Акад. С. Н. БЕРНШТЕЙН

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ И НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Часть первая

Цена 4 р. 25 к., переплет 1 р. 25 к.

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1937 МОСКВА

Т—25-5-4

Настоящий труд является введением в теорию непрерывных функций, рассматриваемых как предел полиномов данной системы, например, алгебраических многочленов или тригонометрических сумм. В основе этой теории, объединяющей анализ с алгеброй, лежат идеи Чебышева о наилучшем приближении.

Ныне выпускаемая первая часть посвящена систематическому изложению общих теорем о полиномах наименьшего уклонения и решению основных алгебраических экстремальных задач, существенных для последующих аналитических приложений. Далее, исследуется наилучшее приближение аналитических функций и дается его асимптотическое значение для функций, имеющих заданные особые точки (алгебраические и логарифмические, а также существенные). Наконец, в последней главе рассматриваются проблемы приближения функций на всей вещественной оси при помощи многочленов и рациональных дробей, причем экстремальные свойства алгебраических функций соответствующим образом распространяются на определенные классы целых трансцендентных функций.

Вторая часть, подготовляемая к печати, будет содержать развитие и приложение методов и результатов первой части преимущественно к классификации непрерывных функций и исследованию свойств различных классов этих функций в области вещественной переменной (регулярно монотонных, квазианалитических и др.). Кроме того, будет рассмотрен вопрос о связи между ортогональными полиномами и полиномами наименьшего уклонения и его приложения.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Десять лет тому назад в коллекции Бореля появилась на французском языке моя монография „Leçons sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle professées à la Sorbonne". Эта работа, которую в дальнейшем будем обозначать буквами L. S., удостоенная в 1926 г. премии Bordin Парижской Академии наук и содержавшая в значительной своей части новые еще неопубликованные исследования, не была предназначена для более или менее широкого круга читателей.

За последние годы наши математические кадры сильно расширились и окрепли, и, когда Объединенное научно-техническое издательство (ОНТИ), идя навстречу высказываемым с разных сторон пожеланиям, предложило мне переработать упомянутую книгу для напечатания на русском языке, я охотно приступил к подготовке настоящего труда, первая часть которого ныне появляется в свет. Значительное увеличение объема объясняется как развитием и расширением содержания, так и большею систематичностью и цельностью изложения. Естественно поэтому, что для того, чтобы обеспечить известную законченность предлагаемой теперь читателю первой части, трактуя здесь более подробно некоторые разделы L. S., другие вопросы пришлось полностью перенести во вторую часть, как, например, проблему связи между полиномами, наименее уклоняющимися от нуля, и ортогональными полиномами, которая выросла из нескольких параграфов первой главы L. S Точно так же принципиально важный вопрос о вещественных свойствах аналитических и квазианалитических функций найдет себе место во второй части в связи с общей классификацией непрерывных функций, которая была мною дана в 1912 г., и с дальнейшим развитием этой теории за последние 10 лет.

Для понимания настоящей книги не требуется иной подготовки, кроме знания университетского курса анализа математических факультетов.

Для общей ориентировки в исследуемых в этой книге вопросах могло бы быть полезно познакомиться с моим докладом на I Всесоюзном съезде математиков в Харькове (1930 г.) „Современное состояние и проблемы теории наилучшего приближения функций действительной переменной посредством полиномов".

Автор

Глава первая

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПОЛИНОМОВ ДАННОЙ СИСТЕМЫ

§ 1. Системы функций Чебышева

Рассмотрим $\overline{n+1}$ функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, линейно независимых и непрерывных на данном конечном или бесконечном отрезке[1] (a, b). Систему этих функций назовем *системой* T (Чебышева) *порядка* n *на данном отрезке* (a, b), *если полином*

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \varphi_k(x),$$

имеющий более n *корней на отрезке* (a, b), *тождественно равен нулю, т. е. все* $A_k = 0$.

В зависимости от вида функций $\varphi_k(x)$ в каждом соответствующем случае $F_n(x)$ будем называть полиномом тригонометрическим, степенным или экспоненциальным и т. д.; условимся название *многочлена* давать полиному $F_n(x)$ только тогда, когда функции $\varphi_k(x)$ будут целыми, не отрицательными степенями x, т. е.

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^{m_k},$$

где $m_k \geqslant 0$ — *целые* числа.

Теорема. *Для того, чтобы функции* $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *образовывали систему* T (Чебышева) *на отрезке* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы определитель*

$$D(\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \ldots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля, если x_i — *точки отрезка* (a, b) — *отличные между собой.*

---

[1]) Непрерывность на бесконечном отрезке здесь понимается в том смысле, что $\varphi_k(x) \to \varphi_k(\infty)$, когда $x \to \infty$, $\varphi_k(x) \to \varphi_k(-\infty)$, при $x \to -\infty$; поэтому в случае бесконечного отрезка, как в случае конечного, из непрерывности $\varphi_k(x)$ вытекает и ее ограниченность.

Действительно, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы система уравнений

$$\begin{gathered}A_0\varphi_0(x_0)+A_1\varphi_1(x_0)+\ldots+A_n\varphi_n(x_0)=0\\A_0\varphi_0(x_1)+A_1\varphi_1(x_1)+\ldots+A_n\varphi_n(x_1)=0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\A_0\varphi_0(x_n)+A_1\varphi_1(x_n)+\ldots+A_n\varphi_n(x_n)=0\end{gathered}$$

имела единственным решением $A_0=A_1=\ldots=A_n=0$, заключается именно в том, чтобы определитель $D(\varphi_0(x_0), \ldots, \varphi_n(x_n))$ был отличен от нуля.

Сделаем несколько очевидных замечаний относительно систем T:

1) Система функций $\varphi_k(x)$ всегда может быть расположена в таком порядке, чтобы $D(\varphi_0(x_0), \ldots, \varphi_n(x_n))>0$, когда $x_0<x_1<\ldots<x_n$.

2) Каковы бы ни были заданные на (a, b) значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, все полиномы данной системы T, имеющие эти n значений корнями, могут быть представлены в виде определителя $\lambda D(\varphi_0(x), \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n))$, где λ — произвольная постоянная.

3) Система $(n+1)$ уравнения с $(n+1)$ неизвестными $A_0, A_1, \ldots A_n$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(x_i)=M_i \qquad (i=0, 1, \ldots, n)$$

допускает одну и только одну систему решений; иными словами, *полином*

$$F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(x)$$

системы T вполне определяется своими значениями в любых $(n+1)$ точках отрезка (a, b).

4) Функции $\varphi_k(x)$, образующие систему T на отрезке (a, b), также образуют систему T и на всякой его части.

В дальнейшем будет полезно пользоваться определением простых и двойных корней полиномов, несколько отличающимся от обычно применяемого в алгебре: *будем называть корень x_i полинома $F_n(x)$ простым, если при прохождении x через значение x_i знак $F_n(x)$ меняется,*[1] *в противном случае корень x_i будет называться двойным.*

Очевидно, все n корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ полинома

$$F_n(x)=\lambda D(\varphi_0(x), \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n))$$

будут *простыми*. Кроме того, имеют место следующие две леммы:

Лемма I. *Если m_1 число простых корней, а m_2 число двойных корней полинома*

$$F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(x)$$

---

[1]) Если корень x_i совпадает с одним из концов отрезка (a, b), то он также считается простым.

системы T порядка n на отрезке (a, b), то

$$m_1 + 2m_2 \leqq n. \tag{1}$$

Действительно, пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m_1}$ будут *простыми* корнями полинома $F_n(x)$, а $y_1 < y_2 < \ldots < y_{m_2}$ будут его *двойными* корнями.

Согласно определению, знак $F_n(x)$ вблизи y_i не меняется, поэтому, беря $n - m_1$ точки $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-m_1}$ в промежутке (a, y_1), можем построить полином:

$$P_n(x) = \pm D(\varphi_0(x), \varphi_1(x'_1), \ldots, \varphi_{n-m_1+1}(x_1), \ldots, \varphi_n(x_{m_1})),$$

имеющий n простых корней $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-m_1}, x_1, \ldots, x_{m_1}$, знак которого вблизи каждого значения y_i будет совпадать с знаком $F_n(x)$.

Следовательно, обозначая через 2ε наименьшее из расстояний между корнями $F_n(x)$ и полагая $\lambda > 0$ достаточно малым, будем иметь:

$$\begin{gathered}
[F_n(y_i+\varepsilon) - \lambda P_n(y_i+\varepsilon)]\,[F_n(y_i) - \lambda P_n(y_i)] = \\
= [F_n(y_i+\varepsilon) - \lambda P_n(y_i+\varepsilon)]\,[-\lambda P_n(y_i)] < 0, \\
[F_n(y_i) - \lambda P_n(y_i)]\,[F_n(y_i-\varepsilon) - \lambda P_n(y_i-\varepsilon)] = \\
= -\lambda P_n(y_i)\,[F_n(y_i-\varepsilon) - \lambda P_n(y_i-\varepsilon)] < 0.
\end{gathered}$$

Отсюда следует, что каждому двойному корню y_i полинома $F_n(x)$ соответствует по крайней мере по одному корню полинома $F_n(x) - \lambda P_n(x)$ в каждом из промежутков $(y_i - \varepsilon, y_i)$ и $(y_i, y_i + \varepsilon)$; но, так как простые корни $x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}$ все сохранены, то общее число M корней полинома $F_n(x) - \lambda P_n(x)$ не менее, чем $m_1 + 2m_2$; следовательно,

$$m_1 + 2m_2 \leqslant M \leqslant n.$$

Лемма II. *Каковы бы ни были данные на отрезке (a, b) значения $x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}, y_1, \ldots, y_{m_2}$, причем $m_1 + 2m_2 = n$, существуют полиномы $F_n(x)$ любой системы T, имеющие своими простыми корнями $x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}$ и двойными корнями $y_1, y_2, \ldots, y_{m_2}$.*

Деля все функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ данной системы T на одну из них, можно принять, что одна из них равна *единице*. В таком случае эти функции обладают во всех точках α отрезка (a, b) свойством *взаимной дифференцируемости:* а именно, каково бы ни было данное значение α, существует предел отношения

$$\lim_{x=\alpha} \frac{\varphi_k(x) - \varphi_k(\alpha)}{\varphi_i(x) - \varphi_i(\alpha)} = A_{i,k}(\alpha), \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, n \\ k = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{2}$$

когда $x - \alpha$ стремится к нулю, *не меняя знака* $(a \leqslant \alpha \leqslant b,\ a \leqslant x \leqslant b)$ (короче говоря, функции $\varphi_k(x)$, рассматриваемые как функции независимой переменной $z = \varphi_i(x)$, имеют определенные производные как справа, так и слева); при этом для каждого α можно выбрать функцию $\varphi_i(x)$ так, чтобы при любом $k \geqq i$ все числа $A_{i,k}(\alpha)$ были конечны (или равны нулю), причем, разумеется, $A_{i,i}(\alpha) = 1$.

Действительно, если бы отношение $\frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(\alpha)}{\varphi_i(x)-\varphi_i(\alpha)}$, где, для определенности, положим $x-\alpha>0$, не стремилось бы ни к какому конечному или бесконечному пределу, то существовала бы такая постоянная c, что уравнение относительно x

$$\varphi_k(x)-\varphi_k(\alpha)=c(\varphi_i(x)-\varphi_i(\alpha))$$

имело бы бесчисленное множество решений, вопреки основному свойству функций системы T (в числе которых имеется единица). Кроме того, если при $i=0$ ни одно из чисел $A_{0,k}(\alpha)$ не равно ∞, то и вторая часть нашего утверждения доказана; однако возможно, что $A_{0,k_h}=\infty$ для $l>0$ значений k $(k_1<k_2<\ldots<k_l)$, оставаясь конечным для $n+1-l$ значений $k=j$. Очевидно, что в таком случае $A_{k_h,j}(\alpha)=A_{k_h,0}(\alpha)=0$ при всех значениях k_h; поэтому беря в знаменателе (2) $i=k_1$, мы могли бы получить бесконечные пределы, только полагая в числителе (2) $k=k_h$, где $h=2, 3, \ldots, l$; если фактически все $A_{k_1,k_h}(\alpha)$ будут конечны, то $i=k_1$ осуществит таким образом конечность всех $A_{i,k}(\alpha)$. В противном случае, тот же прием, повторенный конечное число раз, приведет нас к тому из значений k_h, которое, будучи поставлено на место i в знаменателе (2), удовлетворит поставленному требованию конечности всех $A_{i,k}(\alpha)$.

После этого строим определитель

$$D(\varphi_0(x), \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_{m_1}(x_{m_1}), \varphi_{m_1+1}(y_1), \varphi_{m_1+2}(y_1'), \ldots,$$
$$\varphi_{n-1}(y_{m_2}), \varphi_n(y'_{m_2})),$$

полагая, вообще $y_k'>y_k$, и делим его на $\varphi_i(y_1')-\varphi_i(y_1)$, выбирая значок i функции $\varphi_i(x)$ так, чтобы, при всех k указанные выше пределы $A_{i,k}(y_1)$ были конечны. Таким образом, в пределе (при $y_1'\to y_1$) получим определитель:

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x)\,\varphi_0(x_1) & \ldots & \varphi_0(y_1)\,A_{i,0}(y_1)\,\varphi_0(y_2) & \ldots & \varphi_0(y'_{m_2}) \\ \varphi_1(x)\,\varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(y_1)\,A_{i,1}(y_1)\,\varphi_1(y_2) & \ldots & \varphi_1(y'_{m_2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(x)\,\varphi_n(x_1) & \ldots & \varphi_n(y_1)\,A_{i,n}(y_1)\,\varphi_n(y_2) & \ldots & \varphi_n(y'_{m_2}) \end{vmatrix}$$

который естественно обозначить через $\frac{\partial D}{\partial\varphi_i(y_1)}$, представляющий полином данной системы T. Очевидно $\frac{\partial D}{\partial\varphi_i(y_1)}$ обращается в нуль при $x=x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}, y_1, y_2, \ldots, y'_{m_2}$, причем y_1 будет двойным корнем[1]). Аналогичным образом, деля $\frac{\partial D}{\partial \varphi_i(y_1)}$ на $\varphi_j(y_2') - \varphi_j(y_2)$, где значок j выбирается так, чтобы все $A_{j,k}(y_2)$ были конечны, и переходя к пределу, получим новый определитель $\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi_i(y_1)\,\partial \varphi_j(y_2)}$, являющийся полиномом системы T, у которого, кроме y_1, двойным корнем будет также y_2. Применяя последовательно тот же процесс ко всем m_2 значениям y_k, получим таким образом полином, который будет иметь простыми корнями $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и двойными корнями $y_1, y_2, \ldots y_{m_2}$.

Примечание. Заметим, что если производные справа и слева в некоторых точках неравны, то, как видно из предыдущего рассуждения, совокупность полиномов, имеющих заданные m_1 простых и $m_2 > 0$ двойных корней $(m_1 + 2m_2 = n)$, может содержать более одного произвольного параметра. Пусть, например:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x^2 - x, \quad \varphi_2(x) = x^2 \qquad \text{при } x \leqslant 0$$
$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x^2, \quad \varphi_2(x) = x^2 + x \qquad \text{„ } x \geqslant 0.$$

Нетрудно проверить, что функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ образуют систему T Чебышева на любом конечном отрезке. Действительно, очевидно при $b + c = 0$, полином $F_2(x) = a\varphi_0(x) + b\varphi_1(x) + c\varphi_2(x) = a - bx$ имеет лишь один корень; если же $b + c \gtreqless 0$, то, деля его на $b + c$, т. е. полагая $b + c = 1$, получим:

$$F_2(x) = P(x) = a - bx + x^2, \qquad \text{при } x \leqslant 0$$
$$F_2(x) = Q(x) = a + (1 - b)x + x^2, \qquad \text{„ } x \geqslant 0.$$

Поэтому

$$Q(x) = P(x) + x,$$

откуда видно, что, если $P(x)$ имеет два отрицательных корня, то $Q(x)$ не может иметь положительных корней, а если $Q(x)$ имеет два положительных корня, то $P(x)$ не имеет отрицательных корней. Между тем, каковы бы ни были $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, полином $\lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x)$ не меняет знака при прохождении через корень $x = 0$.

§ 2. Системы периодических функций Чебышева

Часто приходится рассматривать системы непрерывных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ на отрезке (a, b), обладающие свойством, что при всех значениях i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, $\varphi_i(a) = \varphi_i(b)$. В таком случае, очевидно, все полиномы $F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i\varphi_i(x)$ будут обладать тем же свойством, что $F_n(b) = F_n(a)$; поэтому подобного рода систему функций (которые при конечном значении $h = b - a$ можно представлять себе как непрерывные периодические функции с периодом h) будем также называть системой T (Чебышева) на отрезке (a, b), если полином $F_n(x)$, у которого не все коэффициенты A_i равны нулю, имеет не более n корней на отрезке (a, b), при *условии, что корни $x = a$, $x = b$, считаются за один корень.*

---

[1]) Если бы определитель $\frac{\partial D}{\partial \varphi_i(y_1)}$ оказался тождественно равен нулю, то его наивысший минор, содержащий первую колонну, не равный тождественно нулю, представлял бы полином, обладающий указанным свойством.

Лемма. *Порядок вышеуказанных* (периодических) *систем* T (Чебышева) *всегда должен быть четным.*

Действительно, из тождества

$$D(\varphi_0(a),\ \varphi_1(x_1),\ \ldots,\ \varphi_n(x_n)) = D(\varphi_0(b),\ \varphi_1(x_1),\ \ldots,\ \varphi_n(x_n))$$

вытекает, что полином $D(\varphi_0(x),\ \varphi_1(x_1),\ \ldots,\ \varphi_n(x_n))$ при изменении x от a до b после n перемен знака восстанавливает свой первоначальный знак, поэтому n есть число четное.

Нетрудно проверить, что *все установленные выше свойства систем T остаются в силе, если считать корень $x = a$ за простой, когда вблизи a и b знаки $F_n(x)$ противоположны, и за двойной, когда эти знаки одинаковы.* При конечном значении $b - a = h$, полагая, вообще, $\varphi_i(x + h) = \varphi_i(x)$, система функций $\varphi_i(x)$, согласно сделанному выше соглашению, образует систему T (Чебышева) на любом отрезке длины h.

§ 3. Примеры

1. Функции $1,\ x,\ \ldots,\ x^n$ образуют систему T на любом отрезке, так как число вещественных корней обыкновенного многочлена не превышает его степени.

2. Совокупность функций $\frac{1}{R(x)},\ \frac{x}{R(x)},\ \ldots,\ \frac{x^n}{R(x)}$, где $R(x)$ — обыкновенный рациональный многочлен, является системой T на всяком отрезке, где $R(x)$ не имеет корней; эти же функции образуют систему T на всей бесконечной оси, если $R(x)$ вовсе не имеет вещественных корней и если, кроме того, степень его m равна[1]) n, так как в этом случае все функции $\varphi_k(x)$ ограничены и $\varphi_k(-\infty) = \varphi_k(\infty)$ при всех $k \leqslant n$, вследствие чего корни $\pm\infty$ считается за один корень.

3. Функции $1,\ \cos\theta,\ \ldots,\ \cos n\theta$ образуют систему T порядка n на отрезке $(0,\ \pi)$, так как, полагая $x = \cos\theta$, находим, что всякий полином

$$F_n(\theta) = A_0 + A_1\cos\theta + \ldots + A_n\cos n\theta = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

обращается в нуль не более чем при n значениях $x_i = \cos\theta_i$, которым в промежутке $(0,\ \pi)$ соответствует лишь n значений $\theta_i = \arccos x_i$.

4. Функции $1,\ \cos\theta,\ \sin\theta,\ \ldots,\ \cos n\theta,\ \sin n\theta$ образуют *периодическую* систему T порядка $2n$ на любом отрезке длины 2π.

Действительно, полагая

$$x = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = i\,\frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}},$$

имеем

$$e^{i\theta} = \frac{1 + ix}{1 - ix},$$

---

[1]) Если $n < m$, то все $\varphi_k(\infty) = 0$, поэтому мы имели бы обобщенную систему Чебышева, определение которой будет дано дальше.

откуда

$$e^{ik\theta} = \cos k\theta + i\sin k\theta = \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^k = \frac{(1+ix)^{2k}}{(1+x^2)^k},$$

$$\cos k\theta = \frac{(1+ix)^{2k} + (1-ix)^{2k}}{2(1+x^2)},$$

$$\sin k\theta = \frac{(1+ix)^{2k} - (1-ix)^{2k}}{2i(1+x^2)^k};$$

поэтому полином

$$F_{2n}(\theta) = A_0 + A_1\cos\theta + A_2\sin\theta + \ldots + A_{2n-1}\cos n\theta + A_{2n}\sin n\theta =$$
$$= \frac{P_{2n}(x)}{(1+x^2)^n},$$

где $P_{2n}(x)$ — рациональный многочлен степени $2n$; следовательно, данная система функций, рассматриваемых как функции переменной x на всей действительной оси, есть система T; но каждому значению x соответствует одно и только одно значение θ в любом промежутке длины 2π (лишь бы значение $\pm\infty$ для x, как и значения θ_0 и $\theta_0 + 2\pi$ для θ не рассматривались как различные).

5. Функции $1, \dfrac{1}{a_1+x}, \ldots, \dfrac{1}{a_n+x}$ образуют систему T на положительной полуоси, если $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

6. Функция $F(x) = \int\limits_0^\infty e^{tx}d\psi(t)$ и ее производные $F'(x), F''(x), \ldots, F^{(n)}(x)$ образуют систему T на отрицательной полуоси, какова бы ни была заданная ограниченная монотонная функция $\psi(t)$ (если только они линейно независимы, т. е. если $F(x)$ не является экспоненциальным полиномом, содержащим менее $(n+1)$ членов). Это вытекает из того, что всякий полином данной системы представляется в виде $\int\limits_0^\infty P_n(t)\,e^{tx}d\psi(t)$, где $P_n(x)$ есть многочлен степени n, так как известно, что интеграл вида $\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{tx}d\psi(t)$ не может иметь больше корней, чем $f(x)$.

7. Если производная n-го порядка $f^{(n)}(x)$ функции $f(x)$ в промежутке (a, b) не меняет знака, то функции $1, x, \ldots, x^{n-1}, f(x)$ образуют систему T на отрезке (a, b). Действительно, если бы полином $F_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k x^k + A_n f(x)$ имел $n+1$ различных корней, то его первая производная $F_n'(x)$ имела бы не менее n *простых* корней внутри (a, b) и по той же причине $F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ имела бы не менее одного простого корня между a и b, т. е. меняла бы свой знак.

8. Если функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... $\varphi_n(x)$ в данной точке x_0 удовлетворяют условию, что

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0)\,\varphi_0'(x_0) \,\ldots\, \varphi_0^{(n)}(x_0) \\ \varphi_1(x_0)\,\varphi_1'(x_0) \,\ldots\, \varphi_1^{(n)}(x_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x_0)\,\varphi_n'(x_0) \,\ldots\, \varphi_n^{(n)}(x_0) \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

причем все рассматриваемые производные непрерывны вблизи $x=x_0$, то существует конечный отрезок (a, b), заключающий точку x_0, где функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ образуют систему T порядка n.

§ 4. Наилучшее приближение произвольной непрерывной функции при помощи полинома данной системы

Пусть $f(x)$ будет произвольно данная непрерывная (ограниченная) функция на отрезке (a, b), где задана некоторая система непрерывных функций (которая может и не быть системой T) $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$. При этом, если функции $\varphi_k(x)$ при всяком k удовлетворяют условию $\varphi_k(b)=\varphi_k(a)$, мы будем также ограничиваться рассмотрением функций $f(x)$, подчиненных условию $f(b)=f(a)$.

Пусть S будет какое-нибудь данное *замкнутое* подмножество отрезка (a, b), содержащее не менее $n+2$ точек, в частности, S может совпадать с самим отрезком (a, b). Если

$$F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(x)$$

есть некоторый данный полином, то абсолютное значение уклонения $|f(x)-F_n(x)|$ в точках множества S имеет абсолютный максимум $M_S(A_0, A_1, \ldots, A_n)$, являющийся непрерывной функцией коэффициентов $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$.

Исключая тривиальный случай, когда функция $f(x)$ сама есть полином данной системы, мы ставим себе задачей найти такой полином $P_n(x)$ рассматриваемой системы (т. е. так подобрать коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_n$), чтобы сделать $M_S(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ возможно малым.

Искомый полином $P_n(x)$ (существование которого будет сейчас доказано) называют *полиномом данной системы, наименее уклоняющимся от* $f(x)$ (или полиномом наилучшего приближения функции $f(x)$) на множестве S; а соответствующее полиному $P_n(x)$ минимальное, по сравнению с другими полиномами данной системы, значение абсолютного максимума $|f(x)-P_n(x)|$, т. е.

$$\text{минимум } M_S(A_0, A_1, \ldots, A_n)=E_n[f(x);\ S]$$

называется *наилучшим приближением функции* $f(x)$ на множестве S при помощи полиномов данной системы.

Для доказательства существования полинома $P_n(x)$, наименее уклоняющегося от функции $f(x)$ на множестве S, замечаем сначала, что $E_n[f(x); S] \leqslant L$, если $|f(x)| \leqslant L$ на множестве S, так как $M_S(0, 0, \ldots, 0) =$ максимум $|f(x)|$; поэтому, либо $P_n(x) \equiv 0$, и таким образом искомый полином $P_n(x)$ уже найден, либо его нужно искать только среди полиномов $F_n(x)$ нашей системы, удовлетворяющих на всем множестве S условию

$$|F_n(x)| \leqslant 2L,$$

так как, если бы хоть в одной точке x_1 мы имели $|F_n(x_1)| > 2L$, то в этой точке

$$|f(x_1) - F_n(x_1)| > 2L - L = L.$$

Но, фиксируя соответствующим образом $n+1$ различных точек x_0, $x_1, \ldots, x_n$ множества S, мы можем, считая тождественными два полинома совпадающие во *всех* точках этого множества, определить всякий полином $F_n(x)$ значениями $F_n(x_i)$, которые он принимает в этих $n+1$ точках, где определитель $D(\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n x_n))$, не равный тождественно нулю [1]), имеет определенное, отличное от нуля значение, а функции $\varphi_k(x)$ ограничены; таким образом коэффициенты A_k полинома $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(x)$ выразятся формулами вида

$$A_k = \sum_{i=0}^{n} c_{i,k} F_n(x_i), \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

причем существует конечное число c такое, что $|c_{i,k}| \leqslant c$ для всех i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и всех k $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Следовательно, подлежат рассмотрению только те полиномы $F_n(x)$, все коэффициенты которых A_k удовлетворяют неравенствам

$$|A_k| \leqslant 2(n+1)cL, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

но так как этими неравенствами определяется замкнутое множество в $n+1$-мерном пространстве переменных $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$, то, согласно известной теореме Вейерштрасса, минимум непрерывной функции $M_S(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ всегда осуществляется в некоторой точке этого множества, и значения $A_0, A_1, \ldots, A_n$, дающие минимум, являются коэффициентами полинома $P_n(x)$, наименее уклоняющегося от $f(x)$.

Лемма. *Если множество S симметрично относительно начала координат и функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ данной системы распадаются на две группы: функции первой группы $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_i(x)$*

---

[1]) Этот определитель мог бы быть равен нулю при всех значениях x_0, $x_1, \ldots, x_n$ множества S только при условии, что функции $\varphi_k(x)$ не были бы независимы на множестве S, но в этом случае достаточно было бы рассматривать полиномы, содержащие лишь $m \leqslant n$ независимых функций $\varphi_k(x)$. В случае, когда функции $\varphi_k(x)$ образуют систему T, рассматриваемый определитель отличен от нуля при любых значениях $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

четные, а функции второй группы $\varphi_{i+1}(x), \varphi_{i+2}(x), \ldots, \varphi_n(x)$ нечетные, то наилучшее приближение данной функции $f(x)$ на множестве S при помощи полиномов всей системы то же, что при помощи одних только полиномов пер ой (четной) группы, когда $f(x)$ — четная функция; а когда $f(x)$ — нечетная функция, то оно равно наилучшему приближению при помощи полиномов одной только нечетной группы.

В самом деле, пусть полином наименьшего уклонения от $f(x)$ будет

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{i} A_k\varphi_k(x) + \sum_{k=i+1}^{n} A_k\varphi_k(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x),$$

где $\Phi_1(x)$ — четная функция, а $\Phi(x)$ — нечетная функция. Так как множество S симметрично, то, обозначая через M максимум погрешности $|f(x) - P_n(x)|$, имеем

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant M, \quad |f(-x) - P_n(-x)| \leqslant M;$$

следовательно, также

$$\left|\frac{f(x)+f(-x)}{2} - \Phi_1(x)\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{f(x)-f(-x)}{2} - \Phi_2(x)\right| \leqslant M.$$

Поэтому если $f(x)$ — четная функция, то

$$|f(x) - \Phi_1(x)| \leqslant M;$$

если $f(x)$ — нечетная функция, то

$$|f(x) - \Phi_2(x)| \leqslant M.$$

§ 5. Основная теорема Чебышева

В дальнейшем мы будем заниматься *исключительно изучением свойств полиномов наименьшего уклонения $P_n(x)$ данной системы T Чебышева* и докажем прежде всего фундаментальную теорему, которая, в основном, была установлена Чебышевым.

Теорема. *Для того, чтобы полином*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(x)$$

системы T был наименее уклоняющимся от данной непрерывной функции $f(x)$ на замкнутом множестве S, необходимо и достаточно, чтобы абсолютный максимум $|f(x) - P_n(x)|$ достигался не менее чем в $n+2$ точках $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+2}$ множества S, в которых знаки разности $f(x) - P_n(x)$ последовательно противоположны.

Таким образом, сколько бы ни было смежных точек $\xi_i', \xi_i'', \ldots, \xi_i^{(l)}$, где, максимальное отклонение $f(x) - P_n(x)$ достигается с одинаковым знаком, только одна их них должна учитываться в условии теоремы. Кроме того, следует помнить, что в случае, когда в конце промежутка

$\varphi_k(a)=\varphi_k(b)$ для всех k, то, согласно сказанному в начале § 4, предполагается также, что $f(b)=f(a)$; поэтому $f(b)-P_n(b)=$ $=f(a)-P_n(a)$, и при подсчете числа точек максимального отклонения точки a и b в этом случае должны считаться за одну.

Докажем сначала, что если имеется по крайней мере $\overline{n+2}$ точки ξ_i, где отклонение

$$f(\xi_i)-P_n(\xi_i)=\pm M \tag{3}$$

максимально по абсолютному значению и последовательно противоположно по знаку, то $P_n(x)$ есть полином, наименее уклоняющийся от $f(x)$. Для этого замечаем, что если бы существовал другой полином $Q_n(x)$ той же системы T, еще менее уклоняющийся от $f(x)$, т. е. если бы мы имели во всех точках множества S

$$|f(x)-Q_n(x)|<M,$$

а потому, в частности:

$$|f(\xi_i)-Q_n(\xi_i)|<M, \qquad (i=1, 2, \ldots, n+2),$$

то полином

$$F_n(x)=Q_n(x)-P_n(x)=(f(x)-P_n(x))-(f(x)-Q_n(x))$$

имел бы знак $f(\xi_i)-P_n(\xi_i)$ во всех точках ξ_i, т. е. имел бы в этих $\overline{n+2}$ точках отрезка (a, b) чередующиеся знаки; но это невозможно, так как полином $F_n(x)$ системы T не может иметь более n корней.

Покажем теперь, что, наоборот, если число точек отклонения ξ_i, где имеет место (3), равно $p\leqslant n+1$, то можно построить такой полином $R_n(x)$, для которого

$$|f(x)-R_n(x)|<M \tag{4}$$

во всех точках S, а потому $P_n(x)$ не был бы полиномом, наименее уклоняющимся от $f(x)$. Для этого разобьем отрезок (a, b) на p промежутков: (a, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{p-1}, b), где

$$a\leqslant\xi_1<x_1<\xi_2<\ldots<x_{p-1}<\xi_p\leqslant b,$$

так, чтобы в каждый промежуток входили точки максимального отклонения лишь одинакового знака; можем, например, выбрать точки x_i так, чтобы $f(x_i)-P_n(x_i)=0$. Тогда возможно будет зафиксировать некоторое достаточно малое положительное число $\alpha<M$, чтобы во всех точках множества S каждого из промежутков, в зависимости от соответствующего ему знака разности $f(\xi_i)-P_n(\xi_i)$, осуществлялось бы неравенство:

$$-M\leqslant f(x)-P_n(x)<M-\alpha \text{ или } -M+\alpha<f(x)-P_n(x)\leqslant M. \tag{5}$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. $n+1-p=2m\geqslant 0$. В таком случае, согласно лемме II § 1, можем построить полином $F_n(x)$ данной системы T, имеющий m произвольно взятых двойных корней, которые мы выбираем отличными от точек максимального отклонения, и $p-1$ простых корней $x_1, x_2, \ldots x_{p-1}$

так, чтобы в каждом из промежутков $(a, x_1), \ldots, (x_{i-1}, x_i), \ldots, (x_{p-1}, b)$ знак полинома $F_n(x)$ совпадал бы с соответствующим этому промежутку знаком $f(\xi_i) - P_n(\xi_i)$. Следовательно, полагая $\lambda > 0$ достаточно малым, чтобы иметь на всем отрезке (a, b):

$$\lambda \,|\, F_n(x) \,| < \alpha,$$

находим, принимая во внимание (5), что во всех точках множества S

$$-M < f(x) - P_n(x) - \lambda F_n(x) < M, \qquad (4 \text{ bis})$$

т. е. для полинома

$$R_n(x) = P_n(x) + \lambda F_n(x)$$

неравенство (4) соблюдалось бы во всех точках множества S.

Случай 2. $n - p = 2m \geqslant 0$. Если по крайней мере одна из точек a или b не является точкой максимального отклонения (или вовсе не принадлежит к множеству S), то присоединяя ее к числу простых корней $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, пользуясь тою же леммой II (§ I), мы можем построить полином $F_n(x)$, имеющий p простых и m двойных корней, который, подобно предыдущему, приведет нас к полиному

$$R_n(x) = P_n(x) + \lambda F_n(x),$$

дающему лучшее приближение функции $f(x)$, чем полином $P_n(x)$.

Но если мы используем только-что построенный полином $F_n(x)$ с простыми корнями $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, b$ и в том случае, когда b является точкой максимального отклонения, неравенство (4 bis) останется в силе во всех точках множества S, кроме точки b, где мы будем иметь

$$|\, f(b) - P_n(b) - \lambda F_n(b) \,| = M.$$

Поэтому, хотя максимум $|\, f(x) - R_n(x) \,| = M$, но единственной точкой максимального отклонения является b (и точка a с тем же значением, если система T периодическая), а потому достаточно взять любой полином $\Phi_n(x)$, для которого

$$\Phi_n(b) \cdot [f(b) - R_n(b)] > 0,$$

чтобы при достаточно малом $\mu > 0$ иметь во всех точках множества S

$$|\, f(x) - R_n(x) - \mu \Phi_n(x) \,| < M.$$

Следовательно условие $p \geqslant n + 2$ не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы полином $P_n(x)$ был наименее уклоняющимся от $f(x)$.

Следствие I. *Существует только один полином $P_n(x)$ данной системы T, наименее уклоняющийся от данной непрерывной функции $f(x)$.*

Действительно, допустим, что существовали бы два полинома $P_n(x)$ и $Q_n(x)$, для которых во всех точках множества S

$$|\, f(x) - P_n(x) \,| \leqslant E_n\,[f(x); S], \; |\, f(x) - Q_n(x) | \leqslant E_n\,[f(x); S].$$

В таком случае, полагая

$$\pi_n(x) = \frac{P_n(x) + Q_n(x)}{2},$$

мы имели бы

$$|f(x)-\pi_n(x)| \leqslant E_n\ [f(x); S],$$

т. е. $\pi_n(x)$ также был бы полиномом, наименее уклоняющимся от $f(x)$; при этом для него точками максимального уклонения будут только те точки, где одновременно

$$f(x)-P_n(x)=f(x)-Q_n(x)=\pm E_n\ [f(x); S].$$

Следовательно, во всех этих точках мы имели бы $P_n(x)=Q_n(x)$, а потому число их не может превышать n, если полиномы $P_n x$ и $Q_n(x)$ нетождественны; но это противоречит только-что доказанной теореме, согласно которой число точек максимального отклонения, где

$$|f(x)-\pi_n(x)|=E_n\ [f(x); S]$$

не менее, чем $n+2$.

Следствие II. *Если $P_n(x)$ полином, наименее уклоняющийся от $f(x)$ на множестве S, то он также является полиномом, наименее уклоняющимся от $f(x)$ на всяком подмножестве S' множества S, содержащем не менее, чем $\overline{n+2}$ точки максимального отклонения ξ_i с последовательно чередующимися знаками.*

Следствие III. *Полиномом $P_n(x)$, наименее уклоняющимся от $f(x)$ в множестве S, состоящем только из $\overline{n+2}$ точек $\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_{n+2}$, является тот единственный полином, для которого разность $f(x)-P_n(x)$ получает в этих точках одно и то же абсолютное значение $|\rho|$ с последовательно чередующимися знаками.*

Таким образом, для определения коэффициентов A_k полинома $P_n(x)$ и наилучшего приближения $|\rho|$ функции $f(x)$ в множестве S данных $\overline{n+2}$ точек ξ_i достаточно решить систему $\overline{n+2}$ линейных уравнений с $\overline{n+2}$ неизвестными:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(\xi_i)+\rho(-1)^i=f(\xi_i), \qquad (i=1, 2, \ldots, n+2). \tag{6}$$

Следовательно, в данном случае $E_n(f(x); S)=|\rho|$ имеет значение

$$|\rho|=\left|\frac{\delta_1 f(\xi_1)-\delta_2 f(\xi_2)+\ldots+(-1)^{n+1}\delta_{n+2}f(\xi_{n+2})}{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n+2}}\right|, \tag{7}$$

где

$$\delta_{i+1}=D(\varphi_0(\xi_1), \ldots, \varphi_{i-1}(\xi_i), \varphi_{i+1}(\xi_{i+2}), \ldots, \varphi_n(\xi_{n+2})), (i=0, 1, \ldots, n+1).$$

В большинстве случаев отыскание полинома $P_n(x)$, наименее уклоняющегося от данной функции $f(x)$, и наилучшего приближения $E_n\ [f(x); S]$ на бесконечном множестве точек S производится посредством методов последовательных приближений; поэтому весьма ценно иметь простой прием для установления границ, между которыми находится $E_n[f(x); S]$. Очевидно, что некоторую верхнюю границу

$E_n[f(x); S]$ мы можем получить, пользуясь любым приближенным полиномом $Q_n(x)$ данной системы, так как по определению

$$E_n[f(x); S] \leqslant \text{максимум } |f(x) - Q_n(x)|$$

(знак равенства имеет место лишь при условии, что $Q_n(x) \equiv P_n(x)$). Для получения нижней границы важную роль играет

Следствие IV (обобщенная теорема de la Vallée Poussin). *Если разность $f(x) - Q_n(x)$ приобретает в некоторых $\overline{n+2}$ последовательных точках $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ множества S значения $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ чередующихся знаков, причем m есть наименьший из их модулей, то*

$$E_n[f(x); S] \geqslant m; \tag{8}$$

приэтом знак равенства имеет место лишь при условии, что все $|\lambda_i| = m$ и $P_n(x) \equiv Q_n(x)$.

Действительно, благодаря следствию III формула (7) имеем:

$$E_n[f(x); S] \geqslant |\rho| = \left|\frac{\delta_1\lambda_0 - \delta_2\lambda_1 + \cdots + (-1)^n\delta_{n+2}\lambda_{n+1}}{\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{n+2}}\right| \geqslant m,$$

причем знак равенства $|\rho| = m$ имеет место лишь при условии, что все $|\lambda_i| = m$, а

$$E_n[f(x); S] = |\rho|$$

означает, что точки ξ_i являются точками максимального отклонения для полинома $P_n(x)$ наименее уклоняющегося от $f(x)$ на всем множестве S, и следовательно, согласно следствию II, этот же полином $P_n(x)$ является наименее уклоняющимся и в $\overline{n+2}$ точках ξ_i, т. е. $P_n(x) \equiv Q_n(x)$.

§ 6. Полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля

Пусть система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ обладает свойством, что среди них есть, по крайней мере, одна $\varphi_h(x)$ такая, что совокупность прочих функций образует на данном отрезке (a, b) систему Чебышева $T_{(h)}$ порядка $\overline{n-1}$. В таком случае, согласно § 5, среди полиномов

$$F_n(x) = c_0\varphi_0(x) + \ldots + c_{h-1}\varphi_{h-1}(x) + \\ + \varphi_h(x) + c_{h+1}\varphi_{h+1}(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

имеющих при $\varphi_h(x)$ коэффициент, равный единице, существует (единственный) полином

$$P_n(x) = B_0\varphi_0(x) + \ldots + \varphi_h(x) + \\ + B_{h+1}\varphi_{h+1}(x) + \ldots + B_n\varphi_n(x),$$

максимальный модуль которого на данном замкнутом подмножестве S отрезка (a, b) меньше максимального модуля всякого другого полинома $F_n(x)$ на том же множестве S. Полиномы $cP_n(x)$, где $c \gtrless 0$—произвольная постоянная, называются полиномами данной системы функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, наименее уклоняющимися от нуля на множестве S. На основании теоремы § 5 заключаем, что число групп смежных точек, где $cP_n(x)$ достигает максимального абсолютного значения с одинаковым знаком не менее чем $n+1$, так как

$$-(B_0\varphi_0(x)+\ldots+B_{h-1}\varphi_{h-1}(x)+B_{h+1}\varphi_{h+1}(x)+\ldots+B_n\varphi_n(x))$$

является полиномом системы $T_{(h)}$ (порядка $n-1$), наименее уклоняющимся от $\varphi_h(x)$ на множестве S; таким образом $P_n(x)$ имеет не менее n корней.

Сделаем еще одно существенное замечание. *если, кроме $\varphi_h(x)$, существует еще другая функция $\varphi_l(x)$ $(l \gtrless 0)$, отбрасывание которой приводит к системе Чебышева $T_{(l)}$ порядка $\overline{n-1}$, то соответствующие ей полиномы данной системы, наименее уклоняющиеся от нуля, на том же множестве S совпадают с $cP_n(x)$.* Действительно, коэффициент B_l при $\varphi_l(x)$ в полиноме $P_n(x)$ отличен от нуля, так как в противном случае $P_n(x)$ был бы полиномом системы $T_{(l)}$ порядка $\overline{n-1}$ и не мог бы иметь n корней. Следовательно:

$$\frac{P_n(x)}{B_l}=\frac{B_0}{B_l}\varphi_0(x)+\ldots+\frac{1}{B_l}\varphi_h(x)+\ldots+\varphi_l(x)+\ldots+\frac{B_n}{B_l}\varphi_n(x),$$

достигая максимального абсолютного значения с противоположными знаками не менее, чем в $\overline{n+1}$ точках, является наименее уклоняющимся от нуля среди всех полиномов данной системы $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, имеющих при $\varphi_l(x)$ коэффициент, равный единице.

Поэтому имеет место следующая

Теорема А. *Если среди функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ имеются одна или несколько $m \leqslant n+1$ функций $\varphi_{h_1}(x), \varphi_{h_2}(x), \ldots, \varphi_{h_m}(x)$ таких, что, отбрасывая одну из них, мы получаем систему функций T Чебышева на отрезке (a, b), то существует один определенный с точностью до постоянного множителя полином*

$$c\,P_n(x)=\sum_{k=0}^{p}A_k\varphi_k(x),$$

характеризующийся тем, что его максимальный модуль на данном замкнутом подмножестве S отрезка (a, b) меньше, чем у всех прочих полиномов данной системы, имеющих тот же коэффициент A_{h_i}, что и $c\,P_n(x)$, при одной из указанных функций $\varphi_h(x)$. Если все функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *также образуют систему T*, то число групп смежных точек, где экстремум $P_n(x)$ достигается с одинаковым знаком, *равно* $\overline{n+1}$.

Рассмотрим, в частности, систему функций: $1, x, \ldots x^n$, образующих на любом конечном отрезке систему T при всяком n.

Пусть $P_n(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n$ будет многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $(-1, +1)$. В таком случае его максимальное абсолютное значение L достигается в $\overline{n+1}$ точках, удовлетворяющих уравнению

$$P_n'(x)\cdot(1-x^2)=0.$$

Следовательно, уравнение

$$L^2 - P_n^2(x) = 0$$

будет иметь двойными корнями корни уравнения $P_n'(x) = 0$ и простыми корнями ± 1; поэтому многочлены

$$L^2 - P_n^2(x) \quad \text{и} \quad P_n'^2(x) \cdot (1 - x^2)$$

степени $2n$ имеют одинаковые корни, одинаковой кратности и, следовательно, отличаются только численным множителем n^2, который определяется сравнением коэффициентов при x^{2n} в обоих многочленах. Таким образом, $P_n(x)$ должен удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$L^2 - P_n^2(x) = \frac{1}{n^2} P_n'^2(x)(1 - x^2), \tag{9}$$

т. е.

$$\frac{dP_n(x)}{\sqrt{L^2 - P_n^2(x)}} = \pm n \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

откуда получаем, что

$$\arccos \frac{P_n(x)}{L} = n \arccos x + C,$$

где C — произвольная постоянная, т. е.

$$P_n(x) = L[\cos n \arccos x \cdot \cos C - \sin n \arccos x \cdot \sin C]$$

Но так как $P_n(x)$ многочлен, то $\sin C = 0$; кроме того,

$$L \cos C = L = \frac{1}{2^{n-1}},$$

потому что коэффициент при x^n равен 1. Таким образом[1]):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} [x^n + C_n^2 x^{n-2}(x^2 - 1) + \ldots + C_n^{2k} x^{n-2k}(x^2 - 1)^k + \ldots] =$$

$$= x^n - \frac{n}{4} x^{n-2} + \ldots + \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{n}{k} C_{n-k-1}^{k-1} x^{n-2k} + \ldots \tag{10}$$

действительно достигает своего максимального абсолютного значе-

---

[1]) Разложение $P_n(x)$ по степеням x проще всего получить, заметив, что $P_n(x)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(1 - x^2) P_n''(x) - x P_n'(x) + n^2 P_n(x) = 0,$$

которое получается дифференцированием (9), после чего, применяя способ неопределенных коэффициентов и учитывая, что коэффициенты при x^n и x^{n-1} соответственно равны 1 и 0, последовательно определяем прочие коэффициенты.

ния $\frac{1}{2^{n-1}}$ с противоположными знаками в $\overline{n+1}$ точках $\xi_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ отрезка $(-1, +1)$, причем коэффициент при x^n равен 1.

Отсюда вытекает

Теорема В. *Из всех многочленов степени n*

$$F_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n \tag{11}$$

на отрезке $(-1, +1)$ наименее уклоняется от нуля многочлен Чебышева $\frac{1}{2^{n-1}}\cos n \arccos x = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$, и ни один многочлен $F_n(x)$ не может оставаться меньше, чем $\frac{1}{2^{n-1}}$, по абсолютному значению на всем отрезке $(-1, +1)$.

Этот же многочлен $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ является наименее уклоняющимся от нуля и на всяком подмножестве S отрезка $(-1, +1)$, включающем все точки $\cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Аналогичным образом (делая соответствующую линейную подстановку) убеждаемся, что на любом отрезке (a, b) многочлен $F_n(x)$ вида (11) не может по абсолютному значению оставаться менее $2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$, и многочленом наименее уклоняющимся от нуля на отрезке (a, b), у которого коэффициент при x^n равен 1, является

$$2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \cos n \arccos\frac{2x-a-b}{b-a}.$$

Геометрически полученный результат может быть формулирован следующим образом: *каковы бы ни были заданные n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на плоскости, произведение расстояний*

$$MA_1 \cdot MA_2 \ldots MA_n$$

от них до точки M, пробегающей данный отрезок (a, b) длины $b-a=2h$, не может оставаться все время менее $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$.

Теорема В допускает следующее обобщение (теорема Polya): *многочлен $F_n(x) = x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_n$ ни на одном замкнутом множестве S, находящемся на вещественной оси*[1]*, линейная мера которого равна $2h$, не может оставаться менее $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$ по абсолютному значению, и должен превысить эту величину, если S не является сплошным отрезком длины $2h$.*

---

[1]) Легко убедиться, что теорема остается в силе, если множество S произвольно расположено на плоскости, при условии, что его проекция на некоторую ось имеет линейную меру, равную $2h$.

В самом деле, если $P_n(x)=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$ есть многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на множестве S, крайней левой точкой которого служит A, а крайней правой — точка B, то все корни его должны быть вещественны и заключены между A и B, так как на множестве S имеются по крайней мере $n+1$ точки ξ_i, где максимальное значение $P_n(x)$ достигается с противоположными знаками; кроме того, точки A и B сами также являются точками максимального отклонения, так как каждой внутренней точке ξ_i максимального отклонения должна соответствовать точка z_i, где производная $P_n'(x)=0$. Остается показать, что, если множество S состоит из двух частей S_1 и S_2 таких, что в S_1 все точки $x_1\leqslant c$, а в S_2 все точки $x_2\geqslant d$, где $d-c=\rho>0$, то, заменяя множество $S=S_1+S_2$ множеством $\sum=S_1+\sum_2$, где точки y множества $\sum_2$ получаются сдвигом влево на длину ρ точек множества S_2 (т. е. $y=x_2-\rho$), то максимум многочлена, наименее уклоняющегося от нуля того же вида (11), на $\sum$ меньше, чем максимум $|P_n(x)|=M$. Для этого строим многочлен

$$R_n(x)=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1}+\rho)\ldots$$
$$\ldots(x-\alpha_{k+l}+\rho)(x-c)^{n-k-l},$$

сохраняя все корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ многочлена $P_n(x)$, которые не превышают c, уменьшая на $\rho=d-c$ те из корней $P_n(x)$, которые не меньше d ($\alpha_{k+i}\geqslant d$, при $i=1, 2, \ldots, l$), и заменяя через c остальные $n-k-l$ корней $(\alpha_{k+l+1}, \ldots, \alpha_n)$, находящиеся в промежутке (c, d). Тогда, в точках $x_1\leqslant c$ множества S_1, очевидно,

$$|R_n(x_1)|\leqslant|P_n(x_1)|,$$

причем знак равенства был бы возможен только при $k=n$. Точно также, $|R_n(y)|\leqslant|P_n(x_2)|$, где $y=x_2-\rho$ — точка множества $\sum_2$, соответствующая точке $x_2\geqslant d$ множества S_2, причем знак равенства имеет место лишь при условии, что $k=0$, $l=n$, так как

$$x_2-\alpha_{k+l+i}>x_2-d=y-c.$$

Отсюда следует, что во всех точках множества $\sum$

$$|R_n(x)|\leqslant M \tag{12}$$

и, кроме того, по крайней мере в одной из граничных точек A или $B-\rho$ множества $\sum$ имеем $|R_n(x)|<M$; поэтому, если бы в (12) знак равенства был возможен, то $R_n(x)$ не был бы многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на $\sum$, что и требовалось доказать.

Примечание. Задача построения многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на двух и более отрезках, в общем случае значительно сложнее, и лишь в более или менее частных случаях допускает простое решение. Ясно, что всякий многочлен $R_n(x)$ степени n с старшим коэффициентом, равным 1, имеющий лишь простые действительные корни, является наименее уклоняющимся на n отрезках, концы которых (a_i, b_i) удовлетворяют одному и тому же уравнению $R_n^2(x)-L^2=0$, где L достаточно мало, чтобы внутри отрезков

a_i, b_i) не было корней уравнения $R_n'(x)=0$. Этот же многочлен вообщ будет наименее уклоняющимся и для $n-1$ отрезков, если выбрать L равным наименьшему из значений $|R_n(\xi_k)|$, где ξ_k — различные корни уравнения $R_n'(x)=0$. Если $h \geqslant 1$ есть число корней $R_n'(x)=0$, для которых $|R_n(\xi_k)|$ получают это же самое наименьшее значение L, то число отрезков будет низведено до $n-h$. Вышеуказанный многочлен Чебышева является единственным (с точностью до линейного преобразования), для которого $n-k=1$. Из этих соображений видно также, что многочлен $R_n(x)$, наименее уклоняющийся от нуля на любом множестве S, является таковым и для одного или нескольких (не более $n-1$) отрезков, и все точки этого множества, где $R_n'(x)=0$, являются точками максимального отклонения. Для некоторой ориентировки относительно размеров наилучшего приближения на двух отрезках, ограничимся рассмотрением случая, когда оба отрезка A_1B_1 и A_2B_2 равны; обозначим через $2d=A_1B_2$ расстояние между их наиболее удаленными точками и через $2\alpha=B_1A_2$ — длину промежутка, разделяющего их. Положим, что n — число четное; тогда вследствие симметрии относительно середины O промежутка B_1A_2, принимая O за начало, видим, что многочлен наименьшего уклонения $P_n(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n$ содержит лишь четные степени x. Поэтому, полагая $x^2=y$, находим, что $P_n(\sqrt{y})=S_{\frac{n}{2}}(y)$ является многочленом степени $\frac{n}{2}$, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке (α^2, d^2). Следовательно, искомое наименьшее уклонение равно

$$L=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2-\alpha^2}{4}\right]^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{d^2-\alpha^2}}{2}\right)^n,$$

т. е. совпадает с наименьшим уклонением на одном отрезке, длина которого равна хорде круга, имеющего диаметром A_1B_2, проведенной перпендикулярно к этому диаметру через точку A_2 или B_1. Аналогичным образом можно получить решение задачи для трех отрезков $(-d, -\beta)$, $(-\alpha, \alpha)$, (β, d) при условии, что $d^2=\alpha^2+\beta^2$ $\left(\textit{Ответ}:\ L=2\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right)$.

Возвращаясь к многочленам Чебышева, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке (a, b), заметим, что в случае $0 \leqslant a < b$, благодаря теореме Декарта, система функций $1, x, \ldots, x^n$ остается системой T, какую бы из функций x^l мы ни отбросили ($l>0$) (если $a>0$, то это справедливо и для $l=0$). Поэтому из теоремы A следует

Следствие I. *Из всех многочленов степени n, имеющих тот же коэффициент A_l при x^l, что и многочлен*

$$LT_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)=L\cos n\arccos\frac{2x-a-b}{b-a}=\sum_{k=0}^{n}A_kx^k, \qquad (13)$$

последний наименее уклоняется от нуля на отрезке (a, b) положительной полуоси. Это утверждение, очевидно, применимо также к случаю, когда отрезок (a, b) находится на отрицательной полуоси.

Поэтому, и наоборот, справедливо

Следствие II. *Если на отрезке (a, b) положительной полуоси многочлен степени n*

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k x^k$$

не превышает L по абсолютному значению ($|F_n(x)| \leqslant L$), *то все коэффициенты его B_k удовлетворяют неравенствам*

$$|B_k| \leqslant |A_k|, \tag{14}$$

где A_k — коэффициенты многочлена (13).

Заметим, что неравенства (14) можно, очевидно, записать и в таком виде

$$\left|\left[\frac{d^k F_n(x)}{dx^k}\right]_{x=0}\right| \leqslant L \left|\left[\frac{d^k T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)}{dx^k}\right]_{x=0}\right| \tag{15}$$

при условии, что a и b одинакового знака. Поэтому, делая замену переменных $x = t - c$, заключаем, что *для всякой точки c вне отрезка* (a, b) *будет справедливо неравенство*

$$\left|\left[\frac{d^k F_n(x)}{dx^k}\right]_{x=c}\right| \leqslant L \left|\left[\frac{d^k T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)}{dx^k}\right]_{x=c}\right|, \tag{16}$$

если $|F_n(x)| \leqslant L$ *на отрезке* (a, b).

В частности, полагая в (16) $k = 0$, получаем

Следствие III. *Если многочлен степени n*

$$|F_n(x)| \leqslant L$$

на отрезке (a, b), *то во всякой точке x вещественной оси вне отрезка* (a, b) *имеем*

$$|F_n(x)| \leqslant L \left|\cos n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}\right|. \tag{17}$$

Принимая во внимание, что, согласно сделанному выше замечанию, многочлен (13) является наименее уклоняющимся от нуля на множестве S, содержащем только $n+1$ точки

$$\xi_k = \frac{1}{2}\left[a + b + (b-a)\cos\frac{k\pi}{n}\right] = b\cos\frac{k\pi}{2n} + a\sin\frac{k\pi}{2n}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$

его максимального отклонения на отрезке (a, b), следствия I и II, как и неравенства (14), (15), (16), (17), остаются в силе и в том случае, когда неравенство $|F_n(x)| \leqslant L$ соблюдено только в указанных $n+1$ точках ξ_k отрезка (a, b).

Неравенству (17) можно придать простую геометрическую форму. Положим $b - a = 2h$, $x - \frac{a+b}{2} = y > h$ (так что точка x находится вне отрезка (a, b)). В таком случае,

$$\cos n \arccos \frac{2x-b-a}{b-a} = \cos n \arccos \frac{y}{h} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y+\sqrt{y^2-h^2}}{h}\right)^n + \left(\frac{y-\sqrt{y^2-h^2}}{h}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\left[R^n + \frac{1}{R^n}\right],$$

где $R = \frac{y+\sqrt{y^2-h^2}}{h} > 1$ есть не что иное, как отношение полусуммы осей $y+\sqrt{y^2-h^2}$ эллипса, имеющего фокусами точки (a, h) и проходящего через точку x, к половине его фокусного расстояния h. Неравенство (17) получит таким образом вид:

$$|F_n(x)| \leqslant \frac{L}{2}\left[R^n + \frac{1}{R^n}\right] < LR^n. \tag{17 bis}$$

Таким образом, *максимальное значение, которое многочлен $F_n(x)$ может получить в точке x вне отрезка длины $2h$, где он остается менее данной величины L, возрастает с увеличением степени n не быстрей, чем в геометрической прогрессии с знаменателем R*. Это замечание будет нами в дальнейшем обобщено и сыграет существенную роль при изучении наилучшего приближения аналитических функций посредством многочленов.

Обратим еще особое внимание на следствие I в случае $a=0$. Тогда, пользуясь формулой (10), имеем:

$$L\cos n \arccos \frac{2x-b}{b} = L\cos 2n \arccos \sqrt{\frac{x}{b}} =$$

$$= 2^{2n-1}L\left[\left(\frac{x}{b}\right)^n - \frac{2n}{4}\left(\frac{x}{b}\right)^{n-1} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{2n}{k} C_{2n-k-1}^{k-1}\left(\frac{x}{b}\right)^{n-k} + \ldots\right].$$

Следовательно, коэффициенты A_k при x^k этого многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на $(0, b)$, имеют численные значения

$$A_k = (-1)^{n-k} L \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!\,2k!} n \left(\frac{4}{b}\right)^k \tag{18}$$

Поэтому в данном случае неравенства (14) имеют вид:

$$|B_k| \leqslant L \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!\,2k!} n \left(\frac{4}{b}\right)^k. \tag{19}$$

Полезно заметить, полагая $k=\lambda n$ и L конечиым и независящим от n (пользуясь формулой Стирлинга), что

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|A_k|} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\left(\frac{1-\lambda^2}{b\lambda^2}\right)^\lambda \tag{18 bis}$$

и имеет максимальное значение при $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+b}}$ равное

$$\frac{\sqrt{1+b}+1}{\sqrt{1+b}-1};$$

напротив,

$$\lim \sqrt[k]{|A_k|} = \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1-\lambda^2}{b\lambda^2}\right),$$

возрастая с убыванием λ, при $\lambda \to 0$ бесконечно растет.

