

MESONS and FIELDS

Volume

I

FIELDS

SILVAN S. SCHWEBER

Associate Professor of Physics, Brandeis University

HANS A. BETHE

Professor of Physics, Cornell University

FREDERIC DE HOFFMANN

Staff Member, Los Alamos Scientific Laboratory

ROW, PETERSON AND COMPANY

New York

1 9 5 5

С. ШВЕБЕР, Г. БЕТЕ, Ф. ГОФМАН

МЕЗОНЫ и ПОЛЯ

ТОМ

I

ПОЛЯ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

В. Н. БАЙЕРА, С. П. БАКАНОВА
и А. А. РУХАДЗЕ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ АКАДЕМИКА
И. Е. ТАММА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие авторов	7
<i>Глава 1.</i> Введение. Мезонная физика и теория поля	11

Часть первая

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

Раздел I. Релятивистские волновые уравнения одной частицы

<i>Глава 2.</i> Уравнение Клейна — Гордона	18
§ 1. Уравнение для свободной частицы	18
§ 2. Физические свойства	19
§ 3. Взаимодействие с внешним электромагнитным полем	23
§ 4. Релятивистские обозначения	24
<i>Глава 3.</i> Уравнение Дирака	27
§ 1. Вывод уравнения. Выражение для тока	27
§ 2. Матрицы Дирака	30
§ 3. Ковариантная форма уравнений Дирака	33
§ 4. Релятивистская инвариантность	37
<i>Глава 4.</i> Свойства преобразований и значения операторов Дирака	44
§ 1. Свойства преобразований	44
§ 2. Значение операторов в нерелятивистском приближении	49
<i>Глава 5.</i> Свойства уравнения Дирака	54
§ 1. Спин	54
§ 2. Состояния с отрицательной энергией	55
§ 3. Уравнение Дирака с учетом внешнего поля	57
<i>Глава 6.</i> Применение уравнения Дирака	60
§ 1. Стационарные состояния	60
§ 2. Точная теория рассеяния при высоких энергиях	61
§ 3. Эффект, обусловленный структурой ядра	63
<i>Глава 7.</i> Вычислительная техника	66
§ 1. Вероятность перехода	66
§ 2. Нормировка и условия ортогональности	67
§ 3. Проекционные операторы	70
§ 4. Шпуры	72
<i>Глава 8.</i> Фейнмановская теория позитрона	75
§ 1. Нерелятивистская теория	75
§ 2. Релятивистская теория	79
§ 3. Импульсное представление	84
§ 4. Электромагнитное поле	87
§ 5. Бозе-частицы	92

Глава 9. Применения теории Фейнмана	94
§ 1. Резерфордское рассеяние	94
§ 2. Уравнения для связанных состояний	97
§ 3. Задача двух частиц	99
§ 4. Сечение мёллеровского рассеяния	105
§ 5. Рассеяние позитронов на электронах	108

Часть вторая

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Раздел II. Поля и виды взаимодействий

Глава 10. Лагранжев формализм	118
§ 1. Классическая теория	118
§ 2. Действительное однокомпонентное поле	123
§ 3. Комплексное скалярное поле	127
§ 4. Дираковское поле	129
§ 5. Максвелловское поле и векторное мезонное поле	131
Глава 11. Взаимодействие между полями	135
§ 1. Прямые связи	135
§ 2. Связи с производной	136
§ 3. Более сложные типы связей	138
§ 4. Взаимодействие между двумя спинорными полями	141
§ 5. Взаимодействие и уравнения движения	142
Глава 12. Взаимодействие с электромагнитным полем	145
§ 1. Заряженное бозонное поле	145
§ 2. Дираковское поле	146
§ 3. Система трех полей	148

Раздел III. Квантовая теория полей

Глава 13. Квантование поля	150
§ 1. Представления Шредингера и Гейзенберга	150
§ 2. Канонические перестановочные соотношения	152
§ 3. Импульсное представление и квантование скалярного поля	154
§ 4. Операторы числа частиц, их рождения и уничтожения	159
§ 5. Квантование спинорного поля	164
§ 6. Зарядовое сопряжение	171
§ 7. Корпускулярно-волновой дуализм	173
Глава 14. Рассеяние и S -матрица	181
§ 1. Испускание и поглощение кванта	181
§ 2. Рассеяние незаряженных мезонов нуклонами	184
§ 3. S -матрица	193
Глава 15. Ковариантный формализм	196
§ 1. Представление взаимодействия	196
§ 2. Ковариантные перестановочные соотношения	201
§ 3. Перестановочные соотношения для дираковских операторов	209
§ 4. Квантование электромагнитного поля	212
Глава 16. Инвариантная теория возмущений	224
§ 1. Теория	224
§ 2. Адиабатическая гипотеза	229

<i>Глава 17.</i>	Преобразование S -матрицы	236
§ 1.	Нормальное произведение	236
§ 2.	Теорема Вика	240
§ 3.	Применение к S -матрице	244
§ 4.	Представление инвариантных функций	246
<i>Глава 18.</i>	Диаграммы Фейнмана	252
§ 1.	Взаимодействие с внешним электромагнитным полем	252
§ 2.	Диаграммы Фейнмана в мезонной теории	258
§ 3.	Вакуумные амплитуды	261
§ 4.	Правила для диаграмм Фейнмана	266
<i>Глава 19.</i>	Импульсное представление	269
§ 1.	Рассеяние двух фермионов	269
§ 2.	Собственная энергия нуклона	272
§ 3.	Явная форма матричного элемента	273
§ 4.	Взаимодействие мезонов с электромагнитным полем	278
§ 5.	Поперечные сечения: комптоновское рассеяние	281

Раздел IV. Перенормировка в квантовой теории поля

<i>Глава 20.</i>	Собственная энергия фермиона	290
§ 1.	Степень расходимости	290
§ 2.	Попытки сделать собственную энергию конечной	295
§ 3.	Вычисление собственной энергии с помощью метода Фейнмана	302
<i>Глава 21.</i>	Перенормировка	308
§ 1.	Перенормировка массы и нерелятивистский лэмбовский сдвиг	308
§ 2.	Радиационные поправки к формулам рассеяния	317
§ 3.	Перенормировка волновой функции	323
§ 4.	Аномальный магнитный момент и лэмбовский сдвиг	327
§ 5.	Поляризация вакуума	331
§ 6.	Перенормировка в мезонной теории	338
§ 7.	Применения	342
§ 8.	Представление взаимодействия Фарри для связанных состояний	347
<i>Глава 22.</i>	Расходимости	354
§ 1.	Общие положения	354
§ 2.	Случаи, которые были уже рассмотрены	357
§ 3.	Треугольные диаграммы	358
§ 4.	Квадратные диаграммы	361
<i>Глава 23.</i>	Перенормируемые и перенормируемые теории	366
§ 1.	Взаимодействие бозонных полей	366
§ 2.	Двухфотонное взаимодействие	369
§ 3.	Связь с производными	370
§ 4.	Высшие спины	373
§ 5.	Взаимодействие β -распада	374
<i>Глава 24.</i>	Количественная теория перенормировки	376
§ 1.	Определения	376
§ 2.	Отделение расходимостей из неприводимых диаграмм	383
§ 3.	Отделение расходимостей из приводимых диаграмм	388
§ 4.	Тождество Уорда	394
§ 5.	Доказательство перенормируемости	397
§ 6.	Смысл перенормировки заряда	404

§ 7. Общие замечания	406
§ 8. Перенормировка в представлении связанных состояний	409
<i>Глава 25. Новейшее развитие теории</i>	<i>413</i>
§ 1. Гейзенберговское представление	413
§ 2. Рассмотрение инвариантных свойств	421
§ 3. Средние значения в состоянии вакуума	427
§ 4. S-матрица в гейзенберговском представлении	433
§ 5. Величина перенормировочных констант	434
§ 6. Проблема связанных состояний	437
§ 7. Многочастичные амплитуды	447
§ 8. Другие результаты, полученные в теории	448
<i>Глава 26. Теорема эквивалентности</i>	<i>451</i>
§ 1. Рассеяние свободных частиц	451
§ 2. Преобразование Дайсона	452
§ 3. Интерпретация	457
<i>Приложения</i>	
Приложение А	459
Приложение Б	460
Литература	464
Предметный указатель	476

МЕЗОНЫ И ПОЛЯ

Т о м I

П О Л Я

Редактор *Е. МАЙКОВА*

Технический редактор *С. Климченко*

Сдано в производство 11/1 — 57 г. Подписано к печати 15/VII 57 г. Бумага $60 \times 92 \frac{1}{16} = 15,3$ бум. л. 30,5 печ. л. Уч.-изд. л. 28,3. Изд. № 2/3320. Цена 21 р. 80 к. Заказ № 1784.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности
4-я тип. им. Евг. Соколовой. Ленинград, Измайловский пр., 29.

Редакция литературы по физике
Заведующий редакцией проф. А. А. СОКОЛОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий первый том двухтомной монографии „Мезоны и поля“ представляет собой законченное целое: он посвящен изложению общих основ современной квантовой теории полей.

Эта монография предназначена для широкого круга физиков — студентов, аспирантов и научных работников, — как изучающих теоретическую физику, так и ведущих научную работу в этой области физики.

Как учебник и как справочное пособие эта книга, по моему мнению, обладает рядом преимуществ по сравнению с другими монографиями по тому же вопросу.

Во-первых, автору удалось удачно отделить основное от второстепенного и поэтому в относительно малом объеме изложить основы теории так, чтобы, с одной стороны, это изложение было достаточно строгим и последовательным в математическом отношении, а с другой стороны, основное физическое содержание теории и общая качественная характеристика ее современного состояния были выделены достаточно выпукло.

Во-вторых, в книге параллельно с изложением квантовой электродинамики излагается достаточно подробно и квантовая мезодинамика.

Наконец, в-третьих, очень удачна в книге библиография. Он широко охватывает журнальную литературу не только по основным вопросам, рассмотренным в книге, но и по многим проблемам теории, которые за недостатком места только кратко упомянуты в тексте. В американском издании библиография доведена до середины 1954 г.; при переводе мы ограничились добавлением ссылок лишь на некоторые, наиболее важные работы последних двух лет.

Главы 1—16 переведены С. П. Бакановым и А. А. Рухадзе, гл. 17—26 и Приложения — В. Н. Байером.

Академик И. Е. Тамм.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

В основе настоящей книги лежит курс лекций, прочитанных одним из авторов (Г. Бете) в Корнельском университете весной 1953 г. Эти лекции были посвящены вопросам исследования процессов при высоких энергиях. Второй автор (Ф. Гофман), посетивший Корнельский университет в течение 1953/54 учебного года, подробно записал эти лекции. Его записи первоначально были распространены среди студентов и в небольшом количестве разосланы в другие университеты физикам, интересующимся этими вопросами. Ввиду огромного интереса к данному предмету было решено дополнить эти записи и превратить их в книгу. При этом выяснилось, что число экспериментальных и теоретических данных о полях сильно возросло. Чтобы изложить их с единой точки зрения, необходимо было заново пересмотреть все экспериментальные результаты. Кроме того, первоначальный материал значительно увеличился благодаря включению гл. 38—51.

По первоначальному плану теоретическим основам посвящалась первая часть книги, причем современную теорию поля предполагалось описать лишь качественно. Однако в 1953/54 учебном году третий автор (С. Швебер) прочитал курс лекций по современной квантовой механике в Корнельском университете. Нам казалось, что включение основной части этого курса сделает запланированную книгу более полной, а излагаемую теорию — более количественной.

Теперь книга явно уже разделилась на две основные части. Главы по теории поля, вероятно, будут представлять большой интерес в основном для теоретиков, данные же по мезонам и их интерпретация — для экспериментаторов. Было решено издать эти части отдельно, хотя мы полагаем, что во всей книге в целом найдутся вопросы, интересующие каждую из указанных групп физиков.

Разделение книги на две части связано также с авторством: первый том — преимущественно плод работы Швебера, второй же том — Бете и Гофмана. Первый вариант нескольких глав первого тома был написан Бете и Гофманом. Недостаток времени помешал Гофману уделить достаточно внимания работе над первым томом в ее конечной стадии. Поэтому Швебер по предложению Бете взял на себя всю ответственность за переработку лекций.

Первый том представляет собой в сущности учебник по современной теории поля. Мы старались вести изложение как можно проще и придерживаться обычных понятий. Для этого в основу нашего изложения мы положили работы Дайсона, написанные в 1949 г., а не более новые фундаментальные работы Швингера и Фейнмана, опубликованные в 1950 и 1951 гг. Первый том можно изучать, не обращаясь к ссылкам на второй том.

Второй том главным образом представляет собой попытку дать перечень существующих экспериментов по π -мезонам, не вдаваясь в технику эксперимента, но освещая их физический смысл и взаимную связь. Несколько глав (гл. 40—47) содержат элементарное изложение существующих теорий π -мезонных процессов. Главы второго тома, посвященные экспериментальным, а также некоторым теоретическим вопросам, могут быть поняты без чтения первого тома. Знание первой части первого тома, в которой описываются релятивистские волновые уравнения одной частицы, весьма желательно (почти все содержание этой части обычно излагается в большинстве университетских курсов квантовой механики).

Читателю-экспериментатору, желающему познать основы мезонной теории, не вдаваясь глубоко в математику, мы рекомендуем гл. 1—6, 8—12, 20, 21, 23 и 26 первого тома и все главы второго тома, за исключением гл. 41—45. При чтении этих глав он встретит ссылки на соотношения, выведенные в других главах, однако он обнаружит, что эти ссылки несущественны для понимания.

Авторы второго тома—Бете и Гофман—благодарны третьему автору—Швеберу—за переработку § 5 и 6 гл. 30, § 2—4 гл. 31 и § 1, 2 гл. 40, а также за помощь при унификации обозначений второго и первого томов. Несмотря на то, что первый и второй тома, по существу, независимы, мы не старались избегать взаимных ссылок, сохраняя тем самым целостность предмета. Разумеется, были приложены все усилия, чтобы не приводить неправильных сведений, однако в книге все же, несомненно, имеются ошибки и несогласованности. Поэтому мы хотим заранее извиниться за них и надеемся, что большое количество ссылок как на старую, так и на новейшую литературу частично исправит эти ошибки.

Большую помощь в работе нам оказали наши коллеги, а также ряд других лиц. Экспериментаторы любезно присылали нам результаты опытов до их публикации. Ниже приводится далеко не полный список групп и отдельных лиц, которым мы обязаны за сообщение экспериментальных данных: Коллинс, Росс, Шатт и Торндайк (Брукхэйвенская национальная лаборатория); Бечер и Уокер (Калифорнийский технологический институт); Ашкин (Технологический институт Карнеги); Ледерман и Стейнбергер (Колумбийский университет); Коккони, Мартин, Сильверман и Вильсон (Корнельский университет); Осборн (Массачусетский технологический институт); Дудзяк (Калифорнийский университет); Андерсон, Ферми, Гликсман, Орир и

Розенфельд (Чикагский университет); Барнс, Робертс и Тинлот (Рочестерский университет).

Мы также обязаны многим физикам-теоретикам, приславшим нам рукописи своих работ. Мы особенно благодарны тем нашим коллегам, которые критически прочитали некоторые главы настоящей книги и высказали ряд полезных замечаний, в частности Брюкнеру, Кейсу, Далицу, Дайсону, Эдвардсу, Гольдбергеру, Конопинскому, Митра, Недкину, Нойсу, Россу, Стейну, Сундаресану, Ватсону и Вайтману. Мы также благодарны Юбераллю за проверку ссылок к первому тому.

Наконец, мы очень благодарны Патриции Гофман за перепечатку многих вариантов рукописи отдельных глав как первого, так и второго томов. Мы также хотим поблагодарить Патрицию Мискол за перепечатку первоначальных записей лекций и отчета Лос-Аламосской научной лаборатории и, кроме того, Мильдрет П. Хозейт за подготовку чертежей. Мы благодарим Мирну Швебер за редактирование большей части первого тома, а также Патрицию Гофман за редактирование большей части второго тома. Мы обязаны Лос-Аламосской научной лаборатории, которая дала возможность размножить первоначальные записи лекций, а также оказывала всестороннюю поддержку. Мы хотим поблагодарить доктора Герберта Юбералля за проверку взаимных ссылок. Один из нас (Швебер) хочет поблагодарить Национальное научное общество за дружескую помощь во время написания книги. Наконец, мы благодарны работнику издательства Роу, Петерсон и К^о, Мак-Ферсону за терпеливое отношение к нашим изменениям текста книги.

*Г. Бете,
Ф. Гофман,
С. Швебер.*

Июнь 1954 г.

ВВЕДЕНИЕ. МЕЗОННАЯ ФИЗИКА И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

В настоящее время назрела необходимость создания книги по мезонной физике. Проведено большое число количественных экспериментов с π -мезонами, в результате которых выяснены основные свойства мезон-нуклонного взаимодействия. Так как в будущем понадобится гораздо больше экспериментов и с большей точностью, то представляет интерес выяснить, какого типа эксперименты наиболее подходящи для получения нужных сведений. В теории, очевидно, мы также еще слишком далеки от каких-либо количественных предсказаний, однако мы можем качественно предсказать основные свойства таких явлений, как рассеяние мезонов. В настоящее время мы видим эти трудности теории и знаем ряд методов получения приближенных решений.

Напомним кратко основные моменты развития мезонной физики за последние 10 лет.

1. Открытие в 1947 г. Конверси, Панчини и Пиччиони [88] того факта, что мезоны космического излучения (μ -мезоны), вопреки первоначальным предположениям, очень слабо взаимодействуют с нуклонами.

2. Открытие в 1947 г. Латтесом, Оккиалини, Пауэллом [299] того, что мезоны, в изобилии встречающиеся в космическом излучении (μ -мезоны), являются вторичными частицами, возникающими при распаде других частиц — π -мезонов, и того, что π -мезоны сильно взаимодействуют с нуклонами.

3. Экспериментальное определение основных свойств свободного π -мезона освещено главным образом в работах Пановского, Стейнбергера и их сотрудников в Калифорнийском и Колумбийском университетах (см. т. II, гл. 27).

4. Исследование взаимодействия между мезонами и нуклонами при помощи экспериментов по рассеянию и фоторождению мезонов на нуклонах.

5. Более глубокое обоснование квантовой теории поля путем введения метода перенормировок.

6. Развитие некоторых теоретических методов изучения сильного взаимодействия в теории поля.

7. Открытие тяжелых мезонов и гиперонов.

Мы не будем детально рассматривать свойства μ -мезонов, тяжелых мезонов и гиперонов. Мы лишь кратко опишем в т. II, гл. 50 и 51,

их известные свойства и обсудим, почему можно считать, что μ -мезоны, тяжелые мезоны и гипероны не играют важной роли ни в ядерных силах, ни во взаимодействии π -мезонов с нуклонами при не очень больших энергиях.

Обсудим все перечисленные выше моменты развития мезонной физики, за исключением первых двух, которые мы считаем достаточно хорошо известными. В частности, полностью изложим современную теорию поля. Теория поля сама по себе является самостоятельной дисциплиной и составляет содержание первого тома. Читатель, интересующийся главным образом мезонами, а не теорией поля, может опустить большую часть первого тома.

Достижения современной теории поля заключаются, во-первых, в устранении расходимости при расчетах всех наблюдаемых эффектов, во-вторых, в достаточно хорошем количественном согласии теории с экспериментом. Однако это количественное согласие имеет место только в атомной физике, где связь вещества с электромагнитным полем весьма слабая. Таким образом, удалось показать, что теория, которая излагается в обычных учебниках (например, в учебнике Шиффа [429]), является прекрасным приближением к действительности. Более того, с помощью этой теории были объяснены такие тонкие эффекты, как лэмбовское смещение (см. работу Лэмба и Резерфорда [295]), и было найдено (см. работу Салпетера [425]), что вычисленная разность между уровнями $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ атома водорода, составляющая $1057,2$ мггц, согласуется с экспериментом Трибассера и др. [487] с точностью до $0,6$ мггц. Этим было установлено, что квантово-механические поправки к указанным уровням и отклонения от закона Кулона в атоме водорода не превышают одной миллиардной части. Аномальный магнитный момент электрона, обусловленный радиационными поправками, был рассчитан Карплусом и Кроллом [263] в четвертом приближении по e и оказался равным

$$\frac{e\hbar}{2mc} \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 2,973 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right) = 0,0011454 \text{ магнетонов Бора } ^1), \quad (1.1)$$

что находится в прекрасном согласии с самыми последними экспериментальными данными.

Другим достижением теории перенормировок является то, что предсказание теории позитрона о существовании поляризации вакуума подтвердилось как экспериментами по лэмбовскому смещению, так и по сдвигу основного состояния позитрония. Вычисленная разность уровней дуплета основного состояния позитрония равна $\Delta\nu = 2,0337 \cdot 10^5$ мггц (см. работу Карплуса и Клейна [266]); половина этой величины обусловлена поляризацией вакуума. Экспериментальное значение этого сдвига равно $(2,037 \pm 0,003) \cdot 10^5$ мггц.

¹⁾ Это значение получено при подстановке величины $\alpha^{-1} = 137,036 4 \pm \pm 0,0012$, которая была установлена ранее.

Были также рассчитаны более сложные эффекты, как например лэмбовское смещение сверхтонкой структуры, точная форма спектральной линии и т. д.

Поэтому мы будем полагать, что теорию перенормировок можно считать в основном правильной и применимой к мезонной теории. Конечно, теория перенормировок *не устраняет* бесконечностей в собственной энергии, которые в течение многих лет были бичом теории поля; однако она указывает, как *обойти* эти трудности и вычислить оставшиеся после вычитания бесконечностей конечные эффекты, чтобы получить согласие с экспериментом.

В первом томе дается описание новейшего развития теории поля, включая теорию перенормировок. Первые девять глав посвящены изложению теории Фейнмана. В них включен также обзор релятивистских уравнений одной частицы, причем особое внимание уделено физической интерпретации и обсуждению пределов применимости этих уравнений. В последующих десяти главах излагается квантование поля с современной точки зрения. При этом особое значение придается теории рассеяния и главным образом S -матрице. В этих главах, по существу, снова выводится формализм Фейнмана на основании классических работ Дайсона по теории поля. Следующие пять глав излагают программу перенормировок, включая доказательство перенормируемости квантовой электродинамики, данное Дайсоном, Саламом и Уордом. Наконец, гл. 25 посвящается обзору некоторых новейших достижений теории поля, таких, как вывод уравнений связанных состояний и исследование уравнений поля без применения теории возмущений.

Здесь не излагаются такие вопросы, которые, как мы полагаем, являются содержанием обычных курсов элементарной квантовой механики; например, старое квантование поля излучения, испускание и поглощение света и вообще такие вопросы, которые можно найти в превосходном обзоре Ферми [155].

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обсудим некоторые обозначения, принятые в настоящей книге (т. I и II).

Скаляры и векторы. Скаляры обозначаются обычным шрифтом. Пространственные векторы (как в обычном пространстве, так и в пространстве с изотопическим спином) обозначаются обычным шрифтом со стрелкой сверху. Для обозначения 4-векторов применяется жирный шрифт. Скалярные произведения как 3-, так и 4-векторов обозначаются точкой между ними.

Обозначение Фейнмана и 4-векторы. Все компоненты наших 4-векторов действительны, т. е. $x_0 = ct$ (это подробно объясняется в гл. 2, § 3). Смысл операторов Дирака γ^μ и их произведений

обсуждается в гл. 3, § 3, и в гл. 4. Символы Фейнмана вводятся в гл. 8, § 3. Мы полагаем, что $\hat{p} = \gamma^0 p^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$.

Производные. В т. I использованы следующие сокращенные обозначения (впервые введенные в гл. 10, § 1):

$$\varphi_{,\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \quad \text{и} \quad \varphi_{r,\mu} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^\mu}.$$

Изотопический спин. Мы обозначаем изотопический спин буквой T . В некоторых случаях используется буква t для обозначения изотопического спина отдельной частицы в системе. При чтении гл. 30 (т. II) следует различать оператор t и собственное значение оператора T .

Единицы измерения \hbar и c . В обоих томах, особенно во втором, мы часто полагаем $\hbar = c = 1$, где \hbar — постоянная Планка (деленная на 2π) и c — скорость света. В этой системе единиц энергия, импульс и масса имеют одинаковую размерность (обратную длине). В тех случаях, когда мы не пользуемся этой системой единиц, в частности в т. I, выбор системы единиц очевиден из самих уравнений.

Сдвиги фаз. Мы обозначаем сдвиги фаз символом δ .

Константа связи. Мы будем обозначать константу связи во взаимодействии без производных (гл. 11, § 1) через G , а константу связи во взаимодействии с производными (гл. 11, § 2) — через F/μ , где μ — масса мезона. Как G , так и F безразмерные величины. Мы будем часто использовать сокращенные обозначения: $g^2 = G^2/4\pi$ и $f^2 = F^2/4\pi$. Вообще, когда употребляется термин „псевдоскалярное взаимодействие“ без дальнейших пояснений, то при этом подразумевается такая связь псевдоскалярного мезонного поля с нуклонным полем, при которой член взаимодействия имеет вид $G\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi$ [выражение (11.2)]. Аналогично под словами „псевдовекторное взаимодействие“ мы будем понимать такую связь указанных полей, при которой член взаимодействия [см. выражение (11.6)] имеет вид

$$\frac{iF}{\mu} \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

Библиография. Список литературы приводится в конце каждого тома.

Конечно, в книге такого объема нельзя сохранить для каждой физической величины только одно обозначение. Поэтому мы не пытаемся дать исчерпывающего списка обозначений; указанные выше обозначения предназначены лишь для общей ориентировки.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ
ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ



РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

Несколько следующих глав посвящено рассмотрению релятивистских волновых уравнений для частиц, наиболее часто встречающихся в физике, а именно: частиц со спином 0 и $1/2$. Больше внимание обращено на свойства и физическую интерпретацию этих уравнений, чем на их применение к внутриатомным процессам. Мы предполагаем, что читатель достаточно хорошо знаком как с обычной нерелятивистской квантовой механикой, так и с релятивистской классической механикой.

УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА — ГОРДОНА

§ 1. Уравнение для свободной частицы

Нерелятивистское волновое уравнение для частицы в отсутствие внешних сил можно получить из соотношения

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (2.1)$$

с помощью замены

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla, \quad (2.3)$$

где ∇ — оператор градиента. Эта операция приводит к уравнению Шредингера для свободной частицы

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (2.4)$$

Обычная физическая интерпретация этого уравнения следует из определения плотности вероятности и тока в виде

$$\rho = \psi^* \psi, \quad (2.5)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*), \quad (2.6)$$

где через ψ^* обозначена величина, комплексно-сопряженная ψ . Таким образом, плотность вероятности ρ всегда положительно определена и в силу уравнения (2.4) удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (2.7)$$

Вскоре после того как Шредингер получил нерелятивистское волновое уравнение (2.4), он сформулировал [431] и соответствующее релятивистское уравнение. Одновременно аналогичное уравнение было предложено независимо Гордоном [210] и Клейном [277] (см. также работы Фока [180—182]); если ввести операторы (2.2) и (2.3), то оно вытекает совершенно естественным образом из релятивистского соотношения между энергией и импульсом для свободной частицы

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2. \quad (2.8)$$

Это приводит к следующему волновому уравнению:

$$-\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 \nabla^2 \psi + m^2 c^2 \psi, \quad (2.9)$$

которое известно как уравнение Клейна — Гордона.

Если мы потребуем выполнения уравнения непрерывности (2.7), то выражения для величин ρ и \vec{j} должны принять вполне определенный вид. В частности, мы можем выбрать \vec{j} в виде (2.6). В этом случае на основании уравнения (2.9)

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right). \quad (2.10)$$

Однако из соотношения (2.10) видно, что величина ρ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это следует из того, что $\partial \psi / \partial t$ и ψ могут меняться произвольным образом в некоторый момент времени t , ибо уравнение (2.9) — второго порядка. Так как величины ψ и $\partial \psi / \partial t$ являются функциями пространственных координат \vec{x} , то величина ρ может быть положительной в одних областях пространства и отрицательной — в других. По этой причине трудно рассматривать ρ как плотность вероятности в обычном смысле. Даже если мы попытаемся изменить выражение для \vec{j} , все же ρ будет по-прежнему включать в себя как ψ , так и $\partial \psi / \partial t$. Эта трудность внутренне присуща теории и не зависит от выбора \vec{j} .

Из-за возможности отрицательных значений ρ уравнение Клейна — Гордона не получало признания больше семи лет после своего появления. Однако в 1934 г. Паули и Вайскопф [371] ¹⁾ предложили новую интерпретацию этого уравнения: они рассмотрели его как уравнение поля (в том же смысле, как уравнения Максвелла для электромагнитного поля) и проквантовали его. Мы вернемся к этому вопросу ниже, в гл. 13, § 3.

§ 2. Физические свойства

Волновая функция ψ в уравнении Клейна — Гордона имеет только одну компоненту. Поэтому при преобразованиях Лоренца функцию ψ можно умножать только на комплексную постоянную. Из условия нормировки (2.16) следует, что этот множитель по модулю должен равняться 1. Таким образом, функция ψ преобразуется как скаляр при собственных преобразованиях Лоренца, т. е. без учета отражений. Так как, конечно, не всякая волновая функция преобразуется как скаляр при преобразованиях Лоренца, то указанное

¹⁾ См. также работу Паули [374].

трансформационное свойство дает нам весьма важные сведения о частице (или поле), описываемой уравнением Клейна—Гордона. Если у волновой функции больше одной компоненты, то число степеней свободы у частицы, которую она описывает, больше, чем число степеней свободы перемещения. Эти дополнительные степени свободы появляются за счет *спина* частицы. Таким образом, уравнение Клейна—Гордона описывает частицу со спином 0. Экспериментально установлено, что π -мезон обладает спином 0 (см. т. II, гл. 28), поэтому полагают, что уравнение Клейна—Гордона описывает π -мезоны.

Баргман и Вигнер [19] показали, что в общем уравнение движения и свойства преобразования волновой функции релятивистской частицы почти однозначно определяются следующими требованиями: волновая функция должна описывать частицу с определенной и конечной массой и спином и являться неприводимой. Последнее означает, что волновая функция должна преобразовываться по неприводимому представлению группы Лоренца и поэтому являться релятивистски ковариантной. Неоднозначность возникает вследствие существования состояний с отрицательной энергией (см. ниже) и из-за произвола в выборе обратных операторов. Если мы имеем дело со свободными частицами, то нет необходимости рассматривать состояния с отрицательной энергией. Ниже обсудим вопрос о свойствах инверсии. Следовательно, можно сказать, что инвариантное теоретическое рассмотрение вполне достаточно для определения свойств волновых уравнений свободной частицы.

Волновая функция Клейна—Гордона преобразуется как скаляр при собственных преобразованиях Лоренца; это означает теперь, что величина ρ , определенная формулой (2.10), представляет собой временную компоненту 4-вектора, пространственные компоненты которого определены соотношением (2.6). Отсюда следует, что интеграл $\int d^3x \rho$ является инвариантом по отношению к собственной группе Лоренца. Кроме того, из уравнения непрерывности вытекает сохранение этого интеграла во времени. Это означает, что ρ и \vec{j} можно трактовать (как и делается в теории поля) как плотности заряда и тока соответственно. Следует отметить, что выражение (2.10) в нерелятивистском приближении переходит в выражение (2.5). Это можно легко показать следующим образом. Пользуясь заменой (2.2), будем иметь

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi, \quad (2.11)$$

и, следовательно, выражение (2.10) принимает вид

$$\rho = \frac{E}{mc^2} \psi^* \psi \quad (2.12)$$

и при $E \approx mc^2$ действительно переходит в выражение (2.5).

Посмотрим, однако, существуют ли релятивистские случаи, в которых вероятностная интерпретация все еще применима. Из выражения (2.12) следует ожидать, что если такие случаи существуют, то они должны представлять собой случаи свободной частицы или частицы, движущейся в очень слабом внешнем поле. Поэтому снова рассмотрим уравнение (2.9). Оно имеет простое решение в виде плоской волны, т. е.

$$\psi \sim e^{-iEt/\hbar} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar}, \quad (2.13)$$

где

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}. \quad (2.14)$$

Оба знака квадратного корня отвечают решению уравнения, что является характерной чертой релятивистской квантовой механики. Для одной свободной частицы это не является проблемой. Частица первоначально находится в состоянии с положительной энергией, т. е. с энергией $E = +\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$, и в отсутствие взаимодействия всегда остается в этом состоянии. Кроме того, из выражения (2.12) видно, что для свободной частицы с положительной энергией величина

$$p \geq 0 \quad (2.15)$$

и остается положительно-определенной во времени, согласно уравнению движения (2.4). Таким образом, заключаем, что последовательная одночастичная теория может быть развита для свободных частиц, если множество решений с положительной энергией мы будем рассматривать как набор физических реализуемых состояний.

Это, однако, означает, что некоторые из операторов, которые являются наблюдаемыми (как их обычно называют) в нерелятивистской квантовой механике, перестают быть наблюдаемыми в релятивистском смысле. Чтобы показать это, заметим, что из соотношений (2.10) и (2.13) мы можем определить внутри множества решений с положительной энергией следующее скалярное произведение¹⁾:

$$(\psi, \varphi) = \frac{i\hbar}{2mc^2} \int d^3x \left(\psi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \varphi(\vec{x}, t) \right). \quad (2.16)$$

До тех пор пока мы рассматриваем только волновые функции состояний с положительной энергией, это скалярное произведение является положительно-определенным, т. е. $(\psi, \psi) \geq 0$ и $(\psi, \psi) = 0$

¹⁾ Обычно как скалярное произведение волновых функций [уравнение (2.16)], так и фурье-образ волновой функции [соотношение (2.17a)] определяются без множителя mc^2 и, следовательно, могут также использоваться при $m=0$. Преимущество формул (2.16) и (2.17a) заключается в том, что при $m \neq 0$ облегчен переход к нерелятивистскому пределу.

только при $\psi \equiv 0$. Оно сохраняется во времени¹⁾, согласно уравнению движения, если ψ и φ подчиняются уравнению Клейна—Гордона. В импульсном пространстве, когда

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{\sqrt{mc^2}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{E_p} e^{-iE_p t/\hbar} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar} \psi(\vec{p}), \quad (2.17a)^2$$

где

$$E_p = +c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}, \quad (2.176)$$

скалярное произведение имеет очень простой вид, а именно:

$$(\psi, \varphi) = \int \frac{d^3p}{E_p} \psi^*(\vec{p}) \varphi(\vec{p}). \quad (2.18)$$

Однако, как теперь легко проверить, оператор $\vec{x} = i\hbar \partial/\partial \vec{p}$ в этом скалярном произведении уже не является эрмитовым, так как

$$\begin{aligned} \left(\psi, i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \varphi \right) &= i\hbar \int \frac{d^3p}{E_p} \psi^*(\vec{p}) \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \varphi(\vec{p}) = \\ &= \int \frac{d^3p}{E_p} \left[\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + \frac{i\hbar \vec{p}}{p^2 + m^2 c^2} \right) \psi^*(\vec{p}) \right] \varphi(\vec{p}) \neq \\ &= \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \psi, \varphi \right); \quad (2.19) \end{aligned}$$

здесь опущен поверхностный интеграл. Иными словами, \vec{x} нельзя рассматривать как оператор положения, так как он неэрмитов и, следовательно, ненаблюдаем. Отсюда вытекает весьма важное следствие: волновую функцию Клейна—Гордона $\varphi(\vec{x}, t)$ нельзя трактовать как амплитуду вероятности обнаружения частицы в точке \vec{x} в момент t . Чтобы ответить на вопрос: „Какова вероятность обнаружения частицы Клейна—Гордона в некоторой точке \vec{q} ?“, мы должны найти, во-первых, эрмитов оператор, который строго может быть назван оператором положения, и, во-вторых, его собственные функции $\Psi_q(\vec{x}, t)$. Амплитуда вероятности обнаружения частицы с волновой функцией $\varphi(\vec{x}, t)$ в точке \vec{q} в момент t выражается в соответствии с общими принципами квантовой механики матричным элементом $(\Psi_q(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}, t))$.

¹⁾ В противоположность, например, интегралу

$$\int d^3x \psi^*(\vec{x}, t) \varphi(\vec{x}, t).$$

²⁾ Множитель $1/E_p$ введен для удобства. Если $\psi(\vec{x}, t)$ — скаляр, то, так как d^3p/E_p — инвариант, $\psi(\vec{p})$ — также скаляр.

Ньютон и Вигнер [356] показали, что в релятивистском случае оператор положения и его собственные функции („локализованные волновые функции“), по существу, определяются:

1) требованием, чтобы набор всех состояний, локализованных в точке \vec{q} , образовывал линейное множество, инвариантное относительно вращения и отражения в пространстве и во времени;

2) естественным физическим требованием, чтобы после пространственного перемещения волновая функция ψ состояния, локализованного в некоторой точке \vec{q} , стала ортогональной к волновым функциям состояний, локализованных в точке \vec{q} .

Оператор положения, который они получили для случая Клейна — Гордона, имеет вид

$$x_{\text{op}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{p}} - i\hbar \frac{\vec{p}}{2(p^2 + m^2c^2)}. \quad (2.20)$$

Его собственные функции не являются больше δ -функциями, как в нерелятивистском случае, а размазаны по области порядка комптоновской длины волны частицы. Причина этого заключается в том, что мы допустили лишь волновые функции состояний с положительной энергией, а δ -функции нельзя построить только из этих функций. Отсюда следует, что эти локализованные волновые функции лоренц-нековариантны. Они обладают только максимальной симметрией, соответствующей плоскости $t = \text{const}$ в 4-пространстве.

§ 3. Взаимодействие с внешним электромагнитным полем

В присутствии электромагнитного поля (например, в случае заряженного π^- -мезона, движущегося по боровской орбите вокруг ядра) мы должны видоизменить уравнение (2.9), сделав обычную калибровочно-инвариантную замену

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (2.21)$$

$$E \rightarrow E - e\varphi, \quad (2.22)$$

где \vec{A} и φ — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля соответственно. Это ведет к уравнению

$$\frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \right)^2 \psi = \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi + m^2c^2\psi. \quad (2.23)$$

Шифф в своей книге [429] обсуждает решения этого уравнения. В частности, он показывает, что в уравнении (2.23) переменные \vec{r} и t разделяются, если потенциалы \vec{A} и φ не зависят от времени. В этом случае решение имеет вид

$$\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.24)$$

Полученное дифференциальное уравнение для u можно решить точно, когда $\vec{A} = 0$, а функция $\varphi(\vec{r})$ обладает сферической симметрией и не слишком сингулярна. В частном случае кулонова поля $e\varphi = -Ze^2/r$ решение подробно дано Шиффом и приведено в т. II, гл. 42, к которой мы и отсылаем читателя. Плотность заряда становится в этом случае равной

$$\rho = \frac{\hbar i}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \frac{e\varphi}{mc^2} \psi^* \psi, \quad (2.25a)$$

$$\rho = \left(\frac{E - e\varphi}{mc^2} \right) \psi^* \psi; \quad (2.25b)$$

здесь мы использовали формулу (2.11). Выражение (2.25b) переходит в правильное нерелятивистское приближение (для $E > 0$) во всей области пространства, за исключением малых расстояний вблизи $r = 0$, где движение является существенно релятивистским и одночастичная интерпретация теряет свой смысл, так как величина ρ может стать там отрицательной. Величина тонкой структуры, теоретически предсказанная этим уравнением, больше наблюдаемой экспериментально в спектре водорода. Действительно, для электронов, которые обладают спином $1/2$, следует ожидать, что уравнение Клейна—Гордона не имеет места. Однако величина тонкой структуры, предсказанная этим уравнением, должна быть правильной для π^- -мезона, движущегося по боровской орбите вокруг ядра, и ее можно наблюдать.

§ 4. Релятивистские обозначения

До сих пор мы не показали релятивистского характера уравнения Клейна—Гордона. Иначе говоря, наши обозначения не подчеркивали, например, 4-векторного характера ρ и \vec{j} . В дальнейшем же будет очень важно подчеркнуть ковариантный характер применяемых физических величин. Для этой цели в настоящей книге используются следующие релятивистские обозначения. Пространственно-временную координату обозначим через x^μ (которая, как 4-вектор, будет записываться буквой x). Примем $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ и $x^3 = z$. Мы будем использовать метрический тензор $g_{\mu\nu}$ со следующими компонентами:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

(т. е. $g_{00} = 1$, $g_{kk} = -1$ для $k = 1, 2, 3$ и $g_{\mu\nu} = 0$ для $\mu \neq \nu$) и должны, следовательно, различать ковариантные и контрвариант-

ные векторы. Контрвариантный вектор (который преобразуется как координаты x, y, z, t) обозначается через v^μ , ковариантный вектор (который преобразуется как градиент) — через v_μ . Аналогично обозначаются тензоры. Вообще греческие буквы будут использоваться в качестве индексов для обозначения компонент (0, 1, 2, 3) пространственно-временного тензора, в то время как латинские — для обозначения только пространственных компонент (1, 2, 3). Поднятие и опускание индексов производится с помощью метрического тензора

$$v_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} v^\nu, \quad (2.27)$$

$$v^\mu = \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} v_\nu, \quad (2.28)$$

где $g^{\mu\nu}$ определяется уравнением

$$\sum_{\mu} g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\nu}, \quad (2.29)$$

причем δ_{μ}^{ν} есть символ Кронекера

$$\delta_{\mu}^{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{для } \mu = \nu \\ 0 & \text{для } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (2.30)$$

Заметим, что поднятие или опускание индексов 4-вектора изменяет знак пространственных компонент вектора, оставляя неизменной его временную компоненту. Лоренц-инвариантное скалярное произведение двух векторов p_μ, x_μ дается выражением

$$\sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} p_\mu x_\nu = \sum_{\mu} p^\mu x_\mu = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}, \quad (2.31a)$$

$$\sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} p_\mu x_\nu = x^0 p^0 - x^1 p^1 - x^2 p^2 - x^3 p^3, \quad (2.31б)$$

$$\sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} p_\mu x_\nu = x_0 p_0 - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3, \quad (2.31в)$$

$$\sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} p_\mu x_\nu = x^0 p^0 - \vec{x} \cdot \vec{p}. \quad (2.31г)$$

Вектор называется времени-подобным, если

$$\sum_{\mu} v_\mu v^\mu > 0, \quad (2.32a)$$

пространственно-подобным, если

$$\sum_{\mu} v_\mu v^\mu < 0, \quad (2.32б)$$

и нулевым, если

$$\sum_{\mu} v_\mu v^\mu = 0. \quad (2.32в)$$

Если введем времени-подобный 4-вектор энергии-импульса, т. е.

$$p^\mu = \left\{ \frac{E}{c}, \vec{p} \right\}, \quad (2.33)$$

то уравнение (2.8) можно переписать в виде

$$\sum_{\mu} p^\mu p_\mu = m^2 c^2. \quad (2.34)$$

Соотношения (2.2) и (2.3) теперь можно объединить в одно:

$$p_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.35)$$

В связи с этим нужно отметить, что так как x^μ является контр-вариантным вектором, то $\partial/\partial x^\mu$ — ковариантный вектор и

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left\{ \frac{\partial}{\partial ct}, \vec{\nabla} \right\}, \quad (2.36a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left\{ \frac{\partial}{\partial ct}, -\vec{\nabla} \right\}. \quad (2.36b)$$

Следовательно, подставляя выражение (2.35) в (2.34), можно переписать уравнение Клейна—Гордона в инвариантной форме. В результате получим

$$\left\{ \sum_{\mu} (i\hbar)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} - (mc)^2 \right\} \psi(x) = 0, \quad (2.37a)$$

или

$$\left\{ \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right\} \psi(x) = 0, \quad (2.37b)$$

$$\left\{ \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right\} \psi(x) = \left\{ \square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right\} \psi(x) = 0, \quad (2.37b)$$

где

$$\square = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.38)$$

Аналогично, вводя 4-векторный потенциал

$$A^\mu = \left\{ \varphi, \vec{A} \right\}, \quad (2.39)$$

можно переписать соотношения (2.21) и (2.22) в виде

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu, \quad (2.40)$$

а уравнение (2.23) следующим образом:

$$\left\{ \sum_{\mu} \left(p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) - m^2 c^2 \right\} \psi(x) = 0. \quad (2.41)$$

УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

§ 1. Вывод уравнения. Выражение для тока

Для устранения трудностей, связанных с отрицательными плотностями вероятности в уравнении Клейна—Гордона, Дирак предложил в 1928 г. новое уравнение, к изучению которого мы теперь перейдем. В течение длительного времени считали, что уравнение Дирака является единственно правильным релятивистским уравнением. Это было действительно так до тех пор, пока Паули и Вайскопф не предложили новой интерпретации уравнения Клейна—Гордона. Но даже и теперь уравнение Дирака сохраняет особую важность, так как оно описывает частицы со спином $1/2$, а основные элементарные частицы, включая электрон, протон и нейтрон, обладают спином $1/2$. Открытый в 1947 г. π -мезон был первой частицей с массой, отличной от нуля, и спином, равным нулю.

