ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

Ergebnisse der Mathematik
und ihrer Grenzgebiete

Neue Folge · Heft 23

INTEGRAL OPERATORS IN THE THEORY OF LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

by

STEFAN BERGMAN

SPRINGER-VERLAG
BERLIN — GÖTTINGEN — HEIDELBERG
1961

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МАТЕМАТИКА“

СТЕФАН БЕРГМАН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Перевод с английского

Л. А. МАРКУШЕВИЧ

Под редакцией

И. И. ДАНИЛЮКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1964

УДК 517.944

В этой монографии изложены основы развитого автором метода интегральных представлений решений линейных уравнений с частными производными. В основе метода лежит получение классов решений этих уравнений из аналитических функций при помощи специальных интегральных операторов.

В книге рассматриваются уравнения и системы с двумя и тремя независимыми переменными (в частности, строится теория гармонических векторов в пространстве, являющаяся пространственным аналогом теории аналитических функций). Специальная глава посвящена уравнениям смешанного типа и уравнениям, коэффициенты которых имеют особенности.

Метод Бергмана успешно применяется в ряде прикладных задач, но возможности его применения еще далеко не исчерпаны. Поэтому книга представит определенную ценность не только для математиков, занимающихся теорией уравнений с частными производными и теорией аналитических функций, но также и для механиков, физиков и инженеров-исследователей. Она доступна также студентам старших курсов.

Русское издание дополнено переводом трех статей автора, тематика которых примыкает к вопросам, изложенным в книге.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Вниманию советского читателя предлагается книга известного американского математика С. Бергмана. Ее предметом является важная область математики — теория линейных уравнений эллиптического типа. Среди имеющихся книг, посвященных этой теме, монография С. Бергмана выделяется рядом отличительных признаков.

Основной круг вопросов, на котором сосредоточено главное внимание, можно было бы назвать „общей“ или „качественной“ теорией уравнений с частными производными эллиптического типа. Сюда относится в первую очередь проблема построения „общего“ решения исследуемых уравнений, выявление и исследование тех элементов, при изменении которых исчерпывается весь запас решений из того или иного класса. Вслед за этим возникает необходимость исследования теоретико-функциональных свойств решений: гладкости и аналитичности решений, отыскание „естественной“ области существования решений в зависимости от свойств коэффициентов уравнения, классификация и изучение особых точек решений, представление решений в виде рядов или аппроксимация их конечными агрегатами при помощи некоторых систем решений частного вида и др. И, наконец, в тех случаях, когда некоторые из отмеченных вопросов в той или иной степени изучены, как, например, для уравнения Лапласа в трехмерном пространстве, возникает потребность в построении некоторых классов решений, обладающих рядом интересных свойств: наличие сингулярностей того или иного типа, многозначность в целом и др.

Постановка и исследование отмеченных проблем в значительной степени связаны с работами самого автора и ряда его последователей. Начатые несколько десятилетий тому назад и продолжающиеся до настоящего времени эти исследования и составили основное содержание монографии. Количество важных результатов в этой области весьма велико, и подробное их изложение нельзя было уместить в рамках небольшой по объему книги. Вследствие этого доказательства ряда теорем опущены, с указанием, однако, тех источников, где имеется их полное изложение.

Степень полноты результатов, приведенных в книге, весьма различна для разных типов уравнений. Естественно, что наиболее полное исследование допускают эллиптические уравнения с двумя независимыми переменными. Наличие глубоко разработанной теории аналитических функций комплексного переменного дало возможность создать почти исчерпывающую теорию в указанном выше плане для общих эллиптических уравнений второго порядка с аналитическими коэффициентами на плоскости. Метод интегральных операторов, отображающих аналитеческие функции одного комплексного переменного в решения исследуемых уравнений, позволяет вначале обнаружить, а затем и фактически доказать ряд фундаментальных свойств решений общих эллиптических уравнений на плоскости, родственных свойствам аналитических функций (главы I, V).

Замечательно, что и для трехмерного уравнения Лапласа может быть построен интегральный оператор с аналогичным свойством. Именно, как было обнаружено Э. Т. Уиттекером в начале нашего века, каждая гармоническая функция с тремя аргументами, регулярная в окрестности некоторой точки, может быть представлена в виде определенного интеграла от функции $f(u, \varphi)$, $u = x + iy\cos\varphi + iz\sin\varphi$, аналитической по комплексному переменному u, взятого по φ в пределах $[-\pi, \pi]$.

Во второй главе настоящей книги построен интегральный оператор с аналогичными свойствами, но определенный на множестве аналитических функций двух комплексных переменных. Оба этих оператора, а также оператор типа потенциала Ньютона, применяются во второй и четвертой главах к изучению ряда важных классов гармонических функций и так называемых гармонических векторов в трехмерном пространстве. Тогда, когда функция $f(u, \varphi)$ является рациональной или, в более общем случае, алгебраической функцией относительно первого аргумента u, соответствующая ей гармоническая функция определена во всем трехмерном пространстве, но является многозначной. Уже простейшие примеры функций $f(u, \varphi)$ порождают интересные особенности у соответствующих гармонических функций (§ 3, гл. II или § 1, гл. IV). С точки зрения дальнейшего развития эти результаты представляются, по-видимому, наиболее перспективными.

Третья глава книги посвящена обобщению результатов двух первых глав на случай некоторых эллиптических или параболических уравнений в трехмерном пространстве.

Важной особенностью книги является также большое внимание, которое уделяется уравнениям частного вида. Общая теория в применении к этим уравнениям становится более прозрачной и глубоко разработанной, ибо здесь появляется возможность применения аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Особый интерес в этом отношении представляют результаты последней главы, посвященной вырождающимся на оси уравнениям (уравнениям „смешанного" типа), встречающимся в ряде важных приложений (гидро- и аэродинамика и др.).

Книга написана ясным и доступным языком и не предполагает у читателя знакомство с какими-либо специальными разделами математики. Пожалуй, единственным исключением в этом смысле является теория функций комплексного переменного. Для полного усвоения некоторых разделов книги требуется знакомство с теорией алгебраических функций.

Подход к построению интегральных операторов, который предлагается в книге, не является, — эта мысль неоднократно подчеркивается и автором — единственно возможным. В изучении важнейшего аспекта теории — граничных задач — эти операторы не нашли еще применения и являются, по-видимому, плохо приспособленными к этому кругу вопросов. Создается также впечатление, что вид этих операторов (в случае уравнений с двумя аргументами) является следствием искусства и опытности автора, а не результатом реализации какой-либо простой и общей идеи.

Параллельно с исследованиями автора изучение затронутого круга вопросов весьма интенсивно велось и в Советском Союзе. Как изучение общей части теории, так и исследование граничных задач методами, восходящими к классической теории функций комплексного переменного, были в центре внимания ряда важных исследований И. Н. Векуа. Полное изложение созданной теории содержится в двух известных монографиях И. Н. Векуа.

Можно надеяться, что выход в свет русского издания книги С. Бергмана будет способствовать дальнейшему развитию теории уравнений с частными производными.

И. И. ДАНИЛЮК

Новосибирск,
3 апреля 1964 г.

Памяти Теклы Бергман

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге строятся решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных с помощью интегральных операторов, которые преобразуют аналитические функции комплексного переменного в решения рассматриваемых уравнений. Теория аналитических функций — весьма развитая отрасль анализа, и операторный метод делает возможным ее использование для изучения дифференциальных уравнений. В то время как изучение существования и единственности решений уравнений с частными производными продвинулось довольно далеко, исследованию теоретико-функциональных свойств регулярных и сингулярных решений и построению их в явном виде с использованием единого общего процесса уделялось значительно меньшее внимание. Настоящая книга является попыткой заполнить пробел в этом направлении.

Интегральные операторы различных типов давно уже используются в математической литературе. В этой связи достаточно упомянуть Эйлера и Лапласа. Автор не пытался дать полный перечень всех известных операторов, а имел в виду развитие унифицированного подхода. С этой целью используются специальные операторы, сохраняющие различные теоретико-функциональные свойства аналитических функций, например, сохраняющие области регулярности, разложения в ряды, связь между коэффициентами этих разложений и размещением и характером особенностей и т. д. Однако были приложены все усилия, чтобы дать полную библиографию и помочь читателю найти более подробное изложение затронутых вопросов. В некоторых местах доказательства утверждений опущены, в особенности тогда, когда переход от изложения в этой книге к оригинальной статье не представляет трудности.

Интегральные операторы могут также применяться к функциям нескольких комплексных переменных. Можно ожидать, что дальнейшее развитие в этом направлении приведет к соответствующим результатам в теории систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

С. БЕРГМАН

Станфорд, Калифорния,
октябрь 1960

ВВЕДЕНИЕ

В этом разделе мы разъясним основные идеи теории интегральных операторов, порождающих решения линейных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами.

Простое и хорошо известное соотношение между гармоническими функциями двух действительных переменных и аналитическими функциями одного комплексного переменного допускает единообразное рассмотрение гармонических функций и является одной из причин того, что теория функций комплексного переменного имеет такую широкую область применений. Простой оператор $\mathfrak{Re}$ (*взятие действительной части*) осуществляет переход от аналитических функций к гармоническим, чему соответствует почти немедленная переформулировка теорем для аналитических функций в теоремы для гармонических функций.

Естественно спросить, можно ли связать решения уравнений с частными производными более общего вида с комплексными аналитическими функциями. Такая возможность и в самом деле имеется, что приводит к унифицированной теории широкого класса линейных уравнений с частными производными. Существует бесконечно много операторов (обобщающих оператор $\mathfrak{Re}$), которые преобразуют аналитические функции в решения различных классов линейных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами. Подавляющее большинство этих операторов довольно сложны, однако некоторые из них можно использовать для развития глубокой и систематической теории уравнений с частными производными на базе теории функций. Первая задача состоит в том, чтобы ввести операторы, для которых соотношение между решениями уравнений с частными производными и соответствующими аналитическими функциями оказывается сравнительно простым и которые сохраняют многие основные свойства аналитических функций. Опыт показывает, что для различных целей приходится вводить различные операторы.

Теория решений уравнений с частными производными вида

$$\tilde{\mathbf{L}}(\tilde{\tilde{U}}) = \tilde{\tilde{U}}_{xx} + \tilde{\tilde{U}}_{yy} + a\tilde{\tilde{U}}_x + b\tilde{\tilde{U}}_y + c\tilde{\tilde{U}} = 0 \qquad \text{(1a)}$$

для двух действительных переменных x, y с действительными аналитическими коэффициентами a, b и c может быть развита при помощи подходящих операторов, преобразующих аналитические функции $g(z)$, $z = x + iy$, в решения $\tilde{\tilde{U}}(x, y)$ уравнения (1a). С этой целью удобно продолжить a, b, c на комплексные значения x и y. Введем комплексные переменные

$$z = x + iy, \quad z^* = x - iy \qquad (2)$$

(которые комплексно сопряжены в том и только том случае, когда x и y действительны). Тогда уравнение (1a) примет вид [1])

$$\mathbf{L}(U) = U_{zz^*} + AU_z + BU_{z^*} + CU = 0, \qquad \text{(1б)}$$

$$B = \bar{A}, \quad U(z, z^*) = \tilde{\tilde{U}}(x, y).$$

В гл. I мы вводим оператор первого рода, который преобразует аналитические функции $g(z)$ в *комплексные* решения $u(z, z^*)$ уравнения (1б), такие, что действительные [2]) решения $U(z, z^*)$ могут быть выражены в форме

$$U(z, z^*) = \frac{1}{2}(u(z, z^*) + \bar{u}(z^*, z)). \qquad (3)$$

Функция $u(z, z^*)$ получается как интегральное преобразование функции $g(z)$ (см. гл. I, § 1). Интересно, что существует формула обращения, дающая выражение $g(z)$

---

[1]) Здесь $\tilde{\tilde{U}}_{xx} + \tilde{\tilde{U}}_{yy} = 4U_{zz^*}$.

[2]) То есть решения, действительные при действительных x и y.

через U, которое зависит только от $\bar{A}(0, z)$ [см. (1б)], а именно:

$$g(z) = U(z, 0) - g(0)\exp\left(-\int_0^z \bar{A}(0, z')\,dz'\right). \qquad (4)$$

В § 1 вводится интегральный оператор первого рода [обратный к (4)], который преобразует $g(z)$ в $U(z, z^*)$ [см. (I. 3.3), (I. 3.4а), (I. 3.4б)] [1]).

Определение. Функция $g(z)$, определяемая формулой (4), называется C_2-*ассоциированной* с $U(z, z^*)$ относительно указанного интегрального оператора первого рода.

Замечание. Как мы увидим далее, для разных целей бывает удобно нормировать C_2-ассоциированную функцию различными способами. Иногда мы называем функцию $U(z, 0)$ C_2-ассоциированной. Во избежание слишком большого числа определений мы будем говорить о всех таких функциях, как о C_2-ассоциированных; специальный выбор функции $g(z)$ будет ясен из контекста.

Будет показано, что многие свойства аналитических функций естественным образом соответствуют свойствам решений уравнения (1б). Мы также рассмотрим ряд других интегральных операторов, интересных для различных специальных целей.

Замечание. Если рассматривать решения уравнения (1а) для комплексных значений x и y, т. е. если допустить, что z и z^* — два независимых переменных, то формула Римана для гиперболических уравнений даст интегральный оператор, преобразующий две функции одного переменного в решение уравнения с частными производными (1а). Основное преимущество введения других интегральных операторов заключается в следующем: различные операторы (записанные подходящим образом) показывают, что разные свойства ассоциированных функций либо сохраняются, либо преобразуются в аналогичные свойства класса решений, порожденных соответствующим оператором.

---

[1]) Номер (I. 3.4) обозначает формулу (4) из гл. I, § 3.

В гл. II мы покажем, что аналогичные методы могут быть развиты для действительных гармонических функций трех действительных переменных x, y, z. В этом случае мы продолжаем x, y, z на комплексные значения и для упрощения формул вводим переменные

$$X = x, \quad Z = \frac{1}{2}(iy + z), \quad Z^* = \frac{1}{2}(iy - z). \tag{5}$$

Всякой гармонической функции $H(X, Z, Z^*)$, регулярной в начале координат, мы ставим в соответствие аналитическую функцию $\chi(Z, Z^*)$ двух комплексных переменных. Функция χ называется C_3-*ассоциированной* с H. Она совпадает с функцией H на листе $X = 2(ZZ^*)^{1/2}$ характеристического пространства

$$X^2 - 4ZZ^* = 0 \quad (\text{т. е. } x^2 + y^2 + z^2 = 0), \tag{6}$$

а именно:

$$\chi(Z, Z^*) = H\left(2(ZZ^*)^{1/2}, Z, Z^*\right). \tag{7}$$

Функция χ является регулярной функцией от $Z^{1/2}$ и $Z^{*1/2}$. В гл. II, § 2 мы определим оператор, преобразующий $\chi(Z, Z^*)$ в $H(X, Z, Z^*)$. Этот оператор включает два интегрирования. После первого интегрирования функция χ преобразуется в так называемую B_3-*ассоциированную* функцию с $H(X, Z, Z^*)$, являющуюся функцией двух переменных

$$u = X + Z\zeta + Z^*\zeta^{-1} \quad \text{и} \quad \zeta.$$

Такие B_3-ассоциации были впервые рассмотрены Уиттекером. Они образуют алгебру, но обладают различными недостатками, которых не имеют C_3-ассоциации. Например, две переменные u и ζ играют совсем разные роли: u зависит от x, y, z, в то время как ζ есть просто переменная интегрирования. Тем не менее совершенно естественно и поучительно рассматривать гармонические функции, соответствующие B_3-ассоциированным, которые как функции u и ζ являются рациональными, алгебраическими или интегралами от алгебраических функций и т. д. Это приводит к удобной классификации гармонических функций. Каждый из таких классов обладает интересными характеристическими свойствами. Далее мы рассмотрим особенности функций, принадлежащих этим классам; эти особенности образуют кривые в действительном пространстве x, y, z, которые могут вырождаться в точки. В связи с этим различные результаты, относящиеся к интегралам от алгебраических функций, могут оказаться полезными для вывода свойств соответствующих классов гармонических функций.

При изучении функций, $\mathbf{B}_3$-ассоциированных с гармоническими функциями трех переменных, мы наблюдаем интересное явление. Предположим сначала, что $\mathbf{B}_3$-ассоциированная функция является рациональной функцией $f(u, \zeta)$ от u и ζ. Тогда гармоническая функция переменных x, y, z, которая получается при применении интегрального оператора к $f(u, \zeta)$, вообще говоря, не будет регулярной гармонической функцией во всем (действительном) пространстве x, y, z. Это пространство разбивается *отделяющими поверхностями* на конечное число областей (*областей ассоциации*), зависящих от $f(u, \zeta)$, оператора и выбора пути интегрирования $\mathfrak{L}$ в плоскости ζ, причем внутри каждой из этих областей интегральный оператор определяет регулярную гармоническую функцию. При движении точки (x, y, z) из одной такой области в другую определяется новая гармоническая функция. Каждая из этих гармонических функций является линейной комбинацией фиксированного множества (многозначных) функций. Коэффициенты этой линейной комбинации зависят от рассматриваемой области ассоциации, т. е. от точек (x, y, z). Если точка (x, y, z) переходит из одной области ассоциации в другую, то особые точки функции $f(u, \zeta)$, где

$$u = x + \frac{iy+z}{2}\zeta + \frac{iy-z}{2}\zeta^{-1},$$

могут оказаться внутри или снаружи пути интегрирования $\mathfrak{L}$.

В случае когда $\mathbf{B}_3$-ассоциированная функция является алгебраической или интегралом от алгебраической функции, положение становится еще более сложным. Значительная часть гл. II посвящена анализу гармонических функций, имеющих такие $\mathbf{B}_3$-ассоциированные; специальное внимание уделено особенностям этих функций.

Мы также рассмотрим связь между свойствами некоторых коэффициентов разложения гармонической функции в ряд и расположением и характером ее особенностей.

В § 6 и 7 изучается интегральный оператор другого типа; этот оператор определяет гармонические функции, представляющие собой обобщение ньютоновских потенциалов.

В гл. III изучаются интегральные операторы, преобразующие гармонические функции в решения дифференциальных уравнений

$$\Delta_3\psi + A(r^2)\boldsymbol{X}\cdot\nabla\psi + C(r^2)\psi = 0, \tag{8а}$$

$$\Delta_3\psi + F(y, z)\psi = 0, \tag{8б}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + F(y, z)\psi = 0. \tag{8в}$$

Здесь

$$\nabla = i_1\frac{\partial}{\partial x} + i_2\frac{\partial}{\partial y} + i_3\frac{\partial}{\partial z}, \tag{9а}$$

$$\boldsymbol{X} = i_1 x + i_2 y + i_3 z, \tag{9б}$$

$$\boldsymbol{X}\cdot\nabla = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}; \tag{9в}$$

A и C — целые функции от $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а $F(y, z)$ — целая функция от y и z. Используя подходящий интегральный оператор, можно обобщить некоторые результаты, полученные в гл. II для гармонических функций трех переменных, на случай решений уравнений, написанных выше.

В гл. IV рассматриваются системы уравнений с частными производными. Первые четыре параграфа посвящены *гармоническим векторам*, т. е. векторным полям в трехмерном пространстве, удовлетворяющим системе уравнений

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0. \tag{10}$$

Систему (10) можно рассматривать как обобщение уравнений Коши — Римана[1]). В частности, каждая компонента гармонического вектора является гармонической функ-

---

[1]) В случае двух измерений эти уравнения сводятся к уравнениям Коши — Римана, в которых x и y меняются ролями.

цией. Из второго уравнения (10) следует, что выражение

$$H_1\,dx + H_2\,dy + H_3\,dz$$

(где H_1, H_2, H_3 — компоненты вектора $\boldsymbol{H}$) является точным дифференциалом, так что интеграл от такого выражения вдоль любой замкнутой кривой равен нулю, если эта кривая может быть непрерывно стянута в точку внутри области регулярности векторного поля. Однако гармонические векторы[1]), соответствующие рассмотренным в гл. II различным классам $\mathbf{B}_3$-ассоциированных функций, обладают, вообще говоря, особыми точками или линиями, так что интеграл $\int [H_1\,dx + H_2\,dy + H_3\,dz]$ вдоль замкнутой кривой не обязательно равен нулю. В частности, если $\mathbf{B}_3$-ассоциированная функция является алгебраической, мы покажем, что определенные комбинации интегралов $\int \left[H_1^{(\nu)}\,dx + H_2^{(\nu)}\,dy + H_3^{(\nu)}\,dz\right]$, где $\left(H_1^{(\nu)}, H_2^{(\nu)}, H_3^{(\nu)}\right)$ — различные ветви одной и той же многозначной вектор-функции, дают значения, зависящие от особых точек или особых кривых рассматриваемого вектора. Таким путем мы получаем теоремы, которые можно рассматривать как обобщения теоремы о вычетах и теоремы Абеля в теории аналитических функций комплексного переменного. В § 5 мы изучаем обобщение некоторых из этих теорем для случая уравнения (8а), когда $A = 0$.

В § 6 мы рассматриваем систему

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\,\partial z_1^*} = F\left(z_1, z_1^*\right)\psi, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z_2\,\partial z_2^*} = G\left(z_2, z_2^*\right)\psi, \tag{11}$$

где F и G — целые функции указанных переменных. В этом случае $\psi\left(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*\right)$ можно представить в виде интегрального преобразования пары аналитических функций

---

[1]) Гармоническим вектором, соответствующим ассоциированной функции $f(u, \zeta)$, является вектор (H_1, H_2, H_3), компонента H_1 которого имеет $f(u, \zeta)$ в качестве $\mathbf{B}_3$-ассоциированной функции. $\mathbf{B}_3$-ассоциации для H_2 и H_3 равны $f(u, \zeta)$, умноженной на простые полиномы от ζ и ζ^{-1}. Функции H_2 и H_3 определяются по H_1 с точностью до действительной и мнимой частей некоторой аналитической функции комплексного переменного $y + iz$. Подробности см. на стр. [illegible] и далее.

двух комплексных переменных, а изучение системы (11) можно связать с теорией функций двух комплексных переменных.

В гл. V изучаются уравнения смешанного типа

$$\psi_{xx} + l(x)\psi_{yy} = 0, \tag{12}$$

где $l(x)$ — целая функция, такая, что $l(x) > 0$ для $x < 0$ и $l(x) < 0$ для $x > 0$.

После преобразования

$$\lambda \equiv \lambda(x) = \int\limits_{t=0}^{x} [l(t)]^{1/2}\, dt \tag{13}$$

и еще одного дополнительного преобразования уравнение (12) принимает вид

$$\psi^*_{\lambda\lambda} + \psi^*_{yy} + 4F\psi^* = 0. \tag{14}$$

Здесь $F \equiv F(\lambda)$ имеет особенность при $\lambda = 0$. (Подробности см. в тексте.) Для очень частного случая уравнения (12), а именно для *случая Трикоми* (или *упрощенного* случая) мы имеем

$$F(\lambda) = \frac{5}{144\lambda^2} \tag{15}$$

и решение можно записать в форме

$$\psi^*(\lambda, y) = \int\limits_{t=-1}^{1} E^*(\lambda, t) f\left[\frac{1}{2}(\lambda + iy)(1 - t^2)\right](1 - t^2)^{-1/2}\, dt, \tag{16}$$

$$E^*(\lambda, t) = A\mathrm{F}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2};\ \frac{t^2(\lambda + iy)}{2\lambda}\right) + \\ + B\sqrt{\frac{t^2(\lambda + iy)}{2\lambda}}\, \mathrm{F}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2};\ \frac{t^2(\lambda + iy)}{2\lambda}\right), \tag{16a}$$

где A и B — постоянные, а F — гипергеометрическая функция. Мы покажем, что если F имеет вид

$$F(\lambda) = \lambda^{-2}P(\lambda), \quad P(\lambda) = \frac{5}{144} + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n (-\lambda)^{2n/3}, \tag{15a}$$

где $P(\lambda)$ — целая функция от $(-\lambda)^{2/3}$, то существует порождающая функция E^*, которую можно рассматривать как обобщение гипергеометрических функций.

В § 6 мы рассмотрим систему

$$\varphi_x = \psi_y, \quad \varphi_y = -l(y)\psi_x, \tag{17}$$

которая при $l(y) = 1$ сводится к уравнениям Коши — Римана. Мы введем оператор, порождающий решения системы (17) и, таким образом, приводящий к классу функций, который является обобщением класса аналитических функций. В § 7 рассматриваются некоторые уравнения эллиптического типа с сингулярными коэффициентами; случай неаналитических коэффициентов изучается в § 8.

В настоящем обзоре автор пытался показать, что многие методы, используемые в теории гармонических функций двух переменных и основанные на их связи с аналитическими функциями одного комплексного переменного, можно обобщить на случай других дифференциальных уравнений. Для этого мы применяем интегральные операторы, при помощи которых мы можем превратить различные теоремы теории функций одного комплексного переменного в теоремы о решениях некоторого данного линейного уравнения в частных производных с аналитическими коэффициентами. Таким путем мы получаем результаты, которые зависят только от некоторых весьма общих свойств коэффициентов этого линейного уравнения в частных производных.

1. Соотношение между подпоследовательностью $\{a_{m0}\}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, коэффициентов разложения $U(z, z^*) = \sum a_{mn} z^m z^{*n}$ решения уравнения (1б) и расположением и свойствами особенностей функции $U(z, z^*)$ почти не зависит от коэффициентов A, B, C уравнения (1б). (Подробнее см. на стр. 48.) В то время как переход от аналитических функций к решениям уравнения (1б) в случае *двух* действительных переменных сравнительно прост, при рассмотрении дифференциальных уравнений с *тремя* переменными ситуация значительно сложнее. Здесь разложения имеют вид ряда от трех переменных; тем не менее, мы можем получить информацию о решении, изучая

некоторые подпоследовательности коэффициентов его разложения. В частности, для гармонических функций мы рассматриваем разложения вида $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{2m} A_{m,n}\Gamma_{n,m}(X, Z, Z^*)$, где $\Gamma_{n,m}$ — подходящая однородная линейная комбинация сферических функций. Мы покажем, что, зная некоторые подпоследовательности $\{A_{m,\varphi(m)}\}$ последовательности $\{A_{m,n}\}$, мы можем судить об особенностях функции $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,\varphi(m)}\Gamma_{\varphi(m),m}(X, Z, Z^*)$. В этой связи следует подчеркнуть, что особенности решений дифференциальных уравнений с тремя переменными представляют собой, вообще говоря, кривые, и даже для гармонического уравнения мы имеем различные типы особенностей, которые можно рассматривать как обобщения полюсов. Эти результаты можно распространить и на некоторые другие дифференциальные уравнения.

2. Вторая рассматриваемая здесь проблема связана с теорией интегралов от гармонических векторов, компоненты которых являются алгебраическими функциями. Эти интегралы, рассматриваемые как функции верхнего предела, являются трансцендентными функциями. Мы покажем, что некоторые комбинации таких интегралов равны некоторым комбинациям интегралов от алгебраических функций одного комплексного переменного, причем пределы этих интегралов связаны алгебраическими соотношениями.

3. Для гармонических векторов $\left(G_1^{(k)}, G_2^{(k)}, G_3^{(k)}\right)$,

$$\begin{gathered}
G_1^{(k)} = H_1(X) + c(-1)^{k+1}r^{-1},\\
G_2^{(k)} = H_2(X) + \frac{cy}{r\left(r+(-1)^{k+1}x\right)},\\
G_3^{(k)} = H_3(X) + \frac{cz}{r\left(r+(-1)^{k+1}x\right)},\\
r^2 = x^2+y^2+z^2, \quad c = \text{const}, \quad k = 1, 2,
\end{gathered} \tag{18}$$

где $\{H_j(X)\}$, $j = 1, 2, 3$, регулярны в достаточно широкой области $\mathfrak{J}$, справедлива теорема о вычетах, утверждающая, что

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{\mathfrak{J}_k} \left(G_1^{(k)}\,dx + G_2^{(k)}\,dy + G_3^{(k)}\,dz\right] = 2\pi c A l. \qquad (19)$$

Здесь $\mathfrak{J}_1$ — часть $\mathfrak{J}$, в которой $x > 0$, $\mathfrak{J}_2$ — часть $\mathfrak{J}$, в которой $x < 0$ (здесь мы не указываем условия, которым должны удовлетворять $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$); A — *действительная* величина, зависящая только от пересечения $\mathfrak{J}$ с плоскостью $x = 0$. Заметим, что если рассматривать гармонические векторы, для которых $r^2 = (x - iA_2)^2 + y^2 + z^2$, $A_2 \neq 0$, то формулу (19) нужно изменить.

Обобщая результаты такого типа на случай вектора Ψ, компоненты которого удовлетворяют уравнению $\Delta_3\psi + F\psi = 0$, где F — целая функция от $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, получим

$$\int_{\mathfrak{S}} \Psi(X) \cdot dX = c \int_{-\tau_0}^{\tau_0} E(r, \tau) R(\tau, P_{\mathfrak{S}})\,d\tau + c \int_{-\tau_0}^{\tau_0} E(r, \tau) Q(\tau, P_{\mathfrak{S}}, P_{\mathfrak{J}})\,d\tau, \qquad (20)$$

где $\mathfrak{J}$ лежит на *границе шара* с центром в начале координат. Здесь $E(r, \tau)$ — функция, зависящая только от дифференциального уравнения, $R(\tau)$ — вычет вектора $H(X(1-\tau^2))$ вдоль $\mathfrak{J}$, где $H(X)$ — гармонический вектор, совпадающий с $\Psi(X)$ на границе шара. Наконец, Q зависит только от точек пересечения вектора $H(X(1-\tau^2))$ с двумя фиксированными поверхностями. (Подробнее см. на стр. 150.) Теоремы такого типа можно обобщить на случай других дифференциальных уравнений, рассматривая векторы в комплексной области.

В предлагаемом обзоре автор пытался, насколько это возможно, показать, что отображение линейных пространств функций на алгебру функций одного или нескольких комплексных переменных представляет собой полезный и сильный аппарат не только в случае гармонических функций двух действительных переменных, но и для решений линейных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами.

В то время как общая теория уравнений с целыми коэффициентами в случае двух переменных достигла высокой степени развития, в случае трех переменных исследованы лишь специальные типы уравнений и систем [см. (8а), (8б), (8в), (10), (11)]. Из уравнений с сингулярными коэффициентами с этой точки зрения изучено лишь уравнение (14).

Интегральные операторы до некоторой степени произвольны. В самом деле, пусть мы имеем решение линейного дифференциального уравнения, зависящее от некоторого параметра. Тогда интеграл от этого решения, умноженного на любую функцию того же параметра, представляет интегральный оператор, порождающий решения данного уравнения. В настоящем обзоре мы рассмотрим те операторы, которые допускают развитие систематической и единой теории решений уравнений с частными производными на базе теории функций комплексного переменного. Можно ожидать, что для дальнейшего развития этого подхода окажутся полезными другие типы интегральных операторов.

По-видимому, для многих целей представляет особый интерес интегральный оператор вполне определенного типа; с другой стороны, важно изучить различные другие интегральные операторы, так как для специальных целей и специальных типов дифференциальных уравнений полезны другие интегральные операторы.

Мы приводим подробно только те рассуждения, форма изложения которых в оригинальной статье далека от принятой в настоящей книге; в других случаях мы часто отсылаем к литературе за доказательствами и подробностями.

В конце каждой главы перечислены статьи, в которых изложены родственные темы и их приложения.

Автор выражает благодарность Бернарду Эпштейну за большую помощь в подготовке этого обзора, что явилось трудоемкой задачей. Многие из его предложений были использованы в тексте. Ценное участие в подготовке части этой книги принял Син Хитотумату, который также прочел окончательный вариант рукописи. Ясности изложения способствовали дискуссии с Ранко Бояничем, просмотревшим часть рукописи. Большую помощь в под-

готовке этого обзора оказал Эрвин Крейсциг, который внес важный вклад в рассматриваемые здесь вопросы. Кроме того, автор благодарит Шарлотту Остин, подготовившую рукопись к изданию.

Наконец, автор выражает благодарность Военно-морскому исследовательскому отделу и Национальному научному фонду за поддержку работы.

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Формула[1]) (0.1.4) позволяет связать с каждым решением дифференциального уравнения (0.1.1б) некоторую аналитическую функцию $g(z)$ комплексного переменного. Возникает обратная задача определения по данной функции $g(z)$ соответствующего решения уравнения (0.1.1б). Решить эту задачу можно, вводя так называемый интегральный оператор первого рода, который будет описан в § 1—3. Мы выразим решения U через произвольную функцию комплексного переменного $f(z)$. Затем $f(z)$ будет выражена через функцию $g(z)$, которая в существенном совпадает с $U(z, 0)$ [см. (2.1) и (2.5)].

§ 1. Представление решений уравнений с частными производными

Лемма. *Пусть* $A \equiv A(z, z^*)$, $B \equiv B(z, z^*)$, $C \equiv C(z, z^*)$ — *непрерывно дифференцируемые функции для*[2]) $(z, z^*) \in \mathfrak{U}^4(0, 0)$ *и пусть*

$$D = n_z - \int_0^{z^*} A_z\, dz^* + B, \quad F = -A_z - AB + C, \qquad (1)$$

где $n = n(z)$ — *произвольная аналитическая функция комплексного переменного, регулярная для* $z \in \mathfrak{U}^2(0)$.

Пусть, далее, функция $\tilde{E}(z, z^*, t)$ *при* $(z, z^*) \in \mathfrak{U}^4(0, 0)$, $|t| \leqslant 1$, — *дважды непрерывно дифферен-*

---

[1]) Номер (0.1.4) обозначает формулу (4) из введения, (2.1) — формулу (1) из § 2 настоящей главы.

[2]) $\mathfrak{U}^n(0, 0, \ldots, 0)$ означает n-мерную окрестность точки $(0, \ldots, 0)$.

цируемое решение уравнения

$$\mathbf{B}(\tilde{E}) \equiv (1-t^2)\tilde{E}_{z^*t} - \frac{1}{t}\tilde{E}_{z^*} + 2tz[\tilde{E}_{zz^*} + D\tilde{E}_{z^*} + F\tilde{E}] = 0, \quad (2)$$

обладающее следующими свойствами.

Для $(z, z^*) \in \mathfrak{U}^4(0, 0)$ *имеем*

$$\lim_{t \to \pm 1} (1-t^2)^{1/2} \tilde{E}_{z^*}(z, z^*, t) = 0 \quad (3)$$

(равномерно по t*). Кроме того, отношение* $\tilde{E}_{z^*}/t$ *непрерывно для* $(z, z^*) \in \mathfrak{U}^4(0, 0)$, $|t| \leqslant 1$.

Пусть

$$U(z, z^*) = \int_{\mathfrak{S}^1} E(z, z^*, t) f\left(\frac{1}{2} z(1-t^2)\right) \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}, \quad (4)$$

где f *— аналитическая функция комплексного переменного, регулярная в начале координат,*

$$E(z, z^*, t) = \exp\left[-\int_0^{z^*} A\,dz^* + n(z)\right] \tilde{E}(z, z^*, t) \quad (5)$$

и $\mathfrak{S}^1$ *— путь в комплексной плоскости* t, *соединяющий точки* -1 *и* $+1$, *минуя точку*[1] $t = 0$. *Тогда* (4) *является решением уравнения*[2]

$$\mathbf{L}(U) = U_{zz^*} + AU_z + BU_{z^*} + CU = 0, \quad (6)$$

дважды непрерывно дифференцируемым в $\mathfrak{U}^4(0, 0)$.

Доказательство. Как показывает формальное вычисление, достаточно доказать, что

$$V(z, z^*) = \exp\left[\int_0^{z^*} A\,dz^* - n(z)\right] U(z, z^*) \quad (7)$$

является решением уравнения

$$\tilde{\mathbf{L}}(V) = V_{zz^*} + DV_{z^*} + FV = 0. \quad (6a)$$

---

[1]) Если функция $t^{-1}E_{z^*}$ непрерывна при $t = 0$, то $\mathfrak{S}^1$ может проходить и через $t = 0$.

[2]) Уравнение (2) более сложно, чем (6), но одно решение уравнения (2) порождает семейство решений уравнения (6).

Напишем

$$V=\int_{\mathfrak{G}^1}\tilde{E}f\,\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}. \tag{8}$$

Пусть $z\neq 0$, $(z, z^*)\in \mathfrak{U}^4(0, 0)$. Тогда

$$V_{z^*}=\int_{\mathfrak{G}^1}\frac{\tilde{E}_{z^*}f\,dt}{(1-t^2)^{1/2}},\quad V_{zz^*}=\int_{\mathfrak{G}^1}[\tilde{E}_{zz^*}f+\tilde{E}_{z^*}f_z]\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}. \tag{9}$$

Так как $f_z=-f_t(1-t^2)/2zt$, мы получаем, интегрируя по частям, что

$$\begin{aligned} V_{zz^*}&=\int_{\mathfrak{G}^1}\left[\tilde{E}_{zz^*}f-\tilde{E}_{z^*}\frac{1-t^2}{2zt}f_t\right]\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}=\\ &=-\tilde{E}_{z^*}\frac{(1-t^2)^{1/2}}{2zt}f\Big|_{t=-1}^{1}+\\ &\quad+\int_{\mathfrak{G}^1}\left[\frac{\tilde{E}_{zz^*}}{(1-t^2)^{1/2}}+\left(\tilde{E}_{z^*}\frac{(1-t^2)^{1/2}}{2zt}\right)_t\right]f\,dt. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V_{zz^*}+DV_{z^*}+FV&=-\tilde{E}_{z^*}\frac{(1-t^2)^{1/2}}{2zt}f\Big|_{t=-1}^{1}+\\ &\quad+\int_{\mathfrak{G}^1}\left[\frac{\tilde{E}_{zz^*}}{(1-t^2)^{1/2}}+\left(\tilde{E}_{z^*}\frac{(1-t^2)^{1/2}}{2zt}\right)_t+\right.\\ &\quad\left.+D\frac{\tilde{E}_{z^*}}{(1-t^2)^{1/2}}+F\frac{\tilde{E}}{(1-t^2)^{1/2}}\right]f\,dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Далее,

$$\left(\tilde{E}_{z^*}\frac{(1-t^2)^{1/2}}{2zt}\right)_t=\tilde{E}_{z^*t}\frac{(1-t^2)^{1/2}}{2zt}-\tilde{E}_{z^*}\frac{1}{2zt^2(1-t^2)^{1/2}} \tag{12}$$

и выражение под знаком интеграла равно

$$\begin{aligned} \frac{1}{zt(1-t^2)^{1/2}}&\left[\tilde{E}_{z^*t}(1-t^2)-\frac{\tilde{E}_{z^*}}{t}+\right.\\ &\left.+2tz(\tilde{E}_{zz^*}+D\tilde{E}_{z^*}+F\tilde{E})\right]\frac{f}{2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, если $\tilde{E}$ удовлетворяет уравнению (2), а f — произвольная аналитическая функция одного комплексного переменного, регулярная в начале координат, то формула (4) дает решение уравнения (6).

Определение. Мы назовем E [см. (5)] ***порождающей функцией*** для дифференциального уравнения (6) относительно начала координат.

Равенство (4) дает комплексное решение уравнения (6). Если $B(z, \bar{z}) = \bar{A}(z, \bar{z})$ и функция $C(z, \bar{z})$—действительная, то мы получаем для $z^* = \bar{z}$ действительные решения в виде

$$\int_{\mathfrak{L}} [E_1(z, \bar{z}, t) f(z(1-t^2)/2) + \\ + E_2(z, \bar{z}, t) \bar{f}(\bar{z}(1-t^2)/2)] \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}, \tag{14}$$

где через E_1 мы обозначили функцию (5), а через E_2 — аналогичное выражение, определяемое равенством $E_2(z, \bar{z}, t) = \bar{E}_1(\bar{z}, z, \bar{t})$.

Для данного дифференциального уравнения (6) существует бесконечно много порождающих функций E. Интересно исследовать эти функции и выделить среди них обладающие интересными свойствами.

Для гармонических функций мы имеем представление

$$\psi(z, z^*) = \frac{1}{2} [g(z) + \bar{g}(z^*)], \tag{15}$$

где g — произвольная аналитическая функция комплексного переменного. Мы покажем, что порождающие функции $E_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2$, в формуле (14) можно выбрать так, что эта формула после небольшой модификации даст обобщение формулы (15).

§ 2. Интегральный оператор первого рода

Как указывалось во введении, мы связываем функцию $g(z) = U(z, 0) - cs(z)$ с действительным решением $U(z, \bar{z})$ уравнения $\mathbf{L}(U) = 0$, регулярным в точке 0. Здесь c — постоянная, зависящая от $U(0, 0)$, а $s(z)$ — целая функция, зависящая только от уравнения $\mathbf{L} = 0$, Определение. Мы назовем оператор[1]) $C_2(z, z^*; g)$, который переводит $g(z)$ в[2]) $U(z, z^*)$, *интегральным оператором первого рода* для уравнения $L = 0$.

Интегральный оператор такого вида может быть получен следующим образом. Пусть

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \tag{1}$$

и

$$f\left(\frac{z}{2}\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{L}} g(z(1-t^2))\frac{dt}{t^2} = \sum \frac{\Gamma(n+1) A_n z^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}. \tag{2}$$

Лемма. *Если* $E_\varkappa(z, z^*, t)$, $\varkappa = 1, 2$, *имеют вид*

$$E_1(z, z^*, t) = \\ = \exp\left[-\int_0^{z^*} A(z, z^*)\,dz^*\right][1 + tzz^* e(z, z^*, t)], \tag{3a}$$

$$E_2(z, z^*, t) = \\ = \exp\left[-\int_0^{z} \overline{A}(z^*, z)\,dz\right][1 + tzz^*\overline{e}(z^*, z, t)], \tag{3б}$$

то

$$C_2(z, z^*; g) = \int_{\mathfrak{L}}\left[E_1(z, z^*, t) f\left(\frac{z(1-t^2)}{2}\right) + \right. \\ \left. + E_2(z, z^*, t)\overline{f}\left(\frac{z^*(1-t^2)}{2}\right)\right]\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} \tag{4}$$

представляет собой интегральный оператор первого рода. [*Здесь* f *определяется формулой* (2)].

---

[1]) В некоторых предыдущих статьях вместо C_2 использовался символ p.

[2]) $U(z, z^*)$ означает функцию двух независимых переменных z и z^*, получаемую при продолжении $U(x+iy, x-iy)$ на комплексные значения x и y.

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
\mathrm{c}_2(z, 0; g) &= \int_{\mathfrak{L}} \Bigg[f\left(\frac{z(1-t^2)}{2}\right) + \\
&+ \exp\left[-\int_0^z \bar{A}(0, z)\,dz\right] \bar{f}(0) \Bigg] \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} = \\
&= \sum \frac{\Gamma(n+1) A_n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} z^n \int_{\mathfrak{L}} (1-t^2)^{n-1/2}\,dt + \\
&+ \exp\left[-\int_0^z \bar{A}(0, z)\,dz\right] \bar{f}(0) \int_{\mathfrak{L}} \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} = \\
&= \sum A_n z^n + \pi \exp\left(-\int_0^z \bar{A}(0, z)\,dz\right) \bar{f}(0). \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Замечание. Символом $\mathrm{c}_2(z, z^*; g)$ мы будем обозначать комплексное решение

$$\int_{\mathfrak{L}} E_1(z, z^*, t)\, f\left(\frac{z(1-t^2)}{2}\right) \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}$$

уравнения (1.6).

Мы должны еще показать, что функции E_1 и E_2, порождающие интегральный оператор первого рода, существуют.

Теорема 2.1. *Пусть коэффициенты* A, B, C *уравнения* (1.6) *являются аналитическими функциями двух комплексных переменных, регулярными в бицилиндре* $\mathfrak{R}^4 = \{|z| \leqslant r, |z^*| \leqslant r\}$.

Тогда функция $E_1(z, z^*, t)$ *регулярна в области* $\left\{\left|\frac{2z}{r-|z|}\right| < 1, |t| \leqslant 1\right\}$.

Замечание. E_1 и E_2 регулярны[1]) в области

$$\left\{\frac{|z|}{r} < \frac{1}{3}, \quad \frac{|z^*|}{r} < \frac{1}{3}, \quad |t| \leqslant 1\right\}.$$

---

[1]) Таким образом, если A, B, C — целые функции, то оператор $\mathrm{c}_2(z, z^*; g)$ определен для $|z| < \infty$, $|z^*| < \infty$.

Доказательство. В доказательстве этой теоремы мы используем метод мажорант. В силу наших предположений мы получаем для D и F мажоранты

$$D \ll M\left(1-\frac{z}{r}\right)^{-1}\left(1-\frac{z^*}{r}\right)^{-1},$$
$$F \ll M\left(1-\frac{z}{r}\right)^{-1}\left(1-\frac{z^*}{r}\right)^{-1}, \tag{6}$$

где M — подходящим образом выбранная постоянная. Напишем

$$\tilde{E}_1(z, z^*, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} z^n \int_0^{z^*} P^{(2n)}(z, z^*)\, dz^*. \tag{7}$$

Согласно лемме на стр. 25, $\tilde{E} = \tilde{E}_1$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{B}(\tilde{E}) \equiv (1-t^2)\tilde{E}_{z^*t} - (1/t)\tilde{E}_{z^*} +$$
$$+ 2tz(\tilde{E}_{zz^*} + D\tilde{E}_{z^*} + F\tilde{E}) = 0. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (8), мы получаем следующие уравнения для $P^{(2n)}$:

$$P^{(2)} = -2F,$$
$$(2n+1)P^{(2n+2)} = -2\left[P_z^{(2n)} + DP^{(2n)} + F\int_0^{z^*} P^{(2n)}\, dz^*\right],$$
$$n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Так как F и D — аналитические функции двух комплексных переменных в $\mathfrak{R}^4$, функции $P^{(2n+2)}(z, z^*)$ также аналитичны в $\mathfrak{R}^4$ и нам остается только показать, что ряд в правой части формулы (7) сходится.

Мажоранты для D и F дают формулы (6). Мы определим мажоранты $\tilde{P}^{(2n)}(z, z^*)$ для $P^{(2n)}(z, z^*)$ следующим образом:

$$\widetilde{P}^{(0)}=1, \quad \widetilde{P}^{(2)}(z, z^*)=\frac{2C}{(1-z/r)(1-z^*/r)}, \quad C\geqslant M,$$

$$(2n+1)\widetilde{P}^{(2n+2)}(z, z^*)=$$

$$=2\left[\widetilde{P}_z^{(2n)}(z, z^*)+\frac{C}{(1-z/r)(1-z^*/r)}\widetilde{P}^{(2n)}(z, z^*)+\right.$$

$$\left.+\frac{C}{(1-z/r)(1-z^*/r)}\int\limits_0^{z^*}\widetilde{P}^{(2n)}(z, z^*)\,dz^*\right],$$

$$n=1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Напишем

$$\widetilde{P}^{(0)}=\widetilde{Q}^{(0)}=1, \quad \widetilde{P}^{(2)}(z, z^*)=\frac{\widetilde{Q}^{(2)}(z^*)}{(1-z/r)},$$

$$\widetilde{P}^{(2n)}(z, z^*)=\frac{2^{n-1}\widetilde{Q}^{(2n)}(z^*)}{(1-z/r)^n(2n-1)!!}, \quad n=2, 3, \ldots. \tag{11}$$

Подставляя эти выражения в (10), получаем

$$\widetilde{Q}^{(2)}(z^*)=\frac{2C}{(1-z^*/r)},$$

$$\widetilde{Q}^{(2n+2)}(z^*)=\widetilde{Q}^{(2n)}(z^*)\left[\frac{n}{r}+\frac{C}{1-z^*/r}\right]+ \tag{12}$$

$$+\frac{C}{1-z^*/r}\int\limits_0^{z^*}\widetilde{Q}^{(2n)}(z^*)\,dz^*.$$

Из формулы (12) видно, что $\widetilde{Q}^{(2n)}$ зависит только от z^*, и мы имеем

$$\widetilde{Q}^{(2n+2)}(z^*)\ll\widetilde{Q}^{(2n)}(z^*)\left[\frac{n+A}{r}\right], \quad A=2Cr(1+r) \tag{13}$$

и

$$\widetilde{P}^{(2n)}(z, z^*)\ll\frac{2^{n+1}(n+A-1)(n+A-2)\ldots(1+A)C}{(1-z/r)^n r^{n-1}(2n-1)!!}. \tag{14}$$

Мажорирующий ряд для (7)

$$1+|t|^2\frac{2C}{1-|z|/r}+$$

$$+2Cr\sum_{n=2}^{\infty}|t|^{2n}\frac{|2z|^n(n-1+A)(n-2+A)\dots(1+A)}{(r-|z|)^n(2n-1)!!}$$

сходится при $|z|<r/3$, $|z^*|<r/3$, $|t|\leqslant 1$.

Замечание. Эйхлер [233] независимо от автора [14] получил интегральный оператор первого рода. Некоторые дифференциальные уравнения с регулярными и сингулярными коэффициентами также рассмотрены в работах [234] и [235] (ср. § 9 и гл. V).

§ 3. Дальнейшие представления интегральных операторов

Для различных применений бывает удобно записать интегральный оператор (1.4) в несколько модифицированной форме и вывести для него различные представления.

Введем функцию $g(z)$ соотношением

$$g(z)=\int_{t=-1}^{1}f\left(\frac{z(1-t^2)}{2}\right)\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} \tag{1}$$

[обратным к (2.2)].

Лемма. *Если*

$$E(z,\ z^*,\ t)=\exp\left[-\int_0^{z^*}A(z,\ z^*)\,dz^*\right]\times$$

$$\times\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n}e_n(z,\ z^*)\right], \tag{2}$$

$$e_n(z,\ z^*)=z^nQ^{(n)}(z,\ z^*)$$

[*см.* (2.7) *и* (5)], *то интегральный оператор*

$$\int_{\mathfrak{L}^1}E(z,\ z^*,\ t)\,f\left(\frac{z}{2}(1-t^2)\right)\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} \tag{3}$$

может быть также записан в виде

$$\exp\left[-\int_0^{z^*} A(z, z^*)\,dz^*\right]\left[g(z)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2n+1)\,Q^{(n)}(z, z^*)}{2^{2n}\Gamma(n+1)}\int_0^{z}\int_0^{z_1}\ldots\int_0^{z_{n-1}} g(z_n)\,dz_n\ldots dz_1\right]= \tag{4a}$$

$$=\exp\left[-\int_0^{z^*} A(z, z^*)\,dz^*\right]\times$$

$$\times\left[g(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{(n)}(z, z^*)}{2^{2n}\mathrm{B}(n, n+1)}\int_0^{z}(z-\zeta)^{n-1}g(\zeta)\,d\zeta\right]. \tag{4б}$$

Здесь

$$Q^{(n)}(z, z^*)=\int_0^{z^*} P^{(2n)}(z, z^*)\,dz^*, \tag{5}$$

где $P^{(2n)}$ *— функции, заданные формулой* (2.9).

Замечание. Заметим, что в дополнение к формуле (2.2) мы можем записать представление $f(z/2)$ как функции от g в виде

$$f\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{z^{1/2}}{\Gamma(1/2)}\,\frac{d^{1/2}}{d\,(z/2)^{1/2}}\,g(z)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[g(0)+2\int_0^{\pi/2} z\sin\theta\,\frac{dg\,(2z\sin^2\theta)}{d\,(z\sin^2\theta)}\,d\theta\right]. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем сначала справедливость соотношения (6). Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Из формулы (1) следует, что

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} z^n \int_{t=-1}^{1} (1-t^2)^{n-1/2}\,dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} z^n \frac{\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)}. \qquad (7)$$

Таким образом, имеем

$$\frac{1}{\pi} g(0)+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} z\sin\theta \frac{dg(2z\sin^2\theta)}{d(z\sin^2\theta)}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi} a_0 \frac{\Gamma^2(1/2)}{\Gamma(1)}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} z\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z\sin^2\theta)^{n-1} \frac{\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)}\,d\theta=$$

$$=a_0+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \sin^{2n-1}\theta\,d\theta \frac{n\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)}=$$

$$=a_0+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(1/2)}{2\Gamma(n+1/2)} \frac{n\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)} a_n z^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad (8)$$

Отсюда следует равенство (6). Далее, так как $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, мы получаем

$$\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2} z(1-t^2)\right) \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\,[\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(1/2)/\Gamma(n+1)]\,a_n z^n=g(z).$$

$$\int_{-1}^{1} t^2 f\left(\frac{1}{2} z(1-t^2)\right)\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}[\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(3/2)/\Gamma(n+2)]\, a_n z^n =$$
$$= \frac{1}{2} z^{-1}\int_0^z g(z_1)\,dz_1,$$
$$\int_{-1}^{1} t^4 f\left(\frac{1}{2} z(1-t^2)\right)\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} z^{-2}\int_0^z \int_0^{z_1} g(z_2)\,dz_2\,dz_1. \qquad (9)$$

Отсюда следует справедливость представления (4а). Если предположить, что $g(0)=0$, то мы получим

$$\int_0^z (z-z_1)^{k-1} g(z_1)\,dz_1 =$$
$$= \int_0^z (z-z_1)^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\int_0^{z_1} g(z_2)\,dz_2\right) dz_1 =$$
$$= (z-z_1)^{k-1}\int_0^{z_1} g(z_2)\,dz_2\Big|_{z_1=0}^{z_1=z} +$$
$$+ (k-1)\int_0^z (z-z_1)^{k-2}\left(\int_0^{z_1} g(z_2)\,dz_2\right) dz_1 =$$
$$= (k-1)\int_0^z (z-z_1)^{k-2}\int_0^{z_1} g(z_2)\,dz_2\,dz_1 =$$
$$= (k-1)\int_0^z (z-z_1)^{k-2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\int_0^{z_1}\int_0^{z_2} g(z_3)\,dz_3\,dz_2\right) dz_1 =$$

$$= (k-1)(z-z_1)^{k-2} \int_0^{z_1}\int_0^{z_2} g(z_3)\,dz_3\,dz_2 \Big|_{z_1=0}^{z_1=z} +$$

$$+ (k-1)(k-2)\int_0^{z} (z-z_1)^{k-3} \int_0^{z_1}\int_0^{z_2} g(z_3)\,dz_3\,dz_2\,dz_1 \quad (10)$$

и т. д.

Из написанных выше соотношений мы заключаем, что формула (4а) может быть переписана также в виде (4б).

§ 4. Представление оператора первого рода посредством интегралов

Перейдем к новому представлению интегрального оператора первого рода, полезному для различных целей.

Обозначения. Пусть $D(z, z^*)$ и $F(z, z^*)$ — функции двух комплексных переменных z и z^*, регулярные в области $\mathfrak{U}^4$ пространства двух комплексных переменных z и z^*, и пусть $g(z)$ — функция комплексного переменного z, регулярная в области $\mathfrak{U}^2 \subset \mathfrak{U}^4$ ($\mathfrak{U}^4$ и $\mathfrak{U}^2$ содержат начало координат). Введем следующие сокращенные обозначения:

$$\mathbf{T}(F_\nu, D_{\nu-1}, D_{\nu-2}, \ldots, F_2, F_1; g) = \quad (1)$$

$$= \int_0^{z}\int_0^{\overset{*}{z}} F_\nu \int_0^{z_\nu}\int_0^{\overset{*}{z}_\nu} D_{\nu-1} \int_0^{z_{\nu-1}} D_{\nu-2} \ldots \int_0^{z_3}\int_0^{\overset{*}{z}_{3+j}} F_2 \int_0^{z_2}\int_0^{\overset{*}{z}_{2+j}} F_1 g \delta_\nu,$$

где

$$\delta_\nu = dz_\nu\, dz_\nu^*\, dz_{\nu-1} \ldots dz_{j+1}\, d\overset{*}{z}_{j+1}\, dz_j\, dz_{j-1} \ldots dz_1,$$

$$F_\mu = F\left(z_\mu, z^*_{\mu+p}\right), \quad D_\mu = D\left(z_\mu, z^*_{\mu+p}\right)$$

и т. д. (j — число букв D, фигурирующих в выражении (1); p — число предшествующих букв D).

После каждого символа F_μ в выражении для $\mathbf{T}$ стоит двойной интеграл $\int_0^{z_\mu}\int_0^{\overset{*}{z}_{\mu+p}}$, после каждого D_μ — простой интеграл $\int_0^{z_\mu}$.

Через $\mathbf{J}_\nu \equiv \mathbf{J}_\nu(g)$ мы обозначим сумму $2^{\nu-1}$ выражений

$$\mathbf{T}(F_\nu, D_{\nu-1}, \ldots, F_1; g),$$

куда входят все возможные комбинации F_μ и $D_\varkappa$, за исключением тех, в которых D_1 стоит на последнем месте. Например,

$$\mathbf{J}_2(g) = \mathbf{T}(F_2, F_1; g) + \mathbf{T}(D_2, F_1; g), \tag{2a}$$

$$\mathbf{J}_3(g) = \mathbf{T}(F_3, F_2, F_1; g) + \mathbf{T}(F_3, D_2, F_1; g) + \\ + \mathbf{T}(D_3, F_2, F_1; g) + \mathbf{T}(D_3, D_2, F_1; g) \tag{2б}$$

и т. д.

Теорема 4.1. *Пусть F и D — целые функции двух комплексных переменных z, z^*. Тогда*

$$\tilde{\psi}(z, z^*) = g + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu \mathbf{J}_\mu(g) \tag{3}$$

является решением уравнения $\tilde{\mathbf{L}}(V) = 0$ [см. (1.6а), стр. 26] со следующим свойством:

$$V(z, 0) = g(z), \quad V(0, z^*) = g(0). \tag{4}$$

Доказательство. Если мы вместо ψ в уравнение

$$\psi(z, z^*) = g(z) - \int_0^z \int_0^{z^*} F(z_1, z_1^*)\, \psi(z_1, z_1^*)\, dz_1\, dz_1^* - \\ - \int_0^z \int_0^{z^*} D(z_1, z_1^*) \frac{\partial \psi(z_1, z_1^*)}{\partial z_1^*}\, dz_1\, dz_1^* \tag{5}$$

подставим правую часть равенства (3), то, очевидно, в обеих частях равенства (5) мы получим один и тот же бесконечный ряд.

Следовательно, мы должны только показать, что ряд (3) и его производные сходятся равномерно для $|z| \leqslant N$, $|z^*| \leqslant N$, где N — произвольное положительное число. Пусть

$$|g| < \hat{g}, \quad |F| < \hat{F}, \quad |D| < \hat{D} \quad \text{для} \quad |z| \leqslant N, \quad |z^*| \leqslant N, \tag{6}$$

где $\hat{g}$, $\hat{F}$, $\hat{D}$ — подходящие константы. Тогда

$$|g| + \left|\int_0^z \int_0^{z^*} F_1 g \delta_1\right| + \left|\int_0^z \int_0^{z^*} F_2 \int_0^{z_2} \int_0^{z_2^*} F_1 g \delta_2\right| +$$

$$+ \left|\int_0^z \int_0^{z^*} D_2 \int_0^{z_2} F_1 g \delta_2\right| + \ldots \leqslant \hat{g} + \hat{g}\hat{F}\tau^2 +$$

$$+ \hat{g}\left(\frac{\hat{F}^2}{2!} + \frac{\hat{F}\hat{D}}{2!}\right)\tau^4 + \hat{g}\left(\frac{\hat{F}^3}{3!} + 2\frac{\hat{F}^2\hat{D}}{3!} + \frac{\hat{F}\hat{D}^2}{3!}\right)\tau^6 + \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \hat{g} + \hat{g}\hat{F}\tau^2 \frac{\{\exp[(\hat{F} + \hat{D})\tau^2] - 1\}}{(\hat{F} + \hat{D})\tau^2}, \tag{7}$$

где $\tau \geqslant \max(|z|, |z^*|, 1)$. Аналогично показывается, что ряд, полученный почленным дифференцированием правой части формулы (3), абсолютно сходится.

Согласно формуле (1.5),

$$\psi(z, z^*) = \left(\exp\left[-\int_0^{z^*} A(z, z^*)\, dz^*\right]\right)\tilde{\psi}(z, z^*) =$$

$$= \left(\exp\left[-\int_0^{z^*} A(z, z^*)\, dz^*\right]\right)\left[g + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu \mathbf{J}_\mu(g)\right]. \tag{8}$$

Функция $\psi(z, z^*)$ является комплексной функцией от x и y, т. е. при действительных значениях x, y (при $z^* = \bar{z}$) она принимает комплексные значения. Для $z^* = \bar{z}$ функция

$$\Psi(z, z^*) = \frac{1}{2}[\psi(z, z^*) + \bar{\psi}(z^*, z)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\exp\left[-\int_0^{z^*} A(z, z^*)\, dz^*\right]\right) \times \right.$$

$$\times \left[g(z) + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu \mathbf{J}_\mu(g)\right] +$$

$$\left. + \left(\exp\left[-\int_0^{z} \bar{A}(z^*, z)\, dz\right]\right)\left[\bar{g}(z^*) + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu \overline{\mathbf{J}_\mu(g)}\right]\right\} \tag{9}$$

дает действительное решение уравнения (1.6).

§ 5. Свойства интегрального оператора первого рода

Формулами (2.4) и (2.2) мы определили оператор $\mathbf{C}_2 = \operatorname{Re}(\mathbf{c}_2)$, преобразующий аналитические функции комплексного переменного в (действительные) решения дифференциального уравнения (1.6). В простейшем случае, а именно в случае гармонического уравнения, оператор $\mathbf{c}_2$ становится тождественным, так как $A = 0$ и $Q^{(n)}(z, z^*) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Интересно, что в общем случае уравнения (1.6) сохраняются многие свойства функции $g(z)$ и различные соотношения между $g(z)$ и соответствующим (комплексным или действительным) решением уравнения (1.6) *не зависят от коэффициентов* A, B, C или зависят только от некоторых свойств этих коэффициентов.

Во многих случаях эти соотношения следуют из того, что область регулярности решения $\psi(z, z^*)$ (для комплексных значений x, y) полностью определяется областью регулярности $\psi(z, \bar{z})$ в действительной области.

Теорема 5.1. *Пусть коэффициенты A, B, C уравнения $\mathrm{L}(U) = 0$ [см. (1.6)] являются функциями двух комплексных переменных z, z^*, регулярными в достаточно широкой области. Тогда каждое решение $\psi(z, \bar{z}) \equiv \tilde{\tilde{\psi}}(x, y)$, регулярное в области $\mathfrak{B}^2$ (действительной) плоскости x, y, может быть продолжено в область $\mathfrak{B}^4$ пространства z, z^*. Здесь $\mathfrak{B}^4$ — произведение областей $\mathfrak{B}_1^2 \times \mathfrak{B}_2^2$, где $\mathfrak{B}_1^2$ — область $\mathfrak{B}^2$ в плоскости z, $\mathfrak{B}_2^2$ — та же область в плоскости z^*.*

Доказательство. Для каждого уравнения в частных производных (1.6) с регулярными коэффициентами A, $B = \bar{A}$, C существует фундаментальное решение

$$\tilde{F}(z, z^*, \zeta, \zeta^*) = \\ = \frac{1}{2} \tilde{A}(z, z^*, \zeta, \zeta^*)[\log(z - \zeta) + \log(z^* - \zeta^*)] + \\ + \tilde{B}(z, z^*, \zeta, \zeta^*), \qquad (1)$$

где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — регулярные функции от z, z^*, ζ, ζ^*. По теореме Грина решение $\psi(\zeta, \bar{\zeta})$, определяемое в односвязной области $\mathfrak{D}$ действительной плоскости, может быть представлено в виде

$$\psi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{b}} \left[\psi(\zeta, \bar{\zeta}) \frac{\partial \tilde{F}(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta})}{\partial n_\zeta} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \psi(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial n_\zeta} \tilde{F}(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) \right) ds_\zeta. \qquad (2)$$

Здесь n_ζ — внутренняя нормаль, ds_ζ — линейный элемент границы $\mathfrak{b}$ области $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}^2$. Мы получаем аналитическое

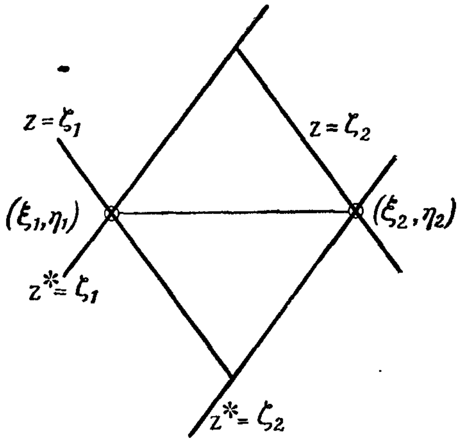

Рис. I. 1. Схематическое изображение области $\mathfrak{D}$ в действительной плоскости и соответствующей области $\mathfrak{B}^4$ в пространстве z, z^*.

продолжение $\psi(z, z^*)$ функции $\psi(z, \bar{z})$ на комплексные значения x, y, заменяя $\bar{z}$ на z^*. Так как решение F обладает особенностями только на плоскостях

$$z = \zeta \equiv \xi + i\eta, \quad z^* = \bar{\zeta} \equiv \xi - i\eta, \qquad (3)$$

где (ξ, η) — точки границы $\mathfrak{b}$ области $\mathfrak{D}$, мы видим, что функция $\psi(z, z^*)$ регулярна в области $\mathfrak{B}^4$ (четырехмерного) пространства, которая ограничена (трехмерными) гиперповерхностями

$$z=\zeta, \quad \zeta\in\mathfrak{b} \tag{4}$$

и

$$z^*=\bar{\zeta}, \quad \zeta\in\mathfrak{b}. \tag{5}$$

Этим доказательство заканчивается.

Рассмотренный здесь подход приводит к задаче продолжения решения $\tilde{\tilde{\psi}}(x, y)$ уравнения (0.1.1a), регулярного в области $\mathfrak{D}$, на комплексные значения x и y. То, что решение может быть продолжено на четырехмерную область $\mathfrak{B}^4=\mathfrak{B}_1^2\times\mathfrak{B}_2^2$, которая не зависит от уравнения, было впервые доказано в работе [13] [1]), см. также [14]. Позднее другое доказательство того же результата было дано в работе [71] [2]).

Определение. $\mathfrak{B}^4$ называется *комплексной оболочкой* области $\mathfrak{D}$.

§ 6. Некоторые дальнейшие свойства интегрального оператора первого рода

Оператор Re, преобразующий аналитические функции $g(z)$ одного комплексного переменного в гармонические функции двух действительных переменных, сохраняет многие свойства $g(z)$. Так как аналитические функции образуют алгебру (в то время как гармонические функции образуют только линейное пространство), введение аналитических функций дает ценный инструмент для изучения гармонических функций. В дальнейшем будет показано, что оператор $\operatorname{Re}[\mathbf{c}_2(g)]\equiv\mathbf{C}_2(z, z^*; g)\equiv\mathbf{C}_2(g)$ (см. § 2) сохраняет различные свойства функции g, к которой он применяется, и, таким образом, во многих случаях его роль аналогична роли оператора Re в случае гармонических функций.

---

[1]) Метод, изучаемый здесь (и в § 6), для уравнения $\Delta\psi+\psi=0$ уже был развит в работах [10], [12].

[2]) В работах [71—79] изучаются приложения интегрального оператора к решению задач с граничными значениями. Так как эти приложения выходят за рамки настоящего обзора, мы не будем затрагивать их здесь, за немногими исключениями. Обзор исследований, изложенных в работах [71—77, 79], приведен в [78].

Мы сформулируем теперь некоторые типичные результаты в этом направлении.

1. Как показывает теорема 5.1, каждое действительное решение $C_2(g)$ уравнения (1.6) регулярно в каждой односвязной области действительной плоскости x, y, включающей начало координат, в которой g регулярна[1]), и обратно.

2. Теорема 6.1. А. *Если ассоциированная функция g в точке α, $\alpha \neq 0$, имеет полюс порядка s, то $C_2(g)$ обращается в бесконечность того же порядка и (за исключением случая гармонических функций) имеет точку разветвления бесконечного порядка. Такая особенность называется особенностью типа полюса.*

Б. *Если g имеет в α точку разветвления конечного порядка, то $C_2(g)$ имеет точку разветвления того же порядка.*

Доказательство. А. Если мы подставим в (3.4б)

$$g(z) = (\alpha - z)^{-1}, \tag{1}$$

то

$$c_2\left[(\alpha - z)^{-1}\right] = \left[\exp\left(-\int_0^{z^*} A(z, z^*)\, dz^*\right)\right]\left[(\alpha - z)^{-1} + \right.$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{(n)}(z, z^*)}{2^{2n} B(n, n+1)} \left[-(z-\alpha)^{n-1} \log\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) + \right.$$
$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{1}{k}\left((-1)^{n-k}(\alpha - z)^{n-1} + (z-\alpha)^{n-1-k}\alpha^k\right)\right]\right]. \tag{2}$$

Дифференцируя выражение (2) по α, мы получаем аналогичную формулу для $c_2\left[(\alpha - z)^{-m}\right]$, где m — целое число, большее 1.

---

[1]) В случае многосвязных областей справедлив тот же результат. Однако $\mathrm{Re}\,[c_2(g)]$ может быть многозначной функцией, в то время как g однозначна.

Б. Если $m=p/q$, где p и q — взаимно простые целые числа, то

$$\int_0^z (z-\zeta)^{n-1}(\alpha-\zeta)^{p/q}\,d\zeta =$$
$$= \int_0^z \left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(z-\alpha)^{n-1-k}(\alpha-\zeta)^k\right](\alpha-\zeta)^{p/q}\,d\zeta =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(z-\alpha)^{n-1-k}\int_{\eta=\alpha-z}^{\alpha}\eta^{k+p/q}\,d\eta =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(z-\alpha)^{n-1-k}\left[\alpha^{k+p/q+1}-\right.$$
$$\left.-(\alpha-z)^{k+p/q+1}\right]\frac{1}{(k+p/q+1)}. \qquad (3)$$

Подставив последнее выражение в формулу (3.4б), мы видим, что $\mathbf{c}_2[g(z)]$ имеет в точке $z=\alpha$ точку разветвления порядка q.

3. Теорема 6.2. *Для каждого дифференциального уравнения* $\mathbf{L}=0$ [*см.* (1.6)] *существует множество* $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_\nu\}$ *комплексных решений*, $\tilde{\tilde{\varphi}}_\nu(x,y)=\tilde{\tilde{\Phi}}_\nu(x,y)+i\tilde{\tilde{\Psi}}_\nu(x,y)$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$, *каждое из которых является целой функцией от* x *и* y. *Эти функции порождаются функциями* $g(z)=z^\nu$, $\nu=0, 1, \ldots$, *и многие их свойства аналогичны свойствам функций* $\{(x+iy)^\nu\}$, *которые получаются, когда* $\mathbf{L}=0$ — *гармоническое уравнение.*

В частности: А. *Каждое действительное решение* $\tilde{\tilde{\Psi}}(x,y)$, *регулярное в открытом круге* $x^2+y^2<\rho^2$, *может быть представлено в нем в виде*

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(x,y)=\mathrm{Re}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\tilde{\tilde{\varphi}}_\nu(x,y)\right]. \qquad (4)$$

Б. *Каждое решение* $\tilde{\tilde{\Psi}}(x,y)$, *регулярное в односвязной области* $\mathfrak{D}$ $(O\in\mathfrak{D})$, *можно аппроксимировать в* $\mathfrak{D}$ *комбинацией конечного числа функций* $\tilde{\tilde{\varphi}}_\nu$, *т. е. для каждой подобласти* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{D}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся коэффициенты* $a_\nu^{(n)}$, *такие, что*

$$\left| \tilde{\tilde{\Psi}}(x, y) - \operatorname{Re}\left(\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^{(n)} \tilde{\tilde{\varphi}}_\nu(x, y) \right) \right| \leqslant \varepsilon, \quad (x, y) \in \bar{\mathfrak{S}}. \tag{5}$$

(Аналог теоремы Рунге.)

В. *Различные представления для аналитических функций в звездных областях дают соответствующие представления не только для гармонических функций, но и для решений уравнения* (1.6). *Например, из представления*[1])

$$f(z) = \lim_{\sigma \to 0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n z^n}{n^\sigma} \right] \tag{6}$$

аналитической функции с элементом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ *мы получаем представление*

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(x, y) = \operatorname{Re}\left[\lim_{\sigma \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \tilde{\tilde{\varphi}}_n(x, y)}{n^\sigma} \right] \tag{7}$$

для решений уравнения (1.6). *Это представление справедливо в каждой звездной области с центром в начале координат, в которой функция* $\tilde{\tilde{\Psi}}(x, y)$ *регулярна.*

Г. *Функции* $\tilde{\tilde{\varphi}}_\nu(x, y)$ *удовлетворяют соотношению*

$$\left| \tilde{\tilde{\varphi}}_\nu(x, y) - \exp\left(-\int_0^{z^*} A(z, z^*)\, dz^* \right)(x + iy)^\nu \right| \leqslant \\ \leqslant C_1(x, y)\,|(x + iy)^\nu|/2(\nu + 1), \tag{8}$$

где $C_1(x, y)$ — *целая функция, не зависящая от* ν.

Доказательство. Свойства А, Б, В, Г следуют из теоремы 5.1. В самом деле, если $\tilde{\tilde{\Psi}}(x, y)$ — действительное решение, определенное в односвязной области $\mathfrak{D}$ действительной плоскости, $O \in \mathfrak{D}$, то, согласно тео-

[1]) См. [148, стр. 123 и далее].

реме 5.1, оно может быть продолжено на комплексные значения и представляется в $\mathfrak{D}^4$ в виде

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(x, y) \equiv \Psi(z, \bar{z}) =$$
$$= \frac{1}{2}\Bigg[\exp\left(-\int_0^{\bar{z}} A(z, \bar{z})\,d\bar{z}\right)\Bigg(g(z) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{(n)}(z, \bar{z})}{2^{2n}\mathrm{B}(n, n+1)} \int_0^{z} (z-\zeta)^{n-1} g(\zeta)\,d\zeta\Bigg) +$$
$$+ \exp\left(-\int_0^{z} \bar{A}(\bar{z}, z)\,dz\right)\Bigg(\bar{g}(\bar{z}) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{Q}^{(n)}(\bar{z}, z)}{2^{2n}\mathrm{B}(n, n+1)} \int_0^{\bar{z}} (\bar{z}-\zeta)^{n-1} \bar{g}(\zeta)\,d\zeta\Bigg)\Bigg], \qquad (9)$$
$$\bar{z} = z^*.$$

В каждой замкнутой подобласти $\bar{\mathfrak{S}} \subset \mathfrak{D}^4$ ряды (9) сходятся равномерно. По теореме Рунге, мы можем приблизить $g(z)$ в $\bar{\mathfrak{S}}$ полиномом $\sum\limits_{\nu=0}^{N} a_\nu^{(N)} z^\nu$ так, что

$$\left| g(z) - \sum_{m=0}^{N} a_m^{(N)} z^m \right| \leqslant \varepsilon, \qquad z \in \bar{\mathfrak{S}}. \qquad (10)$$

Таким образом,

$$\Bigg| g(z) - \sum_{m=0}^{N} a_m^{(N)} z^m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{(n)}(z, \bar{z})}{2^{2n}\mathrm{B}(n, n+1)} \times$$
$$\times \int_0^{z} (z-\zeta)^{n-1} \left[g(\zeta) - \sum_{m=1}^{N} a_m^{(N)} \zeta^m \right] d\zeta \Bigg| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \left| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|Q^{(n)}(z, \bar{z})|}{2^{2n}\mathrm{B}(n, n+1)} \int_0^{|z|} |z-\zeta|^{n-1}\,d\zeta \right|. \qquad (11)$$

Аналогично можно доказать п. В и Г.

4. Для дальнейших рассмотрений полезно *нормировать ассоциированные функции* $g(z)$ первого рода, потребовав, чтобы $g(0)$ *было действительным.*

Если действительное решение уравнения (1.6) задано, то мы всегда можем подобрать ассоциированную функцию $g(z)$, удовлетворяющую такому требованию. В самом деле, согласно (4.1) и (4.2), функции $\mathrm{T}(F_\nu, \ldots, F_1; g)$ имеют вид $\int\limits_0^z \int\limits_0^{z^*} F(z_\nu, z_\nu^*) \ldots dz_\nu dz_\nu^* \ldots$. Таким образом, в силу (4.9) имеет место равенство

$$\Psi(z, 0) = \frac{1}{2}\left[\bar{\alpha}_0 g(z) + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu z^\nu\right) \bar{g}(0)\right]. \tag{12}$$

Здесь

$$\exp\left[-\int_0^z \bar{A}(0, z)\, dz\right] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu z^\nu = \alpha(z). \tag{13}$$

Пусть действительное решение $\Psi(z, \bar{z})$ разложено в ряд

$$\Psi(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} z^m \bar{z}^n,$$

$$A_{m,n} = \bar{A}_{n,m}, \quad A_{0,0} \text{ — действительное число.} \tag{14}$$

Тогда для $z = 0$ и нормированной ассоциированной функции $g(z)$ первого рода имеем

$$g(0) = A_{0,0}. \tag{15}$$

Из (12) и (15) следует, что

$$g(z) = 2\left[\Psi(z, 0) - \frac{A_{0,0}\, \alpha(z)}{2}\right]. \tag{16}$$

Существуют простые зависимости между свойствами действительного решения $\tilde{\tilde{\Psi}}(x, y) \equiv \Psi(z, \bar{z})$ [см. (9)] и коэффициентами $\{A_{m,0}\}$ его разложения в ряд

$$\Psi(z, z^*) = \sum A_{m,n} z^m z^{*n}, \quad A_{m,n} = A_{n,m}. \tag{17}$$

Например,

А. $\Psi(z, \bar{z})$ регулярно в каждой односвязной области $\mathfrak{D}$, $O \in \mathfrak{D}$, в которой регулярен ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_{m,0} z^m$ (O—начало координат).

Отсюда следует, что расположение особенностей $\Psi(z, \bar{z})$ определяется только последовательностью $\{A_{m,0}\}$ *независимо* от коэффициентов A, $B = \bar{A}$, C уравнения $\mathbf{L}(U) = 0$ [см. (1.6)].

Б. Мы можем интерпретировать различные результаты теории функций одного комплексного переменного, относящиеся к соотношениям между коэффициентами a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, разложения $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}{}' a_n z^n$ и характером особенностей, как теоремы о связи между свойствами последовательности $\{A_{m,0}\}$ и свойствами решения

$$\Psi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}[\mathbf{c}_2(g) + \bar{\mathbf{c}}_2(\bar{g})] \tag{18}$$

уравнения $\mathbf{L}(\Psi) = 0$. В самом деле, коэффициенты a_m для функции $g(z)$ и коэффициенты $A_{m,0}$ связаны соотношением

$$a_m = 2\left[A_{m,0} - \frac{A_{0,0}\alpha_m}{2}\right], \tag{19}$$

в котором α_m [см. (13)] зависят только от коэффициента A дифференциального уравнения.