Кроме того, умножая обе части неравенства (19) на $k!$, получим

Следствие IV. *Если на данном промежутке длины b многочлен $F_n(x)$ степени n удовлетворяет неравенству $|F_n(x)| \leqslant L$, то в концах этого промежутка его производные $F_n^{(k)}(x)$ порядка k удовлетворяют неравенствам* (В. А. Маркова):

$$|F_n^{(k)}(x)| \leqslant Ln\frac{(n+k-1)!\,k!}{(n-k)!\,2k!}\left(\frac{4}{b}\right)^k =$$

$$= L\frac{n^2(n^2-1)\dots[n^2-(k-1)^2]}{(k+1)\dots 2k}\left(\frac{4}{b}\right)^k. \qquad (20)$$

§ 7. Другие примеры применения основной теоремы Чебышева

Рассмотрим периодическую функцию

$$P(\theta) = A\cos n\theta + B\sin n\theta = \sqrt{A^2+B^2}\cos(n\theta-\alpha),$$

где n — целое число, $\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Эта функция в промежутке $(-\pi, \pi)$ достигает своего абсолютного максимума $\sqrt{A^2+B^2}$ с последовательно противоположными знаками в $2n$ точках $\theta_k = \frac{\alpha+k\pi}{n}$, где k — целое число (значения θ_k и θ_{k+2n}, отличающиеся на 2π, не считаются за различные). Поэтому, какова бы ни была система T функций Чебышева $\varphi_0(\theta), \varphi_1(\theta), \dots, \varphi_{2n-2}(\theta)$, полиномом этой системы, наименее уклоняющимся от $P(\theta)$, будет *нуль*. В частности, если взять

$$\varphi_0\theta = 1,\ \varphi_1(\theta) = \cos\theta,\ \varphi_2(\theta) = \sin\theta,\ \dots,\ \varphi_{2n-2}(\theta) = \sin(n-1)\theta,$$

получается

Теорема I. *Тригонометрический полином*

$$F_n(\theta) = A_0 + A_1\cos\theta + B_1\sin\theta + \dots + B_{n-1}\sin(n-1)\theta +$$
$$+ A\cos n\theta + B\sin n\theta$$

не может при всех вещественных значениях θ оставаться меньше, чем $\sqrt{A^2+B^2}$ по абсолютному значению.

Эта теорема допускает следующее обобщение, которое является примером, относящимся к системам функций, не являющихся системами T.

Теорема II. *Каковы бы ни были вещественные неотрицательные числа* $\lambda_i < 1$ *и каково бы ни было число* N, *полином* $\sum_{i=1}^{N} A_i \cos \lambda_i \theta + B_i \sin \lambda_i \theta + A \cos \theta + B \sin \theta$ *не может при всех вещественных значениях* θ *оставаться по модулю меньше, чем* $\sqrt{A^2+B^2}$.

Для доказательства, полагаем сначала все числа λ_i рациональными; после приведения к одному знаменателю, напишем $\lambda_i = \frac{n_i}{n}$, где $n_i < n$. Поэтому, полагая $\theta = n\varphi$, можем на основании предшествующей теоремы утверждать, что для любых рациональных значений λ_i $|F(\theta)| = |F(n\varphi)| \leqslant \sqrt{A^2+B^2}$ при всех вещественных значениях θ. Но, так как $F(\theta)$, рассматриваемая как функция переменных λ_i, непрерывна, то неравенство остается в силе и для любых иррациональных чисел $\lambda_i < 1$.

Возвращаясь к случаю, когда в тригонометрическом полиноме

$$F_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta$$

числа k — целые, так что $F_n(\theta)$ представляет периодическую функцию с периодом 2π, предположим заданными два коэффициента A_h и B_h, где $0 < h < n$, и поставим себе задачу определить прочие коэффициенты A_k, B_k так, чтобы максимум $|F_n(\theta)|$ на вещественной оси был возможно мал. Однако в данном случае теорема § 5 не приложима, так как система функций $1, \cos\theta, \ldots, \sin(h-1)\theta, \cos(h+1)\theta, \ldots, \sin n\theta$ не образует системы T, поэтому полностью мы эту задачу не разрешим и получим лишь некоторые неравенства.

Для этого, замечая, что

$$A_h \cos h\theta + B_h \sin h\theta = \sqrt{A_h^2 + B_h^2} \cos(h\theta - \alpha),$$

где

$$\frac{A_h}{\sqrt{A_h^2+B_h^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{B_h}{\sqrt{A_h^2+B_h^2}} = \sin\alpha,$$

и делая замену переменной $\varphi = \theta - \frac{\alpha}{h}$, прежде всего общую задачу приведем к случаю, когда $B_h = 0$. Кроме того, в этом случае, на основании леммы § 4, если $F_n(\theta)$ наименее уклоняется от нуля, то все коэффициенты $B_k = 0$. Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением функций

$$F_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} A_k \cos k\theta,$$

где $A_h = 1$ при данном h $(0 < h < n)$.

Иными словами, наша четная периодическая функция $F_n(\theta)$ подчинена условию, что

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F_n(\theta)\cos h\theta d\theta = 1. \tag{21}$$

Если мы отбросим пока ограничение, что $F_n(\theta)$ есть тригонометрический полином, и заменим его произвольной функцией $F(\theta)$, удовлетворяющей условию (21), то, обозначая через L ее абсолютный максимум, мы получим из (21), что

$$\frac{2L}{\pi}\int_0^\pi |\cos h\theta|\, d\theta = \frac{2L}{h\pi}\int_0^{h\pi} |\cos\varphi|\, d\varphi = \frac{4L}{\pi} \geqslant 1,$$

причем равенство $L=\frac{\pi}{4}$ будет иметь место, когда $F(\theta)=\pm\frac{\pi}{4}$, где знак $F(\theta)$ всегда совпадает со знаком $\cos h\theta$; поэтому функцией $F(\theta)$, наименее уклоняющейся от нуля среди всех, удовлетворяющих (21), будет

$$F(\theta) = \cos h\theta - \frac{\cos 3h\theta}{3} + \ldots$$

Следовательно, наименьшее значение $M_{h,n}$ абсолютного максимума полинома $F_n(\theta)$ удовлетворяет двойному неравенству:

$$\frac{\pi}{4} < M_{h,n} < 1 \qquad (0 < h < n) \tag{22}$$

Кроме того, на основании известной теоремы Фейера о средней арифметической из последовательных конечных сумм тригонометрического ряда Фурье, при всяком целом значении p, имеем:

$$\frac{2p\cos h\theta - \frac{2p-2}{3}\cos 3h\theta + \ldots \pm \frac{2}{2p-1}\cos(2p-1)h\theta}{2p+1} \leqslant \frac{\pi}{4},$$

поэтому

$$\left|\cos h\theta - \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cos 3h\theta + \ldots \pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{1}{2p-1}\left(1-\frac{p-1}{p}\right)\cos(2p-1)h\theta\right| \leqslant \frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{2p}\right). \tag{23}$$

Таким образом, если

$$p = \left[\frac{n+h}{2h}\right] \geqslant 2,$$

т. е. $n \geqslant 3h$, то неравенство (23), из которого вообще вытекает, что

$$M_{h,n} \leqslant \frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{2p}\right), \tag{24}$$

дает более точную *верхнюю* границу для $M_{h,n}$ чем (22). Из (22) и (24) следует также, что

$$\lim_{n=\infty} M_{h,n} = \frac{\pi}{4}$$

при всяком данном $h > 0$.

Определим еще наилучшее приближение $A \cos n\theta$ при помощи тригонометрического полинома $\sum_{k=0}^{n-1} p_k \cos k\theta + q_k \sin k\theta$ в промежутке $(\varphi_0, -\varphi_0)$, где $0 < \varphi_0 < \pi$.

На основании леммы § 4, в полиноме наилучшего приближения все коэффициенты $q_k = 0$; таким образом, полагая $x = \cos\theta$, мы должны найти многочлен степени n:

$$F_n(x) = A \cos n \arccos x - \sum_{k=0}^{n-1} p_k \cos n \arccos x = A2^{n-1}x^n + \\ + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \tag{25}$$

наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $(\cos\varphi_0, 1)$, у которого коэффициент при x^n равен 2^{n-1}. Эта задача для всякого отрезка (a, b) нами уже решена в § 6, и, следовательно, искомое наилучшее приближение [1]):

$$L = 2^n A \left[\frac{1 - \cos\varphi_0}{4}\right]^n = A\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)^{2n}. \tag{26}$$

Интересно заметить, что при любом $\varphi_0 < \pi$, с возрастанием n, L стремится к нулю.

§ 8. Многочлены, наименее уклоняющиеся от функций, аналогичных функции Вейерштрасса без производной

Если для некоторой функции $f(x)$ нам известны многочлены $P_n(x)$ любой степени n, наименее уклоняющиеся от нее на данном отрезке (a, b), где для определенности положим $a = -1$, $b = 1$, то ряд

$$f(x) = P_0(x) + [P_1(x) - P_0(x)] + \ldots + \\ + [P_{n+1}(x) - P_n(x)] + \ldots, \tag{27}$$

равномерно сходящийся на отрезке $(-1, +1)$, является наилучше сходящимся рядом многочленов функции $f(x)$, так как $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \leqslant E_n[f(x)]$. Однако, фактическое построение таких рядов представляет большие трудности. Поэтому значительный интерес представляет следующая

---

[1]) Пользуюсь случаем, чтобы указать, что, по недосмотру, решение этой задачи ($A = 1$), данное в моей книге L. S. на стр. 15, соответствует другому условию задачи, а именно, условию: $A = 1 - p_{n-1} + p_{n-2} - \ldots + (-1)^n p_0$, т. е. заданному значению $F_n(\cos\pi) = F_n(-1) = 1$, а не условию $A = 1$.

Теорема I. *Если многочлены $P_n(x)$, наименее уклоняющиеся от $f(x)$ на отрезке $(-1, +1)$, обладают свойством, что $P_n(x)$ является также многочленом степени n, наименее уклоняющимся от h многочленов $P_{n+1}(x)$, $P_{n+2}(x)$, $\ldots$, $P_{n+h}(x)$, среди которых, по крайней мере, два различны между собой и отличны от $P_n(x)$, то*

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i T_{\lambda_i}(x), \tag{28}$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$, $\dfrac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} = 2p_i + 1$ *произвольные нечетные числа, многочлены же наименьшего уклонения равны*

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{h-1} a_i T_{\lambda_i}(x) \qquad \lambda_{h-1} \leqslant n < \lambda_h. \tag{29}$$

Действительно, если при данном n многочлен $P_n(x)$, не совпадая с $P_{n+1}(x)$, наименее уклоняется от $P_{n+1}(x)$, то

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = A_{n+1} T_{n+1}(x), \ (A_{n+1} \gtrless 0), \tag{30}$$

поэтому, согласно (27):

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} T_{n+1}(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i T_{\lambda_i}(x),$$

где через $a_i \gtrless 0$ мы обозначили все последовательные значения $A_{n+1} \gtrless 0$, а соответствующие значения $n+1$ обозначили через λ_i. В таком случае, вследствие (30), все многочлены $P_n(x)$ будут даны формулой (29). Остается лишь показать, что $\dfrac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} = 2p_i + 1$. Для этого замечаем, что, так как $P_{\lambda_h - 1}(x)$ является многочленом степени не выше $\lambda_h - 1$, наименее уклоняющимся от $P_{\lambda_{h+1}}(x)$, то

$$P_{\lambda_{h+1}}(x) - P_{\lambda_{h-1}}(x) = a_h T_{\lambda_h}(x) + a_{h+1} T_{\lambda_{h+1}}(x)$$

достигает своего наибольшего абсолютного значения L с противоположными знаками не менее, чем в $\lambda_h + 1$ точках отрезка $(-1, +1)$. Если $a_h a_{h+1} > 0$, т. е. если все a_h одинакового знака, то это значение $L = |a_h + a_{h+1}|$ достигается при $x = 1$, где все многочлены $T_n(x)$ получают свое наибольшее значение $+1$. Поэтому должно быть еще λ_h точек, где $T_{\lambda_h}(x)$ и $T_{\lambda_{h+1}}(x)$ одновременно получают значения ± 1 с одинаковым знаком; но это имеет место тогда и только тогда, когда

$$T_{\lambda_{h+1}}\left(\cos \frac{k\pi}{\lambda_h}\right) = T_{\lambda_h}\left(\cos \frac{k\pi}{\lambda_h}\right) = (-1)^k,$$

т. е., при условии, что

$$\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} = 2p_h + 1$$

целое нечетное число. В таком случае, т. е. при условии, что все a_i одинакового знака:

$$f(x) - P_n(x) = \sum_{i=h}^{\infty} a_i T_{\lambda_i}(x) \qquad (\lambda_{h-1} \leqslant n < \lambda_h) \quad (31)$$

достигает своего абсолютного максимума

$$\pm \sum_{i=h}^{\infty} a_i$$

с противоположными знаками в $\lambda_h + 1$ точках $\cos\frac{k\pi}{\lambda_h + 1}$ ($k = 0, 1, \ldots, \lambda_h$) и следовательно

$$E_n[f(x)] = \pm \sum_{i=h}^{\infty} a_i.$$

Несколько сложнее обстоит дело, если знаки a_i могут быть различны. Покажем сначала, что и в этом случае погрешность (31) будет достигать своего абсолютного максимума с противоположными знаками не менее чем в $\lambda_h + 1$ точках, т. е. (29) будет многочленом, наименее уклоняющимся от $f(x)$, если $\frac{\lambda_{h+s}}{\lambda_h} = 2q_s + 1$ — нечетные числа. Действительно, полагая $x = \cos\frac{\varphi}{\lambda_h}$, имеем:

$$F(\varphi) = \sum_{i=h}^{\infty} a_i T_{\lambda_i}(x) = a_h \cos\varphi + a_{h+1}\cos(2q_1 + 1)\varphi + \ldots$$

но, так как

$$F(\pi - \varphi) = -F(\varphi),$$

то в промежутке $(0, \pi)$ функция $F(\varphi)$ достигает своего абсолютного максимума с противоположными знаками не менее двух раз, а следовательно, в промежутке $(0, \lambda_h\pi)$ она его достигает не менее, чем в $\lambda_h + 1$ точках.

Итак, для завершения доказательства, нужно убедиться, что при данном $b = -\frac{a_h}{a_{h+1}} > 0$ многочлен

$$bT_{\lambda_h}(x) - T_{\lambda_{h+1}}(x)$$

может достигать абсолютного максимума с противоположными знаками в $\lambda_h + 1$ точках лишь при условии, что $\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} = 2p_h + 1$. В самом деле, пусть p будет общим наибольшим делителем λ_h и λ_{h+1}, так что $\lambda_h = mp$, $\lambda_{h+1} = m_1 p$, $m_1 > m$ — взаимно простые числа. Нужно доказать невозможность предположения $m > 1$. Следовательно, полагая $x = \cos \frac{\varphi}{p}$, требуется доказать, что

$$bT_{\lambda_h}(x) - T_{\lambda_{h+1}}(x) = b\cos m\varphi - \cos m_1\varphi$$

не может достигать абсолютного экстремума L с чередующимися знаками в $m+1$ точках φ промежутка $(0, \pi)$, если $m_1 > m > 1$ числа взаимно простые. Это очевидно для $m_1 - m$ нечетного, так как мы имели бы $L = b+1$, и значение $\pm L$ должно было бы получиться при всех значениях $\varphi = \frac{k\pi}{m}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, между тем для $k = 0$ получаем $(b-1)$.

Поэтому достаточно рассмотреть лишь случай, когда числа $m_1 > m \geqslant 3$ оба нечетные. В таком случае, принимая во внимание, что, согласно теореме I § 7, $L > 1$, заключаем, что знак абсолютного экстремума должен совпадать с знаком $\cos m\varphi$, вследствие чего положительные экстремумы могут быть лишь в $\frac{m+1}{2}$ промежутках

$$\left(0, \frac{\pi}{2m}\right), \left(\frac{4i-1}{2m}\pi, \frac{4i+1}{2m}\pi\right), \ldots, \left(\frac{2m-3}{2m}\pi, \frac{2m-1}{2m}\pi\right),$$

а отрицательные экстремумы могут осуществляться лишь в остальных $\frac{m+1}{2}$ промежутках отрезка $(0, \pi)$. Следовательно, в каждом из этих промежутков экстремум, действительно, должен был бы находиться. Но, так как числа $2m_1$ и m взаимно простые, существуют целые числа k и s такие, что

$$2m_1 k - m(2s+1) = \pm 1. \tag{32}$$

Поэтому при $\varphi = \frac{2k\pi}{m}$

$$b\cos m\varphi - \cos m_1\varphi = b - \cos\left(2s+1 \pm \frac{1}{m}\right)\pi = b + \cos\frac{\pi}{m};$$

следовательно $L > b$. Поэтому положительные экстремумы осуществляются в точках, где $\cos m_1\varphi < 0$; таким образом, в частности, значение φ_0 в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2m}\right)$, где достигается первый положительный экстремум, должно удовлетворять неравенству $\frac{\pi}{2m_1} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2m}$, а потому мы имели бы

$$L < b\cos m\varphi_0 + 1 < b\cos\frac{m\pi}{2m_1} + 1.$$

Между тем, с другой стороны, полагая $\varphi_1 = \frac{2s+1}{m_1}\pi$, мы придем (при $m \geqslant 3$) к противоречию, так как благодаря (32)

$$b\cos m\varphi_1 - \cos m_1\varphi_1 = b\cos\left(2k \pm \frac{1}{m}\right)\pi + 1 =$$
$$= b\cos\frac{\pi}{m_1} + 1 > b\cos\frac{m\pi}{2m_1} + 1 > L.$$

Следствие I. *Если*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T_{\lambda_i}(x) \qquad (\lambda_{i+1} > \lambda_i), \tag{28}$$

где $a_i \gtrless 0$, *причем все двучлены* $a_h T_{\lambda_h}(x) + a_{h+1} T_{\lambda_{h+1}}(x)$ *имеют нуль многочленом наименьшего уклонения степени* $\lambda_h - 1$, *то*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{h-1} a_i T_{\lambda_i}(x) \tag{29}$$

является многочленом, наименее уклоняющимся от $f(x)$ *при всяком* n $(\lambda_{h-1} \leqslant n < \lambda_h)$.

Это вытекает из того, что, как было показано, $\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} = 2p_h + 1$. К числу функций $f(x)$ такого рода относится построенная Вейерштрассом функция, не имеющая производной:

$$a_i = a^i, \ \lambda_i = (2p+1)^i, \qquad 2p+1 > \frac{1}{a} > 1.$$

В этом случае

$$E_n[f(x)] = \frac{a^h}{1-a}, \ (2p+1)^{h-1} \leqslant n < (2p+1)^h.$$

К функциям того же вида приводит следующая

Теорема II. *Если наилучше сходящийся на отрезке* $(-1, +1)$ *ряд многочленов*

$$f(x) = P_0 + \sum_{h=0}^{\infty} [P_{h+1}(x) - P_h(x)] \tag{27}$$

обладает свойством, что существует точка ξ, *где* $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ *достигает своего абсолютного максимума при всяком* n *с одинаковым знаком (например:* $+$ *), то* $f(x)$ *имеет вид* (28), *где*

$$a_i a_k > 0, \ (i > 0, \ k > 0), \ \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} = 2p_i + 1.$$

Действительно, так как по условию:

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant E_n[f(x)],$$

то, при $x=\xi$, когда все члены (27) имеют одинаковый знак,

$$f(\xi)-P_n(\xi)=E_n[f(x)],\ f(\xi)-P_{n+1}(\xi)=E_{n+1}[f(x)].$$

Поэтому

$$P_{n+1}(\xi)-P_n(\xi)=E_n[f(x)]-E_{n+1}[f(x)]=M_n\geqslant 0. \qquad (33)$$

Я говорю, что $P_n(x)$ является многочленом степени n, наименее уклоняющимся от $P_{n+1}(x)$. Действительно, по условию:

$$|P_{n+1}(x)-P_n(x)|\leqslant M_n;$$

поэтому, если бы существовал другой многочлен $Q_n(x)$ степени n, еще менее уклоняющийся от $P_{n+1}(x)$, мы имели бы при всяком x

$$|P_{n+1}(x)-Q_n(x)|\leqslant \varepsilon_n<M_n,$$

и так как

$$|f(x)-P_{n+1}(x)|\leqslant E_{n+1}[f(x)],$$

то получили бы, что

$$|f(x)-Q_n(x)|\leqslant \varepsilon_n+E_{n+1}[f(x)]<M_n+E_{n+1}[f(x)],$$

т. е. [вследствие (33)],

$$|f(x)-Q_n(x)|<E_n[f(x)].$$

Следовательно, необходимо, чтобы

$$P_{n+1}(x)-P_n(x)=A_{n+1}T_{n+1}(x),$$

где $A_{n+1}=\pm M_n$, причем, если $M_n>0$, то $\xi=\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$.

Отсюда следует, что $f(x)$ имеет вид (28) при $\dfrac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}=2p_i+1$ и все коэффициенты a_i одинакового знака.

Следствие II. *Для того чтобы все конечные суммы* $\sum\limits_{i=0}^{h}a_iT_{\lambda_i}(x)$, *где* $a_i>0$, *были многочленами, наименее уклоняющимися от* $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_iT_{\lambda_i}(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\dfrac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}=2p_i+1$ *были нечетными целыми числами.* Достаточность очевидна, необходимость вытекает из теоремы II.

§ 9. Проблема приближенного определения полинома данной системы T, наименее уклоняющегося от функции $f(x)$

Пусть $P_n(x)$ будет полиномом данной системы T дифференцируемых функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, наименее уклоняющимся на данном множестве S от данной функции $f(x)$, которую будем полагать дифференцируемой. Положим, для определенности, что S совпадает с отрезком $(-1, +1)$. Пусть $E_n[f(x)]$ будет наилучшим приближением и $\xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{n+1}$ — точки максимального уклонения. Тогда во всех этих точках соблюдаются уравнения

$$F(\xi_i) = \pm L, \quad F'(\xi_i)(\xi_i^2 - 1) = 0, \tag{34}$$
$$F(x) = f(x) - P_n(x).$$

Число уравнений равно здесь $2n+4$, как и число неизвестных [$\overline{n+2}$ точки ξ_i, величина L и $\overline{n+1}$ коэффициентов полинома $P_n(x)$]. Очевидно, в общем случае о точном решении этой системы уравнений не может быть и речи. Впрочем, если мы, например, предположим, что $P_n(x)$ — обыкновенный многочлен степени n, благодаря теореме Вейерштрасса, для функции $f(x)$ можно дать приближенный многочлен достаточно высокой степени $f_n(x)$ так, чтобы $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, где ε — наперед заданное число: тогда, заменяя $f(x)$ через $f_n(x)$, получаем алгебраическую задачу. Разумеется, формальное алгебраическое решение последней в большинстве случаев представляет также непреодолимые трудности, но приближенное решение ее обычными методами было бы возможно, хотя и очень сложно. Не останавливаясь пока на рассмотрении этого вопроса, допустим, что тем или иным способом мы нашли функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую неравенству

$$|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{35}$$

для которой известен многочлен $Q_n(x)$ степени n, наименее уклоняющийся от нее.

Вследствие непрерывности функций, входящих в уравнения (34), не трудно видеть, что при достаточно малом ε, многочлен $P_n(x)$ данной степени n, наименее уклоняющийся от $f(x)$, будет сколь угодно мало отличаться от $Q_n(x)$.

Но разность $P_n(x) - Q_n(x)$ будет существенным образом зависеть от свойств функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, и будет, вообще, медленно приближаться к нулю с уменьшением ε. Поэтому весьма ценна следующая простая

Лемма. *Если имеет место* (35), *то*

$$|E_n[f(x)] - E_n[\varphi(x)]| < \varepsilon. \tag{36}$$

Действительно, из (35) следует, что

$$|f(x) - Q_n(x)| < E_n[\varphi(x)] + \varepsilon, \quad |\varphi(x) - P_n(x)| < E_n[f(x)] + \varepsilon,$$

поэтому

$$E_n[f(x)] < E_n[\varphi(x)] + \varepsilon, \quad E_n[\varphi(x)] < E_n[f(x)] + \varepsilon.$$

То обстоятельство, что приближенное определение самого многочлена $P_n(x)$, наименее уклоняющегося от данной функции $f(x)$ с такою же степенью точности, как и наилучшее приближение $E_n[f(x)]$, представляет гораздо большие трудности, особенно при больших значениях n, наблюдается и в простейших задачах на экстремум, решаемых например, графически: легко провести на-глаз горизонтальную прямую, касающуюся верхней точки кривой, но значительно труднее указать при этом более или менее точно абсциссу точки касания. Укажем здесь на конкретном примере, что, как бы мало ни было данное ε, можно подобрать непрерывные дифференцируемые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ степень n так, чтобы

$$E_n[f(x)]=1,\ |f(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon, \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

и чтобы при этом на отрезке $(-1, +1)$ были точки, где абсолютное значеиие разности их многочленов наименьшего уклонения

$$|P_n(x)-Q_n(x)|=2E_n[f(x)]=2,$$

даже тогда, когда у них имеются $\overline{n+2}$ общих точек максимального отклонеиия.

Это, конечно, не противоречит тому факту, что после того как n и $f(x)$ зафиксированы, если бы стали снова уменьшать ε, устремляя его к нулю, то соответствующие $\varphi(x)$ многочлены наименьшего уклонения стремились бы равномерно к $P_n(x)$ на $(-1, +1)$.

Для этого построим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, равные между собой при $(-1\leqslant x\leqslant 0)$, совпадающие с многочленом степени n:

$$f(x)=\varphi(x)=-\cos n\arccos(2x+1)=-T_n(2x+1)=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[(2x+1+\sqrt{4x+4x^2})^n+(2x+1-\sqrt{4x+4x^2})^n\right],$$

имея таким образом в точках $\xi_k=-\cos^2\frac{k\pi}{2n}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ экстремумы ± 1. В частности, $f(0)=\varphi(0)=-1$.

На отрезке (0,1) дополним нашу кривую $f(x)$, не нарушая непрерывности, ломаной линией, образованной прямыми

$$f(x)=-1+\frac{2x}{x_0}, \qquad (0\leqslant x\leqslant x_0)$$
$$f(x)=1, \qquad (x_0\leqslant x<1),$$

где x_0 определяется уравнением

$$T_n(2x_0+1)=2,$$

имеющим одно и только одно положительное решение, так как $T_n(2x+1)$ есть функция, возрастающая при $x>0$ (углы в точках 0 и x_0 можно было бы закруглить, если бы мы хотели избежать прерывности производной). Например, при

$$n=2,\ x_0=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right]\approx 0{,}12.$$

Функцию $\varphi(x)$ при $0\leqslant x\leqslant 1$ определим аналогично:

$$\varphi(x)=-1+\frac{2+\varepsilon}{x_0}x, \qquad (0\leqslant x\leqslant x_0)$$
$$\varphi(x)=1+\varepsilon, \qquad (x_0\leqslant x\leqslant 1).$$

Таким образом $|f(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon$. Замечая, что на отрезке $(-1, +1)$ функция $f(x)$ достигает абсолютного максимума 1 с чередующимися знаками в $\overline{n+2}$ точках ξ_k и x_0, заключаем, что *нуль* служит для нее многочленом наилучшего приближения степени n, т. е. $P_n(x)=0$, $E_n[f(x)]=1$. Нетрудно, с другой стороны, убедиться, что при ε, достаточно малом, многочлен наилучшего приближения $\varphi(x)$ на отрезке $(-1, +1)$ равен

$$Q_n(x)=\frac{\varepsilon}{3}\, T_n(2x+1),$$

так как на отрезке $(-1,0)$ разность

$$\varphi(x)-Q_n(x)=-\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right) T_n(2x+1)$$

достигает максимального значения $\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)(-1)^{n+1-k}$ в $\overline{n+1}$ точках $\xi_k=-\cos^2\frac{k\pi}{2n}$, а при $0\leqslant x\leqslant x_0$

$$\varphi(x)-Q_n(x)=-1+\frac{2+\varepsilon}{x_0}\,x-\frac{\varepsilon}{3}\, T_n(2x+1)$$

растет [1]) от $-\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)$ до $1+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{3}\,T_n(2x+1)=1+\frac{\varepsilon}{3}$.

Таким образом точка x_0 является $(n+2)$-ой точкой максимального отклонения, если только разность $\varphi(x)-Q_n(x)=1+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{3}T_n(2x+1)$, которая убывает при $x_0<x\leqslant 1$, не перейдет отрицательного значения $-(1+\varepsilon)$, т. е. если $1+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{3}\,T_n(3)\geqslant-(1+\varepsilon)$. Поэтому достаточно, чтобы

---

[1]) Так как

$$\varphi'(x)-Q_n'(x)=\frac{2+\varepsilon}{x_0}-\frac{2\varepsilon}{3}\,T_n'(2x+1)\geqslant\frac{2+\varepsilon}{x_0}-\frac{2\varepsilon}{3}\,T_n'(2x_0+1),$$

причем, вследствие тождества

$$T_n^2(z)+\frac{1-z^2}{n^2}\,T_n'^2(z)=1$$

имеем

$$T_n'(2x_0+1)=\frac{n}{2}\sqrt{\frac{3}{x_0+x_0^2}};$$

поэтому

$$\varphi'(x)-Q_n'(x)\geqslant\frac{2+\varepsilon}{x_0}-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{3(x_0+x_0^2)}}>\frac{1}{x_0}\left[2-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{3}}\right].$$

Следовательно, достаточно, чтобы $\varepsilon<\frac{2\sqrt{3}}{n}$.

$$\varepsilon \leqslant \frac{6}{T_n(3)-6} < \frac{12}{(3+2\sqrt{2})^n}.$$

Но в таком случае при $x=1$ получим

$$P_n(x)-Q_n(x)=-\frac{\varepsilon}{3}\,T_n(3);$$

следовательно, полагая $\varepsilon=\dfrac{6}{T_n(3)}$, получим:

$$P_n(1)-Q_n(1)=-2$$

(между тем, в согласии с леммой, $E_n[\varphi(x)]=1+\dfrac{\varepsilon}{3}$, так что

$$|E_n[f(x)]-E_n[\varphi(x)]|<\varepsilon).$$

Таким образом, в особенности, для больших значений n, естественно будет, в первую очередь, решать задачу о приближенном нахождении $E_n[f(x)]$, а не полинома наименьшего уклонения; тем более, что практически более существенно построить простые многочлены, дающие почти то же приближение функции $f(x)$, что и ее многочлен наименьшего уклонения, чем получить для последнего чрезмерно сложные аналитические выражения. Поэтому в дальнейшем мы, главным образом, будем заниматься установлением возможно точных неравенств, которым удовлетворяет наилучшее приближение. Сейчас мы ограничимся лишь установлением следующей довольно общей теоремы.

Теорема. *Пусть функции* $\varphi_0(x, \lambda)$, $\varphi_1(x, \lambda)$, $\ldots$, $\varphi_n(x, \lambda)$ *будут (регулярными) аналитическими функциями относительно* x *и* λ *при* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, *когда* x *находится на множестве* S, *состоящем из одного или нескольких отрезков* (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_k, b_k), *где* $a_1 < b_1 < \ldots < b_k$, *лежащих внутри* (a, b), *где функции* $\varphi_i(x, \lambda)$ *образуют систему* T; *пусть* $f(x)$ *будет некоторая аналитическая (регулярная) функция в той же области переменных* (x, λ) *и пусть* $P_n(x, \lambda) = \sum_{l=0}^{n} A_l(\lambda)\varphi_l(x, \lambda)$ *будет полином данной системы* T, *наименее уклоняющийся от* $f(x)$ *на множестве* S. *Если при любом* λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ *среди точек максимального уклонения с чередующимися знаками разности*

$$F(x, \lambda) = f(x, \lambda) - P_n(x, \lambda)$$

имеется по крайней мере $\overline{n+2}$ *точки, где*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x-a_1)\ldots(x-b_k)\frac{\partial F}{\partial x}\right] \gtrless 0,$$

то коэффициенты $A_l(\lambda)$ *полинома* $P_n(x, \lambda)$, *как и наилучшее приближение* $E_n[f(x, \lambda)]$, *являются (регулярными) аналитическими функциями параметра* λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$.

Положим $(x-a_1)\ldots(x-b_k)=\omega(x)$ и пусть $\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_{n+1}$ будут для некоторого λ рассматриваемые точки наибольшего уклонения, где, полагая $\rho(\lambda)=\pm E_n[f(x, \lambda)]$, по условию,

$$F(\xi_i, \lambda) = (-1)^i \rho(\lambda), \quad \omega(\xi_i) \left(\frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x}\right)_{x=\xi_i} = u(\xi_i, \lambda) = 0 \qquad (37)$$

$$u_i' = \left[\frac{\partial u(x, \lambda)}{\partial x}\right]_{x=\xi i} \gtrless 0.$$

Для краткости, будем писать

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i} = \left(\frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x}\right)_{x=\xi_i}.$$

Таким образом, из этих $\overline{2n+4}$ уравнений с $\overline{2n+4}$ неизвестными: ρ, A_i, ξ_i, последние определяются как (регулярные) аналитические функции λ, если функциональный определитель

$$\Delta(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} +1 & \frac{\partial F}{\partial \xi_0} & 0 \dots 0 & \varphi_0(\xi_0, \lambda) & \dots \varphi_n(\xi_0, \lambda) \\ -1 & 0 & \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \dots 0 & \varphi_0(\xi_1, \lambda) & \dots \varphi_n(\xi_1, \lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^{n+1} & 0 & 0 \dots \frac{\partial F}{\partial \xi_{n+1}} & \varphi_0(\xi_{n+1}, \lambda) & \dots \varphi_n(\xi_{n+1}, \lambda) \\ 0 & u_0' & 0 \dots 0 & \omega(\xi_0)\varphi'_0(\xi_0, \lambda) & \dots \omega(\xi_0)\varphi'_n(\xi_0, \lambda) \\ 0 & 0 & u'_1 \dots 0 & \omega(\xi_1)\varphi'_0(\xi_1, \lambda) & \dots \omega(\xi_1)\varphi'_n(\xi_1, \lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots u'_{n+1} & \omega(\xi_{n+1})\varphi'_0(\xi_{n+1}, \lambda) & \dots \omega(\xi_{n+1})\varphi'_n(\xi_{n+1}, \lambda) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Но, замечая, что, если $\frac{\partial F}{\partial \xi_i} \gtrless 0$, соответствующий ему минор содержит множителем $\omega(\xi_i) = 0$ (так как $u(\xi_i, \lambda) = 0$), видим, что значение определителя не изменится, если все элементы $\frac{\partial F}{\partial \xi_i}$ заменить нулями; поэтому

$$\Delta(\lambda) = (-1)^{n+1} u'_0 u'_1 \dots u'_{n+1} \begin{vmatrix} +1 & \varphi_0(\xi_0, \lambda) \dots \varphi_n(\xi_0, \lambda) \\ -1 & \varphi_0(\xi_1, \lambda) \dots \varphi_n(\xi_1, \lambda) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ (-1)^{n+1} & \varphi_0(\xi_{n+1}, \lambda) \dots \varphi_n(\xi_{n+1}, \lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} u'_0 u'_1 \dots u'_{n+1}{}' \, [\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{n+1}] \gtrless 0,$$

так как

$$\delta_i = \begin{vmatrix} \varphi_0(\xi_0, \lambda) & \varphi_1(\xi_0, \lambda) & \ldots \varphi_n(\xi_0, \lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0(\xi_{i-1}, \lambda) & \varphi_1(\xi_{i-1}, \lambda) & \ldots \varphi_n(\xi_{i-1}, \lambda) \\ \varphi_0(\xi_{i+1}, \lambda) & \varphi_1(\xi_{i+1}, \lambda) & \ldots \varphi_n(\xi_{i+1}, \lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0(\xi_{n+1}, \lambda) & \varphi_1(\xi_{n+1}, \lambda) & \ldots \varphi_n(\xi_{n+1}, \lambda) \end{vmatrix} > 0.$$

Примечание. Принимая во внимание, что $E_n[f(x, \lambda)] = E_n[-f(x, \lambda)]$ будем обычно предполагать для сокращения письма, что

$$F(\xi_0, \lambda) = \rho > 0, \text{ т. е. } E_n[f(x, \lambda)] = \rho.$$

Следствие I. *Если, сохраняя условие теоремы, при всех значениях λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ число точек максимального отклонения равно $n+2$, то каждая из граничных точек a_i, b_i является точкой максимального отклонения либо для всякого значения λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, либо ни для какого, и все внутренние точки отклонения $\xi_i(\lambda)$ являются регулярными аналитическими функциями, так же как $E_n[f(x, \lambda)]$ и $A_i(\lambda)$.*

Следствие II. *Если среди точек $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$, где максимальное отклонение достигается с чередующимися знаками при всех значениях λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, имеется α неизменных граничных точек a_i, b_j, и $n+2-\alpha$ внутренних точек множества S, где соблюдается неравенство $\frac{\partial^2 F(\xi_i, \lambda)}{\partial \xi_i^2} \gtrless 0$, то коэффициенты $A_i(\lambda)$ и наилучшее приближение $E_n[f(x, \lambda)]$ являются регулярными аналитическими функциями λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$.*

Это вытекает из рассмотрения функционального определителя порядка $2n+4-\alpha$, аналогичного определителю $\Delta(\lambda)$, соответствующего системе $2n+4-\alpha$ уравнений с $2n+4-\alpha$ неизвестными: ρ, A_i и $n+2-\alpha$ переменных точек отклонения ξ_i.

Следствие III. *Если уравнение $\frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x} = 0$ ни при каких λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ не может иметь более $n+1$ корней, считаемых с их степенью кратности (в обычном алгебраическом смысле), причем a_i, b_j не являются корнями $\frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x} = 0$, то число m точек максимального отклонения не зависит от λ, и все точки отклонения ξ_i являются аналитическими функциями λ, так же как коэффициенты $A_i(\lambda)$ и наилучшее приближение $E_n[f(x, \lambda)]$ при всех λ (в частности каждая граничная точка a_i или b_j является точкой отклонения при всех λ или ни при каких).*

Действительно, когда соседние граничные точки b_i, a_{i+1} являются точками максимального отклонения противоположного знака, то между ними есть, по крайней мере, два корня x_1, x_2 уравнения $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$

$(b_i < x_1 < x_2 < a_{i+1})$; если же знак одинаков в точках b_i и a_{i+1} или только одна из них является точкой отклонения, то уравнение $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ имеет между ними, по крайней мере, один корень. С другой стороны, невозможно во внутренней точке отклонения иметь $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, так как тогда также $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0$, и поэтому общее число корней $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, считаемых с их степенью кратности, превышало бы $n+1$, вопреки условию; поэтому во всех внутренних точках отклонения должно быть $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \gtrless 0$. Таким образом, условия теоремы при всяком λ соблюдены для всех точек ξ.

Способ фактического приложения нашей теоремы к вычислению полинома наименьшего уклонения приводит к последовательному решению системы $n+2$ уравнений первой степени с $n+2$ неизвестными, отличающимися только вторыми частями равенств. Действительно, предположим, что для $\lambda = \lambda_0$ (например $\lambda_0 = 0$) полином $P_n(x, 0)$ наименьшего уклонения функции $f(x, 0)$ известен также, как $\xi_i(0) = x_i$ и $\rho(0)$. Тогда (предполагая условия теоремы соблюденными для точек x_i, среди которых для определенности положим $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$, а прочие x_i внутренними точками), беря полную производную по λ уравнений (37), находим для всех x_i $n+2$ уравнений:

$$\frac{\partial F(x_i, 0)}{\partial \lambda} = (-1)^i \rho'(0) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1), \tag{38}$$

линейных относительно $\frac{dA_j(0)}{d\lambda}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ и $\rho'(0) = \frac{d\rho(0)}{d\lambda}$.

Дифференцируя еще раз, в точках $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$ находим два уравнения:

$$\frac{\partial^2 F(a, 0)}{\partial \lambda^2} = \rho''(0), \qquad \frac{\partial^2 F(b, 0)}{\partial \lambda^2} = (-1)^{n+1} \rho''(0), \tag{39}$$

а для прочих n значений x_i получим n уравнений:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x} \frac{dx_i}{d\lambda} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{dx_i}{d\lambda}\right)^2 = (-1)^i \rho''(0), \tag{39 bis}$$

образующих совместно систему $\overline{n+2}$ линейных уравнений с $\overline{n+2}$ неизвестными $\frac{d^2 A_j(0)}{d\lambda^2}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ и $\frac{d^2\rho(0)}{d\lambda^2} = \rho''$, которая, как и первая (38), имеет тот же отличный от нуля определитель

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0, 0) & \varphi_1(x_0, 0) & \ldots & \varphi_n(x_0, 0) & 1 \\ \varphi_0(x_1, 0) & \varphi_1(x_1, 0) & \ldots & \varphi_n(x_1, 0) & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0(x_{n+1}, 0) & \varphi_1(x_{n+1}, 0) & \ldots & \varphi_n(x_{n+1}, 0) & (-1)^{n+1} \end{vmatrix} \tag{40}$$

и допускает одну и только одну систему решений.

Следует заметить, что каждое из значений $\frac{dx_i}{d\lambda}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ определяется из соответствующего уравнения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx_i = 0, \tag{41}$$

после того как $\frac{dA_j(0)}{d\lambda}$ определены из уравнений (38). Таким образом, подставляя эти значения $\frac{dx_i}{d\lambda}$ в уравнения (39 bis), можем придать этим уравнениям форму

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} = (-1)^i \rho''(0). \tag{42}$$

Дальнейшее последовательное дифференцирование позволяет, следовательно, получить разложения в степенные ряды:

$$E_n[f(x,\ \lambda)] = \rho(0) + \lambda\rho'(0) + \frac{\lambda^2}{2!}\rho''(0) + \ldots \tag{43}$$

$$A_j(\lambda) = A_j(0) + \lambda A_j'(0) + \frac{\lambda^2}{2!}A_j''(0) + \ldots \qquad (j = 0,1,\ \ldots,\ n),$$

которые по доказанной теореме сходятся для достаточно малых значений λ, и, принимая во внимание ту же теорему, могут быть аналитически продолжены на весь отрезок $(0,1)$ при помощи любого приема аналитического продолжения, например посредством разложения в ряд Миттаг-Леффлера (Mittag-Leffler).

Таким образом, практическое применение указанного параметрического метода не вызывает особых вычислительных затруднений, после того как известны значения определителя (40) и миноров, соответствующих каждому из его элементов.

Отметим также, что из уравнений (38) вытекает

Следствие IV. *Если ни при каких значениях* λ *уравнение* $\frac{\partial F(x,\ \lambda)}{\partial \lambda} = 0$ *не может иметь более* $\overline{n+1}$ *корней, то, полагая, что условия теоремы соблюдены,* $E_n[f(x,\ \lambda)]$ *является монотонной функцией* λ.

Действительно, если $\rho'(\lambda) = 0$, то, вследствие (38), уравнение $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ имеет $\overline{n+2}$ корня.

§ 10. Некоторые неравенства, которым удовлетворяет наилучшее приближение

Пусть $f_0(x)$ представляет функцию, которой известен полином $P_n(x)$ наименьшего уклонения системы T функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ (с точками максимального уклонения $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(0)\,\varphi_k(x),$$

а $f_1(x)$ — какая-нибудь другая функция, для которой ищется полином наименьшего уклонения $R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(1)\,\varphi_k(x)$; тогда, полагая, что к функции

$$f(x, \lambda) = \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_0(x)$$

приложим параметрический метод, изложенный в предыдущем параграфе, мы получим решение задачи, подставляя в формулы (43) (или соответствующие им ряды Миттаг-Леффлера) $\lambda = 1$.

В данном случае, уравнения (38) принимают вид:

$$f_1(x_i) - f_0(x_i) - \sum_{k=0}^{n} A_k'(0)\,\varphi_k(x_i) = (-1)^i \rho'(0), \qquad (38\text{ bis})$$

и так как

$$f_0(x_i) - \sum_{k=0}^{n} A_k(0)\,\varphi_k(x_i) = (-1)^i \rho(0),$$

то

$$f_1(x_i) - \sum_{k=0}^{n} [A_k(0) + A_k'(0)]\,\varphi_k(x_i) = (-1)^i\,[\rho(0) + \rho'(0)].$$

Следовательно, *полином*

$$\sum_{k=0}^{n} [A_k(0) + A_k'(0)]\,\varphi_k(x)$$

является наименее уклоняющимся от функции $f_1(x)$ на множестве $n+2$ точек x_i ($i = 0, 1, \ldots, n$), а $\rho(0) + \rho'(0)$ будет ее наилучшим приближением на этом множестве (следствие III § 5).

Покажем, что для всех λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ имеем

$$\frac{d^2 E_n[f(x, \lambda)]}{d\lambda^2} = \rho''(\lambda) \geqslant 0. \qquad (44)$$

Действительно, во внутренней точке ξ_i, где $F(\xi_i, \lambda)(-1)^i = \rho(\lambda) > 0$ достигает максимума, имеем:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_i, \lambda)\,(-1)^i < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

поэтому, если бы мы имели $\rho'' < 0$, то во всех точках ξ_i, вследствие (42) и (39), которые справедливы для всякого λ, оказалось бы, что

$$(-1)^i \frac{\partial^2 F(\xi_i, \lambda)}{\partial \lambda^2} < 0, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1). \quad (45)$$

Но в данном случае

$$\frac{\partial^2 F(x, \lambda)}{\partial \lambda^2} = \sum_{k=0}^{n} A_k''(\lambda)\, \varphi_k(x)$$

есть полином системы T порядка n, поэтому неравенства (45) приводят к недопустимому заключению, что этот полином должен был бы иметь не менее $n+1$ корней.

Таким образом, $E_n[\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_0(x)]$ представляет выпуклую книзу кривую, которая вырождается в прямую линию только в том случае, когда $\rho''(\lambda) = 0$ при всех $\lambda\,(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. В последнем случае, из (42) следует, что во всех внутренних точках ξ_i $\frac{\partial^2 F(x, \lambda)}{\partial x \partial \lambda} = 0$, а из (41) заключаем, что ξ_i не зависит от λ, т. е. точки максимального отклонения $f_0(x)$ и $f_1(x)$ совпадают. Наоборот, очевидно, что если точки ξ_i, где максимальное отклонение достигается с одинаковым знаком, совпадают для обеих функций $f_1(x)$, $f_0(x)$, то

$$E_n[\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_0(x)] = \lambda E_n[f_1(x)] + (1-\lambda) E_n[f_0(x)] \; (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Заметим, что вытекающее из (44) и (43) неравенство

$$E_n[f_1(x)] \geqslant \rho(0) + \rho'(0) \quad (46)$$

является также следствием из сделанного выше замечания, что $\rho(0) + \rho'(0)$ есть наилучшее приближение $f_1(x)$ на множестве $n+2$ точек $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$.

Некоторые полезные неравенства можно получить, налагая соответствующие ограничения на рассматриваемые функции. Пусть, в частности, $\varphi_k(x) = x^k$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) и множеством S, на котором изучается наилучшее приближение, пусть будет *целый отрезок* (a, b). В таком случае, имеет место

Теорема. *Если*

$$f_0^{(n+1)}(x) > f_1^{(n+1)}(x) > 0, \quad (47)$$

то

$$E_n[f_0(x)] > E_n[f_1(x)]. \quad (48)$$

Действительно, вследствие (47), дифференцируя n раз по x уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda f_1'(x) + (1-\lambda) f_0'(x) - \sum_{k=1}^{n} k A_k(\lambda)\, x^{k-1} = 0,$$

убеждаемся, что оно не может иметь более n корней; но так как все эти корни соответствуют n внутренним точкам отклонения, то a и b

будут точками отклонения при всяком λ; при этом знак $F(x, \lambda)$ в точке b (не зависящий от λ) должен быть противоположен знаку

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=f_1(x)-f_0(x)-\sum_{k=0}^{n} A_k'(\lambda)\, x^k,$$

ибо обе эти функции, обращаясь в нуль при $\overline{n+1}$ значениях, заключенных между $\overline{n+2}$ точками максимального отклонения, в последней точке максимального отклонения b имеют знак своей $(n+1)$-ой производной, т. е., соответственно, знак

$$\lambda f_1^{(n+1)}(x)+(1-\lambda)f_0^{(n+1)}(x)=f_1^{(n+1)}(x)+$$
$$+(1-\lambda)\left[f_0^{(n+1)}(x)-f_1^{(n+1)}(x)\right]>0$$

и

$$f_1^{(n+1)}(x)-f_0^{(n+1)}(x)<0.$$

Следовательно,

$$F(b, \lambda)=E_n[F(x, \lambda)]$$

и

$$\frac{\partial F(b, \lambda)}{\partial \lambda}=\frac{dE_n[F(x, \lambda)]}{d\lambda}<0,$$

откуда

$$E_n[F(x, 1)]=E_n[f_1(x)]<E_n[F(x, 0)]=E_n[f_0(x)]. \tag{48}$$

Следствие I. *Если*

$$k_1 f^{(n+2)}(x)>f^{(n+1)}(x)>k_0 f^{(n+2)}(x)>0$$

на отрезке (a, b), *то*

$$k_1 E_n[f'(x)]>E_n[f(x)]>k_0 E_n[f'(x)].$$

Следствие II. *Если на промежутке* (a, b), *где* $b>a\geqslant 0$,

$$f^{(n+1)}(x)>0, f^{(n+2)}(x)>0,$$

то

$$E_n[f(x)]<\frac{1}{n+1}E_n[xf'(x)].$$

В самом деле:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(xf'(x))=xf^{(n+2)}(x)+(n+1)f^{(n+1)}(x)>(n+1)f^{(n+1)}(x)>0.$$

Следствие III. *Если на промежутке* (a, b) *длины* $2h$

$$0<N<f^{(n+1)}(x)<M,$$

то

$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}<E_n[f(x)]<\frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{h+1}. \tag{49}$$

Действительно, $\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$ на отрезке длины $2h$ имеет наилучшее приближение при помощи многочленов степени n, равное

$$\frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{h+1}.$$

Интересно также отметить вытекающее из левой части неравенства (49)

Следствие IV. *Если функция $f(x)$ в промежутке длины $2h$ удовлетворяет неравенству*

$$f^{(n+1)}(x) > N > 0,$$

то она должна, по крайней мере, в одной точке этого промежутка превысить по абсолютному значению величину

$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

Обобщение. *Если на отрезке (a, b) соблюдено неравенство*

$$f_0^{(n+1)}(x) > |f_1^{(n+1)}(x)|, \tag{47 bis}$$

и S какое-нибудь замкнутое множество точек этого отрезка, то

$$E_n[f_0(x); S] > E_n[f_1(x), S]. \tag{48 bis}$$

Действительно, пусть $P_0(x)$ и $P_1(x)$ будут, соответственно, многочленами наилучшего приближения степени n функций $f_0(x)$ и $f_1(x)$ на множестве S. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ будут какие-нибудь $n+2$ точки, где максимальное отклонение $f_1(x) - P_1(x)$ осуществляется с противоположными знаками; принимая во внимание, что неравенство (47 bis) не нарушится, если заменить $f_1(x)$ через $-f_1(x)$, можем всегда сделать так, чтобы

$$f_1(x_{n+2}) - P_1(x_{n+2}) = E_n[f_1(x); S] > 0.$$

С другой стороны, если бы имело место неравенство

$$E_n[f_0(x); S] < E_n[f_1(x); S],$$

то в точках $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ знаки $F(x) = f_1(x) - P_1(x) - [f_0(x) - P_0(x)]$, совпадая с знаком $f_1(x) - P_1(x)$, были бы последовательно противоположны; поэтому $F(x)$ имел бы по меньшей мере $n+1$ корней между x_1 и x_{n+2}, и так как, в силу (47 bis), $F^{(n+1)}(x) < 0$, то $F(x)$, после наибольшего корня $\alpha < x_{n+2}$, получает и сохраняет (при $\alpha < x \leqslant b$) знак $F^{(n+1)}(x)$, т. е. $F(x_{n+2}) < 0$, что невозможно. Кроме того невозможно также и равенство

$$E_n[f_0(x); S] = E_n[f_1(x); S],$$

так как из него следовало бы, при всяком $\lambda > 1$, $E_n[f_0(x); S] < E_n[\lambda f_1(x); S]$, невозможность которого при λ, достаточно близком к единице, чтобы соблюдалось $f_0^{(n+1)}(x) > \lambda |f_1^{(n+1)}(x)|$, только что доказана.

Следствие V. *Если на некотором отрезке* (a, b) *имеем*

$$f^{(n+1)}(x) > N,$$

то мера множества S *внутри* (a, b), *где* $|f(x)| \leqslant \frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}$, *должна быть менее, чем* $2h$, *каково бы ни было* $h > 0$.

Следствие VI. *Если на отрезке длины* $2h$ *имеет место неравенство*

$$|f^{(n+1)}(x)| < M, \tag{50}$$

то наилучшее приближение на всем отрезке удовлетворяет неравенству

$$E_n[f(x)] < \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}. \tag{51}$$

Заметим, что при том же условии (50) для погрешности ρ_n строки Тэйлора, в которой отбрасываются члены степени выше n в лучшем случае, т. е. если берется разложение, соответствующее середине отрезка, может быть дано (пользуясь остаточным членом Лагранжа) лишь неравенство

$$|\rho_n| < \frac{M}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

§ 11. Системы D функций Декарта

Предположим, что система функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ на отрезке (a, b) такова, что все функции $\varphi_k(x)$ обращаются в нуль в одной или обеих точках (a, b).

В таком случае всякий полином

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \varphi_k(x)$$

также обратится в нуль в той же точке. Если при счете корней полинома $F_n(x)$ мы *не будем считать* соответствующий обязательный корень, то можем также называть системой T (с нулевой точкой) рассматриваемую систему, *когда всякий ее полином имеет не более* n *корней в промежутке* (a, b). В таком случае нетрудно убедиться, что все свойства системы T остаются без изменения так же, как и основная теорема, *лишь бы мы рассматривали только полиномы, наименее уклоняющиеся от таких функций* $f(x)$, *которые сами в соответствующих точках* (a или b), *где все* $\varphi_k(x) = 0$, *также обращались бы в нуль*. Таким образом, например, система $x, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}$ также будет системой T (с нулевой точкой 0) на отрезке $(0, b)$; но свойства этой системы существенно были бы отличны от системы Чебышева, если бы мы ее рассматривали на отрезке (a, b), где $a < 0$, $b > 0$. После этого маленького обобщения систем T, переходим к определению системы D Декарта.

Мы называем систему непрерывных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *системой Декарта (D) на отрезке (a, b), если всякая часть этих функций образует на этом отрезке систему Чебышева T на отрезке (a < b), и, кроме того, если в конце a (или b) мы имеем*

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi_{h+1}(x)}{\varphi_h(x)} = 0 \quad (h = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{52}$$

Очевидно, что в таком случае $\varphi_h(a) = 0$ при $h \geqslant 1$ и, кроме того, $\varphi_h(x)$ ни при каком h не обращается в нуль внутри промежутка (a, b); поэтому *можем положить, вообще,* $\varphi_h(x) > 0$ *при* $a < x < b$. Когда в этом будет надобность, мы будем называть системы D, удовлетворяющие условию (52), *левыми* системами D, в отличие от *правых*, для которых вместо (52) соблюдено условие

$$\lim_{x=b} \frac{\varphi_{h+1}(x)}{\varphi_h(x)} = 0.$$

Лемма I. *Знак всякого полинома системы D при x, достаточно близком к a, совпадает с знаком отличного от нуля коэффициента A_{k_0}, имеющего наименьший индекс.*

Действительно, вследствие условия (52), можем написать:

$$F_n(x) = A_{k_0} \varphi_{k_0}(x) [1 + \varepsilon(x)],$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Лемма II. *Каковы бы ни были значения $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, все миноры определителя $\Delta(\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n))$ положительны.*

В самом деле, полагая $k_0 < k_1 < \ldots k_e$, минор $(l+1)$-го порядка

$$\Delta(\varphi_{k_0}(x_0), \varphi_{k_1}(x_1), \ldots, \varphi_{k_l}(x_l)) = A_{k_0}\varphi_{k_0}(x_0) + A_{k_1}\varphi_{k_1}(x_1) + \\ + \ldots + A_{k_l} \varphi_l(x_l),$$

сохраняя постоянный знак при $a < x_0 < x_1$ (так как система функций $\varphi_{k_0}(x), \varphi_{k_1}(x), \ldots, \varphi_{k_l}(x)$ есть система T), будет иметь знак своего первого коэффициента A_{k_0}, согласно лемме I. Но коэффициент A_{k_0} есть минор l-го порядка

$$A_{k_0} = \Delta(\varphi_{k_1}(x_1), \varphi_{k_2}(x_2), \ldots, \varphi_{k_l}(x_l)),$$

к которому применяем то же рассуждение; придем таким образом, наконец, к элементу $\varphi_{k_l}(x_l) > 0$; следовательно, наше утверждение доказано.

Лемма III. *Каковы бы ни были числа $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_l < n$, линейно независимые функции*

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{k_1} a_i \varphi_i(x), f_2(x) = \sum_{k_1+1}^{k_2} a_i \varphi_i(x), \ldots f_{l+1}(x) = \sum_{k_l+1}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

образуют систему D на том же отрезке (a, b), что и функции $\varphi_k(x)$, если все коэффициенты $a_i \geqslant 0$.

Действительно, определители $\Delta(f_1(x), f_2(x_1), \ldots, f_{l+1}(x_l))$, являясь суммами положительных определителей (при $x < x_1 < \ldots < x_l$), сами положительны, а потому полином $\sum\limits_{i=1}^{l+1} A_i f_i(x)$ не имеет более l корней.

Кроме того, очевидно $\lim\limits_{x=0} \dfrac{f_{i+1}(x)}{f_i(x)} = 0$.

Из леммы III непосредственно вытекает

Обобщенная теорема Декарта. *Число корней полинома*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \varphi_k(x)$$

системы D, считаемых с их степенью кратности на отрезке (a, b) (без учета корня $x = a$), не может превысить числа перемен знаков его последовательных отличных от нуля коэффициентов.

Действительно, если последовательность коэффициентов A_k имеет h перемен знаков, то $F_n(x)$ может быть представлен в виде

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{h+1} B_i f_i(x),$$

где $f_i(x)$ удовлетворяют условиям предыдущей леммы.

