Акад. С. Н. БЕРНШТЕЙН

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПРИРОДА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Редакция и комментарий
Н. И. АХИЕЗЕРА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1956

ОТ РЕДАКТОРА

Давно известны примеры дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, все решения которых являются аналитическими функциями своих аргументов. Классический пример представляет уравнение Лапласа.

Одною из своих знаменитых «математических проблем», предложенных в 1900 году на первом международном математическом конгрессе в Париже, Гильберт предугадал, что «все решения регулярных задач вариационного исчисления являются аналитическими функциями».

Напомним, что функционал

$$\iint\limits_D f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

называется регулярным, если для любых значений аргументов x, y, z, p, q выполняется неравенство

$$f_{pp}f_{qq} - f_{pq}^2 > 0.$$

Функция $f(x, y, z, p, q)$ здесь предполагается аналитической, а точка (x, y, z) должна лежать в заданной области пространства, тогда как p, q могут иметь любые конечные значения. Утверждение Гильберта состоит в том, что при указанных условиях всякое достаточно гладкое решение уравнения Эйлера—Лагранжа

$$f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q = 0$$

является аналитической функцией своих аргументов.

Предугаданную Гильбертом и даже несколько более общую теорему доказал Сергей Натанович Бернштейн в своей диссертации 1904 г., представленной экзаменационной комиссии Парижского университета в составе Пикара, Пуанкаре и Адамара. С. Н. Бернштейну было тогда 24 года. Несколько позже С. Н. заново в модифицированной форме изложил свое решение проблемы

Гильберта. Это было сделано в первой части его магистерской диссертации «Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа», напечатанной в Сообщениях Харьковского математического общества за 1908 год (вторая серия, том XI, стр. 1—164) и защищенной в Харьковском университете в 1908 г. Переизданием этой первой части и является настоящая небольшая монография. При ее составлении учтены некоторые дальнейшие работы С. Н. Бернштейна. Кроме того, частично использована одна работа Т. Радо. Относящиеся сюда литературные указания делаются в соответствующих местах.

Необходимо также отметить, что при редактировании в текст внесены некоторые изменения. Ответственность за все эти изменения всецело лежит на мне, хотя наиболее существенные из них и были одобрены С. Н. Бернштейном.

Вторая часть Харьковской диссертации 1908 года посвящена проблеме Дирихле. Эта часть по согласованию с С. Н. в настоящую монографию не включена, так как вся совокупность работ С. Н. Бернштейна по проблеме Дирихле войдет в третий том собрания его сочинений, который готовится к печати.

Что касается введения к Харьковской диссертации, то оно здесь печатается полностью, хотя его заключительная часть посвящена главам, не вошедшим в настоящую монографию.

В настоящее время имеются доказательства теоремы Гильберта—Бернштейна, основанные на других идеях. По поводу этих доказательств отсылаем читателя к соответствующим журнальным статьям. Необходимые литературные указания можно найти в обзоре С. Н. Бернштейна и И. Г. Петровского «О первой краевой задаче (задаче Дирихле) для уравнений эллиптического типа и о свойствах функций, удовлетворяющих этим уравнениям» («Успехи математических наук», 1941 г., вып. VIII, стр. 8—31).

Большую помощь при редактировании этой монографии оказал мне З. С. Агранович. Он сделал также ряд полезных и учтенных мною замечаний по поводу моего комментария. За все это приношу ему глубокую благодарность.

Н. И. АХИЕЗЕР

ВВЕДЕНИЕ

Предлагая читателям настоящее сочинение, считаю нелишним сказать несколько слов о теории аналитических функций, лежащей в его основе. Уже около пятидесяти лет[1] эта теория занимает центральное место в математической науке: ей посвящено много замечательных работ, преподаванию ее уделено особенное внимание.

Такая исключительная роль теории аналитических функций объясняется тем, что она является естественным продолжением как алгебры, так и дифференциального и интегрального исчисления. С одной стороны, алгебра конца XVIII столетия приводит к необходимости рассматривать комплексные величины наравне с вещественными. С другой стороны, невозможность интегрировать огромное большинство дифференциальных уравнений при помощи известных конечных выражений приводит к употреблению бесконечных рядов и, первым делом, к простейшему из них — строке Тэйлора[2]. Но функция комплексной переменной, лежащая в основе алгебры, и функция, определяемая сходящейся строкой Тэйлора, — это разновидности одного и того же — так называемой аналитической функции, которая объединяет, таким образом, противоположные полюсы математической мысли — анализ конечных и анализ бесконечно малых.

Каждый из указанных источников оказал свое влияние и на дальнейшее развитие теории аналитических функций. Но между тем, как интегрирование дифференциальных уравнений при помощи аналитических функций первоначально лишь передвигало центр тяжести задачи, алгебраические функции вместе с их интегралами представляли богатую область для исследования и обобщений. Благодаря алгебраическим функциям впервые было обращено внимание на роль так называемых особых точек, являющихся в некотором смысле инвариантами для аналитических функций. Благодаря им было установлено важное положение, что знание

[1] Следует иметь в виду, что эти слова относятся к 1908 году (*Ред.*).

[2] Под строкою Тэйлора автор понимает степенной ряд независимо от того, сходится он или нет. (*Ред.*)

всех особенностей функции позволяет[1] найти для нее аналитическое выражение, имеющее смысл при всех значениях переменной. Отныне всякая функция была вполне охарактеризована своими особенностями; наличие или отсутствие формальной зависимости определенного вида между функциями также непосредственно обнаруживалось рассмотрением их особенностей. Таким образом, для полного исследования аналитической функции, как для вычисления ее значения в любой точке, так и для обнаружения элементарных зависимостей между ней и другими функциями, впервые был найден единый и непогрешимый путь.

Следуя этому пути, который можно назвать алгебраическим или комплексным, теория аналитических функций переходит от алгебраических задач к трансцендентным.

Вслед за алгебраическими и логарифмическими особенностями многие вопросы требуют изучения более сложных, так называемых существенных, особых точек, образцом которых является точка на бесконечности для целой трансцендентной функции. Устанавливаются важные аналогии между целыми трансцендентными функциями и многочленами, а также замечательные зависимости, нашедшие впоследствии применение в различных отделах математики, между их возрастанием на бесконечности, убыванием коэффициентов их строки Тэйлора и густотой их нулей. Подобному же исследованию подвергаются мероморфные и другие функции, обладающие особенностями определенного типа, и вместе с тем выдвигается вопрос об *аналитическом продолжении*, то есть об изучении функции в целом по ее разложению Тэйлора, сходящемуся лишь в ограниченной области, а также общая задача суммирования расходящихся рядов.

Задача аналитического продолжения, равнозначная по существу многократному повторению способа последовательных приближений, к которому можно свести огромное большинство задач, встречающихся в анализе, распадается на две части[2]:

1. Определить все особенности функции по ее разложению Тэйлора.

2. Вычислить во всякой обыкновенной точке значение функции по ее разложению Тэйлора.

Разносторонние исследования, посвященные первой части задачи, установили, что вообще всякая особенность равнозначна определенной инвариантной асимптотической зависимости между коэффициентами строки Тэйлора, и, в частности, привели к простым приемам для распознавания мероморфных и некоторых других функций, обладающих особенностями определенного типа. Если бы, приступая к изучению функции, мы заранее могли предвидеть ограниченное число типов особенностей, какими она может обладать, то действительное определение их представляло бы

[1] При некоторых весьма общих предположениях относительно особенностей.

[2] Для библиографии по этому вопросу отсылаем читателя к книге *Hadamard'a* «Sur la série de Taylor et son prolongement analytique».

сравнительно мало трудностей. Но беда в том, что не только мероморфные, но и вообще функции, обладающие лишь изолированными особыми точками, являются исключениями во всей совокупности аналитических функций, и у нас нет пока руководящей нити для того, чтоб разобраться в бесконечном многообразии возможных особенностей. Отсюда вывод, что первая часть задачи аналитического продолжения, основная с точки зрения алгебраического направления, по существу не допускает общего решения.

Напротив, для вычисления значения аналитической функции в любой точке найден безусловно общий метод — строка многочленов Миттаг-Леффлера. Строка Миттаг-Леффлера, коэффициенты которой определяются непосредственно по коэффициентам строки Тэйлора, сходится внутри так называемой звезды, т. е. во всей плоскости комплексной переменной за исключением отрезков прямых линий, идущих от каждой особой точки на бесконечность[1]. Например, если функция, представленная строкой Тэйлора, не имеет вещественных особых точек, то каковы бы ни были ее комплексные особенности, ее разложение в строку Миттаг-Леффлера будет сходиться при всех вещественных значениях переменной. Таким образом, для вычисления аналитических функций найден другой путь, кроме указанного алгебраическим направлением.

С усовершенствованием своих методов теория аналитических функций приступает наконец к интегрированию дифференциальных уравнений. Но, как и в общей задаче аналитического продолжения, главная трудность заключается в том, что нам неизвестны a priori все возможные подвижные особенности[2] искомых

---

[1] Строка Миттаг-Леффлера может принимать различные формы. Приведем для примера ту из них, которая была первой указана Миттаг-Леффлером в Acta Mathematica за 1900 г. Пусть

$$F(z) = F(0) + F'(0)z + \ldots + \frac{1}{n!}F^n(0)z^n + \ldots$$

данная строка Тэйлора. Тогда строка Миттаг-Леффлера представится в виде

$$F(z) = P_0 + (P_1 - P_0) + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_n - P_{n-1}) + \ldots,$$

где

$$P_n(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \ldots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(0)}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_n!}\left(\frac{z}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n},$$

и будет сходиться в указанной выше области. Придавая строке Миттаг-Леффлера другие формы, можно изменять непрерывно область сходимости и приспособить ее также к вычислению многозначных функций; но для изучения всех ветвей этих последних предпочтительно ввести (теоретически это всегда возможно) новую переменную, относительно которой данная функция, как и первоначальная переменная, были бы однозначными функциями.

[2] Подвижною особенностью называется особенность, изменяющаяся вместе с постоянными интегрирования. Для ознакомления с теорией аналитического интегрирования дифференциальных уравнений и с соответствующей литературой укажем на мемуар Пэнлевэ «Sur les équations différentielles...» в Acta Mathematica, t. XXVI.

функции. Делая относительно них различные предположения, можно установить типы уравнений, решения которых обладают определенными особенностями; так, например, в настоящее время известны все дифференциальные уравнения первых двух порядков, все решения которых мероморфны. Как бы ни были интересны эти новые простые трансцендентные функции, замечательно, что число их ограниченно, так же как и число уравнений, которые при их помощи могут быть проинтегрированы. Таким образом, задача интегрирования с точки зрения комплексного направления выдвигает прежде всего трудный вопрос об исследовании a priori возможных типов особенностей для решений дифференциальных уравнений. Но впредь до полного разрешения этого еще мало разработанного вопроса теории функций приходится приступить к интегрированию наиболее интересных уравнений другим путем, который можно назвать *вещественным направлением.*

Это направление, исходя из того, что основная задача определения всех особенностей функции вообще неразрешима и что большинство естественных функций не обладает простыми с алгебраической точки зрения комплексными особенностями, ставит своей ближайшей задачей аналитическое продолжение функции лишь для вещественных значений переменных. Пользуясь различными рядами для вычисления и выражения функций (строка Миттаг-Леффлера, нормальные ряды и т. д.), ключ для исследования сходимости которых дает общая теория аналитических функций; пользуясь основным свойством этих функций, что для полного их определения достаточно знать величины всех их производных в некоторой точке; пользуясь также общими результатами изучения особенностей и асимптотическим выражением функций вблизи них,— вещественное направление, ограничиваясь вещественными значениями переменных, находит обыкновенно руководящую нить для разрешения поставленных аналитических вопросов в геометрических или механических явлениях, с ними связанных.

Не останавливаясь на разнообразных и выдающихся результатах, достигнутых этим направлением при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений, заметим лишь, что какова бы ни была система этих уравнений, все неизвестные функции так же, как и независимая переменная, всегда и с чрезвычайной легкостью могут быть представлены в виде рядов многочленов от некоторой вспомогательной переменной, сходящихся при всех ее вещественных значениях; вся трудность интегрирования сводится формально к изучению бесконечно удаленной особой точки этих quasi-целых трансцендентных функций. Прибавим к этому, что успехи изучения вещественных особенностей, в основе которого лежат методы, выработанные алгебраическим направлением, с своей стороны начинают освещать путь конструирования a priori функций, обладающих определенными комплексными особенностями, при помощи которых могли бы быть проинтегрированы в комплексной области более широкие классы дифференциальных уравнений, чем при помощи известных до сих пор элементарных обобщений алгебраических функций.

Переходя к дифференциальным уравнениям с частными производными, которые нас в настоящем сочинении специально интересуют, заметим, что применение к ним общих методов теории функций еще более необходимо, чем для обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, даже в тех редких случаях, когда для их общего интеграла может быть найдено конечное выражение, содержащее произвольные функции, всякая конкретная задача при определенных начальных условиях приводит обыкновенно к функциональному уравнению, неразрешимому вообще при помощи конечных комбинаций известных функций. Аналитическое интегрирование с точки зрения теории функций показало важность понятия характеристик [1], но в то время, как для линейных уравнений они являются единственно возможными подвижными (т. е. меняющимися при изменении начальных условий) особенностями,— благодаря чему при начальных условиях Коши изучение интегралов в комплексной области не представляет серьезных затруднений,— нелинейные уравнения обладают отличными от характеристик подвижными особенностями, исследование которых есть, без сомнения, одна из наиболее недоступных задач современного анализа. Поэтому в данном случае интегрирование в вещественной области приобретает особенный интерес.

Кроме того, известно, что благодаря наличию произвольных функций, многие дифференциальные уравнения с частными производными допускают неаналитические вещественные решения; в силу этого приходится признать, что понятие общего интеграла Коши, где фигурируют лишь аналитические произвольные функции, недостаточно (за исключением линейных уравнений, где всякое решение может быть рассматриваемо, как сумма двух аналитических решений, для которых плоскость вещественных значений является особой поверхностью, и тех классов уравнений, которые не допускают вещественных неаналитических решений). Тем не менее исследование вещественных решений дифференциальных уравнений и вообще теория неаналитических функций находится в настолько тесной связи с теорией аналитических функций, что может быть рассматриваема как одно из разветвлений последней. Причина этого лежит в следующем положении, которое полезно формулировать двумя способами.

Первая формулировка. Всякая непрерывная вещественная функция может быть рассматриваема, как сумма двух аналитических функций, из которых первая не имеет особенностей в верхней части плоскости комплексной переменной, а вторая — в нижней.

---

[1] Для определенности мы предполагаем две независимые переменные; характеристиками называются линии, вдоль которых условия Коши непригодны для определения интеграла.

Применяя к каждой из этих двух аналитических функций строку многочленов Миттаг-Леффлера, мы приходим к *второй формулировке* Вейерштрасса:

Всякая непрерывная функция есть предел равномерно сходящейся строки многочленов.

Первая формулировка устанавливает тесную связь между исследованием особенностей аналитических функций и теорией вещественных функций, изучающей также и разрывные функции, для которых удалось дать глубокую и простую классификацию, основанную на том, являются ли они совокупностью особых значений аналитической функции одной или нескольких переменных.

Что же касается формулировки Вейерштрасса, то она наводит на мысль о сходстве между аналитическими функциями и рациональными числами. Подобно тому, как рациональные числа представляют группу, замкнутую по отношению ко всем рациональным действиям, и в то же время производная совокупность[1] их совпадает с совокупностью всех вещественных чисел, аналитические функции также представляют замкнутую группу по отношению ко всем аналитическим действиям и производная совокупность их совпадает с совокупностью всех непрерывных функций. Аналогия эта может быть проведена и дальше. Подобно тому, как иногда в общих рассуждениях о числе вопрос о его рациональности не играет роли, в других же случаях приходится вести рассуждение при предположении, что число рационально, и затем переходить к пределу; точно так же и в рассуждениях о функциях иногда бывает проще не делать никаких предположений об их аналитическом характере, но большею частью, оперируя с неаналитическими функциями, мы должны рассматривать их, как пределы тех или иных рядов аналитических функций. Необходимо также обратить внимание и на те положения, которые являются вообще неправильными, если заменить в них аналитические функции произвольными. Не отрицая, следовательно, теоретической важности изучения неаналитических функций, не отрицая того, что быть может впоследствии, изучая функции, удовлетворяющие определенным функциональным условиям, анализ естественным путем придет к практически важным неаналитическим функциям, которые будут играть в теории функций не меньшую роль, чем алгебраические и простейшие трансцендентные (e; π) числа в теории чисел, мы должны признать, что в настоящее время в наших руках нет другого способа исследования неаналитических функций, как при посредстве аналитических.

Таким образом, перед вещественным направлением выдвигается важный вопрос о критериях для распознавания аналитических функций. Критерии Коши, лежащие в основе теории дифферен-

---

[1] Производной совокупностью называется совокупность предельных точек данной совокупности. В настоящем изложении мы для простоты рассматриваем, как предельные функции, лишь пределы равномерно сходящихся рядов.

циальных уравнений, относятся лишь к функциям с заданным формальным разложением в строку Тэйлора. Обобщенные Гарником, эти критерии позволили Пикару[1] обнаружить аналитический характер решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа (т. е. с мнимыми характеристиками). Однако эти критерии, будучи достаточными, не необходимы, ибо они предполагают определенную комплексную область вокруг вещественных значений, где функция не должна иметь особенностей. В настоящем сочинении (глава II) мы указываем общие критерии, необходимые и достаточные, в частности позволяющие нам доказать основную теорему в теории уравнений эллиптического типа, которая гласит:

Всякая трижды непрерывно дифференцируемая функция z, удовлетворяющая аналитическому уравнению

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0 \tag{1}$$

и неравенству

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} - \frac{1}{4}\left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}\right)^2 > 0, \tag{2}$$

есть аналитическая функция (глава III).

Как следствие этой теоремы укажем, что все минимальные поверхности, а также все поверхности положительной кривизны, накладывающиеся на аналитическую поверхность (например, на эллипсоид), аналитичны.

Эта теорема, обобщающая теорему Пикара и предугаданная Гильбертом[2], является частным случаем следующего положения, которое сформулировано мною в статье «Sur la déformation des surfaces», помещенной в 1905 году в Mathematische Annalen[3]:

Всякая функция $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, удовлетворяющая аналитическому дифференциальному уравнению с частными производными, которая, будучи дана при значениях переменных $|x_1| < p$, $|x_2| < p$, $\ldots$ $|x_n| < p$, где p какое-либо положительное число, вполне определена при $|x_1| < p + \varepsilon$, $|x_2| < p$, $\ldots$ $|x_n| < p$, где ε сколь угодно малое положительное число, есть функция аналитическая относительно переменной x_1.

Эти результаты, которые значительно расширяют область применения собственно аналитических функций, выдвигают вопрос об аналитическом продолжении рассматриваемых решений.

Прежде всего следует решить такой вопрос: пусть решение z уравнения эллиптического типа существует внутри вещественного

---

[1] Первая глава настоящей работы.

[2] Отчеты об интернациональном конгрессе математиков в Париже, 1900 г.

[3] Другой частный случай представляют уравнения параболического типа, решения которых аналитичны относительно одной лишь переменной (Comptes Rendus, 12 января 1905 года).

пределы этого круга? Ответ на этот вопрос гласит: *для того чтобы функция z могла быть продолжена за пределы круга C, необходимо и достаточно, чтобы на окружности C она обращалась в аналитическую функцию дуги и имела конечные производные первых двух порядков относительно обеих переменных.* Вслед за этой теоремой, которая допускает целый ряд интересных обобщений и особенно важна в тех случаях, когда условие конечности производных может быть отброшено, следует приступить к изучению особенностей функции z вне круга C. Этот вопрос рассматривается в четвертой главе только для приведенных линейных уравнений эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y) z = d(x, y).$$

Один из наиболее интересных результатов его изучения заключается в следующем: *при предположении, что коэффициенты уравнения представляют собой целые функции, решение z, существующее внутри круга C, будет само целой функцией тогда и только тогда, когда на окружности оно будет обращаться в целую функцию дуги.*

Полное исследование a priori всех особенностей вне круга C является с точки зрения комплексного направления также и наиболее правильным путем к разрешению так называемой задачи Дирихле: определить функцию, удовлетворяющую данному уравнению эллиптического типа, обращающуюся на окружности C, внутри которой она не имеет особенностей, в данную функцию дуги. До настоящего времени, насколько мне известно, никаких попыток в этом направлении еще не было сделано, но не подлежит сомнению, что в некоторых частных случаях (линейные уравнения) они должны увенчаться успехом и привести к интересным результатам.

Однако, имея в виду в настоящем сочинении указать главным образом общие принципы интегрирования нелинейных уравнений при начальных условиях Дирихле (которые могут быть и не аналитичными), мы должны будем отказаться от комплексной точки зрения. Точно также нам не придется останавливаться на теоретико-функциональной стороне исследований Пуанкаре и его школы, посвященных интегрированию некоторых частных видов линейных уравнений, обобщенных впоследствии Фредгольмом и Гильбертом. Укажем лишь важнейший результат этих работ:

Если функция $z(x, y, \lambda)$ переменных x, y и параметра λ есть решение задачи Дирихле для уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \lambda \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz\right) = d,$$

где $c > 0$ и функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$ имеют конечные производные первого порядка по x и y, то функция z

... и имеет лишь простые положительные полюсы[1].

Отсюда следует, что для линейных уравнений задача Дирихле вообще возможна за исключением некоторых особых значений параметра λ. Изучение этих особых значений, тесно связанное с вопросом о разложении произвольных функций в ряды, подобные тригонометрическому ряду Фурье, и необходимое для вычисления решения при положительных[2] значениях λ, становится лишним, если $\lambda < 0$, ибо в данном случае возможно применить строку Миттаг-Леффлера, коэффициенты которой легко определяются при $\lambda = 0$. Для нас это последнее обстоятельство особенно ценно, и его мы кладем в основу нашего метода интегрирования.

Действительно, если от линейных уравнений мы перейдем к нелинейным и введем аналогичный вспомогательный параметр λ, то окажется в большинстве случаев, что искомое решение, будучи аналитической функцией λ, не только не мероморфно, но обладает ограниченной областью существования, и изучение его в комплексной области представляет непреодолимые препятствия; тем не менее при $\lambda = 0$ возможно вычислить все его последовательные производные и построить строку Миттаг-Леффлера, сходящуюся внутри звезды. Таким образом, если будет доказано, что некоторое значение λ находится внутри звезды, то тем самым будет не только обнаружена разрешимость соответствующей задачи Дирихле, но найдено также сходящееся выражение для решения.

Это чисто формальное приведение задачи Дирихле к задаче аналитического продолжения не дает, конечно, непосредственно ключа к ее разрешению, но, подобно приведению различных конкретных задач к алгебраическим или дифференциальным уравнениям, оно устанавливает определенную логическую схему для наших рассуждений, указывая среди бесчисленного множества следствий из данных задачи одну определенную цепь силлогизмов, которая приведет нас к желанной цели. Так, в интересующем нас случае сходимость строки Миттаг-Леффлера, а вместе с нею разрешимость задачи Дирихле стоит в исключительной зависимости от возможности установить a priori верхние грани модулей последовательных производных предполагаемого решения при помощи данных на контуре для всех промежуточных значений параметра. *Ограничение последовательных частных производных и составляет,*

---

[1] Для ознакомления с вопросом укажем резюмирующие работы:

Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Nachricht. von der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1904—1906);

В. А. Стеклов, Théorie générale des fonctions fondamentales (Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1904);

Picard, Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de Fredholm (Rendiconti del Circolo Math. di Palermo, 1906).

[2] Следует заметить, что с изменением контура меняются полюсы (и в этом главная трудность задачи), так что ни для какого положительного значения λ задача Дирихле не является всегда возможной.

таким образом, истинную сущность задачи Дирихле. В частности, эти общие соображения применяются мною к интегрированию уравнения

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=D, \tag{3}$$

где A, B, C, D — аналитические функции от x, y, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ (D может зависеть также и от z при условии $D'_z \geqslant 0$). Таким образом *устанавливается разрешимость задачи Дирихле в случае, когда*

$$A-\frac{B^2}{C}>0, \qquad C-\frac{B^2}{A}>0 \tag{4}$$

и при $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *бесконечно возрастающих функция* D *возрастает не быстрее квадратов этих величин.*

Например, для уравнения минимальных поверхностей

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

находим

$$C-\frac{B^2}{A}=1+\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}>0, \qquad A-\frac{B^2}{C}=1+\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}>0,$$

$$D=0.$$

Случай неаналитических коэффициентов рассматривается как предельный случай аналитических с помощью теоремы Вейерштрасса. Вместе с тем обнаруживается разрешимость задачи Дирихле, если окружность заменить произвольным (с некоторыми ограничениями) контуром.

В настоящем сочинении я ограничиваюсь изучением уравнений с одной неизвестной функцией от двух независимых переменных, но не подлежит сомнению, что методы, изложенные здесь, применимы и в случае нескольких неизвестных функций и большего числа переменных. Особенный интерес представляет применение метода аналитического продолжения при более сложных данных на контуре, чем в рассматриваемом мною случае задачи Дирихле.

