ХАРЬКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА
КНИГА ВТОРАЯ

Акад. С. Н. БЕРНШТЕЙН

О МНОГОЧЛЕНАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ В КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

ОНТИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ НКТП
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ
Харьков 1937

Библиографическое описание этого издания помещено в „Летописи Укр. печати“ „Карточном реперт.“ и других указателях Укр. Книжн Палаты.

5—4

СОДЕРЖАНИЕ

Ответственный редактор *Н. И. Ахиезер*
Литредактор *Н. Н. Макарова*
Техредактор *О. А. Кадашевич*
Корректор *А. И. Драгоманова*

Типография Государственного научно-технического издательства Украины
Киев, Крещатик, № 42.

Уполномоч. Главлита № 882. Зак. № 734. Тираж 2000—$8^1/_4$ лист.

ВВЕДЕНИЕ

1. Следуя по указанному П. Чебышевым пути, теорию ортогональных многочленов, соответствующих данному весу в определенном интервале, связывают обычно с теорией непрерывиых дробей.

Однако, этим путем не удается решить некоторые важные задачи, как например, задачу о представлении (асимптотическом) ортогонального многочлена, имеющем место во всем рассматриваемом интервале.

Метод, который я тут развиваю, состоит из комбинаций элементарного алгебраического приема редукции с переходом к пределу, основанным на теореме Weierstrass'a относительно приближенного представления непрерывных функций посредством многочленов.

Исходная точка этого метода, который я также применил в моих „Leçons sur les propriétés extrémales“, читанных в Сорбонне в 1923 г. (collection E. Borel), для изучения минимального уклонения в конечном или бесконечном интервале многочлена, умноженного на данную положительную функцию, находится в моей старой заметке „Sur quelques propriétés asymptotiques des polynomes“ (Comptes rendus, 1er décembre 1913).

Таким образом устанавливается, что при очень общих условиях *ортогональные многочлены асимптотически равны многочленам, наименее уклоняющимся от нуля относительно надлежаще выбранного веса*. Однако, есть важные случаи, когда это равенство уже невозможно; мы проведем специальное исследование некоторых из этих более трудных случаев, что побудит нас пополнить в некоторых отношениях классическую теорию полиномов Jacobi.

2. Асимптотическое равенство, о котором идет речь, является обобщением соответствующего свойства тригонометрических полиномов Чебышева.

В самом деле, известно, что тригонометрические полиномы Чебышева

$$T_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2^n}=\frac{\cos n\theta}{2^{n-1}},$$

---

[1] См. также Journal de Mathématiques, t. IX, 1930, p. 127 и t. X, 1931, p. 219.

где $x = \cos\theta$, обладают двумя свойствами:

1. Эти полиномы наименее уклоняются от нуля в интервале $(-1, +1)$ среди всех полиномов вида

$$(2) \qquad P_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = \\ = \frac{\cos n\theta}{2^{n-1}} + c_1 \cos \overline{n-1}\,\theta + \ldots + c_n,$$

и это минимальное уклонение равно

$$(3) \qquad L_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

2. Из всех рассматриваемых полиномов эти полиномы имеют также наименьшее квадратичное интегральное уклонение относительно веса

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

которое оказывается равным

$$4) \qquad H_n^{(2)} = \int_{-1}^{+1} T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 n\theta d\theta}{2^{2n-2}} = \frac{\pi}{2^{2n-1}};$$

полиномы $T_n(x)$, следовательно, ортогональны относительно веса

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

и мы имеем

$$(5) \qquad H_n^{(2)} = \frac{\pi}{2} L_n^2.$$

3. Нетрудно также показать, что полиномы Чебышева $T_n(x)$ минимизируют интеграл

$$(6) \qquad I_n = \int_{-1}^{+1} f[|P_n(x)|] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

какова бы ни была неубывающая и конвексная функция $f(x)$.

Действительно, функция $f(z)$ обладает по предположению тем свойством, что

$$f\left(\left|\frac{y+z}{2}\right|\right) \leqq f\left(\frac{|y|+|z|}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}[f(|y|)+f(|z|)],$$

причем последний знак равенства может быть отброшен, если допустить сначала, что конвексность имеет место в узком смысле. Отсюда следует при этом дополнительном условии, что полином $P_n(x)$, обращающий в минимум интеграл I_n, должен быть единственным, так как если два полинома $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ дают одно и то же значение этому интегралу, то полином $\frac{P_n(x)+Q_n(x)}{2}$ приведет к меньшему значению.

С другой стороны, имеем, что при всяком φ

$$I_n = \frac{1}{2}\int_{-\pi+\varphi}^{\pi+\varphi} f[\,|P_n(\cos\theta)|\,]\,d\theta, \tag{6 bis}$$

следовательно, в частности, взяв $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ и замечая, что

$$P_n\left[\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right] = \frac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta + c_1'\cos\overline{n-1}\,\theta + \ldots + c_n',$$

мы должны иметь тождественно (так как полином, дающий минимум, единственен)

$$P_n\left[\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right] = P_n(\cos\theta). \tag{7}$$

Это равенство выражает, что $P_n(\cos\theta)$ имеет период $\frac{2\pi}{n}$; следовательно, $P_n(\cos\theta)$ сводится к единственному члену [1][1]

$$P_n(\cos\theta) = \frac{\cos n\theta}{2^{n-1}} = T_n(x).$$

Доказательство окончено для случая, когда $f(z)$ конвексна в узком смысле; для того, чтобы перейти к общему случаю, достаточно заметить, что всякая функция, конвексная в широком смысле, может быть рассматриваема как предельная для функций конвексных в узком смысле; следовательно, в этом случае также никакой полином $P_n(x)$ не сможет дать интегралу I_n величину меньшую, чем

$$\int_{-1}^{+1} f(\,|T_n(x)|\,)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Примечание. Можно доказать при помощи такого же рассуждения, что

$$a_0\cos n\theta + b_0\sin n\theta$$

дает наименьшую величину интегралу

$$\int_0^{2\pi} f\,|a_0\cos n\theta + b_0\sin n\theta + a_1\cos\overline{n-1}\,\theta + \ldots + b_{n-1}\sin\theta + a_n|\,d\theta,$$

какова бы ни была функция $f(z)$ неубывающая и конвексная.

---

[1] Квадратные скобки указывают номер примечаний автора, помещенных в конце книги.

В частности, полагая

$$f(z) = |z|^l \qquad (l \geqq 1),$$

получаем непосредственно, на основании сказанного, что минимум $H_n^{(l)}$ интеграла

$$\int_{-1}^{+1} |P_n(x)|^l \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

равен

$$(8) \qquad H_n^{(l)} = \int_0^\pi \left|\frac{\cos n\theta}{2^{n-1}}\right|^l d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)} L_n^l.$$

4. Основным вопросом, направляющим все наше настоящее исследование, является задача об определении того, как и в какой мере доказанное выше общее свойство тригонометрических полиномов распространяется на ортогональные полиномы, соответствующие произвольному весу.

Мы изучим наиболее детально ортогональные полиномы $R_n(x)$, соответствующие весу

$$(9) \qquad q(x) = \frac{t(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

где функция $t(x)$, которую мы назовем тригонометрическим весом, непрерывна и удовлетворяет в интервале $(-1, +1)$ условию

$$(10) \qquad 0 < \lambda < t(x) < L,$$

λ и L — определенные константы. Мы увидим затем, что многие наши заключения останутся справедливыми и при более общих условиях, тогда как другие уже не будут иметь места. Таким образом представляется более удобным не утомлять с самого начала внимания этими обобщениями, которые найдут свое место в дальнейшем систематическом изложении, и сохранить на время предположение о непрерывности $t(x)$ и условие (10).

Обозначим через $L_n[t(x)]$ минимум уклонения произведения

$$(11) \qquad t(x) P_n(x).$$

на отрезке $(-1, +1)$ и через $H_n^{(l)}[t(x)]$ минимум интеграла

$$(12) \qquad \int_{-1}^{+1} [t(x)\,|P_n(x)|\,]^l \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

где $P_n(x)$ есть произвольный полином (2) степени (n), коэфициент при наивысшей степени которого равен 1. Будет показано, что равенство (8) обобщается асимптотически и что

$$H_n^{(l)}[t(x)] \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)}\left\{L_n[t(x)]\right\}^l, \tag{13}$$

по крайней мере, для $l \geqq 2$, причем ортогональные полиномы $R_n(x)$, минимизирующие интеграл (12) при $l=2$ (соответствующие тригонометрическому весу $t^2(x)$), минимизируют асимптотически интеграл (12) при $l>2$, а также уклонение произведения (11).

Этот результат является следствием такой теоремы:

Ортогональные и нормированные полиномы $\overline{R}_n(x)$ относительно тригонометрического веса $t(x)$, т. е. определяемые условиями

$$\int_{-1}^{+1} \overline{R}_n(x)\overline{R}_m(x)\frac{t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \text{если} \quad n \gtrless m \tag{14}$$

и

$$\int_{-1}^{+1} \overline{R}_n^2(x)\frac{t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \tag{15}$$

имеют асимптотическое выражение

$$\overline{R}_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t(x)}}\cos(n\theta+\psi), \tag{16}$$

где $\theta = \arccos x$ и

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\ln t(z) - \ln t(x)}{z-x}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\,dz, \tag{17}$$

справедливое равномерно на всем отрезке $(-1, +1)$, если функция $t(x)$ [удовлетворяющая (10)] удовлетворяет еще условию

$$|t(x+\delta) - t(x)|\,|\ln\delta|^{1+\varepsilon} < k \qquad (\varepsilon > 0, \quad k > 0). \tag{18}$$

5. Доказательство этой теоремы займет центральное место в первой части нашей работы; но, допуская справедливость формулы (16), мы выведем из нее теперь же равенство (13). Для случая $l=2$ это утверждение очевидно, так как полином $R_n(x)$, умноженный на $\sqrt{t(x)}$, достигает в $\overline{n+1}$ точках с последовательно противоположными знаками свой модуль

максимум, асимптотически равный $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, так как ψ обращается в нуль на двух концах ± 1. Следовательно, $\overline{R_n}(x)\sqrt{t(x)}$ дает асимптотически минимальное уклонение произведению $\overline{P_n}(x)\sqrt{t(x)}$, где $\overline{P}_n(x)$ есть произвольный полином степени n, имеющий тот же член наивысшей степени, что и $\overline{R_n}(x)$; следовательно, равенство (13) для $l = 2$ [соответствующее равенству (5) для тригонометрических полиномов] вытекает из того, что

$$R_n^2(x) = H_n^{(2)}\left[\sqrt{t(x)}\right]\overline{R}_n^2(x), \tag{19}$$

где $R_n(x)$ есть ортогональный полином, соответствующий тому же тригонометрическому весу, не нормированный, но у которого коэфициент при x^n равен 1.

Для того, чтобы получить равенство (13), когда $l > 2$, заметим сначала, что (ψ — непрерывно)

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{\pi}|\cos(n\theta+\psi)|^l d\theta = \int_0^{\pi}|\cos n\theta|^l d\theta = \tag{20}$$

$$= \int_0^{\pi}|\cos\theta|^l d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)}.$$

Действительно, взяв произвольно малое положительное число δ, разделим интервал $(0, \pi)$ на достаточно малые части точками: $0, b_1, b_2, \ldots, b_{h-1}, \pi$ так, чтобы колебание ψ в каждой части было меньше $\frac{\delta}{2l\pi}$; тогда, если ψ_k некоторое значение ψ в k-ой части, получим, что

$$\left|\int_0^{\pi}|\cos(n\theta+\psi)|^l d\theta - \sum_1^h\int_{b_{k-1}}^{b_k}|\cos(n\theta+\psi_k)|^l d\theta\right| < \frac{\delta}{2},$$

и, с другой стороны, можно взять n достаточно большим для того, чтобы разность между

$$\int_{b_{k-1}}^{b_k}|\cos(n\theta+\psi_k)|^l d\theta = \int_{b_{k-1}+\frac{\psi_k}{n}}^{b_k+\frac{\psi_k}{n}}|\cos n\theta|^l d\theta$$

и

$$\int_{b_{k-1}}^{b_k}|\cos n\theta|^l d\theta$$

была по абсолютной величине меньше, чем $\frac{\delta}{2h}$; следовательно,

$$\left| \int\limits_0^{\kappa} |\cos(n\theta+\psi)|^l d\theta - \int\limits_0^{\pi} |\cos n\theta|^l d\theta \right| < \delta.$$

Итак, равенство (13) будет доказано, если мы покажем, что для всякого полинома $\overline{P}_n(x)$ достаточно высокой степени n, начинающегося тем же членом, что и $\overline{R}_n(x)$, имеет место

$$\int\limits_{-1}^{+1} |\overline{P}_n(x)|^l (\sqrt{t(x)})^l \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \tag{21}$$
$$-\int\limits_{-1}^{+1} |\overline{R}_n(x)|^l (\sqrt{t(x)})^l \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} > -\varepsilon,$$

как бы ни было мало данное положительное число ε.

Но каковы бы ни были $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $m = \frac{l}{2} > 1$, имеем

$$y^m - z^m \geqq mz^{m-1}(y-z);$$

следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{+1} \{|\overline{P}_n(x)\sqrt{t(x)}|^l - |\overline{R}_n(x)\sqrt{t(x)}|^{l}\} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \geqq$$
$$\geqq \frac{l}{2} \int\limits_{-1}^{+1} \{\overline{P}_n^2(x)\,t(x) - \overline{R}_n^2(x)\,t(x)\} \frac{[\overline{R}_n(x)\sqrt{t(x)}]^{l-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Достаточно, значит, доказать, что для n достаточно большого

$$\int\limits_0^{\pi} \{\overline{P}_n^2(x) - \overline{R}_n^2(x)\}\, t(x)\, |\cos(n\theta+\psi)|^{l-2} d\theta > -\varepsilon. \tag{22}$$

Для этого, разлагая $|\cos(n\theta+\psi)|^{l-2}$ в тригонометрический ряд

$$|\cos(n\theta+\psi)^{l-2}| = A_0 + A_2\cos 2(n\theta+\psi) + \ldots +$$
$$+ A_k \cos k(n\theta+\psi) + \varepsilon_k,$$

где $A_0 > 0$, мы можем взять k (независимо от n) достаточно большим, чтобы иметь $|\varepsilon_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, применяя формулы (16) и (17), где $t(x)$ заменено на $t^p(x)$, имеем

$$I_p = \int_0^\pi \{\overline{P}_n^2(x) - \overline{R}_n^2(x)\}\, t(x) \cos p\,(n\theta + \psi)\, d\theta$$

$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi [t(x)]^{1+\frac{p}{2}}\, \overline{R}_{pn,\,p}(x) \left[\overline{P}_n^2(x) - \overline{R}_n^2(x)\right] d\theta,$$

где $\overline{R}_{pn,\,p}(x)$ обозначает ортогональный нормированный полином степени pn, соответствующий тригонометрическому весу $t^p(x)$. Следовательно, при зафиксированном $p \geqq 2$, I_p стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$; это очевидно при $p=2$ вследствие уравнений ортогональности для $\overline{R}_{2n,\,2}$ и того факта, что $\overline{P}_n^2(x) - \overline{R}_n^2(x)$ есть полином степени не выше $2n-1$; точно также, если $Q_k(x)$ есть полином степени $h < n$, достаточно высокой, чтобы $Q_h(x)$ отличался сколь угодно мало от $[t(x)]^{1-\frac{p}{2}}$, мы получим для $p > 2$

$$(23) \qquad \int_0^\pi [t(x)]^p\, \overline{R}_{pn,\,p}(x)\, Q_k(x) \left[\overline{P}_n^2(x) - \overline{R}_n^2(x)\right] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

откуда следует, что I_p стремится к нулю, так что для достаточно большого n

$$|I_p| < \frac{\varepsilon}{2k},$$

и неравенство (22) доказано.

6. *Примечание.* Мы доказали выше асимптотическое равенство (13) только при условии (18), но соображения, которые нам позволят в дальнейшем избавиться от этого ограничения в случае $l=2$, применимы при всяком l; таким образом все обобщения равенства (13), соответствующие $l=2$, будут справедливы для $l>2$.

Рассуждение, которое мы провели, непригодно для $l<2$; между тем, без сомнения, равенство (13) существует для всех значений $l \geqq 1$. Для разрешения вопроса достаточно было бы изучить интересный частный случай $l=1$.

Изучение этого последнего случая позволит обобщить (асимптотически) еще другие свойства тригонометрических полиномов $T_n(x)$; не останавливаясь долго на этом вопросе, ограничимся несколькими общими замечаниями.

Определение полиномов $Q_{n-1}(x)$ степени $n-1$, минимизирующих интеграл

$$\int_{-1}^{+1} |f(x) - Q_{n-1}(x)|\, q(x)\, dx,$$

где вес $q(x) > 0$ и функция $f(x)$ заданы, приводит к системе n уравнений[1]

$$(24)\qquad \left\{ \int_{-1}^{\alpha_1} x^p q(x)\,dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^p q(x)\,dx + \ldots \pm \int_{\alpha_k}^{1} x^p q(x)\,dx = 0 \right.$$

$$(p = 0,\ 1, \ldots,\ n-1),$$

где α_k суть точки, числом не меньше n, в которых $f(x) - Q_{n-1}(x)$ меняет знак; мы получим, в частности, $k = n$ всякий раз, когда $f^{(n)}(x)$ не меняет знака на отрезке $(-1, +1)$. Тогда для всякой функции $f(x)$ рассматриваемого класса искомые полиномы $Q_{n-1}(x)$ будут интерполяционными полиномами Lagrange'а, соответствующими вполне определенной системе узлов[2], которые являются корнями полинома (2) степени n, минимизирующего интеграл

$$\int_{-1}^{+1} |p_n(x)|\, q(x)\,dx.$$

В частности, основываясь на результатах, полученных в § 3, имеем

$$p_n(x) = T_n(x),$$

когда $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; следовательно, в этом случае,

$$\alpha_h = \cos \frac{\pi\left(h - \frac{1}{2}\right)}{n}.$$

Одинаково легко показать, что для $q(x) = 1$ имеем

$$\alpha_h = \cos \frac{h\pi}{n+1},$$

и

$$p_n(x) = \frac{1}{n+1}\, T'_{n+1}(x)$$

---

[1] Для случая $q(x) = 1$ решение системы (24) было дано впервые Коркиным и Золотаревым в статье „Sur un certain minimum“ (Nouvelles Annales de Mathématiques, t. XII, 1873).

[2] Единственность системы решений уравнений (24) доказывается следующим образом. Допустим, что существует еще одна система $\beta_1, \ldots, \beta_n$, удовлетворяющая (24). Интервал $(-1, +1)$ разделится тогда точками α_i, β_j на $2n+1$ отрезков (из которых не больше $\overline{n-1}$ могут иметь длину нуль). Из этих отрезков будет p таких, для которых знак перед интегралом в (24) будет тот же, что и в соответствующем уравнении, составленном с β, и p_1 из этих отрезков будут обладать обратным свойством. По крайней мере, одно из чисел p или p_1 не превосходит n: пусть, например, $p \leqq n$. Интеграл от произвольного полинома $R_{n-1}(x)$ степени $n-1$, взятый по этим p интервалам со знаками, налагаемыми уравнением (24), должен равняться нулю, что невозможно, потому что можно расположить корни $Q_{n-1}(x)$ так, чтобы сделать положительной часть интеграла, соответствующую каждому из этих p интервалов.

будет тогда полиномом, произведение которого на $\sqrt{1-x^2}$ наименее уклоняется от нуля в интервале $(-1, +1)$; в этом последнем случае, когда все формулы являются не только асимптотическими, но и точными, имеем также, в согласии с (13),

$$H_n^{(1)}(\sqrt{1-x^2}) = 2L_n(\sqrt{1-x^2}).$$

Доказательство этого можно найти в моей статье[1] „Sur une propriété des polynomes de Tchebycheff“, в которой я получил, как следствие, что из всех полиномов $p_n(x)$ вида (2) полином $T_n(x)$ имеет минимальную полную вариацию в интервале $(-1, +1)$; эта минимальная вариация равна, следовательно, $\frac{n}{2^{n-2}}$.

Замечу, наконец, что две системы узлов, которые мы отметили, как соответствующие минимумам интегралов от модулей, приводят к формулам интерполяции, которые употреблялись различными авторами. Первая играла существенную роль в моем исследовании о наилучшем приближении $|x|$, где я ее применил к функции $f(x)$, равной $+1$ или -1, в зависимости от того, будет ли $x > 0$ или $x < 0$. В общем виде, эта интерполяционная формула была предметом важного исследования M. Riesz'a, который, в частности, получил при ее помощи изящное доказательство теоремы о максимуме модуля производной конечной тригонометрической суммы[2].

Вторая формула, принадлежащая Lagrange'у, тесно связана с разложением в тригонометрический ряд Fourier, и ее сходимость существенно такого же порядка, как и сходимость последнего.

---

[1] Comptes rendus de l'Académie de l'U. R. S. S., 1927.

[2] C. R. Acad. Sc., 1914.

Глава I.

Алгебраические основы

1. Пусть $P_n(x)$ ортогональные полиномы, соответствующие весу

$$q_0(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{25}$$

предложим себе составить ортогональные полиномы $R_{n,\,h}(x)$, соответствующие весу

$$q_h(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, t_h(x), \tag{26}$$

где

$$t_h(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{a_h}\right) \tag{27}$$

полином степени h, положительный в интервале $(-1, +1)$; коэфициент при наивысшей степени в $P_n(x)$ и в $R_{n,\,h}(x)$ всегда берется равным единице.

Легко проверить тогда, что[1]

$$R_{n,\,h}(x)\, t_h(x) = \frac{(-1)^h}{a_1 a_2 a_3 \dots a_h} \, \frac{\Delta_n(x_1, a_2, \dots, a_h, x)}{\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_h)}, \tag{28}$$

где

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_h) = \begin{vmatrix} P_n(a_1) & \dots P_n(a_h) \\ P_{n+1}(a_1) & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ P_{n+h-1}(a_1) & \dots P_{n+h-1}(a_h) \end{vmatrix} \tag{29}$$

и

$$\Delta_n(a_1, \dots, a_h, x) = \begin{vmatrix} P_n(a_1) & \dots P_n(a_h) & P_n(x) \\ P_{n+1}(a_1) & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ P_{n+h}(a_1) & \dots\dots & P_{n+h}(x) \end{vmatrix} \tag{29 bis}$$

---

[1] Частный случай этой формулы был указан G. Szégö в работе „Entwickelung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems“, (Mathem. Ann., t. 82, 1921, p. 188—212).

так как, в силу (28), $R_{n,h}(x)$ есть, действительно, полином степени n, у которого член с наивысшей степенью равен x^n, и вторая часть равенства (28) линейна и однородна относительно полиномов $P_n(x), \dots, P_{n+h}(x)$.

Следовательно, употребляя обозначения, принятые во введении, имеем

(30)
$$H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)f_0(x)}\right]=$$
$$=\int_{-1}^{+1} R_{n,h}^2(x)\frac{f_0(x)\,t_h(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\int_{-1}^{+1} R_{n,h}(x)\,x^n\frac{f_0(x)\,t_h(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{1}{a_1a_2\dots a_h}\int\frac{\Delta_{n+1}(a_1,a_2,\dots,a_h)}{\Delta_n(a_1,a_2,\dots,a_h)}P_n(x)\,x^n\,\frac{f_0(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$$
$$=\frac{\Delta_{n+1}(a_1,a_2,\dots,a_h)}{a_1a_2\dots a_h\Delta_n(a_1,\dots,a_h)}\,H_n^{(2)}\left[\sqrt{f_0(x)}\right].$$

Само собой понятно, что в случае, когда несколько корней равны друг другу $a_1=a_2=\dots=a_k$, соответствующие колонны наших детерминантов будут содержать вместо значений полиномов значения их последовательных производных до порядка $k-1$.

2. Мы займемся в этой главе только случаем $f_0(x)=1$; мы имеем, следовательно,

$$P_n(x)=T_n(x).$$

Далее, так как все корни a_k функции $t_h(x)$ находятся вне интервала $(-1, +1)$, то мы имеем асимптотическую формулу

(31)
$$T_n(a_k)\sim\left(\frac{\rho_k}{2}\right)^n,$$

где модуль выражения

$$\rho_k=a_k+\sqrt{a_k^2-1}$$

равен полусумме осей эллипса, проходящего через a_k и имеющего фокусами $(-1, +1)$.

Следовательно,

$$\Delta_n(a_1, a_2,\dots, a_h)\sim\left(\frac{\rho_1\rho_2\dots\rho_h}{2^h}\right)^n\left[\frac{\rho_2-\rho_1}{2}\,\frac{\rho_3-\rho_1}{2}\dots\frac{\rho_h-\rho_{h-1}}{2}\right]$$

и, по (30)

$$(32)\qquad H_n^{(2)}[\sqrt{t_h(x)}] \sim \left(\frac{\rho_1}{2a_1}\right)\dots\left(\frac{\rho_h}{2a_h}\right)H_n^{(2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2n-1}}\left(\frac{\rho_1}{2a_1}\right)\dots\left(\frac{\rho_h}{2a_h}\right).$$

Легко проверить благодаря сделанному выше замечанию, что формула (32) остается в силе и в том случае, когда корни a_k не являются различными.

3. Из формулы (28) мы можем точно также получить асимптотическую формулу для $R_{n,h}(x)$; мы имеем, каково бы ни было x,

$$(33)\qquad R_{n,h}(x)\,t_h(x) \sim \frac{(-1)^h}{a_1a_2\dots a_h}\,\frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & T_n(x) \\ \frac{\rho_1}{2} & \dots & T_{n+1}(x) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^h & \dots & T_{n+h}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{\rho_1}{2} & \dots & \frac{\rho_h}{2} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^{h-1} & \dots & \left(\frac{\rho_h}{2}\right)^{h-1} \end{vmatrix}}$$

В случае, когда x находится вне интервала, $T_n(x)$, можно заменить его асимптотическим выражением $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n$; следовательно,

$$(34)\qquad R_{n,h}(x) \sim \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{2^{n+h}} \times$$

$$\times\frac{(x+\sqrt{x^2-1}-\rho_1)\dots(x+\sqrt{x^2-1}-\rho_h)}{(x-a_1)\dots(x-a_h)} =$$

$$= \frac{\rho_1\rho_2\dots\rho_h(x+\sqrt{x^2-1})^n}{2^n(\rho_1-x+\sqrt{x^2-1})\dots(\rho_h-x+\sqrt{x^2-1})},$$

где последняя формула делает очевидным, что множитель при $(x+\sqrt{x^2-1})^n$ остается конечным, так как его знаменатель никогда не обращается в нуль.

4. Для случая, когда x является точкой интервала $(-1, +1)$, полагая $x=\cos\theta$ и замечая, что числитель второй части равенства (33) в силу тождества $T_n(x)=\frac{e^{in\theta}+e^{in\theta}}{2^n}$ есть сумма двух

детерминантов Vandermonde'а, мы получим асимптотическую формулу

$$
(35)\qquad R_{n,h}(x)\,t_h(x) \sim \frac{(-1)^h}{2^{n+h}a_1\ldots a_h}\left[e^{in\theta}\left(e^{i\theta}-\rho_1\right)\ldots\left(e^{i\theta}-\rho_h\right)+\right.
$$
$$
\left.+e^{-in\theta}\left(e^{-i\theta}-\rho_1\right)\ldots\left(e^{-i\theta}-\rho_h\right)\right].
$$

Но так как величины ρ_k или действительны, или попарно сопряжены, то оба произведения сопряжены, и мы имеем

$$
(36)\quad \begin{cases}
(-1)^h\left(e^{i\theta}-\rho_1\right)\ldots\left(e^{i\theta}-\rho_h\right) \\
=\sqrt{\left[(x-\rho_1)^2+1-x^2\right]\ldots\left[(x-\rho_h)^2+1-x^2\right]}\,e^{i(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_h)} \\
=\sqrt{2^h a_1\rho_1\ldots a_h\rho_h\left(1-\dfrac{x}{a_1}\right)\ldots\left(1-\dfrac{x}{a_h}\right)}\,e^{i(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_h)} \\
(-1)^h\left(e^{-i\theta}-\rho_1\right)\ldots\left(e^{-i\theta}-\rho_h\right) \\
=\sqrt{2^h a_1\rho_1\ldots a_h\rho_h\left(1-\dfrac{x}{a_1}\right)\ldots\left(1+\dfrac{x}{a_h}\right)}\,e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_h)},
\end{cases}
$$

где α_k — аргумент $\rho_k-e^{i\theta}$, когда ρ_k действительно, и $\alpha_k+\alpha_{k+1}$ аргумент произведения $(e^{i\theta}-\rho_k)(e^{i\theta}-\rho_{k+1})$, когда ρ_k и ρ_{k+1} сопряжены, полагая во всех случаях (поскольку $\rho_k^2+1=2a_k\rho_k$)

$$
(37)\qquad \cos\alpha_k=\frac{\rho_k-x}{\sqrt{2\rho_k(a_k-x)}},\qquad \sin\alpha_k=\frac{-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2\rho_k(a_k-x)}}.
$$

Когда x изменяется от -1 до $+1$, сумма

$$
(38)\qquad \psi=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_h
$$

принимает свое первоначальное значение, которое без ограничения общности может быть принято равным нулю или π, так как

$$
(37\ \text{bis})\qquad \operatorname{tg}\alpha_k=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-\rho_k}
$$

не обращается в бесконечность в рассматриваемом интервале.[1]

Из (35), (36) и (38) мы получим, что

$$
(39)\qquad R_{n,h}(x)\sqrt{t_h(x)} \sim \frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{M_h}\cos(n\theta+\psi),
$$

где

$$
(40)\qquad M_h=\frac{\rho_1}{2a_1}\,\frac{\rho_2}{2a_2}\ldots\frac{\rho_h}{2a_h}.
$$

---

[1] В случае, когда ρ_k и ρ_{k+1} сопряжены,

$$
\operatorname{tg}(\alpha_k+\alpha_{k+1})=\frac{\sqrt{1-x^2}\,(2x-\rho_k-\rho_{k+1})}{2x^2-(\rho_k+\rho_{k+1})\,x+\rho_k\rho_{k+1}-1}
$$

может стать бесконечным, но между его полюсами нет корня, так как знаменатель положителен для $x=\dfrac{\rho_k+\rho_{k+1}}{2}$ как и для $x=\pm1$.

Следовательно, минимальное уклонение произведения

$$P_n(x)\sqrt{t_h(x)},$$

где $P_n(x)$ некоторый полином вида (2), реализуется асимптотически ортогональным полиномом $R_{n,h}(x)$, причем

$$I_n\left[\sqrt{t_h(x)}\right] \sim \frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{M_h}. \tag{41}$$

Принимая во внимание соотношение (32), которое пишется в виде

$$H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right] \sim \frac{\pi}{2^{2n-1}} M_h, \tag{32 bis}$$

имеем также

$$H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right] \sim \frac{\pi}{2} L_n^2\left[\sqrt{t_h(x)}\right] \tag{42}$$

при всяком полиноме $t_h(x)$.

Примечание, сделанное выше, позволяет отбросить в предыдущих асимптотических формулах ограничение, что корни $t_h(x)$ простые. Так, в частности, когда $t_h(x)=p_k^2(x)$ есть полный квадрат, формула (41) идентична (вплоть до обозначений) с той которую я дал в моей статье „Sur quelques propriétés asymptotiques des polynomes“,[1] где я указал в первый раз асимптотическое выражение (39).

5. Мы распространим теперь формулы (41) и (32 bis) [и следовательно, формулу (42), которая из них вытекает на случай, когда t_h равномерно стремится к некоторой непрерывной функции[2] $t(x)$.

Для этого заметим, что неравенство

$$1-\varepsilon < \frac{t(x)}{t_h(x)} < 1+\varepsilon \tag{43}$$

влечет за собой

$$1-\varepsilon < \frac{H_n^{(2)}\left[\sqrt{t(x)}\right]}{H_n^2\left[\sqrt{t_h(x)}\right]} < 1+\varepsilon, \quad \sqrt{1-\varepsilon} < \frac{L_n\left[\sqrt{t(x)}\right]}{L_n\left[\sqrt{t_k(x)}\right]} < \sqrt{1+\varepsilon},$$

каково бы ни было n. Следовательно, ввиду (32 bis), можно взять n достаточно большим, чтобы иметь

$$\frac{\pi}{2^{2n-1}} M_h\,(1-2\varepsilon) < H_n^{(2)}\left[\sqrt{t(x)}\right] < \tag{44}$$

$$< \frac{\pi}{2^{2n-1}} M_h\,(1+2\varepsilon).$$

---

[1] C. R. Ac. Sc., 1-er décembre 1913. См. также мои „Leçons sur les propriétés extrémales“, p. 15—19.

[2] См. § 6 первой главы моих „Leçons sur les propriétés extrémales“.

Следовательно, если $t'_{h_1}(x)$ есть другой полином, близкий к $t(x)$ и также удовлетворяющий (43), то, так как соответствующая ему величина M'_{h_1} должна также удовлетворять (44), мы будем иметь

$$M_h \frac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon} < M'_{h_1} < M_h \frac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon},$$

откуда следует, что существует вполне определенное число

$$M = \lim_{h=\infty} M_h = \lim \frac{\rho_1}{2a_1} \cdots \frac{\rho_h}{2a_h}, \tag{45}$$

независящее от способа выбора последовательности полиномов $t_h(x)$, стремящихся равномерно к функции $t(x)$. В силу (44) имеем

$$H_n^{(2)}[\sqrt{t(x)}] \sim \frac{\pi}{2^{2n-1}} M \tag{46}$$

и также

$$L_n[\sqrt{t(x)}] \sim \frac{1}{2^{n-1}} \sqrt{M}.$$

Итак, соотношение (42) существует, если функцию $t_h(x)$ заменить некоторой непрерывной функцией $t(x)$, удовлетворяющей (10), и его можно переписать также в виде

$$H_n^{(2)}[t(x)] \sim \frac{\pi}{2} L_n^2[t(x)]. \tag{42 bis}$$

Из формулы (45) получается немедленно функциональное соотношение [1]

$$M[t(x)\,s(x)] = M[t(x)]\,M[s(x)]. \tag{47}$$

Что касается других следствий из формулы (45), то я отсылаю к моей статье [2] „Sur la distribution des zéros des polynomes tendant vers une fonction positive".

6. Соотношение (47) дает возможность предвидеть, что $\ln M$ является линейным функционалом функции $\ln t(x)$, от которой он зависит.

Вид этого функционала легко найти.

Будем исходить из формулы (40). Имеем

$$\ln M_h = \sum_1^h \ln \frac{\rho_k}{2a_k} = \sum_1^h \ln \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{a_h^2}}}{2};$$

---

[1] C. R. Acad. Sc., t. 186, p. 840.

[2] Journal de Mathématiques, 1929, vol. II du Jubilé de MM. P. Appell et E. Picard, p. 327.

применяя метод вычетов Cauchy к этой сумме, симметричной относительно корней $t_h(x)$, получаем

$$\ln M_h = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{t_h'(z)}{t_h(z)} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}}{2}\right) dz,$$

где контур интегрирования C образован: 1) отрезком $(\varepsilon i, \varepsilon i+1)$; 2) полуокружностью очень маленького радиуса ε, имеющей центр в точке 1; 3) отрезком $(-\varepsilon i+1, -\varepsilon i-1)$; 4) полуокружностью радиуса ε, имеющей центр в точке -1; 5) отрезком $(\varepsilon i-1, \varepsilon i)$.