Обратная теорема. *Если к системе функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ применимо на отрезке (a, b) правило знаков Декарта, если, кроме того, $\lim\limits_{x=a} \dfrac{\varphi_{k+1}(x)}{\varphi_k(x)} = 0$, то эти функции образуют систему D на отрезке (a, b).*

Примеры. Функции $e^{\alpha_0 x}, e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}$ $(0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n)$ образуют систему D на любом отрезке $(-\infty, b)$. Действительно $\lim\limits_{x=-\infty} e^{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)x} = 0$; с другой стороны, если $F_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k e^{\alpha_k x}$ имеет m корней, то столько же корней имеет полином $F_n(x) e^{-\alpha_0 x}$, и потому по крайней мере $m-1$ корней имеет его производная

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_0) A_k e^{(\alpha_k - \alpha_0)x}.$$

Продолжая то же рассуждение, заключаем, что по крайней мере $m-n$ корней имеет функция $e^{(\alpha_n - \alpha_{n-1})x}$. Следовательно, $m \leqslant n$. Таким образом к системе функций $e^{\alpha_k x}$ применима обобщенная теорема Декарта.

Полагая $e^x = y$, видим, что система $x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}$ образует систему D на любом отрезке $(0, c)$, где $c > 0$.

Система функций $(1-x)^n, x(1-x)^{n-1}, \ldots, x^n$ образует систему D на отрезке $(0,1)$. Эта система интересна тем, что, отбрасывая в ней первую и последнюю функции, мы получаем систему D, имеющую две нулевые точки 0 и 1.

Рассмотрим еще систему функций:

$$x^{\alpha_0},\ x^{\alpha_1},\ \ldots,\ x^{\alpha_{n-1}},\ x^{\alpha_n} f(x),$$

где $0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ и $f(x)$ вместе со своими производными до порядка n включительно положительны при $0 \leqslant x \leqslant b$.

Чтобы убедиться, что мы имеем здесь систему D, достаточно доказать, что полином

$$F_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^{\alpha_k} + A x^{\alpha_n} f(x)$$

имеет не более n корней между 0 и b. Для этого замечаем, что если p есть число его корней, то полином

$$x \frac{d}{dx}\left[F_n(x) x^{-\alpha_0}\right] = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_0) A_k x^{(\alpha_k - \alpha_0)} +$$
$$+ A x^{(\alpha_n - \alpha_0)} \left[(\alpha_n - \alpha_0) f(x) + x f'(x)\right]$$

имеет не менее $p-1$ корней $(0 < x \leqslant b)$. Поэтому полином

$$\sum_{k=2}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_0) A_k x^{(\alpha_k - \alpha_1)} +$$
$$+ A x^{(\alpha_n - \alpha_1)} \{(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_0) f(x) +$$
$$+ [(\alpha_n - \alpha_1 + 1) + (\alpha_n - \alpha_0)] x f'(x) + x^2 f''(x)\}$$

имеет не менее $p-2$ корней. Замечая, что коэффициенты при $f(x)$, $xf'(x)$, $x^2 f''(x)$ в скобках второго слагаемого положительны, и повторяя ту же операцию n раз, находим, что полином вида

$$[(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \ldots (\alpha_n - \alpha_0)] f(x) + \ldots + x^n f^{(n)}_{(x)}$$

имеет не менее $p-n$ корней; но так как он не имеет ни одного корня, то $p \leqslant n$.

§ 12. Полиномы-осциляторы системы D

Мы называем *полиномами-осциляторами* системы D функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ на отрезке (a, b) полиномы этой системы, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке (a, b), согласно определению § 6; теорема А § 6 в данном случае, очевидно, применима. Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Среди полиномов* $R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k \varphi_k(x)$, *где* $\varphi_k(x)$ *образуют систему* D *на отрезке* (a, b), *имеющих один данный коэффи-*

циент B_p, наименее уклоняется от нуля на отрезке (a, b) осцилятор данной системы $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(x)$, (у которого $A_p = B_p$), достигающий абсолютного максимума в $n+1$ точках на отрезке (a, b) с последовательно чередующимися знаками [1]).

Заметим, что последовательные коэффициенты осцилятора $P_n(x)$ — всегда чередующихся знаков, и ни один из коэффициентов его не равен нулю. Это вытекает из того, что $P_n(x)$ имеет n корней между a и b.

Теорема II. *Для того чтобы ни один полином $R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k\varphi_k(x)$, коэффициенты которого связаны линейным соотношением*

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k B_k = 1, \tag{53}$$

не мог на отрезке (a, b) уклоняться от нуля менее, чем соответствующий осцилятор $P_n(x) = \sum A_k\varphi_k(x)$, достаточно, чтобы $n+1$ определители порядка $n+1$

$$\delta_i = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \varphi_0(\xi_0) & \varphi_1(\xi_0) & \dots & \varphi_n(\xi_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(\xi_{i-1}) & \varphi_1(\xi_{i-1}) & \dots & \varphi_n(\xi_{i-1}) \\ \varphi_0(\xi_{i+1}) & \varphi_1(\xi_{i+1}) & \dots & \varphi_n(\xi_{i+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(\xi_n) & \varphi_1(\xi_n) & \dots & \varphi_n(\xi_n) \end{vmatrix},$$

где $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ — любые точки максимального уклонения с противоположными знаками осцилятора $P_n(x)$, были одинакового знака; это же условие необходимо, если общее число точек максимального отклонения $P_n(x)$ равно $n+1$.

Действительно, если полином $R_n(x)$ удовлетворяет, как и осцилятор $P_n(x)$, соотношению (53), то коэффициенты c_k полинома $F_n(x) = P_n(x) - R_n(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k = 0.$$

Поэтому, если бы $R_n(x)$ уклонялся от нуля менее, чем $P_n(x)$, так что при всех значениях x мы имели бы

$$|R_n(x)| < |P_n(\xi_i)| = L,$$

то

$$F_n(\xi_k) = \mu_k(-1)^k \qquad (k = 0, 1, \dots, n)$$

---

[1]) Если $p = 0$ (т. е. дано A_0) и $\varphi_0(a) > 0$, то осцилятор, очевидно, будет не единственным полиномом, отклонение которого от нуля не более $A_0\varphi_0(a)$; это объясняется тем, что система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ имеет нулевую точку a, которая не является нулем для $\varphi_0(x)$.

имел бы знак $P_n(\xi_k)$, т. е. все μ_k были бы одинакового знака; но определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots \lambda_n & 0 \\ \varphi_0(\xi_0) & \varphi_1(\xi_0) & \ldots \varphi_n(\xi_0) & \mu_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0(\xi_n) & \varphi_1(\xi_n) & \ldots \varphi_n(\xi_n) & \mu_n(-1)^n \end{vmatrix}$$

не может быть равен нулю при условии, что все δ_i одинакового знака. Таким образом доказана достаточность этого условия.

Напротив, положим, что не все δ_i одинакового знака и число точек, где достигается экстремум $\pm L$ осцилятора, равно $n+1$.

Тогда, выбирая $\mu_k > 0$ так, чтобы $\Delta \gtreqless 0$, можем построить полином $F_n(x)$, удовлетворяющий условию $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k = 0$ и $F_n(\xi_k) = \mu_k(-1)^k$, который при достаточно малом $\varepsilon > 0$ будет сохранать знак $F_n(\xi_k)$ на промежутке $(\xi_k - \varepsilon, \xi_k + \varepsilon)$; в таком случае существует такое $\alpha > 0$, что вне этих промежутков $|P_n(x)| < L - \alpha$. Следовательно, если постоянная θ удовлетворяет условиям, что $\theta F_n(\xi_k) P_n(\xi_k) > 0$ и $|\theta F_n(x)| < \alpha$ на всем отрезке (a, b), то полином $R_n(x) = P_n(x) - \theta F_n(x)$, удовлетворяя (53), в то же время на всем отрезке (a, b) удовлетворяет неравенству

$$|R_n(x)| < L.$$

Таким образом, полагая условия $\delta_k > 0$ соблюденными и обозначая через L максимум $|P_n(x)|$, где $P_n(x)$ осцилятор, коэффициенты которого удовлетворяют соотношению (53), можем также утверждать, что если какой-нибудь полином $Q_n(x) = \sum B_k \varphi_k(x)$ данной системы остается менее 1 по абсолютному значению при всяком x $(a \leqslant x \leqslant b)$, то

$$\left| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i B_i \right| < \frac{1}{L}.$$

Следствие I. *Пусть* $f(|B_0|, |B_1|, \ldots, |B_n|)$ *будет какая-нибудь данная функция, возрастающая вместе с каждой из входящих в нее переменных. В таком случае эта функция, составленная для любых полиномов* $R_n(x) = \sum B_k \varphi_k(x)$, *подчиненных единственному условию*

$$|R_n(x)| \leqslant 1, \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{54}$$

получит максимальное значение M, *если* $R_n(x)$ *будет осцилятором, максимум которого равен* 1.

Действительно, согласно теореме I, каковы бы ни были данные неотрицательные числа $\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$, максимум функции $f(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, |B_i|, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, зависящей только от одного коэффициента B_i, будет достигаться, каково бы ни было i, если из всех полиномов, удовлетворяющих (54), выбрать тот, для которого $|B_i|$ наибольший, т. е. осцилятор $P_n(x)$, максимум которого равен 1.

Заметим, что то же рассуждение показывает, что утверждение следствия I остается в силе, если вместо $f(|B_0|, |B_1|, \ldots, |B_n|)$ рассматривать $f(B_0, -B_1, \ldots, (-1)^n B_n)$, так как в полиноме-осциляторе последовательные коэффициенты — чередующихся знаков.

Укажем примеры неравенств, вытекающих из теорем I и II, аналогичные данным в § 6.

1. Пусть $R_n(x)$ будет произвольным многочленом степени n, представленным в виде полинома системы D функций

$$(1-x)^n, \quad x(1-x)^{n-1}, \ldots, x^n;$$

если

$$|R_n| = \left|\sum A_k x^k (1-x)^{n-k}\right| \leqslant 1 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{54 bis}$$

то

$$|A_k| \leqslant C_{2n}^{2k}; \tag{55}$$

при этом знак равенства имеет место для многочлена

$$R_n(x) = \pm \cos 2n \arccos \sqrt{x} =$$
$$= \pm \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x-1}\right)^{2n} + \left(x - \sqrt{x-1}\right)^{2n}\right] =$$
$$= \pm \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n}^{2k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Согласно следствию I, при том же условии (54 bis), имеем:

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |A_k x^k (1-x)^{n-k}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} |x^k (1-x)^{n-k}| =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + \sqrt{|x(1-x)|}\right)^n + \left(1 - \sqrt{|x(1-x)|}\right)^n\right],$$

так что, например,

$$F_n\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

и максимум $F_n(x)$ на всем отрезке $\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, включающем (0,1), не превышает этого же значения.

2. Аналогичным образом:

$$T_{2n}(x) = \cos 2n \arccos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{2n}^{2k} x^{2k} (1-x^2)^{n-k} =$$
$$= n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}}{n+k} C_{n+k}^{2k} (2x)^{2k} \tag{56}$$

является полиномом-осцилятором для системы D функций

$$x^{2k}(1-x^2)^{n-k},$$

а также и для системы четных степеней x^{2k} $(k=0, 1, \ldots, n)$ на отрезке $(0,1)$; поэтому легко получить соответствующие (55) и (19) неравенства для коэффициентов полиномов этих систем.

Точно так же замечая, что

$$\cos(2n+1)\arccos x = 2^{2n}x^{2n+1} + \ldots + (-1)^{n-k}\frac{n+\frac{1}{2}}{2k+1}C_{n+k}^{2k}(2x)^{2k+1} + \ldots + (-1)^n(2n+1)x \tag{57}$$

является полиномом-осцилятором для системы функций

$$x,\ x^3,\ \ldots,\ x^{2k+1},$$

имеющих нулевую точку 0 на отрезке $(0,1)$, так как он достигает абсолютного экстремума в $\overline{n+1}$ точках $\cos\frac{k\pi}{2n+1}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, получаем

Следствие II. *Алгебраический многочлен $R_{2n+1}(x)=a_0x+a_1x^3+\ldots+a_nx^{2n+1}$, содержащий только нечетные степени x, у которого коэффициент при x^{2p+1} равен a_p, не может на всем отрезке $(0,1)$ оставаться менее (но может не превысить) по абсолютному значению величины*

$$|a_p|\frac{(2p+1)!\,(n-p)!}{4^p(2n+1)!\,(n+p)!}.$$

Например, беря $p=0$, получаем, что *наименьшее уклонение от нуля многочлена вида $x+a_1x^3+\ldots+a_nx^{2n+1}$ на отрезке $(0,1)$ равно*

$$\frac{1}{2n+1}.$$

Следствие III. *Если любой многочлен $R_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}A_kx^k$ степени не выше $2n+1$ на данном отрезке $(-1, +1)$ удовлетворяет неравенству*

$$|R_{2n+1}(x)| = \left|\sum_{k=0}^{2n+1}A_kx^k\right| \leqslant 1, \tag{58}$$

то его коэффициенты при четных степенях x не превышают соответствующих коэффициентов многочлена (56), а коэффициенты при нечетных степенях не превышают коэффициентов многочлена (57).

Действительно, благодаря лемме § 4, многочленом степени не выше $2n+1$, имеющим данный коэффициент при x^k, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $(-1, +1)$, является содержащий степени x лишь той же четности, что и показатель k.

Таким образом, при условии (58):

$$|A_{2p}| \leqslant \frac{n}{n+p} C_{n+p}^{2p} 2^{2p}, \quad |A_{2p+1}| \leqslant \frac{2n+1}{2p+1} C_{n+p}^{2p} 2^{2p}. \tag{59}$$

Замечая, что $k!\, A_k = R_n^{(k)}(0)$, находим, как в § 6, эквивалентные (59) неравенства (В. А. Маркова)

$$\left|R_{2n+1}^{(2p)}(0)\right| \leqslant 2^{2p} n (n+p-1) \ldots (n-p+1),$$

$$\left|R_{2n+1}^{(2p+1)}(0)\right| \leqslant 2^{2p} (2n+1)(n+p) \ldots (n-p+1) \tag{60}$$

и, следовательно, вообще, если на отрезке (a, b) длины $2h$ имеет место (58), то в середине отрезка, т. е. при $x_0 = \frac{a+b}{2}$, соблюдаются неравенства[1]):

$$\left|R_{2n+1}^{(2p)}(x_0)\right| \leqslant \left(\frac{2}{h}\right)^{2p} n^2 (n^2-1) \ldots [n^2-(p-1)^2],$$

$$R_{2n+1}^{(2p+1)}(x_0) \leqslant \left(\frac{2}{h}\right)^{2p+1} \left(n+\frac{1}{2}\right) \left\{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(p-\frac{1}{2}\right)^2\right]\right\}. \tag{61}$$

Сопоставляя неравенства (61) с неравенством (20) § 6 (где n нужно заменить через $2n+1$), видим, что между тем как при возрастании степени n многочлена порядок возрастания его k-ой производной равен n^{2k} в концах промежутков, порядок возрастания той же производной в середине промежутка равен только n^k. Принимая во внимание, что всякую внутреннюю точку отрезка (a, b), где имеет место (58), можно рассматривать как середину некоторой части этого отрезка, заключаем, что ни в одной данной внутренней точке (a, b), максимальное возрастание k-ой производной не выше порядка n^k. Это замечание может быть уточнено, и в дальнейшем мы еще возвратимся к этому вопросу.

Перейдем теперь к исследованию свойств осциляторов, аналитическое выражение которых неизвестно.

---

[1]) Если степень многочлена не выше $2n$, то первое из неравенств (61) не изменяется, но во втором неравенстве вместо n надо, очевидно, взять $n-1$.

§ 13. Порядок наилучшего приближения $|x|$ при помощи многочленов степени n

Основная лемма. *Пусть функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$ образуют систему D на отрезке $(0, b)$, с нулевой точкой $x=0$ (так что $\varphi_0(x)=0$). В таком случае максимум L осцилятора*

$$P(x)=\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_{k-1}\varphi_{k-1}(x)+ \\ +\alpha_k\varphi_{k+1}(x)+\alpha_{k+1}\varphi_{k+2}(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_{n+1}(x),$$

соответствующего данной системе D, лишенной функции $\varphi_k(x)$, больше максимума M осцилятора

$$Q(x)=\varphi_0(x)+b_1\varphi_1(x)+\ldots+b_{k-1}\varphi_{k-1}(x)+b_k\varphi_k(x)+ \\ +\beta_{k+1}\varphi_{k+2}(x)+\ldots+\beta_n\varphi_{n+1}(x),$$

соответствующего системе D, лишенной функции $\varphi_{k+1}(x)$ $(L>M)$.

Для доказательства замечаем, что коэффициенты с одинаковыми индексами в обоих полиномах имеют одинаковые знаки, и в частности $(-1)^k\alpha_k>0$, $(-1)^k b_k>0$; поэтому все последовательные коэффициенты полинома

$$R(x)=P(x)-Q(x)=c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_{k-1}\varphi_{k-1}(x)-b_k\varphi_k(x)+ \\ +\alpha_k\varphi_{k+1}(x)+\ldots+c_n\varphi_{n+1}(x)$$

могут быть чередующихся знаков лишь при условии, что [1] $c_1>0$. Но, если бы, вопреки нашему утверждению, оказалось, что $M>L$, то в $n+1$ точках x_h, где $Q(x_h)=M(-1)^{h-1}$ $(h=1, 2, \ldots, n+1)$, полином $R(x)$ имел бы знак $(-1)^h$, а коэффициенты полинома $R(x)$, который в таком случае имел бы n корней ξ_i $(x_1<\xi_1<x_2<\ldots<\xi_n<x_{n+1})$, должны были бы быть чередующихся знаков. При этом в промежутке $(0,\xi_1)$ полином $R(x)$ должен иметь знак своего первого коэффициента c_1 и в то же время в точке x_1 этого промежутка должен был бы иметь знак $-$, что невозможно, так как $c_1>0$.

Остается показать, что допущение $L=M$ также ведет к противоречию. Действительно, в таком случае $Q(x_i)\cdot R(x_i)\leqslant 0$, причем либо $R(x_i)=0$, либо $Q(x_i)\cdot R(x_i)<0$, и последнее неравенство должно осуществляться по крайней мере в одной из точек отклонения x_i осцилятора $Q(x)$. Пусть точек x_i последней категории будет $h+1$, и обозначим их через $x_0'<x_1'<\ldots<x_h'$, так что точек первой категории, где $R(x_i)=0$, будет $n-h$; поэтому, если между x'_{l-1} и x'_l находится p_l точек первой категории, то вследствие $Q(x'_{l-1})\cdot Q(x'_l)(-1)^{p_l}<0$ имеем также $R(x'_{l-1})\cdot R(x'_l)(-1)^{p_l}<0$; благодаря этому, разность между числом всех корней $R(x)=0$ между x'_{l-1} и x'_l и числом p_l была бы числом нечетным, т. е. не менее единицы. Но, так как таких промежутков h, то число этих дополнительных корней в каждом из них не должно быть более одного, чтобы

[1] В действительности, оно так и есть, а именно $a_i>b_i$ $(i<k)$, $\alpha_i<\beta_i$ $(i>k)$

общее число корней $R_n(x)$ не превысило n, и, следовательно, число корней $R_n(x)$ равно n, а потому $c_1 > 0$. В таком случае, так как в промежутке $(0, x_0')$ не может уже быть иных корней $R_n(x) = 0$, кроме p_0 точек отклонения x_i полинома $Q(x)$, вышеназванной первой категории, то мы имели бы в точке x_0' несовместимые неравенства

$$R(x_0')(-1)^{p_0} > 0, \quad Q(x_0') \cdot (-1)^{p_0} > 0, \quad Q(x_0') R(x_0') < 0.$$

Следствие I. *Пусть $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{2n}(x)$ образуют систему D на отрезке $(0, b)$ с нулевой точкой $x = 0$, и пусть будут даны две последовательности по n положительных целых чисел $p_i \geqslant q_i$, где знак равенства имеет место не для всех значений i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В таком случае наилучшее приближение L на отрезке $(0, b)$ функции $\varphi_0(x)$ посредством системы $\varphi_{p_k}(x)$ больше, чем ее наилучшее приближение M на том же отрезке при помощи системы $\varphi_{q_k}(x)$, т. е. $L > M$.*

В самом деле, общий случай, очевидно, приводится к последовательному сравнению двух осциляторов, у которых только одна пара функций $\varphi_p(x)$, $\varphi_q(x)$ различны между собой. Таким образом достаточно убедиться, что осцилятор

$$\varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=k+1}^{m+1} \alpha_i \varphi_i(x)$$

имеет больший максимум, чем осцилятор

$$\varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{h-1} b_i \varphi_i(x) + \sum_{i=h+1}^{n+1} \beta_i \varphi_i(x),$$

если $h > k$. Случай $h = k + 1$ соответствует выше доказанной лемме; если же $h - k > 1$, то достаточно ввести промежуточные осциляторы, отличающиеся лишь соседними функциями $\varphi_k(x)$, $\varphi_{k+1}(x)$, чтобы, на основании упомянутой леммы, прийти к требуемому выводу.

Применяя полученный результат к системе $x, x^2, \ldots, x^{2n+1}$, находим, что максимум M осцилятора

$$Q(x) = x + b_1 x^2 + \ldots + b_n x^{2n}$$

на отрезке $(0,1)$ менее максимума L_1 осцилятора

$$x + a_1 x^3 + \ldots + a_n x^{2n+1},$$

который, согласно следствию II § 12, равен $\frac{1}{2n+1}$; поэтому

$$M < \frac{1}{2n+1}. \tag{62}$$

Точно так же рассмотрение системы функций $x, x^3, x^4, \ldots, x^{2n}$ приводит нас к заключению, что максимум L осцилятора

$$Q_1(x) = x + c_1 x^4 + \ldots + c_n x^{2n}$$

больше максимума $M_1 = \frac{1}{2n-1}$ осцилятора соответствующего нечетным степеням $x, x^3, \ldots, x^{2n-1}$, т. е.

$$L > \frac{1}{2n-1}. \tag{63}$$

Из последнего неравенства можем получить нижнюю границу и для M. Для этого замечаем, что, по определению,

$$|Q(x)| = |x + b_1x^2 + \ldots + b_nx^{2n}| \leqslant M \tag{64}$$

на отрезке (0,1), поэтому, при любом $\mu > 0$, имеем также

$$\left|Q\left(\frac{x}{1+\mu}\right)\right| = \left|\frac{x}{1+\mu} + b_1\left(\frac{x}{1+\mu}\right)^2 + \ldots + b_n\left(\frac{x}{1+\mu}\right)^{2n}\right| \leqslant M.$$

Следовательно, на отрезке (0,1) соблюдается также неравенство

$$(1+\mu)^2\left|Q\left(\frac{x}{1+\mu}\right)\right| =$$

$$= \left|x(1+\mu) + b_1x^2 + \ldots + b_n\frac{x^{2n}}{(1+\mu)^{2n-2}}\right| \leqslant M(1+\mu)^2. \tag{65}$$

Поэтому, вычитая (64) из (65) и замечая, что при этом члены, содержащие x^2, взаимно уничтожаются, получим неравенство вида

$$|\mu(x + B_1x^4 + \ldots + B_{n-1}x^{2n})| \leqslant M[(1+\mu)^2 + 1]$$

или, по разделении на μ:

$$|x + B_1x^4 + \ldots + B_{n-1}x^{2n}| \leqslant M\left[\frac{(1+\mu)^2+1}{\mu}\right].$$

Но вследствие (63) мы должны иметь

$$M\frac{(1+\mu)^2+1}{\mu} \geqslant L > \frac{1}{2n-1}$$

(при $n > 1$[1])). Полагая $\mu = \sqrt{2}$, чтобы получить наивыгоднейшее неравенство, получим

$$M > \frac{\sqrt{2}-1}{2(2n-1)}. \tag{66}$$

---

[1]) Если $n = 1$, то $L = \frac{1}{2n-1} = 1$. В этом случае осцилятор $Q(x) = x + b_1x^2$ вычисляется без труда; $b_1 = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $M = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Таким образом, для $n = 1$ неравенство (66) обратится в равенство.

Обозначая через $E_n[f(x); S]$ и $E'_n\ [f(x); S]$ соответственно наилучшее приближение функции $f(x)$ на множестве S посредством любых многочленов степени n и посредством многочленов без свободного члена, получаем, пользуясь леммой § 4, из (61) и (66):

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{1}{(2n-1)} < E'_{2n}[|x|; (-1, +1)] < \frac{1}{2n+1}. \tag{67}$$

Заметим кроме того, что

$$E'_{2n}[|x|; (-1, +1)] = E'_n[\sqrt{x}; (0,1)];$$

поэтому наилучшее приближение $\sqrt{x}$ посредством многочленов степени n без свободного члена на отрезке (0,1) удовлетворяет тому же неравенству (67). Соответствующее неравенство для

$$E_{2n}[|x|; (-1, +1)] = E_n(\sqrt{x}; (0,1)]$$

получается из общего неравенства

$$\frac{1}{2}E'_n[f(x); S] < E_n[f(x); S] \leqslant E'_n[f(x); S]; (f(0)=0; 0\subset S) \tag{68}$$

справедливость второго из неравенств (68) очевидна, при этом знак равенства может быть отброшен, если, как в случае $|x|$, многочлен наилучшего приближения $P_n(x)$ не обращается в нуль при $x=0$. С другой стороны, $P_n(x)-P_n(0)$ не имеет свободного члена и дает приближение, равное $E_n\ [f(x); S]+|P_n(0)|$; поэтому

$$E'_n[f(x); S] \leqslant E_n[f(x); S]+|P_n(0)| \leqslant 2E_n[f(x); S],$$

причем оба знака равенства несовместимы, так как первое равенство означало бы, что $P_n(x)-P_n(0)$ есть многочлен наименьшего уклонения без свободного члена, и следовательно, положительные и отрицательные абсолютные экстремумы разности $f(x)-[P_n(x)-P_n(0)]$ имеют равные модули, для чего необходимо, чтобы $P_n(0)=0$; но тогда второе равенство невозможно. Таким образом, из (67) и (68) следует, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}-1}{4}\cdot\frac{1}{(2n-1)} < E_{2n+1}[|x|; (-1, +1)] =\\ = E_{2n}[|x|; (-1, +1)] < \frac{1}{2n+1}.\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Очевидно

$$E_h[|x|; (-h, +h)] = hE_h[|x|; (-1, +1)].$$

В настоящее время известно несколько доказательств факта, вытекающего из неравенств (69), что порядок убывания наилучшего приближения $|x|$ при помощи многочленов степени n равен $\frac{1}{n}$, но данный здесь вывод (хронологически первый) является единственным, основанным на чисто алгебраических соображениях.

Укажем еще примеры применения основной леммы.

Пусть

$$P_{k,n}(x)=x+a_1x^3+\ldots+a_{k-1}x^{2k-1}+a_kx^{2k}+\ldots+a_nx^{2n}$$

$$Q_{k,n}(x)=x+b_1x^3+\ldots+b_{k-1}x^{2k-1}+b_kx^{2k+2}+\ldots+b_{n-1}x^{2n}$$

будут осциляторы, и $L_{k,n}$, $M_{k,n}$ — их соответственные максимумы; тогда

$$L_{k,n}<\frac{1}{2n+1}, \quad M_{k,n}>\frac{1}{2n-1}.$$

Пользуясь рассуждением, которое привело нас к неравенству (66), найдем также

$$L_{k,n}\frac{(1+\mu)^{2k}+1}{(1+\mu)^{2k-1}-1}>\frac{1}{2n-1}$$

при всяком $\mu>0$.

В частности, полагая $\mu=\frac{\lg k}{k}$, получим:

$$L_{k,n}>\frac{\left(1+\frac{\lg k}{k}\right)^{2k-1}-1}{\left(1+\frac{\lg k}{k}\right)^{2k}+1}\cdot\frac{1}{2n-1};$$

поэтому, при $n>k\to\infty$:

$$L_{k,n}\sim\frac{1}{2n}.$$

2. Пусть *коэффициенты* $a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots$ *многочлена или сходящегося на отрезке* (0,1) *ряда*

$$S(x)=x+a_1x^3+\ldots+a_px^{2p+1}+\ldots$$

представляют $\lambda-1$ *вариации знака* (не считая возможной вариации между 1 и a_1); *в таком случае* $S(x)$ *не может оставаться на всем отрезке* (0,1) *менее* $\frac{1}{2\lambda+1}$ *по абсолютному значению и не превысит этой величины при условии, что*

$$S(x)=\frac{1}{2\lambda+1}\cos(2\lambda+1)\arccos x.$$

Для доказательства составим систему D из функций

$$x,\ x^{3-\varepsilon},\ \psi_1(x);\ x^{2p_1+1-\varepsilon},\ldots,\ x^{2p_{\lambda-1}+1-\varepsilon},\ \psi_\lambda(x),$$

где $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $2p_1+1,\ldots,2p_{\lambda-1}+1$ — показатели степени x, соответствующие коэфициентам a_{p_1}, $a_{p_2}, \ldots, a_{p_{\lambda-1}}$, дающим вариации знака, а коэффициенты функций

$$\pm\psi_1(x) = a_1 x^3 + \ldots + a_{p_1-1} x^{2p_1-1}, \quad \mp\psi_2(x) = a_{p_1} x^{2p_1+1} + \ldots + \\ + a_{p_2-1} x^{2p_2-1}, \ldots$$

знакопостоянны. Таким образом, благодаря следствию I, максимум $|S(x)|$ превысит максимум осцилятора

$$x + b_1 x^{3-\varepsilon} + b_2 x^{2p_1+1-\varepsilon} + \ldots + b_\lambda x^{2p_{\lambda-1}+1-\varepsilon}$$

который, в свою очередь, больше максимума M осцилятора

$$x_1 + c_1 x^{3-2\varepsilon} + c_2 x^{5-2\varepsilon} + \ldots + b_\lambda x^{2\lambda+1-2\varepsilon}.$$

Следовательно, максимум $|S(x)|$ не меньше, чем $\frac{1}{2\lambda+1}$, который является пределом последнего максимума M при $\varepsilon \to 0$.

3. Аналогичным образом доказывается, что *максимум*

$$S_1(x) = x + a_1 x^2 + \ldots + a_p x^p + \ldots$$

не может оставаться менее $\frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\lambda}$ (*но может не превысить этой величины*) *на отрезке* $(0,1)$, *если коэффициенты* $a_1, a_2, \ldots a_p$ *образуют* $\lambda - 1$ *вариации знака*.

Наименьшее уклонение $S_1(x)$ получается, если

$$S_1(x) = x + a_1 x^2 + \ldots + a_\lambda x^\lambda$$

осцилятор, причем нетрудно построить этот осцилятор, который равен

$$S_1(x) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\lambda} \cos \lambda \arccos \left[2x \cos^2 \frac{\pi}{4\lambda} - \cos \frac{\pi}{2\lambda} \right],$$

так как при изменении x от 0 до 1, $2x \cos^2 \frac{\pi}{4\lambda} - \cos \frac{\pi}{2\lambda}$ растет от $-\cos \frac{\pi}{2\lambda} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2\lambda}\right)$ до $1 = \cos 0$ и $|S_1(x)|$ достигает своего максимума в n точках $x_k = \dfrac{\cos \frac{k\pi}{\lambda} + \cos \frac{\pi}{2\lambda}}{2\cos^2 \frac{\pi}{4\lambda}}$, обращаясь в нуль при $x = 0$.

Полезно еще отметить обобщение основной леммы, доказываемой тем же способом: *пусть функции* $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_h(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$ *образуют систему* D *на отрезке* (a, b); *пусть* $h < p < q \leqslant n+1$ (*или* $h > p > q \geqslant 0$), *тогда максимум* L *осцилятора*

$$a_0 \varphi_0(x) + \ldots + a_{h-1} \varphi_{h-1}(x) + \varphi_h(x) + \ldots + a_{p-1} \varphi_{p-1}(x) + \\ + \alpha_p \varphi_{p+1}(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_{n+1}(x)$$

больше, чем максимум M осцилятора

$$b_0\varphi_0(x)+\ldots+\varphi_h(x)+\ldots+b_{q-1}\varphi_{q-1}(x)+\beta_q\varphi_{q+1}(x)+\ldots+$$
$$+\beta_n\varphi_{n+1}(x).$$

Из этой обобщенной леммы, подобно предыдущему, можно вывести, что порядок наилучшего приближения $|x^{2h+1}|$ на $(-1, +1)$ при помощи многочленов возрастающих степеней n равен $\frac{1}{n^{2h+1}}$.

§ 14. Эквивалентные системы Чебышева и их база

Пусть будет дана некоторая система T функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x),\ldots$, $\varphi_n(x)$ (не периодических) на отрезке (a, b). Всякая другая система $n+1$ функций $\psi_0(x)$, $\psi_1(x),\ldots$, $\psi_n(x)$ будет называться *эквивалентной* данной, если определитель системы

$$\psi_k(x)=\sum_{i=0}^{n}A_k^{(i)}\varphi_i(x) \qquad (k=0,1\ldots,\ n)$$

отличен от нуля; в таком случае любой полином первой системы является полиномом второй системы и наоборот. Очевидно, что полиномы наименьшего уклонения всякой функции $f(x)$ тождественны для обеих эквивалентных систем. Принимая во внимание особо простые свойства систем D, вытекающие, в основном, из применимости к ним правила знаков Декарта, может быть полезным преобразовать систему T в эквивалентную систему D; это, как мы сейчас увидим, возможно сделать различными способами. Для упрощения изложения мы ограничимся однако предположением, что функции $\varphi_k(x)$ *дифференцируемы* достаточное число раз ($\varphi_k(x)$ имеют непрерывные производные до n-го порядка включительно) и образуют систему T в несколько менее общем смысле, чем мы предполагали вначале: а именно, допустим, что полином

$$F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}B_k\varphi_k(x)$$

имеет не более n корней на отрезке (a, b), считаемых с их степенью кратности в общепринятом смысле этого слова, т. е. считая за p корней значение x_0, если $F_n(x_0)=F_n'(x_0)=\ldots=F_n^{(p-1)}(x_0)=0$. Таким образом, можем определить однозначно с точностью до численного множителя эквивалентную систему $\psi_0(x)$, $\psi_1(x),\ldots$, $\psi_n(x)$ по условию, что

$$\left.\begin{aligned}\psi_k(a)=\psi_k'(a)=\ldots=\psi_k^{(k-1)}(a)=0;\\ \psi_k(b)=\psi_k'(b)=\ldots=\psi_k^{(n-k+1)}(b)=0,\end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

так как не может быть двух линейно независимых функций, удовлетворяющих (70) при том же самом k $(k=0, 1, \ldots, n)$. Нетрудно видеть, что [1])

$$\psi_k(x) = C\Delta\left[\varphi_0(x), \varphi_1(a), \ldots, \varphi_k^{(k-1)}(a), \varphi_{k+1}(b), \ldots, \varphi_n^{(n-k+1)}(b)\right] =$$

$$= C\begin{vmatrix} \varphi_0(x)\,\varphi_0(a)\ldots\varphi_0^{(k-1)}(a)\ldots\varphi_0^{(n-k+1)}(b) \\ \varphi_1(x)\,\varphi_1(a)\ldots\varphi_1^{(k-1)}(a)\ldots\varphi_1^{(n-k+1)}(b) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x)\,\varphi_n(a)\ldots\varphi_n^{(k-1)}(a)\ldots\varphi_n^{(n-k+1)}(b) \end{vmatrix}$$

Так как функции $\psi_k(x)$, имея n корней (корень a кратности k и корень b кратности $n-k$), не могут иметь иных корней между a и b, то мы выбираем знак постоянной C так, чтобы $\psi_k(x) > 0$ при $a < x < b$. Систему функций $\psi_k(x)$ мы назовем *базой* D^* данной системы T. Из предыдущего следует, что *функции* $\psi_k(x)$, *образующие базу* D^*, *определены с точностью до постоянного множителя.*

Теорема I. *База D^* функций $\psi_k(x)$ системы T на отрезке (a, b) является системой функций Декарта на отрезке (a, b).*

В самом деле, благодаря условиям (70)

$$\lim_{x=a}\frac{\psi_{k+1}(x)}{\psi_k(x)} = 0.$$

С другой стороны, полином, составленный из $l+1$ последовательных функций

$$P(x) = \sum_{i=0}^{l} A_i\psi_{k+i}(x),$$

являясь полиномом системы T n-го порядка, имеет не более n корней, но в число их входит корень a кратности k и корень b кратности $n-k-l$; поэтому полином $P(x)$ имеет не более l (исключая общие нулевые точки всех входящих в него членов) корней.

---

[1]) Определитель Δ не может быть тождественно равен 0, так как если все миноры порядка выше p, не содержащие элементов первой колонны, равны нулю, то определители порядка $p+1$, включающие первую колонну, давали бы $n+1-p$ линейно-независимых полиномов, удовлетворяющих (70); поэтому $p=n$.

На основании рассуждения, примененного для установления леммы II (§ 11), заключаем отсюда, что все определители, составленные из смежных функций

$$\delta_{k,l}=\begin{vmatrix} \psi_k(x_0) & \psi_{k+1}(x_0)\ldots\psi_{k+l}(x_0) \\ \psi_k(x_1) & \psi_{k+1}(x_1)\ldots\psi_{k+l}(x_1) \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \psi_k(x_l) & \psi_{k+1}(x_l)\ldots\psi_{k+l}(x_l) \end{vmatrix}>0,$$

каковы бы ни были $x_0<x_1<\ldots<x_l$ внутри (a, b). Остается лишь показать, что и все прочие миноры определителя

$$\Delta[\psi_0(x_0),\ldots,\psi_n(x_n)]=\begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & \psi_1(x_0)\ldots & \psi_n(x_0) \\ \psi_0(x_1) & \psi_1(x_1)\ldots & \psi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_0(x_n) & \psi_1(x_n)\ldots & \psi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

положительны. Для этого подбираем постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ так, чтобы

$$\psi_{k+i}(x_0)+\sum_{h=1}^{l}\alpha_h\psi_{k+i}(x_h)=0; \qquad (i=1, 2, \ldots, l),$$

в таком случае, полагая

$$\psi_k(x_0)+\sum_{h=1}^{l}\alpha_h\psi_k(x_h)=A$$

$$\psi_{k+l+1}(x_0)+\sum_{h=1}^{l}\alpha_h\psi_{k+l+1}(x_h)=B,$$

получаем, прибавляя к первой строке определителей $(l+1)$-го порядка $\delta_{k,l}$ и $\delta_{k+1,l}$ элементы следующих строк, соответственно умноженных на $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$:

$$\delta_{k,l}=A\delta_{k+1,l-1}>0, \quad \delta_{k+1,l}=(-1)^l B\delta_{k+2,l-1}>0.$$

Поэтому любой определитель $(l+1)$-го порядка из матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \psi_k(x_0) & \psi_{k+1}(x_0) \ldots & \psi_{k+l+1}(x_0) \\ \psi_k(x_1) & \psi_{k+1}(x_1) \ldots & \psi_{k+l+1}(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_k(x_l) & \psi_{k+1}(x_l) \ldots & \psi_{k+l+1}(x_l) \end{matrix} \right\|$$

будет также положителен. Повторяя это рассуждение достаточное число раз, приходим к требуемому выводу.

Разумеется база D^* не является единственной системой D эквивалентной данной системе T; она отличается от прочих (левых) систем D лишь тем, что $\lim\limits_{b=0} \frac{\psi_{k-1}(x)}{\psi_k(x)} = 0$, так что *точка b для системы D^* играет ту же роль, что и точка a, если функции $\psi_k(x)$ расположить в обратном порядке* [1]).

После того, как найдена база данной системы, для получения всех эквивалентных систем D служит следующая

Теорема II. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы система функций $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ была (левой) системой D, эквивалентной системе D^* функций $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$, заключается в том, чтобы*

$$\left. \begin{aligned} f_0(x) &= p_0^{(0)}\psi_0(x) + p_0^{(1)}\psi_1(x) + \ldots + p_0^{(n)}\psi_n(x) \\ f_1(x) &= \qquad\qquad\quad p_1^{(1)}\psi_1(x) + \ldots + p_1^{(n)}\psi_n(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad p_n^{(n)}\psi_n(x), \end{aligned} \right\} \tag{71}$$

где все миноры определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_0^{(0)} & p_0^{(1)} & \ldots p_0^{(n)} \\ 0 & p_1^{(1)} & \ldots p_1^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots p_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{72}$$

---

[1]) Очевидно не может быть системы D, для которой $\lim\limits_{x=a} \frac{\varphi_{k+1}(x)}{\varphi_k(x)} = \lim\limits_{x=b} \frac{\varphi_{k+1}(x)}{\varphi_k(x)} = 0$, так как в таком случае уравнение $\varphi_k(x) + C\varphi_{k+1}(x) = 0$, которое между a и b имеет не более одного корня, получая одинаковый знак вблизи a и вблизи b, ни при каком C не имело бы ни одного корня.

не отрицательны, а элементы главной диагонали положительны (последнее условие, очевидно, является следствием того, что $\Delta>0$.).

Достаточность этого условия следует из того, что $\lim\limits_{x=a}\dfrac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}=0$ и что, благодаря неотрицательности всех миноров Δ, определители

$$D[f_{k_1}(x_1),\ldots,f_{k_l}(x_l)]=\begin{vmatrix} f_{k_1}(x_1)f_{k_2}(x_1)\ldots f_{k_l}(x_1)\\ f_{k_1}(x_2)f_{k_2}(x_2)\ldots f_{k_l}(x_2)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ f_{k_1}(x_l)f_{k_2}(x_l)\ldots f_{k_l}(x_l)\end{vmatrix}>0,$$

где $k_1<k_2<\ldots<k_l$; $x_1<x_2<\ldots<x_l$, положительны, так как они представляются в виде суммы произведений неотрицательных определителей, среди которых есть отличные от нуля, на положительные.

Допустим теперь, что, наоборот, функции $f_i(x)$ образуют систему D и докажем, что они должны иметь форму (71) с указанным свойством (72) коэффициентов $p_i^{(k)}$. Во-первых, вследствие свойства $\lim\limits_{x=a}\dfrac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}=0$ видно сразу, что $f_1(x)$ не может включать $\psi_0(x)$, $f_2(x)$, не может включать ни $\psi_0(x)$, ни $\psi_1(x)$ и т. д., и кроме того $p_i^{(i)}>0$. Также очевидно, что у полиномов $f_i(x)$, которые таким образом имеют форму (71), коэффициенты $p_i^{(n)}$ при $\psi_n(x)$ не отрицательны, так как иначе $f_i(x)$ было бы отрицательно при x, близком к b.

Вообще из положительности определителя $D[f_{k_1}(x_1),\ldots,f_{k_l}(x_l)]$, рассматриваемого, как функция x_l, где

$$k_1<k_2<\ldots<k_l,\quad x_1<x_2<\ldots<x_l,$$

принимая во внимание, что при $x_l\to b$ его знак совпадает с знаком отличного от нуля коэффициента при $\psi_k(x)$ с наибольшим индексом, заключаем, что

$$\begin{vmatrix} f_{k_1}(x_1) & f_{k_2}(x_1)\ldots f_{k_l}(x_1)\\ f_{k_1}(x_2) & f_{k_2}(x_2)\ldots f_{k_l}(x_2)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ f_{k_1}(x_{l-1}) & f_{k_2}(x_{l-1})\ldots f_{k_l}(x_{l-1})\\ p_{k_1}^{(n)} & p_{k_2}^{(n)}\ldots\quad p_{k_l}^{(n)}\end{vmatrix}\geqslant 0.$$

По той же причине, устремляя x_{l-1} к b, находим, что

$$\begin{vmatrix} \psi_{k_1}(x_1) & \psi_{k_2}(x_1) & \ldots & \psi_{k_l}(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k_1}^{(n-1)} & p_{k_2}^{(n-1)} & \ldots & p_{k_l}^{(n-1)} \\ p_{k_1}^{(n)} & p_{k_2}^{(n)} & \ldots & p_{k_l}^{(n)} \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Повторяя соответствующее число раз то же рассуждение, приходим к заключению, что все миноры определителя (72), составленные из элементов l его последних колонн, не отрицательные. Но в таком случае, беря миноры, в которые входит единственный элемент $p_n^{(n)}$ последней строки, видим, что и все миноры Δ, состоящие из элементов l предпоследних колонн, также не отрицательные. Повторяя то же рассуждение, видим, что миноры, составленные из любых l последовательных колонн, не отрицательны. Отсюда на основании рассуждения, которое было уже использовано нами при доказательстве теоремы I, приходим к выводу, что все миноры определителя Δ не отрицательны.

База D^*, по сравнению с другими эквивалентными системами D функций Декарта, обладает тем преимуществом, что представление любого полинома при помощи функций $\psi_i(x)$ системы D^* дает *минимальное* число вариаций знаков его последовательных коэффициентов и, следовательно, является наиболее выгодным для применения правила Декарта. Иными словами, имеет место такая

Теорема III. *Если полином* $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} Y_k f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \psi_k(x)$, где $f_k(x)$ *образуют какую-нибудь систему* D, *имеющую базой систему* D^* *функций* $\psi_k(x)$, *то число перемен знака коэффициентов* y_k *не может превысить числа перемен* $\sigma < n$ *знака коэффициентов* Y_k.

Для этого замечаем, что, вследствие (72)

$$y_k = \sum_{i=0}^{n} Y_i p_i^{(k)} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n), \tag{73}$$

где все миноры определителя Δ неотрицательны. Следовательно, наше утверждение будет доказано, если будет установлена

Лемма. *Последовательность независимых линейных форм* y_k (73) *имеет не более вариаций знака, чем последовательность величин* Y_i, *если все миноры определителя* Δ, *составленного из коэффициентов* $p_i^{(k)}$, *неотрицательны.*

В самом деле, пусть величины Y_i образуют σ перемены знака, так что $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{i_0}$ положительны, $Y_{i_0+1}, Y_{i_0+2}, \ldots, Y_{i_1}$ отрицательные и т. д. $\ldots Y_n$ имеет знак $(-1)^\sigma$ (в каждой группе могут быть и величины, равные нулю, только не все). Тогда, обозначая через:

$$P_h^{(k)} = (-1)^h \sum_{i=i_{h-1}+1}^{i_h} Y_i p_i^{(k)} \geqslant 0, \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

равенства (73) можем записать в виде

$$y_k = \sum_{h=0}^{\sigma} (-1)^h P_h^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \quad (74)$$

Полагая, в противоположность тому, что нужно доказать, что последовательность величин y_k имеет число перемен знака, превышающее σ, обозначим какие-нибудь из последовательных y_{k_i} (отличных от нуля), имеющих противоположные знаки, через $a_0, -a_1, \ldots, (-1)^{\sigma+1} a_{\sigma+1}$, где все числа a_i одинакового знака ($i = 0, 1, \ldots, \sigma+1$). Таким образом из (74) получим $\overline{\sigma+2}$ уравнения

$$(-1)^i a_i = \sum_{h=0}^{\sigma} z_h P_h^{(k_i)}, \quad (i = 0, 1, \ldots, \sigma+1) \quad (75)$$

с $\overline{\sigma+1}$ неизвестными z_h, которые должны быть совместны, имея решением $z_h = (-1)^h$. Но это невозможно, так как вследствие неотрицательности всех миноров определителя Δ, тем же свойством обладают все миноры определителя, имеющего элементами $P_h^{(k_i)}$, а потому характеристический определитель системы (75) отличен от нуля.

Следствие. *Если полином $F_n(x)$ системы T на отрезке (a, b) разложен по функциям $\psi_k(x)$ своей базы D^* на этом отрезке,*

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \psi_k(x),$$

то разность между числом σ вариаций знаков коэффициентов A_k и числом m корней $F_n(x)$ внутри (a, b) есть неотрицательное четное число.

Действительно, при $\varepsilon > 0$, достаточно малом:

$$(-1)^m F_n(a+\varepsilon) \,.\, F_n(b-\varepsilon) > 0,$$

и так как знаки $F_n(a+\varepsilon)$ и $F_n(b-\varepsilon)$ совпадают, соответственно с знаками первого и последнего отличных от нуля коэффициентов A_k, произведение которых имеет знак $(-1)^\sigma$, то $(-1)^{\sigma+m} = 1$.

Простейшим примером базы D^* может служить система $(1-x)^n$, $x(1-x)^{n-1}, \ldots x^n$, которая является базой для системы x^p ($p = 0, 1, \ldots, n$).

Вообще, читатель легко проверит, что если дана система функции Декарта $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$, то функции $\psi_k(x)$ ее базы даны (с точностью до постоянного множителя) формулой

$$\psi_k(x) = C \begin{vmatrix} f_k(x) & f_k(b) & f_k'(b) \,.\, f_k^{(n-k-1)}(b) \\ f_{k+1}(x) & f_{k+1}(b) & \ldots\ f_{k+1}^{(n-k-1)}(b) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x) & f_n(b) & \ldots\ f_n^{(n-k-1)}(b) \end{vmatrix}.$$

Например, если $f_k(x) = x^{\alpha_k}$, где $\alpha_{k+1} > \alpha_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$,

$$\psi_k(x) = \sum_{i \geqslant k}^{n} A_i^{(k)} x^{\alpha_i},$$

где

$$A_i^{(k)} = (-1)^i C \begin{vmatrix} 1 & \alpha_k & \alpha_k^2 & \ldots & \alpha_k^{n-k-1} \\ 1 & \alpha_{k+1} & \alpha_{k+1}^2 & \ldots & \alpha_{k+1}^{n-k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_{i-1} & \alpha_{i-1}^2 & \ldots & \alpha_{i-1}^{n-k-1} \\ 1 & \alpha_{i+1} & \alpha_{i+1}^2 & \ldots & \alpha_{i+1}^{n-k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-k-1} \end{vmatrix}.$$

Полагая $\alpha_0 = 0$, можем выбрать постоянные C так, чтобы иметь тождественно

$$\sum_{k=0}^{n} \psi_k(x) = 1.$$

Тогда

$$A_k^{(k)} = \frac{\alpha_{k+1}\,\alpha_{k+2}\ldots\alpha_n}{(\alpha_{k+1}-\alpha_k)(\alpha_{k+2}-\alpha_k)\ldots(\alpha_n-\alpha_k)},$$

$$A_{k+h}^{(k)} =$$

$$= (-1)^h A_k^{(k)} \frac{(\alpha_{k+1}-\alpha_k)\ldots(\alpha_n-\alpha_k)}{(\alpha_{k+h+1}-\alpha_{k+h})\ldots(\alpha_n-\alpha_{k+h})(\alpha_{k+h}-\alpha_{k+h-1})\ldots(\alpha_{k+h}-\alpha_k)}$$

при $h > 0$.

Глава вторая

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ МНОГОЧЛЕНОВ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

§ 1. Связь между наилучшим приближением аналитической функции и ее особыми точками

В этой главе[1]) мы будем заниматься исключительно наилучшими приближениями аналитических функций на конечном отрезке при помощи многочленов данной степени; для определенности мы всегда будем рассматривать отрезок $(-1, +1)$, к которому можно посредством линейного преобразования $\frac{x+1}{2}=\frac{t-a}{b-a}$ привести любой отрезок (a, b), не изменяя степени многочлена; поэтому $E_n[f(x)]=E_n$ будет всегда означать наилучшее приближение $f(x)$ на отрезке $(-1, +1)$ посредством многочленов степени n.

Для всякой непрерывной функции $f(x)$ можем определить многочлен $P_n(x)$ степени n наилучшего *средне-квадратичного* приближения по условию

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[f(x)-P_n(x)]^2\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{минимум}.$$

Очевидно

$$P_n(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{i=1}^{n}A_iT_i(x),$$

где

$$T_i(x)=\cos i\arccos x,$$

$$A_i=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\cos i\theta\,d\theta, \tag{1}$$

и соответствующий минимум равен, как известно:

$$I_n^2=\frac{\pi}{4}\sum_{k=n+1}^{\infty}A_k^2.$$

---

[1]) Каждая глава имеет собственную нумерацию формул; при ссылке на формулы из другой главы к номеру формулы будет приписываться индекс I, II, III), указывающий главу, в которой она находится.

Ряд Фурье для функции $f(x)$, из которого многочлен $P_n(x)$ получается отбрасыванием членов порядка выше n, часто дает весьма ценные указания о наилучшем приближении.

В первой главе мы видели, что в некоторых (хотя и редких) случаях многочлены $P_n(x)$ совпадают с многочленами $R_n(x)$ наилучшего приближения; во всяком случае

$$\frac{\pi}{2} E_n^2 > \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [f(x) - R_n(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \geqslant I_n^2,$$

откуда

$$E_n > \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i^2}; \tag{2}$$

с другой стороны, очевидно, что

$$E_n \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} |A_i|. \tag{3}$$

Из неравенства (2) заключаем, что

$$E_n > \frac{1}{\sqrt{2}} |A_{n+1}|, \tag{4}$$

а потому

$$\overline{\lim} \sqrt[n+1]{E_n} \geqslant \overline{\lim} \sqrt[n+1]{|A_{n+1}|} = \rho,$$

где $\rho \leqslant 1$; при этом знак равенства обязателен, если $\rho = 1$. Точно также, полагая $\rho < 1$, из (3) заключаем, что при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ можно взять n достаточно большим, чтобы иметь

$$E_n < \sum_{i=n+1}^{\infty} (\rho + \varepsilon)^i = \frac{(\rho+\varepsilon)^{n+1}}{1-(\rho+\varepsilon)}, \qquad (\rho + \varepsilon < 1),$$

поэтому

$$\overline{\lim} \sqrt[n+1]{E_n} \leqslant \rho + \varepsilon.$$

Следовательно, для всякой функции

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{E_n} = \overline{\lim} \sqrt[n+1]{E_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|}. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ голоморфна внутри эллипса C, имеющего фокусами точки $(-1, +1)$ и полусумму осей равную $R > 1$, и*

$$|f(x)| \leqslant M \tag{6}$$

на эллипсе C, тогда

$$|A_n| < \frac{2M}{R^n}, \quad E_n[f(x)] < \frac{2M}{R-1}\cdot\frac{1}{R^n}. \tag{7}$$

Второе из неравенств (7) следует из первого вследствие неравенства (3). Поэтому достаточно доказать первое из неравенств (7). Для этого преобразуем (1), полагая $z = e^{i\theta}$,

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)(z^n + z^{-n})\,\frac{dz}{z}, \tag{8}$$

где интегрирование по z производится на окружности радиуса 1. Но принимая во внимание, что, благодаря регулярности $f(x)$ внутри эллипса C, подинтегральная функция, рассматриваемая как функция переменной $z = x \pm \sqrt{1-x^4}$, регулярна, когда z находится между концентрическими окружностями радиуса R и $\frac{1}{R}$ $\Bigl($из $x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(Re^{i\theta} + \frac{1}{R}e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(R + \frac{1}{R}\right)\colon \quad i\left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\theta\right]$ видно, что, если $z^{\pm 1} = Re^{i\theta}$, то x находится на эллипсе $C\Bigr)$. Поэтому, производя интегрирование (8), можем по усмотрению заменить окружность радиуса 1 окружностью радиуса R или $\frac{1}{R}$. Делая вторую замену для вычисления $\int f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) z^{n-1}\,dz$ и первую для $\int f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{z^{n+1}}$, находим таким образом, благодаря (6), что

$$|A_n| < \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi M}{R^n} + \frac{2\pi M}{R^n}\right] = \frac{2M}{R^n}.$$

Лемма II. *Если многочлен $Q_n(x)$ степени n удовлетворяет неравенству*

$$|Q_n(x)| \leqslant 1$$

на отрезке $(-1, +1)$, *то на эллипсе* C

$$|Q_n(x)| < R^n. \tag{9}$$

Проще всего ввести для доказательства функцию

$$\varphi(z) = \frac{Q_n(z)}{(z + \sqrt{z^2-1})^n},$$

которая регулярна на всей плоскости вне отрезка $(-1, +1)$.

Следовательно, максимум ее модуля достигается на этом отрезке, где $|z + \sqrt{z^2-1}| = 1$ и $|Q_n(z)| \leqslant 1$; поэтому

$$|\varphi(z)| < 1$$

на всей плоскости, т. е.

$$|Q_n(z)| < |z + \sqrt{z^2 - 1}|^n = R^n.$$

Примечание. Для случая, когда z *вещественно* $|z| > 1$, в первой главе § 1 (следствие III) было дано более точное неравенство

$$|Q_n(z)| \leqslant \frac{1}{2}\left[R^n + \frac{1}{R^n}\right]. \tag{17$_{\rm I}$ bis}$$

При этом последнее неравенство, очевидно, справедливо и тогда, когда коэффициент многочлена $Q_n(z)$ число комплексное, так как, полагая $z = b > 1$ и $Q_n(b) = M$, где M без нарушения общности можно считать вещественным, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $(-1, +1)$ должен быть многочлен с вещественными коэффициентами. Неравенство (17$_{\rm I}$ bis) для любых комплексных z неправильно, и при комплексных коэффициентах $Q_n(z)$ более точного неравенства, чем (9), неизвестно. Однако, если коэффициенты $Q_n(z)$ вещественны, то можно доказать, что неравенство (17$_{\rm I}$) асимптотически верно для комплексных z при $n \to \infty$, и верно даже при любом n, когда $|z| \gg 1$ (см. мою статью „Sur une propriété des polynomes", Сообщения Харьковского математического общества, т. XIV).

Теорема. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $f(z)$ была аналитической на отрезке $(-1, +1)$ и, оставаясь регулярной внутри эллипса C с фокусами $(-1, +1)$ и полусуммой осей равной $R > 1$, имела особенности на контуре эллипса C, заключается в том, чтобы*

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n[f(x)]} = \frac{1}{R}. \tag{10}$$

Действительно, вследствие леммы I, если $f(z)$ регулярна внутри эллипса C, то

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n} \leqslant \frac{1}{R - \varepsilon},$$

как бы мало ни было $\varepsilon > 0$; поэтому

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n} \leqslant \frac{1}{R}. \tag{11}$$

С другой стороны, пусть

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n} = \frac{1}{R_1} < 1.$$

В таком случае как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существуют многочлены $P_n(x)$ любой достаточно высокой степени n, для которых

$$|f(x) - P_n(x)| < \left(\frac{1}{R_1} + \varepsilon\right)^{n+1} = \rho^{n+1}$$

на всем отрезке $(-1, +1)$. Поэтому ряд

$$f(x) = P_1(x) + (P_2(x) - P_1(x)) + \ldots + (P_n(x) - P_{n-1}(x)) + \ldots \tag{12}$$

равномерно сходится на всем отрезке $(-1, +1)$ и кроме того

$$|P_n(x)-P_{n-1}(x)|<\rho^n+\rho^{n+1}<2\rho^n, \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

Следовательно, по лемме II, во всякой точке z, находящейся на эллипсе, полусумма осей которого равна $\frac{1}{\rho'}<\frac{R_1}{1+R_1\varepsilon}=\frac{1}{\rho}$,

$$|P_n(z)-P_{n-1}(z)|<2\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n,$$

а потому ряд (12) сходится равномерно внутри всякого эллипса, полусумма осей которого менее, чем R_1, и при условии (10) представляет, таким образом, регулярную аналитическую функцию внутри эллипса C с полусуммой осей, равной R.