Чтобы избавиться от наличия отрицательных плотностей вероятности, мы должны исключить производные по времени в выражении для плотности вероятности ρ . Для этого необходимо, чтобы волновое уравнение содержало производные по времени только первого порядка. Из симметрии, установленной теорией относительности, между пространственными координатами x , y , z и временной координатой ct следует также, что волновое уравнение может содержать *пространственные* производные волновой функции только первого порядка. Таким образом, волновая функция Дирака ψ должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению первого порядка по всем координатам 4-пространства¹⁾. Необходимо также, чтобы она удовлетворяла уравнению Клейна—Гордона, так как последнее просто означает, что выполняется соотношение (2.8) и что при больших квантовых числах справедлива классическая релятивистская механика (принцип соответствия).

Аналогичное положение имеет место в электродинамике. Уравнения Максвелла являются уравнениями первого порядка и связывают между собой определенные компоненты напряженностей электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} . Волновое же уравнение в электродинамике

¹⁾ Линейность требуется для выполнения принципа суперпозиции в квантовой механике.

является уравнением второго порядка; это означает, что фотоны имеют массу покоя, равную нулю, как и требует релятивистская теория для частиц, движущихся со скоростью света c . Волновому уравнению удовлетворяет каждая компонента $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$, т. е. шесть величин, описывающих поле. Это обстоятельство может быть использовано в качестве руководящего принципа при получении уравнения Дирака.

Предположим, что ψ имеет N компонент ψ_l , где число N пока не определено (окажется, что оно равно 4). Самое общее линейное уравнение первого порядка связывает производную по времени одной компоненты с линейной комбинацией всех компонент и их пространственных производных. Оно имеет вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_l}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \sum_n^N \alpha_{ln}^k \frac{\partial \psi_n}{\partial x^k} + \frac{imc}{\hbar} \sum_n^N \beta_{ln} \psi_n = 0, \quad (3.1)$$

где $l, n = 1, 2 \dots N$, множители m, c, \hbar введены из соображений размерности, x^k — пространственные координаты. Из однородности пространства — времени следует, что α_{ln}^k и β_{ln} — константы (безразмерные), не зависящие от пространственных координат x, y, z и временной координаты t . Уравнения (3.1) известны как уравнения Дирака [102]. Естественный путь упрощения уравнений (3.1) заключается в использовании матричных обозначений, которые сводят эти уравнения к одному матричному уравнению

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \alpha^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \frac{imc}{\hbar} \beta \psi = 0. \quad (3.2)$$

Здесь ψ — столбец из N строк, а $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ и β являются N -мерными квадратными матрицами.

Найдем выражения для плотности вероятности и тока, которые вытекают из уравнения (3.2). Так как мы хотим сохранить обычное определение плотности вероятности ρ , то положим

$$\rho = \sum_n^N \psi_n^* \psi_n = \sum_n^N |\psi_n|^2, \quad (3.3)$$

или в наших матричных обозначениях

$$\rho = \psi^\dagger \psi, \quad (3.4)$$

где ψ^\dagger — величина, эрмитово-сопряженная ψ , и, следовательно, представляет собой строку из N столбцов. Ясно, что плотность вероятности (3.3) является положительно-определенной величиной и тем

самым удовлетворяет основному требованию Дирака. Величина ψ^+ удовлетворяет уравнению, эрмитово-сопряженному уравнению (3.2), а именно:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi^+}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi^+}{\partial x^k} (\alpha^k)^+ - \frac{imc}{\hbar} \psi^+ \beta^+ = 0. \quad (3.5)$$

Вообще a^+ — матрица, комплексно-сопряженная и транспонированная к a , т. е. матрица, у которой строки и столбцы взаимно переставлены и от каждого элемента взята комплексно-сопряженная величина, т. е.

$$\beta_{in}^+ = \beta_{ni}^*. \quad (3.6)$$

В соответствии с правилом умножения матриц следует всегда писать ψ^+ слева, а ψ — справа от матриц α и β (α^+ и β^+).

Уравнение непрерывности можно теперь написать в виде

$$\frac{1}{c} \left(\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi \right) + \text{div } \vec{j} = 0. \quad (3.7)$$

Уравнение такого вида можно получить, умножая уравнение (3.2) на ψ^+ слева, а уравнение (3.5) — на ψ справа и складывая полученные выражения. В результате имеем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \psi) + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial x^k} (\alpha^k)^+ \psi + \psi^+ \alpha^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) + \frac{imc}{\hbar} (\psi^+ \beta \psi - \psi^+ \beta^+ \psi) = 0. \quad (3.8)$$

Для отождествления уравнений (3.7) и (3.8) мы должны приравнять последние члены в уравнении (3.8) нулю, так как они не содержат производных. Это можно сделать, потребовав выполнения соотношения

$$\beta^+ = \beta, \quad (3.9)$$

т. е. потребовав, чтобы матрица β была эрмитовой (самосопряженной). Для отождествления второго слагаемого в уравнении (3.8) с дивергенцией необходимо, чтобы

$$\alpha^+ = \alpha. \quad (3.10)$$

Другими словами, α и β должны быть эрмитовыми матрицами. Это можно также показать, переписав уравнение (3.2) в гамильтоновой форме

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = \left(c\alpha \frac{\hbar}{i} \nabla + \beta mc^2 \right) \psi. \quad (3.11)$$

Отсюда ясно, что если оператор H является эрмитовым, то α^k и β также эрмитовы. Из сравнения уравнений (3.7) и (3.8) вытекает ¹⁾

$$j^k = c\psi^\dagger \alpha^k \psi. \quad (3.12)$$

§ 2. Матрицы Дирака

Для получения дальнейших сведений о свойствах матриц α и β выясним, какие условия налагаются на них следующим требованием: функция ψ должна удовлетворять уравнению Клейна—Гордона. Для этого умножим уравнение (3.2) на оператор

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{k=1}^3 \alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{imc}{\hbar} \beta. \quad (3.13)$$

Это приводит к появлению в уравнении вторых производных по координатам 4-пространства. Члены с $\partial/\partial t$ или смешанными пространственно-временными производными уничтожаются, и мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l (\alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^k \partial x^l} - \\ - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \beta^2 \psi + \frac{imc}{\hbar} \sum_k (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k) \frac{\partial \psi}{\partial x^k}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Симметризация члена $\alpha^k \alpha^l$ возможна, так как $\partial/\partial x^k$ и $\partial/\partial x^l$ коммутируют между собой. Чтобы согласовать уравнение (3.14) с уравнением Клейна—Гордона, необходимо привести правую часть (3.14) к виду

$$\nabla^2 \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi.$$

Это накладывает следующие условия:

$$\frac{1}{2} (\alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k) = \delta^{kl}, \quad (3.15)$$

$$\alpha^k \beta + \beta \alpha^k = 0, \quad (3.16)$$

$$(\alpha^k)^2 = \beta^2 = 1. \quad (3.17)$$

Таким образом, мы видим, что все α^k и β антикоммутируют между собой и квадраты их равны единице. Вообще говоря, для решения задач нет необходимости знать явный вид α^k и β ; достаточно

¹⁾ Некоторые авторы, особенно в старой литературе, определяют выражение для тока (3.12) со знаком минус. Это соответствует определению α^k с обратным знаком, что неудобно. Раньше для обозначения дираковских матриц использовались разные символы, теперь же обозначение α и β является общепринятым. Общепринятое дираковское обозначение используется, например, в работе Мотта и Снеддона [347].

знать, что они эрмитовы и удовлетворяют соотношениям (3.15)—(3.17). Но к этому выводу пришли лишь в 1931 г.

Тем не менее можно легко получить (не единичное) матричное представление α^k и β из спиновых матриц Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Эти матрицы антикоммутируют между собой и квадраты их равны единице. Можно легко проверить, что нельзя найти четвертой 2-мерной матрицы, антикоммутирующей с σ_x , σ_y и σ_z ¹⁾. Более того, матрицы α^k и β нельзя построить из 3-мерных матриц. Это можно показать несколькими способами. Самое простое доказательство основано на свойствах определителей. Если мы перепишем соотношение (3.16) в виде

$$\beta \alpha^k = -\alpha^k \beta = -I \alpha^k \beta, \quad (3.16a)$$

где множитель I — единичная матрица, то, приравняв определители обеих сторон этого равенства, получим

$$(\det \beta)(\det \alpha^k) = (-1)^N (\det \alpha^k)(\det \beta) = (-1)^N (\det \beta)(\det \alpha^k), \quad (3.19a)$$

так как

$$\det(-I) = (-1)^N. \quad (3.19b)$$

Следовательно,

$$(-1)^N = 1 \quad (3.19в)$$

и мерность N должна быть четной.

Приведем несколько иное доказательство, основанное на использовании свойства диагонализуемости эрмитовых матриц, так как оно выясняет одно важное свойство матриц α^k и β , а именно: след этих матриц равен нулю. Выберем представление, в котором матрица β диагональна. Заметим, что не все α^k и β могут быть диагонализированы одновременно, так как они антикоммутируют между собой. В нашем случае матрица β имеет вид

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & b_N \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

¹⁾ Это можно доказать следующим образом. Так как 2-мерные матрицы имеют четыре элемента, то существует четыре и только четыре линейно независимые 2-мерные матрицы. Три из них представлены выше [см. (3.18)]. Ясно, что единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является линейно независимой от этих трех. Так как их всего четыре, то эта единичная матрица является *единственной* 2-мерной матрицей, линейно не зависящей от σ^k . Но единичная матрица коммутирует, а не антикоммутирует с каждой из матриц σ_x , σ_y , σ_z .

Так как $\beta^2 = 1$, то $b_i^2 = 1$ и $b_i = \pm 1$ ($i = 1, 2 \dots N$). Кроме того, так как $\beta^2 = \alpha_k^2 = 1$, каждая из этих матриц имеет обратную матрицу, поэтому соотношение (3.16) можно переписать в виде

$$\alpha_k^{-1} \beta \alpha_k = -\beta. \quad (3.21)$$

Взяв шпур обеих частей этого соотношения, получим

$$\text{Sp}(\alpha_k^{-1} \beta \alpha_k) = \text{Sp}(\alpha_k \alpha_k^{-1} \beta) = \text{Sp}(\beta) = -\text{Sp}(\beta) \quad (3.22)$$

и, следовательно,

$$\text{Sp}(\beta) = 0. \quad (3.23)$$

Аналогично

$$\text{Sp}(\alpha_k) = 0. \quad (3.24)$$

Если в матрице (3.20) m членов $b_i = +1$, а n членов $b_i = -1$, то

$$m - n = N. \quad (3.25)$$

С другой стороны, требование $\text{Sp} \beta = 0$ означает, что

$$0 = \sum_i^N b_i = m - n, \quad (3.26)$$

т. е. $m = n$; поэтому

$$N = 2m \quad (3.27)$$

и, следовательно, α_k и β должны быть матрицами *четной мерности*. Далее, можно показать, что мерность этих матриц кратна четырем (см. работу Паули [373]). В частности, если мы обратимся к 4-мерным матрицам, то мы, действительно, сможем сконструировать систему, основанную на том же самом принципе, который был использован при написании матриц Паули. Если I означает единичную 2-мерную матрицу, то 4-мерные матрицы вида

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

удовлетворяют всем нашим условиям. Они являются эрмитовыми и, как можно показать, используя коммутационные свойства σ_k , антикоммутируют между собой. Это видно из примера

$$\alpha_k \beta = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Выражения (3.28) для матриц Дирака являются наиболее удобными в тех немногих случаях, когда полезно использовать явный вид этих матриц. Если матрицы имеют такой вид, то при скоростях частицы, малых по сравнению со скоростью света c , две компоненты ψ_1 и ψ_2 функции ψ велики по сравнению с двумя другими компонентами ψ_3 и ψ_4 .

Так же, как и уравнение Клейна — Гордона, уравнение Дирака в отсутствие взаимодействия допускает решение в виде плоской волны. Для частицы с импульсом \vec{p} и энергией E функция $\psi(\vec{r}, t)$ имеет вид

$$\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} e^{-iEt/\hbar}, \quad (3.30)$$

где $u(\vec{p})$ — 4-компонентный столбец, называемый спинором. Спинор $u(\vec{p})$ удовлетворяет уравнению

$$Eu(\vec{p}) = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2)u(\vec{p}). \quad (3.31)$$

Решения этого уравнения подробно обсуждаются Шиффом¹⁾. Здесь, как и в случае уравнения Клейна — Гордона, существуют решения как с положительной, так и с отрицательной энергией E . Но даже после выбора знака E все еще существуют два решения для компонент $u(\vec{p})$, соответствующие двум ориентациям спина частицы, описываемой уравнением Дирака. Четыре независимых решения для данного импульса \vec{p} будем обозначать через $u^1(\vec{p})$, $u^2(\vec{p})$, $u^3(\vec{p})$ и $u^4(\vec{p})$. Первые два из них отвечают двум различным спиновым состояниям частицы с положительной энергией E , два других — двум различным спиновым состояниям частицы с отрицательной энергией E . Одно из них, $u^1(\vec{p})$, дается выражением (4.24).

§ 3. Ковариантная форма уравнений Дирака

Нам осталось показать, что уравнение Дирака релятивистски инвариантно. Под этим мы понимаем, что уравнение (3.1) с теми же самыми матрицами α_k и β сохраняет свой вид в любой лоренцовской системе координат; неизменными остаются также выражения для p и j . Это не означает, однако, что в новой лоренцовской системе координат не меняются компоненты волновой функции ψ . Наоборот, так же как $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ в электродинамике, компоненты функции ψ выражаются друг через друга²⁾.

Прежде чем подробно обсуждать лоренц-инвариантность уравнения Дирака, полезно переписать его в форме, удобной для релятивистского рассмотрения. Для единой трактовки пространственных координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и временной координаты t введем величину

$$x^0 = ct. \quad (3.32)$$

¹⁾ См. книгу Шиффа [429].

²⁾ Эта точка зрения является естественной, если рассматривать уравнение Дирака как уравнение поля. Некоторые авторы развивают теорию, в которой компоненты ψ остаются постоянными, тогда как α_k и β меняются.

Далее, пространственные производные в уравнении Дирака (3.2) в отличие от временной умножены на матрицы. Чтобы устранить это различие, умножим уравнение (3.2) на β слева. Используя величину (3.32), получаем

$$\frac{\hbar}{i} \beta \frac{\partial \psi}{\partial x^0} + \sum_k \beta \alpha^k \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + mc\psi = 0. \quad (3.33)$$

Вводя матрицы γ^μ , можно придать этому уравнению более симметричный вид, причем γ^μ определяется следующим образом:

$$\beta = \gamma^0, \quad (3.34)$$

$$\beta \alpha^k = \gamma^k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (3.35)$$

или

$$\vec{\beta} \vec{\alpha} = \vec{\gamma}. \quad (3.36)$$

Следует отметить, что при таком определении только матрица γ^0 является эрмитовой, в то время как матрицы γ^k — антиэрмитовы, т. е. $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$, где $(\gamma^k)^2 = -1$. Матрицы γ^μ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I, \quad (3.37a)$$

где I — единичная матрица. Поднятие и опускание индексов матрицы γ^μ производится так же, как у 4-вектора, т. е.

$$\gamma_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (3.38)$$

и, следовательно,

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} I. \quad (3.37b)$$

Используя явный вид матриц α^k и β , находим

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Согласно таким определениям, уравнение (3.33) принимает вид

$$-\sum_{\mu=0}^3 i \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \psi = 0. \quad (3.40)$$

Это и есть уравнение Дирака в ковариантной форме, где пространственные и временные производные трактуются единым образом. Чтобы уравнение (3.40) выглядело еще проще, Фейнман [168] ввел

следующее условное обозначение ¹⁾:

$$\hat{A} = \sum_{\mu=0}^3 \gamma^{\mu} A_{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 \gamma_{\mu} A^{\mu} = \gamma^0 A^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{A}. \quad (3.41)$$

В дальнейшем будем пользоваться системой единиц, в которой $c = \hbar = 1$, как это принято в теории относительности ²⁾. При этом $mc/\hbar = m$. Условимся также писать

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \nabla_{\mu}. \quad (3.42)$$

В этих обозначениях уравнение (3.40) принимает вид

$$-i\hat{\nabla}\psi + m\psi = 0, \quad (3.43)$$

где

$$\hat{\nabla} = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}. \quad (3.43a)$$

Величины \vec{j} и ρ также можно выразить с помощью матриц γ^{μ} . Умножая выражение (3.35) на β слева, получаем

$$\beta j^k = \alpha^k, \quad (3.44)$$

так что формула (3.12) переписется в виде

$$\frac{j^k}{c} = \psi^{\dagger} \beta \gamma^k \psi. \quad (3.45)$$

Если мы введем „сопряженную“ волновую функцию

$$\psi^{\dagger} \gamma^0 = \bar{\psi}, \quad (3.46)$$

то уравнение (3.45) примет вид

$$\frac{j^k}{c} = \bar{\psi} \gamma^k \psi. \quad (3.47)$$

Аналогично можно записать и ρ , именно:

$$\frac{j^0}{c} = \rho = \psi^{\dagger} \gamma^0 \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \gamma^0 \psi. \quad (3.48)$$

¹⁾ В литературе часто пользуются другим обозначением, а именно букву, обозначающую оператор, набирают жирным курсивом. [Авторы в оригинале пользуются обозначением „ A перечеркнутое“, „ p перечеркнутое“ и т. п.; в переводе принято обозначение \hat{A} , \hat{p} и т. п. — *Прим. перев.*]

²⁾ В литературе обратная комптоновская длина волны mc/\hbar часто обозначается через κ . Мы не пользуемся этим обозначением, потому что, во-первых, его легко спутать с k — импульсом фотона, во-вторых, трудно ввести такого рода обозначения для масс различных частиц (электрона, протона, нуклона) и, в-третьих, мы хотим подчеркнуть, что этот член связан с массой покоя частицы.

Уравнения (3.46) и (3.47) можно объединить

$$\frac{j^{\lambda}}{c} = \bar{\psi} \gamma^{\lambda} \psi = \left\{ \rho, \frac{\vec{j}}{c} \right\}. \quad (3.49)$$

Дифференциальное уравнение для ψ^{\dagger} есть уравнение (3.5). Чтобы придать ему более симметричный вид, умножим его на $\gamma^0 \gamma^0 = 1$ справа и воспользуемся соотношениями (3.35), (3.36) и (3.46). При этом очевидно, что сопряженное уравнение будет иметь вид

$$\sum_{\mu} i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^{\mu}} \gamma^{\mu} + m \bar{\psi} = 0. \quad (3.50)$$

Следует обратить внимание на то, что хотя матрицы γ^{μ} не эрмитовы при $\mu = 1, 2, 3$, тем не менее часто применяемое произведение $\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi$ — эрмитово. Напомним, что

$$(\gamma^k)^{\dagger} = -\gamma^k, \quad (\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0, \quad (3.51)$$

отсюда, согласно правилам коммутации, можно написать

$$(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0 \quad (3.52)$$

и, следовательно,

$$(\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi)^{\dagger} = \psi^{\dagger} (\gamma^{\mu})^{\dagger} \bar{\psi}^{\dagger} = \psi^{\dagger} (\gamma^{\mu})^{\dagger} \gamma^0 \psi = \psi^{\dagger} \gamma^0 \gamma^{\mu} \psi = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi. \quad (3.53)$$

Уравнение Дирака удобно также записать в импульсном представлении. Для этой цели заменим $i\hbar \partial / \partial x_{\mu}$ на p^{μ} [соотношение (2.35)]. В результате уравнение (3.40) примет вид

$$\left(\sum_{\mu} \gamma_{\mu} p^{\mu} - mc \right) \psi = 0, \quad (3.54a)$$

или в обозначениях Фейнмана

$$(\hat{p} - mc) \psi = 0. \quad (3.54b)$$

Такая форма весьма удобна для проверки выполнения основного соотношения между энергией и импульсом. Мы покажем это, умножая выражение (3.54b) на оператор \hat{p} ; тогда будем иметь

$$\hat{p}^2 \psi = mc \hat{p} \psi = (mc)^2 \psi. \quad (3.55)$$

Далее, пользуясь определением оператора \hat{p} и соотношением

$$[p_{\mu}, p_{\nu}] = 0,$$

получаем, согласно правилам коммутации (3.37),

$$\begin{aligned} \hat{p}^2 &= \sum_{\mu\nu} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} p_{\mu} p_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu}) p_{\mu} p_{\nu} = \\ &= \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} p_{\mu} p_{\nu} = \sum_{\mu} p^{\mu} p_{\mu} = \mathbf{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

§ 4. Релятивистская инвариантность

Теперь мы в состоянии исследовать лоренц-инвариантность уравнения Дирака. Релятивистская инвариантность уравнения необходима по следующим причинам: физические процессы, описываемые любыми релятивистскими уравнениями, не должны зависеть от выбора лоренцевской системы координат. Следовательно, при правильном описании физических процессов сами уравнения должны указывать на инвариантность по отношению к выбору системы координат. Таким образом, мы должны показать, что если написать уравнение Дирака в разных системах координат, то существует линейное преобразование волновой функции, при котором новая волновая функция, по нашему предположению, описывает то же состояние в новой системе. Это линейное преобразование является, по существу, математическим выражением того факта, что наблюдатели в двух системах координат при проведении одинаковых экспериментов в своих системах получают согласованные результаты.

Самое общее однородное лоренцевское преобразование, исключая пространственно-временные перемещения, можно записать в виде

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 a_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (3.57a)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a} \mathbf{x}, \quad (3.57b)$$

где

$$\sum_{\mu} a_{\mu}^{\nu} a_{\lambda}^{\mu} = \delta_{\lambda}^{\nu} = \sum_{\mu} a^{\nu\mu} a_{\lambda\mu}. \quad (3.58)$$

Заметим, что лоренцевское преобразование линейно по всем четырем компонентам и что коэффициенты a_{ν}^{μ} действительны. Волновая функция ψ' в новой системе координат получается из функции ψ (в той же точке пространства—времени) с помощью линейного преобразования

$$\psi' = S\psi, \quad (3.59a)$$

где S —4-мерная матрица, не зависящая от координат пространства—времени. Она имеет обратную матрицу S^{-1} и зависит только от a_{ν}^{μ} , т. е.

$$S = S(a_{\nu}^{\mu}) = S(\mathbf{a}).$$

Таким образом, преобразование (3.59a) можно записать в явном виде

$$\psi'_{\alpha}(\mathbf{x}') = \sum_{\beta=1}^4 S_{\alpha\beta}(\mathbf{a}) \psi_{\beta}(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{x}'). \quad (3.59b)$$

Нужно подчеркнуть тот факт, что S -матрица является 4-мерной не потому, что существуют четыре компоненты пространства—

времени, а потому, что уравнение Дирака требует введения по крайней мере 4-мерных матриц.

Напомним, что в ковариантной форме уравнение Дирака имеет вид

$$\left(\sum_{\mu} -i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0. \quad (3.40)$$

Потребуем, чтобы матрицы γ^{μ} оставались неизменными при преобразованиях Лоренца. При этом для инвариантности уравнения необходимо, чтобы в новой системе координат выполнялось соотношение

$$\left(\sum_{\mu} -i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi' = 0. \quad (3.60)$$

Используя выражения (3.57) и (3.59), можно переписать уравнение (3.40) в виде

$$-i \sum_{\mu} \sum_{\lambda} a_{\mu}^{\lambda} \gamma^{\mu} \frac{\partial S^{-1} \psi'}{\partial x'^{\lambda}} + \frac{mc}{\hbar} S^{-1} \psi' = 0, \quad (3.61)$$

так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} = \sum_{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} = \sum_{\lambda} a_{\mu}^{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x'^{\lambda}}. \quad (3.62)$$

Далее, поскольку a_{ν}^{μ} — числа, то S и a_{ν}^{μ} коммутируют. Следовательно, умножая уравнение (3.61) на S слева, получаем

$$\sum_{\lambda} S \left(-i \sum_{\mu} a_{\mu}^{\lambda} \gamma^{\mu} \right) S^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial x'^{\lambda}} + \frac{mc}{\hbar} \psi' = 0. \quad (3.63)$$

Таким образом, уравнение (3.63) имеет форму уравнения (3.40) при условии, что

$$S^{-1} \gamma^{\lambda} S = \sum_{\mu} a_{\mu}^{\lambda} \gamma^{\mu}. \quad (3.64)^1$$

Условие (3.64) можно рассматривать как условие, накладываемое на матрицу преобразования S . Из условия (3.64) и того факта, что

¹⁾ Паули отмечает [372, 373], что существование такой матрицы S уже следует только из того факта, что 4-мерные матрицы γ образуют неприводимую группу. Так как матрицы $\gamma'^{\mu} = \sum_{\nu} a_{\nu}^{\mu} \gamma^{\nu}$ подчиняются тем же перестановочным соотношениям, что и матрицы γ^{ν} , как это следует из соотношения (3.58), то существует несингулярная матрица S , обладающая свойством $\gamma'^{\mu} = S^{-1} \gamma^{\mu} S$ (см. также работу Паули [370]).

a_{ν}^{μ} — действительные числа, следует

$$\left(\sum_{\nu} a_{\nu}^{\mu} \gamma^{\nu}\right)^{\dagger} = \left(a_0^{\mu} \gamma^0 - \sum_{k=1}^3 a_k^{\mu} \gamma^k\right)^{\dagger} = \\ = a_0^{\mu} \gamma^0 + \sum_{k=1}^3 a_k^{\mu} \gamma^k = (S^{-1} \gamma^{\mu} S)^{\dagger}, \quad (3.65)$$

так как матрица γ^0 эрмитова, а γ^k — антиэрмитова. Действительно, мы убедились в том, что в нашем представлении для матриц γ справедливо соотношение

$$(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0. \quad (3.52)$$

Следовательно, умножая соотношение (3.65) на γ^0 справа и слева, получаем

$$\gamma^0 \left(a_0^{\mu} \gamma^0 + \sum_{k=1}^3 a_k^{\mu} \gamma^k\right) \gamma^0 = \sum_{\nu=0}^3 a_{\nu}^{\mu} \gamma^{\nu} = \gamma^0 (S^{-1} \gamma^{\mu} S)^{\dagger} \gamma^0, \quad (3.66a)$$

$$\gamma^0 \left(a_0^{\mu} \gamma^0 + \sum_{k=1}^3 a_k^{\mu} \gamma^k\right) \gamma^0 = \gamma^0 (S^{\dagger}) \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0 (S^{-1})^{\dagger} \gamma^0, \quad (3.66b)$$

$$\gamma^0 \left(a_0^{\mu} \gamma^0 + \sum_{k=1}^3 a_k^{\mu} \gamma^k\right) \gamma^0 = (\gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0) \gamma^{\mu} (\gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0)^{-1}, \quad (3.66b)$$

так как

$$(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0.$$

Далее, $\sum_{\nu=0}^3 a_{\nu}^{\mu} \gamma^{\nu}$, согласно условию (3.64), равна $S^{-1} \gamma^{\mu} S$. Отсюда

$$(\gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0) \gamma^{\mu} (\gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0)^{-1} = S^{-1} \gamma^{\mu} S, \quad (3.67)$$

или

$$(S \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0) \gamma^{\mu} (S \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0)^{-1} = \gamma^{\mu}. \quad (3.68)$$

Нетрудно показать, что любая матрица, коммутирующая со всеми матрицами γ^{μ} , есть постоянная, умноженная на единичную матрицу. Следовательно, в результате получаем

$$S \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0 = bI, \quad (3.69)$$

где b — константа, или

$$S \gamma^0 S^{\dagger} = b \gamma^0, \quad (3.70a)$$

$$S^{\dagger} \gamma^0 = b \gamma^0 S^{-1}. \quad (3.70b)$$

Так как матрица γ^0 эрмитова и левая часть выражения (3.70a) также эрмитова, то

$$b^* = b. \quad (3.71)$$

Это означает, что константа b действительна. Кроме того, мы можем нормировать матрицу S так, чтобы $\det S = 1$ ¹⁾.

В этом случае $b^4 = 1$ и, следовательно,

$$b = \pm 1. \quad (3.72)$$

Выясним, далее, когда $b = +1$ и когда $b = -1$. Для этого рассмотрим следующее тождество:

$$\begin{aligned} S^+ S &= S^+ \gamma^0 \gamma^0 S = b \gamma^0 S^{-1} \gamma^0 S = \\ &= b \gamma^0 \sum_{\nu} a_{\nu}^0 \gamma^{\nu} = b a_0^0 \cdot I - \sum_{k=1}^3 b a_k^0 \gamma^0 \gamma^k = b \left(a_0^0 \cdot I - \sum_{k=1}^3 a_k^0 \alpha^k \right). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Здесь использованы соотношения (3.64) и (3.70). Произведение $S^+ S$ — произведение несингулярной матрицы на ее эрмитово-сопряженную имеет действительные и положительно-определенные собственные значения ($S \neq 0$), т. е.

$$\text{Sp}(S^+ S) > 0. \quad (3.74)$$

Так как след α_k равен нулю, то мы имеем

$$\text{Sp } S^+ S = 4b a_0^0 > 0. \quad (3.75)$$

Таким образом, если $a_0^0 < 0$, то $b = -1$, если же $a_0^0 > 0$, то $b = +1$. Когда величина a_0^0 отрицательна, преобразование содержит отражение во времени, т. е. $t' = -t$ (время меняет знак).

Далее, рассмотрим свойства преобразования сопряженного спинора $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$. Так как

$$\psi' = S \psi, \quad (3.59a)$$

то, взяв выражение, эрмитово-сопряженное этому равенству, получим

$$(\psi')^+ = \psi^+ S^+. \quad (3.76)$$

Поэтому волновая функция $\bar{\psi}'$, которая, по определению, равна

$$\bar{\psi}' = (\psi')^+ \gamma^0 \quad (3.77)$$

(так как матрицы γ^k не меняются при преобразованиях²⁾), согласно формулам (3.70), выражается в виде

$$\bar{\psi}' = \psi^+ S^+ \gamma^0 = b \psi^+ \gamma^0 S^{-1} = b \bar{\psi} S^{-1}. \quad (3.78)$$

¹⁾ Заметим, что эта нормировка оставляет матрицу S неопределенной с точностью до множителя $\sqrt[4]{1}$.

²⁾ Отсюда следует, что выражение \hat{p} инвариантно при преобразованиях Лоренца и преобразуется по формуле

$$\hat{p}' = \sum_{\nu} \gamma^{\nu} p'_{\nu} = \sum_{\mu\nu} \gamma^{\nu} a_{\nu}^{\mu} p_{\mu} = S \sum_{\mu} \gamma^{\mu} p_{\mu} S^{-1} = S \hat{p} S^{-1}.$$

Следовательно, $\bar{\psi}' = \bar{\psi}S^{-1}$ для тех преобразований, которые не меняют знака времени, в то время как $\bar{\psi}' = -\bar{\psi}S^{-1}$ для преобразований, содержащих отражение во времени ($a_0^0 < 0$).

Смысл формул (3.70) можно несколько уяснить, если рассмотреть свойства преобразования тока

$$j^\mu = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi. \quad (3.49)$$

Физические следствия уравнения Дирака должны быть одинаковы во всех лоренцовских системах координат, поэтому необходимо потребовать, чтобы ток j^μ был 4-вектором и, следовательно, преобразовывался следующим образом:

$$j'^\mu = \sum_\nu a_\nu^\mu j^\nu = \sum_\nu a_\nu^\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu \psi = \psi'^\dagger \gamma^0 S^{-1} \gamma^\mu S \psi. \quad (3.79)$$

Получим теперь то же выражение для j'^μ , используя волновые функции в штрихованной системе, но с теми же матрицами γ

$$j'^\mu = \psi'^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi'. \quad (3.80)$$

Согласно формуле (3.76), мы можем переписать выражение (3.80) в виде

$$j'^\mu = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu S \psi. \quad (3.81)$$

Сравнивая выражения (3.81) и (3.79), видим, что должно удовлетворяться соотношение

$$S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}, \quad (3.82)$$

которое совпадает с формулами (3.70) при преобразованиях Лоренца, не включающих отражения во времени. Однако из формул (3.70) следует, что в действительности j^μ является псевдовектором, так как меняет знак при отражении во времени.

Выше были выяснены свойства матрицы преобразования S , теперь нужно еще показать, что при любом преобразовании Лоренца (3.57) можно найти матрицу S , удовлетворяющую соотношениям (3.64) и (3.70). Рассмотрим здесь только собственные преобразования Лоренца, для которых $\det(a_\nu^\mu) = +1$ и $a_0^0 > 0$. В этом случае достаточно исследовать бесконечно малые преобразования, так как конечные преобразования всегда можно получить из бесконечно малых путем многократного их повторения. При бесконечно малом преобразовании Лоренца для двух последовательностей координат x и y имеем

$$x'^\mu = x^\mu + \lambda \sum_\nu \varepsilon_\nu^\mu x^\nu, \quad (3.83a)$$

$$y'^\mu = y^\mu + \lambda \sum_\nu \varepsilon_\nu^\mu y^\nu, \quad (3.83b)$$

или, другими словами,

$$a_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \lambda \varepsilon_{\nu}^{\mu}, \quad (3.84a)$$

иначе

$$a = I + \lambda e, \quad (3.84b)$$

где λ — бесконечно малая константа. Так как при преобразованиях Лоренца скалярное произведение остается инвариантным, т. е.

$$\sum_{\mu} x'^{\mu} y'_{\mu} = \sum_{\mu} x^{\mu} y_{\mu}, \quad (3.85)$$

то в первом порядке по λ имеем

$$\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}. \quad (3.86)$$

Это соотношение является необходимым и достаточным условием бесконечно малого лоренцовского преобразования.

В первом порядке по λ матрицу $S(a)$ можно записать в виде

$$S(I + \lambda e) = I + \lambda T \quad (3.87a)$$

($I + \lambda e$ является аргументом, а не множителем) и

$$S^{-1} = I - \lambda T. \quad (3.87b)$$

Для бесконечно малых преобразований соотношение (3.64) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S^{-1} \gamma^{\mu} S &= (I - \lambda T) \gamma^{\mu} (I + \lambda T) = \\ &= \gamma^{\mu} + \lambda (\gamma^{\mu} T - T \gamma^{\mu}) = \sum_{\nu} a_{\nu}^{\mu} \gamma^{\nu} = \gamma^{\mu} + \lambda \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu}^{\mu} \gamma^{\nu}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Следовательно, необходимо найти такую матрицу T , чтобы

$$\gamma^{\mu} T - T \gamma^{\mu} = \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu}^{\mu} \gamma^{\nu}. \quad (3.89)$$

Из уравнения (3.89) следует, что T определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной¹⁾. Кроме того, нормировка $\det S = 1$ требует, чтобы

$$\det(I + \lambda T) = 1 + \lambda \text{Sp}(T) = 1$$

или чтобы

$$\text{Sp}(T) = 0.$$

Так как путем выбора соответствующей аддитивной постоянной всегда можно сделать $\text{Sp}(T) = 0$, то этот выбор определяет мат-

¹⁾ Если существует два таких T , то их разность коммутирует со всеми γ^{μ} , как это видно из соотношения (3.89), и, следовательно, является постоянной величиной, умноженной на единичную матрицу.

рицу T однозначно и обеспечивает равенство $\det S = 1$. Легко установить, что выражение

$$T = \frac{1}{8} \sum_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad (3.90)$$

удовлетворяет как соотношению (3.89), так и требованию $\text{Sp}(T) = 0$. Эта матрица T является искомой и однозначной.

Другое доказательство существования матрицы S для любого лоренцовского преобразования было дано Дираком [115]. Он нашел матрицу преобразования S , соответствующую трем конечным элементарным преобразованиям (именно вращению, перемещению и отражению). Из этих трех элементарных преобразований можно построить любое другое конечное преобразование.

СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА

§ 1. Свойства преобразований

Из четырех матриц γ^μ можно образовать новые матрицы путем перемножения двух или более матриц γ^μ между собой. Как видно из соотношения (3.37), произведение γ^μ на γ^μ дает единичную матрицу I со знаком плюс или минус. Таким образом, следует рассматривать только такие произведения γ^μ , в которых множители *различны*. Кроме того, из соотношения (3.37) следует, что $\gamma^\mu\gamma^\nu = = -\gamma^\nu\gamma^\mu$, когда $\mu \neq \nu$. Поэтому изменение порядка множителей γ^μ может привести лишь к изменению знака. Это означает, что существует всего только 16 независимых произведений, построенных из γ^μ , а именно: одно произведение всех четырех γ^μ , четыре произведения любых трех γ^μ , шесть парных произведений γ^μ , четыре самих γ^μ и единичная матрица I .

Наличие точно 16 независимых матриц, построенных из матриц γ^μ , следует также из того, что матрицы γ^μ неприводимо представляются 4-мерными матрицами. Физический смысл несколько не изменился бы, если бы мы представили матрицу γ^μ в виде 8-мерных матриц, так как последние всегда можно привести к (приводимому) виду

$$\begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix},$$

где γ^μ — 4-мерные матрицы. Это соответствовало бы написанию двух несвязанных уравнений Дирака. Итак, 4-мерная матрица имеет 16 элементов, следовательно, в этом представлении существует 16 и только 16 линейно независимых матриц. Путем перемножения матриц γ^μ между собой можно образовать 16 независимых операторов; это показывает также, что для их представления необходимо пользоваться по крайней мере 4-мерными матрицами.

В табл. 1 приведены 16 линейно независимых матриц. В ней указаны свойства преобразования ковариантных величин, образованных умножением этих матриц на $\bar{\psi}$ слева и на ψ справа. Множитель i введен в произведения $\gamma^\mu\gamma^\nu$ и $\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu$ для того, чтобы сделать указанные ковариантные величины эрмитовыми. Квадрат любой матрицы, приведенной в табл. 1, равен ± 1 . Всякую произвольную 4-мерную матрицу можно построить из 16 линейно независимых матриц, приведенных в табл. 1.

Таблица 1

Тип матрицы	Число линейно независимых матриц данного типа	Свойство преобразования
I	1	Скаляр
γ^{μ}	4	Вектор
$i\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$	6	Тензор второго ранга
$i\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$	4	Псевдовектор
$\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$	1	Псевдоскаляр

Прежде чем изучать свойства преобразования ковариантных величин, получаемых умножением матриц, указанных в табл. 1, на $\bar{\psi}$ слева и на ψ справа, напомним кратко о различных классах преобразований.

Наиболее важным классом преобразований являются *собственные преобразования Лоренца*, т. е. преобразования, которые могут быть получены из единичного преобразования путем его непрерывного изменения. По отношению к ним 4-объем является инвариантом, так как

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \det |a_{\nu}^{\mu}| dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (4.1a)$$

или
$$d^4x' = d^4x, \quad (4.16)$$

ибо
$$\det |a| = +1. \quad (4.2)$$

Кроме того, для собственных преобразований Лоренца постоянная b в соотношениях (3.70) равна $+1$.

Далее, существуют *несобственные преобразования Лоренца*. Они всегда могут быть построены как произведения собственных преобразований Лоренца и простейших „несобственных“ преобразований, представляющих собой отражения пространственно-временных осей. Эти отражения можно классифицировать следующим образом.

1. Пространственные отражения:

$$x'^0 = x^0 \quad (4.3)$$

и одна из координат x^k преобразуется согласно соотношению

$$x'^k = -x^k, \quad (4.4)$$

тогда как остальные остаются неизменными.

2. Пространственная инверсия:

$$x'^0 = x^0 \quad (4.5)$$

и все x^k преобразуются согласно соотношению

$$x'^k = -x^k. \quad (4.6)$$

Это — обычное определение, которое применяется при изучении четности в нерелятивистской квантовой механике.

3. Обращение знака времени:

$$x'^0 = -x^0, \quad (4.7)$$

$$x'^k = x^k. \quad (4.8)$$

4. Обращение знаков времени и пространства:

$$x'^0 = -x^0, \quad (4.9)$$

$$x'^k = -x^k. \quad (4.10)$$

Напомним, что для первого и второго классов преобразований $b = +1$, в то время как для третьего и четвертого — $b = -1$. Для первых трех классов преобразований имеет место равенство

$$\det |a| = -1, \quad (4.11)$$

тогда как для четвертого класса

$$\det |a| = (-1)^4 = +1.$$

Заметим, что знак $\det |a|$ не является, следовательно, сам по себе критерием того, с собственным или несобственным преобразованием Лоренца мы имеем дело. Для этого нам нужно еще определить знак a_0^0 .

Для простоты исключаем из рассмотрения преобразования, которые содержат изменение знака времени, т. е. ограничиваемся случаями, когда $b = +1$. Пользуясь соотношением (3.78), исследуем теперь свойства преобразования ковариантных величин.

$\bar{\psi} \Gamma \psi$

Запишем это выражение в виде

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi} S^{-1} S \psi = \bar{\psi}' \psi'. \quad (4.12)$$

Из соотношения (4.12) следует, что $\bar{\psi} \psi$ — скаляр¹⁾ в отличие от плотности вероятности $\rho = \psi^\dagger \psi$, которая преобразуется как временная компонента 4-вектора.

$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

Из соотношения (3.81) следует, что $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ ведет себя при преобразованиях, не включающих инверсий времени, как 4-вектор.

¹⁾ Заметим, однако, что если мы включим в рассмотрение инверсию времени ($b = -1$), то $\bar{\psi} \psi = -\bar{\psi}' \psi'$, т. е. $\bar{\psi} \psi$ в действительности является псевдоскаляром при инверсии времени.

$$i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi$$

Множитель i вводится для того, чтобы это выражение было эрмитовым. Учитывая замечания, сделанные в начале этого параграфа, следует рассмотреть лишь шесть различных комбинаций при $\mu \neq \nu$. Для этой цели введем матрицу

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) = -\sigma^{\nu\mu} \quad (4.13)$$

и рассмотрим свойства преобразования выражения $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$. Используя соотношения (4.13) и (3.54), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'\sigma^{\mu\nu}\psi' &= \bar{\psi}S^{-1}\sigma^{\mu\nu}S\psi = \\ &= \sum_{\rho} \sum_{\lambda} a_{\rho}^{\mu} a_{\lambda}^{\nu} \bar{\psi}\sigma^{\rho\lambda}\psi, \end{aligned} \quad (4.14)$$

т. е. $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ преобразуется как антисимметричный тензор второго ранга. Этот тензор иногда называют *б-вектором*, так как он имеет только шесть отличных от нуля независимых компонент. Он обладает теми же свойствами, что и тензор $F_{\mu\nu}$, построенный из напряженностей электромагнитного поля $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$.

Такая аналогия используется для включения в уравнение Дирака дополнительного магнитного момента частицы (помимо собственного момента частицы, который дается самим уравнением) и для описания ее взаимодействия с внешним электромагнитным полем (см. книгу Паули [370] и гл. 12, § 2).

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

Произведение всех четырех матриц Дирака играет особо важную роль в теории и поэтому имеет специальное обозначение

$$\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (4.15)$$

Мы умышленно написали у γ_5 индекс вниз, чтобы подчеркнуть тот факт, что этот индекс нельзя поднимать или опускать. Чтобы подчеркнуть ковариантный характер матрицы γ_5 , более правильно определять ее следующим образом:

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!} \sum_{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\rho}, \quad (4.16)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ в зависимости от того, четным или нечетным числом перестановок (транспозиций) могут быть приведены числа μ, ν, λ, ρ к последовательности 0, 1, 2, 3, и равно нулю, когда какие-

либо два индекса совпадают. Определитель четвертого ранга $\det |a_{\nu}^{\mu}| = \det |a|$ можно записать с помощью тензора $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ в виде

$$\det |a| \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{\rho\sigma\mu\nu} a_{\alpha}^{\rho} a_{\beta}^{\sigma} a_{\gamma}^{\mu} a_{\delta}^{\nu} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (4.17)$$

Кстати, последнее соотношение указывает на тензорный характер $\varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu}$ и на тот факт, что компоненты $\varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu}$ инвариантны по отношению к лоренцовским преобразованиям. Поступая так же, как при получении соотношения (4.14), и используя выражения (4.16) и (4.17), получаем

$$\bar{\psi}' \gamma_5 \psi' = \bar{\psi} S^{-1} \gamma_5 S \psi = \det |a_{\nu}^{\mu}| \bar{\psi} \gamma_5 \psi. \quad (4.18)$$

Следовательно, для собственных преобразований Лоренца

$$\bar{\psi}' \gamma_5 \psi' = + (\bar{\psi} \gamma_5 \psi), \quad (4.19)$$

тогда как для преобразований первого и второго классов

$$\bar{\psi}' \gamma_5 \psi' = - (\bar{\psi} \gamma_5 \psi). \quad (4.20)$$

Отсюда следует, что $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ преобразуется как скаляр при собственных преобразованиях Лоренца и как псевдоскаляр — при пространственной инверсии ¹⁾.