Вышеизложенное далеко не исчерпывает всех действительных и возможных применений теории аналитических функций, но я имел в виду установить лишь два положения: *общие приемы изучения, классификации и вычисления функций являются необходимым условием дальнейшего развития анализа; теория аналитических функций впервые открывает эти приемы, указывая определенный, хотя и не всегда кратчайший путь к разрешению* *кой задачи анализа — аналитическое продолжение (в комплекс... или вещественной области).*

Настоящее же сочинение, посвященное интегрированию и исследованию уравнений с частными производными эллиптического типа, является иллюстрацией применения теории аналитических функций к разрешению задач в вещественной области[1].

---

[1] Важнейшие выводы были сообщены мною Парижской академии наук ноября 1903 г., 24 ноября 1904 г., 29 мая и 2 октября 1905 г., 5 марта ..6 г., 13 мая 1907 г. Кроме того, некоторые части настоящего сочинения ...дставляют более или менее измененный перевод статей, помещенных в Ma...matische Annalen в 1904 г. «Sur la nature analytique des solutions des équations ... dérivées partielles du second ordre», в 1905 г. «Sur la déformation des sur...es», в 1906 г. «Sur la généralisation du problème de Dirichlet».

ГЛАВА I

ТЕОРЕМА ПИКАРА

§ 1. Коши первый обратил внимание геометров на замечательное свойство некоторых дифференциальных уравнений с частными производными, состоящее в том, что *все их решения аналитичны.*

Простейшим образцом такого уравнения является уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

всякое решение которого может быть представлено в виде суммы

$$z=f(x+iy)+f_1(x-iy),$$

где f и f_1 — функции комплексной переменной.

В 1890 году Пикар[1] показал, что *указанным свойством обладают все дифференциальные уравнения вида*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-a\frac{\partial z}{\partial x}-b\frac{\partial z}{\partial y}-cz=0, \tag{5}$$

где a, b, c — аналитические функции переменных x, y.

Приведем здесь с некоторыми изменениями доказательство Пикара, основанное на факте, который является руководящим также для дальнейших обобщений и который мы тут же докажем:

Каждое решение z уравнения (5), *рассматриваемое в достаточно малой области, может быть получено путем последовательных приближений и представлено в виде сходящегося ряда аналитических функций, к которому применяются общие критерии для распознавания аналитического характера определяемой им функции.*

---

[1] Journal de l'École Polytechnique, 1890. В 1895 г. в C. R. de l'Ac. des Sc. Пикар показал, что тем же свойством обладают и линейные уравнения высших порядков с мнимыми характеристиками. В настоящей работе мы оставим в стороне уравнения высшего порядка.

нечно в области S плоскости вещественных переменных x, y так же, как и его производные первых двух порядков. В таком случае, полагая, что начало координат находится внутри S, будем, очевидно, иметь для всякой точки, лежащей внутри этой области:

$$z = z_0 + p_0 x + q_0 y + \frac{1}{2}\varphi_1 x^2 + \varphi_2 xy + \frac{1}{2}\varphi_3 y^2, \tag{6}$$

где z_0, p_0, q_0 — постоянные величины, а φ_1, φ_2, φ_3 — функции от x, y, модули которых менее верхней грани M модулей производных первых двух порядков от z в области S.

Точно так же

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + \psi_1 x + \psi_2 y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + \pi_1 x + \pi_2 y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \chi_1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \chi_2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \chi_3,$$

где ψ_1, ψ_2, π_1, π_2, χ_1, χ_2, χ_3 по модулю меньше M.

Полагая затем $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, получим

$$\begin{gathered} z = z_0 + \rho\,(p_0\cos\theta + q_0\sin\theta) + \rho^2\Phi_0(\rho,\theta); \\ \frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + \rho\Phi_1(\rho,\theta), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + \rho\Phi_2(\rho,\theta); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \Phi_3(\rho,\theta), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \Phi_4(\rho,\theta), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \Phi_5(\rho,\theta); \end{gathered} \tag{7}$$

где $|\Phi_i| < 2M$, если ρ менее радиуса R' некоторого круга C', целиком лежащего в области S и имеющего центр в начале координат.

Из равенств (7) и равенства $\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x}y + \frac{\partial z}{\partial y}x$ вытекает

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} = -\Phi_1\sin\theta + \Phi_2\cos\theta.$$

Затем из равенства

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}y^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}x^2 - \frac{\partial z}{\partial x}x - \frac{\partial z}{\partial y}y$$

находим

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \theta^2} = \Phi_3\sin^2\theta - 2\Phi_4\sin\theta\cos\theta + \Phi_5\cos^2\theta - \Phi_1\cos\theta - \Phi_2\sin\theta.$$

Следовательно[1],

$$\left|\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta}\right| < 2M\{|\sin\theta| + |\cos\theta|\} < 3M,$$
$$\left|\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \theta^2}\right| < 2M\{[|\sin\theta| + |\cos\theta|]^2 + [|\sin\theta| + |\cos\theta|]\} < 7M.$$

[1] Вывод неравенств (8), который здесь приводится, несколько отличается от того, который дан в оригинале. *(Ред.)*.

шего, чем K (и внутри ее), $\Phi_0(\rho,\theta)$ разлагается в тригонометрический ряд

$$\Phi_0 = c_0 + \sum_1^\infty c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta,$$

причем имеют место неравенства

$$|c_0| + \sum_1^\infty \{|c_n| + |d_n|\} < 22M < N,$$
$$\sum_1^\infty n\{|c_n| + |d_n|\} < 20M < N. \tag{8}$$

Для доказательства заметим прежде всего, что

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_0 d\theta,$$

откуда

$$|c_0| \leqslant 2M,$$

и

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_0 \cos n\theta d\theta = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\theta^2}\cos n\theta d\theta,$$

$$d_n = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\theta^2}\sin n\theta d\theta.$$

Воспользуемся теперь формулой

$$\int_0^{2\pi} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta\right]^2 +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \left\{\left[\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta\right]^2 + \left[\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta\right]^2\right\}.$$

Заменяя в ней $f(\theta)$ через $\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\theta^2}$, замечаем, что

$$\sum_1^\infty \{c_n^2 n^4 + d_n^2 n^4\} < 100M^2.$$

Поэтому

$$\sum_1^\infty n\{|c_n| + |d_n|\} \leqslant \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_1^\infty n^4\{|c_n| + |d_n|\}^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{\pi^2}{3}}\sqrt{\sum_1^\infty \{c_n^2 n^4 + d_n^2 n^4\}} < 20M$$

и второе из неравенств (8) доказано. Первое же неравенство получается теперь непосредственно.

Таким образом, принимая во внимание формулы (7), заключаем, что на окружности C

$$z = \alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta,$$

причем

$$\begin{gathered} |\alpha_0 - z_0| + \sum_1^\infty \{ |\alpha_n| + |\beta_n| \} < 2MR + NR^2 < LR, \\ \left|\frac{\alpha_1}{R} - p_0\right| + \left|\frac{\beta_1}{R} - q_0\right| + \sum_2^\infty \frac{n}{R} \{ |\alpha_n| + |\beta_n| \} < NR < LR. \end{gathered} \tag{9}$$

Таковы те важные неравенства, которые мы хотели установить.

Применим теперь способ последовательных приближений к определению решения u уравнения (5), которое на окружности C совпадало бы с рассматриваемым решением z и так же, как и это последнее, имело бы конечные производные первых двух порядков внутри C. Мы увидим (и это существенно), что, если круг C достаточно мал, то всюду в этом круге $u = z$.

Напишем систему уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{10}$$

Определим сначала u_0 при условии, что на окружности C $u_0 = z$. Найденное таким образом значение u_0 подставляем во второе уравнение, из которого определяем u_1 при условии, что на окружности C $u_1 = z$. И так далее.

Очевидно, что если при бесконечном возрастании n функция u_n и ее производные первых двух порядков стремятся равномерно к некоторым пределам, то предел u_n будет некоторой функцией, которая удовлетворяет уравнению (5) и на окружности C принимает те же значения, что и z.

Итак, нужно доказать, что функция u_n равномерно стремится к некоторому пределу так же, как и ее производные первых двух порядков. Очевидно, можно написать

$$u_n = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}).$$

Чтобы функция u_n равномерно стремилась к некоторой функции u, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$u = u_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots, \tag{11}$$

где $v_n = u_n - u_{n-1}$, равномерно сходился.

После введения разностей v_n система (10) приводится к системе

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \\
\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = a\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} + cv_{n-1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{gathered} \tag{12}$$

причем на окружности C должно быть выполнено условие $v_n = 0$.

Мы видим, что наряду со всем известным интегрированием уравнения Лапласа при данных значениях решения на окружности наше доказательство требует интегрирования уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(x, y). \tag{13}$$

Кроме того, нужен критерий, который позволил бы установить, что полученный ряд (11) представляет аналитическую функцию. Итак, изложим этот критерий, который принадлежит Гарнаку.

§ 2. Лемма. *Если $F(x, y)$ — аналитическая функция комплексных переменных x и y, правильная при всех значениях x и y, удовлетворяющих условиям $|x + iy| \leqslant R$ и $|x - iy| \leqslant R$, и если положим $x = \rho\cos\theta$ и $y = \rho\sin\theta$, то*

$$F(x, y) = F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

где

$$A_n = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{p,n}\,\rho^{2p}, \quad B_n = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p,n}\,\rho^{2p},$$

причем ряд

$$N = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} R^{n+2p}\left[|\alpha_{p,n}| + |\beta_{p,n}|\right]$$

сходится.

В самом деле, если мы введем новые переменные $z_1 = x + iy$ и $z_2 = x - iy$, то получим

$$F(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} b_{p,q}\, z_1^p z_2^q,$$

причем этот ряд будет абсолютно сходящимся при $|z_1| \leqslant R$ и $|z_2| \leqslant R$. Но $z_1^p z_2^q = \rho^{p+q}[\cos(p-q)\theta + i\sin(p-q)\theta]$, и полагая затем $p-q=\pm n$ так, чтобы n всегда было положительным, получаем

$$F(x,\ y)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho)\cos n\theta+B_n(\rho)\sin n\theta,$$

где

$$A_n=\rho^n\sum_{p=0}^{\infty}[b_{p,\ p+n}+b_{p+n,\ p}]\,\rho^{2p}=\rho^n\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_{p,\ n}\rho^{2p},$$

$$B_n=\rho^n\sum_{p=0}^{\infty}i\,[b_{p+n,\ p}-b_{p,\ p+n}]\,\rho^{2p}=\rho^n\sum_{p=0}^{\infty}\beta_{p,\ n}\rho^{2p}.$$

При этом

$$N=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}R^{n+2p}\,[|\alpha_{p,\ n}|+|\beta_{p,\ n}|]\leqslant 2\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}R^{p+q}|b_{p,\ q}|<\infty,$$

что и требовалось доказать.

Назовём величину N *нормой относительно* R тригонометрического разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\rho)\cos n\theta+B_n(\rho)\sin n\theta$$

или функции $F(x,\ y)$ и в этом случае будем пользоваться обозначением

$$N=[F(x,\ y)]_R.$$

Позже нам придется обобщить это понятие.

Обратная лемма. *Если тригонометрический ряд*

$$\Phi(\rho,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,$$

где

$$A_n(\rho)=\rho^n\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_{p,\ n}\rho^{2p},\quad B_n(\rho)=\rho^n\sum_{p=0}^{\infty}\beta_{p,\ n}\rho^{2p},$$

имеет конечную норму N относительно R, то, полагая $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, находим, что $\Phi(\rho,\ \theta)=F(x,\ y)$ есть аналитическая функция, правильная при всех комплексных значениях x и y, удовлетворяющих неравенствам $|x+iy|<R$ и $|x-iy|<R$.

В самом деле, полагая попрежнему $x+iy=z_1$ и $x-iy=z_2$, мы убеждаемся, что

$$\Phi(\rho,\ \theta)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}b_{p,\ q}z_1^p z_2^q,$$

где

$$b_{p,\ p+n}=\frac{\alpha_{p,\ n}+i\beta_{p,\ n}}{2},\quad b_{p+n,\ p}=\frac{\alpha_{p,\ n}-i\beta_{p,\ n}}{2}.$$

Отсюда следует сходимость ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} R^{p+q}|b_{p,q}| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} R^{n+2p}[|\alpha_{p,n}|+|\beta_{p,n}|] = N.$$

Обратная лемма доказана.

Введем еще новое обозначение.

Пусть дано разложение функции $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ по степеням переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим через $\overset{+}{F}(a_1, a_2, \ldots a_n)$ ряд, который получится, если заменить все коэффициенты их модулями, а переменные $x_1, x_2, \ldots x_n$ соответственно числами $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Теперь нетрудно доказать следующее неравенство:

$$[F\{f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots f_n(x, y)\}]_R \leqslant \overset{+}{F}([f_1(x, y)]_R, \ldots). \quad (14)$$

В самом деле, для этого достаточно убедиться, что

$$[f(x, y)+\varphi(x, y)]_R \leqslant [f(x, y)]_R + [\varphi(x, y)]_R \quad (14')$$

и

$$[f(x, y)\varphi(x, y)]_R \leqslant [f(x, y)]_R[\varphi(x, y)]_R. \quad (14'')$$

Первое из этих неравенств очевидно; чтобы доказать второе, положим, что

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho)\cos n\theta + B_n(\rho)\sin n\theta,$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\rho)\cos n\theta + D_n(\rho)\sin n\theta.$$

Тогда произведение $f\varphi$ выразится суммой членов, подобных

$$A_p(\rho)D_q(\rho)\cos p\theta\sin q\theta = \frac{A_pD_q}{2}[\sin(p+q)\theta+\sin(p-q)\theta].$$

Заметив, что

$$\left[\frac{A_pD_q}{2}\{\sin(p+q)\theta+\sin(p-q)\theta\}\right]_R \leqslant \overset{+}{A}_p(R)\overset{+}{D}_q(R),$$

убеждаемся в правильности (14″).

§ 3. Приступим теперь к решению уравнения (13), полагая, что функция $F(x, y)$ имеет конечную норму $[F(x, y)]_R$ относительно R и, следовательно, аналитична внутри круга C радиуса R.

После замены $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ уравнение (13) получает форму

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} = F(x, y) = A_0(\rho) +$$

$$+\sum_{1}^{\infty} A_n(\rho)\cos n\theta + B_n(\rho)\sin n\theta.$$

Полагая

$$v = C_0(\rho) + \sum_1^\infty C_n(\rho)\cos n\theta + D_n(\rho)\sin n\theta,$$

находим, что при всяком значении n (не исключая и $n=0$) C_n и D_n удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{d^2C_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dC_n}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}C_n = A_n(\rho), \\ &\frac{d^2D_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dD_n}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}D_n = B_n(\rho). \end{aligned} \tag{15}$$

Не будем останавливаться на интегрировании этих уравнений, не представляющем трудностей, и дадим лишь готовые формулы, которые читатель проверит без труда.

Если мы хотим, чтобы v обращалось в нуль при $\rho = R$ и не имело никаких особенностей при $\rho < R$, то мы должны взять решения уравнений (15), удовлетворяющие тем же условиям. Таким образом, находим

$$C_0(\rho) = \int_R^\rho \frac{d\rho}{\rho}\int_0^\rho \rho A_0 d\rho,$$

$$\begin{aligned} 2nC_n(\rho) &= \rho^n \int_R^\rho \frac{A_n}{\rho^{n-1}}\,d\rho - \frac{1}{\rho^n}\int_0^\rho A_n\rho^{n+1}d\rho + \frac{\rho^n}{R^{2n}}\int_0^R A_n\rho^{n+1}d\rho, \\ 2nD_n(\rho) &= \rho^n \int_R^\rho \frac{B_n}{\rho^{n-1}}\,d\rho - \frac{1}{\rho^n}\int_0^\rho B_n\rho^{n+1}d\rho + \frac{\rho^n}{R^{2n}}\int_0^R B_n\rho^{n+1}d\rho. \end{aligned} \tag{16}$$

Полезно также привести и другие выражения для C_n и D_n, имеющие место и при $n=0$. Полагая

$$A_n = \rho^n \sum_{p=0}^\infty \alpha_{p,n}\rho^{2p}, \quad B_n = \rho^n \sum_{p=0}^\infty \beta_{p,n}\rho^{2p},$$

получаем

$$\begin{aligned} C_n(\rho) = &-\frac{\rho^n}{R^n}\sum_{p=0}^\infty R^{n+2p+2}\frac{\alpha_{p,n}}{(2p+2)(2p+2n+2)} + \\ &+ \sum_{p=0}^\infty \rho^{n+2p+2}\frac{\alpha_{p,n}}{(2p+2)(2p+2n+2)}, \\ D_n(\rho) = &-\frac{\rho^n}{R^n}\sum_{p=0}^\infty R^{n+2p+2}\frac{\beta_{p,n}}{(2p+2)(2p+2n+2)} + \\ &+ \sum_{p=0}^\infty \rho^{n+2p+2}\frac{\beta_{p,n}}{(2p+2)(2p+2n+2)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Из формул (17) выводим следующие чрезвычайно важные неравенства

$$\overset{+}{C}_n(R) < \frac{R^2}{2n+2}\overset{+}{A}_n(R), \quad \frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\rho} < \frac{R}{2}\overset{+}{A}_n(R),$$
$$\overset{+}{D}_n(R) < \frac{R^2}{2n+2}\overset{+}{B}_n(R), \quad \frac{d\overset{+}{D}_n(R)}{d\rho} < \frac{R}{2}\overset{+}{B}_n(R). \tag{18}$$

Из неравенств (18) вытекает, во-первых, непосредственно

$$[v(x, y)]_R = \overset{+}{C}_0(R) + \sum_{n=1}^{\infty}[\overset{+}{C}_n(R) + \overset{+}{D}_n(\rho)] < \frac{R^2}{2}[F(x, y)]_R. \tag{19}$$

Далее, легко показать, что

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_R < R[F(x, y)]_R, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_R < R[F(x, y)]_R. \tag{19bis}$$

В самом деле,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho}.$$

С другой стороны

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\theta\right]_R < \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\rho} + \frac{d\overset{+}{D}_n(R)}{d\rho}\right\} < \frac{R}{2}[F(x, y)]_R$$

и

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right]_R < \sum_{n=1}^{\infty} n\left\{\frac{\overset{+}{C}_n(R)}{R} + \frac{\overset{+}{D}_n(R)}{R}\right\} < \frac{R}{2}[F(x, y)]_R.$$

Совершенно аналогичное рассуждение приводит и ко второму из неравенств (19^{bis}).

§ 4. Таким образом, мы закончили все необходимые приготовления к тому, чтобы доказать, что в случае, если радиус R круга C достаточно мал, *ряд (11) сходится равномерно и представляет аналитическую функцию.*

В самом деле, возвратимся к системе уравнений (12). Заметим прежде всего, что функция u_0, которая на окружности C равна $z = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta$, внутри круга C должна быть равна

$$u_0 = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n[\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta].$$

Неравенства (9) показывают нам, что

$$[u_0(x, y)]_R < P, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]_R < P, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]_R < P,$$

где P есть вполне определенное число.

Применяя затем неравенства (14') и (14'') и обозначая буквою Q верхнюю грань величин $[a(x, y)]_R$, $[b(x, y)]_R$, $[c(x, y)]_R$, получаем

$$\left[a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0\right]_R < 3PQ.$$

При помощи же неравенств (19) и (19^{bis}) находим

$$[v_1]_R < 3PQR^2, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R < 3PQR, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R < 3PQR.$$

Если допустим, что $R < 1$, то легко найдем, что

$$\left[a\frac{\partial v_1}{\partial x} + b\frac{\partial v_1}{\partial y} + cv_1\right]_R < 3PQ\,3QR.$$

Последовательно применяя неравенства (19) и (19^{bis}), находим таким образом:

$$[v_2]_R < P(3QR)^2, \quad \left[\frac{\partial v_2}{\partial x}\right]_R < P(3QR)^2, \quad \left[\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]_R < P(3QR)^2;$$

$$[v_3]_R < P(3QR)^3, \quad \left[\frac{\partial v_3}{\partial x}\right]_R < P(3QR)^3, \quad \left[\frac{\partial v_3}{\partial y}\right]_R < P(3QR)^3;$$

. . . .

$$[v_n]_R < P(3QR)^n, \quad \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R < P(3QR)^n, \quad \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R < P(3QR)^n;$$

. . . .

Достаточно, таким образом, предположить, что $R < \frac{1}{3Q}$, для того, чтобы ряд

$$u = u_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

равномерно сходился в круге C и на его границе и имел конечную норму относительно R, а следовательно, представлял (на основании обратной леммы § 2) аналитическую функцию. Наконец, чтобы не было сомнений, что u действительно удовлетворяет уравнению (1), нужно показать равномерную сходимость рядов

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \ldots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \ldots$$

и т. д. в круге C и на его границе, но это, очевидно, вытекает (на основании известной теоремы теории функций), из равномерной сходимости ряда u при $|x + iy| = R$ и $|x - iy| = R$.

Итак, *аналитическая функция* u *есть решение уравнения* (5), *которое на окружности* C *совпадает с* z. Остается показать, что u вообще тождественно с z. Однако мы сделаем это после, а сначала покажем вслед за гг. Люткемейер[1] и Гольмгрен[2], что

[1] Göttingen, Dissertation, 1902.
[2] Mathematische Annalen, 1903.

рассуждение Пикара без существенных изменений может быть применено к уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right), \tag{20}$$

если f есть аналитическая функция своих аргументов.

§ 5. Подобно системе уравнений (10) составляем систему

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=f(0,\ 0,\ z_0,\ p_0,\ q_0)=A_0,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=f\left(x,\ y,\ u_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \frac{\partial u_0}{\partial y}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}=f\left(x,\ y,\ u_{n-1},\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x},\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

где z_0, p_0, q_0 представляют значения z и ее первых производных в начале координат, а u_n попрежнему на окружности C достаточно малого радиуса R совпадает с z. Мы можем опять положить $u_n=u_0+v_1+v_2+\ldots+v_n$, где $v_n=u_n-u_{n-1}$. Тогда задача сведется снова к исследованию ряда

$$u=u_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots,$$

причем для определения u_0 и v_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ у нас есть система

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=A_0,$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=f\left(x,\ y,\ u_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)-A_0,$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}=f\left(x,\ y,\ u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial x},\ \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)-f\left(x,\ y,\ u_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \frac{\partial u_0}{\partial y}\right), \tag{21}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}=f\left(x,\ y,\ u_{n-1},\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x},\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)-f\left(x,\ y,\ u_{n-2},\ \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x},\ \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Замечая, что

$$A_0\,\frac{x^2+y^2-R^2}{4},$$

где A_0 — постоянная величина, есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=A_0,$$

обращающееся в нуль на окружности C, получаем благодаря неравенствам (9)[1]

$$
\begin{aligned}
&[u_0 - z_0]_R < |A_0| R^2 + LR < \lambda, \\
&\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right]_R < |A_0| R + LR < \lambda, \qquad (22)\\
&\left[\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right]_R < |A_0| R + LR < \lambda.
\end{aligned}
$$

Очевидно, беря R достаточно малым, можно сделать λ сколь угодно малым. Но

$$
f\left(x,\ y,\ u_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - f(0,\ 0,\ z_0,\ p_0,\ q_0) = P_0 x + P_1 y +
+ P_2(u_0 - z_0) + P_3\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right) + P_4\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right),
$$

где

$$
P_i\left(x,\ y,\ u_0 - z_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right)
$$

разлагаются в строку Тэйлора по степеням своих аргументов, причем, если R' менее радиуса сходимости функций P_i по каждому из аргументов, то

$$
\overset{+}{P}_i(R',\ R',\ R',\ R',\ R') < Q.
$$

Здесь Q — некоторое определенное число.

Вообще

$$
f\left(x,\ y,\ u_n,\ \frac{\partial u_n}{\partial x},\ \frac{\partial u_n}{\partial y}\right) - f\left(x,\ y,\ u_{n-1},\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x},\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right) =
= P_2 v_n + P_3\frac{\partial v_n}{\partial x} + P_4\frac{\partial v_n}{\partial y},
$$

где

$$
P_i\left(x,\ y,\ u_n - z_0,\ \frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0,\ \frac{\partial u_n}{\partial y} - q_0,\ u_{n-1} - z_0,\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - p_0,\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - q_0\right)
$$

разлагаются в строку Тэйлора и

$$
\overset{+}{P}_i(R',\ R',\ R',\ R',\ R',\ R',\ R',\ R') < Q.
$$

---

[1] Действительно

$$
u_0 = A_0\frac{x^2 + y^2 - R^2}{4} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n [\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta].
$$

Поэтому

$$
[u_0 - z_0]_R \leqslant |A_0|\frac{R^2}{2} + |\alpha_0 - z_0| + \sum_{n=1}^{\infty}\{|\alpha_n| + |\beta_n|\}
$$

и с помощью (9) получаем, что

$$
[u_0 - z_0]_R < |A_0| R^2 + LR.
$$

Остальные неравенства (22) получаются аналогично. (*Ред.*).

Из неравенства (14) следует, что норма P_i относительно R менее Q, если только при любом n

$$\begin{gathered}
[u_0 - z_0]_R + [v_1]_R + \ldots + [v_n]_R < R', \\
\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right]_R + \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R + \ldots + \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R < R', \\
\left[\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right]_R + \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R + \ldots + \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R < R'.
\end{gathered} \tag{23}$$

Таким образом, доказательство представляется в следующем виде.