Поэтому, если функция $f(z)$ имеет особенности на эллипсе C, то

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n(f(x))}\geqslant\frac{1}{R}. \tag{13}$$

Таким образом, сопоставляя неравенства (11) и (13), приходим к требуемому выводу.

Следствие. *Для того, чтобы функция $f(x)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim\sqrt[n]{E_n(f(x))}=0.$$

Следует заметить, что неравенство (7) аналогично неравенству

$$|a_n|<\frac{m(r)}{r^n};$$

для коэффициентов ряда Тэйлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,$$

если функция $f(z)$ регулярна внутри круга радиуса r и на его окружности удовлетворяет условию

$$|f(z)|<m(r),$$

а (10) соответствует $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{r}$, если на этой окружности есть особенности.

Таким образом, исследование связи между законом убывания $E_n(f(x))$ при $n\to\infty$ и законом возрастания максимума M_R модуля $f(z)$ на эллипсах C с возрастающей полусуммой осей R может быть произведено без существенных изменений теми же методами, которые в классической теории целых функций применяются к изучению связи между убыванием коэффициентов a_n и $m(r)$.

Не останавливаясь на этом вопросе, обратим внимание лишь на то, что связь между $E_n[f(x)]$ и коэффициентами a_n строки Тэйлора, очевидно, весьма слаба, так как радиус r круга сходимости в начале координат удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right),$$

т. е.

$$r+\sqrt{r^2+1}\geqslant R\geqslant r-\sqrt{r^2-1},$$

причем оба знака равенства возможны: наибольшее значение R достигается, когда на эллипсе C имеется особенность на мнимой оси (при этом возможно, что $r<1$); наименьшее значение R соответствует случаю, когда на круге сходимости нет комплексных особенных точек.

§ 2. Наилучшее приближение целых трансцендентных функций

Теорема. *Если функция*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos n\arccos x=\sum_{n=0}^{\infty}A_nT_n(x)$$

есть целая функция, то существует бесконечное множество значений n, для которых верно асимптотическое равенство

$$E_n[f(x)]\sim|A_{n+1}|. \tag{14}$$

Действительно, согласно следствию предыдущего параграфа

$$\lim\sqrt[n]{|A_n|}=0.$$

Поэтому, как бы мало ни было ε, существует бесконечное множество коэфициентов A_{n+1} таких, что при всяком $q>0$

$$\left|\frac{A_{n+q+1}}{A_{n+1}}\right|<\varepsilon^q. \tag{15}$$

В самом деле, если бы этого не было, то можно было бы при данном достаточно малом ε указать такое целое число n_0, что для всякого $n\geqslant n_0$ существует значение $q>0$, при котором неравенство (15) нарушается; поэтому существовали бы сколь угодно большие значения N, для которых имело бы место неравенство

$$|A_{n_0+N+1}|\geqslant|A_{n_0+1}|\varepsilon^N,$$

но в таком случае $\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}\geqslant\varepsilon$, что невозможно. Следовательно, если будем рассматривать те значения n, которые удовлетворяют (15), то разность

$$f(x)-\sum_{0}^{n}A_kT_k(x)=A_{n+1}T_{n+1}(x)+\ldots$$

в $\overline{n+2}$ точках $\xi_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}$ $(k=0, 1, \ldots, n+1)$, где $T_{n+1}(x) = (-1)^k$, будет получать значения

$$A_{n+1}(-1)^k + \varepsilon_k, \quad |\varepsilon_k| < |A_{n+1}|(\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots) = \frac{\varepsilon|A_{n+1}|}{1-\varepsilon};$$

поэтому, согласно теореме de la Vallée Poussin (глава I, § 5),

$$|A_{n+1}|\left(\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) < E_n[f(x)] < \frac{A_{n+1}}{1-\varepsilon},$$

т. е.

$$\lim \frac{E_n(f(x))}{A_{n+1}} = 1,$$

если $n \to \infty$, принимая вышеука чное множество значений n.

Следствие. *Если*

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n,$$

где

$$\lim n^{\frac{1}{2}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \tag{16}$$

то существует бесчисленное множество значений n, для которых

$$E_n(f(x)) \sim \left|\frac{a_{n+1}}{2^n}\right|.$$

Заметим прежде всего, что, благодаря известному тождеству

$$(\cos\theta)^n = \frac{1}{2^{n-1}}[\cos n\theta + n\cos(n-2)\theta + \ldots],$$

имеем:

$$x^n = \frac{1}{2^{n-1}}\left[T_n(x) + nT_{n-2}(x) + \frac{n(n-1)}{2}T_{n-4}(x) + \ldots\right];$$

поэтому, принимая во внимание, что сумма модулей членов последней суммы не превышает $\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = 1$, заключаем, что, заменяя x^n указанной суммой, можем преобразовать степенной ряд в ряд

$$f(x) = \sum_0^\infty A_n T_n(x),$$

который, во всяком случае, будет абсолютно сходящимся внутри круга сходимости функции $f(x)$. Коэффициенты A_{n+1} при этом имеют значения:

$$A_{n+1} = \frac{1}{2^n}\left[a_{n+1} + \frac{n+3}{4}a_{n+3} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+l+2)\ldots(n+2l+1)}{4^l \cdot l!}a_{n+2l+1} + \ldots\right]. \tag{17}$$

Следовательно, по доказанной теореме, для всякой целой функции $f(x)$ будет бесчисленное множество значений n, при которых (17) будет асимптотическим значением для $E_n[f(x)]$. Но, при условии (16), существует бесчисленное множество таких a_{n+1}, что при любом $q>0$

$$\left|\frac{(n+q+1)^{\frac{n+q+1}{2}} a_{n+q+1}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} a_{n+1}}\right| < \varepsilon^q \tag{18}$$

и тем более при любом $l>0$

$$|(n+2l+1)^l a_{n+2l+1}| < \varepsilon^{2l} |a_{n+1}|.$$

Поэтому для этих значений n

$$A_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2^n}(1+\theta\varepsilon^2),$$

где $-1<\theta<1$. С другой стороны, для тех же n при любом $q>0$, вследствие (17) и (18), имеем также

$$|A_{n+q+1}| < \varepsilon^q |A_{n+1}|,$$

и доказательство заканчивается, как в предшествующей теореме.

Для наиболее обычных функций убывание коэффициентов настолько регулярно, что формула (14) пригодна для всех n или, по крайней мере, для значений n одинаковой четности.

Например, при всяком n

$$\left.\begin{aligned}
&E_n(e^{hx}) \sim \frac{h^{n+1}}{(n+1)!\,2^n},\\
&E_{2n}(\sin hx) = E_{2n-1}(\sin hx) = \frac{h^{2n+1}}{4^n(2n+1)!},\\
&E_{2n-1}(e^{x^2}) = E_{2n-2}(e^{x^2}) \sim\\
&\sim \frac{1}{n!\,2^{2n-1}}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(2n+2l)\ldots(2n+l+1)}{(n+1)\ldots(n+l)\cdot l!}\left(\frac{1}{4}\right)^l+\ldots\right] \sim\\
&\sim \frac{1}{n!\,2^{2n-1}}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{l!}\left(\frac{1}{2}\right)^l+\ldots\right] = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{n!\,2^{2n-1}};\\
&E_{2n-1}(e^{-x^2}) = E_{2n-2}(e^{-x^2}) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{n!\,2^{2n-1}}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Мы видим, таким образом, что для целых трансцендентных функций задача нахождения асимптотического значения в основном разрешается весьма просто; для нахождения следующих членов в асимптотическом выражении $E_n[f(x)]$ можно применить метод, изложенный в § 9 (гл. I).

Однако, на основании того, что там было сказано, *нельзя утверждать*, что многочлен

$$P_n(x)=\sum_0^n A_k T_k(x),$$

дающий приближение функции $f(x)$, асимптотически равное наилучшему приближению, является асимптотическим выражением для многочлена $R_n(x)$ наилучшего приближения, т. е. что на всем отрезке $(-1, +1)$ имеем:

$$|P_n(x)-R_n(x)|<\varepsilon_n E_n(f(x)),$$

при $\varepsilon_n \to 0$.

Многочлены, которые, подобно $P_n(x)$, дают приближение асимптотическое к наилучшему, изысканием которых мы ограничиваемся в этой главе, мы будем называть *многочленами наилучшего асимптотического приближения*.

§ 3. Наилучшее приближение аналитической функции, имеющей вещественные полюсы на круге сходимости

Приступая к изучению наилучшего приближения аналитической функции $f(x)$, имеющей особенности на конечном расстоянии, замечаем прежде всего, что наиболее существенную роль, благодаря теореме § 1, будут играть те особенные точки, которые лежат на эллипсе сходимости C ее ряда Фурье. Действительно, если иррегулярная на эллипсе C функция $f(x)$ равна

$$f(x)=\varphi(x)+\varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x)$ регулярна на эллипсе C с полусуммой осей R, как и внутри его, то

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n[f(x)]}>\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n[\varphi_1(x)]},$$

поэтому

$$\overline{\lim}\frac{E_n[f(x)]}{E_n[\varphi_1(x)]}=\infty.$$

Следовательно, справедлива такая

Лемма 1. *Существует бесконечное множество значений n, для которых*

$$E_n[f(x)]\sim E_n[\varphi(x)],$$

причем это равенство имеет место для всех значений n, если

$$\underline{\lim}\sqrt[n]{E_n[f(x)]}=\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n[f(x)]}.$$

Отсюда получаем

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ на своем круге сходимости радиуса r имеет одну или две вещественные изолированные особенные точки $a=\pm r$ (так что $f(x)-\varphi(x)$ регулярна в точке $\pm r$), то*

$$E_n[f(x)]\sim E_n[\varphi(x)]$$

для всех значений n, для которых

$$\lim \sqrt[n]{E_n [\varphi (x)]} = \frac{1}{r + \sqrt{r^2 - 1}}.$$

Рассмотрим простейший случай, когда функция

$$\varphi (x) = \frac{A}{x - a}, \qquad (|a| = r > 1),$$

где a — вещественное число. В этом случае значение $E_n [\varphi (x)]$ легко вычисляется для всякого n.

Для краткости, мы можем положить $A = 1$.

Пусть $R_n (x)$ будет многочленом степени n, наименее уклоняющимся от $\frac{1}{x-a}$, тогда

$$F (x) = R_n (x) - \frac{1}{x - a}$$

достигнет в $\overline{n+2}$ точках ξ_i отрезка $(-1, +1)$ своего экстремума $L = E_n \left(\frac{1}{x-a}\right)$ с противоположными знаками, так как $F(x)$ не может иметь более $\overline{n+1}$ корней. Кроме того, внутренние точки отклонения являются общими двойными корнями уравнений $L^2 - F^2 (x) = 0, F'^2 (x) = 0$, поэтому

$$\frac{F'^2 (1 - x^2)}{L^2 - F^2} = n^2 \left(\frac{x - \beta}{x - a}\right)^2,$$

обозначая через β корень $F' (x) = 0$, лежащий вне промежутка $(-1, +1)$, так как на этом промежутке уравнение $F' (x) = 0$ не может иметь более n корней (вследствие того, что $F^{(n+1)} (x)$ не меняет на нем знака). Следовательно:

$$\frac{dF (x)}{\sqrt{L^2 - F^2 (x)}} = \pm n \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \left(1 + \frac{b}{x - a}\right),$$

полагая $b = a - \beta$, откуда находим необходимую форму для

$$F (x) = L \cos (n\theta + \delta + c),$$

где

$$\theta = \arccos x, \quad \delta (x) = nb \sqrt{a^2 - 1} \arccos \frac{ax - 1}{x - a}.$$

Но так как при $x = -1$ можем положить $\delta = 0$, то необходимо взять $c = k\pi$ [чтобы $F(-1) = \pm L$]; поэтому

$$F (x) = \pm L \cos (n\theta + \delta),$$

и принимая во внимание, что, при изменении x от -1 до $+1$, θ убывает от π до 0 ($x = \cos \theta$, $\sqrt{1 - x^2} = \sin \theta$), необходимо положить $nb \sqrt{a^2 - 1} = \pm 1$, для того чтобы амплитуда изменения $n\theta + \delta$ могла быть равна $(n + 1)\pi$. Таким образом, если положить

$$\cos \delta = \frac{ax - 1}{x - a}, \quad \sin \delta = \frac{\sqrt{(a^2 - 1)(1 - x^2)}}{x - a}, \tag{20}$$

выбирая всегда знак перед корнем так, чтобы при $(-1<x<1)$ $\sin\delta<0$, видим, что

$$F(x)=\pm L\cos(n\theta+\delta)=$$
$$=\pm\frac{L}{2}\left\{\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n\,[ax-1+\sqrt{(a^2-1)(x^2-1)}\,]}{x-a}+\right.$$
$$\left.+\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n\,[ax-1-\sqrt{(a^2-1)(x^2-1)}]}{x-a}\right\}$$

достигает своего экстремума в $\overline{n+2}$ точках. Следовательно, выделяя дробную часть E, равную

$$\pm L\frac{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}{x-a},$$

(где знак перед корнем совпадает с знаком a), видим, что целая часть $F(x)$, взятая с обратным знаком, будет многочленом степени n, наименее уклоняющимся от выделенной дроби, и L будет соответствующим наилучшим приближением. Поэтому, приравнивая числитель единице, получаем

$$E_n\left(\frac{1}{x-a}\right)=\frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}=\frac{1}{(a^2-1)R^n},$$

где $R>1$ — полусумма осей эллипса сходимости C функции $\frac{1}{x-a}$, проходящего через точку a. При этом многочлен $R_n(x)$, наименее уклоняющийся от $\frac{1}{x-a}$, равен

$$R_n(x)=\frac{1}{x-a}-\frac{\cos(n\theta+\delta)}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}. \tag{21}$$

Аналогичным образом, *точно* для всех n, решается задача о наилучшем приближении функций $\frac{1}{x^2-a^2}$ и $\frac{x}{x^2-a^2}$. Составляя функцию

$$\cos(n\theta+\delta+\delta')=$$
$$=\frac{L}{2}\left\{\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n\,[x^2(1-2a^2)+a^2-2ax\sqrt{(a^2-1)(x^2-1)}]}{x^2-a^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n\,[x^2(1-2a^2)+a^2+2ax\sqrt{(a^2-1)(x^2-1)}]}{x^2-a^2}\right\},$$

где

$$\cos(\delta+\delta')=\frac{x^2(1-2a^2)+a^2}{x^2-a^2},$$
$$\sin(\delta+\delta')=\frac{2ax\sqrt{(a^2-1)(1-x^2)}}{a^2-x^2},\qquad (a>1),$$

замечаем, что, при изменении x от $+1$ до -1, она достигает своего экстремума $\pm L$ в $\overline{n+3}$ точках. Поэтому, выделяя дробную часть, которая, в зависимости от того, будет ли $n=2m$ четным или $n=2m+1$ нечетным, будет равна

$$\frac{2La^2(1-a^2)(a+\sqrt{a^2-1})^n}{x^2-a^2} \quad \text{или} \quad \frac{2La(1-a^2)(a+\sqrt{a^2-1})^n x}{x^2-a^2},$$

заключаем, что

$$\left.\begin{aligned} E_n\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)=E_{n+1}\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)&=\frac{1}{2a^2(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} \quad (n=2m) \\ E_n\left(\frac{x}{x^2-a^2}\right)=E_{n+1}\left(\frac{x}{x^2-a^2}\right)&=\frac{1}{2a(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} \\ &\qquad (n=2m+1). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Перейдем теперь к отысканию наилучшего приближения в случае одного полюса высшего порядка в точке $a>1$. Для этого продифференцируем h раз по a равенство (21). Получим таким образом

$$\begin{aligned} \frac{h!}{(x-a)^{h+1}}-R_n^{(h)}(x)&=\left[\frac{\cos(n\theta+\delta)}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}\right]^{(h)}= \\ &=\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}P^{(h)}+h\left[\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}\right]'P^{(h-1)}+\ldots, \end{aligned} \tag{23}$$

где $R_n^{(h)}(x)$ многочлен степени не выше n, а

$$P^{(k)}=\frac{d^k}{da^k}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n.$$

Нетрудно видеть, что $R_n^{(h)}(x)$ представляет многочлен наилучшего *асимптотического* приближения функции $\dfrac{h!}{(x-a)^{h+1}}$.

В самом деле

$$P'=-\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n;$$

вообще, располагая $P^{(k)}$ по убывающим степеням n, видим, что старший его член, содержащий степень n^k, который, следовательно, будет бесконечно велик по сравнению с прочими, равен

$$\left(\frac{-n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^k\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n.$$

Поэтому, замечая, что производные $\dfrac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}$ по a при возрастании n остаются ограниченными, заключаем, что в точках, где $\cos(n\theta+\delta)=\pm 1$, вторая часть равенства (23) асимптотически равна

$$\frac{\pm n^h}{(a^2-1)^{\frac{h}{2}+1}}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n.$$

Следовательно,

$$E_n\left(\frac{1}{x-a}\right)^l \sim \frac{n^{l-1}}{(l-1)!\,(a^2-1)^{\frac{l+1}{2}}}\cdot\frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^n} \tag{24}$$

при любом конечном целом значении l.

Отсюда вытекает, согласно выше формулированному следствию I, что

$$E_n[f(x)] \sim \frac{A_1 n^{l-1}}{(l-1)!\,(a^2-1)^{\frac{l+1}{2}}}\cdot\frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \qquad (a>1)$$

если *радиус сходимости функции*

$$f(x)=\frac{A_1}{(x-a)^l}+\frac{A_2}{(x-a)^{l-1}}+\ldots+\frac{A_l}{x-a}+\varphi(x)$$

в начале координат равен a *и* $\varphi(x)$ *не имеет вещественных особенностей на круге сходимости.*

Следствие II. *Если* $f(x)$ *обладает только-что указанными свойствами, то*

$$E_n[f'(x)] \sim \frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\,E_n[f(x)] \sim \frac{dE_n[f(x)]}{da}.$$

Действительно,

$$E_n[f'(x)] \sim E_n\left(\frac{lA_1}{(x-a)^{l+1}}\right) \sim \frac{n^l\,|A_1|}{(l-1)!\,(a^2-1)^{\frac{l+2}{2}}}\cdot\frac{1}{(a^2+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

Как мы увидим дальше, равенство (24) и следствие II носят еще гораздо более общий характер. Формальная причина этого факта состоит в том, что частные производные $f(x)$ по a и по x имеют ту же самую особенность, определяющую асимптотическое значение наилучшего приближения; но более глубокая причина успешности примененного здесь метода дифференцирования по параметру a заключается в сравнительно малой подвижности точек наибольшего уклонения многочленов наилучшего приближения при изменении параметра a.

Поэтому, хотя технически ниже доказываемые теоремы следующего параграфа о расположении точек наибольшего уклонения в дальнейшем непосредственного применения не найдут, но они являются существенной путеводной нитью, дающей направление последующим вычислениям, и теоремы подобного характера должны лежать в основе всякого систематического исследования наилучшего приближения тех или иных классов функций.

§ 4. Расположение точек максимального отклонения

Одним из наиболее простых классов функций являются те, у которых на данном отрезке производные достаточно высокого порядка сохраняют постоянный знак. Этим функциям, называемым регулярно монотонными, будет посвящена особая глава в части II. К ним относятся, очевидно, функции, которые имеют на круге сходимости только вещественную особенную точку: полюс, логарифмическую или критическую точку или существенную особенную точку, для которой все коэффициенты B разложения Лорана $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{(a-x)^k}$, для k достаточно большого, сохраняют постоянный знак.

Относительно расположения точек максимального отклонения у функций этого класса справедлива такая

Теорема I. *Если производная $f^{(n+1)}(x)$ порядка $\overline{n+1}$ функции $f(x)$ не меняет знака в промежутке $(-1, +1)$, то точки ξ_k, где достигается максимальное значение отклонения $\rho(x)=f(x)-P_n(x)$ функции $f(x)$ от ее многочлена наилучшего приближения $P_n(x)$ степени n на отрезке $(-1, +1)$, удовлетворяют неравенствам*

$$1=\xi_0>\xi_1>\cos\frac{\pi}{n}> \ldots >\xi_k>\cos\frac{k\pi}{n}>\xi_{k+1}>\ldots>\cos\frac{n-1}{n}\pi>$$
$$>\xi_n>\xi_{n+1}=-1.$$

В самом деле, из того, что $\rho(x)=0$ не может иметь более $\overline{n+1}$ корней, вытекает непосредственно, что число точек наибольшего уклонения ξ_k равно $\overline{n+2}$ и крайние из них совпадают с концами ± 1 отрезка $(-1, +1)$. Рассмотрим далее уравнения

$$H(x)=\rho(x)-AT_n(x)=0 \text{ и } H_1(x)=\rho(x)+AT_n(x)=0, \tag{25}$$

где

$$A=E_n[f(x)]=\text{макс.}|\rho(x)|, \quad T_n(x)=\cos n \arccos x,$$

каждое из которых, очевидно, также имеет не более $n+1$ корней.

Полагая, для определенности, $f^{(n+1)}(x)>0$, видим, что $H(1)=$ $=H_1(-1)=0$; кроме того, вообще,

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^k H(\xi_k)\geqslant 0, \quad (-1)^k H_1(\xi_k)\geqslant 0, \quad (-1)^i H_1\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)\geqslant 0,\\ &\qquad (-1)^i H\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)\leqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

причем в этих точках одновременное равенство $H(x)=H_1(x)=0$ невозможно; вместе с тем, если имеет место одно из равенств $H(\xi_k)=0$, $H_1(\xi_k)=0$, $H\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)=0$ или $H_1\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)=0$, то $\xi_k=$ $=\cos\frac{i\pi}{n}$ и этот корень (при $k=1, 2, \ldots, n$) будет *двойным.*

Я говорю, что не может быть двух соседних точек ξ_k и ξ_{k+1}, где $H(x)=0$. Действительно, пусть m будет число точек ξ_k, где $H(\xi_k)=0$ (к которым принадлежит и ξ_0), l — число групп точек ξ_k этой категории, не разделенных точками категории $H(\xi)\gtrless 0$; тогда уравнение $H(x)=0$ должно вследствие (26) иметь еще по крайней мере $(n+2-m)-l$ корней, разделенных смежными точками последней категории ($H(\xi)\gtrless 0$), так что общее число корней $H(x)=0$, считаемых с их кратностью, было бы не менее $2m-1+(n+2-m-l)=$

$=n+1+m-l$; поэтому необходимо, чтобы $l=m$. То же самое рассуждение, из которого следует также, что общее число корней $H(x)=0$ равно $n+1$, очевидно применимо и к $H_1(x)$.

Таким образом, если $H(\xi_k)\cdot H(\xi_{k+1})<0$, то между ξ_k и ξ_{k+1} будет один и только один корень уравнения $H(x)=0$; если же $H(\xi_k)=0$, то $H(\xi_{k-1})\cdot H(\xi_{k+1})>0$, и между ξ_{k-1} и ξ_{k+1} не могло бы быть больше корней ($k=1, 2, \ldots, n$). Рассмотрим сначала последнее предположение: пусть, следовательно, $\xi_k=\cos\frac{i\pi}{n}$. Тогда

$$\rho(\xi_k)=AT_n\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right),$$

а потому

$$\rho(\xi_k)\cdot T_n\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)>0,$$

откуда следует, что и

$$\rho(\xi_{k-1})\cdot T_n\left(\cos\frac{i-1}{n}\pi\right)>0,\quad \rho(\xi_{k+1})\cdot T_n\left(\cos\frac{i+1}{n}\pi\right)>0.$$

Поэтому

$$H(\xi_{k-1})\cdot H\left(\cos\frac{i-1}{n}\pi\right)\leqslant 0,\quad H(\xi_{k+1})\cdot H\left(\cos\frac{i+1}{n}\pi\right)\leqslant 0,$$

причем каждое из неравенств может обратиться в равенство, соответственно, лишь при условии, что

$$H\left(\cos\frac{i-1}{n}\pi\right)=0 \quad \text{и} \quad H\left(\cos\frac{i+1}{n}\pi\right)=0.$$

Следовательно, принимая во внимание, что в промежутке (ξ_{k-1}, ξ_{k+1}) не может быть других корней уравнения $H(x)=0$, кроме ξ_k, заключаем, что значения $\cos\frac{i-1}{n}\pi$ и $\cos\frac{i+1}{n}\pi$ находятся вне отрезка (ξ_{k-1}, ξ_{k+1}), т. е. между ξ_{k-1} и ξ_{k+1} (включая и эти точки) находилось бы только одно значение $\cos\frac{i\pi}{n}=\xi_k$. В частности, видим, что две смежных точки ξ_k и ξ_{k+1} никак не могут совпадать обе с точками $\cos\frac{i\pi}{n}$ и $\cos\frac{j\pi}{n}$, а потому ξ_1 и ξ_n не могут быть такого вида.

Предположим теперь, что ни одна из двух точек ξ_k, ξ_{k+1} не имеет значения $\cos\frac{i\pi}{n}$. В таком случае, так как между ними лежит только один корень уравнения $H(x)=0$, в промежутке (ξ_k, ξ_{k+1}), благодаря (26), не может находиться более двух значений $\cos\frac{i\pi}{n}$, $\cos\frac{i+1}{n}\pi$; если бы их было два, то во всяком случае числа

$$(\xi_k),\quad H\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right),\quad H\left(\cos\frac{i+1}{n}\pi\right),\quad H(\xi_{k+1})$$

имеют лишь одну перемену знака, а именно:

$$H(\xi_k)\cdot H\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)>0,\quad H(\xi_{k+1})\cdot H\left(\cos\frac{i+1}{n}\pi\right)>0;$$

но это невозможно, так как, благодаря (26), отсюда следовало бы, что

$$H_1(\xi_k)\cdot H_1\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)\leqslant 0,\quad H_1(\xi_{k+1})\cdot H_1\left(\cos\frac{i+1}{n}\pi\right)\leqslant 0,$$

т. е., что $H_1(x)$ имело бы, по крайней мере, два корня между ξ_k и ξ_{k+1}. Следовательно, между ξ_k и ξ_{k+1} может быть не более одного значения $\cos\frac{i\pi}{n}$. Кроме того, между 1 и $\xi_1\leqslant\cos\frac{i\pi}{n}$ не может быть значения $\cos\frac{\pi}{n}$, так как, благодаря (26), $H(\xi_1)\cdot H\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)<0$, т. е. $H(x)=0$ имело бы корень больше ξ_1, кроме единицы; по той же причине $\xi_n<\cos\frac{n-1}{n}\pi$.

Таким образом, сопоставляя эти выводы, мы приходим к заключению, что, если бы $p>0$ было число внутренних точек ξ_k, имеющих значение $\cos\frac{i\pi}{n}$, то внутри отрезка $(-1, +1)$ могло бы быть не более, чем $n-1-p$ точки $\cos\frac{i\pi}{n}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$. Следовательно, $p=0$, и все n внутренние точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ разделены $\overline{n-1}$ внутренними точками $\cos\frac{i\pi}{n}$.

Примечание. При помощи того же самого рассуждения доказывается более общее предложение. Если функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуют систему (T), в которой полином $\sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(x)$, наименее уклоняющийся от нуля, имеет $n+1$ точки максимального отклонения $x_0<x_1<\ldots<x_n$ с чередующимися знаками, то, какова бы ни была функция $f(x)$, которая совместно с функциями $\varphi_k(x)$ также образует систему T, точки максимального отклонения $\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_{n+1}$ с противоположными знаками разности

$$f(x)-P_n(x),$$

где $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} B_k\varphi_k(x)$ — полином, наименее уклоняющийся от $f(x)$, удовлетворяют неравенствам

$$\xi_0\leqslant x_0<\xi_1<x_1<\ldots<\xi_n<x_n\leqslant\xi_{n+1}.$$

Возвращаясь к многочленам, докажем еще одну весьма общую теорему, которая, в частности, приложима ко всем аналитическим функциям.

Теорема II. *Если имеется бесконечная последовательность значений n, для которых при произвольно заданном ε существуют такие числа $k>0$, что одновременно удовлетворяются оба неравенства*

$$\frac{E_{n+k}[f(x)]}{E_n[f(x)]}\leqslant\varepsilon,\qquad \frac{k}{n}\leqslant\varepsilon, \tag{27}$$

то существуют многочлены $P_n(x)$ степени n, асимптотически наименее уклоняющиеся от $f(x)$, для которых точки $\xi_0>\xi_1>\ldots>\xi_{n+1}$ максимального отклонения разности $\rho(x)=f(x)-P_n(x)$ удовлетворяют равенствам

$$\lim_{n=\infty}\xi_i=\cos\frac{i\pi}{n+1}$$

при всех значениях i $(i=0,1,\ldots,n+1)$.

Действительно, пусть $P_n(x)$ будет многочлен степени n, наименее уклоняющийся от многочлена $\pi_{n+k}(x)$ степени $n+k$, наименее уклоняющегося от $f(x)$. Тогда,

$$\text{Макс.}\,|f(x)-P_n(x)|\leqslant\text{Макс.}\,|\pi_{n+k}(x)-P_n(x)|+$$
$$+\text{Макс.}\,|f(x)-\pi_{n+k}(x)|=E_n[\pi_{k+n}(x)]+E_{n+k}[f(x)],$$

и согласно лемме § 9, гл. I,

$$|E_n[\pi_{n+k}(x)]-E_n[f(x)]|\leqslant E_{n+k}[f(x)].$$

Следовательно:

$$\text{Макс.}\,|f(x)-P_n(x)|\leqslant E_n[f(x)]+2E_{n+k}[f(x)],$$

т. е. вследствие (27):

$$\text{Макс.}\,|f(x)-P_n(x)|\leqslant(1+2\varepsilon)E_n[f(x)].$$

С другой стороны, замечаем, что многочлен

$$H(x)=\pi_{n+k}(x)-P_n(x)-AT_{n+1}(x),$$

где $A=E_n[\pi_{n+k}(x)]$, получает последовательно противоположные знаки или обращается в нуль вместе со своей первой производной в точках ξ_i, наибольшего отклонения $\pi_{n+k}(x)-P_n(x)$.

Следовательно, обозначая через β_i $(\beta_i\leqslant\beta_{i-1})$ последовательные корни $H(x)=0$, видим, что $H(x)$ будет иметь по крайней мере i корней, не меньших, чем ξ_i, и по крайней мере $\overline{n-i+1}$ корней, не превышающих ξ_i. Но так как число корней $H(x)$ не больше $n+k$, то

$$\beta_{i+k}\leqslant\xi_i\leqslant\beta_i.$$

По той же причине имеем также

$$\beta_{i+k}\leqslant\cos\frac{i\pi}{n+1}\leqslant\beta_i.$$

Откуда заключаем, что

$$\cos\frac{i+k}{n+1}\pi\leqslant\xi_i\leqslant\cos\frac{i-k}{n+1}\pi,$$

и так как $\frac{k}{n} < \varepsilon \to 0$, то

$$\lim_{n=\infty}\left(\xi_i - \cos\frac{i\pi}{n+1}\right) = 0.$$

Следствие. *Если*

$$\underline{\lim}\ \frac{\lg n}{\lg E_n} = 0, \tag{28}$$

то существуют последовательности значений n, к которым применима предшествующая теорема.

В самом деле, нужно лишь проверить, что при условии (28) существует бесконечная последовательность значений n таких, что при произвольно малом ε соблюдается (27). Допустим противоположное; тогда оказалось бы, что мы имели бы при любом данном $\varepsilon > 0$

$$\frac{E_{n(1+\alpha)}[f(x)]}{E_n[f(x)]} > \varepsilon \qquad (\alpha \leqslant \varepsilon < 1)$$

для всех значений $n \geqslant n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$.

Поэтому при всяком целом s

$$\frac{E_N[f(x)]}{E_{n_0}[f(x)]} > \varepsilon^s, \qquad (N > n_0)$$

каково бы ни было целое число $N = \left[[n_0(1+\alpha_1)]\cdots(1+\alpha_s)\right]$, где $\alpha_i \leqslant \varepsilon$, т. е. каково бы ни было $N \leqslant n_0(1+\varepsilon)^s - \frac{(1+\varepsilon)^s - 1}{\varepsilon}$. Следовательно $\left(\text{вследствие } n_0 > \frac{2}{\varepsilon}\right)$, мы получили бы, что

$$|\lg E_N| < |s \lg \varepsilon| + |\lg E_{n_0}|,$$

при всяком целом N, удовлетворяющем неравенствам

$$n_0 < N \leqslant \frac{n_0}{2}(1+\varepsilon)^s.$$

Но для всякого N существует по крайней мере одно такое целое число $s > 0$, что $(1+\varepsilon)^s \leqslant 2N \leqslant n_0(1+\varepsilon)^s$. Поэтому при любом $N > n_0$ мы тем более имели бы

$$|\lg E_N| < \frac{\lg 2N}{\lg(1+\varepsilon)}|\lg \varepsilon| + |\lg E_{n_0}|,$$

откуда

$$\left|\frac{\lg E_N}{\lg N}\right| < \frac{2|\lg \varepsilon|}{\lg(1+\varepsilon)} + \frac{|\lg E_{n_0}|}{\lg N} < A,$$

где A — определенное не зависящее от N положительное число; но это противоречит (28), которое означает, что существуют значения N, для которых $\left|\frac{\lg E_N}{\lg N}\right|$ превышает всякое наперед заданное число.

В части II мы увидим, что условие

$$\lim \frac{\lg n}{\lg E_n[f(x)]} = 0 \tag{29}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы $f(x)$ имела конечные производные любого порядка. Следовательно, *ко всем бесконечно дифференцируемым функциям теорема применима.* Во всяком случае, когда функция $f(x)$ — аналитическая на отрезке $(-1, +1)$, равенство (29), а тем более равенство (28) вытекает из того, что, согласно (10), при всяком n, достаточно большом,

$$|\lg E_n[f(x)]| > n \lg (R - \delta),$$

где $R > 1$ — полусумма осей эллипса сходимости функции $f(x)$, а δ — произвольно малое положительное число.

Таким образом, теорема II приложима ко всем аналитическим функциям.

§ 5. Асимптотическое значение наилучшего приближения функции, имеющей вещественную критическую точку логарифмического или алгебраического типа

Если хотим получить наилучшее приближение $E_n[\lg(a-x)]$, где $a > 1$, прием дифференцирования, примененный в § 3, может быть заменен соответствующим интегрированием.

Действительно, интегрируя по a равенство (21) от a до b $(b > a)$, получим равенство вида

$$\lg(a-x) - \lg(b-x) - S_n(x) = \int_a^b \frac{\cos(n\theta+\delta)\,dz}{(z^2-1)(z+\sqrt{z^2-1})^n}, \tag{30}$$

где $S_n(x)$ — многочлен степени n, который, как будет сейчас показано, является многочленом, асимптотически наименее уклоняющимся от $\lg(a-x) - \lg(b-x)$. Для этого проинтегрируем по частям вторую часть равенства (30); получим:

$$\left.\frac{\cos(n\theta+\delta)}{n\sqrt{z^2-1}\,(z+\sqrt{z^2-1})^n}\right|_b^a + \frac{1}{n}\int_a^b \frac{d}{dz}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{z^2-1}}\right)\frac{dz}{(z+\sqrt{z^2-1})^n}.$$

Интегрируя еще раз по частям, убеждаемся, что второе слагаемое этого выражения бесконечно малого порядка $\frac{1}{n}$ по сравнению с первым; принимая, кроме того, во внимание, что $\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}} > 1$, преобразуем таким образом равенство (30) в

$$\lg(a-x) - \lg(b-x) - S_n(x) = \frac{\cos(n\theta+\delta)+\varepsilon_n}{n\sqrt{a^2-1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \tag{31}$$

где ε стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$.

Следовательно, учитывая, что $\lg(b-x)$ регулярна на эллипсе, проходящем через a и внутри его, находим, благодаря лемме I § 3, что

$$E_n[\lg(a-x)] \sim \frac{1}{n\sqrt{a^2-1}}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n. \tag{32}$$

Интегрируя еще раз, мы получим, что

$$E_n[(a-x)\lg(a-x)] \sim \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n, \qquad (a>1). \tag{33}$$

Заметим, что из нашего рассуждения отнюдь не следует, что в этой асимптотической формуле (33) переход к пределу $a=1$ законен.

В действительности, из дальнейшего будет видно, что подобный *переход к пределу*, вообще, *неправилен*, но *порядок* убывания $E_n[(1-x)\log(1-x)]$ при $n\to\infty$ равен $\frac{1}{n^2}$.

Перейдем теперь к вычислению $E_n(a-x)^s$, где $a>1$, s — любое данное вещественное (не целое) число. Здесь метод дифференцирования и интегрирования неприложим, но, вследствие отмеченной нами устойчивости точек максимального отклонения, естественно предположить, что и в данном случае существуют многочлены наименьшего асимптотического отклонения, для которых точки отклонения совпадают с точками максимального отклонения функции $\cos(n\theta+\delta)$.

Поэтому мы имеем основание ожидать, что интерполяционный многочлен $P_n(x)$, который совпадает с $(a-x)^s$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, где

$$(x-a)\cos(n\theta+\delta) = R(x) =$$
$$= \frac{1}{2}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n\,[ax-1+\sqrt{(a^2-1)(x^2-1)}]+$$
$$+(x-\sqrt{x^2-1})^n\,[ax-1-\sqrt{(a^2-1)(x^2-1)}]\},$$

обращается в нуль, будет *асимптотически* наименее уклоняющимся от функции $f(x)=(a-x)^s$ и даст нам таким образом асимптотическое значение $E_n((a-x)^s)$.

Как известно, многочлен $P_n(x)$ определится по формуле Лагранжа:

$$P_n(x) = R(x)\sum_1^{n+1}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)\cdot R'(x_i)};$$

поэтому, применяя теорему о вычетах, имеем во всех точках x отрезка $(-1, +1)$

$$f(x)-P_n(x) = \frac{R(x)}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x)R(z)},$$

где C — любой контур, окружающий отрезок $(-1, +1)$, внутри которого функция $f(z)$ регулярна.

В случае, когда $f(z)=(a-z)^s$ и $n>s>-1$, контур C можно деформировать в окружность бесконечно большого радиуса с бесконечно малым отверстием на положительной оси, из концов которого вдоль вещественной оси идут две бесконечно близкие прямые к точке a, замыкаемые окружностью бесконечно малого радиуса с центром в точке a. В таком случае, в виду наложенных ограничений на число s, интегралы по обеим окружностям равны нулю, и, принимая во внимание неоднозначность функции $(a-x)^s$, получим (считая $(a-x)^s$ положительной при $x<a$):

$$(a-x)^s-P_n(x)=\frac{R(x)}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(a-z)^s\,dz}{(z-x)R(z)}=$$

$$=-\frac{R(x)}{2\pi i}\int\limits_a^\infty \frac{|a-z|^s\,[e^{i\pi s}-e^{-i\pi s}]\,dz}{(z-x)R(z)}=$$

$$=-R(x)\frac{\sin\pi s}{\pi}\int\limits_a^\infty \frac{(z-a)^s\,dz}{(z-x)R(z)}, \tag{34}$$

где подинтегральная функция вещественна на положительной оси.

Таким образом, нам необходимо определить асимптотическое значение

$$L_s=\int\limits_a^\infty \frac{(z-a)^s}{(z-x)R(z)}\,dz. \tag{35}$$

Принимая во внимание, что при $|z+\sqrt{z^2-1}|>1$ (в частности, при $z\geqslant a$) имеем, очевидно:

$$R(z)\sim\frac{1}{2}(z+\sqrt{z^2-1})^n\,(az-1+\sqrt{(a^2-1)(z^2-1)}), \tag{36}$$

получаем, во-первых:

$$L_s\sim 2\int\limits_a^\infty \frac{(z-a)^s\,dz}{(z-x)\,[az-1+\sqrt{(a^2-1)(z^2-1)}]\,[z+\sqrt{z^2-1}]^n} \tag{35$^{\text{bis}}$}$$

Для вычисления асимптотического значения этого интеграла, мы выведем общую формулу [1])

$$\int\limits_a^\infty F(z)\,\varphi^n(z)\,dz\sim\frac{\varphi^n(a)}{n}\int\limits_0^\infty e^{u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}F\left(a+\frac{u}{n}\right)du, \tag{37}$$

которая имеет место при условии, что: 1) *интеграл* $\int\limits_a^\infty |F(z)\varphi^h(z)|\,dz$ *имеет смысл при достаточно большом* h; 2) *существует некоторый*

[1]) Заметим, что $F(z)$ может зависеть и от n.

определенный произвольно малый интервал $(a,\ a+\alpha)$, *где* $\varphi(z)$ *и ее производные первых двух порядков ограничены, и кроме того,* $\varphi(z)>0$, $\varphi'(z)<0$; 3) *вне промежутка* $(a,\ a+\alpha)$, $|\varphi(z)|<\varphi(a+\alpha)$; 4) *существует значение* $\rho<\frac{1}{2}$ *такое, что*

$$\left|\int_0^\infty e^{u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}F\left(a+\frac{u}{n}\right)du\right|>e^{-n^\rho}$$

при n *достаточно большом.*

Очевидно, что, если условия 2 и 3 соблюдены для некоторого α, то они тем более справедливы для всякого $\varepsilon<\alpha$.

Разобьем на два слагаемых интеграл

$$\int_a^\infty F(z)\,\varphi^n(z)\,dz=\int_a^{a+\varepsilon}F(z)\,\varphi^n(z)\,dz+\int_{a+\varepsilon}^\infty F(z)\,\varphi^n(z)\,dz, \tag{38}$$

где

$$\lim_{n=\infty}\varepsilon n=\infty,\qquad \lim_{n=\infty}\varepsilon^2 n=0. \tag{39}$$

Займемся сначала вычислением первого интеграла. Согласно второму условию, можем написать:

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi(a)}=1+(z-a)\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}+A(z-a)^2,$$

где A ограничено при $|z-a|<\varepsilon<\alpha$; поэтому

$$n\lg\frac{\varphi(z)}{\varphi(a)}=n(z-a)\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}+nA(z-a)^2-\frac{n}{2}(z-a)^2\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}-\ldots=$$
$$=n(z-a)\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}+\eta,$$

где $\eta\to 0$, вследствие (39). Поэтому

$$\varphi^n(z)=\varphi^n(a)\,e^{n(z-a)\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}e^{\eta} \tag{40}$$

и первый из интегралов второй части (38), при $\varepsilon n\to 0$, равен

$$\varphi^n(a)\int_a^{a+\varepsilon}e^{\eta}\cdot e^{n(z-a)\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}F(z)\,dz=$$

$$=\frac{\varphi^n(a)}{n}\int_0^{\varepsilon n}e^{\eta}\cdot e^{u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}F\left(a+\frac{u}{n}\right)du\sim\frac{\varphi^n(a)}{n}\int_0^\infty e^{u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}F\left(a+\frac{u}{n}\right)du. \tag{41}$$

Остается убедиться, что второе слагаемое в (38) бесконечно мало по сравнению с первым. Для этого замечаем, что, вследствие (40), благодаря условию (3), при $z\geqslant a+\varepsilon$

$$|\varphi(z)|^n<2e^{\varepsilon(n-h)\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}\cdot[\varphi(a)]^{n-h}(\varphi(z))^h$$

для достаточно больших n, каково бы ни было заданное h; поэтому вследствие условия 1

$$\left|\int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty} \varphi^n(z) F(z)\,dz\right| < 2e^{\varepsilon(n-h)\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}[\varphi(a)]^{n-h} \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty} |\varphi^h(z)\cdot F(z)|\,dz <$$

$$< Be^{\varepsilon n\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}[\varphi(a)]^n, \tag{42}$$

где B — не зависящее от n конечное число.

Но условиям (39), наложенным на ε, можно удовлетворить, положив

$$\varepsilon = n^{\lambda-1}, \quad \left(\frac{1}{2} > \lambda > \rho\right).$$

Тогда неравенство (42) запишется в виде

$$\left|\int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty} \varphi^n(z) F(z)\,dz\right| < Be^{n^\lambda \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}[\varphi(a)]^n,$$

откуда, вследствие (41), благодаря условию 4, заключаем, что этот интеграл бесконечно мал по сравнению с

$$\int\limits_{a}^{a+\varepsilon} \varphi^n(z) F(z)\,dz.$$

Применим теперь формулу (37) к вычислению интеграла L_s (35^{bis}). Первые три условия, при $a > 1$, очевидно, осуществлены; кроме того, в данном случае

$$\int\limits_0^{\infty} e^{u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}} F\left(a+\frac{u}{n}\right) du =$$

$$= \frac{2}{n^s}\int\limits_0 \frac{e^{-\frac{u}{\sqrt{a^2-1}}}u^s\,du}{\left(a+\frac{u}{n}-x\right)\left[a^2+\frac{au}{n}-1+\sqrt{(a^2-1)\left(a^2-1+\frac{2au}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)}\right]} \sim$$

$$\sim \frac{1}{n^s(a^2-1)(a-x)}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{u}{\sqrt{a^2-1}}}u^s\,du = \frac{\Gamma(s+1)(a^2-1)^{\frac{s-1}{2}}}{n^s(a-x)},$$

а потому соблюдено и условие (4). Таким образом, согласно (37)

$$L_s \sim \frac{\Gamma(s+1)(a^2-1)^{\frac{s-1}{2}}}{n^{s+1}(a+\sqrt{a^2-1})^n(a-x)},$$

откуда, вследствие (34), получаем наконец

$$(a-x)^s - P_n(x) \sim \frac{\sin \pi s \cdot \Gamma(s+1)(a^2-1)^{\frac{s-1}{2}}}{\pi n^{s+1}(a+\sqrt{a^2-1})^n} \cos(n\theta+\delta). \quad (43)$$

Следовательно, при всех $s > -1$, максимум с противоположными знаками достигается асимптотически в $n+2$ точках, а потому

$$E_n[(a-x)^s] \sim \frac{|\sin \pi s| \cdot \Gamma(s+1)(a^2-1)^{\frac{s-1}{2}}}{\pi n^{s+1}(a+\sqrt{a^2-1})^n}. \quad (44)$$

Вследствие известной формулы

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

можем, полагая $p = -s$, написать также

$$E_n\left(\frac{1}{(a-x)^p}\right) \sim \frac{n^{p-1}}{\Gamma(p)(a^2-1)^{\frac{p+1}{2}}} \cdot \frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}. \quad (44\text{bis})$$

Формулы (44) и (44 bis) доказаны нами в предположении, что $s > -1$, т. е. $p < 1$. Но нетрудно освободиться от этого ограничения. Действительно, для этого достаточно, интегрируя по частям, проверить равенство

$$\int\limits_C \frac{(a-z)^{s-1}}{(z-x)R(z)}\,dz = \frac{1}{s}\int\limits_C (a-z)^s \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-x)R(z)}\right)dz \sim$$

$$\sim -\frac{n}{s}\int\limits_C \frac{(a-z)^s\,dz}{(z-x)R(z)\sqrt{z^2-1}},$$

так как, при $|z+\sqrt{z^2-1}| > 1$,

$$\frac{R'(z)}{R(z)} \sim \frac{n}{\sqrt{z^2-1}}.$$

Таким образом, если попрежнему $s > -1$, к последнему интегралу применим предыдущий прием. Следовательно, для $E_n[(a-x)^{s-1}]$ получим:

$$E_n[(a-x)^{s-1}] \sim \frac{n}{s}\,\frac{|\sin \pi s|\,\Gamma(s+1)\,(a^2-1)^{\frac{s-2}{2}}}{\pi n^{s+1}(a+\sqrt{a^2-1})^n} =$$

$$= \frac{|\sin \pi(s-1)|\,\Gamma(s)(a^2-1)^{\frac{s-2}{2}}}{\pi n^s(a+\sqrt{a^2-1})^n},$$

т. е. формула (44) справедлива также и для $s > -2$.

Повторяя то же рассуждение, убеждаемся в правильности (44) и (44 bis) для всякого конечного вещественного s (или $p = -s$). (Как и следовало ожидать, для целых $s > 0$, $E_n[(a-x)^s] = 0$ при $n \geqslant s$).

Интересно сопоставить значение $E_n\left(\left(\frac{1}{a-x}\right)^p\right)$ с соответствующей величиной $I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^p$ погрешности, получаемой, если ограничиться членами степени не выше n в разложении Фурье

$$\frac{1}{(a-x)^p}=\sum_0^\infty A_k^{(p)}T_k(x).$$

Вычисление асимптотического значения коэффициентов $A_k^{(p)}$ не представляет особого труда (см. § 10):

$$A_k^{(p)}\sim\frac{2n^{p-1}}{\Gamma(p)(a^2-1)^{\frac{p}{2}}(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

В виду того, что все эти коэффициенты положительны:

$$I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^p=$$

$$=\sum_{k=n+1}^\infty A_k^{(p)}\sim\frac{2n^{p-1}}{\Gamma(p)(a^2-1)^{\frac{p}{2}}[a-1+\sqrt{a^2-1}](a+\sqrt{a^2-1})^n},\tag{45}$$

поэтому, сравнивая (45) и (44 bis), приходим к заключению, что при всяком вещественном p

$$E_n\left(\frac{1}{(a-x)^p}\right)\sim\frac{\sqrt{|a|+1}+\sqrt{|a|-1}}{2\sqrt{|a|+1}}I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^p,\tag{46}$$

причем, таким образом, на основании ранее сказанного, это соотношение распространяется на любую аналитическую функцию, имеющую *на круге сходимости одну вещественную критическую точку а* (*каковы бы ни были комплексные особенности*).

Множитель при I_n в формуле (46) при изменении $|a|$ от 1 до ∞, возрастает и заключен между $\frac{1}{2}$ и 1.

Случай, когда $a=1$, представляет особые трудности, и к нему формула (46) не применима.

§ 6. Исследование наилучшего приближения аналитической функции, имеющей критическую особенность в точке $a=1$.

Задача о наилучшем приближении $(1-x)^s$ на отрезке $(-1, +1)$ эквивалентна задаче о наилучшем приближении $|y|^{2s}$ на том же отрезке. Действительно, если $P_n(x)$ есть многочлен, наименее уклоняющийся от $(1-x)^s$, то $\left(\text{после замены } y^2=\frac{1-x}{2}\right)$ $P_n(1-2y^2)$ является многочленом степени $2n$, наименее уклоняющимся от $(2y^2)^s$ на отрезке $(-1, +1)$. Таким образом,

$$Q_{2n}(y) = \frac{1}{2^s} P_n(1-2y^2)$$

будет многочленом степени $2n$ (т. е. не выше $2n+1$), наименее уклоняющимся от $|y|^{2s}$ на отрезке $(-1, +1)$, и

$$E_{2n+1}(|x|^{2s}) = E_{2n}(|x|^{2s}) = \frac{1}{2^s} E_n\left[(1-x)^s\right]. \qquad (47)$$

Случай $s = \frac{1}{2}$ был подробно мною исследован еще в 1913 г. в работе „Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés“ (Acta Mathematica). Основной результат этого исследования заключается в том, что при $n \to \infty$ существует

$$\lim 2nE_{2n}(|x|) = \mu \simeq 0{,}282,$$

причем указан метод для вычисления μ с какой угодно точностью (погрешность указанного значения 0,282 равна 0,004). Отсюда, вследствие (47), вытекает, что

$$\lim nE_n(\sqrt{1-x}) = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \cong 0{,}20 \text{ (с точностью до 0,003)}.$$

Так как непосредственное не представляющее труда вычисление дает $I_n(\sqrt{1-x}) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$, то

$$\lim \frac{E_n(\sqrt{1-x})}{I_n(\sqrt{1-x})} \cong 0{,}44$$

(с точностью до 0,01), а не $\frac{1}{2}$, как это должно было бы быть, если бы формула (46) распространялась на $\alpha = 1$.

Здесь мы рассмотрим общий случай $s > 0$, но ограничимся лишь установлением некоторых предварительных формул, которые могут быть использованы для доказательства существования предела [1])

$$\lim_{n=\infty} E_n([n^{2s}(1-x)]^s),$$

[1]) Случай, когда $2s$ целое нечетное число, был исследован Ф. И. Тарнаридер (1, 2).

подобно тому, как это сделано в упомянутой работе в случае $s=\frac{1}{2}$. С этой целью вернемся к формуле (34) и заставим $a>1$ стремиться к 1. Получим таким образом

$$F(x)=(1-x)^s-P_n(x)=$$

$$=-\frac{\sin\pi s}{\pi}(x-1)\,T_n(x)\int_1^\infty\frac{(z-1)^s\,dz}{(z-x)(z-1)\,T_n(z)}=$$

$$=\frac{\sin\pi s}{\pi}T_n(x)\int_1^\infty\frac{(1-x)(z-1)^{s-1}\,dz}{(z-x)\,T_n(z)},\tag{48}$$

где $T_n(x)=\cos n\arccos x$, а $P_n(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, совпадающий с $(1-x)^s$ в точках $x=1$ и $x_k=\cos\frac{k+\frac{1}{2}}{n}\pi$. В данном случае мы не можем рассчитывать, что $P_n(x)$ будет многочленом, наименее уклоняющимся от $(1-x)^s$, так как разность $F(x)$ будет иметь не более $n+1$ абсолютных экстремумов с чередующимися знаками, обращаясь в нуль при $x=1$; тем не менее при $n\to\infty$ он обладает замечательными свойствами, которые мы установим.

С этой целью применим к интегралу

$$L_s=\int_1^\infty\frac{(z-1)^{s-1}}{(z-x)\,T_n(z)}\,dz\tag{49}$$

изложенный в § 5 прием, произведя предварительно замену переменной $z+\sqrt{z^2-1}=\sigma$. Тогда $z=\frac{1}{2}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)$, $z-1=\frac{(\sigma-1)^2}{2\sigma}$,

$$z-x=\frac{1+\sigma^2-2\sigma x}{2\sigma},$$

$$L_s=2^{2-s}\int_1^\infty\frac{(\sigma-1)^{2s-1}(\sigma+1)\,d\sigma}{\sigma^s(\sigma^2+1-2\sigma x)\left(\sigma^n+\frac{1}{\sigma^n}\right)},\tag{50}$$

поэтому полагая $\varphi(\sigma)=\frac{1}{\sigma}$,

$$F(\sigma)=\frac{(\sigma-1)^{2s-1}(\sigma+1)}{\sigma^s(\sigma^2+1-2\sigma x)\left(1+\frac{1}{\sigma^{2n}}\right)}$$

в формуле (37), находим:

$$L_s \sim \frac{2^{2-s}}{n} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}\left(\frac{u}{n}\right)^{2s-1}\left(2+\frac{u}{n}\right)du}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^s\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^{2n}}\right]\left[1+\left(1+\frac{u}{n}\right)^2-2x\left(1+\frac{u}{n}\right)\right]}$$

$$\sim \frac{2^{2-s}}{n^{2s}} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}u^{2s-1}\,du}{(1+e^{-2u})\left[(1-x)+\frac{u^2}{2n^2}\right]}$$

и при условии, что $x \gtrless 1$,

$$L_s \sim \frac{2^{2-s}}{n^{2s}(1-x)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}\,u^{2s-1}\,du}{(1+e^{-2u})\left(1+\frac{u^2}{2(1-x)n^2}\right)}.$$

Следовательно, если

$$n^2(1-x) = b \to \infty,$$

то

$$F(x) = (1-x)^s - P_n(x) = \frac{2^{2-s}\sin \pi s}{\pi n^{2s}}\, T_n(x) \int\limits_0^\infty \frac{u^{2s-1}\,du}{e^u+e^{-u}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{2s}},$$

и, вообще, при всяком $b \geqslant 0$,

$$F(x) = (1-x)^s - P_n(x) =$$

$$= \frac{2^{2-s}\sin \pi s}{\pi n^{2s}}\, T_n(x) \int\limits_0^\infty \frac{b u^{2s-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(b+\frac{u^2}{2}\right)} + \frac{\varepsilon_n}{n^{2s}}, \tag{51}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ равномерно при $n \to \infty$.

Таким образом, во всех точках $\xi_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, где $b_k = n^2(1-\xi_k) \to \infty$ (т. е. при $k \to \infty$), достигается асимптотически абсолютный экстремум с противоположными знаками

$$\frac{1}{n^{2s}} C_s = \frac{2^{2-s}}{\pi n^{2s}} \sin \pi s \int\limits_0^\infty \frac{u^{2s-1}e^{-u}}{1+e^{-2u}}\,du =$$

$$= \frac{2^{2-s}\sin \pi s}{\pi n^{2s}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int\limits_0^\infty u^{2s-1} e^{-(2k+1)u}\,du = \tag{52}$$

$$= \frac{2^{2-s}\sin \pi s}{{}^{2s}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2s}}\,\Gamma(2s).$$

В частности, если $2s = 2q + 1$ — целое нечетное число, то

$$C_s = C_{q+\frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}-q}(2q)!}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2q+1}}. \tag{53}$$

Очевидно, что интеграл в формуле (51), убывающий вместе с b, меньше, чем в формуле (52); поэтому, во всяком случае, погрешность приближения посредством многочленов $P_n(x)$ не больше, чем $\frac{1}{n^{2s}} C_s$. Применяя следствие IV § 5, гл. I, не трудно убедиться, с другой стороны, что при достаточно большом n

$$E_n' \left[(1-x)^s\right] > \frac{2^{2-s} \sin \pi s}{\pi n^{2s}} T_n\left(\cos \frac{\pi}{4n}\right) \int_0^{\infty} \frac{u^{2s-1}\,du}{(e^u + e^{-u})\left(1 + \frac{u^2}{2b_0}\right)},$$

где $b_0 = n^2\left(1 - \cos \frac{\pi}{4n}\right) = 2n^2 \sin^2 \frac{\pi}{8n} \to \frac{\pi^2}{32}$, обозначая через E_n' наилучшее приближение посредством многочлена степени n, обращающегося в нуль при $x = 1$. Действительно, функции $(1-x)$, $(1-x)^2, \ldots, (1-x)^n$ и образуют систему T порядка $n-1$, и так как

$$T_n\left(\cos \frac{\pi}{4n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T_n\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то во всех этих $\overline{n+1}$ точках разность $F(x)$ получает значения с противоположными знаками, причем наименьшее соответствует $\cos \frac{\pi}{4n}$. Принимая во внимание (68_1), имеем таким образом (при всяком $s > 0$):

$$C_s > n^{2s} E_n\left[(1-x)^s\right] > \frac{2^{\frac{1}{2}-s} \sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^{2s-1}\,du}{(e^u + e^{-u})\left(1 + \frac{16u^2}{\pi^2}\right)} >$$

$$> \frac{2^{\frac{1}{2}-s} \sin \pi s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^{2s-1}\,du}{e^{u\left(1+\frac{4}{\pi}\right)} + e^{-u\left(1+\frac{4}{\pi}\right)}} = \left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^{2s} \frac{C_s}{2\sqrt{2}}. \tag{54}$$

Делая выше указанную замену $1 - x = 2y^2$ и полагая $m = 2n$, преобразуем формулу (51), где $T_n(1-2y^2) = (-1)^n T_m(y)$, $b = \frac{m^2y^2}{2}$, к виду

$$|y|^{2s} - Q_m(y) =$$

$$= \frac{(-1)^n 4 \sin \pi s}{\pi m^{2s}} T_m(y) \int_0^{\infty} \frac{u^{2s-1}\,du}{(e^u + e^{-u})\left(1 + \frac{u^2}{2b}\right)} + \frac{\varepsilon_m}{m^{2s}}. \tag{55}$$

Следовательно, задача об асимптотическом значении $E_m(|y|^{2s}) \sim \frac{\mu(s)}{m^{2s}}$ приведена к отысканию предела численного коэффициента $\mu(s)$ при $m \to \infty$ (существование его не вытекает непосредственно из предыдущего), который равен пределу наилучшего приближения при помощи многочлена степени m относительно y на отрезке $(-1, +1)$ четной функции

$$T_m(y) \cdot H_s(my) = \frac{4 \sin \pi s}{\pi} T_m(y) \int_0^\infty \frac{u^{2s-1}\, du}{(e^u + e^{-u})\left(1 + \frac{u^2}{m^2 y^2}\right)},$$

где

$$H_s(t) = \frac{4 \sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^{2s-1}\, du}{(e^u + e^{-u})\left(1 + \frac{u^2}{t^2}\right)} =$$

$$= \frac{2i}{\pi} e^{-i\pi s} \int_{-i\infty}^{\infty} \frac{z^{2s-1}\, dz}{(e^z + e^{-z})\left(1 + \frac{z^2}{t^2}\right)}.$$

Предполагая $0 < s < 1$, вычислим последний интеграл методом вычетов по контуру, составленному из верхних полуокружностей бесконечно малого и бесконечно большого радиуса, соединенных отрицательной и положительной полуосью, замечая, что значение интеграла по обеим окружностям стремится к нулю (если радиус большой окружности взят так, что $|e^z + e^{-z}| > 1$). Таким образом

$$H_s(t) = 4e^{-i\pi s}\left[\frac{e^{i\pi s}|t|^{2s}}{2(e^{ti} + e^{-ti})} + \frac{e^{i\pi s}}{2} \sum_0^\infty \frac{\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^{2s-1} (-1)^k}{1 - \left[\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{t}\right]^2}\right] =$$

$$= \frac{|t|^{2s}}{\cos t} + 2 \sum_0^\infty (-1)^k \frac{\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^{2s-1}}{1 - \left[\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{t}\right]^2}.$$

Поэтому, пользуясь известным разложением для $\frac{1}{\cos t}$, получим также:

$$H_s(t) = 2t^{2s} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2-2s}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{2s-1} - \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{t^2 - \left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}.$$

Если $2s = 1$, то в каждой из дробей суммы можно произвести сокращение; тогда

$$H_{\frac{1}{2}}(t) = 2|t| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{|t| + \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}.$$

Эта функция положена в основу моего выше упомянутого исследования $|x|$.