$i\bar{\psi} \gamma^{\lambda} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \psi$

Здесь снова необходимо рассмотреть лишь четыре комбинации с $\lambda < \mu < \nu$. Можно легко установить, что

$$\bar{\psi}' \gamma^{\lambda} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \psi' = \sum_{\rho < \sigma < \tau} \begin{vmatrix} a_{\rho}^{\lambda} & a_{\sigma}^{\lambda} & a_{\tau}^{\lambda} \\ a_{\rho}^{\mu} & a_{\sigma}^{\mu} & a_{\tau}^{\mu} \\ a_{\rho}^{\nu} & a_{\sigma}^{\nu} & a_{\tau}^{\nu} \end{vmatrix} \bar{\psi} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} \gamma^{\tau} \psi. \quad (4.21)$$

Определитель в соотношении (4.21) описывает преобразования тензора третьего ранга, антисимметричного по всем трем индексам. У этого тензора имеется четыре отличных от нуля независимых компоненты. Используя выражение (4.15), их можно записать в виде $i\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^{\mu} \psi$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Такой же детерминант, как и в соотношении (4.21), определяет преобразование элементов трехмерного объема $dx^1 dx^2 dx^3$ и т. д. 4-пространства. Четыре произведения такого типа ведут себя во всех отношениях как компоненты 4-век-

¹⁾ Термин *псевдоскаляр* будет означать, если это специально не оговорено, псевдоскалярность по отношению к пространственной инверсии.

тора, за исключением того, что в результате умножения их на истинный 4-вектор (например, координатный вектор) получаются не скаляры, а псевдоскаляры. Поэтому произведение трех γ^μ называют псевдовектором (иногда называют также дуальным вектором). Этим оправдано написание рассматриваемого тензора в виде $i\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$.

Если нам известны свойства преобразования перечисленных комбинаций, то это дает возможность построить в дальнейшем инвариантные функции взаимодействия. Например, при построении таких функций скаляр $\bar{\psi}\psi$ можно умножить на скалярную функцию χ ; выражение $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ — на псевдоскалярную функцию φ , которая используется для описания π -мезонов; комбинацию $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ — на векторную функцию A_μ , которая может описывать, например, электромагнитное поле. Взаимодействие с последним можно записать также в виде $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}$, где $F_{\mu\nu}$ — компоненты тензора электромагнитного поля. Такое взаимодействие известно под названием взаимодействия Паули.

Необходимо заметить, что матрица γ_5 обладает некоторыми замечательными свойствами. Она удовлетворяет соотношению

$$\gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0 \quad (4.22)$$

для любого μ , и квадрат ее равен -1 , т. е.

$$(\gamma_5)^2 = -1. \quad (4.23)$$

Вообще γ_5 — единственная матрица, которая коммутирует или антикоммутирует с различными произведениями γ^μ в зависимости от того, четное или нечетное число множителей γ^μ в этих произведениях. Она коммутирует со всеми компонентами антисимметричного тензора второго ранга и антикоммутирует со всеми компонентами антисимметричного тензора третьего ранга. Это свойство можно легко понять, если вспомнить, что γ_5 является единственной матрицей, содержащей все четыре матрицы γ^μ и поэтому обладающей свойствами каждой из них.

§ 2. Значение операторов в нерелятивистском приближении

Чтобы изучить матричные элементы $\bar{\psi}\Gamma\psi$, где Γ представляет собой одну из 16 матриц, приведенных в табл. 1, удобно рассмотреть частный случай, когда ψ является элементарным решением уравнения Дирака для свободной частицы с импульсом \vec{p} и энергией $+E$ [см. выражения (3.30) и (3.31)]. Используя матрицы $\vec{\alpha}$ и β , представленные в виде (3.28), можно записать в следующей форме (с точностью до нормирующего множителя) выражение для спинора $u(\vec{p})$, описывающего состояния с положительной энергией и

определенной ориентацией спина:

$$u \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_3}{E + mc^2} \\ \frac{cp_1 + icp_2}{E + mc^2} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

В частности, мы можем рассмотреть случай, когда скорость частицы мала по сравнению со скоростью света, т. е. нерелятивистский предел $p \ll mc$. В этом случае две последние компоненты u будут порядка v/c и, следовательно, малы по сравнению с единицей, а нормирующий множитель будет порядка единицы. Величина $\bar{u}(\vec{p})$ обладает теми же свойствами, что и $u(\vec{p})$, а именно: большие компоненты остаются большими, малые — малыми. В предельном случае покоящейся частицы все четыре решения уравнения Дирака (уже нормированные) имеют особо простой вид:

$$\begin{array}{cc} E = +mc^2 & E = -mc^2 \\ \text{Спин } +\frac{1}{2} & \text{Спин } -\frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{cc} E = -mc^2 & E = +mc^2 \\ \text{Спин } +\frac{1}{2} & \text{Спин } -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Рассмотрим теперь выражения $\bar{u}^m \Gamma u^n$, где m и n могут принимать значение 1 или 2, т. е. состояния с положительной энергией в предельном случае (4.25). Тогда компоненты матрицы $\bar{u}^m \Gamma u^n$ равны нулю или единице. Если же скорость частицы v мала, но конечна, то равные нулю компоненты $\bar{u}^m \Gamma u^n$ для покоящейся частицы становятся в этом случае порядка v/c и потому остаются малыми по сравнению с единицей. Компоненты же матрицы $\bar{u}^m \Gamma u^n$, равные единице для покоящейся частицы, остаются большими и в общем случае.

$$\underline{\Gamma = I}$$

$$\bar{u}^1 \Gamma u^1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad (4.26)$$

т. е. эта величина велика.

$$\underline{\Gamma = \gamma^k}$$

По определению (3.39), имеем

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Таким образом, γ^k связывает малые компоненты волновой функции (4.24) с большими, и поэтому выражение $\bar{u}^1 \gamma^k u^1$ мало. В предельном случае покоящейся частицы [решения (4.25)] оно равно нулю.

$$\underline{\Gamma = \gamma^0}$$

По определению (3.34), имеем

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

т. е. $\bar{u}^1 \Gamma u^1$ равно единице и, следовательно, оно велико.

$$\underline{\Gamma = i\gamma^j \gamma^k}$$

Если j, k, l образуют циклическую перестановку, то имеет место равенство

$$+i\gamma^j \gamma^k = \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Если $l=3$, то $\bar{u}^1 \Gamma u^1 = 1$ и $\bar{u}^2 \Gamma u^2 = -1$; если же $l=1$ или $l=2$, то $\bar{u}^2 \Gamma u^1$ по абсолютной величине равно единице. В каждом случае имеется по крайней мере один большой по абсолютной величине матричный элемент матрицы $\bar{u}^m \Gamma u^n$, где m и n принимают значения 1 или 2.

$$\underline{\Gamma = \gamma^0 \gamma^k}$$

$$\gamma^0 \gamma^k = + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

т. е. $\bar{u}^m \Gamma u^n = 0$ в предельном случае покоящейся частицы или порядка v/c при конечном v .

$$\underline{\Gamma = i\gamma^0 \gamma^j \gamma^k}$$

$$i\gamma^0 \gamma^j \gamma^k = + \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & -\sigma^l \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Здесь результат такой же, как и для $i\gamma^j\gamma^k$, т. е. $\bar{u}^1\Gamma u^1$ велико.

$$\Gamma = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

$$i\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & +I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Это дает нуль для предельного случая покоящейся частицы с волновой функцией (4.25).

$$\Gamma = \gamma_5$$

$$\gamma_5 = -i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

т. е. $\bar{u}^1\Gamma u^1 = \bar{u}^2\Gamma u^2 = \bar{u}^3\Gamma u^3 = 0$ для $v = 0$.

Так как γ_5 — псевдоскаляр, то даже при лоренцовском преобразовании к конечной скорости частицы v остается справедливым равенство $\bar{u}^m\Gamma u^n = 0$. Следовательно, математическое ожидание γ_5 в *любом* состоянии свободной частицы в точности равно нулю. Эта особенность матрицы γ_5 отличает ее от „малых“ операторов, матричные элементы которых становятся порядка v/c для малых, но конечных скоростей частицы, так как различные компоненты вектора, тензора и псевдовектора выражаются при лоренцовских преобразованиях друг через друга, а среди них имеется по крайней мере *одна* большая компонента.

Таким образом, мы показали, что из 16 матричных элементов $\bar{u}\Gamma u$ восемь являются большими и восемь — малыми для случая, когда решение уравнения Дирака ψ построено из одной или более плоских волн, описывающих состояния с положительной энергией.

Рассмотрим, далее, матричный элемент $\bar{u}_\pm\Gamma u_\mp$, где u_+ означает волновые функции u^1 или u^2 состояний с положительной энергией, а u_- — волновые функции u^3 или u^4 состояний с отрицательной энергией. Используя выражения (4.25), находим, что

$$\bar{u}_- \gamma_5 u_+ = 1. \quad (4.34)$$

Отсюда видно, что оператор γ_5 превращает волновую функцию состояния с положительной энергией в волновую функцию состояния с отрицательной энергией и обратно, т. е. оператор γ_5 меняет знак энергии частицы. Благодаря (псевдо) скалярному характеру γ_5 это утверждение остается справедливым для частиц любой скорости.

До сих пор мы рассматривали матричные элементы переходов между состояниями с одинаковым импульсом \vec{p} . Рассмотрим теперь переход из состояния n с импульсом \vec{p}_1 в состояние m с импульсом \vec{p}_2 . Матричный элемент оператора γ_5 при таких переходах

дается выражением

$$\bar{u}^m(\vec{p}_2) \gamma_5 u^n(\vec{p}_1). \quad (4.35)$$

Напомним, что уравнение Дирака в импульсном пространстве имеет вид

$$(\hat{p}_1 - mc) u^n = 0, \quad (4.36)$$

а сопряженное ему уравнение —

$$\bar{u}^m(\hat{p}_2 - mc) = 0. \quad (4.37)$$

Умножая уравнение (4.36) на $\bar{u}^m \gamma_5$ слева, а уравнение (4.37) — на $\gamma_5 u^n$ справа и складывая полученные выражения, находим

$$2mc(\bar{u}^m(\vec{p}_2) \gamma_5 u^n(\vec{p}_1)) = \bar{u}^m \gamma_5 \hat{p}_1 u^n + \bar{u}^m \hat{p}_2 \gamma_5 u^n. \quad (4.38)$$

Так как оператор γ_5 антикоммутирует со всеми γ_μ , то матричный элемент рассматриваемого перехода имеет вид

$$\bar{u}^m(\vec{p}_2) \gamma_5 u^n(\vec{p}_1) = \frac{1}{2mc} \bar{u}^m \gamma_5 (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) u^n = \sum_{\mu=0}^3 \frac{p_1^\mu - p_2^\mu}{2mc} (\bar{u}^m \gamma_5 \gamma_\mu u^n). \quad (4.39)$$

Отсюда видно, что диагональные матричные элементы этого перехода, т. е. перехода с $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$, равны нулю, как уже отмечалось выше. Для малых же изменений скорости между состояниями m и n матричный элемент пропорционален разности скоростей. Вообще, чем больше разность $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, тем больше матричный элемент перехода. Если импульс \mathbf{p}_2 отрицателен, т. е. u^m описывает состояние с отрицательной энергией, то разность $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ и соответствующий матричный элемент особенно велики. Действие оператора $\gamma_5(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ можно уяснить себе, вспомнив, что справедливо равенство

$$\gamma_5(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \gamma_5 \gamma_0(p_{1,0} - p_{2,0}) - \vec{\gamma} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2). \quad (4.40)$$

Второй член в правой части равенства (4.40) можно записать в явном виде, используя выражения (4.27) и (4.33),

$$-i \left(\begin{array}{cc} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \end{array} \right). \quad (4.41a)$$

Если мы интересуемся только состояниями с положительной энергией, то вклад в матричный элемент равен

$$-i \vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \quad (4.41b)$$

т. е. равен скалярному произведению спина частицы на разность ее импульсов. [Первый член в правой части равенства (4.40) в нерелятивистском приближении „мал“.]

СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

§ 1. Спин

Понятие спина обсуждалось многими авторами (см., например, книгу Дирака [115]); поэтому здесь мы ограничимся лишь основными положениями. Пусть F — произвольный эрмитов оператор. Он является интегралом движения, если коммутирует с гамильтонианом H

$$[H, F] = 0. \quad (5.1)$$

Для случая дираковской частицы гамильтониан имеет вид

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2\beta. \quad (5.2)$$

Можно показать, что для уравнения Дирака орбитальный момент

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla} \quad (5.3)$$

не является интегралом движения. Интегралом движения в этом случае является величина $\vec{J} = \vec{L} + 1/2\hbar\vec{\sigma}$. Следовательно, мы приписываем дираковской частице собственный момент, равный $1/2\hbar$. Это означает, что частица имеет спин $1/2$.

Для частиц с положительной энергией существуют два независимых состояния, соответствующие одному и тому же импульсу. Они связаны с двумя возможными ориентациями спина. Согласно квантовой механике, каждая такая пара физических состояний может быть представлена в явном виде двумя векторами в гильбертовском пространстве. Следовательно, излишне изображать эти векторы четырехкомпонентными волновыми функциями, как обычно делается в теории Дирака. Оказывается, можно найти такое преобразование, которое приводит волновую функцию свободной дираковской частицы с определенным импульсом к двухкомпонентной функции типа функций, используемых в нерелятивистской теории спина Паули [369]. Эта задача была решена Беккером [24] с точностью до члена порядка v^2/c^2 и точно — Фолди и Ваутхейсеном [186]. В новом представлении физическое содержание уравнения Дирака становится особенно наглядным. Например, в этом представлении изменение во времени эрмитова оператора положения X (который совпадает с оператором, полученным Ньютоном и Вигнером [356])

для частицы со спином $1/2$) дается выражением \vec{p}/E_p , т. е. скоростью частицы (в противоположность старому представлению, где оно равно $c\vec{\alpha}$). Кроме того, появляются новые операторы момента. Выше мы видели, что в обычном представлении интегралом движения является сумма выражений $\vec{r} \times \vec{p}$ и $1/2\hbar\vec{\sigma}$ (спиновый момент), а не каждое в отдельности. В новом представлении, однако, величина $\vec{X} \times \vec{p}$ и новый спиновый момент Σ каждый в отдельности являются интегралами движения.

§ 2. Состояния с отрицательной энергией

Мы уже отмечали, что уравнение Дирака имеет решения, соответствующие состояниям с отрицательной энергией. При физической интерпретации этих решений возникают трудности; например, электрон с отрицательной энергией, если бы он существовал, ускорялся бы в направлении, противоположном действующей силе. В 1930 г. Дирак устранил эту трудность, предложив так называемую „теорию дырок“, которую он сформулировал в своей книге [103] следующим образом: „Предположим, что почти все состояния с отрицательной энергией заполнены, причем в каждом состоянии, согласно принципу Паули, находится один электрон. Незаполненное состояние с отрицательной энергией проявляется как „нечто“ с положительной энергией, так как для уничтожения этого состояния, т. е. для его заполнения, необходимо добавить к нему электрон с отрицательной энергией“. Когда Дирак впервые предложил свою теорию, он полагал, что мир построен только из протонов и электронов, и естественно было считать это „нечто“ протоном. Вскоре такое предположение было отвергнуто Оппенгеймером [360] и Вейлем [527], которые показали, что это „нечто“ должно иметь массу, равную массе электрона, и обладать отрицательной энергией. Так как в 1931 г. позитроны (т. е. частицы с массой, равной массе электрона, и зарядом $+e$) еще не были обнаружены экспериментально, Паули [370] рассматривал это предсказание как недостаток теории Дирака.

Однако в 1933 г. к моменту выхода книги Паули из печати теория уже получила подтверждение, так как Андерсон [5] экспериментально доказал существование позитрона.

В первоначальной форме теории дырок Дирак считал, что мир целиком заполнен электронами, причем в абсолютном вакууме все состояния с отрицательной энергией заполнены, а с положительной энергией свободны. В современной теории дырок, развитой Гейзенбергом [225, 226], Крамерсом [287] и другими авторами, ликвидирована эта асимметрия заряда. Действительно, в новейшей формулировке теории дырок существует полная симметрия положительных и отрицательных зарядов.

Теория дырок Дирака предсказывает возможность образования пар в том случае, если энергия кванта достаточна для перехода электрона из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией, т. е. если $h\nu > 2mc^2$. В действительности же, электромагнитный эффект проявляется даже в том случае, когда $h\nu < 2mc^2$, так как электромагнитное поле может вызывать перераспределение зарядов и тем самым „поляризовать вакуум“. Эффект поляризации вакуума можно обнаружить экспериментально при изучении тонкой структуры основного состояния позитрония, лэмбовского смещения и сдвигов уровней мезоатомов.

Позитронием называется связанное состояние электрона и позитрона, образованное под действием кулоновских сил. В основном состоянии позитроний не обладает орбитальным моментом и благодаря наличию спинов электрона и позитрона может находиться в триплетном ($S=1$) или синглетном ($S=0$) состояниях. Согласно теории Янга [541], Вольфенштейна и Равенхолла [540], две частицы могут аннигилировать, испуская при этом два γ -кванта, только тогда, когда они находятся в синглетном, а не в триплетном состоянии. Аннигиляция частиц, находящихся в триплетном состоянии, возможна с испусканием лишь трех γ -квантов. Время жизни частиц в триплетном состоянии примерно в тысячу раз больше времени жизни в синглетном состоянии. Эти выводы были подтверждены экспериментально Дэйчем [100], Пондом и Диком [395]. Разность энергетических уровней этих состояний равна примерно $9 \cdot 10^{-4}$ эв (см. работу Дэйча и Дулита [101], причем около половины величины указанной разности обуславливается виртуальной аннигиляцией и последующим рождением электронно-позитронной пары. Такой процесс может происходить только в синглетном состоянии; он является обратным эффектом поляризации вакуума, который представляет собой рождение и последующую аннигиляцию электронно-позитронной пары.

Выражение для лэмбовского смещения содержит член, обусловленный небольшим искажением электрического поля протона вследствие поляризации вакуума (как обсуждалось выше). Такое искажение поля вызывает сдвиг уровня основного состояния атома водорода примерно на 27 мкгц, что было впервые вычислено Юлингом [488]. Так как теория и эксперимент согласуются с точностью до 0,6 мкгц, то это обстоятельство снова указывает на реальность поляризации вакуума.

Этот факт был подтвержден в дальнейшем наблюдениями над сдвигом уровней в мезоатомах, т. е. атомах, образованных π^- - и μ^- -мезонами, движущимися по боровской орбите вокруг протона или легкого ядра (см. также т. II, гл. 33, § 8, и гл. 50, § 6). Рассмотрим систему π^- -мезон — протон P ($\pi^- - P$). Так же, как для атома водорода, энергетические уровни данной системы будут смещены относительно уровней, получаемых из уравнения Клейна—Гор-

дона¹⁾ для частиц в кулоновом поле. Этот сдвиг обусловлен в основном электромагнитными радиационными эффектами и в значительно меньшей степени конечными размерами нуклона и особенно мезон-нуклонными взаимодействиями и т. п. Электромагнитные радиационные поправки связаны с двумя эффектами: один из них возникает из-за различия собственных энергий связанного и свободного π^- -мезонов, второй — из-за поляризации вакуума нуклонным полем. Поляризация вакуума в данном случае, как и вообще, в действительности обусловлена рождением пар противоположно заряженных частиц любого сорта, т. е., кроме электронно-позитронных пар, рождением мезонных пар $\pi^+ - \pi^-$ и $\mu^+ - \mu^-$. Однако в первом приближении эффект поляризации вакуума обратно пропорционален квадрату массы частиц, образующих пару (π^\pm, μ^\pm, e^\pm), поэтому основной вклад в наблюдаемый эффект дают электронно-позитронные пары.

Для мезоатома вклад в сдвиг уровней, обусловленный поляризацией вакуума нуклонным полем, в действительности гораздо больше, чем вклад, обусловленный собственной энергией мезона (отношение этих эффектов равно квадрату отношения массы мезона к массе электрона). Кроме того, так как в мезоатоме мезон в среднем гораздо ближе к ядру, чем электрон в обычном атоме, то величина сдвига уровней, обусловленная поляризацией вакуума, также значительно больше в первом случае. Так, для $1S$ -уровня в системе $\pi^- - P$ сдвиг уровня порядка 10 эв (ср. со сдвигом приблизительно 10^{-2} эв для атома водорода), а для системы $\pi^- - \text{Mg}$ $1S$ -уровень ниже на величину порядка $1,4 \cdot 10^3 \text{ эв}$ (сдвиг пропорционален Z^2).

Наличие такого сдвига уровней в мезоатомах было обнаружено недавно в институте Карнеги в прекрасных экспериментах Стирнса и др. [457—459], снова подтвердивших реальность эффекта поляризации вакуума. Кроме того, эти экспериментальные результаты ясно указали на характер взаимодействия электромагнитного поля со всеми найденными в природе заряженными частицами.

Эффект поляризации вакуума при электростатическом взаимодействии заряженных частиц (например, двух протонов) также указывает на существование отклонения от чисто кулоновского рассеяния. Весьма вероятно, что, когда экспериментальные данные по рассеянию протонов на протонах при низких энергиях будут уточнены, эти эффекты, несомненно, проявятся.

§ 3. Уравнение Дирака с учетом внешнего поля

Как было указано в случае уравнения Клейна — Гордона, чтобы учесть внешнее электромагнитное поле, необходимо сделать калиб-

1) Соответствующее уравнение для π -мезона.

ровочно-инвариантную замену

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu. \quad (5.4)$$

Это приводит к уравнению

$$c \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \right) \psi = mc^2 \psi, \quad (5.5)$$

или

$$\{ (p_0 - e\varphi) - \vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A}) - \beta mc^2 \} \psi = 0. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) можно привести к уравнению второго порядка, по форме аналогичному уравнению Клейна—Гордона [см. уравнение (2.41)], умножив обе части уравнения (5.5) на оператор $\hat{p} - (e/c)\hat{A}$; в результате получим

$$\left(\hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \right) \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \right) \psi = m^2 c^2 \psi. \quad (5.7)$$

Используя определение $\sigma^{\mu\nu}$ [соотношение (3.13)], левую часть перепишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) &= \\ &= \sum_{\mu\nu} (g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}) \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) = \\ &= \sum_{\mu} \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) - \\ &- \frac{i}{2} \sum_{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu} - \sigma^{\nu\mu}) \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) = \\ &= \sum_{\mu} \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) - \\ &- \frac{i}{2} \sum_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \left[p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right]. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Коммутатор в последней строчке можно легко вычислить, если вспомнить, что

$$[p_\mu, A_\nu] = i\hbar \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$$

и, следовательно,

$$\frac{ie\hbar}{c} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) = \frac{ie\hbar}{c} F_{\mu\nu}. \quad (5.9)$$

Таким образом, окончательно получается следующее уравнение:

$$\left\{ \sum_{\mu} \left(p_{\mu} - \frac{e}{c} A_{\mu} \right) \left(p^{\mu} - \frac{e}{c} A^{\mu} \right) + \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{c} \sum_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \psi = (mc)^2 \psi. \quad (5.10)$$

Дополнительный член

$$\frac{1}{2} \frac{e\hbar}{c} \sum_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{e\hbar}{c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}} - i\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{E}}) \quad (5.11)$$

соответствует взаимодействию спина $1/2\hbar\vec{\sigma}$ с электромагнитным полем $(\vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{E}})$. Член $i\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ соответствует спин-орбитальному взаимодействию.

Физический более наглядный метод получения уравнения второго порядка был дан Фолди и Ваутхейсеном [186], к работе которых мы отсылаем читателя для подробного ознакомления.

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

§ 1. Стационарные состояния

Существует ряд задач, для которых уравнение Дирака (5.6) можно решить точно. Наиболее важными из них являются следующие задачи:

1. Движение заряженной частицы в кулоновом поле (Дирак [102], Дарвин [98], Гордон [211], Мотт [345]).

2. Движение частицы в однородном магнитном поле, охватывающем все пространство (Раби [398], Хафф [237], Заутер [427], Джонсон и Липман [246]).

3. Взаимодействие частицы с плоской электромагнитной волной (Волков [504]).

Эти задачи рассмотрены во многих учебниках (например, в книге Мотта и Снеддона [347] и в книге Крамерса [288]).

Решение первой задачи имеет важные приложения, в частности к определению энергетического спектра атома водорода и вычислению энергий рентгеновских лучей при переходах K - и L -электронов тяжелых атомов.

В случае атома водорода уровни энергии характеризуются главным квантовым числом n и квантовым числом j , определяющим собственное значение полного момента. Если определить матрицы Дирака так, как это мы сделали в гл. 3, § 1, то „большие“ компоненты волновой функции ψ_1 и ψ_2 будут описывать частицу с орбитальным моментом $l_1 = j + 1/2$ (или $j - 1/2$), а „малые“ ψ_3 и ψ_4 — с орбитальным моментом $l_2 = j - 1/2$ (или $j + 1/2$). Таким образом, большие и малые компоненты имеют противоположные четности, причем четность больших компонент равна $(-1)^l$ и является, по определению, четностью состояния.

Наблюдаемая величина тонкой структуры водорода и водородоподобных атомов, в частности He^+ , находится в хорошем согласии с теорией Дирака. Вырождение уровней с одним и тем же j и различными l также хорошо согласуется с экспериментом, за исключением одного случая, именно уровней $S_{1/2}$ и $P_{1/2}$. В этом случае, как уже упоминалось выше, существует сдвиг уровней, найденный Лэмбом [295]: терм $2S_{1/2}$ лежит выше терма $2P_{1/2}$ примерно на 1058 мггц . Этот сдвиг теоретически объясняется с точностью до $0,6 \text{ мггц}$ учетом радиационных поправок к обычной теории Дирака.

Теория рентгеновского спектра тяжелых элементов пока еще далека от такого совершенства. Первый шаг для уточнения этой теории был сделан Козном [87]; он строго учел взаимную экранировку электронов. Однако, как показал Зоммерфельд [456], теория Дирака остается справедливой для состояний с релятивистскими энергиями даже в настоящем несовершенном виде. Чтобы установить, например, релятивистскую часть радиационных поправок, а также поправки, определяемые конечным размером ядра и т. д., необходимо провести подробные количественные вычисления.

§ 2. Точная теория рассеяния при высоких энергиях

В случае кулоновского рассеяния релятивистских электронов и позитронов незранированным атомным ядром с зарядом Z наше уравнение допускает разделение угловых и радиальных переменных. Так как электрон обладает спином $1/2$, то в результате рассеяния часть электронов может изменить направление спина на обратное и рассеянная волна будет описывать электроны со спинами обоих направлений. Это ведет к несколько усложненной формуле для суммы квадратов амплитуд рассеяния (см. книгу Мотта и Снеддона [347]), которая не может быть выражена в замкнутой форме, а выражается в виде ряда по угловым моментам.

Значительный вклад в теорию был сделан недавно Йенни, Равенхоллом и Вильсоном [544], которые использовали представление матриц γ , удобное для изучения частиц высоких релятивистских энергий. В этом представлении можно показать, что спин, первоначально параллельный направлению движения, остается таковым и после рассеяния (что означает изменение его направления в пространстве): Все вычисления при этом значительно упрощаются и точность повышается.

Изучим теперь некоторые предельные случаи. Важнейший из них — нерелятивистский предел, при котором полученная формула точно совпадает с обычной формулой рассеяния Резерфорда. Даже в релятивистском случае, т. е. при больших скоростях электрона, для *малых* углов рассеяния эта формула совпадает с формулой Резерфорда

$$\sigma_R = \frac{Z^2 e^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{4m^2 v^4 \sin^4(\theta/2)} = \frac{Z^2 e^4}{4p^2 v^2 \sin^4(\theta/2)}. \quad (6.1)$$

Второе выражение более наглядно, чем первое. Оно показывает, что для малых углов рассеяния при использовании удобной переменной, именно pv (т. е. произведения импульса частицы на ее скорость), релятивистские поправки не меняют вида формулы. Величина pv имеет размерность энергии. Она равна удвоенной кинетической энергии при малом v и кинетической энергии при больших v .

Уравнение (6.1) используется обычно для расчета многократного рассеяния частиц в фотопластиках и определения ρv из экспериментов по измерению сечения этого процесса.

Для больших углов рассеяния θ мы не можем, вообще говоря, дать такой простой формулы. Однако для малых Z , т. е. для $Z/137 \ll 1$, Мак-Кинли и Фешбах [316] (см. также статью Далица [95]) получили следующее выражение для сечения в виде ряда Мотта [345, 346] по степеням Z :

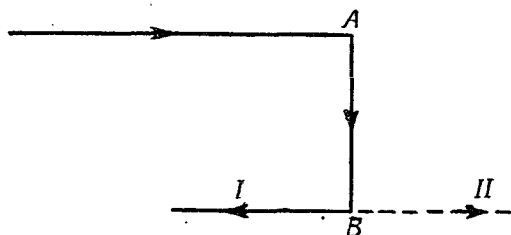
$$\sigma = \sigma_R \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \pi Z \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{v}{c} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (6.2)$$

Второй член уже появляется в первом борновском приближении. Третий член линеен по Z , что легко понять из его вида [величина $(E - V)^2 = (E - e\varphi)^2$ была представлена в форме $E^2 - 2EV + V^2$]. Когда величина Z положительна, т. е. при рассеянии электронов, V^2 имеет тот же знак, что и $-2EV$, и тогда третий член в выражении (6.2) складывается с главным (вторым) членом. При рассеянии же позитронов (отрицательные значения Z) этот член вычитается из главного члена выражения (6.2). При рассеянии электронов, когда значения θ и v/c не слишком велики, отношение σ/σ_R становится больше единицы. В книге Мотта и Месси [348] приводится расчет Бартлетта и Ватсона [20—22] для случая однократного рассеяния электронов и позитронов ядрами ртути¹⁾. Работа Мак-Кинли и Фешбаха [316] содержит оценки для области энергий 1—4 Мэв. Позднее в работе Фешбаха [164] был рассмотрен случай $E \gg mc^2$, который имеет место для энергий, больших 4 Мэв. Более строгий расчет для случая высоких энергий был проведен Йенни и др. [543, 544]. Как уже было указано выше [см. выражение (6.2)], при $\theta = 180^\circ$ и $v \rightarrow c$ сечение рассеяния стремится к нулю, т. е. очень быстрые электроны или позитроны не рассеиваются в обратном направлении.

Постановка экспериментов по рассеянию электронов связана с рядом трудностей. Однако недавно такие эксперименты были проведены и было получено Ван-де-Граафом и др. [500], а также Бьюкнером и др. [72] хорошее согласие с теорией для энергий 2,25 Мэв для всех углов, за исключением очень малых. При очень низких энергиях (ниже 245 кэв) Боте [63] измерил величину сечения рассеяния электронов ядрами золота; она оказалась на 37% ниже теоретически предсказанного значения. По-видимому, при таких низких энергиях теоретические оценки были проведены недостаточно аккуратно. Липкин [306] наблюдал различие между сечениями рассеяния электронов и позитронов, которое следует из выражения (6.2).

¹⁾ Их расчет более точен, чем соотношение (6.2). Они фактически численно просуммировали ряд Мотта в интервале энергий от θ до $(v/c) = 1$.

В 1929 г. Мотт [345, 346] указал на возможность осуществления эксперимента для определения эффектов поляризации частично поляризованного пучка, обусловленных двойным рассеянием¹⁾. Рассмотрим падающий неполяризованный пучок, т. е. пучок с беспорядочно ориентированными спинами электронов. Пусть этот пучок рассеивается сначала в точке *A*, а затем в точке *B*, как показано на фиг. 1. Пусть *a* и *b* — две амплитуды волновых функций, описывающих электроны со спинами, направленными вверх или вниз соответственно. При этом можно показать, что интенсивность пучка в направлении *I* пропорциональна $(a^2 + b^2)$, а в направлении *II* — $2ab$.



Фиг. 1.

Таким образом, интенсивность в направлении *I* больше, чем в направлении *II*. Мотт показал, что при рассеянии электронов с энергией 400 кэВ ядрами золота этот эффект должен быть порядка 10%. До 1943 г. попытки найти такой эффект экспериментально не увенчались успехом. Однако в 1943 г. Шулл и др. [451], а несколько позднее Крейн с сотр. [401] подтвердили наличие этого эффекта, а также показали причину неудач предшествующих экспериментаторов. При очень высоких энергиях эффекты поляризации снова становятся малыми, так как в процессе рассеяния спин-электрона не меняет своей ориентации по отношению к направлению движения (см. замечание к теории Йенни и др. в начале этого параграфа).

§ 3. Эффект, обусловленный структурой ядра

В области относительно низких энергий, где длина волны электрона велика по сравнению с размерами ядра, мы рассматривали ядро как точечный рассеиватель. При более высоких энергиях электрона такое рассмотрение уже незаконно, и можно предполагать, что из экспериментов по рассеянию электронов высоких энергий мы получим некоторые сведения о распределениях заряда и тока в ядре.

¹⁾ Более подробно это изложено в книге Мотта и Месси [348].

При энергиях электрона $E \gg mc^2$ Фешбах [163] из общих теоретических соображений показал, что сдвиг фаз при рассеянии зависит только от j и не зависит от l (так же как и уровни атома водорода). Этот факт был подтвержден численными расчетами, проведенными для ряда частных случаев.

Недавно был проведен ряд экспериментов по рассеянию электронов достаточно больших энергий (Лайман и др. [315] использовали 15,7 Мэв, Пидд и др. [387] — 30—45 Мэв, Хофштадтер и др. [234, 235] — 84—186 Мэв).

Фешбах [163] также показал, что при условии, когда длина волны электрона велика по сравнению с радиусом ядра, возмущение кулонова поля, обусловленное конечными размерами ядра, действует лишь на волну с $j = 1/2$. Сдвиг ее фазы в этом случае пропорционален объемному интегралу от разности между невозмущенным кулоновским потенциалом и фактически имеющимся потенциалом в присутствии ядра; последний в свою очередь пропорционален среднему квадрату расстояния протонов от центра ядра.

Лайман и др., используя вычисления Фешбаха, проанализировали свои экспериментальные результаты и установили, что радиус ядра при предположении об однородном распределении заряда в ядре равен $1,2 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см, т. е. несколько меньше, чем принятый ранее радиус $1,4 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см, полученный из экспериментов по рассеянию быстрых нейтронов, по зеркальным ядрам и т. д. Величина радиуса Лаймана была подтверждена экспериментами по рассеянию электронов высоких энергий, а также измеренным Фитчем и Рейнуотером [179] спектром рентгеновских лучей, испускаемых μ -мезонами при переходах между квантовыми состояниями в атоме. Биттер и Фешбах [39], а также Бодмер [46] высказали дополнительные теоретические соображения в пользу меньшей величины радиусов ядер. Купер и Хенли [89], и особенно Янкович [241], показали, как следует понимать прежние соображения в пользу больших радиусов, полученных из экспериментов по зеркальным ядрам.

При энергиях электрона порядка 100 Мэв и выше длина волны электрона достаточно мала (порядка $2 \cdot 10^{-13}$ см при 100 Мэв), поэтому рассеяние должно зависеть от внутренней структуры ядра. Смит [452, 453] и Шифф [430], используя борновское приближение, изучали рассеяние электронов высоких энергий заряженными протяженными частицами с различным распределением зарядов по объему. Однако почти для всех ядер, кроме самых легких, борновское приближение неприменимо. Единственным надежным путем для вычисления рассеяния электронов является численный метод. Он был проведен с большой точностью Йенни, Равенхоллом и Вильсоном [543, 544] с применением быстродействующей счетной машины; значительного успеха добилась также Баранджер [14, 15], применив полуаналитический метод. В частности, она показала, что полуана-

литический метод ВКБ ¹⁾ можно применить для вычисления сдвига фаз разных парциальных волн с точностью до $0,1^\circ$ или лучшей.

Вычисления Йенни и др. находятся в прекрасном согласии с экспериментами Хофштадтера и др., если подобрать подходящим образом радиус ядра и распределение заряда в нем. И наоборот, сравнение эксперимента с расчетами позволяет более точно определить уже известный радиус ядра. Оказывается, что он равен $(1,2 \pm 0,05) \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см; это находится в полном согласии с результатом, указанным выше. Кроме того, можно показать, что поверхность ядер не может быть резко очерченной, т. е. что плотность протонов в ядрах постепенно падает от центра к периферии, как и требует квантовая механика. Расстояние, на котором плотность протонов падает от 90 до 10% от плотности в центре, порядка $2 \cdot 10^{-13}$ см и, по-видимому, не зависит от массового числа A . Оказывается, что радиус ядра пропорционален $A^{1/3}$ вплоть до очень малых A , включая даже He^4 . Недавно в Стенфорде экспериментально исследовали распределение заряда и измеряли величину магнитного момента протона; было получено, что размер протона порядка $0,7 \cdot 10^{-13}$ см.

¹⁾ То есть метод Вентцеля, Крамерса, Брюллоэна.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

§ 1. Вероятность перехода

Рассмотрим систему с гамильтонианом $H = H_0 + V$. Предположим, что нам известны собственные функции и собственные значения H_0 , т. е.

$$H_0 \varphi_a = E_a \varphi_a. \quad (7.1)$$

Далее, если система находилась первоначально в состоянии, описываемом собственной функцией φ_a оператора H_0 , то не зависящее от времени возмущение V вызовет переходы в другие состояния с той же самой энергией. Если возмущение является очень слабым, то число переходов в единицу времени из состояния a в состояние b выражается хорошо известной формулой

$$\omega_{a \rightarrow b} = 2\pi \hbar^{-1} |(\varphi_b, V \varphi_a)|^2 \delta(E_b - E_a). \quad (7.2a)$$

Это есть первый член выражения для вероятности перехода. Его обычно называют первым борновским приближением. Точное выражение для вероятности перехода дается соотношением

$$\omega_{a \rightarrow b} = 2\pi \hbar^{-1} |(\varphi_b, T \varphi_a)|^2 \delta(E_b - E_a), \quad (7.2b)$$

где величина T может быть разложена в ряд по степеням V , первым членом выражения (7.2b) будет тогда (7.2a) (см., например, работу Снайдера [455]). Так как нас всегда интересует только переход в конечное состояние, определяемое интервалом энергии от E_b до $E_b + dE_b$ и плотностью ρ_f , то вероятность перехода в единицу времени имеет вид

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi \hbar^{-1} \int dE_b |(\varphi_b, T \varphi_a)|^2 \delta(E_b - E_a) \rho_f(E_b) = \\ &= 2\pi \hbar^{-1} |(\varphi_b, T \varphi_a)|^2 \rho_f(E_b). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Сечение перехода можно теперь получить, разделив ω на соответствующую относительную скорость.

В теории Дирака непосредственно применяется формула (7.3). Однако существует ряд методов, которые значительно облегчают вычисления указанного сечения. Ниже опишем некоторые из этих методов, как например нормировку функций, применение проекционных операторов и вычисление шпуров матриц.

§ 2. Нормировка и условия ортогональности

Для упрощения расчетов наши волновые функции выгоднее нормировать на объем $mc^2/|E|$, а не на единицу объема¹⁾. Так как единица объема в покоящейся системе испытывает в движущейся системе лоренцовское сокращение в $\sqrt{1-v^2/c^2} = mc^2/|E|$ раз, то наша нормировка остается инвариантной.

Это условие делает нормировку с помощью сопряженных спиноров очень простой. Напомним, что уравнение Дирака в импульсном пространстве имеет вид

$$Eu = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2)u, \quad (7.4a)$$

$$Eu^\dagger = u^\dagger(c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2). \quad (7.4b)$$

Умножая уравнение (7.4a) на $u^\dagger \beta$ слева, а (7.4b) на βu справа, складывая их и учитывая антикоммутируемость β и $\vec{\alpha}$, получаем

$$2Eu^\dagger \beta u = 2mc^2 u^\dagger u. \quad (7.5)$$

Вспомнив, что $\bar{u} = u^\dagger \beta$ и что, согласно нашей нормировке,

$$u^\dagger u = \frac{|E|}{mc^2}, \quad (7.6)$$

найдем

$$\bar{u}u = \frac{E}{|E|}. \quad (7.7)$$

Таким образом, величина $\bar{u}u$ равна ± 1 в зависимости от знака энергии. Обычно пишут

$$\bar{u}u = \epsilon, \quad (7.8)$$

где $\epsilon = \pm 1$.

Наша нормировка обладает также тем преимуществом, что делает инвариантной относительно собственного преобразования Лоренца и величину $d\rho_r$, так как плотность состояний в импульсном пространстве для всех ориентаций спина теперь равна

$$d\rho_r = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{|E|} dp^1 dp^2 dp^3. \quad (7.9)$$

Величина $d^3p = dp^1 dp^2 dp^3$ преобразуется при собственных преобразованиях Лоренца как временная компонента 4-вектора, также преобразуется и $|E|$. Следовательно, $d\rho_r$ — инвариант.

Рассмотрим условия ортогональности между спинорами. Если $u^r(\vec{p})$ ($r = 1, 2$) — два решения, соответствующие импульсу \vec{p} и положительной энергии частицы, то их всегда можно выбрать

¹⁾ Ясно, что это возможно только в случае $m \neq 0$ и, следовательно, невозможно для случая нейтрино.