На основании неравенств (22)

$$\left[f\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - f(0, 0, z_0, p_0, q_0)\right]_R < 2QR + 3Q\lambda = L_1$$

и вследствие неравенств (19) и (19^{bis}), полагая $R < 1$, находим

$$[v_1]_R < RL_1, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R < RL_1, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R < RL_1;$$

отсюда

$$\left[f\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - f\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right]_R < 3QRL_1,$$

так что последовательно находим:

$$[v_2]_R < RL_1 3QR, \quad \left[\frac{\partial v_2}{\partial x}\right]_R < RL_1 3QR, \quad \left[\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]_R < RL_1 3QR;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[v_n]_R < RL_1 (3QR)^{n-1}, \quad \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R < RL_1 (3QR)^{n-1}, \quad \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R < RL_1 (3QR)^{n-1};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Примем, что $R < \frac{1}{3Q}$ и настолько мало, что

$$\lambda + \frac{RL_1}{1 - 3QR} < R'.$$

В таком случае неравенства (23) будут выполнены. Ряд

$$u = u_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

следовательно, сходится равномерно и его норма относительно R конечна. Отсюда по примеру предыдущего § вытекает, во-первых, что *и есть решение уравнения* (20), *которое на контуре маленького круга C совпадает с z*, и во-вторых, что *и есть аналитическая функция.*

Однако все наше рассуждение окажется недостаточным для доказательства теоремы Пикара, если мы не обнаружим полную тождественность найденного решения и данного решения z. Для этого поступим следующим образом. По предположению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Вычитая первое уравнение из второго и полагая $\delta = u - z$, получим

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}=A\frac{\partial \delta}{\partial x}+B\frac{\partial \delta}{\partial y}+C\delta, \tag{24}$$

где A, B, C суть конечные функции от x, y, имеющие конечные производные первого порядка по этим переменным. В случае линейности f функции A, B, C совпадают с коэффициентами a, b, c уравнения (5). С другой стороны,

$$\left|A\frac{\partial \delta}{\partial x}+B\frac{\partial \delta}{\partial y}+C\delta\right|<3\mu N,$$

где μ — наибольший из модулей $|A|$, $|B|$, $|C|$, а N — наибольший из модулей $\left|\frac{\partial \delta}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial \delta}{\partial y}\right|$, $|\delta|$. Но, так как δ обращается в нуль на окружности C, то, применяя формулу Грина[1], получим

$$N \leqslant h\mu R N,$$

где h — некоторый постоянный множитель. Полученное неравенство, очевидно, не допускает решения, отличного от $N=0$, если только $R<\frac{1}{h\mu}$. Отсюда заключаем, что $\delta = u - z \equiv 0$ и теорема Пикара с обобщением Люткемейера и Гольмгрена доказана.

Прежде чем приступить к доказательству основной теоремы теории уравнений эллиптического типа в самой общей форме, мы должны проследить главные моменты только что данного доказательства. Мы видим, что нам приходилось применять способ последовательных приближений при условиях, когда правая часть уравнения не содержит вторых производных; благодаря неравенствам (19) и (19^{bis}) возможно было всегда находить верхние грани норм решения уравнения Пуассона и его первых производных. Но задача наша весьма затруднилась бы, если бы в правой части уравнения находились и вторые производные, так как ограничить нормы вторых производных мы не можем. Естественно поэтому возникает мысль так видоизменить понятие нормы (конечностью которой обусловливается аналитический характер функции), чтобы нормы вторых производных решения могли также быть ограничены при помощи нормы правой части уравнения Пуассона. Но возможно ли такое видоизменение? В этом, конечно, можно убедиться, только совершивши его на самом деле. Из предыдущего мы можем, однако, увидеть, что если из конечности употребленной нами нормы вытекает аналитический характер

---

[1] Holmgren, Mathematische Annalen, 1903.

функции, то обратное утверждение неверно, ибо, как это следует из § 2, конечность нормы свидетельствует о том, что функция не имеет особенностей при $|x+iy|<R$ и $|x-iy|<R$, где x, y принимают какие угодно комплексные значения. Поэтому ясно, что указанный критерий Гарнака вообще неудовлетворителен.

В следующей главе мы займемся вопросом об общих способах представления вещественных функций и о критериях для определения их аналитической природы. При этом мы введем новые ряды, более пригодные для изучения аналитических функций от вещественных переменных, чем строки Тэйлора.

ГЛАВА II

НОРМАЛЬНЫЕ РЯДЫ[1]

§ 6. Рядами, которые мы введем вместо строки Тэйлора, являются двойные ряды вида

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}A_{pq}x^{p}(R-x)^{q}.$$

Назовем такой ряд *нормальным*, если он сходится абсолютно и равномерно при $0\leqslant x\leqslant R$.

Естественно задать вопрос, может ли совершенно произвольная непрерывная функция быть разложена в нормальный ряд.

Ответ на этот вопрос, как мы увидим далее, оказывается утвердительным. А именно, мы укажем прием для преобразования произвольного, равномерно сходящегося ряда многочленов в нормальный ряд. С этой целью, принимая для простоты, что $R=1$, разрешим предварительно следующую алгебраическую задачу.

---

[1] В первоначальный текст настоящей главы внесён ряд существенных изменений, а именно:

Первый параграф этой главы заменен параграфами 66, 67 и 68 докторской диссертации С. Н. Бернштейна «О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени» (Сообщения Харьк. мат. о-ва, серия 2, т. XIII, стр. 49—194, 1912), что составило §§ 6, 7 измененного текста.

§ 7 первоначального текста несколько сокращен и объединен с § 8. Общий пример этих параграфов заменен частным, не требующим никакой выкладки.

Необходимое условие для аналитичности из §§ 8 и 10 вынесено в добавление редактора.

Доказательство неравенств (27) и (27^{bis}) проведено более подробно, на основании статьи С. Н. Бернштейна «Sur la nature analytique des solutions des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique (Math. Zeitschr., Bd. 25, 505—513, 1926); при этом частично использована работа Т. Радо (T. Radó) «Das Hilbertsche Theorem über den analytischen Charakter der Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung», Math. Zeischr., Bd. 25, 514—589), в которой дано несколько модифицированное изложение данного С. Н. Бернштейном решения 19-ой проблемы Гильберта. (*Ред.*)

Задача. *Преобразовать многочлен*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

в выражение

$$P(x) = \sum_{p=0}^{p+q=m} \sum_{q=0} A_{pq} x^p (1-x)^q,$$

где $m \geqslant n$, *так, чтобы максимум суммы*

$$\sum_{p=0}^{p+q=m} \sum_{q=0} |A_{pq}| x^p (1-x)^q$$

на отрезке $[0, 1]$ *был возможно мал.*

Ввиду того, что число коэффициентов A_{pq} ограничено, задача, очевидно, имеет решение, т. е. можно выбрать эти коэффициенты так, чтобы максимум суммы

$$\sum_{p=0}^{p+q=m} \sum_{q=0} |A_{pq}| x^p (1-x)^q$$

достигал своей нижней грани; этому минимальному значению максимума дадим название *нормального максимума степени* m данного многочлена на отрезке $[0, 1]$.

Замечательно, что поставленная задача разрешается совершенно элементарно, причем обнаруживается интересный факт, что нормальный максимум степени m любого многочлена $P(x)$ имеет пределом при $m \to \infty$ максимум $|P(x)|$ на данном отрезке. Искомое решение вытекает из следующего простого замечания: допустим, что задача решена, и пусть выражение

$$P(x) = \sum_{p=0}^{p+q=m} \sum_{q=0} a_{pq} x^p (1-x)^q$$

есть одно из возможных решений; тогда, если среди членов $a_{pq} x^p (1-x)^q$ есть такие, степень которых $p+q=m-k$, где $k>0$, то решением задачи будет служить и то выражение, которое получится от замены $a_{pq} x^p (1-x)^q$ суммой членов степени m.

$$a_{pq} x^p (1-x)^q [x + (1-x)]^k =$$
$$= a_{pq} [x^{p+k} (1-x)^q + k x^{p+k-1} (1-x)^{q+1} + \ldots + x^p (1-x)^{q+k}].$$

В самом деле,

$$|a_{pq}| x^p (1-x)^q = |a_{pq}| x^{p+k} (1-x)^q + |k a_{pq}| x^{p+k-1} (1-x)^{q+1} +$$
$$+ \ldots + |a_{pq}| x^p (1-x)^{q+k};$$

поэтому сумма модулей преобразованного выражения не может превысить суммы модулей данного выражения.

Отсюда следует, что среди решений задачи всегда ...ешение, в котором сумма показателей $p+q=m$. Другими словами, задача будет решена, если представим $P(x)$ в виде

$$P(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1}(1-x) + \ldots + A_0 (1-x)^m.$$

Остается вычислить коэффициенты A_i так, чтобы иметь тождественно

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1}(1-x) + \ldots + A_0 (1-x)^m = a_n x^n + \\ + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Отсюда находим для определения $(m+1)$ коэффициента $(m+1)$ уравнение:

$$\begin{gathered} A_0 = a_0, \\ A_1 - mA_0 = a_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_k - (m-k+1) A_{k-1} + \ldots + (-1)^k \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\cdot 2\ldots k} A_0 = a_k, \quad (\alpha) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m - A_{m-1} + \ldots + (-1)^m A_0 = a_m, \end{gathered}$$

где $a_k = 0$, если $k > n$.

Решение уравнений (α) не представляет труда и дает немедленно

$$\begin{gathered} A_0 = a_0, \\ A_1 = a_1 + ma_0, \\ A_2 = a_2 + (m-1) a_1 + \frac{m(m-1)}{2} a_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_k = a_k + C^1_{m-k+1} a_{k-1} + \ldots + C^k_m a_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m = a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0, \end{gathered} \qquad (\beta)$$

где

$$C^k_m = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}.$$

Итак, поставленная задача решена: нормальный максимум степени m данного многочлена равен максимуму суммы

$$\sum_{k=0}^{m} |A_k|\, x^k (1-x)^{m-k},$$

где коэффициенты A_k определяются формулами (β).

Формулу, определяющую A_k, можно преобразовать следующим образом:

$$A_k = C_m^k\left[a_0 + \frac{C_{m-1}^{n-1}}{C_m^k}a_1 + \frac{C_{m-2}^{n-2}}{C_m^k}a_2 + \ldots\right] =$$

$$= C_m^k\left[a_0 + \frac{k}{m}a_1 + \frac{k(k-1)}{m(m-1)}a_2 + \ldots\right] =$$

$$= C_m^k\left[a_0 + \frac{k}{m}a_1 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2\frac{1-\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{m}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{k}{m}\right)^n a_n \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)}{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}\right].$$

Из полученной формулы видно, что, при бесконечном возрастании m

$$\lim\frac{A_k}{C_m^k} = \lim P\left(\frac{k}{m}\right).$$

Действительно, если k есть определенное число, то все члены суммы, состоящей из данного числа $n+1$ слагаемых,

$$\frac{A_k}{C_m^k} = a_0 + \frac{k}{m}a_1 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2\frac{1-\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{m}} + \ldots,$$

кроме a_0, стремятся к нулю, поэтому

$$\lim\frac{A_k}{C_m^k} = a_0 = P(0) = \lim P\left(\frac{k}{m}\right).$$

Если k также возрастает бесконечно, то

$$\lim\frac{A_k}{C_m^k} = \lim\left[a_0 + a_1\frac{k}{m} + a_2\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \ldots + a_n\left(\frac{k}{m}\right)^n\right] = \lim P\left(\frac{k}{m}\right).$$

Следует прибавить, что разность

$$\delta_k = \frac{A_k}{C_m^k} - P\left(\frac{k}{m}\right)$$

равномерно стремится к нулю при бесконечном возрастании m.

В самом деле,

$$\delta_k = \left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2\left[\frac{1-\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{m}} - 1\right] + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{k}{m}\right)^n a_n\left[\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)}{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)} - 1\right];$$

поэтому

$$|\delta_k| < \left(\frac{k}{m}\right)^2 |a_2| \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right] + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{k}{m}\right)^n |a_n| \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right)\right] <$$
$$< \left(\frac{k}{m}\right)^2 |a_2| \frac{1}{k} + \ldots + \left(\frac{k}{m}\right)^n |a_n| \frac{(n-1)^2}{k} < \frac{B}{m},$$

где

$$B = |a_2| + 4|a_3| + \ldots + (n-1)^2 |a_n|.$$

Итак,

$$A_k = C_m^k \left[P\left(\frac{k}{m}\right) + \delta_k\right], \qquad (\gamma)$$

где

$$|\delta_k| < \frac{B}{m}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{m} |A_k| x^k (1-x)^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \left|P\left(\frac{k}{m}\right) + \delta_k\right| C_m^k x^k (1-x)^{m-k} <$$
$$< \left(M + \frac{B}{m}\right) \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k (1-x)^{m-k} = \left(M + \frac{B}{m}\right) [x + (1-x)]^m = M + \frac{B}{m},$$

где через M обозначен максимум модуля многочлена $P(x)$ на отрезке $[0,1]$. Таким образом, обозначая через M_m нормальный максимум степени m многочлена $P(x)$ на отрезке $[0, 1]$, имеем

$$M_m < M + \frac{B}{m}.$$

Следствие. *Если многочлен $P(x)$ положителен на отрезке $[0, 1]$, то при m достаточно большом все коэффициенты A_k положительны.*

Это непосредственно вытекает из формулы (γ) и оценки для δ_k.

§ 7. Теорема. *Всякая непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция разлагается на нём в нормальный ряд.*

В самом деле, на основании теоремы Вейерштрасса, всякую непрерывную функцию $f(x)$ можно представить в виде равномерно сходящегося ряда многочленов

$$f(x) = Q_0(x) + Q_1(x) + \ldots + Q_s(x) + \ldots \qquad (\delta)$$

Написанный ряд можно преобразовать в нормальный ряд следующим образом. Соединяя вместе, если это понадобится, по несколько членов, ряд (δ) преобразуем в ряд

$$f(x) = P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_s(x) + \ldots, \qquad (\delta')$$

в котором все многочлены $P_s(x)$ (при $s > 0$) удовлетворяют условию

$$|P_s(x)| < \frac{1}{2^s}.$$

После этого представим все многочлены $P_s(x)$ в виде

$$P_s(x)=\sum_{k=0}^{m} A_k^{(s)} x^k (1-x)^{m-k}.$$

Полагая m достаточно большим, чтобы нормальный максимум $M_m^{(s)}$ многочлена P_s не превышал более, чем в два раза, его обыкновенного максимума, получим

$$\sum_{k=0}^{m} |A_k^{(s)}|\, x^k (1-x)^{m-k} < \frac{1}{2^{s-1}}.$$

Проделав это для всех s, мы, очевидно, преобразуем ряд, представляющий $f(x)$, в нормальный ряд; что и требовалось доказать.

Следствие. *Для всякой непрерывной функции имеет место равенство*[1]

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k}.$$

В самом деле, если $f(x)=P(x)$ есть многочлен, то на основании равенства (γ)

$$\left|P(x)-\sum_{k=0}^{m} P\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k}\right| < \frac{B}{m}. \tag{ε}$$

Если же $f(x)$ есть произвольная функция (δ'), то, полагая

$$P_0+P_1+\ldots+P_s=P,$$

имеем

$$|f-P|<\frac{1}{2^s};$$

поэтому, применяя к многочлену $P(x)$ неравенство (ε), заключаем, что

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k}\right| < \frac{1}{2^{s-1}}+\frac{B}{m}.$$

Таким образом, как бы мало ни было число α, выбираем s достаточно большим, чтобы

$$\frac{1}{2^{s-1}}<\frac{\alpha}{2}.$$

---

[1] Эта формула выведена мною при помощи теории вероятностей в маленькой заметке «Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités», помещенной в Сообщ. Харьк. математ. об-ва, т. XIII, № 1, 1912.

лены, и, следовательно, выбирая m достаточно большим, найдем

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \right| < \alpha,$$

т. е.

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k},$$

что и требовалось доказать.

§ 8. В нашу задачу не входит останавливаться на различных применениях нормальных рядов, из которых наибольший интерес представляет суммирование расходящихся при всех значениях переменной строк Тэйлора, к которому мы надеемся вернуться в ближайшем будущем[1].

В настоящий момент мы ограничимся установлением нужного нам критерия аналитичности.

Предполагая пока, как и выше, что функции рассматриваются на отрезке [0, 1], укажем на особую группировку членов нормального ряда, которая равно возможна для аналитических и неаналитических функций. А именно, всегда можно написать

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} A_{pq} x^p (1-x)^q = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)(1-x)^n,$$

где $P_n(x)$ строка Тэйлора по степеням x. Радиус сходимости $P_n(x)$ не менее единицы; и если $n > 0$, то $\overset{+}{P}_n(x)(1-x)^n$ при приближении x к единице стремится к нулю. Очевидно, что функция $\overset{+}{P}_n(1-x)^n$ имеет абсолютный максимум при некотором значении x, заключенном между нулем и единицей. Пусть M_n будет этот максимум. В работе «Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du seconde ordre»[2] я рассматриваю ряд этих максимумов

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$$

и называю M вещественной нормой функции $f(x)$. Из этого понятия выводится целый ряд производных понятий и устанавливаются их существенные свойства. Несмотря на то, что в большинстве случаев эти понятия вполне приспособлены для достижения той цели, к которой они предназначены, я нахожу нужным ввести

---

[1] Вопросу суммирования везде расходящихся строк Тэйлора посвящена статья С. Н. Бернштейна в Сообщ. Харьк. математ. об-ва, сер. 2, т. 13, 1912, 195—199. См. также собрание сочинений, т. 1, изд. Акад. наук СССР, 1952. (*Ред.*).

[2] Math. Annalen, Bd. 59, 1904, 20—76.

в них некоторые изменения, сохраняя прежнюю терминологию и обозначения. Действительно, приведенное выше понятие обладает крупным недостатком: оно не допускает простого формального определения; фактическое вычисление каждого из чисел M_n требует разрешения особого трансцендентного уравнения. Напротив, если мы рассмотрим какой-нибудь из членов двойного ряда $f(x)$

$$A_{pq}x^p(1-x)^q,$$

то максимум на отрезке [0, 1] его модуля m_{pq} достигается при вполне определенном значении

$$x=\frac{p}{p+q},$$

так что[1]

$$m_{pq}=|A_{pq}|\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}.$$

Вместо максимума M_q функции $\overset{+}{P}_q(1-x)^q$ мы введем вполне определенное выражение

$$m_q=\sum_{p=0}^{\infty}m_{pq}=\sum_{p=0}^{\infty}|A_{pq}|\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}.$$

Итак, *вещественной нормой функции* $f(x)$ будем называть вполне определенную сумму

$$m=m_0+m_1+m_2+\ldots=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}|A_{pq}|\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}.$$

Очевидно, что вообще $m_i \geqslant M_i$ и норма может быть бесконечна, хотя бы ряд для $f(x)$ и был сходящимся. Рассматривая совокупность всех нормальных разложений $f(x)$, мы получим совокупность положительных величин, образованную соответственными нормами. Эта совокупность имеет точную нижнюю грань которую назовем *низшей вещественной нормой* $f(x)$ и обозначим через $[f(x)]_{10}$.

Все сказанное, конечно, остается в силе, если отрезок [0, 1 заменить отрезком $[0, R]$; низшую норму на $[0, R]$ обозначим через $[f(x)]_{R0}$.

В частности, если $f(x)$ разлагается в строку Тэйлора с положительными коэффициентами, сходящуюся при $x=R$, то

$$[f(x)]_{R0}=\overset{+}{f}(R)=f(R).$$

Но, если бы все члены не были положительными, строка Тэйлор давала бы норму, превышающую низшую норму. И когда радиу

---

[1] При этом

$$m_{0q}=|A_{0q}|,\quad m_{p0}=|A_{p0}|.$$

(*Ред.*).

сходимости меньше R, строке Тэйлора $f(x)$ соответствует беско-нечная норма, между тем как *низшая* норма $f(x)$ **может быт** конечна.

Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{4} + b^2},$$

где $b > 0$, для абсолютной сходимости строки Тэйлора (по сте-пеням x) которой на отрезке $[0, 1]$ необходимо, чтобы $b \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Между тем, низшая вещественная норма этой функции конечн при любом $b > 0$. Действительно,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{4} + b^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[x(1-x)]^n}{\left(b^2 + \frac{1}{4}\right)^{n+1}}$$

и, значит,

$$[f(x)]_{10} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n \left(b^2 + \frac{1}{4}\right)^{n+1}} = \frac{1}{b^2},$$

причем знак $<$ здесь может быть, очевидно, отброшен.

Следует обратить внимание на характер сходимости ряда

$$m = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots,$$

представляющего вещественную норму в рассматриваемом примере Эта сходимость подобна сходимости геометрической прогрессии Чтобы в этом убедиться, заметим, что, если заменить функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{4} + b^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[x(1-x)]^n}{\left(b^2 + \frac{1}{4}\right)^{n+1}}$$

на функцию

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \lambda)^n \frac{[x(1-x)]^n}{\left(b^2 + \frac{1}{4}\right)^{n+1}},$$

то при $0 \leqslant \lambda < 4b^2$

$$[f_1(x)]_{10} = \frac{1}{b^2 - \frac{1}{4}\lambda}.$$

Переходя к произвольной функции $f(x)$, заданной на отрезк $[0, R]$ и имеющей на нем конечную вещественную норму

$$m = m_0 + m_1 + \ldots + m_n + \ldots,$$

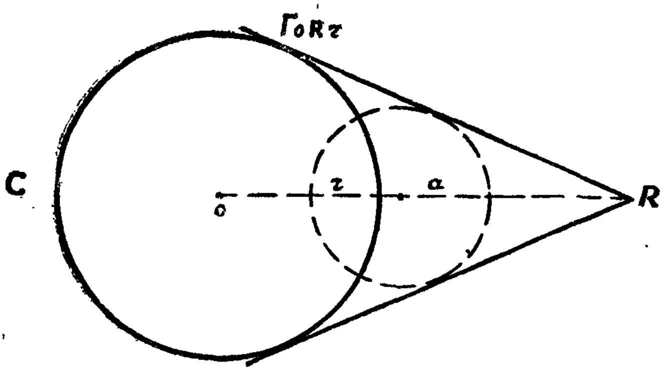
примем, что при некотором положительном λ сходится также ря

$$N = m_0 + (1 + \lambda) m_1 + \ldots + (1 + \lambda)^n m_n + \ldots,$$

которому полезно придать форму

$$N = m_0 + \left(\frac{R+r}{R-r}\right)m_1 + \ldots + \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n m_n + \ldots \ (0 < r < R).$$

Число N называется *нормою* $f(x)$ *внутри контура* Γ_{0Rr}, образованного обеими касательными из точки R к окружности C радиуса r и большею дугой окружности C, заключенной между точками соприкосновения.



Совокупность норм N в свою очередь имеет точную нижнюю грань, которую назовем *низшей нормой внутри* Γ_{0Rr} и обозначим символом $[f(x)]_{Rr}$.

Теперь мы можем сформулировать нужный нам критерий аналитичности.

Теорема. *Если нормальный на отрезке* $[0, R]$ *ряд* $f(x)$ *имеет конечную норму* N *внутри контура* Γ_{0Rr}, *то он равномерно и абсолютно сходится на контуре* Γ_{0Rr} *и внутри него и представляет аналитическую функцию.*

В самом деле, положим, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} x^p (R-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (R-x)^n$$

и пусть

$$M_n = \max|a_{n0}(R-x)^n| + \max|a_{n1}x(R-x)^n| + \ldots$$
$$\ldots + \max|a_{np}x^p(R-x)^n| + \ldots$$

при

$$0 \leqslant x \leqslant R.$$

По предположению ряд

$$N = M_0 + M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots + M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots$$

сходится. Но при $|x|$, равном r, имеем

$$|R-x|^n\{|a_{n0}| + |a_{n1}x| + \ldots |a_{np}x^p| + \ldots\} < M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n.$$

Таким образом ясно, во-первых, что наш ряд абсолютно и равномерно сходится на окружности C и внутри ее.

Далее положим

$$r_1 = r \cdot \frac{R-a}{R},$$

где

$$0 \leqslant a \leqslant R.$$

Тогда всякой точке на контуре Γ_{0Rr} и внутри него соответствует значение $x = a + r_1(\cos\theta + i\sin\theta)$. Но

$$|R-x|^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}x^k| < (R-a+r_1)^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|(r_1+a)^k =$$

$$= \left(\frac{R-a+r_1}{R-a-r_1}\right)^n (R-a-r_1)^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|(r_1+a)^k <$$

$$< \left(\frac{R-a+r_1}{R-a-r_1}\right)^n M_n \leqslant \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n M_n.$$

Следовательно, абсолютная и равномерная сходимость нашего ряда обнаружена, как на контуре Γ_{0Rr}, так и внутри него.

Поэтому, замечая, что $P_n(R-x)^n$ — правильная аналитическая функция внутри контура Γ_{0Rr}, заключаем на основании известной теоремы теории функций, что функция $f(x)$ аналитична внутри рассматриваемого контура.

Это и требовалось доказать.

Таков интересующий нас критерий, достаточный для того, чтобы функция, разлагающаяся в нормальный ряд, была аналитической. Из последующего будет видно, что пользование найденным критерием совершенно аналогично применению элементарного критерия Коши, относящегося лишь к строкам Тэйлора.