Функции $H_s(t)$ при $s > 1$ приводятся к рассмотрению тех же функций $H_s(t)$ (при $0 < s < 1$), умноженных на четные степени t. Действительно,

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{2s+1}\,du}{(e^u + e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{t^2}\right)} = \int_0^{\infty} \frac{u^{2s-1}(u^2 + t^2 - t^2)\,du}{(e^u + e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{t^2}\right)} =$$

$$= t^2 \int_0^{\infty} \frac{u^{2s-1}\,du}{e^u + e^{-u}} - t^2 \int_0^{\infty} \frac{u^{2s-1}\,du}{(e^u + e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{t^2}\right)},$$

т. е.

$$H_{s+1}(t) = t^2\,[H_s(t) - H_s(\infty)];$$

например

$$H_{\frac{3}{2}}(t) = [H_{\frac{1}{2}}(t) - 1]\,t^2.$$

§ 7. Наилучшее приближение функции, имеющей два сопряженных полюса на эллипсе сходимости

Рассмотрим сначала случай простых полюсов и положим

$$f(x) = A\left[\frac{e^{i\psi}}{x-a} + \frac{e^{-i\psi}}{x-a'}\right],$$

где A — положительное число, a и a' — две произвольно данные сопряженные точки на эллипсе C с полусуммой осей, равной $R > 1$, так что

$$a=\frac{1}{2}\left(Re^{i\varphi}+\frac{1}{R}e^{-i\varphi}\right),\quad a'=\frac{1}{2}\left(Re^{-i\varphi}+\frac{1}{R}e^{i\varphi}\right),\quad (0<\varphi<\pi)$$

$$R=|a+\sqrt{a^2-1}|=|a'+\sqrt{a'^2-1}|>1,$$

$$\frac{1}{R}=|a-\sqrt{a^2-1}|=|a'-\sqrt{a'^2-1}|<1.$$

Заметим, что в дальнейшем функция $\sqrt{z^2-1}$ всегда мыслится, как однозначно определенная во всей плоскости, кроме купюры $(-1, +1)$, поэтому $\sqrt{z^2-1}$ лежит в той же полуплоскости, что и z, описывая эллипс C', конгруэнтный C, повернутый на $90°$ (с фокусами $\pm i$), когда z описывает эллипс C.

Рассмотрим дробь

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-a')(x-\gamma)}=\cos(n\theta+\delta+\delta'-\rho),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\theta=x,\quad \sin\theta=\sqrt{1-x^2},\\
&\cos\delta=\frac{ax-1}{x-a},\quad \sin\delta=\frac{\sqrt{(a^2-1)(1-x^2)}}{x-a},\\
&\cos\delta'=\frac{a'x-1}{x-a'},\quad \sin\delta'=\frac{\sqrt{(a'^2-1)(1-x^2)}}{x-a'},\\
&\cos\rho=\frac{\gamma x-1}{x-\gamma},\quad \sin\rho=\frac{\sqrt{(\gamma^2-1)(1-x^2)}}{x-\gamma},
\end{aligned}\right\}\qquad(56)$$

причем γ — *вещественное* число и $|\gamma|>1$; в таком случае

$$P(x)=\frac{1}{2}\{(x+\sqrt{x^2-1})^n[ax-1+\sqrt{(a^2-1)(x^2-1)}]\,[a'x-1+$$
$$+\sqrt{(a'^2-1)(x^2-1)}]\,[\gamma x-1-\sqrt{(\gamma^2-1)(x^2-1)}]+$$
$$+(x-\sqrt{x^2-1})^n[ax-1-\sqrt{(a^2-1)(x^2-1)}]\,[a'x-1-$$
$$-\sqrt{(a'^2-1)(x^2-1)}]\,[\gamma x-1+\sqrt{(\gamma^2-1)(x^2-1)}]\}.$$

Кроме того, при изменении x от -1 до $+1$, $\delta+\delta'$ убывает от 0 до -2π, так как

$$\frac{d}{dx}(\delta+\delta')=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{\sqrt{a^2-1}}{x-a}+\frac{\sqrt{a'^2-1}}{x-a'}\right]=$$
$$=\frac{x\left(R-\frac{1}{R}\right)\cos\varphi-\frac{1}{2}\left(R^2-\frac{1}{R^2}\right)}{(x-a)(x-a')\sqrt{1-x^2}}<0,$$

и $\cos(\delta+\delta')$, будучи вещественной рациональной дробью второй степени, имеет не более двух корней на отрезке $(-1, +1)$. Следовательно, принимая во внимание, что θ убывает от π до 0, а ρ убывает от 0 до $-\pi$, $\cos(n\theta+\delta+\delta'-\rho)$ достигает $n+2$ раза своего экстремума ± 1 с противоположными знаками. Таким образом, замечая, что

$$\lambda\cos(n\theta+\delta+\delta'-\rho)=-R_n(x)+\lambda\frac{P(\gamma)}{(\gamma-a)(\gamma-a')(x-\gamma)}+\\ +\lambda\frac{P(a)}{(a-\gamma)(a-a')(x-a)}+\lambda\frac{P(a')}{(a'-\gamma)(a'-a)(x-a)},$$

где $R_n(x)$ — многочлен степени n, видим, что $R_n(x)$ будет многочленом наилучшего приближения для следующей за ним рациональной дроби. Но

$$P(\gamma)=(\gamma-\sqrt{\gamma^2-1})^n\,[a\gamma-1-\sqrt{(a^2-1)(\gamma^2-1)}]\,[a'\gamma-1-\\ -\sqrt{(a'^2-1)(\gamma^2-1)}]\,(\gamma^2-1)$$

стремится к нулю (в геометрической прогрессии) с возрастанием n; поэтому $R_n(x)$ будет также многочленом асимптотического наилучшего приближения для $f(x)$, если мы сумеем подобрать числа γ и λ так, чтобы

$$\frac{\lambda P(a)}{(a-\gamma)(a-a')}=Ae^{i\psi},\qquad \frac{\lambda P(a')}{(a'-\gamma)(a'-a)}=Ae^{-i\psi}, \tag{57}$$

и при этом будем иметь

$$E_n[f(x)]\sim\lambda.$$

Для решения уравнений (57) замечаем, что

$$P(a)=(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n\,[a'a-1+\\ +\sqrt{(a^2-1)(a'^2-1)}]\,[\gamma a-1-\sqrt{(\gamma^2-1)(a^2-1)}]=\\ =\frac{1}{8}R^ne^{in\varphi}\left(Re^{i\varphi}-\frac{1}{R}e^{-i\varphi}\right)^2\left(R-\frac{1}{R}\right)^2[\gamma a-1-\sqrt{(\gamma^2-1)(a^2-1)}]$$

и для $P(a')$ имеем сопряженное выражение; поэтому уравнения (57) могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\lambda[\gamma a-1-\sqrt{(\gamma^2-1)(a^2-1)}]}{a-\gamma}=B,\\ &\frac{\lambda[\gamma a'-1-\sqrt{(\gamma^2-1)(a'^2-1)}]}{a'-\gamma}=B',\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

где

$$B=\frac{8i\sin\varphi\cdot e^{i(\psi-n\varphi)}}{R^n\left(R-\frac{1}{R}\right)\left(Re^{i\varphi}-\frac{1}{R}e^{-i\varphi}\right)^2}A,$$

$$B'=-\frac{8i\sin\varphi\cdot e^{-i(\psi-n\varphi)}}{R^n\left(R-\frac{1}{R}\right)\left(Re^{-i\varphi}-\frac{1}{R}e^{i\varphi}\right)^2}A,$$

так как

$$a - a' = i\left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\varphi.$$

Отметим еще, что $|\lambda| > |B|$, так как модуль дроби

$$\frac{\gamma a - 1 - \sqrt{(\gamma^2-1)(a^2-1)}}{a-\gamma} = \frac{a-\gamma}{\gamma a - 1 + \sqrt{(\gamma^2-1)(a^2-1)}}$$

меньше 1; действительно, при $a=\gamma$ он обращается в нуль и, непрерывно изменяясь, не может достигнуть значения 1, потому что тогда оказалось бы, что

$$\left|\gamma a - 1 + \sqrt{(\gamma^2-1)(a^2-1)}\right| = \left|\gamma a - 1 - \sqrt{(\gamma^2-1)(a^2-1)}\right|,$$

т. е. векторы $a - \frac{1}{\gamma}$ и $\sqrt{a^2-1}$ должны были бы быть ортогональны, что невозможно при $\gamma > 1$.

Кроме того, заменой $\gamma = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$ приводим уравнения (58) к виду

$$\lambda\frac{Re^{i\varphi}-u}{uRe^{i\varphi}-1} = B, \quad \lambda\frac{Re^{-i\varphi}-u}{uRe^{-i\varphi}-1} = B'; \tag{59}$$

исключая из них u, получаем:

$$\begin{vmatrix} \lambda Re^{i\varphi}+B & BRe^{i\varphi}+\lambda \\ \lambda Re^{-i\varphi}+B' & B'Re^{-i\varphi}+\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$\lambda^2 + \frac{(B-B')(1-R^2)}{2iR\sin\varphi}\lambda - BB' = 0,$$

корень которого больший по модулю, чем $|B|$, и будет асимптотическим значением $E_n[f(x)]$.

Таким образом

$$E_n\left(\frac{Ae^{i\psi}}{x-a} + \frac{Ae^{-i\psi}}{x-a'}\right) \sim \lambda =$$

$$= \frac{4A}{R^n\left(R^2+\frac{1}{R^2}-2\cos 2\varphi\right)}\left[H + \sqrt{H^2 + \frac{4\sin^2\varphi}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}}\right], \tag{60}$$

где

$$H = \left|\frac{R^2\cos[(n+2)\varphi-\psi] + \frac{1}{R^2}\cos[(n-2)\varphi-\psi] - 2\cos(n\varphi-\psi)}{R^2+\frac{1}{R^2}-2\cos 2\varphi}\right|.$$

Из этой формулы видно, что, каково бы ни было положение полюсов (a, a') на эллипсе сходимости C, порядок убывания E_n при всех n один и тот же $\left(\frac{1}{R^n}\right)$, но в данном случае произведение $R^n E_n[f(x)]$ уже не стремится к определенному не зависящему от n пределу, как это имеет место при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. Здесь возможны два случая.

Первый случай: $\frac{\varphi}{\pi} = \frac{p}{q}$ — *рациональная дробь*. Тогда H при возрастании n периодически последовательно получает q различных значений, которым соответствуют q различных значений $\lim R^n E_n[f(x)]$.

Пусть, например:

$$f(x) = \frac{px+q}{x^2+1} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{2}\left[\frac{e^{i\psi}}{x-i} + \frac{e^{-i\psi}}{x+i}\right];$$

здесь

$$\cos\psi = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \sin\psi = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad R = 1+\sqrt{2}.$$

Поэтому

$$(1+\sqrt{2})^n E_n[f(x)] \sim \frac{1}{4}\left[|p| + \sqrt{2p^2+q^2}\right] \qquad (n \text{ четное}),$$

$$(1+\sqrt{2})^n E_n[f(x)] \sim \frac{1}{4}\left[|q| + \sqrt{2q^2+p^2}\right] \qquad (n \text{ нечетное}).$$

Второй случай: $\frac{\varphi}{\pi}$ — число *иррациональное*. Тогда $n\varphi - \psi$ при n, достаточно большом, может сколь угодно приблизиться к любому геометрическому углу ω, но, так как

$$R^2\cos(\omega+2\varphi) + \frac{1}{R^2}\cos(\omega-2\varphi) - 2\cos\omega =$$

$$= \left[\left(R^2+\frac{1}{R^2}\right)\cos 2\varphi - 2\right]\cos\omega - \left[R^2-\frac{1}{R^2}\right]\sin 2\varphi \sin\omega$$

принимает все значения между $\pm\left(R^2+\frac{1}{R^2}-2\cos 2\varphi\right)$, то H приближается бесконечное число раз к любому значению между 0 и 1. Следовательно,

$$\overline{\lim} R^n E_n[f(x)] = \frac{4A}{R^2+\frac{1}{R^2}-2\cos 2\varphi}\left[1+\sqrt{1+\frac{4\sin^2\varphi}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}}\right],$$

$$\underline{\lim}\, R^n E_n(f(x)) = \frac{8A|\sin\varphi|}{\left(R^2+\frac{1}{R^2}-2\cos 2\varphi\right)\left(R-\frac{1}{R}\right)}.$$

Определение асимптотического значения $E_n[f(x)]$ в случае комплексных полюсов высших порядков достигается посредством того же метода дифференцирования, который был нами применен в случае вещественного полюса. Для этого возвратимся к тождеству:

$$\frac{e^{i\psi}}{x-a}+\frac{e^{-i\psi}}{x-a'}-R_n(x)=\lambda\left[\cos(n\theta+\delta+\delta'-\rho)+\varepsilon\right], \tag{61}$$

где ε стремится к нулю с возрастанием n так же, как и его производные по a и a', величина же λ дана формулой (60). Дифференцируя по R и помня, что

$$a=\frac{1}{2}\left[Re^{i\varphi}+\frac{1}{R}e^{-i\varphi}\right],\quad a'=\frac{1}{2}\left[Re^{-i\varphi}+\frac{1}{R}e^{i\varphi}\right],$$

замечаем, что при дифференцировании второй части (61) из всех множителей, входящих в нее, дифференцирование $\frac{1}{R^n}$ (входящего в λ) даст величину, бесконечно большую по сравнению с прочими. Таким образом, получим:

$$\frac{e^{i\psi}\left(Re^{i\varphi}-\frac{1}{R}e^{-i\varphi}\right)}{2R(x-a)^2}+\frac{e^{-i\psi}\left(Re^{-i\varphi}-\frac{1}{R}e^{i\varphi}\right)}{2R(x-a')^2}-$$
$$-R_n'(x)=-\frac{n\lambda}{R}\left[\cos(n\theta+\delta+\delta'-\rho)+\varepsilon'\right], \tag{62}$$

где ε' обладает теми же свойствами, что ε. Поэтому, полагая

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{R^2+1}{R^2-1}\operatorname{tg}\varphi$$

и умножая обе части равенства (62) на $\frac{2R}{\left(R^2+\frac{1}{R^2}-2\cos^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$, преобразуем его в

$$\frac{e^{i(\psi+\beta)}}{(x-a)^2}+\frac{e^{-i(\psi+\beta)}}{(x-a')^2}-S_n(x)=$$
$$=-\frac{2n\lambda\left[\cos(n\theta+\delta+\delta'-\rho)+\varepsilon'\right]}{\left(R^2+\frac{1}{R^2}-2\cos 2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{63}$$

где $S_n(x)$ — многочлен степени n. Следовательно, $S_n(x)$ будет многочленом наилучшего асимптотического приближения предшествующей ему в равенстве (63) рациональной дроби, а

$$\frac{2n\lambda}{\left(R^2+\frac{1}{R^2}-2\cos 2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

будет ее асимптотическим наилучшим приближением. Таким образом, заменяя $\psi+\beta$ через ψ, имеем:

$$E_n\left[\frac{Ae^{i\psi}}{(x-a)^2}+\frac{Ae^{-i\psi}}{(x-a')^2}\right]\sim\frac{8nA\left[H_1+\sqrt{H_1^2+\dfrac{4\sin^2\varphi}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2}}\right]}{R^n\left[R^2+\dfrac{1}{R^2}-2\cos 2\varphi\right]^{\frac{3}{2}}}, \tag{64}$$

где

$$H_1=\frac{R^2\cos\left[(n+2)\varphi-\psi+\beta\right]+\dfrac{1}{R^2}\cos\left[(n-2)\varphi-\psi+\beta\right]-2\cos(n\varphi-\psi+\beta}{R^2+\dfrac{1}{R^2}-2\cos 2\varphi}$$

причем

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{R^2+1}{R^2-1}\operatorname{tg}\varphi.$$

Легко проверить последовательным дифференцированием, что при всяком целом $k\geqslant 2$ имеем также

$$E_n\left[\frac{Ae^{i\psi}}{(x-a)^k}+\frac{Ae^{-i\psi}}{(x-a')^k}\right]\sim$$

$$\sim\frac{2^{k+1}n^{k-1}A\left[H_{k-1}+\sqrt{H_{k-1}^2+\dfrac{4\sin^2\varphi}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2}}\right]}{(k-1)!\,R^n\left[R^2+\dfrac{1}{R^2}-2\cos 2\varphi\right]^{\frac{k+1}{2}}}, \tag{65}$$

где

$$H_k=\frac{R^2\cos\left[(n+2)\varphi+k\beta-\psi\right]+\dfrac{1}{R^2}\cos\left[(n-2)\varphi+k\beta-\psi\right]-2\cos(n\varphi+k\beta-}{R^2+\dfrac{1}{R^2}-2\cos 2\varphi}$$

Из формулы (65) видно, что, как и при вещественном полюсе, асимптотическое значение наилучшего приближения функции, имеющей лишь два сопряженных полюса на эллипсе C сходимости, зависит только от членов высшего порядка соответствующих разложений Лорана.

Кроме того, это асимптотическое значение не изменится и тогда, когда на эллипсе есть и другие полюсы, но низшего порядка. К случаю двух вещественных полюсов указанный метод применяется непосредственно. Общий же случай, когда число полюсов больше двух, хотя и можно исследовать тем же методом, но вычисления значительно усложнятся.

Следует считать весьма вероятным, что формула (65) останется в силе для любых вещественных k, если заменить в ней $(k-1)!$ через $\Gamma(k)$, и для доказательства этого может быть приложен метод, изложенный в § 5.

§ 8. Наилучшее приближение функций, имеющих существенную вещественную особенную точку

Рассмотрим теперь функцию

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{B_h}{a-x}, \qquad (a>1)$$

имеющую существенную особенность в точке a. Как известно,

$$\lim \sqrt[h]{|B_h|}=0. \tag{66}$$

Из условия (66) вытекает следующая

Лемма I. *Если*

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{B_h}{(a-x)^h} \quad \text{и} \quad f_\lambda(x)=\sum_{1}^{\lambda n}\frac{B_h}{(a-x)^h},$$

где λ — данное произвольно малое число, то при значениях n, для которых

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{E_n[f(x)]}>0, \tag{67}$$

имеет место асимптотическое равенство

$$E_n[f(x)]\sim E_n[f_\lambda(x)].$$

Действительно, во-первых, очевидно, что так как функция $f(x)$ не целая, то должна существовать бесконечная последовательность значений n, при которых соблюдается неравенство (67), означающее, что для всех этих n можно указать такое определенное число $\rho>0$, что

$$E_n[f(x)]>\rho^n. \tag{68}$$

Во-вторых, если положить

$$\varphi_\lambda(x)=f(x)-f_\lambda(x)=\sum_{\lambda n+1}^{\infty}\frac{B_h}{(a-x)^h},$$

то, для всех значений $n>N$, достаточно больших, существует такое $\varepsilon<\rho$, что $|\varphi_\lambda(x)|<\varepsilon^n$ при $|x|\leqslant 1$; для этого достаточно выбрать [пользуясь (66)] N так, чтобы при $n>N$

$$|B_{\lambda n}|\leqslant \varepsilon^n(a-1)^{\lambda n} \qquad \left(\varepsilon<\frac{1}{2^\lambda}\right);$$

тогда

$$|\varphi_\lambda(x)|<\sum_{\lambda n+1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}(a-1)}{a-1}\right)^h=\sum_{\lambda n+1}^{\infty}\varepsilon^{\frac{h}{\lambda}}=2\varepsilon^{\frac{\lambda n+1}{\lambda}}<\varepsilon^n.$$

Следовательно,

$$|E_n[f(x)] - E_n[f_\lambda(x)]| < \varepsilon^n; \qquad (\varepsilon < \rho)$$

поэтому, благодаря (68):

$$1 - \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^n < \frac{E_n[f_\lambda(x)]}{E_n[f(x)]} < 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^n,$$

откуда следует, что для рассматриваемой бесконечной последовательности значений n

$$\lim \frac{E_n[f_\lambda(x)]}{E_n[f(x)]} = 1. \tag{69}$$

Следствие I. *Равенство (69) справедливо при всех n, для которых существует одно и то же $\rho > 0$ такое, что*

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{E_n[f_\lambda(x)]} \geqslant \rho.$$

Лемма II. *Функция*

$$\sigma_k = \sigma_k(a) = \left(-\frac{\sqrt{a^2-1}}{n}\right)^k \frac{d^k}{da^k}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n \tag{70}$$

удовлетворяет линейному уравнению в конечных разностях

$$\sigma_{k+2} = \frac{2k+1}{n} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\,\sigma_{k+1} + \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\sigma_k, \tag{71}$$

причем

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n.$$

Действительно, полагая

$$P_k = \frac{d^k}{da^k}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n = \left(-\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^k \sigma_k, \tag{72}$$

имеем

$$P_1 = -\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\,P_0, \tag{73}$$

т. е.

$$\sigma_1 = \sigma_0 = \frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

Но, кроме того, из (73) следует:

$$(a^2-1)\,P_1^2 - n^2 P_0^2 = 0,$$

откуда, дифференцируя по a и сокращая на $2P_1$, получаем:

$$(a^2-1)\,P_2 + aP_1 - n^2 P_0 = 0.$$

Дифференцируя еще k раз, находим уравнение

$$(a^2-1)\,P_{k+2} + (2k+1)\,a\,P_{k+1} + (k^2-n^2)\,P_k = 0, \tag{74}$$

из которого, вследствие (72), следует (71).

Вернемся теперь к формуле (23), которая примет вид:

$$\frac{h!}{(x-a)^{h+1}}-R^{(h)}(x)=\left[\left(-\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^h\sigma_h\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}+\right.$$
$$\left.+h\left(-\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}\sigma_{h-1}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}\right)'+\ldots\right], \tag{75}$$

и, применяя ее ко всем членам разложения функции $f(x)$, сложим полученные равенства.

Обозначая через $R_\lambda(x)$ многочлен степени n, который получится в правой части, находим таким образом:

$$R_\lambda(x)-f_\lambda(x)=\sum_{h=1}^{\lambda n}\frac{B_h}{(h-1)!}\left[\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}\sigma_{h-1}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}\right)-\right.$$
$$\left.-(h-1)\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-2}\sigma_{h-2}\frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}\right)+\ldots\right]=$$
$$=L_\lambda[\cos(n\theta+\delta)-\beta], \tag{76}$$

где

$$L_\lambda=\frac{1}{a^2-1}\sum_{h=1}^{\lambda n}\frac{B_h\sigma_{h-1}}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}, \tag{77}$$

$$\beta L_\lambda=\sum_{h=2}^{\lambda n}\frac{B_h}{(h-2)!}\left[\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-2}\sigma_{h-2}\frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{h-2}{2}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-3}\sigma_{h-3}\frac{d^2}{da^2}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}\right)+\ldots\right]. \tag{78}$$

Применимость нашего метода существенным образом зависит от того, стремится ли β к нулю при бесконечном возрастании λn. Наиболее простым, как и следовало ожидать, является случай, когда все коэффициенты B_h одинакового знака, так как тогда производные функции $f(x)$ любого порядка сохраняют постоянный знак на отрезке $(-1, +1)$. При этом предположении без особых трудностей доказывается следующая общая

Теорема. *Если в разложении функции*

$$f(x)=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{B_h}{(a-x)^h},$$

имеющей существенную особенную точку $a>1$, все коэффициенты $B_h\geqslant 0$, то при всех значениях $h\to\infty$

$$E_n[f(x)]\sim\frac{1}{a^2-1}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{B_h\sigma_{h-1}}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}, \tag{79}$$

где

$$\sigma_k=\left(-\frac{\sqrt{a^2-1}}{n}\right)^k\frac{d^k}{da^k}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n. \tag{72 bis}$$

Для доказательства, покажем сначала, что

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_h} > 1, \tag{80}$$

если $0 \leqslant h < k$.

Действительно, полагая $\frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} = z_k$, из уравнения (71), деля его на σ_{k+1}, получим:

$$z_{k+1} = \frac{2k+1}{n} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{1-\frac{k^2}{n^2}}{z_k}, \tag{81}$$

откуда можно получить значение z_k в виде непрерывной дроби, принимая во внимание, что $z_0 = 1$. Однако, нам полезнее будет разлагать z_k по возрастающим степеням $\frac{1}{n}$. Полагая

$$z_k = 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{k}{n} + \frac{\theta_k}{a^2-1} \cdot \frac{k^2}{n^2}, \tag{82}$$

мы получаем, подставляя это значение в (81):

$$\left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{k}{n} + \frac{\theta_k}{a^2-1} \cdot \frac{k^2}{n^2}\right)\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{k}{n} + \right.$$
$$\left. + \frac{\theta_{k+1}(k+1)^2}{(a^2-1)n^2}\right) = 1 - \frac{k^2}{n^2},$$

или

$$1 - \frac{a^2}{a^2-1} \cdot \frac{k^2}{n^2} + \frac{\theta_{k+1}(k+1)^2}{(a^2-1)n^2} z_k +$$
$$+ \frac{\theta_k k^2}{(a^2-1)n^2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{k}{n}\right) = 1 - \frac{k^2}{n^2};$$

поэтому

$$\theta_{k+1} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \cdot \frac{1-\theta_k\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\,\frac{k}{n}\right)}{z_k} =$$
$$= \frac{k^2}{(k+1)^2} \cdot \frac{1-\theta_k+\theta_k \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\,\frac{k}{n}}{1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{k}{n} + \frac{\theta_k \cdot k^2}{(a^2-1)n^2}}.$$

Отсюда видно, что, если $0 \leqslant \theta_k < 1$, то также должно быть и $0 \leqslant \theta_{k+1} < 1$. Но так как $\theta_0 = 0$, следовательно, при всех значениях $k > 0$, имеем, вследствие (82):

$$1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{k}{n} \leqslant z_k < 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{k}{n} + \frac{k^2}{(a^2-1)n^2} \tag{83}$$

(причем знак равенства слева имеет место лишь при $k=1$). Из (83) следует не только (80), но из умножения (83) при всех $k \leqslant h$, получаем:

$$\sigma_0 \prod_{k=1}^{h}\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{k}{n}\right) \leqslant \sigma_{h+1} < \sigma_0 \prod_{k=1}^{h}\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{k}{n}+\right.$$
$$\left.+\frac{k^2}{(a^2-1)n^2}\right), \tag{84}$$

что нам понадобится впоследствии (знак равенства имеет место при $h=1$).

Благодаря (80), заключаем сейчас же на основании (78), что

$$|\beta L_\lambda| < \sum_{h=2}^{\lambda n} \frac{B_h \sigma_{h-1}}{(h-2)!}\left[\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-2}\left|\frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}\right)\right|+\right.$$
$$\left.+\frac{h-2}{2!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-3}\left|\frac{d^2}{da^2}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}\right)\right|+\ldots\right] <$$
$$< \sum_{h=2}^{\lambda n} \frac{B_h \sigma_{h-1}}{(h-2)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-2}\left[\left|\frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}\right)\right|+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2!}(\lambda\sqrt{a^2-1})\left|\frac{d^2}{da^2}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}\right)\right|+\ldots\right],$$

так как $\frac{h}{n} \leqslant \lambda$.

Но, принимая во внимание, что, когда a получает приращение $z=\lambda\sqrt{a^2-1}$, функция $\frac{\cos(n\theta+\delta)}{a^2-1}$ (при любом значении x между -1 и $+1$) разлагается в ряд Тэйлора по степеням z с радиусом сходимости $R \geqslant a-1$, замечаем, что при $\lambda < \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$ выражение в прямоугольных скобках будет меньше некоторой постоянной M; следовательно,

$$|\beta L_\lambda| < \sum_{h=1}^{\lambda n} \frac{B_h \sigma_{h-1}}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1} \lambda M \sqrt{a^2-1}$$

и, вследствие (77):

$$|\beta| < M\lambda(a^2-1)^{\frac{3}{2}}. \tag{85}$$

Таким образом

$$L_\lambda[1-M\lambda(a^2-1)^{\frac{3}{2}}] < E_n[f_\lambda(x)] < L_\lambda[1+M\lambda(a^2-1)^{\frac{3}{2}}]$$

при условии, что $\lambda < \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$. Кроме того, ввиду того, что все члены суммы L_λ положительны, $\varliminf \sqrt[n]{L_\lambda} \geqslant \rho = \frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}$. Поэтому согласно следствию из леммы I, заставив произвольным образом λ стремиться к нулю и выбирая для каждого λ достаточно большое N_λ, будем иметь для всех $n > N_\lambda$:

$$E_n[f(x)] \sim L_\lambda = \frac{1}{a^2-1} \sum_{h=1}^{\lambda n} \frac{B_h \sigma_{h-1}}{(h-1)!} \left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}.$$

Но, с другой стороны, так как $\sigma_k < \sigma_{k+1}$, из (71) получаем

$$\sigma_{k+2} < \sigma_{k+1}\left(1 + \frac{2k+1}{n} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right),$$

откуда

$$\sigma_{h+1} < \frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^n} \prod_{k=1}^{h} \left(1 + \frac{2k-1}{n} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right) < \frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^n} \left(1 + \frac{2h}{n} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)^h. \quad (86)$$

Поэтому

$$H_\lambda = \sum_{\lambda n+1}^{\infty} \frac{B_h \sigma_{h-1}}{(h-1)!} \left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1} <$$

$$< \sum_{\lambda n}^{\infty} \frac{B_{h+1}}{h!} \left(n + \frac{2ha}{\sqrt{a^2-1}}\right)^h \left(\frac{1}{a^2-1}\right)^{\frac{h}{2}} \frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^n} <$$

$$< \frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^n} \sum_{\lambda n}^{\infty} B_{h+1} \left[\frac{n}{h} + \frac{2a}{\sqrt{a^2-1}}\right]^h \left(\frac{e}{\sqrt{a^2-1}}\right)^h <$$

$$< \frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^n} \sum_{\lambda n}^{\infty} B_{h+1} \left[\frac{e}{\lambda\sqrt{a^2-1}} + \frac{2ae}{a^2-1}\right]^h \quad (87)$$

и так как $\sum_{1}^{\infty} B_h z^h$ есть целая трансцендентная функция, то, как бы велико ни было $\frac{1}{\lambda}$, при $n \to \infty$ имеем:

$$\lim \sum_{\lambda n}^{\infty} B_{h+1} \left[\frac{e}{\lambda\sqrt{a^2-1}} + \frac{2ae}{a^2-1}\right]^h = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n=\infty} \frac{H_\lambda}{L_\lambda} = 0;$$

поэтому

$$E_n[f(x)] \sim \frac{1}{a^2-1} \sum_1^\infty \frac{B_h \sigma_{h-1}}{(h-1)!} \left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}. \tag{79}$$

§ 9. Примеры

Формула (79) значительно упрощается, если ввести дополнительные предположения о скорости убывания коэффициентов $B_h \geqslant 0$.

1. Пусть[1]) $\lim h\sqrt[h]{B_h}=0$. В таком случае, можем в предшествующем рассуждении положить $\lambda=\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$, где α — произвольно малое положительное число. Тогда, полагая $h\sqrt[h]{B_h}<\varepsilon$ и учитывая, что $h!>(he^{-1})^h$, имеем:

$$(a+\sqrt{a^2-1})^n H_\lambda < \sum_{h=\alpha\sqrt{n}}^\infty B_{h+1}\left[\frac{e}{\alpha}\sqrt{\frac{n}{a^2-1}}+\frac{2ae}{a^2-1}\right]^h <$$

$$< \sum_{\alpha\sqrt{n}}^\infty \left(\frac{\varepsilon e}{\alpha h}\sqrt{\frac{n}{a^2-1}}+\frac{2\varepsilon a e}{h(a^2-1)}\right)^h <$$

$$< \sum_{\alpha\sqrt{n}}^\infty \left[\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2a}{h\sqrt{a^2-1}}\right)\frac{\varepsilon e}{\sqrt{a^2-1}}\right]^h \to 0,$$

если $n>N$ так велико, что

$$\frac{\varepsilon e}{\alpha^2\sqrt{a^2-1}}<\frac{1}{2}.$$

Поэтому в данном случае

$$\lim_{n=\infty}\frac{H_\lambda}{L_\lambda}=0, \qquad \left(\lambda=\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right). \tag{88}$$

Но, с другой стороны, полагая $u_h=\frac{\sigma_h}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}$, из неравенства (86) заключаем, что

$$u_h<e^{\frac{h^2 a}{n\sqrt{a^2-1}}}.$$

---

[1]) Согласно терминологии, введенной в гл. III, это условие означает, что функци $\sum_1^\infty B_h z^h$ нулевой степени.

Поэтому при всяком α

$$\sum_{1}^{\alpha\sqrt{n}} \frac{B_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1} < \sum_{1}^{\alpha\sqrt{n}} \frac{B_h u_{h-1}}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1} < \\ < \sum_{1}^{\alpha\sqrt{n}} \frac{B_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1} e^{\frac{2h^2 a}{n\sqrt{a^2-1}}},$$

и так как, при $n \to \infty$, имеем также в данном случае

$$\sum_{\alpha\sqrt{n}}^{\infty} \frac{B_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1} \to 0,$$

следовательно, как бы ни было мало α, при n достаточно большом:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{B_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1} < \sum_{1}^{\infty} \frac{B_h u_{h-1}}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1} < \\ < e^{\frac{2\alpha^2 a}{\sqrt{a^2-1}}} \sum_{1}^{\infty} \frac{B_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1},$$

откуда следует, что

$$E_n[f(x)] \sim \frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} \sum_{1}^{\infty} \frac{B_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}, \quad (89)$$

если $\lim h\sqrt[h]{B_h} = 0$.

Возьмем, например, функцию

$$f(x) = \cos\frac{1}{\sqrt{x-a}} = 1 + \frac{1}{2(a-x)} + \ldots + \frac{1}{2h!\,(a-x)^h} + \ldots$$

Применение формулы (89) дает

$$E_n[f(x)] \sim \frac{\varphi\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n},$$

полагая

$$\varphi(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^h}{h!\,(2h+2)!} = \sum_{h=0}^{\infty} I_h.$$

Значение $\varphi(z)$ для больших значений $z > 0$ легко вычислим, принимая во внимание, что все члены I_h положительны, благодаря чему достаточно будет сложить их асимптотические значения, которые определяются при помощи формулы Стирлинга. Таким образом

$$\varphi(z) \sim \sum_{h=h_0}^{\infty} \frac{z^h e^{3h}}{4^h h^{3h+3} 8\pi\sqrt{2}},$$

где численное значение $h_0 > 0$ не играет роли, так как $\varphi(z)$ возрастает быстрее всякой конечной степени z.

Положим $h = (1+\varepsilon)\sqrt[3]{\frac{z}{4}}$, где только значения $\varepsilon = \frac{t}{\sqrt[6]{\frac{z}{4}}}$, стремящиеся к нулю с возрастанием z, будут приводить к слагаемым высшего порядка. Действительно (при $|\varepsilon| < 1$):

$$\lg\left(\frac{ze^3}{4h^3}\right)^h = 3h \lg\frac{e}{1+\varepsilon} = 3h\left[1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3} + \ldots\right] =$$

$$= 3\sqrt[3]{\frac{z}{4}}\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{6} + \ldots\right] = 3\sqrt[3]{\frac{z}{4}} - \frac{3}{2}t^2 + \alpha,$$

где α стремится к нулю вместе с $\frac{1}{z}$. Поэтому при любом t (конечном)

$$I_h = \frac{e^{\sqrt[3]{\frac{z}{4}} - \frac{3}{2}t^2}}{2\pi z\sqrt{2}}(1+\alpha_1), \qquad (\alpha_1 \to 0).$$

Кроме того, замечая, что

$$\frac{I_h}{I_{h-1}} = \frac{z}{4h^3\left(1+\frac{1}{h}\right)\left(1+\frac{2}{h}\right)} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{h}\right)\left(1+\frac{2}{h}\right)},$$

видим, что, при $|\varepsilon| \geqslant \varepsilon_0 > 0$, члены I_h с возрастанием $|\varepsilon|$ убывают (в обе стороны) быстрее, чем в геометрической прогрессии, а потому сумма их того же порядка, что первый из них, соответствующий $\varepsilon = \pm\varepsilon_0$.

Следовательно:

$$\varphi(z) \sim \frac{e^{3\sqrt[3]{\frac{z}{4}}}}{2\pi z\sqrt{2}}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3}{2}t^2},$$

где сумма распространяется на все значения t, дающие целые h; поэтому приращение $\Delta t = \sqrt[6]{\frac{4}{z}}$.

Таким образом

$$\varphi(z) \sim \frac{e^{3\sqrt[3]{\frac{z}{4}}}}{2\pi z\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{z}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}t^2}\,dt = \frac{z^{-\frac{5}{6}}e^{3\sqrt[3]{\frac{z}{4}}}}{\sqrt{3\pi}\cdot\sqrt[3]{16}}.$$

Следовательно, наконец:

$$(a+\sqrt{a^2-1})^n E_n\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x-a}}\right)\sim\frac{e^{3\sqrt[3]{\frac{n}{4\sqrt{a^2-1}}}}}{\sqrt{3\pi}\cdot\sqrt[3]{16}\,(a^2-1)^{\frac{7}{12}}n^{\frac{5}{6}}}. \qquad (90)$$

2. Пусть $\lim h^{\frac{1}{2}}\sqrt[h]{B_h}=0$. Пользуясь этим более широким условием, мы не можем столь быстро, как в первом случае, устремлять λ к нулю, чтобы удовлетворить требованию

$$\lim_{n=\infty}\frac{H_\lambda}{L_\lambda}=0; \qquad (88\text{ bis})$$

читатель без труда проверит, подобно предыдущему, что теперь для осуществления (88 bis) достаточно положить $\lambda=\frac{\alpha}{\sqrt[3]{n}}$, где α произвольно малое (независимое от n число). Таким образом:

$$E_n[f(x)]\sim\frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^n(a^2-1)}\sum_{h=1}^{an^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{B_h u_{h-1}}{(h-1)!}\right)\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}. \qquad (91)$$

Но благодаря тому, что в данном случае h может получать большие значения, чем раньше, замена u_h единицей уже недостаточна и требуется несколько большая точность в его определении. Для этого, из (84) нанаходим:

$$\lg u_{h+1}=\sum_{k=1}^{h}\lg\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{k}{n}+\theta_k\frac{k^2}{(a^2-1)n^2}\right)\quad(0<\theta_k<1),$$

и если $\frac{h}{n}\to 0$, получаем

$$\lg u_{h+1}=\sum_{k=1}^{h}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{k}{n}+\frac{\theta_k}{a^2-1}\cdot\frac{k^2}{n^2}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{h}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{k}{n}+\frac{\theta_k}{a^2-1}\cdot\frac{k^2}{n^2}\right]^2+\ldots=$$

$$=\frac{a}{2\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{h^2}{n}(1+\varepsilon), \qquad (92)$$

где $\varepsilon=O\left(\frac{h}{n}+\frac{1}{h}\right)$. Следовательно:

$$u_{h+1}=e^{\frac{ah^2}{2n\sqrt{a^2-1}}}(1+\varepsilon'), \qquad (92\text{ bis})$$

где ε' — величина порядка $\frac{h^3}{n^2}+\frac{h}{n}$, т. е. стремится к нулю вместе с α. Вместо того, чтобы подставлять непосредственно это значение в (91), удобнее заметить, что

$$e^{\frac{ah}{2n\sqrt{a^2-1}}}=1+\frac{ah}{2n\sqrt{a^2-1}}+\frac{a^2h^2}{8n^2(a^2-1)}+\ldots,$$

поэтому

$$e^{\frac{ah^2}{2n\sqrt{a^2-1}}}=\left[e^{\frac{ah}{2n\sqrt{a^2-1}}}\right]^h=\left[1+\frac{ah}{2n\sqrt{a^2-1}}+\frac{a^2h^2}{8n^2(a^2-1)}+\ldots\right]^h=$$

$$=\left[1+\frac{ah}{2n\sqrt{a^2-1}}\right]^h(1+\varepsilon''),$$

где ε'' — порядка $\frac{h^3}{n^2}$. Таким образом, при подстановке u_h в последнем виде, (91) преобразуется в

$$(a^2-1)\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n E_n[f(x)]\sim\sum_0^{an^{\frac{2}{3}}}\frac{B_{h+1}}{h!}\left[\frac{ne^{\frac{ah}{2n\sqrt{a^2-1}}}}{\sqrt{a^2-1}}\right]^h\sim$$

$$\sim\sum_0^{an^{\frac{2}{3}}}\frac{B_{h+1}}{h!}\left[\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}+\frac{ah}{2(a^2-1)}\right]^h\sim\sum_0^{\infty}\frac{B_{h+1}}{h!}\left[\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}+\frac{ah}{2(a^2-1)}\right]^h. \quad (93)$$

Пусть, например,

$$f(x)=e^{\frac{1}{a-x}}=1+\frac{1}{a-x}+\ldots+\frac{1}{h!\,(a-x)^h}.$$

В таком случае

$$(a^2-1)\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n E_n\left(e^{\frac{1}{a-x}}\right)\sim\sum_0^{\infty}\frac{1}{h!\,(h+1)!}\left[\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}+\frac{ah}{2(a-1)}\right]^h.$$

Для вычисления асимптотического значения второй части равенства, рассматриваем функцию

$$\varphi(z)=\sum_0^{\infty}\frac{(z+bh)^h}{h!\,(h+1)!},$$

где b — данное число. Применяя тот же прием, что в предыдущем примере, полагая $h=\sqrt{z}+t\sqrt[4]{z}$, находим:

$$\varphi(z)\sim\frac{e^{2\sqrt{z}+b}}{2\pi z}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\sim\frac{e^{2\sqrt{z}+b}}{2\pi z^{\frac{3}{4}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{e^{b+2\sqrt{z}}}{2\sqrt{\pi}\cdot z^{\frac{3}{4}}}.$$

Следовательно:

$$(a^2-1)^{\frac{5}{8}}(a+\sqrt{a^2-1})^n E_n\left[e^{\frac{1}{a-x}}\right]\sim\frac{e^{\frac{a}{2(a^2-1)}+2\sqrt{\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}}}}{2\sqrt[4]{\pi^2n^3}}. \qquad (94)$$

Всегда, когда функция $f\left(\frac{1}{a-x}\right)$ конечного рода, возможно аналогичное преобразование формулы (79), которое усложняется по мере увеличения рода, т. е. по мере того, как убывание коэффициентов B_h замедляется.

Вообще из формулы (92) следует, что

$$u_{h+1}=e^{\frac{ah^2(1+\varepsilon)}{2n\sqrt{a^2-1}}},$$

где ε стремится к нулю вместе с $\frac{h}{n}+\frac{1}{h}$; поэтому, полагая

$$\psi(z)=\sum_0^\infty\frac{B_{h+1}}{h!}z^h, \qquad (B_h\geqslant 0)$$

имеем

$$(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n E_n\left(\sum_1^\infty\frac{B_h}{(a-x)^h}\right)\sim\varphi(n),$$

где

$$\varphi(n)=\sum_0^{\lambda n}\frac{B_{h+1}}{h!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}e^{\frac{ah(1+\varepsilon)}{2n\sqrt{a^2-1}}}\right)^h\sim\psi\left(\frac{n(1+\varepsilon_1)}{\sqrt{a^2-1}}\right)$$

причем $\varepsilon_1\to 0$ вместе с $\frac{1}{n}$. Отсюда заключаем, что если $\sqrt[h]{B_h}$ порядка $\left(\frac{1}{h}\right)^\rho$, то $\log\varphi(n)$ порядка $n^{\frac{1}{1+\rho}}$ при всяком конечном $\rho>0$.

Отметим еще, что следствие II § 3, как и равенство (46), применимы также к функции с существенной особенной точкой (при $B_h>0$).

Действительно, принимая во внимание (83), мы вместо (79) можем писать:

$$E_n[f(x)]\sim\frac{1}{a^2-1}\sum_{h=1}^\infty\frac{B_h\sigma_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}=$$

$$=\frac{1}{n\sqrt{a^2-1}}\sum_{h=1}^\infty\frac{B_h\sigma_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^h=\frac{A_n}{2\sqrt{a^2-1}}. \qquad (95)$$

Здесь A_n, как увидим в следующем параграфе, есть коэффициент при $T_n(x)$ разложения Фурье функции $f(x)$.

Применяя к функции

$$f'(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{hB_h}{(a-x)^{h+1}}$$

формулу (79), находим таким образом то же асимптотическое тождество

$$E_n[f'(x)]\sim\frac{1}{a^2-1}\sum_{1}^{\infty}\frac{B_h\sigma_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^h\sim\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}E_n[f(x)], \quad (96)$$

справедливость которого выше доказана в случае полюса или логарифмической критической точки. Перейдем, наконец, к более трудному случаю, когда коэффициенты B_h любого знака.

§ 10. Общий случай существенной особой точки

Дифференцируя k раз по параметру a равенство, которое легко проверить

$$\frac{1}{a-x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\sum_{0}^{\infty}\frac{T_n(x)}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \quad \left(T_h(x)=\cos n\arccos x,\ T_0=\frac{1}{2}\right)$$

получаем разложение Фурье для

$$\frac{1}{(a-x)^{k+1}}=(-1)\ \frac{2}{k!}\sum\frac{d^k}{da^k}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2-1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n}\right]T_n(x)=$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{2}{k!}\sum\frac{1}{n}\frac{d^{k+1}}{da^{k+1}}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n T_n(x)=$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{2}{k!}\sum\frac{1}{n}P_{k-}\ T_n(x). \quad (97)$$

Таким образом, коэффициент $A_n[f(x)]=A_n$ разложения в ряд Фурье функции

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{B_h}{(a-x)^h}=\sum A_nT_n(x)$$

всегда выражается формулой:

$$A_n=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\sum_{1}^{\infty}\frac{B_h\sigma_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}. \quad (98)$$

Из общих соображений § 1 [неравенства (2) и (3)] следует, что для всякой аналитической функции $f(x)$ существует бесчисленное множество значений n, для которых $E_{n-1}[f(x)]$ отличается от коэффициента Фурье $A_n(f(x))$ ограниченным снизу и сверху множителем, но неизвестно, существует ли при любых значениях $B_h\gtrless 0$ бесчисленное множество значений n, для которых формула (95) верна.

Обозначим через $A_n^{(k)}(f(x)) = A_n^{(k)}$ коэффициент Фурье при $T_n(x)$ дробной части $\sum_1^{\infty} \frac{B_h}{(a-x)^{h-k}}$ функции $f(x)(a-x)^k$. Вследствие (98) имеем:

$$A_n^{(}\ (f(x)) = \frac{:2}{\sqrt{a^2-1}} \sum_{k+1}^{\infty} \frac{B_h \sigma_{h-k}}{(h-k-1)!} \left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-k-1} \qquad (99)$$

Очевидно, при $n > k$, $A_n^{(k)}(f(x)) = A_n[f(x)(a-x)^k]$.

В таком случае, имеет место

Теорема 1. *Если существуют последовательности n, удовлетворяющие условию, что для всякого целого положительного k*

$$\left|\frac{A_n^{(k)}(f(x))}{A_n(f(x))}\right| < \varepsilon R^k, \qquad (100)$$

где $R < a-1$, и ε стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$, то для этих n справедливо

$$E_n\Big[f(x)\Big] \sim \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} A_n(f(x)). \qquad (95\,\text{bis})$$

Действительно, дифференцируя $h-1$ раз по a формулу (21), написанную в виде

$$\frac{1}{x-a} - R_n(x) = -\frac{\cos(n\theta+\delta)}{n\sqrt{a^2-1}} \frac{d}{da}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n =$$

$$= \frac{\sigma_1}{\sqrt{a^2-1}} \frac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{a^2-1}},$$

можем представить (75) в виде:

$$\frac{(h-1)!}{(x-a)^h} - R_n^{(h-1)}(x) = -\frac{1}{n}\left\{\frac{d^h}{da^h}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n \frac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{a^2-1}} + \right.$$

$$\left. +(h-1)\frac{d^{h-1}}{da^{h-1}}\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^n \frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right) + \dots\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{h-1}}{n}\left\{\sigma_h\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^h \frac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{a^2-1}} - \right.$$

$$\left. -(h-1)\sigma_{h-1}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right) + \dots\right\} \qquad (75\text{bis})$$

Применяя (75 bis) к каждому члену разложения Лорана функции $f(x)$ получим:

$$R(x)-\sum_{h=1}^{\infty}\frac{B_h}{(a-x)^h}=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{B_h\sigma_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^h\left\{\frac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}-\right.$$
$$\left.-(h-1)\frac{\sigma_{h-1}}{\sigma_h}\frac{\sqrt{a^2-1}}{n}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right)'+\ldots\right\}.$$

Но так как учитывая неравенство (87), где вместо B_h следует теперь брать $|B_h|$, ряд, стоящий во второй части, при любом данном n, равномерно и абсолютно сходится, то, пользуясь равенством (99) и производя соответствующую перегруппировку членов во второй части равенства, получим:

$$R(x)-f(x)=\frac{1}{2}\left\{A_n\frac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{a_2-1}}-A_n^{(1)}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right)'+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2!}A_n^{(2)}\left(\frac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right)''-\ldots\right\}.$$

Поэтому, замечая, как в § 8, что ряд Тэйлора для функции $\dfrac{\cos(n\theta+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}$ в точке a имеет радиус сходимости $a-1$, заключаем, как там, что $E_n\bigl(f(x)\bigr)$ асимптотически равно коэффициенту при $\cos(n\theta+\delta)$

$$\frac{1}{2}\,\frac{A_n}{\sqrt{a^2-1}}$$

для всех n, удовлетворяющих условию (100).

Применение этой теоремы практически зависит таким образом от вычисления асимптотического значения коэффициентов Фурье (98) и (99), и представляется, вообще, довольно затруднительным, когда знаки B_h различны, если не сделать дополнительного допущения о характере убывания B_h.

Теорема II. *Если коэффициенты B_h удовлетворяют условию*

$$\lim h^3\sqrt[h]{|B_h|}=0, \tag{101}$$

то

$$(a+\sqrt{a^2-1})^n E_n\Bigl[f(x)\Bigr]\sim\frac{1}{a^2-1}\left|\sum_{1}^{\infty}\frac{B_h}{(h-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\right)^{h-1}\right|=$$
$$=|F(n)| \tag{89 bis}$$

для всех значений n, обладающих свойством, что

$$|F(n)|\geqslant F(n_1),$$

каково бы ни было положительное число $n_1<n$.

Например, равенство (89 bis) при условии (101) будет иметь место для всех $n\to\infty$, если $F'(z)=0$ имеет только конечное число положительных корней.

Доказательство равенства (89 bis), тождественного с равенством (89), которое для $B_h \geqslant 0$ было установлено при менее ограничительном условии $\lim h \sqrt[h]{B_h} = 0$, потребует от нас более полного исследования функции

$$\sigma_h = \frac{u_h}{(a + \sqrt{a^2 - 1})^n}.$$

Разложим u_h по степеням $\frac{1}{n}$:

$$u_h = 1 + \frac{Q_1(h)}{n} + \ldots + \frac{Q_i(h)}{n^i} + \ldots \qquad (102)$$

Как мы видели, u_h удовлетворяет уравнению

$$u_{h+2} - \frac{2h+1}{n} b u_{h+1} + \left(1 - \frac{h^2}{n^2}\right) u_h = 0, \left(b = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} > 1\right) \qquad (81 \text{ bis})$$

причем $u_0 = u_1 = 1$. Поэтому $Q_i(0) = Q_i(1) = 0$, при всяком $i > 0$.

Для определения $Q_i(h)$ подставляем (102) в (81 bis), что дает нам, во-первых:

$$Q_1(h+2) - Q_1(h) = (2h+1) b,$$

откуда

$$Q_1(h) = \frac{h(h-1)}{2} b,$$

и, во-вторых, вообще для $i > 1$ (заменяя $Q_0(h)$ через 1)

$$Q_i(h+2) - Q_i(h) = (2h+1) b Q_{i-1}(h+1) - h^2 Q_{i-2}(h), \qquad (103)$$

откуда видим, что $Q_i(h) = 0$, при $h \leqslant i$; действительно, как было замечено, это утверждение верно для $h \leqslant 1$; положим, что оно справедливо для $h \leqslant h_0 + 1$; тогда, полагая $i \geqslant h_0 + 2$, правая часть равенства (103) обратится в нуль, как и $Q_i(h_0)$, следовательно, имеем также $Q_i(h_0 + 2) = 0$, т. е. наше утверждение правильно и при $h = h_0 + 2$. Таким образом, ряд (102) конечен и u_h является многочленом степени $h - 1$ относительно $\frac{1}{n}$. Кроме того, легко проверить также посредством математической индукции, что $Q_i(h)$ является многочленом степени $2i$ относительно h.

Точно так же проверим, что при любых $h > i > 0$,

$$|Q_i(h)| < \frac{(h+1) \ldots (h+2i)}{2 \cdot 4 \ldots 2i} (b+1)^i. \qquad (104)$$

Действительно, если (104) верно для $i < i_0$, то вследствие (103) получим:

$$|Q_{i_0}(h+2) - Q_{i_0}(h)| < \frac{(2h+1)(h+2)\ldots(h+2i_0-1)\,b(b+1)^{i_0-1}}{(i_0-1)!\,2^{i_0-1}} +$$

$$+ \frac{h^2(h+1)\ldots(h+2i_0-4)}{(i_0-2)!\,2^{i_0-2}}(b+1)^{i_0-2} <$$

$$< \frac{(2h+1)(h+2)\ldots(h+2i_0-1)(b+1)^{i_0}}{(i_0-1)!\,2^{i_0-1}} <$$

$$< \frac{(4h+6)(h+3)\ldots(h+2i_0)(b+1)^{i_0}}{(i_0-1)!\,2^{i_0}} <$$

$$< \frac{(h+3)\ldots(h+2i_0+2) - (h+1)\ldots(h+2i_0)}{i_0!\,2^{i_0}}(b+1)^{i_0}.$$

Складывая эти неравенства после замены последовательно h на $h-2$, $h-4$ и т. д., убеждаемся в справедливости (104) также и для $i = i_0$. На основании сказанного выше, при $h \leqslant i$, имеем $Q_i(h) = 0$. Поэтому неравенство (104) можно заменить неравенством (при $h > i$):

$$|Q_i(h)| < \frac{1}{i!}\left[3h\sqrt{\frac{b+1}{2}}\right]^{2i}. \qquad (104\text{ bis})$$

Представляя, наконец, $Q_i(h)$ при помощи формулы Ньютона

$$Q_i(h) = h(h-1)\ldots(h-i)\left[\frac{D_1^{(i)}}{(i+1)!} + \frac{D_2^{(i)}(h-i-1)}{(i+2)!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{D_i^{(i)}(h-i-1)\ldots(h-2i+1)}{2i!}\right], \qquad (105)$$

где коэффициенты $D_l^{(i)}$ представляют конечную разность порядка $l+i$

$$D_l^{(i)} = \Delta_{l+i}\big(Q_i(0)\big) = Q_i(i+l) - (i+l)\,Q_i(i+l-1) +$$

$$+ \frac{(i+l)(i+l-1)}{2!}Q_i(i+l-2) + \ldots \qquad (0 < l \leqslant i),$$

находим благодаря (104), что

$$|D_l^{(i)}| < 2^l\frac{(2i+1)\ldots 4i}{i!}(b+1)^i < i!\,H^i, \qquad (106)$$

где H — постоянная (зависящая только от b).