ортогональными друг к другу, так как они оба являются собственными функциями одного и того же эрмитового оператора $c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2$. Условие их ортонормируемости гласит:

$$\bar{u}^r(\vec{p}) u^s(\vec{p}) = \delta_{rs} \quad (r, s = 1, 2). \quad (7.10)$$

Далее, можно легко показать, что решения, отвечающие импульсу $-\vec{p}$ частицы с отрицательной энергией, также ортогональны $u^r(\vec{p})$. Рассмотрим уравнение Дирака для свободной частицы с положительной энергией

$$(\hat{p} - mc) u_+(\vec{p}) = 0. \quad (7.11)$$

Для спиноров, описывающих частицы с энергией $-E$ и импульсом $-\vec{p}$, \hat{p} заменяется на $-\hat{p}$, и уравнение принимает вид

$$(\hat{p} + mc) u_-(\vec{p}) = 0. \quad (7.12)$$

Следует напомнить, что такая волновая функция описывает позитрон с импульсом $+\vec{p}$, так как, согласно дырочной теории Дирака, наличие позитрона с импульсом $+\vec{p}$ можно рассматривать как отсутствие электрона с отрицательной энергией и импульсом $-\vec{p}$ в зоне, заполненной электронами с отрицательной энергией. Умножая уравнение (7.11) на $\bar{u}_-(\vec{p})$ слева, получаем

$$\bar{u}_-(\vec{p}) \hat{p} u_+(\vec{p}) = mc \bar{u}_-(\vec{p}) u_+(\vec{p}). \quad (7.13)$$

Взяв выражение, сопряженное (7.12), и умножив его справа на $u_+(\vec{p})$, получим

$$\bar{u}_-(\vec{p}) \hat{p} u_+(\vec{p}) = -mc \bar{u}_-(\vec{p}) u_+(\vec{p}). \quad (7.14)$$

Однако уравнения (7.13) и (7.14) только тогда могут быть совместными, когда $\bar{u}_-(\vec{p}) u_+(\vec{p}) = 0$. Если два ортогональных решения, соответствующих частице с отрицательной энергией и импульсом $-\vec{p}$, обозначить через $v^r(\vec{p})$, т. е. назвать волновыми функциями позитрона функции $v^r(\vec{p})$,

$$u^r(-\vec{p}) = v^r(\vec{p}) \quad (r = 1, 2), \quad (7.15)$$

то условия ортонормируемости, которым они подчиняются, в соответствии с условием (7.7) примут вид

$$\bar{v}^r(\vec{p}) v^s(\vec{p}) = -\delta_{rs}. \quad (7.16)$$

Выпишем вместе все условия ортонормируемости

$$\bar{u}^r(\vec{p}) u^s(\vec{p}) = \delta_{rs} \quad (r, s = 1, 2), \quad (7.17a)$$

$$\bar{v}^r(\vec{p}) v^s(\vec{p}) = -\delta_{rs} \quad (r, s = 1, 2). \quad (7.17b)$$

$$\bar{v}^r(\vec{p}) u^s(\vec{p}) = \bar{u}^s(\vec{p}) v^r(\vec{p}) = 0 \quad (r, s = 1, 2). \quad (7.17b)$$

Согласно условиям нормировки и ортогональности, решения для частиц с импульсом \vec{p} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{r=1}^2 (u_{\alpha}^r(\vec{p}) \bar{u}_{\beta}^r(\vec{p}) - v_{\alpha}^r(\vec{p}) \bar{v}_{\beta}^r(\vec{p})) = +\delta_{\alpha\beta}. \quad (7.18)$$

Знак минус в последнем соотношении возникает благодаря условию нормировки (7.7) для решений, соответствующих частицам с отрицательной энергией. Следует обратить внимание на порядок множителей в этом соотношении, т. е. на тот факт, что появляется комбинация $u\bar{u}$, которая является 4-мерной матрицей, полученной путем умножения столбца матрицы на строку. Аналогично из условий ортонормируемости (7.17a) и (7.17b) следует, что

$$\sum_{r=1}^2 (\bar{u}^r(\vec{p}) u^r(\vec{p}) - \bar{v}^r(\vec{p}) v^r(\vec{p})) = 4. \quad (7.19)$$

Для облегчения дальнейшей работы введем следующие обозначения для наших волновых функций:

$$\begin{aligned} w^r(\vec{p}) &= u^r(\vec{p}) \quad \text{для } r = 1, 2, \\ w^{r+2}(\vec{p}) &= v^r(\vec{p}) = u^r(-\vec{p}) \quad \text{для } r = 1, 2. \end{aligned} \quad (7.20)$$

При этом условия ортонормируемости (7.17) примут вид

$$\bar{w}^r(\vec{p}) w^s(\vec{p}) = \varepsilon^r \delta_{rs} \quad (r, s = 1, 2, 3, 4), \quad (7.21)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon^r &= +1 \quad \text{для } r = 1, 2, \\ \varepsilon^r &= -1 \quad \text{для } r = 3, 4. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Соотношения (7.18) и (7.19) теперь записываются в виде

$$\sum_{r=1}^4 \varepsilon^r w^r(\vec{p}) \bar{w}^r(\vec{p}) = I, \quad (7.23)$$

$$\sum_{r=1}^4 \bar{w}^r(\vec{p}) w^r(\vec{p}) \varepsilon^r = 4, \quad (7.24)$$

§ 3. Проекционные операторы

Часто возникает необходимость провести суммирование по промежуточным спиновым состояниям; например, иногда нужно провести такое суммирование только по тем промежуточным состояниям, которые отвечают положительным энергиям частиц, либо только по тем, которые соответствуют отрицательным энергиям частиц. Пусть интересующая нас сумма имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{t=1}^2 (\bar{s} Q \omega^t) (\bar{w}^t P r) = \\ &= \sum_{t=1}^2 \left(\sum_{\alpha\beta=1}^4 \bar{s}_\alpha Q_{\alpha\beta} \omega_\beta^t \right) \left(\sum_{\rho\sigma=1}^4 \bar{w}_\rho^t P_{\rho\sigma} r_\sigma \right), \quad (7.25) \end{aligned}$$

где Q и P — операторы (приведения матриц γ), r и s — спиноры, индекс t у знака суммы показывает, что суммирование необходимо проводить только по двум состояниям ω^r , отвечающим положительным энергиям частиц. Аналогично можно рассмотреть случай, когда промежуточные состояния соответствуют отрицательным энергиям частиц.

Следовательно, необходимо найти проекционные операторы, которые можно ввести в левую часть соотношения (7.23) таким образом, чтобы проводить суммирование уже по всем четырем состояниям, а не по двум ω^r ($r = 1, 2$), как мы это делали раньше. При этом для упрощения соотношения (7.23) можно использовать условие (7.21). Мы хотим, чтобы проекционные операторы, о которых идет речь, обладали определенным свойством: умножали спинор w на $+1$ для состояний частиц с положительной энергией, и на нуль для состояний частиц с отрицательной энергией. Такой оператор можно сконструировать, зная, что уравнение Дирака, выраженное в наших спинорах w , при $\hbar = c = 1$ имеет вид

$$(\hat{p} - m) \omega^r(\vec{p}) = 0 \quad \text{для } r = 1, 2, \quad (7.26)$$

$$(\hat{p} + m) \omega^r(\vec{p}) = 0 \quad \text{для } r = 3, 4. \quad (7.27)$$

Эти уравнения наводят на мысль определить проекционный оператор для состояний частиц с положительной энергией и импульсом \vec{p} в виде

$$\Delta_+(p) = \frac{m + \hat{p}}{2m}, \quad (7.28)$$

так как благодаря уравнениям (7.26) и (7.27) он отвечает всем требованиям, предъявляемым к проекционному оператору, а именно:

$$\begin{aligned} \Delta_+(p) \omega^r(\vec{p}) &= \omega^r(\vec{p}) \quad \text{для } r = 1, 2, \\ \Delta_+(p) \omega^r(\vec{p}) &= 0 \quad \text{для } r = 3, 4, \end{aligned} \quad (7.29)$$

или

$$\Delta_+(p) \omega^r(\vec{p}) = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon^r) \omega^r(\vec{p}). \quad (7.30)$$

Далее,

$$(\Delta_+)^2 = \left(\frac{m + \hat{p}}{2m} \right)^2 = \frac{p^2 + 2m\hat{p} + m^2}{4m^2} = \frac{\hat{p} + m}{2m} = \Delta_+, \quad (7.31)$$

так как для свободных частиц $\hat{p}^2 = p^2 = m^2$.

Принимая во внимание соотношения (7.21) и (7.29), легко находим

$$\Delta_+(p) = \frac{\hat{p} + m}{2m} = \sum_{r=1}^2 \omega^r(\vec{p}) \overline{\omega^r(\vec{p})}. \quad (7.32)$$

Заметим, что величина $\Delta_+ \varepsilon^r$ обладает теми же свойствами, что и сам оператор Δ_+ , так как для состояний частиц с отрицательной энергией, когда $\varepsilon^r = -1$, оператор Δ_+ , действуя на спинор ω^r , дает нуль. Это позволяет нам записать формулу (7.25) в виде

$$\Omega = \sum_{t=1}^4 (\overline{sQ} \Delta_+ \varepsilon^t \omega^t) (\overline{\omega^t} P r). \quad (7.33)$$

Используя соотношение (7.23), перепишем формулу (7.33) в виде

$$\Omega = (\overline{sQ} \Delta_+ P r); \quad (7.34)$$

таким образом, мы уже достигли поставленной цели — вычислили сумму по всем промежуточным состояниям частиц.

Если нас интересуют только состояния частиц с отрицательной энергией, то мы можем по аналогии определить проекционный оператор в виде

$$\Delta_-(p) = \frac{m - \hat{p}}{2m}. \quad (7.35)$$

Он обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \Delta_-(p) \omega^r(\vec{p}) &= \omega^r(\vec{p}) && \text{для } r = 3, 4, \\ \Delta_-(p) \omega^r(\vec{p}) &= 0 && \text{для } r = 1, 2, \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$(\Delta_-(p))^2 = \Delta_-(p) = - \sum_{r=3}^4 \omega^r(\vec{p}) \overline{\omega^r(\vec{p})}. \quad (7.37)$$

Следует отметить, что сумма операторов Δ_+ и Δ_- дает простой результат

$$\Delta_+(p) + \Delta_-(p) = 1 \quad (7.38)$$

и что

$$\Delta_+(p) \Delta_-(p) = \Delta_-(p) \Delta_+(p) = 0. \quad (7.39)$$

§ 4. Шпуры

Согласно выражению (7.3), вероятность события, матричный элемент которого равен $M = \bar{w}_r Q w_i$, пропорциональна квадрату абсолютной величины M , т. е.

$$|M|^2 = M^+ M = (\bar{w}_r Q w_i) (\bar{w}_i^+ Q^+ w_r^+) = (\bar{w}_r Q w_i) (\bar{w}_i \gamma^0 Q^+ \gamma^0 w_r). \quad (7.40)$$

Здесь Q^+ — оператор, эрмитово-сопряженный (комплексно-сопряженный и транспонированный) оператору Q ¹⁾. Введем

$$Q' = \gamma^0 Q^+ \gamma^0. \quad (7.41)$$

Тогда

$$|M|^2 = (\bar{w}_r Q w_i) (\bar{w}_i Q' w_r). \quad (7.42)$$

Во многих задачах нас не интересует спин частицы в конечном состоянии. Поэтому выражение (7.42) мы должны просуммировать по двум конечным спиновым состояниям. С помощью методов, описанных в предыдущем параграфе, можно произвести такое суммирование, вводя соответствующие проекционные операторы. Если мы имеем дело с электронами, у которых начальные и конечные состояния описываются спинорами $w_i(\vec{p})$ и $w_r(\vec{p}')$, соответствующими положительной энергии и импульсам \vec{p} и \vec{p}' , то мы получаем

$$\begin{aligned} \sum |M|^2 &= \sum_{r=1, 2} (\bar{w}_i Q' w_r) (\bar{w}_r Q w_i) = \sum_{r=1}^4 (\bar{w}_i Q' \Delta_+(p') \varepsilon^r w_r \bar{w}_r Q w_i) = \\ &= (\bar{w}_i Q' \Delta_+(p') Q w_i), \end{aligned} \quad (7.43)$$

где сумма $|M|^2$ берется по всем конечным спиновым состояниям. Если падающий пучок также неполяризован, то необходимо усреднить $|M|^2$ по всем начальным спиновым состояниям и просуммировать по конечным спиновым состояниям; в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 (\bar{w}_i^r Q' \Delta_+(p') Q w_i^r) &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^4 (\bar{w}_i^r Q' \Delta_+(p') Q \Delta_+(p) \varepsilon^r w_i^r) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^4 \left(\sum_{\alpha\beta=1}^4 (\bar{w}_i^r)_\alpha (Q' \Delta_+(p') Q \Delta_+(p))_{\alpha\beta} (w_i^r)_\beta \varepsilon^r \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta=1}^4 \left[(Q' \Delta_+(p') Q \Delta_+(p))_{\alpha\beta} \sum_{r=1}^4 \varepsilon^r (w_i^r)_\beta (\bar{w}_i^r)_\alpha \right] = \end{aligned}$$

1) Заметим, что, согласно соотношению (3.52), та часть оператора Q , которая содержит просто произведения матриц γ (назовем ее Q_M), удовлетворяет равенству $\gamma^0 Q_M^+ \gamma^0 = Q_M$. В нематричной же части оператора Q комплексная единица $-i$ должна быть всюду заменена на i .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta=1}^4 (Q' \Delta_+ (p') Q \Delta_+ (p))_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^4 (Q' \Delta_+ (p') Q \Delta_+ (p))_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \text{Sp} (Q' \Delta_+ (p') Q \Delta_+ (p)). \quad (7.44)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$L = Q' \Delta_+ (p') Q \Delta_+ (p). \quad (7.45)$$

Оператор L можно представить с помощью линейной комбинации 16 линейно независимых матриц Γ , о которых мы говорили выше:

$$L = \sum_{l=1}^{16} a_l \Gamma_l = a_1 I + a_2 \gamma_1 + \dots \quad (7.46)$$

Если взять шпуры обеих частей равенства (7.46), то останется единственный член, содержащий единичную матрицу, т. е.

$$\text{Sp} L = 4a_1. \quad (7.47)$$

Практически полезны следующие два свойства шпура произведения матриц γ :

1. Шпур произведения нечетного числа матриц γ равен нулю. Чтобы показать это, напомним элементарные свойства шпура

$$\text{Sp}(ABC) = \text{Sp}(CAB) \quad (7.48)$$

(то же справедливо при любой циклической перестановке). Далее, как мы уже указывали, существует матрица γ_5 , обладающая следующими свойствами:

$$\gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0 \quad (7.49)$$

или

$$\gamma_5 \gamma_\mu (\gamma_5)^{-1} = -\gamma_\mu, \quad (7.50)$$

откуда

$$\gamma_5 \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_n} (\gamma_5)^{-1} = (-1)^n \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}. \quad (7.51)$$

Взяв шпуры обеих частей равенства (7.51) и учтя свойство (7.48), приходим сразу к соотношению

$$(-1)^n \text{Sp}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}) = \text{Sp}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}), \quad (7.52)$$

т. е. шпур произведения нечетного числа матриц γ равен нулю. В частности, отметим, что

$$\text{Sp}(\gamma_\mu) = 0. \quad (7.53)$$

Аналогично имеем

$$\text{Sp} \gamma_5 = -\text{Sp}[\gamma_\mu \gamma_5 (\gamma_\mu)^{-1}] = -\text{Sp} \gamma_5 = 0. \quad (7.54)$$

2. Если n — четное число, то с помощью перестановочных соотношений шпур произведения матриц γ всегда можно свести к выражению, содержащему лишь $n - 2$ множителя. Возьмем, например, случай $n = 2$. Согласно перестановочным соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad (7.55)$$

имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= \text{Sp}(\gamma_\nu \gamma_\mu) = \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp}(\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu) = g_{\mu\nu} \text{Sp} I = 4g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

так как

$$\text{Sp} I = 4. \quad (7.57)$$

Аналогично легко показать, что

$$\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - 4g_{\sigma\nu} g_{\rho\mu} + 4g_{\sigma\rho} g_{\mu\nu}. \quad (7.58)$$

Эти выводы означают, что если \mathbf{A} и \mathbf{B} коммутируют, то

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{B}) = 4\mathbf{A}\mathbf{B} = 4 \sum_\mu A_\mu B^\mu, \quad (7.59)$$

$$\text{Sp}(\hat{A}) = 0 \quad (7.60)$$

и т. д.

Другие методы вычисления шпуров см. в работе Даффина [124], Кайяньелло и Фубини [75].

ФЕЙНМАНОВСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЗИТРОНА

В 1949 г. Фейнман [168] развил теорию, целью которой было упростить все вычисления, связанные с учетом взаимодействия электронов и позитронов с внешними полями. Затем теория была обобщена и на случай взаимодействия частиц между собой (Фейнман [169]), причем она оказалась эквивалентной обычной теории поля (Фейнман [170]). Кроме упрощения всех расчетов дырочной теории Дирака, теория Фейнмана дала также совершенно новую физическую трактовку процессов взаимодействия, которая позволяет наглядно и понятно объяснить их. Здесь мы обсудим первую часть этой теории, в которой рассматривается взаимодействие электронов и позитронов только с внешними электромагнитными полями. В гл. 15—19, введя квантование поля, мы рассмотрим общий случай взаимодействий между частицами и докажем эквивалентность формализма Фейнмана и обычной теории. Ни один обзор работ Фейнмана не может претендовать на такую ясность и простоту изложения, как его оригинальные работы [168, 169]. Поэтому мы рекомендуем читателям обращаться к последним.

§ 1. Нерелятивистская теория

Рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi. \quad (8.1)$$

При решении дифференциального уравнения (8.1) обычно рассматривают $\psi(t_1)$ как известную функцию и ищут изменение ψ за малый интервал времени Δt . Вместо этого Фейнман [168] предположил, что при переходе к моменту t_2 волновая функция в точке (t_2, \vec{x}_2) выражается через волновую функцию в точке (t_1, \vec{x}_1) (при $t_2 > t_1$) следующим образом¹⁾:

$$\psi(\vec{x}_2, t_2) = \int d^3x K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) \psi(\vec{x}_1, t_1), \quad t_2 \geq t_1. \quad (8.2)$$

¹⁾ Обозначение \vec{x}_1 принято для трех пространственных координат x, y, z в момент t_1 . Дифференциал d^3x означает интегрирование по обычному пространству, d^4x — по 4-пространству

$$d^4x = cd^3x dt = cd^3x dx^0 = cd^4x.$$

Здесь K — функция Грина линейного уравнения (8.1). Предположим далее, что H — не зависящий от времени эрмитов оператор, т. е. внешнее поле, которое мы хотим рассмотреть, постоянно во времени. В соответствии с принципом суперпозиции в квантовой механике можно разложить $\psi(\vec{x}_1, t_1)$ в ряд по полному набору ортонормируемых собственных функций $u_n(\vec{x})$ оператора H с собственными значениями E_n ,

$$Hu_n = E_n u_n, \quad (8.3a)$$

$$\int d^3x u_n^*(\vec{x}) u_m(\vec{x}) = (u_n, u_m) = \delta_{nm}, \quad (8.3б)$$

$$\sum_n u_n(\vec{x}) u_n^*(\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (8.3в)$$

Таким образом,

$$\psi(\vec{x}_1, t_1) = \sum_n c_n u_n(\vec{x}_1) e^{-iE_n t_1/\hbar}. \quad (8.4)$$

Величина c_n получается обычно путем умножения равенства (8.4) на $u_n^*(\vec{x}_1)$ и интегрирования по трехмерному пространству. В результате имеем

$$c_n = \int u_n^*(\vec{x}_1) \psi(\vec{x}_1, t_1) d^3x_1 e^{+iE_n t_1/\hbar}. \quad (8.5)$$

Волновую функцию в момент t_2 можно записать в виде

$$\psi(\vec{x}_2, t_2) = \sum_n c_n u_n(\vec{x}_2) e^{-iE_n t_2/\hbar}. \quad (8.6)$$

Подставляя выражение (8.5) в формулу (8.6), меняя порядок суммирования и интегрирования и сравнивая с соотношением (8.2), получаем

$$K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = \sum_n u_n(\vec{x}_2) u_n^*(\vec{x}_1) e^{-iE_n(t_2 - t_1)/\hbar}, \quad (8.7)$$

или, вводя

$$\chi_n(\vec{x}, t) = u_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (8.8)$$

получаем

$$K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = \sum_n \chi_n(\vec{x}_2, t_2) \chi_n^*(\vec{x}_1, t_1). \quad (8.9)$$

Заметим, что для равных моментов времени $t_1 = t_2 = t$ равенство (8.7) [согласно соотношению (8.3в)] дает

$$K(\vec{x}_2, t; \vec{x}_1, t) = \sum_n u_n(\vec{x}_2) u_n^*(\vec{x}_1) = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1); \quad (8.10)$$

это должно иметь место для обращения соотношения (8.2) в тождество при $t_1 = t_2$.

Так как нас интересуют лишь времена t_2 , большие t_1 , то удобно определить K только для $t_2 \geq t_1$ и положить $K=0$ для $t_2 < t_1$. Это граничное условие мы можем внести явно в определение K , написав выражение (8.9) в виде

$$K = \sum_n \chi_n(\vec{x}_2, t_2) \chi_n^*(\vec{x}_1, t_1) \theta(t_2 - t_1), \quad (8.11)$$

где $\theta(t)$ — ступенчатая функция, определенная следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 1, \text{ если } t > 0, \\ \theta(t) &= 0, \text{ если } t < 0. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Из этого определения вытекает, что

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \delta(t), \quad (8.13)$$

Теперь уже весьма просто вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция K . Так как функции χ_n являются решениями уравнения Шредингера (8.1), то, согласно соотношениям (8.10), (8.11) и (8.13), мы получаем

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\vec{x}_2) \right] K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) &= \\ &= i\hbar \sum_n \chi_n(\vec{x}_2, t_2) \chi_n^*(\vec{x}_1, t_1) \frac{\partial}{\partial t_2} \theta(t_2 - t_1) = \\ &= i\hbar \sum_n u_n(\vec{x}_2) u_n^*(\vec{x}_1) e^{-iE_n(t_2 - t_1)/\hbar} \delta(t_2 - t_1) = \\ &= i\hbar \delta(t_2 - t_1) \sum_n u_n(\vec{x}_2) u_n^*(\vec{x}_1) = \\ &= i\hbar \delta(t_2 - t_1) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1). \end{aligned} \quad (8.14)$$

При получении последней строки уравнения (8.14) мы снова воспользовались полнотой набора собственных функций $u_n(\vec{x})$ оператора H . В общем случае, когда оператор H не обязательно постоянен во времени, можно еще определить K как решение уравнения

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\vec{x}_2, t_2) \right] K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = i\hbar \delta(t_2 - t_1) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \quad (8.15)$$

которое равно нулю для $t_2 < t_1$.

Покажем далее, что это определение (т. е. дифференциальное уравнение и граничное условие $K=0$ для $t_2 < t_1$), по существу, эквивалентно интегральной форме (8.2). Иначе говоря, мы хотим показать, что уравнение (8.15) вместе с требованием $K=0$ для $t_2 < t_1$ ведет к соотношению

$$K(\vec{x}_2, t; \vec{x}_1, t) = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1). \quad (8.10)$$

Нетрудно установить и обратное, так как соотношение (8.2) требует, чтобы для $t_2 \neq t_1$, согласно уравнению (8.1),

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\vec{x}_2, t_2) \right] K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = 0 \quad (8.15a)$$

и чтобы для $t_1 = t_2 = t$

$$K(\vec{x}_2, t; \vec{x}_1; t) = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1). \quad (8.10)$$

Если проинтегрировать теперь уравнение (8.15) по бесконечно малому интервалу времени от $t_2 = t_1 - \varepsilon$ до $t_2 = t_1 + \varepsilon$, то получим

$$K(\vec{x}_2, t_1 + \varepsilon; \vec{x}_1, t_1) - K(\vec{x}_2, t_1 - \varepsilon; \vec{x}_1, t_1) = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \quad (8.16)$$

[второй член в левой части уравнения (8.15) исчезает в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ только при условии, когда величина H конечна]. Однако $K(t_1 - \varepsilon, t_1) = 0$, по определению, так как $t_2 < t_1$, поэтому в действительности получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K(\vec{x}_2, t_1 + \varepsilon; \vec{x}_1, t_1) = K(\vec{x}_2, t_1; \vec{x}_1, t_1) = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \quad (8.17)$$

что и требовалось.

Рассмотрим теперь теорию возмущений в формализме Фейнмана. Предположим, что мы имеем дело с задачей, в которой $H = H_0 + V$, и что мы можем ее решить для случая $H = H_0$, т. е. когда $V = 0$. Обозначим через K_0 функцию Грина при $V = 0$, т. е. для свободной частицы. Легко установить, что дифференциальное уравнение (8.15) и граничное условие $K = 0$ для $t_2 < t_1$ могут быть объединены в одно интегральное уравнение¹⁾:

$$K(2, 1) = K_0(2, 1) - \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(2, 3) V(3) K(3, 1) d^4(x_3). \quad (8.18)$$

Чтобы доказать это, умножим обе части уравнения (8.18) на оператор $\left[+i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2) \right]$ и, используя уравнение (8.15), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2) \right] K(2, 1) = i\hbar \delta^4(2, 1) + V(2) K(2, 1). \quad (8.19)$$

Далее, если второй член в правой части перенести налево и сложить со вторым членом в левой части уравнения, то мы получим дифференциальное уравнение (8.15) для K . Но, так как $K_0(2, 1)$

¹⁾ Здесь введены обозначения $K(2, 1) = K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1)$; $\delta^4(2, 1) = \delta(t_2 - t_1) \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$. Множитель c появляется в знаменателе, согласно нашему определению d^4x .

равно нулю, если $t_2 < t_1$, то отсюда следует, что и $K(2, 1)$ так же равно нулю для $t_2 < t_1$.

Преимущество интегрального уравнения заключается не в том, что оно содержит все граничные условия, а в том, что его легко можно решить методом последовательных приближений или путем разложения в ряд Неймана — Лиувилля

$$K(2, 1) = K_0(2, 1) + \left(\frac{-i}{\hbar c}\right) \int d^4x_3 K_0(2, 3) V(3) K_0(3, 1) + \\ + \left(\frac{-i}{\hbar c}\right)^2 \int K_0(2, 3) V(3) K_0(3, 4) V(4) K_0(4, 1) d^4x_3 d^4x_4 + \dots \quad (8.20)$$

Правую часть выражения (8.20) можно интерпретировать следующим образом. Первый член описывает распространение свободной частицы из точки 1 в точку 2. Второй член описывает распространение свободной частицы из точки 1 в точку 3; в точке 3 происходит рассеяние, и частица снова распространяется свободно от точки 3 к точке 2. Очевидно, необходимо провести интегрирование по всем возможным точкам 3. Третий член описывает двухкратное рассеяние, именно в точках 3 и 4 и т. д.

Для малого возмущения V часто можно получить хороший результат, взяв член только первого или второго порядка по V . Для больших возмущений необходимо использовать много членов бесконечного ряда (8.20) или, еще лучше, решить интегральное уравнение (8.18). Следует заметить, что бесконечный ряд такого типа, как ряд (8.20), всегда можно преобразовать в интегральное уравнение. Так как переход от ряда (8.20) к уравнению (8.18) оказывается здесь несколько тривиальным, то этот метод может в действительности служить для вывода либо интегрального, либо дифференциального уравнения для K в тех случаях, когда гамильтониан, или потенциал, нельзя написать целиком с самого начала. Примерами таких случаев являются: а) взаимодействие электрона с электромагнитным полем, включая все радиационные поправки; б) релятивистская задача двух тел, когда взаимодействие между ними является следствием взаимодействия каждого из них с полем (гл. 25).

§ 2. Релятивистская теория

Обратимся теперь к релятивистским уравнениям в фейнмановском формализме. Напомним, что в обозначениях Фейнмана уравнение Дирака для свободной частицы имеет вид

$$(i\hat{\nabla} - m)\psi = 0, \quad (8.21)$$

где мы положили $\hbar = c = 1$ (атомные единицы). Потребуем теперь, как и в нерелятивистском рассмотрении, чтобы четырехкомпонентная волновая функция $\psi(\vec{x}_2, t_2)$ получалась из $\psi(\vec{x}_1, t_1)$ с помощью ядра

$K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1)$, где K — 4-мерная матрица. Таким образом, матрица K должна также удовлетворять уравнению Дирака¹⁾, аналогичному уравнению (8.15),

$$(i\hat{\nabla}_2 - m)K(2, 1) = i\delta^4(2, 1). \quad (8.22)$$

По аналогии с выражениями (8.4) и (8.6) функцию ψ можно разложить в ряд по полному набору собственных функций u_n [см. уравнение (3.31)], т. е. набору, соответствующему как положительным, так и отрицательным энергиям. Для удобства вместо u^* мы будем применять сопряженные собственные функции \bar{u} . Далее, проведя преобразования, аналогичные тем, которые мы проводили в нерелятивистском случае при выводе соотношения (8.7), найдем частное решение уравнения (8.22) в виде

$$K_0 = \sum_{E_n > 0} u_n(\vec{x}_2) \bar{u}_n(\vec{x}_1) e^{-iE_n(t_2 - t_1)} + \\ + \sum_{E_n < 0} u_n(\vec{x}_2) \bar{u}_n(\vec{x}_1) e^{-iE_n(t_2 - t_1)} \quad \text{для } t_2 > t_1, \quad (8.23)$$

$$K_0 = 0 \quad \text{для } t_2 < t_1.$$

Согласно требованию, функция ψ разложена в ряд по *полному* набору собственных функций u_n , поэтому в решение (8.23) необходимо включить также компоненты волновой функции, соответствующие состояниям частиц с отрицательной энергией.

Однако такой выбор K_0 [см. решение (8.23)] соответствует скорее теории только для одних электронов, чем настоящей теории дырок. Лучше всего можно это понять на следующем примере. Рассмотрим электрон, который рассеивается потенциалом V , равным нулю для $t < -T$ и для $t > T$. В этом случае реальный электрон имеет, конечно, только положительную энергию; следовательно, при $t < -T$ волновая функция падающего электрона соответствует суперпозиции решений уравнения Дирака, описывающих свободную частицу с положительной энергией. Однако при наличии потенциала V выражение (8.20), примененное к этому случаю, приводит к тому, что для $t' > T$ волновая функция электрона будет, вообще говоря, содержать компоненты, соответствующие как положительным, так и отрицательным энергиям свободной частицы и тем самым показывать, что существует конечная вероятность нахождения электрона в состоянии с отрицательной энергией. Ясно, что это физически бессмысленно. Таким образом, решение (8.23) не является удовлетворительным решением для K , и мы должны искать другое представление. При этом нужно учесть, что, согласно теории дырок, все состояния с отрицательной энергией заполнены, и, следовательно,

¹⁾ Индекс 2 у оператора $\hat{\nabla}$ означает дифференцирование по x_2 .

электрон в результате рассеяния не может перейти ни в одно из этих состояний. Это в свою очередь требует, чтобы для $t_2 > t_1$ функция K была суммой решений, соответствующих только положительным энергиям частицы. Однако, чтобы представление было полным, функция K должна еще удовлетворять уравнению (8.22) для всех моментов времени.

Чтобы удовлетворить этому условию, напомним, что, согласно нашему предположению, частное решение (8.23) для K не содержит решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (8.15). Член

$$u_n(\vec{x}_2) \bar{u}_n(\vec{x}_1) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \quad (8.24)$$

представляет собой решение однородного уравнения для произвольных t_2 . Следовательно, для того чтобы сделать

$$K = \sum_{+E} u_n(\vec{x}_2) \bar{u}_n(\vec{x}_1) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \quad \text{для } t_2 > t_1,$$

мы должны вычесть из решения (8.23) сумму всех членов (8.24) по состояниям частиц с отрицательной энергией для всех моментов времени. Эта сумма сокращается со второй половиной решения (8.23), что приводит к следующей функции Грина K_+ для случая свободной частицы:

$$K_+ = \sum_{E_n > 0} u_n(\vec{x}_2) \bar{u}_n(\vec{x}_1) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \quad \text{для } t_2 > t_1; \quad (8.25)$$

для $t_2 < t_1$ функция K_+ уже больше не равна нулю, а равна

$$K_+ = - \sum_{E_n < 0} u_n(\vec{x}_2) \bar{u}_n(\vec{x}_1) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \quad \text{для } t_2 < t_1. \quad (8.26)$$

Таким образом, одно из изменений для получения правильной теории дырок заключается в том, что условие $K=0$ для $t_2 < t_1$ заменяется соотношением (8.26). Соотношение (8.26) удобно переписать в форме, которая показывает, что в показателе экспоненты появляются лишь положительные величины, именно

$$K_+ = - \sum_{E_n < 0} u_n(\vec{x}_2) \bar{u}_n(\vec{x}_1) e^{-i|E_n||t_2-t_1|} \quad \text{для } t_2 < t_1. \quad (8.27)$$

При наличии потенциала можно написать интегральное уравнение и его разложение в ряд, являющийся аналогом ряда (8.20). В действительности, этот ряд идентичен с рядом (8.20), если только K_+ заменить на K_0 , а V рассматривать теперь как 4-мерную матрицу. Смысл членов полученного ряда лучше всего можно понять, рассмотрев пространственно-временные диаграммы. Первый член $K_+(2, 1)$ описывает распространение свободной частицы из

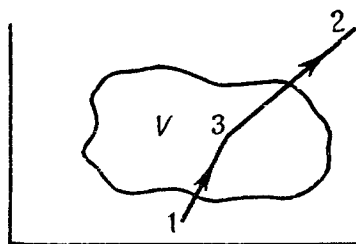
точки 1 в точку 2; обозначим это на диаграмме прямой линией (фиг. 2). Второй член

$$(-i) \int K_+(2, 3) V(3) K_+(3, 1) d^4x_3 \quad (8.28)$$

описывает однократное рассеяние. Ограничим замкнутой кривой



Фиг. 2.

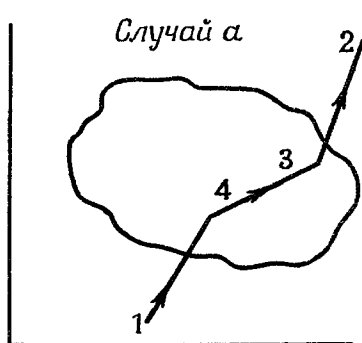


Фиг. 3.

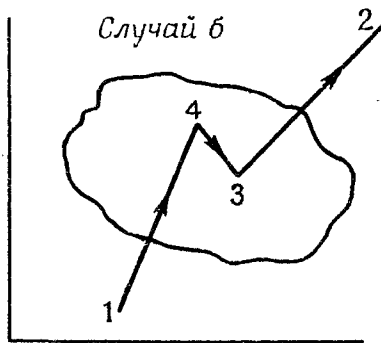
область, в которой потенциал V отличен от нуля; фиг. 3 будет изображать диаграмму однократного рассеяния. Третий член

$$(-i)^2 \int K_+(2, 3) V(3) K_+(3, 4) V(4) K_+(4, 1) d^4x_3 d^4x_4 \quad (8.29)$$

описывает двухкратное рассеяние. Диаграммы (фиг. 4 и 5) иллюстрируют две различные возможности такого рассеяния (пример внешнего потенциала см. в § 4).



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Случай а. Если мы двигаемся по мировой линии из точки 1 к точке 2 так, что время всегда растет вдоль этой линии, то в выражении для K_+ появляются лишь суммы типа (8.25), т. е. учитываются лишь состояния частиц с положительной энергией. Это есть обычное двухкратное рассеяние электрона с положительной энергией.

Случай б. При движении по мировой линии так, что при переходе из точки 4 в точку 3 мы возвращаемся во времени назад, в выражении для K_+ появляются суммы по состояниям частиц с отрицательной энергией. Эти суммы такого же типа, как (8.26). В фейнмановской интерпретации (см. также работы Штюкельберга [464, 465]) это соответствует распространению позитрона из точки 3 в точку 4. Если считать, что *время* возрастает, то эту последовательность событий можно интерпретировать следующим образом: в точке 3 рождается электронно-позитронная пара; электрон распространяется в направлении к точке 2, в то время как позитрон аннигилирует в точке 4 с приходящим туда электроном.

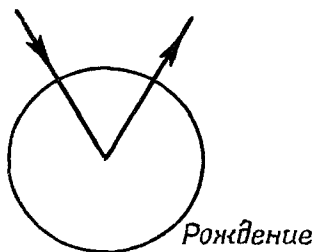
Заметим, что так как мы должны интегрировать по всем временам t_3 и t_4 , то оба случая описываются *одним* членом (8.29). Этот член поэтому обычно изображается только одной диаграммой (фиг. 4), а фиг. 5 считается идентичной, так как она может быть получена из фиг. 4, если считать, что момент t_3 следует раньше, чем t_4 . Более того, заметим, что случай „б“ протекает во времени точно так, как представляет теория дырок: электрон с отрицательной энергией переходит в состояние 2 с положительной энергией (конечное состояние), т. е. рождается пара; затем дырка заполняется электроном, находящимся в состоянии 1, т. е. происходит аннигиляция пары. В результате наблюдаемый эффект сводится к следующему: электрон рассеивается, переходя из состояния 1 в состояние 2, причем электрон с положительной энергией заменяется одним из электронов отрицательного фона. Следовательно, согласно принципу Паули, матричный элемент должен иметь отрицательный знак. И, действительно, не пользуясь явно принципом Паули, мы получили выражение (8.26) с отрицательным знаком. Таким образом, сам метод построения функции распространения K_+ дает отрицательный знак, требуемый принципом Паули. Связь между спином и статистикой (частицы со спином $1/2$ подчиняются статистике Ферми) впервые была установлена эмпирически при сопоставлении спинов и статистики ядер (см. работу Бете и Бечер [31]). Паули [376]¹⁾ впервые удалось доказать, что частицы, описываемые уравнением Дирака, должны подчиняться статистике Ферми — Дирака.

Таким образом, ясно, что в методе Фейнмана мы всегда движемся по мировой линии, даже если она ведет нас во времени обратно. Например, выше было описано виртуальное рождение пары и к одной точке мы вынуждены были двигаться по времени обратно. Мы можем также рассмотреть реальное рождение и аннигиляцию пар, представленные диаграммами на фиг. 6 и 7.

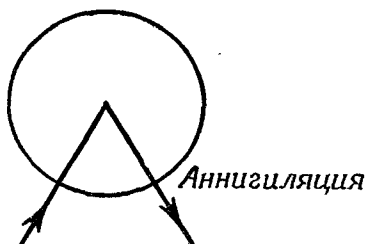
Важно отметить, что новая интерпретация Фейнмана дает в то же время возможность развить теорию, которая может описывать очень сложные процессы, не обращаясь к помощи старой теории дырок

¹⁾ См. также работу Паули [381].

с ее промежуточными состояниями. Метод Фейнмана дает, например, возможность рассчитывать более простым путем, чем это делалось раньше, такие процессы, как кулоновское рассеяние в высшем приближении (см. работу Далица [95]). Как мы увидим ниже, его легко также распространить на случай взаимодействия между частицами. Вообще в старой теории процесс, включающий n промежуточных состояний, требует вычисления 2^n матричных элементов, каждый из



Фиг. 6.



Фиг. 7.

которых, вероятно, является гораздо более сложным, чем единственное, заменяющее их фейнмановское выражение. Кроме того, при расчете сложных процессов в старой теории легко потерять некоторые из членов или ошибиться в знаке.

§ 3. Импульсное представление

В большинстве задач расчет значительно облегчается, если от координатного пространства перейти к импульсному. Напомним, что K_+ — решение уравнения

$$(i\hat{\nabla} - m)K_+(2, 1) = i\delta^4(2, 1). \quad (8.30)$$

Введем теперь фурье-образ функции K_+ , который обозначим через $S_+(\mathbf{p})$, тогда

$$K_+(2, 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_+(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} d^4p, \quad (8.31)$$

где $d^4p = dp^0 dp^1 dp^2 dp^3$. Вспомнив, что оператор $(i\hat{\nabla} - m)$ можно внести под интеграл в виде $(\hat{p} - m)$ и что δ^4 -функцию можно написать в импульсном представлении

$$\delta^4(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} d^4p, \quad (8.32)$$

получим следующее уравнение для $S_+(\mathbf{p})$:

$$(\hat{p} - m) S_+(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-4} i \quad (8.33)$$

или

$$S_+(\mathbf{p}) = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p} - m}. \quad (8.34)$$

Это выражение можно переписать также следующим образом:

$$S_+(\mathbf{p}) = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p} - m} = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\hat{p} + m}{\hat{p} + m} \frac{1}{\hat{p} - m} = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\hat{p} + m}{\hat{p}^2 - m^2}. \quad (8.35)$$

Мы уже показали, что

$$\hat{p}^2 = p_\mu p^\mu = p_0^2 - p^2 = p^2, \quad (8.36)$$

т. е. что знаменатель в выражении (8.35) не содержит больше матриц. С другой стороны, знаменатель в выражении (8.35) может быть равен нулю. Эта возможность будет обсуждена ниже.

Если подставить теперь выражение (8.35) в (8.31), то получим

$$K_+(\mathbf{2}, \mathbf{1}) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} d^4 p. \quad (8.37)$$

Удобно определить интеграл $I_+(\mathbf{2}, \mathbf{1})$ в виде

$$I_+(\mathbf{2}, \mathbf{1}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}}{p^2 - m^2} d^4 p, \quad (8.38)$$

так как соотношение (8.37) можно тогда переписать следующим образом:

$$K_+(\mathbf{2}, \mathbf{1}) = i(i\hat{\nabla}_2 + m)I_+(\mathbf{2}, \mathbf{1}). \quad (8.39)$$

Заметим, что интеграл I_+ не содержит ни одного оператора Дирака, а является просто функцией \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_1 . Подставив выражение (8.39) в (8.30), находим, что интеграл I_+ удовлетворяет соотношению

$$(\square + m^2)I_+(\mathbf{2}, \mathbf{1}) = -\delta^4(\mathbf{2}, \mathbf{1}), \quad (8.40)$$

где $\square = \hat{\nabla}^2$. Это неоднородное уравнение Клейна—Гордона. Таким образом, можно полагать, что интеграл I_+ тесно связан с функцией распространения бозе-частиц, т. е. частиц, спин которых равен нулю.

Теперь мы должны проинтегрировать выражение (8.38), чтобы получить интеграл I_+ как функцию координат. Заметим, что при этом необходимо интегрировать по каждой компоненте p^μ в отдельности. Записав отдельно пространственную и временную координаты в показателе экспоненты, перепишем интеграл I_+ следующим образом:

$$I_+(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i p_0(t_2 - t_1)} e^{i \vec{p} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}}{p_0^2 - p^2 - m^2} d^3 p dp_0. \quad (8.41)$$

Подинтегральное выражение имеет полюсы при $p^2 - p_0^2 + m^2 = 0$ или при $p_0 = \pm (p^2 + m^2)^{1/2} = \pm E_p$. По этой причине интеграл (8.41) еще не определен. Чтобы определить его, Фейнман предложил рассматривать массу m как массу, имеющую бесконечно малую мнимую отрицательную добавку, т. е.

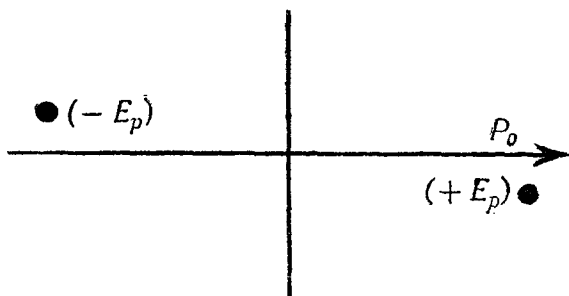
$$m \rightarrow m - i\delta, \quad \delta > 0, \quad (8.42)$$

и после устремить δ к нулю.

Чтобы показать, что интеграл I_+ теперь полностью определен, проинтегрируем сначала по dp_0 , т. е. напишем

$$I_+(x_2 - x_1) = (2\pi)^{-4} \int d^3p e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \frac{e^{-ip_0(t_2 - t_1)}}{E_p^2 - p_0^2}, \quad (8.43)$$

где, как и раньше, $E_p = (p^2 + m^2)^{1/2}$. Тогда соотношение (8.42) означает, что E_p также имеет отрицательную мнимую добавку. Рассматривая подинтегральное выражение в комплексной плоскости p_0 , видим, что первый полюс $p_0 = -E_p$ лежит теперь несколько выше



Фиг. 8.

действительной оси (пути интегрирования), в то время как второй полюс $p_0 = +E_p$ — несколько ниже ее (фиг. 8). Проинтегрируем выражение (8.43) по положительным значениям $(t_2 - t_1)$. Это можно проделать, замыкая контур интегрирования. Ввиду наличия экспоненты такое замыкание нужно, очевидно, проводить *ниже* действительной оси. При этом полюс $+E_p$ обходится по часовой стрелке. Взяв вычет в этой точке, получим при интегрировании по p_0

$$-\frac{2\pi i}{2E_p} e^{-iE_p(t_2 - t_1)}. \quad (8.44)$$

Если $(t_2 - t_1) < 0$, то мы должны замкнуть контур выше действительной оси, обходя при этом полюс $-E_p$ против часовой стрелки. В результате получим

$$-\frac{2\pi i}{2E_p} e^{+iE_p(t_2 - t_1)}. \quad (8.45)$$

Заметим, что величина E_p , по определению, положительна, и, следовательно, показатель экспоненты опять отрицателен. Таким образом, интеграл I_+ , а значит, и функция K_+ ведут себя согласно формулам (8.25) и (8.26), а именно: при $(t_2 - t_1) > 0$ играют роль только положительные энергии, а при $(t_2 - t_1) < 0$ — только отрицательные. Можно легко показать, что знак минус перед формулой (8.26) является верным и, таким образом, условие (8.42) эквивалентно нашему прежнему определению K_+ ¹⁾.

Другая функция K получается, если вместо условия (8.42) потребовать, чтобы величина p_0 имела мнимую положительную добавку

$$p_0 \rightarrow p_0 + i\delta, \quad (8.46)$$

т. е. если интегрировать по пути, параллельному действительной оси, и считать массу m действительной. При этом существуют два полюса, лежащие ниже действительной оси, и при $(t_2 - t_1) > 0$ играют роль как положительные, так и отрицательные энергии, в то время как при $(t_2 - t_1) < 0$ внутри контура вообще нет полюсов. Следовательно, K — импульсное представление функции распространения в дираковской теории только для одних электронов, как это определяется формулой (8.23). Таким образом, различие между теорией только для одних электронов и теорией дырок заключается лишь в способе определения интеграла (8.41); эти теории одинаково просты. Однако фейнмановская теория дырок имеет то преимущество, что она является ковариантной, так как мнимая величина вводится в инвариант m , в то время как в теории электронов — в компоненту p_0 (в результате она становится отличной от других компонент).