Интегрируя по частям, найдем

$$\ln M_h = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \ln t_h(z) \frac{1}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\sqrt{z^2-1}} \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \ln t_h(z) \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\right] dz = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\ln t_h(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Так как интеграл взят между вещественными пределами, он будет иметь смысл, когда $t_h(x) \to t(x)$, и, следовательно, имеем для всякой положительной непрерывной функции $t(x)$ формулу

$$\ln M = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\ln t(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \tag{48}$$

По (46) имеем также

$$L_n\left[\sqrt{t(x)}\right] \sim \frac{1}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx} \tag{49}$$

и

$$H_n^{(2)}\left[\sqrt{t(x)}\right] \sim \frac{\pi}{2^{2n-1}} e^{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx}. \tag{50}$$

Формула (50) была установлена G. Szégő,[1] который даже показал ее справедливость и при общем предположении, что ограниченная функция $\ln t(x)$ интегрируема в смысле Lebesgue'а.

7. Формула (49), которая существенно вытекает из равномерной применимости асимптотической формулы (39) во всем интервале $(-1, +1)$, не находится у Szégő.

Кроме того, распространение формулы (49) на разрывные функции более ограничено, и поэтому интегрируемости в смысле Lebesgue'а безусловно недостаточно.

---

[1] Loc. cit.

Действительно, рассмотрим функцию $t(x)=1$ во всех точках, где $\frac{1}{\pi}\arccos x$ рационален, и $t(x)=\frac{1}{4}$ во всех других точках. Формула (49) приведет к той же величине $\frac{1}{2^n}$ для $L_n[\sqrt{t(x)}]$, как и в случае, если бы было тождественно $t(x)=\frac{1}{4}$. Но полином $p_n(x)$, который наименее уклоняется от нуля в $\overline{n+1}$ точках $\cos\frac{k\pi}{n}$, где по предположению $t(x)=1$, обращается в Чебышевский полином $T_n(x)$; следовательно, точная величина $L_n[\sqrt{t(x)}]$ есть, при всяком n, $\frac{1}{2^{n-1}}$, что противоречит формуле (49).

Для того чтобы формула (49) [а значит, также и формула (42)] была верна, достаточно, чтобы функция $\ln t(x)$ была ограничена и интегрируема в смысле Riemann'a.

Действительно, это условие эквивалентно утверждению, что существуют две системы непрерывных функций $\tau_h(x)$ и $\sigma_h(x)$ таких, что

$$L \geqq \tau_h(x) > t(x) > \sigma_h(x) \geqq \lambda > 0$$

и что

$$(51)\qquad \lim_{h=\infty}\int_{-1}^{+1}\frac{\ln\tau_h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\lim_{h=\infty}\int_{-1}^{+1}\frac{\ln\sigma_h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{+1}\frac{\ln t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Но для достаточно большого n имеем, как бы ни было мало ε,

$$\frac{1-\varepsilon}{2^{n-1}}M[\tau_h(x)]<L_n[\tau_h(x)]<\frac{1+\varepsilon}{2^{n-1}}M[\tau_h(x)],$$

$$\frac{1-\varepsilon}{2^{n-1}}M[\sigma_h(x)]<L_n[\sigma_h(x)]<\frac{1+\varepsilon}{2^{n-1}}M[\sigma_h(x)];$$

следовательно, так как

$$L_n[\tau_h(x)]>L_n[t(x)]>L_n[\sigma_h(x)],$$

то

$$\frac{1+\varepsilon}{2^{n-1}}M[\tau_h(x)]>L_n[t(x)]>\frac{1-\varepsilon}{2^{n-1}}M[\sigma_h(x)],$$

откуда вытекает, ввиду (51), что формула (49) справедлива для нашей функции $t(x)$.

8. В предыдущих формулах рассматривается постоянный интервал $(-1, +1)$; при этих условиях $M[t(x)]$ есть константа. Но если произвести линейную замену переменных $z = \frac{x+1}{2}u$, то интервал $(-1, +1)$ перейдет в (o, u) и минимальное уклонение $L_n[t(z), u]$ произведения

$$t(z)(z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n),$$

на отрезке (o, u) будет асимптотически дано формулой

$$L_n[t(z), u] \sim 2\left(\frac{u}{4}\right)^n M(u), \tag{52}$$

где

$$\ln M(u) = F(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^u \frac{\ln t(z)\,dz}{\sqrt{z(u-z)}}. \tag{53}$$

Следовательно, функция $\Phi(z) = \ln t(z)$ связана с $F(z)$ интегральным уравнением Abel'я

$$F(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\Phi(ux)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(u\sin^2\theta)\,d\theta. \tag{53 bis}$$

Стало быть имеем, наоборот,

$$\Phi(u) = F(o) + u\int_0^1 \frac{F'(ux)\,dx}{\sqrt{1-x}},$$

по крайней мере, в случае если $F(u)$ имеет производную.

9. Тот же прием, который нам послужил для представления $\ln M$ в виде определенного интеграла, может быть применен для преобразования выражения (34) и суммы ψ, которая входит в (39) и представляется формулой (38). Займемся сначала этой последней. Имеем по (37 bis)

$$\psi = \frac{i}{2}\sum_1^k \ln\frac{x-\rho_k-\sqrt{x^2-1}}{x-\rho_k+\sqrt{x^2-1}} \tag{54}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_C \frac{t_h'(z)}{t_h(z)} \ln\frac{z+\sqrt{z^2-1}-x+\sqrt{x^2-1}}{z+\sqrt{z^2-1}-x-\sqrt{x^2-1}}\,dz,$$

где контур интеграции C тот же, что и в § 6.

Отсюда, интегрируя по частям,

$$(55)\qquad \psi=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{C}\ln t_h(z)\left[\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}-x+\sqrt{x^2-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}-x-\sqrt{x^2-1}}\right]\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C}\ln t_h(z)\left[\frac{\sqrt{x^2-1}}{(z+\sqrt{z^2-1}-x)^2-(x^2-1)}\right]\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C}\ln t_h(z)\frac{\sqrt{x^2-1}}{z+\sqrt{z^2-1}-2x+(z-\sqrt{z^2-1})}\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{C}\ln t_h(z)\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\frac{dz}{z-x}.$$

Так как $\psi=0$, когда $t_h(z)$ константа, то (55) можно представить в виде

$$\psi=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{C}\frac{\ln t_h(z)-\ln t_h(x)}{z-x}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}dz;$$

следовательно, стягивая контур в двойной отрезок $(-1,\ +1)$, находим окончательно

$$(56)\qquad \psi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_h(z)-\ln t_h(x)}{z-x}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}dz.$$

Выражение (34), имеющее место для точек x внешних по отношению к интервалу $(-1,\ +1)$, преобразованное тем же методом, дает

$$(57)\qquad R_{n,h}(x)\sim\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\ln t_h(z)\,dz}{\sqrt{1-z}}}.$$

По предыдущему, формулы (39), (56) и (57) обоснованы только в случае, если $t_h(x)$—некоторый полином. Распространенне этих формул является менее простым, чем формул (32) и (41). Следующая глава посвящена этому исследованию.

Глава II

Распространение асимптотических выражений для ортогональных полиномов

1. Начнем с вычисления ошибки наших асимптотических формул в алгебраическом случае. Для этой цели мы докажем следующее предложение.

Лемма. Пусть

$$S=\begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{1,1} & \ldots & 1+\varepsilon_{1,h} \\ \rho_1+\varepsilon_{2,1} & \ldots & \rho_h+\varepsilon_{2,h} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \rho_1^{h-1}+\varepsilon_{h,1} & \ldots & \rho_h^{h-1}+\varepsilon_{h,h} \end{vmatrix},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \rho_1 & \ldots & \rho_h \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \rho_1^{h-1} & \ldots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}.$$

Если для всех значений k и i имеем $|\rho_k-\rho_i|>\delta|\rho_k|$, где $|\rho_k|\geqq\rho>1$ и $|\varepsilon_{i,k}|<\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2h}$, то

$$(58)\qquad \left|\frac{S}{\Delta}-1\right|<2h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h},$$

когда $2h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h}\leqq 1$.

Действительно, $S-\Delta$ состоит из суммы детерминантов вида

$$I_k=\begin{vmatrix} \varepsilon_{1,1} & \varepsilon_{1,2} & \ldots & \varepsilon_{1,k} & 1 & \ldots & 1 \\ \varepsilon_{2,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \rho_{k+1} & \ldots & \rho_h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{h,1} & \ldots & \ldots & \varepsilon_{h,k} & \rho_{k+1}^{h-1} & \ldots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix},$$

число которых для каждого значения $k\leqq h$ равно C_h^k. После сокращения общих множителей имеем

$$\frac{I_k}{\Delta}=\frac{E_k}{\Delta_k},$$

где

$$\Delta_k = \pm(\rho_1 - \rho_2) \dots (\rho_{k-1} - \rho_k) f(\rho_1) \dots f(\rho_k),$$

полагая

$$f(\rho) = (\rho - \rho_{k+1}) \dots (\rho - \rho_h).$$

Что касается E_k, то оно будет по абсолютной величине меньше $\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2hk} k!$, умноженного на сумму $\sum$ модулей всех миноров последних $h-k$ колонн определителя I_k, лишенных произведения $(\rho_{k+2} - \rho_{k+1}) \dots (\rho_h - \rho_{h-1})$, которые обращаются тогда в однородные симметрические функции от $\rho_{k+1}, \dots \rho_h$, все коэфициенты которых положительны; следовательно, эта сумма Σ не уменьшится, если мы заменим $\rho_{k+1}, \dots \rho_h$ соответственно их модулями $|\rho_i| = R_i$.

Стало быть

$$\sum \leqq \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & R_{k+1} & \dots & R_h \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & \dots & R_h^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^{h-1} & \dots & \dots & \dots & R_{k+1}^{h-1} & \dots & R_h^{h-1} \end{vmatrix}}{|(R_{k+1} - R_{k+2}) \dots (R_{h-1} - R_h)|} =$$

$$= [(1 + R_{k+1}) \dots (1 + R_h)]^k,$$

так как детерминанты

$$\begin{vmatrix} 1 & p_1 & \frac{p_1(p_1-1)}{2} \dots \\ 1 & p_2 & \frac{p_2(p_2-1)}{2} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & p_k & \frac{p_k(p_k-1)}{2} \dots \end{vmatrix} = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{e>i} (p_e - p_i)$$

целые и положительные, если $p_1 < p_2, \dots, < p_k$ целые не отрицательные числа.

Следовательно,

$$\left|\frac{E_k}{\Delta_k}\right| < \frac{k! [(R_{k+1} + 1) \dots (R_h + 1)]^k}{\left|f(\rho_1) \dots f(\rho_k)\right| \delta^{\frac{h(k-1)}{2}}} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2hk}$$

$$< k! \left[\frac{R_{k+1} + 1}{R_{k+1}} \dots \frac{R_h + 1}{R_h}\right]^k \left(\frac{\delta^{h + \frac{k+1}{2}}}{2^{2h}}\right)^k$$

$$< k!\left(\frac{\delta^{h+\frac{k+1}{2}}}{2^{h+k}}\right)^{k} < k!\left(\frac{\delta}{2}\right)^{hk},$$

поскольку $\delta < 2$.

Стало быть, сумма всех частных одного индекса k меньше, чем

$$h(h-1)\dots(h-k+1)\left(\frac{\delta}{2}\right)^{hk} < \left[h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h}\right]^{k},$$

и окончательно

$$\left|\frac{S}{\Delta}-1\right| < h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h}\left[1+h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h}+\dots\right] < 2h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h}.$$

Следствие. Если

(59)
$$\delta = \frac{2}{\rho^{\frac{n}{h}}},$$

то

(60)
$$\left|\frac{S}{\Delta}-1\right| < \frac{2h}{\rho^{n}}.$$

2. Подобно предыдущему, положим

$$S_i = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{1,1} & \dots & 1+\varepsilon_{1,h} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \rho_1^{i-1}+\varepsilon_{i-1,1} & \dots & \rho_h^{i-1}+\varepsilon_{i-1,h} \\ \rho_1^{i+1}+\varepsilon_{i+1,1} & \dots & \rho_h^{i+1}+\varepsilon_{i+1,h} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \rho_1^{h}+\varepsilon_{h,1} & \dots & \rho_h^{h}+\varepsilon_{h,h} \end{vmatrix}$$

и через A_i обозначим детерминант, который получается из S_i, когда все $\varepsilon_{ik} = 0$. При условиях предыдущей леммы имеем тогда

(61)
$$\left|\frac{S_i - A_i}{\Delta}\right| < 2(|\rho_1|+1)(|\rho_2|+1)\dots$$
$$\dots(|\rho_h|+1)\,h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h},$$

так как, пользуясь вычислениями, сделанными для доказательства этой леммы, получаем немедленно, что

$$\left|\frac{S_t - A_i}{\Delta}\right| < \sum_{k=1}^{k=h} h(h-1)\dots(h-k+1)\frac{[(R_{k+1}+1)\dots(R_h+1)]^{k+1}}{\left|f(\rho_1)\dots f(\rho_k)\right|\delta^{\frac{k(k-1)}{2}}}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2hk}$$
$$< (R_1+1)\dots(R_h+1)\sum_{k=1}^{h} h(h-1)\dots(h-k+1)\left(\frac{\delta}{2}\right)^{hk};$$

откуда следует (61).

Давая δ частные значения, как в неравенствах (59), мы выведем из (61) неравенства, которые получатся из (60) умножением на $(|\rho_1|+1)\dots(|\rho_h|+1)$.

Следовательно, принимая во внимание (60) и (61), мы выводим из (28) в случае $f_0(x)=1$ для $-1 \leqq x \leqq 1$, что

$$\sqrt{t_h(x)}\left|2^{n+h-1}R_{n,h}(x)-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \cos n\theta \\ \rho_1 & \cdot & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ \rho_1^h & & \dots & \cos(n+h)\theta \end{vmatrix}}{(x-a_1)\dots(x-a_h)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \dots & & \cdot \\ \rho_1^{h-1} & \dots & & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}}\right|$$

$$\leqq \sqrt{t_h(x)}\left|2^{n+h-1}R_{n,h}(x)\left(1-\frac{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{\rho_1^{2n}} & \dots & 1+\frac{1}{\rho_h^{2n}} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_1^{h-1}+\frac{1}{\rho_1^{h+2n-1}} & \dots & \rho_h^{h-1}+\frac{1}{\rho_h^{h+2n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \rho_1 & \dots & \rho_h \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_1^{h-1} & \dots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}}\right)\right|$$

$$+\left|\frac{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{\rho_1^{2n}} & \dots & \cos n\theta \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_1^h+\frac{1}{\rho_1^{2n+h}} & \dots & \cos(n+h)\theta \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & \dots & \cos n\theta \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_1^h & \dots & \cos(n+h)\theta \end{vmatrix}}{\sqrt{(a_1-x)\dots(a_h-x)}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \rho_1 & \dots & \rho_h \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_1^{h-1} & \dots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}\sqrt{a_1a_2\dots a_h}}\right|$$

$$< \frac{2^{h+1}h}{\rho^n}\sqrt{L}+\left|\frac{(|\rho_1|+1)\dots(|\rho_h|+1)}{\sqrt{(x-a_1)a_1\dots(x-a_h)a_h}}\right|\frac{2h(h+1)}{\rho^n},$$

так как

$$|R_{n,h}(x)\sqrt{t_h(x)}| \leqq L_n[\sqrt{t_h(x)}] \leqq \frac{\sqrt{L}}{2^{n-1}}.$$

Следовательно, при ψ и M_h, заданных соответственно формулами (38) и (40), имеем

$$(62)\qquad | 2^{n-1} R_{n,h}(x) \sqrt{t_h(x)} - \sqrt{M_h} \cos(n\theta + \psi) |$$
$$< \frac{2h}{\rho^n} \left[\sqrt{L} + (h+1)\, 2^h \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \right] < \frac{h(h+2)\, 2^h}{\rho^n} \frac{L}{\sqrt{\lambda}}.$$

Вводя нормированный полином

$$(19\,\mathrm{bis})\qquad \overline{R}_{n,h}(x) = \frac{1}{\sqrt{H_n^{(2)}[\sqrt{t_h(x)}]}} R_{n,h}(x),$$

мы получим сначала из (32 bis) асимптотическое выражение

$$(63)\qquad \overline{R}_{n,h}(x) \sqrt{t_h(x)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\theta + \psi_h),$$

где ψ_h дано формулой (56); приняв во внимание (62) и величину ошибки в (32 bis), находим затем

$$(64)\qquad \left| \overline{R}_{n,h}(x) \sqrt{t_h(x)} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\theta + \psi_h) \right| <$$
$$< \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{L}{\lambda} \frac{h(h+3)\, 2^h}{\rho^n}.$$

и

$$(64\,\mathrm{bis})\qquad \left| \overline{R}_{n,h}(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi t_h(x)}} \cos(n\theta + \psi_h) \right| <$$
$$< \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{L}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{h(h+3)\, 2^h}{\rho^n}.$$

3. В случае, когда x находится вне отрезка $(-1, +1)$, вычисление ошибки формулы (34) или (57) (что одно и то же) следует также из предыдущей леммы. Так, имеем (для $h > 0$)

$$(65)\qquad \left| \left(\frac{2}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right)^n R_{n,h}(x) - e^{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x} + 1 \right) \frac{\ln t_h(z)\, dz}{\sqrt{1-z^2}}} \right| \leqq$$
$$\leqq \left| \left(\frac{2}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right)^n R_{n,h}(x) \left(1 - \frac{\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{\rho_1^{2n}} & \ldots\, 1 + \frac{1}{\rho_h^{2n}} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \rho_1^{h-1} + \frac{1}{\rho_1^{2n+h-1}} \ldots & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \rho_1^{h-1} & \ldots\, \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}} \right) \right| +$$

$$+\left|\frac{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{\rho_1^{2n}} & \ldots & 1+\frac{1}{\rho_h^{2n}} & 1+\frac{1}{R^{2n}} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \rho_1^h+\frac{1}{\rho_1^{2n+h}} & \ldots & \ldots & R^h+\frac{1}{R^{2n+h}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_1^{h-1} & \ldots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_1^h & \ldots & R^h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ \rho_1^{h-1} & & \ldots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}}\right|\frac{1}{2^h|(x-a_1)\ldots(x-a_h)|}=$$

$$=\left|\left(\frac{2}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^n R_{n,h}(x)\right| O\left(\frac{h}{r^n}\right),$$

где r наименьшее из двух чисел ρ и $|R|=|x+\sqrt{x^2-1}|$, если также

$$|R-\rho_i|>\frac{2|R|}{\rho^{\frac{n}{h}}}, \qquad |R-\rho_i|>\frac{2|\rho_i|}{\rho^{\frac{n}{h}}}.$$

Таким образом, если $|R|>\rho$, то относительная ошибка асимптотического выражения $R_{n,h}(x)$ [или $\bar{R}_{n,h}(x)$] во всех внешних точках (без исключения) имеет равномерно порядок $\frac{h}{\rho^n}$, так как разность (65) регулярна вне отрезка $(-1, +1)$.

4. В предыдущем исследовании мы должны были рассматривать полиномы $t_h(x)$, имеющие различные и достаточно удаленные корни.

Неравенства (64), (64 bis), (65) доказаны только при условии, что

(59) $$\delta=\frac{2}{\rho^{\frac{n}{h}}},$$

где δ является нижней границей $\left|\frac{\rho_k}{\rho_l}-1\right|$, причем $k \gtreqless l$ принимают все значения от 1 до h.

Для того чтобы иметь возможность воспользоваться этими неравенствами, мы должны показать, что без значительного изменения величины данных полиномов $s_h(x)$, близких к непрерывной функции, их можно заменить другими, корни которых будут удовлетворять (59).

С этой целью мы докажем такое предложение:

Лемма. Пусть

$$s_h(x)=\left(1-\frac{x}{b_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{b_h}\right)$$

полином степени h, такой, что $b_k+\sqrt{b_k^2-1}=r_k$ удовлетворяет единственному условию $|r_k|\geqq\rho>1$. Возможно построить полином

$$t_h(x)=\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{a_k}\right)$$

такой, что

$$|\rho_k|=|a_k+\sqrt{a_k^2-1}|\geqq\rho>0, \quad |\rho_k-\rho_l|>\delta\rho_k,$$

удовлетворяющий условию, что на $(-1, +1)$ будет

$$\left|\ln\frac{s_h(x)}{t_h(x)}\right|<\frac{4h^2\delta\rho^3}{(\rho-1)^3}, \quad \text{где} \quad \delta\leqq\frac{3}{32h}\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^3. \tag{66}$$

Действительно, пусть

$$\delta_0\leqq\frac{3}{32}\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^3$$

данная положительная величина; опишем вокруг всех точек $r_1, r_2, \dots, r_{h-1}, r_h$ как центров круги радиусов соответственно

$$|\delta_0 r_1|\leqq\dots\leqq|\delta_0 r_h|;$$

сохраним последовательно только те из этих кругов, которые, взятые в указанном порядке, не имеют центров в кругах, сохраненных ранее, и которые содержат, по крайней мере, одну точку с бо́льшим индексом, не содержащуюся в предыдущих кругах. Точки r_k, принадлежащие более чем одному кругу, будут отнесены к кругу меньшего индекса.

Если к кругу с центром r_k отнесено число точек $m_k\geqq 2$, то мы можем перенести m_k-1 из этих точек $r_l (l>k)$ на концентрическую окружность радиуса $\frac{\delta_0}{3}|r_k|$ таким образом, что их взаимные расстояния будут по меньшей мере равны $\frac{\delta_0}{3}|r_k|$, когда

$m_k \leqq 3$, и будут превосходить $\frac{2\delta_0 |r_k|}{3} \sin \frac{\pi}{2(m_k - 1)}$ для $m_k > 3$, а модули $|\rho_l|$ останутся не меньшими чем $|r_k|$.

Преобразованный полином $t_h(x)$ получится, если мы заменим в $s_h(x)$ корни b_l, соответствующие точкам r_l, перенесенным в ρ_l, величинами

$$a_l = \frac{1}{2}\left(\rho_l + \frac{1}{\rho_l}\right).$$

Так как

$$\left|\rho_l - r_l\right| < \frac{4}{3}\delta_0 \left|r_l\right|$$

и

$$\left|a_l - b_l\right| < \frac{1}{2}\left|\rho_l - r_l\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\rho_l - r_l}{\rho_l r_l}\right| < |\rho_l - r_l|,$$

то

$$\left|a_l - b_l\right| < \frac{4}{3}\delta_0 \left|r_l\right|.$$

Следовательно, для $x = \cos\theta$ имеем

$$\frac{1 - \frac{x}{b_l}}{1 - \frac{x}{a_l}} = 1 + x\frac{b_l - a_l}{b_l(a_l - x)} = 1 + \varepsilon,$$

где

$$|\varepsilon| < \frac{8\delta_0}{3|b_l|}\left|\frac{r_l}{\left(|\rho_l|^{\frac{1}{2}} - \left|\frac{1}{\rho_l}\right|^{\frac{1}{2}}\right)^2}\right|$$

$$< \frac{8\delta_0 \rho}{3(\rho - 1)^2}\left|\frac{r_l}{b_l}\right| < \frac{16}{3}\frac{\delta_0 \rho^3}{(\rho^2 - 1)(\rho - 1)^2} < \frac{8\delta_0 \rho^3}{3(\rho - 1)^3} < \frac{1}{4},$$

так как

$$|a_l - x| = \left|\frac{1}{2}\left(\rho_l + \frac{1}{\rho_l}\right) - \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right|$$

$$= \frac{1}{2}|\rho_l - e^{i\theta}|\left|1 - \frac{1}{\rho_l e^{i\theta}}\right| \geqq \frac{1}{2}\frac{(|\rho_l| - 1)^2}{|\rho_l|}.$$

Поэтому

$$\left|\ln\frac{1 - \frac{x}{b_l}}{1 - \frac{x}{a_l}}\right| < \frac{4\delta_0 \rho^3}{(\rho - 1)^3}$$

и наконец

$$\left|\ln\frac{s_h(x)}{t_h(x)}\right| < \frac{4h\delta_0\rho^3}{(\rho-1)^3};$$

следовательно, полагая $\delta=\frac{\delta_0}{h}$, мы видим, что корни a_k будут удовлетворять требуемым условиям, и что действительно

$$\left|\ln\frac{s_h(x)}{t_h(x)}\right| < \frac{4h^2\delta\rho^3}{(\rho-1)^3}. \tag{66}$$

Это неравенство, очевидно, тем более выгодно, чем больше ρ, но в дальнейшем мы должны будем напротив предполагать ρ близким к единице; таким образом, для упрощения письма мы можем считать $\rho \leqq \sqrt[3]{2}$ и использовать вместо (66) формулу

$$\left|\ln\frac{s_h(x)}{t_h(x)}\right| < \frac{8h^2\delta}{(\rho-1)^3}, \tag{67}$$

которая несомненно верна при предположении, что $\frac{h\delta}{(\rho-1)^3}$ стремится к нулю.

Пусть, в частности

$$\rho=(ch)^{\frac{1}{2\sqrt{h}}}, \tag{68}$$

где c — постоянная, и будем неограниченно увеличивать h; тогда

$$\rho-1 \sim \frac{\ln h}{2\sqrt{h}}. \tag{68 bis}$$

Следовательно, при условии (68), имеем, по (67),

$$|s_h(x)-t_h(x)| = O\left[\frac{h^{\frac{7}{2}}\delta}{\ln^3 h}\right]. \tag{69}$$

Если прибавить условие (59), которое напишется в виде

$$\delta=\frac{2}{(ch)^{\frac{n}{2h\sqrt{h}}}}, \tag{70}$$

то получим

$$|s_h(x)-t_h(x)| = O\left[\frac{(ch)^{\frac{1}{2}\left(7-\frac{n}{h\sqrt{h}}\right)}}{\ln^3 h}\right] \tag{69 bis}$$

и, наконец, предполагая

(71) $$n \geqq h^2,$$

(72 $$|s_h(x) - t_h(x)| = O\left[\frac{(ch)^{\frac{1}{2}(7-\sqrt{h})}}{\ln^3 h}\right].$$

5. С другой стороны, мы должны найти порядок величины разности между ортогональными полиномами $\overline{R}_n(x)$, соответствующими тригонометрическому весу $t(x)$, и ортогональными полиномами $\overline{R}_{n,h}(x)$, соответствующими полиномам $t_h(x)$, к которым, по предыдущему, применимы формула (63) и неравенства (64) и (65).

Мы имеем следующую теорему:

Теорема. Если на $(-1, +1)$

(73) $$|t(x) - t_h(x)| < \varepsilon,$$

где $t_h(x)$ полином степени h, удовлетворяющий (10) и такой, что $\rho_k \geqq \rho > 1$, то имеем равномерно

(74) $$|\overline{R}_n(x) - \overline{R}_{n,h}(x)| = O(\varepsilon \ln n)$$

на $(-1, +1)$, когда $\varepsilon \ln n$, также как

(59) $$\delta = \frac{2}{\rho^{\frac{n}{h}}} < \left|\frac{\rho_k}{\rho_l} - 1\right|,$$

стремятся к нулю вместе с $\dfrac{1}{n}$.

Действительно, положим

(75) $$\overline{R}_n(x) = \sum_0^n a_k \overline{R}_{k,h}(x),$$

где

$$a_k = \int_{-1}^{+1} \frac{\overline{R}_n(x)\overline{R}_{k,h}(x)t_h(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon'(x)\overline{R}_n(x)\overline{R}_{k,h}(x)d\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[k < n; \quad |\varepsilon'(x)| < \varepsilon],$$

в виду (73) и ортогональности $\overline{R}_n(x)$ по отношению к $t(x)$, и

(76) $$a_n = \sqrt{\frac{H_n^{(2)}[\sqrt{t(x)}]}{H_n^{(2)}[\sqrt{t_h(x)}]}} = 1 + \alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = O(\varepsilon);$$

имеем

$$(77)\qquad \sum\nolimits_n = \sum_{0}^{n-1} a_k \overline{R}_{k,h}(x) =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon'(z) \sum\limits_{0}^{n-1} \overline{R}_{k,h}(x) \overline{R}_{k,h}(z) \overline{R}_n(z)\, dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right]}{H_{n-1}^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right]}} \int_{-1}^{+1} \frac{\overline{R}_{n,h}(x)\overline{R}_{n-1,h}(z) - \overline{R}_{n,h}(z)\overline{R}_{n-1,h}(x)}{(x-z)\sqrt{1-z^2}} \times$$

$$\times \varepsilon'(z) \overline{R}_n(z)\, dz.$$

Рассмотрим интеграл

$$(78)\qquad I_n = \int_{-1}^{+1} \left| \frac{\overline{R}_{n,h}(x)\overline{R}_{n-1,h}(z) - \overline{R}_{n,h}(z)\overline{R}_{n-1,h}(x)}{(x-z)\sqrt{1-z^2}} \right| dz.$$

При условии (59) выражение K_n в числителе этого интеграла будет бесконечно мало отличаться от

$$C_n = \frac{2}{\pi\sqrt{t_h(x)\, t_h(z)}} \left[\cos(n\theta + \psi_h)\cos\left(\overline{n-1}\,\theta_0 + \psi_h^0\right)\right.$$

$$\left. - \cos\left(n\theta_0 + \psi_h^0\right)\cos\left(\overline{n-1}\,\theta + \psi_h\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{t_h(x)\, t_h(z)}} \left\{ \sin\left[(2n-1)\frac{\theta+\theta_0}{2} + \psi_h + \psi_h^0\right] \sin\frac{\theta_0 - \theta}{2} \right.$$

$$\left. + \sin\left[(2n-1)\frac{\theta_0 - \theta}{2} + \psi_h^0 - \psi_h\right] \sin\frac{\theta_0 + \theta}{2} \right\},$$

где θ_0 и ψ_h^0 значения θ и ψ_h, соответствующие z.

Нужно вычислить порядок величины разности $K_n - C_n$. С этой целью, положим

$$C_n' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 & \cos n\theta \\ \rho_1 & & \ldots \rho_h & \cos(n+1)\theta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_1^h & \ldots & & \cos(n+h)\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \cos(n-1)\theta_0 \\ \rho_1 \ldots & & \ldots & \cos n\theta_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_1^h \ldots & & \ldots & \cos(n+h-1)\theta_0 \end{vmatrix} -}{2^{2h}(a_1 a_2 \ldots a_h)^2 \begin{vmatrix} 1 & \ldots 1 \\ \rho_1 & \ldots \rho_h \\ \cdot & \cdot \\ \rho_1^{h-1} & \ldots \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}^2 t_h(x)\, t_h(z),}$$

$$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \cos n\theta_0 \\ \rho_1 & & \ldots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_1^h & & \ldots & \cos(n+h)\theta_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \cos(n-1)\theta \\ \rho_1 & \cdot & \ldots & \cos n\theta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_1^h & & \ldots & \ldots \end{vmatrix}}{2^{2h}(a_1a_2\ldots a_h)^2 \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \rho_1 & \ldots & \rho_h \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_1^{h-1} & \ldots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}^2 t_h(x)\, t_h(z)}, \tag{Z}$$

так что

$$C_n' = \frac{\pi M_h}{2} C_n.$$

С другой стороны, полагая

$$K_n' = \frac{\begin{vmatrix} T_n(a_1) & \ldots & \cos n\theta \\ T_{n+1}(a_1) & \ldots & \cos(n+1)\theta \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n+h}(a_1) & \ldots & \cos(n+h)\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{n-1}(a_1) & \ldots & \cos(n-1)\theta_0 \\ \ldots & \ldots & \cos n\theta_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n+h-1}(a_1) & \ldots & \cos(n+h-1)\theta_0 \end{vmatrix}}{2^{2h}(a_1a_2\ldots a_h)^2 \begin{vmatrix} T_n(a_1) & \ldots & T_n(a_h) \\ T_{n+1}(a_1) & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{n+h-1}(a_1) & \ldots & T_{n+h-1}(a_h) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{n-1}(a_1) & \ldots & T_{n-1}(a_h) \\ T_n(a_1) & \ldots & T_n(a_h) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{n+h-2}(a_1) & \ldots & T_{n+h-2}(a_h) \end{vmatrix} t_h(x)\, t_h(z}$$

$$-\frac{\begin{vmatrix} T_n(a_1) & \ldots & \cos n\theta_0 \\ T_{n+1}(a_1) & \ldots & \cos(n+1)\theta_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n+h}(a_1) & \ldots & \cos(n+h)\theta_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{n-1}(a_1) & \ldots & \cos(n-1)\theta \\ T_n(a_1) & \ldots & \cos n\theta \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n+h-1}(a_1) & \ldots & \cos(n+h-1)\theta \end{vmatrix}}{2^{2h}(a_1a_2\ldots a_h)^2 \begin{vmatrix} T_n(a_1) & \ldots & T_n(a_h) \\ T_{n+1}(a_1) & \ldots & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n+h-1}(a_1) & \ldots & T_{n+h-1}(a_h) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{n-1}(a_1) & \ldots & T_{n-1}(a_h) \\ T_n(a_1) & \ldots & T_n(a_h) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n+h-2}(a_1) & \ldots & T_{n+h-2}(a_h) \end{vmatrix} t_h(x)\, t_h(z)}$$

имеем по (28)

$$K_n' = 2^{2n-3}\left[R_{n,h}(x)\, R_{n-1,h}(z) - R_{n,h}(z)\, R_{n-1,h}(x)\right]$$

$$= 2^{2n-3}\sqrt{H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right] H_{n-1}^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right]}\, K_n = \frac{\pi M_h}{2} K_n \left[1 + O\left(\frac{h}{\rho^n}\right)\right].$$

Вычисляя детерминанты числителя при помощи разложения по элементам последней колонны, имеем

$$C'_n = \sum_{k=0}^{h} \sum_{i=0}^{h} P_i P_k \left[\cos(n+i)\theta \cos(n+k-1)\theta_0 - \right.$$

$$\left. - \cos(n+k-1)\theta \cos(n+i)\theta_0\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{h} \sum_{i=0}^{h} P_i P_k \left[\sin\frac{i-k+1}{2}(\theta_0-\theta)\sin\frac{2n+i+k-1}{2}(\theta_0+\theta) + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{i-k+1}{2}(\theta_0+\theta)\sin\frac{2n+i+k-1}{2}(\theta_0-\theta)\right],$$

где P_i (которые равны соответствующим минорам, деленным на корень квадратный из знаменателя) являются коэфициентами полинома

$$P_0 y^h + \ldots + P_h = \frac{(y-\rho_1)\ldots(y-\rho_h)}{2^h\, a_1 a_2 \ldots a_h \sqrt{t_h(x)\, t_h(z)}}.$$

Вычисляя таким же образом K'_n и принимая во внимание (61), мы видим, что

$$K'_n - C'_n =$$

$$= O\left(\frac{h\,2^h}{\rho^n}\right) \sum_i \sum_k \left|\sin\frac{i-k+1}{2}(\theta_0-\theta)\sin\frac{2n+i+k-1}{2}(\theta_0+\theta)\right.$$

$$\left. + \sin\frac{i-k+1}{2}(\theta_0+\theta)\sin\frac{2n+i+k-1}{2}(\theta_0-\theta)\right|$$

$$= O\left(\frac{h\,2^h}{\rho^n}\right) \sum_i \sum_k (i-k+1)\left[\left|\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\right| + \left|\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\right|\right]$$

$$= O\left(\frac{h^4\,2^h}{\rho^n}\right)\left[\left|\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\right| + \left|\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\right|\right].$$

Следовательно, имеем также [2]

$$(79) \quad \begin{cases} |K_n - C_n| = nO\left(\frac{h^4\,2^h}{\rho^n}\right)|\cos\theta - \cos\theta_0|, \\ |K_n - C_n| = O\left(\frac{h^4\,2^h}{\rho^n}\right)\left[\left|\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\right| + \left|\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\right|\right]. \end{cases}$$

Стало быть,

$$(80)\qquad \frac{K_n}{\cos\theta-\cos\theta_0}=$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{t_h(z)\,t_h(x)}}\left\{\frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\theta+\theta_0}{2}+\psi_h+\psi_h^0\right]+O\left(h^4\frac{2^h}{\rho^n}\right)}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta_0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\theta-\theta_0}{2}+\psi_h-\psi_h^0\right]+O\left(h^4\frac{2^h}{\rho^n}\right)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)}\right\}.$$

По (37) и (38)

$$\frac{d\psi_h}{d\theta}=\sum_1^h\frac{1-\rho_k\cos\theta}{1+\rho_k^2-2\rho_k\cos\theta}=\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\sum_1^h\frac{\sqrt{a_k^2-1}}{a_k-\cos\theta},$$

так что

$$\left|\frac{d\psi_h}{d\theta}\right|<\frac{h\rho}{\rho-1},$$

так как максимум $\left|\frac{\sqrt{a_k^2-1}}{a_k-x}\right|$, равный $\frac{\rho+1}{\rho-1}$, достигается для $x=\pm1$, если α_k, вещественная часть a_k, больше единицы; и если α_k, вещественная часть a_k, не больше единицы, то максимум, который достигается при $x=\alpha_k$, обратится в

$$\frac{\left|\rho_k-\frac{1}{\rho_k}\right|}{\left(|\rho_k|-\left|\frac{1}{\rho_k}\right|\right)\sin\varphi_k}=\frac{\sqrt{(|\rho_k^2|-1)^2+4|\rho_k^2|\sin^2\varphi_k}}{(|\rho_k^2|-1)\sin\varphi_k},$$

где φ_k обозначает аргумент ρ_k; он будет соответствовать также $\alpha_k=1$ и будет, стало быть, меньше $\frac{\rho+1}{\rho-1}$. Следовательно,

$$|\psi_h+\psi_h^0|<\frac{h\rho}{\rho-1}|\theta+\theta_0|.$$

$$|\psi_h-\psi_h^0|<\frac{h\rho}{\rho-1}|\theta-\theta_0|;$$

и в виду того, что по предположению

$$\frac{h}{n\ln\rho}>\frac{h}{n(\rho-1)}\to0,$$

когда n неограниченно растет, то возможно найти такую константу B, что

$$(81)\qquad \begin{cases} \left|\dfrac{\sin\left[(2n-1)\dfrac{\theta+\theta_0}{2}+\psi_h+\psi_h^0\right]}{\sin\dfrac{1}{2}(\theta+\theta_0)}\right| < Bn \\[2ex] \left|\dfrac{\sin\left[(2n-1)\dfrac{\theta-\theta_0}{2}+\psi_h-\psi_h^0\right]}{\sin\dfrac{1}{2}(\theta-\theta_0)}\right| < Bn. \end{cases}$$

Следовательно, благодаря[3] (79), применяя (81) в интервалах $|\theta-\theta_0| < \frac{1}{n}$ и $|\theta+\theta_0-2\pi| < \frac{1}{n}$ и заменяя единицей числители правой части (80) для оставшейся части отрезка $(-1, +1)$, мы видим, вследствие (78), что

$$(82)\qquad I_n = O(\ln n).$$

Стало быть, по (77)

$$(77\text{bis})\qquad \sum\nolimits_n = O(\varepsilon M_n \ln n),$$

где M_n максимум $|\overline{R}_n(x)|$ на $(-1, +1)$; следовательно, в силу (75), (76) и (77 bis), можно найти такую константу C, что

$$|\overline{R}_n(x)-\overline{R}_{n,h}(x)| < C(\varepsilon \ln n) M_n$$

на всем отрезке $(-1, +1)$; таким образом, в виду того что $\varepsilon \ln n \to 0$, имеем окончательно

$$(74)\qquad |\overline{R}_n(x)-\overline{R}_{n,h}(x)| = O(\varepsilon \ln n).$$

6. Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, имеем для точек x, лежащих вне отрезка $(-1, +1)$, более простое и более общее предложение, доказательство которого не требует предварительного знания асимптотической формулы (57), и следовательно, мы можем даже допустить, что $t_h(x)$, вместо того чтобы быть полиномом, есть некоторая ограниченная и интегрируемая по Lebesgue'у функция.