Таким образом, обозначая через $c_{h-1} = \dfrac{B_h}{(h-1)!\,(a^2-1)^{\frac{h+1}{2}}}$ коэффициент при n^{h-1} функции $F(n)$, имеем:

$$\sum_0^m c_h u_h n^h = \sum_0^m c_h n^h\left[1 + \frac{Q_1(h)}{n} + \ldots + \frac{Q_i(h)}{n^i} + \ldots\right],$$

где $m=\alpha\sqrt[4]{n}$ при произвольно малом $\alpha>0$. Располагая вторую часть равенства по убывающим степеням n, получим:

$$\sum_0^m c_h u_h n^h = \sum_0^m c_h n^h + \sum_0^m c_h n^{h-1} Q_1(h) + \ldots + \\ + \sum_0^m c_h n^{h-i} Q_i(h) + \ldots \tag{107}$$

Замечаем, полагая

$$F_m(x) = \sum_{h=0}^m c_h n^h,$$

что, вследствие (105), каждый член суммы (107) может быть представлен в виде:

$$\sum_{h=i}^m c_h n^{h-i} Q_i(h) = \sum_{l=1}^i D_l^{(i)} \sum_{h=i}^m \frac{h(h-1)\ldots(h-i-l+1)}{(i+l)!} c_h n^{h-i} = \\ = \sum_{l=1}^i \frac{D_l^{(i)} n^l}{(i+l)!} \sum_{h=i+l}^m h(h-1)\ldots(h-i-l+1) c_h n^{h-l-i} = \\ = \sum_{l=1} \frac{D_l^{(i)} n^l}{(i+l)!} F_m^{(l+i)}(n). \tag{108}$$

Положим

$$M(n) = \underset{0\leqslant x\leqslant n}{\text{Макс.}} |F(x)|, \quad M(n, m) = \underset{0\leqslant x\leqslant n}{\text{Макс.}} |F_m(x)| \qquad (m=\alpha\sqrt[4]{n})$$

и заметим, что, благодаря вытекающему из (101) условию

$$\lim_{h=\infty} h^4 \sqrt[h]{|c_h|} = 0,$$

как бы мало ни было ε, при h, достаточно большом, имеем

$$|c_h| < \left(\frac{\varepsilon}{h^4}\right)^h;$$

поэтому полагая $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\alpha^4$,

$$|M(n) - M(n, m)| \leqslant \sum_{h=m+1}^\infty |c_h| n^h < \sum_{h=m+1}^\infty \left(\frac{\varepsilon n}{h^4}\right)^h < \\ < \left(\frac{\varepsilon n}{m^4}\right)^m \sum_{h=1}^\infty \left(\frac{\varepsilon n}{m^4}\right)^h \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

С другой стороны, вследствие (20_1),

$$\frac{1}{k!}\left|F_m^{(k)}(n)\right| \leqslant M(n, m)\left(\frac{4}{n}\right)^k \frac{m^2(m^2-1)\ldots[m^2-(k-1)^2]}{2k!} <$$

$$< \frac{M(n, m)}{2k!}\cdot\frac{(2m)^{2k}}{n^k}.$$

Поэтому, благодаря (106) и (108):

$$\left|\sum_{h=0}^{m} c_h n^{h-i} Q_i(h)\right| < \frac{i!\,H^i}{n^i}\sum_{l=1}^{i}\frac{(2m)^{2l+2i}}{(2l+2i)!}M(n, m) <$$

$$< (H\alpha^4)^i \sum_{l=1}^{i}\frac{i!\,4^{l+i}}{(2l+2i)!}M(n, m) < (H\alpha^4)^i M(n, m). \qquad (109)$$

Таким образом, если

$$|F(n)| = M(n),$$

то вследствие (107):

$$\sum_{h=0}^{\alpha\sqrt[4]{n}} c_h u_h n^h = |F(n)|(1+\alpha'),$$

где $\alpha' < \alpha^3$ при α достаточно малом и n достаточно большом, и доказательство заканчивается как в предшествующих теоремах.

Пусть, например,

$$f(x) = \sum_0^{\infty}\frac{h!}{5h!}\cdot\frac{(a^2-1)^{\frac{h}{2}+1}}{(x-a)^{h+1}}.$$

В таком случае:

$$F(n) = \sum_0^{\infty}\frac{(-n)^h}{5h!} = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} e^{n^{\frac{1}{5}}e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}} =$$

$$= \frac{2}{5}\left[e^{n^{\frac{1}{5}}\cos\frac{\pi}{5}}\cos\left(n^{\frac{1}{5}}\sin\frac{\pi}{5}\right) + e^{n^{\frac{1}{5}}\cos\frac{3\pi}{5}}\cos\left(n^{\frac{1}{5}}\sin\frac{3\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}e^{-n^{\frac{1}{5}}}\right] \sim$$

$$\sim \frac{2}{5}e^{n^{\frac{1}{5}}\cos\frac{\pi}{5}}\cos\left(n^{\frac{1}{5}}\sin\frac{\pi}{5}\right),$$

причем последнее асимптотическое равенство верно для всех положительных n, не удовлетворяющих равенству

$$n^{\frac{1}{5}}\sin\frac{\pi}{5} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

где k — целое число. Однако, согласно доказанной теореме, мы можем утверждать, что:

$$\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n E_n[f(x)] \sim F(n) \qquad (89\text{ bis})$$

только для тех значений n, для которых, во-первых:

$$\frac{F'(n)}{F(n)} \geqslant 0,$$

и, во-вторых, $|F(n)| \geqslant |F(\xi_i)|$, где $\xi_i < n$, соответствуют относительным экстремумам функции $F(x)$. Замечая, что

$$F'(x) \sim \frac{2}{25} x^{-\frac{4}{5}} e^{x^{\frac{1}{5}} \cos\frac{\pi}{5}} \cos\left[x^{\frac{1}{5}} \sin\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right],$$

видим, что первое требование выполняется, если

$$\frac{\cos\left(n^{\frac{1}{5}} \sin\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(n^{\frac{1}{5}} \sin\frac{\pi}{5}\right)} > 0,$$

т. е. полагая

$$n^{\frac{1}{5}} \sin\frac{\pi}{5} = (k + \alpha)\pi, \tag{110}$$

где

$$|\alpha| < \frac{1}{2},$$

если

$$-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{10}. \tag{111}$$

Однако, не весь этот промежуток, в котором $|F(n)|$ растет, удовлетворяет второму требованию. Обозначая корень $F'(x) = 0$ через $\xi_i \sim \left[\frac{\left(i + \frac{3}{10}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}\right]^5$, получаем:

$$F(\xi_i) \sim \frac{2}{5} e^{\xi_i^{\frac{1}{5}} \cos\frac{\pi}{5}} \cos\frac{3\pi}{10},$$

поэтому при n, данном формулой (110), нужно кроме того, чтобы

$$\frac{\left|\cos\left(n^{\frac{1}{5}} \sin\frac{\pi}{5}\right)\right|}{\cos\frac{3\pi}{10}} \geqslant e^{\cos\frac{\pi}{5}\left(\xi_i^{\frac{1}{5}} - n^{\frac{1}{5}}\right)},$$

т. е., беря $i = k - 1$, достаточно и необходимо, чтобы

$$\frac{\cos\alpha\pi}{\cos\frac{3\pi}{10}} \geqslant e^{-\left(\alpha + \frac{7}{10}\right)\pi \operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}}. \tag{112}$$

Очевидно, что при $\alpha \geqslant -\frac{3}{10}$ (112) соблюдено, но при $\alpha = -\frac{4}{10}$ оно уже не соблюдено. Таким образом область значений, включающая $|\alpha| < \frac{3}{10}$, для которых формула (89 bis) применима, во всяком случае несколько шире области значений, где она не применима.

В моей французской книге (L. S.) доказано также, что существует бесчисленное множество значений n, для которых справедлива формула (89) при несколько более медленном убывании коэффициентов B_h (произвольного знака), а именно, *если соблюдено*

$$\lim h^{2+\varepsilon} \sqrt[h]{|B_h|} = 0,$$

как бы мало ни было заданное $\varepsilon > 0$.

Сейчас я вместо этого докажу, что *формула* (89 bis) *верна для всех n при еще более медленном убывании*[1] B_h

$$\lim h \sqrt[h]{|B_h|} = 0,$$

если функция $F(n)$ не имеет корней внутри некоторого данного острого угла 2ε, имеющего положительную полуось своей биссектрисой.

Для доказательства нам понадобится следующая:

Лемма. *Если многочлен степени n с действительными коэффициентами $P_n(x)$ не имеет положительных корней, и все его корни $a_k \pm ib_k$, у которых $a_k > 0$, таковы, что $\frac{|b_k|}{a_k} \geqslant \lambda > 0$, то можно указать такую независимую от n постоянную $C(\lambda)$, что при всех положительных x его производные любого порядка h удовлетворяют неравенствам*

$$|P_n^{(h)}(x)| < \left(\frac{2C(\lambda)n}{x}\right)^h |P_n(x)|. \tag{113}$$

Действительно,

$$u(x) = \frac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{x-(a_k \pm ib_k)} + \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x+\alpha_k} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m} \frac{(x-a_k)}{(x-a_k)^2+b_k^2} + \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x+\alpha_k},$$

если $P_n(x)$ имеет l вещественных (отрицательных) $-\alpha_k$ и $2m$ комплексных корней $a_k \pm ib_k$ $(l+2m=n)$. Очевидно, при $x > 0$ и $\alpha_k \geqslant 0$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x+\alpha_k} \leqslant \frac{l}{x}.$$

---

[1]) Т. е. при том же убывании B_h, при котором формула (89) была доказана для $B_h \geqslant 0$.

С другой стороны, также и

$$\frac{|a_k - x|}{(x-a_k)^2 + b_k^2} < \frac{1}{|x-a_k|} \leqslant \frac{1}{x},$$

если $a_k \leqslant 0$. Если же $a_k > 0$, то

$$\frac{|a_k - x|}{(x-a_k)^2 + b_k^2} \leqslant \frac{|a_k - x|}{(x-a_k)^2 + \lambda^2 a_k^2}.$$

Но при данных x и λ последняя дробь, как легко проверить ренцированием, достигает абсолютного максимума при

$$a_k = x\left[1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right],$$

и этот максимум равен

$$\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2\lambda x}.$$

Следовательно, полагая

$$D_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2\lambda},$$

получим

$$|u(x)| = \left|\frac{P_n'(x)}{P_n(x)}\right| \leqslant \frac{nD_\lambda}{x},$$

и для первой производной (113) доказана.

Впрочем, столь точная (действительно достигаемая) верхняя нам здесь не понадобится. Положим

$$C(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}.$$

Тогда, очевидно,

$$\left|\frac{1}{x-(a_k \pm ib_k)}\right| \leqslant \frac{C(\lambda)}{x},$$

так как $\frac{x}{C(\lambda)} = x \sin \varepsilon$ есть кратчайшее расстояние от точки x до образующей угол $\varepsilon = \operatorname{arc\,tg} \lambda$ с вещественной осью.

Поэтому $|u(x)| < \frac{nC(\lambda)}{x}$, и вообще,

$$|u^{(h)}(x)| \leqslant h!\left[\sum_1^m \left|\frac{1}{x-a_k \pm ib_k}\right|^{h+1} + \sum_1^l \left(\frac{1}{x+a_k}\right)^{h+1}\right] < h!\,n\left(\frac{C(\lambda)}{x}\right)^{h+1}.$$

Но из равенства

$$P_n^{(h)}(x) = (u(x)\,P_n(x))^{(h-1)}$$

заключаем, что

$$|P_n^{(h)}(x)| = \left|\sum_{k=0}^{h-1} \frac{(h-1)\ldots(h-k)}{k!} u^{(k)}(x) P_n^{(h-k-1)}(x)\right| <$$

$$< \frac{nC(\lambda)}{x} \sum_{k=0}^{h-1} (h-1)\ldots(h-k)\left(\frac{C(\lambda)}{x}\right)^k |P_n^{(h-k-1)}(x)|.$$

Следовательно, полагая, что неравенство (113) справедливо для всех значений $i < h$, находим:

$$|P_n^{(h)}(x)| < \frac{nC(\lambda)}{x} |P_n(x)| \sum_{k=0}^{h-1} \frac{(h-1)\ldots(h-k)}{(2n^k)} \left(\frac{2nC(\lambda)}{x}\right)^{h-1} =$$

$$= \frac{1}{2} P_n(x)| \left(\frac{2nC(\lambda)}{x}\right)^h \sum_{k=0}^{h-1} \frac{(h-1)\ldots(h-k)}{(2n)^k} < |P_n(x)| \left(\frac{2nC(\lambda)}{x}\right)^h,$$

так как $h \leqslant n$.

Таким образом, пользуясь вместо (20_1) неравенством (113), получаем вместо (109):

$$\left|\sum_{h=0}^{m} c_h n^{h-1} Q_i(h)\right| < \frac{i!\,H^i}{n^i} \sum_{l=1}^{i} \frac{(2mC(\lambda))^{l+i}}{(l+i)!} M(n,\ m). \qquad (114)$$

Следовательно, можем применить предшествующее доказательство, полагая $m = \alpha\sqrt{n}$, так как при нашем новом условии ($\lim h \sqrt[h]{|B_h|} = 0$) имеем:

$$\lim h^2 \sqrt[h]{|c_h|} = 0.$$

Тогда из неравенства (114) видим, что

$$\left|\sum_{h=0}^{m} c_h n^{h-i} Q_i(h)\right| < (2HC(\lambda)\alpha^2)^i \sum_{l=1}^{i} \frac{(2C(\lambda))^l M(n,\ m)}{m^{i-l}(i+1)\ldots(i+l)} <$$

$$< (2HC(\lambda)\alpha^2)^i M(n,\ m),$$

при n достаточно большом; вследствие этого для всех n имеем:

$$\sum_{h=0}^{\alpha\sqrt{n}} c_h u_h n^h = |F(n)|(1+\alpha'),$$

где $\alpha' \to 0$ вместе с α при $n \to \infty$, и доказательство заканчивается обычным образом.

Глава третья

ПРОБЛЕМЫ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

§ 1. Алгебраические дроби, наименее уклоняющиеся от нуля на всей вещественной оси

Для построения функций, наименее уклоняющихся от нуля на бесконечной вещественной оси, будем исходить из произвольного многочлена $R(x)$ степени $2n$ с вещественными коэффициентами, не имеющего вещественных корней. Вследствие основной теоремы алгебры, можем положить:

$$R(x) = R(0)\,[s^2(x) + t^2(x)], \tag{1}$$

где

$$S(x) + it(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1 - i\beta_1}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n - i\beta_n}\right) = \sum_{k=0}^{h} c_k x^k \tag{2}$$

имеет корнями все корни $R(x)$, лежащие в нижней полуплоскости ($\beta_k > 0$). В таком случае

$$\left.\begin{aligned} \frac{s(x)}{\sqrt{R(x)}} &= \frac{s(x)}{\sqrt{R(0)\,[s^2(x) + t^2(x)]}} = \frac{\cos\Phi}{\sqrt{R(0)}} \\ \frac{t(x)}{\sqrt{R(x)}} &= \frac{t(x)}{\sqrt{R(0)\,[s^2(x) + t^2(x)]}} = \frac{\sin\Phi}{\sqrt{R(0)}}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n, \tag{4}$$

обозначая через φ_h аргумент множителя $\left(1 - \dfrac{x}{\alpha_h - i\beta_h}\right)$, так как из (2) получаем:

$$s(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{x}{\alpha_1 - i\beta_1}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n - i\beta_n}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{x}{\alpha_1 + i\beta_1}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n + i\beta_n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}\,\left[e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)} + e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)}\right],$$

$$t(x)=\frac{1}{2i}\left[\left(1-\frac{x}{\alpha_1-i\beta_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_n-i\beta_n}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{x}{\alpha_1+i\beta_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_n+i\beta_n}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2i}\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}\,(e^{i\Phi}-e^{-i\Phi}).$$

Из определения φ_k следует, кроме того, что

$$\varphi_k-\delta_k=\arccos\frac{\alpha_k-x}{\sqrt{(\alpha_k-x)^2+\beta_k^2}}=-\arcsin\frac{\beta_k}{\sqrt{(\alpha_k-x)^2+\beta_k^2}},\tag{5}$$

полагая

$$\delta_k=\arccos\frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}=\arcsin\frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}.$$

Следовательно, когда x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, φ_k убывает от δ_k до $\delta_k-\pi$; поэтому Φ убывает от $\sum_1^n\delta_k$ до $\sum_1^n\delta_k-n\pi$. Откуда заключаем, что при любых A и B функция

$$f(x)=\frac{As(x)+Bt(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}}=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\Phi-\lambda),\tag{6}$$

где

$$\cos\lambda=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\lambda=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ *достигает максимального значения $\sqrt{A^2+B^2}$ с последовательно чередующимися знаками не менее n раз.*

Из формулы (6) и получающейся аналогично формулы

$$f_1(x)=\frac{Bs(x)-At(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}}=-\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin(\Phi-\lambda)$$

заключаем, что все корни $As(x)+Bt(x)$ вещественны и разделяются друг от друга корнями уравнения $Bs(x)-At(x)=0$.

Обратно, если даны два уравнения $s_1(x)=0$, $t_1(x)=0$ с разделяющимися корнями, имеющие лишь вещественные корни, то все корни уравнения $s_1(x)+it_1(x)=0$ комплексны, и мнимая часть у всех его корней имеет один и тот же знак. Действительно, обозначим через a_k корни $s_1(x)=0$ и через b_k корни $t_1(x)=0$, и положим $a_1<b_1<\ldots<a_n<b_n\leqslant\infty$ (так что степень $s_1(x)$ равна n, а $t_1(x)$ может быть также и степени $n-1$); тогда аргумент $s_1(x)+it_1(x)$ при переходе x от a_1 до b_n изменяется на $\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$, и так как аргумент каждого из линейных множителей $s_1(x)+it_1(x)$ изменяется при этом менее, чем на π, то число множителей, аргумент которых изменяется в одинаковом направлении, т. е. лежащих в одной и той же полуплоскости, должно быть более $n-1$. Поэтому все n корней $s_1(x)+it_1(x)$

лежат в одной и той же полуплоскости. Дополняя немного наше рассуждение, можем заключить кроме того, что все корни $s_1(x)+it_1(x)$ находятся внутри полукруга, имеющего диаметром отрезок (a_1, b_n); в самом деле, из известного геометрического свойства, что из точки, лежащей вне круга, диаметр круга виден под острым углом, заключаем, что аргумент множителя, соответствующего корню, находящемуся вне указанного круга, при переходе x от a_1 до b_n, изменится меньше, чем на $\frac{\pi}{2}$, а потому вариация аргумента всего произведения $s_1(x)+it_1(x)$ не могла бы достигать $\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$. В случае, когда $b_n=\infty$, т. е. степень $t_1(x)$ равна $n-1$, то же замечание приводит нас к заключению, что действительная часть корней уравнения $s_1(x)+it_1(x)$ заключена между a_1 и a_n. С другой стороны, число корней $s_1(x)+it_1(x)$ внутри полукруга, имеющего диаметром (a_i, a_{i+1}), должно быть менее, чем $2l$.

Лемма I. *Если корни $s(x)+it(x)$ лежат в нижней полуплоскости, то корни производной $s'(x)+it'(x)$ также лежат в нижней полуплоскости, а следовательно, тем же свойством обладают и корни производной $s^{(k)}(x)+it^{(k)}(x)$ любого порядка k.*

В самом деле, из равенства

$$\frac{s'(x)+it'(x)}{s(x)+it(x)}=\sum_{1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_k+i\beta_k} \qquad (\beta_k>0)$$

видно, что если мнимая часть $x=a+ib$ неотрицательна ($b\geqslant 0$), то мнимая часть каждой из дробей

$$\frac{1}{x-\alpha_k+i\beta_k}=\frac{1}{a+ib-\alpha_k+i\beta_k}=\frac{a-\alpha_k-i(b+\beta_k)}{(a-\alpha_k)^2+(b+\beta_k)^2}$$

отрицательна и, следовательно, $s'(x)+it'(x)$ не может в таком случае быть равна нулю.

Замечание. Отсюда следует, что если все корни некоторого многочлена лежат внутри данного в комплексной плоскости выпуклого замкнутого контура, то и все корни его производной лежат внутри того же контура.

Лемма II. *Ни один из коэффициентов c_p многочлена $s(x)+it(x)$ не может быть равен нулю, а отношение $\frac{c_{p+1}}{c_p}$ не может быть вещественным (если $p<n$).*

Действительно,

$$c_p=\frac{1}{p!}(s^{(p)}(0)+it^{(p)}(0)),$$

а потому мнимая часть дроби

$$(p+1)\frac{c_{p+1}}{c_p}=\frac{s^{(p+1)}(0)+it^{(p+1)}(0)}{s^{(p)}(0)+it^{(p)}(0)}$$

отрицательна.

Теорема. *Среди всех выражений вида*

$$\frac{P(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}}=\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}, \qquad (R(0)=1), \tag{7}$$

где $s^2(x)+t^2(x)=R(x)$, данный многочлен степени n, не имеющий вещественных корней, а $P(x)$ — любой многочлен, которого даны два коэффициента A_p и A_{p+1}, при x^p и x^{p+1} $(0\leqslant p<n)$, соответственно, наименее уклоняющимся от нуля на всей вещественной оси является выражение

$$f(x)=\frac{As(x)+Bt(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}},$$

в котором постоянные A и B определяются из условия, чтобы коэффициенты при x^p и x^{p+1} были соответственно равны A_p и A_{p+1}.

Замечаем, прежде всего, что для требуемого отожествления коэффициентов при x^p и x^{p+1} нужно лишь удовлетворить уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &A\gamma_p+B\gamma_p'=A_p\\ &A\gamma_{p+1}+B\gamma'_{p+1}=A_{p+1}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

полагая $s(x)=\sum\limits_0^n \gamma_k x^k$, $t(x)=\sum\limits_0^n \gamma_k' x^k$, так что $\gamma_k+i\gamma_k'=c_k$, где c_k — коэффициент при x^k многочлена $s(x)+it(x)$.

Вследствие леммы II определитель уравнений (8)

$$\gamma_p\gamma'_{p+1}-\gamma_p'\gamma_{p+1}<0,$$

а потому постоянные A и B из них всегда определяются однозначно Но функция $f(x)$, вполне таким образом определенная, достигает на основании (6) своего абсолютного максимума:

$$\sqrt{A^2+B^2}=\frac{\sqrt{(A_p\gamma_{p+1}-A_{p+1}\gamma_p)^2+(A_p\gamma'_{p+1}-A_{p+1}\gamma_p')^2}}{\gamma_p'\gamma_{p+1}-\gamma_p\gamma'_{p+1}}$$

n раз с последовательно чередующимися знаками. Поэтому, принимая во внимание, что дробь (7) могла бы бесконечно возрастать, если бы степень числителя $P(x)$ была выше n, заключаем, что не может быть многочлена $P(x)$, который позволял бы функции $f(x)$ оставаться постоянно меньшей по абсолютному значению, чем указанное значение $\sqrt{A^2+B^2}$.

Действительно, для этого необходимо было бы, чтобы разность

$$D(x)=As(x)+Bt(x)-P(x),$$

являющаяся многочленом степени не выше n, в которой отсутствуют смежные члены степени p и $p+1$, получала бы противоположные знаки в n точках, т. е. имела бы не менее $\overline{n-1}$ вещественных корней, что невозможно.

Отсюда вытекает

Теорема II. *Если в числителе $P(x)$ дроби (7) задан только коэффициент A_p при x^p, где $p \leqslant n$, максимум M ее модуля на всей вещественной оси не менее, чем $\left|\frac{A_p}{c_p}\right|$,*

т. е.

$$M \geqslant \left|\frac{A_p}{c_p}\right|, \tag{9}$$

где $c_p = \gamma_p + i\gamma'_p$ — коэффициент при x^p многочлена $s(x) + it(x)$, и не превышает этого значения, если $P(x) = As(x) + Bt(x)$, где

$$A = \frac{A_p\gamma_p}{|c_p|^2}, \quad B = \frac{A_p\gamma_p'}{|c_p|^2}.$$

Действительно, согласно предшествующей теореме, выражение (7) будет наименее уклоняющимся от нуля на вещественной оси, если $P(x) = As(x) + Bt(x)$, при условии, что постоянные A и B, удовлетворяя равенству

$$A\gamma_p + B\gamma_p' = A_p,$$

обращают в минимум $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Следовательно

$$\frac{A}{\gamma_p} = \frac{B}{\gamma_p'} = \frac{A_p}{\gamma_p^2 + \gamma_p'^2} = \frac{A^2 + B^2}{A_p},$$

откуда следует, что наименьшее уклонение дроби (7) равно

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \left|\frac{A_p}{c_p}\right|.$$

Следствие I. *Если $R(x)$ многочлен с вещественными коэффициентами, имеющий только комплексные корни $\alpha_k \pm i\beta_k$, то наименьшее уклонение от нуля выражения*

$$\frac{p_0 + x + p_1x^2 + \ldots}{\sqrt{R(x)}}$$

на всей оси равно

$$M = \frac{1}{|\sqrt{R(0)}| \left|\sum_1^n \frac{1}{\alpha_k - i\beta_k}\right|} \tag{10}$$

Достаточно применить предыдущую теорему при $A = p = 1$, заметив, что

$$c_1 = -\sum_1^n \frac{1}{\alpha_k - i\beta_k}.$$

Пример. Если $R(0)=1$ и все корни $R(x)$ по модулю не менее a, то

$$M \geqslant \frac{a}{n},$$

причем знак равенства имеет место лишь при условии, что все корни равны и имеют модуль равный a.

Следствие II. *Если алгебраическая дробь* (7) *не превышает* M *на всей вещественной оси, то модуль* $|A_p|$ *коэффициента при* x^p *числителя не превышает* $M|c_p|$, т. е.

$$|A_p| \leqslant M|c_p|, \tag{9 bis}$$

причем знак равенства имеет место, если $P(x)=As(x)+Bt(x)$, *где*

$$A=M\frac{\gamma_p}{|c_p|}, \quad B=M\frac{\gamma_p'}{|c_p|}.$$

Примечание. Неравенства (9) и (9 bis) остаются в силе и тогда, когда коэффициенты A_p могут быть комплексными.

Укажем еще несколько менее существенных следствий.

Следствие III. *Если на всей положительной полуоси дробь*

$$\left|\frac{p(y)}{\sqrt{q(y)}}\right| \leqslant M,$$

где $p(y)$ *и* $q(y)$ — *многочлены; причем* $q(y)$ *многочлен степени* $n>1$, *имеющий только отрицательные корни, то сумма модулей всех коэффициентов* b_p *числителя* $p(y)$ *удовлетворяет неравенству:*

$$\sum |b_p| \leqslant 2^{\frac{n}{2}-1} M\sqrt{q(1)} \tag{11}$$

и знак равенства имеет место, когда

$$q(y)=(1+y)^n, \quad p(y)=M\frac{(1+\sqrt{-y})^n+(1-\sqrt{-y})^n}{2}.$$

Действительно, полагая $y=x^2$, получим на всей вещественной оси

$$\left|\frac{p(x^2)}{\sqrt{q(x^2)}}\right| \leqslant M,$$

где $q(x^2)=R(x)=R(0)(s^2(x)+t^2(x))$ имеет лишь чисто мнимые корни $\pm i\beta_1, \pm i\beta_2, \ldots, \pm i\beta_n$. Поэтому все коэффициенты $b_k=A_{2k}$ при x^{2k} числителя достигают максимального модуля (на основании следствия II) одновременно, а именно, когда $p(x^2)=Ms(x)\sqrt{R(0)}$.

Таким образом

$$\sum|b_k| \leqslant M\sqrt{R(0)}\,|s(i)| = M\sqrt{R(1)}\,\frac{|s(i)|}{\sqrt{s^2(1)+t^2(1)}} =$$

$$= \frac{M}{2}\sqrt{q(1)}\,\frac{\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\beta_n}\right)+\left(1-\frac{1}{\beta_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\beta_n}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\beta_1^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\beta_n^2}\right)}}.$$

Но абсолютный максимум дроби

$$L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \frac{\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\beta_n}\right)+\left(1-\frac{1}{\beta_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\beta_n}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\beta_1^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\beta_n^2}\right)}} =$$

$$= \frac{(\beta_1+1)(\beta_2+1)\ldots(\beta_n+1)+(\beta_1-1)\ldots(\beta_n-1)}{\sqrt{(\beta_1^2+1)\ldots(\beta_2^2+1)}}$$

достигается при $\beta_k = 1$ ($k = 1, 2, \ldots, n > 1$), и следовательно равен $2^{\frac{n}{2}}$, откуда вытекает неравенство (11)

Следствие IV. *Наименьшее уклонение от нуля по всей вещественной оси алгебраической дроби*

$$\frac{x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}}{\sqrt{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]\ldots[(x-\alpha_n)^2+\beta_n^2]}}$$

равно

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k}, \qquad (\beta_k \geqslant 0).$$

Доказательство то же, что и следствия II. Аналогично следствию III доказывается

Следствие V. *Наименьшее уклонение на всей положительной полуоси дроби*

$$\frac{x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n}{\sqrt{(x+a_1)\ldots(x+a_{2n+1})}} \qquad (a_k > 0)$$

равно

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\sqrt{a_k}}.$$

Весьма важна следующая

Теорема III. *Если на всей вещественной оси многочлен $P(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$|P(x)| \leqslant M|s(x)+it(x)|, \tag{12}$$

где многочлен $s(x)+it(x)$ имеет все корни в нижней полуплоскости, то на всей вещественной оси соблюдаются также неравенства:

$$\left.\begin{array}{l} |P'(x)| \leqslant M|s'(x)+it'(x)| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |P^{(k)}(x)| \leqslant M|s^{(k)}(x)+it^{(k)}(x)| \end{array}\right\} \qquad (13)$$

при всех целых положительных k.

Действительно, положим

$$F(x)=\frac{P(x_0+x)}{\sqrt{s^2(x_0+x)+t^2(x_0+x)}},$$

где x_0 — произвольное постоянное вещественное число.

В таком случае, применяя к $F(x)$ следствие II, замечаем, что коэффициент A_k при x^k в числителе равен $\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$, между тем как коэффициент при x^k у многочлена $s(x_0+x)+it(x_0+x)$ равен $\frac{s^{(k)}(x_0)+it^{(k)}(x_0)}{k!}$. Следовательно, из неравенства (12), означающего, что при всех вещественных x

$$|F(x)| \leqslant M,$$

вытекает, благодаря (9 bis), что

$$\left|\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}\right| \leqslant \left|\frac{s^{(k)}(x_0)+it^{(k)}(x_0)}{k!}\right| M,$$

т. е.

$$|P^{(k)}(x)| \leqslant |s^{(k)}(x)+it^{(k)}(x)|\,M$$

на всей вещественной оси.

Знак равенства, очевидно, осуществляется, если

$$P(x)=A\,s(x)+B\,t(x),$$

где $A=M\cos\alpha$, $B=M\sin\alpha$ при любом постоянном угле α.

§ 2. Взвешенное наилучшее приближение $|x|$ при помощи многочленов на всей вещественной оси

Вернемся к следствию I предыдущего параграфа при дополнительном условии, что $R(x)=s^2(x)+t^2(x)$ есть функция *четная*, ($R(0)=1$); в таком случае все корни $R(x)$ попарно равны и противоположны, поэтому $s(x)$ будет функцией четной, а $t(x)$ является функцией нечетной. Следовательно, равенство (10) получит вид:

$$\frac{1}{M}=\left|\sum_1^n \frac{1}{\alpha_k+i\beta_k}\right|=\sum\frac{1}{\beta_k}+2\sum\frac{\beta_l}{\alpha_l^2+\beta_l^2}, \qquad (14)$$

где первая сумма распространена на чисто мнимые корни, а вторая сумма относится ко всем прочим корням, вещественная часть которых $\pm\alpha_l \gtrless 0$.

Обозначая через $\rho_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$ модули корней, а через θ_k $(0<\theta_k<\pi)$ — их аргументы, можем формулу (14) записать также в виде

$$\frac{1}{M} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\theta_k}{\rho_k}, \tag{14 bis}$$

помня, что каждому аргументу $\theta_k \gtrless \frac{\pi}{2}$ в последней сумме соответствуют два равных слагаемых.

Заметим, кроме того, что формулы (14) и (14 bis) остаются в силе и в том случае, когда $R(x) = s^2(x) + t^2(x)$ имеет вещественные корни $\pm\alpha_k$ (отличные от нуля), являющиеся двойными корнями $s(x) = t(x) = 0$; в самом деле, с одной стороны, соответствующие $\beta_k = 0$ члены в выражении $\frac{1}{M}$ равны нулю, и с другой стороны, для обращения в минимум максимума дроби $\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}$ на всей оси необходимо, чтобы числитель также делился на $1 - \frac{x^2}{\alpha_k^2}$, так что после сокращения эта дробь примет вид, в котором знаменатель уже не имеет вещественных корней, и формулы (14) и (14 bis) будут к ней применимы.

Таким образом, при предположении, что $R(x)$ неотрицательный четный многочлен степени $2n$, дробь

$$F(x) = \frac{x + p_1x^3 + \ldots}{\sqrt{R(x)}} \qquad [R(0) = 1]$$

не может по абсолютному значению оставаться менее, чем

$$M = \frac{1}{\sum\limits_{1}^{n} \frac{\sin\theta_k}{\rho_k}} \tag{14 bis}$$

на всей вещественной оси, но не превышает этого значения, если

$$F(x) = \frac{Mt(x)}{\sqrt{R(x)}} = \frac{Mt(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}}. \tag{15}$$

Функция (15) является, очевидно, полиномом-осциллятором на всей положительной полуоси для системы функций Декарта

$$\frac{x}{\sqrt{R(x)}}, \quad \frac{x^3}{\sqrt{R(x)}}, \quad \ldots, \quad \frac{x^{2m+1}}{\sqrt{R(x)}} \qquad \left(m = \left[\frac{n-1}{2}\right]\right),$$

так как на всей оси она достигает своего экстремума n или $n+1$ раз, в зависимости от тог четно или нечетно число n, и поэтому на положительной полуоси достигает экстремума в $\left[\frac{n+1}{2}\right]=m+1$ точках. Следовательно, благодаря тому, что система функций $\frac{x^k}{\sqrt{R(x)}}$ ($k=1, 2, \ldots, n$) является также системой D на положительной полуоси, на основании следствия I (§ 13, гл. I) получается

Лемма I. *Функция*

$$\frac{|x|+p_1x^2+\ldots+p_mx^{2m}}{\sqrt{R(x)}}$$

может оставаться на всей вещественной оси меньше по абсолютному значению, чем $M=\frac{1}{\sum\limits_1^m \frac{\sin\theta_k}{\rho_k}}$, напротив функция

$$\frac{|x|+q_2x^4+\ldots+q_mx^{2m}}{\sqrt{R(x)}}$$

должна превысить значение M.

Определение. *Будем называть наилучшим взвешенным приближением функции* $f(x)$ *посредством многочленов степени* n *на всей вещественной оси при весе* $\frac{1}{\varphi(x)}>0$ *наименьшее значение максимума взвешенной погрешности*

$$\left|\frac{f(x)-P_n(x)}{\varphi(x)}\right|,$$

а многочлен $P_n(x)$, *осуществляющий эту наименьшую взвешенную погрешность, многочленом взвешенного наилучшего приближения на всей оси.* Обозначать это взвешенное наилучшее приближение будем через $E^{(n)}_{\varphi(x)}[f(x)]$. Таким образом, первая часть леммы I приводит к неравенству:

$$E^{(n)}_{\sqrt{R(x)}}(|x|)<M=\frac{1}{\sum\limits_1^n \frac{\sin\theta_k}{\rho_k}}. \tag{16}$$

Заметим, что если порядок возрастания $\varphi(x)$ на бесконечности не быстрее, чем x^n, то дальнейшее повышение степени приближенного многочлена не может улучшить взвешенного приближения. Поэтому

$$E^{(N)}_{\varphi(x)}=E^{(n)}_{\varphi(x)} \qquad \text{при} \quad N>n.$$

Вообще, будем писать для краткости

$$\lim_{n=\infty} E^{(n)}_{\varphi(x)}=E^{(\infty)}_{\varphi(x)}=E_{\varphi(x)}.$$

Применяя метод, который был указан в гл. I, мы получим и нижнюю границу для $E^{(n)}_{\sqrt{R(x)}}(|x|)$; однако для этого мы введем допущение, что $R'(x)$ также не отрицательно при $x>0$.

Лемма II. *Если на всей вещественной оси*

$$\left|\frac{|x|+p_1x^2+\ldots+p_mx^{2m}}{\sqrt{R(x)}}\right|\leqslant L, \tag{17}$$

где $R(x)$ — *четный многочлен степени* $2n$ $(n\geqslant 2m)$, *не убывающий при* $x\geqslant 0$, то

$$L>\frac{M}{2(1+\sqrt{2})}, \qquad \left(M=\frac{1}{\sum\frac{\sin\theta_k}{\rho_k}}\right).$$

Действительно, неравенство (17) равнозначно

$$\left|\frac{\left|\frac{x}{1+\mu}\right|+p_1\left(\frac{x}{1+\mu}\right)^2+\ldots+p_m\left(\frac{x}{1+\mu}\right)^{2m}}{R\left(\frac{x}{1+\mu}\right)}\right|\leqslant L$$

при всяком $\mu>0$. Но так как $R(x)\geqslant R\left(\frac{x}{1+\mu}\right)$, то тем более

$$\left|\frac{\left|\frac{x}{1+\mu}\right|+p_1\left(\frac{x}{1+\mu}\right)^2+\ldots+p_m\left(\frac{x}{1+\mu}\right)^{2m}}{R(x)}\right|\leqslant L.$$

Поэтому

$$\left|\frac{|x|(1+\mu)+p_1x^2+\ldots}{R(x)}\right|\leqslant L(1+\mu)^2,$$

и, вычитая из этого неравенства неравенство (17), находим, по разделении на μ, неравенство вида:

$$\left|\frac{|x|+q_2x^4+\ldots+q_mx^{2m}}{R(x)}\right|\leqslant L\,\frac{(1+\mu)^2+1}{\mu}.$$

Следовательно, полагая $\mu=\sqrt{2}$ и принимая во внимание вторую часть леммы I, заключаем, что

$$L(2\sqrt{2}+2)>M.$$

Следствие I. *Сохраняя предыдущие условия и обозначения*

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4\sum\limits_1^n\frac{\sin\theta_k}{\rho_k}}<E^{(n)}_{\sqrt{R(x)}}(|x|)<\frac{1}{\sum\limits_1^n\frac{\sin\theta_k}{\rho_k}}. \tag{18}$$

Правая часть неравенства (18) есть лишь повторение (16), а левая часть его вытекает из леммы II, если учесть неравенство (68_1).

Заметим, что в случае, когда все корни $R(x)$ чисто *мнимые*, неравенство (18) приобретает еще более простой вид:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4\sum_{1}^{n}\frac{1}{\beta_k}}=\frac{\sqrt{2}-1}{4\sum_{1}^{n}\frac{1}{\rho_k}}<E_{\sqrt{R(x)}}(|x|)<\frac{1}{\sum_{1}^{n}\frac{1}{\beta_k}}=\frac{1}{\sum_{1}^{n}\frac{1}{\rho_k}}. \quad (18\text{ bis})$$

Неравенству (18) можно придать аналогичную форму (немного ухудшив его) и в значительно более общем случае, когда все коэффициенты $R(x)$ *не отрицательны.*

Лемма III. *Если четный многочлен* $R(x)$ *имеет неотрицательные коэффициенты*, то

$$\sum_{1}^{n}\frac{\sin\theta_k}{\rho_k}>\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\frac{1}{\rho_k}. \quad (19)$$

В самом деле, положим

$$R_1(x)=R^2(ix),$$

где $R^2(x)$, представляя квадрат многочлена $R(x)$, является, как и $R(x)$, многочленом четным с неотрицательными коэффициентами. В таком случае $R_1(x)$ имеет вещественные коэффициенты, равные по абсолютному значению соответствующим коэффициентам $R^2(x)$. Следует заметить, кроме того, что $R^2(x)$ будет иметь двойные корни $\pm\rho_k e^{\pm i\theta_k}$, которым будут соответствовать повернутые на угол $\frac{\pi}{2}$ двойные корни $R_1(x)$, причем, в частности, каждому чисто мнимому корню $R(x)$ соответствует двойной вещественный корень $R_1(x)$. Поэтому, принимая во внимание, что при всех вещественных значениях

$$R^2(x)\geqslant R_1(x)\geqslant 0,$$

заключаем, что значение M в формуле (14 bis), соответствующее $R_1(x)$, не может быть менее того, которое соответствует $R^2(x)$, т. е.

$$\sum_{1}^{n}\frac{\sin\theta_k}{\rho_k}\geqslant\sum_{1}^{n}\frac{\cos\theta_k}{\rho_k} \quad (20)$$

причем знак равенства будет иметь место, если $R_1(x)=R^2(x)$, т. е. при условии, что многочлен $R(x)$ содержит лишь члены x^{4p}, где показатель при x делится на 4.

Таким образом, благодаря очевидному неравенству

$$\sum\frac{\sin\theta_k+\cos\theta_k}{\rho_k}\geqslant\sum\frac{1}{\rho_k}$$

$\left(\text{где знак равенства имеет место лишь при } \theta_k = \frac{\pi}{2}\right)$, получим из (20), что

$$2\sum_1^n \frac{\sin\theta_k}{\rho_k} > \sum_1^n \frac{1}{\rho_k}. \tag{19}$$

Отсюда вытекает

Следствие II. *Если $R(x)$ четный многочлен с неотрицательными коэффициентами, то*

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4\sum\limits_1^n \frac{1}{\rho_k}} < E_{\sqrt{R(x)}}(|x|) < \frac{2}{\sum\limits_1^n \frac{1}{\rho_k}}. \tag{21}$$

Примеры. 1. Пусть $R(x) = \left(1 + \frac{2x^2}{pn}\right)^n$. В таком случае неравенство (18 bis) дает $(p > 0)$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4}\sqrt{\frac{p}{2n}} < E^{(n)}_{\sqrt{R(x)}}(|x|) < \sqrt{\frac{p}{2n}}.$$

Замечая, что при всех значениях x

$$\left(1 + \frac{2x^2}{pn}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant e^{\frac{x^2}{p}},$$

заключаем, что, каково бы ни было $\varphi(x) \geqslant e^{\frac{x^2}{p}}$

$$E^{(n)}_{\varphi(x)}(|x|) < \sqrt{\frac{p}{2n}},$$

поэтому

$$E_{\varphi(x)}(|x|) = 0.$$

2. Пусть

$$R(x) = (1+4x^2)\left(1+\frac{4x^2}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right);$$

тогда

$$E'^{(n)}_{\sqrt{R(x)}}(|x|) < \frac{1}{\sum\limits_1^n \frac{1}{k-\frac{1}{2}}} < \frac{1}{\log(2n+1)}.$$

Поэтому, замечая, что

$$e^{\pi|x|} \geqslant \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{2} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right) \geqslant R(x),$$

имеем

$$E^{(n)}_{e^{\frac{\pi}{2}|x|}}(|x|) < \frac{1}{\lg(2n+1)}$$

и, вообще, при всяком $\alpha > 0$

$$E^{(n)}_{e^{\alpha|x|}}(|x|) < \frac{\pi}{2\alpha\lg(2n+1)}$$

и стремится к нулю при $n \to \infty$.

§ 3. Взвешенное приближение непрерывных функций на всей вещественной оси

Лемма I. *Если вещественная функция* $\varphi(x)$ *переменной* x $(-\infty < x < \infty)$ *удовлетворяет условию, что*

$$\varphi(\pm x) \geqslant R_{2n}(x) \quad (\varphi(0) = R_{2n}(0) = 1), \tag{22}$$

где $R_{2n}(x)$ — *четные неотрицательные многочлены степени* $2n$, *корни которых* $\rho_k^{(n)} e^{i\theta_k^{(n)}}$ *обладают свойством, что если*

$$\frac{1}{M_n} = \sum_1^n \frac{\sin\theta_k^{(n)}}{\rho_k^{(n)}} \to \infty,$$

то $E_{\varphi(x)}(|x|) = 0$.

Действительно, вследствие (16) и (22)

$$E^{(2n)}_{\varphi(x)}(|x|) \leqslant E^{(2n)}_{R_{2n}(x)}(|x|) < \frac{1}{2} M_n. \tag{23}$$

Благодаря фундаментальной роли, которую играет $|x|$ при аналитичном представлении произвольной ломаной линии, отсюда вытекает следующая общая

Теорема. *Если четная функция* $\varphi(x)$ *не убывает при возрастании* $|x|$ *и удовлетворяет условию* (22) *предыдущей леммы, то*

$$E_{\varphi(x)}[F(x)] = 0, \tag{24}$$

какова бы ни была непрерывная функция $F(x)$, *обладающая свойством, что*

$$\lim_{x=\pm\infty} \frac{F(x)}{\varphi(x)} = 0. \tag{25}$$

Действительно, как бы мало ни было заданное число $\varepsilon > 0$, можно выбрать $p > 0$ так, чтобы

$$|F(x)| < \frac{\varepsilon\varphi(x)}{4} \tag{26}$$

при $|x| \geqslant p$.

После этого в промежутке $(-p, +p)$ в кривую $y = F(x)$ впишем ломаную линию, которую влево и вправо до бесконечности продолжим соответственно горизонтальными прямыми $y = F(\pm p)$. Обозначая через $y = F_1(x)$ уравнение всей этой ломаной линии, видим, что, если соседние вершины ее, лежащие между $-p$ и p, достаточно близки, то в этом промежутке будем иметь

$$|F(x) - F_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\varphi(x), \tag{27}$$

причем неравенство (27) будет соблюдено вследствие (26) также и для $|x| > p$, потому что

$$|F_1(x)| = |F(p)| < \frac{\varepsilon}{4}\varphi(p) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\varphi(x)$$

при $x > p$

и

$$|F_1(x)| = |F(-p)| < \frac{\varepsilon}{4}\varphi(-p) < \frac{\varepsilon}{4}\varphi(x),$$

при $x < -p$.

Но функция $F_1(x)$ может быть представлена в виде

$$F_1(x) = \sum A_h|x - a_h| + Bx + C,$$

где $-p \leqslant a_h \leqslant p$ — абсциссы вершин нашей ломаной линии, A_h, B, C — численные коэффициенты. Пусть

$$\sum |A_h| = N$$

и положим $\beta = \frac{\varepsilon}{4N\varphi(p)}$. Вследствие леммы I можно при любом a_h построить многочлен $P(x)$, удовлетворяющий неравенству

$$\big|\, |x - a_h| - P(x - a_h) \,\big| < \beta\varphi\left(\frac{x - a_h}{2}\right),$$

и так как при $|x| < p$, $\left|\frac{x - a_h}{2}\right| < p$, а при $|x| \geqslant p$, $\left|\frac{x - a_h}{2}\right| \leqslant |x|$, то $\varphi\left(\frac{x - a_h}{2}\right) < \varphi(x) + \varphi(p)$.

Следовательно

$$|F_1(x) - \sum A_h P(x - a_h) - Bx - C| < N\beta\,[\varphi(x) + \varphi(p)] =$$
$$= \frac{\varepsilon}{4}\left[\frac{\varphi(x)}{\varphi(p)} + 1\right] < \frac{\varepsilon}{2}\varphi(x);$$

складывая последнее неравенство с (27), находим наконец, что существует многочлен $S(x)$, для которого

$$|F(x) - S(x)| < \varepsilon\varphi(x)$$

на всей вещественной оси.

Следствие I. *Если $\varphi(x) > 0$ есть четная целая трансцендентная функция с неотрицательными коэффициентами, корни которой $\rho_k e^{i\theta k}$ удовлетворяют условию $\sum \frac{1}{\rho_k} = \infty$ (т. е. $\varphi(x)$ не ниже первого рода), то*

$$E_{\varphi(x)}[F(x)] = 0 \tag{24}$$

для всякой функции $F(x)$, обладающей свойством, что

$$\lim_{x=\pm\infty} \frac{F(x)}{\varphi(x)} = 0. \tag{25}$$

Действительно, если $\varphi(x) = \sum_0^\infty c_k x^{2k}$ $(c_0 > 0,\ c_k \geqslant 0$, то, полагая

$$R_{2n}(x) = \sum_0^n c_k x^{2k},$$

имеем $\varphi(x) \geqslant R_{2n}(x)$, где $R_{2n}(x)$ удовлетворяет условию леммы I, так как при n достаточно большом в числе его корней будут корни, сколь угодно близкие к корням $\varphi(x)$, лежащим внутри круга данного произвольно большого радиуса.

Следствие II. *Если целая функция*

$$\psi(y) = \sum_0^\infty c_k y^k \qquad (c_0 > 0, \quad c_k \geqslant 0)$$

имеет такие корни $r_k e^{i\varphi k}$, что $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{r_k}} = \infty$, *то, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, для всякой непрерывной при $y \geqslant 0$ функции $F_1(y)$, обладающей свойством, что*

$$\lim_{y=\infty} \frac{F_1(y)}{\psi(y)} = 0,$$

можно построить многочлен $S_n(y)$ достаточно высокой степени, чтобы

$$\frac{F_1(y) - S_n(y)}{\psi(y)} < \varepsilon$$

на всей положительной полуоси.

Для доказательства достаточно сделать замену переменной $y = x^2$ и положить $\varphi(x) = \psi(x^2)$ в предшествующем следствии I.

Лемма II. *Если* $\varphi(x)=e^{p(x)}$ (где $p(x)\geqslant 0$) *есть четная целая функция нулевого рода* $\Bigl($*достаточно даже, чтобы* $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{|\beta_k|+1}{\alpha_k^2+\beta_k^2}$ *было конечной*$\Bigr)$, *то*

$$I=\int\limits_{1}^{\infty}\frac{p(x)}{x^2}\,dx$$

имеет смысл.

Действительно, функцию $\varphi(x)$ можно представить в виде

$$\varphi(x)=\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{b_k^2}\right),$$

полагая $b_k=\beta_k\mp i\alpha_k$ ($\beta_k>0$). При этом, если $\alpha_k>0$, то будет также и сопряженное $\bar b_k$, у которого мнимая часть $-\alpha_k<0$. Соответствующую пару множителей можно, во избежание мнимых чисел, перемножить

$$\left(1+\frac{x^2}{b_k^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\bar b_k^2}\right)=1+\frac{2x^2(\beta_k^2-\alpha_k^2)+x^4}{(\beta_k^2+\alpha_k^2)^2}.$$

Таким образом

$$p'(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+b_k^2},$$

откуда

$$\Phi(x)=\int\limits_{0}^{x}\frac{p'(x)\,dx}{x}=2\sum_{1}^{\infty}\int\limits_{0}^{x}\frac{dx}{x^2+b_k^2}=\sum_{1}^{\infty}\frac{2}{b_k}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b_k}=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{ib_k}\lg\frac{b_k+ix}{b_k-ix}.$$

В случае b_k комплексного, соединение сопряженных членов в нашей сумме даст

$$\frac{1}{ib_k}\lg\frac{b_k+ix}{b_k-ix}+\frac{1}{i\bar b_k}\lg\frac{\bar b_k+ix}{\bar b_k-ix}=\frac{2\beta_k}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_k^2-x^2}+$$
$$+\frac{\alpha_k}{\beta_k^2+\alpha_k^2}\lg\frac{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2}{(x+\alpha_k)^2+\beta_k^2},$$

где при изменении x от 0 до ∞ arc tg растет от 0 до π, а lg имеет все время знак, противоположный α_k, так что второй член всегда отрицателен. Следовательно, при любых значениях b_k и $x>0$,

$$\Phi(x)\leqslant\sum_{1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_k^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_k^2-x^2}\leqslant\sum_{1}^{\infty}\frac{\pi\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_k^2}\leqslant\pi\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|b_k|}.$$

Но, интегрируя по частям, имеем:

$$p(1)+\int_1^N \frac{p'(x)\,dx}{x}=\frac{p(N)}{N}+\int_1^N \frac{p(x)\,dx}{x^2}; \qquad (N>1)$$

поэтому, замечая, что оба слагаемые во второй части положительны, заключаем, что

$$\int_1^N \frac{p(x)\,dx}{x^2} \leqslant p(1)+\int_1^N \frac{p'(x)\,dx}{x}.$$

Следовательно

$$\int_1^\infty \frac{p(x)\,dx}{x^2} \leqslant \pi \sum_1^\infty \frac{\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_k^2}+p(1)-\int_0^1 \frac{p'(x)\,dx}{x}$$

имеет смысл для функций нулевого рода $\left(\text{а также и для функций первого рода, для которых } \sum \frac{\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_k^2} \text{ сходится}\right)$.

Следствие III. *Если $\varphi(x)>0$ есть четная целая функция с неотрицательными коэффициентами, причем*

$$\int_1^\infty \frac{\lg \varphi(x)\,dx}{x^2}=\infty,$$

то $E_{\varphi(x)}[f(x)]=0$ для всякой непрерывной функции

$$\left(\lim_{x=\pm\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}=0\right).$$

Это вытекает благодаря только что доказанной лемме из следствия I. Если применить эту лемму к самой теореме, можно было бы получить еще более общие результаты.

Полученным результатам можно придать несколько иную форму, если заметить, что, какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$, для которой $f(\pm\infty)=0$, положив

$$F(x)=f(x)\varphi(x),$$

мы получим функцию $F(x)$, удовлетворяющую условию (25).

Таким образом имеем, например:

Следствие IV. *Если дана неубывающая при возрастании $|x|$ функция $\varphi_1(x)\geqslant\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — целая четная функция не ниже первого ряда с неотрицательными коэффициентами ($\varphi(0)>0$), то, какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$, стремящаяся к нулю* *на бесконечности, возможно при любом заданном* $\varepsilon > 0$ *построить такой многочлен* $S(x)$, *что*

$$\left| f(x) - \frac{S(x)}{\varphi_1(x)} \right| < \varepsilon$$

на всей действительной оси.

Например, можно взять $\varphi_1(x) = e^{|x|}$ или $\varphi_1(x) = e^{\frac{|x|}{\log|x|}}$.

§ 4. Наилучшее приближение непрерывных функций на всей действительной оси при помощи рациональных дробей

Предположим, что задан некоторый многочлен $Q(x)$ с действительными коэффициентами степени m, не имеющий вещественных корней (таким образом m число *четное*). Совокупность функций

$$\frac{x^k}{Q(x)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

образует систему T на всей действительной оси; мы займемся здесь проблемой наилучшего приближения посредством полиномов этой системы произвольной непрерывной функции $F(x)$, обладающей свойством, что $F(\pm\infty) = A$, где A — конечное число (или нуль). Существенную роль здесь будут играть полиномы этой системы, наименее уклоняющиеся от нуля на всей оси, которые мы построили в § 1.

В частности, начнем с решения следующей задачи:

Определить рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *с данным знаменателем* $Q(x)$, *наименее уклоняющуюся на всей оси от данной дроби с вещественными коэффициентами*

$$F(x) = \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}, \tag{28}$$

(*полагая, что корни трехчлена* $x^2 + px + q$ *комплексны и отличны от корней* $Q(x)$).

С этой целью положим

$$(x^2 + px + q)\, Q(x) = s^2(x) + t^2(x), \tag{29}$$

где $s(x) + it(x)$ будет данным многочленом степени $n = \frac{m}{2} + 1$, не имеющим корней в верхней полуплоскости; определим многочлен $P(x)$ и численные коэффициенты L и λ из тождества

$$(Bx + C)\, Q(x) - P(x)\,(x^2 + px + q) =$$
$$= \frac{L}{2}\left\{e^{i\lambda}[s(x) + it(x)]^2 + e^{-i\lambda}[s(x) - it(x)]^2\right\}. \tag{30}$$

Для этого достаточно подставить последовательно на место x в (30) корни z_1 и z_2 многочлена x^2+px+q, лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскости, что даст нам:

$$\left.\begin{aligned}(Bz_1+C)\,Q(z_1)&=\frac{L}{2}\,e^{i\lambda}\,[s(z_1)+it(z_1)]^2,\\(Bz_2+C)\,Q(z_2)&=\frac{L}{2}\,e^{-i\lambda}\,[s(z_2)-it(z_2)]^2.\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

Определяя отсюда L и λ, видим, что

$$(Bx+C)\,Q(x)-\frac{L}{2}\left\{e^{i\lambda}\,[s(x)+it(x)]^2+e^{-i\lambda}\,[s(x)-it(x)]^2\right\}$$

разделится без остатка на x^2+px+q, и, произведя это деление, мы получим $P(x)$. В таком случае $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дает решение поставленной задачи, так как разность

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}-\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{L}{2}\,\frac{e^{i\lambda}\,[s(x)+it(x)]^2-e^{-i\lambda}\,[s(x)-it(x)]^2}{s^2(x)+t^2(x)}=$$
$$=L\cos(2\Phi+\lambda)\qquad(32)$$

достигает своего экстремума $\pm L$ с противоположными знаками в $2n=m+2$ точках (считая $\pm\infty$ за одну точку).

Исключая λ из уравнений (31), получаем значение наилучшего приближения

$$L=2\,\frac{\sqrt{(Bz_1+C)(Bz_2+C)\,Q(z_1)\,Q(z_2)}}{[s(z_1)+it(z_1)]\,[s(z_2)-it(z_2)]}.\qquad(33)$$

Поэтому, представляя $Q(x)$ в виде

$$Q(x)=[\sigma(x)+i\tau(x)]\,[\sigma(x)-i\tau(x)],$$

где корни $\sigma(x)+i\tau(x)$ лежат в нижней полуполости, так что

$$\begin{aligned}s(x)+it(x)&=(x-z_2)\,[\sigma(x)+i\tau(x)]\\s(x)-it(x)&=(x-z_1)\,[\sigma(x)-i\tau(x)],\end{aligned}$$

преобразуем (33) в

$$L=2\left|\frac{Bz_1+C}{(z_1-z_2)^2}\right|\sqrt{\frac{[\sigma(z_1)-i\tau(z_1)]\,[\sigma(z_2)+i\tau(z_2)]}{[\sigma(z_1)+i\tau(z_1)]\,[\sigma(z_2)-i\tau(z_2)]}}=\frac{H}{\rho},\qquad(33\text{ bis})$$

полагая

$$H=2\left|\frac{Bz_1+C}{(z_1-z_2)^2}\right|=2\,\frac{\sqrt{C^2-BCp+B^2q}}{4q-p^2},\qquad(34)$$

$$\rho=\sqrt{\frac{[\sigma(z_1)+i\tau(z_1)]\,[\sigma(z_2)-i\tau(z_2)]}{[\sigma(z_1)-i\tau(z_1)]\,[\sigma(z_2)+i\tau(z_2)]}}=\left|\frac{\sigma(z_1)+i\tau(z_1)}{\sigma(z_2)+i\tau(z_2)}\right|.\qquad(35)$$

Значению ρ можно также придать простую геометрическую форму

$$\rho=\prod_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{\quad}{b_k'}, \tag{35 bis}$$

где $b_1', b_2', \ldots, b'_{\frac{m}{2}}$ — расстояния от корня z_1 уравнения $x^2+px+q=0$, лежащего в верхней полуплоскости, до каждого из корней $Q(x)$, лежащего в той же полуплоскости, а $b_1, b_2, \ldots, b_{\frac{m}{2}}$ — расстояния от z_1 до прочих корней $Q(x)$.

Заметим, что результат не изменился бы, если бы мы прибавили к $F(x)$ какую-нибудь постоянную A и, кроме того, значение L является инвариантом при любой линейной подстановке $x=\frac{ay+b}{cy+d}$ с вещественными коэффициентами.