Для несвободных электронов формализм теории позитрона, совершенно аналогичный уже описанному, имеет смысл до тех пор, пока внешний потенциал, во-первых, является достаточно слабым и, во-вторых, достаточно медленно меняется. В связи с первым условием рассмотрим, например, случай кулонова поля, для которого $V = \gamma^0 Ze^2/r$. Функция распространения в этом внешнем поле может быть определена аналогично функциям (8.25) и (8.26), однако теперь u_n заменены на φ_n , являющиеся решениями уравнения Дирака в кулоновом поле. Пока $Z < 137$, решения, соответствующие положительным и отрицательным энергиям, имеют ясный смысл. Однако для $Z > 137$ эти решения больше не разделяются в энергетическом спектре щелью, и различие в смысле положительных и отрицательных энергий становится неясным (см. работу Салама и Мэттьюса [421]).

§ 4. Электромагнитное поле

Предположим теперь, что рассматриваемый электрон взаимодействует с внешним электромагнитным полем. В частности, выберем

¹⁾ Теперь, когда мы имеем интегральное представление (8.41) с условием (8.42), нет необходимости принимать во внимание отрицательный знак в формуле (8.26).

электромагнитное поле таким, чтобы потенциал взаимодействия имел вид

$$e\gamma^\mu A_\mu = e\hat{A}; \quad (8.47)$$

здесь мы подразумеваем, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Уравнение Дирака теперь имеет вид

$$(i\hat{\nabla} - m)\psi = e\hat{A}\psi, \quad (8.48)$$

а функцию распространения K_+^A в этом внешнем поле можно определить как функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$(i\hat{\nabla} - e\hat{A} - m)K_+^A(2, 1) = i\delta^4(2, 1) \quad (8.49)$$

и учитывающую только положительные энергии при $t_2 > t_1$, т. е. в прошлом, и только отрицательные — при $t_2 < t_1$, т. е. в будущем. Она удовлетворяет, таким образом, также интегральному уравнению

$$K_+^A(2, 1) = K_+(2, 1) - ie \int K_+(2, 3) \hat{A}(3) K_+^A(3, 1) d^4x_3, \quad (8.50)$$

которое уже включает указанные граничные условия. Разложение этого интегрального уравнения по степеням потенциала возмущения приводит к следующему ряду:

$$\begin{aligned} K_+^A(2, 1) = & K_+(2, 1) - ie \int d^4x_3 K_+(2, 3) \hat{A}(3) K_+(3, 1) + \\ & + (-ie)^2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 K_+(2, 3) \hat{A}(3) K_+(3, 4) \hat{A}(4) K_+(4, 1) + \dots \end{aligned} \quad (8.51)$$

В релятивистском случае связь между волновыми функциями $\psi(2)$ в точке x_2 и $\psi(1)$ в точке x_1 по аналогии с соотношением (8.2) имеет вид (см. Приложение А)

$$\psi(2) = \int K_+^A(2, 1) \beta \psi(1) d^3x_1, \quad (8.52)$$

где d^3x_1 — элемент объема трехмерного пространства при фиксированном времени t_1 , а ψ — решение уравнения (8.48). В нерелятивистском случае это последнее уравнение имеет вид

$$\psi_0(2) = \int K_+(2, 1) \beta \psi_0(1) d^3x_1, \quad (8.53)$$

где ψ_0 — решение уравнения Дирака для свободной частицы. Заметим, что мы выбрали такую функцию распространения, которая описывает распространение частиц с положительной энергией по времени вперед, а распространение частиц с отрицательной энергией — назад. В результате волновую функцию можно получить из уравнения (8.52) только в том случае, когда компоненты, соответствующие частицам с положительной энергией, определены на гиперповерхности, отвечающей некоторому раннему моменту времени, а компоненты, соот-

ветствующие частицам с отрицательной энергией, — на поверхности, отвечающей несколько более позднему моменту времени. Поэтому область интегрирования в выражениях (8.52) и (8.53) представляет собой две плоские поверхности с постоянным временем t , между которыми лежит пространственно-временная точка x_2 . Более точно мы можем написать

$$\psi(2) = \int_{t_1 < t_2} K_+(2, 1) \beta \psi(1) d^3x_1 - \int_{t'_1 > t_2} K_+(2, 1') \beta \psi(1') d^3x_{1'}, \quad (8.54)$$

где в первый интеграл ($t_1 < t_2$) входят лишь компоненты функции $\psi(1)$, соответствующие частицам с положительной энергией, а во второй — компоненты функции $\psi(1)$, соответствующие частицам с отрицательной энергией. Необходимость отрицательного знака перед вторым интегралом видна из следующего: если волновая функция ψ содержит, например, только компоненты, соответствующие частицам с отрицательной энергией, то формула (8.54) должна давать $\psi(2) \rightarrow \psi(1')$, а так как t_2 лежит раньше t'_1 , то это может быть только в том случае, если мы выберем отрицательный знак. Фейнман записал формулу (8.54) в более компактной и общей форме (см. Приложение А):

$$\psi(2) = \int K_+(2, 1) \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma} \psi(1) d\sigma(x_1), \quad (8.54a)$$

где интегрирование производится по двум пространственно-подобным поверхностям σ ¹⁾, содержащим точку 2 , а \mathbf{n}_1 — внутренняя нормаль к пространственно-подобной поверхности в каждой точке. Если поверхность выбрана плоской (постоянное время t , причем $d\sigma(x_1) = d^3x_1$), как это было сделано выше, то нормаль \mathbf{n}_1 направлена в положительном направлении t для более ранней поверхности, соответствующей t'_1 , и в отрицательном направлении t для более поздней поверхности, соответствующей t''_1 .

Далее, в теории Фейнмана компоненты, соответствующие частицам с положительной энергией, рассматриваются как амплитуды вероятности того, что электрон имеет обычный отрицательный заряд, в то время как компоненты, соответствующие частицам с отрицательной энергией, рассматриваются как амплитуды вероятности обнаружения позитрона с энергией $-E > 0$. Таким образом, чтобы определить волновую функцию в некоторый момент времени, необходимо знать позитронную компоненту в последующий момент времени и электронную компоненту в предыдущий момент времени. Иными словами, амплитуда вероятности того, что один заряд находится в пространственно-временной точке \vec{x}_2, t_2 , не определена,

¹⁾ Пространственно-подобная поверхность — это поверхность, любые две точки x, y которой не могут быть связаны световым сигналом, т. е. всегда $(x - y)^2 < 0$,

если известна только амплитуда вероятности обнаружения электрона (или позитрона) в более ранний момент времени. Хотя позитрон не мог присутствовать в более ранний момент времени, пара могла родиться при самом акте измерения, которое дает амплитуду вероятности обнаружения позитрона в будущем.

Амплитуда вероятности перехода электрона из некоторого состояния с волновой функцией $\psi_0(\vec{x}_1, t_1)$ частиц с положительной энергией в момент t_1 в состояние с волновой функцией $\varphi_0(\vec{x}_2, t_2)$ частиц с положительной энергией в момент $t_2 > t_1$ дается теперь выражением

$$M = \int \varphi_0^*(\vec{x}_2, t_2) K_+(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) \beta \psi_0(\vec{x}_1, t_1) d^3x_1 d^3x_2 = \\ = \int \bar{\varphi}_0(\mathbf{2}) \beta K_+(\mathbf{2}, 1) \beta \psi_0(\mathbf{1}) d^3x_1 d^3x_2. \quad (8.55)$$

Если внешний потенциал $e\hat{A}$ действует между моментами времени t_1 и t_2 , то функция K_+ заменяется на функцию K_+^A . Поэтому амплитуда вероятности перехода в первом приближении в соответствии с разложением (8.51) равна

$$M_1 = -ie \int \int \int \bar{\varphi}_0(\mathbf{2}) \beta K_+(\mathbf{2}, \mathbf{3}) \hat{A} K_+(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \beta \psi_0(\mathbf{1}) d^3x_1 d^3x_2 d^4x_3. \quad (8.56)$$

Однако соотношения (8.52) и (8.53) дают теперь возможность провести интегрирования по \vec{x}_1 и \vec{x}_2 , так как имеют место соотношения

$$\int K_+(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \beta \psi_0(\mathbf{1}) d^3x_1 = \psi_0(\mathbf{3}), \quad (8.57)$$

$$\int \bar{\varphi}_0(\mathbf{2}) \beta K_+(\mathbf{2}, \mathbf{3}) d^3x_2 = \bar{\varphi}_0(\mathbf{3}); \quad (8.58)$$

таким образом, равенство (8.56) принимает вид

$$M_1 = -ie \int d^4x_3 \bar{\varphi}_0(\mathbf{3}) \hat{A}(\mathbf{3}) \psi_0(\mathbf{3}). \quad (8.59)$$

Предположим теперь, что начальная волновая функция соответствует электрону, находящемуся в состоянии с положительной энергией и 4-импульсом \mathbf{p}_1 , а конечная волновая функция — электрону с 4-импульсом \mathbf{p}_2 ; следовательно,

$$\psi_0(\mathbf{x}) = u(\vec{p}_1) e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}}, \quad (8.60)$$

$$\bar{\varphi}_0(\mathbf{x}) = \bar{u}(\vec{p}_2) e^{+i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}}, \quad (8.61)$$

где u — введенные выше спиноры, соответствующие свободным частицам с положительной энергией. Если теперь ввести фурье-образ

функции $A_p(x)$, определенный следующим образом:

$$A_p(x) = \int a_p(k) e^{-ik \cdot x} d^4k, \quad (8.62)$$

то подстановка выражений (8.60) — (8.62) в равенство (8.59) позволит провести интегрирование по x_3 , так как эта переменная появится теперь только в показателях экспоненты. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} M_1 &= -ie(2\pi)^4 \int d^4k \delta^4(p_2 - k - p_1) \bar{u}(\vec{p}_2) \hat{a}(k) u(\vec{p}_1) = \\ &= -ie(2\pi)^4 \bar{u}(\vec{p}_2) \hat{a}(p_2 - p_1) u(\vec{p}_1), \end{aligned} \quad (8.63)$$

что может быть истолковано как обусловленный внешним полем вклад величины $k = p_2 - p_1$ в энергию-импульс частицы, причем энергия-импульс всей системы (включая внешнее поле) при взаимодействии сохраняется [множитель $\delta^4(p_2 - k - p_1)$].

Аналогичным образом, матричный элемент перехода от p_1 к p_2 во втором приближении получаем в виде

$$M_2 = (-ie)^2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 \bar{\varphi}_0(3) \hat{A}(3) K_+(3, 4) \hat{A}(4) \psi_0(4); \quad (8.64)$$

эта формула после подстановки фурье-образа функций \hat{A} и K_+ [см. формулы (8.62) и (8.37)] и амплитуд [см. формулы (8.60) и (8.61)] сводится к выражению

$$\begin{aligned} M_2 &= -ie^2(2\pi)^4 \int d^4p \int d^4k_1 \int d^4k_2 \delta^4(p_2 - k_1 - p) \delta^4(p_1 + k_2 - p) \times \\ &\quad \times \bar{u}(\vec{p}_2) \hat{a}(k_1) \frac{1}{\hat{p} - m} \hat{a}(k_2) u(\vec{p}_1), \end{aligned} \quad (8.65)$$

$$M_2 = -ie^2(2\pi)^4 \int d^4k \bar{u}(\vec{p}_2) \hat{a}(p_2 - p_1 - k) \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{k} - m} \hat{a}(k) u(\vec{p}_1). \quad (8.66)$$

Выражение для M_2 можно интерпретировать следующим образом. Электрон, имевший сначала импульс p_1 [множитель $u(\vec{p}_1)$], взаимодействует с внешним полем [множитель $\hat{a}(k)$] и получает от него импульс k . Далее, он распространяется с импульсом $p_1 + k$ [множитель $(\hat{p}_1 + \hat{k} - m)^{-1}$] и снова взаимодействует с внешним потенциалом, получая от него импульс $p_2 - p_1 - k$; в результате в конечном состоянии импульс электрона становится равным p_2 . Так как возможны любые значения k , то нужно проинтегрировать по ним. Ясно, что аналогичным образом можно выписать и члены более высокого порядка, не выводя их явно.

Только что развитый метод можно легко использовать для расчета вероятности рождения пары во внешнем поле. В этом случае, однако, временная компонента, соответствующая позитрону, отрицательна, а компонента, соответствующая электрону, положительна.

§ 5. Бозе-частицы

Бозе-частицы, подчиняющиеся уравнению Клейна—Гордона, также могут трактоваться с помощью метода Фейнмана [169]. В атомных единицах $\hbar = c = 1$ уравнение Клейна—Гордона имеет вид

$$(\square + m^2)\psi = 0, \quad (8.67)$$

или, введя оператор импульса $p_\mu = i\partial/\partial x^\mu$, можно написать

$$(-p^2 + m^2)\psi = 0. \quad (8.68)$$

В данном случае функцией распространения частицы является функция I_+ , введенная нами ранее [см. формулу (8.38)]. Она удовлетворяет следующему неоднородному уравнению:

$$(\square + m^2)I_+(2, 1) = -\delta^4(2, 1). \quad (8.69)$$

Если существует взаимодействие с внешним электромагнитным полем, то p_μ в уравнении (8.68) следует заменить на $p_\mu - eA_\mu$; в результате уравнение Клейна—Гордона примет вид

$$\{(p^\mu - eA^\mu)(p_\mu - eA_\mu) - m^2\}\psi = 0. \quad (8.70)$$

Уравнение для функции распространения при наличии взаимодействия с внешним полем записывается теперь следующим образом:

$$\{(p^\mu - eA^\mu)(p_\mu - eA_\mu) - m^2\}_2 I_+^A(2, 1) = -\delta^4(2, 1). \quad (8.71)^1$$

Если мы выберем калибровку внешнего потенциала так, чтобы $\partial A_\mu/\partial x_\mu = 0$, то p_μ и A_μ будут коммутировать, и уравнение (8.70) можно переписать в виде

$$(p^2 - m^2)I_+^A(2, 1) = -\delta^4(2, 1) + \{2eA_\mu p^\mu - e^2 A_\mu A^\mu\}_2 I_+^A(2, 1); \quad (8.72)$$

последнее уравнение в свою очередь можно преобразовать в следующее интегральное уравнение:

$$I_+^A(2, 1) = I_+(2, 1) - \int I_+(2, 3) \{2eA_\mu(3) p_3^\mu - e^2 A_\mu(3) A^\mu(3)\} I_+^A(3, 1) d^4 x_3. \quad (8.73)$$

Действуя на него оператором $p^2 - m^2$, мы можем снова получить уравнение (8.72). Уравнение (8.73) включает, однако, граничное условие: I_+^A содержит лишь положительные частоты при $t_2 > t_1$ (t_1 следует раньше t_2) и отрицательные частоты при $t_2 < t_1$ (t_1 следует после t_2). Это последнее интегральное уравнение также можно разложить в степенной ряд, в котором появится член A^2 , соответствующий двухкратному взаимодействию с внешним полем. Мы не

¹⁾ Индекс 2 у скобки и у оператора $p_\mu = i\hbar\partial/\partial x^\mu$ означает, что соответствующие операторы действуют на функции точки 2.

будем обсуждать здесь член этого типа, так как снова встретимся с ним при рассмотрении взаимодействия π -мезона с квантованным электромагнитным полем (см. гл. 19), тогда мы и проанализируем этот тип взаимодействия.

Здесь же только заметим, что уравнение, соответствующее уравнению (8.52), для случая бозе-частиц имеет вид (см. Приложение А)

$$\psi(2) = \int \left[\frac{\partial I_+(2, 1)}{\partial x_{10}} \psi(1) - I_+(2, 1) \frac{\partial \psi(1)}{\partial x_{10}} \right] d^3x_1, \quad (8.74)$$

причем интегрирование ведется по двум плоским поверхностям, между которыми лежит пространственно-временная точка **2**. Для времен, предшествующих времени **2**, дают вклад только компоненты ψ с положительной частотой, а для времен, следующих за временем **2**, — только компоненты ψ с отрицательной частотой. В прямой аналогии с дираковским полем их можно интерпретировать как волновые функции положительно и отрицательно заряженных бозонов. Скалярное произведение двух волновых функций бозонов дается выражением (1.16).

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ФЕЙНМАНА

§ 1. Резерфордовское рассеяние

В гл. 6 мы рассмотрели теорию рассеяния электронов высокой энергии кулоновым полем. В частности, мы написали ряд борновского приближения (6.2) с точностью до членов первого порядка по $Z\alpha$ к первому релятивистскому борновскому приближению. В качестве примера применения формализма Фейнмана получим теперь релятивистскую формулу рассеяния в первом борновском приближении.

В предыдущей главе был написан матричный элемент, представляющий собой в первом порядке амплитуду рассеяния электрона внешним потенциалом при переходах электрона из состояния, описываемого спинором $u(\vec{p}_1)$, в состояние, описываемое спинором $u(\vec{p}_2)$. Он имеет вид

$$M_2 = (-ie)(2\pi)^4 \bar{u}(\vec{p}_2) \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) u(\vec{p}_1) \quad (9.1)$$

и соответствует диаграмме Фейнмана, представленной на фиг. 3. Если рассматриваемое нами внешнее электромагнитное поле является кулоновым полем ядра с зарядом Ze ($A^0 = V = Ze/r$), то

$$\begin{aligned} \hat{a}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \gamma^\mu A_\mu(\mathbf{x}) d^4x = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(q_0) \gamma^0 \int d^3x e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) = \frac{Ze}{2\pi^2} \frac{1}{q^2} \delta(q_0) \gamma^0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

В этом случае амплитуда вероятности перехода имеет вид

$$M_2 = -2\pi i \delta(E_1 - E_2) \left[\bar{u}(\vec{p}_2) \frac{4\pi Ze^2}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^2} \gamma^0 u(\vec{p}_1) \right], \quad (9.3)$$

1) Здесь мы используем нерационализированную гауссовскую систему единиц, в которой

$$\nabla^2 V = -4\pi Ze\delta(r) \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = (137)^{-1}.$$

где $E_1 = E_2 = E$ — энергия электрона. Вероятность перехода определяется квадратом модуля M_2 , т. е.

$$|M_2|^2 = (2\pi)^2 \left| \bar{u}(\vec{p}_2) \frac{4\pi Ze^2}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^2} \gamma^0 u(\vec{p}_1) \right|^2 \delta(E_1 - E_2) \delta(0). \quad (9.4)$$

Сразу ясно, что это выражение равно бесконечности из-за наличия множителя $\delta(0)$, так как $[\delta(E_1 - E_2)]^2 = \delta(E_1 - E_2) \delta(0)$. Однако множитель $\delta(0)$ можно истолковать следующим образом:

$$\delta(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi}, \quad (9.5)$$

где T — время взаимодействия. Таким образом, вероятность перехода в единицу времени, $w_{1 \rightarrow 2}$, в заданное конечное состояние, описываемое спином $u(\vec{p}_2)$, имеет вид

$$w_{1 \rightarrow 2} = 2\pi \left| \bar{u}(\vec{p}_2) \frac{4\pi Ze^2}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^2} \gamma^0 u(\vec{p}_1) \right|^2 \delta(E_1 - E_2). \quad (9.6)$$

По форме это выражение совпадает с общим выражением (7.2) для вероятности перехода в заданное конечное состояние.

Так как нас не интересует ориентация спина электрона в конечном состоянии и так как падающий пучок электронов рассматривается как неполяризованный, то выражение для $|M_2|^2$ должно быть просуммировано по конечным и усреднено по двум начальным ориентациям спина электронов. В соответствии с гл. 7 выражение (9.6) при этом примет вид

$$w = \frac{(2\pi)^3}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^4} 4Z^2 e^4 \left(\frac{dn_f}{dE} \right)_E \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\frac{\hat{p}_2 + m}{2m} \gamma^0 \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \gamma^0 \right). \quad (9.7)$$

Здесь под w подразумевается полная вероятность перехода в единицу времени в группу конечных состояний с плотностью конечных состояний, равной $dn_f/dE = \rho_f$ [см. соотношение (7.3)]. Используя свойства шпуров матриц γ (см. гл. 7, § 5), можно легко вычислить шпур в выражении (9.7). Вспомнив, что шпур от нечетного числа матриц γ равен нулю, и использовав соотношение (7.58), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\frac{\hat{p}_2 + m}{2m} \gamma^0 \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \gamma^0 \right) &= \frac{1}{8m^2} \text{Sp} (p_2 \gamma^0 \hat{p}_1 \gamma^0 + m_2) = \\ &= \frac{1}{2m^2} (2p_{20} p_{10} - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 + m^2) = \frac{1}{2m^2} (E^2 + \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1 + m^2). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Так как внешнее поле не зависит от времени, то энергия частицы сохраняется, т. е.

$$E = E_1 = E_2 = (p_1^2 + m^2)^{1/2} = (p_2^2 + m^2)^{1/2}. \quad (9.9)$$

Отсюда следует, что сохраняется также величина трехмерного импульса частицы. Если θ — угол рассеяния, то

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos \theta = p^2 \cos \theta = (E^2 - m^2) \cos \theta, \quad (9.10)$$

где $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$.

Кроме того, из релятивистской механики известно, что

$$\frac{m}{(1 - v^2)^{1/2}} = E, \quad \text{или} \quad \frac{m^2}{E^2} = 1 - v^2, \quad (9.11)$$

где v — скорость частицы; таким образом, выражение (9.8) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\frac{\hat{p}_2 + m}{2m} \gamma^0 \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \gamma^0 \right) &= \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{2} (1 + \cos \theta) (E^2 - m^2) + m^2 \right) = \\ &= \frac{E^2}{m^2} \left(v^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 - v^2 \right) = \frac{E^2}{m^2} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Аналогично в силу сохранения величины трехмерного импульса частицы имеет место соотношение

$$|\vec{p}_1 - \vec{p}_2| = 2p \sin \frac{\theta}{2}. \quad (9.13)$$

Таким образом, для вероятности перехода ω получаем

$$\begin{aligned} \omega &= (2\pi)^3 \frac{Z^2 e^4}{4p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(\frac{E^2}{m^2} \right) \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(\frac{dn_f}{dE} \right)_E = \\ &= (2\pi)^3 \frac{Z^2 e^4}{4p^2 v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(\frac{1}{m^2} \right) \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(\frac{dn_f}{dE} \right)_E, \end{aligned} \quad (9.14)$$

так как $p/E = v$ как в нерелятивистской, так и в релятивистской области энергии. Для получения дифференциального сечения выражение для ω нужно разделить на плотность падающего потока, которая равна $vE/m = p/m$ (так как мы нормировали спиновые волновые функции одной частицы на величину m/E). Вспомним, что плотность конечных состояний на единицу энергии [см. соотношение (9.9)] имеет вид

$$\rho_f(E) = \frac{dn_f}{dE} = \frac{m d^3 p}{E (2\pi)^3 dE} = \frac{m p^2 dp d\Omega}{E (2\pi)^3 dE} = \frac{m p}{(2\pi)^3} d\Omega, \quad (9.15)$$

так как

$$\frac{dE}{dp} = \frac{p}{E}; \quad (9.16)$$

окончательно получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4p^2 v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (9.17)$$

Это выражение совпадает с выражением (6.2) с точностью до поправочного члена $Z\alpha$. В следующем приближении, т. е. с учетом двойного рассеяния, расчет был проведен Далицом [95], который подтвердил результаты Мак-Кинли и Фешбаха [316], а также выяснил некоторые ошибки предыдущих авторов в высших борновских приближениях теории поля.

Рассеяние частиц со спином 0 можно рассмотреть аналогичным образом с учетом лишь члена $A_\mu p^\mu$ в выражении (8.73). При этом формула для сечения будет совпадать с формулой (9.17), за исключением множителя $1 - v^2 \sin^2(\theta/2)$, который как раз и возникает из членов, зависящих от спина частиц. Случай рассеяния частиц со спином 1 был рассмотрен в работе Месси и Корбена [325], причем формула для сечения рассеяния отличается от формулы Резерфорда множителем $(1 + \frac{1}{6} (\frac{pv}{m})^2 \sin^2 \theta)$.

§ 2. Уравнения для связанных состояний

До сих пор мы изучали лишь задачу рассеяния. Однако, используя формализм Фейнмана, можно также изучать задачу связанных состояний. Ясно, что в этом случае следует рассматривать частицу как испытывающую постоянное воздействие заданного потенциала. Определим поэтому величину $K_+^n(2, 1)$ как амплитуду вероятности перехода частицы из точки 1 в точку 2 при n -кратном рассеянии заданным не зависящим от времени потенциалом A . Тогда выражение для амплитуды вероятности перехода частицы из точки 1 в точку 3 при $(n + 1)$ -кратном рассеянии имеет вид

$$K_+^{n+1}(3, 1) = -ie \int K_+(3, 2) \hat{A}(2) K_+^n(2, 1) d^4x_2. \quad (9.18)$$

Отсюда следует, что функция распространения частицы из точки 1 в точку 3 при произвольном числе рассеяний должна выражаться в виде ряда

$$K_+^A(3, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} K_+^n(3, 1). \quad (9.19)$$

Проведя суммирование по всем n в обеих частях соотношения (9.18), получим уравнение

$$K_+^A(3, 1) - K_+(3, 1) = -ie \int K_+(3, 2) \hat{A}(2) K_+^A(2, 1) d^4x_2, \quad (9.20)$$

которое совпадает с полученным выше интегральным уравнением для ядра во внешнем поле.

Аналогичное рассуждение можно применить к функции $\varphi_n(1)$, которая представляет собой амплитуду вероятности того, что

электрон с начальной волновой функцией φ_0 перейдет в точку 1, испытав при этом n -кратное рассеяние. Вспомнив, что

$$\psi(\mathbf{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\mathbf{2}), \quad (9.21)$$

напишем уравнение, соответствующее уравнению (9.20), в виде

$$\psi(\mathbf{2}) = \varphi_0(\mathbf{2}) - ie \int K_+(\mathbf{2}, \mathbf{3}) \hat{A}(\mathbf{3}) \psi(\mathbf{3}) d^4x_3. \quad (9.22)$$

Это есть не что иное, как интегральная форма уравнения Дирака при наличии внешнего поля. Действительно, применив оператор Дирака $(i\hat{\nabla} - m)$ к обеим частям уравнения (9.22), получим

$$(i\hat{\nabla}_2 - m)\psi(\mathbf{2}) = e\hat{A}(\mathbf{2})\psi(\mathbf{3}), \quad (9.23)$$

так как

$$(i\hat{\nabla}_2 - m)\varphi_0(\mathbf{2}) = 0. \quad (9.24)$$

Кроме того, здесь мы воспользовались соотношением (8.22). Решая дифференциальное уравнение (9.23), можно, несомненно, получить решения как задачи рассеяния, так и задачи связанных состояний в зависимости от граничного условия, налагаемого на волновую функцию. Для задачи рассеяния волновая функция ψ должна иметь следующий асимптотический вид:

$$\psi = \psi_i + \psi_s, \quad (9.25)$$

где ψ_i — падающая плоская волна, а ψ_s — расходящаяся рассеянная волна. Это выражение для волновой функции ψ по форме в точности совпадает с уравнением (9.22), в котором $\varphi_0(\mathbf{2})$ — падающая плоская волна. (Так как здесь мы рассматриваем потенциалы, уменьшающиеся с расстоянием быстрее, чем r^{-1} , то о фазовых множителях в падающей волне можно не заботиться.) Таким образом, уравнение (9.22) представляет собой интегральную форму уравнения для задачи рассеяния. Интуитивно чувствуется, что волновая функция связанных состояний должна удовлетворять однородному интегральному уравнению

$$\psi(\mathbf{2}) = -ie \int K_+(\mathbf{2}, \mathbf{3}) \hat{A}(\mathbf{3}) \psi(\mathbf{3}) d^4x_3, \quad (9.26)$$

так как оно не содержит падающей волны. Это в действительности так. Отсутствие φ_0 можно лучше всего уяснить себе, если вспомнить, что энергия связанного состояния всегда меньше m . Волновая же функция φ_0 характеризует свободную частицу с энергией, большей или равной m . Следовательно, пока $\varphi_0 \neq 0$, мы не в состоянии удовлетворить уравнению (9.22) функцией типа

$$\psi(\mathbf{x}) = u(\vec{x}) e^{-iEt} \quad (E < m), \quad (9.27)$$

которая характеризует связанное состояние.

§ 3. Задача двух частиц

В качестве третьего примера применения формализма Фейнмана рассмотрим взаимодействие двух частиц посредством электромагнитного поля. При этом мы будем близко следовать работам Мёллера [339, 340].

Если выбрать лоренцовскую калибровку, то уравнение Максвелла для потенциалов примет вид

$$\square A_{\mu} = 4\pi j_{\mu}. \quad (9.28)$$

Полученное уравнение можно решить с помощью функции Грина D_+ , которая, по определению, удовлетворяет уравнению

$$\square_2 D_+(2, 1) = 4\pi \delta(2, 1); \quad (9.29)$$

функцию Грина D_+ можно представить в интегральной форме (с фейнмановским обходом полюсов), т. е.

$$D_+(2, 1) = \frac{-4\pi}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik \cdot (x_2 - x_1)} \frac{1}{k^2 + i0} d^4k. \quad (9.30)$$

По существу, это выражение совпадает с выражением (8.38) для I_+ , когда масса m равна нулю. Теперь можно написать равенство

$$A_{\mu}(2) = \int D_+(2, 1) j_{\mu}(1) d^4x_1; \quad (9.31)$$

в нем отсутствует однородный член. Это соответствует граничному условию: в моменты времени $t = \pm \infty$ нет свободного излучения (т. е. отсутствуют решения $A_{\mu}^{(0)}$ уравнения $\square A_{\mu}^{(0)} = 0$).

Рассмотрим, далее, случай двух заряженных фермионов. Каждая из частиц является источником электромагнитного поля, которое оказывает влияние на движение другой частицы. Следовательно, в результате взаимодействия частицы рассеиваются друг другом. Используя квазиклассическую теорию излучения, запишем выражение для тока, соответствующего переходу электрона a из состояния $u_a(\vec{p}_1) e^{-i\vec{p}_1 \cdot \mathbf{x}}$ в состояние $u_a(\vec{p}_2) e^{-i\vec{p}_2 \cdot \mathbf{x}}$, в виде

$$j^{\mu}(\mathbf{x}) = e \bar{u}_a(\vec{p}_2) \gamma_a^{\mu} u_a(\vec{p}_1) e^{+i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{x}}; \quad (9.32)$$

этот ток в соответствии с равенством (9.31) создает в пространственно-временной точке \mathbf{x} поле с потенциалом

$$\begin{aligned} A^{\mu}(\mathbf{x}) &= e \int d^4x' D_+(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{+i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{x}'} \bar{u}_a(\vec{p}_2) \gamma_a^{\mu} u_a(\vec{p}_1) = \\ &= -4\pi e \int d^4k \frac{1}{k^2 + i0} e^{-ik \cdot \mathbf{x}} \delta^4(\mathbf{k} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \bar{u}_a(\vec{p}_2) \gamma_a^{\mu} u_a(\vec{p}_1). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Этот потенциал теперь действует на движение второго электрона b . С одной стороны, согласно соотношению (8.59), матричный элемент

первого порядка, соответствующий переходу (обусловленному указанным потенциалом) электрона b из состояния \mathbf{q}_1 в состояние \mathbf{q}_2 , имеет вид

$$M = -ie \int d^4x \bar{u}_b(\vec{q}_2) e^{+iq_2 \cdot x} \gamma_b^{\mu} A_{\mu}(x) u_b(\vec{q}_1) e^{-iq_1 \cdot x} = \\ = +4\pi i e^2 (2\pi)^4 \frac{\bar{u}_b(\vec{q}_2) \gamma_b^{\mu} u_b(\vec{q}_1) \bar{u}_a(\vec{p}_2) \gamma_a^{\nu} u_a(\vec{p}_1)}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \delta^4(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2). \quad (9.34)$$

С другой стороны, вместо непосредственной записи матричного элемента взаимодействия мы могли бы рассмотреть (как в случае одной частицы) функцию распространения системы двух частиц. В нерелятивистском приближении система двух частиц описывается волновой функцией Шредингера $\psi(\vec{x}_a, \vec{x}_b, t)$, и мы совершенно точно можем определить функцию распространения $K(\vec{x}_a, \vec{x}_b, t; \vec{x}'_a, \vec{x}'_b, t')$; она представляет собой амплитуду вероятности того, что частица a из точки \vec{x}'_a в момент t' перейдет в точку \vec{x}_a в момент t , тогда как частица b из точки \vec{x}'_b в момент t' перейдет в точку \vec{x}_b в момент t . Если частицы не взаимодействуют между собой, то

$$K(\vec{x}_a, \vec{x}_b, t; \vec{x}'_a, \vec{x}'_b, t') = K_{0a}(\vec{x}_a, t; \vec{x}'_a, t') K_{0b}(\vec{x}_b, t; \vec{x}'_b, t'), \quad (9.35)$$

где K_{0a} — функция распространения свободной частицы a . Далее, в случае отсутствия взаимодействия можно определить более общую функцию распространения, когда времена этих частиц в начальном и конечном состояниях не совпадают. Так, мы можем определить функцию

$$K_0(3, 4; 1, 2) = K_{0a}(3, 1) K_{0b}(4, 2), \quad (9.36)$$

которую можно интерпретировать как функцию распространения частицы a из точки 1 в точку 3, а частицы b из точки 2 в точку 4.

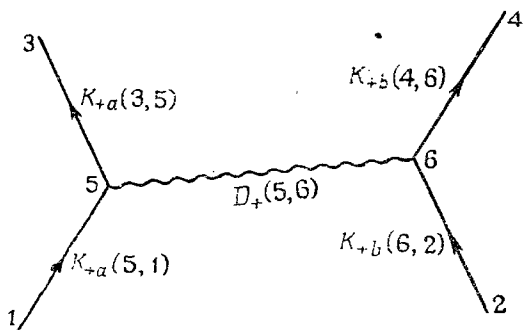
Когда частицы взаимодействуют, то функцию распространения системы можно определить только в том случае, если предположить, что взаимодействие между частицами в интервалах времен от t_1 до t_2 и от t_3 до t_4 равно нулю. Физически это часто не осуществляется. Несмотря на это, мы будем предполагать, что можно пренебречь эффектами взаимодействия между частицами в интервалах времени $t_1 - t_2$ и $t_4 - t_3$ по сравнению с эффектами взаимодействия в более длительных интервалах времени $t_3 - t_1$ и $t_4 - t_2$. В задаче рассеяния такое пренебрежение вполне оправдано, так как в начальном и конечном состояниях системы частицы настолько отдалены друг от друга, что взаимодействием между ними в этих состояниях (т. е. в интервалах времени $t_2 - t_1$ и $t_4 - t_3$) вполне можно пренебречь.

По аналогии с соотношением (8.63) можно рассматривать выражение (9.34) как матричный элемент, возникший из поправки пер-

вого порядка $K^{(1)}$ к функции распространения двух свободных частиц, причем

$$K_{+}^{(1)}(\mathbf{3}, \mathbf{4}; \mathbf{1}, \mathbf{2}) = -ie^2 \int \int d^4x_5 d^4x_6 K_{+a}(\mathbf{3}, \mathbf{5}) \gamma_a^{\mu} K_{+a}(\mathbf{5}, \mathbf{1}) D_{+}(\mathbf{5}, \mathbf{6}) K_{+b}(\mathbf{4}, \mathbf{6}) \gamma_b^{\nu} K_{+b}(\mathbf{6}, \mathbf{2}). \quad (9.37)$$

Как и выше, мы можем представить выражение (9.37) диаграммой Фейнмана (фиг. 9); множитель D_{+} в этом выражении следует рассматривать как функцию распространения виртуального фотона



Фиг. 9.

(на фиг. 9 она указана волнистой линией). Выражение (9.37) фактически является основой фейнмановской электродинамики. Оно описывает эффект, при котором два заряда обмениваются одним фотоном. Хотя вышеприведенный вывод недостаточно удовлетворителен, так как мы не квантовали электромагнитного поля, однако можно показать (см. работы Фейнмана [170] и Дайсона [126, 127]) и мы, действительно, покажем ниже (см. гл. 17), что, несмотря на это, он верен: теоретический вывод, основанный на релятивистском квантовании поля, в первом борновском приближении дает то же самое выражение (9.37).

Следует отметить, что матричный элемент является релятивистски инвариантным. Так как суммирование идет по μ , то матричный элемент учитывает продольные и поперечные волны релятивистски симметричным образом. В импульсном пространстве матричный элемент можно переписать в несколько более привычной форме, если вспомнить, что потенциал A_{μ} , определенный соотношением (9.31), должен удовлетворять условию Лоренца, $\partial A_{\mu} / \partial x_{\mu} = 0$, для того чтобы взаимодействие носило правильный электромагнитный характер. Таким образом, дифференцируя выражение (9.33) по x_{μ} и учитывая условия Лоренца, получаем

$$\bar{u}_a(\vec{p}_2) \gamma_a^{\mu} k_{\mu} u_a(\vec{p}_1) = \bar{u}_a(\vec{p}_2) (\gamma_a^0 k^0 - \vec{\gamma}_a \cdot \vec{k}) u_a(\vec{p}_1) = 0. \quad (9.38)$$

Это соотношение в действительности имеет место, так как из-за наличия δ -функции $\hat{k} = \hat{p}_2 - \hat{p}_1$, а $u_1(\vec{p}_2)$ и $u_1(\vec{p}_1)$ являются спинорами свободных частиц; следовательно,

$$\bar{u}_1(\vec{p}_2)(\hat{p}_2 - \hat{p}_1)u(\vec{p}_1) = \bar{u}(\vec{p}_2)[(\hat{p}_2 - m) - (\hat{p}_1 - m)]u(\vec{p}_1) = 0. \quad (9.39)$$

Таким образом, всюду, где в выражении (9.34) встречается матрица γ_α^0 , можно воспользоваться соотношением

$$\gamma_\alpha^0 k^0 - \vec{\gamma}_\alpha \cdot \vec{k} = 0 \quad (9.40)$$

и заменить γ_α^0 величиной $\gamma_{\alpha i}(\hat{k}/k_0)$, т. е.

$$\gamma_\alpha^0 = \gamma_{\alpha i} \left(\frac{\hat{k}}{k_0} \right), \quad (9.41)$$

где γ_i — матрица γ в направлении распространения \vec{k} (заметим, что $k_0 \neq |\vec{k}|$, так как мы имеем дело с виртуальным фотоном). Из этого результата следует, что фотон поляризован перпендикулярно к направлению своего распространения. Соотношение (9.41) в действительности имеет место для обеих частиц, так как с таким же успехом можно считать, что частица b излучает фотон, а частица a поглощает его. Таким образом, обозначив поперечные компоненты через t_i , получим

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_a^\mu \gamma_{b,\mu}}{k^2} &= \frac{\gamma_a^0 \gamma_b^0 - \gamma_a^i \gamma_b^i - \sum_{i=1}^2 \gamma_a^{t_i} \gamma_b^{t_i}}{k_0^2 - k^2} = \frac{\gamma_a^0 \gamma_b^0 \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2} \right) - \sum_{i=1}^2 \gamma_a^{t_i} \gamma_b^{t_i}}{k_0^2 - k^2} = \\ &= - \frac{\gamma_a^0 \gamma_b^0}{k^2} - \frac{\sum_{i=1}^2 \gamma_a^{t_i} \gamma_b^{t_i}}{k_0^2 - k^2}. \quad (9.42) \end{aligned}$$

Первый член этого выражения характеризует мгновенное взаимодействие и соответствует кулоновскому потенциалу, так как он является фурье-образом кулоновского потенциала. Второй член учитывает лишь поперечные кванты, которые обуславливают обычное запаздывающее магнитное взаимодействие частиц.

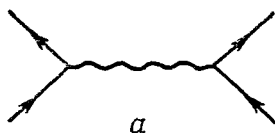
До сих пор не принимался во внимание тот факт, что рассматриваемые частицы тождественны и подчиняются принципу Паули. Учет этого обстоятельства приводит к требованию антисимметричности волновой функции системы частиц, что обеспечивается введением функции распространения $K(3, 4; 1, 2) - K(4, 3; 1, 2)$ для перехода двух частиц из точек 1 и 2 в точки 3 и 4 соответственно.

Таким образом, матричный элемент рассеяния двух тождественных частиц в первом неисчезающем приближении имеет вид

$$M = +4\pi e^2 (2\pi)^4 \left\{ \frac{\bar{u}_b(\vec{q}_2) \gamma_b^\mu u_b(\vec{q}_1) \bar{u}_a(\vec{p}_2) \gamma_{a\mu} u_a(\vec{p}_1)}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} - \frac{\bar{u}_b(\vec{p}_2) \gamma_b^\mu u_b(\vec{q}_1) \bar{u}_a(\vec{q}_2) \gamma_{a\mu} u_a(\vec{p}_1)}{|\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \right\} \delta^4(\mathbf{p}_2 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1). \quad (9.43)$$

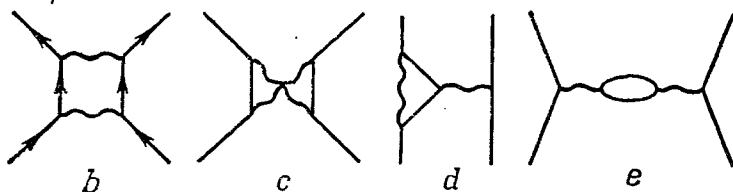
Часто это выражение называют матричным элементом мёллеровского рассеяния. Он является матричным элементом низшего порядка по константе взаимодействия.

Порядок e^2



a

Порядок e^4



b

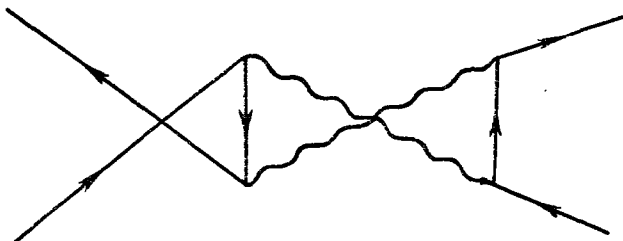
c

d

e

Фиг. 10.

В высших приближениях появляется бесконечное число поправок к этому матричному элементу, соответствующих обмену более чем

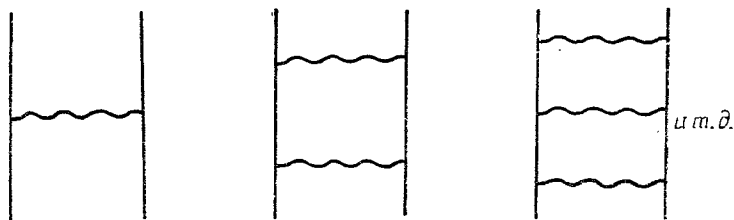


Фиг. 11.

одним фотоном между частицами и собственному взаимодействию частиц. Несколько таких простейших диаграмм приведены на фиг. 10. На фиг. 10 не приведены диаграммы, соответствующие излучению и поглощению фотона одной и той же частицей без всякого обмена

фотоном. Заметим также, что временной порядок взаимодействия в фейнмановских диаграммах не имеет особого значения, а именно диаграмма на фиг. 11 эквивалентна диаграмме на фиг. 10, с.

Теперь мы в состоянии применить к настоящей задаче метод, развитый в гл. 7, § 1. Для простоты ограничимся рассмотрением тех диаграмм взаимодействия, которые не содержат перекрывающихся фотонных линий; такие диаграммы приведены на фиг. 12. Для полной аналогии с задачей одной частицы, функцию $\varphi_n(x_1, x_2)$ назовем амплитудой вероятности нахождения двух частиц (которые вначале



Фиг. 12.

были свободными и не взаимодействовали между собой) в точках x_1 и x_2 соответственно после обмена n фотонами. Тогда амплитуда вероятности после обмена $(n + 1)$ фотоном имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(1, 2) = \\ = -ie^2 \int K_{+a}(1, 3) \gamma_a^\mu K_{+b}(2, 4) \gamma_{b\mu} D_+(3, 4) \varphi_n(3, 4) d^4x_3 d^4x_4. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Следовательно, полная амплитуда вероятности в таком приближении (которое обычно называется лестничным приближением) выражается в виде следующего ряда:

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x_1, x_2), \quad (9.45a)$$

причем

$$\begin{aligned} \psi(2, 1) = \varphi_0(2, 1) - \\ - ie^2 \int K_{+a}(1, 3) \gamma_a^\mu K_{+b}(2, 4) \gamma_{b\mu} D_+(3, 4) \psi(3, 4) d^4x_3 d^4x_4, \end{aligned} \quad (9.45b)$$

где $\varphi_0(2, 1)$ — волновая функция, удовлетворяющая уравнению Дирака для свободной частицы по обеим ее переменным. Если к обеим частям уравнения (9.45b) применить операторы Дирака для частиц a и b , то получим дифференциальное уравнение для ψ

$$(i\hat{\nabla}_a - m)(i\hat{\nabla}_b - m)\psi(2, 1) = ie^2 \gamma_a^\mu \gamma_{b\mu} D_+(2, 1)\psi(2, 1). \quad (9.46)$$

Это уравнение впервые было получено Бете и Салпетером [422] (см. также работы Намбу [351]), Швингера [442], Гелл-Манна и Лоу [203] и Кита [275]).

Уравнение (9.46) рассматривается в гл. 25, там же проводится его обобщение на более сложные случаи взаимодействия, чем приведенные выше, и исследуются вопросы связи этого уравнения с теорией поля, а также физическая интерпретация волновой функции.

§ 4. Сечение мёллеровского рассеяния

Введем для матричного элемента (9.43) мёллеровского рассеяния двух частиц следующее обозначение:

$$M = -(2\pi)^4 i \mathfrak{M} \delta^4(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2). \quad (9.47)$$

Тогда вероятность перехода будет определяться величиной $|M|^2$, и выражение для вероятности перехода в заданное конечное состояние в единицу времени и объема будет иметь вид ¹⁾

$$\omega_s = (2\pi)^4 |\mathfrak{M}|^2 \delta^4(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2). \quad (9.48)$$

Число конечных состояний равно

$$dn_f = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{m}{|E_{a2}|} \frac{m}{|E_{b2}|} d^3q_2 d^3p_2. \quad (9.49)$$

Однако так как в силу закона сохранения импульс частицы b определен в конечном состоянии, если известен импульс частицы a , то следует принимать во внимание лишь фазовый объем *одной* конечной частицы, или, другими словами, мы должны вести интегрирование по трехмерному объему d^3q , в результате чего выпадает трехмерная δ -функция. Таким образом, полная вероятность перехода в единицу времени и объема выражается следующим образом:

$$\omega = |\mathfrak{M}|^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m}{|E_{a2}|} \frac{m}{|E_{b2}|} p^2 \frac{dp}{dE} d\Omega, \quad (9.50)$$

а сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{\omega V_1 V_2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}, \quad (9.51)$$

¹⁾ Аргументация при этом аналогична приведенной в § 1. Однако соотношение (9.5) здесь заменяется 4-мерной δ -функцией и поэтому необходимо положить $\delta^4(0) \rightarrow (2\pi)^{-4} VT$, где V — объем, в котором происходит взаимодействие.

где V — нормирующий множитель, (m/E) , а $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ — относительная скорость частиц¹⁾.

Если один из электронов до столкновения покоился, а второй — имел энергию E (где $E = \gamma mc^2$) в лабораторной системе координат, то угол рассеяния θ^* (величины, относящиеся к системе центра инерции, снабжены звездочкой сверху) будет связан с углом θ соотношением

$$\cos \theta^* = \frac{2 - (\gamma + 3) \sin^2 \theta}{2 + (\gamma - 1) \sin^2 \theta}. \quad (9.52)$$

Вычислив матричный элемент M и множители, входящие в выражение (9.51), Мёллер [339, 340] получил следующую формулу для дифференциального сечения рассеяния:

$$2\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = 4\pi dx \left(\frac{e^2}{mv^2} \right)^2 \frac{\gamma + 1}{\gamma^2} \left[\frac{4}{(1-x^2)^2} - \frac{3}{1-x^2} + \frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma^2} \left\{ 1 + \frac{4}{1-x^2} \right\} \right], \quad (9.53)$$

где

$$x = \cos \theta^*. \quad (9.54)$$

Эта формула пригодна для всех углов рассеяния. Для малых углов рассеяния первый член в скобках выражения (9.53) переходит в обычное релятивистское выражение Резерфорда

$$\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (9.55)$$

ибо для малых углов $\theta^* \approx (\theta/2)$.

Что касается энергетической зависимости, то легко показать, что импульс каждого электрона в системе центра инерции определяется величиной

$$p = mv \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \quad (9.56)$$

и, следовательно, множитель перед скобками в выражении (9.53) равен

$$2\pi dx \left(\frac{e^2}{pv} \right)^2, \quad (9.57)$$

¹⁾ Если предположить, что частица 2 закреплена, то поток падающих частиц 1 будет равен $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|/V_1$, так как плотность частиц 1 равна $1/V_1$. Сечение рассеяния есть число актов рассеяния в единицу времени и объема, деленное на падающий поток частиц и на число частиц в единице объема рассеивателя ($1/V_2$). Это определение ведет к формуле (9.51). Выражение (9.51) инвариантно по отношению к лоренцовским преобразованиям в направлении относительного движения частиц $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

т. е. в точности совпадает с соответствующим множителем в релятивистской формуле Резерфорда (9.17). Можно показать, что член

$$\frac{(\gamma - 1)^2}{4\gamma^2} \left(1 + \frac{4}{1 - x^2} \right)$$

обусловлен спином электрона¹⁾. Вторым же член в выражении (9.53) связан с наличием обменного члена в матричном элементе.

Формула (9.53) была экспериментально подтверждена Пейджем [362, 363] при изучении рассеяния β -частиц в тонких бериллиевых мишенях в интервале изменения γ от 2 до 4,5 и углов рассеяния вплоть до 90° в системе центра инерции. При угле, равном 90° , основной вклад в формулу рассеяния (9.53) дает спиновый член, что было подтверждено указанными экспериментами. Эксперименты по рассеянию (Скотт и др. [450]) электронов с энергией 15,7 Мэв электронами находятся в хорошем согласии с мёллеровской формулой (9.53) в интервале углов от 70° до 105° в системе центра инерции.

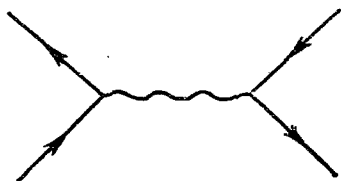
Когда после войны были спроектированы ускорители высокой энергии, многих физиков интересовал вопрос, пригодна или непригодна формула (9.53) для электронов высокой энергии. В частности, из соображений классической физики можно было ожидать, что для падающих электронов с длиной волны λ порядка классического радиуса электрона e^2/mc^2 будет иметь место отклонение от формулы точечного рассеяния. В этом случае электрон должен обладать энергией $137mc^2$ в системе центра инерции; такую энергию сравнительно легко можно реализовать при рассеянии электронов на протонах, так как энергия электрона в лабораторной системе в этом случае почти такая же, как и в системе центра инерции, т. е. $137mc^2$, а электроны такой энергии легко получить ускорением их в синхротроне. С точки зрения чисто классической физики рассеяние электронов на протонах очень удобно для изучения „размеров“ электрона, так как радиус протона в классической электродинамике равен e^2/Mc^2 , т. е. значительно меньше радиуса электрона. Однако в действительности вокруг протона имеется облако виртуальных мезонов с радиусом $\hbar/\mu c \sim 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см} = \frac{1}{2} e^2/mc^2$. Поэтому, естественно, его нельзя считать точечным зарядом. Для исследования границ применимости электродинамики нужно изучать рассеяние электронов на электронах (возможно также изучение μ -мезонов, однако их слишком мало в нашем распоряжении). В этом случае величине $\gamma^* = 137$ в системе центра инерции соответствует, согласно выражению (9.57), $\gamma = 2 \cdot 137^2 \approx 40\,000$, или в лабораторной системе — энергия электрона порядка 20 Бэв. Даже сегодня, получение электронов таких высоких энергий — дело далекого будущего. Однако в 1946 г. выяснилось, что эта задача потеряла свое значение.

¹⁾ См. книгу Мотта и Мессис [348].

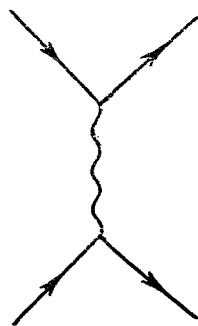
Современные теории уже не предсказывают отклонений экспериментов от теории при столь высоких энергиях. В любом случае отклонения от мёллеровского рассеяния, если они существуют, вероятно, легче наблюдать при более низких энергиях, даже если эти отклонения очень малы. *Предсказываемые* современной теорией отклонения обусловлены многократным обменом фотоном с учетом радиационных поправок (см. фиг. 10, *b* и *c*). Но они составляют при энергиях электронов порядка нескольких *Мэв* около одного процента.

§ 5. Рассеяние позитронов на электронах

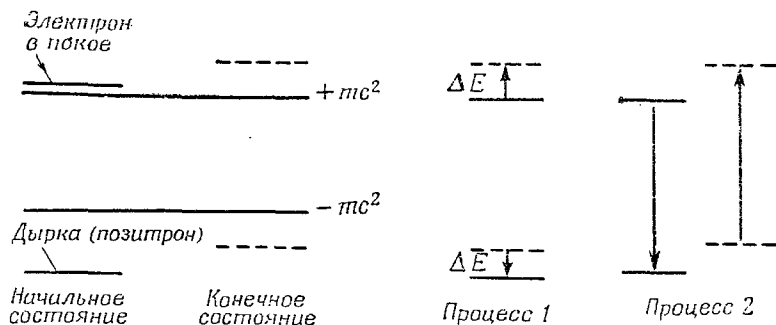
В случае рассеяния позитрона на электроне в низшем приближении по заряду существуют две фейнмановские диаграммы (фиг. 13 и 14), соответствующие возможности виртуальной аннигиляции электрона и позитрона в начальном состоянии с последующим их рождением в конечных состояниях.



Фиг. 13.



Фиг. 14.



Фиг. 15.

Заметим, что в этом случае нет необходимости брать антисимметричную функцию распространения, так как электроны и позитроны не являются тождественными частицами.

В старой теории возмущения эти два процесса описывались бы следующим образом:

Процесс 1. а) Электрон переходит в энергетическое состояние, которое выше первоначального на величину энергии ΔE . б) Дырка заполняется электроном с отрицательной энергией, который находился в энергетическом состоянии выше этой дырки на величину энергии ΔE . При этом создается новая дырка, или позитрон, но уже с меньшей кинетической энергией.

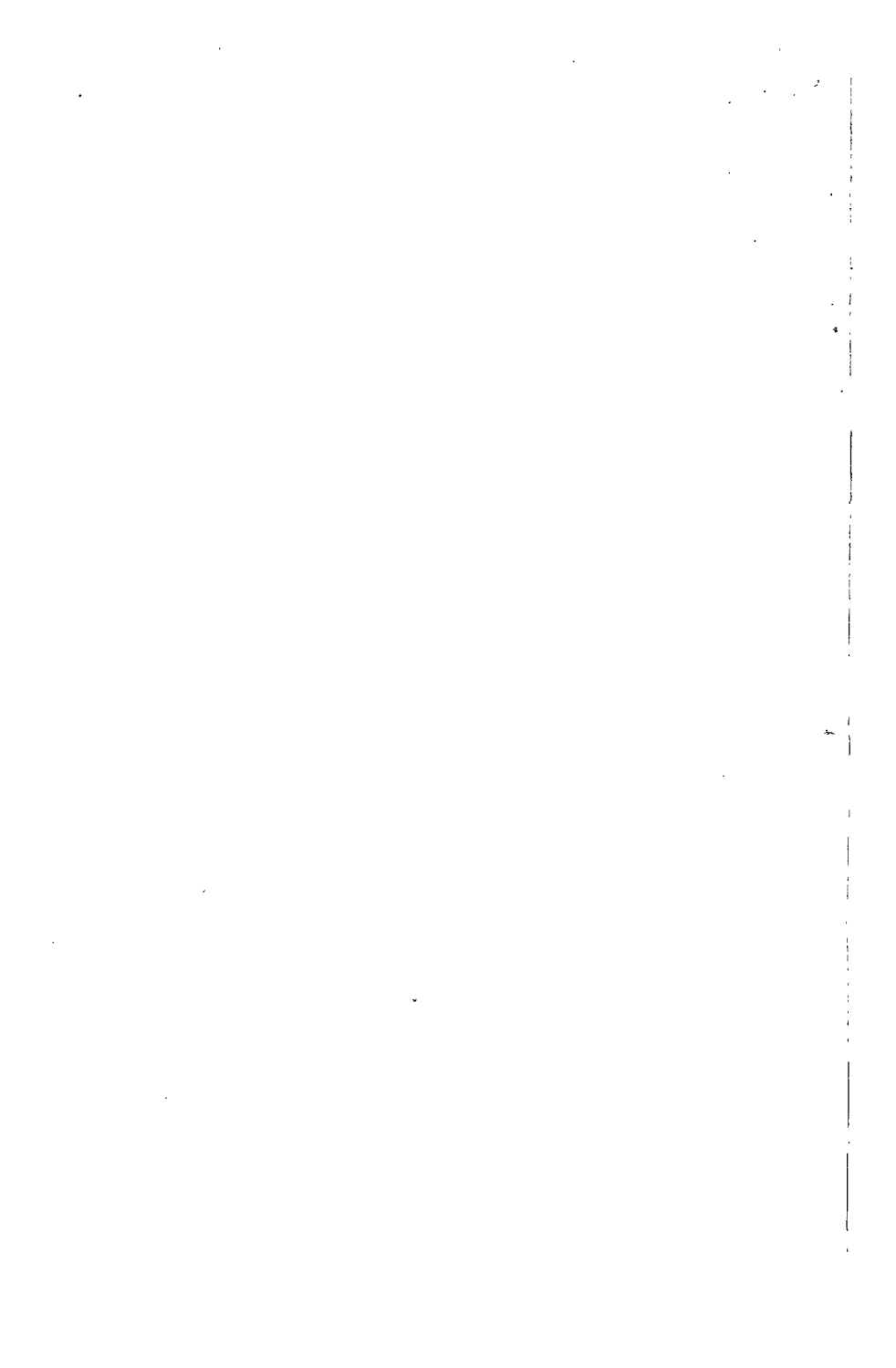
Процесс 2. а) Электрон заполняет дырку. б) Электрон с отрицательной энергией переходит в состояние с положительной энергией, создавая при этом пару — электрон и дырка (позитрон).

Эти процессы иллюстрируются на фиг. 15.

Процессам 1 и 2 соответствуют матричные элементы M_1 и M_2 . Согласно принципу Паули, полный матричный элемент равен $M_1 - M_2$. Баба [37]¹⁾ в результате вычислений получил формулу для сечения рассеяния позитрона на электроне, которая имеет такую же структуру, как формула Мёллера для рассеяния электрона на электроне, и отличается от нее лишь незначительно.

Экспериментальная проверка формулы Баба является также проверкой всей теории дырок и, в частности, указанных выше двух возможных процессов. Ашкин [11, 12] подтвердил правильность формулы Баба экспериментами по рассеянию позитронов в интервале энергий от 0,6 до 1 Мэв и вплоть до углов 90° . Как и выше, обменный член в формуле Баба существенен для получения согласия теории с экспериментом.

¹⁾ Подробности см. в книге Росси [414].



ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ



ПОЛЯ И ВИДЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

До сих пор мы имели дело в основном с электронами и позитронами, взаимодействующими лишь с заданными внешними полями, но не взаимодействующими между собой. В гл. 9, § 3, мы кратко коснулись взаимодействия частиц, причем использовали квазиклассическую теорию излучения. Однако правильное квантово-механическое описание взаимодействий частиц возможно лишь на основе квантовой теории поля. Часть вторая данной книги посвящена именно этому вопросу. Прежде чем приступить к его количественному рассмотрению, полезно качественно описать основные задачи и следствия квантования поля.

Для этого рассмотрим электромагнитное поле, описываемое уравнением Максвелла — Лоренца. Хорошо известно (см., например, работу Ферми [155]), что посредством преобразования Фурье динамическое описание поля можно свести к динамическому описанию бесконечного набора гармонических осцилляторов. В случае отсутствия зарядов и токов эти осцилляторы не связаны между собой, и полная энергия поля

$$\frac{1}{2} \int d^3x (\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2)$$

есть сумма энергий всех осцилляторов. Квантово-механическое описание такой системы осцилляторов хорошо известно каждому студенту, изучавшему основы квантовой механики. Кроме того, применение законов квантовой механики к этой задаче кажется естественным, ибо электромагнитное поле обычно рассматривают как *классическое* поле¹⁾.

1) Несколько отличная и более глубокая причина необходимости квантования электромагнитного поля заключается в том, что если проквантованы механические параметры (координаты и импульс) частиц, то следует квантовать и поле, которое связано с ними. Это обуславливается тем фактом, что принцип неопределенности Гейзенберга, по-видимому, нельзя применять к части природы. Так, если бы принцип неопределенности не был применим к полям, то, как показали Бор и Розенфельд [47] (см. также работу Гейзенберга [224]), можно было бы поставить *мысленный* эксперимент, который позволил бы в принципе точно измерить одновременно импульс и положение частицы, наблюдая поля, создаваемые частицей. Таким образом, необходимость квантования электромагнитного поля есть прямое следствие квантовой механики частицы.

Однако можно также рассматривать уравнение Шредингера одной частицы как уравнение движения для *классического* нерелятивистского поля, которое описывает отрицательно заряженное *материальное* поле. (С этой точки зрения наличие постоянной \hbar несущественно.) Измеряемыми характеристиками этого поля являются плотности заряда $\rho(x)$, тока $\vec{j}(x)$ и энергии поля $\mathcal{H}(x)$, которые можно выразить с помощью волновой функции ψ следующим образом:

$$\rho(x) = -e\psi^*(x)\psi(x),$$

$$\vec{j}(x) = -\frac{e\hbar}{2mc}(\psi^*(x)\nabla\psi(x) - \psi(x)\nabla\psi^*(x)),$$

$$\mathcal{H}(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*(x)\cdot\nabla\psi(x).$$

Такое классическое поле нужно рассматривать как классическую систему с бесконечным числом степеней свободы, которую *следует* квантовать так же, как любую другую классическую систему.

Теперь мы в состоянии развить для такого поля лагранжев формализм, который позволит ввести канонически-сопряженные переменные поля и гамилтониан системы (см. гл. 10). Налагая условия квантования (т. е. условия, при которых канонически-сопряженные переменные становятся операторами, удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям), находим, что переменные поля (ψ , ψ^*) превращаются в операторы, подчиняющиеся определенным перестановочным соотношениям (см. гл. 13, § 1). Далее, разумный выбор представления (см. гл. 13, § 2 и 3) дает возможность описывать квантованную систему поля с помощью „частиц“, или, более точно, с помощью „квантов“ поля, которые являются носителями энергии и импульса (и заряда) поля. Если операторы поля коммутируют между собой, то указанный рецепт квантования ведет к частицам (квантам поля), подчиняющимся статистике Бозе—Эйнштейна. Если же частицы поля подчиняются статистике Ферми—Дирака, то операторы поля антикоммутируют.

Эти соображения также применимы и к полям, описываемым релятивистскими уравнениями, например к полю Клейна—Гордона. Случай дираковского поля (и вообще любого описываемого волновым уравнением поля с полуцелым спином) требует особого рассмотрения, так как энергия поля в этом случае не является положительно-определенной и квантование следует проводить согласно антикоммутационным соотношениям (см. гл. 13, § 5). Ниже мы убедимся в том, что квантование таких свободных полей также позволяет описывать поле с помощью квантов, которые являются носителями энергии-импульса поля (и заряда в случае комплексных амплитуд поля).

Лагранжев формализм позволяет также рассматривать взаимодействие полей. Это достигается весьма просто путем введения в лагранжиан системы члена взаимодействия (см. гл. 11 и 12). Хотя канонический формализм при этом все еще позволяет квантовать систему сравнительно простым способом, однако уяснить смысл квантовой теории становится уже гораздо труднее. Это особенно проявляется в случае взаимодействия релятивистских полей: в теории появляются бесконечности, и задача еще больше затрудняется. Однако ниже мы увидим, что некоторые интересные результаты можно получить, пользуясь теорией возмущений (см. гл. 14). Наконец, методы перенормировок (см. гл. 20 и 24) укажут нам способ, с помощью которого можно обходить трудности, связанные с бесконечностями.

Существует также другой подход к теории поля, который исходит из нерелятивистской теории Шредингера n -взаимодействующих частиц. Иордан, Клейн, Вигнер [247, 249] и Фок [183] показали, что такую теорию можно сформулировать, вводя операторы a_k и a_k^+ , представляющие собой соответственно операторы уничтожения и рождения частицы в k -ом квантовом состоянии. В гл. 13, § 7, будет изложена эта теория, а также новейшее ее развитие и связь с обычной теорией поля. В теории Иордана — Клейна — Вигнера операторы a_k и a_k^+ служат для описания переходов частицы из одного квантового состояния в другое. Однако после того, как эти операторы определены, они допускают естественное обобщение на случай, когда частицы могут реально рождаться и аннигилировать, т. е. когда общее число частиц N перестает быть интегралом движения.

К счастью, именно такое положение имеет место в релятивистских квантовых теориях взаимодействующих полей и должно соответствовать тому, что в действительности наблюдается экспериментально. Например, в случае электромагнитного поля квант света может как излучаться, так и поглощаться; то же самое имеет место и для других бозонов, например π -мезонов. В случае электронов возможны рождение и аннигиляция позитронно-электронных пар. Все эти процессы удобно и точно описываются в теории поля операторами рождения и уничтожения. Эти операторы служат также для краткого и точного описания взаимодействия двух частиц (например, двух электронов), в результате которого излучается квант поля (квант света) одним из электронов и поглощается другим.

В операторной теории Иордана — Клейна — Вигнера, которая была кратко описана выше, определяются, кроме того, операторы числа частиц $N_k = a_k^+ a_k$, показывающие, сколько частиц данного сорта (нуклонов, мезонов, электронов, фотонов и т. д.) находится в данном квантовом состоянии, например в состоянии с определенным

импульсом, энергией и направлением спина. Величина $N = \sum_k N_k$ есть оператор полного числа частиц данного сорта. В самом общем виде (т. е. при наличии взаимодействия) теорию поля можно рассматривать как обобщение обычной теории Шредингера для многих частиц на случай, когда оператор N не коммутирует с гамильтонианом.

Пусть $u_k(x)$ — нерелятивистская волновая функция частицы, находящейся в состоянии k . Тогда мы можем определить оператор

$$\psi(x) = \sum_k a_k u_k(x);$$

он является оператором уничтожения частицы. Можно показать, что оператор ψ удовлетворяет уравнению движения, тождественно совпадающему по форме с уравнением Шредингера для одной частицы:

$$i\hbar\dot{\psi}(x) = H\psi(x),$$

где H — гамильтониан одной частицы. Таким образом, можно установить связь с *квантовой теорией поля*, которая рассматривает ψ как оператор, полученный квантованием классической нерелятивистской волновой функции ψ , описывающей (отрицательно заряженное) материальное поле, и в которой $\psi^*\psi$ [соотношение (2.5)] представляет собой плотность заряда, а \vec{j} [соотношение (2.6)] — плотность тока.

Хотя мы излагаем новейшее развитие релятивистской квантовой теории системы полей, тем не менее в педагогических целях для облегчения понимания вводим понятия, основывающиеся на старых гамильтониановских методах, которые изложены, например, в книге Вентцеля [525]. Мы отсылаем читателя к этой книге для ознакомления с историей развития теории поля. Полный список старой литературы (до 1947 г.) можно найти в работе Тиомно и Уилера [483] (перечень литературы по физике элементарных частиц).

Первым известным в физике полем было электромагнитное поле, однако впоследствии оказалось, что оно значительно сложнее других, так как для того, чтобы выполнялись уравнения Максвелла, потенциал A должен удовлетворять не только волновому уравнению

$$\square A_\mu = 4\pi j_\mu,$$

но также и условию калибровки

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

(Такое условное суммирование используется во всей второй части.) Условие калибровки вызывает затруднения как в старой теории

поля, описанной в работе Вентцеля [525], так и в новейшем ее развитии (см., например, статьи Швингера [438—440]). Таким образом, электромагнитное поле дает примерное представление о тех сложностях, которые имеют место в теории поля. С другой стороны, поле Клейна—Гордона (мезонное) характеризуется спином 0, и поэтому волновая функция поля имеет всего лишь одну компоненту и не удовлетворяет условию калибровки. Связь поля Клейна—Гордона с дираковским (нуклонным) полем также значительно проще связи электромагнитного поля с полем частиц со спином $1/2$. Поэтому сначала рассмотрим такое мезонное поле и его квантование.

ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ

§ 1. Классическая теория

Для простоты рассмотрим действительное поле, описываемое одной переменной поля φ , которая является функцией координат пространственно-временной точки x_μ . Обычно изложение теории поля начинают с определения плотности лагранжиана поля, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi/\partial x_\mu)$, подобранной так, что при варьировании интеграла действия по переменной φ получаются уравнения поля. В частности, интеграл действия I определяется следующим образом:

$$I = \int d^4x \mathcal{L}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right). \quad (10.1)$$

Далее, потребуем, чтобы интеграл действия I обладал экстремумом при произвольных вариациях φ , удовлетворяющих условию

$$\delta\varphi(\vec{x}, t_1) = \delta\varphi(\vec{x}, t_2) = 0,$$

где t_1 и t_2 — пределы интегрирования по времени в формуле (10.1). Этот принцип наименьшего действия является естественным обобщением принципа Гамильтона в классической механике, так как совокупности величин φ и $\dot{\varphi}$ можно сопоставить соответственно координаты Q_s и скорости \dot{Q}_s , встречающиеся в обычной механике. В дальнейшем мы кратко обсудим этот вопрос.

Так как интеграл действия имеет фундаментальное значение в теории, то потребуем, чтобы он был лоренц-инвариантным. Поскольку элемент 4-объема d^4x является псевдоскаляром, то функция \mathcal{L} должна быть или скаляром, или псевдоскаляром. Мы будем считать ее скаляром¹⁾. Из дальнейшего будет ясно, что такой выбор обусловлен требованием — плотность энергии должна быть положительно-определенной. При этом интеграл действия будет псевдоскаляром.

¹⁾ Если включены отражения во времени, то требование скалярности функции \mathcal{L} обосновано для частиц с целочисленным спином.

Введем сокращенное обозначение ¹⁾

$$\varphi_{,\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \quad (10.2)$$

и проварируем выражение (10.1); при этом получим

$$\delta I = \int_{\Omega} d^4x \left[\delta \varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} + \delta \varphi_{,\mu}(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} \right], \quad (10.3)$$

где Ω — 4-объем интегрирования, в котором поле отлично от нуля. Поверхность 4-объема Ω пока не определена. В силу обозначения (10.2) второй член в левой части выражения (10.3) все еще зависит от $\delta \varphi(x)$. Интегрируя этот член по частям, находим

$$\delta I = \int_{\Omega} d^4x \delta \varphi \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} \right) \right] + \int_{\Sigma} d^3x \delta \varphi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} \right) n_{\mu}(x), \quad (10.4)$$

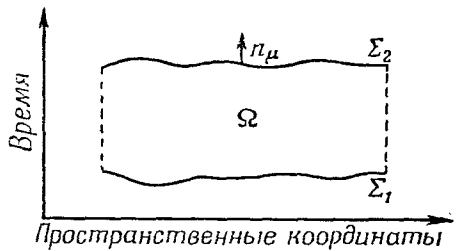
где Σ — поверхность Ω , а $n_{\mu}(x)$ — внешняя нормаль к этой поверхности в точке x . Схематически это изображено на фиг. 16. Если теперь предположить (мы всегда будем предполагать это в дальнейшем), что поле стремится к нулю на больших расстояниях, то интеграл по поверхности, обозначенный на фиг. 16 пунктирной линией, исчезает. Согласно принципу наименьшего действия, вариация δI равна нулю для всех произвольных вариаций $\delta \varphi$, ограниченных лишь условием $\delta \varphi = 0$ на границе Σ объема Ω . Так как вариация $\delta \varphi$ внутри объема Ω есть произвольная функция точки x , то в соответствии с требованием $\delta I = 0$ получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} = 0. \quad (10.5)$$

Эти уравнения представляют собой уравнения поля.

Следует заметить что добавление 4-дивергенции к плотности лагранжиана не меняет уравнений движения. Действительно, рассмотрим новую плотность лагранжиана \mathcal{L}' , которая получается из

¹⁾ Если поле описывается не скалярной волновой функцией, а многокомпонентной функцией, то компоненты ее будем обозначать через φ_r , а величину $\partial \varphi_r / \partial x^\mu$ — через $\varphi_{r,\mu}$. Пока точно не указаны свойства преобразования φ_r , мы не можем опускать или поднимать индекса r .



Фиг. 16.

плотности лагранжиана \mathcal{L} добавлением к последнему 4-дивергенции:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial F^\mu(\varphi)}{\partial x^\mu}, \quad (10.6)$$

где F^μ — 4-векторная функция переменных поля. Член

$$\int d^4x \frac{\partial F^\mu(\varphi)}{\partial x^\mu} \quad (10.7)$$

в интеграле действия может быть преобразован по теореме Гаусса в интеграл по поверхности Σ , поэтому его вариация тождественно равна нулю. Если F^μ зависит от φ_ν , то сказанное остается справедливым при условии, что \mathcal{L}' не зависит от вторых производных. Хотя физическое содержание двух лагранжианов, отличающихся друг от друга 4-дивергенцией, одинаково, соответствующие им гамильтонианы и, следовательно, канонический формализм для них будут, вообще говоря, различными.

Обратимся теперь к вопросу эквивалентности соотношения (10.1) и принципа Гамильтона. Ясно, что трудность, в силу которой это соответствие перестает быть самоочевидным, вызывается тем обстоятельством, что мы имеем дело с бесконечным множеством непрерывных переменных, так как наши поля определены бесконечным числом координат $\varphi(x, y, z, t)$ в каждой точке 4-пространства. Существует несколько способов преодоления этой трудности. В каждом из них бесконечное множество непрерывных координат заменяется бесконечным, но уже дискретным множеством. Одним из таких способов является фурье-анализ или — более общий способ — разложение поля в ряд по ортогональной системе функций.

Другой способ заключается в разбиении непрерывного трехмерного пространства на ячейки $\delta x^s = \Delta^3$, столь малые, что изменение физических величин внутри такого куба можно считать несущественным (Ми [336], Гейзенберг и Паули [222]). Среднее значение φ в кубе φ_s можно рассматривать как координату Q_s . Таким образом, в ячейке s координата Q_s отождествляется с φ_s , \dot{Q}_s — с $\dot{\varphi}_s$ (и пространственная производная $\nabla\varphi_s$ заменяется разностью $(Q_{s+1} - Q_s)/\Delta$). Лагранжиан всей системы L при этом можно рассматривать как функцию всех Q_s и \dot{Q}_s и записать как сумму по всем ячейкам

$$L = \sum_s \mathcal{L}_s \delta x_s, \quad (10.8)$$

где \mathcal{L}_s соответствует плотности лагранжиана \mathcal{L} в ячейке s . Интеграл действия при этом выражается следующим образом:

$$I = \int dt L(Q_1, Q_2, \dots; \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \dots) \rightarrow \int dt d^3x \mathcal{L}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right). \quad (10.9)$$

Первая часть выражения (10.9) в действительности точно соответствует принципу Гамильтона с лагранжевой функцией L , зависящей от обычных координат, Q_s , \dot{Q}_s . Для записи второй части (10.9) воспользуемся выражением (10.8) и перейдем от суммирования к непрерывному интегрированию; таким образом,

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right). \quad (10.10)$$

Величина L уже не является релятивистски инвариантной, так как мы разделили пространство и время.

В классической механике с помощью лагранжевой функции L можно определить канонически-сопряженный импульс. Аналогичным образом можно определить здесь величину

$$P_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_s}. \quad (10.11)$$

Так как \dot{Q}_s содержится лишь в \mathcal{L}_s , то, согласно выражению (10.8) получим

$$P_s = \frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \dot{Q}_s} \delta x_s. \quad (10.12)$$

„Плотность“ канонически-сопряженного импульса обычно определяют в виде

$$\pi_s = \frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \dot{Q}_s}, \quad (10.13)$$

т. е.

$$P_s = \delta x_s \pi_s. \quad (10.14)$$

Используя такой метод разбиений, мы должны помнить, что классический интеграл действия определяется как интеграл по времени от лагранжиана системы [это показано в первой части выражения (10.9)]. Поэтому сравнение нашего рассмотрения с этим методом возможно лишь в том случае, когда выбранная в соотношении (10.4) поверхность Σ является *плоской*, т. е. поверхностью постоянного времени t . В этом случае вектор n_μ является единичным вектором в положительном или отрицательном направлении времени, и поверхностный интеграл в соотношении (10.4) сводится к виду

$$\left(\int_{\Sigma_2} - \int_{\Sigma_1} \right) d^3x \delta \varphi_\Sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \right), \quad (10.15)$$

где φ_Σ показывает, что значение величины φ берется на поверхности Σ . Согласно формуле (10.13), это выражение приводится к виду

$$\int_{\Sigma} d^3x \delta \varphi_\Sigma \pi_\Sigma, \quad (10.16)$$

что в точности аналогично выражению

$$\sum_s \delta Q_s P_s, \quad (10.17)$$

в классической механике частицы.

Возвращаясь опять к *общим* поверхностям (см. фиг. 16), предположим, что π в наиболее общем виде можно записать следующим образом:

$$\pi(\mathbf{x}) = n_\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu(\mathbf{x})}, \quad n_\mu(\mathbf{x}) n^\mu(\mathbf{x}) = 1; \quad (10.18)$$

здесь уже не требуется, чтобы 4-поверхность была плоской. Впервые произвольную 4-поверхность ввел в теорию Вейсс [512—514]. Таким образом, ему удалось развить релятивистски инвариантную теорию в *гамильтоновой форме*. Его работы легли в основу современной теории поля (см. работы Томонага [486], Дирака [116], Швингера [438]). Единственным ограничением в выборе поверхностей Σ_1 и Σ_2 является следующее требование: поверхности должны быть пространственно-подобными, т. е. световой сигнал не может распространяться от одной точки поверхности к другой точке той же поверхности. Это приводит к тому, что функция $\varphi(\mathbf{x})$ в любой точке поверхности может быть определена независимо от функции $\varphi(\mathbf{x}')$ в другой точке. Мы не будем излагать здесь эту теорию, которая допускает варьирование не только $\delta\varphi$, но также и граничных поверхностей¹⁾.

Вместо этого изложим гамильтонов формализм и по аналогии с механикой частицы определим плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} \quad (10.19)$$

и функцию Гамильтона

$$H = \int \mathcal{H} d^3x. \quad (10.20)$$

Так же, как и в классической механике, можно получить при этом обычные классические канонические уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta H}{\delta \pi(\mathbf{x})} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi(\mathbf{x})}, \\ \dot{\pi}(\mathbf{x}) &= - \frac{\delta H}{\delta \varphi(\mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (10.21)$$

где $\delta/\delta\varphi$ означает функциональное дифференцирование²⁾.

Гамильтонов формализм дает удовлетворительные результаты при рассмотрении простейших задач теории поля. Но этот метод становится неудовлетворительным для более сложных задач из-за

¹⁾ См., например, работу Борна [54].

²⁾ См. книгу Шиффа [429], а также работу Гейзенберга и Паули [222].

того, что релятивистские теории поля содержат расходимости, например типа собственной энергии. Хотя эти расходимости могут быть устранены с помощью рецептов вычитания (перенормировок), которые будут обсуждаться ниже (гл. 21—24), однако получить надежные результаты для конечных остаточных эффектов из нековариантного формализма, подобно гамильтонову, очень трудно. Успешное решение задач, требующих перенормировки, достигается с помощью новейшего ковариантного формализма.

Ниже мы кратко рассмотрим некоторые примеры полей, встречающихся в физике, и выпишем их лагранжианы.

§ 2. Действительное однокомпонентное поле

Плотность лагранжиана записывается в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\mu^2 \varphi^2 - g_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \right) = -\frac{1}{2} \left(\mu^2 \varphi^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda} \right), \quad (10.22)$$

где μ — постоянная, имеющая размерность обратной длины. Этот лагранжиан инвариантен, если φ является скаляром или псевдоскаляром. В любом из этих случаев φ^2 — скаляр, величина $\varphi_\mu \varphi^\mu$ как квадрат 4-вектора также является скаляром. Дифференцируя уравнение (10.22), получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\mu^2 \varphi \quad (10.23)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} \right)} = +\varphi_\lambda. \quad (10.24)$$

Следовательно, согласно уравнению (10.5), уравнение движения имеет вид

$$-\mu^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} = 0. \quad (10.25)$$

Замечая, что второй член есть $-\square \varphi$, имеем

$$\square \varphi + \mu^2 \varphi = 0. \quad (10.26)$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением Клейна—Гордона, если положить

$$\mu = \frac{mc}{h}, \quad (10.27)$$

т. е. если μ есть обратная величина комптоновской длины волны частицы с массой m , соответствующей квантованному полю. Исходя из соотношения (10.13), определим далее сопряженный импульс

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}. \quad (10.28)$$

Гамильтониан, соответствующий нашему лагранжиану, выраженный через φ и π , согласно определениям (10.19) и (10.28), имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2, \quad (10.29)$$

где ∇ — символ обычного трехмерного градиента. Выражение (10.29) является положительно-определенным; полагают, что оно представляет собой плотность энергии. Это есть следствие выбора отрицательного знака в выражении (10.22).

Полный гамильтониан H , определенный равенством (10.20), представляет собой полную энергию поля. Если лагранжиан \mathcal{L} в выражении (10.19) явно не зависит от времени, то $dH/dt = 0$, и полная энергия системы сохраняется. Это полностью аналогично утверждению классической механики: если величина $\int L dt$ инвариантна по отношению к перемещению по оси t , то энергия системы сохраняется. Аналогично, если величина $\int L dt$ инвариантна по отношению к перемещению по оси x , то сохраняется x -компонента импульса системы. (Для подробного ознакомления с вопросом о связи инвариантности \mathcal{L} по отношению к различным группам преобразований с законами сохранения в теории поля отсылаем читателя к работам Розенфельда [410], Белинфанте [27, 28], Паули [378], Хилла [233], а также к Приложению Б.)

Далее, полную энергию поля можно написать в виде

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \{ \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} \} = \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0} \varphi^0 - \mathcal{L} g^{00} \right\} = \\ &= \int T^{00} d^3x, \end{aligned} \quad (10.30)$$

где T^{00} — $(0, 0)$ -компонента канонического тензора энергии-импульса, определяемого следующим соотношением:

$$T^{\mu\nu} = \varphi^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu}. \quad (10.31)$$

Благодаря уравнениям движения и тому факту, что \mathcal{L} явно не зависит от 4-координат¹⁾, этот тензор обладает свойством

$$\frac{dT^{\mu\nu}}{dx^\nu} = 0, \quad (10.32)$$

¹⁾ Если \mathcal{L} явно зависит от внешних координат, то это соответствует наличию внешних полей, с которыми φ взаимодействует. В этом случае уравнение (10.32) заменяется соотношением

$$\frac{dT^{\mu\nu}}{dx^\nu} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx^\nu}(T^{\mu\nu}) &= \varphi^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} = \\
&= \varphi^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \varphi^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x^\lambda} = \\
&= \varphi^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (10.33)
\end{aligned}$$

Интегрируя выражение (10.32) по всему (трехмерному) пространству, получаем

$$\frac{d}{dx^0} \int T^{\mu 0} d^3x + \sum_k \int \frac{d}{dx^{k0}} T^{\mu k} d^3x = 0. \quad (10.34)$$

Если теперь $T^{\mu k}$ исчезает на бесконечности (что имеет место в случае, когда сами поля исчезают на бесконечности), то второй член этого равенства, который может быть преобразован по теореме Гаусса в интеграл по поверхности, будет равен нулю. Таким образом, мы получаем четыре закона сохранения

$$\frac{d}{dx^0} \int T^{\mu 0} d^3x = 0. \quad (10.35)$$

Первый из них для $\mu = 0$ соответствует сохранению энергии. Другие три закона — сохранению трех величин:

$$P^k = \int T^{k0} d^3x = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \varphi^k = \int \pi \varphi^k d^3x, \quad (10.36)$$

которые представляют собой три компоненты полного импульса поля. Далее, если \mathcal{L} является скаляром, то $T^{\mu\nu}$ будет тензором второго порядка. Отсюда следует, что четыре величины

$$P^\mu = \int T^{\mu 0} d^3x \quad (10.37)$$

преобразуются как 4-вектор энергии-импульса поля. Определение канонического тензора энергии-импульса (10.31) справедливо и в более общем случае, когда поле описывается многокомпонентной функцией. При этом в первом члене выражения (10.31) производится суммирование по всем компонентам функции φ_r , описывающей поле (см. Приложение Б).

По аналогии с выражением (10.20) можно определить плотность импульса поля как вектор с компонентами T^{k0} . При этом естественным определением плотности момента поля относительно начала координат будет

$$m_{klo} = x_k T_{lo} - x_l T_{ko}, \quad (10.38)$$

причем полный момент поля выражается в виде $\int d^3x m_{klo} = M_{kl}$.

Далее, чтобы величина M_{kl} , являющаяся пространственной частью тензора момента

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x (x_\mu T_{\nu 0} - x_\nu T_{\mu 0}), \quad (10.39)$$

сохранялась, мы должны потребовать, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} m_{\mu\nu\rho} = 0, \quad (10.40)$$

так как в этом случае по тем же соображениям, которые привели нас к равенству (10.35), обеспечивается сохранение величины $\int d^3x m_{\mu\nu 0}$. Но величина $(\partial/\partial x_\rho) m_{\mu\nu\rho}$, согласно выражению (10.32), равна

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} m_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial}{\partial x_\rho} (x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho}) = T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu}. \quad (10.41)$$

Следовательно, тензор $M_{\mu\nu}$ будет сохраняться, если $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, т. е. если тензор энергии-импульса является симметричным. Свойство симметрии тензора энергии-импульса, вообще говоря, не следует из его определения (10.31). Однако этот тензор всегда можно симметризовать (см. работы Белинфанте [27, 28]), так как к лагранжиану системы всегда можно добавить 4-дивергенцию, не изменив при этом физического содержания теории. Другими словами, плотность энергии, например, определяется не однозначно, в то время как полная энергия поля определяется вполне однозначно.

Три пространственные компоненты (k, l) антисимметричного тензора момента $M_{\mu\nu}$ характеризуют момент системы, в то время как три пространственно-временные компоненты ($0, k$) связаны с центром инерции системы (см. работы Мёллера [343, 344], Прайса [397]). Для случая нулевого спина тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \varphi^\mu \varphi^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\mu^2 \varphi^2 - \varphi_\lambda \varphi^\lambda). \quad (10.42)$$

Очевидно, этот тензор уже симметричен. Это обстоятельство связано с тем, что поле Клейна—Гордона не обладает собственным моментом, т. е. имеет спин, равный нулю (см. Приложение Б).

Представляет интерес исследовать, насколько однозначно определен данный лагранжиан. Мы уже отметили, что к плотности лагранжиана всегда можно добавить 4-дивергенцию, не изменяя при этом физического содержания теории. Оставляя пока эту произвольность в стороне, покажем, что, исходя из разумных физических требований, можно однозначно определить лагранжиан системы (см., например, работу Баба [38]). Первое из требований—это требование релятивистской инвариантности лагранжиана. Ниже, при изучении электромагнитного поля, мы будем также требовать, чтобы лагранжиан обладал калибровочной инвариантностью. В случае не-

взаимодействующих полей можно требовать выполнения принципа суперпозиции полей, что накладывает на лагранжиан системы следующее требование: он не должен содержать переменных поля выше, чем во второй степени¹⁾.

Если мы потребуем существования решения задачи с заданными начальными условиями, или задачи Коши, для наших гиперболических уравнений поля, то это приведет к тому, что в лагранжиане появятся производные только конечного порядка по времени от переменных поля. Согласно требованию релятивистской инвариантности, лагранжиан должен содержать производные по координатам от переменных поля того же порядка, что и производные по времени. Большинство уравнений поля в физике — уравнения второго порядка. Если мы ограничимся рассмотрением теорий таких полей, то лагранжиан системы может содержать лишь $\partial\varphi/\partial x_\mu$, т. е. производные первого порядка от переменных поля по 4-координатам. Наконец, лагранжиан системы должен быть действительным, что необходимо в квантовой теории поля для обеспечения его эрмитовости.

Таким образом, лагранжиан действительного однокомпонентного поля обязательно содержит только φ^2 и $(\partial\varphi/\partial x_\mu)^2$. Единственная произвольность в формуле (10.22) остается в выборе коэффициентов при этих членах. Коэффициент μ должен иметь размерность обратной длины, $\mu = mc/\hbar$; остается произвольность в выборе его величины, т. е. массы m частицы. Множитель $1/2$ в формуле (10.22) может быть выбран произвольно, но, как мы уже видели, такой выбор ведет к $\pi = \dot{\varphi}$ без числовых коэффициентов. Знак минус в формуле (10.22), как уже обсуждалось выше, введен для того, чтобы обеспечить положительную определенность гамильтониана системы.

§ 3. Комплексное скалярное поле

Обобщение лагранжева формализма на этот случай, естественно, следует из разделения комплексного поля на действительную и мнимую части:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi^{(1)} + i\varphi^{(2)}). \quad (10.43)$$

В случае комплексного поля лагранжиан можно написать не только как функцию $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ и их производных, но и, согласно выражению (10.43), как функцию φ и φ^* и их производных. В частности, можно варьировать $\mathcal{L}(\varphi, \varphi_\mu; \varphi^*, \varphi_\mu^*)$ независимо по φ и φ^* , что

¹⁾ Такое требование нельзя предъявлять к лагранжиану в случае взаимодействующих полей, так как при этом были бы невозможны все *реальные* взаимодействия. Линейной заменой переменных можно было бы такие поля всегда отделить друг от друга.

эквивалентно варьированию $\mathcal{L}(\varphi^{(1)}, \varphi_{\mu}^{(1)}; \varphi^{(2)}, \varphi_{\mu}^{(2)})$ по $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ соответственно. В результате получаем следующие уравнения поля:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\mu}} = 0 \quad (10.44a)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\mu}^*} = 0. \quad (10.44b)$$

Лагранжиан комплексного скалярного поля получается из лагранжиана действительного поля заменой φ^2 на $\varphi^* \varphi$, причем множитель $1/2$ писать уже не следует, так как в лагранжиане уже нет члена φ^2 и, следовательно, при дифференцировании не возникает численного множителя 2. Таким образом, лагранжиан комплексного скалярного поля имеет вид

$$\mathcal{L} = -(\mu^2 \varphi^* \varphi - \varphi_{\mu}^* \varphi^{\mu}). \quad (10.45)$$

Канонически-сопряженные импульсы при этом записываются в виде

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^*, \quad (10.46a)$$

$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi}, \quad (10.46b)$$

так что плотность энергии поля выражается следующим образом:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathcal{L} = \pi^* \pi + (\vec{\nabla} \varphi^*) \cdot (\vec{\nabla} \varphi) + \mu^2 \varphi^* \varphi. \quad (10.47)$$

Так же, как и в случае действительного поля, можно определить канонический тензор энергии-импульса и из него получить полную энергию и полный импульс поля, которые образуют 4-вектор. Согласно свойству (10.32), эти величины будут сохраняться.

Если мы желаем, чтобы наше поле описывало распределение заряда, то мы должны требовать выполнения закона сохранения полного заряда и найти дифференциальный закон сохранения заряда и тока. Это означает, что в каждой точке 4-пространства существует 4-вектор j_{λ} , дивергенция которого равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial j_{\lambda}}{\partial x_{\lambda}} = 0. \quad (10.48)$$

4-вектор j^{λ} может быть образован из функций поля $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ следующим образом:

$$j^{\lambda} = -\varepsilon \left(\varphi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_{\lambda}} - \varphi^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_{\lambda}} \right), \quad (10.49)$$

где ε — постоянная. Нетрудно установить соотношение

$$\frac{\partial j^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = -\varepsilon (\varphi^{(1)} \square \varphi^{(2)} - \varphi^{(2)} \square \varphi^{(1)}). \quad (10.50)$$

Так как каждая из функций $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, то из соотношения (10.50) находим, что j^μ действительно сохраняется.

Таким образом, комплексное скалярное поле может описывать заряженные частицы (например, заряженные π -мезоны). Выразив соотношение (10.49) через φ и φ^* , найдем для плотностей заряда и тока следующие выражения:

$$\rho = -ie(\pi\varphi - \pi^*\varphi^*), \quad (10.51)$$

$$j^k = +ie\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\varphi^* - \frac{\partial\varphi^*}{\partial x_k}\varphi\right), \quad (10.52)$$

или, выразив через плотность лагранжиана, получим

$$i^\mu = -ie\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\mu}\varphi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\mu^*}\varphi^*\right). \quad (10.53)$$

Можно показать [см. Приложение Б, соотношения (Б.15)—(Б.18)], что существование 4-вектора плотности тока j^μ [выражение (10.53)] в действительности есть следствие инвариантности лагранжиана по отношению к „калибровочному“ преобразованию первого рода, при котором

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow e^{i\varepsilon}\varphi, \\ \varphi^* &\rightarrow e^{-i\varepsilon}\varphi^*, \end{aligned} \quad (10.54)$$

где ε — действительная константа. Закон сохранения j^μ следует из уравнений движения (10.44). В дальнейшем мы покажем, что 4-вектор j^μ действительно играет роль вектора тока в уравнениях Максвелла. Из выражения (10.53) следует, что в случае действительного поля $\varphi^* = \varphi$ и ток j^μ тождественно равен нулю, т. е. действительная функция φ может описывать только нейтральное, незаряженное поле.

§ 4. Дираковское поле

Выше были рассмотрены некоторые вопросы, связанные с полями, описываемыми многокомпонентными функциями. Например, поле дираковских частиц (частиц со спином $1/2$) описывается четырехкомпонентным спинором ψ_α , который при преобразованиях Лоренца преобразуется согласно соотношению (3.59). Рассмотрим эти четыре компоненты спинора ψ_α как независимые динамические переменные. Главное отличие лагранжиана дираковского поля от лагранжианов рассмотренных выше полей заключается в том, что он является функцией первого порядка от $\partial\psi/\partial x^\mu$, что приводит к дифференциальному уравнению первого порядка для ψ_α . Поэтому необходимо несколько изменить гамилтонов формализм.

III Плотность лагранжиана выражается в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\left(-i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + m\right)\psi - \frac{1}{2}\left(+i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + m\bar{\psi}\right)\psi. \quad (10.55)$$

Величина, обратная комптоновской длине волны дираковской частицы, в выражении (10.55) обозначается через m . Этим обозначением мы будем пользоваться и в дальнейшем, чтобы отличать дираковскую частицу от бозе-частицы, для которой соответствующую величину будем обозначать, как прежде, через μ . Уравнения движения получаются варьированием лагранжиана независимо по ψ и $\bar{\psi}$. Так как

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{1}{2}(-i\hat{V} + m)\psi - \frac{1}{2}m\psi, \quad (10.56)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \bar{\psi} / \partial x^\mu)} = -\frac{1}{2}i\hat{V}\psi, \quad (10.57)$$

то с помощью уравнения (10.5) получаем уравнение Дирака

$$(-i\hat{V} + m)\psi = 0. \quad (10.58)$$

Уравнение для сопряженного спинора получается аналогично путем варьирования лагранжиана по $\bar{\psi}$. Отметим, что совершенно случайно \mathcal{L} обращается в нуль, если волновая функция ψ удовлетворяет уравнению движения.

Используя общее выражение для 4-вектора плотности тока, соответствующее соотношению (10.53) для случая заряженного бозе-поля, получаем для вектора тока в случае дираковского поля следующее выражение:

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (10.59)$$

Согласно уравнению движения, этот вектор сохраняется. В частности, из закона сохранения $\partial j^\mu / \partial x^\mu = 0$ следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \bar{\psi}\gamma^0\psi d^3x = 0; \quad (10.59a)$$

это соответствует тому, что полный заряд поля сохраняется.

Линейная зависимость \mathcal{L} от $\partial\psi/\partial t$ приводит к тому, что канонически-сопряженный импульс уже зависит от переменных поля ψ и $\bar{\psi}$ ¹⁾. Однако можно обойти эту трудность, вспомнив, что все величины, представляющие физический интерес, можно получить, исходя из тензора энергии-импульса [см. выражение (10.31)], который в нашем случае, т. е. при $\mathcal{L} = 0$, имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\nu \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu} \gamma^\nu\psi). \quad (10.60)$$

Этот тензор не является симметричным, но он легко может быть симметризован (см., например, работу Паули [370]). Однако тензор

¹⁾ Поэтому канонический лагранжев формализм уже неприменим и переход к гамильтониану не удается.

(10.60) дает такое же выражение для 4-вектора энергии-импульса, как и симметризованный тензор, а именно:

$$P^\mu = \int T^{\mu 0} d^3x = \frac{i}{2} \int d^3x \left(\bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma^0 \psi \right) = \\ = i \int d^3x \left(\bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi \right). \quad (10.61)$$

Последняя строка соотношения (10.61) получается путем интегрирования по частям, причем поверхностные члены для $\mu = 1, 2, 3$ опускаются, а для $\mu = 0$ используется соотношение (10.59a). Таким образом, используя уравнения движения, получаем следующее выражение для полной энергии поля или гамильтониана поля:

$$H = P^0 = \int T^{00} d^3x = \int d^3x \bar{\psi} (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) \psi = \\ = \int d^3x \psi^\dagger (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi. \quad (10.62)$$

§ 5. Максвелловское поле и векторное мезонное поле

Калибровочно-инвариантный лагранжиан для электромагнитного поля выбирается в виде ¹⁾

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (10.63)$$

где $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, связанный с потенциалами поля следующим соотношением:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu}. \quad (10.64)$$

Здесь $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$, так что $F^{0k} = \mathcal{E}^k$, где \mathcal{E}^k — вектор электрического поля, а $F^{kl} = \mathcal{H}^j$, где \mathcal{H}^j — вектор магнитного поля и $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2)$. Варьируя соотношение (10.63) по потенциалам, получаем уравнения Максвелла

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (10.65)$$

¹⁾ В дальнейшем всюду в этой книге мы будем пользоваться системой единиц Хевисайда — Лоренца, в которой $(e^2/4\pi\hbar c) = \alpha = 1/137$. Потенциалы в этой системе отличаются от потенциалов в гауссовской системе, использованной выше в теории Фейнмана, множителем $1/\sqrt{4\pi}$. В гауссовской системе единиц лагранжиан (10.63) имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

или, выражая $F^{\mu\nu}$ через потенциалы, находим

$$\square A^\mu - \frac{\partial \chi}{\partial x_\mu} = 0, \quad \chi = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}. \quad (10.66)$$

В классической теории мы можем выбрать лоренцовскую калибровку $\chi = 0$; тогда уравнения Максвелла примут вид $\square A^\mu = 0$.

Указанный выбор лагранжиана приводит к характерной трудности: импульс π^0 , канонически-сопряженный A^0 , тождественно равен нулю, и поэтому гамильтонов формализм требует улучшения. В квантовой теории, где A^0 и π^0 становятся операторами, удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям, то обстоятельство, что величина π^0 равна нулю, вызывает дальнейшие осложнения.

Преодолением этой трудности мы обязаны Ферми [153—155], который предложил выбирать лагранжиан электромагнитного поля в следующем виде:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} \right)^2. \quad (10.67)$$

Этот лагранжиан сейчас часто применяется в теории электромагнитного поля. Он не является калибровочно-инвариантным, так как содержит член χ^2 . Однако очевидно, что он является релятивистски-инвариантным. Варьируя этот лагранжиан по A_μ , получаем следующие уравнения движения:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} \right) = 0, \quad (10.68a)$$

или

$$\square A^\nu = 0. \quad (10.68b)$$

Эти уравнения неэквивалентны уравнениям Максвелла. Чтобы их сделать эквивалентными, достаточно наложить на χ дополнительное условие:

$$\chi = 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

и

$$\frac{d\chi}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (10.69)$$

Тогда, согласно уравнениям движения (10.68), $\chi = 0$ для всех моментов времени. Ниже мы обсудим роль этого дополнительного условия в квантовой теории.

Лагранжиан (10.67) можно переписать в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \right) \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(A^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) - \frac{1}{2} \chi^2 + \frac{1}{2} A^\nu \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu}, \quad (10.70)$$

или, если положить $\chi = 0$ и пренебречь членом, содержащим дивергенцию, в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} A^{\mu, \nu} A_{\mu, \nu}. \quad (10.71)$$

Из лагранжиана (10.71) можно получить канонически-сопряженный A_{μ} импульс

$$\pi^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu, 0}} = -A^{\mu, 0}, \quad (10.72)$$

и, следовательно, плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \pi^{\mu} \pi_{\mu} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 A_{\mu, k}^k A^{\mu, k}. \quad (10.73)$$

Таким образом, мы видим, что энергия электромагнитного поля по своей структуре аналогична суперпозиции четырех скалярных полей, но она уже не является положительно-определенной¹⁾. Это произошло потому, что мы еще не использовали нашего дополнительного условия. Воспользовавшись этим условием, можно придать гамильтониану положительно-определенную (см. работу Гупта [216], а также гл. 15, § 4) хорошо знакомую форму, а именно

$$\frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2).$$

Следует отметить, что все наше рассмотрение было основано на использовании потенциалов в качестве переменных поля. В квантовой теории это обстоятельство становится источником ряда трудностей, так как потенциалы A_{μ} определены неоднозначно; наблюдаемой величиной является лишь 4-ротор $A_{\mu, \nu} - A_{\nu, \mu}$, т. е. электрическое и магнитное поля. Поэтому при использовании только потенциалов A_{μ} для описания поля мы можем, не изменяя фактического содержания теории, провести калибровочное преобразование вида

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \frac{\partial \Delta}{\partial x^{\mu}}, \quad (10.74)$$

так как тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ инвариантен по отношению к калибровочному преобразованию. В выражении (10.74) Δ — произвольная функция, которая, согласно дополнительному условию $\chi = 0$, удовлетворяет уравнению $\square \Delta = 0$. Требование калибровочной инвариантности, таким образом, означает инвариантность всех наблюдаемых физических величин по отношению к преобразованию (10.74).

Рассмотренное нами максвелловское поле является частным случаем векторного поля φ_{μ} , когда масса частиц μ равна нулю. Если же

¹⁾ Компонента $\mu = 0$ вносит отрицательный вклад в гамильтониан \mathcal{H} .

масса частиц отлична от нуля, то мы имеем дело с векторным мезонным полем (см. работы Прока [396], Вентцеля [525], гл. III), которое удовлетворяет следующим уравнениям движения:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = -\mu^2 \varphi_\alpha, \quad F_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\nu} - \varphi_{\nu,\mu}. \quad (10.75)$$

Дифференцируя эти уравнения по x_ν , получаем $\varphi_{,\mu}^\mu = 0$, т. е. дополнительное условие выполняется автоматически, так как $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Уравнения движения (10.75) можно получить, исходя из лагранжиана (для случая заряженного поля):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} - \mu^2 \varphi_\nu^* \varphi^\nu. \quad (10.76)$$

Дополнительное условие $\varphi_{,\lambda}^\lambda = 0$ приводит к тому, что только три компоненты φ_μ являются линейно независимыми. Число *три* тесно связано с тем обстоятельством, что спин частицы, описываемой векторным полем, равен единице и, следовательно, может принимать $2S + 1 = 3$ возможных ориентаций в пространстве. Временная компонента, которая не является линейно независимой, соответствует полю со спином 0; это поле, однако, вносит отрицательный вклад в полный гамильтониан системы [см. соотношение (10.73)]. Благодаря дополнительному условию временная компонента, как и для случая электромагнитного поля, исключается.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением полей, описывающих частицы со спином 0, $1/2$ и 1. Теории полей, описывающих частицы с произвольным целым или полуцелым спином (для случая частиц с нулевой массой покоя даже с непрерывным спином)¹⁾, развивались многими авторами, как например Дираком [109], Фирцем [172, 173], Паули [376], Паули и Беленфанте [377], Вигнером [537, 538], Крамерсом и др. [289], Хариш-Чандра [220], Баргманом и Вигнером [19] и многими другими. Здесь мы не будем излагать этих теорий²⁾. Заметим лишь, что так как скалярное поле описывает частицы со спином 0, а векторное поле — со спином 1, то, следовательно, можно предполагать, что частицы с произвольным целым спином должны описываться тензорным полем порядка S . С другой стороны, мы видим, что частицы со спином $1/2$ описываются спинорным полем. Частицы с произвольным полуцелым спином можно описать с помощью общего спинорного анализа, развитого Ван дер Верденом [501, 502] (см. также работу Баде и Джела [13]).

¹⁾ Это значит, что существует бесконечное число различных состояний поляризации, которые могут быть описаны непрерывной переменной (см. работы Вигнера [538], Баргмана и Вигнера [19]).

²⁾ См., например, книгу Вентцеля [525], гл. VI.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ПОЛЯМИ

Перейдем теперь к изучению взаимодействия полей и, в частности, в первую очередь — связи между спинорным и бозонным полями. Требование релятивистской инвариантности члена взаимодействия в лагранжиане значительно ограничивает выбор возможных связей между полями.

Условимся писать член взаимодействия двух полей в виде AB , где A соответствует первому полю, а B — второму полю. Будем различать „локальное“ взаимодействие, когда $A(x)$ и $B(x)$ берутся в одной и той же пространственно-временной точке x , и „нелокальное“, когда это условие не выполняется. Кроме того, будем называть взаимодействие „прямым“ взаимодействием или „прямой“ связью, если ни $A(x)$, ни $B(x)$ не содержат производных волновых функций. В случае, когда $A(x)$ и $B(x)$ содержат производные волновых функций, будем называть взаимодействие полей „связью с производной“.

Волновые функции поля нормированы с помощью выражения для лагранжиана свободных полей. Величина члена взаимодействия в лагранжиане будет, следовательно, определяться значением действительно мультипликативного множителя, называемого константой взаимодействия. Обозначим константу прямой связи через G , а константу связи с производной — через F . Кроме того, мы часто будем пользоваться сокращенными обозначениями $g^2 = G^2/4\pi$ и $f^2 = F^2/4\pi$.

Так как в квантовой теории поля взаимодействие должно быть эрмитовым, то будем проверять каждый раз эрмитовость произведения AB . Ниже покажем это для псевдоскалярной прямой связи.

§ 1. Прямые связи

Рассмотрим простейший тип *локальных* прямых связей. Термин „простейший“ указывает на то, что одно из полей входит линейно в член взаимодействия.

Скалярное поле. Взаимодействие скалярного поля со спинорным полем ψ имеет очень простой вид. Положим $A = \varphi$ и образуем скалярное произведение $B = \bar{\psi}\psi$ ¹⁾; инвариантный член взаимодействия можно при этом записать в виде

$$G\bar{\psi}\psi\varphi. \quad (11.1)$$

¹⁾ Напомним читателю, что трансформационные свойства ковариантных выражений $\bar{\psi}\Gamma\psi$ рассмотрены в гл. 4.

Псевдоскалярное поле. В этом случае мы комбинируем $A = \varphi$, где φ — псевдоскалярная функция, с псевдоскалярным ковариантным выражением $B = \bar{\psi}\gamma_5\psi$. В результате получаем $\bar{\psi}\gamma_5\bar{\psi}\varphi = \psi^\dagger\beta\gamma_5\psi\varphi$. Далее, $(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma_5^\dagger\beta = \bar{\psi}\gamma_5\psi$, так как γ_5 — антиэрмитова матрица, и, следовательно, эрмитовый инвариантный член взаимодействия имеет вид

$$G\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi. \quad (11.2)$$

Функция φ может описывать, например, поле нейтральных π -мезонов, а ψ — поле нуклонов. Если мы хотим рассмотреть взаимодействие как заряженных, так и нейтральных мезонов с нуклонами, то мы должны обобщить наш формализм, вводя $\varphi^{(k)}$, где $k = 1, 2, 3$ для положительных, отрицательных и нейтральных π -мезонов соответственно¹⁾. Компоненты поля с индексами 1 и 2 идентичны с функциями $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$, представляющими собой компоненты комплексного поля [соотношение (11.43)].

Векторное поле. Рассмотрим далее связь векторного поля φ_μ со спинорным полем ψ . В этом случае φ_μ комбинируем с ковариантным векторным выражением $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, в результате получаем

$$G\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\varphi_\mu, \quad (11.3)$$

где, как обычно принято в релятивистской теории, подразумевается суммирование по μ . Этот тип связи точно совпадает со связью электромагнитного поля с зарядами в классической электродинамике, а именно с $A_\mu j^\mu$, где $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

Псевдовекторное поле. Обозначим компоненты поля через φ_μ и составим комбинацию φ_μ и эрмитовой ковариантной псевдовекторной величины $i\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$, в результате получим

$$iG\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi\varphi_\mu. \quad (11.4)$$

§ 2. Связи с производной

Обратимся теперь к локальным связям с производной. Для этого случая взаимодействия скалярного (или псевдоскалярного) поля φ со спинорным полем ψ будем полагать $A = \partial\varphi/\partial x_\mu$, а для B возьмем векторное (или псевдоскалярное) ковариантное выражение, образованное из ψ . Константу связи будем писать в виде F/μ , где μ — масса частиц поля φ ; при этом F — безразмерная константа. В этом случае мы имеем следующие типы взаимодействия.

Скалярное поле. Взаимодействие выражается в виде

$$\frac{F}{\mu}\bar{\psi}\gamma_\nu\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}. \quad (11.5)$$

¹⁾ Подробно это будет рассмотрено в т. II, гл. 30 и 31.

Псевдоскалярное поле (псевдовекторная связь). Связь с производной известна в этом случае как псевдовекторное взаимодействие и имеет вид

$$\frac{iF}{\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}. \quad (11.6)$$

Свойства, вытекающие из такого взаимодействия, можно изучить более полно, выделив в выражении (11.6) пространственные и временные компоненты, т. е.

$$\sum_{k=1}^3 i \frac{F}{\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^k \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + i \frac{F}{\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_0 \psi \frac{\partial \varphi}{\partial ct}. \quad (11.7)$$

Согласно определениям (4.27) и (4.33), первый член выражения (11.7) приводится к виду

$$+ \frac{F}{\mu} \psi^\dagger \vec{\sigma} \psi \cdot \nabla \varphi. \quad (11.8)$$

Второй же член выражения (11.7) в том смысле, о котором мы говорили в гл. 4, в нерелятивистском приближении „мал“. Выражение (11.8) имеет преимущество по сравнению с выражением (11.2), так как содержит только хорошо известный оператор $\vec{\sigma}$ для ферми-частиц (нуклона), который в нерелятивистском приближении велик. Выражение (11.2) содержит необычный оператор γ_5 , который в нерелятивистском приближении мал. Можно показать (см. гл. 26), что в первом порядке обе эти связи дают одинаковый результат; в высших же порядках псевдоскалярная связь оказывается предпочтительной.

Векторное поле (тензорная связь). В этом случае член связи полей содержит производные $\partial \varphi_\mu / \partial x_\nu$. Предположим, что бозонное поле является полем такого же типа, как максвелловское поле и линейное векторное поле, рассмотренное в гл. 10, § 5, т. е. уравнения поля являются уравнениями первого порядка и включают только антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$, определенный выражением (10.64). Разумно ввести этот тензор $F_{\mu\nu}$ в член взаимодействия со спинорным полем. Для этой цели комбинируем $F_{\mu\nu}$ с ковариантным антисимметричным тензорным выражением $\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi$ и в результате получаем

$$\left(\frac{F}{\mu} \right) \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi F^{\mu\nu} = - \frac{F}{2i\mu} \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi F^{\mu\nu}. \quad (11.9)$$

Взаимодействие (11.9) можно использовать, например, для описания дополнительного взаимодействия (в дополнение к взаимодействию $A_\mu j^\mu$) дираковских частиц (т. е. нуклонов) с электромагнитным полем¹⁾. В этом случае компоненты тензора $F^{\mu\nu}$ представляют

1) См. книгу Паули [370].

собой компоненты поля, а именно компоненты магнитного поля, если μ и ν являются пространственными индексами, и электрического поля, если μ или ν равны нулю. Следовательно, энергию взаимодействия (11.9) можно рассматривать как взаимодействие электромагнитного поля с „моментом“ электрона, причем $\gamma_k \gamma_l (k, l = 1, 2, 3) = = -\sigma_j (j \neq k \neq l)$ соответствует магнитному моменту, а $\gamma_0 \gamma_k$ — электрическому. По этой причине взаимодействие (11.9) известно как моментное взаимодействие Паули. Оно может быть использовано для описания в нерелятивистской области взаимодействия (в первом приближении) электрона, протона или нейтрона с внешним электромагнитным полем, обусловленного тем обстоятельством, что магнитный момент этих частиц не точно совпадает с магнетонном Бора $e\hbar/2mc$ (где e и m соответственно заряд и масса частицы). Однако в квантовой теории поля это приводит к бесконечным выражениям в высших приближениях теории возмущений, как и все взаимодействия с производной. Что касается низшего порядка, то в этом случае получается хотя и конечный, но не точный результат для электронов и нуклонов высоких энергий. Это обусловлено тем, что аномальный магнитный момент (свыше магнетона Бора) не является внутренней характеристикой дираковской частицы и обусловлен взаимодействием ее с внешним полем (с электромагнитным — в случае электрона, с мезонным — в случае нуклона), а это взаимодействие с полем зависит от частоты, т. е. изменяется с ускорением дираковской частицы.

§ 3. Более сложные типы связей

Связи, которые содержат члены типа φ^2 или более высокой степени, конечно, также возможны. Такое взаимодействие имеет место, например, между бозонным и электромагнитным полями. Иногда даже неясно, является ли это взаимодействие взаимодействием первого или более высокого порядка по полю. Например, Дайсон [125] и Нельсон [353] показали, что линейное псевдовекторное взаимодействие (11.6) псевдоскалярного поля с дираковским полем может быть преобразовано с помощью канонического преобразования в псевдоскалярное, содержащее мезонное поле φ в показателе компоненты (см. гл. 26). В целом же нелинейные взаимодействия пока еще не используются, в основном, из-за математических сложностей, за исключением взаимодействия бозонов с электромагнитным полем (в котором, однако, константа связи мала). То же самое относится к связям с производными более высокого порядка. Это было исследовано Пайсом и Уленбеком [366], а также Борном [60], Грином [213] и др. Пайс и Уленбек подробно рассмотрели случаи, когда член, характеризующий взаимодействие, имеет вид $f(\square)\varphi$ (\square — деламбертьян), причем $f(\square)$ может даже иметь трансцендентные корни, т. е. $f(\square)$ может иметь вид $\exp(-\lambda\square)$. Они показали,

что в квантовой теории поля очень трудно, в действительности почти невозможно, одновременно удовлетворить следующим условиям:

- 1) в теории не должны появляться бесконечности;
- 2) энергия системы должна быть положительно-определенной;
- 3) должно существовать решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) для уравнений с взаимодействием.

Теории, в которых имеется связь с производными более высокого порядка, могут быть рассмотрены как частный случай теорий с нелокальным взаимодействием. В таких теориях член, характеризующий взаимодействие бозонного поля с фермионным, имеет вид

$$\int d^4x' \int d^4x'' \int d^4x''' \bar{\psi}(x') \psi(x'') \varphi(x''') F(x, x', x'', x'''), \quad (11.10)$$

т. е. взаимодействие распространяется по 4-объему и характеризуется ядром F , которое называется форм-фактором. Такие взаимодействия были введены в надежде устранить расходимости, присущие всем современным релятивистским теориям с локальным взаимодействием (Ватагин [510]). Существует целый ряд ограничений, налагающихся на форм-фактор F :

1. Форм-фактор должен быть инвариантным по отношению ко всем преобразованиям Лоренца и, следовательно, должен быть функцией только от $(x - x')^2$, $(x' - x'')^2$ и $(x'' - x''')^2$.

2. В пределе, когда расстояния велики по сравнению с фундаментальной длиной L , которая вводится форм-фактором, взаимодействие должно сводиться к своему „локальному“ виду. Поэтому функция F должна достаточно быстро спадать при больших $|x - x'|$ независимо от того, является ли расстояние $x - x'$ пространственно- или времени-подобным.

3. Хотя микроскопическая причинность и нарушается введением форм-фактора F , однако нарушение макроскопической причинности при этом не должно обнаруживаться. Зависимость величин поля от времени t в более поздний момент $t + \tau$ должна поэтому быть ограничена до $\tau \approx L/c$. Вообще принцип причинности требует, чтобы форм-фактор в импульсном пространстве был гладкой функцией и обладал несколькими ограниченными производными. Достаточным условием выполнения принципа причинности является аналитичность функции F .

Пайерлс и Мак-Манус [383], Блох [42, 43], Кристенсен и Мёллер [291] и др. исследовали такие нелокальные взаимодействия¹⁾. Паули [382]

¹⁾ Нелокальные взаимодействия исследовались также в работах М. А. Маркова [см. Марков М. А., Journ. Phys. USSR, 2, 452 (1940); Марков М. А., ДАН СССР, 40, 18 (1943); Марков М. А., ЖЭТФ, 25, 527 (1953); Марков М. А., Nuovo Cimento, Suppl., 4, 760 (1956)].

В последних двух работах рассматривался вопрос о так называемом „динамически деформируемом“ форм-факторе, т. е. о форм-факторе, который не является абсолютно жестким и может деформироваться при взаимодействиях. — *Прим. перев.*

показал, что для определенных классов нелокальных взаимодействий все еще применим канонический гамильтонов формализм. Мак-Манус [317] (следуя некоторым идеям Пайерлса), Фейнман [165] и др. исследовали такие взаимодействия для частного случая электромагнитного поля. Они показали, что из теории можно устранить бесконечность, соответствующую собственной энергии спинорной частицы. Однако бесконечности, обусловленные поляризацией вакуума, все еще остаются в квантовой теории.

Рассмотренные выше теории нелокальных взаимодействий обладают тем свойством, что, хотя взаимодействие нелокально, переменные поля $\psi(x)$, $\varphi(x)$ остаются полностью локальными. Юкава [546—549] попытался рассмотреть нелокальные поля, т. е. системы, в которых переменные поля нелокальны. В этом случае переменная поля $\varphi(x)$ зависит уже не от одной пространственно-временной точки, а от многих. Такая система является достаточно общей. Для дальнейшего развития своей теории Юкава воспользовался принципом взаимности Борна [53, 55—58, 60], который гласит:

«Законы природы симметричны в отношении пространства-времени и энергии-импульса, или, более точно, по отношению к преобразованиям

$$x \rightarrow p, \quad (11.11)$$

$$p \rightarrow x \quad (11.12)$$

они инвариантны».

В частности, соотношению

$$p^2 = m^2 \quad (11.13)$$

соответствует соотношение

$$x^2 = L^2, \quad (11.14)$$

где L — характерная длина. Однако Фирц [174, 175] показал, что в отсутствие взаимодействия теория Юкавы эквивалентна теории, рассматривающей некоторую суперпозицию локальных полей. Более того, Блох [43] показал, что даже при наличии взаимодействия эту теорию можно интерпретировать как теорию с нелокальным взаимодействием с некоторым форм-фактором F .

Из всего сказанного видно, что существуют различные описания возможных взаимодействий полей. Многие из них были использованы в мезонной теории за последние 15 лет, при этом обнаружилось, что некоторые особенно удобны для расчетов или для простого объяснения экспериментальных фактов. Благодаря таким частичным успехам, а также сложности экспериментальных наблюдений теоретики пока не склонны отбрасывать какие-либо из этих возможностей.

Мы придерживаемся иной точки зрения. Мы уверены в том, что законы природы весьма просты, но нет оснований полагать, что ими особенно легко пользоваться для расчетов. Более того, мы уве-

рены, что должен существовать принцип отбора, на основании которого определенные типы взаимодействий предпочитаются другим. Действительно, ниже мы найдем такой принцип при обсуждении перенормировки квантовой теории поля (см. гл. 24). Оказывается, что определенные типы взаимодействий допускают перенормировку, т. е. они ведут к конечным значениям всех физических величин после конечного числа перенормировок. Для других типов взаимодействий это сделать невозможно. Мы полагаем, что *в настоящее время* указанное обстоятельство является достаточной причиной для того, чтобы отбросить взаимодействия последнего типа в пользу первого. Мы считаем, что ограничение числа „возможных“ взаимодействий (и в некоторой степени возможных полей) с помощью такого принципа отбора, как перенормировка (даже если это окажется временным и, возможно, будет заменено в будущем конечной теорией), всячески следует приветствовать.

§ 4. Взаимодействие между двумя спинорными полями

До сих пор, рассматривая спинорное поле, мы всегда выбирали билинейную комбинацию $\bar{\psi}\Gamma\psi$. Действительно, использование одной функции ψ или $\bar{\psi}$ или нечетного числа таких функций привело бы к физически неопределенным выражениям, у которых, например, в результате поворота системы координат на 360° изменялся бы знак. Следовательно, в выражения для A и B должны входить или билинейные комбинации, или четное число функций спинорного поля.

Примером взаимодействия двух спинорных полей является процесс β -распада¹⁾. Одним спинорным полем является нуклонное поле, другим — поле β -частиц и нейтрино. (Эти последние частицы обычно называют „лептонами“.) Для описания этого процесса Ферми [156] предложил следующий вид взаимодействия:

$$g_F \bar{\psi}_N \Gamma \psi_N \bar{\chi}_e \Gamma \chi_n, \quad (11.15)$$

где ψ_N — волновая функция нуклона, χ_e — электрона, а χ_n — нейтрино; обе матрицы Γ одинаковы. Взаимодействие (11.15) даже сегодня лежит в основе теории β -распада. Оно было выбрано Ферми по аналогии с взаимодействием заряженных частиц с электромагнитным полем. Поле χ_n удовлетворяет уравнению Дирака, описывающего частицу с массой, равной нулю. В качестве оператора Γ можно взять одно из известных пяти выражений, приведенных в табл. 1, т. е.

$$\Gamma = I, \gamma_\mu, i\gamma_\mu\gamma_5, i\gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5. \quad (11.16)$$

¹⁾ Для общего ознакомления с β -распадом отсылаем читателя к работам Конопинского [285, 286], а также к книге Блатта и Вайскопфа [40], гл. 13. Обзор экспериментальных работ и новейшую библиографию можно найти в работе Фейнгольда [151].

В действительности возможна любая линейная комбинация взаимодействия типа (11.15) с такими матрицами Γ . Какая из этих форм или комбинаций является правильной, должен определить эксперимент; в этом и заключается основная задача изучения β -распада.

В 1935 г. Конопинский и Уленбек [283, 284] предложили для описания β -распада связь с производной в виде

$$F_{K^+N} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi_N \bar{\chi}_e \frac{\partial \chi_n}{\partial x^{\mu}}. \quad (11.17)$$

Результаты этой теории были подтверждены экспериментальными наблюдениями спектра β -распада, которые, как позднее было показано, оказались ошибочными. К моменту появления обзорной статьи Конопинского [285] в 1943 г. эксперименты окончательно отвергли связь с производной (11.17).

В той же статье [545], в которой Юкава предложил мезонную теорию ядерных сил, он предложил также рассматривать β -распад как процесс, обусловленный двумя последовательными взаимодействиями, а именно взаимодействием нуклонного поля с мезонным, описываемый членом взаимодействия

$$G \bar{\psi}_N \Gamma \psi_N \varphi, \quad (11.18)$$

и взаимодействием мезонного поля с лептонным (поле β -частиц и нейтрино) в виде

$$g_n \bar{\chi}_e \Gamma' \chi_n \varphi, \quad (11.19)$$

где φ — волновая функция мезона. В этой теории мезон является виртуальным, ибо он рождается, а затем поглощается в промежуточном состоянии. В этих формулах мы умышленно написали G и g_n , чтобы указать, что величина константы связи в (11.18) велика, а в (11.19) — мала. Нам кажется, что реальный π -мезон не соответствует этой теории; распад π -мезона на электрон и нейтрино экспериментально еще не наблюдался. Таким образом, экспериментально нам известна верхняя граница g_n , которая ниже, чем это требуется для β -распада по теории Юкавы. По-видимому, некоторые из недавно открытых тяжелых мезонов можно использовать в теории Юкавы.

§ 5. Взаимодействие и уравнения движения

Лагранжиан, описывающий поля с взаимодействием, равен сумме лагранжианов свободных полей и лагранжиана взаимодействия. Так, для случая взаимодействия спинорного поля со скалярным бозонным полем посредством прямой связи лагранжиан системы полей имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_I, \quad (11.20)$$

где

$$\mathcal{L}_n = -\frac{1}{2} \bar{\psi} (-i\hat{V} + m) \psi - \frac{1}{2} \left(i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\mu} \gamma^\mu + m \bar{\psi} \right) \psi, \quad (11.21)$$

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} (\mu^2 \varphi^2 - \varphi_\mu \varphi^\mu), \quad (11.22)$$

$$\mathcal{L}_I = -G \bar{\psi} \Gamma \psi \varphi. \quad (11.23)$$

Варьируя \mathcal{L} по $\bar{\psi}$, получаем следующее уравнение движения для поля ψ :

$$(-i\hat{V} + m) \psi = -G \varphi \Gamma \psi. \quad (11.24)$$

Правая часть этого уравнения соответствует взаимодействию с мезонным полем. Варьируя по φ , получаем уравнение движения для поля φ

$$(\square + \mu^2) \varphi = -G \bar{\psi} \Gamma \psi. \quad (11.25)$$

Таким образом, $\bar{\psi} \Gamma \psi$ является источником бозонного поля φ , так же как в случае уравнений Максвелла ток является источником электромагнитного поля.

В 1935 г. Юкава [545] изучил уравнение (11.25) при $\Gamma = 1$, предположив, что масса нуклона значительно больше массы мезона. Это предположение позволяет (даже в квантовой механике) локализовать нуклон в малой области пространства, например в начале координат. Правая часть уравнения (11.25), которую можно считать пропорциональной плотности нуклонов, в таком случае переходит в пространственную δ -функцию. Так как источник не зависит от времени, то существуют решения уравнения (11.25), также не зависящие от времени, поэтому \square можно заменить на ∇^2 . [Разумеется, к этим решениям можно добавить решения однородного уравнения, которые, как и в электродинамике, соответствуют распространению свободной (без взаимодействия) мезонной волны в пространстве; здесь мы не будем касаться этих решений.] Уравнение для мезонного поля, таким образом, принимает вид

$$(\nabla^2 - \mu^2) \varphi = +G \delta(r). \quad (11.26)$$

Решение этого уравнения легко можно получить с помощью разложения обеих частей уравнения в ряд Фурье. При этом легко установить, что решение имеет вид

$$\varphi(r) = -\frac{G}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r}. \quad (11.27)$$

Таким образом, отвлекаясь от множителя $1/r$, мы видим, что мезонное поле убывает в e раз на расстоянии, равном комптоновской длине волны мезона μ^{-1} . Это мезонное поле может взаимодействовать со вторым нуклоном; таким образом осуществляется взаимодействие

между двумя нуклонами, которое будет зависеть от расстояния, согласно формуле (11.27). Скорость спадания с расстоянием „потенциала Юкавы“ согласуется с требованием феноменологического описания ядерных сил. Используя наблюдаемую массу π -мезона, получаем, что „радиус“ ядерных сил $1/\mu$ равен $1,4 \cdot 10^{-13}$ см; эта величина имеет нужный порядок для объяснения наблюдаемых ядерных взаимодействий. В т. II, гл. 47, мы вернемся к задаче ядерных сил и обсудим ее значительно подробнее.

Гамильтонов формализм, развитый в предыдущей главе, может быть также применен к задаче взаимодействия полей. Другими словами, мы можем определить канонический тензор энергии-импульса, причем интеграл по трехмерному пространству от компоненты T^{00} будет соответствовать полной энергии или гамильтониану системы. В случае взаимодействия скалярного бозонного поля со спинорным посредством прямой связи эта процедура дает

$$H = H_0 + H_I, \quad (11.28)$$

где H_0 — сумма гамильтонианов свободных дираковского и мезонного (Клейна—Гордона) полей [соотношения (10.62) и (10.29), соответственно], а H_I — энергия их взаимодействия

$$H_I = + G \int d^3x \bar{\psi} \Gamma \psi \phi. \quad (11.29)$$

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Взаимодействие заряженного поля с электромагнитным определяется уже требованием калибровочной инвариантности. Для учета этого взаимодействия, как мы уже видели, необходимо заменить p_μ на $p_\mu + e_1 A_\mu$ (где e_1 — заряд частицы), так что при действии на переменную поля φ оператор $\partial/\partial x^\mu$ заменяется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ie_1}{\hbar c} A_\mu \equiv D_\mu. \quad (12.1)$$

При действии же на переменную поля φ^* оператор $\partial/\partial x^\mu$ заменяется на оператор D_μ^* , который является комплексно-сопряженным D_μ , т. е.

$$D_\mu^* = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{ie_1}{\hbar c} A_\mu. \quad (12.2)$$

При действии оператора $\partial/\partial x_\mu$ на действительное поле φ остается неизменным. В дальнейшем поэтому мы не будем касаться таких полей.

§ 1. Заряженное бозонное поле

В качестве иллюстрации к вышесказанному рассмотрим взаимодействие заряженного поля Клейна—Гордона с максвелловским полем. Раньше мы уже отметили, что лагранжиан такого поля имеет вид

$$\mathcal{L}_m = -(\mu^2 \varphi^* \varphi - \varphi_\mu^* \varphi^\mu), \quad (12.3)$$

где индекс m у \mathcal{L} указывает на то, что лагранжиан относится к мезонному полю. Согласно изложенному выше, для получения правильного лагранжиана взаимодействия заряженного бозонного поля с максвелловским полем необходимо заменить в выражении (12.3) оператор $\partial/\partial x_\mu$ в соответствии с соотношениями (12.1) и (12.2) и добавить к \mathcal{L}_m лагранжиан максвелловского поля. В результате для полного лагранжиана системы получим следующее выражение:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \mu^2 \varphi^* \varphi + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\mu} - ie_1 A_\mu \varphi^* \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + ie_1 A^\mu \varphi \right), \quad (12.4)$$

где e — заряд электрона.

При варьировании \mathcal{L} по A_μ получаем уравнения Максвелла

$$-\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^\mu} = \square A_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu}, \quad (12.5)$$

тогда как при варьировании по φ и по φ^* получаем уравнение Клейна—Гордона с учетом электромагнитного поля. Уравнения (12.5) указывают, что ток как источник электромагнитного поля определяется выражением

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = j_\mu, \quad (12.6)$$

которое для данного случая можно представить следующим образом:

$$j_\mu = -ie \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\mu} - ie A_\mu \varphi^* \right) \varphi - \varphi^* \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} + ie A_\mu \varphi \right) \right]. \quad (12.7)$$

Определенный таким образом ток, согласно уравнениям движения, сохраняется. Выражение (12.7) при $A_\mu = 0$ совпадает с вышеопределенным выражением для тока (10.52). Это оправдывает предположение о том, что выражение (10.52) действительно представляет собой 4-вектор тока в случае отсутствия электромагнитного поля.

Лагранжиан (12.4) обычно записывают в форме

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_I, \quad (12.8)$$

где \mathcal{L}_e — лагранжиан свободного электромагнитного поля, а \mathcal{L}_I — лагранжиан взаимодействия, т. е.

$$\mathcal{L}_I = +ie \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\mu} \varphi - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) A^\mu + e^2 A_\mu^2 \varphi^* \varphi. \quad (12.9)$$

Этот лагранжиан можно представить в виде $-j_\mu A^\mu$, где величина j_μ определяется соотношением (12.7), т. е. представляет собой ток в присутствии электромагнитного поля. Появление члена $e^2 A_\mu^2 \varphi^* \varphi$ характерно для взаимодействия бозонного поля с электромагнитным. В нерелятивистском пределе он соответствует члену A^2 в уравнении Шредингера с учетом электромагнитного поля.

Мы можем здесь также развить гамильтонов формализм, воспользовавшись методами гл. 10. Однако импульс канонически сопряженный φ теперь уже будет зависеть от электромагнитного поля.