§ 9. Теорема. *Если $f_1(x)$ имеет норму N_1 внутри контура Γ_{0Rr}, а $f_2(x)$ — норму N_2, то сумма $f_1(x) + f_2(x)$ имеет внутри того же контура норму не большую, чем $N_1 + N_2$.*

В самом деле, пусть

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{np}^{(1)} x^p (R-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)} (R-x)^n,$$

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{np}^{(2)} x^p (R-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(2)} (R-x)^n,$$

$$M_n^{(1)} = \sum_{p=0}^{\infty} |A_{np}^{(1)}| \frac{p^p n^n R^{n+p}}{(p+n)^{p+n}}, \quad M_n^{(2)} = \sum_{p=0}^{\infty} |A_{np}^{(2)}| \frac{p^p n^n R^{n+p}}{(p+n)^{p+n}}.$$

В таком случае

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} [A_{np}^{(1)} + A_{np}^{(2)}] x^p (R-x)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{np} x^p (R-x)^n$$

и

$$M_n = \sum_{p=0}^{\infty} |A_{np}| \frac{p^p n^n R^{n+p}}{(p+n)^{p+n}} \leqslant M_n^{(1)} + M_n^{(2)}.$$

Следовательно,

$$M_0 + M_1 \left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots + M_n \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant M_0^{(1)} + M_0^{(2)} + [M_1^{(1)} + M_2^{(2)}] \left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots = N_1 + N_2.$$

Найденный результат удобно выразить при помощи низших норм. Получим, очевидно,

$$[f_1(x) + f_2(x)]_{Rr} \leqslant [f_1(x)]_{Rr} + [f_2(x)]_{Rr}. \tag{25'}$$

Теорема. *Если $f_1(x)$ имеет норму N_1 внутри контура Γ_{0Rr}, а $f_2(x)$ — норму N_2, то произведение $f_1(x) f_2(x)$ имеет внутри того же контура норму не большую, чем $N_1 N_2$.*

Сохраняя обозначения предыдущей теоремы, легко видеть, что

$$\Phi(x) = f_1(x) f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [P_0^{(1)} P_n^{(2)} + P_1^{(1)} P_{n-1}^{(2)} + \ldots + P_n^{(1)} P_0^{(2)}] (R-x)^n.$$

Следовательно,

$$[\Phi(x)]_{Rr} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} [M_0^{(1)} M_n^{(2)} + \ldots + M_n^{(1)} M_0^{(2)}] \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n = N_1 N_2.$$

Вводя низшие нормы, получаем

$$[f_1(x) f_2(x)]_{Rr} \leqslant [f_1(x)]_{Rr} [f_2(x)]_{Rr}. \tag{25''}$$

Из неравенств (25′) и (25″) вытекает, наконец, важное общее неравенство

$$[F\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)\}]_{Rr} \leqslant$$
$$\leqslant \overset{+}{F} \{[\varphi_1(x)]_{Rr}, [\varphi_2(x)]_{Rr}, \ldots [\varphi_n(x)]_{Rr}\}, \tag{25}$$

где $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ обозначает произвольную аналитическую функцию, разложенную по возрастающим степеням $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$.

Переходим теперь к выражениям, содержащим интегралы.

Теорема. *Пусть*

$$I(x) = x^p \int_0^x F(x) x^q \, dx.$$

Если целые числа p и q удовлетворяют неравенствам $q \geqslant 0$, $p + q + 1 \geqslant 0$, то имеет место неравенство:

$$[I(x)]_{Rr} \leqslant \frac{R+r}{2r}\,\frac{R^{p+q+1}}{q+1}\,[F(x)]_{Rr}. \qquad (26)$$

В самом деле, пусть

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}x^k(R-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(R-x)^n$$

и

$$N = M_0 + M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots + M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots,$$

где

$$M_n = \sum_{k}^{\infty} |A_{nk}|\,\frac{n^n k^k R^{n+k}}{(n+k)^{n+k}}.$$

Интегрируя по частям, находим, что

$$x^p\int_0^x A_{nk}x^{q+k}(R-x)^n\,dx =$$

$$= A_{nk}\left[a_{nk}^{(n)}x^{p+q+k+1}(R-x)^n + a_{nk}^{(n-1)}x^{p+q+k+2}(R-x)^{n-1} + \right.$$
$$\left. + \ldots + a_{nk}^{(0)}x^{p+q+k+n+1}\right],$$

где $a_{nk}^{(n)}$, $a_{nk}^{(n-1)}$ и т. д. — положительные числа; отсюда заключаем, что максимум модуля каждого из членов правой части неравенства менее максимума модуля левой части, т. е. a fortiori менее, чем

$$|A_{nk}|\,\frac{n^n k^k R^{n+k+p+q+1}}{(q+1)\cdot(n+k)^{n+k}}.$$

Следовательно, если мы положим

$$I(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_{nk}x^k(R-x)^n$$

и

$$L_n = \sum_{k=0}^{\infty} |B_{nk}|\,\frac{n^n k^k R^{n+k}}{(n+k)^{n+k}},$$

то найдем, что

$$L_n < \frac{R^{p+q+1}}{q+1}(M_n + M_{n+1} + \ldots).$$

Поэтому

$$L_0 + L_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots + L_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots <$$

$$< \frac{R^{p+q+1}}{q+1}\left\{[M_0 + M_1 + M_2 + \ldots] + [M_1 + M_2 + \ldots]\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \right.$$
$$\left. + [M_2 + \ldots]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2 + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{R^{p+q+1}}{q+1}\left\{M_0 + M_1\left[1 + \frac{R+r}{R-r}\right] + M_2\left[1 + \frac{R+r}{R-r} + \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2\right] + \ldots\right\} <$$

$$< \frac{R^{p+q+1}}{q+1}\cdot\frac{R+r}{2r}\left\{M_0 + M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots + M_n\cdot\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots\right\}.$$

Введя теперь нижние нормы, приходим к требуемому неравенству

$$[I(x)]_{Rr} \leqslant \frac{R+r}{2r}\frac{R^{p+q+1}}{q+1}[F(x)]_{Rr}.$$

Теорема. *Пусть*

$$g(x) = x^p\int_x^R F(x)\,x^q\,dx.$$

Если целые числа p и q удовлетворяют условиям $p \geqslant 0$, $p+q+1 \geqslant 0$ и, кроме того, функция $F(x)\,x^q$ не имеет особенности в точке $x=0$ [1], *то, во-первых, при $q \neq -1$ имеет место неравенство*

$$[g(x)]_{Rr} < \lambda\frac{R+r}{R-r}\cdot\frac{R^{p+q+1}}{|q+1|}[F(x)]_{Rr}, \tag{27}$$

где λ — абсолютная постоянная, и, во-вторых, при $q=-1$ имеет *место неравенство*

$$[g(x)]_{Rr} < 4\frac{R+r}{r}R^p[F(x)]_{Rr}. \tag{27bis}$$

Я начну с рассмотрения [2] критического случая, когда $q=-1$.

Сохраняя прежние обозначения, будем иметь при $n>0$, $k \geqslant 1$:

$$x^p\int_x^R A_{nk}x^{k-1}(R-x)^n\,dx =$$

$$= A_{nk}a_{nk}^{(0)}x^pR^{k+n} - A_{nk}\left[a_{nk}^{(n)}x^{p+k}(R-x)^n + \ldots + a_{nk}^{(0)}x^{p+k+n}\right],$$

где

$$R^{k+n}a_{nk}^{(0)} = \int_0^R x^{k-1}(R-x)^n\,dx = \frac{n!\,(k-1)!}{(k+n)!}R^{k+n} =$$

$$= \lambda\frac{n^nk^k}{(k+n)^{k+n}}\sqrt{\frac{n}{k(k+n)}}R^{k+n},$$

причем коэффициент λ ограничен (меньше 4) в силу формулы Стирлинга. Следовательно, максимум модуля каждого члена правой части, как легко видеть, меньше, чем

$$8\frac{n^nk^k}{(k+n)^{k+n}}R^{k+n+p}|A_{nk}|.$$

Это и подавно верно при $n=0$, так как

$$x^p\int_x^R A_{0k}x^{k-1}\,dx = \frac{A_{0k}}{k}(R-x)\{R^{k-1}x^p + R^{k-2}x^{p+1} + \ldots + x^{p+k-1}$$

---

[1] Это условие заведомо выполняется для интегралов, которые встречаютс при решении уравнения Пуассона, так как в формулах (16) и (16^{bis}) (см. да лее стр. 62) функции A_n и B_n всегда содержат ρ^n в качестве множител (*Ред.*).

[2] Отсюда и до конца § изложение следует статье С. Н. Бернштейна упомянутой в подстрочном примечании на стр. 31. (*Ред.*).

и сумма максимумов модулей членов правой части меньше, чем

$$|A_{0k}|R^{k+p}.$$

Поэтому, полагая

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B_{nk}x^k(R-x)^n,$$

$$L_n=\sum_{k=0}^{\infty}|B_{nk}|\frac{n^nk^kR^{n+k}}{(n+k)^{n+k}}<8R^p[M_n+M_{n+1}+\ldots],$$

найдем с помощью примененных выше рассуждений, что

$$[g(x)]_{Rr}\leqslant\frac{4(R+r)}{r}[F(x)]_{Rr}R^p. \qquad (27^{\text{bis}})$$

Неравенство (27), для случая $q\neq-1$, доказывается иным путем, а именно с помощью оценки суммы максимумов модулей членов правой части формулы

$$x^p\int_x^R A_{nk}x^{k+q}(R-x)^n\,dx=$$

$$=A_{nk}(R-x)^{n+1}[\beta_0x^{k+q+p}+\beta_1x^{k+q+p-1}+\ldots+\beta_{k+q}x^p].$$

При этом случай $q\geqslant 0$ можно не рассматривать, так как при этом предположении неравенство (27) является следствием неравенства (26). Это обстоятельство позволяет ограничиться предположением, что $p+q+1=0$, так как случай $p+q+1>0$ на основании (25) сводится к этому умножением интеграла

$$x^{-q-1}\int_x^R A_{nk}x^{k+q}(R-x)^n\,dx$$

на x^{p+q+1}. Таким образом, в дальнейшем можно принять, что

$$p=-q-1\geqslant 1,\ k+q\geqslant 0.$$

Простое вычисление дает

$$\beta_0=\frac{1}{k+q+n+1},\quad \beta_1=\frac{R(k+q)}{(k+q+n+1)(k+q+n)},\ \ldots,$$

$$\beta_{k+q}=\frac{R^{k+q}(k+q)!}{(k+q+n+1)\ldots(n+1)}.$$

Поэтому сумма максимумов модулей членов правой части равна

$$|A_{nk}|R^{n+k}(n+1)^{n+1}\left[\frac{(k-1)^{k-1}}{(k+n)^{k+n}}\frac{1}{k+q+n+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{(k-2)^{k-2}}{(k+n-1)^{k+n-1}}\frac{k+q}{(k+q+n+1)(k+q+n)}+\ldots\right]=L_{nk}.$$

Обозначая через

$$M_{nk}=|A_{nk}|\frac{n^nk^k}{(n+k)^{n+k}}R^{n+k}$$

максимум модуля члена $F(x)$, которому отвечают все члены правой части, и обозначая через $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ограниченные множители (не зависящие от R, n, k, q, A_{nk}), мы, очевидно, должны доказать, что

$$L_{nk} < \frac{\lambda M_{nk}}{|q+1|}, \tag{a}$$

так как отсюда будет непосредственно следовать, что

$$L_{n+1} < \frac{\lambda M_n}{|q+1|},$$

и значит

$$[g(x)]_{Rr} < \frac{\lambda}{|q+1|} \frac{R+r}{R-r} [F(x)]_{Rr}. \tag{27}$$

Неравенство (a) при $n=0$ проверяется непосредственно, так как

$$M_{0k} = |A_{0k}| R^k$$

и, следовательно,

$$L_{0k} = |A_{0k}| \frac{R^k}{k+q+1} \left\{ \frac{(k-1)^{k-1}}{k^k} + \frac{(k-2)^{k-2}}{(k-1)^{k-1}} + \ldots + \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}} \right\} <$$

$$< |A_{0k}| \frac{R^k}{k+q+1} \left\{ \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \ldots + \frac{1}{p+1} \right\} <$$

$$< |A_{0k}| \frac{R^k}{p+1} < \frac{M_{0k}}{|q+1|}.$$

Равным образом неравенство (a) непосредственно проверяется при $k+q=0$, так как в этом случае $k=p+1$, а

$$M_{n,\,p+1} = |A_{n,\,p+1}| \frac{(p+1)^{p+1} n^n}{(n+p+1)^{n+p+1}} R^{n+p+1}$$

и

$$L_{n,\,p+1} = |A_{n,\,p+1}| \frac{p^p (n+1)^n}{(n+p+1)^{n+p+1}} R^{n+p+1},$$

так что

$$L_{n,\,p+1} \leqslant \frac{1}{p+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n M_{n,\,p+1} < \frac{e}{|q+1|} M_{n,\,p+1}.$$

Таким образом, можно принять, что

$$p = -q-1 \geqslant 1, \quad k+q > 0, \quad n > 0. \tag{b}$$

Представим L_{nk} в виде

$$L_{nk} = \lambda_1 M_{nk} \frac{n}{k(k+q+n+1)} \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \frac{(k-2)^{k-2} (k+n)^{k+n}}{(k-1)^{k-1} (k+n-1)^{k+n-1}} \frac{k+q}{k+q+n} + \ldots \right].$$

С помощью формулы Стирлинга я преобразую каждый член выражения, заключенного в квадратные скобки (с точностью до ограниченного множителя), в

$$I_h = \sqrt{\frac{(k+n)(k-1)}{(k+n-h)(k-h-1)}}\,\frac{(k+n-1)\ldots(k+n-h)}{(k-1)\ldots(k-h)}\,\cdot$$
$$\cdot\,\frac{(k+q)\ldots(k+q-h+1)}{(k+n+q)\ldots(k+n+q-h+1)},$$

так что

$$L_{nk} = \lambda_2 M_{nk}\,\frac{n}{k(k+q+n+1)}\left[1+\sum_{h=1}^{k+q} I_h\right]. \qquad (c)$$

Чтобы получить неравенство (*a*), рассмотрим два единственно возможных случая:

$$\text{(A)}\quad k-1 < \frac{1}{2}n\left(p-\frac{5}{6}\right),$$

$$\text{(B)}\quad k-1 \geqslant \frac{1}{2}n\left(p-\frac{5}{6}\right),$$

(A). Имеем

$$\frac{I_h}{I_{h-1}} = \frac{k+q-h+1}{k+q+n-h+1}\,\frac{k+n-h}{k-h}\sqrt{\frac{(k+n-h+1)(k-h)}{(k+n-h)(k-h-1)}}$$

или, полагая $k-h-1=s$,

$$\frac{I_h}{I_{h-1}} = \frac{s+q+2}{s+q+n+2}\sqrt{\frac{(s+n+2)(s+n+1)}{(s+1)s}} =$$
$$= \frac{1-\dfrac{p}{s+1}}{1-\dfrac{p}{s+n+1}}\sqrt{\frac{1+\dfrac{1}{s+n+1}}{1-\dfrac{1}{s+1}}},$$

так как $q+1=-p$. Кроме того, $s \geqslant p \geqslant 1$, так что $\frac{1}{s+1} \leqslant \frac{1}{2}$. Следовательно, замечая, что при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} \leqslant \frac{1}{1-\frac{x}{2}},\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} \leqslant 1+\frac{5}{6}x,$$

получаем неравенство

$$\frac{I_h}{I_{h-1}} < \frac{\left(1-\dfrac{p}{s+1}\right)\left(1+\dfrac{5}{6}\,\dfrac{1}{s+1}\right)}{\left(1-\dfrac{p}{s+n+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{s+n+1}\right)} < \frac{1-\dfrac{p-\frac{5}{6}}{s+1}}{1-\dfrac{p+\frac{1}{2}}{s+n+1}}.$$

Но легко проверить, что последнее отношение увеличится, если $s+1$ заменить на $k-1$, так как в силу (A) и (*b*)

$$p+1 \leqslant s+1 \leqslant k-1 < \frac{1}{2}n\left(p-\frac{5}{6}\right),$$

а функция

$$\varphi(x)=\frac{1-\dfrac{p-\dfrac{5}{6}}{x}}{1-\dfrac{p+\dfrac{1}{2}}{x+n}}$$

при $p+1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}n\left(p-\frac{5}{6}\right)$ монотонно возрастает[1]. Таким образом,

$$\frac{I_h}{I_{h-1}}<\frac{1-\dfrac{p-\dfrac{5}{6}}{k-1}}{1-\dfrac{p+\dfrac{1}{2}}{k+n-1}}=\tau, \tag{д}$$

причем $0<\tau<1$.

Замечая, что неравенство (д) остается в силе и при $h=1$, если положить $I_0=1$, находим, что

$$I_h<\tau^h\quad(h=1,\ 2,\ \ldots\ k+q).$$

Поэтому

$$L_{nk}\leqslant\lambda_2M_{nk}\frac{n}{k(k+q+n+1)}\cdot\frac{1}{1-\tau}.$$

---

[1] В монотонном возрастании функции $\varphi(x)$ можно убедиться следующим образом: $\varphi'(x)$ имеет тот же знак, что и функция

$$\psi(x)=-\frac{4}{3}x^2+2n\left(p-\frac{5}{6}\right)x+n\left(p-\frac{5}{6}\right)\left(n-p-\frac{1}{2}\right).$$

Так как коэффициент при x^2 отрицателен, то нужно лишь показать, что

$$\psi(p+1)>0,\ \psi\left(\frac{n}{2}\left(p-\frac{5}{6}\right)\right)>0.$$

Но

$$n\left(p-\frac{5}{6}\right)>2(p+1).$$

Поэтому

$$\psi(p+1)>2(p+1)\left(\frac{1}{3}p+n+\frac{5}{6}\right)>0.$$

Далее

$$\psi\left(\frac{n}{2}\left(p-\frac{5}{6}\right)\right)=n\left(p-\frac{5}{6}\right)\left[\frac{2n}{3}\left(p-\frac{5}{6}\right)+n-p-\frac{1}{2}\right]>$$

$$>n\left(p-\frac{5}{6}\right)\left[\frac{4}{3}(p+1)+n-p-\frac{1}{2}\right]=$$

$$=n\left(p-\frac{5}{6}\right)\left(n+\frac{1}{3}p+\frac{5}{6}\right)>0.$$

(Ред.)

$$\frac{1}{1-\tau}\cdot\frac{(k-1)\left(k+n-p-\frac{3}{2}\right)}{n\left(p-\frac{5}{6}\right)-\frac{4}{3}(k-1)}<3\,\frac{(k-1)\left(k+n-p-\frac{3}{2}\right)}{n\left(p-\frac{5}{6}\right)},$$

поэтому

$$L_{nk}<\frac{3\lambda_2}{p-\frac{5}{6}}\,M_{nk}<\frac{\lambda M_{nk}}{|q+1|}.$$

(B). В этом случае представим общий член I_h в виде

$$I_h=\prod_{s+1=k-h}^{s+1=k-1}\frac{1-\frac{p}{s+1}}{1-\frac{p}{s+n+1}}\sqrt{\frac{(k+n)(k-1)}{(k+n-h)(k-h-1)}}=$$

$$=P_h\sqrt{\frac{(k+n)(k-1)}{(k+n-h)(k-h-1)}}.$$

Но

$$\log\frac{1-\frac{p}{s+1}}{1-\frac{p}{s+n+1}}=p\left[\frac{1}{s+n+1}-\frac{1}{s+1}\right]+\frac{p^2}{2}\left[\frac{1}{(s+n+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^2}\right)+$$

$$+\ \ldots<p\left[\frac{1}{s+n+1}-\frac{1}{s+1}\right].$$

Следовательно,

$$\log P_h<-p\sum_{x=k-h}^{x=k-1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n}\right)<-p\int_{k-h}^{k}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n}\right)dx=$$

$$=-p\log\frac{k(k+n-h)}{(k-h)(k+n)}.$$

Отсюда для любого h

$$I_h<\left[\frac{(k-h)(k+n)}{k(k+n-h)}\right]^p\sqrt{\frac{(k+n)(k-1)}{(k+n-h)(k-h-1)}}<$$

$$<2\,\frac{(k-h)^{p-\frac{1}{2}}}{(k+n-h)^{p+\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{n}{k}\right)^p\sqrt{(k+n)(k-1)}.$$

Максимум величины

$$E_h=\frac{(k-h)^{p-\frac{1}{2}}}{(k+n-h)^{p+\frac{1}{2}}}$$

достигается при $k-h=n\left(p-\frac{1}{2}\right)$, так что

$$E_h<\frac{1}{n\left(p+\frac{1}{2}\right)}.$$

$$I_h < \frac{2(k+n)}{n\left(p+\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{2}{p-\frac{5}{6}}\right)^{p-\frac{1}{2}} < \frac{45(k+n)}{n\left(p+\frac{1}{2}\right)}.$$

Внося это значение в соотношение (c), получаем

$$L_{nk} < \frac{45\lambda_2 n(k-p)(k+n)}{k(k+q+n+1)\,n\left(p+\frac{1}{2}\right)} M_{nk} <$$

$$< \frac{45\lambda_2}{p+\frac{1}{2}} M_{nk} < \frac{\lambda}{|q+1|} M_{nk}.$$

Таким образом, формула (27) доказана во всей ее общности.

Примечание. Неравенства (26), (27), (27^{bis}) будут играть существенную роль в нашем дальнейшем исследовании, поэтому интересно выяснить, в какой мере они связаны с нормальными рядами. Легко убедиться, что, если бы вместо нормы $F(x)$ мы знали, каков максимум ее модуля на отрезке $[0, R]$, то для $I(x)$ и $g(x)$ на том же отрезке мы получили бы неравенства, подобные неравенствам (26) и (27). Однако ничего подобного неравенству (27^{bis}) при замене норм модулями не может быть дано, если $p = 0$.

Перейдем теперь к функциям двух переменных.

§ 10. Пусть ρ и θ — полярные координаты точки M, прямолинейные координаты которой x и y.

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$S_{\rho,\theta} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

где A_n и B_n нормальные ряды особого вида[2] на некотором отрезке $[0, R]$, а именно:

---

[1] Действительно,

$$\left(1+\frac{2}{p-\frac{5}{6}}\right)^{p-\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{2}{p-\frac{5}{6}}\right)^{p-\frac{5}{6}}\left(1+\frac{2}{p-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{3}} <$$

$$< e^2(1+12)^{\frac{1}{3}} < 9\cdot\frac{5}{2} = \frac{45}{2}. \qquad \textit{(Ред.)}$$

[2] Рассматривая

$$\sum a_{pq}\rho^p (R^2-\rho^2)^q \qquad (*)$$

как нормальный ряд, мы должны воспользоваться равенствами

$$(R^2-\rho^2)^q = (R-\rho)^q (R^q + \ldots + \rho^q),$$

благодаря которым каждый член

$$a_{pq}\rho^p (R^2-\rho^2)^q$$

представится в виде суммы

$$a'_{pq}\rho^{p'}(R-\rho)^q + a''_{pq}\rho^{p''}(R-\rho)^q + \ldots \qquad (**)$$

$$A_n = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_{pq}^{(n)} \rho^{2p} (R^2 - \rho^2)^q, \quad B_n = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \beta_{pq}^{(n)} \rho^{2p} (R^2 - \rho^2)^q.$$

Ясно, что ряд $S_{\rho, \theta}$ формально может быть отождествлен с рядом, содержащим лишь целые и положительные степени x, y, так как

$$\rho^n \cos n\theta = \frac{(x+iy)^n + (x-iy)^n}{2},$$

$$\rho^n \sin n\theta = \frac{(x+iy)^n - (x-iy)^n}{2i},$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Мы будем называть ряд $S_{\rho, \theta}$ *нормальным* рядом относительно переменных ρ, θ или x, y внутри круга C радиуса R с центром в 0, если ряд

$$[S_{\rho, \theta}]_{R0} = [A_0]_{R0} + \sum_{n=1}^{\infty} \{[A_n]_{R0} + [B_n]_{R0}\}$$

сходится, а сумму этого последнего ряда назовем *низшей нормой ряда* $S_{\rho, \theta}$ *на отрезке* $[0, R]$.

Если, кроме того, для некоторого r ряд

$$[S_{\rho, \theta}]_{Rr} = [A_0]_{Rr} + \sum_{n=1}^{\infty} \{[A_n]_{Rr} + [B_n]_{Rr}\}$$

также сходится, то его сумму назовем *низшей нормой* $S_{\rho, \theta}$ *внутри контура* Γ_{0Rr}, расположенного в плоскости комплексной переменной ρ.

Мы можем теперь доказать следующую важную теорему.

Этим преобразованием надлежит пользоваться и при подсчете норм.

Для многих целей и, в частности, для доказательства основной теоремы, которой посвящена настоящая работа, нужны исключительно нормальные ряды вида (*). Поэтому можно было бы для них непосредственно развить построенную выше теорию и, в частности, при определении нормы относить каждому члену

$$a_{pq} \rho^p (R^2 - \rho^2)^q$$

величину

$$|a_{pq}| R^{2q+p} \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}} q^q}{\left(\frac{p}{2}+q\right)^{\frac{p}{2}+q}}$$

вместо той, несомненно большей, к которой приводит разбиение (**). Такой путь для построения теории избрал Радо в своей статье, указанной в подстрочном примечании на стр. 31 *(Ред.)*.

Теорема[1]. *Если нормальный ряд $S_{\rho,\theta}=F(x, y)$ имеет конечную норму внутри контура Γ_{0Rr}, то он представляет аналитическую функцию внутри круга C.*

В самом деле, каждое из отношений

$$\frac{A_n}{\rho^n}, \quad \frac{B_n}{\rho^n} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

представляет на основании теоремы § 8 аналитическую функцию от ρ^2, когда ρ пробегает область Γ_{0Rr}. Поэтому для любого ρ_0 из интервала $[0, R)$ найдется такое $\delta > 0$, что при

$$-\delta \leqslant \rho^2-\rho_0^2 \leqslant \delta$$

будут иметь место абсолютно сходящиеся разложения

$$A_n=\rho^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)}(\rho^2-\rho_0^2)^k,$$

$$B_n=\rho^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)}(\rho^2-\rho_0^2)^k. \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

Полагая

$$\rho_0^2=x_0^2+y_0^2,$$

заметим, что

$$\rho^2-\rho_0^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0).$$

Следовательно, при положительном ε, удовлетворяющем неравенству

$$2\varepsilon^2+2\varepsilon\rho_0 \leqslant \delta,$$

в квадрате

$$-\varepsilon \leqslant x-x_0 \leqslant \varepsilon, \quad -\varepsilon \leqslant y-y_0 \leqslant \varepsilon$$

будут иметь место абсолютно сходящиеся разложения

$$A_n=\rho^n \sum_{p, q=0}^{\infty} a_{pq}^{(n)}(x-x_0)^p(y-y_0)^q,$$

$$B_n=\rho^n \sum_{p, q=0}^{\infty} b_{pq}^{(n)}(x-x_0)^p(y-y_0)^q.$$

Поэтому

$$A_n\cos n\theta=P_{2n}(x-x_0, y-y_0), \quad B_n\sin n\theta=P_{2n+1}(x-x_0, y-y_0)$$

являются сходящимися степенными рядами с центром (x_0, y_0). Уменьшая надлежащим образом число ε, то есть размеры квадрата, в зависимости от значения $\frac{r}{R}$, найдем, что

$$\overset{+}{P}_{2n}(\varepsilon, \varepsilon) \leqslant [A_n]_{Rr}, \quad \overset{+}{P}_{2n+1}(\varepsilon, \varepsilon) \leqslant [B_n]_{Rr}.$$

На основании этих неравенств и конечности величины

[1] Доказательство дано здесь с большими подробностями, чем в оригинале, но менее подробно, чем в мемуаре Радо. (*Ред.*).

квадрате.

Тем самым теорема доказана.

Наконец, нам остается доказать еще последнюю теорему.

Теорема. *Если $F(v_1, v_2, \dots v_m)$ — аналитическая функция, а $v_1, v_2, \dots v_m$ разлагаются в нормальные ряды внутри круга C, то имеет место неравенство:*

$$[F(v_1, v_2, \dots v_m)]_{Rr} \leqslant \overset{+}{F}([v_1]_{Rr}, \dots [v_m]_{Rr}). \tag{28}$$

Очевидно, теорема будет доказана, если мы докажем ее в двух частных случаях

$$F(v_1, v_2) = v_1 + v_2 \text{ и } F(v_1, v_2) = v_1 v_2.$$

Но из (25′) вытекает непосредственно

$$[v_1 + v_2]_{Rr} \leqslant [v_1]_{Rr} + [v_2]_{Rr}.$$

С другой стороны, пусть

$$v_1 = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \cos n\theta + B_n^{(1)} \sin n\theta,$$

$$v_2 = A_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \cos n\theta + B_n^{(2)} \sin n\theta.$$

Умножая и группируя члены (благодаря абсолютной сходимости), получаем

$$v_1 v_2 = \left[A_0^{(1)} A_0^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{(1)} A_n^{(2)} + B_n^{(1)} B_n^{(2)}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n+m=k} \left(A_n^{(1)} A_m^{(2)} - B_n^{(1)} B_m^{(2)}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n-m=k} \left(A_n^{(1)} A_m^{(2)} + A_m^{(1)} A_n^{(2)} + B_n^{(1)} B_m^{(2)} + B_m^{(1)} B_n^{(2)}\right)\right] \cos k\theta +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n+m=k} \left(A_n^{(1)} B_m^{(2)} + B_n^{(1)} A_m^{(2)}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n-m=k} \left(A_m^{(1)} B_n^{(2)} - A_n^{(1)} B_m^{(2)} + B_n^{(1)} A_m^{(2)} - B_m^{(1)} A_n^{(2)}\right)\right] \sin k\theta.$$

Отсюда вследствие неравенств (25′) и (25″) находим:

$$[v_1 v_2]_{Rr} \leqslant \left\{[A_0^{(1)}]_{Rr} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(1)}]_{Rr} + [B_n^{(1)}]_{Rr}\right\} \times$$

$$\times \left\{[A_0^{(2)}]_{Rr} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(2)}]_{Rr} + [B_n^{(2)}]_{Rr}\right\} =$$

$$= [v_1]_{Rr} [v_2]_{Rr}.$$

Теорема, таким образом, доказана.

неравенство (28) вполне заменяет неравенство (14). Следовательно, пользование новым критерием для распознавания аналитических функций тождественно пользованию критерием Гарнака, но в то время как, согласно заключению конца прошлой главы, область применения критерия Гарнака весьма ограничена, в настоящей главе установлены безусловно общие начала для распознавания аналитических функций.

В частности, рассмотрение постоянной величины, которая связана с нормальным рядом и которую мы назвали нормой, часто вполне достаточно для указанной цели; однако в иных случаях необходимо несколько видоизменить упомянутое понятие. Пусть

$$N = m_0 + m_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots + m_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots$$

норма некоторого ряда внутри определенного контура Γ_{0Rr}. Вводя новую переменную $\frac{R+r}{R-r} = y$, мы получим функцию

$$N(y) = m_0 + m_1 y + \ldots + m_n y^n + \ldots ,$$

которая является более тонким и совершенным орудием исследования, чем постоянная норма. Однако мы не будем останавливаться здесь на дальнейшем развитии теории нормальных рядов, так как и изложенного вполне достаточно для разрешения интересующих нас в настоящем сочинении вопросов.

ГЛАВА III

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

§ 11. Применим общие соображения предыдущей главы к доказательству следующей важной теоремы:

Теорема. *Если z есть решение аналитического уравнения с частными производными второго порядка*

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0, \tag{1}$$

обладающее внутри некоторой области S конечными производными первых трех порядков[1] *и удовлетворяющее в этой области неравенству*

$$4F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} - \left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}\right)^2 > 0, \tag{2}$$

то функция z аналитична в области S.

Так как для доказательства теоремы достаточно установить аналитичность решения z уравнения (1) в окрестности любой точки (x_0, y_0) области S и так как, не нарушая общности, можно принять, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, то подлежит доказательству следующее:

Пусть в окрестности точки $(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, 0, 0)$ дана аналитическая функция своих восьми аргументов $F(r, s, t, p, q, z, x, y)$ и пусть $F(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, 0, 0) = 0$. Если $z = z(x, y)$ есть трижды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) в окрестности точки $(0, 0)$, причем

$$z(0, 0) = z_0, \quad \frac{\partial z(0, 0)}{\partial x} = p_0, \quad \frac{\partial z(0, 0)}{\partial y} = q_0,$$
$$\frac{\partial^2 z(0, 0)}{\partial x^2} = r_0, \quad \frac{\partial^2 z(0, 0)}{\partial x \partial y} = s_0, \quad \frac{\partial^2 z(0, 0)}{\partial y^2} = t_0,$$

---

[1] Замечу, что, несколько изменяя вычисления, можно было бы вместо существования производных третьего порядка потребовать только, чтобы вторые производные удовлетворяли условию Липшица с показателем $\alpha > \frac{1}{2}$, так как, согласно одной доказанной мною теореме (Comptes rendus, т. 158), уже в этом случае их можно было бы разложить в абсолютно сходящиеся тригонометрические ряды. *(Автор).*

и если в точке $x=0$, $y=0$ выполняется неравенство (2), *то* $z(x, y)$ *в окрестности точки* (0, 0) *аналитична.*

Прежде всего покажем, что данное уравнение всегда можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right), \tag{29}$$

где f — аналитическая функция своих восьми аргументов в окрестности точки $(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, 0, 0)$, удовлетворяющая в этой точке условиям

$$f'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}=f'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}=f'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}=0.$$

Действительно, пусть

$$F=bx+cy+\partial(z-z_0)+e\left(\frac{\partial z}{\partial x}-p_0\right)+f\left(\frac{\partial z}{\partial y}-q_0\right)+$$
$$+g\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-r_0\right)+2h\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}-s_0\right)+i\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-t_0\right)+kx^2+lxy+\ldots$$

и

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}=g+b_1x+c_1y+\ldots,$$
$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}=2h+b_2x+c_2y+\ldots,$$
$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}=i+b_3x+c_3y+\ldots$$

Из неравенства (2) выводим

$$gi-h^2>0.$$

Кроме того, можно принять, что $g>0$.

Отсюда следует, что коэффициенты подстановки

$$x_1=\frac{-h}{\sqrt{g(ig-h^2)}}x+\sqrt{\frac{g}{ig-h^2}}y, \quad y_1=\frac{1}{\sqrt{g}}x$$

вещественны. Далее имеем, очевидно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-h}{\sqrt{g(ig-h^2)}}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial z}{\partial y_1},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{\frac{g}{ig-h^2}}\frac{\partial z}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{h^2}{g(ig-h^2)}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}-\frac{2h}{g\sqrt{ig-h^2}}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{-h}{ig-h^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\sqrt{ig-h^2}}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{g}{ig-h^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}.$$

Следовательно,

$$g\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-r_0\right)+2h\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-s_0\right)+i\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-t_0\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}-(r_1)_0-(t_1)_0$$

и

$$F=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}-f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial y_1},\ \ldots,\ x_1,\ y_1\right),$$

где f не содержит более линейных членов по

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}-(r_1)_0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial y_1}-(s_1)_0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}-(t_1)_0,$$

что мы и хотели показать.

К уравнению (29) способ последовательных приближений может быть применен следующим образом. Составим систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=f(r_0,\ s_0,\ t_0,\ p_0,\ q_0,\ z_0,\ 0,\ 0)=r_0+t_0=A_0,$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=f\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2},\ \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \frac{\partial u_0}{\partial y},\ u_0,\ x,\ y\right)-A_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (30)$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}=$$

$$=f\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x\partial y},\ \ldots,\ x,\ y\right)-f\left(\frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial x\partial y},\ \ldots,x,\ y\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Определим затем последовательно u_0, $v_1=u_1-u_0$, $v_2=u_2-u_1$ и т. д. при условии, что на некоторой окружности C с центром $(0,\ 0)$ и произвольно малым радиусом R выполняются равенства

$$u_0=u_1=\ldots=u_n=\ldots=z,$$

так что на той же окружности

$$v_1=v_2=\ldots=v_n=\ldots=0.$$

В таком случае очевидно, что если ряд

$$u=u_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \qquad (31)$$

так же, как и его производные первых двух порядков, равномерно сходится на окружности C и внутри нее, то u есть решение уравнения (29), которое на окружности C совпадает с z.

§ 12. Но прежде чем приступить к этому вычислению, нам необходимо предпринять исследование свойств функции z, вытекающих из предположения о существовании производных первых трех порядков.

Положим, что производные первых трех порядков функции z по абсолютной величине меньше M. Тогда

$$z = z_0 + p_0 x + q_0 y + \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \\ + \frac{1}{3!}(f_0 x^3 + 3 f_1 x^2 y + 3 f_2 x y^2 + f_3 y^3),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + r_0 x + s_0 y + \frac{1}{2}(\varphi_0 x^2 + 2\varphi_1 xy + \varphi_2 y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + s_0 x + t_0 y + \frac{1}{2}(\psi_0 x^2 + 2\psi_1 xy + \psi_2 y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r_0 + \chi_0 x + \chi_1 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s_0 + \theta_0 x + \theta_1 y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t_0 + \eta_0 x + \eta_1 y,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \pi_0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \pi_1, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \pi_2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \pi_3,$$

где f_i, φ_i, ψ_i, χ_i, θ_i, η_i, π_i обозначают функции от x и y, по абсолютной величине меньшие, чем M.

Полагая $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, находим далее:

$$z = z_0 + \rho(p_0\cos\theta + q_0\sin\theta) + \frac{\rho^2}{2}(r_0\cos^2\theta + \\ + 2s_0\cos\theta\sin\theta + t_0\sin^2\theta) + \rho^3\Phi_0(\rho, \theta),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + \rho(r_0\cos\theta + s_0\sin\theta) + \rho^2\Phi_1(\rho, \theta),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + \rho(s_0\cos\theta + t_0\sin\theta) + \rho^2\Phi_2(\rho, \theta),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r_0 + \rho\Phi_3(\rho, \theta), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s_0 + \rho\Phi_4(\rho, \theta),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t_0 + \rho\Phi_5(\rho, \theta),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \Phi_6(\rho, \theta), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \Phi_7(\rho, \theta), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \Phi_8(\rho, \theta),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \Phi_9(\rho, \theta),$$

где все Φ_i по абсолютной величине меньше, чем $2M$, внутри круга C' радиуса $R' < 1$, находящегося в области S. Поэтому из равенств

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} y + \frac{\partial z}{\partial y} x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} y^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} x^2 - \frac{\partial z}{\partial x} x - \frac{\partial z}{\partial y} y,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \theta^3} = -\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} y^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} xy^2 - 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} x^2 y + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} x^3 + \\ + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} xy + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(y^2 - x^2) - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} xy + \frac{\partial z}{\partial x} y - \frac{\partial z}{\partial y} x,$$

которые можно переписать в виде

$$\frac{\partial \Phi_0(\rho,\ \theta)}{\partial \theta} = -\Phi_1 \sin\theta + \Phi_2 \cos\theta,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0(\rho,\ \theta)}{\partial \theta^2} = \Phi_3 \sin^2\theta - 2\Phi_4 \sin\theta\cos\theta + \Phi_5 \cos^2\theta - \Phi_1\cos\theta - \Phi_2 \sin\theta,$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_0(\rho,\ \theta)}{\partial \theta^3} = -\Phi_6 \sin^3\theta + 3\Phi_7 \sin^2\theta\cos\theta - 3\Phi_8 \sin\theta\cos^2\theta + \Phi_9\cos^3\theta +$$
$$+ 3\Phi_3 \sin\theta\cos\theta + 3\Phi_4(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 3\Phi_5\cos\theta\sin\theta +$$
$$+ \Phi_1\sin\theta - \Phi_2\cos\theta,$$

выводим, что

$$\left|\frac{\partial \Phi_0(\rho,\ \theta)}{\partial \theta}\right| < 3M, \quad \left|\frac{\partial^2 \Phi_0(\rho,\ \theta)}{\partial \theta^2}\right| < 7M, \quad \left|\frac{\partial^3 \Phi_0(\rho,\ \theta)}{\partial \theta^3}\right| < 16M.$$

Отсюда следует, что на окружности C радиуса $R < R'$, Φ_0 разлагается в тригонометрический ряд

$$\Phi_0 = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta,$$

причем коэффициенты удовлетворяют неравенствам

$$|c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \{|c_n| + |d_n|\} < 22M < N,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\{|c_n| + |d_n|\} < 20M < N,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\{|c_n| + |d_n|\} < 42M < N.$$

Первые два из этих неравенств были выведены нами в первой главе. Правильность третьего докажем тем же способом.

В самом деле,

$$c_n = \frac{1}{n^3\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}\sin n\theta d\theta, \qquad d_n = -\frac{1}{n^3\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}\cos n\theta d\theta.$$

Но из тождества

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}d\theta\right]^2 +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}\cos n\theta d\theta\right]^2 + \left[\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}\sin n\theta d\theta\right]^2\right\}$$

вытекает, что

$$\sum_1^{\infty}\{c_n^2 n^6 + d_n^2 n^6\} < 2\cdot(16M)^2.$$

Поэтому

$$\sum_{1}^{\infty} n^2 \{|c_n| + |d_n|\} \leqslant \sqrt{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{1}^{\infty} n^6 \{|c_n| + |d_n|\}^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \sqrt{\sum_{1}^{\infty} \{c_n^2 n^6 + d_n^2 n^6\}} < 42M.$$

Таким образом, на окружности C радиуса $R < R'$ находим для z тригонометрическое разложение

$$z = z_0 + \frac{R^2}{4}(r_0 + t_0) + R^3 c_0 + (Rp_0 + R^3 c_1)\cos\theta +$$

$$+ (Rq_0 + R^3 d_1)\sin\theta + \left[R^2 \frac{r_0 - t_0}{4} + R^3 c_2\right]\cos 2\theta +$$

$$+ \left[\frac{R^2 s_0}{2} + R^3 d_2\right]\sin 2\theta + \sum_{n=3}^{\infty} R^3 \{c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta\} =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta,$$

причем

$$|\alpha_0 - z_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < 2MR + 2MR^2 + NR^3 < LR,$$

$$\left|\frac{\alpha_1}{R} - p_0\right| + \left|\frac{\beta_1}{R} - q_0\right| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{R} \{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < MR + NR^2 < LR, \quad (32)$$

$$\left|\frac{4\alpha_2}{R^2} - r_0 + t_0\right| + \left|\frac{4\beta_2}{R^2} - 2s_0\right| + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{R^2} \{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < NR < LR,$$

где L — постоянная величина, зависящая только от M.

Приступим теперь к решению первого из уравнений (30)

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = A_0 = r_0 + t_0$$

при условии, что u_0 на окружности C равно

$$z = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta.$$

Это решение, очевидно, будет дано формулой

$$u_0 = \frac{A_0}{4}(\rho^2 - R^2) + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n [\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta]. \quad (33)$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{A_0}{2}\rho\cos\theta + \frac{\alpha_1}{R} + \sum_{n=2}^{\infty} n\frac{\rho^{n-1}}{R^n}[\alpha_n\cos(n-1)\theta + \beta_n\sin(n-1)\theta],$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{A_0}{2}\rho\sin\theta + \frac{\beta_1}{R} + \sum_{n=2}^{\infty} n\frac{\rho^{n-1}}{R^n}[\beta_n\cos(n-1)\theta - \alpha_n\sin(n-1)\theta],$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{A_0}{2} + \frac{2\alpha_2}{R^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)\rho^{n-2}}{R^n}[\alpha_n\cos(n-2)\theta + \beta_n\sin(n-2)\theta],$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} = \frac{2\beta_2}{R^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)\rho^{n-2}}{R^n}[\beta_n\cos(n-2)\theta - \alpha_n\sin(n-2)\theta], \qquad (33^{\text{bis}})$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{A_0}{2} - \frac{2\alpha_2}{R^2} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)\rho^{n-2}}{R^n}[\alpha_n\cos(n-2)\theta + \beta_n\sin(n-2)\theta].$$

Применяя к формулам (33) и (33^{bis}) обозначения предыдущей главы, находим на основании неравенств (32) для низших норм рассматриваемых функций следующие неравенства, в которых r, как и во всех последующих формулах, положено равным $\frac{R}{2}$:

$$\begin{aligned}
&[u_0 - z_0]_{Rr} < \frac{15|A_0|R^2}{16} + LR < HR,\\
&\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right]_{Rr} < \frac{|A_0|R}{2} + LR < HR,\\
&\left[\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right]_{Rr} < \frac{|A_0|R}{2} + LR < HR,\\
&\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - r_0\right]_{Rr} < \left|\frac{A_0}{2} + \frac{2\alpha_2}{R^2} - r_0\right| + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)}{R^2}\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < HR,\\
&\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y} - S_0\right]_{Rr} < HR,\\
&\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right]_{Rr} < HR,
\end{aligned} \qquad (34)$$

где H постоянная величина, зависящая только от M.

§ 13. Рассматривая следующие уравнения нашей системы, мы видим, что имеем дело с уравнениями Пуассона

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(x, y). \qquad (35)$$

Положим, что F разлагается в нормальный ряд с конечной нормой. Покажем, что в таком случае и функция v, обращающаяся в нуль на окружности C, разлагается в нормальный ряд, причем норма ее и нормы ее производных первых двух порядков могут быть ограничены посредством нормы $F(x, y)$.

Итак, пусть в полярных координатах

$$F(x,\ y)=A_0(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\rho)\cos n\theta+B_n(\rho)\sin n\theta,$$

где

$$A_n=\rho^n\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}a_{pq}^{(n)}\rho^{2p}(R^2-\rho^2)^q,$$

$$B_n=\rho^n\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}b_{pq}^{(n)}\rho^{2p}(R^2-\rho^2)^q,$$

и пусть

$$[F(x,\ y)]_{Rr}=[A_0(\rho)]_{Rr}+\sum_{1}^{\infty}[A_n(\rho)]_{Rr}+[B_n(\rho)]_{Rr}<P,$$

где попрежнему $r=\frac{R}{2}$.

Мы уже видели, что полагая

$$v=C_0(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\rho)\cos n\theta+D_n(\rho)\sin n\theta,$$

будем для C_n и D_n иметь:

$$C_0(\rho)=\int_R^{\rho}\frac{d\rho}{\rho}\int_0^{\rho}\rho A_0 d\rho,$$

$$2nC_n(\rho)=\rho^n\int_R^{\rho}\frac{A_n}{\rho^{n-1}}\,d\rho-\frac{1}{\rho^n}\int_0^{\rho}A_n\rho^{n+1}d\rho+\frac{\rho^n}{R^{2n}}\int_0^{R}A_n\rho^{n+1}d\rho, \tag{16}$$

$$2nD_n(\rho)=\rho^n\int_R^{\rho}\frac{B_n}{\rho^{n-1}}\,d\rho-\frac{1}{\rho^n}\int_0^{\rho}B_n\rho^{n+1}d\rho+\frac{\rho^n}{R^{2n}}\int_0^{R}B_n\rho^{n+1}d\rho.$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{dC_0}{d\rho}=\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho}\rho A_0 d\rho,\quad \frac{d^2C_0}{d\rho^2}=A_0-\frac{1}{\rho^2}\int_0^{\rho}\rho A_0 d\rho,$$

$$2\frac{dC_n}{d\rho}=\rho^{n-1}\int_R^{\rho}\frac{A_n d\rho}{\rho^{n-1}}+\frac{1}{\rho^{n+1}}\int_0^{\rho}A_n\rho^{n+1}d\rho+\frac{\rho^{n-1}}{R^{2n}}\int_0^{R}A_n\rho^{n+1}d\rho, \tag{16$^{\text{bis}}$}$$

$$2\frac{d^2C_n}{d\rho^2}=(n-1)\rho^{n-2}\int_R^{\rho}\frac{A_n d\rho}{\rho^{n-1}}-\frac{n+1}{\rho^{n+2}}\int_0^{\rho}A_n\rho^{n+1}d\rho+$$

$$+\frac{(n-1)\rho^{n-2}}{R^{2n}}\int_0^{R}A_n\rho^{n+1}d\rho+2A_n$$

и аналогичные формулы для производных от D_n. Из этих выражений заключаем прежде всего, что C_n и D_n разлагаются в нормальные ряды вида:

$$C_n = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}^{(n)} \rho^{2p} (R^2 - \rho^2)^q,$$

$$D_n = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} d_{pq}^{(n)} \rho^{2p} (R^2 - \rho^2)^q.$$

Теперь предположим, что во второй части уравнения Пуассона фигурируют лишь члены, для которых $n > 2$. В таком случае применение неравенств (26) и (27) дает без затруднений $\left(\text{при предположении, что } r = \frac{R}{2}\right)$

$$\left[\frac{C_n}{\rho^2}\right]_{Rr} < \frac{1}{2n}\left[\frac{\lambda(R+r)}{(n-2)r} + \frac{R+r}{2(n+2)r} + \frac{1}{n+2}\right][A_n]_{Rr} < \frac{\Lambda}{n^2}[A_n]_{Rr},$$

$$\left[\frac{dC_n}{\rho d\rho}\right]_{Rr} < \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda(R+r)}{(n-2)r} + \frac{R+r}{2(n+2)r} + \frac{1}{n+2}\right][A_n]_{Rr} < \frac{\Lambda}{n}[A_n]_{Rr},$$

$$\left[\frac{d^2C_n}{d\rho^2}\right] < \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda(n-1)(R+r)}{(n-2)r} + \frac{(n+1)(R+r)}{2(n+2)r} + \frac{n+1}{n+2} + 2\right][A_n]_{Rr} <$$
$$< \Lambda [A_n]_{Rr},$$

где Λ — абсолютная постоянная, и аналогичные неравенства получаются для D_n и производных от D_n.

Следовательно, из тождеств

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial v}{\rho\partial\theta}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial v}{\rho\partial\theta}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 v}{\rho\partial\rho\partial\theta}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 v}{\rho^2\partial\theta^2}\sin^2\theta +$$
$$+ \frac{\partial v}{\rho\partial\rho}\sin^2\theta + 2\frac{\partial v}{\rho^2\partial\theta}\cos\theta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 v}{\rho\partial\rho\partial\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) -$$
$$- \frac{\partial^2 v}{\rho^2\partial\theta^2}\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial v}{\rho\partial\rho}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial v}{\rho^2\partial\theta}(\sin^2\theta - \cos^2\theta),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 v}{\rho\partial\rho\partial\theta}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 v}{\rho^2\partial\theta^2}\cos^2\theta +$$
$$+ \frac{\partial v}{\rho\partial\rho}\cos^2\theta - 2\frac{\partial v}{\rho^2\partial\theta}\sin\theta\cos\theta$$

вытекают важные неравенства

$$[v]_{Rr} < hR^2[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{Rr} < hR[F]_{Rr},$$
$$\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{Rr} < hR[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr}, \tag{36}$$
$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr},$$

где h — некоторая абсолютная постоянная.

предположении, что тригонометрическое разложение F не содержит членов, для которых $n \leqslant 2$. Особого рассмотрения требуют еще случаи, когда $n=0$, $n=1$, $n=2$. Мы можем ограничиться лишь косинусоидальными членами, ибо замена косинусов синусами равносильна повороту на 90° осей координат.

1. Пусть $F = A_0(\rho)$. В таком случае

$$v = C_0(\rho)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dC_0}{d\rho}\cos\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dC_0}{d\rho}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2C_0}{d\rho^2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \frac{dC_0}{d\rho}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) = \frac{A_0}{2} + \left(\frac{d^2C_0}{d\rho^2} - \frac{A_0}{2}\right)\cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \left(\frac{d^2C_0}{d\rho^2} - \frac{A_0}{2}\right)\sin 2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{A_0}{2} - \left(\frac{d^2C_0}{d\rho^2} - \frac{A_0}{2}\right)\cos 2\theta.$$

Мы видим, что полюсы, присутствия которых можно было бы опасаться, на самом деле отсутствуют.

Поэтому, замечая при помощи неравенств в (26) и (27^{bis}), что

$$[C_0(\rho)]_{Rr} < 9R^2[A_0]_{Rr}, \quad \left[\frac{dC_0}{d\rho}\right]_{Rr} < \frac{3}{4}R[A_0]_{Rr}, \quad \left[\frac{d^2C_0}{d\rho^2}\right]_{Rr} < \frac{7}{4}[A_0]_{Rr},$$

заключаем, что неравенства (36) остаются в силе и в этом случае.

2. Пусть $F = A_1(\rho)\cos\theta$. Тогда

$$v = C_1\cos\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dC_1}{d\rho}\cos^2\theta + \frac{C_1}{\rho}\sin^2\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dC_1}{d\rho}\cos\theta\sin\theta - \frac{C_1}{\rho}\cos\theta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2C_1}{d\rho^2}\cos^3\theta + 3\left(A_1 - \frac{d^2C_1}{d\rho^2}\right)\cos\theta\sin^2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \left(3\frac{d^2C_1}{d\rho^2} - 2A_1\right)\sin\theta\cos^2\theta + \left(A_1 - \frac{d^2C_1}{d\rho^2}\right)\sin^3\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left(3\frac{d^2C_1}{d\rho^2} - 2A_1\right)\cos\theta\sin^2\theta + \left(A_1 - \frac{d^2C_1}{d\rho^2}\right)\cos^3\theta.$$

Полюсы в данном случае отсутствуют.

Поэтому, замечая, что

$$\left[\frac{C_1}{\rho}\right]_{Rr} < (2\lambda+1)R[A_1]_{Rr}, \quad \left[\frac{dC_1}{d\rho}\right]_{Rr} < (2\lambda+1)[A_1]_{Rr},$$

$$\left[\frac{d^2C_1}{d\rho^2}\right]_{Rr} < \frac{3}{2}[A_1]_{Rr},$$

приходим опять к неравенствам (36).

[illegible] Пусть, наконец, [illegible],

$$v = C_2 \cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dC_2}{d\rho}\cos\theta\cos 2\theta + \frac{2C_2}{\rho}\sin\theta\sin 2\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dC_2}{d\rho}\sin\theta\cos 2\theta - \frac{2C_2}{\rho}\cos\theta\sin 2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2C_2}{d\rho^2}\cos 2\theta\cos^2\theta + 4\frac{dC_2}{\rho d\rho}\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta -$$

$$- \frac{4C_2}{\rho^2}\cos 2\theta\sin^2\theta + \frac{dC_2}{\rho d\rho}\cos 2\theta\sin^2\theta - 4\frac{C_2}{\rho^2}\sin 2\theta\cos\theta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{d^2C_2}{d\rho^2}\cos 2\theta\cos\theta\sin\theta + \ldots + \frac{2C_2}{\rho^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin 2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{d^2C_2}{d\rho^2}\cos 2\theta\sin^2\theta + \ldots + \frac{4C_2}{\rho^2}\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta.$$

И так как в силу неравенств (27) и (27^{bis}) имеем

$$\left[\frac{C_2}{\rho^2}\right]_{Rr} < 4\,[A_2]_{Rr}, \quad \left[\frac{dC_2}{\rho d\rho}\right]_{Rr} < 7\,[A_2]_{Rr}, \quad \left[\frac{d^2C_2}{d\rho^2}\right]_{Fr} < 8\,[A_2]_{Rr},$$

то неравенства (36) снова остаются в силе.

Мы могли бы пойти дальше, так как неравенства (36) дают ключ к доказательству нашей основной теоремы, но уместно будет более разносторонне исследовать уравнение Пуассона.

До опубликования представленных здесь результатов (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, ноябрь 1903 г.) было известно, что при помощи модуля правой части уравнения Пуассона невозможно установить верхней грани для модулей вторых производных решения v этого уравнения, которое обращается в нуль на данном контуре. В этом была существенная разница между уравнениями эллиптического типа и обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка с одной независимой переменной; здесь скрывалась истинная причина трудности решения так называемой задачи Дирихле и неприменимости к ней с большими или меньшими изменениями общих методов Коши для интегрирования дифференциальных уравнений при более простых начальных условиях.

В своем замечательном исследовании, помещенном в Journal de l'École Polytechnique в 1890 году, о котором мы говорили в первой главе, Пикар применил счастливую мысль рассматривать вместо модулей функций некоторые определенные выражения, с ними связанные. Но эти выражения (нормы Пикара) оказались так же недостаточными с точки зрения интересующей нас цели, как и простые модули, и придали к тому же значительную вероятность предположению, что вообще неравенств, аналогичных нашим неравенствам (36), не может быть дано, как бы ни видоизменять рассматриваемые вместо модулей выражения. Однако легко построить выражения, которые почти осуществляют поставленную цель. Выражения эти получаются следующим образом.

Пусть

$$F(x, y) = A_0(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\rho)\cos n\theta + B_n(\rho)\sin n\theta,$$

где $A_n(\rho)$, $B_n(\rho)$ либо аналитические функции внутри некоторой области σ плоскости комплексного переменного ρ, либо просто непрерывные функции на вещественном отрезке $[0, R]$.

Я называю *тригонометрическим модулем* функции $F(x, y)$ внутри области σ ряд

$$\{F(x, y)\}_\sigma = \{A_0\}_\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n\}_\sigma + \{B_n\}_\sigma,$$

где каждое из выражений $\{A_n\}_\sigma$, $\{B_n\}_\sigma$ означает максимум модуля функции A_n, соответственно B_n, внутри области σ. Если вместо области σ взять вещественный отрезок $[0, R]$, то под этими выражениями следует понимать максимумы модулей на этом отрезке.

Очевидно, что в случае конечности тригонометрического модуля внутри комплексной области $F(x, y)$ есть аналитическая функция относительно переменной ρ внутри этой области.

Нетрудно убедиться в том, что неравенства (36) остаются в силе, если заменить нормы тригонометрическими модулями на отрезке $[0, R]$, или внутри соответствующим образом выбранной области σ, при условии, однако, что $n \neq 2$. Действительно, достаточно предположить в уравнении $F = \cos 2\theta$, чтобы заметить, что, несмотря на конечность тригонометрического модуля F (на отрезке $[0, R]$, как и вообще при всех значениях ρ), вторые производные решения v бесконечны при $\rho = 0$. Я считаю это обстоятельство заслуживающим чрезвычайного внимания, так как оно показывает, с какой осторожностью нужно отделять переменные ρ и θ для того, чтобы не ввести критической точки $\rho = 0$, которая отсутствует, пока обе переменные соединены.

Единственное безусловно общее и логически совершенное средство избежать этого затруднения заключается в рассмотрении таких выражений, которые бы по самой своей форме исключали в случае своей сходимости возможность существования особенности в точке $\rho = 0$; это осуществляется *нормами*. Но и сохраняя тригонометрические модули, можно указать более или менее общие искусственные приемы, которые в иных случаях приводят к тем же результатам, что и применение норм. Например, весьма интересно, что на основании формул (16) и (16^{bis}) можно все-таки вывести из конечности тригонометрического модуля $\{\rho^h F(x, y)\}_{0R}$ конечность[1] тригонометрических модулей

---

[1] Тот же вывод останется в силе, если заменить отрезок $[0, R]$ ромбом, одной из диагоналей которого является $[0, R]$. Действительно, достаточно рассмотреть интегралы

$$I = x^p \int_0^x F(x)\, x^q dx$$

$$\left\{\rho^k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}_{0R}, \quad \left\{\rho^k \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}\right\}_\sigma, \quad \left\{\rho^k \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\}_\sigma,$$

если k положительное, но не целое число.

Другой прием заключается в том, что уравнение Пуассона интегрируется при иных условиях, а именно при предположении, что значения решения даны на двух концентрических окружностях, так что точка $\rho = 0$ находится вне кольца, внутри которого искомое решение не должно иметь особенностей. Но так как для применения этого приема нам понадобятся новые формулы, то мы отложим его рассмотрение на конец главы.

§ 14. Теперь же применим неравенства (36) к системе уравнений (30) и прежде всего рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x\, \partial y}, \ \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \ \frac{\partial u_0}{\partial y}, \ u_0, \ x, \ y\right) - \\ - f(r_0, \ s_0, \ t_0, \ p_0, \ q_0, \ z_0, \ 0{,}0) = F_0(x, \ y),$$

где u_0 дано формулой (33).

Полагая

$$u_0 - z_0 = a_1, \ \frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0 = b_1, \ \frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0 = c_1,$$
$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - r_0 = a_0, \ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x\, \partial y} - s_0 = b_0, \ \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0 = c_0,$$

при условии, что $q > 0$, $p + q + 1 = 0$, и интегралы

$$G = x^p \int_x^R F(x)\, x^q dx$$

при условии, что $p > 0$, $p + q + 1 = 0$ (так что $q \neq -1$), и получить для них оценки через $\{F(x)\}_\sigma$.

Ясно, что

$$\{I\}_\sigma \leqslant |x|^p \int_0^{|x|} \{F(x)\}_\sigma |x|^q |dx| = |x|^p \cdot \{F(x)\}_\sigma \cdot \int_0^{|x|} |x|^q |dx| =$$
$$= \{F(x)\}_\sigma \frac{|x|^{p+q+1}}{q+1} = \frac{1}{q+1} \{F(x)\}_\sigma.$$

Если принять, что каждый из углов ромба σ при вершинах 0, R не превосходит 120°, то нетрудно показать, что

$$\{G\}_\sigma \leqslant \frac{2}{|q+1|} \{F(x)\}_\sigma.$$

Действительно, полагая $\xi = Rex$, будем иметь:

$$\{G\}_\sigma \leqslant |x|^p \int_{|x|}^R \{F(x)\}_\sigma \xi^q \frac{d\xi}{\cos 60^\circ} =$$
$$= 2|x|^p \{F(x)\}_\sigma \frac{R^{q+1} - |x|^{q+1}}{q+1} <$$
$$< 2 \frac{1}{|q+1|} \{F(x)\}_\sigma.$$

имеем очевидно

$$F_0(x, y) = A_0 a_0 + B_0 b_0 + C_0 c_0 + D_0 b_1 + E_0 c_1 + G_0 a_1 + H_0 x + I_0 y,$$

где

$$A_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(r_0 + \theta a_0,\ s_0 + \theta b_0,\ t_0 + \theta c_0,\ p_0 + \theta b_1,\ q_0 + \theta c_1,\ z_0 + \theta a_1,\ \theta x,\ \theta y),$$

$$B_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(r_0 + \theta a_0,\ s_0 + \theta b_0,\ \ldots,\ \theta y),$$

$$C_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(r_0 + \theta a_0,\ s_0 + \theta b_0,\ \ldots,\ \theta y)$$

и т. д. $(0 < \theta < 1)$.

Кроме того, ясно, что A_0, B_0, C_0 и т. д. разлагаются в строку Тэйлора по степеням a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, x, y.

Поэтому на основании § 9 и неравенств (34) находим

$$[A_0]_{Rr} < \overset{+}{f}{}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ R,\ R),$$

$$[B_0]_{Rr} < \overset{+}{f}{}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ R,\ R),$$

$$[C_0]_{Rr} < \overset{+}{f}{}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ R,\ R)$$

и т. д., где символ $\overset{+}{f}$ относится к строке Тэйлора для окрестности точки r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, 0, 0. Таким образом, если вспомним, что при этих значениях

$$f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}} = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = 0,$$

то увидим, что, как бы мало ни было ε, можно выбрать R достаточно малым, чтобы

$$[A_0]_{Rr} < \varepsilon,\quad [B_0]_{Rr} < \varepsilon,\quad [C_0]_{Rr} < \varepsilon,$$
$$[D_0]_{Rr} < P,\quad [E_0]_{Rr} < P,\quad [G_0]_{Rr} < P,\quad [H_0]_{Rr} < P,\quad [I_0]_{Rr} < P,$$

где P есть некоторое определенное число.

Следовательно,

$$[F_0]_{Rr} < 3(P + \varepsilon) HR + 2PR = \mu.$$

И наконец, из неравенств (36) выводим, что

$$[v_1]_{Rr} < hR^2\mu,\quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_{Rr} < hR\mu,\quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_{Rr} < hR\mu,$$

$$\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right] < h\mu,\quad \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}\right]_{Rr} < h\mu,\quad \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right]_{Rr} < h\mu.$$

Обозначая через F_n правую часть $(n+2)$-го уравнения системы (30), докажем, что R можно взять достаточно малым для того, чтобы при всех n

$$[F_n]_{Rr} < \frac{\mu}{2^n}.$$

Для этого применим математическую индукцию, а именно: полагая наше неравенство доказанным для $n-1$, выведем отсюда его правильность для n, и так как для $n=0$ правильность неравенства доказана, то, следовательно, оно будет выведено для всякого n.

Итак, пусть известно, что

$$[F_0]_{Rr} < \mu, \quad [F_1]_{Rr} < \frac{\mu}{2}, \quad \ldots \quad [F_{n-1}]_{Rr} < \frac{\mu}{2^{n-1}}.$$

Покажем, что можно дать R определенное, независящее от n, достаточно малое значение, чтобы отсюда вытекало

$$[F_n]_{Rr} < \frac{\mu}{2^n}.$$

Во-первых, из неравенств (36) вытекает

$$\begin{gathered}
[v_i]_{Rr} < \frac{h\mu R^2}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial v_i}{\partial x}\right]_{Rr} < \frac{h\mu R}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial v_i}{\partial y}\right]_{Rr} < \frac{h\mu R}{2^{i-1}}, \\
\left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}\right]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x\,\partial y}\right]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2}\right]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{i-1}}
\end{gathered} \tag{37}$$

при всяком i от единицы до n включительно.

Далее имеем, очевидно:

$$F_n = \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} A_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial y} B_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} C_n + \frac{\partial v_n}{\partial x} D_n + \frac{\partial v_n}{\partial y} E_n + v_n G_n,$$

где

$$\begin{aligned}
A_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\Bigg(&\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x\,\partial y} + \theta\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial y}, \\
&\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} + \theta\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}, \ \ldots, \ u_{n-1} + \theta v_n, \ x, \ y\Bigg), \\
B_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}}\Bigg(&\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \ \ldots, \ u_{n-1} + \theta v_n, \ x, \ y\Bigg)
\end{aligned}$$

и т. д. $(0 < \theta < 1)$.

Заметим также, что A_n, B_n и т. д. разлагаются в строку Тэйлора по степеням

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - r_0, \quad \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} - r_0, \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial y} - s_0, \quad \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x\,\partial y} - s_0, \\
\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - t_0, \quad \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} - t_0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0, \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - p_0, \\
\frac{\partial u_n}{\partial y} - q_0, \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - q_0, \quad u_n - z_0, \quad u_{n-1} - z_0.
\end{gathered}$$

$$u_n = u_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n,$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x}$$

и т. д., так что, как бы велико ни было n, из неравенств (34), (37) вытекает

$$[u_n - z_0]_{Rr} < 2h\mu R^2 + HR = \nu_0,$$
$$\left[\frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0\right]_{Rr} < 2h\mu R + HR = \nu_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - t_0\right]_{Rr} < 2h\mu + HR = \nu_2,$$

где ν_i малы одновременно с R.

Следовательно,

$$[A_n]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(\nu_2, \nu_2, \nu_2, \nu_1, \nu_1, \nu_0, R, R),$$
$$[B_n]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(\nu_2, \nu_2, \nu_2, \nu_1, \nu_1, \nu_0, R, R),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[G_n]_{Rr} < \overset{+}{f}'_u(\nu_2, \nu_2, \nu_2, \nu_1, \nu_1, \nu_0, R, R),$$

где во второй части неравенств символ $\overset{+}{f}$ относится к разложению Тэйлора около r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, 0, 0.

Очевидно, поэтому, что, если R было взято достаточно малым, будем также иметь:

$$[A_n]_{Rr} < \varepsilon, \ [B_n]_{Rr} < \varepsilon, \ [C_n]_{Rr} < \varepsilon,$$
$$[D_n]_{Rr} < P, \ [E_n]_{Rr} < P, \ [G_n]_{Rr} < P,$$

а отсюда

$$[F_n]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{n-1}}(3\varepsilon + 2PR + PR^2).$$

Но ясно, что при R достаточно малом $3\varepsilon + 2PR + PR^2 < \frac{1}{2}$. Следовательно, правильность неравенства

$$[F_n]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^n}$$

доказана для всякого n.

Отсюда вытекает уже не только сходимость рядов $u_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots$ и его производных, но и сходимость рядов, образованных нормами

$$[u]_{Rr} \leq [u_0]_{Rr} + [v_1]_{Rr} + [v_2]_{Rr} + \ldots + [v_n]_{Rr} + \ldots,$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{Rr} < \left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]_{Rr} + \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_{Rr} + \ldots + \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_{Rr} + \ldots$$

. . . .

и т. д.

И, наконец, применяя теорему § 8, приходим к заключению, что решение уравнения u есть функция аналитическая.

Теперь нам остается показать, что найденное решение u есть не что иное, как то произвольное решение z, из которого мы исходили, если радиус R круга C взят достаточно малым[1].

Снова напишем уравнение, которому удовлетворяют z и u, в виде

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0,$$

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right) = 0.$$

По условию, если R достаточно мало, то u со своими производными первых двух порядков, так же, как и z, сколь угодно мало отличаются соответственно от z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0. Поэтому, полагая $\delta = z - u$, получаем с помощью вычитания уравнение[2]

$$A\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2} + D\frac{\partial\delta}{\delta x} + E\frac{\partial\delta}{\partial y} + G\delta = 0, \qquad (38)$$

которому удовлетворяет δ; при этом уравнение (38) будет эллиптического типа и для достаточно малого R будем иметь

$$AC - B^2 > k^2, \quad |D| < Q, \quad |E| < Q, \quad |G| < Q,$$

где $k > 0$ и $Q > 0$ — некоторые определенные постоянные, которые могут оставаться неизменными и при дальнейшем уменьшении R. Из первого неравенства следует, что

$$|A + C| > 2k.$$

---

[1] Доказательство единственности, которое здесь приводится, основанное на идее, принадлежащей Парафу (Annales de Toulouse, т. VI, 1892), отлично от имевшегося в первоначальном тексте; его преимущество в том, что оно не предполагает существования производных третьего порядка и, таким образом, теорема аналитичности может быть полностью доказана (согласно подстрочному примечанию в начале этой главы) при условии, что вторые производные удовлетворяют условию Липшица степени $\alpha > \frac{1}{2}$. (*Автор*).

[2] В этом уравнении

$$A = F'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \theta\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}, \ldots, u + \theta\delta, x, y\right),$$

$$2B = F'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \theta\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}, \ldots, u + \theta\delta, x, y\right),$$

где $0 < \theta < 1$, и аналогично пишутся остальные коэффициенты.

Положим

$$\delta = v[1 - \lambda(x^2 + y^2)],$$

где $\lambda = \frac{1}{2R^2}$. Тогда v будет удовлетворять уравнению

$$[1 - \lambda(x^2 + y^2)]\left(A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D\frac{\partial v}{\partial x} + E\frac{\partial v}{\partial y}\right) -$$
$$- 4\lambda\left[(Ax + By)\frac{\partial v}{\partial x} + (Bx + Cy)\frac{\partial v}{\partial y}\right] + G_1 v = 0,$$

где

$$G_1 = G[1 - \lambda(x^2 + y^2)] - 2\lambda(A + C + Dx + Ey).$$

Поэтому, полагая (без нарушения общности) $A + C > 0$, видим, что

$$G_1 < Q + 4\lambda(QR - k)$$

и, значит,

$$G_1 < 0,$$

если $R < 1$ и $R \leqslant \frac{2k}{3Q}$. Таким образом, мы получили уравнение эллиптического типа

$$A_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B_1\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + C_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_1\frac{\partial v}{\partial x} + E_1\frac{\partial v}{\partial y} + G_1 v = 0, \qquad (39)$$

в котором $A_1 > 0$, $G_1 < 0$. На окружности радиуса R, внутри которой это уравнение удовлетворяется, функция v равна нулю. Остается доказать, что $v = 0$ тождественно внутри рассматриваемого круга. Это доказывается от противного. В самом деле, если v не есть тождественный нуль, то v имеет в некоторой внутренней точке M либо положительный максимум, либо отрицательный минимум. Принимая, что имеет место первое, получим для точки M соотношения

$$G_1 v < 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leqslant 0,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = a^2 \geqslant 0.$$

Но a^2 не может быть > 0, так как в этом случае, умножая (39) на $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, мы получили бы, что

$$A_1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 + 2B_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + C_1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + C_1 a^2 + G_1 v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \qquad (39^{\text{bis}})$$

Это равенство абсурдно, так как левая часть определенно положительна. Итак, $a = 0$. Но тогда $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$, так как в противном случае можно было бы написать вместо (39^{bis}) равенство

$$A_1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 + 2B_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + C_1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + G_1 v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

которое невозможно, поскольку его левая часть строго положительна. Аналогично доказывается, что при $a=0$ в точке M имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}=0.$$

Следовательно, (39) принимает вид

$$G_1 v = 0,$$

что также абсурдно.

Таким образом, существование положительного максимума невозможно и равным образом невозможно существование отрицательного минимума. Значит $v \equiv 0$, и единственность доказана.

§ 15. Дадим второе доказательство аналитичности решения уравнения эллиптического типа, не требующее применения нормальных рядов.

Пусть z будет попрежнему произвольным решением уравнения (29). Вместо того, чтобы искать по способу последовательных приближений решение уравнения (29), которое совпадало бы с z на окружности C, обладая внутри окружности конечными производными первых двух порядков, мы будем искать решение u, которое совпадало бы с z на двух концентрических окружностях весьма малых радиусов.

Обозначим через R и R_1 ($R_1 < R$) соответственно радиусы рассматриваемых окружностей. Тогда, на основании вычислений, сделанных в начале главы, увидим, что на окружности C

$$\begin{aligned} z = z_0 &+ \frac{R^2}{4}(r_0 + t_0) + R^3 c_0 + (R p_0 + R^3 c_1)\cos\theta + \\ &+ (R q_0 + R^3 d_1)\sin\theta + \left[R^2 \frac{r_0 - t_0}{4} + R^3 c_2\right]\cos 2\theta + \\ &+ \left[\frac{R^2 s_0}{2} + R^3 d_2\right]\sin 2\theta + \sum_{n=3}^{\infty} R^3 \left[c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta\right] = \\ &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta \end{aligned}$$

и на окружности C_1

$$\begin{aligned} z = z_0 &+ \frac{R_1^2}{4}(r_0 + t_0) + R_1^3 c_0 + (R_1 p_0 + R_1^3 c_1)\cos\theta + \\ &+ (R_1 q_0 + R_1^3 d_1)\sin\theta + \left[R_1^2 \frac{r_0 - t_0}{4} + R_1^3 c_2\right]\cos 2\theta + \\ &+ \left[\frac{R_1^2 s_0}{2} + R_1^3 d_2\right]\sin 2\theta + \sum_{n=3}^{\infty} R_1^3 \left[c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta\right] = \\ &= \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n \cos n\theta + \beta'_n \sin n\theta. \end{aligned}$$

При этом нужно иметь в виду, что коэффициенты c_n, d_n определяются разложением функции $\Phi_0(\rho, \theta)$ (см. стр. 59) и поэтому являются непрерывными функциями от ρ в интервале $0 \leqslant \rho \leqslant R' (< 1)$. В первой из написанных здесь формул для z коэффициенты c_n, d_n вычисляются при $\rho = R < R'$, а во второй — при $\rho = R_1 < R$. Можно принять, и это будет сделано ниже, что $R_1 = \frac{1}{2} R$. Заметим, что в силу этих формул

$$\alpha_0' - \alpha_0 + \frac{A_0}{4}(R^2 - R_1^2) = R^3 C,$$

$$\alpha_1 - 2\alpha_1' = R^3 K, \qquad \beta_1 - 2\beta_1' = R^3 K_1, \tag{a}$$

$$\alpha_2 - 4\alpha_2' = R^3 m, \qquad \beta_2 - 4\beta_2' = R^3 m_1,$$

где C, K, K_1, m, m_1 ограничены (при данном M), а $A_0 = r_0 + t_0$.

Заметим далее, что наряду с соотношениями (32) будут иметь место неравенства

$$|\alpha_0' - z_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \{|\alpha_n'| + |\beta_n'|\} < LR,$$

$$\left|\frac{\alpha_1'}{R_1} - p_0\right| + \left|\frac{\beta_1'}{R_1} - q_0\right| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{R_1}\{|\alpha_n'| + |\beta_n'|\} < LR, \tag{32bis}$$

$$\left|\frac{4\alpha_2'}{R_1^2} - r_0 + t_0\right| + \left|\frac{4\beta_2'}{R_1^2} - 2s_0\right| + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{R_1^2}\{|\alpha_n'| + |\beta_n'|\} < LR,$$

где L — постоянная, зависящая лишь от M.

Решение u_0 первого из уравнений (30)

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = r_0 + t_0 = A_0,$$

которое на окружностях C и C_1 принимает указанные значения, равно

$$u_0 = \frac{A_0}{4}(\rho^2 - R^2) + \alpha_0 + \left[\alpha_0' - \alpha_0 + \frac{A_0}{4}(R^2 - R_1^2)\right] \frac{\ln \frac{\rho}{R}}{\ln \frac{R_1}{R}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n}} \left\{\frac{\rho^n}{R^n}\left[\left(\alpha_n - \alpha_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos n\theta + \left(\beta_n - \beta_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin n\theta\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{R_1^n}{\rho^n}\left[\left(\alpha_n' - \alpha_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos n\theta + \left(\beta_n' - \beta_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin n\theta\right]\right\},$$

а его производная по x равна

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \left\{\frac{A_0 \rho}{2} + \left[\alpha_0' - \alpha_0 + \frac{A_0}{4}(R^2 - R_1^2)\right]\frac{1}{\rho \ln \frac{R_1}{R}}\right\} \cos\theta +$$

$$+ \frac{1}{1 - \frac{R_1^2}{R^2}} \frac{1}{R}\left(\alpha_1 - \alpha_1' \frac{R_1}{R}\right) - \frac{1}{1 - \frac{R_1^2}{R^2}} \frac{R_1}{\rho^2}\left[\left(\alpha_1' - \alpha_1 \frac{R_1}{R}\right)\cos 2\theta +\right.$$

$$\left. + \left(\beta_1' - \beta_1 \frac{R_1}{R}\right)\sin 2\theta\right] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n}} \left\{\frac{n\rho^{n-1}}{R^n}\left[\left(\alpha_n - \alpha_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos(n-1)\theta +\right.\right.$$

$$\left. + \left(\beta_n - \beta_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin(n-1)\theta\right] - \frac{nR_1^n}{\rho^{n+1}}\left[\left(\alpha_n' - \alpha_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos(n-1)\theta +\right.$$

$$\left.\left. + \left(\beta_n' - \beta_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin(n-1)\theta\right]\right\}.$$

Аналогично выражается производная по y, а также производные второго порядка.

На основании неравенств (a), (32) и (32^{bis}) нетрудно убедиться в том, что

$$\{u_0 - z_0\}_\sigma < HR,$$

$$\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right\}_\sigma < HR, \qquad \left\{\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right\}_\sigma < HR, \qquad (34^{\text{bis}})$$

$$\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - r^0\right\}_\sigma < HR, \qquad \left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - s_0\right\}_\sigma < HR, \quad \left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right\}_\sigma < HR,$$

где H есть некоторая постоянная, зависящая лишь от M, а левые части представляют тригонометрические модули внутри ромба σ, построенного на отрезке R_1R, как на диагонали, причем углы ромба при вершинах R_1, R мы предположим равными 120° $\left(\text{напомним, что } R_1 = \frac{1}{2}R\right)$. Неравенства ($34^{\text{bis}}$) вполне равнозначны неравенствам (34).

Докажем, например, второе из неравенств (34^{bis}). Пользуясь выражением для $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ и тем, что R_1 — минимальный, а R — максимальный модуль ρ, находим

$$\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|}{2}R + \left|\alpha_0' - \alpha_0 + \frac{A_0}{4}(R^2 - R_1^2)\right| \frac{1}{R_1 \ln \frac{R}{R_1}} +$$

$$+ \frac{1}{3R}|\alpha_1 - 2\alpha_1'| + \frac{4}{3 \cdot 2 \cdot R_1}\{|2\alpha_1' - \alpha_1| + |2\beta_1' - \beta_1|\} +$$

$$+ \left|\frac{\alpha_1}{R} - p_0\right| + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{R}\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} + 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{R}\{|\alpha_n'| + |\beta_n'|\}.$$

Отсюда, в силу неравенств (a), (32) и (32^{bis}) и получается требуемое неравенство.

Нам остается вывести еще неравенства, заменяющие неравенства (36). Для этого вернемся к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=F(x, y) \tag{35}$$

и укажем формулы, аналогичные формулам (16), которыми определяются коэффициенты тригонометрического разложения решения, обращающегося в нуль на окружностях C и C_1.

Пусть

$$F(x, y)=A_0(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\rho)\cos n\theta+B_n(\rho)\sin n\theta,$$

$$v(x, y)=C_0(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty} C_n(\rho)\cos n\theta+D_n(\rho)\sin n\theta.$$

Легко убедиться в том, что коэффициенты $C_n(\rho)$, $D_n(\rho)$, которые должны обращаться в нуль при $\rho=R$ и $\rho=R_1$, даются при $n\neq 0$ формулами

$$2n(R^{2n}-R_1^{2n})C_n=\left(\rho^n-\frac{R_1^{2n}}{\rho^n}\right)\int_R^\rho A_n\left(\frac{R^{2n}}{\rho^{n-1}}-\rho^{n+1}\right)d\rho+$$

$$+\left(\rho^n-\frac{R^{2n}}{\rho^n}\right)\int_\rho^{R_1} A_n\left(\frac{R_1^{2n}}{\rho^{n-1}}-\rho^{n+1}\right)d\rho, \tag{40}$$

$$2n(R^{2n}-R_1^{2n})D_n=\left(\rho^n-\frac{R_1^{2n}}{\rho^n}\right)\int_R^\rho B_n\left(\frac{R^{2n}}{\rho^{n-1}}-\rho^{n+1}\right)d\rho+$$

$$+\left(\rho^n-\frac{R^{2n}}{\rho^n}\right)\int_\rho^{R_1} B_n\left(\frac{R_1^{2n}}{\rho^{n-1}}-\rho^{n+1}\right)d\rho,$$

а при $n=0$

$$C_0=\int_R^\rho\frac{d\rho}{\rho}\int_{R_1}^\rho\rho A_0 d\rho+\frac{\ln\frac{\rho}{R}}{\ln\frac{R_1}{R}}\int_{R_1}^R\frac{d\rho}{\rho}\int_{R_1}^\rho\rho A_0 d\rho.$$

Возьмем производные

$$2(R^{2n}-R_1^{2n})\frac{dC_n}{d\rho}=\left(\rho^{n-1}+\frac{R_1^{2n}}{\rho^{n+1}}\right)\int_R^\rho A_n\left(\frac{R^{2n}}{\rho^{n-1}}-\rho^{n+1}\right)d\rho+$$

$$+\left(\rho^{n-1}+\frac{R^{2n}}{\rho^{n+1}}\right)\int_\rho^{R_1} A_n\left(\frac{R_1^{2n}}{\rho^{n-1}}-\rho^{n+1}\right)d\rho, \tag{40bis}$$

$$2\left(R^{2n}-R_1^{2n}\right)\frac{d^2C_n}{d\rho^2}=\left[(n-1)\rho^{n-2}-(n+1)\frac{R_1^{2n}}{\rho^{n+2}}\right]\int\limits_R^{\rho}A_n\left(\frac{R^{2n}}{\rho^{n-1}}-\right.$$

$$\left.-\rho^{n+1}\right)d\rho+\left[(n-1)\rho^{n-2}-(n+1)\frac{R^{2n}}{\rho^{n+2}}\right]\int\limits_{\rho}^{R_1}A_n\left(\frac{R_1^{2n}}{\rho^{n-1}}-\rho^{n+1}\right)d\rho+$$

$$+2\left(R^{2n}-R_1^{2n}\right)A_n,$$

$$\frac{dC_0}{d\rho}=\frac{1}{\rho}\int\limits_{R_1}^{\rho}\rho A_0d\rho+\frac{1}{\rho\ln\frac{R_1}{R}}\int\limits_{R_1}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho}\int\limits_{R_1}^{R}\rho A_0d\rho,$$

$$\frac{d^2C_0}{d\rho^2}=A_0-\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{R_1}^{\rho}\rho A_0d\rho-\frac{1}{\rho^2\ln\frac{R_1}{R}}\int\limits_{R_1}^{R}\frac{d\rho}{\rho}\int\limits_{R_1}^{\rho}\rho A_0d\rho.$$

Для получения нужных оценок нам понадобится ряд неравенств, в которых σ означает ромб в комплексной ρ-плоскости с диагональю R_1R и углом при вершинах R_1, R, не превосходящим 120°. Вывод из этих неравенств, аналогичный указанному на стр. 66 в подстрочном примечании, не представляет труда.

Вот эти неравенства:

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\left\{\rho^p\int\limits_{\rho}^{R}F(\rho)\,\rho^q d\rho\right\}_\sigma<\dfrac{2R^{p+q+1}}{|q+1|}\{F(\rho)\}_\sigma\\[2ex] \left\{\rho^p\int\limits_{\rho}^{R_1}F(\rho)\,\rho^q d\rho\right\}_\sigma<\dfrac{2R^{p+q+1}}{|q+1|}\{F(\rho)\}_\sigma\end{cases}\qquad(p+q+1\geqslant 0,\ q\neq-1),$$

$$(\mathrm{I^{bis}})\begin{cases}\left\{\rho^p\int\limits_{\rho}^{R}\dfrac{F(\rho)}{\rho}d\rho\right\}_\sigma<\dfrac{R^{p+1}}{R_1}\{F(\rho)\}_\sigma\\[2ex] \left\{\rho^p\int\limits_{\rho}^{R_1}\dfrac{F(\rho)}{\rho}d\rho\right\}_\sigma<\dfrac{R^{p+1}}{R_1}\{F(\rho)\}_\sigma\end{cases}\qquad(p\geqslant 0),$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\left\{\rho^p\int\limits_{\rho}^{R}F(\rho)\,\rho^q d\rho\right\}_\sigma<\dfrac{2R_1^{p+q+1}}{|q+1|}\{F(\rho)\}_\sigma\\[2ex] \left\{\rho^p\int\limits_{\rho}^{R_1}F(\rho)\,\rho^q d\rho\right\}_\sigma<\dfrac{2R_1^{p+q+1}}{|q+1|}\{F(\rho)\}_\sigma\end{cases}\qquad(p+q+1<0,\ q\neq-1),$$

$$(\mathrm{II}^{\mathrm{bis}})\begin{cases}\left\{\rho^p\int\limits_\rho^R\frac{F(\rho)}{\rho}\,d\rho\right\}_\sigma < R_1^{p-1}R\,\{F(\rho)\}_\sigma\\ \left\{\rho^p\int\limits_\rho^{R_1}\frac{F(\rho)}{\rho}\,d\rho\right\}_\sigma < R^{p-1}R\,\{F(\rho)\}_\sigma\end{cases}\qquad (p<0).$$ [1]

Обратимся теперь к равенствам (40). В силу первого из них

$$C_n=\frac{1}{2n\,(R^{2n}-R_1^{2n})}\left[\rho^n\int\limits_R^\rho\frac{A_n(R^{2n}-\rho^{2n})}{\rho^{n-1}}\,d\rho+\frac{R_1^{2n}}{\rho^n}\int\limits_R^\rho A_n\rho^{n+1}d\rho\right]-$$

$$-\frac{R_1^{2n}R^{2n}}{2n\,(R^{2n}-R_1^{2n})}\frac{1}{\rho^n}\int\limits_R^\rho\frac{A_n}{\rho^{n-1}}\,d\rho-\frac{R^{2n}R_1^{2n}}{2n\,(R^{2n}-R_1^{2n})}\frac{1}{\rho^n}\int\limits_\rho^{R_1}\frac{A_n}{\rho^{n-1}}\,d\rho+$$

$$+\frac{1}{2n\,(R^{2n}-R_1^{2n})}\left[\rho^n\int\limits_\rho^{R_1}\frac{A_nR_1^{2n}}{\rho^{n-1}}\,d\rho+\frac{R^{2n}-\rho^{2n}}{\rho^n}\int\limits_\rho^{R_1}A_n\rho^{n+1}d\rho\right].$$

Обозначим четыре последовательных слагаемых коэффициента C_n через α_n, β_n, γ_n, δ_n и применим к ним неравенства (I) и (II), помня, что $R_1=\frac{1}{2}R$.

При $n\geqslant 3$ получим

$$\{\alpha_n\}_\sigma<\frac{6R^{2n}R^2}{2n\,(R^{2n}-R_1^{2n})\,(n-2)}\{A_n\}_\sigma<\frac{10R^2}{3n\,(n-2)}\{A_n\}_\sigma,$$

$$\{\beta_n\}_\sigma<\frac{2R^{2n}R_1^2}{2n\,(R^{2n}-R_1^{2n})\,(n-2)}\{A_n\}_\sigma<\frac{R^2}{3n\,(n-2)}\{A_n\}_\sigma,$$

---

[1] Докажем, например, первые из неравенств ($\mathrm{I}^{\mathrm{bis}}$) и ($\mathrm{II}^{\mathrm{bis}}$). Для этого заметим, что

$$\left|\rho^p\int\limits_\rho^R\frac{F(\rho)}{\rho}\,d\rho\right|\leqslant|\rho^p|\,\{F(\rho)\}_\sigma\cdot 2\int\limits_{|\rho|}^R\frac{dx}{x}=$$

$$=2\,|\rho|^p\,\{F(\rho)\}_\sigma\cdot\ln\frac{R}{|\rho|}\leqslant 2\,|\rho|^p\,\{F(\rho)\}_\sigma\cdot\ln\frac{R}{R_1}.$$

А так как

$$\ln\frac{R}{R_1}<\frac{1}{2}\frac{R}{R_1},$$

то при $p\geqslant 0$

$$\left|\rho^p\int\limits_\rho^R\frac{F(\rho)}{\rho}\,d\rho\right|<\frac{R^{p+1}}{R_1}\{F(\rho)\}_\sigma,$$

а при $p<0$

$$\left|\rho^p\int\limits_\rho^R\frac{F(\rho)}{\rho}\,d\rho\right|<R_1^{p-1}R\,\{F(\rho)\}_\sigma.$$

$$\{\gamma_n\}_\sigma < \frac{2R^{2n}R_1^2}{2n(R^{2n}-R_1^{2n})(n-2)}\{A_n\}_\sigma < \frac{R^2}{3n(n-2)}\{A_n\}_\sigma,$$

$$\{\delta_n\}_\sigma < \frac{6R^{2n}R^2}{2n(R^{2n}-R_1^{2n})(n-2)}\{A_n\}_\sigma < \frac{10R^2}{3n(n-2)}\{A_n\}_\sigma$$

и, следовательно,

$$\{C_n\}_\sigma < \frac{22R^2}{n^2}\{A_n\}_\sigma.$$

При $n=1$ мы получим те же неравенства, заменяя только $n-2$ на $2-n=1$. Тогда

$$\{C_1\}_\sigma < 22R^2\{A_1\}_\sigma.$$

Пусть, наконец, $n=2$. Применяя, как неравенства (I), (II), так и неравенства ($\mathrm{I}^{\mathrm{bis}}$), ($\mathrm{II}^{\mathrm{bis}}$), мы получаем

$$\{\alpha_2\}_\sigma < 2R^2\{A_2\}_\sigma,$$

$$\{\beta_2\}_\sigma < \frac{4}{15}R^2\{A_2\}_\sigma,$$

$$\{\gamma_2\}_\sigma < \frac{4}{15}R^2\{A_2\}_\sigma,$$

$$\{\delta_2\}_\sigma < \frac{3}{2}R^2\{A_2\}_\sigma,$$

откуда

$$\{C_2\}_\sigma < \frac{22R^2}{4}\{A_2\}_\sigma.$$

Применяя неравенства (I) и ($\mathrm{I}^{\mathrm{bis}}$) к C_0, мы получаем

$$\{C_0\}_\sigma < 4R^2\{A_0\}_\sigma.$$

Поступая аналогично с D_n, находим, что

$$\begin{gathered}\{C_n\}_\sigma < \frac{22R^2}{n^2}\{A_n\}_\sigma,\ \{D_n\}_\sigma < \frac{22R^2}{n^2}\{B_n\}_\sigma,\\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)\\ \{C_0\}_\sigma < 4R^2\{A_0\}_\sigma.\end{gathered} \tag{41}$$

Из неравенств (41) мы заключаем, что

$$\begin{gathered}\{v\}_\sigma < 22R^2\{F(x,\ y)\}_\sigma,\\ \left\{\frac{\partial v}{\partial\theta}\right\}_\sigma < 22R^2\{F(x,\ y)\}_\sigma,\\ \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right\}_\sigma < 22R^2\{F(x,\ y)\}_\sigma.\end{gathered} \tag{α}$$

Аналогичным образом, в силу равенств (40^{bis}), мы получим

$$\left\{\frac{dC_n}{d\rho}\right\}_\sigma < \frac{\lambda R}{n+1}\{A_n\}_\sigma,\quad \left\{\frac{d^2C_n}{d\rho^2}\right\}_\sigma < \lambda\{A_n\}_\sigma \qquad (n \geqslant 0),$$

где λ есть некоторая фиксированная постоянная, а также соответствующие неравенства для D_n. Отсюда следует, что

$$\left\{\frac{\partial v}{\partial \rho}\right\}_\sigma < \lambda R\{F(x, y)\}_\sigma, \quad \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \theta}\right\}_\sigma < \lambda R\{F(x, y)\}_\sigma,$$

$$\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}\right\}_\sigma < \lambda\{F(x, y)\}_\sigma. \tag{β}$$

Выражая $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ через частные производные по ρ и θ, мы получим в силу неравенств (α) и (β) окончательно

$$\begin{gathered}
\{v\}_\sigma < hR^2\{F(x, y)\}_\sigma, \\
\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}_\sigma \leqslant \left\{\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\theta\right\}_\sigma + \left\{\frac{\partial v}{\rho \partial \theta}\sin\theta\right\}_\sigma < \\
< \left\{\frac{\partial v}{\partial \rho}\right\}_\sigma + \frac{2}{R}\left\{\frac{\partial v}{\partial \theta}\right\}_\sigma < hR\}F(x, y)\}_\sigma, \\
\left\{\frac{\partial v}{\partial y}\right\}_\sigma < hR\{F(x, y)\}_\sigma, \\
\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}_\sigma < h\{F(x, y)\}_\sigma, \quad \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right\}_\sigma < h\{F(x, y)\}_\sigma, \\
\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\}_\sigma < h\{F(x, y)\}_\sigma,
\end{gathered} \tag{42}$$

где h — некоторая определенная постоянная.

Неравенства (42) могут вполне заменить неравенства (36) при применении способа последовательных приближений, благодаря чему нет надобности воспроизводить еще раз сделанное выше рассуждение. Мы получим, таким образом, решение u данного уравнения, имеющее конечный тригонометрический модуль внутри контура σ. Отсюда ясно, что функция u, а также все ее производные первых двух порядков суть аналитические функции относительно переменной ρ, но a priori не очевидно, что решение u должно быть аналитическим относительно обеих переменных. Для того, чтобы это доказать, заметим прежде всего, что те же соображения, что и в первом доказательстве, позволяют установить тождественность найденного решения u и решения z, из которых мы исходили. Следовательно, передвигая по произволу центр окружностей C и C_1, мы приходим к заключению, что z и ее производные первых двух порядков суть аналитические функции относительно каждой из переменных x и y, взятой в отдельности.

Следовательно, если $P(x_0, y_0)$ есть произвольная точка некоторой области S_1, лежащей вместе со своей границей внутри области S, где рассматривается функция z, то для этой области S_1 можно указать два таких положительных числа α и M, что $|z| < M$, когда $x = x_0$, а y комплексно и удовлетворяет неравенству $|y - y_0| < \alpha$, а также, когда $y = y_0$, а x комплексно и удовлетворяет неравенству $|x - x_0| < \alpha$. Но в таком случае функция z аналитична[1], по совокупности x и y в каждой точке $P(x_0, y_0)$ области S_1.

§ 16. В заключение укажем на применение основной теоремы к некоторым интересным частным случаям.

1. *Все минимальные поверхности аналитичны.*

В самом деле, они определяются уравнением

$$f = (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

Но все решения этого уравнения удовлетворяют неравенству (2), так как

$$\delta = f'_r f'_t - \frac{1}{4}(f'_s)^2 = 1 + p^2 + q^2 > 0.$$

2. *Все поверхности постоянной положительной кривизны аналитичны.*

В самом деле, они удовлетворяют уравнению

$$f = rt - s^2 - C^2(1+p^2+q^2) = 0.$$

Но

$$\delta = f'_r f'_t - \frac{1}{4}(f'_s)^2 = tr - s^2 = C^2(1+p^2+q^2) > 0.$$

3. *Все поверхности, налагающиеся на какую-нибудь аналитическую поверхность положительной кривизны, аналитичны.*

Пусть

$$d\sigma^2 = du^2 + C^2dv^2$$

представляет линейный элемент аналитической поверхности положительной кривизны в геодезических координатах, на которую накладывается рассматриваемая поверхность Σ, так что C — аналитическая функция u и v и, кроме того,

$$\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} < 0,$$

так как кривизна $\frac{1}{RR'}$ выражается формулой

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}.$$

С другой стороны, координаты x, y, z поверхности Σ, рассматриваемые как функция параметров u и v, удовлетворяют уравнению

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2 = du^2 + C^2dv^2,$$

---

[1] Это следует из одной общей теоремы, доказанной мною в сочинении «О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов», Сообщ. Харьк. Математ. Об-ва, серия 2, т. XIII, 1912, теорема 83, стр. 145.

[См. также С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, том 1, 1952, стр. 102. (*Ред.*)]

из которого выводится, что каждая из координат x, y, z удовлетворяет также уравнению[1]

$$F = C\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2\right] + \left(C^2 \frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial C}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} +$$

$$+ 2\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - \left[\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right]\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0.$$

Легко видеть, что это последнее уравнение эллиптического типа.

В самом деле,

$$\delta = F'_r F'_t - \frac{1}{4}(F'_s)^2 = C^2(rt - s^2) + \left(C^3\frac{\partial C}{\partial u}p - C\frac{\partial C}{\partial v}q\right)r +$$

$$+ 2C\frac{\partial C}{\partial u}qs - \left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2 q^2 = C\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}[C^2p^2 + q^2 - C^2].$$

Но

$$-[C^2p^2 + q^2 - C^2] = [(1 - p^2)(C^2 - q^2) - p^2q^2]$$

дискриминант определенной квадратичной формы

$$du^2 + C^2dv^2 - [pdu + qdv]^2.$$

Следовательно,

$$\delta > 0.$$

---

[1] Darboux, Théorie des surfaces, t. III, стр. 262.

Н. И. АХИЕЗЕР

К ТЕОРИИ НОРМАЛЬНЫХ РЯДОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

Главной задачей настоящей статьи является подробное доказательство некоторых предложений теории нормальных рядов, которое лишь намечено самим автором этой теории. Для цельности мы приводим попутно основные определения теории, а также формулировки некоторых других предложений, хотя они в комментировании и не нуждаются.

Мы несколько отклоняемся от терминологии и обозначений С. Н. Бернштейна, однако никаких изменений по существу не вносим.

Около трех десятков лет тому назад появилась прекрасная работа Т. Радо[1], в которой автор с разрешения С. Н. Бернштейна изложил с некоторыми модификациями данное С. Н. Бернштейном доказательство предугаданной Гильбертом теоремы.

В мемуаре Радо имеются замечательные страницы, посвященные нормам С. Н. Бернштейна с той абстрактной точки зрения, которая характерна для функционального анализа. Эти рассмотрения Радо представляют большой интерес для современного читателя. Поэтому мы сочли полезным привести их здесь (последний раздел).

Из всего сказанного следует, что настоящая статья может рассматриваться как некоторый комментарий к главе II монографии С. Н. Бернштейна.

1. Нормальными рядами для интервала [0, 1] С. Н. Бернштейн называет ряды вида[2]

$$\sum_{p,\, q=0}^{\infty} a_{pq} x^p (1-x)_q, \tag{1}$$

[1] Tibor Rado, Das Hilbertsche Theorem über den analytischen Charakter der Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Zeitschr., Bd. *25*, 1926, pp. 514—589.

[2] В данное здесь определение в отличие от первоначального не входит требование об абсолютной и равномерной сходимости.

однако в его исследованиях не меньшую роль играют и ряды вида

$$\sum_{p,\,q=0}^{\infty} b_{pq} x^p (1-x^2)^q, \tag{2}$$

которые можно рассматривать как в интервале [0, 1], так и в интервале [—1, 1].

Условимся для сокращения называть ряды вида (1) *нормальными рядами первого рода*, а ряды вида (2) — *нормальными рядами второго рода*.

Основным положением теории нормальных рядов является следующая, относящаяся к 1912 году.

Теорема 1. *Всякая непрерывная в интервале* [0, 1] *функция разлагается в этом интервале в абсолютно и равномерно сходящийся нормальный ряд первого рода.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие. *Всякая непрерывная в интервале* [0, 1] *функция разлагается в этом интервале в абсолютно и равномерно сходящийся нормальный ряд второго рода (притом содержащий лишь четные степени x).*

В самом деле, если функция $f(x)$ непрерывна в интервале [0, 1], то тем же свойством обладает функция $g(y) = f(\sqrt{y})$, которая в силу теоремы 1 допускает абсолютно и равномерно сходящееся разложение

$$g(y) = \sum_{p,\,q=0}^{\infty} a_{pq} y^p (1-y)^q \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1).$$

Теперь остается положить $y = x^2$.

Однако справедлива более общая

Теорема 2. *Всякая непрерывная в интервале* [—1, 1] *функция разлагается в этом интервале в абсолютно и равномерно сходящийся нормальный ряд второго рода.*

Доказательство этого предложения не требует иных средств, кроме тех, с помощью которых С. Н. Бернштейн доказал свою теорему 1[1].

---

[1] В самом деле, представив непрерывную функцию $f(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ в виде ряда многочленов

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x),$$

где

$$|P_k(x)| < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

запишем каждый из многочленов $P_k(x)$ как сумму четного и нечетного слагаемых:

$$P_k(x) = Q_k(x) + R_k(x).$$

Далее многочлены $Q_k(x)$, $R_k(x)$ представим в виде

$$Q_k(x) = \sum_{p,\,q=0}^{p+q=m} A_{pq}\, x^{2p} (1-x^2)^q,$$

2. Переходим к понятию норм... ... каким-нибудь числом $\sigma \geqslant 1$ и введем ряд

$$\sum_{p,\, q=0}^{\infty} |a_{pq}| \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} \sigma^q. \qquad (1^{\text{bis}})$$

Сумму этого ряда в случае его сходимости и бесконечность в противном случае назовем *σ-нормой ряда* (1). Если $f(x)$ — заданная непрерывная функция в интервале $[0, 1]$, то точную нижнюю грань σ-норм всевозможных ее разложений в нормальные ряды первого ряда назовем *σ-нормой функции* $f(x)$ *в интервале* $[0, 1]$ и обозначим

$$N_\sigma [f(x)]_{[0,\, 1]}.$$

Подобным образом нормальному ряду второго рода (2) отнесем в качестве σ-нормы число

$$\sum_{p,\, q=0}^{\infty} |b_{pq}| \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}} q^q}{\left(\frac{p}{2}+q\right)^{\frac{p}{2}+q}} \sigma^q, \qquad (2^{\text{bis}})$$

когда этот числовой ряд сходится, и бесконечность — в противном случае. Если $f(x)$ — заданная непрерывная функция в интервале $[-1, 1]$, то точную нижнюю грань σ-норм всевозможных ее разложений в нормальные ряды второго рода назовем *σ-нормой функции* $f(x)$ *в интервале* $[-1, 1]$ и обозначим

$$N_\sigma [f(x)]_{[-1,\, 1]}.$$

Введем теперь некоторые специальные области в комплексной плоскости.

С этой целью построим окружность K радиуса $r < 1$ с центром в точке O и проведем к ней касательные из точки 1, а также из точки -1.

Область, ограниченную двумя касательными из точки 1 и бо́льшей дугой окружности K, обозначим Γ_r.

Область, ограниченную касательными из обеих точек ± 1 и двумя дугами окружности K, назовем Δ_r.

$$R_k(x) = \sum_{p,\, q=0}^{p+q=m} B_{pq} x^{2p+1} (1-x^2)^q,$$

где $2m+2$ превосходит степень многочленов $Q_k(x)$, $R_k(x)$, а затем будем искать коэффициенты этих представлений так, чтобы максимум в интервале $[0, 1]$ каждой из сумм

$$\sum_{p,\, q=0}^{p+q=m} |A_{pq}| x^{2p} (1-x^2)^q, \qquad \sum_{p,\, q=0}^{p+q=m} |B_{pq}| x^{2p+1} (1-x^2)^q$$

был наименьшим. После этого применимы все построения С. Н. Бернштейна из § 6.

3. В главе II своей монографии С. Н. Бернштейн доказал следующее предложение:

Теорема 3. *Если функция* $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ *имеет при каком-нибудь* $\sigma > 1$ *конечную* σ-*норму в интервале* $[0, 1]$, *то она аналитична внутри и непрерывна в замыкании области* Γ_r, *где* $r = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}$.

Отсюда, с помощью расщепления нормального ряда второго рода на четную и нечетную функцию, вытекает

Теорема 4. *Если функция* $f(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ *имеет при каком-нибудь* $\sigma > 1$ *конечную* σ-*норму в интервале* $[-1, 1]$, *то она аналитична внутри и непрерывна в замыкании области* Δ_r *при некотором зависящем от* σ *положительном значении* r.

Эти предложения допускают обращение, доказательством которого мы и займемся. Идея этого доказательства намечена С. Н. Бернштейном.

Теорема 5. *Если функция* $f(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ *аналитична в интервале* $[-1, 1]$, *то при некотором* $\sigma > 1$ *ее* σ-*норма в интервале* $[-1, 1]$ *конечна.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ аналитична в интервале $[-1, 1]$, то она представляет в этом интервале значения функции $f(z)$, аналитической в некотором прямоугольнике с вершинами $-1 - \varepsilon \pm i\delta$, $1 + \varepsilon \pm i\delta$, где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. В таком случае, пользуясь интегральной формулой Коши, можем написать $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta}^{-\delta} \frac{f(-1 - \varepsilon + i\eta)}{i\eta - 1 - \varepsilon - x} i\,d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(1 + \varepsilon + i\eta)}{i\eta + 1 + \varepsilon - x} i\,d\eta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \left\{ \frac{f(\xi - i\delta)}{\xi - i\delta - x} - \frac{f(\xi + i\delta)}{\xi + i\delta - x} \right\} d\xi.$$

Первые два члена представляют значения функции $g(z)$, регулярной внутри круга $|z| < 1 + \varepsilon$. Поэтому

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Третий член можно переписать в виде

$$h(x) = \int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{A(\xi) + xB(\xi)}{x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \delta^2} d\xi,$$

где $A(\xi)$, $B(\xi)$ — непрерывные функции. По

$$\frac{1}{x^2-2\xi x+\xi^2+\delta^2}=\frac{1}{1+\xi^2+\delta^2-[(1-x^2)+2\xi x]}=\frac{1}{1+\xi^2+\delta^2}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(1-x^2)+2\xi x]^n}{(1+\xi^2+\delta^2)^{n+1}}=\frac{1}{1+\xi^2+\delta^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\xi^2+\delta^2)^{n+1}}\Bigl\{(1-x^2)^n+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}(2\xi)^k x^k(1-x^2)^{n-k}+(2\xi)^n x^n\Bigr\}.$$

Справа мы имеем некоторый нормальный ряд второго рода. Запишем его σ-норму, принимая, что $1<\sigma<1+\delta^2$:

$$N_\sigma\left[\frac{1}{x^2-2\xi x+\xi^2+\delta^2}\right]_{[-1,\,1]}\leqslant\frac{1}{1+\xi^2+\delta^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\xi^2+\delta^2)^{n+1}}\Biggl\{\sigma^n+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}2^k|\xi|^k\sigma^{n-k}\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}(n-k)^{n-k}}{\left(n-\frac{k}{2}\right)^{n-\frac{k}{2}}}+2^n|\xi|^n\Biggr\}.$$

Для оценок нам понадобится следующее известное неравенство

$$1<\frac{m!}{\sqrt{2\pi m}\,m^m e^{-m}}<\frac{3}{2}\qquad(m\geqslant 1).$$

В силу этого неравенства, полагая для определенности, что $\varepsilon<1$, будем иметь при $1\leqslant k\leqslant n-1$:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}2^k|\xi|^k\sigma^{n-k}\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}(n-k)^{n-k}}{\left(n-\frac{k}{2}\right)^{n-\frac{k}{2}}}<$$

$$<\frac{9}{2}(n+1)\frac{n!}{\left[\frac{k}{2}\right]!\left(n-\left[\frac{k}{2}\right]\right)!}(\xi^2)^{\left[\frac{k}{2}\right]}(\sigma^2)^{n-\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{\sigma^n}.$$

Поэтому

$$N_\sigma\left[\frac{1}{x^2-2\xi x+\xi^2+\delta^2}\right]_{[-1,\,1]}<\frac{1}{1+\delta^2}\left(1+\frac{4}{\delta^2}\right)+$$

$$+9\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{\sigma^n}\frac{(\sigma^2+\xi^2)^n}{(1+\xi^2+\delta^2)^{n+1}}=\frac{1}{1+\delta^2}\left(1+\frac{4}{\delta^2}\right)+$$

$$+\frac{9(1+\xi^2+\delta^2)}{\left(1+\xi^2+\delta^2-\frac{\sigma^2+\xi^2}{\sigma}\right)^2}<\frac{1}{1+\delta^2}\left(1+\frac{4}{\delta^2}\right)+\frac{9(5+\delta^2)}{(1+\delta^2-\sigma)^2}.$$

Окончание доказательства никакого труда не представляет, так как коэффициенты нормального ряда функции $h(x)$ получаются в соответствии с формулой (3) интегрированием коэффициентов нормального ряда функции

$$\frac{1}{x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \delta^2}$$

после их предварительного умножения на непрерывные функции $A(\xi)$, $B(\xi)$.

Если учесть, что представляют собою эти функции $A(\xi)$, $B(\xi)$, то отсюда, между прочим, получим следующую, в дальнейшем используемую, теорему.

Теорема 6. *Пусть функция $f(x, \lambda)$ $(\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta)$ представляет при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ значения равном ограниченной по* ***аналитической по x функции, регулярной в некоторой фиксированной области x-плоскости, содержащей интервал $[-1, 1]$. В таком случае функция $f(x, \lambda)$ разлагается в нормальный ряд второго рода и притом такой, что если его коэффициенты, которые являются функциями от λ, заменить их максимумами модуля, то полученный ряд имеет при некотором $\sigma > 1$ конечную σ-норму в интервале $[-1, 1]$.***

Теорема 7. ***Если функция $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ аналитична в интервале $[0, 1]$, то при некотором $\sigma > 1$ ее σ-норма в интервале $[0, 1]$ конечна.***

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\xi) = f(\xi^2),$$

определенную в интервале $[-1, 1]$ и, очевидно, аналитическую в нем. Эта функция четная; следовательно, можно ограничиться лишь такими ее разложениями в нормальные ряды второго рода, которые содержат только четные степени ξ. По теореме 5 при некотором $\sigma > 1$ существует подобное разложение с конечной σ-нормой. Пусть это будет

$$\varphi(\xi) = \sum_{p, q=0}^{\infty} c_{pq}\xi^{2p}(1-\xi^2)^q,$$

так что

$$N_\sigma[\varphi(\xi)]_{[-1, 1]} \leqslant N = \sum_{p, q=0}^{\infty} |c_{pq}|\,\sigma^q \frac{p^p q^q}{(p+q)^{q+p}} < \infty.$$

Но, полагая $\xi^2 = x$, найдем, что

$$f(x) = \sum_{p, q=0}^{\infty} c_{pq}x^p(1-x)^q.$$

А так как

$$N\,[f(x)]_{[0, 1]} \leqslant \sum_{p, q=0}^{\infty} |c_{pq}|\,\sigma^q \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} = N,$$

то утверждение доказано.

4. Теперь обратимся к функциям от двух переменных, для которых, собственно говоря, и были введены нормальные ряды.

Пусть $F(x, y)$ — непрерывная функция в круге $x^2+y^2 \leqslant 1$. В таком случае, полагая

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta,$$

где $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, мы получаем функцию

$$\Phi(\rho, \theta)=F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

которой принадлежит некоторый тригонометрический ряд Фурье:

$$\Phi(\rho, \theta) \sim \frac{A_0(\rho)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n(\rho)\cos n\theta+B_n(\rho)\sin n\theta\}.$$

Коэффициенты этого ряда определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} A_n(\rho)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos n\theta d\theta, \\ B_n(\rho)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin n\theta d\theta, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

правые части которых имеют смысл также при $-1 \leqslant \rho \leqslant 0$. Но если мы заменим в интегралах правых частей θ на $\theta+\pi$, то получим, что

$$A_n(\rho)=\frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^{2\pi} F(-\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$B_n(\rho)=\frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^{2\pi} F(-\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta)\sin n\theta d\theta.$$

Сравнение этих формул с формулами (4) показывает, что

$$\begin{aligned} A_n(-\rho)&=(-1)^n A_n(\rho) \\ B_n(-\rho)&=(-1)^n B_n(\rho) \end{aligned} \qquad (-1 \leqslant \rho \leqslant 1).$$

Величину

$$\frac{1}{2}N_\sigma[A_0(\rho)]_{[-1, 1]}+\sum_{n=1}^{\infty}\{N_\sigma[A_n(\rho)]_{[-1, 1]}+N_\sigma[B_n(\rho)]_{[-1, 1]}\},$$

если этот ряд сходится, и бесконечность в противном случае назовем σ-нормой функции $F(x, y)$ в круге $x^2+y^2 \leqslant 1$ и обозначим символом

$$N_\sigma[F(x, y)]_1.$$

Теорема 8. *Если функция $F(x, y)$ имеет конечную σ-норму в круге $x^2+y^2\leqslant 1$, то она внутри этого круга аналитична, а в его замыкании непрерывна (предполагается, что $\sigma>1$).*

Эта теорема по существу не отличается от теоремы С. Н. Бернштейна, сформулированной и доказанной на стр. 52.

Теперь мы покажем, что теорема 8 допускает некоторое обращение.

С этой целью положим, что функция $F(x, y)$ аналитична в круге $x^2+y^2<R^2$ некоторого радиуса $R>1$, и пусть число $\delta>0$ столь мало, что в окрестности

$$-\delta\leqslant x-x_0\leqslant\delta,\quad -\delta\leqslant y-y_0\leqslant\delta \tag{5}$$

каждой точки (x_0, y_0) круга $x^2+y^2\leqslant 1$ имеет место абсолютно и равномерно сходящееся разложение

$$F(x, y)=\sum_{p,\, q=0}^{\infty} c_{pq}(x-x_0)^p(y-y_0)^q. \tag{6}$$

Будем в качестве x_0, y_0 принимать любые числа вида

$$x_0=\rho_0\cos\theta_0,\ y_0=\rho_0\sin\theta_0,$$

где ρ_0 пробегает интервал $[-1, 1]$, а θ_0—интервал $[0, 2\pi]$. Затем положим

$$x=\rho\cos\theta_0,\ y=\rho\sin\theta_0$$

и для выполнения неравенства (5) примем, что

$$-\delta\leqslant\rho-\rho_0\leqslant\delta.$$

Тогда из разложения (6) получится абсолютно и равномерно сходящееся разложение

$$\Phi(\rho, \theta_0)=\sum_{p=0}^{\infty} c_p(\theta_0)(\rho-\rho_0)^p.$$

Отсюда следует, что функция $\Phi(\rho, \theta)$ будет при любом θ из интервала $[0, 2\pi]$ регулярна в одном и том же прямоугольнике комплексной ρ-плоскости, содержащем отрезок $\left[-1-\frac{\delta}{2}, 1+\frac{\delta}{2}\right]$. Нетрудно также доказать, что $\Phi(\rho, \theta)$ непрерывна по θ. То же справедливо и относительно функции $\Phi_{\theta\theta}(\rho, \theta)$, которая появляется в формулах (4) при $n\geqslant 1$ с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}A_n(\rho)&=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_\theta(\rho, \theta)\frac{\sin n\theta}{n}d\theta=-\frac{1}{n^2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_{\theta\theta}(\rho, \theta)\cos n\theta\, d\theta,\\ B_n(\rho)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_\theta(\rho, \theta)\frac{\cos n\theta}{n}d\theta=-\frac{1}{n^2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_{\theta\theta}(\rho, \theta)\sin n\theta\, d\theta.\end{aligned} \tag{4$^{\text{bis}}$}$$

Пусть

$$\Phi_{00}(\rho,\ \theta)=\sum_{p,\ q=0}^{\infty} c_{pq}(\theta)\,\rho^{p}(1-\rho^{2})^{q} \tag{7}$$

есть разложение функции $\Phi_{00}(\rho,\ \theta)$ в нормальный ряд второго рода, для которого в соответствии с теоремой 6 ряд

$$\sum_{p,\ q=0}^{\infty}\gamma_{pq}\,\rho^{p}(1-\rho^{2})^{q},\quad \gamma_{pq}=\max_{\theta}|c_{pq}(\theta)|,$$

имеет при некотором $\sigma>1$ конечную σ-норму, скажем, равную M. В таком случае, подставляя разложение (7) в формулы (4^{bis}) и интегрируя, получим нормальные разложения второго рода функций $A_n(\rho)$ и $B_n(\rho)$, из которых следует, что

$$N_\sigma[A_n(\rho)]_{[-1,\ 1]}\leqslant\frac{2M}{n^2},\quad N_\sigma[B_n(\rho)]_{[-1,\ 1]}\leqslant\frac{2M}{n^2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Так как аналогично доказывается неравенство

$$N_\sigma[A_0(\rho)]_{[-1,\ 1]}<\infty,$$

то мы приходим к выводу, что

$$\frac{1}{2}N_\sigma[A_0(\rho)]_{[-1,\ 1]}+\sum_{n=1}^{\infty}\{N_\sigma[A_n(\rho)]_{[-1,\ 1]}+N_\sigma[B_n(\rho)]_{[-1,\ 1]}\}<\infty.$$

Значит справедлива

Теорема 9. *Если функция $F(x,\ y)$ аналитична в некотором круге $x^2+y^2\leqslant R^2$ радиуса $R>1$, то при некотором $\sigma>1$ она имеет конечную σ-норму в круге $x^2+y^2\leqslant 1$.*

5. В этом разделе мы приведем выдержку из цитированной выше работы Радо. В § 2 главы 1 этой работы, озаглавленном «Введение норм С. Н. Бернштейна», Радо пишет следующее:

«Из того, как мы будем применять нормы, вытекает с полной ясностью, что совершенно безразлично, каким специальным образом эти нормы определены; важны лишь те соотношения, которые для норм имеют место. Иными словами, нормирование может рассматриваться как функциональная операция, явное арифметическое определение которой в дальнейшем никакой роли не играет и которая лишь должна обладать рядом свойств для того, чтобы с помощью этого нормирования можно было оправдать некоторые бесконечные процессы[1].

В соответствии с этими соображениями мы вначале определим нормирование чисто аксиоматически, а затем докажем существо-

[1] Речь идет о процессе построения последовательных приближений при решении в малом некоторой краевой проблемы.

мыми свойствами.

Пусть в плоскости xOy дана фиксированная точка (x_0, y_0); будем рассматривать круги с центром в этой точке. Каждый такой круг определяется заданием его радиуса R и поэтому будет называться кругом R. Пусть $F(x, y)$ есть функция, заданная внутри и на границе круга R; в таком случае требуется найти условие для того, чтобы к этой функции была применима операция нормирования. Если это условие выполнено, то функция $F(x, y)$ называется нормальной в круге R, а относимое ей с помощью операции нормирования неотрицательное конечное число называется нормой и обозначается $N[F]_R$. Функция $F(x, y)$ может быть нормальной в различных кругах R_1 и R_2; нормы $N[F]_{R_1}$ и $N[F]_{R_2}$ будут тогда, вообще говоря, различными.

Сформулируем прежде всего три постулата, которые в определенном смысле играют роль начальных условий для операции нормирования.

E_1. Если функция $u(x, y)$ в круге R гармонична и если α_n, β_n — коэффициенты ряда Фурье ее краевых значений, так что

$$u(x_0 + R\cos\theta,\ y_0 + R\sin\theta) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

то она в этом круге нормальна в том и только том случае, когда

$$\frac{|\alpha_0|}{2} + \sum_1^\infty |\alpha_n| + |\beta_n| < \infty,$$

и если это условие выполнено, то

$$N[u]_R = \frac{|\alpha_0|}{2} + \sum_1^\infty |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

E_2. Если $F(x, y)$ в круге R нормальна, то должно иметь место неравенство

$$|F| \leqslant N[F]_R.$$

E_3. Если $F(x, y)$ в круге R нормальна, то она должна быть аналитической внутри круга и непрерывной вплоть до границы. (При этом вовсе не требуется, чтобы было верно обратное).

Затем идут правила счета:

E_4. Если функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ нормальны в круге R, то должны быть нормальными в круге R их сумма и произведение и должны иметь место неравенства

$$N[F_1 + F_2]_R \leqslant N[F_1]_R + N[F_2]_R; \quad N[F_1 \cdot F_2]_R \leqslant N[F_1]_R \cdot N[F_2]_R.$$

Теперь следуют наиболее существенные требования.

E_5. Пусть функции F_1, F_2, F_3, ... в круге R нормальны. Если ряд

$$N[F_1]_R + N[F_2]_R + N[F_3]_R + \dots$$

сходится, так что ряд

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

в круге R сходится равномерно, то сумма $F(x, y)$ этого ряда также должна быть нормальной в круге R и при этом должно иметь место неравенство

$$N[F]_R \leqslant N[F_1]_R + N[F_2]_R + N[F_3]_R + \dots$$

E_6. Пусть функция $F(x, y)$ нормальна в круге R и пусть существует решение уравнения Пуассона

$$\Delta f = F,$$

равное нулю на окружности круга R. Тогда должны быть нормальными в круге R как само решение f, так и его производные первого и второго порядка, и должны иметь место неравенства

$$N[f]_R \leqslant \lambda R^2 N[F]_R,$$
$$N[D_1 f]_R \leqslant \lambda R N[F]_R,$$
$$N[D_2 f]_R \leqslant \lambda N[F]_R,$$

где λ — абсолютная константа, то есть не зависит ни от R, ни от $F(x, y)$.

По поводу этих постулатов должно быть замечено следующее. Множество функций, к которым может быть применена операция нормирования, не описывается этими постулатами полностью. Только для гармонических функций дан прямой критерий; для остальных же функций мы можем лишь тогда утверждать, что они нормальны, если эти функции получены с помощью определенных процессов, а именно тех, которые описаны в постулатах E_4, E_5, E_6. Однако этого достаточно, чтобы доказать, что все решения дифференциальных уравнений, о которых идет речь в теореме Гильберта, нормальны, а значит аналитичны, в надлежащим образом выбранных кругах. Действительно, при доказательстве этой теоремы приходится пользоваться только свойствами E_1 — E_6 и вовсе не приходится обращаться к явному арифметическому определению операции нормирования.

Таким образом, утверждение об одном лишь существовании функциональной операции, обладающей свойствами E_1 — E_6, есть весьма важная по своим последствиям теорема. Это доказательство существования проводится с помощью нормальных рядов; однако было бы очень желательно построить более простое доказательство существования, так как операция нормирования может найти успешное применение в различных важных вопросах.

Если оставить в стороне требование постулата E_6, которое касается вторых производных D_2f, то мы получим те свойства нормирования, от которых отправлялись Пикар[1], а после него Холмгрен[2] для доказательства частных теорем, подготовивших общую теорему. Действительно, *С. Н. Бернштейн видел свою задачу в том, чтобы создать аналитический аппарат, который позволил бы охватить также и вторые производные от решения уравнения Пуассона*».

---

[1] Acta mathematica, Bd. *25*, 1902, pp. 121—138.
[2] Math. Annalen, Bd. *57*, 1903, pp. 409—420.

СОДЕРЖАНИЕ

Сергей Натанович Бернштейн

Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа

Технический редактор *Я. Т. Чернышенко*
Корректор *Б. С. Луценко*

Подписано к печати 30/XII 1955 г. БЦ 22564.
Тир. 5000. Формат $60 \times 92^1/_{16}$. Объем 3 б. л., 6 п. л.,
6,3 уч.-изд. л. В 1 п. л. 42,600 зн. Зак. 1616.

Напечатано с матриц, изготовленных на Книжной фабрике им. Фрунзе, г. Харьков, в типографии Издательства Харьковского университета им. А. М. Горького, ул. Университетская, № 16.
Зак № 722.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стра-ница	Строка	Напечатано	Должно быть
50	1 снизу	$a'_{pq}\,\rho^{p'}\,(R-\rho)^q + a''_{pq}\,\rho^{p''}\,(R-\rho)^q + \dots$	$a_{pq}\sum_{k=0}^{q}\beta_k\,\rho^{p+k}\,(R-\rho)^{2q-k}$ ([illegible]
50	5 снизу	$\dots = (R-\rho)^q\,(R^q + \dots + \rho^q),$	$\dots = (R-\rho)^q\,[(R-\rho)^q + \dots +$ [illegible]
52	19 сверху	$2\varepsilon^2 + 2\varepsilon\,\rho_0 \le \delta$	$2\varepsilon^2 + 4\varepsilon\,\rho_0 \le \delta$
60	10 снизу	$< MR + \dots$	$< 2MR + \dots$
65	9 сверху	(27)	(26)
71	4 сверху	§ 8	§ 10
88	10 сверху	по	по λ,