Число H представляет, очевидно, не что иное, как наилучшее приближение $F(x)$ в случае, когда $Q(x)$ нулевой степени, т. е. наилучшее приближение $F(x)$ при помощи постоянной; поэтому, обозначая через M и N, соответственно, максимум и минимум $F(x)$ на действительной оси, имеем

$$H=\frac{M-N}{2}. \tag{34 bis}$$

Таким образом, умножая $F(x)$ на соответствующий *нормирующий множитель* $\left(\frac{1}{H}\right)$, не зависящий от $Q(x)$, находим для наилучшего приближения L нормированной функции $F(x)$ значение

$$L=\frac{1}{\rho}. \tag{36}$$

Следствие I. *Наилучшее приближение нормированной функции* $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ *при помощи дробей* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *с данными знаменателями* $Q(x)=s^2(x)+t^2(x)$ *не изменяется, когда корень* z_1 *трехчлена* x^2+px+q *перемещается по лемнискате*

$$\left|\frac{\sigma(z)+i\tau(z)}{\sigma(z)-i\tau(z)}\right|=C.$$

Следствие II. *Наилучшее приближение* L_n *функции* (28) *при помощи дроби* $\frac{P(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^n}$ $(n\geqslant 0)$ *с данным знаменателем равно*

$$L_n=H\left(\frac{b'}{b}\right)^n, \tag{37}$$

где b' *и* b, *соответственно, — наименьшее и наибольшее из расстояний от корня уравнения* $x^2+px+q=0$ *до корней уравнения* $x^2+p_1x+q_1=0$.

Величина L_n для данной функции (28) не меняется, если $\frac{b'}{b}$ *постоянно*, т. е., если оба сопряженные корня уравнения x^2+p_1x+ $+q_1=0$ перемещаются произвольным образом на симметричных относительно действительной оси окружностях, определяемых указанным геометрическим свойством.

Следствие III. *Наилучшее приближение L нормированной функции $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ при помощи рациональной дроби $\frac{P(x)}{\sigma^2(x)+\tau^2(x)}$, где многочлен $\sigma^2(x)+\tau^2(x)$ степени $2n$ подчинен единственному условию, что расстояние его корней до корня $x^2+px+q=0$ не меньше $R>0$, равно*

$$L=\left(\frac{R}{R+\delta}\right)^n, \tag{38}$$

полагая $\delta=\sqrt{p^2-4q}$.

В самом деле, согласно формулам (35 bis) и (36), значение L будет наименьшим, если каждое из отношений $\frac{b_k'}{b_k}$ будет наименьшим; но, замечая, что b_k' и b_k являются сторонами треугольника, у которого третья сторона равна δ, видим, что $\frac{b_k'}{b_k}\geqslant\frac{b_k'}{b_k'+\delta}\geqslant\frac{R}{R+\delta}$, так как по условию $b_k'\geqslant R$.

Аналогичным образом, если корни многочлена $Q(x)$ степени n не выходят за пределы соответствующих сопряженных окружностей, то при увеличении n наилучшее приближение дроби убывает не медленнее, чем в некоторой геометрической прогрессии. Очевидно поэтому, что, если при возрастании n корни $Q(x)$ имеют по крайней мере *одну предельную точку на конечном расстоянии, не находящуюся на вещественной оси, то наилучшее приближение всякой данной дроби при помощи рациональных дробей $\frac{P(x)}{Q(x)}$ стремится к нулю, убывая не медленнее, чем в геометрической прогрессии.*

Мы можем доказать теперь такую общую предварительную теорему:

Теорема I. *Для того чтобы наилучшее приближение всякой данной дроби $\frac{c_0x+c_1}{(x-a)^2+b^2}$ при помощи рациональных функций $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ с данными знаменателями $Q_n(x)$ стремилось к нулю с возрастанием n, необходимо и достаточно, чтобы сумма*

$$\sum\frac{\sin\theta_k}{r_k}+\sum r_l'\sin\theta_l', \qquad (r_k\geqslant 1,\ r_l'<1),$$

в которой первая часть распространена на все корни

$$r_ke^{\pm i\theta_k}=\alpha_k+i\beta_k$$

многочлена $Q(x)$, не меньшие единицы по модулю, а вторая часть распространена на все корни $r_l' e^{\pm i\theta_l'} = \alpha_l' \pm i\beta_l'$ меньше единицы по модулю, бесконечно возрастала вместе с n.

Действительно, согласно (33) и (35 bis), квадрат наилучшего приближения L^2 отличается данным независимо от $Q(x)$ множителем от произведения

$$\frac{1}{\rho^2} = \prod \left(\frac{1 - \dfrac{2b\beta_k}{(a-\alpha_k)^2 + b^2 + \beta_k^2}}{1 + \dfrac{2b\beta_k}{(a-\alpha_k)^2 + b^2 + \beta_k^2}} \right) \left(\frac{1 - \dfrac{2b\beta_l'}{(a-\alpha_l')^2 + b^2 + \beta_l'^2}}{1 + \dfrac{2b\beta_l'}{(a-\alpha_l')^2 + b^2 + \beta_l'^2}} \right); \quad (39)$$

и так как $\dfrac{1}{1+z} > 1 - z$ при $1 \geqslant z > 0$, имеем

$$\prod \frac{1}{\left(1 + \dfrac{2b\beta_k}{(a-\alpha_k)^2 + b^2 + \beta_k^2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \dfrac{2b\beta_l'}{(a-\alpha_l')^2 + b^2 + \beta_l'^2}\right)} >$$

$$> \frac{1}{\rho} > \prod \left(1 - \frac{2b\beta_k}{(a-\alpha_k)^2 + b^2 + \beta_k^2}\right)\left(1 - \frac{2b\beta_l'}{(a-\alpha_l')^2 + b^2 + \beta_l'^2}\right). \quad (40)$$

Замечая, что

$$\frac{2b\beta_k}{(a-\alpha_k)^2 + b^2 + \beta_k^2} \geqslant \frac{2br_k \sin\theta_k}{(|a| + r_k)^2 + b^2},$$

$$\frac{2b\beta_l'}{(a-\alpha_l')^2 + b^2 + \beta_l'^2} \geqslant \frac{2br_l' \sin\theta_l'}{(|a| + r_l')^2 + b^2},$$

заключаем, что

$$\prod \left(1 + \frac{2b\beta_k}{(a-\alpha_k)^2 + b^2 + \beta_k^2}\right)\left(1 + \frac{2b\beta_l'}{(a-\alpha_l')^2 + b^2 + \beta_l'^2}\right) >$$

$$> 2b \sum \left[\frac{r_k \sin\theta_k}{(|a| + r_k)^2 + b^2} + \frac{r_l' \sin\theta_l'}{(|a| + r_l)^2 + b^2} \right] =$$

$$= 2b \sum \left[\frac{\sin\theta_k}{r_k} \left(\frac{1}{\left(\dfrac{|a|}{r_k} + 1\right)^2 + \dfrac{b^2}{r_k^2}} \right) + \frac{r_l' \sin\theta_l'}{(|a| + r_l')^2 + b^2} \right] >$$

$$> \frac{2b}{(|a|+1)^2 + b^2} \left[\sum \frac{\sin\theta_k}{r_k} + \sum r_l' \sin\theta_l' \right].$$

Отсюда вытекает, что, если

$$A = \sum \frac{\sin\theta_k}{r_k} + \sum r_l' \sin\theta_l'$$

бесконечно растет, то

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{A} \frac{(|a|+1)^2 + b^2}{2b} \quad (41)$$

стремится к нулю.

Предположим теперь, что A остается ограниченным. Полагая

$$= \sqrt{(a-\alpha_k)^2+(b-\beta_k)^2}, \quad \delta_l' = \sqrt{(a-\alpha_l')^2+(b-\beta_l')^2},$$

имеем

$$\frac{2b\beta_k}{(a-\alpha_k)^2+b^2+\beta_k^2} = \frac{2b\beta_k}{\delta_k^2+2b\beta_k} \leqslant \frac{2b(b+\delta_k)}{\delta_k^2+2b(b+\delta_k)},$$

$$\frac{2b\beta_l'}{(a-\alpha_l')^2+b^2+\beta_l'^2} \leqslant \frac{2b(b+\delta_l')}{\delta_l'^2+2b(b+\delta_l')}.$$

Исключая из рассмотрения выше отмеченный тривиальный случай, когда корни $Q(x)$ при бесконечном возрастании степени n имеют предельную конечную точку, не лежащую на вещественной оси (так как тогда $A \to \infty$), обозначим через δ нижнюю границу δ_k и δ_l'.

В таком случае, легко видеть, что

$$\frac{2b(b+\delta_k)}{\delta_k^2+2b(b+\delta_k)} \leqslant \frac{2b(b+\delta)}{\delta^2+2b(b+\delta)} = \mu < 1,$$

$$\frac{2b(b+\delta_l')}{\delta_l'^2+2b(b+\delta_l')} \leqslant \mu.$$

С другой стороны, при помощи обычного метода дифференцирования убеждаемся, что произведение

$$T = (1-x_1)\ldots(1-x_n),$$

где $0 \leqslant x_i \leqslant \mu$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, если $\sum_{i=1}^{n} x_i = S < n$ дана, достигает своего минимума, когда те $h \leqslant n$ из значений x_i, которые не совпадают с крайними дозволенными значениями 0 и μ, равны одному и тому же значению $x_0 < \mu$. В таком случае

$$T = (1-\mu)^m (1-x_0)^h,$$

где

$$m\mu + hx_0 = S,$$

поэтому

$$T = (1-\mu)^{\frac{S-hx_0}{\mu}}(1-x_0)^h = (1-\mu)^{\frac{S}{\mu}}\left[\frac{1-x_0}{(1-\mu)^{\frac{x_0}{\mu}}}\right]^h \geqslant (1-\mu)^{\frac{S}{\mu}},$$

так как

$$\frac{1}{x_0}\lg(1-x_0) \geqslant \frac{1}{\mu}\lg(1-\mu).$$

Следовательно,

$$\prod\left(1-\frac{2b\beta_k}{(a-\alpha_k)^2+b^2+\beta_k^2}\right)\left(1-\frac{2b\beta_l'}{(a-\alpha_l')^2+b^2+\beta_l'^2}\right) \geqslant (1-\mu)^{\frac{S}{\mu}},$$

где

$$S = \sum\frac{2b\beta_k}{(a-\alpha_k)^2+b^2+\beta_k^2} + \sum\frac{2b\beta_l'}{(a-\alpha_l')^2+b^2+\beta_l'^2} <$$

$$< 2b\sum\frac{r_k\sin\theta_k}{(r_k-|a|)^2+b^2}+2\sum\frac{b\,r_l'\sin\theta_l'}{(r_l'-|a|)^2+b^2}<$$

$$<2b\sum\frac{\sin\theta_k}{r_k}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{|a|}{r_k}\right)^2+\frac{b^2}{r_k^2}}\right)+$$

$$+\frac{2}{b}\sum r_l'\sin\theta_l'\leqslant\frac{2(a^2+b^2)}{b}\sum\frac{\sin\theta_k}{r_k}+\frac{2}{b}\sum r_l'\sin\theta_l'\leqslant cA,$$

$$\left(\text{так как }\left(1-\frac{|a|}{r}\right)^2+\frac{b^2}{r^2}\geqslant\frac{b^2}{a^2+b^2}\right),$$

полагая c равным наибольшему из чисел $\frac{2}{b}$ и $\frac{2(a^2+b^2)}{b}$. Таким образом

$$\frac{1}{\rho}>(1-\mu)^{\frac{cA}{\mu}}\tag{42}$$

не может стремиться к нулю, если A остается ограниченным.

Благодаря теореме Коши, из полученного результата, сохраняя те же обозначения, выводится

Теорема II. *Пусть $f(x)$ будет произвольная функция, непрерывная на всей вещественной оси, причем*[1])

$$\lim_{x=\pm\infty} f(x)=c;$$

если последовательность многочленов $Q_n(x)$ степени n обладает свойством, что при n достаточно большом

$$A=\sum\frac{\sin\theta_k}{r_k}+\sum r_l'\sin\theta_l'\qquad(r_k\geqslant 1,\ r_l'<1)$$

становится сколь угодно большим, то, как бы мало ни было $\varepsilon>0$, возможно построить многочлен $P_n(x)$ так, чтобы

$$\left|f(x)-\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right|<\varepsilon$$

на всей вещественной оси.

Для доказательства предположим сперва, что $f(z)$ аналитическая функция, регулярная для всех значений $z=x+yi$, где $|y|\leqslant b$, причем интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+yi)\,dx\qquad(-b\leqslant y\leqslant b)$$

[1]) Это свойство, которым обладают все рациональные функции, очевидно, является необходимым.

абсолютно и равномерно сходящийся. Тогда для всех вещественных x

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u-bi)\,du}{u-bi-x}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u+bi)\,du}{u+bi-x}=\right.$$

$$\left.=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(u+bi-x)f(u-bi)-(u-bi-x)f(u+bi)}{(u-x)^2+b^2}\,du\right].$$

Подинтегральная функция, рассматриваемая как функция x при всяком u имеет, согласно (33 bis) и (34), наилучшее приближение посредством рациональной дроби с знаменателем $Q_n(x)$, равное

$$\lambda(u)=\frac{1}{\rho}\,\frac{|f(u+bi)|}{b},$$

где $\frac{1}{\rho}$, вследствие (41), удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\rho}<\frac{1}{A}\,\frac{(|u|+1)^2+b^2}{2b}.$$

Поэтому, полагая $N>0$ достаточно большим и $|f(z)|<1$, можем построить многочлен $P_n(x)$ так, чтобы

$$\left|f(x)-\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right|<\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\lambda(u)\,du+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{N}\left[\left|\frac{f(u-bi)}{u-x-bi}\right|+\left|\frac{f(u+bi)}{u-x+bi}\right|\right]du+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{N}^{+\infty}\left[\left|\frac{f(u-bi)}{u-x-bi}\right|+\left|\frac{f(u+bi)}{u-x+bi}\right|\right]du<$$

$$<\frac{1}{2\pi Ab^2}\int_{0}^{N}[(u+1)^2+b^2]\,du+$$

$$+\frac{1}{2\pi b}\left\{\int_{-\infty}^{-N}[|f(u-bi)|+|f(u+bi)|]\,du+\right.$$

$$\left.+\int_{N}^{\infty}[|f(u-bi)|+|f(u+bi)|]\,du\right\}<$$

$$<\frac{\frac{1}{3}(N+1)^3+b^2N}{2\pi Ab^2}+\frac{\varepsilon}{2},$$

где $\varepsilon > 0$ — данное произвольное малое число. Но, после того, как N зафиксировано, можем выбрать n настолько большое, чтобы

$$\frac{\frac{1}{3}(N+1)^3+b^2N}{\pi Ab^2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, будем иметь на всей вещественной оси

$$\left|f(x)-\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right|<\varepsilon.$$

Отсюда нетрудно перейти теперь к доказательству нашего общего утверждения для любой непрерывной функции $f(x)$. Для этого положим $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, где $\varphi(x)$ — *четная* функция $\left[\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right]$, а $\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ — нечетная функция. Обе эти функции, согласно условию теоремы, непрерывны и, кроме того

$$\varphi(\pm\infty)=C,\quad \psi(\pm\infty)=0.$$

Рассмотрим сначала четную функцию

$$\varphi(x)=\varphi_1(x^2)=\Phi(z),$$

полагая $z=\frac{1}{1+x^2}$. Очевидно, $\Phi(z)$ будет непрерывной функцией z при $0\leqslant z\leqslant 1$, причем $\lim\limits_{z=0}\Phi(z)=\Phi(0)=C$. Таким образом, по теореме Вейерштрасса можем построить многочлен $zR(z)$, равный 0 при $z=0$, достаточно высокой степени так, чтобы

$$\left|\Phi(z)-C-zR(z)\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

на всем отрезке $(0,1)$, т. е.

$$\left|\varphi(x)-C-\frac{1}{1+x^2}R\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

на всей действительной оси. Но рациональная функция $\frac{1}{1+x^2}R\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ представляет собой аналитическую функцию, удовлетворяющую только что рассмотренным условиям при всяком $b<1$, откуда следует, что она может быть приближена посредством дроби $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ с погрешностью, не превышающей $\frac{\varepsilon}{4}$. Следовательно, полагая

$$C+\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}=\frac{P(x)}{Q_n(x)}$$

будем иметь на всей оси

$$\left|\varphi(x)-\frac{P(x)}{Q_n(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для приближения нечетной функции $\psi(x)$ сделаем замену $z = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, так что $\psi(x) = \Psi(z)$ является непрерывной нечетной функцией z на отрезке $(-1, +1)$, причем $\Psi(0) = 0$.

Поэтому можем построить такой нечетный многочлен $zS(z^2)$, что

$$|\Psi(z) - zS(z^2)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

при $-1 \leqslant z \leqslant 1$, т. е.

$$\left|\psi(x) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} S\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{6} \tag{43}$$

на всей вещественной оси. При этом, замечая, что

$$S\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{a_0 + a_1x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{2n-2}}{(1+x^2)^n} + \frac{a_nx^{2n}}{(1+x^2)^n},$$

выводим из (43) вследствие $\psi(\infty) = 0$, что $|a_n| < \frac{\varepsilon}{6}$. Но, так как

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} S\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \frac{a_nx^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{a_0 + a_1x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{2n-2}}{(1+x^2)^n},$$

являясь аналитической функцией выше рассмотренного типа, допускает приближение посредством рациональной дроби $\frac{P_0(x)}{Q_n(x)}$, не превышающее $\frac{\varepsilon}{6}$, следовательно

$$\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} S\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \frac{P_0(x)}{Q_n(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

на всей вещественной оси, а потому, благодаря (43), имеем также

$$\left|\psi(x) - \frac{P_0(x)}{Q_n(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Откуда, наконец, получаем

$$\left|f(x) - \frac{P(x) + P_0(x)}{Q_n(x)}\right| < \varepsilon.$$

§ 5. Обратные теоремы о приближении непрерывных функций посредством рациональных дробей

Предположим, что точка 0 не является предельной точкой для корней $\alpha_k \pm i\beta_k$, так что можно указать независимо от k такое $\lambda < 1$, что

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 > \lambda^2 > 0. \tag{44}$$

При этом ограничении, которое в дальнейшем будем считать осуществленным, очевидно

$$\lambda^2 \sum \frac{\sin\theta_l'}{r_l'} < \sum r_l' \sin\theta_l' < \sum \frac{\sin\theta_l'}{r_l'},$$

если, согласно обозначениям предыдущего параграфа $r_l' < 1$. Поэтому, при условии (44), обе суммы

$$A = \sum \frac{\sin\theta_k}{r_k} + \sum r_l' \sin\theta_l', \qquad B = \sum \frac{\sin\theta_k}{r_k} + \sum \frac{\sin\theta_l'}{r_l'}$$

будут одновременно ограничены и, таким образом, после введения допущения (44), мы можем, не выделяя корней с модулем меньше единицы, заменить A через

$$B = \sum \frac{\sin\theta_k}{r_k} = \sum \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \tag{45}$$

в условиях теорем § 4. В таком случае теоремой, обратной к теореме II, в некотором смысле, является следующая

Теорема I. *Если сумма*

$$B = \sum \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \tag{45}$$

сходится и соблюдается условие (44), *то приближение функции* $f(x)$ *при помощи рациональных дробей* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *знаменатели которых не имеют иных корней, кроме* $\alpha_k \pm i\beta_k = \rho_k e^{\pm i\theta_k}$, *может стремиться равномерно к нулю на всей вещественной оси лишь в том случае, когда* $f(z)$ *функция аналитическая, регулярная при* $|z| \leqslant \lambda$ *и не имеющая иных комплексных особенностей, кроме полюсов в точках* $\alpha_k \pm i\beta_k$. *Если, кроме того,* $\alpha_k \pm i\beta_k$ *вовсе не имеют предельных точек на конечном расстоянии, то функция* $f(x)$ *мероморфна.*

Для доказательства необходима следующая

Лемма. *Если для всех вещественных значений* x *осуществляется неравенство*

$$\left|\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right| \leqslant L, \qquad (R(x) = s^2(x) + t^2(x)), \tag{46}$$

то при любом z, *находящемся в верхней полуплоскости,*

$$\left|\frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}\right| \leqslant L \left|\sqrt{\frac{s(z) + it(z)}{s(z) - it(z)}}\right|, \tag{47}$$

полагая, что корни уравнения $s(z)-it(z)=0$ находятся в той же (верхней) полуплоскости, что и z (аналогичное неравенство имеет место и для нижней полуплоскости).

Действительно, неравенство (46) можно представить в виде

$$|\varphi(x)|=\left|\frac{P(x)}{s(x)+it(x)}\right|\leqslant L,$$

и так как $s(z)+it(z)$ не имеет корней в верхней полуплоскости, то максимум $|\varphi(z)|$ в этой полуплоскости достигается на вещественной оси. Поэтому во всей верхней полуплоскости справедливо неравенство

$$\left|\frac{P(z)}{s(z)+it(z)}\right|\leqslant L;$$

умножая обе части этого неравенства на $\left|\sqrt{\frac{s(z)+it(z)}{s(z)-it(z)}}\right|$, получаем (47).

После этого замечаем, что, согласно условию теоремы, функцию $f(x)$ можем разложить в абсолютно и равномерно сходящийся на всей вещественной оси ряд

$$f(x)=\sum u_n(x), \tag{48}$$

где $u_n(x)=\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ — рациональная дробь, не имеющая иных полюсов, кроме $\alpha_k\pm i\beta_k$ (значок n, вообще, не совпадает со степенью многочлена $q_n(x)$), так что на всей оси $|u_n(x)|<\varepsilon_n$, и ряд $\sum\varepsilon_n$ сходящийся.

Таким образом, в силу только-что доказанной леммы будем иметь на всей верхней полуплоскости

$$\left|\frac{p_n(z)}{q_n(z)}\right|<\varepsilon_n\rho,$$

где $\rho=\left|\frac{s(z)+it(z)}{s(z)-it(z)}\right|$, полагая $q_n(z)=s^2(z)+t^2(z)$ (аналогично и для нижней полуплоскости).

Но из сходимости ряда (45) следует, что $\alpha_k+i\beta_k$ не могут иметь предельной точки $a+ib$ при $b>0$. Поэтому, если возьмем круг данного произвольно большого радиуса R и рассечем его прямой $y=\beta>0$, параллельной действительной оси, где β — данное произвольно малое число, то внутри усеченного, таким образом, верхнего полукруга окажется лишь конечное число точек $\alpha_k+i\beta_k$; окружив последние кружками весьма малого радиуса δ, получим связную область, в которой, вследствие (42), (44) и (45), для ρ может быть указана одна и та же (независящая от n и z) верхняя граница, откуда следует, что ряд (48) будет равномерно сходиться во всей этой комплексной области (а также и в сопряженной с ней области, лежащей в нижней полуплоскости).

С другой стороны, если $|z|=r<\lambda$, $z=re^{i\varphi}$, то

$$\left(1-\frac{r}{r_k}\cos\varphi\right)^2+\frac{r^2\sin^2\varphi}{r_k^2}\geqslant\left(1-\frac{r}{r_k}\right)^2>\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)^2;$$

поэтому в неравенстве (42) постоянная может быть взята равной $\frac{2r}{\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)^2}$, и, таким образом, ρ имеет одну и ту же верхнюю границу для всех z, у которых $|z| \leqslant r < \lambda$. Следовательно, ряд (48) будет равномерно сходящимся также внутри круга $|z| \leqslant r < \lambda$, а потому $f(x)$ должна быть аналитической функцией, регулярной внутри круга радиуса λ, не имеющей иных комплексных особенностей, кроме полюсов в точках $\alpha_k \pm i\beta_k$. Вообще, эта функция $f(x)$ будет также иметь особенности во всех предельных точках совокупности $(\alpha_k \pm i\beta_k)$, которые могут находиться *только на действительной оси*, так как, если есть бесчисленное множество значений $\alpha_k \pm i\beta_k$, которых модуль r_k не растет бесконечно, для ограниченности (44) необходимо, чтобы при соответствующих значениях k был сходящимся ряд $\sum \beta_k$. Вводя же ограничичительное условие, что предельных точек нет, мы приходим к последнему утверждению нашей теоремы [1]).

Вышедоказанная теорема может быть еще более усилена. Вместо того, чтобы требовать, чтобы ряд (45), составленный из всех корней всех знаменателей $Q_n(x)$, был сходящимся, мы можем поставить более широкое условие, что сумма, относящаяся только к корням каждого знаменателя $Q_n(x)$,

$$\sum \frac{\sin \theta_k^{(n)}}{\rho_k^{(n)}} = B_n \leqslant M \tag{49}$$

ограничена. В таком случае имеет место

Теорема II. *При соблюдении условий* (44) *и* (49) *функция* $f(x)$, *допускающая равномерно стремящееся к нулю приближение на всей оси посредством дробей* $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$, *должна быть аналитической и регулярной внутри круга* $|z| < \lambda$, *и во всякой конечной области, не пересекаемой вещественной осью, может иметь лишь конечное число неизолированных особенных точек* (*являющихся предельными точками полюсов*).

Действительно, в виду неравенства (49), число l корней $\alpha_k^{(n)} + i\beta_k^{(n)}$ ($\beta_k^{(n)} > 0$) внутри области S верхней полуплоскости, ограниченной окружностью радиуса R и прямой $y = b > 0$, должно удовлетворять неравенству

$$\frac{lb}{R^2} \leqslant M, \quad \text{т. е.} \quad l \leqslant \frac{MR^2}{b}.$$

Таким образом, если мы рассмотрим все возможные точки области S, отстоящие от ее контура на расстоянии не меньшем, чем данная произвольно малая величина δ, то может быть не более $l \leqslant \frac{MR^2}{b}$ таких точек z_i ($i = 1, 2, \ldots, l$), чтоб все многочлены $Q_n(x)$ при $n > N$ имели корни внутри кругов радиуса δ с центром z_i. Поэтому, выделив l

[1]) В моей книге L. S. рассмотрен только этот последний случай.

кружков радиуса 2δ около этих точек z_l для всякой другой точки z области S, можем составить бесконечно возрастающую последовательность значений n, для которых корни многочленов $Q_n(x)$ находятся на расстоянии, большем, чем δ, от точки z. Следовательно, благодаря (42), (47) и (48), можно будет составить бесконечную последовательность n_1, $n_2, \ldots, n_k, \ldots$, для которой $\frac{P_{n_k}(z)}{Q_{n_k}(z)}$ будут равномерно ограничены во всех точках внутри S и вне указанных l кружков радиуса 2δ, откуда, благодаря сходимости ряда (48) при $|z| < \lambda$, вытекает наше утверждение.

Таким образом, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы *всякая непрерывная функция* $f(x)$ $(f(\pm\infty) = c)$ *могла быть равномерно приближена на всей вещественной оси посредством дробей с знаменателями* $Q_n(x)$, *имеющими корнями* $r_k^{(n)} e^{\pm i\theta_k^{(n)}}$, *где* $r_k^{(n)} > \lambda > 0$, *заключается в том, чтобы суммы*

$$B_n = \sum \frac{\sin \theta_k^{(n)}}{r_k^{(n)}}$$

не имели конечной верхней границы.

§ 6. Обратные теоремы о взвешенном приближении на всей вещественной оси посредством многочленов

Докажем предварительно лемму, обобщающую лемму предыдущего параграфа:

Лемма: *Если на всей вещественной оси*

$$\left|\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right| \leqslant L, \text{ т. е. } |P(x)| \leqslant L\,|s(x) \pm it(x)|, \tag{50}$$

где $P(x)$ *многочлен, а* $R(x) = s^2(x) + t^2(x)$ — *целая четная функция нулевого рода, имеющая лишь комплексные корни* $\alpha_k \pm i\beta_k$ $(\beta_k > 0)$, *то во всякой точке* z *верхней полуплоскости соблюдается неравенство*

$$|P(z)| \leqslant |s(z) + it(z)|, \tag{51}$$

где $s(z) + it(z) = 0$ *имеет все корни в нижней полуплоскости. (Аналогичное неравенство справедливо для точек нижней полуплоскости).*

В самом деле, модуль функции

$$u(z) = \frac{P(z)}{s(z) + it(z)},$$

регулярной в верхней полуплоскости, достигает максимума на вещественной оси или на верхней полуокружности бесконечного радиуса. Но нетрудно заметить, что, если $|z| = \rho$ бесконечно растет, то

$$\lim \left|\frac{u(z)}{u(\rho)}\right| = \lim \left|\frac{s(\rho) + it(\rho)}{s(z) + it(z)}\right| \leqslant 1.$$

Для этого достаточно сгруппировать попарно множители сходящегося бесконечного произведения $s(z)+it(z)$, где $z=a+bi=\rho e^{i\varphi}$, соответствующие корням $\pm\alpha_k-i\beta_k$, и убедиться, что

$$\left|\frac{\left(1-\frac{\rho}{\alpha_k-i\beta_k}\right)\left(1+\frac{\rho}{\alpha_k+i\beta_k}\right)}{\left(1-\frac{z}{\alpha_k-i\beta_k}\right)\left(1+\frac{z}{\alpha_k+i\beta_k}\right)}\right|=\left|\frac{(\alpha_k-\rho-i\beta_k)(\alpha_k+\rho+i\beta_k)}{(\alpha_k-z-i\beta_k)(\alpha_k+z+i\beta_k)}\right|=$$

$$=\sqrt{\frac{(\rho^2+\alpha_k^2+\beta_k^2)^2-4\rho^2\alpha_k^2}{(\rho^2+\alpha_k^2+\beta_k^2+2b\beta_k)^2-4a^2\alpha_k^2}}\leqslant 1,$$

так как $b\beta_k\geqslant 0$, $a^2\leqslant\rho^2$.

Таким образом, максимум $|u(z)|$ достигается на действительной оси, где, по условию, он равен L. Следовательно,

$$|P(z)|\leq L\,|s(z)+it(z)| \tag{51}$$

во всей верхней полуплоскости.

Отсюда вытекает

Теорема. *Если*

$$E_{\varphi(x)}[f(x)]=0, \tag{52}$$

где $\varphi(x)=s^2(x)+t^2(x)$ *целая четная функция нулевого рода, то функция* $f(x)$ *также должна быть целой функцией, возрастание которой на круге бесконечного радиуса не превышает возрастания* $|s(z)\pm it(z)|^2$.

Действительно, (52) означает, что функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся на всей вещественной оси ряд многочленов:

$$f(x)=P_1(x)+\ldots+P_n(x)+\ldots \tag{53}$$

(значок n при $P_n(x)$ не совпадает, вообще, со степенью многочлена $P_n(x)$), причем

$$|P_n(x)|<\varepsilon_n|\varphi(x)|, \qquad (-\infty<x<\infty)$$

где числа ε_n могут быть заданы произвольно. Поэтому, вследствие (51), во всей верхней полуплоскости будем иметь

$$|P_n(z)|<\varepsilon_n|s(z)+it(z)|^2.$$

Следовательно, ряд (53) будет равномерно сходящимся во всякой конечной области комплексной плоскости, т. е. $f(z)$ будет *целой* функцией, возрастание которой на бесконечности не быстрей, чем $|s(z)\pm it(z)|^2$, (т. е. будет также, вообще говоря, нулевого рода, и лишь в виде исключения может оказаться первого рода).

Следствие I. *Если* $\varphi(x)=1+c_1x^2+\ldots+c_nx^{2n}+\ldots$ *есть четная целая функция с неотрицательными коэффициентами, то условие, необходимое и достаточное для того, чтобы всякая непрерывная функция* $f(x)$ $(\lim\limits_{x=\pm\infty} f(x)=0)$ *могла быть сколь угодно приближена равномерно на всей оси полиномами вида* $\sum\limits_1^n\frac{a_kx^k}{\varphi(x)}$, *состоит в том, чтобы* $\varphi(x)$ *не была нулевого рода.*

Заметим, что вышедоказанная лемма остается в силе и в том случае, когда функция $s^2(x)+t^2(x)$ *первого рода, лишь бы ряд*

$$\sum \frac{\beta_k}{\alpha_k^2+\beta_k^2}$$

был сходящимся. Действительно, в этом случае бесконечное произведение

$$s(x)+it(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\alpha_k-i\beta_k}\right)\left(1+\frac{x}{\alpha_k+i\beta_k}\right)=$$
$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{2i\beta_k x+x^2}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\right)$$

будет также абсолютно сходящимся, и все доказательство остается неизменным. Поэтому имеем

Следствие II. *Если функция $\varphi(x)=s^2(x)+t^2(x)$ есть целая четная функция не выше первого рода, нули которой настолько близко расположены к вещественной оси, что ряд $\sum \frac{\beta_k}{\alpha_k^2+\beta_k^2}$ сходится, то из равенства*

$$E_{\varphi(x)}[f(x)]=0 \tag{52}$$

вытекает, что функция $f(x)$ также целая функция, возрастание которой на круге бесконечного радиуса не превышает

$$|s(z)\pm it(z)|^2.$$

§ 7. Некоторые приложения теоремы III § 1

Одним из наиболее существенных алгебраических результатов, полученных в § 1, была теорема III, согласно которой существование на всей вещественной оси неравенства

$$|P(x)|\leqslant M|s(x)+it(x)|, \tag{12}$$

где $P(x)$ и $s(x)+it(x)$ многочлены, из которых последний имеет корни лишь в нижней полуплоскости, влечет за собой аналогичные неравенства для всех производных

$$|P^{(k)}(x)|\leqslant M|s^{(k)}(x)+it^{(k)}(x)| \tag{13}$$

также на всей оси.

В частности, если $s(x)+it(x)=(1-xi)^{2n}$, то из неравенства

$$|P(x)|\leqslant M|1-xi|^{2n}=M(1+x^2)^n \tag{54}$$

следует

$$|P'(x)|\leqslant 2nM|1-xi|^{2n-1}=2nM(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}},$$
$$|P''(x)|\leqslant 2n(2n-1)M|1-xi|^{2n-2}=$$
$$=2n(2n-1)M(1+x^2)^{n-1} \text{ и т. д.} \tag{55}$$

Отсюда может быть выведена следующая важная

Теорема I. *Если конечная тригонометрическая сумма n-го порядка* [1])

$$s_n(\theta)=a_0+a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+\ldots+a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta$$

при всяком вещественном θ *удовлетворяет неравенству*

$$|s_n(\theta)|\leqslant M, \tag{56}$$

то производная $s_n'(\theta)$ *должна удовлетворять неравенству*

$$|s_n'(\theta)|\leqslant nM \tag{57}$$

при всех вещественных значениях θ.

Для доказательства, полагаем $x=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$; в таком случае

$$s_n(\theta+\alpha)=\frac{P(x)}{(1+x^2)^n}, \tag{58}$$

где α — произвольная постоянная и $P(x)$ — многочлен относительно x (степени не выше $2n$).

Тогда, согласно условию (56), $|P(x)|\leqslant M(1+x^2)^n$ при всех вещественных x. Поэтому, вследствие (55),

$$|P'(x)|\leqslant 2nM(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

Но дифференцирование равенства (58) дает

$$P'(x)=2(1+x^2)^{n-1}s_n'(\theta+\alpha)+2nx(1+x^2)^{n-1}s_n(\theta+\alpha),$$

$\left(\text{так как } \frac{d\theta}{dx}=\frac{2}{1+x^2}\right)$,

подставляя это значение в (59), находим:

$$\left|\frac{s_n'(\theta+\alpha)+nxs_n(\theta+\alpha)}{\sqrt{1+x^2}}\right|\leqslant nM,$$

т. е.

$$\left|s_n'(\theta+\alpha)\cos\frac{\theta}{2}+ns_n(\theta+\alpha)\sin\frac{\theta}{2}\right|\leqslant nM \tag{60}$$

при любых α и θ. При $\theta=0$ неравенство (60) получает вид

$$|s_n'(\alpha)|\leqslant nM, \tag{57}$$

что и требовалось доказать.

В действительности мы доказали (60), т. е. несколько больше, чем утверждает наша теорема. А именно, выбирая при любом $\theta+\alpha=\varphi$ величину θ так, чтобы левая часть (60) была максимальна, видим, что

$$\sqrt{s_n'^2(\varphi)+n^2s_n^2(\varphi)}\leqslant nM. \tag{61}$$

---

[1]) Согласно терминологии, принятой нами в главе I (§ 1), эту же сумму мы можем также называть тригонометрическим полиномом $2n$-го порядка.

При этом равенство здесь фактически осуществляется для всех φ, если $s_n(\varphi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$s_n'^2(\varphi)+n^2s_n^2(\varphi)=n^2M^2,$$

т. е. если $s_n(\varphi)=M\cos(n\varphi+C)$, где C — произвольная постоянная.

Читатель без труда проверит, что из (56) вытекает также при всех возможных значениях C неравенство

$$|s_n'(\theta)+Cs_n(\theta)|\leqslant M\sqrt{n^2+C^2}, \tag{60 bis}$$

которое равноценно (60).

Следствие I. *При условии* (56) *имеют также место неравенства*:

$$|s_n''(\theta)|\leqslant n^2M, \ \ldots, \ |s_n^{(k)}(\theta)|\leqslant n^kM. \tag{57 bis}$$

Это вытекает из последовательного применения (57).

Вторичное же применение (60 bis) дает

$$|s_n''(\theta)+(C+D)s_n'(\theta)+CDs_n(\theta)|\leqslant M\sqrt{(n^2+C^2)(n^2+D^2)},$$

где C и D — две произвольные постоянные, и аналогичные неравенства для последующих производных.

Предлагаю читателю в виде упражнения вывести

Следствие II. *Если* $s(\theta)$ *есть решение данного неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами*

$$s^{(k)}(\theta)+a_1s^{(k-1)}(\theta)+\ldots+a_ks(\theta)=R(\theta)=\sum_{h=0}^{n}(A_h\cos h\theta+B_h\sin h\theta),$$

характеристическое уравнение которого

$$f(z)=z^k+a_1z^{k-1}+\ldots+a_k=0$$

имеет лишь действительные корни, то $|s(\theta)|$ *не может при всех вещественных значениях* θ *оставаться менее* $\dfrac{M}{|f(ni)|}$, *если* $|R(\theta)|$ *достигает значения* M *для некоторого* $\theta=\theta_0$.

Заслуживает внимания

Следствие III. *Если имеет место* (56) *и* $s_n(0)=0$, *то*

$$\left|\frac{s_n(\theta)}{\sin\theta}\right|\leqslant M_n, \tag{62}$$

причем знак равенства возможен лишь для $s_n(\theta)=\sin n\theta$.

Экатремум дроби $\dfrac{s_n(\theta)}{\sin\theta}$ достигается при $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{s_n(\theta)}{s_n'(\theta)}$, т. е. при $\sin\theta=\dfrac{s_n(\theta)}{\sqrt{s_n^2(\theta)+s_n'^2(\theta)}}$, поэтому он не превышает максимума $\sqrt{s_n^2(\theta)+s_n'^2(\theta)}$; но из (61) следует, что $\sqrt{s_n^2(\theta)+s_n'^2(\theta)}\leqslant Mn$.

Теорема II. *Если* $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ *многочлен степени* n, *и на отрезке* $(-1, +1)$

$$|P_n(x)| \leqslant M, \tag{63}$$

то

$$|P_n'(x) \cdot \sqrt{1-x^2}| \leqslant nM. \tag{64}$$

на том же отрезке.

Для доказательства достаточно сделать замену переменных $x = \cos\theta$ и применить теорему I.

Теорема III (А. Маркова). *При том же условии* (63)

$$|P_n'(x)| \leqslant n^2M \tag{65}$$

на всем отрезке $(-1, +1)$.

В самом деле, после замены $x = \cos\theta$,

$$P_n(x) = P_n(\cos\theta) = s_n(\theta), \quad P'_n(x)\sqrt{1-x^2} = s_n'(\theta).$$

Но, так как $|s_n'(\theta)| \leqslant nM$ и $s_n'(0) = 0$, то благодаря следствию III

$$|P_n'(x)| = \left|\frac{s'_n(\theta)}{\sin\theta}\right| \leqslant n^2 M.$$

Следует обратить внимание на существенное уменьшение порядка возрастания $P_n'(x)\sqrt{1-x^2}$, достигаемое благодаря множителю $\sqrt{1-x^2}$, как это видно из сравнения неравенств (64) и (65).

С л е д с т в и е IV. *Пусть* $P_n(z)$ *будет произвольным многочленом степени* n. *Если* $H_l(z)$ *есть многочлен степени* $l \leqslant n$, *не имеющий корней вне окружности* C *радиуса* 1, *и если во всех точках окружности* C

$$|P_n(z)| \leqslant |H_l(z)|, \tag{66}$$

то на той же окружности C (*и вне ее*) *соблюдаются неравенства*

$$|P_n^{(k)}(z)| \leqslant |(z^{n-l}H_l(z))^{(k)}|. \tag{67}$$

Действительно, так как неравенство (66) на окружности $|z| = 1$ равноценно неравенству

$$|P_n(z)| \leqslant |H_l(z)\, z^{n-l}|,$$

где $H(z)z^{n-l}$ степени n и не имеет корней вне окружности, то достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $l = n$. В таком случае при замене переменной

$$z = z_0\frac{1+ix}{1-ix},$$

где z_0 — произвольная точка окружности C, получим:

$$P_n(z) = \frac{A(x)}{(1+x^2)^n}, \quad H_n(z) = \frac{B(x)}{(1+x^2)^n}, \tag{68}$$

причем второй из многочленов $A(x)$, $B(x)$ не имеет корней в нижней полуплоскости, так как точке x нижней полуплоскости соответствует $|z| > 1$.

Следовательно, из неравенства

$$|A(x)| \leqslant |B(x)|$$

для всех вещественных x, равноценного неравенству (66) на окружности C, заключаем, применяя (13), что

$$|A'(x)| \leqslant |B'(x)|$$

на всей вещественной оси. Но, вследствие (68):

$$A'(x) = 2(1+x^2)^{n-1}\left[nxP_n(z) + \frac{iz_0}{(1-ix)^2}P_n'(z)\right]$$

$$B'(x) = 2(1+x^2)^{n-1}\left[nxH_n(z) + \frac{iz_0}{(1-ix)^2}H_n'(z)\right].$$

Поэтому, полагая в частности $x=0$, т. е. $z=z_0$, находим

$$|P_n'(z)| \leqslant |H_n'(z)| \qquad (67\text{ bis})$$

для всех значений z на окружности C радиуса 1. Таким образом, неравенство (67) доказано для $k=1$. Но, так как $H_n'(z)$ не может иметь корней вне окружности C, если этим свойством обладает [1]) $H_n(z)$, то из (67 bis) вытекает

$$|P_n''(z)| \leqslant |H_n''(z)|,$$

и таким же образом неравенство (67) последовательно доказывается для всех значений k.

Следствие V. *Если на окружности C радиуса* 1

$$|P_n(z)| \leqslant M,$$

то на этой же окружности

$$|P_n'(z)| \leqslant nM, \; |P_n''(z)| \leqslant n(n-1)M, \dots$$

и т. д.

§ 8. Экстремальные свойства целых функций на вещественной оси

Прежде чем приступить к распространению (или соответствующему видоизменению) теоремы III § 1 на те или иные классы целых функций, полезно будет установить некоторые предварительные леммы. При этом мы ограничимся исключительно рассмотрением функций конечного (или нулевого) рода, а именно, полагая

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

допустим существование такого конечного числа $\rho > 0$, что

$$\overline{\lim}\; n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|} = L < \infty. \qquad (69)$$

[1]) Благодаря примечанию к лемме I § 1.

Лемма I. *Если целая функция $f(x)$ удовлетворяет условию (69) и $M(R)$ есть максимум ее модуля на отрезке $(-R, +R)$, то при любом x $(-R < -R_1 \leqslant x \leqslant R_1 < R)$*

$$|f'(x)| < \frac{R^\rho (L+\varepsilon)^\rho}{\sqrt{R^2 - R_1^2}} M(R), \tag{70}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $R \to \infty$.

Действительно, вследствие (69), как бы мало ни было $\beta > 0$, можно взять n_0 настолько большим, чтобы при $n > n_0$ иметь

$$|c_n| < \frac{(L+\beta)^n}{n^{\frac{n}{\rho}}}.$$

Положим

$$f(x) = P(x) + \varphi(x),$$

где

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k, \qquad \varphi(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k x^k, \qquad (N > n_0).$$

В таком случае, полагая

$$R = \frac{N^{\frac{1}{\rho}}(1-\beta)}{L+\beta},$$

имеем:

$$|\varphi(x)| < \sum_{k=N+1}^{\infty} (1-\beta)^k \left(\frac{N}{k}\right)^\rho < \sum_{k=N+1}^{\infty} (1-\beta)^k = \frac{(1-\beta)^{N+1}}{\beta},$$

$$|\varphi'(x)| < \frac{N(1-\beta)^N}{\beta}.$$

Следовательно, можем взять N настолько большим, чтобы при $|x| \leqslant R$ иметь

$$|\varphi(x)| < \frac{\gamma}{N}, \qquad |\varphi'(x)| < \frac{\gamma}{R},$$

где $\gamma > 0$ — данное произвольно малое число.

Таким образом

$$|P(x)| < M(R) + \frac{\gamma}{N}, \qquad (-R \leqslant x \leqslant R)$$

а потому, на основании (64), для всякого x $(-R < x < R)$

$$|P'(x)| \sqrt{R^2 - x^2} \leqslant M(R) \cdot N + \gamma = M(R) \left[R \frac{L+\beta}{1-\beta} \right]^\rho + \gamma,$$

откуда

$$|f'(x)| < \frac{M(R) \left[R \frac{L+\beta}{1-\beta} \right]^\rho + \gamma}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \frac{\gamma}{R}.$$

Следовательно, как бы мало ни было ε, будем иметь при R достаточно большом

$$|f'(x)| < \frac{R^\rho(L+\varepsilon)^\rho}{\sqrt{R^2-x^2}} M(R),$$

и тем более

$$|f'(x)| < \frac{R^\rho(L+\varepsilon)^\rho}{\sqrt{R^2-R_1^2}} M(R)$$

при

$$-R_1 \leqslant x \leqslant R_1 < R.$$

Следствие I. *Если на всей действительной оси целая функция $f(x)$ ограничена*

$$|f(x)| < M$$

и коэффициенты ее удовлетворяют (69) *при* $L > 0$ *и* $\rho > 1$, *то для всех вещественных* x

$$|f'(x)| < |x|^{\rho-1} \frac{\rho^{\frac{\rho}{2}}}{(\rho-1)^{\frac{\rho-1}{2}}} (L+\varepsilon)^\rho M, \tag{71}$$

где $\varepsilon \to 0$ *при* $|x| \to \infty$.

Для доказательства достаточно положить $M(R) = M$, $R_1 = |x|$ и $R = |x|\sqrt{\frac{\rho}{\rho-1}}$ в неравенстве (70).

Определение. *Если* $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = L < \infty$ (т. е. $\rho = 1$), то целая функция $f(x) = \sum\limits_0^\infty c_n x^n$ называется целой (трансцендентной) функцией *конечной степени* $p = Le^{-1}$. На основании классических свойств целых функций, если $L > 0$, то функция $f(x)$ *первого* рода; если же $L = 0$, то целая функция $f(x)$ имеет *степень равную нулю* и может быть *либо первого, либо нулевого рода.*

Следствие II. *Если целая функция $f(x)$ степени $p > 0$ ограничена на всей вещественной оси, то и все ее производные ограничены: из*

$$|f(x)| < M \qquad (-\infty < x < \infty)$$

вытекает

$$|f'(x)| < Mep, \quad |f''(x)| < M(ep)^2, \ \dots \tag{72}$$

и т. д.

Для доказательства первого из неравенства (72) достаточно положить $\rho = 1$ и $M(R) = M$ в (70) и заставить R бесконечно расти, помня, что по определению $L = ep$. Остальные неравенства получаются последовательно, так как, очевидно, производная функция степени p также должна быть функцией той же степени p. Неравенства (72) будут нами в дальнейшем уточнены.

Следствие III. *Функция нулевой степени, ограниченная на всей вещественной оси, есть постоянная величина* $f(x) = C$.

Действительно, если в неравенстве (70) положим $L = 0$, то при $\rho = 1$ и $M(R) = M$ вторая часть его при любом данном x с возра-

станием R стремится к εM; поэтому $|f'($
быть взято произвольно малым, то $f'(x)=0$ при всяком x.

Следствие IV. *Если целая (трансцендентная) функция нулевой степени $f(x)$ при некоторой последовательности значений R, стремящихся к ∞, удовлетворяет неравенству*

$$M(R)<R^h, \tag{73}$$

где h — данное положительное число, то $f(x)$ есть многочлен степени не выше h.

Действительно, обозначая через $P_h(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_h)$ многочлен степени h, где $a_1, a_2, \ldots, a_h$ какие-нибудь корни[1]) $f(x)$, видим, что целая функция

$$f_1(x)=\frac{f(x)}{P_h(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$$

должна быть нулевой степени. В самом деле, если бы мы имели

$$\overline{\lim}\, n\sqrt[n]{|\alpha_n|}>L_1>0,$$

т. е. существовала бы бесконечная последовательность значений n, для которых $|\alpha_n|>\left(\frac{L}{n}\right)^n$, где $L>0$, то коэффициенты $c_{n+1}=\alpha_n-a\alpha_{n+1}$ функции $(x-a_1)f_1(x)$ лишь тогда могли бы удовлетворять неравенству

$$|c_{n+1}|<\left(\frac{\varepsilon}{n+1}\right)^{n+1}$$

где $\varepsilon<L$ при $n>n_0$ достаточно большом, когда

$$|\alpha_{n+1}|>\frac{|\alpha_n|-\left(\frac{\varepsilon}{n+1}\right)^{n+1}}{a}>\left(\frac{L}{n+1}\right)^{n+1}; \tag{74}$$

поэтому неравенство (74) должно было бы соблюдаться для всех $n>n_0$; но в таком случае коэффициенты α_n функции $f_1(x)$ не могли бы убывать быстрее, чем в геометрической прогрессии с знаменателем, близким к $\frac{1}{a}$, т. е. $f_1(x)$ не была бы целой функцией. Таким образом, если $f(x)$ — нулевой степени, то и $\frac{f(x)}{x-a_1}$ нулевой степени, а потому и $\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)}$ нулевой степени и т. д., так что $f_1(x)=\frac{f(x)}{P_h(x)}$ также нулевой степени.

Но вследствие условия (73) $f_1(x)$ ограничено на всей действительной оси; поэтому, согласно следствию III

$$f(x)=CP_h(x)$$

есть многочлен степени h.

---

[1]) Если бы функция нулевой степени $f(x)$ имела $l<h$ корней, то она была бы многочленом степени l, и наше утверждение было бы уже доказано.

Следствия III и IV обобщаются следующим образом:

Следствие V. *Если целая функция* $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim n^{\frac{2}{\mu}} \sqrt[n]{|c_n|}=0, \tag{75}$$

где $\mu>0$ — *целое число, не возрастает быстрей, чем* $|x|^h$ (*при* $|x|\to\infty$) *на* μ *данных лучах, исходящих из начала координат под углами* $\frac{2k\pi}{\mu}$ $(k=0, 1, \ldots, \mu-1)$, *то* $f(x)$ *есть многочлен степени не выше* h.

Доказательство для любого μ сводится к вышеразобранному случаю[1]) $\mu=2$.

В дальнейшем мы уточним полученные результаты для функций конечной степени, а сейчас укажем еще одно основное свойство функций конечной степени.

Лемма II. *Если* $\mathfrak{M}(R)$ *есть максимум* $|f(Re^{i\theta})|$, *то степень* p *целой (трансцендентной) функции* $f(x)=\sum c_k x^k$ *равна*

$$p=\overline{\lim}\,\frac{\lg \mathfrak{M}(R)}{R}, \qquad (R\to\infty). \tag{76}$$

Действительно, пусть

$$\overline{\lim}\,\frac{\lg \mathfrak{M}(R)}{R}=q;$$

значит, как бы мало ни было $\varepsilon>0$,

$$\mathfrak{M}(R)<e^{(q+\varepsilon)R}$$

при R достаточно большом. Поэтому по теореме Коши

$$|c_n|<\frac{\mathfrak{M}(R)}{R^n}<\frac{e^{(q+\varepsilon)R}}{R^n},$$

откуда

$$n\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{n}{R}e^{(q+\varepsilon)\frac{R}{n}}.$$

Поэтому, полагая $n=R(q+\varepsilon)$, видим, что

$$p=\frac{1}{e}\,\overline{\lim}\, n\sqrt[n]{|c_n|}\leqslant q.$$

Но, с другой стороны (применяя формулу Стирлинга):

$$\mathfrak{M}(R)\leqslant\sum |c_n|R^n<\sum\left(\frac{(p+\varepsilon)eR}{n}\right)^n<\sum\frac{[(p+\varepsilon)R]^n}{(n-1)!}=$$
$$=(p+\varepsilon)Re^{(p+\varepsilon)R},$$

---

[1]) См. L. S. стран. 79.

откуда

$$\frac{\lg \mathfrak{M}(R)}{R} < p + \varepsilon + \frac{1}{R} \lg (p + \varepsilon) R.$$

Таким образом $q \leqslant p$. Следовательно, $q = p$.

Следствие VI. 1) *Каково бы ни было конечное значение C, степень функции $f(x+C)$ равна степени $f(x)$;*

2) *Степень m произведения двух целых функций $f(x)$ и $f_1(x)$ степени p и p_1 не выше суммы $p+p_1$ их степеней.*

Применяя классическую теорему Адамара, можно также доказать, что $m \geqslant |p-p_1|$.

§ 9. Экстремальные свойства целых функций нулевого рода

Наша цель распространить результаты § 1, относящиеся к многочленам, на функции нулевого рода. Для этого рассмотрим произвольную функцию $R(x)$ нулевого рода, не имеющую вещественных корней, которая всегда единственным образом может быть представлена в виде

$$R(x) = s^2(x) + t^2(x),$$

где

$$s(x) + it(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1 - i\beta_1}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n - i\beta_n}\right) \dots$$

не имеет корней в верхней полуплоскости.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{s(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{s(x)+it(x)}{s(x)-it(x)}} + \sqrt{\frac{s(x)-it(x)}{s(x)+it(x)}}\right] = \cos\Phi(x) \\ &\frac{t(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}} = \\ &= \frac{1}{2i}\left[\sqrt{\frac{s(x)+it(x)}{s(x)-it(x)}} - \sqrt{\frac{s(x)-it(x)}{s(x)+it(x)}}\right] = \sin\Phi(x), \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

где можно положить $\Phi = 0$ при $x = 0$, так как $t(0) = 0$.

Вообще, каковы бы ни были постоянные A и B

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{As(x)+Bt(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}} = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\Phi-\lambda) \\ f_1(x) &= \frac{At(x)-Bs(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}} = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\Phi-\lambda), \end{aligned}\right\} \quad (78)$$

полагая

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\lambda, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\lambda.$$

Легко видеть, что $s(x)$ и $t(x)$ имеют только действительные корни, так как, если x данное комплексное число, то выражения (77), в которых одно из слагаемых всегда больше единицы, а другое меньше единицы по модулю, не может обращаться в нуль. Отсюда следует, также, что числа x и Φ одновременно будут вещественны, а потому $f(x)$ и $f_1(x)$ (78) тоже имеют лишь вещественные корни.

Кроме того, полагая

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n,$$

где

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta_n}{\alpha_n} - \pi \leqslant \varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta_n}{x-\alpha_n} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta_n}{\alpha_n} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta_n x}{\alpha_n x - \alpha_n^2 - \beta_n^2} \leqslant \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta_n}{\alpha_n} < \pi,$$

замечаем, что

$$-\Phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{(x-\alpha_n)^2 + \beta_n^2} > 0 \tag{79}$$

при всех вещественных x; поэтому $\Phi(x)$ есть *убывающая* от $+\infty$ до $-\infty$ *функция* x.

Следовательно, корни функций нулевой степени[1])

$$As(x) + Bt(x) = 0$$
$$A_1 s(x) + B_1 t(x) = 0$$

взаимно разделены; и если один корень у них общий, то обе функции отличаются лишь постоянным множителем.

В частности, дифференцируя равенства (78), находим

$$f'(x) = -f_1(x)\cdot\Phi'(x), \quad f_1'(x) = f(x)\cdot\Phi'(x), \tag{80}$$

поэтому, все вещественные корни $f'(x)$ совпадают с корнями $f_1(x)$, а все вещественные корни $f_1'(x)$ совпадают с корнями $f(x)$; следовательно, *корни $f(x)$ и $f_1(x)$ перемежаются (не могут быть кратными) и абсолютные экстремумы $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ функции $f(x)$ достигаются с чередующимися знаками в точках, где $f_1(x) = 0$.*

В дальнейшем, мы сначала будем предполагать, что вещественные части α_k корней функции нулевого рода $R(x) = s^2(x) + t^2(x)$ ограничены:

$$|\alpha_k| < \frac{1}{2}\alpha. \tag{81}$$

В таком случае имеет место следующая

Теорема I. *Если $Q(x)$ есть целая функция нулевой степени, получающая противоположные знаки в последовательных точках, где $At(x) - Bs(x) = 0$, и дробь*

---

[1]) Так как всякая функция нулевого рода должна быть нулевой степени, то $s(x)$ и $t(x)$ — всегда нулевой степени; однако, они могут быть и не нулевого рода (хотя $s(x) + it(x)$ по условию, нулевого рода).

$$\varphi(x) = \frac{Q(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}} \tag{82}$$

остается ограниченной на всей вещественной оси, то функция $Q(x)$ *имеет лишь вещественные простые корни* (*при условии* (81)).

Если бы $Q(x)$ имела пару комплексных сопряженных корней, мы могли бы положить

$$Q(x) = (x^2 + px + q)\,\delta(x),$$

где целая функция нулевой степени $\delta(x)$ также имела бы противоположные знаки в последовательных корнях γ_n и γ_{n+1} уравнения $At(x) - Bs(x) = 0$; поэтому, каково бы ни было конечное вещественное число C, дробь

$$\varphi(x)\frac{(x-C)^2}{x^2+px+q} = \frac{(x-C)^2\,\delta(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}}$$

также оставалась бы ограниченной на всей оси, получая противоположные знаки во всех точках γ_n. Таким образом, выбирая C произвольно, достаточно показать, что $Q(x)$ *не может иметь двойного корня* C: не нарушая общности, можем взять для сокращения письма $C = A = 0$, $B = 1$, так как

$$[At(x) - Bs(x)]^2 + [As(x) + Bt(x)]^2 = (A^2 + B^2)\,(s^2(x) + t^2(x)).$$

Итак, по условию, в точках $\gamma_n \lessgtr 0$,

где
$$\frac{s(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}} = \cos\Phi = 0,$$

имеем:
$$\varphi(\gamma_n) = (-1)^n L_n, \qquad (-\infty < n < \infty) \tag{83}$$

где $0 < L_n < L$ ограничены: нужно показать невозможность совмещения равенств $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, если дробь (82) ограничена при всех вещественных значениях x, а $Q(x)$ — целая функция нулевой степени.