Например, если последовательность $\{A_{m,0}\}$ коэффициентов ряда (17) удовлетворяет условиям Адамара, из которых следует, что функция $\Psi(z, 0)$ имеет полюсы в точках $P_1, P_2, \ldots$, то $\Psi(z, \bar{z})$ имеет особенности типа полюса в этих же точках (см. стр. 43). (В случае гармонического уравнения эти особенности являются полюсами.) Далее, если $\Psi(z, \bar{z})$ — решение уравнения (1.6) в круге $|z| < 1$, а последовательность $\{a_m\}$, определенная формулой (19), имеет ограниченную вариацию и ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} |a_m|^2$ сходится то Ψ непрерывно на единичной окружности $|z| = 1$, исключая, быть может, точку $z = 1$. Аналогичные условия обеспечивают непрерывность Ψ на других замкнутых кривых. Известны также достаточные условия, при которых Ψ имеет скачок на $|z|=1$; величина скачка определяется последовательностями $\{A_{m,0}\}$ и $\{a_m\}$. Наконец, если ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ суммируем (C, α), $\alpha > -1$, и $\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2$ сходится, то

$$\lim_{r\to 1} \sum_{m, n=0}^{\infty} A_{mn} z^m \bar{z}^n = \Psi(z, \bar{z})_{|z|=|\bar{z}|=1}, \tag{20}$$

где $r(=|z|)\to 1$ вдоль любого пути, лежащего между двумя хордами единичной окружности, проходящими через точку $z=1$ [161].

Доказательство этих утверждений немедленно следует из соотношения (16), так как $\alpha(z)$ — целая функция.

5. Кроме решения $\Psi(z, \bar{z})$, определяемого формулой (14), мы рассматриваем также функцию Ψ, у которой сопряженное к z заменено *независимой* переменной z^*; это эквивалентно рассмотрению x и y как независимых *комплексных*, а не действительных переменных. Теперь, когда решения изучаются в четырехмерном пространстве двух комплексных переменных z, z^*, описанные выше особенности типа полюса становятся двумерными *плоскостями разветвления*. Можно провести детальное изучение характера таких особенностей, если выразить решение через частные решения, для которых ассоциированными первого рода являются степени разности $(z-a)$ или суммы таких выражений.

6. Условия на коэффициенты $\{A_{m0}\}$ разложения (14), при которых функция $\Psi(z, z^*)$, рассматриваемая как функция z, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с коэффициентами, зависящими от z^*, приведены в работах [14, 171, 120].

Интересно заметить, что подпоследовательность коэффициентов $\{A_{m0}\}$ играет особую роль в связи с *проблемами коэффициентов*. Это следует из свойств интегрального оператора первого рода. Очевидно, что информация о поведении $\Psi(z, z^*)$ может быть также получена из любой другой последовательности $\{A_{mn}\}$, где число n *фиксировано*, $n > 0$. Представим $\Psi(z, z^*)$ в виде

$$\Psi(z, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) z^{*n}, \quad a_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} z^m; \tag{20a}$$

тогда соотношения между функциями $a_n(z)$ и $a_0(z)$ эквивалентны соотношениям между упомянутыми выше подпоследовательностями. Таким образом, условия на $\{A_{m0}\}$ можно заменить условиями на $\{A_{mn}\}$, $n > 0$. Чтобы получить соотношения между $a_n(z)$ и $a_0(z)$, разложим коэффициенты A, B, C уравнения (1.6) в степенные ряды по z^*, скажем

$$A(z, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z) z^{*n} \quad \text{и т. д.,} \tag{21}$$

где $\alpha_n(z)$ — степенные ряды по z. Подставляя разложения (21) и (20a) в (1.6), мы получаем степенной ряд по z^*. Чтобы выполнялось равенство (1.6), коэффициенты этого ряда должны равняться нулю. Это дает бесконечную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Обозначим систему из первых n уравнений через S_n. В систему S_n входят функции $a_0(z)$, $a_1(z)$, ..., $a_n(z)$ и их производные, но не входят $a_\nu(z)$ при $\nu > n$. Из системы S_n получаются соотношения между $\{A_{m0}\}$ и $\{A_{mn}\}$, $n > 0$, а также доказывается, что имеют место следующие возможности.

I. Функции $a_1(z)$, $a_2(z)$, ..., $a_{n-1}(z)$ и их производные можно, вообще говоря, исключить из системы S_n. Это приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, порядок которого не превосходит n. Используя известные теоремы о комплексных обыкновенных дифференциальных уравнениях, мы можем получить информацию об области регулярности и других фундаментальных свойствах функции $\Psi(z, z^*)$ в терминах коэффициентов $\{A_{mn}\}$, $n > 0$ фиксировано.

II. Однако существуют важные типы уравнений с частными производными (1.6), для которых нельзя использовать метод исключения или для которых исключение приводит к очень сложным условиям. В таком случае можно исследовать системы S_n в их первоначальном виде.

III. Соотношения между $\{A_{m0}\}$ и $\{A_{mn}\}$, $n > 0$, могут вообще не существовать.

Общий случай характеризуется следующими свойствами. Если $a_n(z)$, $n > 0$, имеет особенность в некоторой точке, то $a_0(z)$ также имеет особенность в той же точке. Обратное неверно: особые точки для $a_0(z)$ могут соответствовать точкам регулярности для $a_n(z)$. Однако можно привести условия, при которых последняя ситуация исключена. Эти условия особенно просты, если коэффициенты (1.6) зависят только от одного переменного. Предположим, например, что A, B и C зависят только от z. Пусть $\mathfrak{B}_2$ — односвязная область, содержащая начало координат, но не содержащая нулей функции $A(z)$. Тогда $\Psi(z, z^*)$ регулярна в произведении областей $\mathfrak{B}_2 \times \{|z^*| < \infty\}$ тогда и только тогда, когда соответствующая функция $a_n(z)$, $n > 0$ произвольно, регулярна в $\mathfrak{B}_2$ (см. [120]).

Некоторые из этих результатов можно распространить на случай, когда A, B, C не являются целыми функциями. Особенности функций $a_n(z)$ могут тогда проистекать либо из особенностей ассоциированной функции, либо из особенностей A, B, C. Следует заметить, что подобными методами можно исследовать некоторые уравнения с частными производными четвертого порядка и системы эллиптических уравнений второго порядка (см. [122, 124]).

7. Относительно теорем типа Фату см. работы [19, стр. 142 и 161].

§ 7. Дифференциальное уравнение $\Delta_2 V + F(r^2) V = 0$

В частном случае, когда дифференциальное уравнение имеет вид

$$\Delta_2 V + F(r^2) V = 0 \tag{1}$$

и $F(r^2)$ — целая функция от $r^2 = x^2 + y^2 = zz^*$, интегральный оператор первого рода допускает более простую, чем в общем случае, форму. Благодаря этому в данном случае можно получить различные дополнительные результаты.

Теорема 7.1. *В случае дифференциального уравнения* (1) *порождающая функция* $E(z, z^*, t)$ *для интегрального оператора первого рода является действительной функцией переменных* $r^2 = zz^*$ *и* t.

Доказательство. Напишем

$$Q^{(2n)}(z, z^*) = z^n \int_0^{z^*} P^{(2n)}(z, z^*)\, dz^*, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $\{P^{(2n)}\}$ — функции, введенные в (2.7) и (2.9). Покажем, что функции $\{Q^{(2n)}\}$ зависят только от r^2. Переходя от $P^{(2n)}$ к $Q^{(2n)}$ в системе (2.9), мы получим следующие уравнения:

$$Q^{(2)}_{z^*} + 2zF(r^2) = 0, \tag{3а}$$

$$(2n+1)\, Q^{(2n+2)}_{z^*} + 2z\left[Q^{(2n)}_{zz^*} + F(r^2)\, Q^{(2n)} - \frac{n}{z}\, Q^{(2n)}_{z^*}\right] = 0, \tag{3б}$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

$$Q^{(2n)}(z, 0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Формальное вычисление показывает, что уравнение (3а) может быть записано в виде

$$\frac{\partial Q^{(2)}}{\partial (r^2)} + 2F(r^2) = 0, \tag{5а}$$

так что $Q^{(2)}$ зависит только от r^2. Если предположить, что $Q^{(2)}(0) = 0$, то $Q^{(2)}$ будет удовлетворять уравнению (4). Переходим по индукции к случаю $Q^{(2n)}$, $n > 1$. Предположим, что $Q^{(2n)}$ зависят только от r^2; тогда равенства (3б) и (4) будут выполнены, если $Q^{(2n+2)}$ будет решением уравнения

$$(2n+1)\frac{\partial Q^{(2n+2)}}{\partial (r^2)} + $$

$$+ 2\left[\frac{\partial \left(r^2\, \partial Q^{(2n)}/\partial (r^2)\right)}{\partial (r^2)} + F(r^2)\, Q^{(2n)} - n\frac{\partial Q^{(2n)}}{\partial (r^2)}\right] = 0 \tag{5б}$$

и если

$$Q^{(2n+2)}(r^2)\big|_{r=0} = 0. \tag{6}$$

Сходимость ряда $1+\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n}Q^{(2n)}(r^2)$ доказывается, как выше.

Итак, в противоположность общему случаю, в этом частном случае порождающая функция $E(r^2, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n}Q^{(2n)}(r^2)$ оказывается *действительной* и мы можем говорить о сопряженных решениях уравнения (1), которые в окрестности начала координат представляются в виде

$$V = \int_{-1}^{1} E(r^2, t)\,\mathrm{Re}\,[f(u)]\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} = \\ = \mathrm{Re}\left\{\int_{-1}^{1} E(r^2, t)\,f(u)\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}\right\}, \quad (7a)$$

$$W = \int_{-1}^{1} E(r^2, t)\,\mathrm{Im}\,[f(u)]\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} = \\ = \mathrm{Im}\left\{\int_{-1}^{1} E(r^2, t)\,f(u)\frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}\right\}, \quad (7б)$$

$$u = z(1-t^2)/2.$$

Пара решений V и W получается, если использовать в качестве ассоциированной функции *одну и ту же* аналитическую функцию f одного комплексного переменного и отделить соответственно действительную и мнимую части полученного в результате комплексного решения. Действительное решение, регулярное в начале координат, может быть записано в виде

$$V = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n J^{(n)}(r)\cos n\varphi - b_n J^{(n)}(r)\sin n\varphi\right], \quad (8a)$$

а сопряженное к нему решение определяется формулой

$$W = \sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n J^{(n)}(r)\cos n\varphi + a_n J^{(n)}(r)\sin n\varphi\right], \quad (8б)$$

$$J^{(n)}(r) = 2^{-n}r^n \int_{-1}^{1} E(r^2, t)\left(1-t^2\right)^{n-1/2}dt. \quad (9)$$

Замечание. Когда $F(r^2)=1$, $E(r^2, t)=\cos tr$, функции $J^{(n)}(r)$ имеют вид

$$J^{(n)}(r)=\left(\frac{r}{2}\right)^n \int_{-1}^{1} [\cos tr](1-t^2)^{n-1/2}\,dt, \qquad n \geqslant 0.$$

Таким образом, в этом особенно простом случае имеем

$$J^{(n)}(r)=\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) J_n(r),$$

где $J_n(r)$ — функция Бесселя. (Следовательно, можно рассматривать $J^{(n)}(r)$ как обобщения бесселевых функций.)

Как установлено выше, любое действительное решение уравнения (1), регулярное в начале координат, может быть разложено в ряд (8б), сходящийся в некоторой окрестности начала координат. Можно доказать более сильный результат: ряд (8а) сходится внутри наибольшего круга с центром в начале координат, внутри которого регулярно решение. Многие результаты о соотношениях между двумя сопряженными гармоническими функциями можно обобщить на пары сопряженных решений (7а) и (7б) уравнения (1).

По аналогии с регулярными решениями можно рассматривать также решения с различными особенностями, которые получаются, если использовать в качестве ассоциированной функции аналитическую функцию с особенностями. В частности, мы можем рассматривать решения с особенностями типа полюса, т. е. функции, для которых ассоциированная функция имеет полюсы. Интересно, что теорему о вычетах можно до некоторой степени распространить на решения уравнения (1). Об этом говорят следующие две теоремы.

Теорема 7.2. *Пусть V и W [см. (7а) и (7б)] — два сопряженных решения уравнения (1), регулярных в круге $|z| \leqslant R$.*

Тогда

$$\int_{\mathfrak{C}} \tilde{\tilde{F}}\,dz = 0, \qquad \mathfrak{C} = \{|z| = R\}, \tag{10}$$

где $\tilde{\tilde{F}} = V + iW$, $z = x + iy$. (Доказательство элементарно и не приводится здесь.)

Теорема 7.3. *Пусть сопряженные решения V и W имеют особенность типа полюса первого порядка в точке $2\alpha = 2\alpha^* + 2i\alpha^{**}$, т. е. ассоциированная функция $f(u)$ допускает в круге $|u| \leqslant R/2$ представление*

$$f(u) = f_1(u) + \frac{a_1}{u - \alpha}, \quad 0 < |\alpha| \leqslant R, \tag{11}$$

где $f_1(u)$ регулярна в круге $|u| \leqslant R/2$. Тогда

$$\int_{\mathfrak{C}} \tilde{\tilde{F}}\, dz = \int_{\mathfrak{C}} (V + iW)(dx + i\,dy) = 4\pi a_1 i \int_{-t_1}^{t_1} \frac{E(R^2, t)\,dt}{(1 - t^2)^{1/2}},$$

$$t_1 = \left[1 - \frac{2|\alpha|}{R}\right]^{1/2}, \quad \mathfrak{C} = \{|z| = R\}. \tag{12}$$

Замечание. Как указывалось в § 6, функции V и W имеют точку разветвления бесконечного порядка в точке $z = 2\alpha$. Если мы разрежем риманову поверхность функции $\tilde{\tilde{F}}$ вдоль луча с началом в точке $z = 2\alpha$, направленного по радиусу в сторону, противоположную началу координат, то кривая $\mathfrak{C}$ станет незамкнутой кривой, концы которой лежат один над другим на различных листах римановой поверхности (см. рис. I.2).

Очевидно, что достаточно доказать наше утверждение для ассоциированной функции $f(u) = (u - \alpha)^{-1}$. Кривой $\mathfrak{C} = \{|z| = R\}$ соответствуют в плоскости u, $u = \frac{1}{2} z(1 - t^2)$, кривые $|u| = \frac{R}{2}(1 - t^2)$.

Из (7а) и (7б) следует, что

$$\int_{\mathfrak{C}} \tilde{\tilde{F}}\, dz = 2\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} E(R^2, t) \frac{ie^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}(1 - t^2) - 2\alpha} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} R\, d\varphi =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} E(R^2, t)\left[\int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}(1 - t^2) - 2\alpha} R\, d\varphi\right] \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \tag{13}$$

где $z = Re^{i\varphi}$. (В силу абсолютной сходимости двойного интеграла мы можем менять порядок интегрирования.)

Для значений t, $|t|^2 > 1 - 2|\alpha|/R$, полюс лежит во внешности кривой интегрирования и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} 2ie^{i\varphi}\left[Re^{i\varphi}(1-t^2)-2\alpha\right]^{-1} R\,d\varphi = 0. \qquad (14)$$

Для значений t, $|t|^2 < 1 - 2|\alpha|/R$, полюс лежит во внутренности кривой интегрирования и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} 2ie^{i\varphi}\left[Re^{i\varphi}(1-t^2)-2\alpha\right]^{-1} R\,d\varphi = 4\pi i. \qquad (15)$$

Этим заканчивается доказательство теоремы.

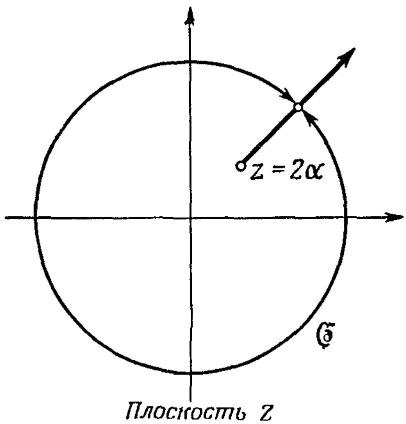

Рис. I.2. Кривая $\mathfrak{C}$ на римановой поверхности с точками разветвления $z = 2\alpha$ и $z = \infty$, $z = Re^{i\varphi}$.

Замечание. Дифференцируя $\tilde{\tilde{F}}$ по α (и принимая во внимание, что t_1, согласно (12), есть функция от α), получаем аналогичные результаты в случае, когда ассоциированная функция имеет полюс порядка $\rho > 1$.

Продолжая функции V и W на *комплексные* значения аргументов[1]), мы получим интересные обобщения соотношений (10) и (12).

Предположим, что кривая интегрирования $\mathfrak{C}$ лежит на поверхности

$$zz^* = h(z), \quad h(0) = 0, \tag{16}$$

где $h(z)$ — целая аналитическая функция одного комлексного переменного z. Тогда мы можем заменить величину $r^2 = zz^*$ в $E(r^2, t)$ функцией $h(z)$ и получить результаты, аналогичные сформулированным в теоремах 2 и 3, стр. 54, 55.

Рассмотренный выше метод можно обобщить на случай, когда ассоциированная функция $f(u)$ является алгебраической функцией u и когда рассматривается кривая интегрирования, такая, что для всех значений t геометрическим местом точек $|z(1-t^2)| = R$ является замкнутая кривая на римановой поверхности ассоциированной функции $f(u)$. (Так как кривая интегрирования $\mathfrak{C} = \{z = Re^{i\varphi}, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ может оказаться незамкнутой на римановой поверхности, мы заменяем ее кривой $\mathfrak{C}^* = \{z = Re^{i\varphi}, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi n\}$, где n выбрано так, чтобы $\mathfrak{C}^*$ была замкнутой кривой на римановой поверхности функции $f(u)$.) Результаты такого рода рассматриваются в работе [10, § 3].

Замечание. В работе [10] исследуется уравнение $\Delta_2 V + V = 0$; рассуждения могут быть немедленно распространены на случай дифференциального уравнения (1).

§ 8. Интегральные операторы экспоненциального типа

Как показано во многих работах, существует бесконечное множество интегральных операторов для данного дифференциального уравнения. Для разных целей полезно рассматривать интегральные операторы, отличные от интегральных операторов первого рода. В этом параграфе мы изучим так называемые интегральные операторы экспоненциального типа. Если порождающая функция E

---

[1]) При действительных x и y имеем $z^* = \bar{z}$, но если для x и y допускаются комплексные значения, то z и z^* становятся двумя независимыми комплексными переменными.

имеет вид

$$E = \exp Q, \quad Q = Q(z, z^*, t) = \sum_{\mu=0}^{m} q_\mu(z, z^*) t^\mu \qquad (1)$$

(т. е. Q — полином по t), то оператор (1.8) называется *интегральным оператором экспоненциального типа*. В работе [14] показано, что интегральные операторы типа (1) являются ценным инструментом для исследования различных свойств регулярных и сингулярных решений уравнения $\mathrm{L}(U) = 0$ [см. (1.6)]. В частности, интегральные операторы этого типа позволяют находить обыкновенные дифференциальные уравнения с рациональными (или алгебраическими) коэффициентами, которым удовлетворяют некоторые решения уравнения $\mathrm{L}(U) = 0$.

Поэтому мы можем использовать теорию *обыкновенных* дифференциальных уравнений для изучения свойств решений, полученных применением порождающей функции (1). Различные дифференциальные уравнения, обладающие интегральными операторами такого типа, рассматривались в работах [14, 118, 120].

В [118] даются необходимые и достаточные условия на коэффициенты D, F уравнения (1.6а), при которых существует такая порождающая функция. Интересно, что для таких порождающих функций решение уравнения (1.6а), полученное при помощи ассоциированной функции вида

$$f(z) = z^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

удовлетворяет *обыкновенному* дифференциальному уравнению, порядок которого *не зависит* от показателя степени n в (2), а зависит только от степени m полинома Q.

Теорема 8.1. (а) *Если коэффициенты D и F уравнения* (1.6а) *можно представить в виде*

$$D = -\frac{\partial q_0}{\partial z} - \frac{q_2}{z}, \qquad (3)$$

$$F = -\frac{q_1}{2z}\frac{\partial q_1}{\partial z^*}, \qquad (4)$$

где

$$q_0 = q_0(z), \tag{5}$$

$$q_1(z, z^*) = \sum_{\nu=0}^{\sigma(m)} a_\nu z^{\nu+1/2}, \quad a_0 = a_0(z^*), \quad a_\nu = \mathrm{const}$$
$$(1 \leqslant \nu \leqslant \sigma(m))\,^{1)}, \tag{6}$$

$$q_2(z) = \sum_{\nu=1}^{\tau(m)} d_\nu z^\nu, \quad d_\nu = \mathrm{const} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant \tau(m))\,^{1)}, \tag{7}$$

то мы можем связать с уравнением (1.6a) *порождающую функцию вида* (1), *где остальные коэффициенты* q_μ, $2 < \mu \leqslant m$, *полинома* $Q(z, z^*, t)$ *определяются следующими формулами:*

$$q_{2\mu+1} = \frac{(-2)^\mu}{(2\mu+1)!!} \sum_{\nu=\mu}^{\sigma(m)} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)\,a_\nu z^{\nu+1/2}, \tag{8}$$
$$1 \leqslant \mu \leqslant \sigma(m),$$

$$q_{2\mu} = -\frac{(-2)^\mu}{(2\mu)!!} \sum_{\nu=\mu}^{\tau(m)} (\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1)\,d_\nu z^\nu, \tag{9}$$
$$2 \leqslant \mu \leqslant \tau(m).$$

(б) *То же справедливо, если коэффициент* D *может быть представлен в виде* (3) *и*

$$F = -\frac{1}{2z}\frac{\partial q_2}{\partial z^*}, \tag{10}$$

где q_2 *имеет вид* (7). *Однако в этом случае* $q_1 = 0$, *в то время как* d_1 *может быть функцией от* z^* (*не обязательно постоянной, как в предыдущем случае*).

(в) *Исключая тривиальный случай, когда* $F = 0$ *и, кроме того,* (1) *не зависит от* z^*, *не существует коэффициентов* D *и* F *уравнения* (1.6a), *кроме указанных в* (а) *и* (б), *для которых уравнение* (1.6a) *имеет ассоциированную с ним порождающую функцию экспоненциального типа* [118].

Теорема 8.2. *Пусть* $u(z, z^*)$ — *решение уравнения* (1.6a), *полученное применением порождающей*

---

1) $\sigma(m) = \left[\frac{m-1}{2}\right]$, $\tau(m) = \left[\frac{m}{2}\right]$.

функции вида (1) *к функции* (2). *Тогда функция* $U(z_1, z_2) = u(z, z^*)$ (*где* $z = z_1 + iz_2$, $z^* = z_1 - iz_2$) *удовлетворяет при любом фиксированном значении* z_2 *обыкновенному линейному дифференциальному уравнению* (*по переменному* z_1)

$$\sum_{\varkappa=0}^{k} B_\varkappa(z_1, z_2) \frac{d^\varkappa U}{dz_1^\varkappa} = 0 \quad (B_k = 1). \tag{11}$$

Порядок k *уравнения* (11) *не зависит от величины* n *в* (2) *и зависит только от степени* m *полинома* Q *в* (1)[1]. *Всегда можно определить уравнение* (11) *так, чтобы порядок его не превосходил* $m+1$.

С помощью обыкновенных дифференциальных уравнений (11) (каждому значению n соответствует одно уравнение) можно провести детальное исследование характера особенностей решений уравнения (1.6а) в рассматриваемом здесь случае (т. е. когда коэффициенты D и F удовлетворяют требованиям теоремы 1). Некоторые результаты в этом направлении даются в работах [14, 118, 120].

§ 9. Дифференциальное уравнение $\Delta_2\psi + N(x)\psi = 0$

Эйхлер в работе [234] рассматривает другой тип дифференциального уравнения, а именно

$$\Delta_2\psi + N(x)\psi = 0, \tag{1}$$

где[2])

$$N(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots . \tag{2}$$

Согласно рассуждениям из § 1, решения ψ уравнения (1) порождаются интегральными операторами

$$f(z) - \int_0^z S(x, y, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \quad z = x + iy, \tag{3}$$

---

[1]) Однако следует подчеркнуть, что функции $B_\varkappa(z_1, z_2)$, фигурирующие в (11), вообще говоря, зависят от n.

[2]) Исследования Эйхлера относятся к более общему классу уравнений, когда функция N может иметь особенности. Подробности см. в гл. V.

где S удовлетворяет уравнениям

$$S_{xx} + S_{yy} + N(x) S = 0,$$
$$S_x(x, y, z) + iS_y(x, y, z) = \frac{1}{2} N(x). \tag{4}$$

Всегда существует функция S вида

$$S(x, y, \zeta) = G(x, z - \zeta) \tag{5}$$

(см. [234, стр. 260].) В этом случае второе из соотношений (4) принимает вид

$$G(x, 0) = \frac{1}{2} \int_0^x N(x)\, dx + \gamma_0. \tag{6}$$

По аналогии с (3.1) $\psi(z, \bar z)$ представляется в виде

$$\psi(z, \bar z) = \mathbf{e}_2(z, \bar z, g) \equiv g(z) - \\ - p_1(x) \int_0^z g(z_1)\, dz_1 + p_2(x) \int_0^z \int_0^{z_1} g(z_2)\, dz_2\, dz_1 + \ldots, \tag{7}$$

$$p_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^x N(x)\, dx + \gamma_1,$$
$$p_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \left(p_1'' + N(x)\, p_1(x)\right) dx + \gamma_2, \ldots, \tag{8}$$

где γ_n — постоянные интегрирования (восходящий ряд); $\mathbf{e}_2(z, \bar z, g)$ можно также записать в виде

$$\mathbf{e}_2(z, \bar z, g) = q_0(x)\, g(z) + q_1(x)\, g_z(z) + \\ + q_2(x)\, g_{zz}(z) + \ldots, \quad g_z = \frac{dg}{dz}, \ldots \tag{9}$$

(нисходящий ряд), где $q_n(x)$ связаны рекуррентными формулами

$$q_0'' + Nq_0 = 0, \quad q_1'' + Nq_1 = -2q_0', \ldots. \tag{10}$$

Различные свойства оператора $\mathbf{e}_2(z, z^*; g)$ (см. теоремы 9.1 — 9.4) установлены в [234] при условии, что $\gamma_0 = 0$.

Теорема 9.1. *Существует одна и только одна каноническая порождающая функция вида* (5) *по* *отношению к началу координат. Она может быть записана в виде*

$$G(x,\ z-\zeta)=H(x,\ \xi),\quad \xi=\zeta-iy, \tag{11}$$

где H *удовлетворяет уравнению гиперболического типа*

$$H_{xx}-H_{\xi\xi}+N(x)H=0. \tag{12}$$

Начальные условия следующие:

$$H(x,\ x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x N(x)\,dx,\quad H(x,\ -x)=0. \tag{13}$$

Теорема 9.2. *Пусть*

$$g(z)=\sum a^{(\lambda)}\exp(\lambda z),\quad \sum=\sum_{\lambda(\nu)}, \tag{14}$$

где $\lambda(\nu)$ *пробегает для* $\nu=1, 2, \ldots$ *некоторое множество действительных чисел. Пусть ряд* (14) *абсолютно и равномерно сходится при* $x\leqslant c$, $c>0$, *и пусть функция* $g(z)$ *регулярна в области* $\mathfrak{D}$, *содержащейся в полосе* $a\leqslant x\leqslant b$, *исключая самое большее счетное число изолированных особенностей. Наконец, пусть* $h^{(\lambda)}(x)$ *удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению*

$$h^{(\lambda)''}+(N-\lambda^2)h^{(\lambda)}=0 \tag{15}$$

с начальными условиями $h^{(\lambda)}(0)=1$, $h^{(\lambda)'}(0)=\lambda$. *Тогда ряд*

$$\psi=\sum a^{(\lambda)}h^{(\lambda)}(x)\exp(i\lambda y) \tag{16}$$

обладает следующими свойствами:

(1) *он сходится абсолютно и равномерно при* $|x|\leqslant c$,

(2) *его можно аналитически продолжить в пересечение области* $\mathfrak{D}$ *и области* $\tilde{\mathfrak{D}}$, *симметричной* $\mathfrak{D}$ *относительно оси* y;

(3) *функция* ψ *регулярна там, где регулярны одновременно* $g(z)$ *и* $g(-\bar{z})$;

(4) *в особой точке функции* $g(z)$ *имеем*

$$\psi = g(z) - p_1(x)\int_0^z g(\zeta)\,d\zeta + \ldots, \tag{17}$$

где многоточие обозначает повторные интегралы от $g(z)$ [*см.* (7)] *и функцию, которая зависит аналитически от обоих действительных переменных* x, y.

Теорема 9.3. *Пусть*

$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{(n)} \exp(nx) \tag{18}$$

и ряд (18) *сходится абсолютно и равномерно для* $-\infty \leqslant x \leqslant b$. *Функции* $h^{(\lambda)}(x)$ *снова определяются как решения уравнения* (15) *с начальными значениями*

$$h^{(\lambda)}(x)\exp(-\lambda x) = 1, \quad h_x^{(\lambda)}(x)\exp(-\lambda x) = \lambda \quad \text{для} \quad x = -\infty. \tag{19}$$

Пусть $g(z)$ *имеет свойства, указанные в теореме* 9.2, *но* $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$. *Тогда справедливы те же утверждения относительно ряда* (16), *исключая то, что* ψ *имеет особенность только тогда, когда* $g(z)$ *имеет особенность.*

Теорема 9.4. *Пусть* x_0 — *положительная константа, такая, что функция* $N(x)$ *регулярна при* $0 < x < 2x_0$. *Если постоянные интегрирования* γ_n *в* (8) *удовлетворяют условию*

$$|\gamma_n| < \gamma\,(n-1)!\,(2x_0)^{-n} \tag{20}$$

с произвольным γ, *то ряд для порождающей функции*

$$G(x, z-\zeta) = p_1(x) - p_2(x)(z-\zeta) + \frac{1}{2}p_3(x)(z-\zeta)^2 + \ldots \tag{21}$$

абсолютно сходится при

$$x \neq 0, \quad |z-\zeta| < 2|x|. \tag{22}$$

(Восходящий) ряд (7) абсолютно сходится для каждой регулярной аналитической функции $f(z)$, если $x \neq 0$, $|z-\zeta| < 2|x|$.

§ 10. Дифференциальные уравнения высшего порядка

Методы, описанные в предыдущих параграфах этой главы, применялись к дифференциальным уравнениям второго порядка, но их можно обобщить и сделать применимыми к некоторым классам уравнений высшего (четного) порядка. В этом параграфе мы коротко опишем некоторый класс уравнений четвертого порядка. На этом довольно частном примере можно видеть, как обобщаются ранее использованные методы. Более подробное изложение см. в [21].

Рассмотрим уравнение вида

$$\mathrm{L}(U) = U_{zzz^*z^*} + MU_{zz} + LU_{zz^*} + NU_{z^*z^*} + \\ + AU_z + BU_{z^*} + CU = 0, \quad (1)$$

где M, L, N, A, B, C — целые функции комплексных переменных z, z^*. Если перейти к переменным

$$x = \frac{z+z^*}{2}, \quad y = \frac{z-z^*}{2i}$$

(которые действительны, если z^* заменить переменным $\bar{z}$, сопряженным к z), то это уравнение примет вид

$$\Delta\Delta U + aU_{xx} + 2bU_{xy} + cU_{yy} + dU_x + eU_y + fU = 0, \quad (2)$$

где коэффициенты a, b, c, d, e, f просто связаны с коэффициентами уравнения (1). Если рассматривать x и y как действительные переменные, то уравнение (2) превратится в общем случае в систему двух действительных уравнений для действительной и мнимой частей функции U. Простое вычисление показывает, что (2) дает одно уравнение (отдельно для действительной и мнимой частей), если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям $M(z, \bar{z}) = \overline{N(\bar{z}, z)}$, $A(z, \bar{z}) = \overline{B(\bar{z}, z)}$ и $L(z, \bar{z})$, $C(z, \bar{z})$ действительны.

Теорема 10.1. *Существуют четыре функции* $E^{(k\varkappa)}(z, z^*, t)$, $k = \mathrm{I}, \mathrm{II}$, $\varkappa = 1, 2$, *определенные для достаточно малых значений аргументов, скажем* $|z| < \rho_1$, $|z^*| < \rho_2$, *и для* $|t| \leqslant 1$, *обладающие следующим свойством: если* $f_\varkappa(\zeta)$ *и* $g_\varkappa(\zeta)$, $\varkappa = 1, 2$, *являются аналитическими функциями от* ζ, *определенными и регулярными в окрестности начала координат, то*

$$U(z, z^*) = \sum_{\varkappa=1}^{2} \int_{-1}^{1} \left[E^{(\mathrm{I}\varkappa)}(z, z^*, t) f_\varkappa\left(\frac{1}{2} z(1-t^2)\right) + \right.$$
$$\left. + E^{(\mathrm{II}\varkappa)}(z, z^*, t) g_\varkappa\left(\frac{1}{2} z^*(1-t^2)\right)\right] \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} \tag{3}$$

есть решение уравнения (1). *Обратно, если* $U(z, z^*)$ — *решение уравнения* (1), *определенное в окрестности начала координат* $z = z^* = 0$, *то* U *можно представить в виде* (3) *при помощи подходящих функций* $f_\varkappa$ *и* $g_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2$. *Для функций* $E^{(k\varkappa)}(z, z^*, t)$, *введенных выше, выполняются следующие равенства*:

$$\begin{aligned} E^{(\mathrm{I}1)}(z, 0, t) &= E^{(\mathrm{II}\,1)}(0, z^*, t) = 1, \\ E^{(\mathrm{I}2)}(z, 0, t) &= E^{(\mathrm{II}\,2)}(0, z^*, t) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} E^{(\mathrm{I}1)}_{z^*}(z, 0, t) &= E^{(\mathrm{II}\,1)}_{z}(0, z^*, t) = 0, \\ E^{(\mathrm{I}2)}_{z^*}(z, 0, t) &= E^{(\mathrm{II}\,2)}_{z}(0, z^*, t) = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Каждая из четырех функций $E^{(k\varkappa)}$ *удовлетворяет следующему уравнению с частными производными*:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(E) &= z^{-1}t^{-1}(1-t^2)\left[E_{zz^*z^*t} + ME_{tz} + \frac{1}{2} LE_{tz^*} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} AE_t\right] + \frac{1}{4} z^{-2}t^{-2}(1-t^2)^2 [E_{z^*z^*tt} + ME_{tt}] - \\ &\quad - z^{-1}t^{-2}\left[E_{zz^*z^*} + ME_z + \frac{1}{2} LE_{z^*} + \frac{1}{2} AE\right] - \\ &\quad - \frac{3}{4} z^{-2}t^{-3}(1-t^4)[E_{tz^*z^*} + ME_t] + \\ &\quad + \frac{3}{4} z^{-2}t^{-4}[E_{z^*z^*} + ME] + \mathbf{L}(E) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\mathbf{L}$ — *оператор, определяемый формулой* (1).

Доказательство теоремы проводится в основном тем же способом, что и в случае уравнений второго порядка; подробности можно найти в работе [21]. С помощью оператора (3), который является обобщением оператора (2.4), можно получить представления решений уравнения (1), аналогичные представлениям (3.4а) и (3.4б); можно также получить (см. [21, стр. 627]) представление, аналогичное (4.5). Используя эти представления, можно обобщить рассуждения, проведенные в § 6. В частности, можно доказать существование решений

$$U(z, z^*) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} z^m z^{*n} \tag{7}$$

уравнения (1), обладающих следующим свойством:

$$\begin{aligned} U(z, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n, & U_{z^*}(z, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n, \\ U(0, z^*) &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^{*n}, & U_z(0, z^*) &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^{*n}, \end{aligned} \tag{8}$$

где четыре степенных ряда являются элементами заданных функций, регулярных в начале координат (см. [21, стр. 625]). Можно также найти связь между расположением и характером особенностей решений (1) и коэффициентами a_{mn} разложения (7); поразительным результатом этого исследования является тот факт, что характер и расположение особенностей мало зависят от коэффициентов уравнения (1). В некоторых случаях известны выраженные в терминах определенных подпоследовательностей коэффициентов a_{mn} достаточные условия того, что решение уравнения (1), которое существует в круге $|z| < 1$, непрерывно или имеет скачок на границе [161].

Обобщая рассуждения, проведенные в § 6 (стр. 42 и далее), можно рассматривать проблемы коэффициентов для решений $U(z, z^*)$ уравнения (1) (см. [21, 122]) следующим образом. Представление (7) можно записать в виде

$$U(z, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) z^{*n}, \qquad a_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} z^m. \tag{9}$$

Подставляя (9) в уравнение (1), мы получаем бесконечную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно функций $a_n(z)$ и их производных. Эта процедура аналогична описанной в § 6 для уравнений с частными производными второго порядка. Однако в этом случае появляются некоторые существенные трудности. Эти обыкновенные уравнения являются уравнениями второго порядка, а функции $a_n(z)$, $n \geqslant 2$, зависят как от $a_0(z)$, так и от $a_1(z)$. Тем не менее из этой системы можно извлечь соотношения между $a_0(z)$, $a_1(z)$, с одной стороны, и $a_n(z)$, $n \geqslant 2$, с другой стороны. Очевидно, что эти соотношения эквивалентны соотношениям между подпоследовательностью $\{a_{mn}\}$, где $n \geqslant 2$ фиксировано, и подпоследовательностями $\{a_{m0}\}$, $\{a_{m1}\}$ коэффициентов ряда (7). Это приводит к определению области регулярности, расположения и характера особенностей и других основных свойств решений $\psi(z, z^*)$. Подробности и исследование исключительных случаев, которые могут возникнуть, содержатся в работе [121].

Эти рассуждения можно обобщить на случай уравнений с частными производными более высокого порядка[1]).

[8, 10, 12—16, 19—22, 32, 34, 35, 41, 51, 53, 60, 61, 70—79, 92, 96—102, 105, 115, 118—124, 140, 142, 144—149, 155—157, 161, 170—173, 179—189, 198, 203, 218—220, 226, 233, 234, 237—239]

[1]) В конце каждой главы перечисляются статьи, связанные с рассматриваемой темой, даже если эти работы не обсуждались в тексте.

Глава II

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Предварительные сведения

Как указывалось во введении, метод интегральных операторов является одним из инструментов, который можно использовать для распространения методов теории функций одного или нескольких комплексных переменных на другие области, в частности на теорию гармонических функций трех переменных. Совокупность $\{U\}$ таких функций представляет собой линейное пространство, но они не образуют алгебру и не обладают групповыми свойствами. Однако, поставив во взаимно однозначное соответствие каждой гармонической функции трех переменных некоторую функцию f_k одного или нескольких комплексных переменных: $U_k = \tilde{\mathbf{P}}_3(f_k)$, мы можем определить композицию $\odot$ для U_k формулой

$$U_3 = U_1 \odot U_2, \tag{1}$$

где

$$U_3 = \tilde{\mathbf{P}}_3(f_1 f_2). \tag{2}$$

С другой стороны, соотношение (1) является сначала чисто формальным, так как функция U_3 зависит от выбора принципа соответствия, т. е. от выбора $\tilde{\mathbf{P}}_3$, а $\tilde{\mathbf{P}}_3$ можно определить бесконечно многими различными способами. Одной из главных проблем в теории интегральных операторов является изучение операторов, преобразующих функции f одного или нескольких комплексных переменных в решения ψ некоторого линейного уравнения в частных производных, и выбор среди таких операторов тех, которые сохраняют основные свойства функций, к которым они применяются. Таким образом, мы получаем операторы, которые можно рассматривать как более или менее естественное обобщение операции *взятия действительной части*.

Пытаясь обобщить методы интегральных операторов на дифференциальные уравнения с тремя переменными, мы считаем полезным различать две проблемы.

(а) Применяя операторы к аналитическим функциям одного или нескольких комплексных переменных, мы изучаем гармонические функции и гармонические векторы, т. е. векторы $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{X}=(x, y, z)$, которые удовлетворяют паре уравнений

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0. \tag{4}$$

(б) Аналогично тому, как это делается для двух переменных, мы рассматриваем операторы, переводящие гармонические функции трех переменных в решения более общих линейных уравнений в частных производных.

В настоящей главе и в гл. IV мы исследуем проблему (а); проблема (б) рассматривается в гл. III.

§ 2. Характеристическое пространство $\mathfrak{C}_3$

При рассмотрении гармонических функций трех переменных полезно продолжить аргументы x, y, z на комплексные значения и исследовать поведение этих функций в характеристическом пространстве

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_3 &= \{x^2+y^2+z^2=0\} = \\ &= \{x_1^2+y_1^2+z_1^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,\quad x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0\},\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$x=x_1+ix_2,\qquad y=y_1+iy_2,\qquad z=z_1+iz_2. \tag{2}$$

Для наших целей удобно использовать координаты

$$X=x,\qquad Z=\frac{iy+z}{2},\qquad Z^*=\frac{iy-z}{2}. \tag{3}$$

Мы можем теперь переписать уравнение (1) для характеристического пространства в виде

$$X=2(ZZ^*)^{1/2}. \tag{4}$$

Определение. Мы назовем функцию $\chi(Z, Z^*)$, которая получается при рассмотрении гармонической функции $H(X, Z, Z^*)$ в $\mathfrak{C}_3$, т. е.

$$\chi(Z, Z^*) = H\left(2(ZZ^*)^{1/2}, Z, Z^*\right), \tag{5}$$

C_3-*ассоциированной с* $H(X, Z, Z^*)$.

Так как величина $x^2+y^2+z^2$ инвариантна при ортогональных преобразованиях, C_3-ассоциированная функция $\chi(Z, Z^*)$ на самом деле не зависит от выбора системы координат x, y, z.

Интересно ввести новый класс однородных гармонических полиномов степени n, а именно:

$$\Gamma_{n,\varkappa}(X, Z, Z^*) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}(X+Z\zeta+Z^*\zeta^{-1})^n\zeta^{-n+\varkappa}\frac{d\zeta}{\zeta} =$$
$$= C_{n,\varkappa}C_{\varkappa,0}Z^{n-\varkappa}X^{\varkappa} + C_{n,\varkappa-1}C_{\varkappa-1,1}Z^{n-\varkappa+1}X^{\varkappa-2}Z^* + \ldots$$
$$\ldots + C_{n,[(\varkappa+1)/2]}C_{[(\varkappa+1)/2],[\varkappa/2]}Z^{n-[(\varkappa+1)/2]}X^{\varkappa-2[\varkappa/2]}Z^{*[\varkappa/2]}, \tag{6}$$
$$\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, 2n.$$

Здесь $C_{n,\varkappa}$ — биномиальные коэффициенты и $[a]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее a.

Например, при $n=3$ мы получаем для $\Gamma_{3,\varkappa}(X, Z, Z^*)$, $\varkappa = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, полиномы

$$\begin{gathered} Z^3, \quad 3XZ^2, \quad 3Z^2Z^*+3X^2Z, \quad 6XZZ^*+X^3, \\ 3ZZ^{*2}+3X^2Z^*, \quad 3XZ^{*2}, \quad Z^{*3}. \end{gathered} \tag{7}$$

Для этих полиномов C_3-ассоциированные функции таковы

$$\Gamma_{n,\varkappa}\left(2(ZZ^*)^{1/2}, Z, Z^*\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left[(Z\zeta)^{1/2}+(Z^*\zeta^{-1})^{1/2}\right]^{2n}\zeta^{-n+\varkappa}\frac{d\zeta}{\zeta} = C_{2n,\varkappa}Z^{n-\varkappa/2}Z^{*\varkappa/2}, \tag{8}$$

где $C_{2n,\varkappa}$ — биномиальный коэффициент $(2n)!/(2n-\varkappa)!\,\varkappa!$. Например, для $\Gamma_{3,\varkappa}\left(2(ZZ^*)^{1/2}, Z, Z^*\right)$ имеем

$$\begin{gathered} Z^3, \quad 6Z^{5/2}Z^{*1/2}, \quad 15Z^2Z^*, \quad 20Z^{3/2}Z^{*3/2}, \\ 15ZZ^{*2}, \quad 6Z^{1/2}Z^{*5/2}, \quad Z^{*3}. \end{gathered} \tag{9}$$

Функции

$$\Gamma^*_{M,\varkappa}(x, y, z) \equiv \Gamma_{M,\varkappa}\left(x, \frac{1}{2}(iy+z), \frac{1}{2}(iy-z)\right)$$

связаны следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial \Gamma^*_{M,\varkappa}}{\partial x} = M\Gamma^*_{M-1,\,\varkappa-1},$$
$$\frac{\partial \Gamma^*_{M,\varkappa}}{\partial y} = \frac{iM}{2}\left[\Gamma^*_{M-1,\,\varkappa} + \Gamma^*_{M-1,\,\varkappa-2}\right], \tag{10}$$
$$\frac{\partial \Gamma^*_{M,\varkappa}}{\partial z} = \frac{M}{2}\left[\Gamma^*_{M-1,\,\varkappa} - \Gamma^*_{M-1,\,\varkappa-2}\right].$$

Замечание. Соотношения

$$R_{M,M} = \Gamma^*_{M,M},$$
$$R_{M,\,2\varkappa+s} = \frac{1}{2}\, i^{-M+\varkappa+s}\left[\Gamma^*_{M,\varkappa} + (-1)^s\Gamma^*_{M,\,2M-\varkappa}\right], \tag{11}$$
$$\varkappa = 0,1,\ \ldots,\ M-1,\quad s = 0,1$$

определяют $2M+1$ действительных гармонических функций степени M. Используя новые переменные X, Z, Z^*, мы получаем теперь другое представление для гармонических функций $H(X,\ Z,\ Z^*)$, регулярных в начале координат.

Теорема 2.1. *Гармоническая функция $H(X, Z, Z^*)$, регулярная в начале координат O, может быть выражена в окрестности O через свою C_3-ассоциированную функцию $\chi(Z,\ Z^*) = H(2(ZZ^*)^{1/2},\ Z,\ Z^*)$ в форме*

$$H(X,\ Z,\ Z^*) =$$
$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\int\limits_{T=0}^{1} u^{1/2}\,\frac{d\left[u^{1/2}\chi\left(u\zeta^{-1}T^2,\ u\zeta(1-T)^2\right)\right]}{du}\,\frac{d\zeta}{\zeta}\,dT, \tag{12}$$
$$u \equiv X + Z\zeta + Z^*\zeta^{-1}.$$

Доказательство. Так как гармоническая функция $H(X,\ Z,\ Z^*)$ разлагается в ряд по определенным выше полиномам $\Gamma_{n,\,k}(X,\ Z,\ Z^*)$, мы сначала докажем соотношение (12) для этих полиномов. Пусть

$$H(X,\ Z,\ Z^*) = \Gamma_{n,\,k}(X,\ Z,\ Z^*) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(X + Z\zeta + Z^*\zeta^{-1}\right)^n\zeta^{-n+k}\,\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{13}$$

Тогда C_3-ассоциированная функция, согласно (8), равна

$$\Gamma_{n,k}(2(ZZ^*)^{1/2}, Z, Z^*) = \chi(Z, Z^*) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left((Z\zeta)^{1/2} + (Z^*\zeta^{-1})^{1/2}\right)^{2n}\zeta^{-n+k}\frac{d\zeta}{\zeta} = \\ = C_{2n,k}Z^{(2n-k)/2}Z^{*k/2}. \tag{14}$$

Подставляя в (14) $Z = u\zeta^{-1}T^2$, $Z^* = u\zeta(1-T)^2$, мы получаем

$$C_{2n,k}u^nT^{2n-k}(1-T)^k\zeta^{-n+k}.$$

Теперь подинтегральное выражение в (12) равно

$$u^{1/2}\frac{d\,[u^{1/2}\chi(u\zeta^{-1}T^2, u\zeta(1-T)^2)]}{du} = \\ = \left(n+\frac{1}{2}\right)C_{2n,k}\,u^n(1-T)^kT^{2n-k}\zeta^{-n+k} \tag{15}$$

и из (12) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\int\limits_{T=0}^{1}(2n+1)C_{2n,k}u^nT^{2n-k}(1-T)^k\zeta^{-n+k}\frac{d\zeta}{\zeta}\,dT = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}(2n+1)C_{2n,k}u^n\zeta^{-n+k}\frac{d\zeta}{\zeta}\int\limits_{T=0}^{1}T^{2n-k}(1-T)^k dT. \tag{16}$$

Но

$$(2n+1)C_{2n,k}\int\limits_{T=0}^{1}T^{2n-k}(1-T)^k\,dT = \\ = (2n+1)C_{2n,k}\frac{\Gamma(2n-k+1)\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(2n+2)} = 1.$$

Таким образом, выражение (16) равно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}u^n\zeta^{-n+k}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

и мы имеем

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\int\limits_{T=0}^{1} u^{1/2}\frac{d\,[u^{1/2}\chi(u\zeta^{-1}T^2,\ u\zeta(1-T)^2)]}{du}\frac{d\zeta}{\zeta}\,dT=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} u^n\zeta^{-n+k}\frac{d\zeta}{\zeta}=\Gamma_{n,k}(X,\ Z,\ Z^*),\qquad (17)$$

где χ является C_3-ассоциированной функцией с $\Gamma_{n,k}$.

Итак, представление (12) справедливо для гармонических полиномов. Остается доказать справедливость его для гармонической функции $H(X,\ Z,\ Z^*)$, регулярной в окрестности $\mathfrak{N}(O)=\{x^2+y^2+z^2<\rho^2\}$ (ρ достаточно мало) начала координат O.

Каждая гармоническая функция в $\mathfrak{N}(O)$ может быть представлена в виде

$$H(X,\ Z,\ Z^*)=\tilde{H}(R,\ \theta,\ \varphi)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_{n,m}\left(\frac{(n-m)!\,(2n+1)}{4\pi\,(n+m)!}\right)^{1/2}\frac{R^n}{\rho^n}P_{n,m}(\cos\theta)\,e^{im\varphi}.\qquad (18)$$

Здесь $B_{n,m}=\overline{B}_{n,-m}$; $R,\ \theta,\ \varphi$ — сферические координаты и $R^nP_{n,m}(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$ — шаровые гармонические функции (см. [211, ч. II, гл. 18]).

В силу ортонормальности функций

$$\left(\frac{(n-m)!\,(2n+1)}{4\pi\,(n+m)!}\right)^{1/2}\frac{R^n}{\rho^n}P_{n,m}(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$$

(при умножении на ρ^{-1}) (см. [211, ч. II, гл. 15] или [155, стр. 74]) на поверхности шара $x^2+y^2+z^2\leqslant\rho^2$ и в силу предположения, что H регулярна в (замкнутом) шаре, справедливо неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}|B_{n,m}|^2\leqslant 4\pi C^2<\infty,\qquad (19)$$

где C — максимум модуля $|H|$ на поверхности x^2+y^2+ $+z^2=\rho^2$.

Если мы запишем теперь

$$\tilde{H}(R,\ \theta,\ \varphi)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{\alpha_{nm}}{2\pi i\rho^{m}}\int\limits_{|\zeta|=1}(X+Z\zeta+Z^{*}\zeta^{-1})^{n}\zeta^{-m}\frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (20)$$

то, согласно [211, ч. II, 18.31], получим

$$\tilde{H}(R,\ \theta,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{i^{m}n!\,\alpha_{nm}}{(n+m)!}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n}P_{n,m}(\cos\theta)\,e^{-im\varphi}. \quad (21)$$

Так как $(n!)^{2}\geqslant 2^{-2n}(2n)!$, то

$$|\alpha_{nm}|=|B_{nm}|\frac{(n+m)!}{n!}\left(\frac{(n-m)!\,(2n+1)!}{4\pi\,(n+m)!}\right)^{1/2}=$$
$$=\frac{|B_{nm}|}{2}\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{(n+m)!\,(n-m)!}{(n!)^{2}}\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|B_{nm}|}{2}\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{1/2}2^{n}. \quad (22)$$

Из (19) и (22) вытекает, что

$$4\sum_{n=0}^{\infty}2^{-2n}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\sum_{m=-n}^{n}|\alpha_{nm}|^{2}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}|B_{nm}|^{2}\leqslant 4\pi C^{2}<\infty \quad (23)$$

и

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\alpha_{nm}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n}u^{n}\zeta^{-m}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{2^{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2n+1}}\right)^{2}\sum_{m=-n}^{n}|\alpha_{mn}|^{2}\right\}^{1/2}\times$$
$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n}|u|^{n}}{2}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n}\sqrt{\frac{2n+1}{\pi}}\right)^{2}(2n+1)\right\}^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant 2\sqrt{\pi}C\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}|u|^{2n}}{4}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n}\frac{(2n+1)^{2}}{\pi}\right\}^{1/2}. \quad (24)$$

Таким образом, в достаточно малой окрестности начала координат ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \alpha_{nm} u^n \zeta^{-m}$$

сходится равномерно и абсолютно и мы можем поменять порядок суммирования и интегрирования в формуле (20).

Итак, (12) доказано и в случае произвольной гармонической функции, заданной формулой (18).

Подробное описание дальнейших свойств гармонических полиномов $\Gamma_{n,m}$ см. в работах [7, 28, 125]. Композиция гармонических функций трех переменных вводится в [7,38].

§ 3. Гармонические функции, B_3-ассоциированные функции которых рациональны

При рассмотрении отображений гармонических функций $H(X, Z, Z^*)$ на алгебру (комплексных) аналитических функций имеется две возможности: либо мы рассматриваем оператор

$$H(X, Z, Z^*) = B_3(f(u, \zeta)) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} f(u, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{1}$$

где $f(u, \zeta)$ — аналитическая функция u и ζ, либо мы рассматриваем выражение H по формуле (2.12). Функции f и χ называются соответственно B_3- и C_3-ассоциированными с H.

Обобщая подход, использованный в случае дифференциальных уравнений с двумя переменными, при классификации гармонических функций трех переменных естественно рассматривать гармонические функции, ассоциированными с которыми служат полиномы, рациональные или алгебраические функции и т. д.

Так как в случае оператора B_3 переход от функций, образующих алгебру, к гармоническим функциям включает только одно интегрирование, в такой классификации удобнее использовать B_3-ассоциации. (С другой стороны, использование B_3-ассоциаций имеет различные неудобства; например, B_3-ассоциированная функция f для заданной гармонической функции H не определяется однозначно, переменные u и ζ входят в формулу перехода несимметрично и т. д., так что во многих случаях мы используем также и $\mathbf{C}_3$-ассоциации.)

Далее, для различных целей интересно рассматривать различные обобщения и модификации интегрального оператора $\mathbf{B}_3$, так как, используя эти модифицированные интегральные операторы, мы получаем из сравнительно простых ассоциированных функций новые гармонические функции с интересными особенностями. В этих случаях мы можем повторить многое из того, что мы делаем при применении оператора $\mathbf{B}_3$. В частности, иногда кривую интегрирования $|\zeta| = 1$ удобно заменять другой (открытой или замкнутой) кривой $\mathfrak{L}$. Если интегрирование выполняется для значений X, принадлежащих достаточно малой окрестности точки X_0, то мы будем обозначать этот оператор символом

$$\widetilde{\mathbf{B}}_3(f, \mathfrak{L}, X_0) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{L}} f(u, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad X_0 = (x_0, y_0, z_0). \tag{2}$$

Далее, естественно рассматривать также ассоциированные $f(u, \zeta)$, которые не являются регулярными функциями от ζ.

Прежде чем исследовать гармонические функции, получаемые при использовании различных $\mathbf{B}_3$-ассоциаций, мы дадим несколько примеров представления (1). В этом параграфе мы будем рассматривать рациональные $\mathbf{B}_3$-ассоциированные функции.

З а м е ч а н и е. Заметим, что иногда ассоциированные функции в этих примерах сингулярны в начале координат. Сдвинув начало координат, мы можем получить функции, регулярные в новом начале координат. Желая получить простейшие формулы, мы не будем производить это последнее преобразование в явном виде.

1. Пусть $f(u, \zeta) = u^n \zeta^m$, где m — любое, а n — неотрицательное целое число. Тогда без труда получаем

$$H(X) = \frac{i^m n!}{(n+m)!} R^n P_{n,m}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \quad |m| \leqslant n, \tag{3}$$

где $P_{n,m}$ — присоединенные функции Лежандра и R, θ, φ — сферические координаты ($x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta\cos\varphi$, $z = R\sin\theta\sin\varphi$). Если $|m| > n$, то $H(X) \equiv 0$.

2. Пусть

$$f(u, \zeta) = \frac{\zeta^k}{u - A},$$

где A — любая постоянная и k — произвольное неотрицательное целое число. Если мы выразим A через действительную и мнимую части, а именно $A = A_1 + iA_2$, и затем заменим x на $x - A_1$, то мы сразу заметим, что действие A_1 эквивалентно сдвигу. Следовательно, без ограничения общности мы можем предположить, что $A = iA_2$. Рассмотрим теперь четыре различных случая:

(а) $k = 0,\ A_2 = 0$; (б) $k > 0,\ A_2 = 0$;

(в) $k = 0,\ A_2 \neq 0$; (г) $k > 0,\ A_2 \neq 0$.

(а) Простым вычислением находим, что

$$H(X) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{1}{u} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\operatorname{sign} x}{R}, \quad x \neq 0\ ^{1)}. \tag{4}$$

Таким образом, функция $H(X)$ обращается в бесконечность только в начале координат (если рассматривать ее как функцию *действительных* переменных x, y, z) и меняет знак при переходе через плоскость $x = 0$.

(б) Непосредственным вычислением получаем

$$H(X) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^k}{u} \frac{d\zeta}{\zeta} = \begin{cases} \dfrac{e^{ik\varphi} \operatorname{tg}^k(\theta/2)}{i^k R}, & x > 0, \\ \dfrac{-i^k e^{ik\varphi} \operatorname{ctg}^k(\theta/2)}{R}, & x < 0. \end{cases} \tag{5}$$

При $k = 0$ эта формула сводится к (4); здесь также функция $H(X)$ умножается на $(-1)^{k+1}$ при перемене знака x и не ограничена вблизи начала координат. Однако следует заметить, что если, не пользуясь определением $H(X)$ по формуле (5) для *нижнего полупространства*

---

[1]) $\operatorname{sign} x = x/|x|$ для x действительного и не равного нулю; при $x = 0$ интеграл (4) расходится. Выполняя интегрирование при $x > 0$ и определяя функцию аналитическим продолжением для $x \leqslant 0$, получаем $H(X) = 1/R$. Найденная таким путем функция всюду положительна, за исключением начала координат, где она обращается в бесконечность. Аналогично, если интегрирование выполняется при $x < 0$, то $H(X) = -1/R$.

$x < 0$, продолжить аналитически выражение, данное в (5) для $x > 0$, то мы получим функцию, гармоническую во всем действительном пространстве x, y, z, за исключением отрицательной части оси x, где функция обращается

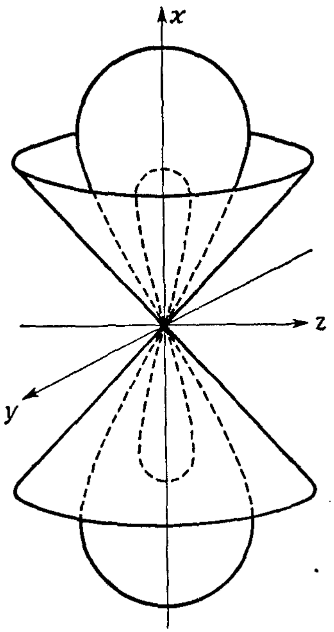

Рис. II.1. Поверхности $R^{-5}\left[x^2 - \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\right] = \text{const}$.

в бесконечность. Таким образом, мы получаем пример гармонической функции, которая имеет особенность не в одной точке, а на целой линии. Поведение такой функции иллюстрируют рис. II, 2*а* и 2*б*, на которых показаны линии уровня[1]) мнимой части этой функции соответственно в плоскостях $z = 0$, $x = 0$ (для $k = 1$).

[1]) Следует заметить, что поверхности уровня, изображенные на рис. II, 2*а*, тянутся до $-\infty$. Линии, ограничивающие эти поверхности уровня, получаются при пересечении с плоскостью $x = c = \text{const}$, $c < 0$.

(в) В этом случае получаем

$$H(X) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{1}{u - iA_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{(x - iA_2)^2 + y^2 + z^2}}, \quad (6)$$

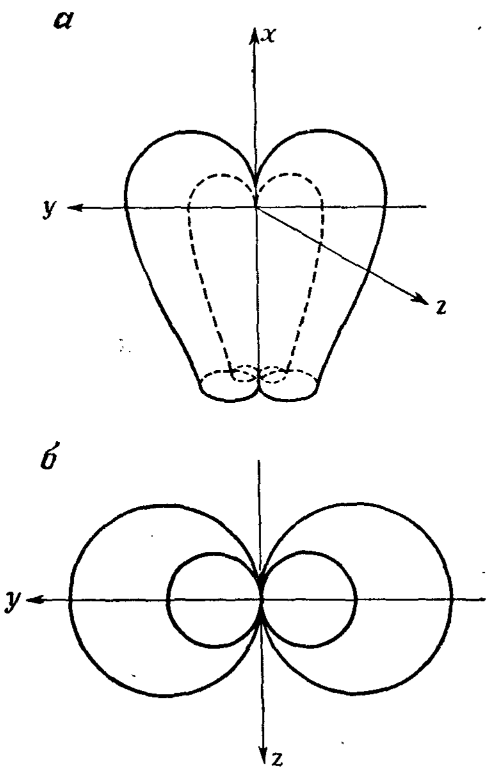

Рис. II.2а, 2б. Поверхности $R^{-1}\cos\varphi \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \mathrm{const}$.

где нужно выбрать такое значение квадратного корня, чтобы внутри единичного круга лежало число

$$\frac{-(x - iA_2) + \sqrt{(x - iA_2)^2 + y^2 + z_2}}{iy + z}$$

[один из двух нулей знаменателя подинтегрального выражения в формуле (6)]; другой нуль лежит вне круга, так как произведение этих нулей равно единице. Интеграл определен для всех точек, координата x которых не равна нулю, и равен $\operatorname{Re} H(X)$ для тех точек плоскости $x=0$, которые удовлетворяют дополнительному условию [1]) $y^2+z^2>A_2^2$. Очевидно, что функция $H(X)$, определенная

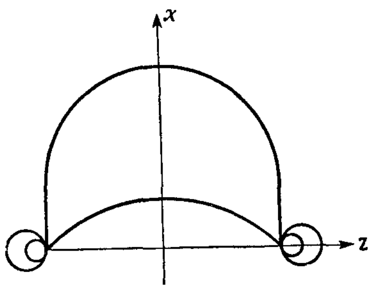

Рис. II.3. Поверхности $\operatorname{Re} \frac{1}{[(x-i)^2+y^2+z^2]^{1/2}} = \mathrm{const}$.

формулой (6), составляет одну ветвь двузначной функции, которая обращается в бесконечность вдоль окружности $x=0$, $y^2+z^2=A_2^2$, и что эта окружность является „линией разветвления", аналогичной точкам разветвления многозначных функций комплексного переменного. Как и в случае (б), мы пришли, следовательно, к функции, особенности которой образуют кривую. Если положить A_2 равным нулю, то „линия разветвления" стягивается в начало координат — единственную особую точку (для действительных x, y, z) функции $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; это случай (а).

(г) Наконец, мы получаем для ассоциированной функции $\zeta^k/(u-iA_2)$, $k>0$, соответствующую гармоническую

---

[1]) Здесь из пространства x, y, z вырезана часть плоскости $x=0$, для которой $y^2+z^2<A_2^2$. Разумеется, мы могли удалить также $\{y^2+z^2>A_2^2,\ x=0\}$.

функцию

$$H(X)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^k}{u-iA_2}\frac{d\zeta}{\zeta}=$$

$$=\frac{[-(x-iA_2)+\sqrt{(x-iA_2)^2+y^2+z^2}]^k}{(iy+z)^k\sqrt{(x-iA_2)^2+y^2+z^2}}, \qquad (7)$$

где знак радикала следует выбрать такой же, как в случае (в). В этом случае мы снова находим, что определяемая формулой (7) функция $H(X)$ является одной ветвью двузначной функции, которая разветвляется вдоль окружности $x=0,\ y^2+z^2=A_2^2$.

В (2.18) дается общая формула для гармонических функций, для которых $\mathbf{B}_3$-ассоциированная функция $f(u, \zeta)$ является целой функцией от u и ζ[1]). Теперь мы дадим аналогичное представление для гармонических функций с рациональной $\mathbf{B}_3$-ассоциированной.

Пусть

$$f(u, \zeta)=\frac{p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)}, \qquad (8)$$

где[2])

$$p(u, \zeta)=\sum_{\nu=0}^{m}u^\nu\left(\sum_{s=-(M-\nu)}^{M-\nu}b_{\nu s}\zeta^s\right),\quad m\leqslant M, \qquad (8а)$$

$$q(u, \zeta)=\sum_{\nu=0}^{n}u^\nu\left(\sum_{s=-(N-\nu)}^{N-\nu}a_{\nu s}\zeta^s\right),\quad n\leqslant N; \qquad (8б)$$

здесь $a_{\nu s}$ и $b_{\nu s}$ — (комплексные) постоянные.

Формальное вычисление показывает, что

$$p(u, \zeta)=\zeta^{-M}P(\zeta, X),\quad P(\zeta, X)\equiv\sum_{s=0}^{2M}G_s(X)\zeta^s, \qquad (9)$$

где

$$G_s(X)=\sum\Gamma_{\nu,\,-\nu+\sigma}(X)\,b_{\nu,\,-M+\nu+s-\sigma}, \qquad (10)$$

[1]) В этом случае $\mathfrak{R}(O)=[x^2+y^2+z^2<\infty]$.

[2]) Нужно рассмотреть только случай $m\leqslant M$, так как для $\nu=M+1,\ M+2,\ \ldots$ разность $M-\nu$ становится отрицательной; M всегда можно увеличить формальным добавлением новых членов $b_{\nu s}\zeta^s$ в предположении, что для этих новых членов $b_{\nu s}=0$.

а пределы суммирования для ν и σ даны в работе [28, стр. 475, формула (2.9)].

Замечание. Для значений $-M+\nu+s-\sigma$, для которых $s-\sigma<0$ или $s-\sigma>2(M-\nu)$, имеем $b_{\nu,\,-M+\nu+s-\sigma}=0$.

Справедливы следующие соотношения, аналогичные формуле (9):

$$q(u,\,\zeta)=\zeta^{-N}Q(\zeta,\,X),\qquad Q(\zeta,\,X)=\sum_{s=0}^{2N}A_s(X)\,\zeta^s, \tag{11}$$

где $A_s(X)$ строятся из $\Gamma_{\nu,\mu}(X)$ таким же образом, как и $G_s(X)$, если m, M и b_{ks} заменить соответственно на n, N и a_{ks}.

Лемма. *Рациональная функция* (8), *где p и q задаются соответственно формулами* (8а) *и* (8б), *может быть записана для $m<N$ в виде*

$$f(u,\,\zeta)=\frac{\zeta^{N-M}\sum\limits_{\nu=0}^{2M}G_\nu(X)\,\zeta^\nu}{A_{2N}(X)\left(\zeta^{2N}+\sum\limits_{\nu=0}^{2N-1}A_{2N}^{-1}(X)\,A_\nu(X)\,\zeta^\nu\right)}=$$

$$=\frac{\zeta^{N-M}P(\zeta,\,X)}{Q(\zeta,\,X)}. \tag{12}$$

Здесь $A_\nu(X)$ и $G_\nu(X)$ — описанные выше полиномы от X, Z, Z^* [см. (10) *и* (11)].

Пусть $\zeta^{(\nu)}(X)$, $\nu=1,\,2,\,\ldots,\,2N$, — корни уравнения

$$\zeta^{2N}+\sum_{\nu=0}^{2N-1}A_{2N}^{-1}(X)\,A_\nu(X)\,\zeta^\nu=0, \tag{13}$$

и пусть

$$D(X)\equiv\left(\prod_{\nu\neq\mu}\left[\zeta^{(\nu)}(X)-\zeta^{(\mu)}(X)\right]\right)^2 \tag{14}$$

— дискриминант уравнения (13).

Можно различать два случая:

$$D(X)\not\equiv 0\quad\text{и}\quad D(X)\equiv 0. \tag{15}$$

Здесь будет рассматриваться только первый случай. Во втором случае можно использовать аналогичные рассуждения, но формулы следует видоизменить.

Теорема 3.1. *Гармоническая функция* $H(X)=\mathbf{B}_3(f)$ *с ассоциированной функцией* $f(u, \zeta)$ *вида* (12) *является рациональной функцией переменных* $\zeta^{(\nu)}(X)$, X, Z, Z^*, *где* $\zeta^{(\nu)}(X)$, $\nu=1, 2, \ldots, 2N$, — *корни уравнения* (13). *Если* $D(X)\neq 0$ *и* $M<N$, *то для любого* X, *такого, что* $D(X)\neq 0$ *и* $A_{2N}(X)\neq 0$, *имеем*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} f(u, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=\sum\left[\frac{\zeta^{N-M-1}\sum\limits_{\nu=0}^{2M} G_\nu(X)\zeta^\nu}{\partial Q(\zeta, X)/\partial\zeta}\right]_{\zeta=\zeta^{(\nu)}(X)}. \tag{16}$$

Суммирование в (16) *распространяется на все* ν, *для которых* $|\zeta^{(\nu)}(X)|<1$.

Доказательство. Если $M<N$, то, применяя теорему о вычетах, мы из формулы (12) получаем соотношение (16). Первая часть теоремы ясна.

Функции в правой части (16) могут иметь особенности только на множестве $D(X)=0$, т. е. там, где

$$Q(\zeta, X)=0, \qquad \partial Q(\zeta, X)/\partial\zeta=0. \tag{17}$$

Для $M\geqslant N$ представление, аналогичное (16), дается в [28, стр. 476]. Далее, в [28] определяется число независимых постоянных $b_{\nu\mu}$ [см. (10)].

Область ассоциации. Рассуждения настоящего параграфа могут быть несколько модифицированы. Вместо интегрирования по кривой $|\zeta|=1$, как это делается в (16), мы можем рассмотреть аналогичные интегралы по другой простой замкнутой ориентированной кривой $\mathfrak{L}$ в плоскости ζ, которая не охватывает начала координат.

В этом случае мы получаем снова правую часть выражения (16), где суммирование проводится по всем корням $\zeta^{(\nu)}(X)$, лежащим во внутренности $\mathfrak{L}$. Интересно исследовать, как изменяется новое выражение, когда точка X двигается в (действительном) пространстве x, y, z.

Пусть $f(u, \zeta)$ — рациональная функция от u и ζ, введенная в формулах (8) и (12). Для любого фиксированного значения ζ равенство

$$q\left[\left(x+\frac{1}{2}iy\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)+\frac{1}{2}z\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)\right),\ \zeta\right]=0, \qquad (18)$$

которое может быть записано также в виде

$$x+\frac{1}{2}iy\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)+\frac{1}{2}z\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)=u^{(\nu)}(\zeta),$$
$$\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (19)$$

определяет n прямых линий $\mathfrak{N}^{(\nu)}(\zeta)$ в пространстве x, y, z. Если ζ пробегает кривую $\mathfrak{L}$, то

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\zeta\in\mathfrak{L}}\mathfrak{N}^{(\nu)}(\zeta) \qquad (20)$$

образует линейчатую поверхность (*отделяющую поверхность*) в пространстве x, y, z. Эта поверхность (которая может состоять из нескольких компонент) в общем случае разделяет действительное пространство x, y, z на несколько областей $\mathfrak{P}^3_\mu=\mathfrak{P}^3_\mu(\mathfrak{L})$. Мы будем говорить, что $\mathfrak{P}^3_\mu(\mathfrak{L})$ — области ассоциации представления

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}} f(u,\ \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (21)$$

относительно кривой интегрирования $\mathfrak{L}$. Пока точка (x, y, z) остается внутри одной области $\mathfrak{P}^3_\mu$, одни и те же корни $\zeta^\nu(X)$ лежат внутри $\mathfrak{L}$ и по ним производится суммирование в правой части формулы (16), но когда точка (x, y, z) переходит из области $\mathfrak{P}^3_\mu$ в $\mathfrak{P}^3_\varkappa$ $(\mu\neq\varkappa)$, один или более корней $\zeta^{(\nu)}(X)$ могут перейти внутрь $\mathfrak{L}$ или во внешность $\mathfrak{L}$, так что значение интеграла (21) может иметь скачок [7, 9, 28, 30, 38].

Классы гармонических функций с рациональными $\mathbf{B}_3$-ассоциированными функциями, которые имеют более сложные алгебраические кривые особенностей, рассмотрены в работе [125].

§ 4. Периоды

В настоящем параграфе[1]) рассматривается более общий класс гармонических функций, имеющих *алгебраические* B_3-ассоциированные функции, а именно, класс функций, которые получаются, когда кривая интегрирования $\mathfrak{L}$ не гомотопна нулю. [Предполагается, что $\mathfrak{L}$ — замкнутая кривая на римановой поверхности (1).] При исследовании этих функций можно использовать классические результаты об интегралах от алгебраических функций. Однако, в противоположность классическому случаю одного комплексного переменного, функции зависят от переменных x, y, z, которые играют роль параметров.

B_3-ассоциированные функции определены на римановой поверхности

$$a(s, u, \zeta)=0, \tag{1}$$

где a — полином от s, u и ζ, коэффициенты которого — рациональные функции от x, y, z. После подстановки

$$u=x+\frac{1}{2}(iy+z)\zeta+\frac{1}{2}(iy-z)\zeta^{-1}$$

уравнение (1) принимает вид

$$A(s, \zeta; X)=0, \quad X\equiv(x, y, z), \tag{1a}$$

где A — полином от s, ζ и x, y, z.

Наиболее общая форма периодов алгебраической гармонической функции рода ρ имеет вид[2])

$$\sum_{\nu=1}^{2\rho} c_\nu(X)\,\omega_\nu(X)+\sum_{\nu=1}^{2\rho} c_\nu^*(X)\,\eta_\nu(\overset{*}{\zeta}_k, \overset{*}{s}_k; X)+$$
$$+\sum_q\sum_{\nu=1}^{2\rho} C_{q\nu}(X)\,\Omega_\nu(\overset{*}{\zeta}_q, \overset{*}{s}_q; \overset{**}{\zeta}_q, \overset{**}{s}_q; X). \tag{2}$$

Здесь c_ν, c_ν^*, $C_{q\nu}$ — алгебраические функции от x, y, z, а s, ζ, x, y, z связаны соотношением (1a) [относительно $\omega_\nu(X)$, $\overset{*}{\zeta}_k$ и т. д. см. стр. 86].

[1]) Этот параграф предполагает знакомство с теорией интегралов от алгебраических функций одного комплексного переменного; см., например, [66].

[2]) См. [66, стр. 264] и [9].

Замечание. Имеется некоторый произвол в выборе $c_\nu(X)$, $\omega_\nu(X)$ и т. д., так как можно умножить $c_\nu(X)$ на произвольную функцию и одновременно разделить $\omega_\nu(X)$ на ту же функцию. Это не изменит произведения. Сами функции $c_\nu(X)$, $\omega_\nu(X)$, ... не обязательно гармонические.

Пусть $\mathfrak{R}(X)$—некоторая риманова поверхность. Периоды интегралов первого, второго и третьего рода, полученные интегрированием вдоль 2ρ фундаментальных кривых, равны

$$\begin{gathered}\omega_{\alpha\beta}(X),\ \omega'_{\alpha\beta}(X),\ \eta_{\alpha\beta}(\zeta_k^*,\ s_k^*;\ X),\ \eta'_{\alpha\beta}(\zeta_k^*,\ s_k^*;\ X),\\ \Omega_\beta(\zeta^*,\ s^*,\ \zeta^{**},\ s^{**};\ X),\quad \Omega'_\beta(\zeta^*,\ s^*,\ \zeta^{**},\ s^{**};\ X),\\ \alpha=1,\ 2,\ \dots,\ \rho,\quad \beta=1,\ 2,\ \dots,\ \rho.\end{gathered}\tag{3}$$

Здесь $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$ — периоды[1]) интегралов первого рода (т. е. интегралов, которые всюду конечны); $\eta_{\alpha\beta}$, $\eta'_{\alpha\beta}$ — периоды интегралов второго рода (т. е. интегралов от функций, которые обращаются в бесконечность в одной точке $\zeta=\zeta_k^*$, $s=s_k^*$); Ω_β, Ω'_β—периоды интегралов третьего рода, которые имеют логарифмическую бесконечность в двух точках $(\zeta_q^*,\ s_q^*)$ и $(\zeta_q^{**},\ s_q^{**})$. Мы выберем $\zeta_k^*=\zeta_q^*=\infty$.

Периоды интегралов от алгебраических функций, введенные в этом параграфе, выражаются в форме (2), т. е. в виде комбинаций алгебраических функций c_ν, c_ν^*, $C_{q\nu}$ от x, y, z с трансцендентными функциями $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$, $\eta'_{\alpha\beta}$, Ω_β, Ω'_β.

Так как каждая замкнутая кривая на римановой поверхности (кроме, быть может, некоторых исключительных значений x, y, z) может быть представлена как комбинация 2ρ базисных кривых, мы получаем интегралы, которые также представляются как линейные комбинации вида (2). Периоды не являются независимыми. В частности, обобщенные соотношения Лежандра для функций

$$\omega_{\alpha\beta}(X),\ \omega'_{\alpha\beta}(X),\ \eta_{\alpha\beta}(X),\ \eta'_{\alpha\beta}(X)$$

---

[1]) См. [66, стр. 100, 324].

дают

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho}[\eta_{\alpha\beta}(X)\,\omega_{\alpha\gamma}(X)-\omega_{\alpha\beta}(X)\,\eta_{\alpha\gamma}(X)]=0,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho}\left[\eta'_{\alpha\beta}(X)\,\omega'_{\alpha\gamma}(X)-\omega'_{\alpha\beta}(X)\,\eta'_{\alpha\gamma}(X)\right]=0, \tag{4}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho}\left[\eta_{\alpha\beta}(X)\,\omega'_{\alpha\gamma}(X)-\omega_{\alpha\beta}(X)\,\eta'_{\alpha\gamma}(X)\right]=\begin{cases}0 & \text{для}\quad \gamma\neq\beta,\\ \frac{1}{2}\pi i & \text{для}\quad \gamma=\beta.\end{cases}$$

Развивая рассматриваемую теорию, полезно ввести, как и в классическом случае, тета-функции. Напомним определение ϑ-функций, а именно (см. [198, стр. 128 и далее]):

$$\vartheta(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{\rho\rho}, b_1, b_2, \ldots, b_\rho)=$$

$$=\sum_{m_1,\ldots,m_\rho=-\infty}^{\infty}\exp\left[\sum_{\mu=1}^{\rho}\sum_{\mu'=1}^{\rho}a_{\mu\mu'}m_\mu m_{\mu'}+2\sum_{\mu=1}^{\rho}b_\mu m_\mu\right]. \tag{5}$$

Если вместо $a_{\mu\mu'}$ подставить периоды $\omega_{\alpha\beta}(X)$ нормальных римановых интегралов первого рода, то получаются функции, которые зависят от ρ переменных b_μ, $\mu=1, 2, \ldots, \rho$, и от x, y, z. Обозначим эти функции так:

$$\vartheta(b_1, \ldots, b_\rho; X). \tag{6}$$

Пусть

$$v_\mu(\zeta, s; X)=\int_{(\zeta^0, s^0)}^{(\zeta, s)}dv_\mu(\zeta, s; X), \quad \mu=1, 2, \ldots, \rho, \tag{7}$$

есть нормальный риманов интеграл первого рода. Тогда мы получаем для периодов нормальных римановых интегралов второго и третьего рода соотношения

$$\eta'_{\alpha\beta}(\zeta^*, s^*; X)=v_\beta(\zeta^*, s^*; X), \qquad \beta=1, 2, \ldots, \rho, \tag{8}$$

$$\Omega'_\beta(\zeta^*, s^*; \zeta^{**}, s^{**}; X)=$$

$$=\frac{1}{\rho}\log\frac{\vartheta\left(v_1(\zeta^*, s^*; X)-\rho\omega'_{1\beta}(X), \ldots; X\right)}{\vartheta\left(v_1(\zeta^{**}, s^{**}; X)-\rho\omega'_{1\beta}(X), \ldots; X\right)} \tag{9}$$

(см. [9, стр. 550]). Следовательно, гармонические функции вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} f(u, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

[где f — рациональная функция от s, u, ζ, а s, u, ζ связаны соотношением (1)] можно выразить через конечное число трансцендентных функций $\omega_{\alpha\beta}(X)$, $\omega'_{\alpha\beta}(X)$, используя введенные в (6) ϑ-функции и их производные.

Мы приступим теперь к вопросу о расположении и свойствах особенностей. Однако мы ограничимся рассмотрением гиперэллиптического случая. В этом случае, как показали Фукс и другие, периоды интегралов первого, второго и третьего рода, рассматриваемые как функции точки разветвления, удовлетворяют линейному уравнению в частных производных (порядка 2ρ в случае интегралов первого и второго рода и порядка $2\rho+1$ в случае интегралов третьего рода).

Используя эти результаты, можно показать, что в случае гиперэллиптических интегралов периоды удовлетворяют не только гармоническому уравнению, но и обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$\sum_{\varkappa} B_{1\varkappa}(X)\frac{\partial^{\varkappa}F}{\partial x^{\varkappa}} = B_1(X) \tag{10}$$

и аналогичным уравнениям по переменным y и z. Здесь $B_{1\varkappa}$ и $B_1(X)$ — алгебраические функции от x, y, z.

Особенности этих функций лежат на алгебраических кривых. Пусть $k_q(X)$ и $k_n(X)$ (для фиксированного X) обозначают две различные точки разветвления рассматриваемого подинтегрального выражения, тогда интегралы первого и второго рода имеют особенности вдоль линий

$$\operatorname{Re}[k_q(X)] = \operatorname{Re}[k_n(X)], \quad \operatorname{Im}[k_q(X)] = \operatorname{Im}[k_n(X)]. \tag{11}$$

Периоды интегралов третьего рода имеют, кроме того, особенности вдоль линий

$$\operatorname{Re}[k_q(X)] = \operatorname{Re}[\zeta^*(X)], \quad \operatorname{Im}[k_q(X)] = \operatorname{Im}[\zeta^*(X)]. \tag{12}$$

В окрестности этих линий (за исключением некоторых точек) рассматриваемые функции, будучи сингулярными, могут быть представлены в виде

$$F(X) = [k_q - k_n]^r \sum_{m=0}^{\lambda} K_m(X;\ k_q - k_n) [\log (k_q - k_n)]^m, \quad (13)$$

где K_m — степенные ряды по $(k_q - k_n)$, коэффициенты которых являются алгебраическими функциями от x, y, z. Подробнее см. [9].

Эти общие рассуждения мы проиллюстрируем на одном частном случае, который приводит к эллиптическим интегралам.

Рассмотрим случай, когда [1])

$$f(u, \zeta) = \frac{p_1(s'', u, \zeta)}{p_2(u, \zeta)}. \quad (14)$$

Здесь s'', u и ζ связаны соотношением

$$a(s'', u, \zeta) \equiv s''^2 - C_0 u^2 - \left(B_0 + B_1\zeta + B_{-1}\zeta^{-1}\right) u - \\ - \left(A_0 + A_1\zeta + A_{-1}\zeta^{-1} + A_2\zeta^2 + A_{-2}\zeta^{-2}\right) = 0, \quad (15)$$

где C_0, B_ν, A_ν — константы.

Применяя некоторые преобразования (обычные в теории эллиптических функций, см. [9]), получаем следующую форму периодов:

$$c_\nu(X)\,\omega_{1\nu}(X) + c_\nu^*(X)\,\eta_{1\nu}(X) + \sum_{\mu=1}^{m} C_\mu(X)\,\Omega_\nu(\zeta_\mu,\ s_\mu;\ X), \\ \nu = 1,\ 2. \quad (16)$$

Уравнение (15) приобретает вид

$$s^2 = 4\zeta^3 - g_2(X)\,\zeta - g_3(X), \quad (17)$$

где g_2 и g_3 — полиномы от x, y, z. Используя функцию Вейерштрасса Z, можно выразить функции $\eta_{1\nu}(X)$ и

[1]) Мы пишем s'' вместо s, используемого в (1).

$\Omega_\nu(\zeta_\mu, s_\mu; X)$ следующим образом[1]):

$$\eta_{1\nu}(X) = 2Z\left[\frac{1}{2}\omega_{1\nu}(X)\right], \quad Z[\tau] \equiv Z[\tau; \omega_{11}(X), \omega_{12}(X)], \tag{18}$$

$$\Omega_\nu(\zeta_\mu, s_\mu; X) = -2a(X)Z\left[\frac{1}{2}\omega_{1\nu}(X)\right] + \\ + \omega_{1\nu}(X)Z[a(X)], \quad \nu = 1, 2,$$

где

$$\zeta_\mu = \wp[a(X); \omega_{11}(X), \omega_{12}(X)].$$

Пусть $\tilde{\omega}(X)$, $\tilde{\eta}(X)$, $\tilde{\Omega}(\zeta^*, s^*; X)$ — периоды нормальных интегралов в форме Лежандра, т. е. периоды интегралов

$$\int \frac{d\zeta}{s}, \quad \int \frac{\zeta\, d\zeta}{s}, \quad \int \frac{1}{\zeta - \zeta^*}\frac{d\zeta}{s}, \quad s^2 \equiv \zeta(1-\zeta)(1-k\zeta), \tag{19}$$

где

$$k = k(X) = [e_1(X) - e_3(X)]/[e_2(X) - e_3(X)],$$

а $e_\nu(X)$ — решения уравнения $4\zeta^3 - g_2(X)\zeta - g_3(X) = 0$.

Функция ω, рассматриваемая как функция от k, удовлетворяет уравнению

$$2k(k-1)\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2} + 2(2k-1)\frac{\partial\omega}{\partial k} + \frac{1}{2}\omega = 0. \tag{20}$$

Особыми кривыми для $\omega(X)$ являются линии

$$\begin{aligned} &\mathfrak{T}_1\colon && \operatorname{Re}[k(X)] = 0, \ \operatorname{Im}[k(X)] = 0, \\ &\mathfrak{T}_2\colon && \operatorname{Re}[k(X)] = 1, \ \operatorname{Im}[k(X)] = 0, \\ &\mathfrak{T}_3\colon && \operatorname{Re}\left[\frac{1}{k(X)}\right] = 0, \ \operatorname{Im}\left[\frac{1}{k(X)}\right] = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

В окрестности $\mathfrak{T}_1$ получаем представления

$$\begin{aligned} &\omega_1(X) = -\pi v_{01}(k(X)), \\ &\omega_2(X) = v_{01}(k(X))\{\pi + i\log k(X) + v_{02}(k(X))\}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $v_{0\alpha}(k(X))$, $\alpha = 1, 2$, — функции от x, y, z, регулярные вдоль кривой $\mathfrak{T}_1$. Аналогичные разложения имеют место в окрестности кривых $\mathfrak{T}_2$ и $\mathfrak{T}_3$ (см. [9]).

---

[1]) Подробности см., например, в [9]. Во второй строчке после формулы (23) в [9] нужно символ φ заменить на $\wp$ ($\wp$-функция Вейерштрасса).

§ 5. Связь между коэффициентами разложения гармонической функции в ряд и ее особенностями

В случае аналитических функций одного комплексного переменного результаты Адамара и других дают необходимые и достаточные условия мероморфности функции, а также условия для определения расположения ее полюсов. Интегральный оператор первого рода позволяет нам обобщить эти результаты на случай дифференциальных уравнений (I.1.6), в предположении, что коэффициенты A, B, C — целые функции.

Оператор (2.12) позволяет в некоторых случаях дать достаточные условия того, что гармоническая функция $H(X, Z, Z^*)$ имеет особенности типа полюса, рассмотренные в § 3.

Мы опишем процесс, приводящий к этим результатам, сначала в простейшем случае.

Пусть мы имеем разложение

$$H(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=-m}^{m} S_{m+k,\, m} \Gamma_{m,\, m+k} (X, Z, Z^*) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=-m}^{m} S_{m+k,\, m} \int\limits_{|\zeta|=1} u^m \zeta^{k-1}\, d\zeta, \tag{1}$$

где

$$\Gamma_{m,\, m+k} \equiv \frac{i^k m!}{(m+k)!} r^m P_{m,\, k}(\cos\theta)\, e^{ik\varphi}$$

— функции, введенные в (2.6). Напишем

$$H(X) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(X), \quad Q_k(X) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+k,\, m} \Gamma_{m,\, m+k}(X). \tag{2}$$

Так как k — *фиксированное* целое число, то при рассмотрении $Q_k(X)$ мы можем применить критерий Адамара из теории функций одного комплексного переменного к $\sum\limits_{m=0}^{\infty} S_{m+k,\, m}\, u^m$, который устанавливает, что эта функция мероморфна или имеет существенную особенность. Далее, используя известные приемы теории аналитических функций одного комплексного переменного, мы можем определить расположение полюсов, т. е. мы можем записать

$$Q_k(X)=\sum_{M=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{B_M\zeta^k}{(A_M-u)^{p_M}}\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{3}$$

Используя затем результаты, изложенные на стр. 77 и далее, находим, что если $p_M=1$ и A_M действительно, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\zeta^{k-1}(A_M-u)^{-1}\,d\zeta \tag{3a}$$

имеет особую кривую (или точку), рассмотренную в п. (а) или (б) на стр. 77. Если мнимая часть A_M не равна нулю, то гармоническая функция (3а) имеет особую кривую, рассмотренную в п. (в) или (г) на стр. 79 и 80. Обобщая этот подход, мы получаем следующие результаты. Предположим, что коэффициенты $S_{m+k,\,m}$ при $|k|>k_0$ в разложении (1) стремятся к нулю так быстро, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{|k|>k_0}S_{m+k,\,m}\,u^m\zeta^{k-1} \tag{4}$$

является целой функцией от x, y, z при $|\zeta|<1$. Поставим в соответствие ряду $\sum S_{m+k,\,m}u^m$ числа

$$l_p^{(k)}=\overline{\lim_{m\to\infty}}\left|D_{m,\,p}^{(k)}\right|^{1/m},\quad p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{5}$$

где

$$D_{m,\,p}^{(k)}=\begin{vmatrix} S_{m+k,\,m} & S_{m+k+1,\,m+1} & \ldots S_{m+k+p,\,m+p}\\ S_{m+k+1,\,m+1} & S_{m+k+2,\,m+2} & \ldots S_{m+k+p+1,\,m+p+1}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ S_{m+k+p,\,m+p} & S_{m+k+p+1,\,m+p+1} & \ldots S_{m+k+2p,\,m+2p}\end{vmatrix}. \tag{5a}$$

Тогда существует следующая связь между свойствами последовательности $l_p^{(k)}$, $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ и характером особенностей $Q_k(X)$.

I. Предположим, что $l_p^{(k)}=0$ для $p\geqslant p_k$. Тогда мы можем определить полиномы $P_k(U)$ (степени $n=n_k$), обладающие следующим свойством: если

$$P_k(U) = 0, \quad \frac{dP_k(U)}{dU} \neq 0 \tag{5б}$$

(т. е. $P_k(U)$ не имеет кратных корней), то

$$Q_k(X) = \sum_{m=0}^{M} a_m^{(k)} L_m(X, \mathfrak{s}_k^1), \tag{6}$$

где

$$L_m(X, \mathfrak{s}_k^1) = \sum_q \frac{(Z^* + X\zeta_q + Z\zeta_q^2)^m}{\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}[\zeta^n P_k(Z^* + X\zeta + Z\zeta^2)]\right\}_{\zeta=\zeta_q}} + R_m(X) \tag{7}$$

— алгебраические функции от X, Z, Z^*. ($R_m(X)$ — алгебраическая функция от X, Z, Z^*, данная на стр. 553 в работе [33] [1].)

Функция $Q_k(X)$ имеет только конечное число особенностей типа полюса на кривых

$$\mathfrak{s}_k^1 = \left[\zeta^n P_k = 0, \quad \frac{\partial(\zeta^n P_k)}{\partial\zeta} = 0\right], \quad P_k = P_k(X + Z\zeta + Z^*\zeta^{-1}).$$

II. Предположим, что для $p \geqslant p_k$ частное $l_{p-1}^{(k)}/l_p^{(k)}$ становится постоянным, скажем $\rho_k^{(0)}$. Тогда мы имеем то же положение, что и в случае I, с той только разницей, что представление (6) справедливо не во всем пространстве, а только в шаре

$$x^2 + y^2 + z^2 < (\rho_k^{(0)})^2. \tag{8}$$

III. Пусть последовательность $\{l_p^{(k)}/l_{p-1}^{(k)}\}$ стремится к нулю при $p \to \infty$ и справедлива формула (5). Если ряд

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \left(\frac{l_p^{(k)}}{l_{p-1}^{(k)}}\right)^{\gamma} \tag{9}$$

[1] В работе [33] в правой части уравнения (4.24) $(x - a_{k2})$ следует заменить на $-(x - a_{k2})$; в левой части уравнения (4.26) следует заменить $+(x - a_{k1})^2$ на $-(x - a_{k1})^2 + 8ZZ^*$, а в правой части — множитель 2 на -2; в уравнении (5.14) заменить показатель степени $\sigma - k$ на $\sigma + k$.

сходится для $\gamma=1$, то можно найти константы, скажем C_N, $|C_N|\leqslant|C_{N+1}|$, такие, что имеет место равенство

$$q_k(u)\equiv\sum_{m=k}^{\infty}S_{m+k,\,m}\,u^m=\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_m^{(k)}u^m}{\prod\limits_{\mu=1}^{\infty}\left(1-uC_\mu^{-1}\right)}\tag{10}$$

(см. [33, (4.13), стр. 551]). Если $|C_{N_0}|<1$, $|C_{N_0+1}|>1$ и $\nu=(N_0+k)-(m+1)\geqslant 0$, то $Q_k(X)$ можно представить в виде (6), где $L_m(X,\,\mathfrak{s}_k^1)$ имеет вид

$$L_m\left(X,\,\mathfrak{s}_k^1\right)=$$
$$=\sum_{q=1}^{N_0}\frac{\left(Z^*+X\zeta_q+Z\zeta_q^2\right)^m\zeta_q^\nu}{\left\{\zeta\dfrac{\partial}{\partial\zeta_q}\left[\mathbf{II}_{N_0}\right]\right\}\left\{\prod\limits_{\mu=N_0+1}^{\infty}\left(1-C_\mu^{-1}\left(X+Z\zeta_q+Z^*\zeta_q^{-1}\right)\right)\right\}},\tag{11}$$

где

$$\mathbf{II}_{N_0}=\prod_{\mu=1}^{N_0}\left(\zeta_q-C_\mu^{-1}\left(Z^*+X\zeta_q+Z\zeta_q^2\right)\right),$$

а $\zeta_q=\zeta_q(X,\,Z,\,Z^*)$ являются решениями трансцендентного уравнения

$$P_k\left(X+\zeta Z+\zeta^{-1}Z^*\right)=0,\quad P_k(u)=\prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1-uC_\mu^{-1}\right),\tag{12}$$

которые лежат в единичном круге $|\zeta|\leqslant 1$ для значений x, y, z, принадлежащих достаточно малой окрестности начала координат. Функции ζ_q являются, вообще говоря, бесконечнозначными. В случае, когда

$$\nu=(N_0+k)-(m+1)<0,$$

мы получаем выражение для $L_m\left(X,\,\mathfrak{s}_k^1\right)$, которое несколько отличается от (11) (см. (4.30) в [33, стр. 555]). Случай $\gamma>1$ также рассматривается в указанной статье, стр. 555 и далее.

IV. Пусть последовательность $\left\{l_p^{(k)}/l_{p-1}^{(k)}\right\}$ стремится к положительной постоянной $1/R$. Тогда ситуация аналогична случаю III, но полученное представление имеет место лишь в шаре радиуса R. Подробнее см. в работе [38].

§ 6. Другой тип интегральных представлений гармонических функций

Как подчеркивалось ранее, интересно определить для каждого класса дифференциальных уравнений *различные* операторы, порождающие решения одного и того же дифференциального уравнения. Далее рассматривается класс интегральных операторов несколько иной структуры, чем (2.12) или (3.1).

Важным инструментом для изучения гармонических функций являются ньютоновские потенциалы, порожденные интегралами вида

$$\int_{\mathfrak{H}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{[(x-u_1(\zeta))^2+(y-u_2(\zeta))^2+(z-u_3(\zeta))^2]^{1/2}}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{H}$ — открытая либо замкнутая кривая в плоскости ζ и $u_k(\zeta)$ — действительные функции от ζ. Здесь $f(\zeta)$ — аналитическая функция комплексного переменного ζ. Мы предполагаем, что $\mathfrak{H}$ лежит в области регулярности f. Естественно также рассмотреть случай, когда $u_k(\zeta)$ — *комплексные* функции от ζ. Мы предположим, что $u_k(\zeta)$ — рациональные функции от ζ. Таким путем мы получим класс гармонических функций

$$h(X)=H(E)\equiv\int_{\mathfrak{H}} E(X;\,\zeta)\,f(\zeta)\,d\zeta, \tag{2}$$

где ,

$$E(X;\,\zeta)=\left[(x-u_1(\zeta))^2+(y-u_2(\zeta))^2+(z-u_3(\zeta))^2\right]^{-1/2}. \tag{2a}$$

Определение. Функция f называется ассоциированной с h относительно интегрального оператора, заданного в правой части формулы (2).

Пусть

$$u_k(\zeta)=\sum_{n=0}^{N} A_{2k-1,\,n}\zeta^n \Big/ \sum_{n=0}^{N} A_{2k,\,n}\zeta^n,\quad k=1,\ 2,\ 3. \tag{3}$$

Тогда выражение $(x-u_1(\zeta))^2+(y-u_2(\zeta))^2+(z-u_3(\zeta))^2$, умноженное на произведение квадратов знаменателей u_k, является полиномом, а именно:

$$P(\zeta, X) = \sum [(A_{2\nu}x - A_{1\nu})(A_{2n}x - A_{1n}) A_{4\mu}A_{4m}A_{6\sigma}A_{6s} + \\ + (A_{4\mu}y - A_{3\mu})(A_{4m}y - A_{3m}) A_{2\nu}A_{2n}A_{6\sigma}A_{6s} + \\ + (A_{6\sigma}z - A_{5\sigma})(A_{6s}z - A_{5s}) A_{2\nu}A_{2n}A_{4\mu}A_{4m}] \zeta^{\nu+n+\mu+m+\sigma+s}. \quad (4)$$

Здесь $\sum = \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} \sum_{\mu=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \sum_{\sigma=0}^{N} \sum_{s=0}^{N}$.

Алгебраическая функция $[P(\zeta, X)]^{1/2}$ для каждого фиксированного X определяет риманову поверхность $\mathfrak{R}(X)$. Обозначим через

$$e_\varkappa \equiv e_\varkappa(X), \qquad \varkappa = 0, 1, \ldots, 6N-1, \quad (5)$$

точки разветвления $\mathfrak{R}(X)$. [Они, вообще говоря, являются нулями полинома

$$P(\zeta, X) \equiv b_0(X) \prod_{\varkappa=0}^{6N-1} (\zeta - e_\varkappa(X)),$$

см. (4); $b_0(X)$ определено в формуле (7).] Точки X в области

$$\mathfrak{r} = \{x^2 + y^2 + z^2 < \infty\},$$

для которых совпадают по крайней мере две точки разветвления $e_\varkappa(X)$, образуют, вообще говоря, алгебраическую кривую

$$\mathfrak{S}_1 = \{P(\zeta, X) = 0, \; P_\zeta(\zeta, X) = 0\}, \; P_\zeta \equiv \partial P/\partial\zeta. \quad (6)$$

Обозначим через $\mathfrak{S}_2$ множество

$$\mathfrak{S}_2 = \{X: \; b_0(X) \equiv (A_{2N}x - A_{1N})^2 A_{4N}^2 A_{6N}^2 + \\ + (A_{4N}y - A_{3N})^2 A_{2N}^2 A_{6N}^2 + (A_{6N}z - A_{5N})^2 A_{2N}^2 A_{4N}^2 = 0\} \quad (7)$$

и запишем

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2. \quad (8)$$

Определим теперь для $X \in \mathfrak{A}(X_0)$ оператор

$$\mathbf{P}[f, \mathfrak{H}, X] = \\ = \int_{\mathfrak{H}} E(X, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta \equiv \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{\left[\prod_{k=1}^{3} \left(\sum_{\mu=0}^{N} A_{2k,\,\mu}\zeta^{\mu}\right)\right] f(\zeta)\, d\zeta}{\left[b_0(X) \prod_{\varkappa=0}^{6N-1} (\zeta - e_\varkappa(X))\right]^{1/2}}. \quad (9)$$

Здесь $\mathfrak{A}(X_0)$ — достаточно малая окрестность фиксированной точки X_0, а f — целая аналитическая функция от ζ; $\mathfrak{H}$ — ориентированная кривая в однолистной плоскости ζ, состоящая из конечного числа регулярных дуг. Через ζ_0 и ζ_1 обозначены начало и конец кривой $\mathfrak{H}$.

Для всех значений $X \in \mathfrak{r} - \mathfrak{s}$ подинтегральное выражение в (9) является двузначной функцией от X, если $\mathfrak{H}$ не проходит через точки разветвления $e_\varkappa(X)$ поверхности $\mathfrak{R}(X)$.

Общие свойства потенциалов описанного типа и их поведение, когда $f(\zeta)$ — целая функция ζ (или когда она регулярна в достаточно большой области), изучаются в гл. II работы [25][1]). Точке $\zeta = \zeta_0$ в пространстве x, y, z соответствует окружность

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{P}(\zeta_0) = \{X : P(\zeta_0, X) = 0\} \equiv \\
\equiv \{ X : [(x - v_1(\zeta_0))^2 + (y - v_2(\zeta_0))^2 + \\
+ (z - v_3(\zeta_0))^2 - \sum_{k=1}^{3} w_k^2(\zeta_0) = 0, \\
(x - v_1(\zeta_0))\, w_1(\zeta_0) + (y - v_2(\zeta_0))\, w_2(\zeta_0) + \\
+ (z - v_3(\zeta_0))\, w_3(\zeta_0) = 0]\}, \\
u_\varkappa(\zeta_0) \equiv v_\varkappa(\zeta_0) + i w_\varkappa(\zeta_0).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Риманова поверхность $\mathfrak{R}(X)$ над плоскостью ζ, определенная функцией $E(X; \zeta)$, имеет четное число точек разветвления, скажем $2\rho + 2$; ее род равен ρ (очевидно, ρ не зависит от X).

Определение. Пусть E — фиксированная функция, заданная формулой (2а). Если $\mathfrak{H}$ пробегает все возможные допустимые кривые, а $f(\zeta)$ пробегает множество всех аналитических функций, регулярных в некоторой области, содержащей кривую $\mathfrak{H}$, то множество функций, представимых в виде (9), образует класс гармонических функций, который мы обозначим через $H(E)$. Если мы сузим мно-

---

[1]) В статье [25] имеется несколько опечаток, которые следует исправить так: на стр. 227 в первой строке заменить $A_{k2}\zeta^2)$ на $A_{k2}\zeta)^2$; на стр. 227 в (2.18) заменить $v_k(\zeta_0)^2)$ на $v_k(\zeta_0))^2$; на стр. 236 в (2.47) заменить $(y_k$ — на $(y_k^2$ —; на стр. 239 в (3.4) заменить $[\xi^{-1} - e_0(X)]$ на $[\xi^{-1} + e_0(X)]$ три раза; на стр. 244 во второй строке снизу заменить ζ на ζ_1.

жество допустимых кривых интегрирования, зафиксировав их начало и конец, скажем ζ_0 и ζ_1, то интеграл (9) будет пробегать подкласс функций из $H(E)$, который мы обозначим $S(E, \zeta_0, \zeta_1)$[1]. Точки ζ_0 и ζ_1 могут быть взяты либо на первом, либо на втором листе римановой поверхности $\mathfrak{R}(X)$.

§ 7. Поведение в целом функций класса $S(E, \zeta_0, \zeta_1)$ с рациональной ассоциированной $f(\zeta)$

Как легко видеть (ср. [25]), подинтегральное выражение в (6.9) представляет собой двузначную функцию, определенную в каждой точке трехмерного пространства X. Если $f(\zeta)$ в (6.9) — рациональная функция, то формула (6.9) дает гиперэллиптический интеграл. Используя теорию гиперэллиптических интегралов, развитую в теории аналитических функций одного комплексного переменного, мы получаем явные формулы для представления гармонических функций трех переменных класса $S(E, \zeta_0, \zeta_1)$. Чтобы применить результаты теории гиперэллиптических интегралов и, в частности, методы, развитые Вейерштрассом, мы приведем наши интегралы к нормальной форме, использованной Вейерштрассом [66]. Введем сначала новую переменную интегрирования

$$\xi = [\zeta - e_0(X)]^{-1}. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathfrak{W}(X)$, $X \in \mathfrak{x} - \mathfrak{s}$, риманову поверхность над плоскостью ξ, которая получается из $\mathfrak{R}(X)$ при преобразовании (1). Поверхность $\mathfrak{W}(X)$ имеет $6N-1$ точек разветвления

$$a_\varkappa(X) = (e_{\varkappa+1}(X) - e_0(X))^{-1}, \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, 6N-2, \tag{2}$$

а также точку разветвления при $\xi = \infty$. Пусть

$$\eta = \pm [R(\xi, X)]^{1/2}, \quad R(\xi, X) = \prod_{\varkappa=0}^{6N-2} [\xi - a_\varkappa(X)]. \tag{3}$$

---

[1]) Класс полученных таким путем функций определен в $\mathfrak{x} - \mathfrak{s}$, $\mathfrak{x} = [x^2 + y^2 + z^2 < \infty]$, $\mathfrak{s}$ определяется равенством (8).

Положим

$$S(\xi, X) = E(X, \zeta)\eta\frac{d\zeta}{d\xi} =$$

$$= \frac{\xi^{3N-2}\prod_{k=0}^{3}\left[\sum_{\mu=1}^{N} A_{2k,\mu}(\xi^{-1}+e_0(X))^{\mu}\right]}{\left\{b_0(X)\prod_{\varkappa=0}^{6N-2}[e_{\varkappa+1}(X)-e_0(X)]\right\}^{1/2}} \tag{4}$$

и

$$g(\xi, X) = f(\xi^{-1}+e_0(X)) = \frac{\sum_{n=0}^{M_1} B_{1n}(\xi^{-1}+e_0(X))^n}{\sum_{n=0}^{M_2} B_{2n}(\xi^{-1}+e_0(X))^n}. \tag{5}$$

(Мы предполагаем, что f — рациональная функция от ζ и, следовательно, может быть записана в виде частного двух полиномов.)

Оператор (6.9) принимает теперь вид

$$\int_{\xi_0(X)}^{\xi_1(X)} \frac{S(\xi, X)\,g(\xi, X)\,d\xi}{\eta}, \qquad X \in \mathfrak{U}(X_0). \tag{6}$$

Здесь $\xi_0(X)$ и $\xi_1(X)$ — соответственно начальная и конечная точки образа $\mathfrak{H}$ на римановой поверхности $\mathfrak{W}(X)$ (а именно, $\xi_0(X) = [\zeta_0 - e_0(X)]^{-1}$, $\xi_1(X) = [\zeta_1 - e_0(X)]^{-1}$). Используя классический метод изучения выражения (6), мы должны иметь в виду, что подинтегральное выражение зависит не только от переменной интегрирования ξ, но и от x, y, z, которые можно рассматривать как параметры. Используя метод Вейерштрасса (см. [66]), мы вводим на римановой поверхности $\mathfrak{W}(X)$ интегралы первого, второго и третьего рода. Поверхность $\mathfrak{W}(X)$ представляет собой многосвязную область, и для определения периодов мы должны при помощи подходящих циклических сечений $E_{2\varkappa}(X)$ и поперечных разрезов $E_{2\varkappa+1}(X)$, $\varkappa = 0, 1, \ldots, \rho - 1$, $\rho = 3N - 1$, преобразовать $\mathfrak{W}(X)$ в односвязную область $\mathfrak{W}^*(X)$. Область $\mathfrak{W}^*(X)$ будет зависеть от X, и при определении периодов нужно разрезать $\mathfrak{r}-\mathfrak{s}$ сегментами подходящей поверхности $\mathfrak{t}$ так, чтобы фундаментальная группа Пуанкаре (одномерная группа гомотопий) области $\mathfrak{p}=\mathfrak{r}-\mathfrak{s}-\mathfrak{t}$ состояла только из единичного элемента. Тогда мы сможем классическим способом определить периоды как интегралы вдоль сечений сначала для фиксированной точки $X_0=(x_0, y_0, z_0)$. Затем мы можем продолжить эти периоды как функции от x, y, z в $\mathfrak{r}-\mathfrak{s}-\mathfrak{t}$. Подробнее см. [25, стр. 239—240].

Чтобы определить нормальные интегралы, введем H-функции Вейерштрасса, определенные на $\mathfrak{W}(X)$. Запишем

$$N(\xi, X)=\prod_{n=1}^{\rho}\left[\xi-a_{2n-1}(X)\right], \quad Q(\xi, X)=\prod_{n=0}^{\rho}\left[\xi-a_{2n}(X)\right] \tag{7}$$

и затем, следуя Вейерштрассу [66, стр. 370—373], определим

$$H(\xi, X)_\alpha=N(\xi, X)/2\eta\left[\xi-a_{2\alpha-1}(X)\right],$$

$$H^*(\xi, X)_\alpha=-\frac{Q\left[a_{2\alpha-1}(X), X\right] N(\xi, X)}{N'\left[a_{2\alpha-1}(X), X\right] 2\eta\left[\xi-a_{2\alpha-1}(X)\right]^2}$$

$$\alpha=1, 2, \ldots, \rho,$$

$$H(\xi, \xi^*, X)=\frac{N(\xi^*, X)}{2(\xi^*-\xi)\eta^*}\left[\frac{\eta}{N(\xi, X)}+\frac{\eta^*}{N(\xi^*, X)}\right], \tag{8}$$

$$\begin{gathered} 2\omega_{\alpha\beta}(X)=2\omega_\alpha^{(2\beta-1)}(X), \quad 2\eta_{\alpha\beta}(X)=2\eta_\alpha^{(2\beta-1)}(X), \\ 2\omega_{\alpha\beta}^*(X)=2\sum_{\delta=0}^{\beta-1}\omega_\alpha^{2\delta}(X), \quad 2\eta_{\alpha\beta}^*(X)=2\sum_{\delta=0}^{\beta-1}\eta_\alpha^{2\delta}(X), \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} 2\omega_\beta^\alpha(X)=\int_{E_{2\beta}(X)} H(\xi, X)_\alpha\, d\xi \equiv \int_{E_{2\beta}(X)} \frac{N(\xi, X)}{\xi-a_{2\alpha-1}(X)}\frac{d\xi}{\eta}, \\ 2\eta_\beta^\alpha(X)=\int_{E_{2\beta}(X)} H^*(\xi, X)_\alpha\, d\xi, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\alpha=1, 2, \ldots, \rho; \quad \beta=1, 2, \ldots, \rho.$$

Теорема 7.1. *Функции* $\omega_{\alpha\beta}(X)$, $\omega_{\alpha\beta}^*(X)$, $\eta_{\alpha\beta}(X)$, $\eta_{\alpha\beta}^*(X)$ *являются, вообще говоря, бесконечнозначными функциями, определенными в* $\mathfrak{r}-\mathfrak{s}$. *Если для задан-*

ной точки X в $\mathfrak{r}-\mathfrak{s}$ точка ξ описывает замкнутую кривую на дважды покрытой плоскости ξ, причем эта кривая не гомотопна точке (на этой римановой поверхности), то $\omega_{\alpha\beta}(X)$ и $\omega^*_{\alpha\beta}(X)$ получают приращение вида

$$\sum_{\beta=1}^{\rho}\left[2n_\beta\omega_{\alpha\beta}(X)+2n^*_\beta\omega^*_{\alpha\beta}(X)\right], \tag{11}$$

где n_β и n^*_β — целые числа. (Аналогичные результаты справедливы для $\eta_{\alpha\beta}(X)$ и $\eta^*_{\alpha\beta}(X)$.)

Как следует из классических теорем Фукса [217], функции $\omega_{\alpha\beta}(X), \ldots$, рассматриваемые как функции от x (или от y или z), удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению, коэффициенты которого — алгебраические функции от x, y, z.

Следуя Вейерштрассу, определим в $\mathfrak{p}=\mathfrak{r}-\mathfrak{s}-\mathfrak{t}$ (см. стр. 100) нормальные интегралы первого и второго рода, а именно:

$$J(\xi, X)_\alpha=\int\limits_{\alpha_0(X)}^{\xi(X)} H(\xi', X)_\alpha d\xi', \quad J^*(\xi, X)_\alpha=\int\limits_{\alpha_0(X)}^{\xi(X)} H^*(\xi', X)_\alpha d\xi', \tag{12}$$

$$\alpha=1, 2, \ldots, \rho.$$

Аналогично определяются интегралы третьего рода. Функции (12), кроме особенностей на $\mathfrak{s}$, могут иметь особенности на окружностях

$$\mathfrak{P}(\zeta_0) \text{ и } \mathfrak{P}(\zeta_1) \tag{13}$$

[$\mathfrak{P}(\zeta_0)$ определяется формулой (6.10)].

Теорема 7.2. *Интеграл вида* (6.9) *с рациональной ассоциированной функцией f может быть представлен как сумма нормальных интегралов первого, второго и третьего рода, соответствующих римановой поверхности $\mathfrak{W}(X)$ функции $[R(\xi, X)]^{1/2}$, введенной в* (3). *А именно,* (6.9) *можно представить в* *форме*

$$\sum_{\nu=1}^{r} C_\nu(X)\left\{J\left[\xi_1(X);\ \xi_\nu^{(1)}(X),\ \xi_\nu^{(0)}(X);\ X\right]-\right.$$

$$\left.-J\left[\xi_0(X);\ \xi^{(1)}(X),\ \xi^{(0)}(X);\ X\right]\right\}-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{f}\left\{g_\alpha^*(X)\left[J(\xi_1(X);\ X)_\alpha-J(\xi_0(X);\ X)_\alpha\right]+\right.$$

$$\left.+g_\alpha(X)\left[J^*(\xi_1(X);\ X)_\alpha-J^*(\xi_0(X);\ X)_\alpha\right]\right\}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\left[F_\nu(\xi_1(X);\ X)-F_\nu(\xi_0(X);\ X)\right]. \tag{14}$$

Здесь $\xi_k(X)=[\zeta_k-e_0(X)]^{-1}$, $k=0,\ 1$ *и коэффициенты* $C_\nu(X)$, $g_\alpha(X)$, $g_\alpha^*(X)$ *и* F_ν — *алгебраические функции от* x, y, z. *В точках* $\zeta_\nu^{(1)}(X)$, $\zeta_\nu^{(0)}(X)$ *интегралы третьего рода имеют логарифмическую бесконечность.* См. [66] и [25, стр. 243].

Введение тета-функций и представление интегралов второго и третьего рода с помощью этих функций через интегралы первого рода является одним из значительных достижений теории алгебраических функций. Интересно, что эти методы можно также применить к рассматриваемым классам гармонических функций трех переменных и получить соответствующие результаты. Мы вводим тета-функции $\Theta(u_1,\ \ldots,\ u_\rho;\ X)$ от ρ переменных $u_1,\ \ldots, u_\rho$, $\rho=3N-1$, которые зависят от точки $X=(x,\ y,\ z)$ как от параметра. При рассмотрении подкласса $S(E,\ \zeta_0,\ \zeta_1)$, определенного выше, мы можем выразить каждую функцию $h(X)$, принадлежащую этому классу, в замкнутой форме; полученные выражения включают только алгебраические и логарифмические функции, тета-функции и их производные, где аргументы тета-функций $u_1,\ \ldots,\ u_\rho$ заменены линейными комбинациями интегралов $J(\xi,\ X)_\alpha$ с коэффициентами — алгебраическими функциями от x, y, z. Подробности см. в работе [25, стр. 245 и далее].

[3, 5, 7, 9, 25, 28, 30, 33, 37, 38, 66, 103, 125, 126, 155, 158, 198, 199, 204—206, 208, 211, 217, 226, 235]

Глава III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Распространяя метод, использованный в предыдущих главах для уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными и для уравнения Лапласа с тремя независимыми переменными, мы изучим в этой главе интегральные операторы, преобразующие функции двух переменных в решения некоторых классов уравнений с частными производными, а именно (0.1.8а), (0.1.8б), (0.1.8в), см. стр. 16.

§ 1. Интегральный оператор, порождающий решения уравнения $\Delta_3\psi + A(r^2)X\cdot\nabla\psi + C(r^2)\psi = 0$

Теорема 1.1. *Пусть* $H(r,\tau)$ *удовлетворяет уравнению*

$$(1-\tau^2)H_{r\tau}-\tau^{-1}(1+\tau^2)H_r+r\tau(H_{rr}+2r^{-1}H_r+BH)=0 \tag{1}$$

для $|\tau|\leqslant 1$ *и* $0\leqslant r<r_0$ (r_0 — *положительная постоянная*), *где*

$$B=-\frac{3}{2}A-\frac{1}{2}rA_r-\frac{1}{4}r^2A^2+C. \tag{2}$$

Предположим, что отношение $H_r/r\tau$ *непрерывно в точке* $\tau=r=0$. *Пусть*

$$E(r,\tau)=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^r Ar\,dr\right)H(r,\tau) \tag{3}$$

и пусть функция $f(w,\zeta)$ *аналитична по комплексным переменным* w, ζ *для* $w\in\mathfrak{U}^2(0)$ *и* $|\zeta|\leqslant 1$. *Тогда* *функция* $\psi(X)$, *определенная формулой*[1])

$$\psi(X)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\int\limits_{\tau=-1}^{1}E(r,\tau)f(u(1-\tau^2),\zeta)\,d\tau\frac{d\zeta}{\zeta},\tag{4}$$

удовлетворяет уравнению (0.1.8а) *в окрестности начала координат.*

Доказательство. Отметим сначала несколько простых тождеств:

$$\nabla u\cdot\nabla u=0;\quad \nabla u\cdot\nabla E=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial E}{\partial r}=\frac{u}{r}\frac{\partial E}{\partial r},\qquad E\equiv E(r,\tau);$$

$$X\cdot\nabla E=r\frac{\partial E}{\partial r};\qquad X\cdot\nabla u=u\tag{5}$$

и

$$\nabla f((1-\tau^2)u,\zeta)=(1-\tau^2)f'((1-\tau^2)u,\zeta)\nabla u=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\tau-\frac{1}{\tau}\right)\frac{\nabla u}{u}\frac{\partial f}{\partial\tau},\tag{6}$$

где f' означает производную по первому аргументу.

Из формулы (4) получаем

$$\nabla\psi=\frac{1}{2\pi i}\int\int\{f\nabla E+E\nabla f\}\,d\tau\frac{d\zeta}{\zeta},\qquad \int\int=\int\limits_{|\zeta|=1}\int\limits_{\tau=-1}^{1}.\tag{7}$$

Заменим ∇f в (7) последним выражением в (6), проинтегрируем затем по частям и, приняв во внимание равенство нулю выражения

$$\left(\tau-\frac{1}{\tau}\right)$$

в концах интервала интегрирования, получим

$$\nabla\psi=\frac{1}{2\pi i}\int\int f\left\{\nabla E-\frac{\nabla u}{u}\frac{\partial\frac{1}{2}\left(\tau-\frac{1}{\tau}\right)E}{\partial\tau}\right\}d\tau\frac{d\zeta}{\zeta}.\tag{8}$$

Берем дивергенцию от обеих частей равенства (8), снова заменяем ∇f по формуле (6), интегрируем по частям и

---

[1]) Как и в предыдущей главе, $u=x+\frac{iy+z}{2}\zeta+\frac{iy-z}{2}\zeta^{-1}$.

используем первые два равенства из (5). Мы получаем

$$\Delta_3\psi = \frac{1}{2\pi i}\int\int f\left\{\Delta_3 E - \frac{\partial\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right)\frac{1}{r}E_r}{\partial\tau}\right\}d\tau\,\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (9)$$

Далее, преобразуя левую часть уравнения (0.1.8а) при помощи формул (4), (8), (9) и принимая во внимание последние два уравнения из (5), находим

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{(1)}(\psi) &\equiv \Delta_3\psi + A(r^2)X\cdot\nabla\psi + C(r^2)\psi \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2\pi i}\int\int f\left\{\Delta_3 E - \frac{\partial\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right)\frac{1}{r}E_r}{\partial\tau} + \right. \\ &\quad \left. + ArE_r - A\frac{\partial\frac{1}{2}\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right)E}{\partial\tau} + CE\right\}d\tau\,\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (10)\end{aligned}$$

Наконец, учитывая уравнения (1), (2), (3), приходим к выводу, что выражение в фигурных скобках под знаком интеграла в (10) тождественно равно нулю. Этим доказательство заканчивается.

Чтобы придать смысл этой теореме, нужно доказать существование (нетривиальной) функции H, удовлетворяющей требуемым условиям. Рассмотрим разложение

$$H(r, \tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r)\,\tau^{2n} \qquad (11)$$

и подставим его в уравнение (1). Объединяя все члены с одной и той же степенью τ и приравнивая коэффициенты нулю, получаем

$$\frac{dc_1}{dr} + rB = 0, \qquad (12а)$$

$$\begin{aligned}(2n-1)\frac{dc_n}{dr} + r\frac{d^2c_{n-1}}{dr^2} - (2n-3)\frac{dc_{n-1}}{dr} + \\ + rBc_{n-1} = 0, \quad n > 1. \qquad (12б)\end{aligned}$$

Для выполнения поставленного в теореме условия непрерывности отношения $H_r/r\tau$ в точке $r = \tau = 0$ мы должны потребовать, чтобы имели место равенства

$$c_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (13)$$

Тогда очевидно, что функции $c_n(r)$ однозначно определены и находятся при помощи последовательных квадратур. Элементарные оценки [1]) показывают, что ряд

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(r)|$$

сходится равномерно и абсолютно для $|r|\leqslant R$, где R — любая положительная постоянная. Отсюда следует, что ряд (11) определяет функцию $H(r, \tau)$, непрерывную для всех τ в круге $|\tau|\leqslant 1$ и целую по r для каждого такого значения τ.

§ 2. Разложение в ряд решений уравнения $\Delta_3\psi+A(r^2)X\cdot\nabla\psi+C(r^2)\psi=0$

Мы скажем, что функция $g(\theta, \varphi)$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, *удовлетворяет условию* L, если она разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям Лежандра

$$g(\theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_{n0}P_{n,0}(\cos\theta)+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)P_{n,m}(\cos\theta)\right]. \qquad (1)$$

(Коэффициенты A_{nm}, B_{nm} выражаются, разумеется, в виде известных интегралов, которые получаются, если принять во внимание свойства ортогональности членов написанного выше ряда.)

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathfrak{S}$ — *сферическая поверхность* $r=\rho$ *и* $\mathfrak{s}$ — *внутренность* $\mathfrak{S}$. *Предположим, что существует положительная функция* $A(r, \theta, \varphi)$, *непрерывная в* $\mathfrak{s}$ *и такая, что всякая функция* $\psi(r, \theta, \varphi)$, *удовлетворяющая уравнению* (0,1,8a) *в* $\mathfrak{s}$ *и непрерывная в* $\mathfrak{s}+\mathfrak{S}$, *удовлетворяет также неравенству*

$$|\psi(r, \theta, \varphi)|\leqslant A(r, \theta, \varphi)\max_{\mathfrak{S}}|\psi(\rho, \theta, \varphi)|. \qquad (2)$$

[1]) Подробности можно найти в статье [26].

Предположим далее, что $\psi(\rho, \theta, \varphi)$ удовлетворяет условию L. Тогда ψ может быть разложена в следующий ряд, равномерно сходящийся на каждом компактном подмножестве из $\mathfrak{S}$:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n J_n^*(r)}{\rho^n J_n^*(\rho)} \Bigg[A_{n0} P_{n,0}(\cos\theta) + \\ + \sum_{m=1}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) P_{n,m}(\cos\theta) \Bigg], \tag{3}$$

где

$$J_n^*(r) = \int_{-1}^{+1} E(r, \tau)(1-\tau^2)^n \, d\tau. \tag{4}$$

Доказательство. Для любого натурального числа N пусть $S_N(r, \theta, \varphi)$ обозначает N-ю частную сумму ряда (3). Из § 1 видно, что S_N удовлетворяет уравнению (0.1.8а), стр. 16, всюду внутри $\mathfrak{S}$ и непрерывна в $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}$. Так как $\psi(\rho, \theta, \varphi)$ удовлетворяет условию L, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что для всех θ, φ справедливо неравенство

$$|\psi(\rho, \theta, \varphi) - S_N(\rho, \theta, \varphi)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Из неравенств (5) и (2) (в последнем мы заменяем ψ на $\psi - S_N$) мы получаем

$$|\psi(r, \theta, \varphi) - S_N(r, \theta, \varphi)| < \varepsilon A(r, \theta, \varphi), \quad r < \rho. \tag{6}$$

Если точка P принадлежит любому компактному подмножеству $\mathfrak{S}_1$ из $\mathfrak{S}$, то мы имеем

$$|\psi(P) - S_N(P)| < \varepsilon M, \tag{7}$$

где

$$M = \max_{P \in \mathfrak{S}_1} A(P) < \infty. \tag{8}$$

Из (7) следует равномерная сходимость ряда (3) к сумме $\psi(r, \theta, \varphi)$, и доказательство закончено.

Здесь подразумевалось, что величины $J_n^*(\rho)$ не равны нулю. Однако это немедленно следует из предположений теоремы. Что касается существования функции $A(r, \theta, \varphi)$, обладающей требуемыми свойствами, то сразу видно, что достаточным условием для этого является существование функции Грина уравнения (0.1.8а) для шара $\mathfrak{S}$. Тогда за функцию A можно принять интеграл по $\mathfrak{S}$ нормальной компоненты $\left|\frac{\partial G}{\partial n}\right|$ градиента этой функции Грина.

Сформулируем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть функция* $\psi(r, \theta, \varphi)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1, *так что ее можно разложить в ряд вида* (3). *Пусть* T — *ряд, получаемый из* (3) *при помощи разложения* $\overset{*}{J_n}(r)$ *в ряды по степеням* r *и перестановки членов правой части* (3) *по степеням* r. *Ряд* T *сходится во внутренности* $\mathfrak{S}$ *к сумме* $\psi(r, \theta, \varphi)$.

Детали доказательства и более подробное изучение свойств решений уравнения (0.1.8а) читатель найдет в статье [26].

Как и в случае дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными, важно с одним и тем же дифференциальным уравнением с тремя независимыми переменными связывать различные операторы. Здесь мы коротко рассмотрим полезное видоизменение представления (1.4).

Если функция $f(u, \zeta)$ аналитична по u в некоторой окрестности точки $u=0$ для всех ζ, то очевидно, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} f(u(1-\tau^2), \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

определяет функцию $H(X(1-\tau^2))$, где $H(X)$ гармонична и регулярна в начале координат $X=0$. Таким образом, представление (1.4) можно заменить представлением

$$\psi(X)=\int\limits_{\tau=-1}^{1} E(r, \tau)H(X(1-\tau^2))\,d\tau. \tag{9}$$

Далее, ко всякой гармонической функции $G(X)$, регулярной в начале координат, мы можем применить оператор p_3

$$\Phi(X) = \mathrm{p}_3(G(X)) =$$
$$= G(X) + \sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)}(r^2) \int_0^1 (1-\sigma^2)^{n-1} \sigma^2 G(\sigma^2 X)\, d\sigma, \tag{10}$$

где

$$B^{(n)}(r^2) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} c_n(r), \tag{11}$$

а $c_n(r)$ определены в § 1 [см. (1.12а), (1.12б), (1.13)].

Этот новый оператор имеет замечательное свойство, аналогичное тому, которым обладают операторы первого рода в случае двух независимых переменных. Напомним (см. гл. I), что ассоциированная функция может быть получена из решения дифференциального уравнения с помощью формулы обращения, которая почти не зависит от коэффициентов этого дифференциального уравнения. В случае оператора p_3 формула обращения может быть получена следующим образом. Пусть функция $G(X) = G(X, Z, Z^*)$ [см. (II. 2.12)] гармонична и регулярна в начале координат, и пусть решение $\Phi(X)$ уравнения (0.1.8а) определено по формуле (10). Тогда нетрудно показать, что из формулы (10) и из определения величин $B^{(n)}$ и c_n следует равенство

$$\Phi\left(2\sqrt{ZZ^*}, Z, Z^*\right) = G\left(2\sqrt{ZZ^*}, Z, Z^*\right), \tag{12}$$

т. е. ассоциированная функция $G(X)$ и решение $\Phi(X)$ уравнения (0.1.8а) совпадают в *характеристическом пространстве*

$$X = 2\sqrt{ZZ^*} \quad (\text{т. е. при } x^2+y^2+z^2=0).$$

Оператор (10) позволяет получить обобщения многих результатов из § II. 2 — II. 5 на случай дифференциального уравнения $\mathrm{L}^{(1)}(\psi) = 0$.

§ 3. Интегральный оператор, порождающий решения уравнения $\Delta_3\psi + F(y, z)\psi = 0$

В этом параграфе мы кратко опишем интегральный оператор для уравнений типа (0.1.8б). Подробное изучение этого оператора можно найти в статье [39], к которой мы отсылаем читателя за доказательствами и дальнейшими деталями.

Основной является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $g(Z)$ — аналитическая функция комплексного переменного Z, регулярная в односвязной области $\mathfrak{G}$ плоскости Z, звездной по отношению к началу координат. Пусть, далее* [1]),

$$\varphi_n(X, Z, Z^*; g) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} X^{n-2\nu}\psi^{(n, n-2\nu)}(Z, Z^*; g), \tag{1}$$

$$\psi^{(n, n)}(Z, Z^*; g) = g(Z) + \sum_{p=1}^{\infty} q^{(n, n, p)}(Z, Z^*)\,\mathrm{L}_p(g), \tag{2а}$$

$$\psi^{(n, n-2\nu)}(Z, Z^*; g) = \sum_{p=\nu}^{\infty} q^{(n, n-2\nu, p)}(Z, Z^*)\,\mathrm{L}_p(g), \quad \nu = 1, 2, \ldots, [n/2], \tag{2б}$$

$$\mathrm{L}_p(g) = \int_0^Z\int_0^{Z_1}\ldots\int_0^{Z_{p-1}} g(Z_p)\,dZ_p\ldots dZ_1 = \int_0^Z \sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu^{(p)} Z^{p-\nu-1}\zeta^{\nu}\, g(\zeta)\,d\zeta, \tag{2в}$$

[1]) Напомним, что $[n/2] = n/2$, если n четно, и $[n/2] = (n-1)/2$, если n нечетно. Кроме того, $X = x$, $Z = \frac{z+iy}{2}$, $Z^* = -\frac{z-iy}{2}$. Как упоминалось выше, $F(y, z)$ является *целой* функцией обоих перемениых.

где $q^{(n,\, n-2\nu,\, p)}(Z, Z^*)$ — *решения системы*

$$q^{(n,\, n,\, 0)} = 1, \quad q^{(n,\, n,\, p)}_{ZZ^*} + q^{(n,\, n,\, p+1)}_{Z^*} - Fq^{(n,\, n,\, p)} = 0, \qquad (3)$$

$$p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\left.\begin{aligned} &(n+2-2\nu)(n+1-2\nu)\, q^{(n,\, n+2-2\nu,\, \nu-1)} - \\ &\qquad - q^{(n,\, n-2\nu,\, \nu)}_{Z^*} = 0, \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ [n/2], \\ &(n+2-2\nu)(n+1-2\nu)\, q^{(n,\, n+2-2\nu,\, p)} - \\ &\qquad - q^{(n,\, n-2\nu,\, p)}_{ZZ^*} - q^{(n,\, n-2\nu,\, p+1)}_{Z^*} + Fq^{(n,\, n-2\nu,\, p)} = 0, \\ &\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ [n/2], \quad p = \nu,\ \nu+1,\ \nu+2,\ \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (4а)$$

$$q^{(n,\, n-2\nu,\, p)}(Z, 0) = 0, \qquad (4б)$$

$$\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ [n/2], \quad p = \nu,\ \nu+1,\ \nu+2,\ \ldots,$$

и где постоянные $a_\nu^{(p)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$, *удовлетворяют рекуррентным формулам*[1])

$$a_\nu^{(p)} = (p - \nu - 1)^{-1}\, a_\nu^{(p-1)}, \quad \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-2, \qquad (5а)$$

$$a_{p-1}^{(p)} = -\sum_{\mu=0}^{p-2} (p - \mu - 1)^{-1}\, a_\mu^{(p-1)}. \qquad (5б)$$

Тогда операторы $\varphi_n(X, Z, Z^*; g)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *порождают решения дифференциального уравнения* (0.1.8б), *регулярные во всех* (*действительных*) *точках* (x, y, z), *для которых* $Z \in \mathfrak{G}$[2]). *Эти функции обладают свойством*

$$\varphi_n(X, Z, 0; g) = X^n g(Z), \qquad (6а)$$

$$\varphi_n(X, 0, Z^*; g) = X^n g(0). \qquad (6б)$$

Функция $g(Z)$ называется *ассоциированной с интегральным оператором* φ_n.

---

[1]) Формулы (5а) и (5б) в [39] следует изменить, как здесь указано.

[2]) В действительности справедлив намного более сильный результат, а именно, что φ_n — аналитические функции комплексных переменных X, Z, Z^*, если только выполнены условия $Z \in \mathfrak{G}$, $Z^* \in \mathfrak{G}^*$. Заметим, что на переменное X не наложено никаких ограничений.

С определенными формулой (1) операторами φ_n тесно связаны операторы τ_n, порождающие *действительные* решения уравнения (0.1.8б) (т. е. функции, действительные при действительных значениях x, y, z, иначе говоря, при действительном X и $Z^* = -\bar{Z}$). Определим операторы τ_n следующим образом:

$$\tau_n(X, Z, Z^*; g(Z)) = \frac{1}{2}[\varphi_n(X, Z, Z^*; g(Z)) + \\ + \bar{\varphi}_n(X, -Z^*, -Z; \bar{g}(-Z^*))]. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что оператор τ_n в самом деле порождает решения уравнения (0.1.8б), действительные в указанном выше смысле. Очевидно, для любого конечного множества функций $g_n(Z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, сумма

$$S(X, Z, Z^*) = \sum_{n=0}^{N} \tau_n(X, Z, Z^*; g_n(Z)) \quad (8)$$

является действительным решением уравнения (0.1.8б).

Интересно, что можно применить операторы τ_n для обобщения важной теоремы об особенностях аналитической функции одного комплексного переменного. Теорему, о которой идет речь, можно сформулировать следующим образом. Пусть $g(Z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu Z^\nu$ имеет конечный радиус сходимости r. Тогда точка $re^{i\alpha}$ на окружности круга сходимости является особой точкой функции $g(Z)$ тогда и только тогда, когда величины

$$B_\mu = (-1)^\mu \sum_{\lambda=0}^{\mu} \binom{\mu}{\lambda} A_\lambda r^\lambda e^{i\lambda\alpha}$$

удовлетворяют условию $\overline{\lim_{\mu\to\infty}} (|B_\mu|)^{1/\mu} = 2$ (см. [60, стр. 36]). Справедливо следующее обобщение этой теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть действительное решение* $S(X, Z, Z^*)$ *уравнения* (0.1.8б) *задается формулой* (8), *так что* $S(X, Z, Z^*)$ *разлагается в ряд*

$$S(X, Z, Z^*) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{nmp} X^n Z^m Z^{*p}, \tag{9}$$

$$A_{nmp} = \overline{A}_{npm},$$

и пусть функция $g_n(Z)$, *фигурирующая в формуле* (8), *действительна при* $Z = 0$. *Пусть, далее, для последовательности* $\{A_{nm0}\}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, *имеем*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} (|A_{nm0}|)^{1/m} = r = \text{const}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{10}$$

Тогда (прямые) линии $Z = re^{i\alpha_n}$ *являются особыми линиями функции* $S(X, Z, Z^*)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} (|B_{n\mu 0}|)^{1/\mu} = 2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{11}$$

где $B_{n\mu 0}$ *связаны с* $A_{n\mu 0}$ *соотношением*

$$B_{n\mu 0} = (-1)^{\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \binom{\mu}{\lambda} A_{n\lambda 0} r^{\lambda} e^{i\lambda\alpha_n} \tag{12}$$

и α_n *различны.*

Доказательство этой теоремы основывается на том (подробности см. в [39]), что особенности оператора $\tau_n(X, Z, Z^*; g_n(Z))$ совпадают с особенностями

$$g_n(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm0} Z^m, \tag{13}$$

и на применении теоретико-функциональной теоремы, цитированной выше.

Изучение особенностей решений уравнения (0.1.8б) может быть продвинуто далее. На функции вида (8) могут быть „перенесены" теоремы Адамара о расположении и характере особенностей аналитической функции в зависимости от коэффициентов ее разложения в ряд. Полюсы функции $g_n(Z)$ дают особенности *типа полюса* для $S(X, Z, Z^*)$, а расположение особенностей $S(X, Z, Z^*)$ может быть выражено через коэффициенты $g_n(Z)$.

§ 4. Второй интегральный оператор, порождающий решения уравнения $\Delta_3\psi + F(y, z)\psi = 0$

В этом параграфе мы определим интегральный оператор, отличный от рассмотренного в предыдущем параграфе, который также порождает решения уравнения (0.1.8б). Подробно свойства этого оператора приведены в [38], куда мы отсылаем читателя за доказательствами сформулированных здесь утверждений.

Введем, как и ранее, переменные

$$X = x, \quad Z = \frac{1}{2}(z + iy) \quad \text{и} \quad Z^* = -\frac{1}{2}(z - iy)$$

и выразим функцию $F(y, z)$ из формулы (0.1.8б) через Z и Z^*; мы также используем символ F для этой новой функции. Уравнение (0.1.8б) тогда примет вид

$$\psi_{XX} - \psi_{ZZ^*} + F(ZZ^*)\psi = 0. \tag{1}$$

Найдем частные решения уравнения (1), являющиеся полиномами от X, следующим образом. Пусть $\tilde{\gamma}(Z, Z^*)$ — любое решение уравнения

$$-\tilde{\gamma}_{ZZ^*} + F\tilde{\gamma} = 0. \tag{2}$$

Определим полиномы $P^{(N, k, \alpha)}$ так:

$$P^{(N, k, k-2\nu)} \equiv \binom{N}{k-\nu}\binom{k-\nu}{\nu} Z^{N-k+\nu} Z^{*\nu}, \tag{3}$$

$$N = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots, 2N;$$
$$\nu = k, k-2, \ldots, k - 2[k/2].$$

Пусть функции $\Pi^{(N, k, \alpha)}(Z, Z^*)$ удовлетворяют уравнениям

$$-N\tilde{\gamma}_{Z^*}P^{(N-1, k, k)} - \Pi^{(N, k, k)}_{ZZ^*} + F\Pi^{(N, k, k)} = 0, \tag{4a}$$

$$-N\tilde{\gamma}_{Z^*}P^{(N-1, k, \nu)} - N\tilde{\gamma}_Z P^{(N-1, k-2, \nu)} +$$
$$+ (\nu+2)(\nu+1)\Pi^{(N, k, \nu+2)} - \Pi^{(N, k, \nu)}_{ZZ^*} + F\Pi^{(N, k, \nu)} = 0,$$
$$\nu < k. \tag{4б}$$

Тогда непосредственным вычислением находим, что функции

$$\psi^{(N, k)}(X, Z, Z^*) = \frac{\tilde{\gamma}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} u^N \zeta^{-(N-k)} \frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{\nu=0}^{[k/2]} \Pi^{(N, k, k-2\nu)}(Z, Z^*) X^{k-2\nu} \quad (5)$$

(где, как и прежде, $u = Z\zeta + X + Z^*\zeta^{-1}$) являются (комплексными) решениями уравнения (0.1.8б). Следует заметить, что представление (5) служит естественным обобщением представления для гармонических функций, заданного равенством (II. 3.2)[1]).

Существует много способов получения функций $\tilde{\gamma}$ и $\Pi^{(N, k, \alpha)}$, удовлетворяющих уравнениям (2) и (4). Легко может быть получен некоторый частный класс решений. Частное решение уравнения (2), которое мы обозначим через $\gamma(Z, Z^*)$, определяется формулой

$$\gamma(Z, Z^*) = 1 + \int\limits_0^Z \int\limits_0^{Z^*} F\, dZ_1\, dZ_1^* + \int\limits_0^Z \int\limits_0^{Z^*} F \int\limits_0^{Z_1} \int\limits_0^{Z_1^*} F\, dZ_2\, dZ_2^*\, dZ_1\, dZ_1^* + \ldots \quad (6)$$

Что касается уравнений (4а), (4б), то их частные решения можно получить, если заметить, что оба эти уравнения имеют вид

$$-\Pi_{ZZ^*} + F(Z, Z^*)\Pi + T(Z, Z^*) = 0; \quad (7)$$

для простоты обозначений индексы функций Π и T опущены. За исключением члена T, (7) имеет тот же вид, что и (2), и решение уравнения (7) легко может быть

---

1) Фигурирующая в качестве верхнего предела суммирования величина $[(N-k)/2]$ в формулах (9) и (10) работы [38, стр. 146] должна быть заменена на $[k/2]$. Далее, в строке 7 на стр. 146 следует заменить $P^{(N-1, k-2, N-k-2\nu)}$ на $P^{(N-1, k-2, k-2\nu)}$.

построено по аналогии с формулой (6)

$$\Pi = \int_0^Z \int_0^{Z^*} T\, dZ_1\, dZ_1^* + \int_0^Z \int_0^{Z^*} F \int_0^{Z_1} \int_0^{Z_1^*} T\, dZ_2\, dZ_2^*\, dZ_1\, dZ_1^* +$$

$$+ \int_0^Z \int_0^{Z^*} F \int_0^{Z_1} \int_0^{Z_1^*} F \int_0^{Z_2} \int_0^{Z_2^*} T\, dZ_3\, dZ_3^*\, dZ_2\, dZ_2^*\, dZ_1\, dZ_1^* + \ldots \tag{8}$$

Легко показать, что решения $\psi^{(N,\,k)}$, определенные формулой (5), обладают следующим свойством:

$$\psi^{(N,\,k)}(X,\,Z,\,0) = \binom{N}{k} X^k Z^{N-k}. \tag{9}$$

Решения (5) можно обобщить следующим образом. Пусть функция $f(Z)$ аналитична в точке $Z = 0$, и пусть система операторов

$$\Gamma^{(m,\,m-2k)} \equiv \Gamma^{(m,\,m-2k)}(Z,\,Z^*;\,f),$$

$$m = 0,\,1,\,2,\,\ldots; \qquad k = 0,\,1,\,2,\,\ldots,\,[m/2],$$

удовлетворяет уравнениям

$$-\frac{1}{m!} f^{(m+1)}(Z)\,\gamma_{Z^*} - \Gamma^{(m,\,m)}_{ZZ^*}(Z,\,Z^*;\,f) +$$

$$+ F\Gamma^{(m,\,m)}(Z,\,Z^*;\,f) = 0, \tag{10а}$$

$$\frac{-1}{(m-2k)!\,(k-1)!} f^{(m-k)}(Z)\,\gamma_Z {Z^*}^{k-1} -$$

$$-\frac{1}{(m-2k)!\,k!} f^{(m-k+1)}(Z)\,\gamma_{Z^*} {Z^*}^{k} +$$

$$+(m-2k+2)(m-2k+1)\Gamma^{(m,\,m-2k+2)}(Z,\,Z^*;\,f) -$$

$$-\Gamma^{(m,\,m-2k)}_{ZZ^*}(Z,\,Z^*;\,f) + F\Gamma^{(m,\,m-2k)}(Z,\,Z^*;\,f) = 0, \tag{10б}$$

$$k = 1,\,2,\,\ldots,\,[m/2].$$

Тогда оператор $T_m(X, Z, Z^*; f)$ (для любого целого $m \geqslant 0$), определяемый равенством

$$T_m(X, Z, Z^*; f) = \gamma \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{f^{(m-k)}(Z)\, X^{m-2k} Z^{*k}}{(m-2k)!\, k!} + \sum_{k=0}^{[m/2]} X^{m-2k} \Gamma^{(m,\, m-2k)}(Z, Z^*; f), \tag{11}$$

удовлетворяет уравнению (0.1.8б).

Интегральный оператор (11) позволяет в некоторых случаях определить расположение и характер особенностей решения ψ уравнения (1), зная подпоследовательность $\{a_{mn0}\}$, $m = 0, 1, \ldots, M$, $n = 0, 1, \ldots$, коэффициентов ряда

$$\psi(X, Z, Z^*) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{mnp} X^m Z^n Z^{*p} \tag{12}$$

для этого решения (см. [38]). Этот результат обобщен на случай подпоследовательности $\{a_{mnp}\}$, где $p > 0$ фиксировано, см. [125].

Наконец, следует упомянуть о тесной связи операторов, рассмотренных в этом и предыдущем параграфах. Можно показать, что

$$\varphi_n(X, Z, Z^*; f^{(n)}(Z)/n!) \equiv T_n(X, Z, Z^*; f),$$

если $\Gamma^{(n,\, n-2\nu)}(Z, 0; f) = 0$ и $\Gamma^{(n,\, n-2\nu)}(0, Z^*; f) = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, [n/2]$.

§ 5. Интегральный оператор, порождающий решения уравнения $\psi_x + \psi_{yy} + \psi_{zz} + F(y, z)\psi = 0$

В этом параграфе кратко описывается интегральный оператор, порождающий решения параболического уравнения (0.1.8в), т. е. уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \widetilde{F}(y, z)\psi = 0, \tag{1}$$

где $\tilde{F}$ — аналитическая функция для всех значений y и z (действительных и комплексных)[1]). Делая обычную замену переменных

$$X = x, \quad Z = \frac{1}{2}(iy + z), \quad Z^* = \frac{1}{2}(iy - z), \tag{2}$$

преобразуем уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial\psi}{\partial X} - \frac{\partial^2\psi}{\partial Z\,\partial Z^*} + F(Z, Z^*)\,\psi = 0, \quad F(Z, Z^*) \equiv \tilde{F}(y, z). \tag{3}$$

Обозначим через K_{I} *множество функций* $\psi(X, Z, Z^*)$, *удовлетворяющих уравнению* (3) *в некоторой окрестности начала координат и обладающих разложением в ряд Тейлора*

$$\psi(X, Z, Z^*) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} A_{nmr} X^n Z^m Z^{*r}, \tag{4}$$

в котором все коэффициенты A_{n0r}, $n \geqslant 0$, $r \geqslant 1$, *равны нулю.*

Для определения упомянутого выше интегрального оператора введем следующие сокращенные обозначения.

Пусть $g(X, Z)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности точки $X = Z = 0$, пусть

$$g_1^{(k)} = \frac{\partial^k g(X, Z_1)}{\partial X^k},$$

[1]) Подробности читатель найдет в работе [37]. В этой статье исследуются одновременно уравнения типа (0.1.8б) и (0.1.8в), так как оказалось, что они допускают интегральные операторы весьма сходной структуры.

В [37] необходимо исправить следующие опечатки: в формуле (8) на стр. 466 следует заменить $T^{(sk)}$ на $T_\nu^{(sk)}$; в формуле (19) на стр. 468 перед вторым членом подинтегрального выражения пропущено F; в строке 16 на стр. 470 следует заменить $s = 1$ на $\nu = 1$; в строке 11 на стр. 478 нужно заменить intersection $X = \mathrm{const}$ на plane $X = \mathrm{const}$. Наконец, во всех ссылках, относящихся к этой статье, номера страниц начинаются с цифры 4.

а F_μ означает $F(Z_\mu, Z_\mu^*)$, где $F(Z, Z^*)$ — функция, определенная в формуле (3). Далее мы полагаем

$$\delta_\nu=\prod_{\mu=1}^{\nu} dZ_\mu\, dZ_\mu^*, \qquad \nu\geqslant 1,$$
$$T_\nu^{(k)}(\varepsilon_\nu,\ \varepsilon_{\nu-1},\ \ldots,\ \varepsilon_1)=$$
$$=\int_0^{Z^*}\int_0^{Z} F_\nu^{\varepsilon_\nu}\int_0^{Z_\nu^*}\int_0^{Z_\nu} F_{\nu-1}^{\varepsilon_{\nu-1}}\ldots\int_0^{Z_2^*}\int_0^{Z_2} F_1^{\varepsilon_1}g_1^{(k)}\delta_\nu, \qquad \nu>1, \tag{5}$$

где ε_j равны 0 или 1, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu$, и справедливо равенство

$$k+\sum_{j=1}^{\nu}\varepsilon_j=\nu. \tag{6}$$

[В формуле (5) k может быть взято равным любому из чисел $0,\ 1,\ \ldots,\ \nu$.]

Пусть

$$J_\nu^{(k)}=\sum T_\nu^{(k)}(\varepsilon_\nu,\ \varepsilon_{\nu-1},\ \ldots,\ \varepsilon_1), \tag{7}$$

где суммирование распространено на все комбинации ε_j, удовлетворяющие равенству (6). Заметим, что в (5) $T_\nu^{(k)}$ определены только для $\nu>1$; то же самое справедливо для $J_\nu^{(k)}$ в (7). Определим величины $J_\nu^{(k)}$ для $\nu=0,\ 1$ следующим образом:

$$J_0^{(0)}=g(X,\ Z),\quad J_1^{(0)}=\int_0^{Z}\int_0^{Z^*} g(X,\ Z_1)\delta_1,$$
$$J_1^{(1)}=\int_0^{Z}\int_0^{Z^*} F_1 g_1^{(1)}\delta_1. \tag{8}$$

Наконец, положим $\psi^{(n)}(X,\ Z,\ Z^*)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k=0}^{\nu} J_\nu^{(k)}$.

Используя эти определения, мы можем ввести оператор, порождающий решения уравнения (1), принадлежащие классу K_1. Определение и основные свойства этого оператора даются в следующих двух теоремах, которые мы приводим без доказательства.

Теорема 5.1. *Пусть дана область*[1] $\mathfrak{D}$ *в пространстве* X, Z, Z^* *и пусть существуют положительные постоянные* A *и* C *и последовательность неотрицательных постоянных* η_k, *такие, что для всех точек из* $\mathfrak{D}$ *выполняются неравенства*

$$|F(Z, Z^*)| \leqslant C, \quad |g^{(k)}| \leqslant Ak!\,\eta_k, \tag{9}$$

а также сходится ряд[2]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|ZZ^*|^n}{n!}\eta_n. \tag{10}$$

Тогда

$$\psi(X, Z, Z^*) = \lim_{n\to\infty} \psi^{(n)}(X, Z, Z^*) = \mathbf{P}[g(X, Z)] \tag{11}$$

существует для всех $(X, Z, Z^*) \in \mathfrak{D}$.

Теорема 5.2. *Если* $\psi = \lim\limits_{n\to\infty} \psi^{(n)}(X, Z, Z^*)$, *причем* $\psi^{(n)}$ *сходятся при* $n\to\infty$ *равномерно в области* $\mathfrak{D}$, *то* ψ *удовлетворяет уравнению* (3) *в* $\mathfrak{D}$ *и дополнительным условиям*

$$\psi(X, Z, 0) = g(X, Z), \quad \psi(X, 0, Z^*) = g(X, 0). \tag{12}$$

[1] Мы предполагаем, что область $\mathfrak{D}$ обладает следующим свойством: всякое пересечение $\mathfrak{D}$ с пространством $X = c_1$, $Z^* = c_2$ (так же, как и с $X = c_3$, $Z = c_4$) является звездной областью. Здесь $c_k = \mathrm{const}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

[2] Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|ZZ^*|^n}{n!}\eta_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|ZZ^*|^n}{C^{n/2}}\eta_n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C^\nu |ZZ^*|^\nu}{\nu!\,(\nu+n)!} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|ZZ^*|^n}{n!}\eta_n\right) e^{C|ZZ^*|},$$

условие сходимости (10) эквивалентно условию, данному в теореме 2.1 на стр. 467 в [37].

Величины $T_\nu^{(k)}(\varepsilon_\nu, \varepsilon_{\nu-1}, \ldots, \varepsilon_1)$ и $J_\nu^{(k)}$, которые используются в определении оператора $\mathbf{P}[g(X, Z)]$ по формуле (11), имеют весьма сложную структуру. Как показано в [37, стр. 469 и далее], по крайней мере в одном важном случае, а именно, когда функция $F(Z, Z^*)$—„вырожденная" (т. е. представляется в виде конечной суммы членов, каждый из которых — произведение целой функции от Z на целую функцию от Z^*), оператор $\mathbf{P}[g(X, Z)]$ можно выразить в виде бесконечного ряда, члены которого содержат *по одному* интегралу.

Одним из важнейших вопросов, возникающих в связи с уравнениями в частных производных, является вопрос о характере особенностей, которыми может обладать решение данного уравнения. Метод интегральных операторов особенно удобен для изучения этого вопроса, ибо во многих случаях можно „превратить" утверждения об особенностях функций, к которым применяется оператор, в утверждения об особенностях соответствующего решения дифференциального уравнения. Иллюстрируем эту идею следующей теоремой, относящейся к рассматриваемому в этом параграфе интегральному оператору $\mathbf{P}[g]$.

Теорема 5.3. *Пусть σ — любое целое положительное число и $\sum_{m=0}^{M} a_m Z^m$ — полином, где a_m — действительные или комплексные постоянные и $a_0 \neq 0$. Пусть $g(X, Z) = \left(X - \sum_{m=0}^{M} a_m Z^m\right)^{-\sigma}$. Тогда решение уравнения* (1)

$$\psi(X, Z, Z^*) = \mathbf{P}[g(X, Z)] \tag{13}$$

[*где* $\mathbf{P}$ *определяется формулой* (11)] *регулярно во всех действительных точках* (x, y, z), $x^2+y^2+z^2<\infty$, *за исключением точек, лежащих на кривой* $\mathfrak{L} \equiv \left[X - \sum_{m=0}^{M} a_m Z^m = 0\right]$.

На самом деле известны некоторые довольно точные результаты о поведении $\mathbf{P}[g(X, Z)]$ в окрестности кривой $\mathfrak{L}$ (см. [37], стр. 476 и далее), но мы не приводим их здесь.

Наконец, рассмотрим коротко связь между коэффициентами A_{nmr} разложения в ряд Тейлора (4) функции $\psi(X, Z, Z^*)$, принадлежащей классу K_1, и особенностями этой функции. Следующая теорема дает обобщение теорем Адамара, связывающих расположение и характер особенностей аналитической функции $f(z)$ с коэффициентами ее ряда Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$. Следует заметить, что в этой теореме говорится лишь об определенной подпоследовательности коэффициентов A_{nmr}, а именно такой, что $r=0$, и ничего не требуется от функции $F(Z, Z^*)$, кроме того, что она регулярна для всех значений Z и Z^*.

Теорема 5.4. *Пусть*

$$g(X, Z) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{M} a_k Z^k - X} \equiv \sum_{\nu=0}^{M-1} \frac{\alpha_\nu(X)}{Z - Z_\nu(X)},$$

где a_k — постоянные, $a_M \neq 0$ и

$$0 < |Z_0(X)| < |Z_1(X)| < \ldots < |Z_{M-1}(X)| < \infty.$$

Предположим, что функция $\psi(X, Z, Z^*) \in K_1$, разлагающаяся в ряд Тейлора (4), *представляется в виде*

$$\psi(X, Z, Z^*) = \mathbf{P}[g(X, Z)] + \varphi(X, Z, Z^*), \tag{14}$$

где функция $\varphi(X, Z, Z^*)$ регулярна при всех (действительных) X и (комплексных) Z и Z^*, $X^2 + |Z|^2 + |Z^*|^2 < \infty$. Пусть

$$b_\mu(X) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n\mu 0} X^n,$$

$$D_{m,k}(X) = \begin{vmatrix} b_m(X) & b_{m+1}(X) & \ldots & b_{m+k}(X) \\ b_{m+1}(X) & \ldots\ldots & \ldots & b_{m+k+1}(X) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m+k}(X) & \ldots\ldots & \ldots & b_{m+2k}(X) \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \left(|D_{m,k}(X)|^{1/m}\right) = 0, \quad k = M+1, M+2, \ldots \tag{16}$$

Кроме того, выполняются соотношения[1])

$$0 < \lim_{m\to\infty} \left| \frac{D_{m,0}(X)\, D_{m+1,-1}(X)}{D_{m+1,0}(X)\, D_{m,-1}(X)} \right| < \lim_{m\to\infty} \left| \frac{D_{m,1}(X)\, D_{m+1,0}(X)}{D_{m+1,1}(X)\, D_{m,0}(X)} \right| < \ldots < \lim_{m\to\infty} \left| \frac{D_{m,M-1}(X)\, D_{m+1,M-2}(X)}{D_{m+1,M-1}(X),\, D_{m,M-2}(X)} \right| < \infty, \tag{17}$$

$$\alpha_0(X) = \lim_{Z\to Z_0(X)} (Z_0(X) - Z)\psi(X, Z, Z^*) \tag{18}$$

и

$$Z_0(X) = \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} |b_m(X)|^{-1/m} \left[T(X) + i(1 - T^2(X))^{1/2}\right], \tag{19}$$

где[2])

$$T(X) = -\frac{1}{t}\left[\frac{\lim\limits_{m\to\infty}\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{nm0}X^n\right|^{1/m}}{\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left|\sum\limits_{s=m}^{\infty}\binom{s}{m}\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{ns0}X^n(-t)^{s-m}\right|^{1/m}\right)^2} - \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty}\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{nm0}X^n\right|^{1/m}}\right] + t\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{n=0}^{\infty} A_{nm0}X^n\right|^{1/m}. \tag{20}$$

Далее, если мы положим $\gamma_m^{(1)}(X) = b_m(X)$ и определим $\gamma_m^{(k)}(X)$, $2 \leqslant k \leqslant M$, тождеством

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m^{(k)}(X) Z^m = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\gamma_m^{(1)}(X) - \sum_{\mu=0}^{k-1} \frac{\alpha_\mu(X)}{(Z_\mu(X))^{m+1}}\right] Z^m, \tag{21}$$

---

[1]) Чтобы яснее выявить структуру выражения (17), мы полагаем $D_{m,-1}(X)$ и $D_{m+1,-1}(X)$ тождественно равными 1.

[2]) Величина, фигурирующая в правой части равенства (20), определена и *не зависит* от t для всех действительных t в некоторой окрестности точки $t = 0$. Понятно, что t выбирается из этой окрестности.

то величины $Z_{k-1}(X)$ будут определяться формулами, совпадающими с (19), где b_m заменено на $\gamma_m^{(k)}$; $\alpha_k(X)$ будут определяться очевидным аналогом формулы (18).

§ 6. Интегральный оператор, порождающий решения уравнения $g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi + h^\mu\nabla_\mu\varphi + k\varphi = 0$

В работе [235] рассматривается дифференциальное уравнение[1])

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi + h^\mu\nabla_\mu\varphi + k\varphi = 0 \tag{1}$$

в римановом пространстве с фундаментальным тензором $g^{\mu\nu}$. Здесь ∇_μ означает ковариантное дифференцирование, h^μ — произвольный контравариантный вектор, k — произвольный скаляр; $g^{\mu\nu}$, h^μ и k — действительные аналитические функции координат.

Эйхлер более подробно рассматривает трехмерный случай риманова пространства $\mathfrak{R}^3$, заданного фундаментальным тензором $g^{\mu\nu}$.

Определение. *Величина $z = u + iv$ называется E-аналитической функцией в $\mathfrak{R}^3$, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu z = 0. \tag{2}$$

Следовательно, u и v удовлетворяют системе

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu u\nabla_\nu u = g^{\mu\nu}\nabla_\mu v\nabla_\nu v, \quad g^{\mu\nu}\nabla_\mu u\nabla_\nu v = 0. \tag{2'}$$

Если u и v независимы, то можно ввести в $\mathfrak{R}^3$ систему координат u, v, w, добавив к u, v третью независимую переменную w. Показано, что уравнение (1) можно тогда заменить функциональным уравнением

$$\mathrm{L}(\varphi) = \varphi_{uu} + \varphi_{vv} + \mathrm{A}\varphi_u + \mathrm{B}\varphi_v + \mathrm{C}\varphi = 0, \tag{3}$$

---

[1]) Далее используются те же символы, что и в оригинальной статье [235], и применяются обычные обозначения дифференциальной геометрии.

где **A**, **B** и **C** имеют вид

$$\mathrm{A} = a_1 + a_2\frac{\partial}{\partial w}, \quad \mathrm{B} = b_1 + b_2\frac{\partial}{\partial z}, \qquad (4)$$
$$\mathrm{C} = c_1 + c_2\frac{\partial}{\partial w} + c_3\frac{\partial^2}{\partial w^2}.$$

Далее доказывается, что по аналогии со случаем дифференциального уравнения (I. 1.6), стр. 26, существует интегральный оператор

$$\varphi = \mathrm{V}_0 f(z) - \int_{z_0}^{z} \mathrm{S}(u, v, w; \zeta) f(\zeta)\,d\zeta, \qquad (5)$$

$$\mathrm{S}(u, v, w; \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-\zeta)^n (n!)^{-1}\,\mathrm{V}_{n+1}, \qquad (6)$$

преобразующий аналитические функции $f(z)$ комплексного переменного в решения уравнения (3). Здесь V_n, $n = 0, 1, \ldots,$ — функционалы, задаваемые рекуррентными соотношениями

$$\left[2\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) + \mathrm{A} + i\mathrm{B}\right]\mathrm{V}_0 = 0,$$
$$\left[2\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) + \mathrm{A} + i\mathrm{B}\right]\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{L}[\mathrm{V}_n].$$

Таким способом получается интегральное представление решения уравнения (1) через аналитические функции одного комплексного переменного. *Все результаты и рассуждения справедливы локально.*

Чтобы получить интересующий нас оператор, необходимо провести некоторые рассмотрения дифференциально-геометрического характера.

I. Во-первых, доказывается, что решения уравнения (2) можно получить следующим путем. Пусть $\mathfrak{S}^2$ — евклидова плоскость с координатами u, v. Определяется отображение $\mathfrak{R}^3$ на $\mathfrak{S}^2$, имеющее характер проектирования: каждому „лучу“ $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на $\mathfrak{R}^3$ соответствует точка на $\mathfrak{S}^2$. Это проектирование можно описать следующим образом: направление проектирования задает поле векторов

$$g^\lambda = e^{\lambda\mu\nu}(\nabla_\mu u \nabla_\nu v - \nabla_\mu v \nabla_\nu u). \qquad (7)$$

где $e^{\lambda\mu\nu}$—кососимметрический „тензор“ (плотность) ранга 3. Вектор

$$r^{\rho} = (g_{\mu\nu} q^{\mu} q^{\nu})^{-1/2} q^{\rho} \tag{8}$$

показывает направление лучей, так что

$$r_{\rho} r^{\rho} = 1. \tag{9}$$

Доказывается, что r^{ρ} удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned}(g^{\mu}_{\nu} - r^{\mu} r_{\nu})(\nabla^{\nu} r_{\rho} + \nabla_{\rho} r^{\nu})(g^{\rho}_{\sigma} - r^{\rho} r_{\sigma}) &= \\ &= (g^{\mu}_{\sigma} - r^{\mu} r_{\sigma}) \nabla_{\lambda} r^{\lambda}.\end{aligned} \tag{10}$$

Далее доказывается, что если задан вектор r^{ρ}, удовлетворяющий (9) и (10), то можно найти E-аналитическую функцию z [т. е. функцию, удовлетворяющую уравнению (2)], и обратно. Следовательно, *уравнение* (2) *эквивалентно паре уравнений* (9) *и* (10).

II. В дальнейшем дифференциальный оператор $\sum g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu}$ обозначается символом $\Box$. Два оператора второго порядка L_1 и L_2 называются *подобными*, $L_1 \sim L_2$, если $L_1 - L_2$ является либо нулем, либо оператором первого порядка.

Запишем $P_i = p^{\mu}_i \nabla_{\mu}$, где $p^{\mu}_{\varkappa}$, $\varkappa = 1, 2, 3$, — три вектора, для которых $\sum_{\varkappa=1}^{3} p^{\mu}_{\varkappa} p^{\nu}_{\varkappa} = g^{\mu\nu}$; тогда $\Box \sim \sum_{\varkappa=1}^{3} P^2_{\varkappa}$, т. е. оператор $\Box$ подобен квадратичной форме от трех линейно независимых векторов.

Показывается, что можно подобрать линейное преобразование $P_{\varkappa}$ в $R_{\varkappa}$, такое, что

$$\Box \sim R_1 R_3 - R_2^2, \tag{11}$$

где $R_{\varkappa}$ удовлетворяют соотношениям

$$R_1 R_2 - R_2 R_1 = a R_1 + b R_2, \quad R_2 R_3 - R_3 R_2 = c R_2 + d R_3. \tag{12}$$

Здесь a, b, c, d — подходящие скаляры. *Представление* (11) оператора $\Box$, где $R_{\varkappa}$ удовлетворяют соотношениям (12), называется *каноническим*. Как следует из (12) и (11), существуют E-аналитические функции $z_{\varkappa}$, $\varkappa = 1, 2$, для которых

$$R_{\varkappa} z_{\varkappa} = 0, \quad R_{\varkappa+1} z_{\varkappa} = 0, \quad \varkappa = 1, 2. \tag{13}$$

Обратно, каждая E-аналитическая функция $z = u + iv$ дает каноническое представление оператора $\square$.

Пусть $x^1 = z$, $x^2 = z^*$ и x^3 — произвольно, но не зависит от z, z^*. Тогда в силу (2) фундаментальная форма пространства R^3 становится равной

$$ds^2 = A\,dx^1\,dx^2 + B\,dx^1\,dx^3 + C\,dx^2\,dx^3 + D\,(dx^3)^2$$

с подходящими коэффициентами A, B, C и D.

Следовательно,

$$\square \sim \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{C}{A}\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\left(A\frac{\partial}{\partial x^2} + B\frac{\partial}{\partial x^3}\right) + \\ + \left(\left(D - \frac{BC}{A}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2. \tag{14}$$

III. Таким образом, показано, что достаточно найти все канонические представления оператора $\square$, чтобы получить все E-аналитические функции. Доказана следующая теорема.

Пусть $\mathfrak{F}$ — действительная аналитическая поверхность и r_0 — действительный вектор, определенный в каждой точке $\mathfrak{F}$. Предположим, что этот вектор не ортогонален $\mathfrak{F}$ и что его компоненты — аналитические функции координат. Тогда существует E-аналитическая функция z, определенная в некоторой окрестности поверхности $\mathfrak{F}$ и удовлетворяющая на $\mathfrak{F}$ уравнению

$$r_0^\rho\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0. \tag{15}$$

Всякая E-аналитическая функция является функцией от этой функции z.

IV. Изложенный метод иллюстрируется примером $\square = \Delta_3$ (гармоническое уравнение с тремя переменными). Действуя так, как в [235], получаем

$$z = f\left(\frac{1}{2}\left(T + T^{-1}\right)x^1 - \frac{1}{2}i\left(T - T^{-1}\right)x^2 + ix^3\right) \tag{16}$$
$$(T = \text{const}),$$

что приводит к интегральному оператору $\mathbf{B}_3$, рассмотренному в гл. II, § 3, стр. 75 и далее.

Обобщая представление (II. 6.1), стр. 95, можно ввести интегральный оператор вида

$$\int\limits_{\mathfrak{H}} \Phi(x, y, z; u_1(\zeta), u_2(\zeta), u_3(\zeta)) f(\zeta)\, d\zeta,$$

порождающий решения уравнения $\Delta_3\psi + F(x, y, z)\psi = 0$. Здесь функция F (продолженная на комплексные значения x, y, z) является целой функцией, а Φ — фундаментальное решение; некоторые результаты гл. II из работы [25] распространяются на случай такого оператора.

Можно получить еще один оператор, порождающий решения рассматриваемого выше уравнения, используя метод бесконечных приближений (см. [28, стр. 501]).

[3, 25, 26, 28—30, 36—39, 125, 235.]

Глава IV

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Гармонические векторы от трех переменных. Предварительные сведения[1])

Кроме гармонических функций, рассмотренных подробно в гл. II, интересно также изучить гармонические векторы $\boldsymbol{H}$, т. е. векторные поля, удовлетворяющие паре уравнений

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} \equiv 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \equiv 0. \tag{1}$$

Такое поле называется *гармоническим*, так как каждая из трех компонент является гармонической функцией и компоненты связаны обобщенными сопряженными уравнениями Коши — Римана. Для таких полей мы получим интегральное представление, являющееся естественным обобщением представления гармонических функций (II. 3.1). Запишем векторное поле с помощью его компонент, $\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, H_3)$. Мы сразу видим, что если одна из компонент, скажем H_1, — *заданная* гармоническая функция, то две другие компоненты должны удовлетворять системе уравнений в частных производных первого порядка (1). Однако эта система уравнений не полностью определяет остальные две компоненты. В самом деле, справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $\boldsymbol{H} = \left(H_1^{(0)}, H_2^{(0)}, H_3^{(0)}\right)$ — *гармоническое векторное поле с действительными компонен-*

---

[1]) Первые четыре параграфа этой главы основаны на [28, гл. III] и [39].

тами[1]*), определенное в некоторой области* $\mathfrak{B}$. *Тогда наиболее общий вид гармонического векторного поля с заданной первой компонентой — функцией* $H_1^{(0)}$ *определяется равенствами*

$$H_1 = H_1^{(0)}, \quad H_2 = H_2^{(0)} + \operatorname{Re} g(y+iz), \qquad (2)$$
$$H_3 = H_3^{(0)} - \operatorname{Im} g(y+iz),$$

где g *— произвольная функция от* $y+iz$, *аналитическая в области, являющейся проекцией* $\mathfrak{B}$ *на плоскость* y, z.

Доказательство. Пусть $H_2^{(1)}$, $H_3^{(1)}$ — другая пара действительных функций, такая, что поле $\left(H_1^{(0)}, H_2^{(1)}, H_3^{(1)}\right)$ также гармонично в $\mathfrak{B}$. Тогда из уравнений (1) следует, что

$$\frac{\partial\left(H_2^{(1)} - H_2^{(0)}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(H_3^{(1)} - H_3^{(0)}\right)}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial\left(H_3^{(1)} - H_3^{(0)}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(H_2^{(1)} - H_2^{(0)}\right)}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial\left(H_2^{(1)} - H_2^{(0)}\right)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\left(H_3^{(1)} - H_3^{(0)}\right)}{\partial x} = 0. \qquad (3)$$

Последние два уравнения показывают, что функция $\left(H_3^{(1)} - H_3^{(0)}\right) + i\left(H_2^{(1)} - H_2^{(0)}\right)$ не зависит от x, первые два показывают, что эта функция аналитична по $y+iz$. Этот результат эквивалентен утверждению леммы.

Пусть теперь H_1 выражается в виде (II. 3.1), а именно[2])

$$H_1 = \mathbf{B}_3(f(u, \zeta)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}} f(u, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (4a)$$

Как показывает простое вычисление, H_1 можно принять за первую компоненту гармонического векторного поля $\boldsymbol{H}$,

---

[1]) Распространение этой леммы на векторные поля с комплексными компонентами совершенно очевидно. В формулах (3.1), (3.2), (3.7), (3.8) работы [28] следует заменить $+\operatorname{Im}$ на $-\operatorname{Im}$.

[2]) Через $\mathfrak{L}$ мы обозначаем любую кривую, замкнутую или нет, но в последующих параграфах $\mathfrak{L}$ будет предполагаться замкнутой и $u = x + \frac{i}{2}(\zeta + \zeta^{-1})y + \frac{1}{2}(\zeta - \zeta^{-1})z$.

вторая и третья компоненты которого заданы равенствами

$$
\begin{aligned}
H_2^{(0)} &= \mathbf{B}_3\left(\frac{i}{2}(\zeta+\zeta^{-1})f(u,\zeta)\right),\\
H_3^{(0)} &= \mathbf{B}_3\left(\frac{1}{2}(\zeta-\zeta^{-1})f(u,\zeta)\right);
\end{aligned}
\tag{4б}
$$

наиболее общий вид таких компонент дается в лемме.

Далее мы рассмотрим криволинейные интегралы $\int H_1\,dx + H_2\,dy + H_3\,dz$ для векторного поля, компоненты которого задаются формулами (4а) и (4б), и получим соотношения между такими интегралами и функцией $f(u, \zeta)$, фигурирующей в этих формулах.

§ 2. Гармонические векторы в целом и их представление посредством интегралов

Гармонические векторы во многих отношениях представляют собой естественное обобщение аналитических функций одного комплексного переменного на три измерения. Уравнения (1) играют в трехмерном случае ту же роль, что и сопряженные уравнения Коши — Римана в случае плоскости. Однако, сравнивая положение в трехмерном и двумерном случаях, мы находим важные различия. В случае аналитических функций действительные части определяют мнимые с точностью до аддитивной постоянной, в то время как, согласно лемме из § 1, произвольный элемент, появляющийся при определении гармонического вектора по одной из компонент, составляет действительную и мнимую части аналитической функции. Далее, действительная гармоническая функция на плоскости имеет действительную гармоническую сопряженную, также не имеющую особенностей (хотя, быть может, многозначную) в этой области; в случае гармонических векторов соответствующий факт, вообще говоря, не имеет места. Это явствует из следующего примера: пусть $\mathfrak{B}$ — произвольная область, не содержащая точек отрицательной части оси x (включая 0). Тогда, как легко проверить вычислением, гармоническая функция

$$1/r = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

может быть взята за первую компоненту $H_1^{(0)}$ векторного поля $\boldsymbol{H}$, гармонического и регулярного всюду в $\mathfrak{V}$; за вторую и третью компоненты $\boldsymbol{H}$ можно принять функции

$$H_2^{(0)} = \frac{y}{r(r+x)}, \quad H_3^{(0)} = \frac{z}{r(r+x)}. \tag{1}$$

[По лемме из § 1, поле $\boldsymbol{H}$ наиболее общего вида определяется формулой (1.2). Относительно особенностей функций (1) см. стр. 77—80.]

Функция g в (1.2) зависит только от y и z, следовательно, множество ее особенностей не зависит от x. Таким образом, множество особых точек любой функции, сопряженной с $H_1^{(0)} = r^{-1}$, содержит либо отрицательную, либо положительную часть оси x. Итак, мы видим, что если область $\mathfrak{D}$ содержит точки из обеих половин оси x, то нельзя определить гармоническое векторное поле, регулярное в $\mathfrak{D}$, с первой компонентой $H_1 = 1/r$.

Пример, данный в предыдущем абзаце, не только показывает, что нельзя, *вообще говоря*, дополнить данную гармоническую функцию до гармонического поля; он также подсказывает рассмотрение некоторого класса областей, для которых такое дополнение всегда возможно. Этот класс областей описывается в следующей лемме.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{V}$ — область, ограниченная гладкой замкнутой поверхностью $\mathfrak{b}$, и пусть всякая прямая, параллельная оси x, пересекает $\mathfrak{V}$ по одному прямолинейному отрезку (или вообще не пересекает). Тогда для каждой функции H_1, гармонической в $\mathfrak{V}+\mathfrak{b}$, найдутся функции H_2, H_3, такие, что H_1, H_2, H_3 образуют гармоническое векторное поле в $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. В силу классических результатов теории потенциала, H_1 представляется в каждой точке $X \in \mathfrak{V}$ в виде

$$\begin{gathered} H_1(X) = \iint\limits_{\mathfrak{b}} \frac{F(T)\, d\omega_T}{r}, \quad T = (t_1, t_2, t_3), \\ r = \overline{XT} \equiv [(x-t_1)^2 + (y-t_2)^2 + (z-t_3)^2]^{1/2}, \end{gathered} \tag{2}$$

где F — подходящая непрерывная функция, определенная на $\mathfrak{b}$. Из предположений относительно $\mathfrak{V}$ следует, что границу $\mathfrak{b}$ можно разделить на две непересекающиеся части

$\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2$, такие, что если (t_1, t_2, t_3) — точка $\mathfrak{b}_k$, $k=1, 2$, то отрезок $(-1)^k(x-t_1)<0$, $y=t_2$, $z=t_3$ лежит вне $\mathfrak{B}$. Сразу ясно, что функции $H_2(X)$, $H_3(X)$ вполне определены на $\mathfrak{B}$ формулами

$$H_s(X)=\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\mathfrak{b}_k}\int F(T)\,h_s^{(k)}(X,\ T)\,d\omega_T,\quad s=2,\ 3, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} h_2^{(k)} &= (-1)^k\frac{y-t_2}{r\,[r+(-1)^k(x-t_1)]},\\ h_3^{(k)} &= (-1)^k\frac{z-t_3}{r\,[r+(-1)^k(x-t_1)]},\quad k=1,\ 2. \end{aligned} \tag{4}$$

Наконец, производя требуемые дифференцирования под знаком интеграла, непосредственно убеждаемся в том, что векторное поле $H=(H_1, H_2, H_3)$ удовлетворяет уравнениям (1.1).

Таким путем показано, что в некоторых областях каждая гармоническая функция естественным образом может быть дополнена до гармонического векторного поля.

С другой стороны, если $\mathfrak{B}$ не является областью типа, описанного в лемме, то для данной гармонической функции, регулярной в $\mathfrak{B}$, может не существовать пары гармонических функций H_2, H_3, регулярных в $\mathfrak{B}$ и таких, что (H_1, H_2, H_3) образуют гармонический вектор. Пример такой гармонической функции дан выше (см. стр. 132).

Это подсказывает нам рассмотрение областей $\mathfrak{B}$ со следующим свойством. Пусть $\mathfrak{S}_k=\left[\sum \mathfrak{s}(y,\ z),\ (y,\ z)\in\mathfrak{C}_k\right]$, где $\mathfrak{C}_k$ — подходящая кривая в плоскости y, z и $\mathfrak{s}(y,\ z)$ — отрезок[1] $\left[t_1^{(1)}<x<t_1^{(2)},\ y=t_2,\ z=t_3\right]$. Предположим, что область $\mathfrak{B}$ можно разбить поверхностями $\mathfrak{S}_k$ на конечное число подобластей $\mathfrak{B}^{(\nu)}$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, каждая из которых удовлетворяет условиям леммы на стр. 132. Таким образом, в каждой области $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ всякой заданной гармонической функции H_1, регулярной в $\mathfrak{B}$, мы можем поставить в соответствие две гармонические функции $H_2^{(\nu)}$

[1]) $t_1^{(1)}$ и $t_1^{(2)}$ — точки пересечения прямой $y=t_2$, $z=t_3$ с границей области $\mathfrak{B}$.

и $H_3^{(\nu)}$, регулярные в $\mathfrak{B}^{(\nu)}$, так что $H^{(\nu)} = \left(H_1^{(\nu)}, H_2^{(\nu)}, H_3^{(\nu)}\right)$ — гармонический вектор. Граница каждой области $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ состоит из частей границы $\mathfrak{b}$ области $\mathfrak{B}$ и, возможно, кусков одной или нескольких поверхностей $\mathfrak{S}_k$. Можно определить $H_2^{(\nu)}$, $H_3^{(\nu)}$ так, чтобы они были регулярны также и на кусках $\mathfrak{S}_k$, принадлежащих границам областей $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ и $\mathfrak{B}^{(\mu)}$. Тогда

$$\left(H_2^{(\nu)} - H_2^{(\mu)}\right) - i\left(H_3^{(\nu)} - H_3^{(\mu)}\right) = g_\nu(y + iz),$$

где $g_\nu(\eta)$ — функция комплексного переменного η, регулярная в проекции $\mathfrak{C}_k$ области $\mathfrak{S}_k$ на плоскость y, z.

Определение. *Векторное поле*[1]) называется *B-регулярным в области* $\mathfrak{B} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{B}^{(\nu)}$, если оно гармонично в каждой из областей $\mathfrak{B}^{(\nu)}$, а его первая компонента — регулярная гармоническая функция во всей области $\mathfrak{B}$. (Таким образом, вторая и третья компоненты могут испытывать разрывы вдоль поверхностей — общих частей границ различных областей $\mathfrak{B}^{(\nu)}$.)

По аналогии со случаем функций комплексного переменного мы вводим в случае односвязных или многосвязных однолистных областей нормальные векторы первого, второго и третьего рода. Пусть $\mathfrak{B}$ — область, граница которой состоит из конечного числа достаточно гладких граничных поверхностей $\mathfrak{b}^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, n$. Пусть, далее, $\mathfrak{B}$ удовлетворяет сформулированным выше условиям, так что для каждой гармонической функции H_1 можно определить B-регулярный гармонический вектор $\boldsymbol{H}$. Тогда вектор $\boldsymbol{H}^{(\mu)}$, первая компонента которого H_1 принимает значение 1 на компоненте границы $\mathfrak{b}^{(\mu)}$ и равна нулю на остальной части границы, называется *нормальным B-регулярным вектором первого рода*.

В двумерном случае представление интегралов первого рода получается использованием ортогональных функций. Аналогично, используя ортогональные функции, можно

---

[1]) Для краткости мы пишем в дальнейшем „вектор" вместо „векторное поле".

получить представление нормального гармонического вектора $H^{(\mu)}$. Пусть $\{\Phi_\nu(X)\}$ — система ортогональных функций, т. е. функций, для которых

$$(\Phi_\nu, \Phi_\mu)_{\mathfrak{B}} = \iiint\limits_{\mathfrak{B}} \left[\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x}\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial y}\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial z}\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz = \delta_{\nu\mu}, \quad (5)$$

причем эта система полна в классе $L^2(\mathfrak{B})$ гармонических функций H в $\mathfrak{B}$, для которых $(H, H)_{\mathfrak{B}} < \infty$. Пусть $k(X, \Xi) = \sum \Phi_s(X)\Phi_s(\Xi)$ — ядро этой системы. Тогда

$$\left.\begin{aligned} H_1(X) &= \sum_{s=1}^{\infty} a_s \Phi_s(X) = \iint\limits_{\mathfrak{b}^{(\mu)}} \frac{k(X, \Xi)}{\partial n_\Xi}\, d\omega_\Xi, \\ a_s &= \iint\limits_{\mathfrak{b}^{(\mu)}} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial n_\Xi}\right) d\omega_\Xi, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

где n_Ξ — внутренняя нормаль и $d\omega_\Xi$ — элемент поверхности $\mathfrak{b}^{(\mu)}$ (см. 1.5).

Пусть $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ — компонента области $\mathfrak{B}$, описанная выше (см. стр. 133). Пусть, далее, найдется значение $x = x_0$, такое, что $P_x(\mathfrak{B}^{(\nu)})$ — проекция $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ на плоскость $x = x_0$ лежит в $\mathfrak{B} \cap (x = x_0)$. (Это предположение не является существенным, но упрощает представление.) Введем теперь новую систему координат $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$, где (x_0, y_0, z_0) — точка в $P_x(\mathfrak{B}^{(\nu)})$. Далее, пусть $X' = (x', y', z')$. Тогда компоненты $H_2^{(\mu,\nu)}$, $H_3^{(\mu,\nu)}$ B-регулярного векторного поля представляются в каждой области $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ в форме

$$H_2^{(\mu,\nu)} = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \left\{ \int_0^{x'} \frac{\partial \Phi_s}{\partial y'}\, dx' + \right.$$
$$\left. + \frac{i}{2}\left(\int_0^{Z} T_s\, dZ + \int_0^{Z^*} T_s\, dZ^*\right)\right\} \equiv \sum a_s \psi_s, \quad (7)$$

$$H_3^{(\mu,\nu)} = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \int\limits_{(0,0,0)}^{X'} \left\{ \frac{\partial \Phi_s}{\partial z'} dx' - \frac{\partial \Phi_s}{\partial x'} dz' + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \psi_s}{\partial z'} dy' - \frac{\partial \psi_s}{\partial y'} dz' \right\}, \qquad (8)$$

$$T_s = \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_s(X, Z, Z^*)}{\partial X} \right)_{X=0},$$

$$\hat{\Phi}_s(X, Z, Z^*) = \Phi_s(x', y', z').$$

Эти соотношения получаются непосредственным вычислением; подробности см. в [38]. Аналогичным путем можно определить гармонические векторы второго и третьего рода и получить представления для них.

§ 3. Интегралы от гармонических векторов

Аналогично тому, как это делается в классической теории функций, мы исследуем интегралы от гармонических векторов, компоненты которых — алгебраические функции. Обозначим через H гармоническое векторное поле с рациональной B_3-ассоциированной функцией $f(u, \zeta)$. Имеем[1])

$$H = (H_1, H_2, H_3) = R_3(f, \mathfrak{L}, X_0, 0), \quad f = p(u, \zeta)/q(u, \zeta), \quad (1)$$

где

$$H_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{L}} f(u, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad H_2 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathfrak{L}} (\zeta + \zeta^{-1}) f(u, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$H_3 = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\mathfrak{L}} (\zeta - \zeta^{-1}) f(u, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad X \in \mathfrak{B}(X_0). \qquad (2)$$

Здесь $\mathfrak{L}$ — подходящая замкнутая кривая в плоскости ζ, а $\mathfrak{B}(X_0)$ — некоторая окрестность произвольной точки X_0 в области регулярности H. Образуя интегралы, мы можем следующим образом ввести класс функций и класс функционалов.

[1]) Согласно рассуждениям из § 1, H_2 и H_3 определяются компонентой H_1 с точностью до функции g. Оператор $R_3[f, \mathfrak{L}, X_0; g]$ был введен в [28]; p и q в формуле (1) — полиномы.

I. Пусть $X = X(\sigma)$ задает сегмент $\mathfrak{J}$ некоторой спрямляемой кривой с началом $X_1 = X(s_1)$ и концом $X = X(s)$, $s_1 < s$. Предположим, что $\mathfrak{J}$ лежит в области регулярности H. Тогда

$$\Lambda(X, X_1) = \int\limits_{\mathfrak{J}} H(X) \cdot dX =$$

$$= \int\limits_{\sigma=s_1}^{s} \left[H_1 \frac{\partial x}{\partial \sigma} + H_2 \frac{\partial y}{\partial \sigma} + H_3 \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right] d\sigma \qquad (3)$$

является гармонической функцией как от X, так и от X_1. Подинтегральное выражение представляет собой полный дифференциал, и, следовательно, $\Lambda(X, X_1)$ не изменяет своего значения, если X_1 и X фиксированы, а $\mathfrak{J}$ непрерывно деформируется в области регулярности H. В частности, если $\mathfrak{J}$ — замкнутая кривая, то значение этого интеграла равно нулю.

II. Пусть

$$\begin{gathered} X = X(\sigma, v), \quad s_1 \leqslant \sigma \leqslant s_2, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1, \\ X(s, 0) = X(s, 1), \end{gathered} \qquad (4)$$

задает достаточно малую часть $\mathfrak{B}$ некоторой поверхности, ограниченную кривыми

$$X = X(s_1, v) \quad \text{и} \quad X = X(s_2, v). \qquad (4a)$$

Тогда

$$V(s_1, s_2) = \iint\limits_{\mathfrak{B}} \left[H_1 \frac{\partial(y, z)}{\partial(\sigma, v)} + H_2 \frac{\partial(z, x)}{\partial(\sigma, v)} + \right.$$

$$\left. + H_3 \frac{\partial(x, y)}{\partial(\sigma, v)} \right] d\sigma\, dv \qquad (5)$$

есть функционал от кривых (4a). (Функционалы от кривых, построенные таким способом, впервые рассматривались Вольтерра [81, 82].)

Введение ассоциированной функции для гармонического вектора приводит к обобщенной теореме о вычетах для некоторых комбинаций гармонических векторов, имеющих особенности.

Здесь мы руководствовались следующей идеей. Пусть $H = (H_1, H_2, H_3)$ — гармонический вектор, где H_ν — целые функции. Далее, пусть $\mathfrak{Z}$ — замкнутая простая гладкая кривая в трехмерном пространстве. Предположим, что функция $p(u, \zeta)$ (рассматриваемая как функция от u) имеет конечное число полюсов первого порядка. Рассмотрим вектор[1]) $\mathrm{R}_3(p, \mathfrak{L}, X, 0)$. Мы видим, что в общем случае кривая $\mathfrak{Z}$ будет разделена на конечное число частей $\mathfrak{Z}_k$, $\mathfrak{Z} = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{Z}_k$, таких, что $\mathrm{R}_3(p, \mathfrak{L}, X_k, 0)$, $X_k \in \mathfrak{Z}_k$ при разных k дает различные гармонические векторы[2]) $S^{(k)}(X)$.

Так как $H(X)$ — регулярный гармонический вектор, то

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\mathfrak{Z}_k} [H(X) + S^{(k)}(X)] \cdot dX = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathfrak{Z}_k} S^{(k)}(X) \cdot dX =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \int_{\mathfrak{Z}'(\zeta)} p(u, \zeta)\, du \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad (6)$$

где $\mathfrak{Z}'(\zeta)$ — замкнутая кривая в плоскости u [мы предполагаем, что можно менять порядок интегрирования в последнем члене равенства (6)]. Используя теорему о вычетах, мы можем вычислить внутренний интеграл в (6) и таким путем получить выражение, которое можно рассматривать как обобщенный вычет.

Не формулируя общую теорему, мы рассмотрим частный случай $p = u^{-1}$, на примере которого становятся ясными детали нашего метода.

Пусть $\mathfrak{Z} = [x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s),\ 0 \leqslant s \leqslant 2\pi]$ — простая замкнутая гладкая кривая, пересекающая плоскость

[1]) Компоненты H_1, H_2, H_3 вектора $\mathrm{R}_3(p, \mathfrak{L}, X, 0)$ задаются соответственно формулами (1.4а) и (1.4б). Здесь $f = p$ и $g = 0$, см. (1.2).

[2]) $S^{(k)}(X) = \left(S_k^{(1)}(X),\ S_k^{(2)}(X),\ S_k^{(3)}(X)\right)$. Здесь, согласно теореме II. 3.1 на стр. 83, функции $S_k^{(n)}(X)$ есть суммы различных комбинаций ветвей некоторой алгебраической функции (см. II. 3.16).

Если $(x(s), y(s), z(s))$ изменяется вдоль $\mathfrak{Z}$, то точка $u = x(s) + \frac{i}{2} y(s)(\zeta + \zeta^{-1}) + \frac{1}{2} z(s)(\zeta - \zeta^{-1})$ пробегает для каждого ζ, $|\zeta| = 1$, кривую в плоскости ζ, которую мы обозначим через $\mathfrak{Z}'(\zeta)$.

$x=0$ в конечном числе точек (отличных от $y=z=0$), скажем, при $s=s_1, \ldots, s_n$, причем в окрестности любой точки пересечения $|x(s)| \geqslant 2\alpha|s-s_k|$, где α — положительная постоянная. Пусть $\mathfrak{Z}_k = \mathfrak{Z} \cap [(-1)^{k+1} x > 0]$, $k=1, 2$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{2}\left[\int_{\mathfrak{Z}_k}\left(\frac{dx}{(-1)^{k+1} r} + \frac{(-1)^{k+1} y\,dy}{r[r+(-1)^{k+1} x]} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(-1)^{k+1} z\,dz}{r[r+(-1)^{k+1} x]}\right)\right] = i\sum (N_\nu c_\nu - N_\eta c_\eta). \quad (7)$$

Здесь c_ν — длина интервалов тех значений $t\,(\equiv -i\log\zeta)$, для которых точка

$$X = x(s), \quad Y = y(s)\cos t + z(s)\sin t, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi,$$

обегает вокруг начала координат N_ν раз в положительном направлении, а c_η — длина интервалов тех значений t, для которых эта точка обегает начало координат N_η раз в отрицательном направлении.

Используя формулу (6), мы заключаем, что выражение (7) равно

$$\frac{1}{2\pi}\int_{s=0}^{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u^{-1}\left[dt\,\frac{dx(s)}{ds} + i\cos t\,dt\,\frac{dy(s)}{ds} + \right.$$
$$\left. + i\sin t\,dt\,\frac{dz(s)}{ds}\right] ds. \quad (8)$$

Покажем, что модуль подинтегрального выражения интегрируем, так что можно менять порядок интегрирования. Для простоты положим $s_1=0$. Далее, пусть $y(s)\cos t + z(s)\sin t = \rho(s)\sin(\varphi(s)+t)$, где $\rho(s)$ и $\varphi(s)$ — полярные координаты. Тогда для $0 \leqslant s \leqslant S$, $0 \leqslant t \leqslant T$ получим

$$|\sin(\alpha s + t)| \geqslant \beta(\alpha s + t), \quad (9)$$

где $\beta > 0$. Если M — нижняя грань $\rho(s)$ для $0 \leqslant s \leqslant S$, $0 \leqslant t \leqslant T$, то имеем

$$|x(s) + iy(s)\cos t + iz(s)\sin t| \geqslant |\alpha s| + M\beta t\,|\sin(\varphi(s)+t)|. \quad (10)$$

Таким образом, для достаточно малых S и T (при удобном выборе переменных) интеграл

$$\left|\int_0^S\int_0^T \frac{dt\,ds}{x(s)+iy(s)\cos t+iz(s)\sin t}\right| \leqslant \int_0^S\int_0^{T'} \frac{2\,dt'ds}{\alpha s+M\beta t'} \qquad (11)$$

конечен (подробности см. в [38]).

§ 4. Связь интегралов от алгебраических гармонических векторов трех переменных с интегралами от алгебраических функций одного комплексного переменного

Теория интегралов от алгебраических функций представляет собой важную ветвь теории функций комплексного переменного. Теоремы из этой теории можно интерпретировать также как результаты о гармонических векторах двух переменных. В случае трех переменных естественно рассматривать интегралы $\int\limits_{X_0}^{X} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{X}$, где $\boldsymbol{H}$ — гармонический вектор, компоненты которого — алгебраические функции от x, y, z.

Так как подинтегральные выражения в (3.3) и (3.5) являются полными дифференциалами, интересно изучить их периоды, выполняя интегрирование вдоль замкнутых кривых или поверхностей более высокого рода. Этим проблемам посвящены новейшие исследования Де Рама [93, 94], Ходжа [221], Кодаиры [113], Спенсера [201] и др.

Далее совершенно естественно возникает вопрос, не будут ли комбинации конечного числа интегралов $\int\limits_{X^{(k)}}^{X^{(k+1)}} \boldsymbol{H}^{(\mu)}(\boldsymbol{X})\,d\boldsymbol{X}$ равны в некоторых случаях комбинациям интегралов $\int\limits_{\zeta^{(k)}}^{\zeta^{(k+1)}} a^{(\nu)}(\zeta)\,d\zeta$ от алгебраических функций $a^{(\nu)}(\zeta)$ комплексного переменного ζ, причем так, чтобы между пределами $\boldsymbol{X}^{(k)} \equiv \left(x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}\right)$ и $\zeta^{(k)}$ имелись рациональные соотношения. В дальнейшем мы приведем теорему такого типа. Основное содержание этой теоремы связано с тем фактом, что величина S, заданная выражением (6) (см. ниже стр. 144), представляет собой сумму различных ветвей интеграла от алгебраического гармонического вектора [см. (10), стр. 145]. Если в (6) изменить порядок интегрирования, то S будет равняться сумме различных ветвей интегралов от алгебраической функции комплексного переменного и между пределами X, с одной стороны, и пределами ζ, с другой стороны, будут существовать простые соотношения.

Пусть $\mathbf{B}_3$-ассоциированная функция первой компоненты H_1 гармонического вектора $\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, H_3)$ [см. (1.4а)] равна

$$f(u, \zeta) \equiv \frac{p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)} = \frac{P(\zeta; X)}{Q(\zeta; X)}, \tag{1}$$

где $p(u, \zeta)$ и $q(u, \zeta)$ — *полиномы* от u и ζ. Предположим далее, что $\mathfrak{L}$ — простая замкутая ориентированная кривая в плоскости ζ, которая не содержит ни начала координат, ни двойных корней уравнения $q(u, \zeta) = 0$. Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутая достаточно гладкая ориентированная кривая в пространстве x, y, z, представленная вектор-функцией $X = X(\sigma)$.

Предположим, что $D(X) \neq 0$ [$D(X)$ определяется формулой (II. 3.14)]. Согласно результатам, изложенным на стр. 83, пространство x, y, z разбивается поверхностями [$Q(\zeta; X) = 0$, $\zeta \in \mathfrak{L}$] на конечное число частей (областей ассоциации, см. стр. 83) и в каждой из этих частей

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{L}} f(u, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= \sum_{[\zeta^{(\nu)}(X)] \in \mathfrak{T}(\mathfrak{L})} \left[\frac{\zeta^{(N-M-1)} \sum\limits_{\nu=0}^{2M} G_\nu(X) \zeta^\nu}{\dfrac{\partial Q(\zeta; X)}{\partial \zeta}} \right]_{\zeta = \zeta^{(\nu)}(X)}. \tag{2}$$

Здесь $\mathfrak{L} = [\zeta = \zeta^*(t)]$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $\mathfrak{J} = [x = x^*(s),\ y = y^*(s),\ z = z^*(s)]$, $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$, и $\mathfrak{T}(\mathfrak{L})$ — область в плоскости ζ, ограниченная кривой $\mathfrak{L}$ [см. (II. 3.16)].

Мы предположим, что функция

$$x^*(s)+\frac{iy^*(s)}{2}\left(\zeta^*(t)+\frac{1}{\zeta^*(t)}\right)+\frac{z^*(s)}{2}\left(\zeta^*(t)-\frac{1}{\zeta^*(t)}\right)=$$
$$=X(s,\ t)+iY(s,\ t) \qquad (3)$$

имеет только конечное число нулей при $0\leqslant s\leqslant 2\pi$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ и в окрестности этих нулей $0<M_1\leqslant\left|\frac{\partial(X,\ Y)}{\partial(s,\ t)}\right|\leqslant$ $\leqslant M_2<\infty$.

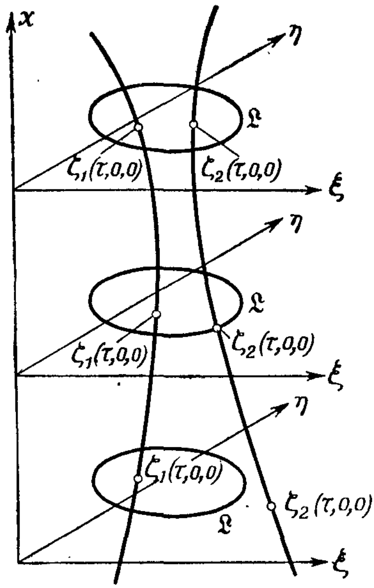

Рис. IV.1. Пересечение поверхности $q\left[\left(x+\frac{1}{2}iy(\zeta+\zeta^{-1})+\frac{1}{2}z(\zeta-\zeta^{-1})\right),\ \zeta\right]=0$ с плоскостью $[y=0,\ z=0]$.

Теорема 4.1. *Пусть $H=\mathrm{R}_3(p/q;\ \mathfrak{L},\ X_0,\ 0)$ — гармоническое векторное поле с рациональной ассоциированной функцией p/q, причем H определено на R-многообразии $\mathfrak{R}$, имеющем $2N$ листов (см. гл. II, стр. 82).*

Его компонентами являются $2N$-значные функции, ветви которых мы обозначим через

$$H_{\varkappa}^{(\nu)}(X), \qquad \varkappa = 1,\ 2,\ 3, \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2N.$$

Пусть $\mathfrak{b}_{\mu}$ *— граничные поверхности областей ассоциации* $\mathfrak{B}_{\mu}$ *(стр. 84) для представлений (2). Наконец,*

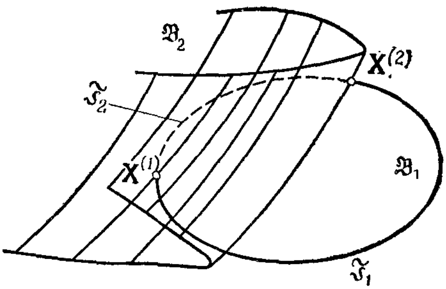

Рис. IV.2. Кривая $\mathfrak{J}$ и поверхность, разделяющая области ассоциации $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$.

пусть $\mathfrak{J}$ *— простая замкнутая гладкая ориентированная кривая, обладающая описанными выше свойствами. Обозначим* $\mathfrak{J}_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$, *часть* $\mathfrak{J}$, *лежащую в* $\mathfrak{B}_k$, *так что* $\sum_{k=1}^{s} \mathfrak{J}_k = \mathfrak{J}$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{s} \sum_{\zeta^{(\nu)} \in \mathfrak{T}_k(\mathfrak{L})} \int_{X^{(k)}}^{X^{(k+1)}} H^{(\nu)}(X)\, dX =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \int_{\zeta^{(k)}}^{\zeta^{(k+1)}} \sum_{u^{(\mu)} \in \tau_k(\mathfrak{J}')} \left[\frac{p(u, \zeta)}{\zeta \dfrac{\partial q(u, \zeta)}{\partial u}} \right]_{u = u^{(\mu)}(\zeta)} d\zeta. \qquad (4)$$

Здесь[1]) $X^{(k)}$ *и* $\zeta^{(k)}$ *связаны соотношением*

$$q\left[x + \frac{1}{2} iy(\zeta + \zeta^{-1}) + \frac{1}{2} z(\zeta - \zeta^{-1}),\ \zeta\right] = 0; \qquad (5)$$

[1]) Мы исключаем здесь особый случай, когда несколько $\zeta^{(k)}$ соответствуют одной точке $X^{(k)}$ на $\mathfrak{L}$ (см. замечание 3.3 на стр. 496 работы [28]).

$\sum\limits_{\zeta^{(\nu)} \in \mathfrak{T}_k(\mathfrak{L})}$ *обозначает сумму по тем корням* $\zeta^{(\nu)}(X)$ *уравнения* $Q(\zeta; X) = 0$, *которые лежат внутри* $\mathfrak{L}$, *в то время как остальные корни лежат во внешности* $\mathfrak{L}$; $\mathfrak{Z}'(\zeta)$ *обозначает кривую в комплексной плоскости* u, *соответствующую*[1] $\mathfrak{Z}$, *а* $\tau_k(\mathfrak{Z}')(\mathfrak{Z}' \equiv \mathfrak{Z}'(\zeta))$ — *внутренность* $\mathfrak{Z}'(\zeta)$. *Величины* $u^{(\nu)}(\zeta)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, — *корни уравнения* $q(u, \zeta) = 0$. *Под* $\sum\limits_{u^{(\mu)} \in \tau(\mathfrak{Z}')}$ *мы подразумеваем сумму по корням* $u^{(\mu)}(\zeta)$, *лежащим в области* $\tau(\mathfrak{Z}')$.

Доказательство. Как упоминалось выше, левая часть равенства (4) получается вычислением суммы S трех интегралов, а именно

$$S = \int\limits_{\mathfrak{Z}} \left(\int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right) dx + i \int\limits_{\mathfrak{Z}} \left(\int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)} \frac{1 + \zeta^{-2}}{2} d\zeta \right) dy + \\ + \int\limits_{\mathfrak{Z}} \left(\int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)} \frac{1 - \zeta^{-2}}{2} d\zeta \right) dz \qquad (6)$$

и изменением порядка интегрирования. Так как $\mathfrak{Z} = \sum\limits_{k=1}^{s} \mathfrak{Z}_k$, мы можем заменить в формуле (6) $\int\limits_{\mathfrak{Z}}$ на $\sum\limits_{k=1}^{s} \int\limits_{\mathfrak{Z}_k}$. Согласно предыдущим результатам, так как $\mathfrak{L}$ не содержит начала координат и не имеет двойных точек, мы имеем для каждого $X \in \mathfrak{Z}_k$

$$\int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{\zeta^{(\nu)} \in \mathfrak{T}_k(\mathfrak{L})} H_1^{(\nu)}(X). \qquad (7)$$

Аналогично

$$i \int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)} \frac{1 + \zeta^{-2}}{2} d\zeta = \sum_{\zeta^{(\nu)} \in \mathfrak{T}_k(\mathfrak{L})} H_2^{(\nu)}(X) \qquad (8)$$

---

[1]) Относительно $\mathfrak{Z}'(\zeta)$ см. примечание 2 к стр. 138.

и

$$\int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)} \frac{1-\zeta^{-2}}{2} d\zeta = \sum_{\zeta^{(\nu)} \in \mathfrak{T}_k(\mathfrak{L})} H_3^{(\nu)}(X). \tag{9}$$

Тогда

$$S = \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{\mathfrak{Z}_k} \sum_{\zeta^{(\nu)} \in \mathfrak{T}_k(\mathfrak{L})} \left[H_1^{(\nu)} dx + H_2^{(\nu)} dy + H_3^{(\nu)} dz\right]. \tag{10}$$

Как можно показать, изменяя порядок интегрирования в (6) (подробнее см. в [28, 38]), равенство (10) можно переписать следующим образом:

$$S = \sum_{\mu=1}^{s} \int\limits_{\mathfrak{L}_\mu} \left[\int\limits_{\mathfrak{Z}'(\zeta)} \frac{p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)} du\right] \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{s} \int\limits_{\mathfrak{L}_\mu} \sum_{u^{(\nu)} \in \tau_\mu(\mathfrak{Z})} \left[\frac{p(u, \zeta)}{\zeta \dfrac{\partial q(u, \zeta)}{\partial u}}\right]_{u=u^{(\nu)}(\zeta)} d\zeta =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{s} \sum_{u^{(\nu)} \in \tau_\mu(\mathfrak{Z})} \int\limits_{\zeta^{(\mu)}}^{\zeta^{(\mu+1)}} \left[\frac{p(u, \zeta)}{\zeta \dfrac{\partial q(u, \zeta)}{\partial u}}\right]_{u=u^{(\nu)}(\zeta)} d\zeta. \tag{11}$$

Мы обозначили через $\mathfrak{L}_\mu$ дугу кривой $\mathfrak{L}$ с концами $X^{(\mu)}$ и $X^{(\mu+1)}$ (здесь $X^{(s+1)} = X^{(1)}$). В (10) и (11) пределы $X^{(\mu)} = \left(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}, z^{(\mu)}\right)$ и $\zeta^{(\mu)}$ связаны соотношением (5).

§ 5. Обобщение теорем о вычетах на случай уравнения $\Delta_3\psi + F(r^2)\psi = 0$

В настоящем параграфе по аналогии с тем, как мы поступали в § 7, гл. I, мы покажем, что некоторые результаты о криволинейных интегралах от гармонических векторов можно обобщить, изучая решение дифференциального уравнения

$$\mathrm{L}^{(1)}(\psi) \equiv \Delta_3\psi + F(r^2)\psi = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{1}$$

Здесь F — целая функция от r^2. Согласно (III. 1.4), стр. 104, и (III. 2.9), стр. 108, решение ψ уравнения (1) можно представить в виде

$$\psi(X) = \int_{\tau=-1}^{1} E(r, \tau) H(X(1-\tau^2))\, d\tau. \tag{2}$$

Следуя методу, используемому в случае гармонических функций, мы каждому решению ψ_1 с функциональным элементом в начале координат [1])

$$\psi_1(X) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{2n} A_{\varkappa n} \int_{\tau=-1}^{1} \int_{|\zeta|=1} E(r, \tau) \times$$
$$\times (u(1-\tau^2))^n \zeta^{-n+\varkappa} \frac{d\zeta}{\zeta} d\tau \tag{3}$$

ставим в соответствие две функции

$$\psi_2(X) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{2n} A_{\varkappa n} \int_{\tau=-1}^{1} \int_{|\zeta|=1} E(r, \tau) \times$$
$$\times (u(1-\tau^2))^n \zeta^{-n+\varkappa} \left(\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} d\tau \tag{4}$$

и

$$\psi_3(X) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{2n} A_{\varkappa n} \int_{\tau=-1}^{1} \int_{|\zeta|=1} E(r, \tau) \times$$
$$\times (u(1-\tau^2))^n \zeta^{-n+\varkappa} \left(\frac{\zeta-\zeta^{-1}}{2}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} d\tau. \tag{5}$$

Определение. Назовем вектор $\psi(X)$, имеющий компоненты ψ_1, ψ_2, ψ_3 [см. (3) — (5)], принадлежащим классу $\mathbf{V}(\mathbf{L}^{(1)})$.

Заметим, что если $\mathbf{L}^{(1)} = 0$ — уравнение Лапласа, то такие векторы гармоничны. Мы увидим, что некоторые комбинации криволинейных интегралов от векторов класса $\mathbf{V}(\mathbf{L}^{(1)})$ обладают интересными свойствами.

---

[1]) См. (1.2), (1.4а), (1.4б) на стр. 130, 131 и (II. 2.20) на стр. 74.

Теорема 5.1. *Пусть $\psi(X)$—вектор класса $(\mathbf{L}^{(1)})$, регулярный в замкнутом шаре $\mathfrak{K}$ с центром в начале координат и радиусом r_0. Тогда*

$$\int_{\mathfrak{Z}} \psi(X)\cdot dX \equiv \int_{\mathfrak{Z}} [\psi_1(X)\,dx + \psi_2(X)\,dy + \psi_3(X)\,dz] = 0 \tag{6}$$

в предположении, что $\mathfrak{Z}$ — замкнутая достаточно регулярная кривая, лежащая на границе $\mathfrak{K}$.

Справедливость нашего утверждения немедленно следует из формулы (2) и равенства

$$\int_{\mathfrak{Z}} [\psi_1(X)\,dx + \psi_2(X)\,dy + \psi_3(X)\,dz] =$$

$$= \int_{\tau=-1}^{1} E(r_0, \tau) \int_{\mathfrak{Z}} [H_1\,d(x(1-\tau^2)) +$$

$$+ H_2 d(y(1-\tau^2)) + H_3 d(z(1-\tau^2))]\,d\tau = 0, \tag{7}$$

$$H_k \equiv H_k(X(1-\tau^2)),$$

которое имеет место, так как внутренний интеграл равен нулю для всякого τ.

При вычислении первого интеграла в формуле (7) с повторным интегрированием используется тот факт, что r_0 *постоянно* на $\mathfrak{Z}$ [см. правую часть равенства (7)].

Описанный метод можно модифицировать так, что он будет применим в случае, когда ψ имеет некоторые особенности в $\mathfrak{K}$. Мы рассматриваем вектор $\psi \in \mathbf{V}(\mathbf{I})$, компоненты которого соответствуют $\mathbf{B}_3$-ассоциированным функциям

$$\left\{(u-\alpha^*-i\alpha^{**})^{-1},\ (u-\alpha^*-i\alpha^{**})^{-1}\, i\,\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2},\right.$$

$$\left.(u-\alpha^*-i\alpha^{**})^{-1}\,\frac{\zeta-\zeta^{-1}}{2}\right\},\quad \alpha^*>0,\ \alpha^{**}>0. \quad (8)$$

В случае уравнения Лапласа $\mathbf{B}_3$-ассоциированным функциям (8) соответствует двузначный гармонический вектор $T(X)$. Ветви этого вектора имеют вид

$$T^{(k)} = \left\{(-1)^{k+1} R^{-1}, \frac{(-1)^{k+1} y}{R(R+(-1)^{k+1} x)}, \frac{(-1)^{k+1} z}{R(R+(-1)^{k+1} x)}\right\}, \quad k = 1, 2, \tag{9}$$

$$R = [(x - \alpha^* - i\alpha^{**})^2 + y^2 + z^2]^{1/2}. \tag{9a}$$

Если в (8) подставить $u = x + [iy(\zeta+\zeta^{-1}) + z(\zeta-\zeta^{-1})]/2$, умножить на $d\zeta/\zeta$ и проинтегрировать по $|\zeta| = 1$, то мы получим каждую из этих ветвей вне множества $\mathfrak{s} + \mathfrak{S}$, где

$$\mathfrak{s} = [x = \alpha^*, \ y^2 + z^2 = \alpha^{**2}], \ \mathfrak{S} = [y^2 + z^2 > \alpha^{**2}, \ x = \alpha^*] \tag{10}$$

($\mathfrak{s} + \mathfrak{S}$ — внешность окружности $y^2+z^2 = \alpha^{**2}$ в плоскости $x = \alpha^*$, см. рис. IV.3); $H^{(1)}$ можно аналитически продолжить вдоль любого пути на $\mathfrak{S}$.

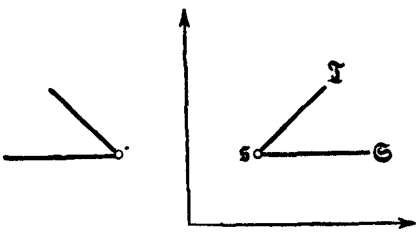

Рис. IV. 3. Пересечение линии разветвления $\mathfrak{s}$, поверхностей $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ с плоскостью $z = 0$.

Пусть $X_0 \in \mathfrak{S}$; обозначим через $T_+^{(1)}(X_0)$ предел $T^{(1)}(X)$, когда X стремится к X_0 сверху (т. е. $X = (x, y, z)$, $x > \alpha^*$). Пусть $T_-^{(1)}(X_0)$ — предел $T^{(1)}(X)$, когда X стремится к X_0 снизу. Аналогично определим $T_+^{(2)}(X_0)$ и $T_-^{(2)}(X_0)$; тогда мы получим

$$\begin{aligned} T_+^{(1)}(X_0) &= T_-^{(2)}(X_0), \\ T_-^{(1)}(X_0) &= T_+^{(2)}(X_0). \end{aligned} \tag{11}$$

Определим теперь вектор $\varphi(X_0)$ равенством

$$\varphi(X) = T^{(2)}(X) - T^{(1)}(X), \tag{12}$$

где $X = (x, y, z)$.

Применяя к векторному полю $T(X)$ оператор $\mathbf{P}_1$, который определяется формулой

$$\mathbf{P}_1(T(X)) = \int_{\tau=-1}^{1} E(r, \tau)\, T(X(1-\tau^2))\, d\tau = \sigma(X), \tag{13}$$

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

мы получаем снова векторное поле с линией разветвления $\mathfrak{S}$.

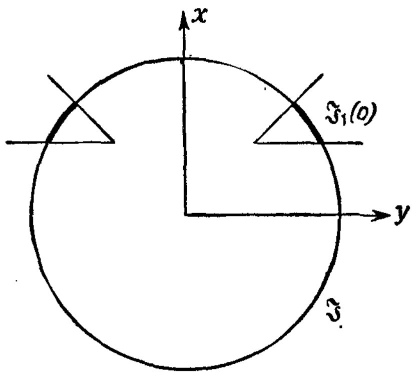

Рис. IV.4. Кривые $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}_1(0)$.

Однако на этот раз удобно разрезать пространство вдоль поверхности

$$\mathfrak{T} = \left[x \geqslant \alpha^*,\ y^2 + z^2 = \frac{(\alpha^{**}x)^2}{\alpha^{*2}}\right]; \tag{14}$$

обозначим соответствующие ветви T через $\tilde{T}^{(1)}$ и $\tilde{T}^{(2)}$. Применяя оператор $\mathbf{P}_1$ к ветви $\tilde{T}^{(k)}$, $k = 1, 2$, вектора T, мы получим ветви $V^{(k)}$, $k = 1, 2$, векторного поля V.

Теорема 5.2. *Пусть $\Psi(X) = \psi(X) + \sigma(X)$ - векторное поле, где $\psi \in \mathrm{V}(\mathrm{L}^{(1)})$, и пусть ассоциированным* *гармоническим вектором для Ψ является вектор $G(X)$:*

$$\{G_1(X), G_2(X), G_3(X)\} =$$
$$= \Bigg\{ H_1(X) + c(-1)^{k+1}R^{-1}, \quad H_2(X) + \frac{(-1)^{k+1} cy}{R(R+(-1)^{k+1}x)},$$
$$H_3(X) + \frac{(-1)^{k+1} cz}{R(R+(-1)^{k+1}x)} \Bigg\}, \quad k=1, 2, \qquad (15)$$

где $[H_1(X), H_2(X), H_3(X)]$ — *гармонический вектор, регулярный в замкнутом шаре* $\mathfrak{K} = [x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2]$, $r^2 > \alpha^{*2} + \alpha^{**2}$ *и* c — *постоянная. Если* $\mathfrak{J}$ — *замкнутая дифференцируемая кривая, лежащая на границе* $\mathfrak{H}$ *шара* $\mathfrak{K}$, *то*

$$\int\limits_{\mathfrak{J}} \Psi(X)\,dX = c \int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0} E(r, \tau) R(\tau, P_{\mathfrak{S}})\,d\tau +$$
$$+ c \int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0} E(r, \tau) Q(\tau, P_{\mathfrak{S}}, P_{\mathfrak{T}})\,d\tau, \qquad (16)$$

где $\tau_0 = [1 - r^{-1}(\alpha^{*2} + \alpha^{**2})^{1/2}]^{1/2}$; $R(\tau, P_{\mathfrak{S}})$ — *величина, зависящая только от* τ *и некоторых топологических свойств* $\mathfrak{J}$ *и* $P_{\mathfrak{S}}$, *где* $P_{\mathfrak{S}}$ — *пересечение* $\mathfrak{J}$ *с* $\mathfrak{S}$ [*см.* (10)]; $Q(\tau, P_{\mathfrak{S}}, P_{\mathfrak{T}})$ — *величина, зависящая от* τ, $P_{\mathfrak{S}}$ *и* $P_{\mathfrak{T}}$ [*пересечение* $\mathfrak{J}$ *с* $\mathfrak{T}$, *см.* (14)]. (Подробности см. в работе [38].)

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{R}$ часть пространства, в которой $[x \geqslant \alpha^*,\ y^2+z^2 \geqslant (\alpha^{**}x)^2/\alpha^{*2}]$, и разделим путь $\mathfrak{J}$ на две части: $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J} - \mathfrak{J}_1$. Тогда

$$\int\limits_{\mathfrak{J}} G(X)\cdot dX = \int\limits_{\mathfrak{J}_1} G(X)\cdot dX + \int\limits_{\mathfrak{J}_2} G(X)\cdot dX =$$
$$= c \int\limits_{\mathfrak{J}_1} \int\limits_{-\tau_1}^{\tau_1} E(r, \tau)\, T^{(2)}(X(1-\tau^2))\,d\tau\,dX +$$

$$+c\int\limits_{\mathfrak{Z}_1}\int\limits_{\mathfrak{q}} E(r,\ \tau)\,T^{(1)}(X(1-\tau^2))\,d\tau\cdot dX+$$

$$+c\int\limits_{\mathfrak{Z}_2}\int\limits_{\tau=-1}^{1} E(r,\ \tau)\,T^{(1)}(X(1-\tau^2))\,d\tau\cdot dX, \qquad (17)$$

$$\tau_1=[x^{-1}(x-\alpha^*)]^{1/2}, \qquad \mathfrak{q}=[-1,\ -\tau_1]+[\tau_1,\ 1].$$

Изменим порядок интегрирования; тогда, принимая во внимание формулу (15) и то, что r постоянно вдоль $\mathfrak{Z}$, получаем

$$\int\limits_{\mathfrak{Z}}\Psi(X)\cdot dX=$$

$$=\int\limits_{\mathfrak{Z}}\psi(X)\cdot dX+c\int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0}E(r,\ \tau)\int\limits_{\mathfrak{Z}}T^{(1)}(X(1-\tau^2))\,dX\,d\tau+$$

$$+c\int\limits_{\mathfrak{Z}_1}\int\limits_{-\tau_1}^{\tau_1}E(r,\ \tau)\big[T^{(2)}(X(1-\tau^2))-$$

$$-T^{(1)}(X(1-\tau^2))\big]\,d\tau\cdot dX+$$

$$+c\int\limits_{\mathfrak{p}}E(r,\ \tau)\int\limits_{\mathfrak{Z}}T^{(1)}(X(1-\tau^2))\cdot dX\,d\tau. \qquad (18)$$

Здесь $\mathfrak{p}$ — сумма интервалов $(-1,\ -\tau_0)$, $(\tau_0,\ 1)$ и τ_0 выбрано так, что кривая $(1-\tau^2)\mathfrak{Z}$ не пересекает $\mathfrak{R}$ при

$$|\tau_0|\leqslant|\tau|\leqslant 1.$$

Согласно теореме 1 [см. (6)], первый член в правой части равенства (18) равен нулю. Для $\tau\in\mathfrak{p}$ имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{Z}}T^{(1)}(X(1-\tau^2))\cdot dX(1-\tau^2)=\int\limits_{\mathfrak{Z}_\tau}T^{(1)}(Y)\cdot dY=0, \qquad (19)$$

так как $\mathfrak{Z}_\tau=[Y=X(1-\tau^2),\ X\in\mathfrak{Z}]$ — путь, который можно стянуть в точку, не пересекая множество $\mathfrak{R}$. Таким образом, последний интеграл в правой части равенства (18) также равен нулю.

Интеграл $\int\limits_{\mathfrak{J}} T^{(1)}\left(X\left(1-\tau^2\right)\right)dX = R(\tau,\ P_{\mathfrak{S}})$ есть величина, зависящая только от τ, некоторых топологических свойств $\mathfrak{J}$ и от пересечения $\mathfrak{J}$ с $\mathfrak{S}$.

Аналогично, интеграл

$$\int\limits_{\mathfrak{J}_1}\left[T^{(2)}\left(X\left(1-\tau^2\right)\right)-T^{(1)}\left(X\left(1-\tau^2\right)\right)\right]dX = \\ = Q(\tau,\ P_{\mathfrak{S}},\ P_{\mathfrak{J}}) \quad (20)$$

есть величина, зависящая только от τ, $P_{\mathfrak{S}}$ и $P_{\mathfrak{J}}$, где $P_{\mathfrak{T}}$ — пересечение $\mathfrak{J}$ с поверхностью $\mathfrak{T}$ и $P_{\mathfrak{S}}$ — пересечение $\mathfrak{J}$ с $\mathfrak{S}$. Это доказывает теорему 2 (см. [38]).

§ 6. Оператор, порождающий решения системы уравнений в частных производных[1])

В предыдущих параграфах рассматривались операторы, преобразующие аналитические функции одного комплексного переменного в решения одного уравнения в частных производных. В этом параграфе мы рассмотрим оператор, преобразующий аналитические функции *двух* комплексных переменных в решения *системы* уравнений в частных производных.

Мы рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\,\partial z_1^*} = F\left(z_1,\ z_1^*\right)\psi, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z_2\partial z_2^*} = G\left(z_2,\ z_2^*\right)\psi, \qquad (1)$$

где z_1, z_1^*, z_2, z_2^* — независимые комплексные переменные, а F, G — целые функции указанных переменных. (Если ввести обычным образом переменные x_1, y_1, x_2, y_2, записав $z_k = x_k + iy_k$, $z_k^* = x_k - iy_k$, $k = 1,\ 2$, и ограничиться лишь действительными значениями новых переменных, z_k^* будет, разумеется, совпадать с $\bar{z}_k$, сопряженным к z_k.)

[1]) Этот параграф основан на статьях [42, 36], в которых читатель найдет более детальное изложение.

В простейшем возможном случае, а именно, когда $F = G = 0$, система (1) сразу решается; решение выражается формулой

$$\psi_0 = f_1(z_1, z_2) + f_2(z_1, z_2^*) + f_3(z_1^*, z_2) + f_4(z_1^*, z_2^*), \tag{2}$$

где каждая из функций f_1, f_2, f_3, f_4 аналитична по указанным аргументам, т. е. функция ψ_0 удовлетворяет системе

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z_1 \partial z_1^*} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi_0}{\partial z_2 \partial z_2^*} = 0. \tag{3}$$

Если потребовать, кроме того, чтобы ψ было *действительным* решением системы (1) в том смысле, что ψ принимает действительные значения при $z_k^* = \bar{z}_k$, то тем самым число произвольных функций, входящих в формулу (2), сводится от четырех к двум. Действительно, эти четыре функции будут теперь связаны соотношениями

$$f_4(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \overline{f_1(z_1, z_2)}, \quad f_3(\bar{z}_1, z_2) = \overline{f_2(z_1, \bar{z}_2)}.$$

Возвратимся к общему случаю системы (1). Можно образовать действительные решения системы (1) таким способом, при котором, с одной стороны, обобщается представление, определяемое формулами (2) и (3) в простейшем случае $F = G = 0$, и, с другой стороны, обобщаются представления, полученные ранее для решений одного уравнения в частных производных. Это выполняется следующим образом.

Покажем сначала, что можно найти решение системы (1), аналитическое в некоторой области восьмимерного пространства $\mathfrak{D}^8 = \mathfrak{D}^2_{z_1} \times \mathfrak{D}^2_{z_1^*} \times \mathfrak{D}^2_{z_2} \times \mathfrak{D}^2_{z_2^*}$ и совпадающее с данной выше функцией (2) при выполнении одного из четырех условий:

$$z_1 = z_2 = 0, \quad z_1 = z_2^* = 0, \quad z_1^* = z_2 = 0, \quad z_1^* = z_2^* = 0.$$

Это доказательство мы проводим непосредственным применением метода последовательных приближений. Чтобы упростить выкладки, определим при помощи рекуррентных соотношений величины

$$\psi_\nu(z_1, z_1^*; z_2, z_2^*) = \chi_\nu(z_1, z_1^*; z_2, z_2^*) +$$
$$+ \int_0^{z_1}\int_0^{z_1^*} F(\zeta_1, \zeta_1^*)\psi_{\nu-1}(\zeta_1, \zeta_1^*; z_2, z_2^*)\,d\zeta_1\,d\zeta_1^*, \qquad (4)$$

$$\chi_\nu(z_1, z_1^*; z_2, z_2^*) =$$
$$= \int_0^{z_2}\int_0^{z_2^*} G(\zeta_2, \zeta_2^*)\chi_{\nu-1}(z_1, z_1^*; \zeta_2, \zeta_2^*)\,d\zeta_2\,d\zeta_2^*, \qquad (4')$$

где

$$\chi_0(z_1, z_1^*; z_2, z_2^*) = \psi_0(z_1, z_1^*; z_2, z_2^*). \qquad (4'')$$

Эти рекуррентные соотношения определены, если ψ_0 — регулярная аналитическая функция в $\mathfrak{D}^8$ и все переменные изменяются в этой области.

При помощи индукции доказываем, что в силу (3), (4') и (4'') имеем

$$\frac{\partial^2\chi_\nu}{\partial z_1\,\partial z_1^*} = 0. \qquad (5)$$

С другой стороны, используя (5), мы получаем из (4), что

$$\frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial z_1\,\partial z_1^*} = F(z_1, z_1^*)\,\psi_{\nu-1}. \qquad (6)$$

Заметим, далее, что в силу второго уравнения из (3) и в силу (4), (4') и (4'') имеем

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z_2\,\partial z_2^*} = G(z_2, z_2^*)\,\psi_0. \qquad (7)$$

Из этого уравнения мы хотим по индукции вывести дифференциальную рекуррентную формулу

$$\frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial z_2\,\partial z_2^*} = G(z_2, z_2^*)\,\psi_{\nu-1}. \qquad (8)$$

В самом деле, предположим, что эта формула уже доказана для всех индексов, меньших или равных ν.

Умножая уравнение (4) на $G(z_2, z_2^*)$ и используя формулы (4′), (8) и снова (4), получаем

$$G(z_2, z_2^*)\,\psi_\nu = \int_0^{z_1}\int_0^{z_1^*} F(\zeta_1, \zeta_1^*)\,G(z_2, z_2^*)\,\psi_{\nu-1}\,d\zeta_1\,d\zeta_1^* + G\chi_\nu =$$

$$= \int_0^{z_1}\int_0^{z_1^*} F(\zeta_1, \zeta_1^*)\frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial z_2\,\partial z_2^*}\,d\zeta_1\,d\zeta_1^* + \frac{\partial^2\chi_{\nu+1}}{\partial z_2\,\partial z_2^*} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z_2\,\partial z_2^*}\left[\int_0^{z_1}\int_0^{z_1^*} F(\zeta_1, \zeta_1^*)\,\psi_\nu\,d\zeta_1\,d\zeta_1^* + \chi_{\nu+1}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z_2\,\partial z_2^*}\,\psi_{\nu+1}(z_1, z_1^*;\ z_2, z_2^*). \tag{9}$$

Таким образом, формула (8) справедлива для $\nu+1$ и индукция закончена.

Рассмотрим теперь ряд

$$\psi(z_1, z_1^*;\ z_2, z_2^*) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu(z_1, z_1^*;\ z_2, z_2^*). \tag{10}$$

Легко видеть, что этот ряд сходится, как экспоненциальный, в рассматриваемой области $\mathfrak{D}^8$ и представляет здесь аналитическую функцию четырех комплексных переменных. Действительно, пусть

$$|F(z_1, z_1^*)| \leqslant \Phi,\ |G(z_2, z_2^*)| \leqslant \Gamma,\ |\psi_0| \leqslant \phi \tag{11}$$

в некоторой замкнутой подобласти из $\mathfrak{D}^8$. Согласно (4) и (4′), имеем

$$|\chi_\nu(z_1, z_1^*;\ z_2, z_2^*)| \leqslant \frac{\Gamma^\nu |z_2|^\nu |z_2^*|^\nu}{(\nu!)^2}\,\phi \tag{12}$$

и

$$|\psi_\nu(z_1, z_1^*;\ z_2, z_2^*)| \leqslant \phi\,\frac{(\Phi|z_1||z_1^*| + \Gamma|z_2||z_2^*|)^\nu}{(\nu!)^2}. \tag{13}$$

Таким образом, функция ψ аналитична в $\mathfrak{D}^8$ и в силу (6) и (8) удовлетворяет системе уравнений в частных производных (1). Далее, по построению, имеем для $\nu > 0$

$$\begin{gathered}\psi_\nu = 0,\ \text{ если }\ z_1 = z_2 = 0,\ \text{ или }\ z_1^* = z_2 = 0,\\ \text{или }\ z_1 = z_2^* = 0,\ \text{ или }\ z_1^* = z_2^* = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Следовательно, ψ совпадает с ψ_0, если выполнено одно из этих условий.

С другой стороны, ясно, что $\psi_0(z_1, z_1^*; z_2, z_2^*)$ определяет решение ψ единственным образом. Действительно, равенства

$$\left.\begin{aligned} &\psi(z_1, 0, z_2, 0) = \psi_0(z_1, 0, z_2, 0); \\ &\psi(0, z_1^*, z_2, 0) = \psi_0(0, z_1^*, z_2, 0) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

определяют сначала единственным образом $\psi(z_1, z_1^*, z_2, 0)$ в силу первого уравнения (1), так как мы имеем дело с обычной задачей с начальными условиями при фиксированном z_2. Аналогично находим $\psi(z_1, z_1^*, 0, z_2^*)$. Фиксируя теперь переменные z_1, z_1^*, определим $\psi(z_1, z_1^*; z_2, z_2^*)$, решая задачу с начальными условиями $[\psi(z_1, z_1^*, z_2, 0)$ и $\psi(z_1, z_1^*, 0, z_2^*)$ известны$]$ для второго уравнения (1).

Итак, мы показали, что система (1) имеет регулярное аналитическое решение в области $\mathfrak{D}^8$, в которой аналитичны оба коэффициента F и G. Мы можем выбрать аналитическую функцию ψ_0 произвольно. Описанный процесс можно интерпретировать как применение линейного интегрального оператора к исходной функции ψ_0. Далее мы выразим этот оператор в замкнутой и более удобной форме и назовем его, как в случае одного уравнения, интегральным оператором первого рода.

Во многих приложениях мы приходим к системе дифференциальных уравнений в частных производных, исходя из задачи для действительных переменных следующего типа. Мы хотим определить действительнозначные функции $\varphi(x_1, y_1; x_2, y_2)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\Delta_{x_1y_1}\varphi = f(x_1, y_1)\varphi, \qquad \Delta_{x_2y_2}\varphi = g(x_2, y_2)\varphi, \tag{16}$$

где

$$\Delta_{x_1y_1} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}, \qquad \Delta_{x_2y_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}. \tag{17}$$

Положим $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$; тогда мы можем записать систему (16) в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\,\partial \bar{z}_1} = F(z_1, \bar{z}_1)\psi, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z_2\,\partial \bar{z}_2} = G(z_2, \bar{z}_2)\psi, \tag{16'}$$

где

$$
\begin{aligned}
&\psi(z_1, \bar{z}_1;\ z_2, \bar{z}_2) = \\
&\quad = \varphi\left(\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}, \frac{z_1-\bar{z}_1}{2i};\ \frac{z_2+\bar{z}_2}{2}, \frac{z_2-\bar{z}_2}{2i}\right), \\
&\quad F(z_1, \bar{z}_1) = \frac{1}{4} f\left(\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}, \frac{z_1-\bar{z}_1}{2i}\right), \\
&\quad G(z_2, \bar{z}_2) = \frac{1}{4} g\left(\frac{z_2+\bar{z}_2}{2}, \frac{z_2-\bar{z}_2}{2i}\right).
\end{aligned} \tag{18}
$$

Таким образом, мы снова приходим к системе (1) с дополнительным условием

$$z_1^* = \bar{z}_1, \quad z_2^* = \bar{z}_2. \tag{19}$$

Предположим, что $F(z_1, z_1^*)$ и $G(z_2, z_2^*)$ аналитичны в области $\mathfrak{D}^8$. Если $\varphi(x_1, y_1;\ x_2, y_2)$ — действительное решение в „действительной подобласти" области $\mathfrak{D}$, характеризуемой равенствами (19), то возникает задача продолжения этого решения в $\mathfrak{D}^8$. Мы хотим показать, что это всегда возможно. Таким путем мы сможем связать представление действительных решений системы (16) с определенным выше интегральным оператором, который тесно связан со значениями этого решения в комплексной области $\mathfrak{D}^8$.

Введем понятие *комплексной оболочки* действительной области. Пусть $\mathfrak{B}^2$ — область точек (x_1, y_1) (или, в комплексной форме, точек $z_1 = x_1 + iy_1$); определим ее комплексную (четырехмерную) оболочку как множество пар комплексных чисел (z_1, z_1^*), таких, что $z_1 \in \mathfrak{B}^2$, $\bar{z}_1^* \in \mathfrak{B}^2$; обозначим ее через $H(\mathfrak{B}^2)$ (см. стр. 42).

Пусть мы имеем четырехмерную область $\mathfrak{B}^4$ точек $(x_1, y_1;\ x_2, y_2)$ или, в комплексной форме, $(z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2)$; определим комплексную (восьмимерную) оболочку области $\mathfrak{B}^4$ как множество всех четверок комплексных чисел z_1, z_1^*, z_2, z_2^*, таких, что все четыре точки (z_1, z_2), $(\bar{z}_1^*, z_2)$, $(z_1, \bar{z}_2^*)$, $(\bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*)$ принадлежат $\mathfrak{B}^4$. Обозначим ее через $H(\mathfrak{B}^4)$.

Сформулируем теперь следующий результат. Пусть $\psi(z_1, \bar{z}_1;\ z_2, \bar{z}_2)$ — решение системы (16′), дифференцируемое четыре раза по всем переменным в выпуклой области $\mathfrak{B}^4$

действительного пространства $(x_1, y_1; x_2, y_2)$. Тогда функция ψ может быть аналитически продолжена в $H(\mathfrak{B}^4)$, если коэффициенты F и G — регулярные аналитические функции в $H(\mathfrak{B}^4)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала ψ как функцию от z_1, $\bar{z}_1$ при фиксированных значениях z_2, $\bar{z}_2$. Так как ψ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = F(z_1, \bar{z}_1)\psi,$$

мы можем, в силу наших предположений относительно ψ и классической теоремы об аналитичности решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений, продолжить ψ в комплексную область. Пусть $\mathfrak{D}^2(z_2)$ — область изменения z_1 при фиксированном z_2. Ясно, что тогда $\psi(z_1, z_1^*; z_2, \bar{z}_2)$ будет регулярной аналитической функцией в $H(\mathfrak{D}^2(z_2))$.

Рассмотрим теперь функцию $\partial^2\psi(z_1^*, z_1^*; z_2, \bar{z}_2)/\partial z_2 \partial\bar{z}_2$, аналитически зависящую от z_1, z_1^* в $H(\mathfrak{D}^2(z_2))$. В силу (16') имеет место равенство

$$\frac{\partial^2\psi(z_1, z_1^*; z_2, \bar{z}_2)}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = G(z_2, \bar{z}_2)\psi(z_1, z_1^*; z_2, \bar{z}_2) \qquad (20)$$

аналитических функций для $z_1^* = \bar{z}_1$. Следовательно, по принципу перманентности это равенство справедливо всюду в $H(\mathfrak{D}^2(z_2))$.

Далее, фиксируем z_1, z_1^* и исследуем (20) как дифференциальное уравнение для функции ψ, рассматриваемой как функция от z_2, $\bar{z}_2$. Мы снова можем продолжить ее в комплексную область. Мы должны определить область изменения z_2 для заданных z_1 и z_1^*. Таким путем определяется двумерная область $\mathfrak{D}^2(z_1, z_1^*)$; $\psi(z_1, z_1^*; z_2, z_2^*)$ будет регулярной аналитической функцией по z_2, z_2^* в комплексной оболочке $H(\mathfrak{D}^2(z_1, z_1^*))$. Эта оболочка, очевидно, характеризуется тем, что $(z_1, z_1^*; z_2, z_2^*)$ лежит в $H(\mathfrak{B}^4)$. Следовательно, мы доказали, что $\psi(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*)$ зависит аналитически от каждой пары переменных (z_1, z_1^*), (z_2, z_2^*), если $(z_1, z_1^*; z_2, z_2^*) \in H(\mathfrak{B}^4)$, что доказывает наше утверждение.

Мы доказали, что действительное решение системы (16), определенное в области $\mathfrak{B}^4$, может быть аналитически продолжено в комплексную оболочку $H(\mathfrak{B}^4)$. Таким образом, мы получаем две аналитические функции

$$k(z_1, z_2) = \psi(z_1, 0, z_2, 0), \quad l(z_1, \bar{z}_2) = \psi(z_1, 0, 0, \bar{z}_2), \tag{21}$$

регулярные соответственно в пересечениях $H(\mathfrak{B}^4)$ с многообразиями $z_1^* = z_2^* = 0$ и $z_1^* = z_2 = 0$.

Докажем теперь обратное утверждение: две аналитические функции $k(z_1, z_2)$ и $l(z_1, \bar{z}_2)$ определяют решение $\psi(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2)$.

В самом деле, так как решение ψ действительно, имеем тождество

$$\psi(z_1, z_1^*; z_2, z_2^*) = \overline{\psi(\bar{z}_1^*, \bar{z}_1; \bar{z}_2^*, \bar{z}_2)}. \tag{22}$$

Следовательно, из (21) и (22) получаем

$$\psi(0, z_1^*, 0, z_2^*) = \overline{\psi(\bar{z}_1^*, 0, \bar{z}_2^*, 0)} = \overline{k(\bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*)}, \tag{23}$$

$$\psi(0, z_1^*, z_2, 0) = \overline{\psi(\bar{z}_1^*, 0, 0, \bar{z}_2)} = \overline{l(\bar{z}_1^*, \bar{z}_2)}. \tag{24}$$

Это показывает, что все значения функции ψ в $H(\mathfrak{B}^4)$, для которых один элемент из пары (z_1, z_1^*) и один элемент из пары (z_2, z_2^*) равны нулю, выражаются через k и l. Таким образом, используя упомянутый выше результат, мы можем построить решение ψ проведенным выше итерационным процессом, выразив его через две аналитические функции k и l двух комплексных переменных.

Итак, функцию ψ можно получить из k и l с помощью усложненного интегрального оператора, линейного по обеим этим аналитическим функциям и задающего линейное отображение семейства пар аналитических функций в пространство решений рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Мы можем дать несколько более удобный интегральный оператор, определяющий то же самое отображение и тесно связанный с описанным выше оператором.

Этот новый интегральный оператор можно получить при помощи аналогичного оператора, широко используемого в теории одного уравнения в частных производных. Действительно, пусть

$$\Delta_{x_1, y_1}\psi(z_1, \bar{z}_1) = F(z_1, \bar{z}_1)\psi, \quad z = x_1 + iy_1, \tag{25}$$

где функция F аналитична по z_1 и $\bar{z}_1$. Тогда мы можем найти ядро $E_1(z_1, \bar{z}_1, t_1)$, такое, что оно является действительнозначной аналитической функцией всех этих переменных при $|t_1| \leqslant 1$ и

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{-1}^{1} E_1(z_1, \bar{z}_1, t_1) f\left(z_1\left(1 - t_1^2\right)\right) \frac{dt_1}{\sqrt{1 - t_1^2}}\right\} = \psi(z_1, \bar{z}_1) \tag{26}$$

является решением уравнения (25) при любой аналитической функции f (см. стр. 26 и 29). Аналогично, пусть $E_2(z_2, \bar{z}_2, t_2)$ — соответствующее ядро для дифференциального уравнения

$$\Delta_{x_2, y_2}\psi(z_2, \bar{z}_2) = G(z_2, \bar{z}_2)\psi, \quad z_2 = x_2 + iy_2. \tag{27}$$

Следовательно, существует *пара* порождающих функций $E_k(z_k, z_k^*, t_k)$ $(k = 1, 2)$, которые являются целыми функциями от z_k и z_k^* и аналитичны по t_k в замкнутом единичном круге $|t_k| \leqslant 1$, и при этом любое решение системы (1), действительное в разъясненном выше смысле, для *действительных* значений x_1, y_1, x_2, y_2 может быть выражено в виде

$$\begin{aligned}\psi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) &= \\ = \operatorname{Re}\Bigg\{ \int_{t_1=-1}^{1} \int_{t_2=-1}^{1} & E_1(z_1, \bar{z}_1, t_1) E_2(z_2, \bar{z}_2, t_2) \times \\ &\times \left[f\left(z_1\left(1 - t_1^2\right), z_2\left(1 - t_2^2\right)\right) + \right. \\ &\left. + g\left(z_1\left(1 - t_1^2\right), \bar{z}_2\left(1 - t_2^2\right)\right)\right] \frac{dt_1}{\sqrt{1 - t_1^2}} \frac{dt_2}{\sqrt{1 - t_2^2}} \Bigg\},\end{aligned} \tag{28}$$

где f и g — аналитические функции соответственно от (z_1, z_2) и (z_1, z_2^*), регулярные в окрестности начала координат.

В формуле (28) мы имеем еще некоторую свободу в выборе f и g, так как, не изменяя интеграла, мы можем добавить к f произвольную функцию $\alpha(z_1)+\beta(z_2)$ и вычесть из g функцию $\alpha(z_1)+\overline{\beta(z_2)}$. Пользуясь этой свободой, мы можем потребовать, чтобы было

$$g(0,\ z_2^*)\equiv g(z_1,\ 0)\equiv 0. \tag{29}$$

Формула (28) позволяет продолжить полученное решение в комплексную область. Используя то, что ядра $E_1(z_1,\ \bar{z}_1,\ t_1)$ и $E_2(z_2,\ \bar{z}_2,\ t_2)$ принимают действительные значения, и их фундаментальное свойство: $E_1(z_1,\ 0,\ t_1)=$ $=E_1(0,\ z_1^*,\ t_1)=1$, $E_2(z_2,\ 0,\ t_2)=E_2(0,\ z_2^*,\ t_2)=1$, мы получаем простые интегральные соотношения между аналитическими функциями f, g, фигурирующими в формуле (28), и рассмотренными ранее аналитическими функциями k, l

$$\begin{aligned} k(z_1,\ z_2)&=\frac{1}{2}\pi^2\overline{f(0,\ 0)}+\\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{t_1=-1}^{1}\int\limits_{t_2=-1}^{1} f\left(z_1\left(1-t_1^2\right),\ z_2\left(1-t_2^2\right)\right)\frac{dt_1}{\sqrt{1-t_1^2}}\,\frac{dt_2}{\sqrt{1-t_2^2}},\\ l\left(z_1,\ z_2^*\right)&=\\ &=\frac{1}{2}\int\limits_{t_1=-1}^{1}\int\limits_{t_2=-1}^{1}\left[f\left(z_1\left(1-t_1^2\right),\ 0\right)+\overline{f\left(0,\ \bar{z}_2^*\left(1-t_2^2\right)\right)}+\right.\\ &\qquad\left.+g\left(z_1\left(1-t_1^2\right),\ z_2^*\left(1-t_2^2\right)\right)\right]\frac{dt_1}{\sqrt{1-t_1^2}}\,\frac{dt_2}{\sqrt{1-t_2^2}}. \end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом, мы легко определим k и l, если заданы f и g. Обратно, по заданным k и l мы из (30) можем единственным образом найти f и g. Определим сначала $f(z_1,\ z_2)$ из первого уравнения (30), сравнивая коэффициенты. Для первого члена получаем

$$k(0,\ 0)=\pi^2\,\mathrm{Re}\,[f(0,\ 0)]. \tag{31}$$

Это показывает, что $k(0,\ 0)$ должно быть действительным. Последнее следует также из равенства

$$k(0,\ 0)=\psi(0,\ 0,\ 0,\ 0), \tag{31'}$$

так как ψ действительно при $z_1^* = \bar{z}_1$, $z_2^* = \bar{z}_2$. С другой стороны, f определяется из (30) с точностью до аддитивной мнимой постоянной, но это не влияет на интегральный оператор (28). Определив функцию f, мы вводим ее во второе уравнение (30) и находим $g(z_1, z_2^*)$ снова методом сравнения коэффициентов. Заметим, что условие (29) автоматически выполняется в силу соотношений

$$k(z_1, 0) = l(z_1, 0), \quad k(0, z_2^*) = \overline{l(0, z_2)}, \tag{32}$$

которые следуют из (21) и (23).

Таким образом, установлена эквивалентность интегрального оператора (28) и оператора, описанного ранее (стр. 153—160), и определено значение функций f и g.

Кроме (28), получено еще одно представление для решений системы (1). Для всякой системы (1) существуют четыре функции $T_k(z_k, z_k^*, \zeta_k)$ и $P_k(z_k, z_k^*, \zeta_k)$ $(k = 1, 2)$, целые по всем указанным переменным и такие, что каждое действительное решение системы (1) может быть выражено в форме

$$\begin{aligned}
&\psi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \\
&= \operatorname{Re}\Bigg\{ g_1(z_1, z_2) + \int_{\zeta_1=0}^{z_1} T_1(z_1, \bar{z}_1, \zeta_1)\, g_1(\zeta_1, z_2)\, d\zeta_1 + \\
&+ \int_{\zeta_2=0}^{z_2} T_2(z_2, \bar{z}_2, \zeta_2)\, g_1(z_1, \zeta_2)\, d\zeta_2 + \\
&+ \int_{\zeta_1=0}^{z_1} \int_{\zeta_2=0}^{z_2} \left[\prod_{k=1}^{2} T_k(z_k, \bar{z}_k, \zeta_k) \right] g_1(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2 + \\
&+ g_2(z_1, \bar{z}_2) + \int_{\zeta_1=0}^{z_1} P_1(z_1, \bar{z}_1, \zeta_1)\, g_2(\zeta_1, \bar{z}_2)\, d\zeta_1 + \\
&+ \int_{\zeta_2=0}^{\bar{z}_2} P_2(z_2, \bar{z}_2, \zeta_2)\, g_2(z_1, \zeta_2)\, d\zeta_2 + \\
&+ \int_{\zeta_1=0}^{z_1} \int_{\zeta_2=0}^{\bar{z}_2} \left[\prod_{k=1}^{2} P_k(z_k, \bar{z}_k), \zeta_k \right] g_2(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \Bigg\},
\end{aligned} \tag{33}$$

где g_1 и g_2 — аналитические функции двух комплексных переменных, регулярные в окрестности начала координат.

Используя представление (33), можно найти оценки для некоторых классов решений системы (1). В качестве примера такого рода результатов мы сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 6.1. *Поставим в соответствие функциям* T_k и P_k, *фигурирующим в формуле* (33), *функции*[1]) $\tilde{T}_k$ *и* $\tilde{P}_k$, *зависящие только от* $|z_k|$, $|z_k^*|$ *и такие, что*

$$\begin{gathered} |T_k(z_k, z_k^*, \zeta_k)| \leqslant \tilde{T}_k(|z_k|, |z_k^*|), \\ |P_k(z_k, z_k^*, \zeta_k)| \leqslant \tilde{P}_k(|z_k|, |z_k^*|), \\ k=1, 2, \end{gathered} \tag{34}$$

при $|z_k| \leqslant 1$, $|z_k^*| \leqslant 1$, $|\zeta_k| \leqslant |z_k|$. *Пусть решение* ψ *системы* (1) *представляется в виде* (33), *где функция* g_1 *предполагается регулярной в области* $|z_1| \leqslant 1$ $|z_2| \leqslant 1$, *а значение* $g_1(0, 0)$ — *действительным. Далее, пусть при продолжении на комплексные значения,* x_k, y_k *функция* ψ *обладает тем свойством, что* $\psi(z_1, 0, \exp(i\varphi_2), 0)$ *и* $\psi(z_1, 0, 0, \exp(-i\varphi_2))$ *при любом* φ_2, $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant 2\pi$, *являются однозначными функциями от* z_1 *при* $|z_1| \leqslant 1$ *и удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{gathered} |\psi(0, 0, \exp(i\varphi_2), 0)| \leqslant \alpha, \\ |\psi(0, 0, 0, \exp(-i\varphi_2))| \leqslant \alpha, \\ \left|\frac{\partial\psi(z_1, 0, \exp(i\varphi_2), 0)}{\partial z_1}\right|_{z_1=0} \leqslant \beta, \\ \left|\frac{\partial\psi(z_1, 0, 0, \exp(-i\varphi_2))}{\partial z_1}\right|_{z_1=0} \leqslant \beta, \end{gathered} \tag{35}$$

где α *и* β — *удобно выбранные постоянные. Тогда в области*

$$\{|z_1| \leqslant 1\} \times \{|z_2| \leqslant 1\}$$

[1]) Существование таких функций немедленно следует из аналитичности T_k и P_k.

имеем

$$|\psi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)| \leqslant$$
$$\leqslant [4\alpha + 2\beta |z_1| (1 - |z_1|)^{-2}] \left\{ \prod_{k=1}^{2} [1 + \tilde{T}_k(|z_k|, |z_k|) |z_k|] + \right.$$
$$\left. + 2 \prod_{k=1}^{2} [1 + \tilde{P}_k(|z_k|, |z_k|) |z_k|] \right\}. \quad (36)$$

Доказательство, данное в работе [36, § 3], по существу состоит в использовании представления (33) наряду с теоремой об искажении Кёбе.

Операторы вида (28) применялись в [14, 123] для исследования некоторых классов систем (1), определенных следующим образом.

Говорят, что система (1) принадлежит классу $\mathfrak{E}$, если в представлении для ее решений можно выбрать порождающие функции вида

$$E_k = \exp\left[\sum_{\mu=0}^{m_k} q_{k\mu}(z_k, \overset{*}{z}_k) t_k^{\mu}\right], \qquad k = 1, 2. \quad (37)$$

В [36] получены необходимые и достаточные условия, чтобы система (1) принадлежала классу $\mathfrak{E}$, и установлены соотношения между функциями F, G в (1) и коэффициентами $q_{k\mu}$ в (37). Например, система двух «волновых» уравнений $\Delta\psi_k + c^2\psi_k = 0$ принадлежит классу $\mathfrak{E}$. Кроме того, доказан следующий результат.

Теорема 6.2. *Пусть* $\psi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ — *любое решение некоторой системы класса* $\mathfrak{E}$, *соответствующее рациональным функциям* g_1 *и* g_2 *в представлении* (33). *Тогда* ψ *удовлетворяет обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям по каждой из переменных* x_1, x_2, y_1, y_2. *Коэффициенты этих уравнений являются рациональными функциями коэффициентов* $q_{k\mu}$ *из* (37). *Порядок уравнений зависит только от* m_1, m_2 *в* (37), *но не зависит от* g_1 *и* g_2.

Теорема 6.2 позволяет исследовать решения систем класса $\mathfrak{E}$ с помощью теории Фукса для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Мы видели, что в случае одного уравнения в частных производных интегральные операторы позволяют изучать проблему коэффициентов, т. е. находить соотношения между свойствами решений и коэффициентами их разложений в ряд. В [36, 123] доказано, что подобные возможности существуют и для систем вида (1). Соответствующее исследование опирается на интегральные операторы, представленные в форме (33). Для этих операторов очень просты соотношения между решением ψ и соответствующими аналитическими функциями g_1 и g_2, а именно

$$\psi(z_1, 0, z_2, 0) = g_1(z_1, z_2), \tag{38}$$

$$\psi(z_1, 0, 0, \bar{z}_2) = g_1(z_1, \bar{z}_2) + g_2(z_1, 0) \tag{39}$$

(см. [42]). В [123] показано, что сначала мы получаем соотношения между подпоследовательностями $\{c_{m_0p_0}\}$, $\{c_{m_0q_0}\}$ коэффициентов ряда

$$\psi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \sum_{m,\, n,\, p,\, q=0} c_{mnpq}\, z_1^m \bar{z}_1^n z_2^p \bar{z}_2^q \tag{40}$$

и свойствами ψ. Как и в случае одного дифференциального уравнения, можно получить информацию о поведении ψ и из других подпоследовательностей. Это можно сделать с помощью соотношений между различными подпоследовательностями.

[7, 8, 10, 14, 28, 34, 36, 38, 42, 81, 82, 93, 94, 113, 123, 201, 221]

Глава V

УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ И НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Введение. Упрощенный случай уравнения смешанного типа [1])

В главе I рассматривались дифференциальные уравнения (I. 1.6) с двумя переменными в случае, когда коэффициенты A, B, C — целые функции от z и z^*. Некоторые из полученных там результатов можно обобщить на случай, когда A, B, C имеют особенности. Однако многие результаты, относящиеся к интегральным операторам первого рода, не применимы в этом случае.

Уравнения смешанного типа, т. е. уравнения, эллиптические в одной части плоскости и гиперболические в дополнительной части плоскости, можно в некоторых случаях преобразовать в уравнения вида (I. 1.6) (см. стр. 26) с сингулярными коэффициентами. Некоторые классы таких уравнений смешанного типа изучены в последнее время, в особенности те из них, которые имеют приложения в механике и физике.

В связи с теорией течений сжимаемой жидкости изучен весьма специальный класс таких уравнений, а именно:

$$\mathbf{M}(\psi) = \psi_{xx} + l(x)\psi_{yy} = 0, \quad l(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n(-x)^n, \quad a_1 > 0, \tag{1}$$

где $l(x) > 0$ при $x < 0$ и $l(x) < 0$ при $x > 0$. В этих исследованиях получены интегральные операторы, преобразующие функции одного переменного в решения уравнения (1).

Преобразованием

$$\lambda = \lambda(x) = \int_{t=0}^{x} [l(t)]^{1/2}\, dt \tag{2}$$

---

[1]) Первые пять параграфов настоящей главы основаны на [23, 24, 27, 29, 31].

уравнение (1) приводится к виду

$$\psi_{\lambda\lambda}+\psi_{yy}+4N(\lambda)\psi_{\lambda}=0, \quad N \doteq \frac{1}{8} l^{-3/2} l_x. \tag{3}$$

Предположим, что

а) $N(\lambda)$ — аналитическая функция для $-\infty<\lambda<0$, действительная при $\lambda<0$;

б) в окрестности точки $\lambda=0$ функция N имеет разложение

$$N(\lambda)=\lambda^{-1}\left[-\left(\frac{1}{12}\right)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_{\nu}(-\lambda)^{2\nu/3}\right], \quad \beta_1>0;$$

в) интеграл $\exp\left[-\int\limits_{-\infty}^{\lambda} 2N(t)\,dt\right]=H(\lambda)$ существует для всех $\lambda<0$. Преобразование (2) действительно только при $x<0$, $\lambda<0$. При $x>0$ величина λ становится чисто мнимой. Полагая

$$\lambda=i\Lambda \tag{4}$$

и вводя в качестве независимых переменных y и действительную величину Λ, запишем уравнение (3) в виде

$$-\psi_{\Lambda\Lambda}+\psi_{yy}+4N_1(\Lambda)\psi_{\Lambda}=0, \tag{3a}$$

где $N_1(\Lambda)$ элементарным образом связано с $N(\lambda)$.

Замечание. При рассмотрении уравнения (3) можно аналитически продолжить решение $\psi(\lambda, y)$ на комплексные значения λ, полагая $\lambda_1=\lambda+i\Lambda$ и формально используя интегральные операторы, введенные ранее в эллиптическом случае. Возникающая здесь трудность связана с тем, что $N(\lambda)$ обращается в бесконечность при $\lambda=0$.

При рассмотрении уравнения (3) (для $\lambda<0$) можно построить решения, используя интегральные операторы либо первого рода, либо экспоненциального типа. Однако полученные таким путем решения имеют смысл только в части полуплоскости $\lambda<0$. Поэтому интересно рассмотреть новый тип интегральных операторов, что будет сделано в настоящей главе.

Введем небольшое упрощение и вместо ψ рассмотрим функцию [1])

$$\psi^* = \psi/H, \quad H = H(\lambda) = e^{-2\int\limits_{-\infty}^{\lambda} N(t)\,dt}. \tag{5}$$

Тогда ψ^* должна удовлетворять уравнению

$$\psi^*_{\lambda\lambda} + \psi^*_{yy} + 4F\psi^* = 0, \quad F = -N^2 - \frac{1}{2}N_\lambda. \tag{6}$$

Простым вычислением находим, что F допускает в окрестности точки $\lambda = 0$ разложение вида

$$F = s^{-3}(\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \ldots), \quad s = (-\lambda)^{2/3}. \tag{7}$$

Интересно заметить, что

$$\alpha_0 = \frac{5}{144}, \quad \alpha_1 = 0,$$

независимо от значений коэффициентов разложения для $l(x)$, данного в формуле (1).

Сначала построим интегральный оператор для уравнения (6) в частном случае, когда F сводится к единственному члену, а именно

$$F = \frac{5}{144}s^{-3} = \frac{5}{144}\lambda^{-2} = \frac{5}{36}(Z + \bar{Z})^{-2},$$

где $Z = \lambda + iy$, $\bar{Z} = \lambda - iy$; назовем этот случай *упрощенным* (*случаем Трикоми*). Непосредственное вычисление показывает, что порождающая функция $E^*(Z, \bar{Z}, t)$ должна удовлетворять уравнению в частных производных [см. (1.2.8) стр. 31]

$$B_3(E^*) \equiv (1 - t^2)E^*_{\bar{Z}t} - \frac{1}{t}E^*_{\bar{Z}} + 2ZtE^*_{Z\bar{Z}} + 2ZtFE^* = 0. \tag{8}$$

Теперь, если предположить, что решение уравнения (8) имеет вид [2]) $E^* = \tilde{E}^{*(T)}(u)$, где

$$u = \frac{t^2 Z}{Z + \bar{Z}} = \frac{t^2(\lambda + iy)}{2\lambda}, \tag{9}$$

[1]) См. также [27, стр. 451, примечание 10].

[2]) Мы используем обозначение $\tilde{E}^{*(T)}$, чтобы подчеркнуть, что эта порождающая функция относится к „упрощенному случаю“ уравнения (8) и что она зависит только от простой комбинации (9) переменных Z, $\bar{Z}$, t.

то мы найдем, что (8) сводится к *обыкновенному* дифференциальному уравнению

$$u(1-u)\tilde{E}^{*(T)}_{uu}+\left(\frac{1}{2}-2u\right)\tilde{E}^{*(T)}_{u}-\frac{5}{36}\tilde{E}^{*(T)}=0. \quad (10)$$

Но это есть гипергеометрическое дифференциальное уравнение с параметрами, обычно обозначаемыми через α, β, γ и равными

$$\alpha=\frac{1}{6}, \quad \beta=\frac{5}{6}, \quad \gamma=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (10) дается формулой [1])

$$\tilde{E}^{*(T)}(u)=A_1\mathrm{F}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, u\right)+B_1u^{1/2}\mathrm{F}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, u\right) \quad (11а)$$

для $|u|<1$,

$$\tilde{E}^{*(T)}(u)=A_2u^{-1/6}\mathrm{F}\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{u}\right)+$$
$$+B_2u^{-5/6}\mathrm{F}\left(\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{u}\right) \quad (11б)$$

для $|u|>1$,

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные.

Таким образом, функциям (11а) и (11б) соответствует пара интегральных представлений решений уравнения (6), получаемая при подстановке (11а) или (11б) в равенство

$$\psi^*(\lambda, y)=\int_{-1}^{1}\tilde{E}^{*(T)}(u)\, f\left(\frac{1}{2}Z(1-t^2)\right)dt/(1-t^2)^{1/2}, \quad (12)$$

где u определяется формулой (9).

§ 2. Обобщение представления (1.12) решений уравнения (1.6)

В настоящем параграфе мы рассмотрим порождающую функцию E^* в случае, когда в уравнении (I. 1.2) $D\equiv 0$

---

[1]) Напомним определение $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma; u)$, а именно:

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma; u)=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}u+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}u^2+\ldots, \quad |u|<1.$$

и F — не целая функция; вместо этого мы предполагаем, что F разлагается в ряд Дирихле [1])

$$F(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{n\lambda}, \quad \operatorname{Re}\lambda<0. \tag{1}$$

Напишем аналогичное [2]) (1.11a) разложение

$$E_1^*\equiv E^*=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(t^2Z\right)^n Q^{(n,\,1)}(\lambda) \qquad \left(Q^{(0,\,1)}=1\right). \tag{2}$$

Подставляя (2) в (I. 1.2) и приравнивая нулю коэффициенты при $t^{2n-1}Z^n$, мы получаем следующую систему уравнений:

$$Q_\lambda^{(1,\,1)}+4F=0, \tag{3a}$$

$$(2n+1)\,Q_\lambda^{(n+1,\,1)}+Q_{\lambda\lambda}^{(n,\,1)}+4FQ^{(n,\,1)}=0, \quad n\geqslant 1. \tag{3б}$$

Уравнения (3а), (3б) определяют каждую функцию $Q^{(n,\,1)}$, $n\geqslant 1$, с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Чтобы определить эти функции единственным образом, можно наложить требование

$$Q^{(n,\,1)}(a)=0, \tag{4}$$

где a — произвольное отрицательное число или $-\infty$. Нам удобно выбрать $a=-\infty$, так что условие нормировки (4) приобретает вид

$$Q^{(n,\,1)}(-\infty)=0. \tag{5}$$

---

[1]) Здесь мы дополнительно предполагаем, что F допускает представление (1) в окрестности $\lambda=-\infty$. Тогда из (а), (б), (в) (стр. 167) следует, что представление (1) справедливо для $\lambda<0$.

[2]) Равенство (2) представляет собой аналог разложения (I. 2.7); здесь мы пишем $Q^{(n,\,1)}(\lambda)$ вместо $\int\limits_0^{Z^*} P^{(2n)}(Z, Z^*)\,dZ^*$.

Кроме функций $\{Q^{(n,\,1)}\}$, определяемых уравнениями (3а) и (3б), существует другая последовательность $\{Q^{(n,\,2)}\}$, которую мы здесь не рассматриваем, так как для нее представление, аналогичное (8), сводится к тождеству $\psi^*\equiv 0$.

Уравнение (I. 1.2) приобретает в этом случае вид

$$(1-t^2)\,E_{\bar{Z}t}^*-t^{-1}E_{\bar{Z}}^*+2Zt\left[E_{Z\bar{Z}}^*+FE^*\right]=0,$$

где $\lambda=(Z+\bar{Z})/2$. См. также [23, стр. 36].

Замечание. В рассмотренном в § 1 упрощенном случае имеем

$$Q^{(0,\,1)}(\lambda)=1, \tag{6a}$$

$$Q^{(n,\,1)}(\lambda)=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{6}+n-1\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}+1\right)\ldots\left(\frac{5}{6}+n-1\right)}{n!\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)(2\lambda)^n},$$

$$n\geqslant 1. \tag{6б}$$

При исследовании решений уравнения (1.6) удобно использовать вместо представления (I. 1.4) представление (I. 3.4б) (см. стр. 34). Основной результат настоящего параграфа содержится в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть* $F(\lambda)$ — *аналитическая функция от* λ, *допускающая разложение* (1) *в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda<0$. *Тогда* F *обладает тем свойством, что для любого* $\varepsilon>0$ *существует* (*конечное*) *положительное число* $c(\varepsilon)$, *для которого*

$$\left|\frac{d^kF}{d\lambda^k}\right|\leqslant\frac{c(\varepsilon)\,(k+1)!}{(\varepsilon-\lambda)^{k+2}},\ \lambda\ \textit{действительно и}\ \lambda<-\varepsilon,$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad \varepsilon>0. \tag{7}$$

Пусть $g(\zeta)$ — *аналитическая функция, регулярная в области* $\mathfrak{B}$, *содержащей начало координат. Тогда ряд*

$$\psi^*(\lambda,\ y)=\operatorname{Re}\left\{g(Z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\,Q^{(n,\,1)}(\lambda)\,g^{[n]}(Z)\right\}, \tag{8}$$

где [1] $g^{[0]}(Z)=g(Z)$, $g^{[n]}(Z)=\int\limits_0^Z g^{[n-1]}(\zeta)\,d\zeta$, *сходится и определяет решение уравнения* (1.6) *в каждой односвязной области, лежащей в пересечении* $\mathfrak{B}$

---

[1]) $g^{[n]}(z)$ можно также представить в виде *одного* интеграла [см. (I. 3.4б), стр. 34].

с областью, определяемой парой неравенств $-\infty < \lambda < 0$, $y^2 < 3\lambda^2$. (Мы полагаем $Z = \lambda + iy$.)

Доказательство. Введем функцию

$$G(Z) = \int_{-\infty}^{Z} F(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{2nZ}, \quad \beta_n = \frac{a_n}{2n}, \quad \operatorname{Re} Z < 0. \tag{9}$$

Для каждого $\lambda^{(0)} < 0$ существует некоторая постоянная, скажем $A\ (= A(\lambda^{(0)}))$, такая, что при $\operatorname{Re} Z\ (= \lambda) \leqslant \lambda^{(0)}$ выполняется неравенство

$$|G(Z)| < Ae^{2\lambda}, \quad |Z| \leqslant |Z_0| < 1. \tag{10}$$

Пусть p — фиксированная положительная постоянная, $p < 1$. Проведем окружность $\mathfrak{C}$ с центром $Z = \lambda_1$, где $\lambda_1 < \frac{\lambda^{(0)}}{1-p}$, и радиусом $(-p\lambda_1)$. Эта окружность лежит целиком слева от прямой $\lambda = \lambda^{(0)}$. Согласно интегральной формуле Коши,

$$\left(\frac{d^k F}{dZ^k}\right)_{Z=\lambda_1} = \left(\frac{d^{k+1} G}{dZ^{k+1}}\right)_{Z=\lambda_1} = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{G(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - \lambda_1)^{k+2}}. \tag{11}$$

Положим $\zeta = \lambda_1 - p\lambda_1 e^{i\varphi}$; тогда (11) примет вид

$$\left(\frac{d^k F}{dZ^k}\right)_{Z=\lambda_1} = \frac{(k+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{G(\lambda_1 - p\lambda_1 e^{i\varphi})}{(-p\lambda_1 e^{i\varphi})^{k+1}}\, d\varphi. \tag{12}$$

Однако, в силу (10),

$$\left|G(\lambda_1 - p\lambda_1 e^{i\varphi})\right| \leqslant A(\lambda^{(0)})\, e^{2 \operatorname{Re}(\lambda_1 - p\lambda_1 e^{i\varphi})}. \tag{13}$$

Так как $\operatorname{Re}(\lambda_1 - p\lambda_1 e^{i\varphi}) \leqslant \lambda_1(1-p)$, имеем

$$\left|G(\lambda_1 - p\lambda_1 e^{i\varphi})\right| \leqslant A(\lambda^{(0)})\, e^{2\lambda_1(1-p)} \leqslant A(\lambda^{(0)}). \tag{14}$$

Так как $\lambda_1 < \frac{\lambda^{(0)}}{1-p}$, существует константа, скажем $\tilde{\gamma}\ (= \tilde{\gamma}(p, \lambda^{(0)}))$, такая, что правая часть неравенства (14) меньше γ при всех таких λ_1. Таким образом,

$$\left|\frac{d^k F}{dZ^k}\right|_{Z=\lambda_1} \leqslant \frac{\gamma(p, \lambda^{(0)})\,(k+1)!}{(-p\lambda_1)^{k+2}}, \quad \gamma = -p\lambda_1\tilde{\gamma}. \tag{15}$$

Для $\lambda \leqslant -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, неравенство (7) следует немедленно из (15)[1]). Теперь пусть задано $\lambda < 0$. Определим $\lambda^{(0)} < 0$ и p, $0 < p < 1$, такие, что $\lambda < \frac{\lambda^{(0)}}{1-p}$. Числам $\lambda^{(0)}$ и p соответствует упомянутая выше величина $\gamma(p, \lambda^{(0)})$. Для функций $Q^{(n,1)}$, введенных в начале этого параграфа, определим мажоранты $\tilde{Q}^{(n)}$ по рекуррентным формулам

$$\tilde{Q}^{(1)} = 4\gamma \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(-p\lambda)^2} = -\frac{4\gamma}{p^2\lambda}, \tag{16а}$$

$$(2n+1)\tilde{Q}^{(n+1)}_{\lambda} =$$
$$= \tilde{Q}^{(n)}_{\lambda\lambda} + 4\gamma(-\lambda p)^{-2} \int_{-\infty}^{\lambda} \tilde{Q}^{(n)}_{\lambda}\, d\lambda, \quad \tilde{Q}^{(n)}(-\infty) = 0. \tag{16б}$$

Докажем теперь по индукции, что $\tilde{Q}^{(n)}$ удовлетворяют равенствам

$$\tilde{Q}^{(n)}_{\lambda} = \gamma^{(n)}(-p\lambda)^{-n-1}, \tag{17}$$

где $\gamma^{(n)}$ — подходящим образом выбранные постоянные. (В частности, $\gamma^{(1)} = 4\gamma$.) Действительно, предположим, что (17) имеет место для $n = n_0$. Тогда

$$(2n_0+1)\,\tilde{Q}^{(n_0+1)}_{\lambda} = \gamma^{(n_0)}\left((-p\lambda)^{-(n_0+1)}\right)_{\lambda} +$$
$$+ 4\gamma(-\lambda p)^{-2} \int_{-\infty}^{\lambda} \gamma^{(n_0)}(-p\lambda)^{-(n_0+1)}\, d\lambda, \tag{18а}$$

или

$$(2n_0+1)\,\tilde{Q}^{(n_0+1)}_{\lambda} = (-p\lambda)^{-(n_0+2)}\left[p\gamma^{(n_0)}(n_0+1) + \frac{4\gamma\gamma^{(n_0)}}{pn_0}\right], \tag{18б}$$

т. е.

$$\gamma^{(n_0+1)} = \gamma^{(n_0)}\,\frac{[p(n_0+1) + 4\gamma/pn_0]}{2n_0+1}. \tag{19}$$

---

[1]) Предположение о наличии у F представления (1) можно заменить условиями (а), (б), (в) (стр. 167) и (7).

Таким образом,

$$\frac{\gamma^{(n_0+1)}}{\gamma^{(n_0)}}=\frac{p(n_0+1)}{2n_0+1}+\frac{4\gamma}{pn_0(2n_0+1)}, \tag{20}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma^{(n+1)}}{\gamma^{(n)}}=\frac{p}{2}. \tag{21}$$

Так как p может быть взято сколь угодно близким к 1, мажорирующий ряд $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z^n\widetilde{Q}^{(n)}(\lambda)$, а следовательно, и ряд (2) сходятся при $|Z/2\lambda|<1$, или $y^2<3\lambda^2$. Отсюда следует утверждение теоремы, и доказательство закончено.

В заключение этого параграфа коротко рассмотрим метод продолжения оператора E^*, определенного формулой (2) [и, следовательно, представления (8) для решений уравнения (1.6)], на всю полуплоскость $\operatorname{Re} Z<0$; таким образом, будет снято требование, введенное в формулировке теоремы 1, чтобы точка Z принадлежала клинообразной области $y^2<3\lambda^2$. Полагая $X=e^Z$, мы видим, что $F(Z)$ становится аналитической функцией для $|X|<1$ с разложением в ряд Тейлора

$$F(Z)=\widetilde{F}(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n X^n.$$

Для любого $\alpha>0$ определяем приближение к этой функции следующим образом:

$$F_\alpha(Z)=\widetilde{F}_\alpha(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\Gamma(1+n\alpha)}X^n.$$

Последний ряд сходится при всех X, и из теории сходящихся рядов известно, что его сумма стремится к $F(X)$ при $\alpha\to 0$ не только в круге $|X|<1$, но также и в наибольшей области, звездной по отношению к $X=0$, в которой $\widetilde{F}(X)$ регулярна. Для каждого α мы связываем с $F_\alpha(Z)$ оператор $\overset{*}{E}_\alpha$ тем же способом, как в начале этого параграфа мы связывали E^* с $F(Z)$. Далее мы определяем последовательность функций $\psi_\alpha^*(\lambda, y)$ по аналогии с формулой (8); сразу видно, что для этих разложений ограничение $y^2 < 3\lambda^2$ может быть отброшено. Затем легко показать, что существует предел $\lim\limits_{\alpha \to 0} \psi_\alpha^*(\lambda, y)$, который удовлетворяет уравнению (1.6) в каждой односвязной области, лежащей в пересечении полуплоскости $\operatorname{Re} Z < 0$ с областью регулярности для $g(Z)$. Следовательно, решение, определяемое формулой (8), аналитически продолжается за пределы упомянутой выше клинообразной области.

§ 3. Оператор (1.11б) в общем случае

В § 2 мы рассмотрели порождающую функцию, которая при подстановке в (1.12) дает решения уравнения (1.6) и которая в „упрощенном случае"

$$F = \frac{5}{144\lambda^2}$$

(см. § 1) сводится к гипергеометрической функции от $u\left(= \frac{t^2 Z}{2\lambda}\right)$, а именно [1]), $F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, u\right)$ (см. 1.11а). В настоящем параграфе мы получим пару порождающих функций, которые сводятся в „упрощенном случае" к паре функций, фигурирующих в (1.11б); каждая из функций последней пары является (если отбросить множитель, равный соответствующей степени u) гипергеометрической функцией от $1/u$ [в то время как в (1.11а) входят гипергеометрические функции от u]. Таким путем мы получим порождающие функции, дающие решения уравнения (1.6) в области, определяемой парой неравенств $y^2 > 3\lambda^2$, $\lambda < 0$; эта область является дополнением в полуплоскости $\lambda = \operatorname{Re} Z < 0$ к той области, в которой действовала порождающая функция, определенная в § 2.

[1]) Как указывалось в примечании 2 на стр. 170 предыдущего параграфа, можно определить другую порождающую функцию, которая, однако, дает только тривиальное решение $\psi^* \equiv 0$ уравнения (1.6).

Введем две последовательности функций $\{q^{(n,k)}(\lambda)\}$, $n=0, 1, 2, \ldots, k=1, 2$, следующим образом:

$$q^{(0,k)}_{\lambda\lambda}+4F(\lambda)\,q^{(0,k)}=0, \tag{1а}$$

$$q^{(n,k)}_{\lambda\lambda}+2\left(n-1+\frac{2k}{3}\right)q^{(n-1,k)}_{\lambda}+4F(\lambda)\,q^{(n,k)}=0, \tag{1б}$$

$$n\geqslant 1.$$

Чтобы определить каждую из этих функций однозначно, предположим дополнительно, что они допускают разложение в ряд следующего вида:

$$q^{(n,k)}(\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_{\nu}^{(n,k)}(-\lambda)^{n-1/2+(2/3)(k+\nu)}, \tag{2}$$

где первые два коэффициента $C_0^{(n,k)}$, $C_1^{(n,k)}$ каждого ряда удовлетворяют условиям

$$C_0^{(0,1)}=2^{1/6},$$

$$C_0^{(n,1)}=\frac{2^{n+1/6}}{n!}\times \tag{3а}$$

$$\times\frac{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{6}+n-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{2}{3}+n-1\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}+n-1\right)},$$

$$n\geqslant 1,$$

$$C_0^{(0,2)}=2^{5/6},$$

$$C_0^{(n,2)}=\frac{2^{n+5/6}}{n!}\times \tag{3б}$$

$$\times\frac{\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}+1\right)\cdots\left(\frac{5}{6}+n-1\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{4}{3}+n-1\right)}{\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{5}{3}+n-1\right)},$$

$$n\geqslant 1,$$

$$C_1^{(n,1)}=0, \qquad n=0, 1, 2, \ldots. \tag{3в}$$

Сформулируем теперь теорему, которая очевидным образом связана с теоремой 2.1. Мы только наметим доказательство. Читатель может найти подробности в [27, 29].

Теорема 3.1. *Пусть функции* $q^{(n,\,k)}(\lambda)$ *определены уравнениями* (1а), (1б), (3а), (3б), (3в). *Тогда каждый ряд*[1])

$$E_2^{*(k)} \equiv E^{*(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n,\,k)}(\lambda)}{(-t^2 Z)^{n-1/2+2k/3}}, \qquad k = 1,\ 2, \tag{4}$$

сходится равномерно и абсолютно для $Z(=\lambda+iy)$, *принадлежащих любому замкнутому подмножеству области, определенной неравенствами*

$$|Z| > 2\,|\lambda|, \qquad \lambda < 0, \tag{5}$$

в предположении, что[2]) $|t| \geqslant 1$. *Кроме того, функции* $E^{*(k)}$ *удовлетворяют дифференциальному уравнению* (1.8) *и, таким образом, при подстановке в* (1.12) *порождают решения уравнения* (1.6); $E^{(k)} = HE^{*(k)}$, $H = S_0(-2\lambda)^{-1/6}\left[1 + S_1(-2\lambda)^{2/3} + \ldots\right]$ — *порождающие функции для* (1.3) ($S_0 > 0$ *и* S_1 — *действительные постоянные*). (См. [27], стр. 870.)

Замечание. Ряд (4) является порождающей функцией уравнения (1.6) при любом конечном действительном k. Если положить $q^{(n,\,k)}(\lambda) = 2^n\Gamma\left(n+\frac{2k}{3}\right)p^{(n)}(\lambda)$, то уравнение (1.б) примет вид $p^{(n)}_{\lambda\lambda} + p^{(n-1)}_{\lambda} + 4F(\lambda)\,p^{(n)} = 0$. Все другие рассуждения остаются в основном без изменения.

Как легко усмотреть из уравнения (2), удобно заменить λ новым независимым переменным s, определенным следующим образом [ср. уравнение (1.7)]:

$$s = (-\lambda)^{2/3}, \quad s \text{ действительно при } \lambda < 0. \tag{6}$$

Как указывалось в § 1,

$$F(\lambda) = s^{-3}S(s), \tag{7}$$

[1]) Нижний индекс подчеркивает, что $E^{*(k)}$ — оператор, обобщающий *второе* из двух представлений, определяемых равенствами (1.11) для „упрощенного случая“.

[2]) Таким образом, при использовании одной из функций $E_2^{*(k)}$ для образования решений уравнения (1.6) мы должны взять путь интегрирования (соединяющий точки $t=-1$ и $t=+1$), не проходящий через точки единичного круга.

где $S(s)$ — аналитическая функция в окрестности точки $s=0$, а именно, для $|s|<s_0$, где $s_0=\lambda_0^{2/3}$, а λ_0 — модуль особенности функции $\lambda^2 F(\lambda)$, ближайшей к началу координат. Если мы рассматриваем $q^{(n,k)}(\lambda)$ как функции от s, то мы сразу находим, что уравнения (1а) и (1б) приобретают вид

$$s^2 q_{ss}^{(0,k)} - \frac{1}{2} s q_s^{(0,k)} + 9S(s) q^{(0,k)} = 0, \tag{8а}$$

$$s^2 q_{ss}^{(n,k)} - 3\left(n-1+\frac{2k}{3}\right) s^{5/2} q_s^{(n-1,k)} - \frac{1}{2} s q_s^{(n,k)} + \\ + 9S(s) q^{(n,k)} = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{8б}$$

[Мы вводим замену переменного (6), так как проще анализировать поведение функций $q^{(n,k)}$ с помощью уравнений (8а), (8б), чем с помощью (1а), (1б)[1]).]

Доказательство заключается по существу в установлении следующих четырех лемм.

Лемма 1. *Функции*[2]) $q^{(n,k)}(s)$, $n \geqslant 1$, *можно выразить через* $q^{(0,k)}(s)$ *следующим образом*:

$$q^{(n,k)}(s) = 3\left(n-1+\frac{2k}{3}\right) q^{(0,k)}(s) \times \\ \times \int_0^s [q^{(0,k)}(s_1)]^{-2} s_1^{1/2} \left(\int_0^{s_1} q^{(0,k)}(s_2)\, q_{s_2}^{(n-1,k)}(s_2)\, ds_2\right) ds_1, \tag{9}$$

$$n = 1, 2, \ldots .$$

---

[1]) В работе [27, стр. 878 и след.] получены оценки сверху с помощью элементарных, но громоздких оценок коэффициентов $C_\nu^{(n,k)}$, фигурирующих в формуле (2). Этих оценок достаточно, чтобы показать, что оба ряда, определяемые формулой (4), сходятся, если только, кроме условий (5), выполнено условие $\lambda > -\lambda_0$. Таким образом, требуется, чтобы λ лежало внутри круга сходимости ряда (2). В настоящей теореме последнее ограничение снимается благодаря анализу поведения функций $q^{(n,k)}$ для *всех* (отрицательных действительных) значений λ.

[2]) Для удобства мы обозначаем функции $q^{(n,k)}(\lambda(s))$ символами $q^{(n,k)}(s)$, хотя, конечно, для новых функций следует использовать новое обозначение.

Доказательство состоит в проверке того, что функции $q^{(n,k)}(s)$, определенные формулой (9), удовлетворяют дифференциальным уравнениям (8б) и что их поведение вблизи $s=0$ согласуется с равенствами (2) и (3). См. [29, стр. 454] и [27, стр. 879].

Лемма 2. *Предел* $S_0 = \lim\limits_{\lambda\to 0^-}(-\lambda)^{1/6} H(\lambda)$ (*см.* (1.5), *стр.* 168) *существует и положителен. Далее, каждая из функций* w_0, w_2:

$$w_0 = \frac{1}{H}, \tag{10а}$$

$$w_2 = -2^{11/6}(3S_0)^{-1} w_0 \int\limits_0^\lambda H^2\, d\lambda \tag{10б}$$

удовлетворяет как функция от s *дифференциальному уравнению*[1])

$$s^2 w_{ss} - \frac{1}{2} s w_s + 9S(s)\, w = 0. \tag{11}$$

Существование и положительность постоянной S_0 немедленно следуют из определения $H(\lambda)$ и того факта, что $N(\lambda)$ мало отличается от $1/12\lambda$ для λ, близких к нулю. Чтобы проверить, что функция w_0 удовлетворяет уравнению (11), нужно просто подставить ее в (11) и принять во внимание соотношения между переменными s и λ и функциями H, N, F и S; их можно не приводить снова [см. (1.5), (1.3), (1.6), (3.7)]. Решение (10б) мы получим, подставив $w = w_0 r(s)$ в уравнение (11) и решив полученное дифференциальное уравнение относительно $r(s)$. [Постоянный множитель $-2^{11/6}(3S_0)^{-1}$ в (10б) выбирается, конечно, из соображений удобства, как мы увидим из леммы 3.] Подробности см. в [29, стр. 456].

Лемма 3. *Функции* $q^{(0,1)}$, $q^{(0,2)}$ *и функции* w_0, w_2, *определенные в лемме* 2, *связаны следующими соотношениями*:

$$q^{(0,1)}(s) = 2^{1/6} S_0 w_0(s) + 2^{-2/3} S_1 w_2(s), \tag{12а}$$

$$q^{(0,2)}(s) = w_2(s), \tag{12б}$$

[1]) Функции $H(\lambda)$ и $S(s)$ были определены ранее.

где S_0 — *постоянная, определенная в лемме* 2, *а* $S_1 = 3\beta_1$, *где*

$$N(\lambda) = \frac{1}{12\lambda} + \beta_1(-\lambda)^{-1/3} + \ldots . \qquad (13)$$

Таким образом, функции $w^{(1)}$ *и* $w^{(2)}$ *можно выразить так:*

$$w^{(1)}(s) = 2^{1/6}S_0H^{-1} + 2^{1/6}S_1S_0^{-1}H^{-1}\int_0^s H^2s^{1/2}\,ds, \qquad (14а)$$

$$w^{(2)}(s) = 2^{5/6}S_0^{-1}H^{-1}\int_0^s H^2s^{1/2}\,ds. \qquad (14б)$$

Для доказательства следует заметить, что функции $q^{(0,1)}$, $q^{(0,2)}$, w_0, w_2 все удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению (8а) и что каждая из пар $(q^{(0,1)}, q^{(0,2)})$ и (w_0, w_2) линейно независима, так что каждая функция одной пары представляется в виде линейной комбинации функций второй пары. Непосредственное вычисление тогда дает точные значения коэффициентов, фигурирующих в этих линейных комбинациях. Подробности см. в [29, стр. 457].

Лемма 4. *Для произвольного* $s_2 > 0$ *существуют три положительные постоянные* $C_1(s_2)$, $C_2(s_2)$, $C_3(s_2)$, *такие, что*

$$C_1s^{k-3/4} \leqslant q^{(0,k)}(s) \leqslant C_2s^{k-3/4}, \qquad (15а)$$

$$|q_s^{(0,k)}(s)| \leqslant C_3s^{k-7/4}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant s_2, \quad k = 1,\ 2. \qquad (15б)$$

Из уравнений (10а), (10б), (12а), (12б) и положительности функции H и постоянных S_0, S_1 видно, что обе функции $q^{(0,k)}(s)$ положительны при всех положительных s. Из уравнения (2), полагая $n = 0$, мы видим, что каждая из функций $\dfrac{q^{(0,k)}}{s^{k-3/4}}$ отделена от нуля вблизи $s = 0$; это замечание помогает установить (15а). Аналогичное рассуждение применимо к (15б). Подробности см. в [29, стр. 458].

Объединяя оценки для функций $q^{(0,k)}$ и $q_s^{(0,k)}$, данные в лемме 4, с представлением (9) функций $q^{(n,k)}$, $n \geqslant 1$, мы сразу получаем оценки для функций $q^{(n,k)}$, которые гарантируют абсолютную сходимость рядов (4) в области, указанной в теореме 1.1. Затем легко проверить возможность почленного дифференцирования этих двух рядов, и тогда легко доказывается, что каждая из функций $\overset{*(k)}{E_2}$ — в самом деле порождающая функция для дифференциального уравнения (1.6).

§ 4. Порождающие функции, аналогичные решениям гипергеометрического уравнения

В § 1 указывалось, что уравнение в частных производных (1.8) для порождающей функции E^*, дающей решения уравнения (1.6), сводится в упрощенном случае

$$F = \frac{5}{144\lambda^2}$$

при помощи подходящей замены переменных к *обыкновенному* (гипергеометрическому) дифференциальному уравнению (1.10). Таким путем было показано, что фигурирующие в (1.11а), (1.11б) четыре функции составляют порождающие функции в упрощенном случае, а затем в § 2, 3 были построены порождающие функции, аналогичные этим четырем функциям[1]), для широкого класса функций F. Однако хорошо известно, что общее решение гипергеометрического уравнения (1.10) может быть записано не только в виде (1.11а) и (1.11б), но и многими другими способами. Вместо того чтобы выражать решение через гипергеометрические функции от u и $1/u$, как это сделано в упомянутых двух формулах, можно использовать гипергеометрические функции от любой из величин

$$1-u, \quad \frac{1}{1-u}, \qquad 1-\frac{1}{u} \quad \text{или} \quad \left(1-\frac{1}{u}\right)^{-1}.$$

Конечно, если вычислить значения этих функций, используя данный в § 1 степенной ряд, определяющий гипергеометрическую функцию $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma; u)$, то различные пред-

[1]) Как указывалось в § 2, одна из этих четырех функций порождает только решение $\psi^* = 0$ уравнения (1.6), так что это решение на самом деле не рассматривалось.

ставления порождающей функции $\widetilde{E}^{*(T)}$ будут иметь различные области определения. Совершенно естественно выяснить, можно ли, кроме разложений, полученных в § 2, 3, найти разложения порождающей функции в общем случае $\left(\text{когда необязательно } F=\frac{5}{144\lambda^2}\right)$, которые дают решения уравнения (1.6) в различных областях плоскости Z. В настоящем параграфе мы очень кратко обсудим эту проблему и ограничимся отысканием порождающих функций, аналогичных гипергеометрическим функциям от $1-u$ и $1-\frac{1}{u}$.

Вводим, как в предыдущих параграфах, величины

$$u=\frac{t^2Z}{2\lambda}, \quad s=(-\lambda)^{2/3}, \quad S(s)=s^3F(\lambda(s)). \tag{1}$$

Находим, что порождающая функция E^*, соответствующая уравнению (1.6), должна как функция от u и s удовлетворять уравнению

$$u(1-u)E^*_{uu}+\left(\frac{1}{2}-2u\right)E^*_u-\frac{5}{36}E^*+\frac{2s}{3}(2u-1)E^*_{us}+$$
$$+\frac{1}{9}s\left(2+3u^{-1}\right)E^*_s-\frac{4}{9}s^2E^*_{ss}-4\left(S(s)-\frac{5}{144}\right)E^*=0. \tag{2}$$

Чтобы преобразовать уравнение (2), введем переменное $\tau=t^2Z$ в разложение (2.2) для E^*. Так как коэффициенты $Q^{(n,1)}$ удовлетворяют уравнениям (2.3а) и (2.3б) и

$$E^*_\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\tau^nQ^{(n)}_\lambda, \quad E^*_{\lambda\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau^nQ^{(n)}_{\lambda\lambda}, \quad 2E^*_{\tau\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}2n\tau^{n-1}Q^{(n)}_\lambda, \tag{3}$$

то E^* является решением уравнения

$$\mathbf{B}_2\left(E^*\right)\equiv 2E^*_{\tau\lambda}+E^*_{\lambda\lambda}-\tau^{-1}E^*_\lambda+4FE^*=0\,^{1)}. \tag{4}$$

С другой стороны, если дважды дифференцируемая функция $P(\lambda,\tau)$ удовлетворяет уравнению $\mathbf{B}_4(P)\equiv$ $\equiv 2P_{\lambda\tau}+P_{\lambda\lambda}+(2\alpha-1)\tau^{-1}P_\lambda+4F(\lambda)P=0$, то $E^*=$

---

[1]) Подставляя $E^*(\lambda,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}H^{(n)}(\lambda)\tau^n$ в уравнение (4) и приравнивая коэффициенты при τ^n нулю, получаем $H^{(0)}=\text{const}$ и приходим к соотношениям (2.3а), (2.3б) для остальных $H^{(n)}$.

$= (t^2 Z)^\alpha P\left(\frac{1}{2}(Z+\bar{Z}),\ t^2 Z\right)$ удовлетворяет уравнению (1.8). Здесь α — константа. Имеем

$$E^*_{\bar{Z}} = \frac{1}{2} t^{2\alpha} Z^\alpha P_\lambda, \quad E^*_{\bar{Z}_t} = \alpha t^{2\alpha-1} Z^\alpha P_\lambda + t^{2\alpha+1} Z^{\alpha+1} P_{\lambda\tau},$$

$$E^*_{Z\bar{Z}} = \frac{1}{2} \alpha t^{2\alpha} Z^{\alpha-1} P_\lambda + \frac{1}{4} t^{2\alpha} Z^\alpha P_{\lambda\lambda} + \frac{1}{2} t^{2\alpha+2} Z^\alpha P_{\lambda\tau},$$

$$\mathbf{B}_3(E^*) = \frac{1}{2} t^{2\alpha+1} Z^{\alpha+1} \mathbf{B}_4(P).$$

Здесь $\mathbf{B}_3(E^*)$ обозначает левую часть равенства (1.8). Сделаем теперь преобразования

$$w = \frac{\tau}{2\lambda}, \qquad \chi = \lambda. \tag{5}$$

Тогда

$$E^*_\lambda = E^*_\chi - E^*_w \frac{w}{\chi}, \quad 2E^*_{\tau\lambda} = \frac{1}{\chi} E^*_{w\chi} - \frac{1}{\chi^2} E^*_w - \frac{w}{\chi^2} E^*_{ww}, \tag{6}$$

$$E^*_{\lambda\lambda} = E^*_{\chi\chi} + 2\frac{w}{\chi^2} E^*_w - 2\frac{w}{\chi} E^*_{w\chi} + \frac{w^2}{\chi^2} E^*_{ww}. \tag{7}$$

Следовательно, (2) принимает форму

$$\left\{ w(1-w) E^*_{ww} + \left(\frac{1}{2} - 2w\right) E^*_w - \frac{5}{36} E^* \right\} + \\ + \left\{ -\chi^2 E^*_{\chi\chi} + \chi(2w-1) E^*_{w\chi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \chi w^{-1} E^*_\chi - 4\left(F - \frac{5}{144\chi^2}\right) \chi^2 E^* \right\} = 0. \tag{8}$$

Далее, используя переменные

$$u = w, \qquad s = (-\chi)^{2/3}, \tag{9}$$

получаем

$$E^*_\chi = -\frac{2}{3} E^*_s s^{-1/2}, \quad E^*_{\chi\chi} = \frac{4}{9}\left[s^{-1} E^*_{ss} - \frac{1}{2} s^{-2} E^*_s\right], \tag{10}$$

$$E^*_w = \frac{\partial E^*}{\partial u}, \quad E^*_{w\chi} = -\frac{2}{3} E^*_{us} s^{-1/2}. \tag{11}$$

Преобразование (9) не изменяет первого члена в фигурных скобках в формуле (8). Второй член в (8) становится равным

$$-\frac{4}{9} s^2 E^*_{ss} + \frac{2}{9} s E^*_s + \frac{1}{3} \frac{s}{u} E^*_s + \\ + \frac{2}{3} s(2u-1) E^*_{su} - 4\left(S - \frac{5}{144}\right) E^*. \tag{12}$$

[Относительно $S(s)$ см. (3.7).]

Полагая[1])

$$\tilde{\tilde{E}}^* = E^* u^{-1/2}, \tag{13}$$

находим, что $\tilde{\tilde{E}}^*$ удовлетворяет уравнению

$$u(1-u)\tilde{\tilde{E}}^*_{uu} + \left(\frac{3}{2} - 3u\right)\tilde{\tilde{E}}^*_u - \left(4S(s) + \frac{3}{4}\right)\tilde{\tilde{E}}^* + \frac{8s}{9}\tilde{\tilde{E}}^*_s + \\ + \frac{2s}{3}(2u-1)\tilde{\tilde{E}}^*_{us} - \frac{4s^2}{9}\tilde{\tilde{E}}^*_{ss} = 0. \tag{14}$$

Теперь введем переменное

$$v = 1 - u = 1 - \frac{t^2 Z}{2\lambda}. \tag{15}$$

Легко видеть, что $\tilde{\tilde{E}}^*$ как функция от v и s удовлетворяет тому же самому уравнению (14), где u заменено на v. Таким образом, принимая во внимание соотношение (13) между $\tilde{\tilde{E}}^*$ и E^* и используя порождающие функции, полученные в двух предыдущих параграфах, мы получаем четыре новых разложения, а именно:

$$\tilde{\tilde{E}}^* = v^{-1/2}\left[(2\lambda v)^{k/2-1/2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2\lambda v)^{n-1/2+k/2} Q^{(n,\,k)}(\lambda)\right], \\ k = 1,\ 2, \tag{16а}$$

$$\tilde{\tilde{E}}^* = v^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n,\,k)}(\lambda)(-2\lambda v)^{-(n-1/2+2k/3)}, \quad k = 1,\ 2. \tag{16б}$$

Возвращаясь к исходным переменным t, Z, λ и к функции E^* вместо $\tilde{\tilde{E}}^*$, мы получаем для $|(t^2 Z - 2\lambda)/2\lambda| < 1$ разложение

$$E^* = tZ^{1/2}(2\lambda - t^2 Z)^{-1/2} \times \\ \times \left[(2\lambda - t^2 Z)^{k/2-1/2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2\lambda - t^2 Z)^{n-1/2+k/2} Q^{(n,\,k)}(\lambda)\right], \tag{17а}$$

---

[1]) Следует заметить, что в первой строке формулы (6.6) статьи [29] нужно заменить $\tilde{E}^*_s$ на $\tilde{E}^*$. В формулах (6.4) и (6.6) в коэффициентах для $\tilde{E}^*$ следует 8/9 заменить на 3/4. Далее, правые части формул (6.7) и (6.9) из [29] следует изменить так, как указано в (16а) и (17а).

а для $|(t^2Z - 2\lambda)/2\lambda| > 1$ — разложение

$$E^* = tZ^{1/2}(2\lambda - t^2Z)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty}{}' q^{(n, k)}(\lambda)(t^2Z - 2\lambda)^{-(n-1/2+2k/3)}. \tag{17б}$$

Сопоставляя результаты этого параграфа с результатами двух предыдущих, мы видим, что существует широкий класс порождающих функций, которые можно применить для получения решений уравнения (1.6) в различных частях плоскости (λ, y).

§ 5. О решении задачи Коши в целом

Особый интерес в связи с уравнениями в частных производных смешанного типа представляет случай, когда начальные условия заданы на „линии перехода", т. е. на кривой, разделяющей части плоскости, в которых рассматриваемое уравнение является соответственно эллиптическим или гиперболическим[1]). Теория для таких задач еще недостаточно развита, поэтому интересно дать некоторые результаты, касающиеся этой задачи для уравнения, рассмотренного в этой главе. Линия перехода задается уравнением $x = 0$ (или $\lambda = 0$); см. (1.1), (1.3), (1.6). В частности, предположим, что заданы значения ψ и $\partial\psi/\partial\lambda$ вдоль некоторого отрезка линии перехода. Тогда возникает вопрос, как далеко можно продолжить решение в область эллиптичности и как расположение и характер особенностей зависят от начальных данных. В этом параграфе мы кратко отметим некоторые частные результаты. Для удобства мы будем говорить об уравнении (1.3), но результаты сразу же переносятся на уравнения (1.1) и (1.6). Эти результаты содержатся в следующих двух теоремах. Доказательство читатель найдет в работе [29].

Пусть $\mathfrak{l}$ — простая кривая, соединяющая точки -1 и 1 комплексной плоскости t и лежащая целиком в кольце $1 \leqslant |t| \leqslant A < \infty$, где A достаточно велико. Для каждой

[1]) Эту линию часто называют „звуковой линией", ибо под таким названием она вошла в теорию течений сжимаемой жидкости.

точки ζ мы обозначим через $\mathfrak{c}(\zeta;\ \mathfrak{l})$ кривую, которую описывают точки $(1/2)\zeta(1-t^2)$, когда t пробегает кривую $\mathfrak{l}$ от -1 до $+1$. Далее, обозначим через $\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\mathfrak{B})$ область

$$\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\mathfrak{B}) = \sum_{\zeta \in \mathfrak{B}} \mathfrak{c}(\zeta;\ \mathfrak{l}). \tag{1}$$

Например, если $\mathfrak{l}$ — верхняя половина единичной окружности, то $\mathfrak{c}(\zeta;\ \mathfrak{l})$ — окружность $|z-\zeta/2| = |\zeta/2|$, так что $\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\mathfrak{B})$ является объединением всех окружностей, проходящих через начало координат и точки $P \in \mathfrak{B}$ и имеющих отрезок OP своим диаметром. В более общем случае, когда t пробегает произвольную кривую от -1 до $+1$, точка $(\zeta/2)(1-t^2)$ описывает замкнутую кривую $\mathfrak{c}$, проходящую через начало координат. Таким образом, $\mathfrak{T}(\mathfrak{B})$ является объединением всех замкнутых кривых $\mathfrak{c}(\zeta;\ \mathfrak{l})$, каждая из которых проходит через начало координат и получается из фиксированной кривой $\mathfrak{c}$ растяжением в $|\zeta|$ раз и поворотом на угол $\arg\zeta$. Ясно, что в качестве фиксированной кривой $\mathfrak{c}$ может быть выбрана любая замкнутая кривая, проходящая через начало координат, и что начало координат будет граничной точкой для всех областей $\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\mathfrak{B})$.

Теорема 5.1. *Пусть $\chi_1(y)$ и $\chi_2(y)$ — две функции от y, обладающие представлениями вида*

$$\chi_j(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(j)} y^\nu, \quad 0 \leqslant y \leqslant y_1, \quad y_1 > 0, \quad j = 1,\ 2. \tag{2}$$

Определим функцию $f(\zeta)$ формулой

$$f(\zeta) = \zeta^{1/6} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \zeta^\nu, \tag{3}$$

где

$$c_\nu = -(-2i)^{\nu+1/6}\left[3^{1/2}\pi S_0^2 \operatorname{Im}(A_2\bar{A}_1)\right]^{-1} \times \\ \times \left[a_\nu^{(1)} \bar{d}_0 J_\nu^{(2)} + \sum_{k=1}^{2} a_\nu^{(k)} \bar{d}_k J_\nu^{(1)}\right], \tag{4}$$

$\operatorname{Im}(A_2\bar{A}_1) \neq 0$ *и*

$$d_0 = -(2/3)\, i^{3/2} S_0 A_2, \quad d_1 = -(2^{5/3}/3)\, i^{1/6} S_0 S_1 A_1, \\ d_2 = -i^{1/6} S_0 A_1; \tag{5}$$

$$J_\nu^{(1)} = (1/2)\, e^{-(2/3)\,n\pi i} \left(e^{-(2/3)\,\pi i} - 1\right) \times$$
$$\times\, [\Gamma(1/3)\,\Gamma(\nu+1)/\Gamma(\nu+4/3)], \quad n=0,\ \pm 1, \tag{6}$$
$$J_\nu^{(2)} = (1/2)\, e^{-(4/3)\,n\pi i} \left(e^{-(4/3)\,\pi i} - 1\right) \times$$
$$\times\, [\Gamma(-1/3)\,\Gamma(\nu+1)/\Gamma(\nu+2/3)], \quad n=0,\ \pm 1.$$

Если область $\mathfrak{B}$ *расположена внутри области* $[3^{1/2}|\lambda| < y,\ y > 0,\ \lambda \leqslant 0]$ *и содержит отрезок* $0 \leqslant y \leqslant y_1$ *и если* $f(\zeta)$ *регулярна в* $\mathfrak{T}_1(\mathfrak{B})$, *то*

$$\psi(\lambda,\ y) = \operatorname{Im}\left[\int\limits_{1} E(Z,\ \overline{Z},\ t)\, f\,[Z(1-t^2)/2]\,(1-t^2)^{-1/2}\,dt\right], \tag{7}$$

где $E = A_1 E^{(1)} + \left[Z\left(1-t^2\right)/2\right]^{2/3} A_2 E^{(2)}$ *является решением дифференциального уравнения* (1.3), *регулярным в* $\mathfrak{B}$ *и таким, что*[1])

$$\lim_{\lambda \to -0} \psi(\lambda,\ y) = \chi_1(y), \tag{8а}$$
$$\lim_{\lambda \to -0} (-\lambda)^{1/3}\,[\partial\psi(\lambda,\ y)/\partial\lambda] = \chi_2(y). \tag{8б}$$

Теорема 5.2. *Пусть* $\chi_1(y)$ *и* $\chi_2(y)$ — *две действительные функции, регулярные при* $0 \leqslant y \leqslant y_1$ *и разлагающиеся в ряд вида* (2). *Пусть функция* $g(\zeta) = \zeta^{-1/6} f(\zeta) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \zeta^\nu$, *где* c_ν — *линейные комбинации величин* $a_\nu^{(j)}$, *вычисляемые по формуле* (4), *имеет в окрестности точки* $\zeta = \alpha$, $(4/3)\pi < \arg \alpha < 2\pi$, *разложение вида*

$$g(\zeta) = \zeta + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (\zeta - \alpha)^{-\nu}, \tag{9}$$

справедливое при $0 < |\zeta - \alpha| < \infty$. *Тогда существует решение* $\psi(\lambda,\ y)$ *дифференциального уравнения* (1.3),

---

[1]) В формулах (6.17) из [27] и (7.4) из [29] следует заменить $a_\nu^{(1)}$ на $-a_\nu^{(1)}$, а $J_\nu^{(1)}$ и $J_\nu^{(2)}$ поменять местами. При выводе формул (8а) и (8б) мы полагаем $n = 0$. Если мы выберем для $(-\lambda)^{1/3}$ комплексные значения корня, то $n = \pm 1$.

регулярное в области $\{3^{1/2}|\lambda| < |y|,\ y > 0,\ \lambda \leqslant 0\}$ *и такое, что*

$$\lim_{\lambda \to -0} \psi(\lambda, y) = \chi_1(y), \tag{10a}$$

$$\lim_{\lambda \to -0} (-\lambda)^{1/3} \psi_\lambda(\lambda, y) = \chi_2(y), \tag{10б}$$

которое имеет особенность в бесконечности.

Хотя результаты, содержащиеся в этих двух теоремах, дают лишь частичный ответ на поставленные выше вопросы, они показывают, как метод интегральных операторов может использоваться для анализа таких задач. (См. [27, 29, 34].)

§ 6. Обобщенные уравнения Коши — Римана

В предыдущих параграфах этой главы мы изучили построение решений уравнений в частных производных вида

$$l(y)\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$$

с помощью интегральных операторов. При $l(y) > 0$ получаемые таким образом решения можно рассматривать как обобщение аналитических функций комплексного переменного. В настоящем параграфе мы рассмотрим пары действительных функций, скажем φ и ψ. Эти пары связаны таким способом, который является обобщением связи сопряженных гармонических функций. Обе функции φ и ψ удовлетворяют уравнению эллиптического типа. Если $l(y) < 0$, то каждая из функций φ и ψ удовлетворяет уравнению гиперболического типа. Таким образом, если $l(y) > 0$ при $y < 0$ и $l(y) < 0$ при $y > 0$, мы получаем функции, удовлетворяющие уравнению *смешанного* типа. Проведем более подробное исследование некоторых свойств получаемых таким путем комплексных функций. Пусть

$$\Phi_x = \psi_y, \quad \Phi_y = -l(y)\psi_x. \tag{1}$$

При помощи соответствующего дифференцирования находим, что Φ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{S}(\psi) \equiv l(y)\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \tag{2a}$$

$$\mathbf{P}(\Phi) \equiv l(y)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} - l^{-1}l_y\Phi_y = 0, \tag{2б}$$

Введем теперь две последовательности частных решений системы (1), которые можно рассматривать как обобщения действительных и мнимых частей функций $(x+iy)^n$. Последние функции играют основную роль в случае $l\equiv 1$.

Определим сначала две последовательности функций $\{p_n(y)\}$, $\{s_n(y)\}$ следующим образом:

$$p'_m(y)=l(y)s_{m-1}(y),\quad s'_m(y)=p_{m-1}(y),\quad p_0=1,\ s_0=1, \tag{3а}$$

или

$$p_m(y)=\int\limits_{y_0}^{y} l(y_m)\int\limits_{y_0}^{y_m}\int\limits_{y_0}^{y_{m-1}} l(y_{m-2})\int\limits_{y_0}^{y_{m-2}}\dots dy_1\dots dy_m,\qquad m\geqslant 1, \tag{3б}$$

$$s_m(y)=\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{y_0}^{y_m} l(y_{m-1})\int\limits_{y_0}^{y_{m-1}}\int\limits_{y_0}^{y_{m-2}} l(y_{m-3})\dots dy_1\dots dy_m,\qquad m\geqslant 1. \tag{3в}$$

Здесь y_0 — любая заданная постоянная. Тогда определим упомянутые выше последовательности решений системы (1) так[1]):

$$\Phi_{n,1}(x,\ y)+i\psi_{n,1}(x,\ y)=(x+iy)^{[n]}=$$
$$=\left[x^n-2!\binom{n}{2}x^{n-2}p_2(y)+4!\binom{n}{4}x^{n-4}p_4(y)-\dots\right]+$$
$$+i\left[1!\binom{n}{1}x^{n-1}s_1(y)-3!\binom{n}{3}x^{n-3}s_3(y)+\dots\right] \tag{4а}$$

---

[1]) Следует заметить, что в работе [18] один и тот же символ использовался для обоих выражений $(x+iy)^{[n]}$ и $i\odot(x+iy)^{(n)}$. Далее, нужно на стр. 278 в (3.2), строка 4, заменить $X^5+1/2880$ на $X^6-1/2880$; в (4.3) заменить $[\Gamma(n+1)]^{-2}$ на $[\Gamma(n+1)]^{-1}$; на стр. 279, строка 1, заменить $Q_{2\lambda}^{(n)}$ на $Q^{(n)}(2\lambda)$; в строке 11 заменить $\lim\limits_{n\to\infty} c^{(n)}=1/2$ на $\lim\limits_{n\to\infty}[c^{(n)}]^{1/n}=1/2$; в строке 22 заменить $T^{-3}+1/4kT^{-1}+1/8$ на $T^{-3}+1/4kT^{-1}-1/8$; в строке 23 замеиить $\operatorname{arc\,tg}(\gamma/T)]$ на $\operatorname{arc\,tg}(\gamma/T)^{-1}]$.

и

$$\Phi_{n,2}(x, y)+i\psi_{n,2}(x, y)=i\odot(x+iy)^{\langle n\rangle}=$$

$$=-\left[1!\binom{n}{1}x^{n-1}p_1(y)-3!\binom{n}{3}x^{n-3}p_3(y)+\ldots\right]+$$

$$+i\left[x^n-2!\binom{n}{2}x^{n-2}s_2(y)+4!\binom{n}{4}x^{n-4}s_4(y)-\ldots\right]. \quad (4б)$$

Непосредственной подстановкой легко показать, что каждая пара функций $(\Phi_{n,k}, \psi_{n,k})$ удовлетворяет системе (1). Далее, если $y_0=0$ и $l(y)\equiv 1$, то очевидно, что $\Phi_{n,1}+i\psi_{n,1}$ и $\Phi_{n,2}+i\psi_{n,2}$ сводятся соответственно к $(x+iy)^n$ и $i(x+iy)^n$; поэтому в равенствах (4а) и (4б) мы используем соответственно обозначения $(x+iy)^{|n|}$ и $i\odot(x+iy)^{\langle n\rangle}$.

Любому полиному $f(z)=\sum_{n=0}^{N}(\alpha_n+i\beta_n)(x+iy)^n$ (α_n, β_n действительны) мы можем естественным образом поставить в соответствие следующую пару функций (φ, ψ), удовлетворяющих системе (1):

$$\varphi+i\psi=\mathrm{R}_2[f(z)]\equiv\sum_{n=0}^{N}\left[\alpha_n(x+iy)^{|n|}+i\beta_n\odot(x+iy)^{\langle n\rangle}\right]. \quad (5)$$

Оператор R_2 введен в [17, 18]. Аналогичный оператор, порождающий решения системы уравнений несколько более общего вида, чем (5), был дан независимо Берсом и Гельбартом [56]. Функции, полученные ими, названы „сигма-моногенными“. Частный случай их системы рассмотрен Важоньи [не опубликовано].

Кратко отметим теперь одно применение последовательностей (4а) и (4б): нахождение оценок сверху и снизу для решений задачи Коши, встречающейся в теории уравнений смешанного типа. Подробный анализ можно найти в статье [36, § 5]. Сначала сформулируем следующую теорему, которая также доказана в упомянутой статье.

Пусть функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2а) в прямоугольнике $\{|x|\leqslant x_1, |y-y_0|\leqslant y_1\}$ и является аналитической по обоим переменным в этом прямоугольнике.

Пусть на прямой $y=y_0$ функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \psi(x, y_0) &= f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \\ \psi_y(x, y_0) &= g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, d_n x^{n-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

где ряды $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ сходятся абсолютно при $|x| \leqslant x_1$. Предположим далее, что $|l(y)| \leqslant c^2$ при $|y-y_0| \leqslant \leqslant y_1$, где c — подходящим образом выбранная положительная постоянная. Тогда в той части определенного выше прямоугольника, где выполнено дополнительное условие $|x| + c|y-y_0| \leqslant x_1$, $\psi(x, y)$ представляется сходящимся рядом

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = {} & [f(x) - f^{(2)}(x) s_2(y) + f^{(4)}(x) s_4(y) - \ldots] + \\ & + [g^{(1)}(x) s_1(y) - g^{(3)}(x) s_3(y) + g^{(5)}(x) s_5(y) - \ldots]. \end{aligned} \tag{7}$$

(Здесь $f^{(n)}$ и $g^{(n)}$ — производные порядка n от f и g.)

Предположим теперь, что $y_0 = 0$, $f(x)$ — полином $\sum_{n=0}^{N} c_n x^n$, $g(x) = 0$, а $l(y)$ удовлетворяет при $0 \leqslant y \leqslant y_1$ неравенствам

$$a_1^2 y^M \leqslant -l(y) \leqslant a_2^2 y^M, \tag{8}$$

где $0 < a_1 < a_2$, $M > 0$. (Отрицательность $l(y)$ соответствует гиперболическому типу уравнения.) Тогда в той части указанной в формулировке теоремы области, где выполнено дополнительное условие $0 \leqslant y \leqslant y_1$, функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет следующим двум неравенствам:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^{2} (-1)^{\mu+1} \sum_{n=0}^{N} \left((-1)^{\mu-1} c_n x^n\right)^+ \times \\ & \quad \times F\left(-\frac{n}{2}, \frac{-n+1}{2}, \frac{M+1}{M+2}; \frac{4a_\mu^2 y^{M+2}}{(M+2)^2 x^2}\right) \leqslant \\ & \quad \leqslant \psi(x, y) \leqslant \sum_{\mu=1}^{2} (-1)^{\mu} \sum_{n=1}^{N} \left((-1)^{\mu} c_n x^n\right)^+ \times \\ & \quad \times F\left(-\frac{n}{2}, \frac{-n+1}{2}, \frac{M+1}{M+2}; \frac{4a_\mu^2 y^{M+2}}{(M+2)^2 x^2}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

В формуле (9) символ $(A)^{+}$ обозначает $\max(0, A)$, а F, как обычно, гипергеометрическая функция. Неравенства (9) легко устанавливаются с помощью (3в), (7) и (8) в случае, когда $f(x)$ сводится к одному члену $c_n x^n$, а в более общем случае эти неравенства получаются сложением неравенств для каждого члена. Подобные неравенства можно получить при $-y_1 \leqslant y \leqslant 0$, а также в случае, когда $f(x)$ обращается в нуль, а $g(x)$ — полином. Все эти неравенства тоже даны в статье, на которую мы выше сослались.

Замечание. При рассмотрении модели течения сжимаемой жидкости различные авторы (Чаплыгин, Черри, Лайтхилл, Карман, Цянь и др.) развили различные методы построения решений возникающего в этой теории уравнения смешанного типа. См., например, [158]. Каждый из этих методов определяет некоторый оператор.

§ 7. Дифференциальное уравнение $\Delta_2\psi + N(x)\psi = 0$ с новым типом особенности функции N

В § 9, гл. I рассматривалось уравнение

$$\Delta_2\psi + N(x)\psi = 0, \tag{1}$$

в котором $N(x)$ была целой функцией; Эйхлер рассматривает также случай, когда N имеет особенности [1]), а именно:

$$N(x) = x^{-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n\rho}\right), \tag{2}$$

где ρ — действительная постоянная (см. [234]). В этой статье дается ряд интересных примеров, когда порождающая функция $G(x, z-\zeta)$ (см. (I.9.5), стр. 61) может быть выражена через гипергеометрическую функцию F

[1]) Вообще говоря, $N(x)$ не удовлетворяет условиям для F, указанным на стр. 167.

или ряд таких функций, а именно:

1. $N(x) = x^2$, $\quad G(x, z-\zeta) =$

$$= -(2x)^{-1}\,\mathrm{F}\left[v, \frac{3}{2}+\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)^{1/2}, \frac{3}{2}-\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)^{1/2}; 2\right],$$

$$v \equiv (z-\zeta)/2x. \qquad (3)$$

2. $N(x) = \lambda x^{-2} + \mu$, $\quad G(x, z-\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n-1} h_n(v). \qquad (4)$

Здесь h_n связаны рекуррентной формулой

$$v(1-v)h_n'' - 2(n-1)(1-2v)h_n' -$$

$$-((2n-1)(2n-2)+\lambda)h_n = \mu h_{n-1}. \qquad (5)$$

3. $N(x) = \frac{1}{4}\lambda(\operatorname{ch} x)^{-2}$, соответственно

$$N(x) = \frac{1}{4}\lambda(\operatorname{sh} x)^{-2}. \qquad (6)$$

Если z заменить на $\log z$, то уравнение (1) примет вид

$$\Delta\psi + \lambda(x^2 + y^2 \pm 1)^{-1}\psi = 0. \qquad (7)$$

Далее,

$$S(x, y, \zeta) = \frac{z}{z\bar{z} \pm 1} H(V), \qquad V = \frac{\bar{z}(z-\zeta)}{z\bar{z} \pm 1}, \qquad (8)$$

— порождающая функция для уравнения (7); здесь H удовлетворяет гипергеометрическому уравнению

$$V(1-V)H'' - 2(1-V)H' + \left(2 \mp \frac{1}{4}\lambda\right)H = 0 \qquad (9)$$

и начальному условию $H(0) = \pm\lambda/4$.

Когда $N(x)$ имеет особенности, известный интерес представляет изучение нисходящих рядов [см. (I.9.9)]. Так как коэффициенты q_n ряда (I.9.9) удовлетворяют обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка, каждое решение ψ уравнения (1) можно представить в виде

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty}\left[q_{1,n}(x) f_1^{(n)}(z) + q_{2,n}(x) f_2^{(n)}(z)\right], \quad f^{(n)}(z) \equiv \frac{d^n f}{dz^n}. \qquad (10)$$

При исследовании уравнения (1) с коэффициентом (2) в [234] получен следующий результат.

Теорема 7.1. *Существуют две последовательности* $\{q_{\varkappa, n}\}$, $\varkappa = 1, 2$, *для нисходящего ряда* (I.9.9), *такие, что*

$$\frac{q_{\varkappa, n+1}(x)}{q_{\varkappa, n}(x)} = x^{1-\varepsilon} O(x) \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{11}$$

Нисходящий ряд (10), образованный для $\{q_{\varkappa, n}\}$, сходится в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ при

$$0 < |x| < |z - z_0|/2, \tag{12}$$

где z_0 — ближайшая к началу координат особенность функции $f(z)$.

Из теоремы 7.1 ясно, как ведет себя вблизи $x = 0$ решение уравнения (1), представленное нисходящим рядом с регулярной функцией $f(z)$. Но нисходящий ряд можно образовать даже с функцией $f(z)$, сингулярной в точке z_0 на оси $x = 0$. Согласно теореме 7.1, ряд сходится по крайней мере в некоторой части окрестности особой точки, тогда как представление такой функции восходящим рядом не имеет места. Таким путем доказывается, что решения уравнения (1), кроме тех особенностей, которые автоматически получаются из особенностей $N(x)$, могут иметь еще другие особенности. Подробности см. в [234]. Далее, в [234] рассматривается дифференциальное уравнение

$$\Delta_n \psi + N(r^2)\psi = 0, \quad \Delta_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}, \quad r^2 = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2, \tag{13}$$

и получается обобщение представления (III. 2.10), а именно:

$$\psi(X) = H(X) - \int_0^1 S(r^2, t) H(tX)\, dt, \qquad X = (x_1, \ldots, x_n). \tag{14}$$

Здесь H — гармоническая функция, а S — решение обыкновенного дифференциального уравнения, см. формулы (51) и (52) в [234].

Пусть

$$P_m(r) = r^m \left(1 - \int_0^1 S(r^2, t) t^m \, dt\right); \tag{15}$$

предположим, что функция $N(r^2)$ регулярна в достаточно большом шаре $\mathfrak{R}$ с центром в начале координат, и пусть $u = \sum_{m=0}^{\infty} u_m$ — гармоническая функция, регулярная в области $\mathfrak{D}$, причем ряд равномерно и абсолютно сходится для $r < r_0$. Тогда

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(r) u_m r^{-m} \tag{16}$$

является решением уравнения (13). Ряд (16) сходится равномерно и абсолютно при $r < r_0$ и аналитически продолжается в область $\mathfrak{D}'$, которая определяется с помощью $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$.

§ 8. Интегральный оператор для уравнений с неаналитическими коэффициентами

В этом параграфе мы рассмотрим уравнения вида

$$\Delta_2 \tilde{\tilde{U}} + c\tilde{\tilde{U}} = 0, \qquad c \equiv c(x, y). \tag{1}$$

Это уравнение исследовалось в гл. I в предположении, что c — целая функция. Результаты, подобные полученным в гл. I, очевидным образом переносятся на случай, когда c регулярна в ограниченной области, и не нуждаются в подробном обсуждении. Случай, когда c аналитична, но имеет некоторые особенности, рассматривался в § 1—4 настоящей главы.

Сделаем теперь общее предположение, что коэффициент c — действительная функция двух действительных переменных, определенная и всего лишь непрерывно дифференцируемая в замкнутой ограниченной односвязной области плоскости x, y.

Введем сначала интегральный оператор, преобразующий аналитические функции комплексного переменного в решения уравнения (1), определенные в $\overline{\mathfrak{B}}$.

Теорема 8.1. *Пусть $H(x, y)$ — гармоническая функция в замкнутой ограниченной односвязной области $\mathfrak{B}+\mathfrak{b}$, ограниченной регулярной жордановой кривой $\mathfrak{b}$. Если область $\mathfrak{B}$ достаточно мала и $c(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция в $\mathfrak{B}+\mathfrak{b}$, то функция*

$$\begin{gathered}\tilde{\tilde{U}}(x, y) = \mathrm{T}_2(H) \equiv \\ \equiv H_0 + \int_{\mathfrak{B}}\int H_1 R_{10}\, d\Omega_1 + \int_{\mathfrak{B}}\int R_{10} \int_{\mathfrak{B}}\int H_2 R_{21}\, d\Omega_1\, d\Omega_2 + \\ + \int_{\mathfrak{B}}\int R_{10} \int_{\mathfrak{B}}\int R_{21} \int_{\mathfrak{B}}\int H_3 R_{32}\, d\Omega_1\, d\Omega_2\, d\Omega_3 + \ldots, \quad \mathrm{T}_2 \equiv \mathrm{T}_{2,\mathfrak{B}},\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$H_0 \equiv H(x, y), \quad H_n \equiv H(\xi_n, \eta_n),$$

$$R_{10} = \frac{1}{2\pi} c(\xi_1, \eta_1) \log [(\xi_1 - x)^2 + (\eta_1 - y)^2]^{1/2},$$

$$R_{n, n-1} = \frac{1}{2\pi} c(\xi_n, \eta_n) \log [(\xi_n - \xi_{n-1})^2 + (\eta_n - \eta_{n-1})^2]^{1/2},$$

$$d\Omega_n = d\xi_n\, d\eta_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

является решением уравнения (1) *в* $\mathfrak{B}+\mathfrak{b}$.

Доказательство. Покажем сначала, что ряд (2) и его первые производные по x и y сходятся абсолютно и равномерно в $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{D}$ — круг радиуса ρ с центром в произвольной точке $(x_0, y_0) \in \mathfrak{B}$, содержащий $\mathfrak{B}+\mathfrak{b}$. Продолжим $c(x, y)$ и $H(x, y)$ в $\mathfrak{D}$ таким образом, чтобы получающаяся в результате продолжения функция $\tilde{c}(x, y)$ была равномерно ограничена, а $\tilde{H}(x, y)$ непрерывно дифференцируема в $\mathfrak{D}$. (Такое продолжение c и H возможно, см. [209].) Тогда существуют такие положительные константы C и H, что

$$\begin{gathered}\max_{(x, y) \in \mathfrak{D}} (|\tilde{c}|) \leqslant \mathrm{C} < \infty, \\ \max_{(x, y) \in \mathfrak{D}} (|\tilde{H}|, |\tilde{H}_x|, |\tilde{H}_y|) \leqslant \mathrm{H} < \infty.\end{gathered} \tag{3}$$

Далее, полагая

$$r_n = [(\xi_n - x_0)^2 + (\eta_n - y_0)^2]^{1/2}, \tag{4}$$

получаем

$$\max_{(\xi_n, \eta_n)\in\mathfrak{D}} \left[\log r_n, \ \frac{\xi_n - x_0}{r_n^2}, \ \frac{\eta_n - y_0}{r_n^2}\right] \leqslant \frac{A_1}{r_n} \tag{5}$$

и

$$\log r_n \leqslant K r_n^{-\varepsilon}, \quad K = K(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{6}$$

Пусть $A = \max(A_1, K)$. Тогда ряд для T_2 и для его первых производных по x и y мажорируется рядом

$$\mathrm{H} + \frac{1}{2\pi} \int_{r_1=0}^{\rho} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \frac{\mathrm{CH}\,A}{r_1} r_1\, dr_1\, d\varphi_1 +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{r_1=0}^{\rho} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \frac{\mathrm{C}A}{r_1} \int_{r_2=0}^{\rho} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \frac{\mathrm{CH}\,A}{r_2^{\varepsilon}} r_1 r_2\, dr_1\, d\varphi_1\, dr_2\, d\varphi_2 +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{r_1=0}^{\rho} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \frac{\mathrm{C}A}{r_1} \int_{r_2=0}^{\rho} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \frac{\mathrm{C}A}{r_2^{\varepsilon}} \int_{r_3=0}^{\rho} \int_{\varphi_3=0}^{2\pi} \frac{\mathrm{CH}\,A}{r_2^{\varepsilon}} r_1 r_2 r_3 \times$$

$$\times\, dr_1\, d\varphi_1\, dr_2\, d\varphi_2\, dr_3\, d\varphi_3 + \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{H} + \mathrm{CH}\,A\rho + \frac{\mathrm{H}\,(\mathrm{C}A)^2}{2-\varepsilon} \rho^{3-\varepsilon} + \frac{\mathrm{H}\,(\mathrm{C}A)^3}{(2-\varepsilon)^2} \rho^{5-2\varepsilon} + \ldots, \tag{7}$$

а ряд в правой части сходится. Здесь H, C и A зависят от выбора точки (x_0, y_0). Если (x_0, y_0) изменяется в $\mathfrak{D}$, то эти три величины имеют конечные верхние грани. Используя их, мы получим верхнюю грань для T_2 и его двух первых производных во всей области $\mathfrak{D}$. Это доказывает абсолютную и равномерную сходимость ряда (2) и его первых производных по x и y.

Для первой производной $\tilde{\tilde{U}}_x$ (или $\tilde{\tilde{U}}_y$) существует представление, отличное от полученного почленным дифференцированием правой части равенства (2).

Так как ряд в правой части равенства (2) сходитс абсолютно, мы можем записать

$$\tilde{\tilde{U}}(x, z) = H_0(x, z) + \int\limits_{\mathfrak{B}}\int Sc(\xi, \eta)\,\tilde{\tilde{U}}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \qquad (8$$

где

$$S = \frac{1}{2}\log[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2], \quad (x, y) \in \mathfrak{B} + \mathfrak{b}.$$

Далее $\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial \xi}$. Если мы положим

$$v = \tilde{\tilde{U}} - H_0 \equiv \int\limits_{\mathfrak{B}}\int Sc(\xi, \eta)\,\tilde{\tilde{U}}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \qquad (9$$

то

$$v_x = \int\limits_{\mathfrak{B}}\int S_x c(\xi, \eta)\,\tilde{\tilde{U}}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= -\int\limits_{\mathfrak{B}}\int S_\xi c(\xi, \eta)\,\tilde{\tilde{U}}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \qquad (1($$

Интегрирование по частям в правой части формулы (1(дает [1])

$$v_x = -\int\limits_{\mathfrak{b}} Sc(\xi, \eta)\,\tilde{\tilde{U}}(\xi, \eta)\,d\eta +$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{B}}\int S[c(\xi, \eta)\,\tilde{\tilde{U}}(\xi, \eta)]_\xi\,d\xi\,d\eta. \qquad (1$$

Аналогично

$$v_{xx} = -\int\limits_{\mathfrak{b}} S_x c(\xi, \eta)\,\tilde{\tilde{U}}(\xi, \eta)\,d\eta +$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{B}}\int S_x[c(\xi, \eta)\,\tilde{\tilde{U}}(\xi, \eta)]_\xi\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{b}} S_\xi c(\xi, \eta)\,\tilde{\tilde{U}}(\xi, \eta)\,d\eta -$$

$$- \int\limits_{\mathfrak{B}}\int S_\xi[c(\xi, \eta)\,\tilde{\tilde{U}}(\xi, \eta)]_\xi\,d\xi\,d\eta. \qquad (1$$

[1]) См. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математич ской физики, т. I, М., 1951.

Первый член в правой части формулы (12) ведет себя как ньютоновский потенциал с распределением массы вдоль кривой $\mathfrak{b}$. Так как $\mathfrak{b}$ — регулярная жорданова кривая, этот интеграл существует в каждой точке $\mathfrak{b}$. Таким образом, $\tilde{\tilde{U}}(x, y) = \mathrm{T}_2(H)$ существует и имеет непрерывные производные первого и второго порядков в $\mathfrak{B} + \mathfrak{b}$. Используя (12) и аналогичное выражение для $\tilde{\tilde{U}}_{yy}$, применяя хорошо известные рассуждения[1]), убеждаемся в том, что $\tilde{\tilde{U}}$ удовлетворяет уравнению (1).

Введем другой класс решений уравнения (1). Пусть $\mathfrak{B}$ — достаточно малая область, звездная по отношению к началу координат, и f имеет счетное число особенностей в $\mathfrak{B}$ в точках $z = \alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $\mathfrak{B}^*$ область, получаемую разрезом $\mathfrak{B}$ вдоль отрезков $\{|\alpha_\nu| \leqslant r < \infty,\ \varphi = \arg \alpha_\nu\}$, $z = r \exp(i\varphi)$. Пусть H^* — ветвь H, определенная в $\mathfrak{B}^*$, и пусть

$$\int_{\mathfrak{B}}\int |H^*|\, d\Omega \leqslant N < \infty. \tag{13}$$

Определение. $\mathrm{T}_2^*(H^*)$, $\mathrm{T}_2^* \equiv \mathrm{T}_{2,\mathfrak{B}}^*$, есть оператор того же вида, что и T_2 [см. (2)], если $\mathfrak{B}$ заменить на $\mathfrak{B}^*$. Если существует функция $\tilde{\tilde{U}} = \mathrm{T}_2^*(H^*)$, то мы скажем, что $\tilde{\tilde{U}} \in W \equiv W_{\mathfrak{B}}$.

Определение. Пусть H — регулярная гармоническая функция в замкнутой подобласти $\mathfrak{S}$ области $\mathfrak{B}$. Если $\mathrm{T}_2^*(H^*) \in W$, то соответствующее решение $U = \mathrm{T}_2^*(H^*)$ называется T_2-регулярным решением уравнения (1) в $\mathfrak{S}$.

Определение. Функции

$$\tilde{\tilde{U}}_1 = \mathrm{T}_2(1), \quad \tilde{\tilde{U}}_{2n} = \mathrm{T}_2(\operatorname{Re} z^n), \quad \tilde{\tilde{U}}_{2n+1} = \mathrm{T}_2(\operatorname{Im} z^n) \tag{14}$$

называются T_2-степенными решениями уравнения (1) в $\mathfrak{B}$.

Для решений $\tilde{\tilde{U}} \in W$ справедливы многие результаты, аналогичные полученным в гл. I, § 5, 6 в случае диффе-

[1]) См. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, М., 1951.

ренциальных уравнений с целыми коэффициентами. Приведем несколько примеров.

Пусть $\tilde{\tilde{U}}$ — решение уравнения (1), T_2-регулярное в замкнутой подобласти $\mathfrak{G}$ области $\mathfrak{B}$. Тогда если $\mathfrak{G}$ — достаточно малый круг с центром в начале координат, то решение $\tilde{\tilde{U}}$ может быть разложено в ряд по T_2-степенным решениям в $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G}$ — односвязная область, то $\tilde{\tilde{U}}$ можно аппроксимировать в $\mathfrak{G}$ линейной комбинацией T_2-степенных решений $\tilde{\tilde{U}}_n$.

Эти утверждения немедленно следуют из того факта, что аналитическую функцию в круге $|z| \leqslant \rho$ можно разложить в ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и из теоремы Рунге.

Определение. Особенность функции $\mathrm{T}_2(H^*)$, где

$$H^* = \log\left|1 - \frac{z}{\alpha}\right|, \qquad \alpha \in \mathfrak{B}, \qquad \alpha \neq 0,$$

называется T_2-полюсом порядка нуль.

Пусть решение $\tilde{\tilde{U}} \in \mathrm{W}$ является T_2-регулярным в круге $\mathfrak{G} = \{x^2 + y^2 < \alpha_1^2 + \alpha_2^2\}$ и представляется там в виде

$$\tilde{\tilde{U}} = c_1\tilde{\tilde{U}}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{2n}\tilde{\tilde{U}}_{2n} + c_{2n+1}\tilde{\tilde{U}}_{2n+1}). \qquad (15$$

Тогда $\tilde{\tilde{U}}$ имеет T_2-полюс нулевого порядка в замкнутом круге $\overline{\mathfrak{G}}$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $k < 1$, такая, что

$$\left|\frac{(c_{2n+2} - ic_{2n+3})(n+1)}{(c_{2n} - ic_{2n+1})(n+2)} - \frac{1}{\alpha}\right| < k^n, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \qquad (16$$

при всех достаточно больших n и α^{-1}, лежащих на границе $\overline{\mathfrak{G}}$.

Этот результат немедленно следует из соответствующе теоремы для функций комплексного переменного. В само деле, если аналитическая функция $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_{2n} - ic_{2n+1})\, z$ имеет логарифмический полюс в точке α, и это ее един ственная особенность в $\overline{\mathfrak{G}}$, то ее коэффициенты удовле творяют неравенству (16), и обратно (см. [61, т. II, стр. 325]).

Замечание. Если о коэффициенте c в уравнении (1) известно только, что это непрерывная функция, то можно при некоторых дополнительных предположениях получить аналогичные результаты. В этом случае функции $\tilde{\tilde{U}}$ являются обобщенными решениями в смысле Соболева (см. [200, стр. 3, 4]).

[4, 17, 18, 23, 24, 27, 29, 31, 36, 40—43, 45—51, 56—58, 67, 83, 84, 86, 91, 122, 133, 135, 136, 138, 140, 142—146, 160, 161, 176, 178, 191, 207—209, 212, 213, 215, 216, 218, 219, 225, 227, 228]

ЛИТЕРАТУРА

[1] Агмон (Agmon S.), Boundary value problems for equations of mixed type, Atti del Convegno Internazionale sulle Equazioni alle Derivate Parziali, Trieste, 1954, 1—15.

[2] — и Берс (Bers L.), The expansion theorem for pseudo-analytic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 757—764.

[3] Адамар (Hadamard J.), Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, *J. math. pure appl.*, **8** (IV) (1892), 101—186.

[4] — Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, Paris, 1932.

[5] — и Мандельбройт (Mandelbrojt S.), La série de Taylor et son prolongement analytique, Scientia 41, Gauthier-Villars, 1926.

[6] Берг (Berg P. W.), On the existence of Helmholtz flows of a compressible fluid, Dissertation, New York University, New York, 1953; *Comm. Pure Appl. Math.* (в печати).

[7] Бергман (Bergman S.), Zur Theorie der ein- und mehrwertigen harmonischen Funktionen des dreidimensionalen Raumes, *Math. Z.*, 24 (1926), 641—669.

[8] — Über die Bestimmung der elastischen Spannungen und Verschiebungen in einem Konvexen Körper, *Math. Ann.*, **98** (1927), 248—263.

[9] — Zur Theorie der algebraischen Potentialfunktionen des dreidimensionalen Raumes, *Math. Ann.*, 99 (1928), 629—659; **101** (1929), 534—558.

[10] — Über Kurvenintegrale von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen, die die Differentialgleichungen $\Delta V + V = 0$ befriedigen, *Math. Z.*, **32** (1930), 386—406.

[11] — Über Funktionen zweier komplexen Veränderlichen, die ebene Pole und Nullflächen besitzen, *Math. Z.*, **39** (1930), 266—268.

[12] — Über ein Verfahren zur Konstruktion der Näherungslösungen der Gleichung $\Delta u + \tau^2 u = 0$, *Прикладная матем. и мех.*, 3 (1936), 97—107.

[13] — Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen, *ДАН СССР*, н.с., **15** (1937), 227—230.

[14] — Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen, *Матем. сб.* (2), **44** (1937), 1169—1198.

[15] — Sur un lien entre la théorie des equations aux derivées partielles elliptiques et celle des fonctions d'une variable complexe, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **205** (1937), 1198—1200, 1360—1362.

[16] — The approximation of functions satisfying a linear partial differential equation, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 537—561.

[17] — The hodograph method in the theory of compressible fluids, Mimeographed notes, Brown University, 1942. (Mises R., Friedrichs K., Fluid dynamics, Supplement.)

[18] — A formula for the streamfunction of certain flows, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, **53** (1943), 276—281.

[19] — Linear operators in the theory of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53** (1943), 130—155.

[20] — The determination of some properties of a function satisfying a partial differential equation from its series development, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 535—546.

[21] — Solutions of linear partial differential equations of the fourth order, *Duke Math. J.*, **11** (1944), 617—649.

[22] — Certain classes of analytic functions of two real variables and their properties, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945), 299—331.

[23] — On two-dimensional flows of compressible fluids, NACA Technical Note 972, 1945, 1—81.

[24] — On supersonic and partially supersonic flows, NACA Technical Note 1096, 1946, 1—85.

[25] — A class of harmonic functions in three variables and their properties, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59** (1946), 216—247.

[26] — Classes of solutions of linear partial differential equations in three variables, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 419—458.

[27] — Two-dimensional transonic flow patterns, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 856—891.

[28] — On solutions with algebraic character of linear partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 461—507.

[29] — On solutions of linear partial differential equations of mixed type, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 444—474.

[30] — The coefficient problem in the theory of linear partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73** (1952), 1—34.

[31] — Operatorenmethoden in der Gasdynamik, *Z. angew. Math. Mech.*, **32** (1952), 35—45.

[32] — Multivalued solutions of linear partial differential equations. Contributions to the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **30** (1953), 229—245.

[33] — Essential singularities of a class of linear partial differential equations in three variables, *J. Rat. Mech. Anal.*, **3** (1954), 539—560.

[34] — Operators transforming analytic functions of complex variables into solutions of linear partial differential equations, Mimeographed Notes, Stanford University, 1954.

[35] — Some methods for solutions of boundary value problems of linear partial differential equations. Numerical Analysis, Proc. of Symposia in Applied Math., **6**, 1956, 11—29.

[36] — Bounds for solutions of a system of partial differential equations, *J. Rat. Mech. Anal.*, **5** (1956), 993—1002.

[37] — On singularities of solutions of certain differential equations in three variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85** (1957), 462—488.

[38] — Operators generating solutions of certain partial differential equations in three variables and their properties, *Scripta Math.*, **23** (1957), 143—151; **26** (1961), 5—31. (Русский перевод см. в приложении к настоящей книге, стр. 219—251.)

[39] — Properties of solutions of certain differential equations in three variables, *J. Math. Mech.*, **7** (1958), 87—102.

[40] — и Гринстоун (Greenstone L.), Numerical determination by use of special computational devices of an integral operator in the theory of compressible fluids. I. Determination of the coefficient of the integral operator by the use of punch card machines, *J. Math. Phys.*, **26** (1947), 1—9.

[41] — и Шиффер (Schiffer M.), Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, Academic Press, Inc., New York, 1953.

[42] — — Properties of solutions of a system of partial differential equations, Studies in Mathematics and Mechanics presented to Richard von Mises. Academic Press, Inc., New York, 1954, 79—87.

[43] — и Эпштейн (Epstein B.), Determination of a compressible fluid flow past an oval shaped obstacle, *J. Math. Phys.*, **26** (1948), 105—222.

[44] Берс (Bers L.), On a method of constructing twodimensional subsonic flows around closed profiles, NACA Technical Note 969, 1945.

[45] — Existence and uniqueness of a subsonic flow past a given profile, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1945), 441—504.

[46] — Velocity distribution on wing sections of arbitrary shape in compressible potential flow. I. Symmetric flows obeying the simplified density-speed relation, NACA Technical Note 1006, 1946.

[47] — On the continuation of a potential gas flow across the sonic line, NACA Technical Note 2058, 1950.

[48] — The expansion theorem for sigma-monogenic functions, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 705—712.

[49] — Partial differential equations and generalized analytic functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **36** (1950), 130—136; **37** (1951), 42—47.

[50] — Some generalizations of conformal mapping suggested by gas dynamics. Proc. of a symposium, Nat. Bureau Stand., Appl. Math. Ser., № 18. 1952, 117—124.

[51] — Theory of pseudo-analytic functions, Mimeographed Notes, New York University, 1953.

[52] — Partial differential equations and pseudo-analytic functions on Riemann surfaces. Contributions to the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **30** (1953), 157—165.

[53] — Function-theoretical properties of solutions of partial differential equations of elliptic type. Contribution to the theory of partial differential equations, Ann. of Math. Studies, **33** (1954), 69—94.

[54] — Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 79—104.

[55] — Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, Wiley, Inc., New York, 1958. (Русский перевод:

Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, ИЛ, М., 1961.)

[56] — и Гельбарт (Gelbart A.), On a class of differential equations in the mechanics of continua, *Quart. Appl. Math.*, **1** (1943), 168—188.

[57] — — On a class of functions defined by partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **56** (1944), 67—93.

[58] — — On generalized Laplace transformations, *Ann. Math.*, **48** (1947), 342—357.

[59] — и Ниренберг (Nirenberg L.), On linear and nonlinear elliptic boundary value problems in the plane, Atti del Convegno Internazionale sulle Equazioni alle Derivate Parziali, Trieste, 1954, 141—167.

[60] Бибербах (Bieberbach L.), Analytische Fortsetzung, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, N. F., 3, 1955.

[61] — Lehrbuch der Funktionentheorie, II, Teubner, Leipzig, 1931.

[62] Биркгоф и Сарантонелло (Birkhoff G. and Zarantonello E. H.), Jets, Wakes and Cavities. Academic Press, New York, 1956. (Готовится русский перевод.)

[63] Боярский Б. В., Гомеоморфные решения систем Бельтрами, *ДАН СССР*, **102** (1955), 661—664.

[64] Буземан (Busemann A.), Hodographenmethode der Gasdynamik, *Z. angew. Math. Mech.*, **12** (1937), 73—79.

[65] Важоньи (Vazsonyi A.), An existence theorem in the theory of compressible fluids, *Bull. Math. Soc.*, **50** (1944), 673—674.

[66] Вейерштрасс (Weierstrass K.), Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten. Gesammelte Werke, 4, Mayer and Müller, Berlin, 1902.

[67] Вейнштейн (Weinstein A.), On axially symmetric flows, *Quart. Appl. Math.*, **5** (1947), 429—444.

[68] — Sur le problème de Cauchy pour l'équation de Poisson et l'équation des ondes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **234** (1952), 2584—2585.

[69] — Generalized axially symmetric potential theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59** (1953), 20—38.

[70] Векуа И. Н., Sur une representation complexe de la solution générale des équations du problème stationnaire plan de la théorie de l'élasticité, *ДАН СССР*, н. с., **17** (1937), 295—299.

[71] — Об общем представлении решений дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, *ДАН СССР*, **17** (1937), 291—296.

[72] Общее представление решений дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, линейных относительно оператора Лапласа, *Труды матем. ин-та Груз. фил. АН СССР*, **2** (1937), 227—240.

[73] — Граничные задачи теории линейных эллиптических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными, I, II, III, *Сообщ. Груз. фил. АН СССР*, **1** (1940), 29—34, 181—186, 497—500.

[74] — Комплексное представление решений эллиптических дифференциальных уравнений и его применения к граничным задачам, *Труды матем. ин-та Груз. фил. АН СССР*, **7** (1940), 161—253.

[75] — Allgemeine Darstellung der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet, *Сообщ. Груз. фил. АН СССР*, **1** (1940), 329—334.

[76] — Решение основной краевой задачи для уравнения $\Delta^{n+1}u = 0$, *Сообщ. АН Груз. ССР*, **3** (1942), 213—220.

[77] — Об аппроксимации решений эллиптических дифференциальных уравнений, *Сообщ. АН Груз. ССР*, **3** (1942), 97—101.

[78] — Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948.

[79] — Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек, *Матем. сб.*, **31** (73) (1952), 217—314.

[80] Вельтцин (Weltzien J.), Computation of the velocity distribution along a symmetric profile assuming an approximate density-speed relation and circulation free flow. Dissertation, New York University, New York, 1957.

[81] Вольтерра (Volterra V.), Sulla integrazione di un systema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teorie delli funzioni coniugate, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **3** (1889), 260—272.

[82] — Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable, *Acta Math.*, **12** (1889), 233—286.

[83] — Гарабедян (Garabedian P. R.), An example of axially symmetric flow with a free surface, Studies in Mathematics and Mechanics presented to Richard von Mises, Academic Press, Inc., New York, 1954, 149—159.

[84] — Applications of analytic continuation to the solution of boundary value problems, *J. Rat. Mech. Anal.*, **3** (1954), 383—393.

[85] Геллерстед (Gellerstedt S.), Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik,* **26A** (3) (1937), 1—32.

[86] Гельбарт (Gelbart A.), On a function-theory method for obtaining potential-flow patterns of a compressible fluid, NACA ARR № 3G27, 1943.

[87] — On subsonic compressible flows by a method of correspondence. I — Methods for obtaining subsonic circulatory compressible flows about two-dimensional bodies, NACA Technical Note 1170, 1947.

[88] — On subsonic compressible flows by a method of correspondence. II — Applications of methods to studies of flow with circulation about a circular cylinder, with Shepard Barthoff, NACA Technical Note 1171, 1947.

[89] — An approximation for twodimensional gas dynamics, Syracuse mimeographed notice for NACA, 1951.

[90] Гилбарг, Шиффер, Серрин и др. (Gilbarg D., Schiffer M., Serrin J. and others), Handbuch der Physik, Springer-Verlag, Heidelberg, 8—9, 1959/60.

[91] Гольдштейн, Лайтхилл, Крэггс (Goldstein S., Lighthill M. J., Craggs J. W.), On the hodograph transformation for high-speed flow. I. A flow without circulation, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **1** (1948), 344—357.

[92] Девис (Davis Ph.), Linear functional equations and interpolation series, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 503—532.

[93] Де Рам (de Rham, G.), Sur l'analysis situs des variétés à *n* dimensions, *J. Math. pure appl.*, **10** (1931), 115—200.

[94] — Variétés Différentiables, Hermann, Paris, 1955. (Русский перевод: Де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1957.)

[95] Диас (Diaz J. B.), Some recent results in linear partial differential equations, Convegno Internazionale sulle Equazioni Lineari alle Derivative Parziali 1954, 1—29.

[96] — и Ладфорд (Ludford G. S. S.), Sur la solution des équations linéaires aux dérivées partielles par des integrales definies, *C. r. Acad. sci. Paris,* **238** (1954), 1963—1964.

[97] — — On two methods of generating solutions of linear partial differential equations by means of definite integrals, *Quart. Appl. Math.*, **12** (1955), 422—427.

[98] — — On a theorem of Le Roux, *Canad. J. Math.*, **8** (1956), 82—85.

[99] — — On the integration methods of Bergman and Le Roux, *Quart. Appl. Math.*, **14** (1957), 428—432.

[100] Дрессел и Герген (Dressel F. G. and Gergen J. J.), Mapping by p-regular functions, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 185—210.

[101] — — Uniqueness for p-regular mapping, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 435—444.

[102] — — Mapping for elliptic equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77** (1954), 151—178.

[103] Дугалл (Dougall J.), On a certain expression for a spherical harmonic, with some extensions, *Edinb. Math. Soc., Proc.*, **8** (1889/90), 81—89.

[104] Жермен (Germain P.), Remarks on the theory of partial differential equations of mixed type and applications to the study of transonic flow, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 117—143.

[105] Ингерсолл (Ingersoll B. M.), The regularity domains of solutions of linear partial differential equations in terms of the series development of the solution, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 1045—1056.

[106] Карман (Kármán Th.), Compressibility effects in aerodynamics, *J. Aero. Sci.*, **8** (1941), 337—356.

[107] — The similarity law of transonic flow, *J. Math. Phys.*, **26** (1947), 182—190. (Русский перевод в сб. Газовая динамика, ИЛ, М., 1950, 171—182.)

[108] — Supersonic aerodynamics — principles and applications, *J. Aero. Sci.*, **14** (1947), 373—409 (Русский перевод: Карман Т., Сверхзвуковая аэродинамика, ИЛ, М., 1948.)

[109] — On the foundation of high speed aerodynamics, General theory of high speed aerodynamics (Sears W. R., ed.), Princeton University Press, Princeton 1954, 3—30. (Русский перевод: Общая теория аэродинамики больших скоростей, Сирс У. Р., ред.), Воениздат, 1962.)

[110] Каррьер и Элерс (Carrier G. F., and Ehlers F. E.), On some singular solutions of the Tricomi equation. *Quart. Appl. Math.*, **6** (1948), 331—334.

[111] — и О'Брайен (O'Brien V.), Some exact solutions of two-dimensional flow of compressible fluid with hodograph method, NACA Technical Note 2885, 1953,

[112] Кейдел (Keidel M.), On some flow patterns of a compressible fluid, Dissertation, Brown University, Providence, 1948.

[113] Кодаира (Kodaira K.), Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory), *Ann. of Math.*, **50** (1949), 587—665.

[114] Колоднер и Моравец (Kolodner J. and Morawetz C. S.), On the non-existence of limiting lines in transonic flows, *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 97—102. (Русский перевод в сб. *Механика*, № 2 (24), (1953), 14—19.)

[115] Кон (Cohn H.), The Riemann function for $\frac{d^2u}{dx\,dy} + H(x+y)u = 0$, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 297—304.

[116] Копсон (Copson E. T.), On Whittaker's solution of Laplace's equation, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **62** (1944), 31—36.

[117] — и Эрдейи (Erdélyi A.), On a partial differential equation with two singular lines, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **2** (1958), 76—86.

[118] Крейсциг (Kreyszig E.), On a class of partial differential equations, *J. Rat. Mech. Anal.*, **4** (1955), 907—923.

[119] — On certain partial differential equations and their singularities, *J. Rat. Mech. Anal.*, **5** (1956), 805—820.

[120] — Relations between properties of solutions of partial differential equations and the coefficients of their power series development, *J. Math. Mech.*, **6** (1957), 361—382.

[121] — On some relations between partial and ordinary differential equations, *Canad. J. Math.*, **10** (1958), 183—190.

[122] — On coefficient problems of solutions of partial differential equations of the fourth order, *J. Math. Mech.*, **6** (1957), 811—822.

[123] — Über ein System partieller Differentialgleichungen, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **1** (1957), 46—53.

[124] — Coefficient problems in systems of partial differential equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **1** (1958), 283—294.

[125] — On singularities of solutions of partial differential equations in three variables, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **2** (1958), 151—159.

[126] — On regular and singular harmonic functions of three variables, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **4** (1960), 352—370.

[127] Крокко (Crocco L.), Transformations of the hodograph flow equation and the introduction of two generalized potential flows, NACA Technical Note 2432, 1951.

[128] Кшивоблоцкий (Krzywoblocki M. Z. E.), Bergman's linear integral operator method in the theory of compressible fluid flow, *Österreich. Ing.-Arch.*, **6** (1952), 330—360; **7** (1953), 336—370; **8** (1954), 237—263; **10** (1956), 1—38.

[129] — On the generalized integral operator method in the subsonic diabatic flow of a compressible fluid, Proc. of the IX International Congress of Applied Mechanics, Brussells, 1956, Paper I—11, 1957, 414—419.

[130] — Bergman's linear integral operator method in the theory of compressible fluid flow (with an appendix by Davis P. and Rabinovitz P.), Springer-Verlag, Vienna, 1960.

[131] — и Хассан (Hassan H. A.), Bergman's linear integral operator method to diabatic flow. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **5** (1957), 47—65.

[132] Ладфорд (Ludford G. S. S.), The behavior at infinity of the potential function of a two-dimensional subsonic compressible flow, *J. Math. Phys.*, **30** (1951), 117—130.

[133] Лайтон (Laitone E. V.), The subsonic flow about a body of revolution, *Quart. Appl. Math.*, **5** (1947), 227—231.

[134] — The linearized subsonic and supersonic flow about inclined slender bodies of revolution, *J. Aero. Sci.*, **14** (1947), 631—642.

[135] — The extension of the Prandtl — Glauert rule, *J. Aero. Sci.*, **17** (1950), 250—251. (Русский перевод в сб. *Механика*, № 5 (15) (1952), 103—106.)

[136] — Approximate incompressible flow solutions for slender polygons, *J. Aero. Sci.*, **17** (1950), 375—376.

[137] Лайтхилл (Lighthill M. J.), The hodograph transformation in transonic flow. I. Symmetrical channels. II. Auxiliary theorems on the hypergeometric function $\Psi_n(\tau)$. III. Flow around a body, *Proc. Roy. Soc.*, **A 191** (1947), 323—341, 341—351, 352—369.

[138] Лакс (Lax P. D.), On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 615—633.

[139] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. Н., Исследование особенностей течения при помощи уравнения Эйлера — Трикоми, *ДАН СССР*, **96** (1954), 725—728.

[140] Ландис Е. М., О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений, *ДАН СССР*, **107** (1956), 640—643.

[141] Ланкау (Lanckau E.), Eine Anwendung der Bergmanschen Operatorenmethode auf Profilströmungen im Unter-

schall, *Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Dresden*, Jahrgang 6 (1958/9), Heft 1.

[142] Леви (Lewy H.), A priori limitations for solutions of Monge — Ampère equations, *Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 417—434; **41** (1937), 365—374.

[143] — On differential geometry in the large, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **43** (1938), 258—270.

[144] Лере (Leray J.), Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (Problème de Cauchy, I), *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 389—429. (Готовится русский перевод.)

[145] — La solution unitaire d'un opérateur différentiel lineare (Problème de Cauchy, II), *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 75—96.

[146] Ле Ру (Le Roux J.), Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, Ser. 3, **12** (1895), 227—316.

[147] Лёвнер (Loewner Ch.), Generation of solutions of systems of partial differential equations by composition of infinitesimal Baecklund transformations, *J. d'Anal. Math.* **2** (1952), 219—242.

[148] Линделёф (Lindeloef E.), Calcul des Résidues. Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris, 1905.

[149] Лихтенштейн (Lichtenstein L.), Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II C 12, 1277—1334.

[150] Лукомская М. А., Об одном обобщении класса аналитических функций, *ДАН СССР*, **73** (1950), 885—888.

[151] — О циклах систем линейных однородных дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, **29** (71) (1951), 551—558.

[152] — О совокупности решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений, *Учен. зап. Белорус. ун-та*, **15** (1953), 41—45.

[153] — Решение некоторых систем уравнений с частными производными посредством включения в цикл, *Прикладная матем. и мех.*, **17** (1953), 745—747.

[154] — О некоторых системах линейных однородных дифференциальных уравнений, *Учен. зап. Белорус. ун-та*, **16** (1954), 56—64.

[155] Магнус и Оберхеттингер (Magnus W. and Oberhettinger F.), Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, 52, 1948.

[156] Макки (Mackie A. G.), Contour integral solutions of a class of differential equations, *J. Rat. Mech. Anal.*, **4** (1955), 733—750.

[157] Марден (Marden M.), A recurrence formula for the solutions of certain linear partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 208—217.

[158] — Axisymmetric harmonic vectors, *Amer. J. Math.*, **67** (1945), 109—122.

[159] Мизес (Mises R.). Mathematical theory of compressible fluid flow, Academic Press, 1958, New York. (Русский перевод: Мизес Р., Математическая теория течений сжимаемой жидкости, ИЛ, М., 1961.)

[160] — и Шиффер (Schiffer M.), On Bergman's integration method in two-dimensional compressible flow, Advances in Appl. Mech., **1** (1948), 249—285. (Русский перевод в сб. Проблемы механики, ИЛ, М., 1955, 489—518.)

[161] Митчелл (Mitchell J.), Some properties of solutions of partial differential equations given by their series development, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 87—104.

[162] Моленброк (Molenbrock P.). Über einige Bewegungen eines Gases mit Annahme eines Geschwindigkeitspotentials, *Arch. Math. Phys.* (2), **9** (1890), 157—195.

[163] Моравец (Morawetz C. S.), A uniqueness theorem for Frankl's problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 697—703.

[164] — On the non-existence of continuous transonic flows past profiles, I, *Comm. Pure Appl. Math.*, **9** (1956), 45—68.

[165] — Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for an elliptic-hyperbolic equation, *Proc. Roy. Soc. London*, A **236** (1956), 141—144.

[166] — On the non-existence of continuous transonic flows past profiles, II, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 107—131.

[167] — On the non-existence of continuous transonic flows past profiles, III, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 129—144.

[168] — Uniqueness for the analog of the Neumann problem for mixed equations, *Michigan Math. J.*, 4 (1957), 5—14.

[169] — A weak solution for a system of equations of elliptic-hyperbolic type, *Comm. Pure Appl. Math.*, 11 (1958), 315—331.

[170] Натаняху (Natanyahu N.), On the singularities of solutions of differential equations of elliptic type, *J. Rat. Mech. Anal.*, 3 (1954), 755—761.

[171] Нильсен (Nielsen K. L.), On Bergman operators for linear partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 156—162.

[172] — Some properties of functions satisfying partial differential equations of elliptic type, *Duke Math. J.*, **11** (1944), 121—137.

[173] — и Рэмси (Ramsey B. P.), On particular solutions of linear partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 156—162.

[174] Ниренберг (Nirenberg L.), On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity, *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 97—156.

[175] Нитше (Nitsche J.), Elementary proof of Bernstein's theorem on minimal surfaces, *Ann. of Math.*, **66** (1957), 543—544.

[176] Пак (Pack D. C.), Hodograph methods in gas dynamics, Inst. for Fluid Dynamics and Appl. Math., Univ. of Maryland, Rept. 17, 1951/52.

[177] Пейн (Payne L. E.), Multivalued functions in generalized axially symmetric potential theory, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **10** (1956).

[178] Пикар (Picard E.), Sur un système d'équations aux dérivées partielles, *C. R., Acad. Sci. Paris*, **112** (1893), 685—688.

[179] Пойа (Pólya G.), Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes (mit A. Hurwitz), *Acta Math.*, **40** (1916), 179—183.

[180] — Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Math. Ann.*, **77** (1916), 497—513.

[181] — Sur les séries entières à coefficients entiers, *Proc. London Math. Soc.* (2), **21** (1922), 22—38.

[182] — Über die Existenz unendlich vieler singulärer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Dirichletscher Reihen, *Stzgsber. Preuss. Akad.*, phys.-math. Kl., 1923, 45—50.

[183] — Eine Verallgemeinerung der Fabryschen Lückensatzes, *Nachr. Gesellschaft Wissensch., Göttingen*, **1927**, 187—195.

[184] — Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe, *Math. Ann.*, **99** (1928), 687—706.

[185] — Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Z.*, **29** (1929), 549—640.

[186] — Über Potenzreihen mit ganzen algebraischen Koeffizienten, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 8 (1931), 401—402.

[187] — Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Zweite Mitteilung, *Ann. of Math.* (2), **34** (1933), 731—777.

[188] — Über die Potenzreihenentwicklung gewisser mehrdeutiger Funktionen, *Comment. Math. Helv.*, 7 (1935), 201—221.

[189] — On converse gap theorems, *Amer. Math. Soc. Trans.*, **52** (1942), 65—71.

[190] Положий Г. Н. О p-аналитических функциях комплексного переменного, *ДАН СССР*, 58 (1947), 1275—1278.

[191] Полонский (Polonsky J.), Pseudoanalytic functions with characteristic coefficients in L_p, Dissertation, New York University, New York, 1957.

[192] Проттер (Protter M. H.), A boundary value problem for an equation of mixed type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 416—429.

[193] Uniqueness theorems for the Tricomi problem, Part I, *J. Rat. Mech. Anal.*, 2 (1953), 107—114; Part II, **4** (1955), 721—732.

[194] — The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation, *Canad. J. Math.*, **6** (1954), 542—553.

[195] — An existence theorem for the generalized Tricomi problem, *Duke Math. J.*, 21 (1954), 1—7.

[196] — The two-noncharacteristic problem with data partly on the parabolic line, *Pacific J. Math.*, 4 (1954), 99—108.

[197] — The periodicity problem for pseudoanalytic functions, *Ann. of Math.*, **64** (1956), 154—174.

[198] — Риман (Riemann B.), Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß, 2 Aufl., 1892.

[199] — Сегё (Szegö G.), On the singularities of zonal harmonic expansions, *J. Rat. Mech. Anal.*, 3 (1954), 561—564.

[200] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 3, М., 1954.

[201] — Спенсер (Spencer D. G.), A generalisation of a theorem of Hodge, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 38 (1952), 533—534.

[202] — Real and complex operators on manifolds, Contributions to the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **30** (1953), 203—227.

[203] Темляков А. А., Sur la croissance des fonctions satisfaisant aux équations linéaires aux dérivées partielles et du second ordre, *C. r. Acad. sci. Paris*, **200** (1935), 799—801.

[204] — Zu dem Wachstumsproblem der harmonischen Funktionen des dreidimensionalen Raumes, *Матем. сб.*, **42** (1935), 707—718.

[205] — Über harmonische Funktionen von drei Veränderlichen mit einer meromorphen zugehörigen Funktion, *Матем. сб.*, **5** (47) (1939), 487—496.

[206] О гармонических функциях и решениях волнового уравнения с тремя независимыми переменными, *Матем. сб.*, **14** (56) (1944), 133—154.

[207] Трикоми (Tricomi F.), Sulle equazioni lineari alle derivato parziali di 2° ordina di tipo misto, *Rend. Accad. Naz. dei Lincei*, **14** (1923), 133—247.

[208] Уайт (White A.), Singularities of harmonic functions of three variables generated by Whittaker — Bergman operators, *Ann. Polon. Math.*, **10** (1961).

[209] Уитни (Whitney H.), Differentiable functions defined in arbitrary subsets of Euclidian space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 309—317.

[210] Уиттекер (Whittaker E. T.), On the partial differential equations of mathematical physics, *Math. Ann.*, **57** (1903), 333—355.

[211] — и Ватсон (Watson G. N.), A course of modern analysis, Macmillan, New York, 1945. (Русский перевод: Уиттекер Е. Т. и Ватсон Дж., Курс современного анализа, ч. I, М., 1962, ч. II, М., 1963.)

[212] Финн (Finn R. S.), Isolated singularities of solutions of non-linear partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 385—404.

[213] — и Гилбарг (Gilbarg D.), Asymptotic behavior and uniqueness of plane subsonic flows, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 23—63.

[214] — — Three-dimensional subsonic flows and asymptotic estimates for elliptic partial differential equations, *Acta Math.*, **98** (1957), 265—296.

[215] Франкль Ф. И., О задаче Коши для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с начальными данными на переходной линии, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **8** (1944), 195—224.

[216] — О задаче С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **9** (1945), 121—143.

[217] Фукс (Fuchs L.), Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Funktionen eines Parameters aufgefaßt. Math. Werke, 1, Berlin 1904, 241—281.

[218] Хелльвиг (Hellwig G.), Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen mit Singularitäten, *J. Rat. Mech. Anal.*, **5** (1956), 395—418.

[219] Хенричи (Henrici P.), Bergmans Integraloperator erster Art und Riemannsche Funktion, *Z. angew. Math. Phys.*, **3** (1952), 228—232.

[220] — A survey of J. N. Vekua's theory of elliptic differential equations with analytic coefficients, *Z. angew. Math. Phys.*, **8** (1957), 169—203.

[221] Ходж (Hodge W. V. D.), The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge University Press, 1952.

[222] Цянь Сюэ-сень (Tsien H. S.), Two-dimensional subsonic flow of compressible fluids, *J. Aero. Sci.*, **6** (1939), 399.

[223] — The limiting line in mixed subsonic and supersonic flow of compressible fluids, NACA Technical Note 961, 1944.

[224] — и Го Юн-гуай (Kuo Y. H.), Two-dimensional irrotational mixed subsonic and supersonic flow of a compressible fluid and the upper critical Mach number, NACA Technical Note 995, 1946.

[225] Чаплыгин С. А., О газовых струях, Диссертация, М., 1902, *Ученые зап. Моск. ун-та*, физ.-мат. сер., **21** (1904), 1—121; Собрание сочинений, т. II, М., 1948.

[226] Чернов (Chernoff H.), Complex solutions of partial differential equations, *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 455—478.

[227] Черри (Cherry T. M.), Tables and approximate formulae for hypergeometric functions of high order, occurring in gas-flow theory, *Proc. Roy. Soc. London*, **A217** (1935), 222—234.

[228] — Flow of a compressible fluid about a cylinder, *Proc. Roy. Soc. London,* **A192** (1947), 45—79.

[229] — Numerical solutions for compressible flow past a cylinder, Australian Council for Scientific and Industrial Research Report № A48, 1948; *Proc. Roy. Soc. London,* **A196** (1949), 32—36.

[230] — Exact solutions for flow of a perfect gas in a two-dimensional Laval nozzle, *Proc. Roy. Soc. London,* **A203** (1950), 551—571. (Русский перевод в сб. *Механика,* № 3 (32), (1952).)

[231] — Relation between Bergman's and Chaplygin's methods of solving the hodograph equation, *Quart Appl. Math.,* **9** (1951), 92—94.

[232] Шифман (Schiffman M.), On the existence of subsonic flows of a compressible fluid, *J. Rat. Mech. Anal.,* **1** (1952), 605—652.

[233] Эйхлер (Eichler M. M. E.), Allgemeine Integration linearer partieller Differentialgleichungen von elliptischen Typ bei zwei Grundvariablen, *Abh. Math. Sem. Hamburg Univ.,* **15** (1947), 179—210.

[234] — On the differential equation $u_{xx} + u_{yy} + N(x)u = 0$, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **65** (1949), 259—278.

[235] — Analytic functions in three-dimensional Riemannian spaces, *Duke Math. J.,* **16** (1949), 339—349.

[236] — Eine Modifikation der Riemannschen Integrationsmethode bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ, *Math. Z.,* **53** (1950), 1—10.

[237] Эрдейи (Erdélyi A.), Integration of a certain system of linear partial differential equations of hypergeometric type, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh,* **59** (1938—1939), 224—241.

[238] — On some generalizations of Laguerre polynomials, *Proc. Edinburgh Math. Soc.,* **6** (1940), 193—221.

[239] — Integration of the differential equations of Appell's function F_4, *Quart. J. Math. Oxford,* **12** (1941), 68—77.

[240] — Singularities of generalized axially symmetric potentials, *Comm. Pure Appl. Math.,* **9** (1956), 403—414.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОПЕРАТОРЫ, ПОРОЖДАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ, И ИХ СВОЙСТВА [1])

Введение

Интегральные операторы, примененные к аналитическим функциям одного или многих комплексных переменных, порождают решения линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Одна из проблем этой теории состоит в нахождении операторов, сохраняющих свойства аналитических функций или изменяющих их простейшим образом. Таким путем получены различные результаты, относящиеся к этим решениям.

Интегральный оператор $\mathbf{P}$ определяет решение $\varphi(X) = \mathbf{P}(f)$, $X = (x, y, z, \ldots)$, где f — аналитическая функция комплексных переменных в некоторой области n-мерного пространства [2]) (в *области ассоциации* этого *оператора*). Последняя область, вообще говоря, составляет только *часть области существования* решения $\varphi(X)$. Однако теория интегральных операторов иногда позволяет также получать заключения о поведении решения $\varphi(X)$ в целом, т. е. во всей области его существования.

В настоящей статье и в [16] рассматриваются следующие два вопроса.

(A) Свойства гармонических векторов H, т. е. троек гармонических функций, связанных уравнениями

$$\operatorname{div} H = 0, \qquad \operatorname{rot} H = 0. \tag{0.1}$$

---

[1]) Bergman S., Operators generating solutions of certain differential equations in three variables and their properties, *Scripta Mathematica*, 26 (1961), 5-31.

[2]) В настоящей статье мы рассматриваем случай, когда $n = 3$; x, y, z — действительные переменные. Применяемый в дальнейшем оператор определяется равенством $\mathrm{B}_3(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} f(u, \zeta)\, \zeta^{-1}\, d\zeta$; он порождает класс *комплексных* гармонических функций, описанных в [15, гл. III, § 2] и в [16, § 2].

Эти векторы можно рассматривать как некоторое обобщение аналитических функций комплексного переменного. [Уравнения (0.1) играют роль уравнений Коши — Римана для функций, сопряженных к аналитическим.] Гармонический вектор $H=\{H_1, H_2, H_3\}$ можно получить по формуле

$$H(X)=V_3(f)\equiv\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} f(u,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta},\right.$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} f(u,\zeta)(\zeta+\zeta^{-1})\frac{d\zeta}{\zeta},$$
$$\left.\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} f(u,\zeta)(\zeta-\zeta^{-1})\frac{d\zeta}{\zeta}\right\} \tag{0.2}$$

из аналитической функции f комплексных переменных

$$u=\left(x+iy\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2}+z\frac{\zeta-\zeta^{-1}}{2}\right)$$

и ζ.

Если f — рациональная функция, то H_1, H_2, H_3 — алгебраические функции. В дальнейшем мы получим соотношения между интегралами

$$\int H\cdot dX\equiv\int(H_1\,dx+H_2\,dy+H_3\,dz), \tag{0.3}$$

с одной стороны, и интегралами от некоторых алгебраических аналитических функций комплексного переменного, с другой стороны. Далее, для интегралов (0.2) мы выведем „теоремы о вычетах". В простейшем случае результаты такого типа были получены в [7, 8]. Здесь они существенно обобщаются. (Чтобы облегчить чтение настоящей статьи, мы повторяем некоторые рассуждения из предыдущих работ.)

(Б) Одной из проблем теории гармонических функций трех переменных является обобщение соотношений между коэффициентами разложения в ряд аналитической функции одного переменного и расположением и характером ее особенностей. Чтобы получить удобные выражения для различных соотношений между коэффициентами разложения и расположением и свойствами особенностей гармонических функций, мы введем матрицы определенного вида [см. (0.6) и (0.7)]. Разложение гармонической функции по модифицированным объемным сферическим функциям $\Gamma_{nk}(X)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{2n} a_{nK}\Gamma_{nK}(X)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{2n} a_{nK}\left[\frac{n!\,i^{|K-n|}}{(n+|K-n|)!}r^n P_{n,|n-K|}(\cos\theta)\,e^{i(K-n)\varphi}\right],$$
$$X\in\mathfrak{B}(O), \qquad (0.4)$$

см. [15], формулу (21) на стр. 74), где

$$\Gamma_{nK}(X)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} u^n\zeta^{-n+K-1}\,d\zeta \qquad (0.5)$$

— комплексные объемные сферические функции, умноженные на постоянные; r, θ и φ — сферические координаты, $\mathfrak{B}(O)$ — достаточно малая окрестность начала координат. Элементы матриц в формуле (0.7) являются коэффициентами $\hat{a}_n$ разложений гармонических функций

$$H(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{a}_n\Gamma_{NM}(X)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{|\zeta|=1}\hat{a}_n\left(u^m\zeta^p\right)^n\zeta^{x-1}\,d\zeta.$$

Коэффициенты a_{nk} образуют треугольную матрицу

$$\{a_{nk}\}=\left|\begin{matrix} & & & a_{00} & & & \\ & & a_{10} & a_{11} & a_{12} & & \\ & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right|, \qquad (0.6)$$

которую можно представить в виде суммы матриц, состоящих из *одного столбца*:

$$\begin{Vmatrix} a_{00} \\ a_{11} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ a_{10} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ a_{12} \\ a_{23} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{20} \\ a_{31} \\ \cdot \\ \cdot \end{Vmatrix} + \ldots = \tag{0.7}$$

$$= \{a_{\nu\mu};\ \nu = n,\ \mu = n\} + \{a_{\nu\mu};\ \nu = n-1,\ \mu = n-2\} + \\ + \{a_{\nu\mu};\ \nu = n-1,\ \mu = n\} + \ldots,$$

где $a_{\nu\mu} = 0$, если $\nu < 0$ или $\mu < 0$. Здесь $N = mn$, $M = pn + \varkappa$; m, p, $\varkappa$ — фиксированные (действительные) целые числа. Теорема Адамара в теории функций одного переменного устанавливает связь между поведением некоторых определителей из коэффициентов $\hat{a}_n$ разложения аналитической функции $f(\tau) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n \tau^n$ и расположением и характером ее особенностей; с помощью результатов Адамара были получены некоторые соотношения между определителями, образованными из $\hat{a}_n$, и расположением особенностей типа полюса функции $H(X)$ (см. [36], стр. 335) Используя метод, развитый в работах [3, 4, 7, 8, 10, 15 (см. также [26, 27, 37, 39, 46, 47, 51, 57]), мы в [16] вводи класс алгебраических гармонических функций. Использу результаты Неванлинны [49] и Адамара, мы получае теоремы о связи между коэффициентами разложений не которых гармонических функций и распределением значе ний этих функций. Автор весьма обязан г-ну Ситяку з помощь при подготовке настоящей статьи, которая при вела к улучшению некоторых результатов. Автор благс дарит также г-на Боянича за ценные замечания.

1. Определение компонент H_2 и H_3 гармоническог вектора по данной компоненте H_1. Пусть $H_1(X$ $X = (x, y, z)$, — гармоническая функция, регулярная в д статочно малой окрестности $\mathfrak{B}(O)$ начала координат (

Как указывалось в [8,15], данной функции H_1 соответствует целое семейство сопряженных функций

$$H_2(X)=H_2^{(0)}(X)+\operatorname{Im}[g(y+iz)],$$
$$H_3(X)=H_3^{(0)}(X)+\operatorname{Re}[g(y+iz)], \qquad X\in\mathfrak{B}(O). \quad (1.1)$$

Здесь $H_k^{(0)}$, $k=2, 3$, — любые две сопряженные функции, а $g(y+iz)$ — произвольная аналитическая функция, регулярная в начале координат.

Пусть $\mathfrak{B}$ — односвязная область, удовлетворяющая приводимым ниже условиям (А) и (Б). Мы покажем, что для всякой функции H_1, регулярной в $\mathfrak{B}$, можно найти две функции H_2 и H_3, регулярные в $\mathfrak{B}$, такие, что $\{H_1, H_2, H_3\}$ будет гармоническим вектором.

Далее мы рассмотрим различные представления тройки $\{H_1\ H_2, H_3\}$ в $\mathfrak{B}$.

Пусть $H_1(X)$ регулярна в односвязной области $\mathfrak{B}$, $O\in\mathfrak{B}$, трехмерного пространства $\mathfrak{R}^3$. (Как показано в [8], существуют области $\tilde{\mathfrak{B}}$, такие, что не каждая функция H_1, регулярная в $\tilde{\mathfrak{B}}$, имеет сопряженные H_2 и H_3, также регулярные в $\tilde{\mathfrak{B}}$.)

Сейчас мы опишем класс областей, в которых сопряженные H_2 и H_3 всегда существуют.

Предположим, что $\mathfrak{B}$ — односвязная область, содержащая начало координат и обладающая следующими свойствами.

(А) Пересечение $\mathfrak{B}(0)=(\mathfrak{B}\cap(x=0))$ области $\mathfrak{B}$ с плоскостью $x=0$ содержит проекции пересечений $\mathfrak{B}\cap(x=a)$ области $\mathfrak{B}$ с любой плоскостью $x=a$.

(Б) Пересечение $\mathfrak{B}$ со всякой прямой, параллельной оси x (если оно не пусто), является связным сегментом.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{B}$ — область, удовлетворяющая условиям* (А) *и* (Б), *и пусть $H_1(X)$ — гармоническая функция, регулярная в $\overline{\mathfrak{B}}$.*

Тогда найдутся две функции H_2, H_3, регулярные в $\mathfrak{B}$, такие, что $\{H_1, H_2, H_3\}$ будет гармоническим вектором в $\mathfrak{B}$.

Доказательство. Так как функция $H_1(X)$ регулярна в $\overline{\mathfrak{B}}$, она регулярна в большей области $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}\supset\overline{\mathfrak{B}}$.

Предположим, что $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условиям (А) и (Б) и что ее граница $\mathfrak{d}$ имеет нормаль в каждой точке. Функцию $H_1(X)$ можно рассматривать в $\mathfrak{D}$ как потенциал простого слоя[1])

$$H_1(X) = \int\limits_{\mathfrak{d}}\int \frac{F(\xi, \eta, \zeta)\, d\Omega_T}{r}, \qquad r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}, \tag{1.2}$$

где $d\Omega_T$ — элемент площади поверхности $\mathfrak{d}$ и $T = (\xi, \eta, \zeta)$[2]). Пусть $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2$, где $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d} \cap [(-1)^k x < 0]$, $k = 1, 2$, и

$$h_2^{(k)}(X, T) = (-1)^k \frac{(y-\eta)}{r(r + (-1)^k (x-\xi))}, \qquad h_3^{(k)}(X, T) = (-1)^k \frac{(z-\zeta)}{r[r + (-1)^k (x-\xi)]}. \tag{1.3}$$

Тогда

$$H_s(X) = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\mathfrak{d}_k}\int F(T)\, h_s^{(k)}(X, T)\, d\Omega_T, \quad s = 2, 3. \tag{1.4}$$

Функции F и $h_s^{(k)}(X, T)$ равномерно ограничены в $\mathfrak{B}$, следовательно, $H_s(X)$, $s = 2, 3$, — регулярные гармонические функции в $\mathfrak{B}$ (см. [8, стр. 489]).

При дифференцировании правых частей равенств (1.2) и (1.3) мы можем поменять порядок интегрирования и дифференцирования. Так как $\left(1/r, h_2^{(k)}, h_3^{(k)}\right)$ — гармонический вектор, то (H_1, H_2, H_3) — также гармонический вектор в $\mathfrak{B}$. Представление (1.4) для $H_s(X)$ можно видоизменить. Каждую гармоническую функцию $H_1(X)$, регулярную в $\mathfrak{B}$, можно представить в $\mathfrak{B}$ в виде

$$H_1(X) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathfrak{d}}\int \left\{ H_1(T) \frac{\partial r^{-1}}{\partial n_T} - \frac{\partial H_1(T)}{\partial n_T} \frac{1}{r} \right\} d\Omega_T \tag{1.5}$$

---

[1]) r всегда неотрицательно.

[2]) [55, т. 1, стр. 620].

(см. [42, т. II, стр. 235]). Таким образом,

$$H_s(X) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{2}\iint_{\mathfrak{d}_k}\left\{H_1(T)\frac{\partial h_s^{(k)}(X, T)}{\partial n_T} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial H_1(T)}{\partial n_T} h_s^{(k)}(X, T)\right\} d\Omega_T, \qquad s = 2, 3. \tag{1.6}$$

Здесь

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial \xi} = \frac{x'}{r^3}, \ \ldots, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(-1)^k y'}{r(r+(-1)^k x')}\right] = \frac{y'}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(-1)^k y'}{r(r+(-1)^k x')}\right] =$$

$$= -(-1)^k\left[\frac{1}{r(r+(-1)^k x')} - \frac{y'^2(2r+(-1)^k x')}{r^3(r+(-1)^k x')^2}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{(-1)^k y'}{r(r+(-1)^k x')}\right] = -\frac{(-1)^k y' z'[2r+(-1)^k x']}{r^3[r+(-1)^k x']^2}, \ \ldots, \tag{1.8}$$

$$x' = x - \xi, \quad y' = y - \eta, \quad z' = z - \zeta.$$

Если заданы функции $H_1(X)$ и $H_2(X)$, связанные соотношением $\partial H_1(X)/\partial y = \partial H_2(X)/\partial x$, то вектор $H(X) = \{H_1(X), H_2(X), H_3(X)\}$, где

$$H_3(X) = \int_{(0,0,0)}^{X}\left[\frac{\partial H_1}{\partial \zeta}d\xi + \frac{\partial H_2}{\partial \zeta}d\eta - \left(\frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \eta}\right)d\zeta\right] + C,$$

$$H_s \equiv H_s(\xi, \eta, \zeta), \tag{1.9}$$

будет гармоническим вектором. Здесь C — произвольная постоянная.

Таким образом, имеется свобода в выборе второй компоненты $H_2(X)$ для данной гармонической функции $H_1(X)$; интересно найти вектор $H(X) = \{H_1(X), H_2(X), H_3(X)\}$ или множество векторов, обладающих определенными свойствами.

Рассмотрим сначала представление для некоторого подкласса гармонических векторов. Будем говорить, что $H(X) \in E(x)$, если $H(X)$ — гармоническая функция, четная по x.

Лемма 1.1. *Для каждой объемной сферической функции* $S_s(X)$, $S_s(X) \in E(x)$, *сопряженная функция* $\mathrm{H}_2(S_s(X))$ *определяется формулой*

$$H_2(X) = \mathrm{H}_2(S_s(X)) = \int_0^x \frac{\partial S_s(\xi, y, z)}{\partial y}\, d\xi. \tag{1.10}$$

Доказательство. Функции

$$S_s(X) = \Gamma_{nk}(X), \quad k = 0, 2, 4, \ldots, 2n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(см. [15, стр. 70], (8)) образуют полную систему в классе $E(x)$ и

$$\int_0^x \frac{\partial \Gamma_{nk}(\xi, y, z)}{\partial y}\, d\xi = \frac{i}{2}\left(\Gamma_{n,\,k-1}(X) + \Gamma_{n,\,k+1}(X)\right). \tag{1.10a}$$

[Правая часть равенства (1.10а) является нечетной гармонической функцией от x; она не имеет членов, не зависящих от x, см. (1.16).]

Пусть $\{\psi_s^{(1)}(X)\}$ — ортонормальная система полиномов, полная в классе $E(x)$ в области $\mathfrak{B}$. [Полиномы $\psi_s^{(1)}(X)$, $s = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют соотношениям

$$\iiint_{\mathfrak{B}} \left[\frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial \psi_n^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial y}\frac{\partial \psi_n^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial \psi_n^{(1)}}{\partial z}\right] d\omega = \delta_{mn},$$

$$\delta_{mm} = 1, \quad \delta_{mn} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \tag{1.11}$$

Здесь $d\omega$ — элемент объема $\mathfrak{B}$.]

Используя (1.10) и (1.9) ($C = 0$), мы определим множество гармонических векторов

$$\Psi_s(X) = \{\psi_s^{(1)}(X),\ \psi_s^{(2)}(X),\ \psi_s^{(3)}(X)\}, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{1.12}$$

Теорема 1.2. *Пусть*

$$H_1(X) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \psi_s^{(1)}(X) \tag{1.13}$$

— *гармоническая функция класса* $E(x)$, *регулярная в области* $\overline{\mathfrak{B}}$, *причем область* $\overline{\mathfrak{B}}$ *удовлетворяет усло-*

виям (А) *и* (Б). *Тогда существует гармонический вектор* $H(X) = \{H_1(X), H_2(X), H_3(X)\}$ *в* $\mathfrak{B}$, *который представляется в* $\mathfrak{B}$ *в виде*

$$H(X) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \psi_s(X). \tag{1.14}$$

Вернемся теперь к рассмотрению общего случая гармонических функций, т. е. функций, не обязательно принадлежащих классу $E(x)$.

Найдем представление[1]) для вектора, первая компонента которого — заданная гармоническая функция $H_1(X)$, регулярная в $\overline{\mathfrak{B}}$.

Пусть $\mathfrak{b}$ — граничная кривая области $\mathfrak{B}(0)$. Для каждой точки P_1 кривой $\mathfrak{b}$ построим круг $\mathfrak{D}_r(P_1)$ с центром P_1 и радиусом r, $r > 0$. Пусть

$$\mathfrak{S}_r = \mathfrak{B}(0) \cap \left[\bigcup_{P_1 \in \mathfrak{b}} \mathfrak{D}_r(P_1)\right], \qquad r > 0. \tag{1.15}$$

Расстояние от каждой точки $P_1 \in [\mathfrak{B}(0) - \mathfrak{S}_r]$ до граничной кривой $\mathfrak{b}$ области $\mathfrak{B}(0)$ не меньше r.

Как мы доказали ранее, для каждого решения $H_1(X)$, регулярного в $\mathfrak{B}$, существует сопряженная функция $\mathrm{H}_2(H_1)$. Пусть $H_2(X)$ — сопряженная к $H_1(X)$. Так как $\frac{\partial H_2(X)}{\partial x} = \frac{\partial H_1(X)}{\partial y}$, то

$$H_2(X) - \int_0^x \frac{\partial H_1}{\partial y}\, d\xi = P(y, z), \tag{1.16}$$

где $P(y, z)$ — функция от y и z. Образуя лапласиан для (1.16), получаем

$$\Delta_3 H_2(X) - \frac{\partial^2 H_1(X)}{\partial x\, dy} - \int_0^x \frac{\partial^3 H_1}{\partial y^3}\, d\xi - \int_0^x \frac{\partial^3 H_1}{\partial y\, \partial z^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \tag{1.17}$$

[1]) Это представление отличается от (1.4).

Подставляя $x=0$, находим, что P — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=-\left(\frac{\partial^2 H_1(X)}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=0}. \qquad (1.18)$$

Мы можем записать решение уравнения (1.18) в форме

$$P(y, z)=\iint\limits_{\mathfrak{B}(0)-\mathfrak{S}_r}\left(\frac{\partial^2 H_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)_{\xi=0}\rho(y, z; \eta, \zeta)\,d\eta\,d\zeta+$$

$$+\iint\limits_{\mathfrak{S}_r}\left(\frac{\partial^2 H_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)_{\xi=0}\rho(y, z; \eta, \zeta)\,d\eta\,d\zeta,$$

$$\rho(y, z; \eta, \zeta)=-\frac{1}{4\pi}\log[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2] \qquad (1.19)$$

(см. [42, т. I, стр. 315 и далее]). Каждая гармоническая функция $H_1(X)$, регулярная в $\overline{\mathfrak{B}}$, может быть разложена в $\mathfrak{B}$ в ряд по ортогональным полиномам $\Phi_s^{(1)}(X)$, т. е. по гармоническим полиномам, удовлетворяющим условию (1.11):

$$H_1(X)=\sum_{s=0}^{\infty}A_s\Phi_s^{(1)}(X). \qquad (1.20)$$

Этот ряд сходится равномерно и абсолютно в каждой замкнутой подобласти, лежащей в $\mathfrak{B}$. Таким образом, сопряженная $H_2=\mathrm{H}_2(H_1)$ может быть представлена в $\mathfrak{B}$ в виде

$$H_2(X)=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\Phi_{s,r}^{(2)}(X)+$$

$$+\iint\limits_{\mathfrak{S}_r}\left(\frac{\partial^2 H_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)_{\xi=0}\rho(y, z; \eta, \zeta)\,d\eta\,d\zeta, \qquad (1.21)$$

где

$$\Phi_{s,r}^{(2)}(X)=\int_0^x\frac{\partial\Phi_s^{(1)}(\xi, y, z)}{\partial y}\,d\xi+$$

$$+\iint\limits_{\mathfrak{B}(0)-\mathfrak{S}_r}\left(\frac{\partial^2\Phi_s^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)_{\xi=0}\rho(y, z; \eta, \zeta)\,d\eta\,d\zeta. \qquad (1.21a)$$

Замечание. Функции $\Phi_{s,r}^{(2)}(X)$, $s=1, 2, \ldots$, уже не образуют ортонормальную систему в $\mathfrak{B}$.

Так как (1.20) — гармоническая функция и ряд сходится абсолютно и равномерно во всякой замкнутой подобласти $\overline{\mathfrak{B}}_1$ в $\mathfrak{B}$, ряды для производных сходятся также равномерно во всякой области $\mathfrak{B}_1$. Мы можем менять порядок суммирования и интегрирования в выражении

$$\int_0^x \frac{\partial \sum A_s \Phi_s^{(1)}(\xi, y, z)}{\partial y}\, d\xi +$$
$$+ \iint\limits_{\mathfrak{B}(0)-\mathfrak{S}_r} \left(\frac{\partial^2 \sum A_s \Phi_s^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi\, \partial \eta} \right)_{\xi=0} \rho(y, z; \eta, \zeta)\, d\eta\, d\zeta. \tag{1.22}$$

Таким образом,

сопряженная $\mathrm{H}_2(H_1)$ *к гармонической функции* (1.20), *регулярной в* $\overline{\mathfrak{B}}$, *может быть представлена в* $\mathfrak{B}$ *в виде* (1.21), (1.21а). *Далее,*

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}_r} \left(\frac{\partial^2 H_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi\, \partial \eta} \right)_{\xi=0} \rho(y, z; \eta, \zeta)\, d\eta\, d\zeta \tag{1.23}$$

является гармонической функцией в

$$\mathfrak{D}_r = \mathfrak{B} \cap \{(y, z) \in (\mathfrak{B}(0) - \mathfrak{S}_r),\ x \text{ произвольно}\}.$$

Следовательно, $\Phi_{s,r}^{(2)}(X)$, $s = 1, 2, 3, \ldots,$ — *гармонические сопряженные к* $\Phi_s^{(1)}(X)$ *в* $\mathfrak{D}_r$, $r > 0$.

Функция

$$\Phi_{s,r}^{(3)}(X) = \int_0^x \left\{ \frac{\partial \Phi_s^{(1)}}{\partial \zeta}\, d\xi + \frac{\partial \Phi_{s,r}^{(2)}}{\partial \zeta}\, d\eta - \left(\frac{\partial \Phi_s^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_{s,r}^{(2)}}{\partial \eta} \right) d\zeta \right\}_{\substack{\eta = y \\ \zeta = z}},$$
$$\Phi_s^{(k)} \equiv \Phi_s^{(k)}(\xi, \eta, \zeta), \tag{1.24}$$

гармонична в $\mathfrak{D}_r$ и $\{\Phi_s^{(1)}(X), \Phi_{s,r}^{(2)}(X), \Phi_{s,r}^{(3)}(X)\} = \boldsymbol{\Phi}_{s,r}(X)$ — гармонический вектор в $\mathfrak{D}_r$ для любого r, $r > 0$.

Теорема 1.3. *Гармонический вектор* $H(X)$, *первая компонента которого задана формулой* (1.20), *может быть представлен в подобласти $\mathfrak{D}_r$ области $\mathfrak{B}$ в виде*

$$H(X)=\sum_{s=1}^{\infty} A_s\Phi_{s,\,r}(X). \tag{1.25}$$

2. Связь между интегралами от алгебраических гармонических векторов от трех переменных с интегралами от алгебраических функций комплексного переменного. Далее мы рассмотрим гармонические функции

$$H(X)=\mathrm{B}_3(f,\ \mathfrak{L},\ X_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}} f(u,\ \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta},\quad X\in\mathfrak{B}(X_0), \tag{2.1}$$

где f — рациональная функция от u и ζ, а именно:

$$f(u,\ \zeta)=\frac{p(u,\ \zeta)}{q(u,\ \zeta)}, \tag{2.2}$$

p и q — взаимно простые полиномы по u и ζ. [Здесь $\mathfrak{L}$ — замкнутая кривая в плоскости ζ и $\mathfrak{B}(X_0)$ — достаточно малая окрестность точки X_0.] Пусть

$$p(u,\ \zeta)=\sum_{\mu=0}^{M}\sum_{\nu=0}^{s} a_{\mu\nu}u^{\mu}\zeta^{\nu},\quad q(u,\ \zeta)=\sum_{\mu=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{t} b_{\mu\nu}u^{\mu}\zeta^{\nu}. \tag{2.3}$$

Подстановка $u=x+\frac{i}{2}y(\zeta+\zeta^{-1})+\frac{1}{2}z(\zeta-\zeta^{-1})$ дает

$$p(u,\ \zeta)=\zeta^{-M}\sum_{\mu=0}^{l} B_{\mu}(X)\zeta^{\mu}=\zeta^{-M}P(\zeta;\ X),\ B_l(X)\neq 0, \tag{2.4}$$

$$q(u,\ \zeta)=\zeta^{-N}\sum_{\nu=0}^{k} A_{\nu}(X)\zeta^{\nu}=\zeta^{-N}Q(\zeta;\ X),\ A_k(X)\neq 0. \tag{2.5}$$

Здесь P и Q — полиномы по $x,\ y,\ z,\ \zeta$. В соответствии с этим $f(u,\ \zeta)$ записывается в виде

$$f(u,\ \zeta)=\frac{\zeta^{N-M}P(\zeta;\ X)}{Q(\zeta;\ X)}. \tag{2.6}$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения и предположения.

1° Кривая

$$\mathfrak{Z}_0 = [x = \tilde{x}(s),\ \ y = \tilde{y}(s),\ \ z = \tilde{z}(s),\ 0 \leqslant s \leqslant \alpha] \quad (2.7)$$

является гладкой жордановой кривой в пространстве $\mathfrak{R}^3$. Здесь $\tilde{y}^2(s) + \tilde{z}^2(s) \neq 0$ для $0 \leqslant s \leqslant \alpha$, т. е. $\mathfrak{Z}_0$ не имеет общих точек с осью x.

2°

$$\mathfrak{L} = [\zeta = \tilde{\zeta}(t) \equiv \tilde{r}(t)\, e^{i\tilde{\varphi}(t)},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi] \quad (2.8)$$

— гладкая жорданова кривая в плоскости ζ, не проходящая через начало координат, т. е. $r(t) \neq 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ и $d\tilde{\zeta}(t)/dt \neq 0$ вдоль $\mathfrak{L}$.

3° Полином $Q(\zeta;\ X) = \zeta^N q(u,\ \zeta)$ имеет вдоль $\mathfrak{Z}_0$ только простые корни ζ, т. е. $(\partial Q/\partial\zeta) \neq 0$ для $X \in \mathfrak{Z}_0$.

4° Полином $q(u,\ \zeta)$ имеет вдоль $\mathfrak{L}$ только простые корни, т. е. $(\partial q/\partial u) \neq 0$ для $\zeta \in \mathfrak{L}$.

5° $\mathfrak{Z}_0$ имеет конечное число общих точек с $\mathfrak{S}$[1]. Здесь

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{\zeta \in \mathfrak{L}} \{X \mid Q(\zeta;\ X) = 0,\ \zeta = \mathrm{const}\},\ X \equiv (x,\ y,\ z). \quad (2.9)$$

6° Если $X_0 \in (\mathfrak{S} \cap \mathfrak{Z}_0)$ (т. е. X_0 — точка пересечения $\mathfrak{Z}_0$ с $\mathfrak{S}$), то существует окрестность $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}(X_0)$ точки X_0, такая, что пересечение $\mathfrak{S}$ с $\mathfrak{N}_0$ представляет собой двумерную поверхность, имеющую касательную плоскость в точке X_0.

Лемма 2.1. *При предположениях* 1°—6° *функции* $q(\tilde{u}(s,\ t),\ \zeta(t))$, *где*

$$\tilde{u}(s,\ t) = \tilde{x}(s) + \frac{i}{2}\,\tilde{y}(s)\big(\tilde{\zeta}(t) + \tilde{\zeta}^{-1}(t)\big) + \\ + \frac{1}{2}\,\tilde{z}(s)\big(\tilde{\zeta}(t) - \tilde{\zeta}^{-1}(t)\big), \quad \tilde{\zeta}^{-1}(t) \equiv \frac{1}{\tilde{\zeta}(t)}, \quad (2.10)$$

могут обращаться в нуль только в конечном числе точек $(s_k,\ t_k)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa$.

Доказательство. Пусть σ_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho$, — значения s, для которых $\mathfrak{Z}_0$ пересекает $\mathfrak{S}$. Согласно 5°, $\rho < \infty$. В силу 3°, уравнение $Q(\zeta;\ \tilde{x}(\sigma_k),\ \tilde{y}(\sigma_k),\ \tilde{z}(\sigma_k)) = 0$

[1]) $\mathfrak{S}$ — отделяющая поверхность для интегрального оператора (2.1), см. [15, стр. 15 и 84].

имеет только простые корни. Таким образом, существует лишь конечное число различных точек $\zeta_{k1}, \zeta_{k2}, \ldots, \zeta_{kj_k} \in \mathfrak{L}$, для которых $Q(\zeta_{kj}; \tilde{X}(\sigma_k)) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, j_k$. Следовательно,

$$Q(\tilde{\zeta}(t_k); \tilde{X}(s_k)) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \varkappa, \quad \varkappa < \infty. \tag{2.11}$$

Так как $\tilde{\zeta}(t) \neq 0$ при $t \in [0, 2\pi]$ и $Q(\tilde{\zeta}(t); \tilde{X}(s)) = \zeta^N q(\tilde{u}(s, t), \tilde{\zeta}(t))$, имеем

$$q(\tilde{u}(s_k, t_k), \tilde{\zeta}(t_k)) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \varkappa, \tag{2.12}$$

и $q(\tilde{u}(s, t), \tilde{\zeta}(t)) \neq 0$ при $(s, t) \neq (s_k, t_k)$, что и требовалось доказать.

Пусть $\mathfrak{N}_k$ = окрестность точки $X_k = (\tilde{x}(\sigma_k), \tilde{y}(\sigma_k), \tilde{z}(\sigma_k))$, $k = 1, 2, \ldots, \rho$, такая, что $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}_k$ — кусок поверхности, имеющей касательную плоскость в точке X_k. (Заметим, что для каждого s_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, \varkappa$, существует σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, \rho$, такое, что $s_\mu = \sigma_\nu$.) Предположим, что окрестности $\mathfrak{N}_k$ так малы, что пересечение $\mathfrak{N}_\mu \cap \mathfrak{N}_\nu$ пусто при $\mu \neq \nu$. Пусть $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{J}_0)$ — семейство гладких жордановых кривых. Кривая $\mathfrak{J}$ принадлежит $\mathfrak{E}$ тогда и только тогда, когда

(а) $\mathfrak{J}$ совпадает с $\mathfrak{J}_0$ вне $\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{N}_\rho$;

(б) $\mathfrak{J}$ пересекает множество $\mathfrak{S}$ в точках X_k, $k = 1, 2, \ldots, \rho$, и только в этих точках.

Так как всякая кривая $\mathfrak{J} \in \mathfrak{E}$ гладкая, ее можно в окрестности точки s_k представить в виде

$$\begin{aligned} x &= x_k + x'_k(s - s_k) + o(s - s_k), \\ y &= y_k + y'_k(s - s_k) + o(s - s_k), \qquad |s - s_1| < \delta. \\ z &= z_k + z'_k(s - s_k) + o(s - s_k), \end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь $x_k = \tilde{x}(s_k)$, $x'_k = \tilde{x}'(s_k)$, $y_k = \tilde{y}(s_k)$, $y'_k = \tilde{y}'(s_k)$, $z_k = \tilde{z}(s_k)$, $z'_k = \tilde{z}'(s_k)$. При необходимости мы можем изменить $\mathfrak{J}$ так, чтобы было $x'_k \neq 0$.

Согласно 4°,

$$D_k \underset{\text{(по определению)}}{=} \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)_{\substack{u = \tilde{u}(s_k, t_k) \\ \zeta = \tilde{\zeta}(t_k)}} \neq 0. \tag{2.14}$$

Пусть

$$\mathfrak{J} = [X = \tilde{X}(s) \equiv (\tilde{x}(s),\ \tilde{y}(s),\ \tilde{z}(s)),\ s \in (0,\ \alpha)] \quad (2.15)$$

— заданная (фиксированная) кривая, удовлетворяющая условиям (а) и (б). Пусть, далее,

$$\mathscr{X}_k(s,\ t;\ \mathfrak{J}) = \operatorname{Re}\left[\frac{q(\tilde{u}(s,\ t),\ \tilde{\zeta}(t))}{D_k}\right],$$

$$\mathscr{Y}_k(s,\ t;\ \mathfrak{J}) = \operatorname{Im}\left[\frac{q(\tilde{u}(s,\ t),\ \tilde{\zeta}(t))}{D_k}\right], \quad (2.16)$$

где

$$\tilde{u}(s,\ t) = \tilde{x}(s) + \frac{i}{2}\tilde{y}(s)\left[\tilde{\zeta}(t) + \frac{1}{\tilde{\zeta}(t)}\right] + \frac{\tilde{z}(s)}{2}\left[\tilde{\zeta}(t) - \frac{1}{\tilde{\zeta}(t)}\right]. \quad (2.17)$$

Положим

$$\frac{1}{2}(\tilde{z}(s) + i\tilde{y}(s)) = \tilde{R}(s)\, e^{i\tilde{\psi}(s)},\quad R_k = \tilde{R}(s_k),\quad \psi_k = \tilde{\psi}(s_k),$$
$$\psi'_k = \tilde{\psi}'(s_k),\quad r_k e^{i\varphi_k} = \tilde{\zeta}(t_k),\quad \zeta'_k = \zeta'(t_k). \quad (2.18)$$

Лемма 2.2. *Для любого* k, $k = 1, 2, \ldots, p$, *существуют три постоянные* A_k, B_k, C_k, *такие, что* $A_k^2 + B_k^2 + C_k^2 \neq 0$ и

$$\Delta_k \equiv \left[\frac{\partial(\mathscr{X}_k(s,\ t;\ \mathfrak{J}),\ \mathscr{Y}_k(s,\ t;\ \mathfrak{J}))}{\partial(s,\ t)}\right]_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}} = A_k x'_k + B_k R'_k + C_k \psi'_k. \quad (2.19)$$

Доказательство. Имеем

$$\left[\frac{\partial q(\tilde{u}(s,\ t),\ \tilde{\zeta}(t))}{\partial s}\right]_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}} = \left[\frac{\partial q}{\partial u}\cdot\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}\right]_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}} = D_k\left(x'_k + r_k e^{i(\varphi_k+\psi_k)}(R'_k + i\psi' R_k) - \frac{e^{-i(\varphi_k+\psi_k)}}{r_k}(R'_k - i\psi'_k R_k)\right), \quad (2.20)$$

$$\left[\frac{\partial q(\tilde{u}(s,\ t),\ \tilde{\zeta}(t))}{\partial t}\right]_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}} = \left\{\left[\frac{\partial q}{\partial u}\cdot\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial \zeta}\right]\cdot\frac{d\tilde{\zeta}}{dt}\right\}_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}}. \quad (2.21)$$

Докажем, что $\frac{1}{D_k}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}} \neq 0$.

Согласно[1]) (2.5), $Q(\zeta;\ \boldsymbol{X}) = \zeta^N q(u,\ \zeta)$. Таким образом, в силу 3°,

$$\frac{\partial Q}{\partial \zeta} = N\zeta^{N-1} q(u,\ \zeta) + \zeta^N \left[\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial \zeta}\right] \neq 0 \qquad (2.22)$$

для $\boldsymbol{X} \in \mathfrak{Z}$ и любого ζ. Так как $q(\tilde{u}(s_k,\ t_k),\ \tilde{\zeta}(t_k)) = 0$ и $\tilde{\zeta}(t_k) \neq 0$, то

$$\left[\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial \zeta}\right]_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}} \neq 0. \qquad (2.23)$$

Таким образом, $\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}} \neq 0$, и поскольку $\zeta_k \neq 0$, имеем $\left(\frac{1}{D_k}\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}} \neq 0$. Следовательно,

$$\left(\frac{1}{D_k}\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}} = \hat{\alpha} + i\hat{\beta}, \quad \hat{\alpha} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{D_k}\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}},$$

$$\hat{\beta} = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{D_k}\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}}, \qquad (2.24)$$

где

$$\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2 \neq 0. \qquad (2.25)$$

В силу (2.20),

$$\left(\frac{1}{D_k}\frac{\partial q}{\partial s}\right)_{\substack{s=s_k\\ t=t_k}} = x'_k + \left(r_k - \frac{1}{r_k}\right)\left[R'_k \cos(\varphi_k + \psi_k) - \right.$$
$$\left. - \psi'_k R_k \sin(\varphi_k + \psi_k)\right] + i\left(r_k + \frac{1}{r_k}\right)\left[R'_k \sin(\varphi_k + \psi_k) + \right.$$
$$\left. + \psi'_k R_k \cos(\varphi_k + \psi_k)\right]. \qquad (2.26)$$

---

[1]) Если $M \geqslant N$, то получается аналогичное, но более сложное выражение, см. [8. стр. 476].

Таким образом, якобиан (2.19) равен

$$\Delta = \Delta_k = \begin{vmatrix} T_1 & T_2 \\ \widehat{\alpha} & \widehat{\beta} \end{vmatrix}, \tag{2.27}$$

где

$$T_1 = x'_k + \left(r_k - \frac{1}{r_k}\right)\left[R'_k \cos(\varphi_k + \psi_k) - \psi'_k R_k \sin(\varphi_k + \psi_k)\right],$$

и

$$T_2 = \left(r_k + \frac{1}{r_k}\right)\left[R'_k \sin(\varphi_k + \psi_k) + \psi'_k R_k \cos(\varphi_k + \psi_k)\right].$$

Так как $\alpha + i\widehat{\beta}$ не зависит от x'_k, R'_k, ψ'_k, то $\Delta = \Delta(\mathfrak{J})$ — линейная однородная функция от x'_k, R'_k, ψ'_k:

$$\Delta = A_k x'_k + B_k R'_k + C_k \psi'_k. \tag{2.28}$$

Поскольку $R_k \neq 0$, легко видеть[1]), что $A_k^2 + B_k^2 + C_k^2 \neq 0$. Доказательство закончено.

Следствие. *Для любой кривой $\mathfrak{J}_0 \in \mathfrak{E}$ (и любой системы окрестностей $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_\rho$) можно найти кривую $\mathfrak{J} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{J}_0)$, такую, что*

$$\Delta_k(\mathfrak{J}) \neq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \rho. \tag{2.29}$$

Лемма 2.3. *Пусть $\mathfrak{J} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{J}_0)$ и пусть $\Delta_k(\mathfrak{J}) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, \rho$. Тогда интеграл*

$$\int\limits_{\mathfrak{S}}\int \left[\frac{\zeta^{a^*} p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)} \frac{d\widetilde{u}}{ds} \frac{d\widetilde{\zeta}}{dt}\right] ds\, dt, \qquad \mathfrak{S} = \{s, t \mid 0 \leqslant s \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}, \tag{2.30}$$

абсолютно сходится.

Доказательство. По лемме 2.1, подинтегральная функция в (2.30) разрывна самое большее в точках

---

[1]) Если $\widehat{\beta} \neq 0$, то $A_k = \widehat{\beta} \neq 0$; если $\widehat{\beta} = 0$, то

$$B_k^2 + C_k^2 = \widehat{\alpha}^2 \left[\left(r_k + \frac{1}{r_k}\right)^2 \sin^2(\varphi_k + \psi_k) + R_k^2 \cos^2(\varphi_k + \psi_k)\right] \neq 0.$$

(s_k, t_k), $k=1, 2, \ldots, \varkappa$, $\varkappa < \infty$. Таким образом, достаточно доказать, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что интеграл

$$\int\limits_{\mathfrak{S}_k(\xi)}\int \left[\frac{\zeta^{\alpha^*} p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)} \frac{d\tilde{u}}{ds} \frac{d\tilde{\zeta}}{dt}\right] ds\, dt, \tag{2.31}$$

$$\mathfrak{S}_k(\varepsilon) = \{s, t \,|\, |s - s_k| < \varepsilon, \ |t - t_k| < \varepsilon\},$$

абсолютно сходится для $k = 1, 2, \ldots, \varkappa$. Так как $\Delta_k(\mathfrak{J}) \neq 0$, отображение

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \tilde{\mathcal{X}}_k(s, t) \equiv \operatorname{Re}\left(\frac{1}{D_k} q(\tilde{u}(s, t), \tilde{\zeta}(t))\right), \\ \mathcal{Y} &= \tilde{\mathcal{Y}}_k(s, t) \equiv \operatorname{Im}\left(\frac{1}{D_k} q(\tilde{u}(s, t), \tilde{\zeta}(t))\right) \end{aligned} \tag{2.32}$$

взаимно однозначно в $\mathfrak{S}_k(\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Пусть $\mathcal{G}_k$ — образ $\mathfrak{S}_k(\varepsilon)$ при отображении (2.32). Тогда интеграл (2.31) равен

$$\int\limits_{\mathcal{G}_k}\int \frac{R(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\mathcal{X} + i\mathcal{Y}} d\mathcal{X}\, d\mathcal{Y}, \tag{2.33}$$

где $R(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ — непрерывная функция в $\mathcal{G}_k$. Очевидно, что интеграл (2.33) абсолютно сходится. Этим заканчивается доказательство леммы 2.3.

Пусть $\xi^{(\mu)}(X)$, $\mu = 1, 2, \ldots, k$, — корни уравнения

$$Q(\zeta; X) = 0, \quad X \text{ фиксировано.} \tag{2.34}$$

Далее, пусть $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка. Предположим, что существует окрестность $\mathfrak{V}(X_0)$ точки X_0, такая, что $Q(\zeta; X) \neq 0$ для $X \in \mathfrak{V}(X_0)$ и $\zeta \in \mathfrak{L}$, и такая, что $\zeta^{(\nu)}(X) \neq \zeta^{(\mu)}(X)$, $X \in \mathfrak{V}(X_0)$ для $\nu \neq \mu$. Применяя теорему о вычетах к (2.6), получаем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Гармоническая функция* $H(X) = \mathbf{B}_3(f, \mathfrak{L}, X_0)$ *равна*

$$H(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}} \frac{\zeta^{N-M-1} P(\zeta; X)}{Q(\zeta; X)} d\zeta =$$

$$= \sum_{\zeta^{(\nu)}(X) \in \mathrm{T}(\mathfrak{L})} \frac{(\zeta^{(\nu)}(X))^{N-M-1} P(\zeta^{(\nu)}(X), X)}{A_k(X)[\zeta^{(1)}(X) - \zeta^{(\nu)}(X)] \ldots [\zeta^{(\nu-1)}(X) - \zeta^{(\nu)}(X)]} \times$$

$$\times \frac{1}{[\zeta^{(\nu+1)}(X) - \zeta^{(\nu)}(X)] \ldots [\zeta^{(k)}(X) - \zeta^{(\nu)}(X)]} = \sum_{\zeta^{(\nu)}(X) \in \mathrm{T}(\mathfrak{L})} H^{(\nu)}(X), \tag{2.35}$$

$$H^{(\nu)}(X) = \frac{[\zeta^{(\nu)}(X)]^{N-M-1} P(\zeta^{(\nu)}(X), X)}{\left(\dfrac{\partial Q(\zeta; X)}{\partial \zeta}\right)_{\zeta = \zeta^{(\nu)}(X)}}. \tag{2.36}$$

Здесь $\sum\limits_{\zeta^{(\nu)}(X) \in T(\mathfrak{L})}$ означает суммирование, распространенное на те корни уравнения (2.34), которые лежат во внутренности $\mathfrak{L}$. Если все $\zeta^{(\nu)}(X)$ лежат вне $\mathrm{T}(\mathfrak{L})$, то $H(X) \equiv 0$ для $X \in \mathfrak{B}(X_0)$ ($\mathrm{T}(\mathfrak{L})$ — область, ограниченная кривой $\mathfrak{L}$). Так как $\zeta^{(\nu)}(X)$ — алгебраические функции от (x, y, z), то $H(X) = \mathbf{B}_3(f, \mathfrak{L}, X)$ — элемент алгебраической функции $H^*(X)$, которая, вообще говоря, многозначна и может иметь особенности в $\mathfrak{R}^3$. Пусть

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{\zeta \in \mathfrak{L}} \{X | Q(\zeta; X) = 0\} \tag{2.37}$$

означает совокупность тех точек X в $\mathfrak{R}^3$, в которых $Q(\zeta; X) = 0$ при некотором $\zeta \in \mathfrak{L}$. Можно показать, что $\mathfrak{S}$ является суммой семейства прямых и не содержит внутренних точек[1]). Множество $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{S}$ является суммой непересекающихся областей $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$:

$$\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{S} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \mathfrak{B}_3 \cup \ldots. \tag{2.38}$$

---

[1]) То есть точек, имеющих трехмерную окрестность, принадлежащую $\mathfrak{S}$.

В каждой области $\mathfrak{B}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots$, равенство

$$G^{(\mu)}(X) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{\zeta^{N-M-1} P(\zeta; X)}{Q(\zeta; X)} d\zeta = \sum_{\zeta^{(\nu)}(X) \in T(\mathfrak{L})} H^{(\nu)}(X) \tag{2.39}$$

определяет гармоническую функцию, которая может быть записана в виде (2.35) и, следовательно, является алгебраической.

Каждая функция

$$H^{(\nu)}(X) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{L}^{(\nu)}} \frac{\zeta^{N-M-1} P(\zeta; X)}{Q(\zeta; X)} d\zeta, \quad X \in \mathfrak{B}(X_0),$$

является гармонической. Здесь $\mathfrak{L}^{(\nu)}$ — замкнутая кривая, содержащая в своей внутренности только один корень $\zeta = \zeta^{(\nu)}(X)$ уравнения $Q(\zeta; X) = 0$ при $X \in \mathfrak{B}(X_0)$.

Пусть $f(u, \zeta)$ — аналитическая функция, регулярная по u и ζ при $X \in \mathfrak{B}(X_0)$ и $\zeta \in \mathfrak{L}$, $0 \notin \mathfrak{L}$. Тройка гармонических функций

$$\mathbf{R}_3(f, \mathfrak{L}, X_0; 0) = \{H_1, H_2, H_3\} =$$

$$= \left\{ \mathbf{B}_3(f(u, \zeta)), \quad \mathbf{B}_3\left(\frac{i}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) f(u, \zeta)\right), \right.$$

$$\left. \mathbf{B}_3\left(\frac{1}{2}(\zeta - \zeta^{-1}) f(u, \zeta)\right) \right\} = \boldsymbol{H}, \quad \mathbf{B}_3(g) = \mathbf{B}_3(g, \mathfrak{L}, X_0) \tag{2.40}$$

образует гармонический вектор при $X \in \mathfrak{B}(X_0)$. Если $f(u, \zeta)$ — рациональная функция, то компоненты H_1, H_2, H_3 вектора $\boldsymbol{H}$ продолжаются аналитически до алгебраических функций соответственно $\overset{*}{H}_1, \overset{*}{H}_2, \overset{*}{H}_3$.

Пусть $p(u, \zeta)$ и $q(u, \zeta)$ заданы соответственно формулами (2.4) и (2.5), и пусть $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{J}_0$ удовлетворяют условиям 1° — 6°.

Пусть, далее, $\mathfrak{J}_0^{(\mu)}$ означает часть $\mathfrak{J}_0$ между двумя последовательными точками пересечения $\mathfrak{J}_0$ с $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{J}_0^{(\mu)} = [x = \tilde{x}(s), \; y = \tilde{y}(s), \; z = \tilde{z}(s), \; \sigma_k \leqslant s \leqslant \sigma_{k+1}], \tag{2.41}$$
$$k = 1, 2, \ldots, \rho, \quad \sigma_{\rho+1} = \sigma_1.$$

В окрестности $\mathfrak{Z}_0^{(\mu)}$ равенство

$$G_1^{(\mu)}(X) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{\zeta^{N-M-1}P(\zeta;\ X)}{Q(\zeta;\ X)}\,d\zeta, \quad X \in \mathfrak{Z}_0^{(\mu)}, \tag{2.42}$$

определяет гармоническую функцию. Пусть $\zeta^{(\nu)}(X)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, — корни уравнения

$$Q(\zeta;\ X) = 0. \tag{2.43}$$

В силу 3°,

$$\zeta^{(\nu)}(X) \neq \zeta^{(\mu)}(X) \quad \text{при} \quad \nu \neq \mu. \tag{2.44}$$

Применяя теорему о вычетах к подинтегральной функции в (2.42), мы заключаем, что

$$G_1^{(\mu)}(X) = \sum_{\zeta^{(\nu)}(X) \in \mathrm{T}(\mathfrak{L})} H_1^{(\nu)}(X),$$

$$H_1^{(\nu)}(X) = \frac{\left(\zeta^{(\nu)}(X)\right)^{N-M-1} P\left(\zeta^{(\nu)}(X);\ X\right)}{\left(\partial Q(\zeta;\ X)/\partial\zeta\right)_{\zeta = \zeta^{(\nu)}(X)}}, \quad X \in \mathfrak{Z}_0^{(\mu)}, \tag{2.45}$$

где $\sum\limits_{\zeta^{(\nu)}(X) \in \mathrm{T}(\mathfrak{L})}$ означает суммирование, распространенное на все корни уравнения (2.43), лежащие во внутренности $\mathrm{T}(\mathfrak{L})$ кривой $\mathfrak{L}$.

Рассмотрим гармонические векторы (зависящие от $\mu = 1, 2, \ldots, n$)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} = \{H_1, H_2, H_3\} &= \\ = \left\{\mathbf{B}_3(f),\ \mathbf{B}_3\left(\frac{i}{2}\left(\zeta + \zeta^{-1}\right)f\right),\ \mathbf{B}_3\left(\frac{1}{2}\left(\zeta - \zeta^{-1}\right)f\right)\right\} &\equiv \\ \equiv \mathrm{R}_3(f,\ \mathfrak{L},\ X;\ 0),\quad X \in \mathfrak{Z}_0^{(\mu)}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

где $f = f(u, \zeta) = \dfrac{p(u, \zeta)}{q(u, \zeta)}$. Для $X \in \mathfrak{Z}_0^{(\mu)}$

$$G_2^{(\mu)}(X) = \sum_{\zeta^{(\nu)}(X) \in \mathrm{T}(\mathfrak{L})} \frac{i\left(\zeta^{(\nu)}(X) + \left(1/\zeta^{(\nu)}(X)\right)\right)}{2} H_1^{(\nu)}(X), \tag{2.47а}$$

$$G_3^{(\mu)}(X) = \sum_{\zeta^{(\nu)}(X) \in \mathrm{T}(\mathfrak{L})} \frac{\left(\zeta^{(\nu)}(X) - \left(1/\zeta^{(\nu)}(X)\right)\right)}{2} H_1^{(\nu)}(X). \tag{2.47б}$$

Используя обозначение

$$\mathrm{V}\left(H_1^{(\nu)}(X)\right)=\Big\{H_1^{(\nu)}(X),\ \frac{i}{2}\left(\zeta^{(\nu)}(X)+\left(1/\zeta^{(\nu)}(X)\right)\right)H_1^{(\nu)}(X),$$
$$\frac{1}{2}\left(\zeta^{(\nu)}(X)-\left(1/\zeta^{(\nu)}(X)\right)\right)H_1^{(\nu)}(X)\Big\}, \qquad (2.48)$$

получаем[1])

$$G^{(\mu)}(X)=\sum_{\zeta^{(\nu)}(X)\in \mathrm{T}(\mathfrak{L})}\mathrm{V}\left[\frac{\left(\zeta^{(\nu)}(X)\right)^{N-M-1}p\left(\zeta^{(\nu)}(X);\ X\right)}{\left(\partial Q(\zeta;\ X)/\partial\zeta\right)_{\zeta=\zeta^{(\nu)}(X)}}\right]=$$
$$=\mathrm{R}_3\left(\frac{p(u,\zeta)}{q(u,\zeta)},\ \mathfrak{L},\ X;\ 0\right),\quad X\in\mathfrak{J}_0^{(\mu)}. \qquad (2.49)$$

Так как $\zeta^{(\nu)}(X)$ — алгебраические функции от x, y, z, то $G_k^{(\mu)}(X)$ — также алгебраические функции тех же переменных. По лемме 2.1 для любых $X_k=\tilde{X}(s_k)\equiv(\tilde{x}(s_k),\ \tilde{y}(s_k),\ \tilde{z}(s_k))$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ p$, существует конечное число точек $\zeta_{kj}=\tilde{\zeta}(t_{kj})$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ j_k$, таких, что

$$Q(\zeta_{kj};\ X_k)=0. \qquad (2.50)$$

Точки ζ_{kj}, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ p$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ j_k$, делят кривую $\mathfrak{L}$ на конечное число дуг $\mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{L}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{L}_m$. Пусть $\mathfrak{J}'=\mathfrak{J}'(\zeta)$ — кривая

$$\mathfrak{J}'=\Big[u=\tilde{x}(s)+\frac{i}{2}\tilde{y}(s)\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)+\frac{1}{2}\tilde{z}(s)\left(\zeta-\zeta^{-1}\right),$$
$$s\in(0,\ \alpha),\ \zeta\in\mathfrak{L}\Big] \qquad (2.51)$$

и пусть $\mathrm{T}(\mathfrak{J}'(\zeta))$ — внутренность кривой $\mathfrak{J}'(\zeta)$, а $u^{(\nu)}(\zeta)$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, $\zeta\in\mathfrak{L}$, — корни уравнения

$$q(u;\ \zeta)=0. \qquad (2.52)$$

В силу 4°, все эти корни — простые.

---

[1]) $\mathrm{R}_3(f,\ \mathfrak{L},\ X_0;\ g)=\Big\{\mathrm{B}_3(f),\quad \mathrm{B}_3\left(\frac{i}{2}(\zeta+\zeta^{-1})f\right)+\mathrm{Im}\,g,$ $\mathrm{B}_3\left(\frac{1}{2}(\zeta-\zeta^{-1})f\right)+\mathrm{Re}\,g\Big\}$, где интегрирование по $\mathfrak{L}$ производится при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ и где $g=g(y+iz)$ — аналитическая функция комплексного переменного $y+iz$, регулярная в точке y_0+iz_0.

Теорема 2.2. *Пусть* $\varepsilon_\nu(\zeta)$ — *порядок точки* $u^{(\nu)}(\zeta)$ *относительно кривой* $\mathfrak{J}'(\zeta)$. *Тогда*

$$\sum_{\mu=1}^{\rho} \int_{\mathfrak{J}_0^{(\mu)}} \left[G_1^{(\mu)}(X)\,dx + G_2^{(\mu)}(X)\,dy + G_3^{(\mu)}(X)\,dz\right] =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\rho} \int_{X_\mu}^{X_{\mu+1}} \sum_{\zeta^{(\nu)}(X) \in \mathrm{T}(\mathfrak{L})} \mathrm{V}\left[\frac{(\zeta^{(\nu)}(X))^{N-M-1}\, P(\zeta^{(\nu)}(X);\, X)}{(\partial Q(\zeta;\, X)/\partial\zeta)_{\zeta=\zeta^{(\nu)}(X)}}\right] dX =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \int_{\zeta_\mu}^{\zeta_{\mu+1}} \left\{ \sum_{u^{(\nu)}(\zeta) \in \mathrm{T}(\mathfrak{J}'(\zeta))} \varepsilon_\nu(\zeta) \left[\frac{p(u,\zeta)}{\zeta\,\partial q(u;\,\zeta)/\partial u}\right]_{u=u^{(\nu)}(\zeta)} \right\} d\zeta. \quad (2.53)$$

Здесь $X_\mu = (x_\mu, y_\mu, z_\mu)$, $X_{\mu+1}$ *и* ζ_μ, $\zeta_{\mu+1}$ — *концы дуг соответственно* $\mathfrak{J}_0^{(\mu)}$ *и* $\mathfrak{L}_\mu$ *и* $\int_{\zeta_\mu}^{\zeta_{\mu+1}} \equiv \int_{\mathfrak{L}_\mu}$. *Точки* ζ_k *и* X_μ *связаны уравнением* (2.50) *в том смысле, что для каждой* X_μ *существует* ζ_ν, *такая, что* $Q(\zeta_\nu;\, X_\mu) = 0$, *и обратно.*

Доказательство. Левая часть равенства (2.53) может быть записана в виде

$$\int_{\mathfrak{J}} \left\{ \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}} \frac{p(u,\zeta)\,d\zeta}{\zeta q(u,\zeta)}\right] dx + \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}} \frac{i(\zeta+\zeta^{-1})\,p(u,\zeta)\,d\zeta}{2\zeta q(u,\zeta)}\right] dy + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}} \frac{(\zeta-\zeta^{-1})\,p(u,\zeta)\,d\zeta}{2\zeta q(u,\zeta)}\right] dz \right\} =$$

$$= \int_0^{\alpha} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{p(\tilde{u}(s,t), \tilde{\zeta}(t))}{q(\tilde{u}(s,t), \tilde{\zeta}(t))} \frac{du}{ds} \cdot \frac{d\tilde{\zeta}}{dt} \frac{dt}{\tilde{\zeta}(t)}\right] ds = S. \quad (2.54)$$

Если для $\mathfrak{J}_0$ якобиан Δ_k [см. (2.19)] отличен от нуля, то, по лемме 2.3, мы можем поменять порядок интегрирования в последнем интеграле

$$S=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\alpha}\frac{p(\tilde u(s,t),\tilde\zeta(t))}{q(u(s,t),\tilde\zeta(t))}\frac{d\tilde u}{ds}\,ds\right]\frac{1}{\tilde\zeta(t)}\frac{d\tilde\zeta}{dt}\,dt=$$

$$=\int_{\mathfrak{L}}\left[\int_{\mathfrak{Z}'(\zeta)}\frac{p(u,\zeta)}{q(u,\zeta)}\,du\right]\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (2.55)$$

Отсюда, применяя теорему о вычетах, мы получаем равенство (2.53).

Если якобиан Δ_k равен нулю для некоторого значения k, то, в силу леммы 2.2, мы можем заменить $\mathfrak{Z}_0$ кривой $\mathfrak{Z}$, для которой Δ_k не равен нулю. При замене $\mathfrak{Z}_0$ на $\mathfrak{Z}$ мы не изменяем ни точек пересечения X_μ, ни ζ_μ. С другой стороны, значения интегралов зависят только от концов отрезков интегрирования, так что равенство (2.53) справедливо и в этом случае.

В дальнейшем мы рассмотрим один частный случай теоремы 2.1, который представляет самостоятельный интерес.

Положим в (2.3)

$$p=1, \quad q(u,\zeta)=u-i\alpha, \qquad (2.56)$$

где α — действительное число, $\alpha\neq 0$. Имеем

$$P(\zeta;\, X)=1, \quad Q(\zeta;\, X)=Z\zeta^2+X\zeta-\bar Z, \qquad (2.57)$$

где $Z=\frac{1}{2}(z+iy)$, $X=x-i\alpha$. Далее, предположим, что

$$\mathfrak{L}=[\,|\zeta|=1]. \qquad (2.58)$$

Тогда

$$\mathfrak{S}=\{X\,|\,Q(\zeta,\, X)=0,\ \zeta=\mathrm{const}\}=$$

(по определению)

$$=\{x,\, y,\, z\,|\,x=0,\ y^2+z^2\geqslant\alpha^2\}. \qquad (2.59)$$

Простое вычисление дает:

$$H_1(X) = \underset{\text{(по определению)}}{\frac{1}{2\pi i}} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta(u - i\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{X^2 + 4|Z|^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2) - 2x\alpha i}},$$

$$H_2(X) = \underset{\text{(по определению)}}{\frac{1}{2\pi i}} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{i(\zeta + \zeta^{-1})}{2\zeta(u - i\alpha)} d\zeta = \tag{2.60}$$

$$= H_1(X) \frac{y}{X + \sqrt{X^2 + 4|Z|^2}}, \quad X \notin \mathfrak{S},$$

$$H_3(X) = \underset{\text{(по определению)}}{\frac{1}{2\pi i}} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta - \zeta^{-1})}{2\zeta(u - i\alpha)} d\zeta =$$

$$= H_1(X) \frac{z}{X + \sqrt{X^2 + 4|Z|^2}},$$

где берется такая ветвь корня $\sqrt{X^2 + 4|Z|^2}$, что $\sqrt{|X|^2} = |X|$. Гармонический вектор $H = \{H_1, H_2, H_3\}$ двузначен. Ветвь, определяемая формулой (2.60), имеет особую линию — окружность $x = 0$, $y^2 + z^2 = \alpha^2$. Другая ветвь вектора H, получаемая аналитическим продолжением, имеет особую линию — ось x. Очевидно, что компоненты H — алгебраические функции от x, y, z.

Пусть $\mathfrak{J}$ — гладкая жорданова кривая, пересекающая $\mathfrak{S}$ только в точке X_0, $X_0 = (0, y, z)$, такой, что $y_0^2 + z_0^2 > \alpha^2$. Если функция

$$Q(\zeta; X) = Ze^{it} + X - \bar{Z}e^{-it} - i\alpha =$$

$$= \tilde{x}(s) + i(\tilde{z}(s)\sin t + \tilde{y}(s)\cos t - \alpha) \tag{2.61}$$

обращается в нуль в конечном числе точек (s_k, t_k) и если $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_n$ — части кривой $\mathfrak{L}$, такие, что $Q(\tilde{\zeta}(t), \tilde{X}(s)) \neq 0$ при $s \in (0, \alpha)$ и $\zeta(t) \in \mathfrak{L}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то, по теореме 2.1,

$$\int\limits_{\mathfrak{J}} H(X) \cdot dX = \sum_{\mu=1}^{n} \int\limits_{\mathfrak{L}_\mu} \varepsilon_\mu(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{2.62}$$

Так как $\varepsilon_\mu(\zeta) = \text{const} = N_\mu$ для $\zeta \in \mathfrak{L}_\mu$, получаем

$$\int\limits_{\mathfrak{Z}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{X} = \sum_{\mu=1}^{m} N_\mu \int\limits_{\mathfrak{L}_\mu} \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{2.63}$$

где N_μ — целые числа.

3. Обобщение предыдущих результатов на случай дифференциального уравнения $\Delta_3\psi + A(r^2)\boldsymbol{X}\nabla\psi + C(r^2)\psi = 0$. Изложенное в п. 2 интересно еще и потому, что использованный метод после некоторой модификации может быть применен для получения результатов, относящихся к решениям других дифференциальных уравнений.

Рассмотрим обобщение теоремы 2.1 на случай уравнения

$$\Delta_3\psi + A(r^2)\boldsymbol{X} \cdot \nabla\psi + C(r^2)\psi = 0. \tag{3.1}$$

Здесь A и C — целые функции от r^2.

Лемма 3.1. *Для всякого дифференциального уравнения* (3.1) *существует функция* $E(r, \tau)$, *голоморфная при* $|\tau| \leqslant 1$, $0 \leqslant r < \infty$, *обладающая следующим свойством: если*

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}) = \{H_1(\boldsymbol{X}), H_2(\boldsymbol{X}), H_3(\boldsymbol{X})\} \tag{3.2}$$

— гармонический вектор в некоторой области, содержащей начало координат, то

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3), \tag{3.3}$$

$$\psi_k = \mathbf{P}(H_k) \equiv \int\limits_{-1}^{1} E(r, \tau) H_k(\boldsymbol{X}(1-\tau^2))\, d\tau, \tag{3.4}$$

составляют тройку решений уравнения (3.1).

Определение. Тройка решений уравнения (3.1), допускающих представление (3.4) в окрестности начала координат, называется *тройкой О-сопряженных решений* (сопряженных по отношению к началу координат O).

Теорема 3.1. *Пусть функция* $T(r, \tau)$ *непрерывна при* $0 \leqslant r < \infty$, $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$, *и пусть* $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}) \equiv \boldsymbol{H}(x, y, z) \equiv$

$\equiv \{H_1(\boldsymbol{X}),\ H_2(\boldsymbol{X}),\ H_3(\boldsymbol{X})\}$ *— векторное поле, определенное и регулярное в шаре* $\mathfrak{K} = \{x,\ y,\ z \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$ *и такое, что*

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \quad \boldsymbol{X} \in \mathfrak{K}. \tag{3.5}$$

Обозначим через $\mathfrak{F}$ *некоторое измеримое подмножество интервала* $(-1,\ 1)$, *положим* $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3\}$, *где*

$$\psi_k(\boldsymbol{X}) = \int\limits_{\tau \in \mathfrak{F}} T(r,\ \tau) H_k(\boldsymbol{X}(1-\tau^2))\, d\tau, \quad k = 1,\ 2,\ 3, \tag{3.6}$$

и пусть

$$\mathfrak{J} = \{x = \tilde{x}(s),\ y = \tilde{y}(s),\ z = \tilde{z}(s),\ 0 \leqslant s \leqslant \alpha\} \tag{3.7}$$

— гладкая кривая, для которой[1]

$$\tilde{x}^2(s) + \tilde{y}^2(s) + \tilde{z}^2(s) = R^2. \tag{3.8}$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathfrak{J}} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{X} \overset{\text{(по определению)}}{=} \int\limits_{\mathfrak{J}} [\psi_1(\boldsymbol{X})\, dx + \psi_2(\boldsymbol{X})\, dy + \psi_3(\boldsymbol{X})\, dz] = 0. \tag{3.9}$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{J}} \boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{X} = \int\limits_0^\alpha \left[\psi_1(\tilde{\boldsymbol{X}}(s)) \frac{d\tilde{x}(s)}{ds} + \psi_2(\tilde{\boldsymbol{X}}(s)) \frac{d\tilde{y}(s)}{ds} + \psi_3(\tilde{\boldsymbol{X}}(s)) \frac{d\tilde{z}(s)}{ds}\right] ds = \int\limits_0^\alpha \int\limits_{\mathfrak{F}} T(R,\ \tau) \times$$
$$\times \left[H_1(\tilde{\boldsymbol{X}}(s)(1-\tau^2)) \frac{d\tilde{x}(s)}{ds} + H_2(\tilde{\boldsymbol{X}}(s)(1-\tau^2)) \frac{d\tilde{y}(s)}{ds} + H_3(\tilde{\boldsymbol{X}}(s)(1-\tau^2)) \frac{d\tilde{z}(s)}{ds}\right] d\tau ds, \quad R = \text{const}. \tag{3.10}$$

Подинтегральная функция в последнем выражении непрерывна по s, τ, поэтому мы можем поменять порядок

[1]) То есть $\mathfrak{J}$ лежит на границе $\mathfrak{K}$.

интегрирования. Получаем

$$\int_{\mathfrak{Z}} \psi(X)\cdot dX = \int_{\mathfrak{Z}} T(R,\ \tau) \int_0^{\alpha} \Big[H_1(\tilde{X}(s)(1-\tau^2))\frac{d\tilde{x}(s)}{ds} + $$
$$+ H_2(\tilde{X}(s)(1-\tau^2))\frac{d\tilde{y}(s)}{ds} +$$
$$+ H_3(\tilde{X}(s)(1-\tau^2))\frac{d\tilde{z}(s)}{ds}\Big] ds d\tau =$$
$$= \int_{\mathfrak{Z}} \left[\frac{T(R,\ \tau)}{1-\tau^2} \int_{\mathfrak{Z}_\tau} H(Y)\, dY\right] d\tau, \qquad (3.11)$$

где $\mathfrak{Z}_\tau$ для любого фиксированного τ является жордановой кривой

$$\mathfrak{Z}_\tau = \{x = (1-\tau^2)\,\tilde{x}(s),\ y = (1-\tau^2)\tilde{y}(s),$$
$$z = (1-\tau^2)\,\tilde{z}(s),\ 0 \leqslant s \leqslant \alpha\}. \qquad (3.12)$$

Так как $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$, имеем $\int_{\mathfrak{Z}_\tau} H(\boldsymbol{Y})\cdot d\boldsymbol{Y} = 0$, откуда немедленно следует (3.9).

Следствие. *Если* $\psi = \{\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3\}$ — *тройка О-сопряженных решений уравнения* (3.1), *регулярных в шаре* $\mathfrak{K}$, *и* $\mathfrak{Z}$ — *гладкая жорданова кривая, лежащая на границе* $\mathfrak{K}$, *то*[1])

$$\int_{\mathfrak{Z}} \psi(X)\cdot dX = 0. \qquad (3.13)$$

Приступим теперь к исследованию интегралов от векторов ψ, порожденных гармоническим вектором (с особенностями) (2.60). Пусть $A = A_1 + iA_2$, $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$. Если

$$\boldsymbol{H} \equiv (H_1,\ H_2,\ H_3) =$$
$$= \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta(u-A)},\ \frac{1}{4\pi}\int_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta+\zeta^{-1})\,d\zeta}{\zeta(u-A)},\right.$$
$$\left.\frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta-\zeta^{-1})\,d\zeta}{\zeta(u-A)}\right\}, \qquad (3.14)$$

---

[1] В этом случае $T(R,\ \tau) = E(R,\ \tau)$, где $E(R,\ \tau)$ — порождающая функция решений уравнения (3.1).

то, согласно (2.60), имеем

$$
\begin{aligned}
&H_1(X)=\frac{1}{\sqrt{(x-A)^2+y^2+z^2}}, \\
&H_2(X)=H_1(X)\frac{y}{x-A+\sqrt{(x-A)^2+y^2+z^2}}, \qquad (3.15)\\
&H_3(X)=H_1(X)\frac{z}{x-A+\sqrt{(x-A)^2+y^2+z^2}}.
\end{aligned}
$$

Вектор $H(X)$ имеет две различные однозначные ветви, скажем $S^{(1)}(X)$ и $S^{(2)}(X)$, в области $\mathfrak{D}=\mathfrak{R}^3-\mathfrak{T}$, где

$$\mathfrak{T}=\left\{x,\ y,\ z\,|\,x>A_1,\ y^2+z^2=\left(\frac{A_2}{A_1}x\right)^2\right\}. \qquad (3.16)$$

Предположим, что $S^{(1)}(X)$ — ветвь вектора (3.15), регулярная в окрестности начала координат (0, 0, 0). Ветвь $S^{(1)}(X)$ имеет особенности вдоль окружности $x=A_1$, $y^2+z^2=A_2^2$, в то время как $S^{(2)}$ имеет особенности вдоль этой окружности и оси x. Вектор $H(X)$ имеет две различные однозначные ветви в $\mathfrak{R}^3-\mathfrak{S}$, где

$$\mathfrak{S}=\{x,\ y,\ z\,|\,x=A_1y^2+z^2\geqslant A_2^2\}. \qquad (3.17)$$

Обозначим эти ветви через $H^{(1)}(X)$ и $H^{(2)}(X)$[1]. Предположим, что $H^{(1)}(X)=S^{(1)}(X)$ в окрестности начала координат. Пусть $E(r,\tau)$ — произвольная непрерывная функция, определенная для $|\tau|\leqslant 1$ и $0\leqslant r<\infty$.

Определим вектор $\sigma(X)=(\sigma_1(X),\sigma_2(X),\sigma_3(X))$ равенством

$$\sigma(X)=\int_{-1}^{1}E(r,\tau)S^{(1)}(X(1-\tau^2))\,d\tau,\quad X\in\mathfrak{R}^3-\mathfrak{T}. \qquad (3.18)$$

Пусть $\mathfrak{J}$ [см. (3.7)] — гладкая жорданова кривая, лежащая на границе шара $\mathfrak{K}=\{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$, где $R>$

[1] $S^{(K)}(X)$ и $H^{(K)}(X)$, $K=1,2,$ — ветви одного и того же двузначного вектора, определенного в различых областях пространства x, y, z с разрезом. В первом случае пространство x, y, z разрезано вдоль (3.16), а во втором — вдоль (3.17).

$>(A_1^2+A_2^2)^{1/2}$. Далее мы исследуем интегралы

$$\int_{\mathfrak{J}} \sigma(X)\,dX = \int_{\mathfrak{J}} [\sigma_1(X)\,dx + \sigma_2(X)\,dy + \sigma_3(X)\,dz], \qquad (3.19)$$

где подинтегральное выражение $\sigma(X)$ имеет особенности в $\mathfrak{K}$.

В теореме 2.1 были установлены соотношения между интегралами

$$\Lambda(X_2, X_1) = \int_{X_1}^{X_2} H(X)\cdot dX \qquad (3.20)$$

от алгебраических гармонических векторов и интегралами от алгебраических аналитических функций. При помощи аналогичных рассуждений мы установим соотношения между интегралами вида (3.19) и интегралами от алгебраических гармонических векторов (3.20). Пусть кривая $\mathfrak{J}$ (лежащая на поверхности шара $\mathfrak{K}$) пересекает $\mathfrak{T}$ [см. (3.16)] в двух различных точках $X_k=(x_k, y_k, z_k)$, $k=1, 2$. Точки пересечения X_k делят $\mathfrak{J}$ на две дуги $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$. Предположим, что $y_k^2+z_k^2>A_2^2$ и что $\mathfrak{J}$ не касается $\mathfrak{T}$ (т. е. в достаточно малой окрестности точки X_k части $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$ лежат по разные стороны от $\mathfrak{T}$). Заметим, что вектор $S^{(1)}(X)$ принимает различные значения при подходе к X_k с различных сторон $\mathfrak{T}$. Пусть

$$\tau_0 = \left[1 - R^{-1}(A_1^2+A_2^2)^{1/2}\right]^{1/2}. \qquad (3.21)$$

Легко видеть, что для фиксированного τ, $1 \geqslant |\tau| > |\tau_0|$, вектор $S^{(1)}(X(1-\tau^2))$ регулярен в шаре $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$. Таким образом,

$$\int_{-1}^{1}\left[\int S^{(1)}(Y)\cdot dY\right]d\tau = \int_{-\tau_0}^{\tau_0}\left[\int S^{(1)}(Y)\cdot dY\right]d\tau,$$
$$Y = X(1-\tau^2), \qquad (3.22)$$

ибо, согласно следствию на стр. 246, при $|\tau_0| < |\tau| \leqslant 1$

$$\int S^{(1)}(Y)\cdot dY = 0. \qquad (3.23)$$

Обозначим через $\Lambda^{(1)}(X_2, X_1)$ и $\Lambda^{(2)}(X_2, X_1)$ соответственно интегралы $\int\limits_{\mathfrak{J}_1} S^{(1)}(X)\cdot dX$ и $\int\limits_{\mathfrak{J}_2} S^{(1)}(X)\cdot dX$.

Интегралы $\Lambda^{(k)}(X_2, X_1)$ не зависят от дуг $\mathfrak{J}_k$ (лежащих на границе $\mathfrak{R}$). Соединяя точки X_k дугой и подходя к этим точкам с одной и той же стороны $\mathfrak{T}$, мы, очевидно, получаем

$$\Lambda^{(k)}((1-\tau^2)X_2, (1-\tau^2)X_1) = \\ =(1-\tau^2)\int\limits_{\mathfrak{J}_k} S^{(1)}((1-\tau^2)X)\cdot dX, \tag{3.24}$$

так как

$$\int\limits_{\mathfrak{J}_k} S^{(1)}((1-\tau^2)X)\cdot dX = \frac{1}{1-\tau^2}\int\limits_{\hat{\mathfrak{J}}_k} S^{(1)}(X)\cdot dX,$$

где

$$\hat{\mathfrak{J}}_k = \{x=(1-\tau^2)\tilde{x}(s),\ y=(1-\tau^2)\tilde{y}(s), \\ z=(1-\tau^2)\tilde{z}(s)\}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{1}\left[\int\limits_{\mathfrak{J}} S^{(1)}(X(1-\tau^2))\cdot dX\right]d\tau = \\ =\int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0}(1-\tau^2)^{-1}\Lambda^{(1)}((1-\tau^2)X_2, (1-\tau^2)X_1)\,d\tau\cdot \tag{3.25}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть*

$$M(s, \tau) = \{[\tilde{x}(s)(1-\tau^2)-A]^2 + \\ +[\tilde{y}^2(s)+\tilde{z}^2(s)](1-\tau^2)^2\}, \tag{3.26}$$

и пусть $\mathcal{X}(s, \tau) = \operatorname{Re}[M(s, \tau)]$, $\mathcal{Y}(s, \tau) = \operatorname{Im}[M(s, \tau)]$. *Далее, обозначим через* $X_k = \tilde{X}(s_k)$, $k=1, 2$, *точки пересечения* $\mathfrak{J}$ *с* $\mathfrak{T}$ [*см.* (3.16)]. *Если*

$$\left(\frac{\partial(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\partial(s, \tau)}\right)_{\substack{s=s_k\\ \tau=\tau_0}} \neq 0,\quad k=1, 2, \tag{3.27}$$

то справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathfrak{S}} \sigma(X) \cdot dX = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0} (1-\tau^2)^{-1} E(r, \tau) \times$$
$$\times \Lambda^{(k)}((1-\tau^2) X_2, (1-\tau^2) X_1) d\tau. \qquad (3.28)$$

Доказательство. Так как

$$\int\limits_{\mathfrak{S}} \sigma(X) \cdot dX = \int\limits_{\mathfrak{S}} \left[\int\limits_{-1}^{1} S^{(1)}((1-\tau^2) X) d\tau \right] \cdot dX, \qquad (3.29)$$

формула (3.28) будет следовать из (3.25), если мы докажем, что допустима перемена порядка интегрирования в (3.29). Перепишем выражение для $L \equiv \int\limits_{\mathfrak{S}} \sigma(X) \cdot dX$ подробно:

$$L = \int\limits_{0}^{a} \left\{ \int\limits_{-1}^{1} \frac{E(r, \tau)}{[(\tilde{x}(s)(1-\tau^2)-A)^2 + (\tilde{y}^2(s)+\tilde{z}^2(s))(1-\tau^2)^2]^{1/2}} \left[x'(s) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\tilde{y}'(s) y(s) + \tilde{z}'(s) z(s)}{B} (1-\varepsilon)^2 \right] d\tau \right\} ds; \qquad (3.30)$$

здесь

$$B = B(s, t) = \tilde{x}(s)(1-\tau^2) - A +$$
$$+ \left\{ [\tilde{x}(s)(1-\tau^2) - A]^2 + [\tilde{y}^2(s) + \tilde{z}^2(s)](1-\tau^2)^2 \right\}^{1/2} \neq 0$$

для $0 \leqslant s \leqslant a$, $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$. Покажем, что двойной интеграл в (3.30) абсолютно сходится. Отсюда будет следовать возможность перемены порядка интегрирования в (3.30). Подинтегральная функция в L обращается в бесконечность, только если $[\tilde{x}(s)(1-\tau^2) - A]^2 + [\tilde{y}^2(s) + \tilde{z}^2(s)](1-\tau^2)^2 = 0$. Последнее имеет место только для $s = s_k$ и $\tau = \tau_0$. Согласно нашим предположениям, замена переменных $\mathcal{X} = \mathcal{X}(s, t)$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(s, t)$ возможна в достаточно малой окрестности точки (s_k, τ_0), $k = 1, 2$. Таким образом, подинтегральная функция в окрестности этих точек имеет вид

$$\frac{F(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\sqrt{\mathcal{X} + i\mathcal{Y}}}, \qquad (3.31)$$

где $F(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ — непрерывная функция от $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Следовательно, подинтегральная функция абсолютно интегрируема, что и требовалось доказать.

Но если перемена порядка интегрирования возможна, из (3.14) можно вывести соотношение

$$\Lambda(X_2, X_1) = \int_{X_1}^{X_2} H(X)\,dX = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\int_{X_1}^{X_2} \frac{du}{u-A}\frac{d\zeta}{\zeta} = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \log\left(\frac{u_2-A}{u_1-A}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{3.32}$$

где $u_k = x_k + \frac{iy_k}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) + \frac{z_k}{2}(\zeta - \zeta^{-1})$. Это делается в предположениях, аналогичных использованным в п. 2. Отсюда, интегрируя по частям, получаем, что $\Lambda(X_2, X_1)$ выражается через алгебраические функции и логарифмы от X_1, X_2. При вычислении интеграла (3.28) мы принимаем во внимание, что $S^{(1)} = H^{(1)}$ только на части линии пересечения. Значение (3.28) зависит только от A и точек пересечения $\mathfrak{J}$ с $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{S}$.

О ПРОБЛЕМЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ТЕОРИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ [1])

Посвящается Чарлзу Лёвнеру

1. Введение. Интегральные операторы [2]) преобразуют аналитические функции $\{f\}$ одного или нескольких комплексных переменных в решения $\{\psi\}$ одного уравнения или системы дифференциальных уравнений с частными производными. Оператор $\mathbf{P}$ (см. ниже) устанавливает изоморфизм [3]) между $\{f\}$ и $\{\psi\}$. Различным свойствам аналитических функций f соответствуют некоторые аналогичные свойства решений $\psi = \mathbf{P}(f)$. Основная задача этой теории — найти оператор, который устанавливает изоморфизм для данного уравнения, и изучить, как меняются известные соотношения и теоремы при переходе от f к $\psi = \mathbf{P}(f)$. Таким путем мы получаем теоремы о решениях уравнений с частными производными.

В ряде статей были исследованы интегральные операторы, преобразующие аналитические функции одного комплексного переменного в решения уравнения

$$\tilde{U}_{xx} + \tilde{U}_{yy} + a\tilde{U}_x + b\tilde{U}_y + c\tilde{U} \equiv$$
$$\equiv 4[\psi_{zz^*} + A\psi_z + B\psi_{z^*} + C\psi] = 0,$$
$$\tilde{U}(x, y) = \psi(z, z^*), \quad z = x + iy, \quad z^* = x - iy \qquad (1)$$

---

[1]) Bergman S., On the coefficient problem in the theory of a system of linear partial differential equations, *Journal d' Analyse Mathématique*, XI (1963), 249—274.

[2]) Обзор теории интегральных операторов и обширную библиографию (до 1961 г.) можно найти в [15].

[3]) Этот изоморфизм устанавливается сначала в малом, т. е. когда f и ψ рассматриваются в достаточно малой окрестности начала координат. Аналитическим продолжением f и ψ мы определяем отображение $\{f\}$ на $\{\psi\}$ в целом.

(см. [5, 15, стр. 30 и след.]). В частнсти, изучены решения

$$\psi(z, z^*) = \mathrm{c}_2(z, z^*; f) \equiv$$
$$\equiv \int_{\mathfrak{L}^1} E(z, z^*, t)\, f\left(\frac{1}{2} z(1-t^2)\right) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad (2)$$

порожденные голоморфными и мероморфными „ассоциированными функциями“ f. Здесь $E(z, z^*, t)$ — так называемая порождающая функция оператора E, зависит только от уравнения (1); $\mathfrak{L}^1$ — замкнутая кривая в комплексной плоскости t. Если коэффициенты A, B, C — целые функции двух комплексных переменных z и z^*, то $E(z, z^*, t)$ (так называемая порождающая функция первого рода) также является целой функцией от z, z^* для $t \in \mathfrak{L}^1$.

Переходя к дифференциальному уравнению с тремя переменными, мы используем интегральные операторы несколько иной структуры. Сначала мы рассмотрим случай гармонических функций трех переменных, т. е. решений уравнения

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial z^2} = 0, \quad \tilde{H}(x, y, z) = H(\boldsymbol{X}),$$
$$\boldsymbol{X} = (X, Z, Z^*), \quad X = x, \quad Z = (iy + z)/2, \qquad (3)$$
$$Z^* = (iy - z)/2.$$

Несколько модифицируя представление Уиттекера для гармонических функций $H(\boldsymbol{X})$ в трехмерном пространстве, напишем

$$H(\boldsymbol{X}) = \mathrm{B}_3(f(u, \zeta)) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta \in \mathfrak{L}^1} f(u, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$u = x + \frac{1}{2}(iy + z)\zeta - \frac{1}{2}(z - iy)\zeta^{-1} =$$
$$= X + Z\zeta + Z^* \zeta^{-1}. \qquad (4)$$

Здесь $\mathfrak{L}^1$ — простая замкнутая кривая в комплексной плоскости ζ, $f(u, \zeta)$ — аналитическая функция от u и ζ, голоморфная в достаточно малой окрестности $u = 0$ для любого $\zeta \in \mathfrak{L}^1$. С другой стороны, данной гармонической функции $H(X)$ соответствует бесконечно много ассоциированных функций, так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\zeta\in S^1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|>n} a_{nm}u^n\zeta^m\frac{d\zeta}{\zeta}=0. \tag{5}$$

Мы нормируем ассоциированную функцию f (по отношению к началу координат), потребовав, чтобы ее разложение в ряд в окрестности начала координат имело вид

$$f(u,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n} a_{n,k}u^n\zeta^{-n+k}. \tag{6}$$

Ассоциированная функция $f(u,\zeta)$ для $H(X)$ определяется формулой

$$f(u,\zeta)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{T=0}^{1} u^{1/2}\frac{d\,[u^{1/2}\chi(u\zeta^{-1}T^2,\,u\zeta(1-T)^2]}{du}\,dT,$$

$$\chi(Z,Z^*)=H(2(ZZ^*)^{1/2},\,Z,\,Z^*) \tag{7}$$

(см. [15, стр. 71] и статью [9], указанную в библиографии к [15]). Гармонические функции, соответствующие целым, рациональным, алгебраическим и мероморфным ассоциированным функциям $f(u,\zeta)$, изучались в ряде работ [11, 13, 15, 16, 19—21, 27, 29—33, 37, 39, 41, 47, 48, 51, 52]. В частности, исследовался вопрос о связи между свойствами коэффициентов разложения и структурой и расположением особенностей гармонической функции.

В отличие от случая уравнения (1), где ассоциированная является функцией *одного* комплексного переменного, в случае гармонических функций трех переменных ассоциированная является функцией *двух* комплексных переменных.

Замечание. Решения многих других дифференциальных уравнений с тремя переменными можно получить из функций $g(z_1,z_2)$ двух комплексных переменных, если использовать подходящие операторы (см. [15, гл. III]).

Аналогичное положение имеет место для системы

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_k^2}+F_k(x_k,y_k)\psi=0,\quad k=1,2. \tag{8}$$

Шиффер и автор получили в [23] (см. также [12]) интегральный оператор, преобразующий аналитические функции $g(z_1, z_2)$ *двух* комплексных переменных в решения системы (8).

В теории функций двух комплексных переменных проблема связи между коэффициентами разложения в начале координат и структурой и расположением особенностей не развита еще в такой же степени, как в случае одного переменного. Естественно поэтому рассматривать решения уравнений (3) и (8), ассоциированными для которых являются функции только одного комплексного переменного. Мы назовем их *специальными решениями*[1]) уравнения (3) или (8). Для этих специальных решений мы можем получить различные результаты, относящиеся к типу, расположению и плотности их особенностей, используя теорию функций одного комплексного переменного.

Пример. В случае уравнения (3) из соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}\Gamma_{nk}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}C_{nk}r^n P_{n,|n-k|}(\cos\theta)\, e^{i(k-\varphi)},$$

$$\Gamma_{nk}(X) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} u^n \zeta^{-n+k-1}\, d\zeta, \quad C_{nk} \equiv \frac{n!\, i^{|k-n|}}{(n+|k-n|)!}, \tag{9}$$

вытекает следующий результат. Предположим, что гармоническая функция $H(X)$ имеет специальный вид, например, разлагается в ряд, стоящий в правой части (9); если коэффициенты a_{nk} удовлетворяют условиям Адамара, то ассоциированная функция может иметь в качестве особенностей только полюсы

$$\frac{\zeta^k}{(u-\alpha_k)^N}, \qquad k,\ N \text{ — целые.} \tag{10}$$

С другой стороны, теория интегральных операторов позволяет определить структуру и расположение особенностей специальной гармонической функции $H(X)$, ассоциированная с которой функция является суммой выражений вида (10).

---

[1]) Эти функции иногда называют функциями „имеющими разложение, соответствующее одному столбцу".

Таким путем мы получаем теоремы о поведении в целом специальных гармонических функций. Другие примеры специальных гармонических функций и подробное изложение см. в работах [19—21].

Аналогично, использование теории Неванлинны дает результаты относительно роста функции и плотности некоторых особенностей функции, обратной к целому специальному решению.

В настоящей статье (см. п. 4), используя теорию интегральных операторов, мы исследуем ту же задачу о связи между коэффициентами разложения в ряд и расположением особенностей решения ψ уравнения (8) в *общем случае*, а именно, когда ψ имеет разложение

$$\psi(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m+n+M+N=p} A_{mnMN} z_1^m z_1^{*n} z_2^M z_2^{*N},$$

$$A_{mnMN} = \bar{A}_{nmMN}, \quad A_{mnMN} = \bar{A}_{mnNM}, \tag{11}$$

причем ассоциированная с ψ функция является функцией *двух* комплексных переменных. Для этой цели нам нужен метод, позволяющий находить соотношения между коэффициентами разложения в ряд функции *двух* комплексных переменных $g(z_1, z_2)$ и расположением и свойствами ее особенностей. Такой метод развит в п. 2,3. Используя результаты п. 2,3, мы в п. 4 рассматриваем проблему коэффициентов для решений ψ системы (8).

В п. 5 мы исследуем целые решения уравнения (1) для $A=B=0$, когда C — полином по z, z^* степени N, $N<\infty$. Показано, что порождающая функция первого рода является целой функцией, порядок которой не превосходит $N+2$. Это позволяет получить границы роста для целых решений ψ в терминах коэффициентов разложения ψ в окрестности начала координат.

Применение результатов п. 2,3 к гармоническим функциям трех переменных будет рассматриваться в другом месте.

Кроме гармонических функций, можно рассматривать гармонические векторы, т. е. векторы, компоненты которых связаны соотношениями

$$\operatorname{div} H = 0, \quad \operatorname{rot} H = 0. \tag{12}$$

В частности, мы можем рассмотреть отображения областей трехмерного пространства, когда H_1, H_2, H_3 — регулярные функции и

$$\frac{\partial(H_1, H_2, H_3)}{\partial(x, y, z)} \neq 0. \tag{13}$$

Вектор $\boldsymbol{H}$ можно представить в виде $\boldsymbol{H}=(H_1, H_2, H_3)$:

$$H_1=\frac{\partial T}{\partial x}, \quad H_2=\frac{\partial T}{\partial y}+\operatorname{Im}(g(y+iz)),$$
$$H_3=\frac{\partial T}{\partial z}+\operatorname{Re}(g(y+iz)), \tag{14}$$

где T — регулярная гармоническая функция, $g(y+iz)$ — регулярная аналитическая функция одного комплексного переменного $y+iz$. Область, где $\boldsymbol{H}$ и g регулярны и имеет место соотношение (13), называется областью регулярности этого отображения. Используя результаты о связи между коэффициентами разложения в ряд функций T и g и их особенностями, можно определить область регулярности T и g, которая содержит область регулярности отображения (14).

2. Формулы для определения области регулярности функции двух комплексных переменных по коэффициентам ее разложения в ряд. Чтобы вывести формулы для распределения некоторых особенностей функции f двух комплексных переменных, исходя из коэффициентов ее разложения в ряд, удобно использовать некоторые специальные координаты (назовем их $\mathcal{S}$-координатами) в (четырехмерном) пространстве[1]) z_1, z_2 (обозначим его $\mathfrak{S}$), $z_k=x_k+iy_k$, $k=1,2$.

Через каждую точку $\left(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}\right)\in\mathfrak{S}$, исключая начало координат, проходит одна и только одна плоскость

$$\mathfrak{P}^2(\alpha): \quad z_2=\alpha z_1, \quad \operatorname{Re}\alpha\geqslant 0, \tag{1}$$

где $\alpha^{(0)}=z_2^{(0)}/z_1^{(0)}$ для $\left(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}\right)$. Мы предположим, что начало координат в каждой плоскости (1) совпадает с началом O в $\mathfrak{S}$ и положительная ось есть часть пересечения $\mathfrak{P}^2(\alpha)$ с $y_1=0$, для которой $x_2>0$. В каждой плоско-

---

[1]) x_1, y_1, x_2, y_2 — действительные координаты в $\mathfrak{S}$.

сти (1) мы введем полярные координаты[1]) ρ_α и φ_α. Таким образом, каждая точка в $\mathfrak{S}$ будет определяться двумя комплексными числами α и $\rho e^{i\varphi}$.

Замечание. Для $\alpha = \infty$ мы заменим (1) уравнением

$$z_1 = \beta z_2, \qquad \operatorname{Re}\beta \geqslant 0, \tag{1a}$$

и рассмотрим $f(\beta z_2, z_2)$ в окрестности $\beta = 0$.

Определение. Координаты α, ρ, φ мы будем называть $\mathscr{P}$-координатами в пространстве $\mathfrak{S}$.

Пусть $f(z_1, z_2)$ — функция двух комплексных переменных, имеющая в окрестности начала координат разложение

$$f(z_1, z_2) = a_{00} + a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + a_{20}z_1^2 + a_{11}z_1z_2 + \ldots \tag{2}$$

Сопоставим коэффициентам $\{a_{mn}\}$ следующие функции:

$$\hat{\rho}(\alpha) = \overline{\lim_{N\to\infty}} \left[\left| \sum_{k=0}^{N} a_{N-k,\,k}\alpha^k \right|^{1/N} \right], \tag{3}$$

$$R(h, \alpha) = \overline{\lim_{N\to\infty}} \left[|d_N(h, \alpha)|^{1/N} \right], \quad h > 0, \tag{4}$$

где

$$d_N(h, \alpha) = \sum_{k=0}^{N} \left[C_N^{(k)} \hat{\rho}^k(\alpha) h^{N-k} \left(\sum_{\eta=0}^{N-k} a_{N-k-\eta,\,\eta}\alpha^\eta \right) \right]. \tag{4a}$$

Далее, введем „производную справа" $R(h, \alpha)$ по h в нуле:

$$R^{+\prime}(0, \alpha) = \lim_{h\to+0} \left[h^{-1} \left(\overline{\lim_{N\to\infty}} |d_N(h, \gamma)|^{1/N} - 1 \right) \right]. \tag{4б}$$

Лемма 2.1. *Пусть $f(z_1, z_2)$ — функция двух комплексных переменных, голоморфная в начале координат O, имеющая разложение (2) в окрестности O. Пусть для каждого α_0 существуют окрестность $\mathfrak{N}^2(\alpha_0)$ и $h > 0$, такие, что*

$$\hat{\rho}(\alpha)\left[R^{+\prime}(\alpha, h) + h - 1\right] \geqslant s > 0 \quad \text{для} \quad \alpha \in \mathfrak{N}^2(\alpha_0). \tag{5}$$

---

[1]) В дальнейшем индекс α будет опущен.

Тогда функция $f(z_1, z_2)$ *регулярна в области*¹) $\mathfrak{L}+\mathfrak{l}^3$, *где*

$$\mathfrak{L}=[\,|\alpha|\leqslant\infty,\quad \rho<\hat{\rho}(\alpha),\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi], \tag{6}$$

$$\mathfrak{l}^3=[\rho=\hat{\rho}(\alpha),\quad |\varphi|<\Phi(\alpha)]. \tag{7}$$

Здесь $\Phi(\alpha)$ *определяется формулами*

$$\Phi(\alpha)=\varlimsup_{\beta\to\alpha}|\hat{\varphi}(\beta)|,\quad 0\leqslant\arg(\beta-\alpha)\leqslant 2\pi \tag{8}$$

и

$$\cos\hat{\varphi}(\beta)\leqslant R^{+'}(0,\ \beta), \tag{8a}$$

$\hat{\rho}(\alpha)$ — *непрерывная функция от* α.

Доказательство. В каждой плоскости (1) f становится функцией одного комплексного переменного, а именно:

$$F_\alpha(z_1)\equiv f(z_1,\ \alpha z_1)=\sum_{N=0}^{\infty}z_1^N\left(\sum_{k=0}^{N}a_{N-k,\,k}\alpha^k\right). \tag{9}$$

В каждой точке $\mathfrak{S}$, где регулярна $f(z_1, z_2)$, функция $F_\alpha(z_1)$ также должна быть регулярной. Таким образом, в силу теорем Адамара [1] и Мандельбройта [44], $\hat{\rho}(\alpha)>0$. Для каждого α функция $F_\alpha(z_1)$ должна быть регулярной в пересечении $[\mathfrak{L}+\mathfrak{l}^3]\cap\mathfrak{P}^2(\alpha)$ и иметь особенность в точке $\hat{\rho}(\alpha)e^{i\hat{\varphi}(\alpha)}$ или $\hat{\rho}(\alpha)e^{-i\hat{\varphi}(\alpha)}$. Следовательно, $\tilde{\mathcal{P}}$-координаты особой точки, лежащей на окружности $|z_1|=\hat{\rho}(\alpha)$, ближайшей к $z_1=\hat{\rho}(\alpha)$, равны $(\hat{\rho}(\alpha),\ +\hat{\varphi}(\alpha))$ или $(\hat{\rho}(\alpha),\ -\hat{\varphi}(\alpha))$. Чтобы определить знак $\hat{\varphi}(\alpha)$, заменим в (9) z_1 на $\tilde{z}_1e^{-i\tau}$, $\tau>0$. Тогда ряд (9) примет вид

$$F_\alpha(z_1)=\sum_{N=0}^{\infty}\tilde{z}_1^N\left(e^{-iN\tau}\sum_{k=0}^{N}a_{N-k,k}\alpha^k\right). \tag{9a}$$

Действуя так же, как прежде, определим $\hat{\hat{\varphi}}(\alpha)$. Если

$$\cos\hat{\hat{\varphi}}(\alpha)>\cos\hat{\varphi}(\alpha), \tag{10}$$

то точка $(\hat{\rho}(\alpha),\ +\hat{\varphi}(\alpha))$ — особая.

---

¹) $\mathfrak{L}$ — так называемая (общая) круговая область Бенке — Каратеодори. Она допускает группу преобразований в себя $z_k^*=z_ke^{i\varphi}$, $k=1, 2$, φ — действительное.

Докажем теперь, что если для коэффициентов функции f справедливы предельные соотношения (3) и (8), то функция $f(z_1, z_2)$ голоморфна в $\mathfrak{L} + \mathfrak{l}^3$. Покажем, что это будет случай (а) для $(z_1, z_2) \in \mathfrak{L}$ и случай (б) для $(z_1, z_2) \in \mathfrak{l}^3$.

(а) $\widehat{\rho}(\alpha)$ есть радиус сходимости степенного ряда (9) для $F_\alpha(z_1)$. Соответствующая функция $f(z_1, z_2)$ (рассматриваемая как функция z_1 и z_2) регулярна в достаточно малой окрестности начала координат. Из теоремы Гартогса [25, стр. 72] следует, что $f(z_1, z_2)$ регулярна в $\mathfrak{L}$ и что $\widehat{\rho}(\alpha)$ непрерывна [25, стр. 81].

(б) Чтобы доказать регулярность $f(z_1, z_2)$ в $\mathfrak{l}^3$, введем сначала новые координаты

$$\tilde{z}_1 = z_1, \quad \alpha = \frac{z_2}{z_1} \tag{11}$$

и рассмотрим $F_\alpha(\tilde{z}_1)$ как функцию двух комплексных переменных $\tilde{z}_1$, α. Пусть $\widehat{\rho}(\alpha)$ — радиус сходимости нового ряда, полученного из (9). Пусть точка $\left(\tilde{z}_1^{(0)}, \alpha_0\right)$ лежит на дуге $[-\widehat{\varphi}(\alpha_0), \widehat{\varphi}(\alpha_0)]$, и пусть β — угол, который образует кривая $|\tilde{z}_1| = \widehat{\rho}(|\alpha|)$ в точке[1] $\left(|\tilde{z}_1^{(0)}|, |\alpha_0|\right)$ с положительным направлением $|\tilde{z}_1|$ (см. рис. 1). По известной теореме Гартогса,

$$\pi \geqslant \beta \geqslant \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Предположим сначала, что $\pi > \beta > \frac{\pi}{2}$. По данному η $\left(\arg \eta = \arg \tilde{z}_1^{(0)}\right)$ определим ε $(\arg \varepsilon = \arg \alpha_0)$, такое, чтобы круг $\left\{\tilde{z}_1^* = \tilde{z}_1^{(0)} - \eta,\ |\alpha - \alpha_0| < |\varepsilon|\right\}$ лежал в $\mathfrak{L}$. Это можно сделать, так как $\widehat{\rho}(\alpha)$ — непрерывная функция α. Далее, определим η' так, чтобы $\widehat{\rho}(\alpha_0) - |\tilde{z}_1^*| < \eta' < \widehat{\rho}(\alpha_0 - \varepsilon) - |\tilde{z}_1^*|$. Пусть

$$\mathfrak{B} = \left\{|\alpha - \alpha_0| < |\varepsilon|, \quad |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_1^*| < \eta'\right\}. \tag{13}$$

[1]) В плоскости $|\tilde{z}_1|$, $|\alpha|$.

Из теоремы Мандельбройта [44] и формулы (5) следует, что для каждого α, $|\alpha - \alpha_0| \leqslant |\varepsilon|$, существует область[1])

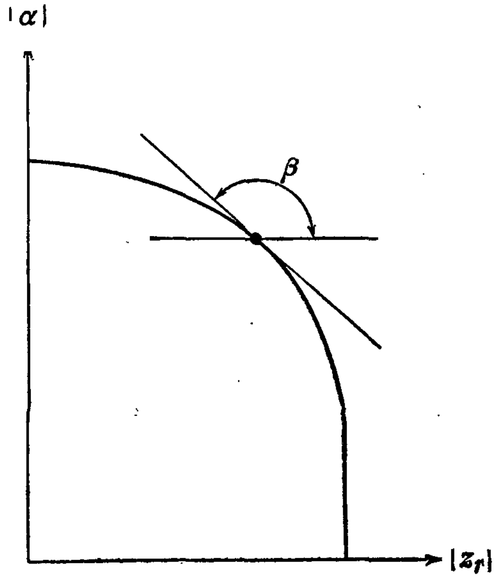

Рис. 1.

.. (..), где функция $F_\alpha(z_1)$ регулярна. Пусть $\mathfrak{M}$ — (четырехмерная) область, заданная равенством

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{|\alpha - \alpha_0| < |\varepsilon|} \mathfrak{m}^2(\alpha). \tag{14}$$

Разность $\eta' - |\eta|$ должна быть достаточно малой, чтобы выполнялось соотношение

$$\{|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_1^*| < \eta'\} \subset (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}) \cap \{\alpha = \alpha'\} \text{ для } |\alpha' - \alpha_0| \leqslant |\varepsilon| \tag{15}$$

это возможно, в силу непрерывности $\hat{\rho}(\alpha)$ как функции α и в силу определения (8)].

[1]) Как видно на рис. 3, $\mathfrak{m}^2(\alpha)$ может выходить за пределы круга сходимости $F_\alpha(z_1)$.

Введем теперь новые переменные

$$A=\alpha-\alpha_0, \quad Z=\tilde{z}_1-\tilde{z}_1^*. \tag{16}$$

Пусть

$$G(Z, A)=F_\alpha(\tilde{z}_1) \quad \text{для} \quad (Z, A)\subset\mathfrak{B}. \tag{17}$$

В каждом круге $|Z|<\eta'$ функция $G(Z, A)$ — аналитическая функция одного комплексного переменного Z. Следовательно, она может быть записана в виде

$$G(Z, A)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(A)Z^n. \tag{18}$$

Здесь

$$g_n(A)=\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n G(Z, A)}{\partial Z^n}\right)\Big|_{Z=0}. \tag{19}$$

Так как круг $\{Z=0, |A|\leqslant|\varepsilon|\}$ лежит в $\mathfrak{B}$ (где $G(Z, A)=F_\alpha(\tilde{z}_1)$ — аналитическая функция *обоих* комплексных переменных), то $g_n(A)$ — аналитические функции A для $|A|\leqslant|\varepsilon|$ (см. рис. 2).

Ряд $G(Z, A)$ обладает следующими свойствами.

1. Коэффициенты $g_n(A)$ — аналитические функции A для $|A|<|\varepsilon|$.

2. Для каждого Z, $|Z|=\beta\eta'$, где $\beta<1$, ряд (18) сходится.

3. В окрестности $Z=0$ ряд (18) сходится равномерно, так как область

$$[|Z|\leqslant\tau, |A|<|\varepsilon|] \quad (\tau>0 \text{ достаточно мало}) \tag{20}$$

лежит в $\mathfrak{L}$ и, согласно нашим предыдущим рассуждениям, функция $G(Z, A)=F_\alpha(\tilde{z}_1)$ является в $\mathfrak{L}$ аналитической функцией двух комплексных переменных.

По теореме Гартогса [25, стр. 9], ряд (18) сходится равномерно в области $\mathfrak{B}$ и определяет в ней аналитическую функцию двух комплексных переменных. Если $\left(\tilde{z}_1^{(0)}, \alpha_0\right)\in\mathfrak{B}$, то $F_\alpha(\tilde{z}_1)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных в $\left(\tilde{z}_1^0, \alpha_0\right)$.

Если $\beta=\pi/2$ (см. рис. 1), то мы действуем аналогично: вместо бицилиндра $\mathfrak{B}$ [см. (13)] мы используем область $\mathfrak{B}^{**}$, получаемую из $\mathfrak{B}$ преобразованием

$$Z^{**} = Z + \tau\alpha, \quad \alpha^{**} = \alpha, \tag{21}$$

где $\tau > 0$ достаточно мало.

Если $\beta = \pi$, то мы заменяем переменное z_1 на z_2 и z_2 на z_1; тогда мы приходим к предыдущему случаю.

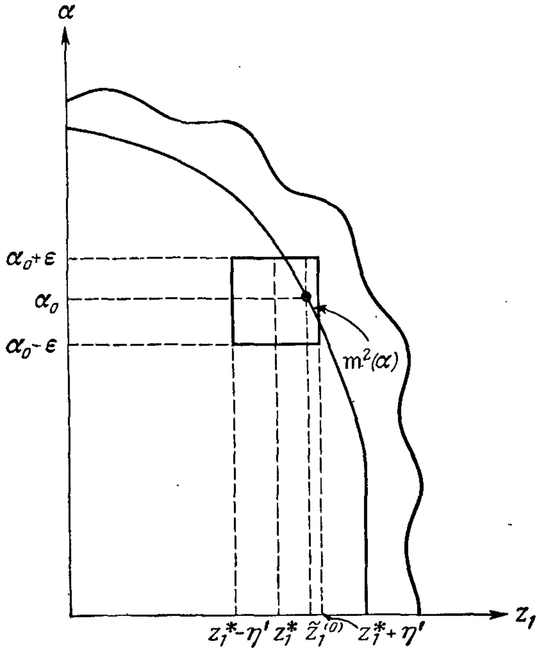

Рис. 2. Пересечение области $\mathfrak{L} + \mathfrak{l}^3$ плоскостью $\arg \alpha = \arg \alpha_0$, $\arg z_1 = \arg z_1^{(0)}$.

В наших рассуждениях мы используем плоскости $\mathfrak{P}^2(\alpha)$ [см. (1)] для определения $\tilde{\mathcal{S}}$-координат. Очевидно, что можно повторить эти рассуждения, используя вместо плоскостей $\mathfrak{P}^2(\alpha)$ семейства других поверхностей; например, мы можем ввести

$$\mathfrak{Q}^2(\alpha). \quad z_2 = \alpha z_1^n, \tag{22}$$

где n — натуральное число, или даже поверхности

$$\mathfrak{H}^2(\alpha):\quad z_2 = \alpha z_1^n + \beta z_2^p, \tag{23}$$

где n, p — натуральные числа, $p > n$, $\beta = \beta(\alpha)$. Используя эти новые поверхности, мы получим условия регуляр-

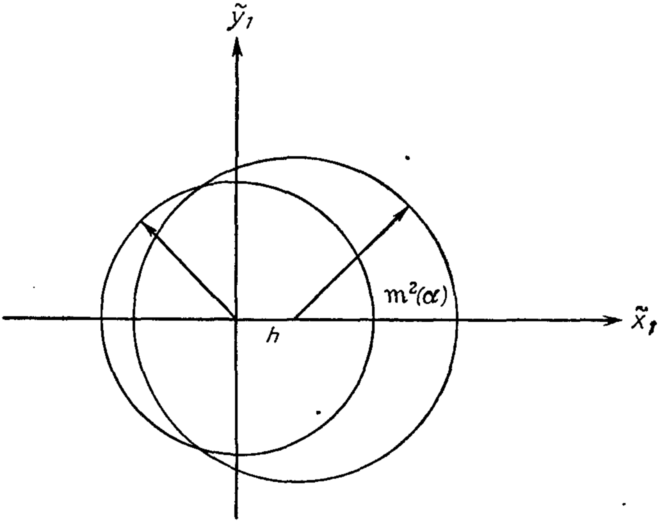

Рис. 3.

ности $f(z_1, z_2)$ в областях другого типа, отличающихся от рассматриваемых в настоящей статье.

3. Формула для определения расположения некоторых особенностей $f(z_1, z_2)$ по коэффициентам ее разложения в ряд. Обобщая метод, развитый в п. 2, мы рассмотрим далее однозначную функцию $f(z_1, z_2)$ двух комплексных переменных с элементом (2.2)[1]) в начале координат. Как прежде, мы предположим, что $f(z_1, z_2)$ не имеет особых поверхностей вида (2.1).

Пусть $\mathfrak{U}^2$ — множество особенностей функции $f(z_1, z_2)$. Наш метод предполагает разбиение $\mathfrak{U}^2$ на некоторые мно-

[1]) Номер (2.2) обозначает формулу (2) из п. 2.

жества, которые мы обозначим $\mathfrak{U}^2_\nu$. Упорядочим для фиксированного α радиусы окружностей $\hat{\rho}_\nu(\alpha)$, на которых расположены особые точки $\hat{\varphi}_{\nu\mu}(\alpha)$, так, чтобы было

$$\hat{\rho}_\nu(\alpha) < \hat{\rho}_{\nu+1}(\alpha). \tag{1}$$

Аналогично, упорядочим аргументы $\hat{\varphi}_{\nu\mu}(\alpha)$ особых точек, лежащих на окружностях $|z_1| = \hat{\rho}_\nu(\alpha)$, так, чтобы было

$$\varphi_{\nu,\mu}(\alpha) < \varphi_{\nu,\mu+1}(\alpha). \tag{2}$$

Множество точек

$$\{\alpha,\ \rho = \hat{\rho}_\nu(\alpha), \quad \varphi = \varphi_{\nu\mu}(\alpha)\} \tag{3}$$

для фиксированного (ν, μ) мы будем называть особым множеством $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$.

Обобщая метод Адамара, поставим в соответствие ряду (2.2) величины:

$$l_\mu(\alpha) = \overline{\lim_{N\to\infty}} \left| D_N^{(\mu)}(\alpha) \right|^{1/N}, \tag{4}$$

$$D_N^{(\mu)}(\alpha) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{N} a_{N-k,\,k}\alpha^k & \sum\limits_{k=0}^{N+1} a_{N+1-k,\,k}\alpha^k & \dots & \sum\limits_{k=0}^{N+\mu} a_{N+\mu-k,\,k}\alpha^k \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} a_{N+1-k,\,k}\alpha^k & \sum\limits_{k=0}^{N+2} a_{N+2-k,\,k}\alpha^k & \dots & \sum\limits_{k=0}^{N+\mu+1} a_{N+\mu+1-k,\,k}\alpha^k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum\limits_{k=0}^{N+\mu} a_{N+\mu-k,\,k}\alpha^k & \sum\limits_{k=0}^{N+\mu+1} a_{N+\mu+1-k,\,k}\alpha^k & \dots & \sum\limits_{k=0}^{N+2\mu} a_{N+2\mu-k,\,k}\alpha^k \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Многие классические теоремы для функций одного переменного дают теоремы о соотношениях между коэффициентами ряда (2.2) для $f(z_1, z_2)$ и расположением особых множеств $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$.

Примеры.

Лемма 3.1. *Функция* $f(z_1, z_2)$ *имеет самое большее* p *особых множеств* $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots, p$, *и не имеет других особенностей на границе*

$$\{\alpha, \ \rho = \hat{\rho}(\alpha)\} \tag{6}$$

круговой области сходимости тогда и только тогда, когда

$$l_j(\alpha) = 1/\hat{\rho}^{j+1}(\alpha) \quad \text{для} \quad j = 0, 1, \ldots, p-1 \tag{7}$$

и

$$l_p(\alpha) < 1/\hat{\rho}^{p+1}(\alpha) \tag{8}$$

(см. [2 или 36, стр. 333]).

Замечание. Чтобы доказать это утверждение, мы используем непрерывность функции $\hat{\rho}(\alpha)$ от α.

Лемма 3.2. *Пусть существует число* q, $q < \infty$, *такое, что*

$$l_q(\alpha)/l_{q-1}(\alpha) = 0. \tag{9}$$

Тогда функция $f(z_1, z_2)$ *имеет самое большее конечное число особых множеств* $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$ *в* $\overline{\mathfrak{S}}$ (см. [2, стр. 131] или [36, стр. 335]).

Лемма 3.3. *Предположим, что*

$$l_j(\alpha)/l_{j-1}(\alpha) \to 0 \quad \textit{при} \quad j \to \infty \tag{10}$$

равномерно по α. *Тогда функция* $f(z_1, z_2)$ *имеет только конечное число особых множеств* $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$ *в каждой конечной подобласти области* $\mathfrak{S}$ (см. [2 или 36, стр. 335]).

Лемма 3.4. *Предположим, что*

$$l_j(\alpha)/l_{j-1}(\alpha) \to 1/R(\alpha) \quad \textit{при} \quad j \to \infty \tag{11}$$

равномерно по α. *Тогда функция* $f(z_1, z_2)$ *имеет конечное число особых множеств* $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$ *в каждой круговой области*

$$\{\alpha, \ \rho \leqslant P(\alpha)\}, \quad P(\alpha) < R(\rho). \tag{12}$$

Эта функция имеет бесконечное число особых множеств $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$ *в окрестности*

$$\{\alpha,\ \rho = R(\alpha)\}. \tag{13}$$

Поведение функции $f(z_1, z_2)$ *в окрестности множества* $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$ *аналогично поведению аналитической функции одного комплексного переменного в окрестности полюса; например, имеет место*

Лемма 3.5. *В окрестности множества* $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$ *функция* $f(z_1, z_2)$ *однозначна и имеет бесконечность конечного порядка. Точнее, предположим, что* $\left(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}\right)$ — *точка множества* $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$, *не являющаяся точкой разветвления. Пусть*

$$\mathfrak{U}^2_{\nu\mu} = \{\alpha,\ r = \hat{\rho}(\alpha),\ \varphi = \Phi(\alpha)\} = \{z_1 = z^*(z_2)\} \tag{14}$$

и $\Phi(\alpha)$ — *непрерывная функция* α, $\left|\alpha - \frac{z_2^{(0)}}{z_1^{(0)}}\right| < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$ *достаточно мало. Пусть* $\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right)$ — *точка, лежащая на расстоянии*

$$D\left(z_1^{(1)},\ z_2^{(1)}\right) = \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{15}$$

от $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$. *Тогда*

$$\left|f\left(z_1, z_2\right)\right| \leqslant C\left[D\left(z_1^{(1)},\ z_2^{(1)}\right]^{-N}, \tag{16}$$

где N, $N < \infty$, — *целое число и* C, $C < \infty$, — *постоянная.*

Доказательство. Предположим сначала, что особая поверхность представляет собой плоскость, а именно

$$z_1 - z_1^{(0)} = A\left(z_2 - z_2^{(0)}\right),\quad A \text{ — постоянная.} \tag{17}$$

Плоскость (17) пересекает $\mathfrak{P}^2\left(\frac{z_2^{(1)}}{z_1^{(1)}}\right) = \left\{z_2 - \frac{z_2^{(1)}}{z_1^{(1)}} z_1 = 0\right\}$ в точке

$$z_1^{(j)} = \frac{\zeta z_1^{(1)}}{z_1^{(1)} - A z_2^{(1)}},\quad z_2^{(j)} = \frac{\zeta z_2^{(1)}}{z_1^{(1)} - A z_2^{(1)}}, \tag{18}$$

где $\zeta = z_1^{(0)} - A z_2^{(0)}$.

Квадрат расстояния $\delta\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right)$ от $\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right)$ до $\left(z_1^{(j)}, z_2^{(j)}\right)$ равен

$$\delta^2\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right) = |z_1^{(1)} - z_1^{(j)}|^2 + |z_2^{(1)} - z_2^{(j)}|^2 =$$
$$= \frac{|z_1^{(1)}|^2}{|z_1^{(1)} - Az_2^{(1)}|^2}\left\{|\zeta - z_1^{(1)} + Az_2^{(1)}|^2 + \right.$$
$$\left. + \left|\frac{z_2^{(1)}}{z_1^{(1)}}\right|^2 |\zeta - z_1^{(1)} + Az_2^{(1)}|^2\right\} =$$
$$= \frac{|\zeta - z_1^{(1)} + Az_2^{(1)}|^2}{|z_1^{(1)} - Az_2^{(1)}|^2}\left\{|z_1^{(1)}|^2 + |z_2^{(1)}|^2\right\} =$$
$$= \frac{(1 + |A|^2)}{|z_1^{(1)} - Az_2^{(1)}|^2}\left\{|z_1^{(1)}|^2 + |z_2^{(1)}|^2\right\} D^2(z_1, z_2). \quad (19)$$

Здесь

$$D(z_1, z_2) = \frac{|\zeta - z_1^{(1)} + Az_2^{(1)}|}{(1 + |A|^2)^{1/2}} \quad (20)$$

— расстояние между $\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right)$ и плоскостью (17).

В каждой плоскости $\mathfrak{P}^2(\alpha)$ функция $F_\alpha(z_1) \equiv f(z_1, \alpha z_1)$ имеет полюс конечного порядка в $\left(z_1^{(j)}, z_2^{(j)}\right)$. Таким образом, существует натуральное число N, $N < \infty$, такое, что

$$|f\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right)| \leqslant C_1\left[|z_1^{(1)} - z_1^{(j)}|^2 + |z_2^{(1)} - z_2^{(j)}|^2\right]^{-N/2} =$$
$$= C_1\left(\frac{(1 + |A|^2)\left(|z_1^{(1)}|^2 + |z_2^{(1)}|^2\right)}{|z_1^{(1)} - Az_2^{(1)}|^2}\right)^{-N/2} D^{-N}(z_1, z_2). \quad (21)$$

Если уравнение особой поверхности имеет в окрестности $\left(z_1^0, z_2^0\right)$ разложение

$$z_1 = z_1^{(0)} + A\left(z_2 - z_2^{(0)}\right) + B\left(z_2 - z_2^{(0)}\right) + \ldots, \quad (17a)$$

то для соответствующих расстояний $\tilde{\delta}\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right)$ и $\tilde{D}\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right)$ имеют место равенства

$$\tilde{\delta}\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right) = \delta\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right) + \eta_1(z_1, z_2),$$
$$\tilde{D}\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right) = D\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right) + \eta_2\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right), \quad (22)$$

где для достаточно малого ε_1

$$\left|\frac{\eta_1\left(z_1^{(1)},\ z_2^{(1)}\right)}{\delta\left(z_1^{(1)},\ z_2^{(1)}\right)}\right| \quad \text{и} \quad \left|\frac{\eta_2\left(z_1^{(1)},\ z_2^{(1)}\right)}{D\left(z_1^{(1)},\ z_2^{(1)}\right)}\right| \tag{23}$$

становятся сколь угодно малыми. Таким образом, неравенство (16) справедливо и в этом случае.

Замечание 3.1. Различные результаты теории функций одного комплексного переменного можно использовать для получения соответствующих результатов в случае двух комплексных переменных. В другой статье автор рассмотрит применение неванлинновской теории мероморфных функций для изучения решений ψ.

Замечание 3.2. Наш метод обобщается в различных направлениях. Например, методом, используемым в настоящей статье, можно получить результаты теории мероморфных функций трех комплексных переменных.

4. Обобщение результатов п. 2,3 на случай одной системы дифференциальных уравнений. Шиффер и автор [23, 12] определили интегральные операторы, порождающие решения системы двух линейных уравнений с частными производными

$$\mathbf{L}_k(\psi) \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial z_k\,\partial z_k^*} + F_k\left(z_k,\ z_k^*\right)\psi = 0,$$

$$z_k = x_k + iy_k,\quad z_k^* = x_k - iy_k,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z_k\,\partial z_k^*} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y_k^2}\right),\quad F_k \text{ — целые функции.} \tag{1}$$

В работе [12] (см. теорему 1 на стр. 995) показано, что для каждой системы (1) существуют четыре порождающие функции

$$T_k^{(\mu)}\left(z_k,\ z_k^*,\ \zeta_k\right),\quad k = 1,\ 2,\quad \mu = 1,\ 2 \tag{2}$$

(целые по z_k, z_k^*), такие, что каждое действительное решение ψ, регулярное в начале координат, может быть представлено в виде

$$\psi(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*) = \sum_{k=1}^{2} \psi_k(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*), \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\psi_1(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*) &= \mathbf{P}_1(g_1) \equiv \\ \equiv \mathrm{S}\Bigg\{ g_1(z_1, z_2) &+ \int_0^{z_1} T_1^{(1)}(z_1, z_1^*, \zeta_1)\, g_1(\zeta_1, z_2)\, d\zeta_1 + \\ &+ \int_0^{z_2} T_2^{(1)}(z_2, z_2^*, \zeta_2)\, g_1(z_1, \zeta_2)\, d\zeta_2 + \\ &+ \int_0^{z_1}\int_0^{z_2} \left[\prod_{k=1}^{2} T_k^{(1)}(z_k, z_k^*, \zeta_k)\right] g_1(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*) &= \mathbf{P}_2(g_2) \equiv \\ \equiv \mathrm{S}\Bigg\{ g_2(z_1, z_2^*) &+ \int_{\zeta_1=0}^{z_1} T_1^{(2)}(z_1, z_1^*, \zeta_1)\, g_2(\zeta_1, z_2^*)\, d\zeta_1 + \\ &+ \int_{\zeta_2=0}^{z_2^*} T_2^{(2)}(z_2, z_2^*, \zeta_2)\, g_2(z_1, \zeta_2)\, d\zeta_2 + \\ &+ \int_{\zeta_1=0}^{z_1}\int_{\zeta_2=0}^{z_2^*} \prod_{k=1}^{2} T_k^{(2)}(z_k, z_k^*, \zeta_k)\, g_2(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь g_1, g_2 — аналитические функции соответственно от z_1, z_2 и z_1, z_2^*, регулярные в начале координат, $\mathrm{S}(A) = \frac{1}{2}(A + \bar{A})$, где $\bar{A}$ — сопряженное к A. Обратно, если g_1, g_2 — аналитические функции, то правая часть (3) является решением системы (1). Области, в которых имеют место представления (4) и (5), называются областями представления соответственно операторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$. Для определения функций g_1, g_2 можно использовать следующие уравнения:

$$g_1(z_1, z_2) + \overline{g_1(0, 0)} = 2\psi(z_1, 0, z_2, 0), \tag{6}$$

$$g_2(z_1, z_2^*) = 2\psi_1(z_1, 0, 0, z_2^*) - [g_1(z_1, 0) + \bar{g}_1(0, z_2^*)]. \tag{7}$$

Пусть решение системы (1) имеет разложение

$$\psi(z_1,\ z_1^*,\ z_2,\ z_2^*)=\sum_{P=0}^{\infty}\ \sum_{m+n+M+N=P} A_{mnMN}z_1^m z_1^{*n} z_2^M z_2^{*N} \tag{8}$$

в окрестности начала координат. Тогда

$$g_1(z_1,\ z_2)+\overline{g_1(0,\ 0)}=2\sum_{\substack{m=0\\M=0}}^{\infty} A_{m0M0}z_1^m z_2^M, \tag{9}$$

$$g_2(z_1,\ z_2^*)=2\sum_{\substack{m=0\\N=0}}^{\infty} A_{m00N}z_1^m z_2^{*N}-$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty} A_{m000}z_1^m-\sum_{N=0}^{\infty}\bar{A}_{000N}z_2^{*N}. \tag{10}$$

Порождающие функции $T_k^{(\mu)}$ являются целыми функциями переменных z_k, z_k^* при $|t_k|\leqslant 1$, $k=1,\ 2$. Таким образом, порождаемое решение ψ_1 определено и голоморфно в каждой области $\mathfrak{D}$, такой, что $g(z_1,\ z_2)$ голоморфна в $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}$ обладает следующим свойством: точку $(z_1,\ z_2)$ можно соединить с началом координат посредством $\mathfrak{P}^2$, $\mathfrak{P}^2\in\mathfrak{D}$. Здесь $\mathfrak{P}^2$ — прямое произведение двух простых кривых, одной из плоскости z_1, другой из плоскости z_2.

Функция $g_1(z_1,\ z_2)$ регулярна в $\mathfrak{L}+\mathfrak{l}^3$; $\mathfrak{L}+\mathfrak{l}^3$ — односвязная область, обладающая упомянутым выше свойством. Таким образом, ψ_1 также регулярна в $\mathfrak{L}+\mathfrak{l}^3$.

Замечание 4.1. Решение $\psi(z_1,\ z_1^*,\ z_2,\ z_2^*)$ можно рассматривать либо в четырехмерном пространстве x_1, y_1, x_2, y_2, т. е. для действительных x_1, y_1, x_2, y_2 (z_k^* — сопряженное к z_k), либо в восьмимерном пространстве $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$, $y_1^{(1)}$, $y_1^{(2)}$, $x_2^{(1)}$, $x_2^{(2)}$, $y_2^{(1)}$, $y_2^{(2)}$. Тогда мы предполагаем, что $x_k=x_k^{(1)}+ix_k^{(2)}$, $y_k=y_k^{(1)}+iy_k^{(2)}$. В этом случае z_k и z_k^* — два *независимых* переменных.

В дальнейшем мы предположим, что $z_k^*=\bar{z}_k$. Кроме функций $g_1(z_1,\ z_2)$, мы также рассмотрим функции $g_2(z_1^*,\ z_2)$. В последнем случае областью регулярности будет уже не $\mathfrak{L}+\mathfrak{l}^3$, а область $\tilde{\mathfrak{L}}+\tilde{\mathfrak{l}}^3$, которая получается при замене точек $(z_1, z_2)=(x_1, y_1, x_2, y_2)$ области $\mathfrak{L}+\mathfrak{l}^3$ точками $(z_1, \bar{z}_2)=(x_1, y_1, x_2, -y_2)$. Аналогично, следует заменить плоскости (2.1) плоскостями

$$\tilde{\mathfrak{P}}^2(\alpha): z_2^* \equiv \tilde{z}_2 - \alpha z_1. \qquad (11)$$

(Трехмерные) гиперповерхности $\{\alpha, \rho=\hat{\rho}(\alpha)\}$ следует заменить гиперповерхностями, получаемыми тем же путем, что и в п. 3, при помощи плоскостей $\tilde{\mathfrak{P}}^2(\alpha)$ вместо $\mathfrak{P}^2(\alpha)$. Новые гиперповерхности мы обозначим так:

$$\{\{\alpha, \rho=\tilde{\rho}(\alpha)\}\}. \qquad (12)$$

Так как функции $T_k^{(\mu)}(z_k, z_k^*, \zeta_k)$, см. (2), являются целыми функциями по z_k, z_k^*, то применение результатов из п. 2, 3 дает аналогичные результаты для решений ψ системы (1).

Теорема 4.1. *Пусть*

$$\psi \equiv \psi(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*) = \psi_1 + \psi_2 =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} A_{mnMN} z_1^m z_1^{*n} z_2^M z_2^{*N}, \qquad (13)$$
$$A_{mnMN} = \bar{A}_{nmMN}, \quad A_{mnMN} = \bar{A}_{mnNM},$$

— действительное решение системы (1). *Предположим, что коэффициенты* A_{m0M0}, $m=0, 1, 2, \ldots$, $M=0, 1, 2, \ldots$, *ряда*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} A_{m0M0} z_1^m z_2^M \qquad (14)$$

удовлетворяют условиям леммы 2.1. *Тогда функция* ψ_1 *голоморфна в* $\mathfrak{L}+\mathfrak{l}^3$ [*см.* (2.6), (2.7), (2.8), (2.8a)].

Если коэффициенты A_{m00N} *ряда*

$$2\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} A_{m00N} z_1^m z_2^{*N} - \sum_{m=0}^{\infty} A_{m000} z_1^m - \sum_{N=0}^{\infty} \bar{A}_{000N} z_2^{*N} \qquad (15)$$

удовлетворяют условиям леммы 2.1, *то функция* ψ_2 *регулярна в* $\tilde{\mathfrak{L}}+\tilde{\mathfrak{l}}^3$.

Теорема 4.1 следует почти сразу из формул (8) и (9) и из того, что $T_k^{(\mu)}(z_k, z_k^*, \zeta_k)$, $k=1, 2$, $\mu=1, 2$, — целые функции от z_k, z_k^*. Функция ψ_1 регулярна во всякой области, в которой регулярна g_1. С другой стороны, разложение для функции $g_1(z_1, z_2)$ дается в правой части (9). Аналогично доказывается второе утверждение теоремы 4.1.

Если мы применим оператор $\mathbf{P}_1$ к функции $g_1(z_1, z_2)$, имеющей в $\mathfrak{P}^2(\alpha)$ полюсы, то мы получим особенности, которые, вообще говоря, будут линиями разветвления. Это следует из того, что, согласно формуле (13) из [12, стр. 997], наш оператор $\mathbf{P}_1$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\psi_1 = \mathbf{P}_1(g_1) \equiv \mathbf{S}\Bigg[& g_1(z_1, z_2) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_1^{(n)}(z_1, z_2)}{\mathrm{B}(n, n+1)} \int_0^{z_1} (z_1-\zeta_1)^{n-1} g_1(\zeta_1, z_2)\, d\zeta_1 + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_2^{(m)}(z_2, z_2^*)}{2^{2m}\mathrm{B}(m, m+1)} \int_0^{z_2} (z_2-\zeta_2)^{m-1} g_1(z_1, \zeta_2)\, d\zeta_2 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_1^{(m)}(z_1, z_1^*) R_2^{(m)}(z_2, z_2^*)}{2^{2(m+n)}\mathrm{B}(n, n+1)\mathrm{B}(m, m+1)} \times \\ & \times \int_{\zeta_1=0}^{z_1}\int_{\zeta_2=0}^{z_2} (z_1-\zeta_1)^{n-1}(z_2-\zeta_2)^{m-1} g_1(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \Bigg]. \qquad (16)\end{aligned}$$

Здесь $R_k^{(n)}(z_k, z_k^*)$ — целые функции, просто связанные с $T_k^{(\mu)}$ (см. [12]).

Предположим, что функция $g_1(z_1, z_2)$ в достаточно малой окрестности допускает представление $g_1(z_1, z_2) = \frac{\tau(z_2)}{z_1 - \chi(z_2)} + \ldots$, где $\tau(z_2)$ и $\chi(z_2)$ — регулярные функции. Тогда

$$\int_0^{z_1} \frac{\tau(z_2)}{\zeta_1 - \chi(z_2)} d\zeta_1 = \tau(z_2) \log [z_1 - \chi(z_2)] + \ldots$$

и

$$\int_0^{z_1} (z_1-\zeta_1)^{\nu} \frac{\tau(z_2)}{\zeta_1 - \chi(z_2)} d\zeta_1$$

бесконечнозначные функции от z_1, z_2.

В соответствии с этим множества $\mathfrak{U}^2_{\nu\mu}$, где аналитические функции $g_1(z_1, z_2)$ имеют бесконечность конечного порядка и однозначны, преобразуются оператором $\mathbf{P}_1$ в множества $\mathfrak{B}^2_{\nu\mu}$, где $\psi_1 = \mathbf{P}_1(g_1)$ имеют бесконечность того же порядка, что и g_1, но бесконечнозначны.

Замечание 4.2. Интегральным представлением (4) функции ψ_1 определены в „области ассоциации" рассматриваемого интегрального оператора, т. е. в области, где имеет место представление ψ_1 в виде (4). Аналитическим продолжением функцию ψ_1 можно определить во всей области ее существования. Таким образом, используя теорию функций комплексных переменных, мы можем в некоторых случаях делать выводы о поведении ψ_1 также вне области ассоциации.

Теорема 4.2. *Пусть* $\psi(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*)$ — *действительное решение системы* (1), *имеющее разложение в ряд* (8) *в окрестности начала координат. Обозначим через* $l_j(\alpha)$ *функции* (3.4), *которые получаются из* (3.5) *заменой коэффициентов* $a_{N-k,\,k}$ *на* $A_{M-k,\,0,\,k,\,0}$.

1. *Если* $l_j(\alpha)$, $j = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяют условиям* (3.7), (3.8) *леммы* 3.1, *то функция* $\psi_1(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*)$ *имеет самое большее* p *особых множеств разветвления* $\mathfrak{B}^2_{\nu\mu}$ *и не имеет других особенностей на границе* (3.6).

2. *Пусть соотношение* (3.9) *выполнено для* $l_j(\alpha)$. *Тогда* ψ_1 *имеет самое большее конечное число линий разветвления* $\mathfrak{B}^2_{\nu\mu}$.

3. *Если* (3.10) *имеет место для* $l_j(\alpha)$, *то в каждой конечной области* ψ_1 *имеет только конечное число особых множеств* $\mathfrak{B}^2_{\nu\mu}$ *на границе области ассоциации.*

4. *Если* $l_j(\alpha)$, $j = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяют соотношению* (3.11), *то функция* ψ_1 *имеет конечное число множеств разветвления* $\mathfrak{B}^2_{\nu\mu}$ *в каждой области* (3.12) *и бесконечно много множеств разветвления в окрестности* (3.13).

Аналогичные соотношения справедливы для ψ_2. *В последнем случае* $l_j(\alpha)$ *следует определить, ис-*

пользуя коэффициенты (3.5); *линии разветвления* $\mathfrak{B}^2_{\nu\mu}$ *совпадают с множествами* (12).

5. Применение интегральных операторов в теории целых функций. Операторы, порождающие решения ψ дифференциального уравнения или системы уравнений, могут быть записаны также в виде

$$\psi = \mathbf{c}_2(f) \equiv \int_{|\zeta|=1} Ef\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{1}$$

где E — так называемая порождающая функция интегрального оператора. Во многих случаях можно не только показать, что E — целая функция, но также определить границы ее роста. Чтобы проиллюстрировать используемый метод, рассмотрим уравнение

$$\tilde{U}_{xx} + \tilde{U}_{yy} + c(x, y)\tilde{U} \equiv \psi_{zz^*} + F\psi = 0,$$
$$z = x + iy, \quad z^* = x - iy, \quad \tilde{U}(x, y) = \psi(z, z^*). \tag{2}$$

Здесь $c(x, y)$ — целая функция. В этом случае интегральный оператор может быть записан в виде

$$\mathbf{c}_2(f) = \int_{\mathfrak{L}^1} E(z, z^*, t)\, f\left(\frac{1}{2}z(1-t^2)\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{3}$$

где E — порождающая функция оператора $\mathbf{c}_2$, $f(z)$ — аналитическая функция комплексного переменного, голоморфная в начале координат и являющаяся ассоциированной функцией, $\mathfrak{L}^1$ — путь (в комплексной плоскости t), соединяющий -1 с 1 и лежащий в круге $|t| \leqslant 1$ (см. [15, стр. 26]).

Теорема 5.1. *Пусть* $E(z, z^*, t)$ — *порождающая функция интегрального оператора* (3) *для уравнения* (2), *где* F — *полином степени* N *по* z, z^*. *Тогда*

$$|E(z, z^*, t)| \leqslant A_1 e^{r^{N+2+\varepsilon}}, \quad r^2 = x^2 + y^2 = zz^*, \tag{4}$$

для

$$|z| < \frac{r}{1+e}, \quad |z^*| < \frac{r}{1+e}. \tag{5}$$

Доказательство. В книге [15, стр. 31 и 32, формула (7)] показано, что

$$E(z, z^*, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} z^n \int_0^{z^*} P^{(2n)}(z, z^*)\, dz^*. \qquad (6)$$

В области[1]) $|z| < \frac{r}{1+e}$, $|z^*| < \frac{r}{1+e}$, $|t| \leqslant 1$ ряд

$$D \equiv 1 + \frac{2C}{(1 - |z|/r)} +$$

$$+ 2Cr \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|2z|^n (n + A - 1)(n + A - 2) \ldots (A + 1)}{(r - |z|)^n (2n - 1)!!}, \qquad (7)$$

где

$$A = 2Cr(1 + r), \quad C = \max_{\substack{|z| = r \\ |z^*| = r}} |F(z, z^*)|, \qquad (8)$$

служит мажорирующим рядом для (6) (см. [15, § 2, (6), (7), (13), (15)]).

Так как $|F| \leqslant Br^N$, где B — постоянная, имеем

$$A \leqslant 4Br^{N+2} \text{ для } |z| \leqslant \frac{r}{1+e}, \quad |z^*| \leqslant \frac{r}{1+e}. \qquad (9)$$

Далее,

$$\frac{1}{(2n-1)!!} = \frac{2^n n!}{(2n)!} \qquad (10)$$

и

$$(n - 1 + A)(n - 2 + A) \ldots (1 + A) < (n + A)^n =$$

$$= n^n \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n < n^n e^A.$$

---

[1]) В [15] неравенство (11) доказано для $|z| < r/3$, $|z^*| \leqslant r/3$. Заметим, что $1 + e = 3, 7 \ldots$.

Таким образом, для $|z| < \frac{r}{1+e}$, $|z^*| < \frac{r}{1+e}$, $|t| \leqslant 1$ имеем

$$D \leqslant 1 + \frac{2C}{(1-|z|/r)} + 2Br^{N+1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}|z^n| n^n e^A n!}{(r-|z|)^n (2n)!} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{2C}{(1-|z|/r)} + 2Br^{N+1}e^A \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n |z|^n}{(r-|z|)^n} \leqslant A_1 e^{r^{N+2+\varepsilon}}, \tag{11}$$

где A_1 и B — постоянные. Для получения последнего неравенства мы применили формулу Стирлинга.

Теорему 5.1 можно использовать для получения границ роста целых решений ψ уравнения (2), выраженных через подпоследовательность коэффициентов разложения ψ в начале координат.

Теорема 5.2. *Пусть*

$$\psi(z, z^*) = \sum_{m, n=0}^{\infty} A_{mn} z^m z^{*n} \tag{12}$$

— действительное решение уравнения (2), *и пусть*

$$\rho = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{m \log m}{-\log \dfrac{\Gamma(m+1)\,|A_{m0}|}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}} > r^{N+2}. \tag{13}$$

Тогда $\psi(z, z^*)$ *является целой функцией, порядок которой не превосходит* ρ.

Доказательство. Согласно (1) и (2) в [15, стр. 29] для ассоциированных функций $g(z)$ и $f(z/2)$ имеют место равенства

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{m0} z^m + C, \tag{14}$$

$$f\left(\frac{z}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)\, A_{m0} z^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}. \tag{15}$$

Из (13) следует, что $f(z/2)$ — целая функция порядка ρ. По теореме 5.1 и в силу известного результата о порядке роста произведения двух функций, функция

$$\psi(z, z^*) = \int_{\mathfrak{g}^1} E(z, z^*, t) f(z(1-t^2)/2) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{16}$$

имеет порядок, не превосходящий ρ [49, стр. 14].

Замечание. Аналогичным путем можно определить тип ψ.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ АЛГЕБРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ И ПРОБЛЕМЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ [1])

Памяти Лео Лихтенштейна

Современная теория функций, развитая Неванлинной и другими, показывает, что различные соотношения между ростом и распределением значений рациональных функций имеют место (в модифицированной форме) для мероморфных функций. Используя интегральные операторы, мы определим правило композиции в линейном пространстве гармонических функций *трех* переменных так, чтобы различные подалгебры и коалгебры полученной алгебры обладали сходными свойствами. (Мы получим алгебру относительно сложения и определенной ниже *композиции*.)

1. Введение. Различные интегральные операторы $\mathbf{P}$ преобразуют аналитические функции f одного (или нескольких) комплексных переменных в решения ψ линейного уравнения с частными производными $\mathrm{L}(\psi)=0$ (см. [3, 4, 8, 15]). Эти операторы отображают аналитические функции f в решения ψ прежде всего *в малом*, т. е. f и ψ рассматриваются в достаточно малой окрестности $\mathfrak{U}(O)$ начала координат O. Мы называем функцию f ассоциированной с ψ относительно такого оператора. Во многих случаях при помощи аналитического продолжения f и ψ мы получаем соотношения между ассоциированными функциями f (аналитическими функциями одного или нескольких комплексных переменных) и решениями ψ в области ассоциации (т. е. в области, где имеет место представление $\psi=\mathbf{P}(f)$) или *в целом*, т. е. во всей области существования решения (см. [15, стр. 83]).

Решения линейных уравнений с частными производными с целыми коэффициентами образуют линейное про-

[1]) Bergman S., Integral operators in the study of an algebra and of a coefficient problem in the theory of three-dimensional harmonic functions, *Duke Mathematical Journal*, **30**, 3 (1963), 447—460.

странство, в то время как аналитические функции образуют алгебру. Используя интегральные операторы, мы можем определить композицию решений ψ, соответствующую произведению ассоциированных функций. Таким способом мы получаем алгебру решений рассматриваемых дифференциальных уравнений, где обычное умножение заменено композицией, соответствующей произведению ассоциированных функций (см. [3, стр. 647]).

Интересно изучить решения ψ, соответствующие различным алгебрам (со сложением и обычным умножением) ассоциированных функций, например алгебрам

1) всех аналитических функций, регулярных в $\mathfrak{U}(O)$,

2) всех аналитических функций, обладающих определенными особенностями в начале координат O,

3) рациональных функций, регулярных в O,

4) мероморфных функций, регулярных в O

(см. [4, 8, 16]).

Многие соотношения, справедливые для ассоциированных функций f, можно „преобразовать" в теоремы о соответствующих решениях ψ данного уравнения $\mathrm{L}(\psi)=0$.

Как пример применения этой идеи мы рассмотрим в настоящей статье алгебру $\mathbf{M}$ гармонических функций $H(\boldsymbol{X})$ трех переменных, порождаемых мероморфными функциями, регулярными в точке O.

Эти рассмотрения тесно связаны с проблемой коэффициентов для гармонических функций *трех действительных переменных*, т. е. с вопросом о том, как можно найти распределение особенностей гармонической функции $H(\boldsymbol{X})$ по коэффициентам ее разложения в ряд в окрестности точки O.

В случае подалгебр и коалгебр, исследованном в п. 3, 4, мы рассматриваем функции $H(\boldsymbol{X})$, разложения в ряд которых имеют специальный вид: многие коэффициенты ряда либо равны нулю, либо равны друг другу. В п. 5 мы изучаем проблему коэффициентов в общем случае и даем критерий возможности продолжения функции $H(\boldsymbol{X})$ в область $\mathfrak{G}$ определенной структуры (см. стр. 294 и далее).

2. Алгебра гармонических функций трех действительных переменных. Аналитические функции одного комплексного переменного Z образуют подпространство

а комплексных гармонических функций двух действительных переменных. Пространство **а** имеет базис

$$\{Z^n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},\quad Z=\xi+i\eta. \tag{1}$$

Произведением двух аналитических функций является аналитическая функция (если $f_k(Z)\in \mathbf{a}$, $k=1,\ 2$, то и

$$f(Z)=f_1(Z)\,f_2(Z)\in \mathbf{a}); \tag{2}$$

поэтому **а** представляет собой алгебру функций.

В дальнейшем мы введем линейное пространство **H** гармонических функций (регулярных в окрестности начала координат O) трех действительных переменных x, y, z; мы определим композицию элементов **H** и покажем, что **H** является алгеброй относительно сложения и этой композиции. Пусть **H** — линейное пространство *комплексных* гармонических функций, которые в достаточно малой окрестности $\mathfrak{U}(O)$ начала координат разлагаются в ряд вида

$$H(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n} a_{nk}\Gamma_{nk}(X)\equiv$$

$$\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}\frac{n!\,a_{nk}i^{|k-n|}}{(n+|k-n|)!}R^nP_{n,\,|k-n|}(\cos\theta)\,e^{i\varphi(k-n)}= \tag{3}$$

$$=\mathbf{B}_3\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}a_{nk}u^n\zeta^{-n+k}\right)= \tag{3a}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}a_{nk}u^n\zeta^{-n+k}\frac{d\zeta}{\zeta},\qquad X\in\mathfrak{U}(O),$$

$$u=Z\zeta+X+Z^*\zeta^{-1}.$$

Здесь

$$X=(x,\ y,\ z)=(X,\ Z,\ Z^*),$$

$$X=x,\quad Z=(iy+z)/2,\quad Z^*=(iy-z)/2,$$

x, y, z — декартовы, а R, θ и φ — сферические координаты трехмерного пространства, $P_{n,\,|k-n|}$ — присоединенные функции Лежандра. Функции $\Gamma_{nk}(X)$ определяются формулой

$$\Gamma_{nk}(X)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} u^n\zeta^{-n+k-1}\,d\zeta,\quad u=X+Z\zeta+Z^*\zeta^{-1}\qquad (3б)$$

(см. [15, стр. 70—73], [16, стр. 212] и [54, стр. 392]).

Замечание. Это означает, что функции $H(X)\in\mathbf{M}$ в *достаточно малой окрестности* $\mathfrak{U}(O)$ *начала координат* можно представить в виде

$$H(X)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} h(u,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta},\qquad (3в)$$

где $h\in\mathfrak{m}$. Функция $h(u,\zeta)$ принадлежит $\mathfrak{m}$, если

$$h(u,\zeta)=\frac{e_1(u,\zeta)}{e_2(u,\zeta)},$$

где e_k, $k=1, 2,$ — целые функции от u для $1-\varepsilon\leqslant\leqslant|\zeta|\leqslant 1+\varepsilon$.

Замечание. Если коэффициенты a_{nk} изменяются над полем комплексных чисел, так что ряды (3) сходятся в $\mathfrak{U}(O)$, то $H(X)$ изменяется над пространством *комплексных* гармонических функций, регулярных в начале координат.

Если потребовать выполнения равенств

$$a_{nk}i^{|k-n|}=\overline{a_{n,\,2n-k}i^{|k-n|}},$$

то мы получим пространство *действительных* гармонических функций, регулярных в начале координат.

Представление (3) было вначале установлено в $\mathfrak{U}(O)$. Вся область, в которой справедлива формула (3), называется *областью ассоциации представления* (3) (см. [15, стр. 15, 83]).

Очевидно, что $\mathbf{H}$ — линейное пространство. Покажем, что можно определить композицию, которая превратит $\mathbf{H}$ в алгебру.

Для $X\in\mathfrak{U}(O)$ пространство $\mathbf{H}$ изоморфно алгебре $\mathbf{A}$ функций $f(u,\zeta)$ двух комплексных переменных u и ζ, которые образуют линейное пространство с базисом

$$\{u^n\zeta^k,\ n=0, 1, 2, \ldots,\ k=0, 1, 2, \ldots, 2n\}.\qquad (4)$$

Определим композицию $H_1(X) * H_2(X)$ двух функций

$$H_\nu(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} a_{nk}^{(\nu)} \Gamma_{nk}(X) \in \mathbf{H}, \quad \nu = 1, 2, \tag{5}$$

формулой

$$H(X) = H_1(X) * H_2(X) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(\prod_{\nu=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} a_{nk}^{(\nu)} u^n \zeta^{-n+k} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad X \in \mathfrak{U}(O). \tag{6}$$

Композиция $*$ ассоциативна, коммутативна и дистрибутивна. Функция $H(X) \equiv 1$ является единицей по отношению к определенной композиции. Умножение на комплексную константу и композиция с этой константой дают один и тот же результат. Таким образом, $\mathbf{H}$ есть алгебра по отношению к сложению и композиции, определенной по формуле (6) (см. [3, стр. 647]). (Следует заметить, что в формуле (1) на стр. 644 в работе [3] необходимо поменять местами e^{it} и e^{-it}.)

Замечание. Можно рассматривать композицию либо действительных, либо комплексных гармонических функций. Такую композицию можно определить независимо от интегрального оператора, представляя коэффициенты a_{nk} разложения $H(X)$ в окрестности начала координат в виде комбинаций величин $a_{nk}^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$.

В случае двух переменных мы рассмотрим либо класс $\mathbf{a}$, состоящий из аналитических функций комплексного переменного (подкласс комплексных гармонических функций), либо класс действительных гармонических функций.

Гармоническая функция $\tilde{\tilde{H}}(x, y)$ двух действительных переменных может быть записана в виде

$$\tilde{\tilde{H}}(x, y) = \tilde{H}(Z, \bar{Z}) = \frac{1}{2} [h(Z) + \overline{h(\bar{Z})}],$$
$$h(0) \text{ действительно}, \tag{7}$$
$$Z = x + iy, \quad \bar{Z} = x - iy,$$

где $h(Z) = 2\tilde{H}(Z, 0) - \tilde{H}(0, 0)$ — аналитическая функция одного комплексного переменного. Определим композицицию, положив

$$\tilde{H}_1(Z, \bar{Z}) \otimes \tilde{H}_2(Z, \bar{Z}) = \tilde{H}(Z, \bar{Z}) \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{2}[h_1(Z)\,h_2(Z) + \overline{h_1(Z)\,h_2(Z)}]. \qquad (8)$$

В случае гармонических функций трех переменных мы либо введем класс **H** комплексных гармонических функций и определим композицию так, как это сделано в работе [3, стр. 647] (такое определение используется в настоящей статье), или мы можем определить композицию для действительных гармонических функций (см. [16, стр. 216]).

Здесь мы рассмотрим подалгебру **M** алгебры **H**, состоящую из гармонических функций $H(X)$, которые соответствуют мероморфным функциям $h(u, \zeta) \in \mathbf{A}$ (регулярным в окрестности начала координат) и разлагаются в ряд вида (3).

Как указывалось в п. 1, отображение **H** на **A** определено сначала в достаточно малой окрестности $\mathfrak{U}(O)$ начала координат. При помощи аналитического продолжения $H(X)$, используя работы Неванлинны и других, мы получим результаты, которые относятся к поведению $H(X) \in \mathbf{M}$ в целом. Алгебра **H** имеет различные подалгебры и коалгебры, изоморфные алгебре аналитических функций одного комплексного переменного. Интерпретация результатов теории функций одного комплексного переменного приводит к интересным соотношениям для этих подалгебр и коалгебр. Пусть $\mathbf{T}_{KP\mu}$ — подалгебра или коалгебра алгебры **M**, изоморфная линейному пространству $\mathbf{t}_{KP\mu}$ соответственно с базисом

$$\{(u^K\zeta^P)^n\} \quad \text{или} \quad \{(u^K\zeta^P)^n\zeta^\mu\},$$
$$n = 0,\ 1,\ \ldots,\ \mu = 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots, \qquad (9)$$

где K, P и $\pm\mu$ — *фиксированные* положительные целые числа. Примеры подалгебры и коалгебры алгебры **M** дают соответственно $\mathbf{T}_{KP0}$ и $\mathbf{T}_{KP\mu}$. В п. 3 мы рассмотрим случаи таких подалгебр и коалгебр с базисом (9).

Замечание. Если композиция элементов подпространства **C** некоторой алгебры принадлежит **C**, то **C** называется *подалгеброй.* Если такие композиции являются элементами другого подпространства C_1, то C называется *коалгеброй.* Гармоническая функция, принадлежащая подалгебре T_{110}, может иметь только особенности, описанные в работе [15, стр. 77—78, случаи (а) и (б)]. Среди них мы имеем линии разветвления второго порядка в плоскостях $x = \text{const}$. (Линия разветвления может стягиваться в точку. В этом случае функция однозначна в окрестности особенности. Однако если мы продолжим эту функцию на комплексные значения, то она становится многозначной. В этом случае мы говорим, что линия разветвления вырожденная. В комплексном пространстве, т. е. для комплексных значений x, y, z, ветви связны.)

В случае подалгебр и коалгебр $T_{KP\mu}$, $\mu = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots$, алгебры $\mathbf{M}$, соответствующих целым K и P, бо́льшим 1, функции $H(X) \in T_{KP\mu}$ имеют особенности вдоль алгебраических кривых. Эти особенности изучены в [4, 8]. Как указывалось в [11], применение результатов Адамара позволяет определить расположение и тип особенностей $H(X)$ по коэффициентам a_{nk} разложения $H(X) \in T_{KP\mu}$ в ряд (3).

3. Особенности функции $S^{-1}(X)$, где $S(X) \in T_{KP\mu}$ — целая гармоническая функция.

Теорема 3.1. *Пусть*

$$S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nK,\, n(K+P)+\mu} \Gamma_{nK,\, n(K+P)+\mu}(X) \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_{nK,\, n(K+P)+\mu} r^{nK} P_{nK,\, |nP+\mu|}(\cos\theta)\, e^{i(nP+\mu)\varphi}, \quad (1)$$

K, P, μ — фиксированные неотрицательные целые числа,

$$b_{nK,\, n(K+P)+\mu} = a_{nK,\, n(K+P)+\mu} \frac{(nK)!\, i^{|nP+\mu|}}{(nK+nP+\mu)!},$$

$$Q(X) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{nK,\, n(K+P)+\mu} \Gamma_{nK,\, n(K+P)+\mu}(X)$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \log n}{-\log |a_{nK,\, n(K+P)+\mu}|} = \rho < \infty. \qquad (2)$$

Тогда функция

$$R_\alpha(X) = \left[S(X) - \sum_{n=0}^{N} \alpha_{nK,\, n\,(K+P)+\mu} \Gamma_{nK,\, n\,(K+P)+\mu}(X) \right]^{-1},$$

обратная к $[S(X) - Q(X)]$, *имеет особенности типа полюса, структура которых описана в* [15, стр. 77—83] *и* [8], *и представляется в виде*

$$R_\alpha(X) = F(X) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{q_\nu} M_{\nu s} L_{\nu s}(X) - P_\nu(X) \right) + E(X). \qquad (3)$$

Здесь $F(X)$ — *алгебраическая гармоническая функция, ассоциированная с которой функция* f *имеет особенность в начале координат;* $L_{\nu s}(X)$ — *алгебраические гармонические функции, которые будут описаны в дальнейшем,* $E(X)$ — *целая гармоническая функция и* $P_\nu(X)$ — *гармонические полиномы степени* $K(\lambda - 1)$; λ — *наименьшее целое число, большее* ρ.

Замечание. $R_\alpha(X)$ зависит от $\alpha = \{\alpha_{nK,\, n\,(K+P)+\mu},\ n = 0, 1, \ldots, N\}$. Заметим, что мы полагаем $a_{nK,\, n\,(K+P)+\mu} = 0$ для $nP + \mu > nK$, так как в этом случае $\Gamma_{nK,\, n\,(K+P)+\mu}(X) = 0$.

Доказательство. Коэффициенты $a_{nK,\, n\,(K+P)+\mu}$, $n = 0, 1, \ldots$, удовлетворяют условию (2), следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{nK,\, n\,(K+P)+\mu})\, \eta^n \qquad (4)$$

является целой функцией порядка ρ ([24, стр. 231]). Так как $\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \eta^n$ — полином, то функция

$$t(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nK,\, n\,(K+P)+\mu} \eta^n - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \eta^n \qquad (5)$$

также имеет порядок ρ (см. [49, стр. 14, 30] или [50, стр. 321]). Так как $t(\eta)$ — целая функция от η, то

$t^{-1}(\eta)$ — мероморфная функция, которую можно представить в виде

$$\frac{1}{t(\eta)}=f(\eta)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{q_\nu}\frac{M_{\nu s}}{(\eta-A_\nu(\alpha))^s}-p_\nu(\eta)\right)+l(\eta) \qquad (6)$$

(см. [50, стр. 304]), где $p_\nu(\eta)$ — полиномы, обеспечивающие сходимость, $M_{\nu s}$ и $A_\nu(\alpha)$ — постоянные, $l(\eta)$ — целая функция и f — рациональная функция с особенностью в начале координат. Порядок $1/t(\eta)$ равен ρ (см. [35, стр. 351]) и ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|A_\nu(\alpha)|^{\rho+\varepsilon}}<\infty,\ \varepsilon>0, \qquad (7)$$

сходится (см. [49, стр. 31]). В дальнейшем λ будет обозначать целое число, $\lambda>\rho$. Таким образом, мы можем взять полиномы $p_\nu(\eta)$ степени $\lambda-1$, см. [50, стр. 305].

Заменим η на $u^K\zeta^P$ и применим к $\zeta^\mu/t(u^K\zeta^P)$ оператор $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\ldots\frac{d\zeta}{\zeta}$. Пусть

$$(x,\ y,\ z)\in\mathfrak{R}=\{(x^2+y^2+z^2)\leqslant r^2\},\quad r<\infty.$$

Так как $A_\nu(\alpha)\to\infty$, сумму $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}$ в формуле (6) можно разбить на две части $\sum\limits_{\nu=1}^{L}+\sum\limits_{\nu=L+1}^{\infty}$ так, чтобы при $(x, y, z)\in\mathfrak{R}$ и $\nu\geqslant L$ члены $1/(u^K\zeta^P-A_\nu(\alpha))$ были регулярными функциями от u. Так как ряд $\sum\limits_{\nu=L+1}^{\infty}$ сходится абсолютно и равномерно, указанный интеграл будет регулярной гармонической функцией от x, y, z в $\mathfrak{R}$. Рассмотрим в сумме $\sum\limits_{\nu=1}^{L}$ член

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{M_{\nu s}\zeta^\mu}{(u^K\zeta^P-A_\nu(\alpha))^{s_\nu}}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}p_\nu(u^K\zeta^P)\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (8)$$

Для каждого значения $(x,\ y,\ z)\in\mathfrak{R}$, не лежащего на отделяющей поверхности (см. [15, стр. 83]) [т. е. на поверхности, где для некоторого значения ζ, $|\zeta| = 1$, имеем

$$x + \zeta\left(\frac{iy+z}{2}\right) + \zeta^{-1}\left(\frac{iy-z}{2}\right) = \left(A_\nu(\alpha)\,\zeta^{-P}\right)^{1/K}\ ],$$

первый интеграл в формуле (8) является алгебраической гармонической функцией, которая будет описана в дальнейшем. Второй интеграл представляет собой конечную линейную комбинацию сферических функций степени, не превосходящей $K(\lambda - 1)$. Изменяя кривую интегрирования $|\zeta| = 1$, мы меняем отделяющую поверхность. Таким образом, путь интегрирования может пройти через любые точки $\mathfrak{K}$, за исключением тех, которые принадлежат линии особенностей в $\mathfrak{K}$ порождаемой гармонической функции, см. [8, стр. 471 и далее].

В соответствии с этими рассуждениями мы видим, что в данном случае

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^{\mu-1}\,d\zeta}{(u^K\zeta^P - A_\nu(\alpha))^s} = L_{\nu s}(X) \equiv L_{\nu s}(X,\ A_\nu(\alpha)),$$

$$X = (x,\ y,\ z), \qquad (9)$$

является алгебраической гармонической функцией, определенной интегрированием на одном пространственном листе ее области существования. Аналитическим продолжением мы можем определить $L_{\nu s}(X)$ на остальных листах. Существует только конечное число членов (8), которые имеют особенности в $\mathfrak{K}$. Разность между значениями $L_{\nu s}(X)$ в соответствующих точках $(x,\ y,\ z)$ на различных листах является конечной величиной, если только функция $L_{\nu s}(X)$ не имеет особенности в одной из таких точек. (Соответствующими являются точки, координаты которых x, y, z в однолистном пространстве совпадают.) Каждая функция (9) конечнозначна. Рассматривая ее аналитическое продолжение вдоль линии, лежащей полностью в $\mathfrak{K}$, мы можем определить значения функции $L_{\nu s}(X)$, получаемые аналитическим продолжением (8). Это завершает доказательство теоремы 3.1.

Приступим теперь к более подробному описанию функции $L_{\nu s}(X)$, см. (3). Предположим сначала, что $s = 1$.

Особенности гармонических функций

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{p(u,\zeta)}{q(u,\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{9a}$$

где p и q — полиномы от u и ζ, изучены в работе [8]. Для $q=u^K\zeta^P-A_\nu(\alpha)$ имеем

$$\frac{\zeta^\mu}{u^K\zeta^P-A_\nu(\alpha)}=\frac{\zeta^\mu}{[z\zeta^2+x\zeta+z^*]^K\zeta^{P-K}-A_\nu(\alpha)}. \tag{10}$$

Мы различаем два случая.

I. $K<P$. Тогда

$$\frac{\zeta^\mu}{u^K\zeta^P-A_\nu(\alpha)}=\frac{\zeta^\mu}{\sum\limits_{k=0}^{2K}\Gamma_{Kk}(X)\,\zeta^{P+K-k}-A_\nu(\alpha)}. \tag{11}$$

Здесь $\Gamma_{K\nu}(X)$ являются (модифицированными) сферическими функциями (см. [15, стр. 70]). Знаменатель в (11) является полиномом по ζ степени $P+K$.

II. $P\leqslant K$. Имеем

$$\frac{\zeta^\mu}{u^K\zeta^P-A_\nu(\alpha)}=\frac{\zeta^{\mu+K-P}}{\sum\limits_{k=0}^{2K}\Gamma_{Kk}(X)\,\zeta^{2K-k}-A_\nu(\alpha)\,\zeta^{K-P}}. \tag{12}$$

Знаменатель — полином степени $2K$ по ζ.

З а м е ч а н и е. Следует заметить, что если степень знаменателя в формулах (11) или (12) больше степени числителя, то при вычислении интеграла $L_{\nu s}(X, A_\nu(\alpha))$ мы будем действовать, как в [8, стр. 476, формула (2.13b)].

Согласно [8, стр. 476], интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\zeta^\mu}{u^K\zeta^P-A_\nu}\frac{d\zeta}{\zeta},\qquad A_\nu\equiv A_\nu(\alpha),$$

имеет особенности вдоль кривой $\mathfrak{C}^1(A_\nu)$ (которая в действительном пространстве может стягиваться в точку):

$$\mathfrak{C}^1(A_\nu)=\{\mathrm{Re}\,[K,P,A_\nu]=0,\quad \mathrm{Im}\,[K,P,A_\nu]=0\}, \tag{13}$$

где $[K, P, A_\nu]$ — дискриминант для

$$\sum_{k=0}^{2K} \Gamma_{Kk}(X)\zeta^{K+P-k} - A_\nu \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{2K} \Gamma_{Kk}(X)\zeta^{2K-k} - A_\nu\zeta^{K-P}.$$

Если этот дискриминант не равен тождественно нулю, то его можно записать в виде определителя. В случае I этот определитель имеет порядок $4K+2P-1$. Его первая строка *имеет вид*

$$\{\overbrace{00\ldots0}^{2K+P-2}\ \overbrace{\Gamma_{K,0}\Gamma_{K,1}\ldots\Gamma_{K,2K}}^{2K+1}\ \overbrace{0\ldots-A_\nu}^{P}\}. \qquad (14)$$

В случае II порядок определителя равен $4K-1$ и первая строка имеет вид

$$\{00\ldots0\,\Gamma_{K,0}\ldots(\Gamma_{K,K+P}-A_\nu)\ldots\Gamma_{K,2K}\}. \qquad (15)$$

Величина A_ν называется *параметром* $[K, P, A_\nu]$.

Если s — целое число, большее 1, то мы получим более сложные функции, зависящие от $(\partial Q/\partial\zeta)_{\zeta=\zeta^{(\nu)}}$ и производных

$$\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial\zeta^\alpha}\left(\frac{Q(\zeta)}{\zeta-\zeta^{(\nu)}}\right)\right]_{\zeta=\zeta^{(\nu)}}$$

(см. [4, стр. 644 и след.]). Здесь $\zeta^{(\nu)}$ — корни уравнения $Q(\zeta)=0$, а $Q(\zeta)$ — знаменатели правых частей (11) или (12). В случае $s>1$, s — целое, $A_\nu(\alpha)$ должны быть сосчитаны s раз, и соответствующие особенности имеют более сложную структуру. В этом случае (13) также является уравнением особых кривых.

Если $K=P=1$, то $L_{\nu s}(X)$ — функции, описанные в [15, стр. 77 и далее]. Эти функции $L_{\nu s}(X)$ имеют линии разветвления на сферах с центром в начале координат и радиусами $|A_\nu(\alpha)|$. (Заметим, что линия разветвления в действительном пространстве x, y, z может стягиваться в точку, см. [15, стр. 77].)

Очевидно, наши результаты обобщаются на случай гармонических функций с мероморфной ассоциированной, если предположить, что коэффициенты их разложения в ряд удовлетворяют условиям Адамара:

$$l_q/l_{q-1} \to 0, \quad l_q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| D_n^{(q)} \right|^{1/n}, \tag{16}$$

$$D_n^{(q)} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{n+q} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots & a_{n+q+1} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n+q} & a_{n+q+1} & \ldots & a_{n+2q} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

(Мы предполагаем здесь, что $a_{nK,\, n\,(K+P)+\mu} = 0$ при $n = 0, 1, 2, \ldots, N$.) В этом случае ассоциированная с $S(X)$ функция мероморфна на всей плоскости. Обратная величина для мероморфной функции есть снова мероморфная функция, которая может быть представлена в виде (3). Однако, чтобы определить степень полиномов $P_\nu(X)$, обеспечивающих сходимость произведения, мы нуждаемся в некоторых дополнительных сведениях, которые позволяют определить порядок характеристической функции ассоциированной функции $t(\eta)$.

4. Особенности функции $S^{-1}(X)$ для целой функции $S(X)$ более общего вида. В п. 3 рассматривались функции $S(X)$ весьма специального вида. Коэффициенты S разложения гармонической функции по сферическим функциям $\Gamma_{nk}(X)$ образуют треугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} & & a_{00} & & \\ & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{1}$$

(см. [16, стр. 208]). Коэффициенты функций $S(X)$ [см. (3.1)] являются суммами сферических функций. Все коэффициенты a_{nk} в N-й строке равны нулю, если $N \neq nK$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в то время как для $N = nK$ по крайней мере один из $a_{n,k}$ отличен от нуля.

Замечание. Гармонические функции такого вида называют специальными гармоническими функциями, или функциями, разложения которых соответствуют одному столбцу.

Однако несколько модифицированный метод может быть применен и в случае гармонических функций, разложения которых не обязательно соответствуют одному столбцу.

Связь между коэффициентами функции $g(z_1, z_2)$ двух комплексных переменных и свойствами ее особенностей изучалась в работе [18]. Используя эти исследования, можно получить результаты в общем случае, т. е. когда коэффициенты разложения $H(X)$ образуют матрицу (1).

Теорема 4.1. *Пусть*

$$S(X)=\sum_{n=0}\sum_{k=0} a_n \binom{n}{k} B^{n-k}D^k\Gamma_{nK,nK+(n-k)P+kS+\nu}(X) \qquad (2)$$

(B, D — постоянные) — разложение в ряд некоторой целой гармонической функции, и пусть

$$Q(X)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{2n} \alpha_n \binom{n}{k} B^{n-k}D^k\Gamma_{nK,\, nK+(n-k)P+kS+\nu}(X) \qquad (3)$$

— гармонический полином. Далее, предположим, что

$$\overline{\lim}\,\frac{n\log n}{-\log|a_n|}=\rho<\infty. \qquad (4)$$

Обратная величина [*относительно композиции* (2.6)] *$R_\alpha(X)$ функции $S(X)-Q(X)$ является гармонической функцией, представимой в виде*

$$R_\alpha(X)=F(X)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{q_\nu} M_{\nu s}\tilde{L}_{\nu s}(X)-P_\nu(X)\right)+E(X). \qquad (5)$$

Здесь

$$\tilde{L}_{\nu s}(X)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^\mu}{[u^K(B\zeta^P+D\zeta^S)-A_\nu(\alpha)]^s}\,\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (6)$$

[*см.* (11)] *являются алгебраическими гармоническими функциями, регулярными в начале координат, $P_\nu(X)$ — гармонические полиномы степени, не превосходящей $K(\lambda-1)$, $E(X)$ — целая гармоническая функция и $F(X)$ — алгебраическая функция, ассоциированная* *с которой функция имеет особенность в начале координат* (λ — наименьшее целое число, большее ρ.)

Доказательство. В силу (2.3а) ассоциированная функция для $[S(X) - Q(X)]$ есть

$$t(\eta) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n [u^K (B\zeta^P + D\zeta^S)]^n - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n [u^K (B\zeta^P + D\zeta^S)]^n \right\} \zeta^{\mu}. \tag{7}$$

Так как коэффициенты a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию (4), ассоциированная для обратной величины $1/t(\eta)$, где $\eta = u^K (B\zeta^P + D\zeta^S)$, может быть записана в виде

$$\frac{1}{t(\eta)} = f(u, \zeta) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{q_\nu} \frac{M_{\nu s}}{[u^K (B\zeta^P + D\zeta^S) - A_\nu(\alpha)]^s} - \right.$$
$$\left. - p_\nu(u, \zeta) \right) + q(u, \zeta), \tag{8}$$

где $f(u, \zeta)$ — рациональная функция, имеющая особенность в начале координат, $q(u, \zeta)$ — целая функция от $u^K (B\zeta^P + D\zeta^S)$ и $p_\nu(u, \zeta)$ — обеспечивающие сходимость полиномы. Заметим, что мы действуем так же, как в п. 3, заменяя, однако, $u^K \zeta^P$ на $u^K (B\zeta^P + D\zeta^S)$.

Так же, как и ранее, мы получим верхнюю грань для степени $p_\nu(u, \zeta)$. Повторяя рассуждения из п. 3, мы придем к утверждению теоремы.

Приступим теперь к описанию функций $\tilde{L}_{\nu s}(X)$ в случае $s = 1$. Если $K \leqslant P \leqslant S$, то

$$u^K (B\zeta^P + D\zeta^S) = \sum_{\tau=0}^{2K} \left[D\Gamma_{2K, \tau}(X) \zeta^{K+S-\tau} + B\Gamma_{2K, \tau}(X) \zeta^{K+P-\tau} \right] \tag{9}$$

и $u^K (B\zeta^P + D\zeta^S) - A_\nu(\alpha)$ — полином степени $P + S$. Пусть $\zeta = \zeta^{(\tau)}(X)$, $\tau = 1, 2, \ldots,$ — решения уравнения

$$D \sum_{\tau=0}^{2K} \Gamma_{2K, \tau}(X) \zeta^{K+S-\tau} + B \sum_{\tau=0}^{2K} \Gamma_{2K, \tau}(X) \zeta^{K+P-\tau} -$$
$$- A_\nu(\alpha) = 0. \tag{10}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^{\mu}}{[u^K(B\zeta^P+D\zeta^S)-A_\nu(\alpha)}\frac{d\zeta}{\zeta}=$$

$$=\sum_{|\zeta^{(\tau)}(X)|<1}\left[\frac{\zeta^{\mu}}{\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\sum_{2K}\right)}\right]_{\zeta=\zeta^{(\tau)}(X)},$$

$$\sum_{2K}=\sum_{\tau=0}^{2K}\left(D\Gamma_{2K,\tau}(X)\,\zeta^{K+S-\tau}+B\Gamma_{2K,\tau}(X)\,\zeta^{K+P-\tau}\right)-A_\nu(\alpha). \tag{11}$$

Если $s>1$, то мы получим более сложное выражение. Так как a_n удовлетворяют условию (4), мы можем выбрать полиномы, обеспечивающие сходимость, степень которых по $u^K(B\zeta^P+D\zeta^S)$ равна $\lambda>\rho$; следовательно, $P_\nu(X)$ — сферические функции степени $K(\lambda-1)$.

5. Аналитическое продолжение гармонической функции трех действительных переменных, заданной своим разложением в ряд. В рассуждениях из п. 3 и 4 используются результаты, касающиеся проблемы коэффициентов для особенностей гармонических функций, которые разлагаются в ряд весьма специальной структуры. В то время как в общем случае коэффициенты разложения по сферическим функциям образуют треугольную матрицу (4,1), в п. 3 мы рассматривали только разложение, соответствующее одному столбцу, а в п. 4 мы делали весьма ограничительные предположения о коэффициентах при сферических функциях одной и той же степени. Использование керн-функции позволяет дать критерии для рядов значительно более общей структуры (см. также [18]).

Пусть ξ, η, ζ — декартовы координаты в трехмерном пространстве, и пусть $\mathfrak{B}(e^{it})$ — односвязная область, содержащая внутри начало координат O и лежащая в плоскости ξ, η. Ортогональным преобразованием $x=\xi$, $y=$ $=\eta\cos t+\zeta\sin t$, $z=\eta\sin t-\zeta\cos t$, t — постоянная, область $\mathfrak{B}(e^{it})$ отображается на область $\tilde{\mathfrak{B}}(e^{it})$ в плоскости $y\sin t-z\cos t=0$.

Через каждую точку (x_0, y_0, z_0), $z_0 = y_0 \operatorname{tg} t$ области $\widetilde{\mathfrak{B}}(e^{it})$ проводим прямую

$$\mathfrak{l}^1(x_0, y_0, z_0) = \{x = x_0,\ y\cos t + z\sin t = y_0\cos t + z_0 \sin t\}. \tag{1}$$

(Бесконечный) цилиндр $\bigcup \mathfrak{l}^1(x_0, y_0, z_0)$, $(x_0, y_0, z_0) \in \widetilde{\mathfrak{B}}(e^{it})$, мы обозначим через $\mathfrak{Z}(e^{it})$. Предположим, что $\widetilde{\mathfrak{B}}(e^{it})$ изменяется непрерывно при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Пересечение всех цилиндров $\mathfrak{Z}(e^{it})$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, обозначим через $\mathfrak{C}$, т. е.

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \mathfrak{Z}(e^{it}).$$

Теорема 5.1. *Пусть гармоническая функция $H(X)$ разлагается в ряд*

$$H(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} a_{nk}\Gamma_{nk}(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} u^n \tilde{a}_n(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$\tilde{a}_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{2n} a_{nk}\zeta^{-n+k}, \quad X \in \mathfrak{U}(O). \tag{2}$$

Если для всякого $\zeta = e^{it}$ и любого вектора $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ коэффициенты $\tilde{a}_n(e^{it})$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\sum_{n,\,m=0}^{N} \tilde{a}_{n+m}(e^{it})\alpha_n\alpha_m\right| \leqslant \sum_{n,\,m=0}^{N} k_{nm}(e^{it})\alpha_n\bar{\alpha}_m, \tag{3}$$

где $k_{nm}(e^{it})$ — коэффициенты разложения в ряд $\sum_{n,\,m=0}^{\infty} k_{nm}z^n\bar{\zeta}^m$ керн-функции $K_{\mathfrak{B}(e^{it})}(z, \bar{\zeta})$ (двумерной) области $\mathfrak{B}(e^{it})$, то функция $H(X)$ может быть аналитически продолжена в область

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} (\mathfrak{Z}(e^{it})).$$

Доказательство. В силу (2) функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n(\zeta)u^n \tag{4}$$

является ассоциированной с $H(X)$.

Бергман и Шиффер ([22, стр. 240]) доказали следующую теорему. Пусть $V(z, \zeta)$ — функция, симметричная и аналитическая по обоим аргументам в окрестности начала координат; пусть $K_{\mathfrak{B}}$ — керн-функция области $\mathfrak{B}$, и пусть

$$V(z, \zeta) = \sum d_{mn} z^m \zeta^n, \qquad K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{\zeta}) = \sum k_{nm} z^m \bar{\zeta}^n \tag{5}$$

— разложения функций V и $K_{\mathfrak{B}}$. Если для любого комплексного вектора $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{m,\, n=0}^{N} d_{mn} \alpha_m \alpha_n \right| \leqslant \sum_{m,\, n=0}^{N} k_{mn} \alpha_m \bar{\alpha}_n, \tag{6}$$

то $V(z, \zeta)$ аналитична для $\zeta \in \mathfrak{B}$, $z \in \mathfrak{B}$.

Шиффер и Ситяк [56] связывают с функцией $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ выражение

$$V(z, \zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} a_{m+n+1} z^m \zeta^n. \tag{7}$$

Подставляя в (6)

$$d_{mn} = a_{m+n+1}, \tag{8}$$

Шиффер и Ситяк получили отсюда условия регулярности функции $f(z)$ в области $\mathfrak{B}$, выраженные через коэффициенты разложения в ряд функции $f(z)$.

Если для фиксированного t функция $f(u, e^{it}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n (e^{it}) u^n$ регулярна в области $\tilde{\mathfrak{B}}(e^{it})$, то функция $f(x + iy\cos t + iz\sin t, e^{it})$ регулярна в области $\mathfrak{Z}(e^{it})$ трехмерного пространства. Таким образом, интеграл $(1/2\pi i) \int\limits_{|\zeta|=1} f(u, \zeta)\, d\zeta/\zeta$ регулярен в пересечении $\mathfrak{C}$ всех областей $\mathfrak{Z}(e^{it})$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Замечание. Метод, описанный в [9, стр. 14—20], позволяет решать вопрос о возможности продолжения функции, заданной своим разложением в окрестности начала координат O, в область $\mathfrak{B}$, $O \in \mathfrak{B}$. Этим способом мы получаем другой критерий возможности аналитического продолжения функции (2). Однако в этом случае мы должны определить так называемые двоякоортогональные функции, т. е. функции, которые ортогональны одновременно в $\mathfrak{B}$ и в достаточно малом шаре с центром в начале координат.

Литература к приложению

[1] Адамар (Hadamard J.), Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **106**, 259—262.

[2] — Essai sur l'étude des fonctions données par leurs développements de Taylor, *J. math. pure appl.*, **8** (IV) (1892), 101—186.

[3] Бергман (Bergman S.), Zur Theorie der ein- und mehrwertigen harmonischen Funktionen des dreidimensionalen Raumes, *Math. Z.*, 24 (1926), 641—669.

[4] — Zur Theorie der algebraischen Potentialfunktionen des dreidimensionalen Raumes, *Math. Ann.*, **99** (1928), 629—659; **101** (1929), 534—558.

[5] — Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen, *Матем. сб.*, **44** (2) (1937), 1169—1198.

[6] — Sur une propriété des singularités des fonctions de deux variables complexes, *Bull. Sci. Math.* (2), **62** (1938), 297—305.

[7] — Residue theorems of harmonic functions of three variables, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1944), 163—174.

[8] — On solutions with algebraic character of linear partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 461—500.

[9] — The kernel function and conformal mapping, Math. Surveys, 5 (1950).

[10] — The coefficient problem in the theory of linear partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73** (1952), 1—34.

[11] — Essential singularities of a class of linear partial differential equations in three variables, *J. Rat. Mech. Anal.*, 3 (1954), 539—560.

[12] — Bounds for solutions of a system of partial differential equations, *J. Rat. Mech. Anal.*, 5 (1956), 993—1002.

[13] — On singularities of solutions of certain differential equations in three variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 (1957), 462—488.

[14] — Operators generating solutions of certain partial differential equations in three variables and their properties, *Scripta Math.*, 23 (1957), 143—151.

[15] — Integral operators in the theory of linear partial differential equations, Ergebnisse der Math., N. F., 23 (1961). (Русский перевод в настоящей книге, стр. 9—218.)

[16] — Some properties of a harmonic function of three variables given by its series development, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 8 (1961), 207—222.

[17] — Operators generating solutions of certain differential equations in three variables and their properties. *Scripta Math.*, 26 (1961), 5—31. (Русский перевод в настоящей книге, стр. 219—251.)

[18] — On the coefficient problem in the theory of a system of linear partial differential equations, *J. d'Anal. Math.*, XI (1963), 249—274. (Русский перевод в настоящей книге, стр. 252—278.)

[19] — Integral operators in the study of an algebra and of a coefficient problem in the theory of three-dimensional harmonic functions, *Duke Math. J.*, 30 (1963), 447—460. (Русский перевод в настоящей книге, стр. 279—297.)

[20] — Nouvelles remarques sur les singularités des fonctions harmoniques de trois variables, *C. r. Acad. sci. Paris*, 254 (1962), 3482—3483.

[21] — Sur les singularités des fonctions harmoniques de trois variables, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 254 (1962), 3304—3305.

[22] — и Шиффер (Schiffer M.), Kernel functions and conformal mapping, *Compos. Math.*, 8 (1951), 205—249.

[23] — — Properties of solutions of a system of partial differential equations, Studies in mathematics and mechanics presented to Richard von Mises, Academic Press, Inc., New York, 1954, 79—87.

[24] Бибербах (Bieberbach L.), Lehrbuch der Funktionentheorie, B. II, Leipzig, 1931.

[25] Гартогс (Hartogs F.). Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach

Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, *Math. Ann.*, **62** (1906), 1—88.

[26] Джильберт (Gilbert R. P.), Singularities of three-dimensional harmonic functions, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 1243—1255.

[27] — On the singularities of generalized axially symmetric potentials, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **6** (1960), 171—176.

[28] — Singularities of solutions of the wave equation in three dimensions, *J. reine angew. Math.*, 205 (1960), 75—81.

[29] — A note on harmonic functions in $(p+2)$ variables, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **8** (1961), 223—227.

[30] — On the geometric character of singularity manifolds for harmonic functions in three variables: I, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 8 (1961), 352—360.

[31] — On harmonic functions of four variables with rational p_1^4 associates, Technical note, Univ. of Maryland, 1962.

[32] — Composition formulas in generalized axially symmetric potential theory, Technical note, Univ. of Maryland, 1962.

[33] — Some properties of generalized axially symmetric potentials, *Amer. J. Math.*, 84 (1962), 475—484.

[34] — On generalized axially symmetric potentials, *J. reine angew. Math.* (в печати).

[35] Дингас (Djnghas A.), Vorlesungen über Funktionentheorie, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **110** (1961).

[36] Динес (Dienes P.), The Taylor series, New York, 1957.

[37] Крейсциг (Wreyszig E.), On singularities of solutions of partial differential equations in three variables, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2 (1958), 151—159.

[38] — Zur Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen mit funktionentheoretischen Methoden, *Z. Angew. Math. Mech.*, **40** (1960), 334—342.

[39] — On regular and singular harmonic functions of three variables, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **4** (1960), 352—370.

[40] — On a class of integral operators of Bergman — Whittaker type, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **10** (1962), 242—248.

[41] — Kanonische Integraloperatoren zur Erzeugung harmonischer Funktionen von vier Veränderlichen, *Arch. Math.*, **1963** (в печати).

[42] Курант и Гильберт (Courant R. and Hilbert D.), Methoden der mathematischen Physik, 1, 2. Springer, Berlin, 1931. (Русский перевод: Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, М., 1951, т. 2, М., 1951; см. также Курант Р., Уравнения с частными производными, изд-во «Мир», М., 1964.)

[43] Маделунг (Madelung E.), Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, **4**, Springer-Verlag, 1935.

[44] Мандельбройт (Mandelbrojt S.), Théorème général fournissant l'argument des points singuliers situés sur le cercle de convergence d'une série de Taylor, *C. r. Acad. sci. Paris,* **204** (1937), 1456—1458.

[45] Мизе (Mises R. de), La base géométrique du théorème de M. Mandelbrojt sur les points singulier d'une fonction analytique, *C. r. Acad. sci. Paris,* **205**, 1353—1355.

[46] Митчелл (Mitchell J.), Some properties of solutions of partial differential equations given by their series development, *Duke Math. J.,* **13** (1946), 87—104.

[47] — Representation theorems for solutions of linear partial differential equations in three variables, *Arch. Rat. Mech. Anal.,* **3** (1959), 439—453.

[48] — Properties of harmonic functions of three real variables given by Bergman — Whittaker operators, *Canadian J. Math.,* **15** (1963), 157—168.

[49] Неванлинна (Nevanlinna R.). Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929.

[50] Сакс и Зигмунд (Saks S. and Zygmund A.). Analytic functions, Monografje Matematyczne, **28** (1952).

[51] Уайт (White A.). Singularities of harmonic functions of three variables generated by Whittaker — Bergman operators, *Ann. Polon. Math.,* **10** (1961), 81—100.

[52] — Singularities of a harmonic function of three variables given by its series development, *Pacific J. Math.,* 1963 (в печати).

[53] Уиттекер (Whittaker E. T.), On the partial differential equations of mathematical physics, *Math. Ann.,* **57** (1903), 333—355.

[54] — и Ватсон (Watson G. N.). A course of modern analysis, Cambridge, 1940. (Русский перевод: Уиттекер Е. и

Ватсон Дж., Курс современного анализа, ч. 1, М., 1962, ч. 2, М., 1963.)

[55] Франк и Мизес (Frank P. and von Mises R.), Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 1, 2. Braunschweig, 1930. (Русский перевод т. II: Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, М., 1937.)

[56] Шиффер и Ситяк (Schiffer M. and Siciak J.), Transfinite diameter and analytic continuation of functions of two complex variables, Studies in Mathematical Analysis and Related Topics, Essays in honor of G. Pólya, Stanford University Press, 1962, pp. 341—359.

[57] Эрдейи (Erdelyi A.), Singularities of generalized axially symmetric potentials, *Comm. Pure Appl. Math.*, **9** (1956), 403—414.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 5
Предисловие 9
Введение 11

Глава I. Дифференциальные уравнения с целыми коэффициентами с двумя независимыми переменными 25

§ 1. Представление решений уравнений с частными производными 25
§ 2. Интегральный оператор первого рода . . . 28
§ 3. Дальнейшие представления интегральных операторов 33
§ 4. Представление оператора первого рода посредством интегралов 37
§ 5. Свойства интегрального оператора первого рода 40
§ 6. Некоторые дальнейшие свойства интегрального оператора первого рода 42
§ 7. Дифференциальное уравнение $\Delta_2 V+F(r^2)V=0$ 51
§ 8. Интегральные операторы экспоненциального типа 57
§ 9. Дифференциальное уравнение $\Delta_2\psi+N(x)\psi=0$ 60
§ 10. Дифференциальные уравнения высшего порядка 64

Глава II. Гармонические функции трех переменных 68

§ 1. Предварительные сведения 68
§ 2. Характеристическое пространство $\mathfrak{C}_3$ 69
§ 3. Гармонические функции, B_3-ассоциированные функции которых рациональны 75

§ 4. Периоды 85
§ 5. Связь между коэффициентами разложения гармонической функции в ряд и ее особенностями 91
§ 6. Другой тип интегральных представлений гармонических функций 95
§ 7. Поведение в целом функций класса $S(E, \zeta_0, \zeta_1)$ с рациональной ассоциированной $f(\zeta)$ 98

...а III. Дифференциальные уравнения с тремя переменными 103

§ 1. Интегральный оператор, порождающий решения уравнения $\Delta_3\psi + A(r^2)\,X\cdot\nabla\psi + C(r^2)\psi = 0$ 103
§ 2. Разложение в ряд решений уравнения $\Delta_3\psi + A(r^2)\,X\cdot\nabla\psi + C(r^2)\psi = 0$ 106
§ 3. Интегральный оператор, порождающий решения уравнения $\Delta_3\psi + F(y, z)\psi = 0$ 110
§ 4. Второй интегральный оператор, порождающий решения уравнения $\Delta_3\psi + F(y, z)\psi = 0$ 114
§ 5. Интегральный оператор, порождающий решения уравнения $\psi_x + \psi_{yy} + \psi_{zz} + F(y, z)\psi = 0$ 117
§ 6. Интегральный оператор, порождающий решения уравнения $g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi + h^\mu\nabla_\mu\varphi + k\varphi = 0$ 121

Глава IV. Системы дифференциальных уравнений 129

§ 1. Гармонические векторы от трех переменных. Предварительные сведения 129
§ 2. Гармонические векторы в целом и их представление посредством интегралов 131
§ 3. Интегралы от гармонических векторов 136
§ 4. Связь интегралов от алгебраических гармонических векторов трех переменных с интегралами от алгебраических функций одного комплексного переменного 140
§ 5. Обобщение теорем о вычетах на случай уравнения $\Delta_3\psi + F(r^2)\psi = 0$ 145
§ 6. Оператор, порождающий решения системы уравнений в частных производных 152

Глава V. Уравнения смешанного типа и эллиптические уравнения с сингулярными и неаналитическими коэффициентами 166

§ 1. Введение. Упрощенный случай уравнения смешанного типа 166
§ 2. Обобщение представления (1.12) решений уравнения (1.6) 169
§ 3. Оператор (1.11б) в общем случае 175
§ 4. Порождающие функции, аналогичные решениям гипергеометрического уравнения 181
§ 5. О решении задачи Коши в целом 185
§ 6. Обобщенные уравнения Коши — Римана . . . 188
§ 7. Дифференциальное уравнение $\Delta_2\psi+N(x)\psi=0$ с новым типом особенности функции N . . . 192
§ 8. Интегральный оператор для уравнений с неаналитическими коэффициентами 195

Литература 202

Приложение 219

Операторы, порождающие решения некоторых дифференциальных уравнений с тремя переменными, и их свойства 219

О проблеме коэффициентов в теории систем линейных уравнений с частными производными 252

Применение интегральных операторов при изучении алгебры гармонических функций трех переменных и проблемы коэффициентов 279

Литература к приложению 298

Редактор *Н. Плужникова*
Технический редактор *Ф. Джатиева* Корректор *В. И. Киселева*

Сдано в производство 9/IV 1964 г. Подписано к печати 19/VIII 1964 г.
Бумага 84×108$^1/_{32}$=4,8 бум. л. 15,8 печ. л. Уч.-изд. л. 13,10. Изд. № 1/2312.
Цена 76 коп. Зак. 327 (Темплан 1964 г. изд-ва ИЛ, пор. № 22)

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
«Главполиграфпрома» Государственного
комитета Совета Министров СССР по печати. Измайловский проспект, 29.