Лемма. Пусть $t(x)$ и $t_h(x)$ две интегрируемые функции, удовлетворяющие (10) и неравенству

$$(73)\qquad |t(x)-t_h(x)| < \varepsilon$$

на $(-1, +1)$; при этих условиях имеем

$$(83)\qquad |\overline{R}_n(x)-\overline{R}_{n,h}(x)| = O\left(\frac{M\varepsilon}{\delta}+M\varepsilon\right),$$

где M наибольшая из двух величин $|\overline{R}_{n,h}(x)|$ и $|\overline{R}_{n-1,h}(x)|$ и δ минимальное расстояние x от отрезка $(-1, +1)$.

Действительно,

$$\left|\int_{-1}^{+1} \frac{\overline{R}_{n,h}(x)\overline{R}_{n-1,h}(z)-\overline{R}_{n,h}(z)\overline{R}_{n-1,h}(x)}{(x-z)\sqrt{1-z^2}}\,\varepsilon'(z)\,\overline{R}_n(z)\,dz\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon M}{\delta}\int_{-1}^{+1}\frac{|\overline{R}_{n-1,h}(z)\overline{R}_n(z)|+|\overline{R}_{n,h}(z)\overline{R}_n(z)|}{\sqrt{1-z^2}}\,dz < \frac{2\varepsilon M}{\delta\lambda};$$

следовательно, принимая во внимание (76) и (77), получим

(83) $$|\overline{R}_n(x)-\overline{R}_{n,h}(x)| = O\left(\frac{M\varepsilon}{\delta}+M\varepsilon\right).$$

7. Для того чтобы использовать предыдущие результаты, мы должны остановиться на некотором способе приближения данной положительной функции $t(x)$ полиномами $t_h(x)$. С этой целью изберем для апроксимации $\ln t(x)$ полиномы $G_k(x)$ степени k, дающие на $(-1, +1)$ приближение наилучшего порядка; пусть

(84) $$|G_k(x)-\ln t(x)| = O(a_k).$$

Следовательно, мы имеем также

$$|e^{G_k(x)}-t(x)| = O(\alpha_k);$$

положим затем

$$S_h(x) = 1+G_k(x)+\ldots+\frac{G_k^k(x)}{k!},$$

так что степень h полинома $S_h(x)$ равна k^2, и мы имеем

$$|e^{G_k(x)}-S_h(x)| = O\left(\frac{P^k}{k!}\right),$$

где P есть определенное число (равное для достаточно большого h наибольшему из чисел $\ln L$ и $|\ln\lambda|$). Тогда, исключая случай $a_k < \frac{P^k}{k!}$, который может представиться только, если $\ln t(x)$ будет целой функцией не выше 1-го рода и конечной степени, мы можем написать

(85) $$|S_h(x)-t(x)| = O(a_k) = O(\alpha_{\sqrt{h}});$$

отметим только, что для применения дальнейших формул в исключенном случае достаточно заменить всюду a_k на $\frac{P^k}{k!}$.

Но уравнение

$$F(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^k}{k!} = 0$$

не может иметь корней, меньших по модулю чем $\frac{k+1}{4}$, так как такой корень удовлетворял бы неравенству

$$e^{-|z|} < 2\left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\right|,$$

т. е.

$$\frac{1}{2} < \frac{\left(e^{\frac{1}{4}}\frac{k+1}{4}\right)^{k+1}}{(k+1)!},$$

что невозможно.

Следовательно, если b — корень $S_h(x) = 0$, то

$$|G_k(b)| > \frac{k+1}{4};$$

с другой стороны, обозначив через P максимум $|G_k(x)|$ на $(-1, +1)$, имеем

$$|G_k(b)| < P|b + \sqrt{b^2 - 1}|^k,$$

откуда

$$(86) \qquad |b + \sqrt{b^2 - 1}| > \sqrt[k]{\frac{k+1}{4P}} > \left(\frac{h}{16P^2}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{h}}}.$$

Таким образом, если ρ имеет приписанное ему ранее значение, то построенные нами полиномы $S_h(x)$ удовлетворяют условию (68) и вытекающему из него условию (68 bis), если принять в последнем $c = \frac{1}{16P^2}$.

Мы можем, наконец, в силу леммы § 4, заменить $S_h(x)$ полиномами $t_h(x)$, к которым применимы неравенства § 3, так же как и формула (69 bis).

Мы будем иметь, следовательно,

$$(87) \qquad |t(x) - t_h(x)| = O\left[\alpha_{\sqrt{h}} + \frac{(ch)^{\frac{1}{2}\left(7 - \frac{n}{h\sqrt{h}}\right)}}{\ln^3 h}\right]$$

и, предполагая

$$(71) \qquad n \geqq h^2,$$

получим

$$(89) \qquad |t(x) - t_h(x)| = O\left[\alpha_{\sqrt{h}} + \frac{(ch)^{\frac{1}{2}(7 - \sqrt{h})}}{\ln^3 h}\right].$$

Заметим, что в случае, когда $\ln t(x)$ не есть целая функция конечной степени, имеем

$$(88)\qquad \alpha_h > \frac{(ch)^{7-h}}{\ln^3 h},$$

и тогда можно представить (89) в виде

$$(89\ \text{bis})\qquad |t(x) - t_h(x)| = O(\alpha_{\sqrt{h}});$$

в противном случае [принимая во внимание примечание, сделанное по поводу (85)], будем иметь

$$(89\ \text{ter})\qquad |t(x) - t_h(x)| = O\left[\left(\frac{N}{\sqrt{h}}\right)^{\sqrt{h}}\right],$$

где N постоянная.

8. Теперь легко показать справедливость асимптотической формулы

$$(57\ \text{bis})\qquad R_n(x) \sim \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\ln t(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz}$$

в каждой определенной точке, лежащей вне отрезка $(-1, +1)$, какова бы ни была данная непрерывная функция $t(x)$, положительная в замкнутом интервале $(-1, +1)$.

Действительно, в силу (65), если положим

$$(71\text{bis})\qquad n = h^2,$$

то увидим, что относительная ошибка формулы (57), порядок которой есть $\frac{h}{\rho^n} = \frac{h}{(ch)^{\frac{n}{2\sqrt{h}}}}$, стремится к нулю; другими словами, имеем

$$(90)\qquad R_{n,h}(x) = \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\ln t_h(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz}(1+\beta_h),$$

где

$$(91)\qquad \beta_h = O\left[\frac{1}{(ch)^{\frac{h^{3/2}}{2}-1}}\right].$$

Умножая (90) на $\frac{1}{\sqrt{H_n^{(2)}(\sqrt{t_h(x)})}}$ и принимая во внимание (50), получим соответствующую формулу для нормированных полиномов $\overline{R}_{n,h}(x)$

$$(92)\qquad \overline{R}_{n,h}(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_h(z)}{(z-x)\sqrt{1-z^2}}dz}(1+\beta_h'),$$

где β_h' порядка β_h.

В силу (89 bis), мы получим из (92), что

$$(92\,\text{bis})\qquad \overline{R}_{n,h}(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t(z)}{(z-x)\sqrt{1-z^2}}dz}(1+\gamma_h),$$

где

$$\gamma_h = O\left[\alpha_{\sqrt{h}} + \frac{1}{(ch)^{\frac{h^{3/2}}{2}-1}}\right];$$

так что, при условии (88),

$$(93)\qquad \gamma_h = O(\alpha_{\sqrt{h}}),$$

и в противном предположении

$$\gamma_h = O\left[\left(\frac{N}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{h}}\right].$$

С другой стороны, формулу (83) можно представить, в силу (92), в виде

$$(83\,\text{bis})\qquad \overline{R}_n(x) = \overline{R}_{n,h}(x)\,[1+O(\varepsilon)],$$

где ε теперь должно быть заменено через $\alpha_{\sqrt{h}} = \alpha_{\sqrt[4]{n}}$.

Следовательно, в силу (92 bis), имеем окончательно

$$(94)\qquad \overline{R}_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t(z)dz}{(z-x)\sqrt{1-z^2}}}\left[1+O\left(\alpha_{\sqrt[4]{n}}\right)\right];$$

в этой формуле $\alpha_{\sqrt[4]{n}}$ будет заменено через $\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{4}\sqrt[4]{n}}$, если $\ln t(x)$ целая функция не выше 1-го рода и конечной степени.[1]

---

[1] Или вообще для всех бесконечно растущих величин $h^2 = k$ таких, что $\sqrt[k]{\alpha_k} < \frac{N}{k}$ (где N — постоянная).

Имеем, очевидно, также

$$(95)\quad R_n(x)=\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t(z)}{\sqrt{1-z^2}}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}\right)dz}\left[1+O\left(\alpha_{\sqrt[4]{n}}\right)\right].$$

Примечание. Мы можем положить

$$(96)\quad \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t(z)}{\sqrt{1-z^2}}\left[1-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{x}\right)^{-1}\right]dz}=$$

$$=P_n(x)+p_n(x),$$

где $P_n(x)$ полином степени n. Тогда (95) напишется в виде

$$R_n(x)=[P_n(x)+p_n(x)][1+\gamma_n],$$

где $\gamma_n=O\left(\alpha_{\sqrt[4]{n}}\right)$ — разложение по отрицательным степеням x, сходящееся для $|x|>1$; так как $p_n(x)(1+\gamma_n)$ не содержит положительных степеней x, то можно написать

$$(97)\quad R_n(x)=P_n(x)(1+\gamma_n)+\delta_n,$$

где δ_n содержит только отрицательные степени x, что доказывает, что полином $P_n(x)$ является асимптотическим выражением $R_n(x)$ на бесконечности, и их коэфициенты вообще асимптотически равны. Далее мы вернемся к этому вопросу.

Заметим только, что без изменения формул можно заменить выше $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n$ многочленом Чебышева $T_n(x)$. В частности из (95) следует, что когда $t(x)$ четная функция, $P_n(x)$ будет [одновременно с $R_n(x)$] четной или нечетной функцией в зависимости от четности n.

9. Займемся теперь сходимостью асимптотического выражения на отрезке $(-1, +1)$. Применим формулу (74) и используем полиномы $t_h(x)$ § 7, предполагая $n=h^2$.

Условия, требуемые в § 5, будут выполнены по (89), если

$$(98)\quad \alpha_n \ln n \to 0.$$

По известной теореме[1] необходимое и достаточное условие для этого заключается в том, чтобы функция $t(x)$ удовлетворяла условию Dini-Lipschitz'а. При этом последнем условии мы имеем

$$|\overline{R_n}(x)-\overline{R_{n,\,h}}(x)|=O\left[\alpha_{\sqrt[4]{n}}\ln n+\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{4}\sqrt[4]{n}}\right],$$

где N постоянная.

---

[1] Lebesque, Sur les intégrales singulières (Ann. de Toulouse, t. I, 1909). Bernstein, Sur l'ordre de la meilleure approximation (Mémoires publiés par l'Académie de Belgique, t. IV, 1912).

В то же время, полагая

(56 bis)
$$\psi_h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\ln t_h(z) - \ln t_h(x)}{z - x} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\, dz,$$

мы имеем, в силу (64) и принимая во внимание (68),

$$\left| \overline{R}_{n,h}(x)\sqrt{t_h(x)} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\theta + \psi_h) \right| = O\left(\frac{h^2 2^h}{\rho^n}\right) =$$
$$= O\left[\left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{4} n^{3/4}}\right],$$

где A положительная постоянная.

Следовательно, при условии Dini-Lipschitz'а для тригонометрического веса $t(x)$, имеем на $(-1, +1)$ асимптотическую формулу

$$\sqrt{t(x)}\ \overline{R}_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\theta + \psi_{\sqrt{n}}), \tag{99}$$

и ошибка этой формулы равномерно порядка

$$O\left[\frac{a}{\sqrt[4]{n}} \ln n + \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{4}\sqrt[4]{n}}\right].$$

Выражение (99) содержит n довольно сложным образом благодаря тому, что $\psi_{\sqrt{n}}$ также зависит от n. Но в большинстве случаев $\psi_h(x)$ равномерно стремится к непрерывной функции

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\ln t(z) - \ln t(x)}{z - x} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\, dz, \tag{17}$$

когда $t_h(x)$ равномерно стремится к $t(x)$. Ясно, что тогда формула (99) превращается в формулу (16). Следовательно, для доказательства основной теоремы § 4 введения, достаточно показать, что при условии (18) интеграл (56 bis) равномерно стремится в интервале $(-1, +1)$ к выражению (17).

Заметим сначала, что выражение (17) при условии (18) имеет смысл. Действительно, пусть для определенности $x \geqq 0$; разбивая интеграл (17) на две части $\psi_1(x) + \psi_2(x)$ — первую от -1 до x и вторую от x до 1, мы видим, что первая часть имеет смысл, так как выражение под знаком интеграла по модулю меньше чем $\frac{M}{2\pi|(z-x)\ln|z-x|^{1+\varepsilon}|\sqrt{1-z^2}}$, где M постоянная.

Точно также

$$|\psi_2(x)| < \frac{M}{2\pi} \int_x^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{|z-x|\,|\ln(z-x)|^{1+\varepsilon}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} < \frac{M\sqrt{1-x}}{2\pi} \times$$

$$\times \left[\int_x^{\frac{1+x}{2}} \frac{dz}{|z-x|\,|\ln(z-x)|^{1+\varepsilon}\sqrt{1-z}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1+x}{2}}^1 \frac{dz}{|z-x|\,|\ln(z-x)|^{1+\varepsilon}\sqrt{1-z}} \right].$$

Следовательно, замечая, что в последнем интеграле

$$z - x \geqq \sqrt{\frac{1}{2}(1-x)(1-z)},$$

имеем

$$|\psi_2(x)| < \frac{M}{\varepsilon\pi\sqrt{2}\left|\ln\frac{1-x}{2}\right|^{\varepsilon}} +$$

$$+ \frac{M}{\pi\sqrt{2}} \int_{\frac{1+x}{2}}^1 \frac{dz}{(1-z)\left|\ln\sqrt{\frac{1}{2}(1-x)(1-z)}\right|^{1+\varepsilon}} =$$

$$= \frac{3M}{\varepsilon\pi\sqrt{2}\left|\ln\frac{1-x}{2}\right|^{\varepsilon}}.$$

Это показывает одновременно, что $\psi(x)$ стремится к нулю, когда x стремится к 1. Непрерывность $\psi(x)$ на всем отрезке $(-1, +1)$ следует из дальнейшего рассуждения.

Определяя полиномы $t_h(x)$, как и ранее, положим $h_l = h^{l^{\frac{2}{\varepsilon}}}$. Тогда ряд

$$\ln t(x) = \ln t_h(x) + \sum_{l=1}^{\infty} [\ln t_{h_{l+1}}(x) - \ln t_{h_l}(x)],$$

так же как и ряд

$$t(x) = t_h(x) + \sum_{l=1}^{\infty} [t_{h_{l+1}}(x) - t_{h_l}(x)],$$

будет абсолютно и равномерно сходящимся. Более того, полагая

$$Q_l(x) = \ln t_{h_{l+1}}(x) - \ln t_{h_l}(x),$$

мы имеем по известной теореме,[1] в силу условия (18),

$$|Q_l(x)| < \gamma_l = O\left(\frac{1}{|\ln h_l|^{1+\varepsilon}}\right),$$

и, по теореме Маркова,[2] имеем на $(-1, +1)$

$$|Q_l'(x)| = O(h_{l+1}^2 \gamma_l).$$

Следовательно, полагая

$$\psi(x) - \psi_h(x) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x), \tag{100}$$

где

$$U_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{Q_l(x) - Q_l(z)}{x - z} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\, dz,$$

имеем

$$|U_l(x)| < \frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta_1}^{x+\delta_1} |Q_l'| \sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\, dz +$$

$$+ \frac{\gamma_l}{\pi} \left[\int_{-1}^{x-\delta_1} \frac{\sqrt{1-x^2}\, dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}} + \int_{x+\delta_1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}\, dz}{(z-x)\sqrt{1-z^2}} \right].$$

Полагая $\delta_1 = \frac{1}{h_{l+1}^4}$, мы видим, что первый из этих интегралов[3] будет порядка $\gamma_l h_{l+1}^2 \sqrt{\delta_1} = \gamma_l$, тогда как два другие будут порядка $\ln \delta_1$, так как, например (для $x \geqq 0$ и $x + \delta_1 \leqq 1$)

$$O < \int_{x+\delta_1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}\, dz}{(z-x)\sqrt{1-z^2}} = -\ln \delta_1 + \ln\{1 - x(x+\delta_1) +$$

$$+ \sqrt{(1-x^2)[1-(x+\delta_1)^2]}\} < -\ln \frac{\delta_1}{2}.$$

Следовательно,

$$|U_l(x)| = O(\gamma_l \ln h_{l+1}) = O\left[\gamma_l (l+1)^{\frac{2}{\varepsilon}} \ln h\right] = \tag{101}$$

$$= O\left[\frac{(l+1)^{\frac{2}{\varepsilon}}}{l^{\frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon}}} \frac{1}{(\ln h)^{\varepsilon}}\right];$$

---

[1] Jackson, Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen, p. 40.

[2] Bernstein, Sur l'ordre de la meilleure approximation, p. 11.

[3] Функцию под знаком интеграла для $|z| > 1$ считаем равной нулю.

откуда по (100)

$$|\psi(x)-\psi_h(x)| = O\left[2^{\frac{2}{\varepsilon}}\frac{1}{(\ln h)^{\varepsilon}}\right] = O\left[\frac{1}{(\ln h)^{\varepsilon}}\right]. \tag{102}$$

Следовательно, формула (16) имеет место при условии (18), и порядок ошибки равен $O\left[\frac{1}{(\ln n)^{\varepsilon}}\right]$ равномерно на отрезке $(-1, +1)$.

Вообще из (101) следует, что порядок приближения формулы (16) будет $O\left[\frac{\alpha_4}{\sqrt{n}}\ln n\right]$, если функция $t(x)$ допускает приближение порядка α_n многочленами степени n, при

$$\alpha_n = O\left[\frac{1}{(\ln n)^{1-\varepsilon}}\right],$$

где $\varepsilon > 0$.

10. Предполагая, что условие (18) выполнено, составим тригонометрическое разложение

$$\ln t(\cos\theta) = A_0 + A_1\cos\theta + \ldots + A_n\cos n\theta + \cdots, \tag{103}$$

которое будет равномерно сходящимся. В этом случае будем иметь

$$2\psi(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\ln t(\cos\varphi) - \ln t(\cos\theta)}{\cos\varphi - \cos\theta}\sin\theta\, d\varphi \tag{104}$$

$$= A_1\sin\theta + A_2\sin 2\theta + \cdots + A_n\sin n\theta + \cdots,$$

и это разложение, сопряженное с предыдущим, будет также равномерно сходящимся. Для проверки этого утверждения, достаточно заметить, что

$$\sin k\theta = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos k\varphi - \cos k\theta}{\cos\varphi - \cos\theta}\sin\theta\, d\varphi. \tag{105}$$

Примечание. Тождество (105), проверяющееся простым интегрированием, является следствием того факта, что разложение в непрерывную дробь

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}} = \frac{S_{k-1}(x)}{T_k(x)} + \frac{\alpha_0}{x^{2k}} + \frac{\alpha_1}{x^{2k+1}} + \cdots$$

имеет подходящими дробями $\frac{S_{k-1}(x)}{T_k(x)}$, где многочлены $T_k(x)$ степени k суть полиномы Чебышева и удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_k(x)-T_k(z)}{(x-z)\sqrt{1-z^2}}\,dz = S_{k-1}(x).$$

Но так как имеем $\left(T_k(x)=\frac{1}{2^{k-1}}\cos k\theta\right)$

$$4\,T_{k+1}(x)+T_{k-1}(x)=4\,x\,T_k(x),$$

то будет также

$$4\,S_{k+1}(x)+S_{k-1}(x)=4\,x\,S_k(x).$$

Стало быть,

$$S_k(x)=A\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^k+B\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^k;$$

и ввиду того что $S_0(x)=1$, $S_1(x)=x$, имеем

$$A+B=1,\quad x=(A-B)\sqrt{x^2-1},$$

откуда

$$A=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}},\qquad B=\frac{-x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{x^2-1}\,S_k(x)=\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{k+1},$$

т. е.

$$S_{k-1}=\frac{\sin k\theta}{2^{k-1}\sin\theta}.$$

Обратно, если задаться функцией

$$\psi(\cos\theta)=\frac{1}{2}(A_1\sin\theta+\cdots+A_n\sin n\theta+\cdots),$$

то всякий раз, когда сопряженный ряд

$$\ln[t(x)]=f(\cos\theta)=A_1\cos\theta+\cdots+A_k\cos k\theta+\cdots$$

сходится равномерно, и $f(x)$ удовлетворяет условию (18), выражения $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\theta+\psi)$ будут асимптотически представлять ортогональные полиномы $\overline{R}_n(x)$, умноженные на $\sqrt{t(x)}=e^{\frac{f(x)}{2}}$, соответствующие тригонометрическому весу $t(x)$.

Из предыдущего вытекает также, если через $x_k=\cos\theta_k$ обозначить k-й корень $\overline{R}_n(x)$, что

$$n\theta_k+\psi(x_k)=k\pi-\frac{\pi}{2}+\varepsilon_k,$$

где ε_k равномерно порядка $\alpha \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n}}$ для всех корней $(k = 1, \cdots, n)$.

Поэтому

$$ {}_k = \frac{k\pi}{n} - \frac{\frac{\pi}{2} + \psi\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) + \beta_k}{n} = a_k - \frac{\psi(\cos a_k) + \beta_k}{n}, $$

где β_k стремится равномерно к нулю вместе с $\frac{1}{n}$, и $\cos a_k = b_k$ суть корня тригонометрического многочлена $T_n(x)$. Таким образом корни x_h полинома $\overline{R_n}(x)$ можно представить в виде

$$ (106) \qquad x_k = b_k + \frac{\sqrt{1 - b_k^2}\,[\psi(b_k) + \beta_k']}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (k = 1, \cdots, n), $$

где β_k' равномерно стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$.

Следовательно, если задать сдвиг порядка $\frac{1}{n}$, характеризуемый непрерывной функцией $\psi(x)$, корней ортогонального полинома $R_n(x)$ по отношению к корням $T_n(x)$, то тригонометрический вес $t(x)$ будет асимптотически определен (с точностью до постоянного множителя) интегральным уравнением (104), решение которого может быть представлено в виде[4]

$$ (107) \qquad f(x) = 2x\psi_1(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} \frac{\psi_1(x) - \psi_1(u)}{x - u}\cos\theta\, du\, d\theta, $$

где $\psi_1'(x) = \frac{\psi(x)}{\sin\theta}$. Формула (107) имеет смысл, если $\psi_1(x)$ удовлетворяет (18). Не вдаваясь в исследование необходимых и достаточных условий для существования функции $t(x) = e^{f(x)}$, соответствующей функции $\psi(x)$ и удовлетворяющей условию (18), заметим, что во всяком случае $\psi(x)$ должна быть непрерывна, и $\psi(\pm 1) = 0$; с другой стороны, достаточно, чтобы $\psi_1(x)$ удовлетворяла условию (18) с $\varepsilon > 1$.

11. В частности, если

$$ (108) \qquad t(x) = \frac{1}{t_h(x)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_h}\right)}, $$

где $t_h(x)$ полином, то функции $\psi(x)$ и $\psi_h(x)$, соответствующие этим двум тригонометрическим весам, будут удовлетворять соотношению

$$ \psi(x) + \psi_h(x) = 0. $$

Следовательно,

$$\psi(x) = \sum_1^h \alpha'_k,$$

где

$$(109)\qquad \cos\alpha'_k = \frac{\rho_k - x}{\sqrt{2\rho_k(a_k - x)}}, \qquad \sin\alpha'_k = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2\rho_k(a_k-x)}}.$$

Следовательно, в данном случае

$$(110)\qquad \overline{R}_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi} t_h(x)} \cos\left(n\theta + \sum_1^h \alpha'_k\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n(\rho_1 - x + \sqrt{x^2-1}) + \ldots + (x-\sqrt{x^2-1})^n(\rho_1 - x - \sqrt{x^2-1})\ldots}{\sqrt{2^h \rho_1 a_1 \ldots \rho_h a_h}}}$$

и

$$R_n(x) \sim \frac{\sqrt{t_h(x)}\cos(n\theta + \sum \alpha'_k)}{2^{n-1}\sqrt{M_h}} = H_n(x),$$

где M_h дано формулой (40).

Таким образом, в соответствии с результатами первой главы, имеем

$$L_n\left[\frac{1}{\sqrt{t_h(x)}}\right] \sim \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{M_h}};$$

но теперь асимптотическое выражение $H_n(x)$ для $R_n(x)$ есть само полином степени n для $n \geqq h$.

Отсюда следует, что полином $H_n(x)$ среди всех полиномов (2) является полиномом, дающим минимальное уклонение произведения

$$P_n(x)\frac{1}{\sqrt{t_h(x)}} = \frac{\cos(n\theta + \psi)}{2^{n-1}\sqrt{M_h}},$$

и равенство

$$(111)\qquad L_n\left[\frac{1}{\sqrt{t_h(x)}}\right] = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{M_h}}$$

будет не только асимптотически справедливо, [5] но вполне точно для $n \geqq h$.

Следует отметить связь этого результата, который в частном случае, когда $t_h(x)$ есть полный квадрат, находится уже у Чебышева с исследованиями Fejér'a[1] и его учеников о тригонометрических положительных суммах.

---

[1] Ueber trigonometrische Polynome (Journal für reine und angew. Mathem, t 146, 1916).—Szégö, Ueber die Entwickelung einer willkürlichen Function etc., Math. Zeitschrift, t. XII.

Мы докажем, что случай, когда тригонометрический вес представляется в виде $t(x) = \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{t_h(x)}$, где $t_h(x)$ не отрицательный на отрезке $(-1, +1)$ многочлен и α и β равны 0 или 1, является единственным, при котором асимптотическое выражение

$$F_n(x) = \frac{\cos(n\theta + \psi)}{\sqrt{t(x)}} \tag{112}$$

есть полином.[1]

Действительно, $F_n(x)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) = 2xF_n(x). \tag{113}$$

Следовательно, $F_n(x)$ необходимо должно иметь вид

$$F_n(x) = A(x)(x+\sqrt{x^2-1})^n + B(x)(x-\sqrt{x^2-1})^n,$$

и для того, чтобы $F_l(x)$ и $F_{l+1}(x)$ были полиномами, нужно, чтобы

$$\tag{114} \left\{ \begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2}\left[F_l(x) + \frac{F_{l+1}(x) - xF_l(x)}{\sqrt{x^2-1}}\right](x-\sqrt{x^2-1})^l, \\ B(x) &= \frac{1}{2}\left[F_l(x) + \frac{F_{l+1}(x) - xF_l(x)}{\sqrt{x^2-1}}\right](x+\sqrt{x^2-1})^l. \end{aligned} \right.$$

Таким образом произведение

$$A(x)B(x) = \frac{1}{4}\left[P^2(x) + \frac{Q^2(x)}{1-x^2}\right],$$

где $P(x) = F_l(x)$, $Q(x) = F_{l+1}(x) - xF_l(x)$

есть неотрицательный на $(-1, +1)$ полином,[2] или такой полином, деленный на $1-x^2$ или на $1 \pm x$ в зависимости от того, обращается ли $Q(x)$ в нуль или нет для $x = \pm 1$.

Имеем, следовательно,

$$\tag{115} \frac{1}{\sqrt{AB}} F_n(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{A}{B}}(x+\sqrt{x^2-1})^n + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{B}{A}}(x-\sqrt{x^2-1})^n\right] = \cos(n\theta + \psi),$$

---

[1] Для этого необходимо и достаточно, чтобы $F_{l+1}(1) = F_l(1)$, $F_{l+1}(-1) = -F_l(-1)$.

[2] См. мою статью „Sur une classe de polynomes orthogonaux" (Сообщения Харьковского матем. общества и Института математических наук Украины, т. IV, 1930).

так что

$$t(x) = \frac{1}{AB}$$

и

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{Q(x)}{P(x)\sqrt{1-x^2}} - l\theta.$$

Случай, когда AB будет полиномом, имеющим корни четного порядка внутри отрезка $(-1, +1)$, сводится непосредственно к случаю, когда $AB = t_h(x)$ не имеет корней, так как тогда $F_l(x)$ и $F_{l+1}(x)$ имеют эти корни общими, что справедливо и для $F_n(x)$ для всех значений $n > l$, так что формула (115) не изменится в силу сокращения общих множителей в числителе и знаменателе первого члена.

Вообще, для того чтобы

$$\frac{F_n(x)}{\sqrt{AB}}$$

из всех полиномов с тем же старшим коэфициентом давал минимальное уклонение для всех степеней $n \geqq l$, необходимо и достаточно, чтобы это выполнялось при $l = n$.

Действительно, если AB не обращается ни в нуль, ни в бесконечность в точках ± 1, то, для того чтобы полином $F_n(x)$ определенной степени n давал минимальное уклонение, необходимо и достаточно, чтобы максимум (115) достигался в $(n+1)$ точках с противоположными знаками, а это означает, что ψ должна возвращаться к своему первоначальному значению, равному нулю, когда x изменяется от -1 до $+1$. Если AB обращается в бесконечность в этих двух точках, ψ должна уменьшиться от $+\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$, для того чтобы $\cos(n\theta + \psi)$ обратился в нуль на обоих концах и имел $n+1$ extrema с противоположными знаками внутри; если AB обращается в бесконечность в одной из этих точек (-1, например), оставаясь конечным в точке $+1$, ψ должна изменяться от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Случай, когда AB обращается в нуль в одной из этих точек, сводится, очевидно, к случаю, когда в рассматриваемой точке AB обращается в бесконечность.

Таким образом, если $F_l(x)$ произвольный полином степени l, все корни которого находятся внутри отрезка $(-1, +1)$, можно бесчисленным множеством способов сопоставить ему неотрицательную функцию $t(x)$, такую, что $F_l(x)\sqrt{t(x)}$ наименее уклоняется от нуля на этом отрезке среди всех произведений $P_l(x)\sqrt{t(x)}$, где полином $P_l(x)$ имеет такой же старший член, как и $F_l(x)$. Для этого достаточно выбрать произвольный полином $F_{l+1}(x)$ степени $l+1$, такой, что корни $F_l(x)$ и $Q(x) = F_{l+1}(x) - xF_l(x)$ чередуются; тогда имеем

$$(116) \qquad \frac{1}{t(x)} = A(x)B(x) = \frac{1}{4}\left[F_l^2(x) + \frac{Q^2(x)}{1-x^2}\right].$$

При этих условиях все полиномы $F_n(x)$ степени $n > l$, определенные формулой (115) или, что сводится к тому же, уравнением (113), будут обладать желаемым свойством.

Глава III

Многочлены Jacobi

1. Мы перейдем теперь к исследованию того случая, когда тригонометрический вес $t(x)$ может в интервале $(-1, +1)$ обращаться в нуль или бесконечность.

Мы ограничимся, однако, предположением, что функция $t(x)$ может быть представлена в виде

$$t(x) = t_0(x)\,|x-b_1|^{\delta_1} \ldots |x-b_k|^{\delta_k}, \tag{117}$$

где $b_1, \ldots, b_k$ точки рассматриваемого отрезка, взятые в конечном числе, $\delta_1, \ldots, \delta_k$ вещественны, а $t_0(x)$ удовлетворяет условию

$$\lambda < t_0(x) < L \tag{10 bis}$$

и интегрируема в смысле Riemann'a.

Мы покажем сначала, что при этих условиях формулы главы I остаются справедливыми, и что[1]

$$L_n(\sqrt{t(x)}) \sim \frac{1}{2^{n-1}} \sqrt{M}, \quad H_n^{(2)}(\sqrt{t(x)}) \sim \frac{\pi}{2^{2n-1}} M, \tag{46bis}$$

где

$$M = e^{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\ln t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}. \tag{48bis}$$

Очевидно, достаточно исследовать случай, когда $k=1$. Предположим сперва, что δ_1 число целое и четное $\delta_1 = 2p$.* Рассмотрим для определенности $L_n(\sqrt{t(x)})$. В силу формул (46) и (48bis), которые, как мы видели, применимы, если $t(x)$ не обращается в нуль в интервале $(-1, +1)$, имеем

$$L_n\left(\sqrt{t_0(x)\,[(x-b)^2+\varepsilon^2]^p}\right) \sim \left|\frac{b+\varepsilon i+\sqrt{(b+\varepsilon i)^2-1}}{2}\right|^p L_n(\sqrt{t_0(x)})$$

$$= \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^p L_n(\sqrt{t_0(x)}),$$

---

[1] См. стр. 18. Вторая из этих формул (46 bis) находится у G. Szégö. Entwickelung nach Polynomen eines Ortogonalsystems (Mathem. Annalen, Bd. 82, p. 199).

* S. Bernstein, Leçons sur les propriétés extrémales, etc., p. 18.

где α стремится к нулю вместе с ε. Но с другой стороны, если $t(x) = t_0(x)(x-b)^{2p}$, то

$$L_n\left(\sqrt{t_0(x)[(x-b)^2+\varepsilon^2]^p}\right) > L_n\left(\sqrt{t(x)}\right) \geqq L_{n+p}\left(\sqrt{t_0(x)}\right)$$

$$\sim \frac{1}{2^p} L_n\left(\sqrt{t_0(x)}\right),$$

следовательно,

$$L_n\left(\sqrt{t(x)}\right) \sim \frac{1}{2^p} L_n\left(\sqrt{t_0(x)}\right),$$

что доказывает справедливость (46), когда $\delta_1 = 2p$—четное число.

Заметим, что если бы p было целым отрицательным числом, то формулы (46) были бы непосредственным следствием того факта, что полиномы степени n, ортогональные относительно тригонометрического веса $t(x)$, так же как и соответственные полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля, идентичны соответственно полиномам степени $n+p$, умноженным на $(x-b)^{-p}$, ортогональным относительно $t_0(x)$, так что мы имели бы в этом случае тождественно

$$L_n\left(\sqrt{t(x)}\right) = L_{n+p}\left(\sqrt{t_0(x)}\right), \quad H_n^{(2)}\left(\sqrt{t(x)}\right) = H_{n+p}\left(\sqrt{t_0(x)}\right).$$

Доказав таким образом формулы (46 bis) в случае четного, положительного или отрицательного δ_1, рассмотрим общий случай, когда δ_1 есть некоторое действительное число

$$2p < \delta_1 < 2p + 2.$$

Пусть для определенности $0 < \delta_1 < 2$.

Введем две функции $t_1(x)$ и $t_2(x)$, интегрируемые в смысле Riemann'a, такие, что (ε—положительное очень малое число)

$$t_1(x) = t_2(x) = t(x) \qquad (\text{для } |x-b_1| \geqq \varepsilon)$$

и

$$t_1(x) = (x-b_1)^2 t_0(x) \quad (\text{для } |x-b_1| < \varepsilon)$$

$$t_2(x) = t_0(x).$$

Формулы (46) и (48 bis) по предыдущему будут применимы к $t_1(x)$ и $t_2(x)$; таким образом в силу

$$t_1(x) \leqq t(x) \leqq t_2(x)$$

имеем

$$(118) \quad \frac{1-\alpha_n}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\ln t_1(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} \leqq L_n\left(\sqrt{t(x)}\right) \leqq \frac{1+\alpha_n}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\ln t_2[(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}},$$

где $\alpha_n > 0$ стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$.

Следовательно, при ε достаточно малом, для того чтобы иметь

$$\left| \int_{-1}^{+1} \frac{\ln t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{\ln t_1(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \right| < a_n,$$

$$\left| \int_{-1}^{+1} \frac{\ln t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{\ln t_2(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \right| < a_n,$$

можно будет выбрать достаточно большое n, чтобы выполнялось

$$(119)\ \frac{(1-a_n)^2}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\ln t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} < L_n\left(\sqrt{t(x)}\right) < \frac{(1+a_n)^2}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\ln t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}};$$

это показывает справедливость нашего утверждения; подобное рассуждение применимо к $H_n^{(2)}\left[\sqrt{t(x)}\right]$.

Таким образом имеем теперь также

$$(42\text{bis}) \qquad H_n^{(2)}[t(x)] \sim \frac{\pi}{2} L_n^2 [t(x)],$$

и асимптотическое равенство (13) Введения

$$(13) \qquad H_n^{(l)}[t(x)] \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)} L_n^l[t(x)]$$

распространяется при помощи аналогичных рассуждений.

2. Распространение асимптотических формул для самих ортогональных полиномов является более трудным и, в частности, основная формула

$$(16) \qquad \overline{R}_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t(x)}} \cos(n\theta + \psi),$$

где

$$(17) \qquad \psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\ln t(z) - \ln t(x)}{z-x} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\, dz,$$

перестает быть верной на всем замкнутом отрезке $(-1, +1)$.*

---

* Я хочу заметить, между прочим, что формула (107) для $\ln t(x)$ в функции от $\psi(x)$, которую я указал выше (гл. II, стр. 48), может быть упрощена: имеем

$$\ln t(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\psi(x)\sqrt{1-x^2} - \psi(z)\sqrt{1-z^2}}{z-x} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

если $\psi(x)$ удовлетворяет условию (18) и если $\psi(\pm 1) = 0$.

Отсюда вытекает, что ортогональный полином $\overline{R_n}(x)$ вообще не будет больше минимизировать асимптотически уклонение произведения $\overline{P_n}(x)\sqrt{t(x)}$, где $\overline{P_n}(x)$ произвольный полином степени n, имеющий такой же старший член, как и $\overline{R_n}(x)$, и, следовательно, необходимо дополнительное исследование для разрешения основной проблемы определения максимума $\overline{R_n}(x)\sqrt{t(x)}$ на отрезке $(-1, +1)$.

В дальнейшем мы займемся единственно случаем, когда $t(x)$ может обращаться в нуль или бесконечность только на концах ± 1 интервала. Мы должны будем для полного исследования этого случая воспользоваться общими полиномами Jacobi, ортогональными относительно тригонометрического веса

$$t(x) = (1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1}, \tag{120}$$

так же, как в первой части мы пользовались полиномами Чебышева.

Мы должны, следовательно, начать с изучения полиномов Jacobi, для которых основная указанная нами проблема также еще не была решена. Если мы обозначим через $q(x)$ обычный вес, то получим

$$q(x) = \frac{t(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{25bis}$$

и, стало быть, когда $t(x)$ представлен формулой (120), имеем

$$q(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \tag{121}$$

где

$$\alpha = 2\rho - \frac{1}{2}, \quad \beta = 2\rho_1 - \frac{1}{2}. \tag{122}$$

Можно, очевидно, ограничиться изучением того случая, когда $\alpha > -1$, $\beta > -1$, т. е.

$$\rho > -\frac{1}{4}, \quad \rho_1 > -\frac{1}{4}, \tag{123}$$

так как, если $\alpha = -2s + \alpha_1$, где s целое положительное число и $-1 < \alpha_1 \leqq 1$, то ортогональные полиномы степени n, соответствующие параметрам α и β, будут равны произведениям на $(1-x)^s$ ортогональных полиномов степени $n-s$, соответствующих параметрам α_1 и β_1. Такое же соотношение будет существовать, очевидно, между соответствующими полиномами минимального уклонения.

Согласно с последним параграфом главы II, асимптотическое выражение (16) может быть полиномом[1] только, когда

---

[1] См. также мою заметку „Sur une classe de polynomes d'écart minimum" (Comptes rendus, t. 190, p. 237), и статью „Sur une classe de polynomes orthogonaux" (Сообщення Харьковского матем. общества, т. 4, 1930).

$\rho = 0$ или $\frac{1}{2}$ и $\rho_1 = 0$ или $\frac{1}{2}$ (по примечанию, сделанному выше, случай $\rho = -\frac{k}{2}$, $\rho_1 = -\frac{k_1}{2}$, где k и k_1 целые положительные числа, приводится к этому). Непосредственно проверяется, что нормированные полиномы Jacobi, соответствующие тогда параметрам $\alpha = \mp\frac{1}{2}$, $\beta = \mp\frac{1}{2}$, по (122) сводятся соответственно к

$$\text{(I)} \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n\theta,$$

$$\text{(II)} \qquad \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta},$$

$$(124) \qquad \text{(III)} \qquad \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$

$$\text{(IV)} \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Однако, даже в этих простых случаях (кроме первого, где $t(x) = 1$) формула (16), с значением (17) для ψ, не является точной на **всем** отрезке $(-1, +1)$. Действительно, пусть, например, $t(x) = 1 + (x)$, где мы имеем

$$(125) \qquad \overline{R}_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta};$$

следовательно, точная величина ψ должна быть $\psi = \frac{\theta}{2}$, и, конечно, эта величина не может получиться из величины (17), обладающей свойством обращаться в нуль на концах. К тому же легкое вычисление дает

$$\ln t(x) = \ln(1+\cos\theta) = -\ln 2 + 2\left[\cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \ldots\right],$$

так что по (17) мы имели бы

$$\psi = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \ldots,$$

что равно $\frac{\theta}{2}$ только для $x > -1$; но для $x = -1$ имеем $\psi = 0$, и сходимость, очевидно, не является равномерной вблизи этой точки.

То же обстоятельство представляется в общем случае полиномов Jacobi.

3. Классические полиномы Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, ортогональные относительно веса (121), не нормированы; таким образом, обозначая через $\bar{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ соответствующие нормированные полиномы, имеем

$$(126)\quad \bar{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}}\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Точно также, если $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ представляет ортогональный полином степени n с старшим членом равным x^n, имеем

$$(127)\quad R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \times$$
$$\times \frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Непосредственно проверяется, что

$$(128)\quad H_n^{(2)}[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}] = \int_{-1}^{+1}[R_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx$$
$$= 2^{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)},$$

где

$$(122)\qquad \rho = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}, \qquad \rho_1 = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4};$$

следовательно, в согласии со второй из формул (46bis),

$$(129)\qquad (H_n^{(2)}[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}]$$
$$\sim \pi\frac{2^{2n+\alpha+\beta}(n+\alpha)^{n+\alpha}(n+\beta)^{n+\beta}(n+\alpha+\beta)^{n+\alpha+\beta}n^n}{(2n+\alpha+\beta)^{2n+\alpha+\beta}(2n+\alpha+\beta)^{2n+\alpha+\beta}} \sim \frac{\pi}{2^{2n+\alpha+\beta}}.$$

Величина $L_n[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}]$ дается асимптотически по предыдущему первой из формул (46bis), и мы получаем

$$(130)\qquad L_n[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}] \sim \frac{1}{2^{n+\frac{\alpha+\beta-1}{2}}} = \frac{1}{2^{n+\rho+\rho_1-1}}.$$

Мы покажем, что для

$$(131)\qquad o \leqq \rho \leqq \frac{1}{2}, \qquad o \leqq \rho_1 \leqq \frac{1}{2}$$

максимум $|(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}R_n^{(\alpha,\beta)}(x)|$ асимптотически равен (130); и напротив, в случае, когда условия (131) не выполняются, т.е. если имеем, по крайней мере, одно из неравенств $|\alpha|>\frac{1}{2}$, $|\beta|>\frac{1}{2}$, рассматриваемый максимум превышает (130).

Для этого положим

$$(132)\qquad f_{n,\rho,\rho_1}(x)=(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}R_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

В случае, когда это не приведет к неясности, мы будем опускать некоторые индексы и будем писать $f_{n,\rho}(x)$, если $\rho=\rho_1$, или просто $f_n(x)$, если параметры ρ и ρ_1 останутся постоянными на протяжении всего рассуждения.

Полагая $x=\cos\theta$, получим, принимая во внимание известное диференциальное уравнение,[1] которому удовлетворяют полиномы Jacobi, что

$$(133)\qquad \frac{d^2 f_{n,\rho,\rho_1}(x)}{d\theta^2}+\frac{1}{\lambda_n^2}f_{n,\rho,\rho_1}(x)=0,$$

где

$$(134)\quad \lambda_n^2(x)=\frac{1-x^2}{(1-x^2)(n+\rho+\rho_1)^2+(1+x)\rho(1-2\rho)+(1-x)\rho_1(1-2\rho_1)}.$$

Так как λ_n^2 асимптотически равно $\frac{1}{(n+\rho+\rho_1)^2}$ во всякой постоянной области, не содержащей точек ± 1, то общий интеграл (133) асимптотически равен $A\cos[(n+\rho+\rho_1)\theta+\varphi]$ во всяком данном интервале, **внутреннем** по отношению к отрезку $(-1, +1)$, где A и φ две произвольных константы.

Таким образом будем иметь на $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, каково бы ни было $o<\varepsilon<1$,

$$(135)\qquad f_{n,\rho,\rho_1}(x)\sim A\cos[(n+\rho+\rho_1)\theta+\varphi],$$

где постоянные не представляют в настоящий момент особой важности.[2]

Для определения A достаточно заметить, что

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{f_n^2(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=H_n^{(2)}[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}][1-\delta],$$

---

[1] $(1-x^2)R_n''(x)+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]R_n'(x)+n(n+\alpha+\beta+1)R_n(x)=0.$

[2] Формула (135) есть, впрочем, классическая асимптотическая формула полиномов Jacobi для **внутренности** интервала $(-1, +1)$ и хорошо известно, что $\varphi=-\rho\pi$.

где δ стремится к нулю вместе с ε; следовательно, в силу (129) и (135) получим

$$\frac{\pi}{2} A^2 \sim \frac{\pi}{2^{2n+\alpha+\beta}},$$

откуда

$$|A| \sim \frac{1}{2^{n+\rho+\rho_1-1}} \sim L_n[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}. \tag{136}$$

Таким образом, по (130), асимптотическая величина максимума $|f_{n,\rho,\rho_1}(x)|$ внутри отрезка $(-1, +1)$ равна

$$L_n[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}];$$

но мы должны еще исследовать величину этого максимума вблизи концов.

Положим с этой целью

$$u_n(x) = f_n^2(x) + \lambda_n^2 \left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2. \tag{137}$$

Тогда, принимая во внимание (133), мы найдем, что

$$\frac{du_n(x)}{d\theta} = 2f_n(x)\frac{df_n(x)}{d\theta} + 2\lambda_n^2 \frac{df_n(x)}{d\theta}\frac{d^2 f_n(x)}{d\theta^2} + 2\lambda_n \frac{d\lambda_n}{d\theta}\left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2 \tag{138}$$

$$= 2\lambda_n \frac{d\lambda_n}{d\theta}\left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2 = \frac{d\lambda_n^2}{d\theta}\left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2,$$

откуда

$$\frac{du_n(x)}{dx} = \frac{d\lambda_n^2}{dx}\left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2 \tag{138 bis}$$

$$= \frac{(1-x)^2\rho_1(1-2\rho_1) - (1+x)^2\rho(1-2\rho)}{[(1-x^2)(n+\rho+\rho_1)^2 + (1+x)\rho(1-2\rho) + (1-x)\rho_1(1-2\rho_1)]^2}\left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2.$$

Следовательно знак $\frac{du_n}{dx}$ тот же, что и $\frac{d\lambda_n^2}{dx}$.

В частности $u_n(x)$ [также как и $\lambda_n^2(x)$] будет постоянна, если имеем одновременно $\rho=0$ или $\rho=\frac{1}{2}$ и $\rho_1=0$ или $\rho_1=\frac{1}{2}$; это есть четыре ранее указанных случая, когда нормированные полиномы Jacobi сводятся к виду (124).

Вообще числитель (138bis) обращается в нуль для

$$x = \frac{[\sqrt{\rho_1(1-2\rho_1)} \mp \sqrt{\rho(1-2\rho)}]^2}{(\rho_1-\rho)(1-2\rho-2\rho_1)};$$

стало быть $u_n(x)$ достигнет extremum'а внутри отрезка $(-1, +1)$ в случае, если

$$(139) \qquad \rho\rho_1(1-2\rho)(1-2\rho_1) \geq 0,$$

т. е. если имеем одновременно оба неравенства (131), или если ни одно из этих неравенств не выполняется; этот extremum будет, следовательно, достигнут для

$$(140) \qquad x_0 = \frac{\sqrt{\rho_1(1-2\rho_1)} - \sqrt{\rho(1-2\rho)}}{\sqrt{\rho_1(1-2\rho_1)} + \sqrt{\rho(1-2\rho)}}.$$

При предположении (131) extremum будет максимумом: кривая тогда поднимается от -1 до x_0, а затем идет вниз, когда x меняется от x_0 до 1. Но по (137) максимумы $f_n^2(x)$ равны соответствующим значениям $u_n(x)$.

А значит в случае

$$(131\text{bis}) \qquad o < \rho < \frac{1}{2}, \qquad o < \rho_1 < \frac{1}{2},$$

абсолютный максимум M_n функции

$$(132\text{bis}) \qquad |f_n(x)| = (1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1} |R_n^{(\alpha,\beta)}(x)|$$

будет достигнут или для $x = x_0$ или, по крайней мере, для одного из последовательных корней $f'(x) = 0$, между которыми находится x_0. В силу (136), асимптотическая величина этого абсолютного максимума есть

$$(141) \qquad M_n \sim \frac{1}{2^{n+\rho+\rho_1-1}} \sim L_n[(1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1}].$$

Первая часть предложения, высказанного нами в начале этого параграфа, следовательно, доказана.

4. В случае, когда ни одно из неравенств (131) не выполняется, extremum $u_n(x)$ есть минимум, так что максимумы (132 bis) идут, увеличиваясь от x_0 к концам. Наконец, в случае, когда выполняется только одно из неравенств (131), например, если $o \leqq \rho_1 \leqq \frac{1}{2}$, $\rho > \frac{1}{2}$, то функция $Y = u_n(x)$ изменяется все время монотонно; точно также и максимумы (132 bis) в данном случае возрастают слева направо.

Мы должны показать, что теперь абсолютный максимум M_n(132 bis), который равен, следовательно, по крайней мере, одному из максимумов, наиболее близких к концам, будет и асимптотически превосходить величину $|A| = \frac{1}{2^{n+\rho+\rho_1-1}}$, представляющую асимптотическое выражение для внутренних максимумов.

Положим для определенности $\rho > \frac{1}{2}$. Тогда знаменатель $\lambda_n^2(x)$ обращается в нуль для x, близкого к $+1$, но нам незачем рассматривать маленький интервал, в котором $\lambda_n^2(x)$ будет отрицательна, так как в этом интервале вследствие (133) $f_n(x)$ не может иметь extremum и тем более не может в нем обращаться в нуль.

Следовательно, для достаточно большого n наиболее близкий к 1 extremum a удовлетворяет асимптотическому неравенству

$$\sin\theta = \sqrt{1-a^2} > \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{n+\rho+\rho_1},$$

где

$$\delta = 2\rho(2\rho-1)$$

(это неравенство, очевидно, точно для всех n, когда $\rho \geqq \rho_1$).

С другой стороны, на ссновании теории линейных диференциальных уравнений второго порядка $f_n(x) = f_n(\cos\theta)$ обязательно имеет extremum в интервале длины πL, где L наибольшая величина λ_n в этом интервале. Стало быть, если мы положим для достаточно большого n

$$\theta = \frac{z}{n+\rho+\rho_1},$$

то будет существовать такой extremum $a = \cos\theta$, что

$$\text{(141a)}\qquad \frac{z}{n+\rho+\rho_1} \leqq \theta_0 < \frac{z}{n+\rho+\rho_1} + \frac{\pi z}{n+\rho+\rho_1}\;\frac{1}{\sqrt{z^2-\delta}}.$$

Минимизируя второй член (141a), получаем $z^2 = \delta + (\pi\delta)^{\frac{2}{3}}$; следовательно,

$$\text{(142)}\qquad b = \frac{\delta^{\frac{1}{3}}\left(\pi^{\frac{2}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{n+\rho+\rho_1} \leqq \theta_0 < \frac{\left(\pi^{\frac{2}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{n+\rho+\rho_1}.$$

Мы будем сравнивать максимум $M > A$ функции $|f_n|$ в этом интервале с внутренними максимумами A. С этой целью заметим, что при $o \leqq \cos\varphi_{k+1} < \cos\varphi_k$, соответствующих двум последовательным extrema M_k, M_{k+1} функции $f_n(x)$, будем иметь по (133) и (137), интегрируя по частям

$$\text{(143)}\qquad \int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \left(\frac{df_n}{d\theta}\right)^2 d\theta = \int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \frac{f_n^2\, d\theta}{\lambda_n^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \frac{u_n\, d\theta}{\lambda_n^2}.$$

Следовательно, в силу (138), мы имеем

$$(144)\qquad \int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \frac{d\lambda_n^2}{d\theta}\left(\frac{df_n}{d\theta}\right)^2 d\theta = f_n^2(\cos\varphi_{k+1}) - f_n^2(\cos\varphi_k)$$

$$= M_{k+1}^2 - M_k^2 = H\int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} u_n \frac{d\ln\lambda_n}{d\theta}\,d\theta,$$

причем положительное число H заключено между наибольшим и наименьшим из значений дроби

$$\frac{\dfrac{d\lambda_n^2(\cos\psi_0)}{d\theta}}{\dfrac{d\lambda_n^2(\cos\psi_1)}{d\theta}},$$

где

$$\varphi_k \leqq \psi_0 \leqq \varphi_{k+1}, \qquad \varphi_k \leqq \psi_1 \leqq \varphi_{k+1}.$$

Стало быть, последовательные максимумы $M_k > M_{k+1}$ будут удовлетворять неравенству

$$(145)\quad M_k^2 - M_{k+1}^2 > HM_{k+1}^2 \ln\frac{\lambda_n(\cos\varphi_k)}{\lambda_n(\cos\varphi_{k+1})} > HA^2\frac{\ln\lambda_n(\cos\varphi_k)}{\ln\lambda_n(\cos\varphi_{k+1})}.$$

Мы получим нижний предел H, взяв для ψ_0 и ψ_1 два крайних значения (142), что дает для достаточно большого n

$$H > \frac{\delta\left(\pi^{\frac{2}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)}{\left[\pi^{\frac{4}{3}} + 3\pi^{\frac{2}{3}}\delta^{\frac{1}{3}} + 3\delta^{\frac{2}{3}}\right]^2}.$$

Следовательно, окончательно, складывая неравенства (145) и взяв для θ_0 его наибольшее значение (142), получим

$$(146)\ M^2 > A^2\left[1 + \frac{\delta\left(\pi^{\frac{1}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)}{2\left[\pi^{\frac{4}{3}} + 3\pi^{\frac{2}{3}}\delta^{\frac{1}{3}} + 3\delta^{\frac{1}{3}}\right]^2}\ln\left(1 + \frac{\delta}{\pi^2 + 3\pi^{\frac{4}{3}}\delta^{\frac{1}{3}} + 3\pi^{\frac{2}{3}}\delta^{\frac{2}{3}}}\right)\right].$$

Примечание. Такие же рассуждения (пользуясь, в частности неравенством (145) в его наиболее сильной форме и замечая, что $\lambda_n \sim \dfrac{1}{n+\rho+\rho_1}$ во внутренних точках) позволяют немного увеличить нижний предел M, но мы не будем этим заниматься. Заметим только, что из предыдущего не следует, что θ_0, определенное из неравенства (142), является наименьшим значением θ, соответствующим extremum'у. Во всяком случае будет не более одного extremum'a при $\theta < \theta_0$, так как легко видеть, что $f_n(\cos\theta)$ и, следовательно, соответствующий полином Jacobi не может иметь корня $\theta < b$ (кроме нуля). Достаточно проверить, что

$$\sqrt{\delta + (\pi\delta)^{\frac{2}{3}}}\left(1 - \frac{\pi}{2(\pi\delta)^{\frac{1}{3}}}\right) < \delta^{\frac{1}{2}}, \tag{147}$$

каково бы ни было $\delta > 0$, так как интервал длины $\frac{\pi}{2}l$, где $l < \lambda_n$, не может содержать одновременно корень и extremum.

Следовательно, если через $\cos\gamma_0$ обозначим корень полинома Jacobi с параметрами $\alpha = 2\rho - \frac{1}{2}$, $\beta = 2\rho_1 - \frac{1}{2}$, где $\rho > \frac{1}{2}$ наиболее близкий к $+1$, то γ_0 для достаточно большого n удовлетворяет (142), т. е.

$$b = \frac{\delta^{\frac{1}{3}}\left(\pi^{\frac{2}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{n + \rho + \rho_1} < \gamma_0 < \frac{\left(\pi^{\frac{2}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{n + \rho + \rho_1}. \tag{142 bis}$$

Если $\cos\varphi_0 = x$ есть наиболее близкое к 1 значение x, при котором $f_n(x)$ достигает extremum'a, то $\varphi_0 < \gamma_0$, и значит

$$\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{n + \rho + \rho_1} < \varphi_0 < \frac{\left(\delta^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\pi^{\frac{2}{3}}\right)\left(\delta^{\frac{1}{3}} + \pi^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{n + \rho + \rho_1}, \tag{148}$$

так как в интервале $\left(b,\ b + L\frac{\pi}{2}\right)$ должен быть корень или extremum $f_n(x)$.

5. В случае, когда ни одно из неравенств (131) не имеет места, extremum $M_n f_n(x)$ в точке (140) дает, по обобщенной теореме de la Vallée Poussin'a[1] нижний предел выражения

$$L_n\left[(1 - x)^{\rho}(1 + x)^{\rho_1}\right],$$

каково бы ни было n, но по предыдущему, функция $f_n(x)$ не минимизирует уклонение соответствующего произведения даже при $n \to \infty$. Напротив, если неравенства (131) удовлетворяются, максимумы $f_{n,\,\rho,\,\rho_1}(x)$ вблизи концов меньше M_n, так что имеем в силу фундаментальной теоремы Чебышева для конечного n

$$M_n > L_n\left[(1 - x)^{\rho}(1 + x)^{\rho_1}\right].$$

Таким образом нижний предел L_n, который нам даст теорема Vallée Poussin'a, не превзойдет величины относительного

---

[1] См. мои „Leçons", p. 5.

максимума $|f_n(x)|$ вблизи концов, и кажется с первого взгляда неожиданным, что $f_n(x)$, не имея асимптотически для $n \to \infty$ $n+1$ равных extrema[1] все же для $n \to \infty$ асимптотически минимизирует уклонение соответствующего произведения.

При этих условиях мне кажется полезным непосредственно доказать, что $f_n(x)$ реализует асимптотически минимальное уклонение, так как такое же рассуждение может быть применимо в аналогичных случаях.[2]

Для упрощения письма мы ограничимся случаем, когда имеем либо $\rho_1 = \rho$, либо $\rho_1 + \rho = \frac{1}{2}$.

Тогда

$$\lambda_n^2(x) = \frac{1 - x^2}{(1 - x^2)(n + \rho + \rho_1)^2 + 2\rho(1 - 2\rho)} \tag{134 bis}$$

есть четная функция.

Из (137 и 138 bis) мы заключим, полагая $x > 0$, что

$$0 > \frac{du_n(x)}{dx} \geqq \frac{u_n(x)}{\lambda_n^2(x)} \frac{d\lambda_n^2(x)}{dx};$$

следовательно, принимая во внимание, что теперь $x_0 = 0$, имеем

$$0 > \int_0^x \frac{d \ln u_n(x)}{dx} dx > \int_0^x \frac{\mathrm{d}\ln\lambda_n^2}{dx} dx,$$

откуда

$$0 > \ln \frac{u_n(x)}{u_n(0)} > \ln \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + \frac{2\rho(1 - 2\rho)}{(n + \rho + \rho_1)^2}}. \tag{149}$$

Поэтому, обозначая через x_i абсциссы тех точек, где $f_n^2(x)$ достигает максимума, имеем

$$\left\{\begin{array}{l} u_n(0) > u_n(x) > n_n(0) \dfrac{1}{1 + \dfrac{2\rho(1 - 2\rho)}{(1 - x^2)(x + \rho + \rho_1)^2}}, \\ \text{откуда} \\ f_n^2(x_i) > \dfrac{M_n^2}{1 + \dfrac{2\rho(1 - 2\rho)}{(1 - x_i^2)(x + \rho + \rho_1)^2}}, \end{array}\right. \tag{150}$$

---

[1] Тот факт, что указанное неравенство существует также асимптотически, может быть установлен теми же рассуждениями, которые нас привели в § 4 к тому же заключению в случае, когда (131) не имеет места.

[2] В частности, если задаться коэфициентом при x^k, где $\lim \frac{k}{n} = 1$ или $\lim \frac{k}{n} = 0$, полагая k и n одной четности и $\rho = \rho_1$.

так как для четного n $u_n(0) = M_n^2 =$ абсолютному максимуму $[f_n(x)]^2$, и для нечетного n $u_n(0) = \dfrac{\left(\dfrac{df_n(0)}{dx}\right)^2}{(n+\rho+\rho_1)^2+2\rho(1-2\rho)}$ и $M_n^2 < u_n(0)$; к тому же в этом случае также $\dfrac{M_n^2}{u_n(0)}$ быстро стремится к 1, когда $n \to \infty$.

Нам, следовательно, достаточно показать, что при всяком постоянном $a (1 > a > 0)$ можно будет утверждать, взяв n достаточно большим, что ни один полином $P_n(x)$ степени n, имеющий старшим членом старший член соответствующего полинома Jacobi $R_n^{(\alpha,\beta)}$, вставленный вместо этого последнего в $f_n(x)$, не сделает это произведение по абсолютной величине меньшим чем $|1-a|\ M_n$ на интервале $(-1, +1)$.

Действительно, если бы подобный полином существовал, то должен был бы существовать полином $Q(x)$ степени меньше n, полученный при помощи вычитания, такой, что функция

(151) $$\psi(x) = (1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1} Q(x)$$

обладала бы свойством

(152) $$(-1)^i\ \psi(x_i) = a_i > \frac{M_n}{\sqrt{1+\dfrac{2\rho(1-2\rho)}{\varepsilon^2(n+\rho+\rho_1)^2}}} - M_n(1-a) > \frac{M_n a}{2},$$

когда $1 - x_i^2 > \varepsilon^2$, где ε постоянное произвольно малое число, и свойством

(153) $$|\psi(x)| < 2M_n$$

на всем отрезке, предполагая, что $\varepsilon(n+\rho+\rho_1) \geqq \sqrt{\dfrac{2\rho(1-2\rho)}{a}}$.

Но, положив

(154) $$F(x) = (1-x^2)\frac{dR_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} + [(\rho_1-\rho)-(\rho+\rho_1)x]\,R_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

получим, пользуясь интерполяционной формулой Lagrange'а,

(155) $$Q(x) = F(x)\sum\frac{\psi(x_i)}{(x-x_i)(1-x_i)^\rho(1+x_i)^{\rho_1}F'(x_i)}.$$

Напишем, что коэфициент при x^n в $Q(x)$ есть нуль: стало быть

(156) $$\sum\frac{\psi(x_i)}{(1-x_i)^\rho(1+x_i)^{\rho_1}F'(x_i)} =$$

$$= \sum \frac{(-1)^i a_i}{(1-x_i)^\rho (1+x_i)^{\rho_1}} \times$$

$$\times \frac{1}{\left\{ [(\rho+\rho_1-1)x_i+\rho-\rho_1] \frac{dR_n^{(\alpha,\beta)}(x_i)}{dx} - [n^2+(2n+1)(\rho+\rho_1) R_n^{(\alpha,\beta)}(x_i) \right\}} = 0,$$

принимая во внимание диференциальное уравнение, которому удовлетворяют полиномы Jacobi $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Следовательно, так как $F(x_i)=0$, формула (156) преобразуется в

$$\sum \frac{(-1)^i a_i}{(1-x_i)^\rho (1+x_i)^{\rho_1} R_n^{(\alpha,\beta)}(x_i)} \times \tag{157}$$

$$\times \frac{1}{\left\{ \frac{[(\rho+\rho_1-1)x_i+\rho-\rho_1][(\rho+\rho_1)x_i+\rho-\rho_1]}{1-x_i^2} - [n^2+(2n+1)(\rho+\rho_1)] \right\}}$$

$$= \sum \frac{(-1)^{i-1} a_i}{(1-x_i)^\rho (1+x_i)^{\rho_1} R_n^{(\alpha,\beta)}(x_i) \left[(n+\rho+\rho_1)^2 + \frac{2\rho(1-2\rho)}{1-x_i^2} \right]}$$

$$= \sum \frac{a_i}{f(x_i)\left[(n+\rho+\rho_1)^2 + \frac{2\rho(1-2\rho)}{1-x_i^2}\right.} = 0.$$

Но равенство (157), очевидно, невозможно, так как часть этой суммы, соответствующая точкам x_i, удовлетворяющим (152), число которых асимптотически равно $n(1-2\varepsilon)$, составлена из положительных членов и больше чем

$$\frac{n(1-2\varepsilon)a}{2\left[(n+\rho+\rho_1)^2 + \frac{2\rho-4\rho^2}{\varepsilon^2}\right]},$$

тогда как каждый из остальных членов, число которых асимптотически равно $2n\varepsilon$, не превосходит по абсолютной величине, в силу (150) и (153),

$$\frac{2M_n}{|f_n(x_i)|\left[(n+\rho+\rho_1)^2 + \frac{2\rho-4\rho^2}{1-x_i^2}\right]} < \frac{2\sqrt{1+\frac{2\rho-4\rho^2}{(1-x_i^2)(n+\rho+\rho_1)^2}}}{(n+\rho+\rho_1)^2 + \frac{2\rho-4\rho^2}{1-x_i^2}}$$

$$= \frac{2}{(n+\rho+\rho_1)^2\sqrt{1+\frac{2\rho-4\rho^2}{(1-x_i^2)(n+\rho+\rho_1)^2}}}$$

$$< \frac{2}{(n+\rho+\rho_1)^2\sqrt{1+\frac{2\rho-4\rho^2}{\varepsilon^2(n+\rho+\rho)^2}}}.$$

Равенство (157) привело бы к неравенству

$$(158)\qquad \frac{(1-2\varepsilon)a}{2\sqrt{1+\dfrac{2\rho-4\rho^2}{\varepsilon^2(n+\rho+\rho_1)^2}}}<4\varepsilon,$$

невозможному для достаточно больших n, если выбрать

$$a>\frac{8\varepsilon}{1-2\varepsilon}.$$

Примечание. При помощи совершенно аналогичного рассуждения можно показать, что произведение

$$Q_n(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1},$$

где $Q_n(x)$ есть полином степени n, достигает асимптотически минимальнаго уклонения

$$(159)\qquad I_n\sim 2\left(\frac{1}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}\right)^{n+\rho+\rho_1}$$

на отрезке $(-1, +1)$, если в точке $\xi>1$

$$Q_n(\xi)(\xi-1)^\rho(\xi+1)^{\rho_1}=1.$$

В случае, когда $0\leqq\rho\leqq\frac{1}{2}$, $0\leqq\rho_1\geqq\frac{1}{2}$, это минимальное уклонение асимптотически реализуется соответствующими полиномами Jacobi (умноженными на подходящую константу).