Заметим, что, если $L_n = 1$, то условиям (83) удовлетворяет функция

$$\frac{t(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}} = \sin\Phi(x), \qquad (\sin\Phi(0) = 0)$$

С другой стороны, применяя классический метод вычетов Коши к разложению на простые дроби мероморфной функции

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{t(x)}{s(x)},$$

покажем, что

$$\frac{t(x)}{s(x)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{-x}{\gamma_n(x-\gamma_n)\,\Phi'(\gamma_n)}, \tag{84}$$

т. е.

$$\sin\Phi(x)=\frac{t(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}}=-\cos\Phi(x)\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\gamma_n(x-\gamma_n)\Phi'(\gamma_n)}. \tag{84 bis}$$

Для этого нужно, но-перных, доказать, что ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n{}^2\,\Phi'(\gamma_n)}$$

абсолютно сходится, а но-нторых, установить существонание замкнутых контурон C, где функция $\frac{t(x)}{s(x)}$ остается ограничена, нмещающих любую данную конечную область при услонии, чтобы отношение периметра контура C к наименьшему из расстояний от его точек до начала координат не росло бесконечно.

Установим сначала существонание требуемых контурон, где

$$\frac{t(x)}{s(x)}=i\frac{1-\dfrac{s(x)+it(x)}{s(x)-it(x)}}{1+\dfrac{s(x)+it(x)}{s(x)-it\ (x)}} \tag{85}$$

остается ограниченной. Для этого нозьмем некоторое несьма большое значение $R>0$ так, чтобы $\left|\frac{t(\pm R)}{s(\pm R)}\right|\leqslant M$, и из точки R пронедем симметрично расположенную относительно действнтельной оси линию C_0 постоянного аргумента $\theta=2\operatorname{arctg}\frac{t(R)}{s(R)}$ функции $\frac{s(z)+it(z)}{s(z)-it(z)}$, на которой таким образом $\frac{s(z)+it(z)}{s(z)-it(z)}=Ae^{i\theta}$ $(A>0)$, и нследстние (85) $\left|\frac{t(z)}{s(z)}\right|=\left|\frac{1-Ae^{i\theta}}{1+Ae^{i\theta}}\right|$ заключается между 1 и $\left|\frac{t(R)}{s(R)}\right|$ на линии C_0.

Если $R>\alpha\gg|2\alpha_k|$, то абсцисса a н точке $z=a+ib$ на этой линии C_0 будет менее R, так как иначе угол, под которым из z ниден отрезок, соединяющий нсякие дне сопряженные точки $\alpha_k\pm i\beta_k$, был бы менее соотнетствующего угла н точке R; по той же причине при увеличении ординаты b точки z абсцисса ее a будет уменьшаться до тех пор, пока линия C_0 не достигнет прямой $x-y=\frac{\alpha}{2}$.

В то же нремя линия C_0 постоянного аргумента не может проникнуть ннутрь наименьшего из кругон S_k, проходящего через три точки R, $\alpha_k\pm i\beta_k$, так как это понлекло бы за собой унеличение нсех углов, под которыми из точки z нидны отрезки, соединяющие точки $\alpha_k\pm i\beta_k$. Следонательно, линия C_0 может достигнуть прямой $x=\frac{\alpha}{2}+y$ на ныcоте не ниже $y=\frac{R}{2}-\frac{\alpha}{4}$, причем длина этой части линии C_0, которая ниже прямой $y=\frac{R}{2}-\frac{\alpha}{4}$, в силу вышесказанного, меньше суммы ее проекций на обе оси координат, т. е. меньше, чем $R-\frac{\alpha}{2}$. Для получения требуемого замкнутого контура C мы воспользуемся кривой C_0 до достижения прямой $y=\frac{R}{2}-\frac{\alpha}{4}$, затем продолжим его по прямой, параллельной вещественной оси, до пересечения с соответствующей линией C постоянного аргумента из точки $(-R)$ и симметричное построение произведем в нижней полуплоскости. Полагая значения R и α так взятыми, что прямая $y=\frac{R}{2}-\frac{\alpha}{4}$ проходит через какую-нибудь из точек $\alpha_{n_0}+i\beta_{n_0}$, будем иметь на прямолинейном отрезке контура C $z=a+ib$, где

$$b=\beta_{n_0}=\frac{R}{2}-\frac{\alpha}{4}\geqslant\frac{R+|\alpha_{n_0}|}{6}\geqslant\frac{|a-\alpha_{n_0}|}{6};$$

поэтому

$$\left|\frac{s(z)+it(z)}{s(z)-it(z)}\right|>\frac{1+\dfrac{2b\beta_{n_0}}{(a-\alpha_{n_0})^2+b^2+\beta_{n_0}^2}}{1-\dfrac{2b\beta_{n_0}}{(a-\alpha_{n_0})^2+b^2+\beta_{n_0}^2}}>\frac{1+\dfrac{2}{38}}{1-\dfrac{2}{38}}=\frac{10}{9};$$

следовательно, в силу (85), на этой части контура C:

$$\left|\frac{t(z)}{s(z)}\right|<\frac{\dfrac{\sqrt{10}}{3}+1}{\dfrac{\sqrt{10}}{3}-1}=19+6\sqrt{10}$$

также ограничена.

Итак, остается лишь показать, что знакопостоянный ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n^2\,\Phi'(\gamma_n)}$$

сходится. Для этого замечаем, что, вследствие (79)

$$|\Phi'(\gamma_n)|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k},\tag{86}$$

поэтому, замечая, что переход от γ_n к γ_{n+1} соответствует увеличению Φ на π, имеем

$$|\gamma_n-\gamma_{n-1}|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k}>\pi,$$

откуда следует, что при $|n| \to \infty$, γ_n бесконечно растет не медленней, чем в арифметической прогрессии, так как

$$|\gamma_n - \gamma_{n-1}| > \frac{\pi}{\sum_1^\infty \frac{1}{\beta_k}} = d > 0. \tag{87}$$

С другой стороны, при $|\gamma| > a > 2\alpha_k$,

$$-\gamma^2 \Phi(\gamma) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\gamma^2 \beta_k}{(\gamma - \alpha_k)^2 + \beta_k^2} = \mu(\gamma) \sum_{k=1}^\infty \frac{(\gamma - \alpha_k)^2 \beta_k}{(\gamma - \alpha_k)^2 + \beta_k^2},$$

где $\frac{4}{9} < \mu(\gamma) < 4$, так как $\dfrac{\gamma^2}{\left(\gamma + \frac{a}{2}\right)^2} < \dfrac{\gamma^2}{(\gamma - \alpha_k)^2} < \dfrac{\gamma^2}{\left(\gamma - \frac{a}{2}\right)^2}$.

Таким образом, замечая, что все члены суммы

$$-\frac{1}{\mu(\gamma)} \gamma^2 \Phi'(\gamma) = \sum_1^\infty \frac{(\gamma - \alpha_k)^2 \beta_k}{(\gamma - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}$$

возрастают вместе с $|\gamma| > a$, а потому и вся сумма возрастаѐт вместе с $|\gamma|$, заключаем, что ряд

$$-\sum_{-\infty}^\infty \frac{\mu(\gamma_n)}{\gamma_n^2 \Phi'(\gamma_n)},$$

члены которого убывают (при $|\gamma_n| > a$), сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{-\infty}^\infty \frac{1}{\gamma_n^2 \Phi'(\gamma_n)}$. Но рассматривая $\Phi(\gamma)$ как независимую переменную и $\gamma(\Phi)$ как функцию переменной Φ, имеющую конечную непрерывную производную

$$\gamma'(\Phi) = \frac{1}{\Phi'(\gamma)},$$

причем $\gamma_n = \gamma(-n\pi)$, имеем:

$$-\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\gamma_n)}{\gamma_n^2 \Phi'(\gamma_n)} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\gamma^2(n\pi)} \gamma'(n\pi),$$

и так как члены этого знакопостоянного ряда убывают, то сходимость его, благодаря интегральному признаку сходимости Коши, вытекает из сходимости интеграла

$$\int_{\Phi(a)}^\infty \frac{\gamma'(\Phi)}{\gamma^2(\Phi)} d\Phi = \frac{1}{a}.$$

Таким образом, формула (84) доказана и вместе с тем установлено, что ряд

$$Q_1(x) = s(x) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{-x L_n}{\gamma_n (x - \gamma_n) \Phi'(\gamma_n)} \tag{88}$$

также является абсолютно сходящимся при всех конечных значениях, если $L_n < L$ ограничены; следовательно,

$$\varphi_1(x) = \frac{Q_1(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}} = -\cos\Phi(x) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x L_n}{\gamma_n (x - \gamma_n) \Phi'(\gamma_n)} \tag{88 bis}$$

удовлетворяет условиям (83). Однако эта функция не может удовлетворять требованию $\varphi_1'(0) = 0$, потому что

$$\varphi_1'(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{\gamma_n^2 \Phi'(\gamma_n)} < 0,$$

как сумма отрицательных слагаемых. Поэтому, если существует дробь (82), удовлетворяющая, кроме $\varphi(0) = 0$ и (83), также и условию $\varphi'(0) = 0$, то она должна быть вида

$$\varphi(x) = \frac{Q(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}} = \varphi_1(x) + \frac{x s(x) P(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}} =$$
$$= \frac{Q_1(x) + x s(x) P(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}}, \tag{82 bis}$$

где $P(x)$ — некоторая целая функция (или многочлен), неравная тождественно нулю.

Но, как мы сейчас увидим, если, согласно условию теоремы, функция $\varphi(x)$ должна быть ограничена при всех вещественных значениях x, то $P(x)$ стремится к нулю для всех $x \to \pm\infty$, где

$$|\cos\Phi| = \left| \frac{s(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}} \right| > \lambda > 0;$$

так что $P(x)$ во всяком случае *не может быть многочленом.* Для этого достаточно будет убедиться, что

$$\lim_{\pm x = \infty} \frac{\varphi_1(x)}{x} = 0. \tag{89}$$

Пусть $x = R > \alpha$ будет весьма большим положительным (для определенности) числом

$$\gamma_{n_0 - 1} < R \leqslant \gamma_{n_0}.$$

В таком случае, все члены суммы (88), как и суммы (84), соответствующие $n > n_0 + 1$, будут иметь одинаковый знак, так как

$\gamma_n - R > 0$, а все члены с $n < n_0$ будут также одинакового между собой другого знака, так как для них $\gamma_n - R < 0$.

Таким образом

$$\frac{\varphi_1(R)}{R} = \cos\Phi(R)\sum_{n_0+2}^{\infty}\frac{L_n}{\gamma_n(\gamma_n - R)\Phi'(\gamma_n)} +$$
$$+\cos\Phi(R)\sum_{-\infty}^{n_0-1}\frac{L_n}{\gamma_n(\gamma_n - R)\Phi'(\gamma_n)} + \frac{L_n\cos\Phi(R)}{\gamma_{n_0}(\gamma_{n_0} - R)\Phi'(\gamma_{n_0})} +$$
$$+\frac{L_{n_0+1}\cos\Phi(R)}{\gamma_{n_0+1}(\gamma_{n_0+1} - R)\Phi'(\gamma_{n_0+1})}. \tag{90}$$

Что касается выделенных последних двух членов, то с возрастанием R каждый из них стремится к нулю: действительно, если $\gamma_n \geqslant 2R$, то

$$I_n = \left|\frac{L_n\cos\Phi(R)}{\gamma_n(\gamma_n - R)\Phi'(\gamma_n)}\right| \leqslant \frac{2L}{\gamma_n^2|\Phi'(\gamma_n)|},$$

а мы показали выше, что $\gamma_n^2|\Phi'(\gamma_n)| \to \infty$; если же $R \leqslant \gamma_n < 2R$, то

$$I_n = \left|\frac{L_n(\cos\Phi(R) - \cos\Phi(\gamma_n))}{\gamma_n(\gamma_n - R)\Phi'(\gamma_n)}\right| < \frac{L_n\Phi'(R)}{\gamma_n\Phi'(\gamma_n)} < \frac{2L}{R}\,\frac{|R^2\Phi'(R)}{\gamma_n^2\Phi'(\gamma_n)}$$

также стремится к нулю, потому что $\frac{\mu(\gamma)}{\gamma^2\Phi'(\gamma)}$ убывает, как было замечено раньше. Но сумма положительных членов (убывающих с точностью до ограниченного множителя $\mu(\gamma)$)

$$-\sum_{n_0+2}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n(\gamma_n - R)\Phi'(\gamma_n)}$$

меньше (с точностью до ограниченного множителя), чем

$$\int_{\gamma_{n_0+1}}^{\infty}\frac{d\gamma}{\gamma(\gamma - R)} = \frac{1}{R}\lg\frac{\gamma_{n_0+1}}{\gamma_{n_0+1} - R} < \frac{1}{R}\lg\frac{R}{\gamma_{n_0+1} - \gamma_{n_0}},$$

т. е. стремится к нулю, вследствие (87).

Таким образом, принимая во внимание, что, полагая $L_n = 1$ во второй части (90), мы получим $\frac{\sin\Phi(R)}{R}$ (согласно (84 bis), заключаем, что сумма членов одинакового знака

$$\sum_{n_0-1}^{-\infty}\frac{\cos\Phi(R)}{\gamma_n(\gamma_n - R)\Phi'(\gamma_n)}$$

также стремится к нулю с возрастанием R.

Следовательно, мы установили не только, что

$$\lim_{x=\pm\infty}\frac{\varphi_1(x)}{x} = 0 \tag{89}$$

но также, что

$$\cos\Phi(R)\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{L_n}{\gamma_n(R-\gamma_n)\Phi'(\gamma_n)}\right|\to 0. \tag{89 bis}$$

Поэтому, если $z=Re^{i\theta}$ — любая точка окружности весьма большого радиуса R, то тем более

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{L_n}{\gamma_n(z-\gamma_n)\Phi'(\gamma_n)}\right|\to 0 \tag{91}$$

при условии, что $|\cos\Phi(\pm R)|>\lambda>0$. Отсюда следует [1]), что степень целой функции $Q_1(x)$, представленной рядом (88), не может быть выше степени $s(x)$, т. е. должна быть *равна нулю*.

Следовательно, для того чтобы функция $Q(x)$ в формуле (82 bis) была нулевой степени, необходимо, чтобы и функция $P(x)$ (которая не может быть многочленом) была нулевой степени. Остается показать, что это невозможно, если, как было установлено при произвольно малом ε, должно иметь место $|P(x)|<\frac{\varepsilon}{|\cos\Phi(x)|}$ при всех вещественных достаточно больших значениях x.

Для этого положим

$$P(x)=\sum_{0}^{m}c_kx^k+\sum_{m+1}^{\infty}c_kx^k.$$

В таком случае, принимая во внимание, что $\lim\limits_{k=\infty}k\sqrt[k]{|c_k|}=0$, можем выбрать m достаточно большим, чтобы при $|x|\leqslant 2m$

$$\sum_{m+1}^{\infty}|c_kx^k|<\sum_{m+1}^{\infty}\varepsilon^k<\varepsilon.$$

Поэтому многочлен $P_1(x)=\sum\limits_{0}^{m}c_kx^k$ степени m, несомненно, остается менее $\frac{2\varepsilon}{|\cos\Phi(x)|}$ по абсолютному значению в промежутке $(\gamma_{n-1}+\alpha,\ \gamma_n-\alpha)$, если $\gamma_n\leqslant m$ и $\alpha=\frac{\gamma_n-\gamma_{n-1}}{2m^2}$. При этом минимум $|\cos\Phi(x)|$, который будет достигаться в одном из концов, например, в точке $\gamma_n-\alpha$, равен

$$|\cos\Phi(\gamma_n-\alpha)|=\alpha\,|\Phi'(\xi)\sin\Phi(\xi)|,$$

[1]) Благодаря лемме II § 8, так как отношение радиусов последовательных окружностей, где (91) имеет место, стремится к пределу 1.

где $\gamma_n - \alpha < \xi < \gamma$; таким образом, во всем рассматриваемом промежутке

$$|\cos\Phi(x)| \geqslant \alpha \left|\Phi'(\xi)\sqrt{1-\cos^2\Phi(x)}\right| > \frac{2H\alpha}{\xi^2}\sqrt{1-\cos^2\Phi(x)} >$$
$$> \frac{2H\alpha}{\gamma_n^2}\sqrt{1-\cos^2\Phi(x)},$$

так как $|\Phi'(x)x^2|$ имеет отличную от нуля нижнюю границу $2H$ при $|x| \geqslant 1$, откуда (полагая $2H\alpha \leqslant \gamma_n^2$)

$$|\cos\Phi(x)| > \frac{2H\alpha}{\sqrt{\gamma_n^4 + 4H^2\alpha^2}} > \frac{H\alpha}{\gamma_n^2} > \frac{H\alpha}{m^2}.$$

Поэтому в промежутке $(\gamma_{n-1}+\alpha,\ \gamma_n - \alpha)$ имеем:

$$|P_1(x)| < \frac{2\varepsilon m^2}{H\alpha} = \frac{4\varepsilon m^4}{H(\gamma_n - \gamma_{n-1})} < \frac{4\varepsilon m^4}{Hd}, \tag{92}$$

где d — ранее указанная нижняя граница $|\gamma_n - \gamma_{n-1}|$. Но, применяя к многочлену $P_1(x)$ степени m неравенство (17_{I} bis), из (92) выводим, что на отрезке $(\gamma_{n-1} - \alpha,\ \gamma_n + \alpha)$

$$|P_1(x)| < \frac{4\varepsilon m^4}{H\alpha}\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{\gamma_n - \gamma_{n-1} + 2\alpha + \sqrt{(\gamma_n - \gamma_{n-1} + 2\alpha)^2 - (\gamma_n - \gamma_{n-1} - 2\alpha)^2}}{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 2\alpha}\right]^m =$$
$$= \frac{4\varepsilon m^4}{H\alpha}\left[\frac{1 + \frac{1}{m^2} + \frac{2}{m}}{1 - \frac{1}{m^2}}\right]^m = \frac{4\varepsilon m^4}{H\alpha}\left(\frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}}\right) < C\varepsilon m^4, \tag{92 bis}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная.

Таким образом, принимая во внимание, что, если $\gamma_{n+1} - \alpha > m$, то в промежутке $(\gamma_n + \alpha,\ m)$ также соблюдается (92 bis), видим, что неравенство вида

$$|P_1(x)| < C_1 m^4 + C_2,$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — не зависящие от x постоянные, имеет место на всем отрезке $(-m, +m)$. Поэтому на том же отрезке

$$|P(x)| < C_1 m^4 + C_2 + \varepsilon. \qquad (-m < x < m) \tag{93}$$

Следовательно, на основании следствия IV § 8, целая функция $P(x)$ должна была бы быть многочленом, что, как мы видели, также невозможно. Таким образом теорема I доказана.

Теорема II. *Из всех дробей вида*

$$\varphi(x) = \frac{Q(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}}, \tag{94}$$

где $Q(x) = c_0 + x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$ *целая функция нулевой степени, а*

$$s(x) + it(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{\alpha_k - i\beta_k}\right) \qquad \left(\beta_k > 0,\ |\alpha_k| < \frac{1}{2}a\right)$$

целая функция нулевого рода, наименее уклоняется от нуля на всей действительной оси функция [1])

$$f(x) = \frac{A\,s(x) + B\,t(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}} = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\Phi - \lambda), \qquad (78\text{ bis})$$

которая не превышает на этой оси значения

$$L = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{\left|\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k - i\beta_k}\right|}. \qquad (95)$$

Действительно, $f(x)$ будет принадлежать к классу функций (94), если постоянные A и B удовлетворяют уравнению $As'(0) + Bt'(0) = 1$; при этом, согласно замечаниям, сделанным в начале этого параграфа, $t'(0) \gtrless 0$.

В таком случае

$$As(x) + Bt(x) = A + x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

и вследствие теоремы I,

$$f(x) = \frac{A\,s(x) + B\,t(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}} \qquad (78\text{ bis})$$

будет наименее уклоняющейся на всей оси среди функций, у которых

$$Q(x) = A + x + c_2x^2 + \ldots$$

имеет не только коэффициент при x, равный единице, но и свободный член c_0, равный взятому произвольному числу A $(c_0 = A)$. Действительно, если бы это было не так, то функция

$$\frac{A\,s(x) + B\,t(x) - Q(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}}$$

имела бы знак $A\,s(x) + B\,t(x)$ в точках, где $f(x)$ достигает своего экстремума, т. е. в точках, где $At(x) - Bs(x) = 0$, оставаясь при этом ограниченной (меньшей, чем $2\sqrt{A^2 + B^2}$) на всей оси, что противоречит упомянутой теореме, так как целая функция нулевой степени $A\,s(x) + B\,t(x) - Q(x)$ имеет двойной корень $x = 0$. Таким образом, остается лишь так подобрать коэффициенты A и B, удовлетворяющие

---

[1]) Следует заметить, что теорема II вполне эквивалентна теореме I, так как, если бы теорема I была не верна, вычитая из (78 bis) дробь (82), умноженную на достаточно малую постоянную λ, мы получили бы уклонение, меньшее, чем (95).

$As'(0)+Bt'(0)=1$, чтобы абсолютный экстремум $|f(x)|$, равный $\sqrt{A^2+B^2}$, был минимален. Для этого нужно, чтобы

$$A^2+B^2=\frac{A}{s'(0)}=\frac{B}{t'(0)}=\frac{1}{(s'(0))^2+(t'(0))^2}.$$

Следовательно, наименьшее уклонение L равно

$$L=\sqrt{A^2+B^2}=\frac{1}{|s'(0)+it'(0)|}=\frac{1}{\left|\sum\limits_1^\infty\frac{1}{\alpha_k+i\beta_k}\right|}. \tag{95}$$

Без сомнения, ограничение, что корни функции $s^2(x)+t^2(x)$ удовлетворяют условию $|\alpha_k|<\frac{1}{2}\alpha$, было вызвано методом доказательства теоремы I, и желательно было бы от него освободиться. Сейчас мы от него полностью освободимся для случая, когда $s^2(x)+t^2(x)$ есть функция *четная*.

Теорема II bis. *Теорема II остается в силе, если заменить условие ограниченности* $\left(|\alpha_k|<\frac{1}{2}\alpha\right)$ *вещественных частей* α_k *корней* $s(x)+it(x)$ *условием, что при* $\alpha_k\gtrless 0$ *каждый корень* $\alpha_k-i\beta_k$ *сопровождается корнем* $-\alpha_k-i\beta_k$ *(т. е.* $s^2(x)+t^2(x)$ *— четная функция).*

В самом деле, полагая, как в случае многочленов, $\alpha_k+i\beta_k=r_ke^{i\theta_k}$, видим, что в данном случае минимум M абсолютного экстремума функции (78 bis), удовлетворяющей условию $As'(0)+Bt'(0)=1$, равен

$$M=\frac{1}{\left|\sum\limits_1^\infty\frac{1}{\alpha_k+i\beta_k}\right|}=\frac{1}{\sum\limits_1^\infty\frac{\sin\theta_k}{r_k}}.$$

Поэтому наименьшее уклонение L функции (94) во всяком случае не превышает M. Следовательно,

$$L\leqslant M. \tag{96}$$

С другой стороны, если мы заменим функцию $s^2(x)+t^2(x)$ такой функцией $s_\alpha^2(x)+t_\alpha^2(x)$, чтобы корни $\alpha_k\pm i\beta_k$, где $|\alpha_k|\leqslant\frac{\alpha}{2}$, остались неизменны, а каждому корню, у которого $\alpha_k>\frac{\alpha}{2}$, соответствовал корень того же модуля r_k, но с вещественной частью, равной $\frac{\alpha}{2}$, то, как бы велико ни было данное $\alpha>0$, к этой новой функции применима теорема II. Таким образом, наименьшее уклонение L_α функции вида

$$\frac{Q(x)}{\sqrt{s_\alpha^2(x)+t_\alpha^2(x)}}$$

равно

$$L_\alpha = \frac{1}{\sum_1^\infty \frac{\sin \theta_k'}{r_k}},$$

где $0 < \theta_k' \leqslant \frac{\pi}{2}$, причем $\theta'_k > \theta_k$, так как произведенное смещение корней по окружности, приближающее их к мнимой оси, очевидно, увеличивает острый угол θ_k. Но нетрудно видеть, что при всех вещественных значениях x

$$s_\alpha^2(x) + t_\alpha^2(x) \geqslant s^2(x) + t^2(x),$$

так как произведение четырех множителей, соответствующих $\pm\alpha_k \pm i\beta_k$,

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha_k - i\beta_k}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_k + i\beta_k}\right)\left(1 + \frac{x}{\alpha_k - i\beta_k}\right)\left(1 + \frac{x}{\alpha_k + i\beta_k}\right) =$$

$$= 1 + \frac{2x^2(r_k^2 - 2\alpha_k^2) + x^4}{r_k^4}$$

заменится бóльшим значением

$$1 + \frac{2x^2\left(r_k^2 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + x^4}{r_k^4}.$$

Следовательно, наименьшее уклонение L_α измененной дроби не может превысить наименьшего уклонения L дроби (94) с знаменателем

$$\sqrt{s^2(x) + t^2(x)},$$

т. е.

$$L_\alpha \leqslant L$$

при любом α. Но при $\alpha \to \infty$, L_α имеет пределом M. Поэтому, имеем $M \leqslant L$ и вследствие (96)

$$L = M.$$

Следствие I. *Пусть $P(x)$ будет целой функцией нулевой степени (или многочленом); пусть $s^2(x) + t^2(x)$ будет целой функцией нулевого рода, либо четной, либо удовлетворяющей условию* (81), *причем $s(x) + it(x)$, имеет корни лишь в нижней полуплоскости. Если на всей вещественной оси*

$$|P(x)| \leqslant |s(x) + it(x)|, \tag{12 bis}$$

то на этой же оси производные любого порядка удовлетворяют неравенствам

$$\left.\begin{array}{l} |P'(x)| \leqslant |s'(x) + it'(x)| \\ \dots\dots\dots\dots \\ |P^{(k)}(x)| \leqslant |s^{(k)}(x) + it^{(k)}(x)| \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{13 bis}$$

Действительно, если бы первое из неравенств (13 bis) для $x = 0$ не было выполнено, то, согласно теореме II (или II bis), неравенство

(12 bis) не могло бы осуществиться на всей оси; но так как от переноса начала координат в любую точку вещественной оси неравенство (12 bis) не изменяется, то первое из неравенств (13 bis) верно для любого вещественного x. Следующее из неравенств (13 bis) вытекает из первого, так как производная $s'(x)+it'(x)$ от функции нулевого рода $s(x)+it(x)$ также нулевого рода, причем, если $s^2(x)+t^2(x)$ четная функция, то и $s'^2(x)+t'^2(x)$ тоже четная функция, а если все корни $s(x)+it(x)$ заключены между прямыми $x=\pm\frac{1}{2}a$, то и корни $s'(x)+it'(x)$ заключены между теми же прямыми. Таким образом, последовательно получаются все неравенства (13 bis).

Следствие II. *Если*

$$P(x)=\sum_0^{\infty} c_n x^n$$

целая функция нулевой степени $\left(\lim n\sqrt[n]{|c_n|}=0\right)$, *если все корни функции нулевого рода*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k}+i\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$$

(a_n — *вещественные числа*) *лежат в нижней полуплоскости и если существует хоть одно значение* n, *для которого*

$$\left|\frac{c_n}{a_n}\right|\geqslant t,$$

то должны существовать вещественные значения x, *для которых*

$$|P(x)|\geqslant t\,|f(x)|.$$

В частности, если $\overline{\lim}\left|\frac{c_n}{a_n}\right|=\infty$, то и $\overline{\lim}\frac{P(x)}{f(x)}=\infty$. Я не буду останавливаться здесь на приложениях этих теорем к теории целых функций нулевого ряда, предлагая читателю в качестве введения к этим исследованиям некоторые замечания и примеры, указанные в моей французской книге („L. S."). Ограничусь только одним примером приложения последнего следствия, который мы используем в дальнейшем. Пусть

$$f(x)=\cos\sqrt{ix}=1-\frac{ix}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\ldots=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{ix}{\pi^2\left(n^2+\frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

В таком случае

$$|f(x)|^2=\prod_0^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\pi^4\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}\right)=\cos\sqrt{ix}\cdot\cos\sqrt{-ix}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[e^{\sqrt{2x}}+e^{-\sqrt{2x}}+e^{\sqrt{-2x}}+e^{-\sqrt{-2x}}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[e^{\sqrt{2x}}+e^{-\sqrt{2x}}+2\cos\sqrt{2x}\right].$$

Поэтому, если функция $P(x)$ нулевой степени имеет хоть один коэффициент $|c_n|=\frac{t}{2n!}>0$, то на всякой прямой, проходящей через начало координат, существуют значения x, где

$$|P(x)|e^{-\sqrt{\frac{|x|}{2}}}>\frac{t}{4}.$$

В частности, если $\overline{\lim}\, 2n!\,|c_n|=\infty$, то $P(x)e^{-\sqrt{\frac{|x|}{2}}}$ не остается ограниченной ни на одной прямой, проходящей через начало. Отсюда следует также, что, если

$$P_1(x)=P(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}c'_{2n}x^{2n} \qquad \left(\lim n^{\frac{1}{2}}\sqrt[2n]{|c'_{2n}|}=0\right)$$

имеет хоть один коэффициент

$$c'_{2n}=\frac{t}{2n!},$$

то по крайней мере на одной из двух взаимо-перпендикулярных прямых, проходящих через начало, есть значения x, где

$$|P_1(x)|e^{-\frac{|x|}{\sqrt{2}}}>\frac{t}{4},$$

откуда получаем

Следствие III. *Если функция конечной степени $P_1(x)=\sum c_n' x^n$ имеет хоть один коэффициент $c_n'=\pm\frac{t}{n!\,R^n}$, то на всякой паре взаимно-перпендикулярных прямых, проходящих через начало, существуют точки, где*

$$|P_1(x)|\,e^{-\frac{|x|}{R\sqrt{2}}}>\frac{t}{4}.$$

§ 10. Экстремальные свойства целых функций первого рода конечной степени

Перейдем теперь к рассмотрению целых функций $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ конечной степени p, т. е. положим, согласно данному в § 8 определению, что

$$\lim n\sqrt[n]{|a_n|}=ep>0. \tag{97}$$

Условие (97) равноценно условию

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|f^{(n)}(0)|}=p,$$

так как

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{и} \quad \lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = 1$$

Кроме того, соблюдение условия (97) в точке O, в силу следствия VI § 8, влечет за собой

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|f^{(n)}(c)|} = p \tag{97 bis}$$

в любой точке определенной конечной области. В частности, функции

$$A\sin(px + b)$$

при любых постоянных значениях A и b будут степени p. Эти функции обладают важными экстремальными свойствами, которые мы сейчас установим.

Теорема. *Среди целых функций $f(x)$ степени не выше p, подчиненных условию $f'(0) = 1$*

$$f(x) = a_0 + x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{98}$$

наименее уклоняется от нуля на всей действительной оси функция $\frac{1}{p}\sin px$, не превышая на этой оси по абсолютному значению

$$L = \frac{1}{p}. \tag{99}$$

Для доказательства мы сначала немного ограничим рассматриваемый нами класс функций (98), полагая

$$n!\,|a_n| \leqslant Hp^n, \tag{100}$$

где $H > 1$ — произвольно данное число. Очевидно, функция $\frac{1}{p}\sin px$ принадлежит и к этому более узкому классу функций степени p. Кроме того, делая замену переменной $px = t$, можем, не нарушая общности, положить $p = 1$. Итак, докажем, что из всех функций (98) для которых

$$n!\,|a_n| \leqslant H, \tag{100 bis}$$

$\sin x$ наименее уклоняется от нуля на всей действительной оси.

Для этого, прежде всего, заметим, что если существует такая функция $f(x)$, что

$$|f(x)| \leqslant 1 - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

на всей оси, то

$$\left|\frac{f(x) - f(-x)}{2}\right| \leqslant 1 - \varepsilon,$$

причем нечетная функция $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ также принадлежала бы к классу рассматриваемых функций. Поэтому, если бы $\sin x$ не была функцией, наименее уклоняющейся от нуля на всей действительной оси, то существовала бы нечетная функция $\varphi(x)$, ограниченная на всей оси,

$$\varphi(x) = \sin x - \frac{f(x) - f(-x)}{2} = b_3 x^3 + \ldots + b_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots,$$

где $|n!\, b_n| < 2H$, которая принимала бы при

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n, \ldots)$$

значения $A_k(-1)^k$, где

$$0 < \varepsilon \leqslant A_k < 2 - \varepsilon.$$

Покажем, что такой функции $\varphi(x)$ не существует.

Действительно, мы имели бы

$$\varphi(x) = \cos x \sum_0^{\infty} \frac{2A_k x}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - x^2} + P(x) \cos x, \tag{101}$$

где $P(x)$ должен быть целой нечетной функцией, отличной от нуля, так как коэффициент при x первого слагаемого во второй части равенства (101), представляя сходящуюся сумму положительных членов

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2},$$

отличен от нуля.

Но, полагая $x = R > 0$, где $\left(k_0 - \frac{1}{2}\right)\pi < R \leqslant \left(k_0 + \frac{1}{2}\right)\pi$, видим, что

$$\sum_{k=k_0+2}^{\infty} \frac{2A_k R}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - R^2} < \frac{4R}{\pi^2} \sum_{k=k_0+2}^{\infty} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(k_0 + \frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{4R}{\pi^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n + 2k_0 + 1)} < \frac{4R}{\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x + 2k_0 + 1)} =$$

$$= \frac{4R \lg(2k_0 + 2)}{\pi^2 (2k_0 + 1)} < \frac{2}{\pi} \lg\left(\frac{2R}{\pi} + 3\right)$$

и

$$R|\cos R| \left[\frac{2A_{k_0}}{\left(k_0 + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - R^2} + \frac{2A_{k_0+1}}{\left(k_0 + \frac{3}{2}\right)^2 \pi^2 - R^2} \right] <$$

$$< 4R\left[\frac{1}{R+\left(k_0+\frac{1}{2}\right)\pi}+\frac{1}{R+\left(k_0+\frac{3}{2}\right)\pi}\right]< 8.$$

Поэтому, принимая во внимание, что

$$\left|\cos R\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2R}{R^2-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right|=|\sin R|\leqslant 1,$$

заключаем, что и сумма прочих членов (одинакового между собой знака) в первом слагаемом правой части (101) удовлетворяет неравенству

$$|\cos R|\sum_{k=0}^{k_0-1}\frac{2A_kR}{R^2-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}< 10+\frac{2}{\pi}\lg\left(\frac{2R}{\pi}+3\right).$$

Следовательно,

$$|\cos R|\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{2A_kR}{R^2-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right|< 18+\frac{4}{\pi}\lg\left(\frac{2R}{\pi}+3\right). \quad (102)$$

Из неравенства (102) можем сделать два существенных заключения. Во-первых, в случае ограниченности $\varphi(x)$, можно, благодаря (101), указать две такие постоянные A и B, что

$$|P(x)\cos x|< A+B\lg x \quad (103)$$

на всей действительной оси.

Во-вторых, во всех точках z окружности C радиуса $R_0=k_0\pi$ мы должны иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{2A_kz}{z^2-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi^2}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{2A_kR_0}{R_0^2-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi^2}\right|< 18+$$
$$+\frac{4}{\pi}\lg\left(\frac{2R_0}{\pi}+3\right),$$

откуда следует, что на той же окружности C

$$\left|\cos z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2A_kz}{z^2-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right|< e^{R_0}\left|18+\frac{4}{\pi}\lg\left(\frac{2R_0}{\pi}+3\right)\right|,$$

т. е. первое слагаемое во второй части (101) есть целая функция не выше первой степени.

Между тем из $|n!b_n|< 2H$ следует, что

$$|\varphi(z)|< 2He^R$$

на окружности любого радиуса R. Следовательно, должны были бы существовать такие постоянные M и N, что для всякого $z\,(|z|\geqslant 1)$

$$|P(z)\cos z|<(M\lg|z|+N)e^{|z|}. \tag{104}$$

Покажем, что неравенства (103) и (104) несовместимы.

Действительно, из (104) следует, что, если z находится на мнимой оси, то

$$|P(z)|<2[M\lg|z|+N], \qquad (|z|\geqslant 1). \tag{105}$$

Но, с другой стороны, так как на всех окружностях C бесконечно возрастающих радиусов $R_0=k_0\pi$

$$|\cos z|=|\cos R_0e^{i\theta}|\geqslant|\cos R_0|=1,$$

то на этих окружностях

$$|P(z)|<e^{|z|}(M\lg|z|+N) \tag{104 bis}$$

и потому, согласно лемме II § 8, степень функции $P(z)$ не может быть больше, чем 1.

Но посредством рассуждения, аналогичного тому, которым мы закончили доказательство теоремы I § 9, мы и здесь без труда убедимся, что неравенство (103) влечет за собой неравенство вида

$$|P(x)|<Cx^2\lg|x| \tag{106}$$

для всех достаточно больших вещественных значений x, где C — независимая от x постоянная. В самом деле,

$$P(x)=\sum_1^\infty \alpha_nx^n=P_{n_0}(x)+R_{n_0}(x),$$

где

$$P_{n_0}(x)=\sum_1^{n_0}\alpha_nx^n$$

многочлен степени n_0, достаточно высокой, чтобы при $n>n_0$ иметь [так как $P(x)$ целая функция первой степени]

$$n\sqrt[n]{|\alpha_n|}<e+\varepsilon,$$

как бы мало ни было заданное число $\varepsilon>0$. Тогда, полагая $|x|\leqslant h=\frac{n_0}{3e}$, можем взять n_0 достаточно большим, чтобы $|R_{n_0}(x)|<\varepsilon$. В таком случае, если x находится в промежутке

$$\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi+\alpha,\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\alpha\right],$$

то, вследствие (103):

$$|P_{n_0}(x)|<\frac{A+B\lg|x|}{\sin\alpha}+\varepsilon.$$

Поэтому, благодаря (17_1 bis), имеем для всякого значения x на отрезке $\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$, (пренебрегая ε):

$$|P_{n_0}(x)| < \frac{A+B\lg\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{\sin\alpha}\left[\frac{\frac{\pi}{2}+\sqrt{(\pi-\alpha)\alpha}}{\frac{\pi}{2}-\alpha}\right]^{n_0};$$

следовательно, полагая $\alpha=\frac{1}{n_0{}^2}$ и $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ близким к h, можем установить постоянную C так, чтобы при всяком $\pm x$, достаточно большом, соблюдалось неравенство

$$|P(x)| < Cx^2 \lg x.$$

Но неравенство (105) исключает возможность для $P(x)$ быть многочленом, а потому неравенство (105) на мнимой оси и неравенство (106) на действительной оси, благодаря следствию V, § 8, несовместимы при условии что

$$\lim n^{\frac{1}{2}} \sqrt[n]{|\alpha_n|}=0,$$

которому, очевидно, удовлетворяет целая функция конечной степени $P(x)$.

Таким образом, мы доказали, что функция

$$f(x)=a_0+x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

коэффициенты которой удовлетворяют условию, что

$$|n!a_n| \leqslant Hp^n, \tag{100}$$

не может на всей вещественной оси оставаться меньше по абсолютному значению, чем $\frac{1}{p}$, причем это значение $\frac{1}{p}$ не будет превзойдено, если $f(x)=\frac{1}{p}\sin px$. Я говорю, что то же заключение остается в силе, если условие (100) заменить более широким условием (97), высказанным в теореме. Действительно, если дано только, что

$$\overline{\lim}\,\frac{n}{e}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim}\sqrt[n]{n!\,|a_n|}\leqslant p,$$

то это значит, что при произвольно малом $\varepsilon>0$ можно указать такую постоянную H, что

$$n!\,|a_n| \leqslant H(p+\varepsilon)^n$$

при всяком n. Следовательно, по доказанному, как бы мало ни было $\varepsilon>0$, нельзя осуществить на всей оси неравенство

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{p+\varepsilon},$$

так что наилучший возможный результат остается тот же:

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{p}.$$

Следствие 1. *Если целая функция $f(x)$ степени p удовлетворяет на всей действительной оси неравенству*

$$|f(x)| \leqslant L, \tag{107}$$

то ее производные $f^{(k)}(x)$ любого порядка удовлетворяют неравенствам

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant Lp^k, \tag{108}$$

при этом знак равенства фактически осуществляется, когда $f(x) = L \sin p(x+C)$, где C — произвольная постоянная.

Действительно, какова бы ни была точка x_0 вещественной оси, если $|f'(x_0)| = M_1$, то по доказанной теореме

$$L \geqslant \frac{M_1}{p},$$

откуда следует

$$|f'(x_0)| \leqslant Lp.$$

Применяя то же рассуждение к первой производной, являющейся также целой функцией степени p, убеждаемся, что неравенство (108) справедливо также и для $k=2$, и т. д.

Следствие II. *Если при всех вещественных x*

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} (A_i \cos p_i x + B_i \sin p_i x) \right| \leqslant L, \tag{107 bis}$$

где $p_i \leqslant p$ и $\sum\limits_0^{\infty} [|A_i| + |B_i|]$ сходится, то при всех вещественных x соблюдаются также неравенства

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant Lp^k. \tag{108 bis}$$

Действительно, $f(x)$ есть целая функция степени не выше p, так как

$$|f^{(k)}(0)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} p_i^k A_i \right| \leqslant p^k \sum_{i=0}^{\infty} |A_i|$$

или

$$|f^{(k)}(0)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} p_i^k B_i \right| \leqslant p^k \sum_{i=0}^{\infty} |B_i|.$$

Таким образом, теорема I § 7 является частным случаем этого следствия.

Следствие III. *Если*

$$f(x) = \sum^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$$

и $\overline{\lim}\sqrt[n]{|B_n|}=p$, *то функция* $f(x)$ *не может оставаться ограниченной ни на одной прямой, проходящей через начало координат, если* $\overline{\lim}\dfrac{|B_n|}{p^n}=\infty$.

Примечание. Нетрудно убедиться, что функция $\frac{1}{p}\sin px$ является *единственной* функцией $f(x)$ степени p, имеющей $f'(0)=1$ и удовлетворяющей на всей действительной оси неравенству $|f(x)|\leqslant\frac{1}{p}$.

Действительно, вследствие доказанной теоремы, не может быть функции

$$\varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_{2k+1}x^{2k+1}$$

степени p, ограниченной ($|\varphi_1(x)|\leqslant N$) на всей оси, которая во всех точках $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ получает значения $(-1)^kA_k$, где $A_k\geqslant\varepsilon>0$, так как, принимая во внимание, что $|(\varphi'_1(x)|\leqslant Np$, $\varphi_1(x)$ сохраняет постоянный знак в каждом из промежутков $\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{\varepsilon}{Np},\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{\varepsilon}{Np}\right]$; поэтому возможно было бы выбрать постоянную λ достаточно малой, чтобы $\left|\frac{1}{p}\sin px-\lambda\varphi_1(x)\right|<\frac{1}{p}$ на всей оси. Следовательно, функция $\varphi(x)$, выражаемая формулой (101), не может быть ограниченной не только в том случае, когда b_n удовлетворяет условию (100 bis), но и всегда, когда $\varphi(x)$ — целая функция первой степени. Поэтому, если $P(x)\cos x$, где $P(x)$ — целая функция, ограничена на всей оси, то $P(x)\cos x$ не может быть функцией первой степени (так как первое слагаемое во второй части равенства (101) не выше первой степени).

Аналогичным образом устанавливаются теоремы, подобные следующей:

Существует одна и только одна целая функция $f(x)$ *степени* $\leqslant p$, *принимающая в точках* $\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{p}$ *произвольно заданные значения* $A_k\left(|A_k|<L\left|k+\frac{1}{2}\right|^{\alpha}\right)$, *обладающая свойством, что*

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(m-1)}(0)=0$$

и

$$\lim_{x=\pm\infty}\frac{f(x)}{x^m}=0, \qquad (\alpha<m).$$

Функция $f(x)$, определенная этими условиями, выражается абсолютно сходящимся рядом

$$f(x)=\left(\frac{px}{\pi}\right)^m\cos px\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}A_k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^m\left[px-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}.$$

§ 11. Дальнейшие обобщения

Теорема 1. *Если дробь вида*

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}}, \tag{109}$$

где $f(x)$ — целая функция степени $p>0$, а $s^2(x)+t^2(x)$ попрежнему целая функция нулевого рода (или многочлен), причем $\sum\frac{1}{|\beta_n|}$ сходится, ограничена на всей вещественной оси и получает знак $(-1)^k$ в точках δ_k, где $\Phi_1(\delta_k)=\Phi(\delta_k)-p\delta_k=\lambda+k\pi$ (λ — данная постоянная, k принимает все положительные и отрицательные целые значения и нуль, $\Phi(x)=\arg(s(x)+it(x))$, то $f(x)$ имеет только вещественные простые корни.

Применяя для доказательства тот же метод, каким была доказана аналогичная теорема 1 § 9 ($p=0$), достаточно лишь показать невозможность $f(0)=f'(0)=0$ при $\lambda=\frac{\pi}{2}$.

В данном случае ($p>0$) рассуждение значительно упрощается даже при менее ограничительных (чем (81)) предположениях о расположении корней $\alpha_k-i\beta_k$ функции $s(x)+it(x)$, благодаря тому, что для $|\delta_{n+1}-\delta_n|$ может быть указана не только *нижняя*, но и верхняя граница. Действительно,

$$p<-\Phi_1'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2}+p<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k}+p; \tag{110}$$

следовательно

$$\frac{\pi}{p+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k}}<|\delta_{n+1}-\delta_n|<\frac{\pi}{p},$$

и кроме того

$$\lim_{\pm n=\infty}|\delta_{n+1}-\delta_n|=\frac{\pi}{p}.$$

Вследствие этого ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\delta_n^2\Phi_1'(\delta_n)}$$

абсолютно сходится.

Таким образом, применяя метод вычетов Коши, получаем разложение

$$\frac{s(x)\sin px-t(x)\cos px}{t(x)\sin px+s(x)\cos px}=\frac{\cos\Phi\sin px-\sin\Phi\cos px}{\sin\Phi\sin px+\cos\Phi\cos px}=$$

$$=\frac{\sin(px-\Phi)}{\cos(px-\Phi)}=-\frac{\sin\Phi_1}{\cos\Phi_1}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\delta_n(x-\delta_n)\Phi_1'(\delta_n)}$$

в абсолютно сходящийся ряд простых дробей. Для этого нужно заметить, что контурами C, требуемыми методом Коши для разложения функции

$$\frac{\sin(px-\Phi)}{\cos(px-\Phi)}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i(px-\Phi)}-e^{-i(px-\Phi)}}{e^{i(px-\Phi)}+e^{-i(px-\Phi)}}=$$

$$=\frac{1}{i}\cdot\frac{1-e^{-2ipx}\cdot\dfrac{s(x)+it(x)}{s(x)-it(x)}}{1+e^{-2ipx}\cdot\dfrac{s(x)+it(x)}{s(x)-it(x)}}$$

можно взять прямоугольники, стороны которых, параллельные мнимой оси, проходят через точки действительной оси, где $px-\Phi=\pm k\pi$ (k — целое число), а стороны, параллельные действительной оси $y=\pm b$, вполне произвольны, так как $|e^{-2ipz}|>1$ и $\left|\dfrac{s(z)+it(z)}{s(z)-it(z)}\right|>1$ в верхней полуплоскости, а в нижней полуплоскости одновременно имеют место противоположные неравенства.

Таким образом, каковы бы ни были ограниченные значения $\varphi(\delta_n)=(-1)^n L_n$ $(L_n>0)$ дроби $\varphi(x)$, она представится в виде

$$\varphi(x)=-\cos\Phi_1(x)\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{xL_n}{\delta_n(x-\delta_n)\,\Phi_1(\delta_n)}+P(x)\cos\Phi_1(x), \qquad (109\text{ bis})$$

где

$$\cos\Phi_1(x)=\cos\Phi(x)\cos px+\sin\Phi(x)\sin px=\frac{s(x)\cos px+t(x)\sin px}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}},$$

а $P(x)$ — целая функция, которая не может быть тождественно равна нулю, если $\varphi'(0)=0$, так как

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{L_n}{\delta_n^2\Phi_1'(\delta_n)}<0.$$

Остается показать, что это несовместимо с требованием, чтобы $\varphi(x)$ была ограничена на всей действительной оси и в то же время целая функция

$$f(x)=\varphi(x)\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}=$$

$$=[s(x)\cos px+t(x)\sin px]\left[P(x)-\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{xL_n}{\delta_n(x-\delta_n)\,\Phi_1'(\delta_n)}\right] \qquad (111)$$

была степени p. Действительно, отсюда следовало бы, что при $|z|$ достаточно большом

$$|P(z)(s(z)\cos pz+t(z)\sin pz)|<e^{p(1+\varepsilon)|z|},$$

где $\varepsilon\to0$ с возрастанием $|z|$. Поэтому, если $z=iy$ находится на мнимой оси, то

$$|P(yi)(s(yi)+it(yi))|<2e^{\varepsilon|y|}$$

и, следовательно, так как $s(z)+it(z)$ нулевой степени, можно указать такую постоянную A, что, как бы ни было мало $\varepsilon > 0$

$$P(z)\,e^{-\varepsilon|z|} < A \tag{112}$$

на всей мнимой оси. С другой стороны, в виду ограниченности $\varphi(x)$, из (109 bis) следует, как при доказательстве теоремы § 10, что при $\pm x \to \infty$ на вещественной оси, целая функция конечной степени $P(x)$ удовлетворяет условию

$$|P(x)| < C + Bx^3 \lg x \tag{113}$$

и тем более на всей вещественной оси соблюдается (112).

Таким образом, используя следствие III § 9, из (112) заключаем, что ни один коэффициент функции конечной степени

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n' x^n$$

не может удовлетворять неравенству

$$|c_n'| \geqslant \frac{A(\varepsilon\sqrt{2})^n}{n!},$$

т. е. необходимо, чтобы

$$\overline{\lim}\, n \sqrt[n]{|c_n'|} \leqslant e\varepsilon\sqrt{2}.$$

Следовательно необходимо, чтобы функция $P(x)$ была нулевой степени. Но, вследствие (113), она должна была бы быть многочленом не выше 3-й степени, что также невозможно, потому что существуют (благодаря тому, что $P(x)\cos\Phi_1(x)$ возрастает не быстрей, чем $\lg|x|$ на вещественной оси) бесконечно возрастающие значения x, где $P(x)$ возрастает не быстрее, чем $\lg|x|$.

Теорема II. *Если $s(x)+it(x)$ целая функция нулевого рода, корни которой $\alpha_k - i\beta_k$ лежат в нижней полуплоскости и ряд $\sum_1^{\infty}\frac{1}{\beta_k}$ сходится, а $f(x)$ — произвольная целая функция степени не выше p, то осуществление неравенства*

$$|f(x)| \leqslant L\,|s(x)+it(x)| \tag{112}$$

на всей действительной оси влечет за собой на той же оси неравенство

$$|f'(x)| \leqslant L\,|(s'(x)+it'(x) - ip\,(s(x)+it(x))|. \tag{113}$$

В самом деле, функция

$$\sqrt{A^2+B^2}\cos(px - \Phi + \lambda) =$$
$$= \frac{[As(x)+Bt(x)]\cos p(x-c) - [Bs(x) - At(x)]\sin p(x-c)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}}$$

среди всех дробей вида

$$\frac{f(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}}, \tag{114}$$

где

$$f(c) = As(c) + Bt(c),$$
$$f'(c) = As'(c) + Bt'(c) - p\,[Bs(c) - At(c)], \qquad (115)$$

должна быть наименее уклоняющейся от нуля на всей действительной оси, каково бы ни было данное вещественное c, так как в противном случае разность

$$\frac{[As(x) + Bt(x)]\cos p(x-c) - [Bs(x) - At(x)]\sin p(x-c) - f(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}},$$

удовлетворяющая условиям только-что доказанной теоремы I, имела бы c двойным корнем. Следовательно, если известны $f(c)$ и $f'(c)$, дробь вида (114) (где $f(x)$ — степени не выше p) не может оставаться по абсолютному значению меньше $\sqrt{A^2+B^2}$ при всех вещественных x. Поэтому, если дано лишь значение $f'(c)$, то наименьшее уклонение от нуля дроби (114) будет равно минимуму $\sqrt{A^2+B^2}$ при условии, что A и B удовлетворяют лишь второму из уравнений (115); таким образом, соответствующие значения A и B определяются обычным методом дифференциального исчисления:

$$\frac{A}{s'(c) + pt(c)} = \frac{B}{t'(c) - ps(c)} = \frac{A^2 + B^2}{f'(c)} =$$
$$= \frac{f'(c)}{[s'(c) + pt(c)]^2 + [t'(c) - ps(c)]^2}.$$

Следовательно, уклонение L на вещественной оси дроби (114) не может быть меньше, чем

$$\frac{|f'(c)|}{\sqrt{[s'(c) + pt(c)]^2 + [t'(c) - ps(c)]^2}},$$

где c — произвольное вещественное число, т. е.

$$|f'(c)| \leqslant L\sqrt{[s'(c) + pt(c)]^2 + [t'(c) - ps(c)]^2}. \qquad (116)$$

Поэтому, так как неравенство (112) означает, что $\dfrac{|f(x)|}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}} \leqslant L$, то из него для любого вещественного c вытекает (116), которое эквивалентно (113), или

$$|f'(x)| \leqslant L\,|[(s(x) + it(x))\,e^{-ipx}]'|. \qquad (113\text{ bis})$$

Для того, чтобы из (112) вывести аналогичные неравенства для следующих производных:

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant L\,|[(s(x) + it(x))\,e^{-ipx}]^{(k)}| \qquad (117)$$

достаточно доказать, что функция $s'(x) + pt(x) + i(t'(x) - ps(x))$ обладает теми же свойствами, что и функция $s(x) + it(x)$; очевидно корни ее также лежат в нижней полуплоскости, и легко проверить (как и в случае § 9), что при допущении ограниченности действительных частей корней $\alpha_k \pm i\beta_k$, это свойство также сохраняется.

КРАТКИЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Глава I

Ахиезер Н. И. 1). Ueber einige Funktionen die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Nul abweichen (Изв. Казанского физ.-мат. о-ва. 1928).

2) О задаче Золотарева (Изв. Акад. наук СССР, 1929).

3) Ueber einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Nul abweichen [Ibidem, 1932].

Бернштейн С. Н. 1) О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (Сообщ. Харьк. мат. о-ва, 1912).

2) Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes [International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912].

3) О наилучшем приближении непрерывных функций. Речь, произнесенная при защите докторской диссертации 19 мая 1913 г. (записки Харьковского университета, 1913).

4) Sur la meilleure approximation de $|x|$ (Acta Mathematica, 1913).

5) Sur une propriété des polynomes (Сообщ. Харьк. мат. о-ва, 1913).

Валле Пуссен Ш. 1) Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle (Bullet. de l'Académie de Belgique, 1910).

2) Leçons sur l'approximation des fonctions continues (Paris, Gauthier-Villars, 1919).

Золотарев Е. И. 1) Об одном вопросе о наименьших величинах (Диссертация, 1868, Полн. собр. соч., т. II).

2) Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля (записки С.-Петербургской Акад. наук, 1877, собр, соч., т. II).

Марков В. А. О функциях, наименее, уклоняющихся от нуля (изд. С.-Петербургского университета, 1892 г, Нем. перев. Mathem. Ann., 1916 г.).

Ремез Е. Sur la détermination des polynomes d'approximation de degré donné (Сообщ. Харьк. мат. о-ва, 1934).

Тарнаридер Ф. И. 1) Sur la meilleure approximation de $x^k|x|$ par des polynomes (Comptes rendus, 3-го марта 1913 г.).

2) Sur la meilleure approximation de $x^k|x|$ par des polynomes (Comptes rendus, 27 июля 1914 г.).

Тонелли Л. I polinomi d'approssimazione di Tchebychev (Annali di Matematica, 1908).

Чебышев П. Л. 1) Теория механизмов, известных под именем параллелограммов (1853, полное собр. соч., т. I),

2) Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций (1857, собр. соч., т. I).

3) О функциях, мало удаляющихся от нуля, при некоторых значениях переменной (1881, собр, соч., т. II).

Глава II

Ахиезер Н. И. (3) Об асимптотическом значении наилучшего приближения некоторых рациональных функций посредством полиномов (Сообщ. Харьк. мат. о-ва, 1932).

Бернштейн С. Н. (1), (4), (5).

(6) Об асимптотическом значении наилучшего приближения аналитических функций (1913, Сообщ. Харьк. мат. о-ва)-

(7) Sur la valeur asymtotique de la meilleure approximation des fonctions

analytiques admettant des singularités données (Bullet. de l'Acad. roy. de Belgique, 1913).

Валле Пуссен Ш. (2).

Вольш И. Л. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain (American Math. Soc., New York, 1935).

Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций (ОНТИ, Москва—Ленинград, 1934).

Монтель П. Sur les polynomes d'approximation [Bull. de la Société Math. de France, 1919].

Рисс М. Ueber einen Satz des Herrn S. Bernstein (Acta Mathemat., 1916).

Глава III

Бернштейн С. Н. (1).

(8) Remarques sur l'inégalité de Wladimir Markow. (Сообщ. Харьк. Мат. о-ва, 1914).

(9) Sur les propriétés extremales des polynomes et des fonctions entières sur l'axe réel (Comptes rendues Ac. des Sc. Paris, 1923).

(10) Sur le problème de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe réel (Bull. de la Soc. Math. de France, 1924).

(11) Demonstration nouvelle d'une inégalité relative aux polynomes trigonométriques (Rend. Acad. Lincei, 1927).

(12) Sur la limitation des dérivées des polynomes [C. R. Ac. Sc., Paris, 1930].

(13) Sur un théorème de M. Szegö [Prace Matematiczno — Fisycno, 1935].

Валле Пуссен Ш. (2).

Марков А. А. Об одном вопросе Д. И. Менделеева (Доклады Акад. наук, 1889).

Полия Г. и Чего Г. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Springer, Berlin, 1925).

Рисс М. Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique (Comptes rendues de l'Acad. Sc., 1914).

Чего Г. (1) Ueber einen Satz von A. Markow (Mathem. Zeitschrift, 1925).

(2) Ueber einen Satz des Herrn Serge Bernstein (Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, 1928).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ответственный редактор ***Н. С. Смирнов*** Технический редактор ***Усова, А. М.***
Сдано в набор 11/XII 1936 Поступило к печати 8/I 1937 г. Формат бумаги $62 \times 94^1/_{16}$
Количество бум. листов $6^3/_8$ **Печ. листов $12^3/_4$** **Уч.-авторских листов 13,66**
Типогр. знаков в 1 бум. листе 108 400
Леноблгорлит № 170 **Тираж 3000 экз.** **Изд. № 31** **Заказ № 4017.**
2-я типография ОНТИ им. Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
25	7 сверху	$n-k=1$	$n-h=1$
40	1 "	$<$	$>$
47	1 снизу	$\left(\frac{h}{2}\right)^{h+1}$	$\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}$
54	8 сверху	$\Delta \gtreqless 0$	$\Delta=0$
67	7 "	$\lim\limits_{b=0}$	$\lim\limits_{x=b}$
111	4 снизу	$h\to\infty$	$n\to\infty$
145	12 сверху	что если	что
171	16 "	$\sqrt[n]{\lvert c_n\rvert}$	$n\sqrt[n]{\lvert c_n\rvert}$
172	1 "	$\lvert f'($	$\lvert f'(x)\rvert \leqslant \varepsilon M$, и так как ε может
188	3 снизу	$\lim$	$\overline{\lim}$

4017. Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов.