigma} A^{\rho\sigma} = \delta^l_n g^{kl} R_{lkl\cdot}{}^{n} + \frac{1}{4} \varphi_{rs}\varphi^{rs}. \qquad (17.66)$$

В силу (17.61), в специальной системе координат детерминант $|\gamma_{\alpha\beta}|$ может быть заменен на $|g_{ab}|$. Так как лагранжиан A-цилиндричен, то вариационный интеграл может быть распространен как на пятимерную область координат ξ^α, так и на четырехмерную область параметров x^a. Поэтому для вариационного принципа Калуза имеем:

$$\delta \int \left(\delta^l_n g^{kl} R_{lkl.}^{\ \ \ n} + \frac{1}{4} \varphi_{rs} \varphi^{rs} \right) \sqrt{-g}\, \mathbf{dx} = 0, \qquad (17.67)$$

где вариации подчиняются условиям

$$(\delta g^{rs})_{,5} = 0, \quad (\delta \varphi_r)_{,5} = 0. \qquad (17.68)$$

Этот вариационный принцип эквивалентен уравнению (12.56). Получающиеся отсюда уравнения поля таковы же, как и в общей теории относительности (включая электромагнитное поле).

Проективные теории поля. Калуза ввел пятое измерение исключительно с целью увеличения числа компонент метрического тензора, не приписывая ему никакого реального смысла. Аналогичная операция производится и в так называемых проективных геометриях, которые описывают n-мерное пространство при помощи $n+1$ однородных координат. В проективной геометрии все „проективные точки", для которых все отношения $n+1$ однородных координат имеют одинаковые значения, рассматриваются, как „одна и та же" точка. Некоторые авторы, в частности Веблен и Гофман[1]) и Паули[2]) использовали этот принцип при создании своих единых теорий поля. Наш общий формализм применим и к их теориям, однако геометрическая интерпретация будет иной. Пятимерные координаты должны рассматриваться как „проективные координаты", в то время как реальное пространство является четырехмерным пространством параметров x^a. Каждая „проективная" A-кривая является только точкой в реальном пространстве. Поэтому метрика по существу является A-цилиндрической. С точки

---

[1]) O. Veblen, Projektive Relativitätstheorie, Berlin, Springer, 1933, часть: „Ergebnisse d. Mathematik u. ihrer Grenzgebiete. (Содержит библиографию.)

[2]) W. Pauli, Ann. d. Physik, 18, 305 (1933); 18, 337 (1933).

зрения нашего общего формализма нет разницы между теориями Калуза, Веблена и Гофмана и Паули. Уравнения поля во всех трех теориях одни и те же. Однако в каждой из этих трех теорий авторами используются различные системы координат.

Специальную систему координат Калуза мы уже рассмотрели. Обозначим его координаты через $x^1, \ldots, x^4, x^0$ ($=\xi^5$). Веблен и Гофман выбрали систему координат, более часто встречающуюся в проективной геометрии. Она связана с координатами Калуза уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \xi^s &= x^s, \\ \xi^5 &= e^{x^0}. \end{aligned}\right\} \qquad (17.69)$$

В такой системе координат компоненты метрического тензора имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{55} &= e^{-2x^0}, \\ \gamma_{5a} &= \varphi_a e^{-x^0}, \\ \gamma_{ab} &= (g_{ab} + \varphi_a \varphi_b). \end{aligned}\right\} \qquad (17.70)$$

Их выбор координат допускает, помимо преобразований первых четырех координат друг в друга, еще преобразования вида

$$\xi^{*5} = F(x^a)\, \xi^5, \qquad (17.71)$$

при которых компоненты метрического тензора преобразуются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \gamma^*_{55} &= \frac{1}{F^2}\gamma_{55} = \frac{1}{F^2} e^{-2x^0}, \\ \gamma^*_{5a} &= \frac{1}{F}\left[A_a - (\log F)_{,\,a}\right] e^{-x^0}, \\ g^*_{ab} &= g_{ab}. \end{aligned}\right\} \qquad (17.72)$$

Паули выбрал систему координат, которая может быть в полном смысле слова названа однородной[1]). Его координаты связаны с координатами Калуза уравнениями:

$$X^{\alpha}=f^{\alpha}(x^{s})\,e^{x^{0}}, \tag{17.73}$$

$$\left.\begin{aligned} x^{a}&=\overset{(0)}{h}{}^{a}(X^{\rho}),\\ x^{0}&=\log\overset{(1)}{h}(X^{\rho}), \end{aligned}\right\} \tag{17.74}$$

где $\overset{(0)}{h}{}^{a}$ — четыре однородные функции нулевой степени,

$$\overset{(0)}{h}{}^{a}(aX^{\rho})=\overset{(0)}{h}{}^{a}(X^{\rho}), \tag{17.75}$$

и $\overset{(1)}{h}(X^{\rho})$ — однородная функция первой степени,

$$\overset{(1)}{h}(aX^{\rho})=a\overset{(1)}{h}(X^{\rho}). \tag{17.76}$$

Переходы от одной однородной системы координат к другой производятся при помощи однородных уравнений преобразования первой степени

$$X^{*\rho}=\overset{(1)}{H}{}^{\rho}(X^{\sigma}). \tag{17.77}$$

Контравариантными компонентами вектора **A** в однородных координатах будут

$$A^{\rho}=\frac{\partial X^{\rho}}{\partial x^{0}}=X^{\rho}. \tag{17.78}$$

В формализме Паули сами координаты имеют векторный характер и идентичны с компонентами A^{ρ}.

A-цилиндричность приобретает специфический вид в системе координат Паули. В координатах Калуза A-цилиндрический тензор не зависит от координаты x^{0}. При переходе

---

[1]) Подробное изложение теории Паули можно найти в книге Л. Ландау и Е. Лифшица, „Теория поля", ГТТИ, 1941. (*Прим. ред.*)

к координатам Паули тензор $V_{\alpha\ldots}{}^{\beta\ldots}$ преобразуется согласно закону:

$$\overset{*}{V}_{\alpha\ldots}{}^{\beta\ldots} = \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \cdots \frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\alpha}} \cdots V_{\rho\ldots}{}^{\sigma\ldots},$$

где $V_{\rho\ldots}{}^{\sigma\ldots}$ являются функциями только от $x^1, \ldots, x^4$ и, следовательно, однородными функциями нулевой степени относительно X^{ρ}. Каждый коэфициент $\frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\sigma}}$ является функцией от $x^1, \ldots, x^4$, умноженной на e^{x^0}, т. е. однородной функцией первой степени относительно X^{ρ}. С другой стороны, каждый из коэфициентов $\frac{\partial x^{\rho}}{\partial X^{\alpha}}$ является однородной функцией (-1)-й степени относительно X^{ρ}. *A*-цилиндрический тензор однороден, и степень его однородности равна разности между количествами его контравариантных и ковариантных индексов.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ КАЛУЗА

*

Возможные обобщения теории Калуза. Несмотря на то, что теория Калуза не приводит к новым уравнениям поля и не дает ответа на нерешенные вопросы теоретической физики, все же представляется заманчивым произвести на ее основе некоторое изменение общей теории относительности. Вместе с тем, исходя из теории Калуза, можно несколькими способами подойти к созданию новой теории, в которой гравитационное и электромагнитное поля являлись бы частями единого поля.

Одна из попыток обобщения теории Калуза принадлежит Эйнштейну и Майеру[1]). Как и Калуза, они приняли, что физическое пространство является четырехмерным. При этом они ввели пятимерный тензорный анализ, не вводя в то же время пятимерного пространства и пятимерной системы координат. Они предположили, что существуют тензоры, индексы которых пробегают значения от 1 до 5, но компоненты которых являются функциями только четырех координат. Кроме четырехмерных преобразований координат, существуют еще преобразования „пятимерных тензоров" с матрицами преобразования M_α^β и M_β^α. При этом „пятимерные векторы", например, преобразуются согласно уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &V^{*\alpha} = M_\beta{}^\alpha V^\beta, \\ &W_\alpha^* = M_\alpha{}^\beta W_\beta, \quad M^\alpha{}_\beta M_\gamma{}^\beta = \delta_\gamma{}^\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (18.1)$$

где $M^\alpha{}_\beta$ — произвольные функции четырех координат. Если ввести пятимерную систему координат, матрица M_β^α образо-

---

[1]) Berl. Ber., 1931, стр. 541; Berl. Ber., 1932, стр. 130.

валась бы из производных новых координат по старым

$$M^{\alpha}{}_{\beta}=\frac{\partial\xi^{*\alpha}}{\partial\xi^{\beta}}$$

и поэтому удовлетворяла бы дифференциальным тождествам

$$M^{\alpha}{}_{\rho,\sigma}-M^{\alpha}{}_{\sigma,\rho}=M^{\alpha}{}_{\rho,s}\gamma^{s}_{\sigma}-M^{\alpha}{}_{\sigma,r}\gamma^{r}_{\rho}=0.$$

Однако ничего подобного не предполагается в теории Эйнштейна-Майера. Поэтому количество дифференциальных ковариантов в ней не равно числу таковых в теории Калуза. Хотя здесь также вводятся величины γ^{a}_{α} и γ^{α}_{a} для перевода четырехмерных тензоров в пятимерные и наоборот, выражения

$$\gamma^{a}_{\alpha,\beta}-\gamma^{a}_{\beta,\alpha}=\gamma^{a}_{\alpha,\beta}\gamma^{b}_{\beta}-\gamma^{a}_{\beta,b}\gamma^{b}_{\alpha},$$

которые равны нулю в теории Калуза, в теории Эйнштейна-Майера, вообще говоря, не равны нулю и даже не являются ковариантными. Выражения

$$\gamma^{\alpha}_{a,b}-\gamma^{\alpha}_{b,a},$$

ковариантные в теории Калуза, не инвариантны в этой теории. С другой стороны, в теории Эйнштейна-Майера существует ряд таких дифференциальных ковариантов, аналогии которых в теории Калуза тождественно равны нулю. Их количество даже столь велико, что не все из них могут получить физическую интерпретацию.

Возможно также обобщение теории Калуза путем ослабления условия A-цилиндричности. Это было сделано Эйнштейном и Бергманом, а позднее Эйнштейном, Баргманом и Бергманом в двух статьях, содержание которых будет вкратце изложено в этой главе[1]).

---

[1]) A. Einstein and P. Bergmann, Ann. of Math., **39**, 683 (1938). A. Einstein, V. Bargmann and P. G. Bergmann. Theodore von Kármán Anniversary Volume, Pasadena, 1941, стр. 212,

Геометрия замкнутого пятимерного мира. В то время как проективные теории, в частности теория Эйнштейна-Майера, рассматривают пространство как четырехмерное, а пятое измерение вводят только как средство для построения нового типа тензорного анализа, теория, рассмотренная в указанных двух статьях, пытается придать пятому измерению более определенный физический смысл.

Физические соображения оправдывают создание такой теории. Не выходя за пределы четырехмерной теории поля, представляется невозможным даже принять во внимание результаты квантовой теории, в частности принцип неопределенности Гейзенберга. Так как описание пятимерного мира при помощи четырехмерного формализма является неполным, была надежда, что из неопределенности „четырехмерных" законов можно получить принцип неопределенности и что квантовые явления в конце концов смогут быть объяснены теорией поля. В настоящее время очевидно, что эти смелые надежды не оправдались. Вообще, вопрос о том, выдержит ли какой-либо пятимерный подход проверку времени, покажет будущее.

Во всяком случае, макроскопический мир четырехмерен, поэтому пятимерный мир должен быть, по крайней мере, приближенно цилиндрическим относительно пятого измерения. Из этих соображений Эйнштейн и его сотрудники предположили, что мир является з а м к н у т ы м по отношению к пятой координате и представляет собой нечто вроде трубы.

Если вырезать из пятимерного континуума тонкий бесконечно протяженный слой и отождествить его две открытые (четырехмерные) поверхности, получится модель такого замкнутого пятимерного пространства. Все функции поля предполагаются, конечно, непрерывными при переходе через „шов", и поэтому, если трубка достаточно узка (т. е. если слой достаточно тонок), изменение величин поля поперек нее будет мало по сравнению с их изменениями вдоль трубки.

Геометрия замкнутого пятимерного пространства предполагается римановой. Это налагает еще одно ограничительное условие, которое уменьшает число переменных поля от 15 до 14. Метрику теории Калуза мы называли A-цилиндрической. Другими словами, пространство Калуза является цилиндрическим не только относительно некоторого векторного поля, но и относительно поля единичных векторов **A**. В силу этого A-кривые Калуза являются геодезическими, и в специальной системе координат γ_{55} равна единице. В рассматриваемой геометрии условие цилиндричности Калуза заменяется условием замкнутости пятимерного пространства. Кроме того, предполагается, что геодезические линии вокруг цилиндра, соединяющие данную точку с нею же самой, пересекаются под углом, равным нулю, т. е. являются замкнутыми непрерывными кривыми. Это условие заменяет условие Калуза о цилиндричности его пространства относительно поля единичных векторов.

Через каждую точку пятимерного пространства проходит одна и только одна замкнутая геодезическая линия.

Длину такой линии, один раз обходящей вокруг цилиндра и возвращающейся в исходную точку, будем называть „периметром“ пространства в пятом измерении. Докажем теперь, что *этот периметр везде имеет одну и ту же величину*.

Рассмотрим замкнутую геодезическую линию, проходящую через точку P. Ее длина S равна

$$S = \int\limits_{P}^{P} \sqrt{\gamma_{\iota\varkappa} \frac{d\xi^{\iota}}{dp} \frac{d\xi^{\varkappa}}{dp}}\, dp = \int\limits_{P}^{P} \sqrt{\gamma_{\iota\varkappa} \xi^{\iota\prime} \xi^{\varkappa\prime}}\, dp, \tag{18.2}$$

где p — произвольная функция координат; путь интегрирования является замкнутой геодезической линией. Изменим теперь координаты каждой точки вдоль этой замкнутой геодезической линии на бесконечно малую величину $\delta\xi^{\iota}$ так, чтобы получить новую линию. „Конечная точка“ P не считается при этом фиксированной. Разность между длиной новой линии и длиной старой линии будет равна:

$$\left.\begin{aligned}\delta S &= \int\limits_{P}^{P} \frac{\frac{1}{2}\gamma_{\iota\varkappa,\rho}\xi^{\iota\prime}\xi^{\varkappa\prime}\delta\xi^{\rho} + \gamma_{\iota\rho}\xi^{\iota\prime}\delta\xi^{\rho\prime}}{\sqrt{\gamma_{\iota\varkappa}\xi^{\iota\prime}\xi^{\varkappa\prime}}}\, dp = \\ &= \int\limits_{P}^{P}\left\{\frac{1}{2}\gamma_{\iota\varkappa,\rho}\,\dot{\xi}^{\iota}\,\dot{\xi}^{\varkappa}\delta\xi^{\rho} + \gamma_{\iota\rho}\,\dot{\xi}^{\iota}\delta\,\dot{\xi}^{\rho}\right\} d\tau,\end{aligned}\right\} \tag{18.3}$$

где точки означают дифференцирование по τ, угловому расстоянию от P. Интегрируя по частям, получим:

$$\left.\begin{aligned}\delta S = \int\limits_{P}^{P}\Big\{&\frac{1}{2}\gamma_{\iota\varkappa,\rho}\dot{\xi}^{\iota}\,\dot{\xi}^{\varkappa}\delta\xi^{\rho} - \gamma_{\iota\rho,\varkappa}\,\dot{\xi}^{\iota}\dot{\xi}^{\varkappa}\delta\xi^{\rho} - \\ &- \gamma_{\iota\rho}\,\ddot{\xi}^{\iota}\delta\xi^{\rho}\Big\}\, d\tau + \Big[\gamma_{\iota\rho}\,\dot{\xi}^{\iota}\delta\xi^{\rho}\Big]_{P}^{P} = \\ = -\int\limits_{P}^{P}&\gamma_{\iota\rho}\left(\ddot{\xi}^{\iota} + \left\{ {\iota \atop \varkappa\lambda} \right\}\dot{\xi}^{\varkappa}\,\dot{\xi}^{\lambda}\right)\delta\xi^{\rho} d\tau + \Big[\gamma_{\iota\rho}\,\dot{\xi}^{\iota}\delta\xi^{\rho}\Big]_{P}^{P}.\end{aligned}\right\} \tag{18.4}$$

Выражение в круглых скобках равно нулю, так как первоначальная линия геодезическая. Поэтому вариация S зависит только от вариации координат в двойной конечной точке

$$\delta S = \Big[\gamma_{\iota\rho}\dot{\xi}^{\iota}\delta\xi^{\rho}\Big]_{P}^{P}. \tag{18.5}$$

Выражение в квадратных скобках является скалярным произведением двух векторов: $\dot{\xi}^{\iota}$ и $\delta\xi^{\rho}$, и поэтому инвариантно. Так как $\delta\xi^{\rho}$ на двух границах в действительности представляет одно и то же бесконечно малое смещение, а $\dot{\xi}^{\iota}$ — то же направление, оба члена взаимно уничтожаются и δS обращается в нуль. Таким образом, S остается постоянным при таком переходе от одной замкнутой геодезической линии к другой, когда варьирование происходит так, чтобы все промежуточные линии были геодезическими.

Периметр замкнутого пространства, в котором все пересекающие сами себя геодезические линии являются замкнутыми и непрерывными (без разрывов производной), является, таким образом, постоянной, характеризующей пространство.

Векторы, касательные к замкнутым геодезическим $\frac{d\xi^{\alpha}}{d\tau}$, образуют поле единичных векторов. Обозначим это поле через **A** и применим к замкнутому пятимерному пространству формализм, рассмотренный в предыдущей главе.

Так как **A**-поле состоит из векторов, касательных к геодезическим, оно удовлетворяет дифференциальным уравнениям.

$$A^{\alpha}{}_{;\rho}\, A^{\rho}=0, \tag{18.6}$$

что означает согласно уравнениям (17.17) и (17.21), что A-метрика.

$$d\tau_A=A_{\alpha}d\xi^{\alpha} \tag{18.7}$$

является A-цилиндрической. Уравнение (18.6) принимает особенно простой вид в специальной системе координат.

Введение специальной системы координат. В специальной системе координат **A** имеет контравариантные компоненты (0,0,0,0,1) и ковариантные компоненты (γ_{5s}, 1). Уравнение (18.6), таким образом, приобретает вид:

$$A^{\alpha}{}_{,5}+\begin{Bmatrix}\alpha\\55\end{Bmatrix}=0, \tag{18.8}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}\alpha\\55\end{Bmatrix}=0, \quad [55,\alpha]=0,\\ &\gamma_{\alpha5,5}-\frac{1}{2}\gamma_{55,\alpha}=0.\end{aligned}\right\} \tag{18.8a}$$

Так как в специальной системе координат γ_{55} постоянно и равно единице, для уравнения (18.6) получаем окончательно

$$\gamma_{a5,5}=\varphi_{a,5}=0, \tag{18.9}$$

другими словами, величины φ_s не зависят от ξ^5.

Остальные компоненты метрического тензора периодичны относительно ξ^5, так как A-кривые замкнуты и возвращаются в любую точку, через которую они проходят. Координатное расстояние точки от самой себя (вокруг трубы) равно метрическому расстоянию, так как γ_{55} равно единице. По тем же соображениям это справедливо и для любой точки в рассматриваемом пространстве.

Все поля, однозначно определенные в нашем замкнутом пространстве, являются периодическими функциями от ξ^5 с периодом S (18.2).

Таким образом, в специальной системе координат пятимерная метрика распадается на совокупность десяти функций g_{mn};

$$g_{mn}=\gamma_{mn}-\varphi_m\varphi_n, \tag{18.10}$$

которые периодичны относительно ξ^5 с периодом S, и на четыре функции φ_m, зависящие только от $\xi^1,\ldots, \xi^4$.

В силу (18.9), вектор B_ρ, (17.17) и (17.60), равен нулю, а единственными дифференциальными тензорами первого порядка являются

$$\varphi_{rs}=\varphi_{r,s}-\varphi_{s,r} \tag{18.11}$$

[в силу (17.59)] и

$$g_{mn,5}=A_{m;n}+A_{n;m} \tag{18.12}$$

[в силу (17.18)].

Получение уравнений поля из вариационного принципа. Исходя из геометрии замкнутого пятимерного пространства с замкнутыми координатами, Эйнштейн и его сотрудники нашли две различные совокупности уравнений поля. В этой главе мы рассмотрим одну из этих совокупностей.

Можно получить уравнения поля, как уравнеиия Эйлера-Лагранжа вариационного принципа. Существуют четыре различных дифференциальных скаляра второго порядка, каждый из которых ведет к различным уравнениям поля. Такими скалярами являются:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_n^i g^{kl} R_{ikl.}^{\;\;\;\;n}; \quad \varphi_{rs}\varphi^{rs}; \\ &(A_{\mu;\nu}+A_{\nu;\mu})(A_{\rho;\sigma}+A_{\sigma;\rho})\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma}; \\ &(A_{\mu;\nu}+A_{\nu;\mu})(A_{\rho;\sigma}+A_{\sigma;\rho})\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{18.13}$$

Все остальные дифференциальные скаляры второго порядка отличаются от линейной комбинации этих четырех только на дивергенцию, которая не вносит изменений в уравнения Эйлера-Лагранжа. Линейная комбинация этих четырех скаляров, умноженная на квадратный корень взятого со знаком минус детерминанта, $\sqrt{-|\gamma_{\rho\sigma}|}$ (или в случае специальной системы координат на $\sqrt{-g}$), и проинтегрированная по пятимерной области координат $\xi^1 \ldots, \xi^5$, является инвариантом.

Вариация такого интеграла

$$I=\int H\sqrt{-g}\,d\xi \tag{18.14}$$

должна сохранять характерные геометрические свойства замкнутого пространства, т. е. при использовании специальной системы координат вариации φ_r не должны зависеть от ξ^5, а вариации g_{mn} должны быть периодичны относительно ξ^5 с периодом S. Поэтому мы не можем потребовать, чтобы вариации φ_r и g^{rs} равнялись нулю на всей границе произвольной области интегрирования. Однако вариация на границе ничего не добавит к вариации интеграла в том случае, если при интегрировании обход по области совершается вокруг трубы только один раз, другими словами, интегрирование по ξ^5 производится только в пределах одного периода. Кроме того, δg^{rs} и $\delta\varphi_s$ должны при этом обращаться в нуль на той части границы, которая создается A-кривыми. Таким образом, вариация принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}&\delta\int H\sqrt{-g}\,d\xi^1\ldots d\xi^5=\\&=\int\{Q_{rs}\delta g^{rs}+J^s\delta\varphi_s\}\sqrt{-g}\,d\xi^1\ldots d\xi^5,\end{aligned}\right\}\qquad(18.15)$$

где предполагаются выполненными только что указанные условия ($\delta\varphi_s$ не зависит от ξ^5, δg^{rs} является периодической функцией относительно ξ^5, остающейся до известной степени произвольной). Интеграл I будет стационарен, если удовлетворяются следующие уравнения:

$$Q_{rs}=0,\qquad \int\limits_{\xi^5=0}^{s}J^s\sqrt{-g}\,d\xi^5=0.\qquad(18.16)$$

Мы не можем потребовать, чтобы J^s везде обращались в нуль, так как, если интеграл (18.16), который нужно один раз взять вокруг A-кривой, равен нулю, вариации φ_s, постоянные вдоль каждой A-кривой не будут входить в δI.

Интегро-дифференциальные уравнения (18.16) удовлетворяют пяти интегро-дифференциальным тождествам. Если произвести бесконечно малое преобразование специальных координат

$$\left.\begin{aligned}\xi^{*a}&=\xi^a+\delta\xi^a(\xi^s),\\\xi^{*5}&=\xi^5+\delta\xi^5(\xi^s),\end{aligned}\right\}\qquad(18.17)$$

переменные поля g^{rs} и φ_s преобразуются следующим образом:

$$\delta g^{rs} = g^{rt}(\delta\xi^s)_{,t} + g^{ts}(\delta\xi^r)_{,t} - \delta\xi^t g^{rs}{}_{,t} - \delta\xi^5 g^{rs}{}_{,5},$$
$$\delta\varphi_s = -\varphi_t(\delta\xi^t)_{,s} - (\delta\xi^5)_{,s} - \delta\xi^t\varphi_{s,t},$$

или

$$\left.\begin{aligned} \delta g^{rs} &= g^{rt}(\delta\xi^s)_{;t} + g^{st}(\delta\xi^r)_{;t} - g^{rs}{}_{,5}(A_\rho\delta\xi^\rho), \\ \delta\varphi_s &= -\varphi_{st}\delta\xi^t - (A_\rho\delta\xi^\rho)_{,s}, \\ A_\rho\delta\xi^\rho &= \varphi_t\delta\xi^t + \delta\xi^5. \end{aligned}\right\} \quad (18.18)$$

Если выбрать совокупность $\delta\xi^\alpha$, обращающуюся в нуль на указанной части границы области интегрирования, создаваемой A-кривыми, вариация I при таких бесконечно малых преобразованиях должна обратиться в нуль, даже в том случае, когда уравнения (18.16) не удовлетворяются:

$$\left.\begin{aligned} 0 \equiv \int \{ & Q_{rs}[g^{rt}(\delta\xi^s)_{;t} + g^{st}(\delta\xi^r)_{;t} - g^{rs}_{,5}(A_\rho\delta\xi^\rho)] + \\ & + J^s[-(A_\rho\delta\xi^\rho)_{,s} - \varphi_{st}\delta\xi^t]\}\sqrt{-g}\,d\xi = \\ = \int \{ & [-2Q^t_{s.;t} + \varphi_{ts}J^t]\delta\xi^s + [-Q_{rs}g^{rs}_{,5} - \\ & - J^s{}_{;s}](A_\rho\delta\xi^\rho)\}\sqrt{-g}\,d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (18.19)$$

При проведении интегрирования по частям, необходимого для получения этих уравнений, были опущены все члены, представляющие собой ковариантные дивергенции. Ковариантная дивергенция p-псевдовектора является линейной комбинацией обычных производных

$$\mathfrak{B}^s{}_{;s} = \mathfrak{B}^s{}_{,s} - (\varphi_s\mathfrak{B}^s)_{,5}. \quad (18.20)$$

Поэтому она обращается в нуль при интегрировании по области, на границе которой компоненты $\mathfrak{B}^s$ исчезают.

В уравнении (18.19) $\delta\xi^\alpha$ не зависят от ξ^5, но во всем остальном остаются произвольными внутри области интегрирования. Отсюда можно заключить, что уравнения (18.16) удовлетворяют тождествам

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{\xi^5=0}^{s}(2Q_{s\cdot;t}^{\ t}+\varphi_{ts}J^t)\sqrt{-g}\,d\xi^5\equiv 0,\\&\int\limits_{\xi^5=0}^{s}(J^s_{\ ;s}+Q_{rs}\,g^{rs}_{\ ,5})\sqrt{-g}\,d\xi^5\equiv 0.\end{aligned}\right\}\qquad(18.21)$$

Относительно вида выражений J^s и Q_{rs} можно сказать следующее. Q_{rs} содержит те же члены, что и уравнения поля общей теории относительности, в которых все производные заменены p-производными

$$g_{rs\,|\,t}=g_{rs,t}-g_{rs,5}\varphi_t,$$

и так далее; кроме того, Q_{rs} содержит члены, в которых p-метрика продифференцирована по ξ^5. Выражение J^s содержит максвелловские члены $\varphi^{rs}_{\ ;s}$ и, кроме того, члены, являющиеся произведениями p-производных и A-производных от g_{rs}. Другими словами, мировая плотность тока в этой теории не равна нулю.

Дифференциальные уравнения поля. Имеются два возражения против уравнений поля, полученных из вариационного принципа. Во-первых, эти уравнения определяются неоднозначно; всякая линейная комбинация скаляров (18.13), умноженная на $\sqrt{-g}$, может быть использована в качестве лагранжиана. Во-вторых, уравнения поля, полученные таким образом, не являются чисто дифференциальными уравнениями.

Если бы уравнения поля представляли собой систему чисто дифференциальных уравнений, их следовало бы подчинить более сильным тождествам, чтобы они имели решения, имеющие смысл. В действительности же имеется четырнадцать дифференциальных уравнений, связанных четырьмя дифференциальными и одним интегро-дифференциальным тождеством; при этом система определена однозначно.

Рассмотрим пятнадцать выражений $G_{\rho\sigma}$, образованных из свернутого пятимерного тензора кривизны

$$G_{\rho\sigma}=R_{\rho\sigma}-\frac{1}{2}\gamma_{\rho\sigma}R. \tag{18.22}$$

Эти пятнадцать величин удовлетворяют пяти соотношениям

$$(\sqrt{\gamma}\,G^{\rho\sigma})_{,\sigma}+\sqrt{\gamma}\,G^{\tau\sigma}\left\{{\rho \atop \tau\sigma}\right\}\equiv 0. \tag{18.23}$$

Если $\sqrt{\gamma}\,G^{\rho\sigma}$ обозначить через $\mathfrak{G}^{\rho\sigma}$ и выбрать специальную систему координат, (18.23) примет вид

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{G}^{rs}{}_{,s}+\mathfrak{G}^{r5}{}_{,5}+\mathfrak{G}^{ts}\left\{{r \atop ts}\right\}+2\mathfrak{G}^{ts}\left\{{r \atop t5}\right\}=0.\\ \mathfrak{G}^{5s}{}_{,s}+\mathfrak{G}^{ts}\left\{{5 \atop ts}\right\}+2\mathfrak{G}^{5s}\left\{{5 \atop 5s}\right\}=-\mathfrak{G}^{55}{}_{,5}\end{aligned}\right\} \tag{18.24}$$

Здесь учтено, что, в силу (18.8а), символы Кристоффеля $\left\{{a \atop 55}\right\}$ равны нулю. Отсюда видно, что четырнадцать выражений G^{rs} и G^{r5} удовлетворяют четырем дифференциальным тождествам; кроме того, дифференциальное выражение первого порядка, входящее в G^{rs} и G^{r5}, тождественно равно первой производной по ξ^5, и его интеграл по одному периоду A-кривой поэтому равен нулю. Четырнадцать уравнений

$$\left.\begin{aligned}G^{rs}&=0,\\ I^s&=G^{s5}+\varphi_t G^{st}=0\end{aligned}\right\} \tag{18.25}$$

удовлетворяют, таким образом, нужному количеству тождеств. Они также ковариантны относительно преобразований специальной системы координат в силу того, что G^{rs} и I^s

являются p-тензорами:

$$G^{rs} = \gamma^r_\rho \gamma^s_\sigma G^{\rho\sigma},$$
$$I^s = \gamma^s_\sigma A_\rho G^{\rho\sigma}.$$

Путем непосредственного, но громоздкого вычисления можно показать, что не существует другой системы четырнадцати дифференциальных уравнений второго порядка, ковариантных относительно преобразований специальной системы координат, удовлетворяющей тождествам, аналогичным (18.25). Эти уравнения имеют такой же вид, как и уравнения, полученные из соответствующего вариационного принципа, но в отличие от последних являются чисто дифференциальными. Мировая плотность тока и в этом случае не равна нулю.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

Блохинцев Д. И. и Драбкина С. И. Теория относительности Эйнштейна.
М.-Л., 1940.

Борн М. Теория относительности Эйнштейна и ее физические основы.
Л. -М., 1938.

Вавилов С. И. Экспериментальные основания теории относительности.
М. -Л., 1928.

Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля, М. -Л., 1941.

Лоренц Г. А., Пуанкаре А., Эйнштейн А., Минковский Г. Принцип относительности — Сборник работ классиков релятивизма. Л., 1935.

Паули В. Теория относительности. М.-Л., 1947.

Эддингтон А. С. Математическая теория относительности. Харьков—Киев, 1933.

Эддингтон А. С. Теория относительности. М. -Л., 1934.

Эйнштейн А. Геометрия и опыт. Пг., 1922.

Эйнштейн А. Основы теории относительности. 2 изд. М. -Л. 1935.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть II

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Редактор *К. П. Гуров.*
Технический редактор *Б. И. Корнилов.* Корректор *М. М. Шулименко*

Сдано в производство 6/V 1947 г. Подписано к печати 19/VII 1947 г. А00419. Печ. л. 23¾. Уч.-изд. 19,2. Формат 82×108¹/₃₂. Издат. № ²/₃₂₁. Цена 20 руб. Зак. № 7325.

1-я Образцовая тип. треста «Полиграфкнига» Огиза при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.