6. Остановимся на минуту на случае полиномов Legendre'a $\left(\rho=\rho_1=\frac{1}{4}\right)$. Теперь абсолютный максимум $|f_n(x)|$ будет достигнут для $x=0$, если $n=2m$ четно, и когда $n=2m+1$ нечетно, для x равного наименьшему корню $f_n'(x)=0$.

Следовательно, обозначая через $P_n(x)$ классические полиномы Legendre'a [т. е. предполагая, что $P_n(1)=1$], имеем для всякого $n=2m$

$$(160)\qquad (1-x^2)^{\frac{1}{4}}\left|P_{2m}(x)\right|\leqq\frac{1\cdot 3\ldots 2m-1}{2\cdot 4\ldots 2m}$$

на всем отрезке $(-1, +1)$, и равенство действительно имеет место в начале координат.

Для $n=2m+1$ максимум $u_n(x)$ будет равен

$$\lambda_n^2(0)\left(\frac{df_n(0)}{d\theta}\right)^2=\frac{1}{n^2+n+\dfrac{1}{2}}[R_n'(0)]^2,$$

так что

$$(161)\quad (1-x^2)^{\frac{1}{4}}\left|P_{2m+1}(x)\right| < \frac{1\cdot3\ldots2m-1}{2\cdot4\ldots2m}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4m+3}{8m^2+8m+2}}},$$

так как $$P'_{2m+1}(0) = \pm\frac{1\cdot3\ldots2m+1}{2\cdot4\ldots2m};$$

для нечетного n, величина второй части (161) будет достигаться только асимптотически. Таким образом, каково бы ни было n, имеем (на интервале $-1, +1$) по формуле Wallis'а

$$(162)\qquad (1-x^2)^{\frac{1}{4}}\left|P_n(x)\right| < \sqrt{\frac{1}{m\pi}},$$

где $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ (величина второго члена не может быть асимптотически понижена).

Stieltjes первый заметил, что можно указать такую постоянную A, что

$$(1-x^2)^{\frac{1}{4}}\left|P_n(x)\right| < \frac{A}{\sqrt{n}}.$$

Fejér, который вернулся недавно[1] к этому вопросу, указывает, что лучшее значение для A, равное $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, было получено Gronwall'ом;[2] по предыдущему нижний предел для A, который зависит от n, приблизительно в два раза меньше, и его асимптотическая величина для $n \to \infty$, ровно в два раза меньше найденной Gronwall'ом.

В том же месте Fejér получает неравенство для производной полинома Legendre'а

$$(1-x^2)\left|P_n'(x)\right| < \frac{7}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{n}.$$

Это неравенство может быть также уточнено.

С этой целью возьмем снова ортогональные полиномы $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, имеющие x^n старшим членом, так что

$$(163)\qquad R_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{n}\frac{d}{dx}\left[R_n^{(\alpha-1,\,\beta-1)}(x)\right],$$

и рассмотрим

$$(132\,\text{bis})\qquad f_{n,\rho}(x) = (1-x^2)^{\rho} R_n^{(\alpha,\alpha)}(x),$$

где мы полагаем $0 < \rho < \frac{1}{2}$.

---

[1] Math. Zeitschrift, t 22, 1925, p. 267 — 298.

[2] Mathem. Annalen, t. 72, 1913, p. 213 — 270.

Исходя из сделанного выше замечания (§ 4), заключаем, что все extrema $f_{n,\,\rho+\frac{1}{2}}(x)$ удовлетворяют неравенству

$$(164)\qquad (1-x^2) > \frac{2\rho(2\rho+1)}{(n+1+2\rho)^2}.$$

Следовательно, в этих точках имеем

$$\lambda_{n+1,\rho}(x) > \frac{\sqrt{2\rho(2\rho+1)}}{(n+1+2\rho)\sqrt{2\rho(2\rho+1)+2\rho(1-2\rho)}} = \frac{\sqrt{\rho+\frac{1}{2}}}{n+1+2\rho}.$$

Но в силу (137), имеем

$$(165)\qquad \left|\lambda_{n+1,\rho}(x)\,\frac{df_{n+1,\rho}(x)}{d\theta}\right| \leqq M_{n+1,\rho},$$

где $M_{n,\rho} \sim \frac{1}{2^{n+2\rho-1}}$ обозначает максимум $\sqrt{u_n(x)}$; стало быть,

$$\left|(1-x^2)^{\rho+\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left[R_{n+1}^{(\alpha,\alpha)}(x)\right] - 2\rho(1-x^2)^{\rho-\frac{1}{2}}R_{n+1}^{(\alpha,\alpha)}(x)\right|$$

$$= \left|\frac{df_{n-1,\rho}(x)}{d\theta}\right| < \frac{n+1+2\rho}{\sqrt{\rho+\frac{1}{2}}}M_{n+1,\rho},$$

откуда

$$\left|(1-x^2)^{\rho+\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left[R_{n+1}^{(\alpha,\alpha)}(x)\right]\right| < \left[\frac{2\rho}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{n+1+2\rho}{\sqrt{\frac{1}{2}+\rho}}\right]M_{n+1,\rho}$$

$$< \frac{(1+\sqrt{\rho})(n+1+2\rho)}{\sqrt{\rho+\frac{1}{2}}}M_{n+1,\rho}$$

Следовательно,

$$(166)\left|f_{n,\rho+\frac{1}{2}}(x)\right| < \frac{1+\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{2}+\rho}}M_{n+1,\rho}\left(1+\frac{2\rho}{n+1}\right) \sim \frac{1}{2^{n+2\rho}}\frac{1+\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{2}+\rho}}.$$

В частности в случае полиномов Legendre'а имеем

$$P_n(x) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{n!}R_n^{(0,0)}(x),$$

стало быть

$$(167)\qquad \left|(1-x^2)^{\frac{3}{4}}P_n'(x)\right| < \left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\,M_{n,\frac{1}{4}}\frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{n!}$$

$$< \left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{6}{n\pi}} \sim \sqrt{\frac{6n}{\pi}}.$$

В этом неравенстве не только коэфициент при $\sqrt{n}$ во втором члене меньше коэфициента Fejér'а, но наиболее существенным является то, что множитель при $P_n'(x)$ есть $(1-x^2)^{\frac{3}{4}}$ вместо $(1-x^2)$ и показатель $(1-x^2)$ не может быть еще уменьшен без увеличения порядка величины второго члена.

Если сохранить показатель 1 при $1-x^2$, то при помощи такого же рассуждения получим, заметив, что для $\rho=\rho_1\leqslant\frac{1}{2}$ [в точках, где $f_{n,\rho+\frac{1}{2}}(x)$ имеет extremum]

$$\lambda_{n+1,\rho}(x)\geqq\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{n+1+2\rho},$$

что для достаточно большого n

$$|(1-x^2)P_n'(x)|<\sqrt{\frac{2n}{\pi}}, \tag{168}$$

и как в (162), величина второго члена формулы (168) не может быть асимптотически уменьшена.

7. Важно иметь верхний предел $|f_n(x)|$ для всех полиномов Jacobi ($\rho\geqq 0$, $\rho_1\geqq 0$).

Случай $\rho\gtreqless\rho_1$ не требует существенных изменений в вычислениях. Так, пользуясь формулой (163), можно будет перейти последовательно к произвольным значениям α, β, удовлетворяющим одновременно неравенствам

$$|\alpha-k|\leqq\frac{1}{2},\qquad|\beta-k|\leqq\frac{1}{2},$$

где k некоторое целое число.

Для этого положим

$$v_n=f^2+\frac{f_\theta'^2}{(n+\rho+\rho_1)^2}, \tag{169}$$

где $f=f_{n,\rho,\rho_1}$. Стало быть

$$v_\theta'=2f_\theta'\left[f+\frac{f''}{(n+\rho+\rho_1)^2}\right]=2f'\left[f-\frac{f}{\lambda_n^2(n+\rho+\rho_1)^2}\right] \tag{170}$$

$$=\frac{-2f'f}{(1-x^2)(n+\rho+\rho_1)^2}[\rho(1-2\rho)(1+x)+\rho_1(1-2\rho)(1-x)]$$

$$=2f'f''\left[\frac{1}{(n+\rho+\rho_1)^2}-\lambda_n^2\right].$$

Следовательно, $v_n(x)$ достигает extremum'а одновременно с f_n^2 и $f_n'^2$.

В частности, когда

(171) $$\rho > \frac{1}{2}, \quad \rho_1 > \frac{1}{2},$$

максимумы v_n соответствуют максимумам f_n^2. Стало быть, при условии (171), абсолютный максимум M_{n,ρ,ρ_1} функции $f_{n,\rho,\rho_1}(x)|$ совпадает с таковым функции $\sqrt{v_n}$, так что абсолютный максимум M'_{n,ρ,ρ_1} модуля $\left|\frac{df_{n,\rho,\rho_1}(x)}{d\theta}\right|$ удовлетворяет неравенству

(172) $$M'_{n,\rho,\rho_1} < (n+\rho+\rho_1)\, M_{n,\rho,\rho_1}.$$

Значит, ограничиваясь, для упрощения письма, случаем $\rho = \rho_1$, имеем, принимая во внимание (164),

$$\left|(1-x^2)^{\rho+\frac{1}{2}}\, \frac{dR_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}\right| < (n+1+2\rho)\, M_{n+1,\rho} + \frac{2\rho M_{n+1,\rho}}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$< (n+1+2\rho)\left[1+\sqrt{\frac{\rho}{\frac{1}{2}+\rho}}\right],$$

откуда

(173) $$M_{n,\rho+\frac{1}{2}} < \left(1+\frac{2\rho}{n+1}\right)\left[1+\sqrt{\frac{\rho}{\frac{1}{2}+\rho}}\right] M_{n+1,\rho}.$$

Следовательно, считая уже известным существование такой постоянной A_ρ, что

$$M_{n,\rho} < A_\rho\, L_n\,[(1-x\,)^\rho] \sim \frac{A_\rho}{2^{n+2\rho-1}},$$

получим также для достаточно большого n

$$M_{n,\rho+\frac{1}{2}} < \frac{A_{\rho+\frac{1}{2}}}{2^{n+2\rho}},$$

где

$$A_{\rho+\frac{1}{2}} < \left[1+\sqrt{\frac{\rho}{\rho+\frac{1}{2}}}\right] A_\rho.$$

Будем иметь, стало быть, a fortiori, каково бы ни было $\rho > \frac{1}{2}$,

(174) $$M_{n,\rho} < 2^{2\rho} L_n\,[(1-x^2)^\rho] \sim \frac{1}{2^{n-1}},$$

что означает, что полиномы Jacobi степени n, умноженные на соответствующие множители $(1-x^2)^{\rho}$, уклоняются от нуля на отрезке $(-1, +1)$ не более чем полиномы Чебышева степени n, имеющие тот же старший член.

Чтобы ограничить M_{n,ρ,ρ_1}, когда $\rho \geqq \frac{1}{2}$, $\rho_1 \geqq \frac{1}{2}$ произвольны, нужно использовать таким же образом вместо (163) формулу

$$R_{n-1}^{(\alpha,\beta+1)}(x) = \frac{1+\frac{\alpha+\beta}{2n}}{n+\alpha}\left[(1-x)\frac{d}{dx}\left[R_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right] + nR_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right], \tag{175}$$

которая следует из того, что коэфициент при x^{n-1} у $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ равен $\frac{n(\alpha-\beta)}{2n+\alpha+\beta}$, так что полином степени $n-1$, таким образом построенный, ортогональный в $(-1, 1)$ относительно веса $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta+1}$ имеет старшим членом x^{n-1}.

Применяя (175), найдем таким образом последовательно неравенство, аналогичное (174).

Единственный случай, который еще остается исследовать, это тот, когда выполнено только одно из неравенств (171): пусть

$$\rho < \frac{1}{2}, \quad \rho_1 > \frac{1}{2}.$$

В этом случае, по (138), абсолютный максимум $|f_{n,\rho,\rho_1}(x)|$ достигается вблизи конца -1, а ее относительные максимумы идут, убывая слева направо. Но, с другой стороны, по (170) максимумы v_n будут соответствовать таковым $f_n^2(x)$, как только

$$\rho(1-2\rho)(1+x) + \rho_1(1-2\rho_1)(1-x) < 0,$$

т. е. когда

$$-1 < x < \frac{\rho_1(2\rho_1-1)+\rho(2\rho-1)}{\rho_1(2\rho_1-1)+\rho(1-2\rho)}. \tag{176}$$

Стало быть, неравенство (172) существует, если обозначить через M'_{n,ρ,ρ_1} абсолютный максимум $\left|\frac{df}{d\theta}\right|$ для x, расположенного в интервале (176).

Таким образом

$$\left|(1-x)^{\rho+\frac{1}{2}}(1+x)^{\rho_1+\frac{1}{2}}R'_{n+1}(x)\right| < (n+1+\rho+\rho_1)M_{n+1,\rho,\rho_1} + \tag{177}$$

$$+\frac{2\rho_1}{\sqrt{1-x^2}}M_{n+1,\rho,\rho_1}.$$

Стало быть, учитывая, что абсолютный максимум $[f_{n,\rho,\rho_1+\frac{1}{2}}(x)]$ достигается вблизи $x=-1$, и применяя (164) (где ρ должно быть заменено на ρ_1), имеем по (175) для достаточно больших n

$$M_{n,\rho,\rho_1+\frac{1}{2}} < \sqrt{2}\left[1+\sqrt{\frac{\rho_1}{\frac{1}{2}+\rho_1}}\right] M_{n-1,\rho,\rho_1}.$$

Таким образом можно во всех случаях найти такую константу A_{ρ_1}, зависящую от ρ_1, что

(178) $$M_{n,\rho,\rho_1} < A_{\rho_1} L_n[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}] \quad \left(\rho_1 > \frac{1}{2}\right).$$

Заметим, наконец, что в предположении

$$\rho < \frac{1}{2}, \quad \rho_1 > \frac{1}{2}$$

ни одна из функций u_n и v_n не остается конечной во всем интервале $(-1, +1)$. Для этого случая удобно построить функцию

(179) $$w_n(x) = f_n^2 + \mu_n^2\left(\frac{df_n}{d\theta}\right)^2,$$

где

(180) $$\mu_n^2 = \frac{1-x}{(1-x)(n+\rho+\rho_1)^2+\rho(1-2\rho)}.$$

Имеем на всем отрезке $\mu_n^2 < \frac{1}{(n+\rho+\rho_1)^2}$. Применяя это неравенство в интервале (176), мы заключаем, что

(181) $$w_n(x) \leqq M^2_{n,\rho,\rho_1}$$

в этом интервале. Но когда $\lambda_n^2 > 0$, что имеет место на всем отрезке $(-1, +1)$, исключая весьма малый промежуток вблизи -1 и, следовательно, в частности, на части отрезка $(-1, +1)$, внешней по отношению к интервалу (176), то $\mu_n^2 < \lambda_n^2$; стало быть, имеем в этой последней части

(182) $$w_n(x) \leqq u_n(x) < M^2_{n,\rho,\rho_1},$$

так как $u_n(x)$ убывает слева направо. Следовательно, неравенство (181) справедливо на всем отрезке, и мы имеем a fortiori на всем отрезке

(183) $$\mu_n\left|\frac{df_{n,\rho,\rho_1}}{d\theta}\right| < M_{n,\rho,\rho_1}.$$

При $\rho > \frac{1}{2}$ и $\rho_1 < \frac{1}{2}$ мы получим, очевидно, аналогичный результат.

8. Таким образом, в случае $\rho < \frac{1}{2}$, $\rho_1 < \frac{1}{2}$ нужно рассматривать функцию $u_n(x)$ |137|; в случае $\rho \geqq \frac{1}{2}$, $\rho_1 \geqq \frac{1}{2}$ вводится в рассмотрение функция $v_n(x)$ (169); в случаях $\rho < \frac{1}{2}$, $\rho_1 \geqq \frac{1}{2}$ или $\rho \geqq \frac{1}{2}$, $\rho_1 < \frac{1}{2}$ рассматривается функция $w_n(x)$ (179) или соответственно функция $w_n(x)$, где

$$\mu_n^2 = \frac{1+x}{(1+x)(n+\rho+\rho_1)^2 + \rho_1(1-2\rho_1)}. \tag{180 bis}$$

Можно положить, следовательно,

$$f_n = \sqrt{u_n}\cos\Phi_n, \quad \lambda_n \frac{df_n}{d\theta} = -\sqrt{u_n}\sin\Phi_n$$

$$\left(0 \leqq \rho < \frac{1}{2}, \quad 0 \leqq \rho_1 < \frac{1}{2}\right),$$

$$f_n = \sqrt{v_n}\cos\Psi_n, \quad \frac{1}{n+\rho+\rho_1}\frac{df_n}{d\theta} = -\sqrt{v_n}\sin\Psi_n \tag{184}$$

$$\left(\rho \geqq \frac{1}{2}, \quad \rho_1 \geqq \frac{1}{2}\right),$$

$$f_n = \sqrt{w_n}\cos\Xi_n, \quad \mu_n \frac{df_n}{d\theta} = -\sqrt{w_n}\sin\Xi_n \quad \left(0 \leqq \rho < \frac{1}{2}, \ \rho_1 \geqq \frac{1}{2}\right),$$

где $(\lambda_n > 0, \ \mu_n > 0)$,

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\Phi_n = -\lambda_n \dfrac{d\ln f_n}{d\theta}, \quad \operatorname{tg}\Psi_n = \dfrac{-1}{n+\rho+\rho_1}\dfrac{d\ln f_n}{d\theta}, \\ \operatorname{tg}\Xi_n = -\mu_n \dfrac{d\ln f_n}{d\theta}. \end{array}\right. \tag{185}$$

Таким образом, так как

$$-\frac{d\ln f_n}{d\theta} = \left[\frac{-\rho}{1-x} + \frac{\rho_1}{1+x} + \frac{R_n'}{R_n}\right]\sqrt{1-x^2},$$

то Φ_n возрастает[1] от $-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2\rho}{1-2\rho}}$ до $n\pi+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2\rho_1}{1-2\rho_1}}$; Ψ_n возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $n\pi+\frac{\pi}{2}$; Ξ_n возрастает от $-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2\rho}{1-2\rho}}$ до $n\pi+\frac{\pi}{2}$, когда θ изменяется от 0 до π.

Мы покажем теперь, что в каждом рассматриваемом случае имеем для последовательных функций $f_n(x)$ одного индекса асимптотические соотношения:

$$
(186)\quad \begin{cases}
\bar f_{n+k}\sim\sqrt{\bar u_n}\cos(\Phi_n+k\theta),\ \lambda_{n+k}\dfrac{d\bar f_{n+k}}{d\theta}\sim-\sqrt{\bar u_n}\sin(\Phi_n+k\theta) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left(0\leqq\rho<\dfrac{1}{2},\quad 0\leqq\rho<\dfrac{1}{2}\right), \\
\bar f_{n+k}\sim\sqrt{\bar v_n}\cos(\Psi_n+k\theta),\quad \dfrac{1}{n+k+\rho+\rho_1}\dfrac{d\bar f_{n+k}}{d\theta}\sim \\
\qquad\qquad -\sqrt{\bar v_n}\sin(\Psi_n+k\theta) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left(\rho\geqq\dfrac{1}{2},\ \rho_1\geqq\dfrac{1}{2}\right), \\
\bar f_{n+k}\sim\sqrt{\bar w_n}\cos(\Xi_n+k\theta),\quad \mu_{n+k}\dfrac{d\bar f_{n+k}}{d\theta}\sim \\
\qquad\qquad -\sqrt{\bar w_n}\sin(\Xi_n+k\theta) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left(\rho<\dfrac{1}{2},\quad \rho_1\geqq\dfrac{1}{2}\right);
\end{cases}
$$

эти соотношения имеют место равномерно на всем отрезке (—1, +1), если $\frac{k}{n}\to 0$, с ошибкой порядка $O\left(\frac{k}{n}\right)$. В формулах (186) функции $\bar f_{n+k}$, так же как и функции $\bar u_n$, $\bar v_n$, $\bar w_n$ ограничены сверху и отличаются от рассматривавшихся до сих пор соответствующими множителями, которые появляются при замене $R_n(x)$ и $R_{n+k}(x)$ соответствующими нормированными полиномами $\bar R_n(x)$ и $R_{n+k}(x)$.

---

[1] Нужно заметить, что, исключая случай $\alpha=\pm\frac{1}{2}$, $\beta=\pm\frac{1}{2}$, когда асимптотическая формула (135) справедлива тождественно (для всех значений x и n), только при $\alpha=0$, $\beta=0$ значения угла ($-\rho\pi$, $n\pi+\rho_1\pi$), вполне определенные этой классической формулой, соответствуют точным значениям Φ_n.

В силу (128) имеем таким образом

$$(187)\quad \overline{f}_n^2 = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)\,f_n^2(x)}{2^{2n+\alpha+\beta+1}\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)},$$

т. е.

$$(187\text{ bis})\qquad \overline{f}_n(x) \sim \frac{2^{n+\rho+\rho_1}}{\sqrt{2\pi}}\,f_n(x).$$

Легко проверяется реккурентное соотношение

$$(188)\qquad c_n\overline{R}_{n+1}(x) = (x+a_n)\,\overline{R}_n(x) + \frac{x^2-1}{n+1+\alpha+\beta}\,\overline{R}_n'(x),$$

где

$$(189)\quad \left\{\begin{aligned} c_n &= \frac{A_n}{A_{n+1}}\left(1+\frac{n}{n+1+\alpha+\beta}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{(n+1)(n+\alpha+1)(n+\beta+1)\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)}{(n+\alpha+\beta+1)\left(n+1+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\left(n+1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}} = \\ &= 1+O\left(\frac{1}{n}\right), \\ a_n &= \frac{\alpha-\beta}{2(n+1+\alpha+\beta)} + \\ &+ \frac{\alpha^2-\beta^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+2+\alpha+\beta)}\left[1-\frac{\alpha+\beta+2}{2(n+1+\alpha+\beta)}\right] = \\ &= O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}\right.$$

A_n — коэфициент при x^n в $\overline{R}_n(x)$.

Остановимся сначала на первом предположении, когда $|\alpha| < \frac{1}{2}$, $|\beta| < \frac{1}{2}$ и положим (для упрощения письма) $\alpha = \beta$.

Уравнение (188) принимает тогда после умножения на $(1-x^2)^\rho$ вид

$$(190)\qquad c_n\overline{f}_{n+1} = x\overline{f}_n + \frac{x^2-1}{n+4\rho}\left[\frac{\overline{f}_n}{(1-x^2)^\rho}\right]'(1-x^2)^\rho =$$

$$= x\left(1-\frac{2\rho}{n+4\rho}\right)\overline{f}_n + \frac{x^2-1}{n+4\rho}\,\overline{f}_n',$$

откуда

$$(191)\qquad \bar f_{n+1} = x\bar f_n + \frac{(x^2-1)\bar f_n'}{\sqrt{(n+2\rho)^2 + \frac{2\rho(1-2\rho)}{1-x^2}}} + \varepsilon_n =$$

$$= x\bar f_n + \lambda_n\sqrt{1-x^2}\,\frac{d\bar f_n}{d\theta} + \varepsilon_n,$$

где

$$\varepsilon_n = (x^2-1)f_n'\left[\frac{1}{n+4\rho} - \frac{1}{\sqrt{(n+2\rho)^2 + \frac{2\rho(1-2\rho)}{1-x^2}}}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Но

$$\left|\frac{\bar f_n'(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(n+2\rho)^2 + 2\rho(1-2\rho)}}\right| \leqq \max\sqrt{\bar u_n} =$$

$$= \max \bar f_n(x) = O(1)$$

и

$$\left|\frac{\sqrt{(n+2\rho)^2(1-x^2) + 2\rho(1-2\rho)}}{n+4\rho} - \sqrt{1-x^2}\right|$$

$$< \frac{\sqrt{2\rho(1-2\rho)}}{n+4\rho} + \frac{2\rho}{n+4\rho} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Стало быть,

$$(192)\qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно, в силу (191), (192) и первой группы формул (184),

$$(193)\qquad \bar f_{n+1} = \sqrt{\bar u_n}\cos(\Phi_n + \theta) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

С другой стороны, диференцируя (188) и принимая во внимание диференциальное уравнение полиномов Jacobi, имеем

$$(194)\qquad c_n\bar R_{n+1}' = \bar R_n + \left(\frac{2x}{n+1+\alpha+\beta} + x + a_n\right)\bar R_n' + \frac{x^2-1}{n+1+\alpha+\beta}\bar R_n'' =$$

$$= (n+1)R_n + \left(\frac{n+1}{n+1+\alpha+\beta}\,x + a_n + \frac{\beta-\alpha}{n+1+\alpha+\beta}\right)\bar R_n'.$$

Предполагая снова, что $\alpha = \beta$, и умножая на $(1-x^2)^\rho$, найдем

$$(195)\qquad c_n(1-x^2)^\rho\left[\frac{\bar f_{n+1}}{(1-x^2)^\rho}\right]' = (n+1)\bar f_n +$$

$$+\frac{(n+1)x}{n+4\rho}(1-x^2)^\rho\left[\frac{\overline{f}_n}{(1-x^2)^\rho}\right]'=$$

$$=(n+1)\left[\left(1+\frac{2\rho x^2}{(n+4\rho)(1-x^2)}\right)\overline{f}_n+\frac{x}{n+4\rho}\overline{f}'_n\right].$$

Стало быть, вычитая из (195) уравнение (190), умноженное на $\frac{2\rho x}{1-x^2}$, получим

$$c_n\overline{f}'_{n+1}=\left[n+1+\frac{2\rho(1-2\rho)}{(n+4\rho)(1-x^2)}\right]\overline{f}_n+\frac{(n+1+2\rho)x}{n+4\rho}\overline{f}'_n, \tag{196}$$

откуда

$$\lambda_{n+1}\frac{d\overline{f}_{n+1}}{d\theta}=-\overline{f}_n\sqrt{1-x^2}\left[\frac{n+1+\frac{2\rho(1-2\rho)}{(n+4\rho)(1-x^2)}}{\sqrt{(n+1+2\rho)^2+\frac{2\rho(1-2\rho)}{1-x^2}}}\right]+ \tag{197}$$

$$+\lambda_n x\frac{d\overline{f}_n}{d\theta}\left[\frac{n+1+2\rho}{n+4\rho}\frac{\lambda_n}{\lambda_n}\right]+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\lambda_{n+1}\frac{d\overline{f}_{n+1}}{d\theta}=-\overline{f}_n\sqrt{1-x^2}+\lambda_n x\frac{d\overline{f}_n}{d\theta}+\varepsilon_n,$$

где равномерно на всем отрезке $(-1, +1)$

$$\varepsilon_n=\overline{f}_n\left[\sqrt{1-x^2}-\frac{(n+1)(1-x^2)}{\sqrt{(n+1+2\rho)^2(1-x^2)+2\rho(1-2\rho)}}\right]$$

$$+\lambda_n x\frac{d\overline{f}_n}{d\theta}\left[\frac{(n+1+2\rho)\lambda_{n+1}}{(n+4\rho)\lambda_n}-1\right]+O\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому

$$\lambda_{n+1}\frac{df_{n+1}}{d\theta}=-\sqrt{\overline{u}_n}\sin(\Phi_n+\theta)+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{198}$$

Переходя последовательно к $n+2, \ldots, n+k$, мы получим,[1] таким образом, первую группу асимптотических фор-

---

[1] Достаточно будет заметить, что вследствие (193), (198) и (184)

$$\overline{f}_{n+k}-i\lambda_{n+k}\frac{d\overline{f}_{n+k}}{d\theta}=\left[\overline{f}_{n+k-1}-i\lambda_{n+k-1}\frac{d\overline{f}_{n+k-1}}{d\theta}\right](x+\sqrt{x^2-1})+O\left(\frac{1}{n}\right);$$

стало быть, считая доказанным, что

$$\left[\overline{f}_{n+k-1}-i\lambda_{n+k-1}\frac{d\overline{f}_{n+k-1}}{d\theta}\right]=\left[\overline{f}_n-i\lambda_n\frac{d\overline{f}_n}{d\theta}\right](x+\sqrt{x^2-1})^{k-1}+$$

$$+(k-1)O\left(\frac{1}{n}\right)$$

мул |186|, имеющих место равномерно на $(-1, +1)$ с приближением порядка $\frac{k}{n}$.

В частности, полагая

$$\rho = \rho_1 = \frac{1}{4} \qquad (\alpha = \beta = 0),$$

будем иметь

$$\bar{f}_{n+k} \sim \bar{f}_n \cos k\theta + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 (1-x^2) + \frac{1}{4}}} \frac{d\bar{f}_n}{d\theta} \sin k\theta.$$

Следовательно, замечая, что множитель пропорциональности, который нужно ввести для нормирования классических полиномов Legendre'а $P_n(x)$, есть $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$, мы заключаем также, что

$$(199) \qquad \sqrt{\sin\theta}\, P_{n+k} =$$

$$= \sqrt{\sin\theta} \left[P_n \cos k\theta + \frac{\frac{1}{2} P_n \cos\theta - P'_n \sin^2\theta}{\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\theta + \frac{1}{4}}} \sin k\theta \right] + O\left(\frac{k}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

равномерно на всем отрезке $(-1, +1)$.

Для $\rho > \frac{1}{2}$ можно будет записать (190) в виде

$$(200) \qquad \bar{f}_{n+1} = x\bar{f}_n + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n+2\rho} \frac{d\bar{f}_n}{d\theta} + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \sqrt{v_n} \cos(\Psi_n + \theta) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и замечая, что $|x+\sqrt{x^2-1}| = 1$, видим, что

$$\left[\bar{f}_{n+k} - i\lambda_{n+k} \frac{d\bar{f}_{n+k}}{d\theta}\right] = \left(\bar{f}_n - i\lambda_n \frac{d\bar{f}_n}{d\theta}\right)(x+\sqrt{x^2-1})^k + kO\left(\frac{1}{n}\right).$$

и (196) представится после умножения на $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{n+1+2\rho}$ в виде

(201) $$\frac{1}{n+1+2\rho}\frac{d\bar f_{n+1}}{d\theta} = -\sqrt{1-x^2}\,\bar f_n + \frac{x}{n+2\rho}\frac{d\bar f_n}{d\theta} + \varepsilon_n,$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1+2\rho}\left[2\rho - \frac{2\rho(1-2\rho)}{(n+4\rho)(1-x^2)}\right]\bar f_n + O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

так как по (172) для $\rho > \frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{\bar f_n}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\bar f_n}{\sin\theta} = O\left(\frac{d\bar f_n}{d\theta}\right) = O(n).$$

Вторая группа формул (186), следовательно, также доказана.

Перейдем, наконец, к случаю $\rho < \frac{1}{2}$, $\rho_1 > \frac{1}{2}$.

Умножая (188) на $(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}$, получаем

$$\bar f_{n+1} = x\bar f_n + \frac{(x^2-1)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}}{n+2\rho+2\rho_1}\left[\frac{\bar f_n}{(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}}\right]' + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

или

(202) $$\bar f_{n+1} = x\bar f_n + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n+2\rho+2\rho_1}\frac{d\bar f_n}{d\theta} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Но в силу (183)

$$\frac{\mu_n d\bar f_n}{d\theta} = O(1);$$

стало быть,

$$\mu_n\frac{d\bar f_n}{d\theta}\left[\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\mu_n(n+2\rho+2\rho_1)}\right] = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

так как

$$\left|\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{(1-x^2)(n+\rho+\rho_1)^2+(1+x)\rho(1-2\rho)}}{n+2\rho+2\rho_1}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}}{n+2\rho+2\rho_1}\,\frac{\left|(1-x)\left[2(\rho+\rho_1) - \frac{(\rho+\rho_1)^2}{n+2\rho+2\rho_1}\right] - \frac{\rho(1-2\rho)}{n+2\rho+2\rho_1}\right|}{\sqrt{1-x} + \sqrt{(1-x)\left(\frac{n+\rho+\rho_1}{n+2\rho+2\rho_1}\right)^2 + \frac{\rho(1-2\rho)}{(n+2\rho+2\rho_1)^2}}} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно, для $\rho < \frac{1}{2}$, $\rho_1 > \frac{1}{2}$,

$$(203)\qquad \overline{f}_{n+1} = x\overline{f_n} + \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mu_n d\overline{f_n}}{d\theta} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\overline{w}_n}\cos(\Xi_n + 0) + $$
$$+ O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Подобным образом, вычитая из (194), умноженного на $(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}$, уравнение (188), умноженное на $\frac{\rho-\rho_1+x(\rho+\rho_1)}{(1-x)^{1-\rho}(1+x)^{1-\rho_1}}$, находим, что

$$c_n\overline{f}'_{n+1} = \left[n+1+\frac{\rho_1-\rho-x(\rho_1+\rho)}{1-x^2}(x+a_n)\right]\overline{f}_n +$$
$$+\left[\frac{(n+1+\rho+\rho_1)x+\rho_1-\rho}{n+2\rho+2\rho_1}+a_n\right]\Bigl[\overline{f}'_n-\overline{f}_n\,\frac{(\rho_1-\rho)-x(\rho_1+\rho)}{1-x^2}\;.$$

Умножая еще на $-\mu_{n+1}\sqrt{1-x^2}$ и приняв во внимание (189), получим

$$(204)\qquad \mu_{n+1}\,\frac{d\overline{f}_{n+1}}{d\theta} =$$
$$= \mu_{n+1}\overline{f}_n\Bigl[-(n+1)\sqrt{1-x^2} +$$
$$+\frac{x(\rho_1+\rho)+\rho-\rho_1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{x(\rho_1+\rho-1)+\rho-\rho_1}{n+2\rho+2\rho_1}\Bigr] +$$
$$+\frac{(n+1+\rho+\rho_1)x+\rho_1-\rho}{n+2\rho+2\rho_1}\,\mu_{n+1}\,\frac{d\overline{f_n}}{d\theta}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Замечая затем, что максимумы $|\overline{f}_n|$, также как и μ_n, убывают слева направо, и что для *отрицательных* значений x

$$\frac{\overline{f}_n}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d\overline{f}_n}{\xi\, d\theta},$$

где значение производной может быть взято для значения $\xi < x$, так что $\mu_n(\xi) < \mu_n(x)$, и следовательно,

$$\frac{\mu_n\overline{f}_n}{\sqrt{1-x^2}} = O\left(\mu_n\,\frac{d\overline{f}_n}{d\theta}\right),$$

мы заключаем, что

$$\frac{\mu_{n+1}\overline{f}_{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} = O(1);$$

стало быть,

$$\mu_{n+1}\frac{d\bar{f}_{n+1}}{d\theta}=-(n+1)\sqrt{1-x^2}\,\mu_{n+1}\bar{f}_n+$$
$$+\frac{(n+1+\rho+\rho_1)\,x+\rho_1-\rho}{n+2\rho+2\rho_1}\,\mu_{n+1}\frac{d\bar{f}_n}{d\theta}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом окончательно

$$\mu_{n+1}\frac{d\bar{f}_{n+1}}{d\theta}=-\sqrt{1-x^2}\,\bar{f}_n+x\,\mu_n\frac{d\bar{f}_n}{d\theta}+\varepsilon_n, \tag{205}$$

где

$$\varepsilon_n=\bar{f}_n\sqrt{1+x}\left[\sqrt{1-x}-\frac{1-x}{\sqrt{\left(1+\frac{\rho+\rho_1}{n+1}\right)^2(1-x)+\frac{\rho(1-2\rho)}{(n+1)^2}}}\right]+$$
$$+O\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

так как, полагая $1-x=\frac{A^2}{(n+1)^2}$, можно написать выражение в скобках в виде

$$\frac{1}{n+1}\left[A-\frac{A}{\sqrt{1+O\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{\rho(1-2\rho)}{A^2}}}\right].$$

Все формулы (186), следовательно, доказаны.

9. В случае, когда $\rho<0$, $\rho_1<0$, нужно отказаться от рассмотрения функции $f_n(x)$, которая обращается в бесконечность в точках $x=\pm 1$. Тогда можно рассматривать функцию

$$Z_n(x)=R_n^2(x)+\frac{R_n'^2(1-x^2)}{n(n+4\rho)} \tag{206}$$

(полагая для определенности ρ равным ρ_1). Имеем вообще

$$Z_n'=2R_n'\left[R_n+\frac{R_n''(1-x^2)-xR_n'}{n(n+4\rho)}\right]=\frac{8\rho x R_n'^2}{n(n+4\rho)}, \tag{207}$$

так что Z_n достигает максимума в начале и минимумов на концах $|$при $\rho<0|$.

Следовательно, теперь[1] абсолютный максимум $|R_n(x)|$

---

[1] Напротив, для $\rho>0$ абсолютный максимум $|R_n(x)|$ равен $|R_n(\pm 1)|$, и имеем, естественно, то же для соответственных полиномов Jacobi.

равен $\sqrt{Z_n(0)}$; стало быть асимптотически

$$\operatorname{Max}|R_n(x)| \sim \left|\frac{R'_n(0)}{n}\right| = \left|R_{n-1,\,\rho+\frac{1}{2}}(0)\right| \sim \frac{1}{2^{n+2\rho-1}} \quad \left(-\frac{1}{4}<\rho\leqq 0\right) \tag{208}$$

(для четного n нужно взять вместо O максимум R'_n, наиболее близкий к O).

Таким образом, теперь уклонение $R_n(x)$ само асимптотически равно минимальному уклонению $(1-x^2)^\rho P_n(x)$ вместо того, чтобы давать минимальное уклонение этого произведения, которое $R_n(x)$ необходимо обратит в бесконечность, если заменить им $P_n(x)$ (здесь $P_n(x)$, как и $R_n(x)$, имеют старшими членами x^n).

Умножая $R_n(x)$ на $\frac{2^{n+2\rho-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$, для того чтобы перейти к нормированному полиному $\overline{R}_n(x)$, мы имеем

$$\operatorname{Max}|\overline{R}_n(x)| = \operatorname{Max}\sqrt{\overline{Z}_n(x)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{209}$$

Вообще для $\rho<0$, $\rho_1<0$ положим

$$\overline{Z}_n(x) = \overline{R}_n(x) + \frac{\overline{R}_n'^2(1-x^2)}{n(n+2\rho+2\rho_1)}.$$

Следовательно, теперь следует положить

$$\overline{R}_n(x) = \sqrt{\overline{Z}_n(x)}\cos\Delta_n, \quad \frac{\frac{d\overline{R}_n(x)}{d\theta}}{\sqrt{n(n+2\rho+2\rho_1)}} = -\sqrt{\overline{Z}_n}\sin\Delta_n, \tag{210}$$

и легко получаем из (188) и (194) формулы

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{R}_{n+k}(x) \sim \sqrt{\overline{Z}_n(x)}\cos(\Delta_n+k\theta),\\ &\frac{1}{\sqrt{n(n+2\rho+2\rho_1)}}\,\frac{dR_{n+k}}{d\theta} = -\sqrt{\overline{Z}_n}\sin(\Delta_n+k\theta), \end{aligned}\right. \tag{211}$$

справедливые равномерно на $(-1, +1)$ для $\frac{k}{n}\to 0$.

В случае, когда только одна из величин ρ или ρ_1 отрицательна (пусть, например, $\rho<0$), введем функцию

$$F_n = (1+x)^{\rho_1} R_n(x), \tag{212}$$

которая удовлетворяет диференциальному уравнению

$$\text{(133 bis)} \qquad \frac{d^2F_n}{d\theta^2} + 2\rho\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dF_n}{d\theta} + \left[(n+\rho_1)(n+2\rho+\rho_1) + \frac{\rho_1(1-2\rho_1)}{1+x}\right]F_n = 0.$$

Пусть для определенности $0 < \rho_1 \leqq \frac{1}{2}$; тогда, полагая

$$\text{(213)} \qquad \left\{\begin{aligned} & Y_n = F_n^2 + r_n^2\left(\frac{dF_n}{d\theta}\right)^2, \\ & \text{где} \\ & r_n^2 = \frac{1+x}{(n+\rho_1)(n+2\rho+\rho_1)(1+x)+\rho_1(1-2\rho_1)}, \end{aligned}\right.$$

будем иметь

$$\frac{dY_n}{dx} = \frac{dF_n}{d\theta}\left[\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}\left(F_n + r_n^2\,\frac{d^2F_n}{d\theta^2}\right) + \frac{dr_n^2}{dx}\,\frac{dF_n}{d\theta}\right] =$$

$$= \left(\frac{dF_n}{d\theta}\right)^2\left[\frac{4\rho r_n^2}{1-x} + \frac{dr_n^2}{dx}\right].$$

Значит Y_n достигает максимума внутри в точке x_0, определяемой уравнением

$$4\rho(n+\rho_1)(n+2\rho+\rho_1)(1+x)^2 +$$

$$+\rho_1(1-2\rho_1)[4\rho(1+x)+1-x] = 0,$$

откуда

$$x_0 \sim -1 + \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\rho_1(2\rho_1-1)}{2\rho}} < 0,$$

и максимумы $F_n(x)$ идут, убывая для $x > x_0$. Но максимумы соответствующей функции $f_n(x) = (1-x)^\rho F_n(x)$ идут, возрастая слева направо (по 138 bis), так что $|f_n(x)| \leqq \frac{1}{2^{n+\rho+\rho_1-1}}$ для $x < 0$; следовательно, имеем a fortiori на всем отрезке $(-1, +1)$

$$|F_n(x)| < \frac{1}{2^{n+2\rho+\rho_1-1}}.$$

Далее, замечая, что для значения x_0

$$r_n^2 \sim \lambda_n^2 \sim \frac{1}{n^2}$$

и

$$\frac{dF_n}{d\theta}=(1-x_0)^{-\rho}\frac{df_n}{d\theta}+\rho(1-x_0)^{-\rho-\frac{1}{2}}(1+x_0)^{\frac{1}{2}}f_n=$$

$$=2^{-\rho}\frac{df_n}{d\theta}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+f_nO\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

мы заключаем, что для достаточно больших n на всем отрезке

$$\sqrt{Y_n}<\frac{1}{2^{n+2\rho+\rho_1-\frac{3}{2}}}$$

и для нормированных полиномов

$$\sqrt{\overline{Y}_n}<2^{1-\rho}\sqrt{\frac{1}{\pi}}. \tag{214}$$

$\overline{Y}_n$ может таким образом теперь для $\rho<0$, $0\leqq\rho_1\leqq\frac{1}{2}$ играть ту же роль, что и функции $\overline{U}_n$, $\overline{W}_n$, $\overline{V}_n$, $\overline{Z}_n$ в предыдущих случаях.

Также если $\rho_1>\frac{1}{2}$ (при $\rho<0$), положив

$$X_n=F_n^2+\frac{1}{n^2}\left(\frac{dF_n}{d\theta}\right)^2, \tag{215}$$

можно проверить, что в этом случае $\overline{X}_n$ остается ограниченным на $(-1, +1)$. Достаточно заметить, что $\overline{X}_n=O(\text{Max}\,F_n^2)$, так как затем максимум $|F_n|$ определяется шаг за шагом $\left(\text{последовательным прибавлением } \frac{1}{2} \text{ к } \rho_1\right)$ благодаря соотношению |175|.

Глава IV

Ортогональные многочлены, приводящиеся к полиномам Jacobi

1. Мы займемся теперь ортогональными полиномами, соответствующими весу

$$(216)\qquad q(x)=\frac{t(x)}{\sqrt{1-\lambda^2}}=\frac{t_0(x)(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=t_0(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

$$\left(\alpha=2\rho-\frac{1}{2},\quad \beta=2\rho_1-\frac{1}{2}\right),$$

где $t_0(x)$ в интервале $(-1, +1)$ удовлетворяет условию

$$(10\,\text{bis})\qquad 0<\lambda<t_0(x)<L.$$

Для упрощения письма мы будем всегда предполагать, что $t_0(0)=1$.

По (46 bis) и (48 bis) главы III, мы имеем

$$(217)\qquad L_n\left(\sqrt{t(x)}\right)=L_n\left[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}\right]\sim$$

$$\sim\frac{\sqrt{M_0}}{2^{n+\rho+\rho_1-1}}H_n^{(2)}\left(\sqrt{t(x)}\right)\sim\frac{\pi M_0}{2^{2n+2\rho+2\rho_1-1}},$$

где

$$(218)\qquad \ln M_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Предполагая сначала, что $t_0(x)$ заменено положительным полиномом степени h

$$(27)\qquad t_h(x)=\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{a_h}\right),$$

мы имеем для соответствующего ортогонального полинома

$R_{n,\,h}(x)$ формулу[1]

$$(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}R_{n,\,h}(x)\,t_h(x) \tag{28 bis}$$
$$=\frac{(-1)^h}{a_1a_2\ldots a_h}\,\frac{\Delta_n(a_1,a_2,\ldots,a_h,x)}{\Delta_n(a_1,a_2,\ldots,a_h)}\,(1-x)^{\rho}\,(1+x)^{\rho_1},$$

где в детерминанты (29) и (29 bis) I главы нужно ввести полиномы Jacobi $R_n^{\alpha,\,\beta}(x)$ (имеющие старшим членом x^n), соответствующие весу $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$,

Как мы заметили выше, можно ограничиться рассмотрением случая, когда $\alpha>-1$, $\beta>-1$, ибо в противном случае $R_{n,\,h}(x)$ обратится в нуль для $x=\pm 1$, так что после деления на $(1-x)^{[-\alpha]}(1+x)^{[-\beta]}$ полином $R_{n,\,h}(x)$ сведется к ортогональному полиному степени $n-[-\alpha]-[-\beta]$, соответствующему весу

$$t_h(x)\,(1-x)^{\alpha+[-\alpha]}\,(1+x)^{\beta+[-\beta]}.$$

Уравнение (133) главы III приводит к известным асимптотическим выражениям полиномов Jacobi, вне отрезка $(-1,+1)$.

Имеем таким образом

$$R_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)=\frac{1}{(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_1}}\times \tag{219}$$
$$\times\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+\rho+\rho_1}\left[1+O\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{n\sqrt{x^2-1}}\right)\right],$$

где $|x+\sqrt{x^2-1}|>1$. Диференцируя, получаем такого же рода формулы для производных $R_n^{(\alpha,\,\beta)}$, которые сами являются с точностью до постоянного множителя полиномами Jacobi.

Таким образом, применяя (219) к формуле (28), мы получим асимптотическую формулу

---

[1] Формула (28 bis) эквивалентна формуле

$$R_{n,\,h}(x)\,t_h(x)=\sum_{k=0}^{h}A_k\,R_{n+k}^{(\alpha,\,\beta)}(x),$$

где

$$A_k\sim\frac{2^{2n+2k+2\rho+2\rho_1-1}}{\pi}\int_{-1}^{+1}R_{n+k}^{(\alpha,\,\beta)}(x)\,R_{n,\,h}(x)\,t_h(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx.$$

Таким образом, как только будет доказано, что

$$R_{n,h}(x)\,(1-x)^{\rho}\,(1+x)^{\rho_1}=O\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

можно утверждать, что $A_k=O(2^k)$.

$$(220)\qquad R_{n,h}(x)\,t_h(x) \sim \frac{(-1)^h}{a_1 a_2 \ldots a_h}\,\frac{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & R_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ \frac{r_1}{2} & \ldots & \frac{r_h}{2} & R_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\frac{r_1}{2}\right)^h & \ldots & & R_{n+h}^{(\alpha,\beta)}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \frac{r_1}{2} & \ldots & \frac{r_h}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\frac{r_1}{2}\right)^{h-1} & \ldots & \left(\frac{r_h}{2}\right)^{h-1} \end{vmatrix}},$$

где вместо ρ_i, фигурировавшего в формуле (33), мы пишем $r_i = a_i + \sqrt{a_i^2 - 1}$ (чтобы избегнуть смешения с показателями ρ и ρ_1).

Предполагая x находящимся вне отрезка $(-1, +1)$, мы имеем, стало быть,

$$(221)\quad R_{n,h}(x) \sim$$

$$\sim \frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+\rho+\rho_1}\left[\frac{x+\sqrt{x^2-1}-r_1}{2}\right]\ldots\left[\frac{x+\sqrt{x^2-1}-r_h}{2}\right]}{(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_1}(x-a_1)\ldots(x-a_h)}$$

$$\sim R_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,\frac{r_1 r_2 \ldots r_h}{(r_1 - x + \sqrt{x^2-1})\ldots(r_h - x + \sqrt{x^2-1})} =$$

$$= R_n^{(\alpha,\beta)}(x)\; e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\ln t_h(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Таким образом мы замечаем, что число, на которое нужно умножить полином Jacobi $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ для получения асимптотического выражения $R_{n,h}(x)$ во внешней точке, зависит только от $t_h(x)$ (и не зависит от α и β).

К тому же, для конечного h порядок приближения (221) тот же, что и порядок приближения (219).

Пользуясь классическими асимптотическими выражениями (135) полиномов $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ внутри $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, где ε данное произвольно малое положительное число, найдем асимптотические выражения $R_{n,h}(x)$, справедливые в том же интервале.

Действительно, как в главе II, мы получим из (220)

$$R_{n,h}(x)\,t_h(x) \sim \frac{(-1)^h}{a_1, a_2 \ldots a_n (1-x)^{\rho} (1+x)^{\rho_1}} \times$$

$$\times \left[\frac{e^{i[(n+\rho+\rho_1)\theta-\rho\pi]}(e^{i\theta}-r_1)\ldots(e^{i\theta}-r_n)+e^{-i[(n+\rho+\rho_1)\theta-\rho\pi]}(e^{-i\theta}-r_1)\ldots(e^{-i\theta}-r_h)}{2^{n+\rho+\rho_1+h}} \right]$$

и затем, полагая, как в указанном месте,

$$\text{(37 bis)} \qquad \cos\alpha_k = \frac{r_k - x}{\sqrt{2r_k(a_k-x)}}, \qquad \sin\alpha_k = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2r_k(a_k-x)}}$$

и

$$\text{(38 bis)} \qquad \psi_h(x) = \sum_{1}^{h} \alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\ln t_h(z) - \ln t_h(x)}{z-x} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-t^2}}\, dt,$$

мы получим

$$\text{(222)} \qquad R_{n,h}(x)\sqrt{t_h(x)}$$

$$\sim \frac{\sqrt{M_h}}{2^{n+\rho+\rho_1-1}\,(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}} \cos\left[(n+\rho+\rho_1)\theta + \psi_h - \rho\pi\right],$$

где

$$\text{(40bis)} \qquad M_h = \frac{r_1}{2a_1} \ldots \frac{r_h}{2a_h} = e^{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\ln t_h(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

2. Но формула (222) имеет тот же недостаток, что и соответствующие формулы для полиномов Jacobi; поэтому мы заменим ее асимптотическими выражениями, справедливыми равномерно на всем отрезке $(-1, +1)$, пользуясь формулами (186) предыдущей главы.

Нам будет достаточно исследовать один из случаев, соответствующих различным формулам (186).

Для определенности остановимся на случае $0 \leqq \rho \leqq \frac{1}{2}$, $0 \leqq \rho_1 \leqq \frac{1}{2}$ $\left(\text{стало быть, } |\alpha| \leqq \frac{1}{2},\ |\beta| \leqq \frac{1}{2}\right)$, что в частности включает и полиномы Legendre'a.

Наши заключения сами собой распространятся на все случаи, когда $\rho \geqq 0$, $\rho_1 \geqq 0$, при помощи замены функции $U_n(x)$ через $V_n(x)$, $W_n(x)$; введение функций $Z_n(x)$, $Y_n(x)$, $X_n(x)$ § 9, главы III, когда показатели ρ и ρ_1 (или только один из них) отрицательны, позволит также исследовать и этот последний случай.

Мы имеем, стало быть,

$$(186\,\text{bis})\quad \begin{cases} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sqrt{u_n}\cos\Phi_n \\ (2^k(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} R_{n+k}^{(\alpha,\beta)}(x) \sim \sqrt{u_n}\cos(\Phi_n + k\theta). \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в (220), мы находим таким образом

$$(223)\quad (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} t_h(x) R_{n,h}(x) \sim \frac{(-1)^h\sqrt{u_n(x)}}{a_1 a_2 \ldots a_h} \times$$

$$\times\left[\frac{e^{i\Phi_n}(e^{i\theta}-r_1)\ldots(e^{i\theta}-r_h)+e^{-i\Phi_n}(e^{-i\theta}-r_1)\ldots(e^{-i\theta}-r_h)}{2^{h+1}}\right]$$

или после деления на $\sqrt{t_h(x)}$ получаем

$$(224)\quad R_{n,h}(x)(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_h(x)} \sim \sqrt{M_h(u_n(x)}\cos(\Phi_n+\psi_h).$$

Если мы заметим, что теперь $\left(\text{для } |\alpha| \leqq \frac{1}{2},\ |\beta| \leqq \frac{1}{2}\right)$, при достаточно большом n (глава III, § 3),

$$(225)\quad \sqrt{u_n(x)} \leqq \frac{1}{2^{n+\rho+\rho_1-1}},$$

то получим асимптотически на $(-1, +1)$

$$(226)\quad |R_{n,h}(x)(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_h(x)}| \leqq \frac{\sqrt{M_h}}{2^{n+\rho+\rho_1-1}} \sim$$

$$\sim L_n\left[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_h(x)}\right].$$

Следовательно, ортогональные полиномы $R_{n,k}(x)$ $\left(\text{для } |\alpha| \leqq \frac{1}{2}, |\beta| \leqq \frac{1}{2}\right)$ дают асимптотически минимальное уклонение произведению

$$|P_n(x)|(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_h(x)},$$

где

$$P_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n.$$

3. Перейдем теперь к вычислению порядка ошибки наших асимптотических формул в предположении, что h может также бесконечно возрастать, но при условии, что $\frac{h}{n}$ настолько быстро стремится к 0, что

$$(227)\quad \frac{\delta}{2} = \sqrt[2h]{\frac{\ln n}{n}} = o\left(\frac{1}{h\ln^3 n}\right).$$

Мы предположим еще, что все корни $t_h(x)$ удовлетворяют неравенству

$$(228) \qquad |r_k|-1>\frac{1}{\ln n} \quad \left(\text{откуда } |\sqrt{1-a_k^2}|>\frac{1}{2\ln n}\right);$$

тогда по (219) относительная ошибка этой асимптотической формулы будет порядка $\frac{\ln n}{n}$. Введем временное ограничение, требуемое леммой § 1 главы II:

$$(229) \qquad |r_k-r_i|>\delta\,|r_k|.$$

Стало быть, в силу этой леммы и сохраняя те же обозначения (за исключением замены ρ_k на r_k), имеем

$$(230) \qquad \left|\frac{S}{\Delta}-1\right|<2h\left(\frac{\delta}{2}\right)^h=2h\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$$

и

$$\left|\frac{S_i-A_i}{\Delta}\right|<2(|r_1|+1)\dots(|r_h|+1)h\sqrt{\frac{\ln n}{n}}.$$

Таким образом, воспроизводя рассуждения § 3 указанной главы, мы видим, что для всех точек x, внешних по отношению к $(-1, +1)$ и удовлетворяющих (как a_k) условию

$$(228\,\text{bis}) \qquad |x+\sqrt{x^2-1}|>1+\frac{1}{\ln n},$$

относительная ошибка формулы (221) есть $O\left(h\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)$.

Перейдем теперь к асимптотической формуле (224), где мы должны принять во внимание то, что формулы (186 bis) имеют ошибку $O\left(\frac{k}{n2^{n+k}}\right)$.

Мы можем начать с введения в последнюю колонну определителя $\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_h, x)$ выражений (186 bis) вместо $R_{n+k}^{(\alpha,\beta)}(x)$; тогда, обозначая измененный таким образом детерминант через $\Delta_n^0(a_1, a_2, \dots, a_h, x)$, мы заключаем из (28 bis), что

$$(231) \qquad (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}t_h(x)R_{n,k}(x)$$

$$=\frac{(-1)^h\Delta_n^0(a_1, a_2, \dots, a_h, x)}{a_1, a_2, \dots, a_h\,\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_h)}+O\left[\frac{h^2}{n2^n}\right].$$

Нам остается, стало быть, только вычислить ошибку, производимую формулой (219).

Имеем благодаря (230) (см. гл. II § 1)

$$(232)\qquad \frac{(-1)^h}{a_1 a_2 \ldots a_h}\left\{\frac{\Delta_n^0(a_1, a_2, \ldots, a_h, x)}{\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_h)}\right.$$

$$\left.-\sqrt{u_n(x)}\left[\frac{e^{i\Phi_n}(e^{i\theta}-r_1)\ldots(e^{i\theta}-r_h)+e^{-i\Phi_n}(e^{-i\theta}-r_1)\ldots(e^{-i\theta}-r_h)}{2^{h+1}}\right]\right\}$$

$$= O\left(\frac{h^2}{2^{n-h}}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right).$$

Стало быть, замечая, что эта последняя ошибка превосходит ошибку (231), мы имеем

$$(233)\qquad |R_{n,h}(x)(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_h(x)}-\sqrt{M_h u_n(x)}\cos(\Phi_n+\psi_h)|$$

$$= O\left(\frac{h^2}{2^{n-h}}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right),$$

и для нормированных полиномов $\overline{R}_{n,h}(x)$

$$(233\ \text{bis})\qquad |\overline{R}_{n,h}(x)(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_h(x)}-\sqrt{\overline{u}_n(x)}\cos(\Phi_n+\psi_h)|=$$

$$= O\left(h^2 2^h\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right).$$

Применяя лемму § 4 главы II, мы можем избавиться от ограничения (229). В силу этой леммы, если корни $S_h(x)$ удовлетворяют (228), можно построить полином $t_h(x)$, удовлетворяющий (227), (228), (229), такой, что

$$\left|\ln\frac{S_h(x)}{t_h(x)}\right| = O(\delta h^2 \ln^3 n),$$

т. е. что

$$(234)\qquad |S_h(x)-t_h(x)| = O(\delta h^2 \ln^3 n).$$

4. Нам только нужно будет распространить теорему § 5 главы II.

Если имеем

$$(235)\qquad |t_0(x)-t_h(x)| = O(\varepsilon)$$

на отрезке $(-1, +1)$, то на том же отрезке

$$(236)\qquad (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}|\overline{R}_n^0(x)-\overline{R}_{n,h}(x)| = O(\varepsilon\ln n),$$

где $\overline{R}_n^0(x)$ и $\overline{R}_{n,h}(x)$ нормированные ортогональные полиномы, соответственно относительно весов

$$t_0(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\quad\text{и}\quad t_h(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

предполагая, что $t_h(x)$ есть полином степени h, удовлетворяющий условиям (227), (228), (229) и что $\varepsilon \ln n \to 0$.

С этой целью положим

$$\overline{R}_n^0(x) = \sum_0^n a_k \overline{R}_{k,h}(x), \tag{237}$$

где

$$a_n = 1 + O(\varepsilon)$$

и

$$a_k = \int_{-1}^{+1} \overline{R}_n^0(x) \overline{R}_{k,h}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta t_h(x)\, dx \tag{238}$$

$$= \int_{-1}^{+1} \varepsilon'(x) \overline{R}_n^0(x) \overline{K}_{k,h}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta\, dx, \qquad \varepsilon'(x) = O(\varepsilon)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1);$$

стало быть,

$$(1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1} [\overline{R}_n^0(x) - \overline{R}_{n,h}(x)] = O(\varepsilon) + \sum, \tag{239}$$

где

$$\sum = (1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1} \sum_0^{n-1} a_k \overline{R}_{k,h}(x) = (1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1} \tag{240}$$

$$\times \int_{1-}^{+1} \varepsilon'(z) \overline{R}_n^0(z) \sum_0^{n-1} \overline{R}_{k,h}(x) \overline{R}_{k,h}(z) (1-z)^\alpha (1+z)^\beta\, dz$$

$$= \frac{A_{n-1}}{A_n} (1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1} \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon'(z) \overline{R}_n^0(z) [\overline{R}_{n,h}(x) \overline{R}_{n-1,h}(z) -}{(x-z)\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{-\overline{R}_{n,h}(z) \overline{R}_{n-1,h}(x)] (1-z)^{2\rho} (1+z)^{2\rho}\, dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}},$$

A_n — коэфициент при x^n полинома $\overline{R}_{n,h}(x)$, так что

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} \sim \frac{1}{2}.$$

Положим

$$K_n = (1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1} (1-z)^\rho (1+z)^{\rho_1} [\overline{R}_{n,h}(x) \overline{R}_{n-1,h}(z) - \tag{241}$$

$$- \overline{R}_{n,h}(z) \overline{R}_{n-1,h}(x)].$$

Заметим сначала, что по (233 bis), каково бы ни было $k > 0$

$$(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1}\overline{R}^2_{k,\,h}(x) = O\left[1 + h^2 2^h \sqrt{\frac{\ln k}{k} + h^4 2^{2h}\frac{\ln k}{k}}\right].$$

Стало быть,

$$\sum_0^{n-1}(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1}\overline{R}^2_k(x) = O[n + h^2 2^h \sqrt{n \ln n} + h^4 2^{2h}\ln^2 n] =$$
$$= O(n),$$

в силу (227).

Следовательно,

$$(242) \qquad (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}(1-z)^{\rho}(1+z)^{\rho_1}\sum_0^{n-1}\overline{R}_{k,\,h}(x)\overline{R}_{k,\,h}(z) = O(n).$$

С другой стороны, мы получаем из (186bis) и (233bis) асимптотическое значение C_n для K_n

$$(243) \qquad K_n \sim C_n = \sqrt{\frac{\overline{u}_n(x)\overline{u}_n(z)}{t_h(x)t_h(z)}}\,[\cos(\Phi_n + \psi_h)\cos(\Phi^0_n - \theta_0 + \psi^0_h)$$
$$-\cos(\Phi^0_n + \psi^0_h)\cos(\Phi_n - \theta + \psi_h)] = \sqrt{\frac{u_n(x)u_n(z)}{t_h(x)t_h(z)}} \times$$
$$\left\{\sin\left[F_0 + F - \frac{\theta_0+\theta}{2}\right]\sin\frac{\theta_0-\theta}{2} + \sin\left[F_0 - F + \frac{\theta-\theta_0}{2}\right]\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\right]\right\},$$

где Φ^0_n. и ψ^0_h соответствуют значению переменной $z = \cos\theta_0$ и

$$F_0 = \Phi^0_n + \psi^0_h, \quad F = \Phi_n + \psi_h.$$

Важно вычислить непосредственно ошибку последнего асимптотического выражения (применяя тот же прием, что и в § 5 гл. II).

С этой целью заметим,[1] что введение в (241) промежуточной асимптотической формулы (231), соответствующей нормированным полиномам, приведет к ошибке порядка $O\left(\frac{h^2}{n}\right)$ для величины K_n; пусть

$$K'_n = K_n + O\left(\frac{h^2}{n}\right)$$

таким образом полученное выражение. Будем иметь

---

[1] В силу замечания, сделанного в начале главы IV, стр. 88, по поводу миноров A_k формулы (28bis).

$$K_n' = \frac{\left\{\begin{vmatrix} R_n^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & R_n^{(\alpha,\beta)}(a_h) & \tau_1 \\ R_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & \ldots\ldots & \tau_2 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ R_{n+h}^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & \ldots\ldots & \tau_{h+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & \sigma_0 \\ R_n^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & \sigma_1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \\ R_{n+h-1}^{(\alpha,\beta}(a_1) & \ldots & \sigma_h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} R_n^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & R_n^{(\alpha,\beta)}(a_h) & \sigma_1 \\ R_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & \ldots\ldots & \sigma_2 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ R_{n+h}^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & \ldots\ldots & \sigma_{h+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & R_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(a_h) & \tau_0 \\ R_n^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & \ldots & \tau_1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n+h-1}^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & \ldots & \tau_h \end{vmatrix}\right\}}{2^{2h}M_h(a_1, a_2, \ldots, a_h)^2 \begin{vmatrix} R_n^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & R_n^{(\alpha,\beta)}(a_h) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ R_{n+h-1}^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & R_{n+h-1}^{(\alpha,\beta)}(a_h) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_n^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & R_n^{(\alpha,\beta)}(a_h) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ R_{n+h-2}^{(\alpha,\beta)}(a_1) & \ldots & R_{n+h-2}^{(\alpha,\beta)}(a_h) \end{vmatrix} t_h(x)\, t_h(z)}$$

и

$$C_n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \tau_1 \\ r_1 & \ldots & \ldots & \tau_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (r_1)^h & \ldots & \ldots & \tau_{h+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \sigma_0 \\ r_1 & \ldots & \ldots & \sigma_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (r_1)^h & \ldots & \ldots & \sigma_h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \sigma_1 \\ r_1 & \ldots & \ldots & \sigma_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (r_1)^h & \ldots & \ldots & \sigma_{h+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \tau_0 \\ r_1 & \ldots & \ldots & \tau_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (r_1)^h & \ldots & \ldots & \tau_h \end{vmatrix}}{2^{2h} M_h(a_1 a_2 \ldots a_h)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & \ldots & \ldots & r_h \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (r_1)^{h-1} & \ldots & \ldots & (r_h)^{h-1} \end{vmatrix}^2 t_h(x)\, t_h(z)}, \tag{244}$$

где мы положили ($k=-1, 0, 1, \ldots, h$),

$$(245)\qquad \tau_{k+1}=\sqrt{\bar{u}_n(x)}\cos(\Phi_n+k\theta),\quad \sigma_{k+1}=\sqrt{\bar{u}_n(z)}\cos(\Phi_n^0+k\,\theta_0).$$

Нам остается вычислить порядок разности $K_n'-C_n$.

Мы можем написать

$$C_n=\sum_{k=0}^{h}\sum_{i=0}^{h}P_iP_k\,(\tau_{i+1}\sigma_k-\tau_i\sigma_{k+1}),$$

где числа P_i являются коэфициентами полинома

$$P_0y^h+\ldots+P_h=\frac{(y-r_1)\ldots(y-r_h)}{2^h a_1a_2\ldots a_h\sqrt{M_h t_h(x)\,t_h(z)}}$$

и

$$(246)\qquad \tau_{i+1}\sigma_k-\tau_i\sigma_{k+1}=\sqrt{\bar{u}_n(x)\,\bar{u}_n(z)}\left\{\sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0-\theta)\times\right.$$
$$\times\sin\left[\Phi_n^0+\Phi_n+\frac{i+k-1}{2}(\theta_0+\theta)\right]+$$
$$\left.+\sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0+\theta)\sin\left[\Phi_n^0-\Phi_n+\frac{i+k-1}{2}(\theta_0-\theta)\right]\right\}.$$

Следовательно, вычисляя таким же образом K_n', принимая во внимание (230), имеем

$$(247)\qquad K_n'-C_n=O\left(h2^h\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)\sum_i\sum_k\left|\sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0-\theta)\times\right.$$
$$\times\sin\left[\Phi_n^0+\Phi_n+\frac{i+k-1}{2}(\theta_0+\theta)\right]+$$
$$\left.+\sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0+\theta)+\left[\Phi_n^0-\Phi_n+\frac{i+k-1}{2}(\theta_0-\theta)\right]\right|=$$
$$=O\left(h^4 2^h\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)\left[\left|\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\right|+\left|\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\right|\right].$$

Стало быть, окончательно по (243) и (247)

$$(248)\qquad K_n=\sqrt{\frac{\bar{u}_n(x)\,\bar{u}_n(z)}{t_h(x)\,t_h(z)}}\left\{\begin{array}{c}\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\left[\sin\left(F_0+F-\frac{\theta_0+\theta}{2}\right)+\right.\\ \left.+O\left(h^4 2^h\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)\right]+\\ +\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\left[\sin\left(F_0-F+\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)+\right.\\ \left.+O\left(h^4 2^h\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)\right]\end{array}\right\}+O\left(\frac{h^2}{n}\right).$$

Формулы (242) и (248) дают возможность оценить

$$(249)\qquad H=\int_{-1}^{+1}\left|\frac{K_n}{x-z}\right|\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int_0^{\pi}\left|\frac{K_n}{\cos\theta-\cos\theta_0}\right|d\theta_0,$$

при условии, что $2^h h^4\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\to 0$, очевидно, выполняющемся в силу (227).

Действительно, мы можем предположить для определенности $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$. Тогда в интервалах $\left(\theta-\frac{1}{n},\ \theta\right)$, $\left(\theta,\ \theta+\frac{1}{n}\right)$, из которых первый нужно будет заменить на $(0,\ \theta)$, когда $\theta<\frac{1}{n}$, мы применим формулу (242); таким образом часть H, соответствующая этим двум интервалам, имеет порядок $O(1)$. Нам остается, следовательно, оценить оба интеграла

$$H_1=\int_0^{\theta-\frac{1}{n}}\left|\frac{K_n}{\cos\theta_0-\cos\theta}\right|d\theta_0,\qquad H_2=\int_{\theta+\frac{1}{n}}^{\pi}\left|\frac{K_n}{\cos\theta_0-\cos\theta}\right|d\theta_0;$$

достаточно рассмотреть второй интеграл, который по (248) будет порядка

$$\int_{\theta+\frac{1}{n}}^{\pi}\left\{\left|\frac{1}{\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}}\right|+\left|\frac{1}{\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}}\right|+\frac{h^2}{n}\left|\frac{1}{\cos\theta-\cos\theta_0}\right|\right\}d\theta_0$$

$$=O(\ln n)+O(h^2)=O(\ln n).$$

Следовательно,

$$(250)\qquad H=O(\ln n).$$

Пользуясь этим заключением в формуле (240), мы получаем, что

$$\sum=O(\varepsilon\ln n)\underset{-1\leqq x\leqq 1}{Max}\,[\overline{R}_n^0(x)\,(1-x)^{\rho}\,(1+x)^{\rho_1}\,].$$

Таким образом из (239) следует, что максимум $\overline{R}_n^0(1-x)^{\rho}\times$ $\times(1+x)^{\rho_1}$, как и максимум $R_{n,\,h}(x)\,(1+x)^{\rho}\,(1+x)^{\rho_1}$, ограничен, и, следовательно, имеем действительно

$$(236)\qquad (1-x)^{\rho}\,(1+x)^{\rho_1}[\overline{R}_n^0(x)-\overline{R}_{n,\,h}(x)]=O\,(\varepsilon\ln n)$$

равномерно на всем отрезке $(-1,\ +1)$.

Для того чтобы $\varepsilon\ln n\to 0$ в случае, когда $t_0(x)=S_h(x)$, достаточно по (234) взять

$$(251)\qquad \ln n=Ah\,\ln h,\quad \text{где } A>12.$$

Действительно, принимая во внимание (227), должно быть

$$\delta h^2 \ln^4 n = h^2 \ln^4 n \sqrt[2h]{\frac{\ln n}{n}} \to 0$$

или

$$\frac{1}{2h} \ln n - \left(4 + \frac{1}{2h} \right) \ln \ln n - 2 \ln h \to \infty;$$

но, подставляя (251), имеем

$$\left(\frac{A}{2} - 6 - \frac{1}{2h} \right) \ln h - \left(4 + \frac{1}{2h} \right) (\ln \ln h + \ln A) \to \infty.$$

5. Мы воспользуемся снова для произвольной непрерывной функции $t_0(x)$ приближенными полиномами $S_h(x)$, аналогичными полиномам § 7 главы II.

В дальнейшем мы будем всегда считать, что функция $t_0(x)$ имеет непрерывную первую производную $t_0'(x)$ на отрезке $(-1, +1)$ такую, что

$$t_0'(x+\beta) - t_0'(x) = O\left(\frac{1}{\ln^2 \beta}\right). \tag{252}$$

При этих условиях, как известно, возможно построить такие полиномы $G_k(x)$ степени k, что

$$|G_k(x) - \ln t_0(x)| = O\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right). \tag{253}$$

Стало быть, полагая

$$S_h(x) = 1 + G_k(x) + \ldots \frac{[G_k(x)]^\mu}{\mu!}, \tag{254}$$

где

$$h = k\mu, \quad k^2 = \mu^\mu, \tag{255}$$

будем иметь

$$|t_0(x) - S_h(x)| = O\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right),$$

и так как из (255) следует, что

$$k \sim \frac{h}{2} \frac{\ln \ln h}{\ln h}, \tag{256}$$

то получим также, что

$$|t_0(x) - S_h(x)| = O\left(\frac{1}{h \ln h \ln \ln h}\right). \tag{257}$$

Заметим, что полиномы $S_h(x)$ удовлетворяют условию (228), ибо в силу сделанного в указанном месте (§ 7, гл. II) замечания

$$|r_i| - 1 > \frac{1}{k} \ln \mu = \frac{2 \ln k}{h} \sim \frac{2 \ln h}{h},$$

но по (251)

$$h \sim \frac{\ln n}{A \ln \ln n};$$

стало быть, a fortiori

$$|r_i| - 1 > \frac{1}{\ln n}.$$

Строя затем полиномы $t_h(x)$, удовлетворяющие (234), получим также

$$|t_0(x) - t_h(x)| = O(\delta h^2 \ln^3 n) + o\left(\frac{A}{\ln n}\right) = o\left(\frac{1}{\ln n}\right), \tag{258}$$

предполагая, что в (251) A ограничено сверху.

Мы приходим, следовательно, к такому результату:

Если положительная функция $t_0(x)$ удовлетворяет условию (252), то ортогональные полиномы $\overline{R}_n^0(x)$, соответствующие весу (216), допускают равномерно на отрезке $(-1, +1)$ асимптотическое представление

$$\overline{R}_n^0(x)\sqrt{t(x)} = \overline{R}_n^0(x)(1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1} \sqrt{t_0(x)} \sim \\ \sim \sqrt{u_n(x)} \cos(\Phi_n + \psi_h), \tag{259}$$

где

$$\psi_h = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\ln t_h(z) - \ln t_h(x)}{z - x} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\, dz, \tag{38 bis}$$

полиномы $t_h(x)$ есть указанные выше полиномы, приближающие функцию $t_0(x)$.

Но по § 9 главы II условий, наложенных на $t_0(x)$, вполне достаточно для утверждения, что равномерно на $(-1, +1)$

$$\psi_h - \psi \to 0,$$

где

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\ln t_0(z) - \ln t_0(x)}{z - x} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\, dz; \tag{260}$$

имеем, следовательно, также (при прежних условиях)

$$\overline{R}_n^0(x)(1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1} \sqrt{t_0(x)} \sim \sqrt{u_n(x)} \cos(\Phi_n + \psi). \tag{261}$$

Принимая во внимание формулы (184), можно еще написать, что

$$(262)\qquad \overline{R}_n^0(x)\sqrt{t(x)} \sim \overline{f}_{n,\rho,\rho_1}\cos\psi + \lambda_n \frac{d\overline{f}_{n,\rho,\rho_1}}{d\theta}\sin\psi.$$

Из (261) мы заключаем, что для очень больших n

$$(263)\qquad \left|\overline{R}_n^0(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}\right| \leqq \sqrt{\overline{u}_n(x)} \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\left(0 \leqq \rho \leqq \frac{1}{2},\quad 0 \leqq \rho_1 \leqq \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом ортогональные полиномы $\overline{R}_n^0(x)$ асимптотически минимизируют уклонение на отрезке $(-1, +1)$ произведения

$$\left|P_n(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}\right|,$$

где $P_n(x)$ произвольный полином степени n, имеющий старший член тот же, что и $\overline{R}_n^0$.

6. Для других значений $\rho > 0$ и $\rho_1 > 0$ рассуждения при доказательстве аналогичных асимптотических формул совершенно не изменяются. Таким образом будем иметь

$$(264)\quad \begin{cases} \overline{R}_n^0(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_\theta(x)} \sim \sqrt{\overline{v}_n(x)}\cos(\Psi_n+\psi) \\ = f_{n,\rho,\rho_1}\cos\psi + \dfrac{1}{n+\rho+\rho_1}\dfrac{d\overline{f}_{n,\rho,\rho_1}}{d\theta}\sin\psi \quad \left(\rho \geqq \dfrac{1}{2},\ \rho_1 \geqq \dfrac{1}{2}\right), \\ \overline{R}_n^0(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)} \sim \sqrt{\overline{w}_n(x)}\cos(\Xi_n+\psi) \\ = f_{n,\rho,\rho_1}\cos\psi + \mu_n\dfrac{d\overline{f}_{n,\rho,\rho_1}}{d\theta}\sin\psi \quad \left(0 \leqq \rho \leqq \dfrac{1}{2},\ \rho_1 \geqq \dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$

В обоих этих случаях $\overline{R}_n^0(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}$ также ограничены (по § 7 предыдущей главы) на $(-1, +1)$, но даже асимптотически они не обращают в минимум уклонение соответствующего произведения.

Как мы видели, нет надобности рассматривать случай, когда неравенства

$$\alpha > -1,\quad \beta > -1 \quad \left(\rho > -\frac{1}{4},\ \rho_1 > -\frac{1}{4}\right)$$

не удовлетворяются. Предполагая, что они имеют место, мы получим, пользуясь тем же методом и вводя функции X_n, Y_n, Z_n, данные формулами (215), (213), (206), асимптотические формулы, соответствующие случаям, когда по крайней мере одно из чисел ρ и ρ_1 отрицательно. Таким образом для $\rho<0$, $\rho_1<0$ будем иметь (при тех же условиях относительно $t_0(x)$), что

$$(265)\qquad \overline{R}^0_n\sqrt{t_0(x)}\sim\sqrt{\overline{Z}_n}\cos(\Delta_n+\psi)=\overline{R}_n^{(\alpha,\beta)}\cos\psi+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n(n+\alpha+\beta+1)}}\,\frac{d\overline{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{d\theta}\sin\psi,$$

где $\overline{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ нормированные полиномы Jacobi, соответствующие показателям $\alpha=2\rho-\frac{1}{2}$, $\beta=2\rho_1-\frac{1}{2}$.

Имеем на $(-1,+1)$ в этом случае по (209) для достаточно большого n

$$\overline{R}^0_n(x)\sqrt{t_0(x)}\leqq\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Имеем также

$$(266)\qquad \begin{cases} \overline{R}^0_n(x)\,(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}\sim\overline{F}_n\cos\psi+\dfrac{1}{n}\dfrac{d\overline{F}_n}{d\theta}\sin\psi \\ \qquad\left(\rho<0,\ \rho_1\geqq\dfrac{1}{2}\right), \\ \overline{R}^0_n(x)\,(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}\sim\overline{F}_n\cos\psi+r_n\dfrac{d\overline{F}_n}{d\vartheta}\sin\psi \\ \qquad\left(\rho<0,\ 0\leqq\rho_1<\dfrac{1}{2}\right), \end{cases}$$

где

$$\overline{F}_n=(1+x)^{\rho_1}\,\overline{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x),\quad r_n=\sqrt{\frac{(1+x)}{(n+\rho)(n+2\rho+\rho_1)(1+x)+\rho_1(1-2\rho_1)}}\,;$$

в силу (214), произведения $|\overline{R}_0(x)\,(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}|$ остаются ограниченными на $(-1,+1)$.

Асимптотические формулы (261—266), ошибка которых равномерно стремится к нулю на всем отрезке $(-1,+1)$, могут служить для изучения сходимости разложений в ряд по ортогональным полиномам.

7. Заметим, что когда $t_0(x)$ данный полином (и a fortiori, если $t_0(x)=1$, т. е. если просто рассматриваются полиномы Jacobi), равенство

$$(250\text{ bis})\qquad H=\int_{-1}^{+1}\left|\frac{K_n}{x-z}\right|\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=O(\ln n)$$

непосредственно дает условия равномерной сходимости соответствующих рядов.

Достаточно будет опять исследовать один случай. Рассмотрим, например, тот, когда $\rho\geqq0$, $\rho_1\geqq0$ (содержащий, в частности, полиномы Legendre'a).

Рассмотрим разложение по соответствующим ортогональным полиномам

$$f(x)=\sum a_k \overline{R}{}_k^0(x), \tag{267}$$

где

$$a_k=\int\limits_{-1}^{+1} f(x)\,q(x)\,\overline{R}{}_k^0(x)\,dx.$$

Положим

$$f_n(x)=\sum_0^n a_k\,\overline{R}{}_k^0(x)=\int\limits_{-1}^{+1} f(z)\,q(z)\sum_0^n \overline{R}{}_k^0(x)\,\overline{R}{}_k^0(z)\,dz; \tag{268}$$

пусть $\varphi_n(x)$ какой-нибудь полином степени n, близкий к $f(x)$; имеем тогда

$$f_n(x)-\varphi_n(x)= \tag{269}$$

$$=\int\limits_{-1}^{+1}[f(z)-\varphi_n(z)]\,q(z)\,\sum_0^n \overline{R}{}_k^0(x)\,\overline{R}{}_k^0(z)\,dz,$$

откуда

$$\Big[f_n(x)-\varphi_n(x)\Big](1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}=\frac{A_n}{A_{n+1}}\int\limits_{-1}^{+1}\Big[f(z)-\varphi_n(z)\Big]\times \tag{270}$$

$$\times\frac{(1-z)^{2\rho}(1+z)^{2\rho_1}(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\,t_0(z)}{(x-z)}\times$$

$$\times\frac{\left[\overline{R}{}_{n+1}^0(x)\,\overline{R}{}_n^0(z)-\overline{R}{}_{n+1}^0(z)\,\overline{R}{}_n^0(x)\right]dz}{\sqrt{1-z^2}}=$$

$$=O\Big\{[f(z)-\varphi_n(z)]\,(1-z)^{\rho}(1+z)^{\rho_1}\ln n\Big\}.$$

Стало быть, если существуют такие полиномы $\varphi_n(x)$, что

$$|f(z)-\varphi_n(z)|\,(1-z)^{\rho}(1+z)^{\rho_1}=o\left(\frac{1}{\ln n}\right), \tag{271}$$

то разложение (267), умноженное на $(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}$, делается сходящимся на всем отрезке $(-1,+1)$.

Для того чтобы это имело место, достаточно, следовательно, чтобы

$$f(x)=\frac{f_1(x)}{(1-x^{\rho})(1+x)^{\rho_1}}, \tag{272}$$

где $f_1(x)$ удовлетворяет условию Dini-Lipschitz'a, и $f_1(\pm 1)=0$.

Действительно, тогда можно построить такие полиномы $\varphi_n(x)$ степени n, что [6]

$$(273)\qquad \left| f_1(z) - \varphi_n(z)(1-z)^{\rho}(1+z)^{\rho_1} \right| = o\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Поэтому a fortiori достаточно для обеспечения равномерной сходимости $(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sum a_n \bar{R}_n^0(x)$, чтобы функция $f(x)$ сама удовлетворяла условию Dini-Lipschitz'a.

В случае, когда хотя бы одно из чисел ρ и ρ_1 будет отрицательным, получим аналогичный результат. Достаточно формулировать его для

$$\rho \leqq 0,\quad \rho_1 \leqq 0\quad \left(\rho > -\frac{1}{4},\ \rho_1 > -\frac{1}{4}\right),$$

тогда само разложение

$$f(x) = \sum a_n \bar{R}_n(x)$$

будет равномерно сходящимся, если функция

$$(274)\qquad f_1(x) = f(x)(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1}$$

удовлетворяет условию Dini-Lipschitz'a, и $f_1(\pm 1)=0$.

Я не буду заниматься другими условиями сходимости и нахождением приближений, получающихся при этих разложениях. Ограничусь только одним примером, который показывает, что само разложение (267) для $\rho>0$, $\rho_1>0$ может вообще не быть сходящимся, когда функция удовлетворяет условию Dini-Lipschitz'a и даже условию Lipschitz'a достаточно низкой степени.

Мы положим $\rho = \rho_1 = \frac{1}{2}$, $t_0(x) = 1$. Тогда ортогональный полином будет

$$\bar{R}_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Рассмотрим функцию

$$(275)\qquad f(x) = \sum_1^{\infty}\frac{\cos n^4\theta}{n^2} = \sum_1^{\infty}\frac{\cos n^4 \arccos x}{n^2}.$$

Легко проверить, что эта функция переменной x удовлетворяет на всем отрезке $(-1, +1)$ условию Lipschitz'a степени $\alpha = \frac{1}{8}$ (рассматриваемая как функция от θ функция удовлетворяет даже условию Lipschitz'a степени $\frac{1}{4}$).

Между тем, разложение

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} a_k \overline{R}_k^0(x), \tag{268 bis}$$

где

$$a_k = \int_{-1}^{+1} f(x)\overline{R}_k^0(x)\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^{+1} \sum \frac{\cos n^4\theta}{n^2} \sin(k+1)\theta \sin\theta\, d\theta$$

расходится для $x = \pm 1$, так как имеем

$$a_k = \frac{1}{2n^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{для} \quad k = n^4,$$

$$a_k = -\frac{1}{2n^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{для } k = n^4 - 2$$

$a_k = 0$ для всех остальных целых значений k, так что члены разложения $f(\pm 1)$ бесконечно растут, ибо

$$\overline{R}_k^0(\pm 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(k+1).$$

(Согласно предыдущему, разложение (268 bis) делается равномерно сходящимся после умножения на $\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$).

Таким образом, разложения в ряд полиномов Jacobi с параметрами $\alpha = 2\rho - \frac{1}{2}$, $\beta = 2\rho_1 - \frac{1}{2}$, а также разложения по ортогональным полиномам, приводящимся к Якобиевым, должны быть применяемы предпочтительно, если хотят приблизить данную функцию $f_1(x)$ при помощи полиномов, умноженных на $(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}$. Тогда можно разложить

$$\frac{f_1(x)}{(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}} = f(x),$$

и умножая это разложение на $(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}$, получить вообще хорошо сходящийся ряд для $f_1(x)$. Порядок получающегося при этом приближения, не более чем в $\ln n$ раз превосходящий порядок наилучшего, следует из (271), что обобщает классический результат Lebesgue'a относящийся к тригонометрическим рядам.

Я укажу еще на такое следствие из предыдущего.

Пусть $\rho \geqq 0$, $\rho_1 \geqq 0$. Если

$$f_1(x) = f(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}, \tag{272 bis}$$

где $f_1(x)$ удовлетворяет условию Lipschitz'а степени

$\alpha > \frac{1}{2}$, и $f_1(\pm 1) = 0$, разложение $f(x)$ по ортогональным полиномам $\overline{R}_n^0(x)$, соответствующим весу $q(x) = (1-x)^{2\rho - \frac{1}{2}}(1+x)^{2\rho_1 - \frac{1}{2}} t_0(x)$ делается абсолютно и равномерно сходящимся после умножения на $(1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1}$. Доказательство подобно тому, которое было мною дано для тригонометрических рядов.[1]

В общем случае, когда $t_0(x)$ удовлетворяет только условию (252) (а не является многочленом), так что мы знаем лишь, что ошибка асимптотической формулы (261) равномерно стремится к нулю на $(-1, +1)$, достаточное условие для равномерной сходимости разложения в ряд по соответствующим полиномам должно быть немного изменено.[2]

Действительно, рассуждения, которые привели нас к (250), больше непосредственно неприменимы.

Но во всяком случае легко видеть, что

$$H_1 = \int_{-1}^{+1} \left| \frac{K_n}{x-z} \right| dz = O(\ln n). \tag{276}$$

Действительно имеем всегда

$$(1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1} (1-z)^\rho (1+z)^{\rho_1} \left[\overline{R}_{n+1}^0(x)\overline{R}_n^0(z) - \overline{R}_{n+1}^0(z)\overline{R}_n^0(x)\right] = K_n = O(1), \tag{277}$$

и, с другой стороны, обращаясь к доказательству формулы (236), видим, что a fortiori

$$\left|\overline{R}_k^0(x) - \overline{R}_{k,h}(x)\right| (1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1} = O(\varepsilon \ln n),$$

если $k < n$, откуда следует, что

$$\sum \overline{R}_k^{02}(x)(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1} = \sum \overline{R}_{k,h}^2(x)(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1} + nO(\varepsilon \ln n) = O(n), \tag{242 bis}$$

так что

$$\frac{K_n}{x-z} = O(n). \tag{278}$$

Применяя последнее замечание к интервалу $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$ и равенство (277) на остальной части отрезка $(-1, +1)$, получаем немедленно формулу (276).

---

[1] См., например, L. Tonelli, Serie trigonometriche, стр. 268.

[2] В случае $\rho = \rho_1 = 0$ и более общем, если

$$\rho(1-2\rho) = \rho_1(1-2\rho_1) = 0$$

условие (252) относительно $t_0(x)$ может быть заменено условием (18) первой части.

Таким образом, возвращаясь к формуле (270), **мы можем** только утверждать, что

$$\left[f_n(x)-\varphi_n(x)\right](1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}=$$
$$=O\left\{\left[f(z)-\varphi_n(z)\right](1-z)^{\rho-\frac{1}{2}}(1+z)^{\rho_1-\frac{1}{2}}\ln n\right\}.$$

Стало быть, для утверждения о равномерной сходимости разложения $f(x)$, умноженного на $(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}$, на всем отрезке,[1] мы должны потребовать, чтобы

$$(279)\qquad \left|f(z)-\varphi_n(z)\right|(1-z)^{\rho-\frac{1}{2}}(1+z)^{\rho_1-\frac{1}{2}}=o\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Другими словами, достаточно, чтобы функция

$$f_1(x)=f(x)(1-x)^{\rho-\frac{1}{2}}(1+x)^{\rho_1-\frac{1}{2}}$$

удовлетворяла условию Dini-Lipschitz'a, и $f_1(\pm 1)=0$.

Условие, которое мы здесь формулируем, менее общее, чем (272), не является вероятно существенным, но для того чтобы от него избавиться, налагая возможно меньше ограничений на $t_0(x)$, нужно непосредственно исследовать ошибку асимптотического значения величины K_n, которая во всех случаях может быть представлена в виде (243).

9. Перейдем теперь к значительно более легкой задаче распространения асимптотической формулы (221) на внешние точки, предполагая $t_0(x)$ произвольным. Нам не придется добавить ничего существенного к соответствующим рассуждениям главы II.

Так, лемма § 6 указанной главы справедлива без изменения и

$$(83\text{ bis})\qquad \left|\overline{R}^0_n(x)-\overline{R}_{n,\,h}(x)\right|=O\left[M\varepsilon\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right],$$

где δ—наименьшее расстояние x от отрезка $(-1,+1)$ и M—наибольшее из двух значений $\overline{R}_{n,\,h}(x)$ и $\overline{R}_{n-1,\,h}(x)$, предполагая, что

$$|t_0(x)-t_h(x)|=O(\varepsilon).$$

Следовательно, при условии, что $t_0(x)>0$ непрерывна на $(-1, +1)$, имеем асимптотическую формулу

$$(280)\qquad R^0_n(x)=R^{(\alpha,\,\beta)}_n(x)\,e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\ln t_0(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}(1+\gamma_n)$$
$$\sim\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+\rho+\rho_1}\frac{e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\ln t_0(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}}{(x-1)^\rho(x+1)^{\rho_1}},$$

---

[1] **Очевидно, что формула (276) достаточна для утверждения о равномерной сходимости внутри (—1, +1) при условии (271).**

где γ_n равномерно стремится к нулю во всякой определенной области, внешней по отношению к отрезку $(-1, +1)$, и для нормированных полиномов, имеем

$$(280\ \text{bis})\quad \overline{R}_n^0(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+\rho+\rho_1}}{\sqrt{2\pi}(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_1}} e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(z)\,dz}{(z-x)\sqrt{1-z^2}}}(1+\gamma_n)$$

$$\sim \overline{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x) e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(z)\,dz}{(z-x)\sqrt{1-z^2}}}.$$

Укажем на некоторые приложения этих формул.

1. Определим минимум N_n интеграла

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, t_0(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\, dx,$$

если $P_n(x)$ задан во внешней точке $x = \xi$.

Будем иметь

$$P_n(x) = a_0\overline{R}_0^0 + a_1\overline{R}_1^0(x) + \ldots + a_n\overline{R}_n^0(x),$$

где

$$a_i = a_0\frac{\overline{R}_i^0(\xi)}{\overline{R}_0^0};$$

стало быть

$$P_n(x) = \frac{a_0}{\overline{R}_0^0}\sum_0^n \overline{R}_i^0(x)\overline{R}_i^0(\xi),$$

$$P_n(\xi) = \frac{a_0}{\overline{R}_0^0}\sum_0^n (\overline{R}_i^0(\xi)^2$$

и

$$(281)\quad N_n = \sum_0^n\left(\frac{\overline{R}_i^0(\xi)}{\overline{R}_0^0}\right)^2 a_0^2 \sim$$

$$\sim \frac{4\pi(\xi-1)^{\alpha+1}(\xi+1)^{\beta+1}}{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^{2n+\alpha+\beta+2}} e^{-\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(z)\,dz}{(z-\xi)\sqrt{z^2-1}}},$$

предполагая $P_n(\xi) = 1$.

2. Формулы могут быть применены для определения минимального колебания монотонных полиномов (и многократно монотонных), подчиненных различным условиям.

Так, поставим себе задачу определить минимальное колебание M монотонного полинома $Q_m(x)$ степени m на отрезке $(-1, +1)$, если его производная обращается в нуль в h внешних точках $a_1, a_2, \ldots, a_h$ и равна 1 во внешней точке ξ.

Предположим, что $m-h=2n+1$ нечетно; тогда без труда проверяется, что экстремизующий полином может быть представлен в виде[1]

$$Q_m(x)=\int\limits_{-1}^{x} P_n^2(x)\,t_h(x)\,dx,$$

где $t_h(x)=\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_h}\right).$

Решение следует таким образом из формулы (281), и искомое минимальное колебание асимптотически равно

$$(282)\qquad M\sim\frac{4\pi(\xi^2-1)}{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^{m-h+1}}\,e^{-\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_h(z)\,dz}{(z-\xi)\sqrt{1-z^2}}}$$

$$=\frac{4\pi t_0(\xi)(\xi^2-1)}{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^{m+1}}\,\frac{[r_1(\xi+\sqrt{\xi^2-1})-1]\,\ldots\,[r_h(\xi+\sqrt{\xi^2-1})-1]}{[r_1-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})]\,\ldots\,[r_h-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})]},$$

где $r_i=a_i+\sqrt{a_i^2-1}$ (знак перед радикалом всегда выбирается так, что $|r_i|>1$).

3. Асимптотическая формула (280) позволяет определить во всех случаях асимптотические значения коэфициентов ортогонального полинома

$$(283)\qquad R_n^0(x)=x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_kx^{n-k}+\cdots+A_n$$

для конечного k.

Действительно, полагая $|x|>1$, имеем

$$\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(z)\,dz}{\left(1-\frac{z}{x}\right)\sqrt{1-z^2}}=\left[1-\frac{1}{2x^2}-\cdots\right]\times$$

$$\times\left[\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\cdots+\frac{\alpha_k}{x_k}+\cdots\right],$$

где

$$(284)\qquad \alpha_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{z^k\ln t_0(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

остается ограниченным, так что в разложении

$$(285)\qquad e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}\right)\frac{\ln t_0(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}=e^{-\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_1-2\alpha_1}{2x^2}+\cdots}=$$

$$=1-\frac{\alpha_1}{x}+\cdots$$

коэфициенты также ограничены.

---

[1] См. мою статью „Sur les polynomes monotones“ Сообщ. Харьк. математического общества, серия IV, т. I.

С другой стороны, в силу (219) коэфициенты полинома Jacobi асимптотически тождественны коэфициентам

$$(286)\qquad T_n(x)\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2(x-1)}\right)^{\rho}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2(x+1)}\right)^{\rho_1}$$

$$=\left[x^n-\frac{n}{2^2}\,x^{n-2}+\cdots(-1)^l\,\frac{n(n-l-1)\cdots(n-2l+1)}{l!\,2^{2l}}\times\right.$$

$$\left.\times\,x^{n-2l}+\cdots\right]\left[1+\frac{\rho}{x}+\cdots\right]\left[1-\frac{\rho_1}{x}+\cdots\right],$$

где $T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x$, когда $\frac{k}{n}\to 0$. Следовательно, для $\frac{k}{n}\to 0$ коэфициенты произведения (285) на (286) асимптотически равны соответствующим коэфициентам

$$(287)\qquad x^n+(\rho-\rho_1-\alpha_1)\,x^{n-1}-\frac{n}{4}\,x^{n-2}+\cdots+\left(-\frac{n}{4}\right)^l\frac{x^{n-2l}}{l!}$$

$$+\left(-\frac{n}{4}\right)^l\frac{(\rho-\rho_1-\alpha_1)\,x^{n-2l-1}}{l!}+\cdots,$$

по крайней мере, если $\rho-\rho_1-\alpha_1\neq 0$; в случае $\rho-\rho_1-\alpha_1=0$, порядок величины коэфициентов, соответствующих $k=2l+1$ нечетному, понижается, и их асимптотические значения получаются введением следующих членов (285).

Очевидно, что для конечного k коэфициенты A_k асимптотически равны коэфициентам разложения (287), так как в разложении γ_n по степеням $\frac{1}{x}$ в (280) коэфициенты будут порядка $\gamma_n\,R^k$ при всяком $R>1$.

Если k бесконечно растет, коэфициенты A_k будут асимптотически равны B_k в

$$(288)\qquad P_n(x)=R_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\ln t_n(z)\,dz}{\sqrt{1-z}}}$$

$$=x^n+B_1\,x^{n-1}+\cdots+B_k\,x^{n-k}+\cdots$$

только при условии, что γ_n стремится к нулю не очень медленно.

Действительно, будем иметь

$$(289)\qquad A_k-B_k=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{P_n(z)\,\gamma_n\,dz}{z^{n-k+1}},$$

где C—эллипс с фокусами $(-1,+1)$, и сумма полуосей которого есть $1+\delta$ $(\delta>0)$.

Стало быть,

$$A_k - B_k = O\left\{\left(\frac{1+\delta}{2}\right)^{n+1} \frac{\gamma_n}{\left|\frac{1}{2}\left(1+\delta-\frac{1}{1+\delta}\right)\right|^{n+1-k}}\right\} =$$

$$= O\left[\frac{(1+\delta)^{2n+2-k}\gamma_n}{2^k(\delta^2+2\delta)^{n+1-k}}\right];$$

предполагая, что $\lim \frac{k}{n} < 1$, положим $1+\delta = \sqrt{\frac{2n+2-k}{k}}$; имеем таким образом

$$A_k - B_k = O\left[\frac{(2n+2-k)^{n+1-\frac{k}{2}}\gamma_n}{2^n k^{\frac{k}{2}}(n+1-k)^{n+1-k}}\right]. \tag{290}$$

Если обозначить через C_k коэфициенты при x^{n-k} полинома $T_n(x)$, где $k = 2l$ четно, то формула (290) принимает вид

$$A_k - B_k = O(C_k \gamma_n \sqrt{k}), \tag{291}$$

так как

$$|C_k| = \frac{n\left(n-\frac{k}{2}-1\right)!}{(n-k)!\left(\frac{k}{2}\right)!\,2^k} \sim \frac{n\left(n-\frac{k}{2}-1\right)^{n-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}}{(n-k)^{n-k}(2k)^{\frac{k}{2}}} \times \tag{292}$$

$$\times \frac{e}{\sqrt{\pi k(n-k)}} = \frac{n(2n-k-2)^{n-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}}{2^{n-\frac{1}{2}}(n-k)^{n-k}k^{\frac{k}{2}}} \frac{e}{\sqrt{\pi k(n-k)}}.$$

Следовательно, для того чтобы

$$\lim \frac{A_k}{B_k} = 1, \tag{293}$$

достаточно иметь

$$\gamma_n C_k \sqrt{k} = o(B_k). \tag{294}$$

В частности, если $\frac{k}{n} \to 0$, то, согласно (286), $B_k \sim C_k$ для четного k; стало быть для осуществления (293) достаточно, чтобы

$$\gamma_n \sqrt{k} \to 0. \tag{295}$$

Имеем аналогичный, но более узкий результат для нечетного k; тогда для того чтобы (293) выполнялось, достаточно, чтобы $\gamma_n \sqrt{n} \to 0$.

Замечая, что коэфициенты C_k возрастают быстрее членов геометрической прогрессии с знаменателем $r > 1$, пока $\lim \frac{k}{n} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, можно распространить предыдущие заключения на случай, когда $\lim \frac{k}{n} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Вследствие (219) и (221) это представится в частности при любых ρ и ρ_1, когда $t_0(x)$ есть полином. Заметим, что в этом случае

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{z \ln t_h(z)\, dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{h} \frac{1}{r_i}. \tag{296}$$

В случае, когда функция $t_0(x)$ четная, и $\rho = \rho_1$, очевидно, что в силу симметрии соответствующие ортогональные полиномы будут содержать только члены одной четности.

В случае $\rho = \rho_1 = 0$, в силу формулы (16), $\overline{R}_n^0(x)\sqrt{t_0(x)}$ достигает асимптотически своего абсолютного максимума с противоположными знаками в $n+1$ точках отрезка $(-1, +1)$, и, следовательно, $\overline{R}_n^0(x)$ дает (асимптотически) минимальное уклонение произведению

$$P_n(x)\sqrt{t_0(x)},$$

если $P_n(x)$ имеет тот же коэфициент A_k при x^{n-k}, что и $R_n^0(x)$.

Стало быть, в частности, при $\frac{k}{n} \to 0$, ввиду того что $B_k \sim C_k$, отношение этого минимального уклонения к уклонению, соответствующему $t_0(x) = 1$, асимптотически равно $e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\ln t_0(z)\, dz}{\sqrt{1-z^2}}}$, так же как в случае, когда $k = 0$, какова бы ни была непрерывная положительная функция $t_0(x)$.

Асимптотическое значение A_k для $\lim \frac{k}{n} = 1$ не может быть получено из (280); но его можно получить из (28), считая $t_k(x)$ полиномом, а затем перейти к пределу и получить общий случай.

Не входя в детали доказательства, я ограничусь указанием результата в случае, если $\rho = \rho_1$ и $t_0(x)$—четная функция, тогда

$$\lim \frac{A_k}{C_k} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\ln t_0(z)\, dz}{\sqrt{1-z^2}}} \quad \left(\text{если } \lim \frac{k}{n} = 1\right). \tag{297}$$

Следовательно, формулы В. Маркова асимптотически справедливы, когда $\frac{k}{n} \to 1$ $\left(\text{но они неверны, по предыдущему, для } \lim \frac{k}{n} = 0\right)$, какова бы ни была непрерывная позитивная функция $t_0(x)$.

Таким образом, в частности, минимальное уклонение

$$|p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n| \sqrt{t_0(x)}$$

на $(-1, +1)$ асимптотически равно $\frac{1}{n}$.

Этот последний результат, впрочем, верен также и тогда, когда $t_0(x)$ будет содержать множителем $(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1}$ при $\rho\rho_1 \gtrless 0$, и может быть получен с помощью того же рассуждения, что и следующее общее предложение, которое мы докажем:

Если функция $\varphi(x)$ обладает свойством, что, каково бы ни было целое число $\lambda > 0$,

$$E_n(x^\lambda \varphi(x)) = o\{E_n[\varphi(x)]\}, \tag{298}$$

где $E_n[f(x)]$ обозначает наилучшее приближение $f(x)$ полиномами степени n на $(-1, +1)$, то, какова бы ни была непрерывная положительная функция $p(x)$, удовлетворяющая условию $p(0) = 1$, имеем

$$E_{n, p(x)}[\varphi(x)] \sim E_n[\varphi(x)], \tag{299}$$

где $E_{n,p(x)}[\varphi(x)]$ есть минимальное уклонение произведения

$$|\varphi(x) - P_n(x)| p(x) \tag{300}$$

на том же отрезке; $P_n(x)$ полином степени n.

Действительно, пусть $p_h(x)$ $(p_h(0) = 1)$ полином степени h, близкий к $p(x)$ и $q_k(x)$ $(q_k(0) = 1)$ полином степени k, близкий к $\frac{1}{p(x)}$, так что, при данном произвольно положительном ε

$$1 - \varepsilon < \frac{p_h(x)}{p(x)} < 1 + \varepsilon, \quad 1 - \varepsilon < q_k(x) p(x) < 1 + \varepsilon, \tag{301}$$

откуда

$$(1-\varepsilon)^2 < p_h(x) q_k(x) < (1+\varepsilon)^2. \tag{302}$$

Полагая

$$p_h(x) = 1 + x R(x),$$

мы заключаем из (298), что

$$E_n[p_h(x) \varphi(x)] \sim E_n[\varphi(x)] \tag{303}$$

и, следовательно, так как, очевидно, имеем

$$E_{n, p_h(x)}[\varphi(x)] \geqq E_{n+h}[p_h(x) \varphi(x)],$$

мы можем выбрать n достаточно большим для того, чтоб было

$$(304)\qquad E_{n,\,p_h(x)}[\varphi(x)] > E_{n+h}[\varphi(x)](1-\varepsilon).$$

Таким же образом

$$(305)\; E_{n,\,p_h(x)\,q_k(x)}[\varphi(x)] \geqq E_{n+k,\,p_h(x)}[q_k(x)\,\varphi(x)] \sim E_{n+k,p_h(x)}[\varphi(x)];$$

стало быть, в силу (302) и (305), имеем

$$(306)\qquad E_n[\varphi(x)] > E_{n+k,\,p_h(x)}[\varphi(x)](1-\varepsilon)^3.$$

Принимая во внимание (301), (304) и (306), мы имеем, стало быть, двойное неравенство

$$(307)\; \frac{1}{(1-\varepsilon)^4}E_{n-k}[\varphi(x)] > E_{n,\,p(x)}[\varphi(x)] > E_{n+h}[\varphi(x)](1-\varepsilon)^2,$$

что доказывает наше утверждение.

Теорема применима, в частности, к $|x|^\alpha$, каково бы ни было $\alpha > 0$. Очевидно, также, что введение в функцию $p(x)$ множителя вида $\left|1-\frac{x}{a_1}\right|^{\mu_1}\dots\left|1-\frac{x}{a_h}\right|^{\mu_h}$, обращающегося в нуль на $(-1, +1)$, не изменяет асимптотической величины $E_{n,\,p(x)}[\varphi(x)]$, когда $\varphi(x)$ подчиняется условию (298).

10. В заключение, покажем, как можно будет вычислить асимптотическое значение $E_{n,\sqrt{t_0(x)}}[\varphi(x)]$, когда $\varphi(x)$ является аналитической функцией. Мы ограничимся случаем положительного и непрерывного на $(-1, +1)$ $t_0(x)$, присовокупляя временно условие (18), от которого затем мы сможем избавиться.

Предположим для определенности, что $\varphi(x)$ имеет единственный действительный положительный полюс, $a > 1$, на эллипсе сходимости.

Начнем с замечания, что если тригонометрический вес $t_0(x)$ удовлетворяет условию (18)

$$t_0(x+\delta) - t_0(x) = O\left(\frac{1}{\ln\delta}\right)^{1+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$, то имеем не только формулу

$$(16)\qquad \overline{R}{}^0_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t_0(x)}}\cos(n\theta+\psi),$$

но и, пользуясь тем же методом, получаем асимптотическую формулу для производной

$$(308)\qquad \frac{1}{n}\overline{R}{}'^0_n(x)\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi t_0(x)}}\sin(n\theta+\psi)+\varepsilon_n,$$

где ε_n равномерно стремится к нулю, на всем отрезке $(-1, +1)$.

Действительно, предположив, сначала, что $t_0(x)$ есть полином $t_h(x)$ и заменяя в последней колонне детерминанта (28) полином Чебышева $T_n(x)$ через $\frac{1}{n}T_n'(x)\sqrt{1-x^2}$, убеждаемся, что формула (308) справедлива, с тем же порядком ошибки, что и соответствующая формула (64). Затем, применяя хорошо известную теорему, мы констатируем, что

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\left[\overline{R}_n'^0(x)-\overline{R}_{n,h}'(x)\right]=O\,(\varepsilon\ln n),$$

если показано, что

$$\left|\overline{R}_n^0(x)-\overline{R}_{n,h}^0(x)\right|=O\,(\varepsilon\ln n).$$

Установив это, составим полином

$$(309)\qquad S_{n+1}(x)=(x-a)\left[\overline{R}_n^0(x)\cos\delta-\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\overline{R}_n'^0(x)\sin\delta\right]$$

$$=\overline{R}_n^0(x)(ax-1)+\frac{\sqrt{a^2-1}}{n}(x^2-1)\overline{R}_n'^0(x),$$

где

$$\cos\delta=\frac{ax-1}{x-a},\quad \sin\delta=\frac{\sqrt{(a^2-1)(1-x^2)}}{x-a},$$

так что, по (16) и (308), имеем

$$(310)\qquad \frac{S_{n+1}(x)}{x-a}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi t_0(x)}}\cos(n\theta+\psi+\delta).$$

Так как δ возрастает от $-\pi$ до нуля, когда θ изменяется от нуля до π, функция

$$(311)\qquad \frac{\sqrt{t_0(x)}S_{n+1}(x)}{x-a}=\left[\frac{S_{n+1}(a)}{x-a}-P_n(x)\right]\sqrt{t_0(x)},$$

где $P_n(x)$ есть полином степени n, достигает $n+1$ раз своего максимального уклонения, асимптотически равного $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Стало быть $\frac{P_n(x)}{S_{n+1}(a)}$ дает асимптотически наилучшее приближение

$$E_{n,\sqrt{t_0(x)}}\left(\frac{1}{x-a}\right)\sim\frac{1}{|S_{n+1}(a)|}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Для нахождения асимптотического значения $S_{n+1}(a)$, замечаем, что, по (16) и (310), $S_{n+1}(x)+a\overline{R}_{n+1,a}(x)=0\,(1)$ равномерно на всем отрезке $(-1,+1)$, где $\overline{R}_{n+1,a}(x)$ нормированный, ортогональный относительно тригонометрического веса $t_0(x)\left(1-\frac{x}{a}\right)^2$, полином; стало быть в силу известной теоремы имеем в точке a

$$S_{n+1}(a)=-a\overline{R}_{n+1,a}(a)+o\left[(a+\sqrt{a^2-1})^n\right],$$

т. е.

$$\lim\frac{S_{n+1}(a)}{\overline{R}_{n+1}(a)}=-a.$$

Но

$$\overline{R}_{n+1,a}(a)\sim\frac{(a+\sqrt{a^2-1})^{n+1}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(z)-2\ln\left(1-\frac{z}{a}\right)}{(z-a)\sqrt{1-z^2}}dz}$$

$$=\frac{2\left(a-\frac{1}{a}\right)}{\sqrt{2\pi}}(a+\sqrt{a^2-1})^n e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(z)\,dz}{(z-a)\sqrt{1-z^2}}}.$$

Следовательно,

$$(312)\quad E_{n,\sqrt{t_0(x)}}\left(\frac{1}{x-a}\right)\sim\frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}e^{-\frac{\sqrt{a^2-1}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(z)\,dz}{(a-z)\sqrt{1-z^3}}},$$

что также может быть записано в виде

$$(312\text{ bis})\quad E_{n,\,t_0(x)}\left(\frac{1}{x-a}\right)\sim E_n\left(\frac{1}{x-a}\right)e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(z)\,dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}}.$$

Из формулы (309) можно получить и асимптотическую величину $S_{n+1}(a)$.

Достаточно заметить, что асимптотические формулы для производных, которые получаются диференцированием (280), тоже справедливы во всех внешних точках, так как доказательство этого следует непосредственно из метода, развитого в этом мемуаре.

К тому же, достаточно доказать формулу (312) для произвольного положительного полинома $t_h(x)$,[1] чтобы иметь возможность утверждать ее справедливость для любой непрерывной, положительной функции.

Диференцируя по a тождество

$$(311\text{ bis})\quad \sqrt{t_0(x)}\frac{S_{n+1}(x)}{S_{n+1}(a)}\frac{1}{x-a}=\left[\frac{1}{x-a}-\frac{P_n(x)}{S_{n+1}(a)}\right]\sqrt{t_0(x)}$$

---

[1] Я получил эту формулу впервые в эквивалентной форме (как произведение множителей, что делает очевидным и алгебраическую природу рассматриваемого интеграла) в статье в Comptes rendus (заседание 26 марта 1928 г.· стр. 840).

и замечая, что, по (309), последовательные производные $S_{n+1}(x)$ по a будут на отрезке $(-1, +1)$ порядка $O(1)$ для $n \to \infty$, мы заключаем, что правая часть равенства, которая после k диференцирований делается равной

$$\left[\frac{k!}{(x-a)^{k+1}} - Q_{n,k}(x)\right]\sqrt{t_0(x)},$$

где $Q_{n,k}(x)$ полином степени n, асимптотически равняется

$$\frac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\frac{1}{S_{n+1}(a)}\right)\sqrt{t_0(x)}\,\frac{S_{n+1}(x)}{x-a} \sim \frac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\frac{1}{S_{n+1}(a)}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\theta + \\ + \psi + \delta).$$

Следовательно, в силу выше сделанного замечания, имеем

$$(313)\quad E_{n,\sqrt{t_0(x)}}\left(\frac{1}{(x-a)^{k+1}}\right) \sim E_n\left(\frac{1}{(x-a)^{k+1}}\right) e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(z)\,dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}}.$$

Стало быть, если аналитическая функция $\varphi(x)$ имеет единственный вещественный полюс некоторого порядка на эллипсе сходимости, имеем всегда

$$(314)\qquad E_{n,\,t_0(x)}[\varphi(x)] \sim E_n[\varphi(x)]\,e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\ln t_0(z)\,dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}},$$

какова бы ни была позитивная и непрерывная на $(-1, +1)$ функция $t_0(x)$.

Это асимптотическое равенство должно, очень вероятно, быть справедливым в случае, когда $\varphi(x)$ имеет логарифмические или алгебраические особенности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О распределении нулей многочленов, стремящихся к непрерывной функции, положительной в данном интервале [1]

Пусть $t_h(x)$ многочлен степени h, положительный на отрезке $(-1, +1)$

$$(1)\qquad t_h(x) = t_h(0)\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_h}\right),$$

---

[1] Journal de Mathématiques, t. VIII, 1929, p. 327.

корни которого, таким образом, либо действительные, либо комплексные сопряженные.

Составим для каждого корня a_k выражение

$$\rho_k = a_k + \sqrt{a_k^2 - 1}\,,$$

где знак перед радикалом взят так, чтобы выполнялось условие $\rho_k > 1$; тогда

$$(2)\qquad \delta_k = \left|\frac{\rho_k}{2a_k}\right| = \left|\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{a_k^2}}}{2}\right|$$

представляет отношение полусуммы осей эллипса, проходящего через точку a_k, с фокусами в -1 и $+1$, к диаметру, соответствующему той же точке.

Если положить

$$(3)\qquad M_h = \delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_h,$$

то[1]

$$(4)\qquad \frac{\lambda_h}{t_h(0)} < M_h < \frac{L_h}{t_h(0)}\,,$$

при условии, что

$$(5)\qquad \lambda_h < t_h(x) < L_h \quad \text{для} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1;$$

более того, каковы бы ни были полиномы $t_h(x)$, равномерно стремящиеся на $(-1, +1)$ к непрерывной положительной функции $t(x)$ такой, что

$$(6)\qquad \lambda < t(x) < L \quad \text{на} \quad (-1,\ +1),$$

M_h стремится к одному и тому же пределу M, удовлетворяющему неравенству

$$(7)\qquad \frac{\lambda}{t(0)} < M < \frac{L}{t(0)}\,.$$

Мы получим из этого несколько теорем, относящихся к распределению нулей многочленов $t_h(x)$, которые будут по сути основываться на следующем замечании.

Пусть

$$(8)\qquad a_k = R_k e^{i\theta_k}\,,$$

где мы предположим модуль R_k постоянным; если аргумент θ_k возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $|\rho_k|$ (представляющий полусумму осей соответствующего софокусного эллипса) тоже увеличивается, и следовательно возрастают также δ_k.

Таким образом при бесконечном возрастании h ($t_h(x)$ остается ограниченным сверху и снизу) найдутся, вообще говоря, корни,

---

[1] Comptes rendus, 186, p. 140.[7]

для которых $\delta_k \geqq 1$; стало быть, только для исключительных классов функций, апроксимирующие многочлены могут иметь корни с аргументами, мало отличающимися только от 0 и π или от $\pm \frac{\pi}{2}$. Вот более точная формулировка первой теоремы, к которой мы приходим:

Теорема А. Если корни $a_k = R_k e^{\pm i\theta_k}$ многочленов $t_h(x)$, стремящихся к непрерывной положительной функции $t(x)$, обладают свойством

$$(9) \qquad \left| \theta_k \pm \frac{\pi}{2} \right| \leqq \frac{\pi}{4},$$

то функция $t(x)$ будет необходимо целой функцией, порядка не выше 3 и рода не выше 4.

Действительно, исходя из сделанного выше замечания, видим, что условие (9) влечет за собой неравенство

$$(10) \qquad \delta_k > \left| \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{i}{R_k^2}}}{2} \right|;$$

и так как

$$\sqrt{1 + ib} = A + iB,$$

где

$$A^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + b^2} + 1\right], \quad B^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + b^2} - 1\right],$$

то[8]

$$(11) \qquad \delta_k \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{R_k^2}} + \sqrt{2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{R_k^2}}\right)}}$$

$$> \sqrt[8]{1 + \frac{1}{256 R_k^4}}.$$

Следовательно, сумма $\sum_h^1 \frac{1}{R_k^4}$ ограничена. Стало быть, сумма

$$\ln\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{a_h}\right) + \sum_h^1 \frac{x}{a_k} + \frac{1}{2}\sum_1^h \frac{x^2}{a_k^2} + \frac{1}{3}\sum_1^h \frac{x^3}{a_k^3}$$

ограничена во всякой конечной области Ω плоскости x.

Так как, с другой стороны, $\ln\left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{a_h}\right)$ остается ограниченным на отрезке $(-1, +1)$, то полиномы третьей степени

$$A_1^{(h)}x + A_2^{(h)}x^2 + A_3^{(h)}x^3,$$

где

$$A_1^{(h)} = \sum_1^h \frac{1}{a_k}, \quad A_2^{(h)} = \frac{1}{2}\sum_1^h \frac{1}{a_k^2}, \quad A_3^{(h)} = \frac{1}{3}\sum_1^h \frac{1}{a_k^3},$$

остаются ограниченными на этом отрезке. Но это требует, чтобы коэфициенты $A_1^{(h)}$, $A_2^{(h)}$, $A_3^{(h)}$ были тоже ограничены. Таким образом, можно выбрать полиномы $t_h(x)$ так, чтобы суммы $A_1^{(h)}$, $A_2^{(h)}$, $A_3^{(h)}$ стремились соответственно к определенным пределам A_1, A_2, A_3.

Тогда соответствующие произведения

$$\varphi_h(x) = \prod_1^h \left(1 - \frac{x}{a_k}\right) e^{\frac{x}{a_k} + \frac{x^2}{2a_k^2} + \frac{x^3}{3a_k^3}} \tag{12}$$

будут равномерно сходиться на отрезке $(-1, +1)$ к функции

$$\varphi(x) = t(x)\,e^{A_1x + A_2x^2 + A_3x^3}. \tag{13}$$

Более того, так как функции $\varphi_h(x)$ остаются ограниченными во всякой конечной части плоскости, они стремятся по теореме Stieltjes'а во всей плоскости к целой функции $\varphi(x)$, и эта предельная функция не может иметь корней, отличных от предельных точек a_k. Стало быть, порядок $\varphi(x)$ не превосходит 3.

Покажем еще, что род ее не превосходит 4, т. е. что экспоненциальный множитель $e^{\mu(x)}$, входящий в каноническое произведение Weierstrass'а, не может иметь показателем степени полином $\mu(x)$ степени выше 4. С этой целью заметим, что произведение

$$(1 - z)\,e^{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}} = e^{-\frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} - \cdots}$$

по модулю меньше чем

$$e^{\left|\frac{z^4}{2}\right|}, \quad \text{если} \quad |z| \leq \frac{1}{2},$$

и меньше чем

$$e^{|2z| + \left|\frac{z^2}{2}\right| + \left|\frac{z^3}{3}\right|} < e^{\frac{56}{3}|z^4|}, \quad \text{если} \quad |z| > \frac{1}{2};$$

можно, стало быть, указать такое число k, что $\varphi(x)$ не будет возрастать быстрее чем $e^{k|x^4|}$. Следовательно,

$$t(x) = \varphi(x)\,e^{-A_1x - A_2x^2 - A_3x^3}$$

есть тоже целая функция, рода не выше 4 и порядка не выше 3.

Примечание. Как показывает пример функции

$$e^{x^4} = \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{x^4}{h}\right)^h,$$

которая удовлетворяет условиям теоремы, действительно существуют целые функции рода 4, являющиеся пределом непрерывных и положительных полиномов.

Дополнение к теореме А. Если корни a_k обладают тем свойством, что их аргументы θ_k удовлетворяют неравенствам

$$\left|\theta_k \pm \frac{\pi}{2}\right| \leqq \omega < \frac{\pi}{4},$$

то функция $t(x)$ будет целой, порядка не выше 1 и рода не выше 2.

Действительно, в этом случае

$$\delta_k \geqq \left|\frac{1+\sqrt{1+\frac{e^{2i\omega}}{R_k^2}}}{2}\right| \geqq \frac{1+\sqrt{1+\frac{\cos 2\omega}{R_k^2}}}{2} > \sqrt{1+\frac{\cos 2\omega}{4R_k^2}}\,.$$

Следовательно, как и ранее, мы констатируем, что

$$\text{(12 bis)} \qquad \varphi_h(x) = \prod_1^h \left(1 - \frac{x}{a_k}\right) e^{\frac{x}{a_k}}$$

стремится к целой функции

$$\text{(13 bis)} \qquad \varphi(x) = t(x)\, e^{A_1(x)},$$

порядок которой не выше 1, так как $\sum\limits_1^h \frac{1}{R_k^2}$ ограничена. Для доказательства того, что род $t(x)$ и $\varphi(x)$ не больше 2, достаточно заметить, что $|(1-z)e^z| < e^{4|z^2|}$ во всей плоскости.

Аналогичным образом доказывается также, что если все корни a_k действительны,[1] то функция $t(x)$ будет целой, порядка не выше 1 и рода не выше 2.

Между тем, нельзя дать теорем аналогичных предыдущим, если вертикальные углы, имеющие биссектрисой мнимую ось, будут заменены углами, имеющими биссектрисой действительную ось. Это связано с тем фактом, что если $R_k = |a_k|$ достаточно мало, то $\delta_k > 1$, как бы ни был мал аргумент. Стало быть, для получения соответствующих предложений, нужно тем или иным образом ввести условие, содержащее R_k. Мы придем, как увидим далее, к необходимости замены углов ветвями гипербол. Действительно, имеем, вообще

---

[1] Для случая, когда равномерная сходимость имеет место внутри круга (т. е. при требовании аналитичности $t(x)$), это предложение было дано Polya: Ueber Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln.
(Rend. del Circole Mathematico di Palermo, 1913).

(14) $$\delta_k^2 = \frac{1}{4}\left\{1+\sqrt{1-\frac{2\cos 2\theta_k}{R_k^2}+\frac{1}{R_k^4}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{2\left[1-\frac{\cos 2\theta_k}{R_k^2}+\sqrt{1-\frac{2\cos 2\theta_k}{R_k^2}+\frac{1}{R_k^4}}\right]}\right\}.$$

Стало быть, если мы предположим, что

(15) $$\left|\theta_k \pm \frac{\pi}{2}\right| \geqq \omega > \frac{\pi}{4},$$

т. е. что корни a_k находятся внутри вертикальных углов величины 2ω, имеющих действительную ось биссектрисой, то

(16) $$\delta_k^2 < \frac{1}{4}\left[1+\sqrt[4]{1-\frac{2\cos 2\omega}{R_k^2}+\frac{1}{R_k^4}}\right]^2.$$

Следовательно, если можно указать такое положительное число α, что

(17) $$\cos 2\omega > \frac{1+\alpha}{2R_k^2},$$

то будем иметь

(18) $$\delta_k < \frac{1}{2}\left[1+\sqrt[4]{1-\frac{\alpha}{R_k^4}}\right] < 1-\frac{\alpha}{8R_k^4}.$$

Условие (17) выражает тот факт, что корни $a_k = x + iy$ находятся внутри одной или другой из ветвей гиперболы

(19) $$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(1+\alpha),$$

или еще, что действительные части квадратов a_k^2 всех корней больше чем $\frac{1}{2}(1+\alpha)$. Следовательно, из рассуждений, подобных предыдущему, получается

Теорема В. *Если корни полиномов $t_h(x)$, стремящихся к непрерывной положительной функции $t(x)$, находятся внутри гиперболы*

(19) $$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(1+\alpha) \quad (\alpha > 0),$$

то функция $t(x)$, будет целой, порядка не выше 3 и рода не выше 4.

Дополнение к теореме В. *Если корни a_k находятся внутри гиперболы*

(20) $$(1-\alpha)x^2 - (1+\alpha)y^2 = \frac{1}{2} \quad (\alpha > 0),$$

то функция $t(x)$ есть целая функция, порядка не выше 1 и рода не выше 2.

Действительно, указанное условие эквивалентно такому:

$$2R_k^2 \cos 2\omega > 1 + 2\alpha R_k^2,$$

что влечет за собой, в силу (16),

$$\delta_k < \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt[4]{1 - \frac{2\alpha}{R_k^2}}\right] < 1 - \frac{\alpha}{4R_k^2},$$

откуда получаем наше предложение.

Примечание. Во всех предыдущих рассуждениях мы не делаем никаких предположений относительно знака действительных частей корней a_k. В случае введения подобного ограничения, достаточно исследовать произведение $\left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{a_h}\right)$,

чтобы прийти к аналогичным результатам. Так например, если предположить, что действительные части всех a_k положительны, имеем

$$\left|\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_h}\right)\right| \geqq \sqrt{\left(1 + \frac{1}{R_1^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{R_h^2}\right)},$$

так что $\sum\limits_1^h \frac{1}{|a_k^2|}$ ограничена, откуда следует[1], что функция $t(x)$ не может быть выше первого порядка и выше второго рода.

Перейдем теперь к несколько иному вопросу. Ранее мы все время пользовались тем фактом, что если существуют два положительных числа p и M (независимых от h), таких, что

$$\sum_1^h \frac{1}{|a_k|^p} < M,$$

то $t(x)$ есть целая функция конечного рода.

Поэтому естественно сделать предположение, что если корни полиномов $t_h(x)$ имеют только конечное число предельных точек внутри каждого круга, то $t(x)$ является целой функцией. При условии, что

$$t(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_h x^h + c_{h+1} x^{h+1} + \ldots$$

аналитическая функция и что

$$t_h(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_h x^h,$$

---

[1] См. E. Lindwart et G. Polya, Ueber einen Zusammenhang zwischen der Konwergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln. (Rend. del Circ. Mathematico di Palermo, 1914).

это предположение оправдывается. Действительно, среднее геометрическое $\sqrt[h]{\frac{c_0}{c_h}}$ корней $t_h(x)$ не может иметь конечную нижнюю границу; следовательно,

$$\lim \sqrt[h]{c_h} = 0.$$

Однако, без соответствующих ограничений это предположение является неправильным, так как какова бы ни была непрерывная положительная функция $t(x)$, всегда возможно построить полиномы $t_h(x)$, равномерно стремящиеся к $t(x)$ на $(-1, +1)$ и такие, что для достаточно большого h $t_h(x)$ не имеют ни одного корня меньшего по модулю, чем сколь угодно большое число R.

Действительно, построим полиномы $P_n(x)$ степени n, стремящиеся к $\ln t(x)$ на отрезке $(-1, +1)$; пусть

$$(21) \qquad |P_n(x)| < b, \quad \text{для } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

(b не зависит от n).

Можно взять q_n настолько большим, чтобы

$$(22) \qquad t_h(x) = 1 + P_n(x) + \ldots + \frac{[P_n(x)]^{q_n}}{q_n!},$$

где $h = nq_n$, были полиномами степени h, стремящимися равномерно к $t(x)$ на том же отрезке.

С другой стороны, каково бы ни было данное положительное число M, сумма

$$f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{4M}}{4M!}$$

не может равняться нулю для $|z| \leqslant M$, так как тогда

$$|f(z)| > e^{-|z|} - \frac{5}{4}\frac{|z|^{4M+1}}{(4M+1)!} > e^{-M}\left[1 - \frac{5}{16}\left(\frac{e^5}{256}\right)^M\right] > 0.$$

Стало быть, взяв

$$q_n \geqslant 4M,$$

мы будем уверены, что

$$|P_n(a_k)| > M,$$

если $t_h(a_k) = 0$.

Но по известной теореме, в силу (21), имеем

$$|P_n(a_k)| < b\left|a_k + \sqrt{a_k^2 - 1}\right|^n,$$

откуда

$$\left|a_k + \sqrt{a_k^2 - 1}\right| > \left(\frac{M}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

или

$$|a_k| > \frac{1}{2}\left[\left(\frac{M}{b}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{b}{M}\right)^{\frac{1}{n}}\right].$$

Следовательно, для того чтобы $|a_k|$ был больше R, достаточно положить

$$M = b\,[R + \sqrt{R^2+1}]^n,$$

и желаемым свойством будут обладать все полиномы $t_h(x)$ степени $h \geqslant 4bn\ (R+\sqrt{R^2+1})^n$. Стало быть, всегда возможно удалить как угодно корни приближенных полиномов, только, вообще, это достигается за счет быстрого возрастания их степеней.

Точно также, какова бы ни была природа функции $t(x)$, всегда возможно сделать корни a_k сколь угодно близкими к отрезку $(-1, +1)$, так как достаточно заметить, что $t(x)=1$ имеет апроксимирующими полиномами

$$t_h(x) = 1 + \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^h + (x-\sqrt{x^2-1})^h}{2h},$$

корни которых при неограниченном возрастании h стремятся к точкам отрезка $(-1, +1)$.

Распределение корней апроксимирующих полиномов становится менее произвольным, если потребовать, чтобы эти полиномы давали приближение M_h того же порядка, что и наилучшее приближение L_h (т. е. $L_h = M_h^{1+\varepsilon_h}$, где ε_h стремится к нулю с возрастанием h). В таком случае легко доказывается следующая теорема:

Теорема. Полиномы $t_h(x)$, дающие на $(-1, +1)$ приближение $t(x)$ порядка наилучшего, имеют ограниченное число корней внутри эллипса E, имеющего фокусы в $(-1, +1)$, если функция $t(x)$ (предполагаемая аналитической) регулярна внутри эллипса E и на его границе.

Действительно, имеем на $(-1, +1)$

$$|t_h(x) - t(x)| = o\left(\frac{1}{R_1}\right)^h,$$

где R_1 полусумма осей эллипса E; стало быть, ряд

$$t(x) = t_0(x) + \sum_0^\infty [t_{n+1}(x) - t_n(x)]$$

равномерно сходится внутри и на границе эллипса E, так что предельные точки корней $t_h(x)$ будут также корнями $t(x)$.

Обратное предложение, без сомнения, справедливо, но доказать его не так легко.

Если полиномы $t_h(x)$, дающие на $(-1, +1)$ приближение $t(x)$ порядка наилучшего, имеют ограниченное число корней внутри эллипса E, то функция $t(x)$ аналитична и регулярна внутри этого эллипса.

С целью сократить рассуждения, мы ограничимся доказательством этого предложения при условии, что полиномы $t_h(x)$ минимизируют интеграл

$$\int_{-1}^{+1} [t(x) - t_h(x)]^2 \, q(x) \, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx,$$

где $q(x)$ какая-нибудь непрерывная и положительная на $(-1, +1)$ функция, а α и β действительные числа.

В самом деле, пусть $R_h(x)$ полиномы, ортогональные относительно веса $q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

Тогда

$$t_h(x) = A_0 + A_1 R_1(x) + \ldots + A_h R_h(x), \tag{23}$$

где

$$A_h = \int_{-1}^{+1} t(x) \, R_h(x) \, q(x) \, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx.$$

Принимая во внимание асимптотическую величину коэфициента при x^h в $R_h(x)$, равную $C 2^{h+\frac{\alpha+\beta}{2}}$, где C постоянная (зависящая от $q(x)$), мы видим, что произведение корней $t_h(x)$ равно

$$a_1 a_2 \ldots a_h \sim \pm \frac{t_h(0)}{A_h C 2^{h+\frac{\alpha+\beta}{2}}}.$$

Стало быть,

$$2 \sqrt[h]{|a_1 a_2 \ldots a_h|} \sim \frac{1}{\sqrt[h]{|A_h|}}$$

для бесконечно возрастающего h. Отсюда следует, в силу (4), что также и

$$\sqrt[h]{|\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_h|} \sim \frac{1}{\sqrt[h]{|A_h|}}. \tag{24}$$

Стало быть, обозначая через R полусумму осей эллипса E, внутри которого число корней $t_h(x)$ ограничено, мы заключаем, что как бы ни было мало ε, для достаточно большого h

$$R < \frac{1+\varepsilon}{\sqrt[h]{|A_h|}}, \tag{25}$$

так как, по предположению, имеется только конечное число таких ρ_k, что $|\rho_k| < R$: Отсюда следует, что сумма (23) сходится внутри эллипса E, и значит $t(x)$ аналитическая внутри этого эллипса.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕЧАНИЯ

[*1*] Из равенства (7) следует, что $P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta + C_n'$, но $C_n' = 0$, так как, полагая $\varphi = \frac{\pi}{n}$, мы получаем также, что

$$P_n\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\right) = -\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta + C_n' = -P_n(\cos\theta) =$$

$$= -\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta - C_n'.$$

[*2*] Равенства (79) следует немного видоизменить. Для получения первого из них следует заметить, во-первых, что имеем также

$$|K_n' - C_n'| = nO\left(\frac{h^4 2^h}{\rho^n}\right)|\cos\theta - \cos\theta_0|,$$

так как в предшествующем равенстве

$$\left|\sin\frac{2n+i+k-1}{2}(\theta_0\pm\theta\right| \leqq (2n+i+k-1)\left|\sin\frac{\theta_0\pm\theta}{2}\right|.$$

После этого, благодаря равенствам $C_n' = \frac{\pi M_h}{2}C_n$ и $K_n' = \frac{\pi M_h}{2}K_n\left(1+O\left(\frac{h}{\rho^n}\right)\right)$, получаем

$$(79_1)\qquad \left|K_n - C_n\left(1+O\left(\frac{h}{\rho^n}\right)\right)\right| = nO\left(\frac{h^4 2^h}{\rho^n}\right)|\cos\theta - \cos\theta_0|,$$

а второе из равенств (79) таким же образом получается в форме

$$79_2)\quad \left|K_n - C_n\left(1+O\left(\frac{h}{\rho^n}\right)\right)\right| = O\left(\frac{h^4 2^h}{\rho^n}\right)\left[\left|\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\right| + \left|\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\right|\right].$$

Равенство (80), которое вытекает из второго равенства (79), вытекает также из (79_2).

[*3*] Следует воспользоваться равенством (79_1) предыдущего примечания.

[*4*] Вместо формулы (107), являющейся решением интегрального уравнения (104), в подстрочном примечании к § 2 гл. III была указана немного более простая формула. Можно заметить, что поскольку $2\psi(\cos\theta)$ выражается сопряженным тригонометрическим рядом к ряду $\ln t(\cos\theta)$, зависимость между этими функ-

циями выражается обратимой формулой

$$F_1(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{[F(\varphi) - F(\theta)]\,[\sin\quad + \sin\varphi]}{\cos\varphi - \cos\theta}\,d\varphi,$$

взаимно связывающей сопряженные ряды:

$$F(\theta) = \Sigma a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta,\quad F_1(\theta) = \Sigma\, a_k \sin k\theta - b_k \cos k\theta.$$

Когда функция $F(\theta)$ четвая, то эта формула тождественна с (104), так как $\sin\varphi\,(F(\varphi) - F(\theta))$ нечетная относительно φ функция, и соответствующая часть интеграла тождественно равна нулю; когда $F(\theta)$ нечетная, наша формула обращается в

$$F_1(\theta) = \frac{1}{\ }\int\limits_0^{2\pi} \frac{F(\varphi)\sin\varphi - F(\theta)\sin\theta}{\cos\varphi - \cos\theta}\,d\varphi,$$

которая тождественна с формулой, указанной в § 2 гл. III. Последняя формула непосредственно выверена мною в статье „Sur la limitation des valeurs d'un polynome $P_n(x)$ degré n sur tout un segment par ses valeurs en $n+1$ points du segment", Известия Академии наук, 1931 г.

[5] В этом случае вполне точными (а не только асимптотическими) для $n \geqq h$ являются все равенства (13) при любом $l \geqq 1$, как это показано в моей статье „Sur une classe de polynomes orthogonaux", „Записки Харьк. математ. о-ва" т. IV (стр. 79—93) и в добавлении к ней там же т. V (стр. 59—60).

[6] Предполагая, например $\rho = \rho_1 < \frac{1}{2}$, можем построить тригонометрический полином $P_m(\cos\theta)\sin\theta$, где $P_m(z)$ многочлен ($z = \cos\theta$) степени m, так что

$$\left|f_1(z) - P_m(z)\sqrt{1-z^2}\right| = o\left(\frac{1}{\ln m}\right).$$

Тогда $P_m(z) = O(m)$; с другой стороны, $(1-z^2)^{\frac{1}{2}-\rho}$ допускает приближение порядка $l^{2\rho-1}$ посредством многочлена $Q_l(z)$ степени l. Следовательно, можно построить полином $Q_l(z)\,P_m(z)$ степени $l+m$ такой, что

$$\left|P_m(z)\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}-\rho} - P_m(z)\,Q_l(z)\right| = O\left(m\, l^{2\rho-1}\right).$$

Полагая $P_m(z)\,Q_l(z) = \varphi_n(z)$ и после умножения последнего равенства на $(1-z^2)^l$, складывая его с предыдущим, получим

$$\left|f_1(z) - \varphi_n(z)\,(1-z^2)^l\right| = O\left(ml^{2\rho-1}\right) + o\left(\frac{1}{\ln n}\right) = o\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

если возьмем $m = n^{1-2\rho-\varepsilon}$, где $o < \varepsilon < 1 - 2\rho$.

[7] Неравенство (4) вытекает из (41) стр. 17.

[8] Неравенство (11) проще всего проверить, полагая $1 + \sqrt{1+\frac{1}{R_k^2}} = t^2$; тогда оно получает вид $\frac{t+t^2}{2} > \sqrt[4]{1+\frac{(t^4-t^2)^2}{16}}$, т. е. $t^4(1+t)^4 > 16 + t^4(1-t^2)^2$, которое равноценно очевидному при $t > 1$ неравенству $t^5(1+t^2) > 4$.

ДНТВУ. Сдано в набор 14/V 1937 г. Подписано в печать 19/VII 1937 г. Формат бумаги $^1/_{16}$ 62×94 см. Вес метр стопы 37 кг. На печатном листе 48.000 знаков.