§ 2. Дираковское поле

Лагранжиан системы взаимодействующих дираковского и электромагнитного полей имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2i} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + ie A_\mu \right) \psi + im \bar{\psi} \psi \right] + \\ & + \frac{1}{2i} \left[\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\mu} - ie A_\mu \bar{\psi} \right) \gamma^\mu \psi - im \bar{\psi} \psi \right] = \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_n - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu, \quad (12.10) \end{aligned}$$

где \mathcal{L}_n — лагранжиан свободного дираковского поля. При варьировании \mathcal{L} по потенциалам электромагнитного поля получаем

$$\square A_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \quad (12.11)$$

Аналогично при варьировании \mathcal{L} по $\bar{\psi}$ и ψ получаем уравнения Дирака с учетом электромагнитного поля для ψ и $\bar{\psi}$

$$(+i\hat{V} - e\hat{A})\psi(x) - m\psi(x) = 0, \quad (12.12a)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu} + eA_\mu\right)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu + m\bar{\psi}(x) = 0. \quad (12.12b)$$

Из уравнения (12.11) следует, что ток при наличии электромагнитного поля определяется выражением

$$j_\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad (12.13)$$

которое формально идентично выражению для тока (10.59) в случае свободного поля. Однако, по существу, это не так, ибо ψ и $\bar{\psi}$ в выражении (12.13) подчиняются уравнениям (12.12), в которых присутствуют потенциалы электромагнитного поля, в то время как в выражении (10.59) ψ подчиняется уравнению свободного поля. В отсутствие электромагнитного поля ($A^\mu = 0$) оба эти выражения совпадают.

Вышеизложенные теории инвариантны по отношению к калибровочным преобразованиям, т. е. когда

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi e^{ie\Lambda}, \\ \varphi^* &\rightarrow \varphi^* e^{-ie\Lambda} \end{aligned} \quad (12.14)$$

и одновременно

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu}, \quad (12.15)$$

где Λ — произвольная функция координат, удовлетворяющая уравнению $\square \Lambda = 0$. Ясно, что этому удовлетворяет функция $\Lambda = \text{const}$, которая, как отмечалось выше, уже достаточна для сохранения 4-вектора тока.

В том специальном случае, когда заряженное поле взаимодействует с внешним электромагнитным полем $A_\mu^e(x)$, варьирование по A_μ^e уже не является произвольным. Таким образом, правильное описание такой системы возможно с помощью следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M - j^\mu A_\mu^e, \quad (12.16)$$

где \mathcal{L}_M — лагранжиан заряженного материального поля, а под j^μ подразумевается соответствующее выражение для тока этого поля

в присутствии внешнего электромагнитного поля, т. е. соотношение (12.7) с заменой $A_\mu \rightarrow A_\mu^e$ для случая бозе-поля и соотношение (12.13) для случая дираковского поля.

§ 3. Система трех полей

В заключение рассмотрим одновременное взаимодействие нуклонного поля, заряженного бозонного и электромагнитного полей.

Сначала рассмотрим взаимодействие нуклонного поля с заряженным бозонным полем. Мы должны быть при этом осторожны, чтобы не нарушить закона сохранения полного заряда. Позднее рассмотрим возможные типы взаимодействия, при которых полный заряд системы еще сохраняется. Ограничимся здесь только замечанием, что для прямой связи взаимодействие опять будет иметь вид $\bar{\psi}\psi\phi$ и $\bar{\psi}\psi\phi^*$. Следовательно, в этом случае введение электромагнитного поля будет снова осуществляться заменой (12.1) и (12.2) в лагранжианах свободных материальных полей. Однако в случае связи с производной, которая будет иметь, как и выше, вид

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\frac{\partial\phi^*}{\partial x^\mu}, \quad (12.17)$$

мы должны произвести замену (12.1) и (12.2) также и в лагранжиане взаимодействия (12.17). Это приведет к члену связи, включающему три поля

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\phi. \quad (12.18)$$

В псевдоскалярной мезонной теории этот член имеет вид

$$\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi A_\mu\phi, \quad (12.19)$$

причем в основном он ответственен за процессы рождения заряженных мезонов γ -лучами (см. т. II, гл. 35 и 37).

Р А З Д Е Л Ш

**КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ
ПОЛЕЙ**

КВАНТОВАНИЕ ПОЛЯ

Гамильтонов формализм, развитый в гл. 10, дает нам возможность проквантовать поле обычным способом, заменив скобки Пуассона коммутаторами; при этом система переменных превращается, вообще говоря, в некоммутирующие операторы. Но прежде чем приступить к квантованию поля, напомним кратко различные представления обычной квантовой механики.

§ 1. Представления Шредингера и Гейзенберга

В шредингеровском представлении состояние системы в заданный момент времени t определяется полным набором всех *возможных* измерений над системой в этот момент времени. Эти данные содержат вектор состояния системы $\Psi_S(t)$. Дальнейшее развитие системы описывается зависимостью от времени вектора состояния, которая определяется уравнением Шредингера

$$H_S \Psi_S(t) = i\hbar \frac{\partial \Psi_S(t)}{\partial t}. \quad (13.1)$$

В этом представлении операторы F_S физически наблюдаемых величин не зависят от времени; это означает, что для всех моментов времени они одинаковы, т. е. $\partial F_S / \partial t = 0$. Однако математическое ожидание оператора

$$\langle F \rangle = (\Psi_S(t), F_S \Psi_S(t)), \quad (13.2)$$

вообще говоря, *будет* зависеть от времени, причем

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle F_S \rangle = (\Psi_S(t), [F_S, H_S] \Psi_S(t)). \quad (13.3)$$

Назовем оператором \dot{F}_S в представлении Шредингера такой оператор, для которого выполняется соотношение

$$\langle \dot{F}_S \rangle = \frac{d}{dt} \langle F_S \rangle. \quad (13.4)$$

Совершим, далее, над вектором состояния $\Psi_S(t)$ унитарное, зависящее от времени преобразование $V(t)$, которое переводит его в вектор состояния

$$\Phi(t) = V(t) \Psi_S(t), \quad (13.5)$$

$$V(t) V^\dagger(t) = V^\dagger(t) V(t) = 1, \quad V^\dagger(t) = V^{-1}(t). \quad (13.6)$$

Используя уравнения (13.1) и (13.5), находим, что вектор состояния $\Phi(t)$ подчиняется теперь следующему уравнению:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \left(i\hbar \frac{\partial V}{\partial t} V^{-1} + V H_S V^{-1} \right) \Phi(t). \quad (13.7)$$

Поэтому, если мы выберем унитарный, зависящий от времени оператор $V(t)$ так, чтобы он удовлетворял уравнению

$$-i\hbar \frac{\partial V}{\partial t} = (V H_S V^{-1}) V = V H_S, \quad (13.8)$$

то преобразованный вектор состояния Φ_H не будет зависеть от времени. Поскольку оператор $V(t)$ является унитарным, математическое ожидание оператора F_S будет теперь выражаться в виде

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \langle \Psi_S(t), F_S \Psi_S(t) \rangle = \langle V(t) \Psi_S(t), V(t) F_S \Psi_S(t) \rangle = \\ &= \langle \Phi_H, V(t) F_S V^{-1}(t) \Phi_H \rangle. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Определим $F_H(t)$ следующим образом:

$$F_H(t) = V(t) F_S V^{-1}(t). \quad (13.10)$$

Тогда, согласно этому определению, зависящий от времени оператор $F_H(t)$ имеет такое же математическое ожидание по векторам состояния Φ_H , какое имеет оператор F_S по векторам состояния Ψ_S . Дифференцируя соотношение (13.6) по времени, получаем

$$\frac{dV(t)}{dt} V^{\dagger}(t) + V(t) \frac{dV^{\dagger}(t)}{dt} = 0. \quad (13.11)$$

Полученное уравнение вместе с уравнением (13.8) и его эрмитово-сопряженным приводит к следующей зависимости оператора $F_H(t)$ от времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_H(t)}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial t} V^{\dagger} F_H(t) + F_H(t) V \frac{\partial V^{\dagger}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [V H_S V^{\dagger}, F_H(t)] = \\ &= \frac{i}{\hbar} [H_H, F_H(t)]. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Уравнение (13.12) и независящий от времени вектор состояния, который подчиняется соотношению

$$\frac{\partial \Phi_H}{\partial t} = 0, \quad (13.13)$$

определяют представление Гейзенберга. Вектор состояния не зависит от времени и одинаков для всех моментов времени. С другой стороны, операторы $F_H(t)$ зависят от времени. Вектор состояния Φ_H определяет теперь всю историю системы, т. е. результат *всех возможных* измерений, производимых над системой за всю ее историю. Однако если провести реальное измерение над системой, то вектор состояния изменится. Хотя гейзенберговский вектор состояния Φ_H не зависит от времени, его можно определить по тем результатам, которые он предсказывает для некоторых измерений в заданный момент времени. Таким образом, мы можем определить Φ_H как вектор состояния, который при $t=0$ переходит в шредингеровский вектор состояния $\Psi_S(0)$.

§ 2. Канонические перестановочные соотношения

Напомним, что квантование классической механической системы состоит в замене скобок Пуассона для канонических переменных перестановочными соотношениями. Эти перестановочные соотношения для системы с n степенями свободы имеют вид

$$\begin{aligned} [q_r, q_s] &= [p_r, p_s] = 0, \\ [q_r, p_s] &= i\hbar\delta_{rs}, \\ s, r &= 1, 2 \dots n. \end{aligned} \quad (13.14)$$

В этих перестановочных соотношениях время как параметр во всех переменных одинаково. В случае сеточной схемы, где можно отождествить $Q_s(t)$ и $\varphi_s(t)$, $P_s(t)$ и $\delta x_s \pi_s(t)$, мы можем непосредственно применить перестановочные соотношения (13.14), в результате получим

$$[Q_s(t), Q_r(t)] = [P_s(t), P_r(t)] = 0, \quad (13.15a)$$

$$[Q_s(t), P_r(t)] = i\hbar\delta_{sr}. \quad (13.15b)$$

Последний коммутатор, выраженный через π_r , имеет вид

$$[Q_s(t), \pi_r(t)] = i\hbar \frac{\delta_{sr}}{\delta x_r}. \quad (13.16)$$

Переход к континууму производится путем суммирования (13.16) по всем ячейкам δx_r , причем

$$\sum_s \delta x_s [Q_r(t), \pi_s(t)] = \int [\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] d^3x' = i\hbar, \quad (13.17)$$

откуда следует, что

$$[\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = i\hbar\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (13.18)$$

Аналогично соотношение (13.15a) для континуума переписывается в виде

$$[\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)] = [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = 0. \quad (13.19)$$

Соотношения (13.18) и (13.19) являются фундаментальными соотношениями квантовой теории поля. Они показывают, что в квантовой теории переменные поля и канонически-сопряженные им импульсы становятся некоммутирующими между собой операторами. Поэтому при перестановке переменных должна соблюдаться известная осторожность. Заметим, однако, что в силу соотношения (13.19) переменные одного сорта, т. е. два π или два φ , в разных пространственных точках, но в один и тот же момент времени, коммутируют между собой. Это соответствует тому, что динамические переменные, относящиеся к различным степеням свободы, коммутируют между собой.

Развитый выше формализм легко обобщается на случай многокомпонентных полей. Так как различные компоненты поля относятся к разным степеням свободы системы, то мы получаем следующие перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} [\varphi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)] &= i\hbar \delta_{rs} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [\pi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)] &= [\varphi_r(\vec{x}, t), \varphi_s(\vec{x}', t)] = 0, \end{aligned} \quad (13.20)$$

где π_r — канонически-сопряженный φ_r импульс, причем $r = 1, 2, \dots, n$; n — номера компонент оператора поля.

Эти перестановочные соотношения не определяют представления, в котором мы работаем (Гейзенберга или Шредингера). Для определения представления необходимо найти зависимость от времени как вектора состояния системы, так и операторов поля.

Рассмотрим скалярное мезонное поле. В представлении Шредингера вектор состояния для такой системы будет удовлетворять следующему уравнению движения:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_S}{\partial t} = H_S \Psi_S = \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi^2(\vec{x}) + [\nabla \varphi(\vec{x})]^2 + \mu^2 \varphi^2(\vec{x}) \} \Psi_S. \quad (13.21)$$

Операторы $\pi(\vec{x})$ и $\varphi(\vec{x})$ при этом не зависят от времени и могут быть определены в виде

$$\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{x}, 0), \quad (13.22a)$$

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, 0), \quad (13.22b)$$

причем

$$[\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (13.23)$$

Унитарный оператор, преобразующий шредингеровское представление в гейзенберговское, записывается в явном виде следующим образом:

$$V(t) = e^{iH_S t/\hbar}. \quad (13.24)$$

Это есть требуемое унитарное преобразование, которое непосредственно следует из соотношения (13.8), так как H_S не зависит от времени. Из выражения (13.24) следует (скорее, чем из $\exp\{iH_S(t-t_0)\}$), что гейзенберговское представление выбрано так, что в момент $t=0$ оно соответствует шредингеровскому представлению. Это находится в согласии с соотношениями (13.22).

Вектор состояния системы Φ_H теперь уже постоянен во времени, т. е.,

$$\frac{\partial \Phi_H}{\partial t} = 0. \quad (13.25)$$

Однако операторы поля зависят теперь от времени и подчиняются следующим уравнениям движения:

$$\frac{\partial \pi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H(t), \pi(\vec{x}, t)], \quad (13.26)$$

$$\frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H(t), \varphi(\vec{x}, t)], \quad (13.27)$$

где

$$\begin{aligned} H(t) &= e^{+iH_S t/\hbar} H_S e^{-iH_S t/\hbar} = H_S = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi^2(\vec{x}, t) + [\nabla \varphi(\vec{x}, t)]^2 + \mu^2 \varphi^2(\vec{x}, t) \} \end{aligned} \quad (13.28)$$

и

$$\pi(\vec{x}, t) = e^{iH_S t/\hbar} \pi(\vec{x}) e^{-iH_S t/\hbar}, \quad (13.29)$$

$$\varphi(\vec{x}, t) = e^{iH_S t/\hbar} \varphi(\vec{x}) e^{-iH_S t/\hbar}. \quad (13.30)$$

Используя перестановочные соотношения (13.20), легко можно установить, что уравнения (13.26) и (13.27) эквивалентны уравнению Клейна—Гордона для оператора поля $\varphi(\vec{x}, t)$.

§ 3. Импульсное представление и квантование скалярного поля

Выше мы ввели лишь перестановочные соотношения для переменных поля, которые должны выполняться в квантовом случае. Теперь наша задача заключается в установлении следствий наложения этих квантовых условий. В первую очередь мы проквантуем действительное скалярное поле φ , поскольку оно является наиболее простым. (Наше рассмотрение с таким же успехом применимо и к псевдоскалярному полю.) Мы будем работать в шредингеровском представлении, так что операторы не будут зависеть от времени.

Следствия квантования значительно легче уяснить, если пользоваться бесконечным числом дискретных переменных. Для этого разложим переменные поля $\varphi(\vec{x})$ и $\pi(\vec{x})$ в ряды Фурье, нормируя функцию на объем $V = L^3$,

$$\varphi(\vec{x}) = V^{-1/2} \sum_k q_k e^{+ik \cdot \vec{x}}, \quad (13.31)$$

$$\pi(\vec{x}) = V^{-1/2} \sum_k p_k e^{-ik \cdot \vec{x}}. \quad (13.32)$$

Суммирование проводится по всем k_i ($i = 1, 2, 3$), которые удовлетворяют граничному условию на границе объема V (т. е. которые кратны величине $2\pi/L$). При этом мы допустили здесь обычное условие периодичности [$\varphi(x_i + L) = \varphi(x_i)$; $|\lambda|^2 = 1$], разбивая тем

самым непрерывное k -пространство на ячейки. Знак минус в экспоненте формулы (13.32) выбран умышленно; такой выбор приводит, как это мы увидим вскоре, к упрощению расчетов.

Так как φ и π являются в классическом пределе действительными функциями, то в квантовом случае они должны быть эрмитовыми операторами, т. е.

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi^\dagger(\vec{x}), \quad (13.33)$$

$$\pi(\vec{x}) = \pi^\dagger(\vec{x}), \quad (13.34)$$

где, как обычно, a^\dagger — оператор эрмитово-сопряженный a . Следовательно, для коэффициентов разложения p и q мы должны иметь

$$q_{-k} = q_k^\dagger, \quad (13.35)$$

$$p_{-k} = p_k^\dagger. \quad (13.36)$$

Не зависящие от времени операторные коэффициенты p_k и q_k на том же основании, как P_s и Q_s , следует рассматривать как динамические переменные. Действительно, если мы рассмотрим коммутатор величин φ и π , то, согласно соотношениям (13.14), для p_k и q_k получим

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] &= V^{-1} \sum_k \sum_{k'} [q_k, p_{k'}] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} = \\ &= i\hbar V^{-1} \sum_k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}; \end{aligned} \quad (13.37)$$

это соотношение в пределе при $V \rightarrow \infty$ переходит в уже известное нам перестановочное соотношение для φ и π

$$[\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (13.38)$$

С другой стороны, если известно перестановочное соотношение (13.23), то перестановочное соотношение для p_k и q_k получается способом, обратным тому, который ведет к соотношению (13.38). Так как p_k и q_k выражаются через φ и π в виде

$$q_k = V^{-1/2} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \varphi(\vec{x}), \quad (13.39)$$

$$p_k = V^{-1/2} \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \pi(\vec{x}), \quad (13.40)$$

то их коммутатор, согласно соотношению (13.23), равен

$$\begin{aligned} [p_k, q_{k'}] &= V^{-1} \int d^3x \int d^3x' [\pi(\vec{x}), \varphi(\vec{x}')] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} = \\ &= -i\hbar V^{-1} \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = -i\hbar \delta_{kk'}. \end{aligned} \quad (13.41)$$

Аналогично получаются соотношения

$$[p_k, p_{k'}] = [q_k, q_{k'}] = 0. \quad (13.42)$$

Далее, гамильтониан рассматриваемого поля имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \int \{ \pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + \mu^2\varphi^2 \} d^3x. \quad (13.43)$$

Рассмотрим член $\int \varphi^2 d^3x$. Используя выражение (13.31), получаем

$$\int \varphi^2 d^3x = V^{-1} \int \sum_k \sum_{k'} q_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} q_{k'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} d^3x. \quad (13.44)$$

Проведя интегрирование, найдем

$$\int \varphi^2 d^3x = \sum_k \sum_{k'} q_k q_{k'} \delta_{-k, k'} = \sum_k q_k q_{-k}. \quad (13.45)$$

Вводя сокращенное обозначение

$$\omega_k = +\sqrt{\mu^2 + k^2} \quad (13.46)$$

и используя соотношения (13.37) и (13.38), легко проверить, что

$$H = \frac{1}{2} \sum_k (p_k^\dagger p_k + \omega_k^2 q_k^\dagger q_k). \quad (13.47)$$

Это выражение по форме аналогично гамильтониану набора гармонических осцилляторов, который известен нам из обычной квантовой механики, за исключением того, что вместо $q_k^\dagger q_k$ и $p_k^\dagger p_k$ там стоят q_k^2 и p_k^2 . Если наши комплексные операторы p_k и q_k разделить на сумму действительной и мнимой частей, то H можно тогда представить в форме, содержащей лишь квадраты действительных величин. Однако если мы хотим выразить H в форме, более удобной, чем форма (13.47), то это легче всего сделать с самого начала, рассматривая действительные коэффициенты разложения (как это было сделано, например, Ферми [155]):

$$\varphi(\vec{x}) = V^{-1/2} \sum_k q_{k1} \sin \vec{k} \cdot \vec{x} + q_{k2} \cos \vec{k} \cdot \vec{x}; \quad (13.48)$$

аналогичное разложение имеет место для $\pi(\vec{x})$. В методе Ферми при разложении в ряд Фурье вместо двух волн с волновыми векторами \vec{k} и $-\vec{k}$ вводятся стоячие волны $k1$ и $k2$. В результате получается гамильтониан, представляющий собой сумму обычных гамильтонианов осцилляторов и содержащий величины как q_{k1}^2 и p_{k1}^2 , так и q_{k2}^2 и p_{k2}^2 . Удобнее всего его можно трактовать с помощью эле-

ментарной матричной квантовой механики. Стационарным является состояние, в котором энергия осцилляторов равна $\hbar\omega_{ki}(n_{ki} + 1/2)$, где n_{ki} означает число квантов состояния ki ($i = 1$ или 2). Операторы q_{ki} представляются при этом матрицами, общий член которых обозначается через n_{ki} . Можно показать, что q_{k1} имеет вид

$$q_{k1} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (13.49)$$

Заметим, что общий член q_{k1} обозначается через n_{k1} , а q_{k2} — через n_{k2} , причем n_{k1} и n_{k2} — не зависящие друг от друга квантовые числа.

Матрицы q_k и q_k^\dagger , которые нужны для диагонализации выражения (13.47), можно построить из матриц q_{k1} и q_{k2} , однако мы не будем подробно останавливаться на этом. Такое построение соответствует каноническому преобразованию от стоячих к бегущим волнам. Вместо этого, следуя Вентцелю [255], непосредственно напишем

$$q_k = \left(\frac{\hbar}{2\omega_k}\right)^{1/2} (a_k + a_{-k}^\dagger), \quad (13.50)$$

$$p_k = \left(\frac{\hbar\omega_k}{2}\right)^{1/2} i (a_k^\dagger - a_{-k}), \quad (13.51)$$

где a_k — матрица, т. е.

$$a_k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad (13.52)$$

общий член этой матрицы называется квантовым числом n_k . Общий член матрицы a_{-k} называется независимым квантовым числом n_{-k} .

Очевидно, что выражения (13.50) и (13.51) удовлетворяют условиям эрмитовости (13.35) и (13.36). Более того, они подчиняются перестановочным соотношениям (13.41) и (13.42), что можно увидеть, рассматривая матричные элементы (13.52). Так как квантовые числа n_k и n_{-k} независимы друг от друга, то матрица a_k описывает переходы, при которых изменяется n_k , а матрица a_{-k} —

переходы с изменением n_{-k} . Действительно, единственными исчезающими матричными элементами являются

$$(\dots n_l \dots n_k - 1 \dots | a_k | \dots n_{l'} \dots n_k \dots) = \sqrt{n_k} \delta_{n_l n_{l'}} \dots, \quad (13.53)$$

$$(\dots n_l \dots n_k \dots | a_k^\dagger | \dots n_{l'} \dots n_k - 1 \dots) = \sqrt{n_k} \delta_{n_l n_{l'}} \dots \quad (13.54)$$

Матричное умножение соотношения (13.53) на соотношение (13.54) дает

$$(\dots n_k \dots | a_k a_k^\dagger | \dots n_k \dots) = (n_k + 1) \delta_{n_l n_{l'}} \dots \quad (13.55)$$

аналогично

$$(\dots n_k \dots | a_k^\dagger a_k | \dots n_k \dots) = (n_k) \delta_{n_l n_{l'}} \dots \quad (13.56)$$

Разность между соотношениями (13.55) и (13.56) представляет собой элемент единичной матрицы, т. е.

$$[a_k, a_k^\dagger] = I. \quad (13.57)$$

Кроме того,

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (13.58)$$

и

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (13.59)$$

Соотношения (13.58) и (13.59) показывают, что величины p_k и q_k , определенные формулами (13.50) и (13.51), удовлетворяют перестановочным соотношениям (13.41) и (13.42).

Выражая гамильтониан в переменных a , получаем

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger). \quad (13.60)$$

Используя (13.55) и (13.56), мы видим, что величина полной энергии E равна

$$E = \sum_k \hbar \omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right). \quad (13.61)$$

Аналогично полный импульс поля можно выразить в виде

$$\vec{P} = \int d^3x \pi(\vec{x}) \nabla \varphi(\vec{x}), \quad (13.62)$$

или, в переменных a ,

$$\vec{P} = \sum_k \hbar \vec{k} \left(n_k + \frac{1}{2} \right). \quad (13.63)$$

Соотношения (13.63) и (13.61) ясно указывают, что n_k следует рассматривать как число частиц с импульсом \vec{k} и энергией $\hbar \omega_k$. Таким образом, квантование поля выявляет корпускулярную сущность последнего.

Когда $n_k = 0$, т. е. в поле нет частиц, то нулевая энергия

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k$$

бесконечно велика. Так как изменение начала отсчета энергии с физической точки зрения несущественно, то обычно отбрасывают эту нулевую энергию и определяют энергию следующим образом:

$$E = \sum_k \hbar \omega_k n_k = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k. \quad (13.64)$$

Это изменение в определении энергии может быть в действительности оправдано тем, что при переходе от классической теории к квантовой порядок операторов определен лишь с точностью до члена порядка \hbar (Розенфельд и Соломон [411]). С другой стороны, нулевой импульс исчезает благодаря симметрии.

§ 4. Операторы числа частиц, их рождения и уничтожения

Содержание квантовой теории можно уяснить, подробно рассмотрев эрмитовский оператор $N_k = a_k^\dagger a_k$, называемый оператором числа частиц в состоянии \vec{k} . Выберем, как и выше, представление, в котором все операторы N_k (т. е. для каждого \vec{k}) диагональны. Это возможно благодаря коммутации операторов N_k при различных k , т. е.

$$\begin{aligned} [N_k, N_{k'}] &= [a_k^\dagger a_k, a_{k'}^\dagger a_{k'}] = \\ &= a_k^\dagger [a_k, a_{k'}^\dagger] a_k + a_{k'}^\dagger [a_{k'}^\dagger, a_k] a_{k'} = 0. \end{aligned} \quad (13.65)$$

Исследуем теперь действие операторов a_k в представлении, в котором операторы N_k диагональны. Для этого укажем на следующие перестановочные соотношения между N_k и операторами a_k и a_k^\dagger :

$$[a_k, N_k] = [a_k, a_k^\dagger a_k] = a_k, \quad (13.66)$$

$$[a_k^\dagger, N_k] = -a_k^\dagger. \quad (13.67)$$

Пусть Φ_λ и λ — собственная функция и собственное значение оператора N_k , соответственно, т. е. $N_k \Phi_\lambda = \lambda \Phi_\lambda$. Тогда $a_k \Phi_\lambda$ — собственная функция оператора N_k с собственным значением $\lambda - 1$. В этом легко убедиться, так как благодаря перестановочным соотношениям (13.66)

$$N_k (a_k \Phi_\lambda) = (a_k N_k - a_k) \Phi_\lambda = (\lambda - 1) (a_k \Phi_\lambda), \quad (13.68)$$

что и требовалось доказать. Аналогично $a_k^\dagger \Phi_\lambda$ является собственной функцией оператора N_k с собственным значением $\lambda + 1$.

Покажем далее, что собственные значения оператора N_k — неотрицательные целые числа. Заметим, что если подействовать m раз оператором a_k на Φ_λ , то мы получим собственную функцию с собственным значением $\lambda - m$, где m — положительное целое число. Таким образом, либо N обладает отрицательными собственными значениями (величина $\lambda - m$ может быть сделана отрицательной при достаточно больших m), либо одна из собственных функций должна обратиться в нуль. Однако оператор N_k положительно определен (≥ 0), так как он представляет собой произведение оператора времени на его эрмитово-сопряженный. Иными словами, его собственные значения должны быть положительно определены (≥ 0). Произведение $a_k^\dagger a_k$ также поэтому неотрицательно и, следовательно, для произвольного, не равного нулю вектора состояния

$$(\Phi, N_k \Phi) \geq 0, \quad \text{где} \quad (\Phi, \Phi) > 0. \quad (13.69)$$

Знак равенства имеет место лишь для состояния Φ_0 , для которого $a_k \Phi_0 = 0$. Следовательно, Φ_0 описывает самое низкое состояние. Так как $N_k \Phi_0 = \lambda_0 \Phi_0$, то мы имеем

$$(\Phi_0, N_k \Phi_0) = \lambda_0 (\Phi_0, \Phi_0) = (\Phi_0, a_k^\dagger a_k \Phi_0) = 0. \quad (13.70)$$

Далее, так как $(\Phi_0, \Phi_0) > 0$, то в качестве наименьшего собственного значения необходимо принять величину

$$\lambda_0 = 0. \quad (13.71)$$

Таким образом, мы установили, что собственные значения оператора N_k действительно неотрицательные целые числа.

Более того, из формулы (13.64) следует

$$H = \sum_k \hbar \omega_k N_k. \quad (13.72)$$

Аналогичным образом можно записать и полный импульс \vec{P}

$$\vec{P} = \sum_k \hbar \vec{k} N_k. \quad (13.73)$$

Следовательно, N_k обладает всеми свойствами оператора числа частиц. Его собственные значения являются положительными целыми числами, а из формул (13.72) и (13.73) видно, что в отсутствие взаимодействия каждая частица с импульсом \vec{k} вносит свой вклад $\hbar \vec{k}$ в полный импульс поля и энергию $\hbar \omega_k = \hbar \sqrt{k^2 + \mu^2}$ в полную энергию.

Оператор $N = \sum_k N_k$ можно интерпретировать как оператор полного числа частиц. Действуя на вектор состояния Φ , он дает полное число частиц, присутствующих в поле. В нашем представлении,

в котором оператор N_k с собственными значениями n_k, n'_k, \dots , диагонален, т. е.

$$(n_k | N_k | n'_k) = n_k \delta_{n'_k, n_k} \quad (13.74)$$

соотношение (13.66) можно написать в явном виде

$$(n''_k - n'_k + 1)(n''_k | a_k | n'_k) = 0. \quad (13.75)$$

Таким образом, величина $(n''_k | a_k | n'_k)$ отлична от нуля, только когда $n''_k = n'_k - 1$ [вспомним соотношение (13.53)]. Мы можем поэтому рассматривать a_k как оператор уничтожения частицы. Действительно, это уже было очевидно из равенства (13.68), так как a_k , действуя на вектор состояния Φ с числом частиц n_k в состоянии k , приводит к состоянию, в котором имеется лишь $n_k - 1$ частиц. Аналогичным образом можно переписать и соотношение (13.67)

$$(n''_k - n'_k - 1)(n''_k | a_k^\dagger | n'_k) = 0, \quad (13.76)$$

т. е. a_k^\dagger — оператор рождения частицы.

Фундаментальную роль в теории играет состояние, которое описывается функцией Φ_0 и для которого $N_k \Phi_0 = 0$ при всех k . Это такое состояние поля, в котором нет ни одной частицы. Оно называется вакуумом. Согласно формулам (13.72) и (13.73), оно имеет нулевую энергию и импульс и фактически представляет собой состояние с наименьшей энергией. Кроме того, оно обладает свойством инвариантности. Всем наблюдателям вакуум представляется одинаковым.

Как уже указывалось выше, мы можем сконструировать все базисные вектора теории, действуя последовательно операторами рождения частиц на волновую функцию вакуума. Так, функция

$$a_k^\dagger \Phi_0 \quad (13.77)$$

соответствует состоянию, в котором имеется один мезон с энергией $\hbar\omega_k$ и импульсом $\hbar\vec{k}$. Аналогично

$$a_k^\dagger a_{k'}^\dagger \Phi_0 \quad (13.78)$$

описывает состояние с двумя мезонами, и, наконец, $a_k^\dagger \dots a_{k'}^\dagger \Phi_0$ (с n множителями a^\dagger) есть волновая функция состояния с n мезонами. Заметим, что волновая функция n -мезонного состояния ортогональна m -мезонной волновой функции при $n \neq m$, так как они соответствуют различным собственным значениям эрмитового оператора полного числа частиц.

Из общих принципов квантовой механики следует теперь, что волновая функция Ψ произвольного состояния может быть разложена

обычным образом в ряд по базисным векторам

$$\Psi = c_0 \Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{1!}} \int d^3k c_1(\vec{k}) a_k^\dagger \Phi_0 + \\ + \frac{1}{\sqrt{2!}} \int d^3k \int d^3k' c_2(\vec{k}, \vec{k}') a_k^\dagger a_{k'}^\dagger \Phi_0 + \dots \quad (13.79)$$

Перейдем в этом последнем выражении к непрерывному спектру k . При этом перестановочные соотношения для a_k , например, примут вид

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (13.80)$$

В выражении (13.79) неоператорные функции $c_1(\vec{k})$, $c_2(\vec{k}, \vec{k}')$ и т. д. играют роль, аналогичную коэффициентам разложения в обычной квантовой механике. Их физический смысл легко установить. Он заключается в следующем: амплитуда вероятности того, что в состоянии Ψ нет ни одной частицы, очевидно, выражается матричным элементом (Φ_0, Ψ) , где Φ_0 — базисный вектор, соответствующий отсутствию частиц. Эта величина в соответствии с выражением (13.79) равна c_0 , так как волновая функция Φ_0 ортогональна волновым функциям всех состояний, в которых имеются частицы. Аналогично амплитуда вероятности обнаружения одного мезона с импульсом \vec{p} в состоянии, описываемом вектором состояния Ψ , дается матричным элементом типа

$$(a_p^\dagger \Phi_0, \Psi) = \left(a_p^\dagger \Phi_0, \int d^3k c_1(\vec{k}) a_k^\dagger \Phi_0 \right), \quad (13.81)$$

куда снова не входит никаких других волновых функций ввиду их ортогональности. В дальнейшем нам необходимо вычислить правую часть соотношения (13.81). Напомним, что из определения эрмитово-сопряженного оператора следует

$$(\Phi, a\Phi') = (a^\dagger\Phi, \Phi');$$

таким образом, учитывая, что $c_1(\vec{k})$ — неоператорная функция, можно написать

$$\left(a_p^\dagger \Phi_0, \int d^3k c_1(\vec{k}) a_k^\dagger \Phi_0 \right) = \int d^3k c_1(\vec{k}) (\Phi_0, a_p a_k^\dagger \Phi_0). \quad (13.82)$$

Используя перестановочное соотношение (13.80) и свойство вакуума, а именно, что $a_p \Phi_0 = 0$, можно вычислить теперь выражение

$$(\Phi_0, a_p a_k^\dagger \Phi_0).$$

В результате получим

$$(\Phi_0, a_p a_k^\dagger \Phi_0) = (\Phi_0, \{a_k^\dagger a_p + \delta(\vec{p} - \vec{k})\} \Phi_0) = \\ = \delta(\vec{p} - \vec{k}) (\Phi_0, \Phi_0). \quad (13.83)$$

Если мы предположим, что вакуумное состояние нормировано так, что $(\Phi_0, \Phi_0) = 1$, то получим

$$(a_p^\dagger \Phi_0, \Psi) = c_1(\vec{p}). \quad (13.84)$$

Мы видим, таким образом, что коэффициенты разложения $c_0, c_1(\vec{k}), c_2(\vec{k}, \vec{k}')$ и т. д. можно интерпретировать как амплитуды вероятности, соответственно, отсутствия мезонов, обнаружения одного мезона с импульсом \vec{k} , двух мезонов с импульсами \vec{k} и \vec{k}' и т. д. в состоянии, описываемом вектором состояния Ψ . Наконец, следует отметить, что в соотношении (13.79) мы включили нормирующие множители $1/\sqrt{1!}, 1/\sqrt{2!}, \dots, 1/\sqrt{n!}$ при определении одно-, двух- и n -мезонных состояний соответственно. Это означает, что мы нормировали волновую функцию Ψ следующим образом:

$$(\Psi, \Psi) = |c_0|^2 + \int d^3k |c_1(k)|^2 + \int d^3k \int d^3k' |c_2(k, k')|^2 + \dots + \int d^3k_1 \dots \int d^3k_n |c_n(k_1, \dots, k_n)|^2 + \dots = 1 \quad (13.85)$$

и тем самым обеспечили правильную нормировку амплитуд вероятностей $c_n(k_1, \dots, k_n)$.

Необходимо отметить еще одно свойство коэффициентов разложения $c_1(\vec{k}), c_2(\vec{k}, \vec{k}')$ и т. д. Из их определения в соотношении (13.79) и того факта, что все операторы рождения частиц $a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger$ и т. д. коммутируют между собой, следует, что амплитуды вероятностей $c_n(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)$ являются симметричными функциями координат $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n$. Следовательно, они описывают систему n частиц, подчиняющихся статистике Бозе—Эйнштейна (см. также работы Йордана и Клейна [247], Фока [183] и § 7).

Совершенно аналогичным образом может быть проведено и квантование комплексного скалярного поля. Впервые это квантование было проведено Паули и Вайскопфом [371, 374]. Квантованное комплексное скалярное поле описывает заряженные частицы. Операторы числа частиц, заряженных положительно и отрицательно, $N_k^{(+)}$ и $N_k^{(-)}$, могут быть определены независимо. Физически наблюдаемые величины, именно полная энергия, заряд и импульс, выражаются с их помощью следующим образом:

$$\begin{aligned} H &= \sum_k \{ N_k^{(+)} \hbar \omega_k + N_k^{(-)} \hbar \omega_k \}, \\ Q &= e \sum_k \{ N_k^{(+)} - N_k^{(-)} \}, \\ \vec{P} &= \sum_k \{ N_k^{(+)} \hbar \vec{k} + N_k^{(-)} \hbar \vec{k} \}. \end{aligned} \quad (13.86)$$

§ 5. Квантование спинорного поля

Квантование спинорного дираковского поля со спином $1/2$ можно провести так же, как и квантование поля со спином 0. В этом случае операторы поля $\psi(\vec{x})$ и $\bar{\psi}(\vec{x})$ в шредингеровском представлении разлагаются в ряд по полному набору собственных функций $w_n(\vec{x})$ уравнения Дирака для свободной частицы. Индекс n у $w_n(\vec{x})$ указывает на полный набор коммутирующих наблюдаемых величин, а именно на энергию, импульс и спин частицы. Эти функции $w_n(\vec{x})$ являются спинорами $w^r(\vec{p})$, $r = 1 \dots 4$, введенными в гл. 7 с помощью соотношений (7.20), умноженных на функцию, соответствующую плоской волне $\exp(i\vec{p} \cdot \vec{x})$; таким образом, они имеют вид:

$$\begin{aligned} w^r(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} & \text{ при } r = 1, 2, \\ w^r(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} & \text{ при } r = 3, 4. \end{aligned} \quad (13.87)$$

Разложение операторов $\psi(\vec{x})$ и $\bar{\psi}(\vec{x})$ записывается следующим образом¹⁾:

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_n \sqrt{\frac{m}{|E_n|}} b_n w_n(\vec{x}), \quad (13.88a)$$

$$\bar{\psi}(\vec{x}) = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_n \sqrt{\frac{m}{|E_n|}} b_n^+ \bar{w}_n(\vec{x}), \quad (13.88b)$$

причем сумма распространяется на все состояния как с положительной, так и с отрицательной энергией. Множитель $(m/|E_n|)^{1/2}$ обусловлен нашей нормировкой спиноров: $\bar{w}w = \varepsilon$.

Рассмотрим теперь гамильтониан поля, который, согласно (10.62), имеет вид

$$H = \int d^3x \bar{\psi}(-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m)\psi. \quad (13.89)$$

Подставляя разложения (13.88) в H и используя соотношения (13.87), получаем

$$H = \sum_{\mu} b_{\mu}^+ b_{\mu} E_{\mu}; \quad (13.90)$$

здесь символы E_m означают собственные значения оператора Дирака $\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$. Квантование этого поля по схеме, развитой в предыдущем параграфе, приводит к двум, связанным между собой трудностям.

¹⁾ Черта сверху над оператором ψ означает, что нужно взять сопряженную величину неоператорного спинорного множителя w и эрмитово-сопряженную операторного множителя b .

Во-первых, если мы будем интерпретировать $b^\dagger b$ как оператор числа частиц, то энергия поля может быть как положительной, так и отрицательной, поскольку собственные значения E_n могут быть как положительными, так и отрицательными ($b^\dagger b \geq 0$). Действительно, если собственные значения операторов числа частиц представляют собой любые положительные целые числа, какими они должны быть, согласно перестановочным соотношениям (13.58) и (13.59), то допустимы состояния с произвольно большой отрицательной энергией, что не имеет никакого физического смысла.

Во-вторых, из эксперимента известно, что электроны подчиняются принципу Паули, т. е. что в любом состоянии m не может находиться более одного электрона (число m характеризует энергию, импульс и спин частицы). Поэтому квантование с помощью коммутаторов, ведущих к статистике Бозе, является неверным, так как последняя допускает присутствие в одном состоянии любого числа частиц.

Разрешим сначала вторую трудность. Схема квантования, эквивалентная принципу Паули (т. е. требованию антисимметричности волновых функций), была разработана Иорданом и Вигнером [249]. В их схеме операторы удовлетворяют не коммутационным, а „антикоммутационным“ соотношениям:

$$[b_n, b_m]_+ = [b_n^\dagger, b_m^\dagger]_+ = 0, \quad (13.91)$$

$$[b_n, b_m^\dagger]_+ = \delta_{nm}, \quad (13.92)$$

где значок „+“ в нижнем индексе означает операцию ¹⁾

$$[A, B]_+ = AB + BA. \quad (13.93)$$

Оператор числа частиц в состоянии m имеет теперь вид

$$N_m = b_m^\dagger b_m. \quad (13.94)$$

Далее, из перестановочных соотношений (13.91) и (13.92) следует, что для квадрата оператора числа частиц справедливо равенство

$$N_m^2 = b_m^\dagger b_m b_m^\dagger b_m = b_m^\dagger (1 - \delta_m^\dagger b_m) b_m = b_m^\dagger b_m = N_m, \quad (13.95)$$

так как, согласно соотношению (13.91), $b_m^\dagger b_m^\dagger = b_m b_m = 0$. Таким образом, $N_m^2 = N_m$, а это означает, что число частиц в данном состоянии может быть либо нулем, либо единицей в полном согласии с принципом Паули. То, что более одной частицы не может

¹⁾ Иногда в литературе для антикоммутатора используется обозначение $\{A, B\}$.

находиться в одном состоянии, уже видно из перестановочного соотношения (13.91), которое показывает, что результат действия двух операторов рождения частицы на волновую функцию одного состояния (с одним и тем же m) обращается в нуль.

Хотя мы удовлетворили принципу Паули с помощью соотношений антикоммутиации, тем не менее перед нами осталась еще трудность, а именно гамильтониан не является положительно-определенным. Ее можно обойти, используя идею Дирака о том, что в вакууме все состояния с отрицательной энергией заняты. Если мы напишем в явном виде индекс m , т. е. (\vec{p}, r) , где r отвечает четырем решениям, соответствующим данному импульсу \vec{p} ($r=1, 2$ для положительных энергий и $r=3, 4$ для отрицательных), то при переходе к непрерывным значениям p разложение функции ψ (13.88а) примет вид

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} \left\{ \sum_{r=1}^2 b_r(\vec{p}) \omega^r(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \sum_{r=3}^4 b_r(-\vec{p}) \omega^r(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right\} d^3p, \quad (13.96)$$

или

$$E_p = +\sqrt{m^2 + p^2}. \quad (13.97)$$

Если переписать операторы числа частиц в виде

$$N_r^{(+)}(\vec{p}) = b_r^\dagger(\vec{p}) b_r(\vec{p}) \quad \text{для } r=1, 2, \quad (13.98a)$$

$$N_r^{(-)}(-\vec{p}) = b_{r+2}^\dagger(-\vec{p}) b_{r+2}(-\vec{p}) \quad \text{для } r=1, 2, \quad (13.98б)$$

то гамильтониан примет вид

$$H = \int d^3p \sum_{r=1}^2 E_p \{ N_r^{(+)}(\vec{p}) - N_r^{(-)}(\vec{p}) \}. \quad (13.99)$$

Аналогичным образом с помощью операторов числа частиц можно выразить полный заряд:

$$Q = e \int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}) \gamma^0 \psi(\vec{x}) = e \int d^3p \sum_{r=1}^2 \{ N_r^{(+)}(\vec{p}) - N_r^{(-)}(\vec{p}) \}. \quad (13.100)$$

Согласно дираковской теории дырок, вакуум определяется теперь тем, что все состояния с отрицательной энергией заняты, т. е. $N_r^{(-)}(\vec{p}) = 1$ для всех \vec{p} и всех r , а все состояния с положитель-

ной энергией свободны, т. е. $N_r^{(+)}(\vec{p}) = 0$ для всех \vec{p} и всех r . Энергия и полный заряд вакуума равны, следовательно,

$$E_0 = - \sum_{r=1}^2 \int d^3p E_p, \quad (13.101)$$

$$Q_0 = e \sum_{r=1}^2 \int d^3p.$$

Ясно, что эти величины бесконечно велики. Но они, согласно гипотезе Дирака, ненаблюдаемы. Наблюдаемыми являются лишь разности между H и E_0 , Q и Q_0 . Поэтому H и Q дадим следующее новое определение:

$$H' = H - E_0 = \int d^3p \sum_{r=1}^2 \{N_r^{(+)}(\vec{p}) - N_r^{(-)}(\vec{p})\} E_p + \int d^3p \sum_{r=1}^2 E_p =$$

$$= \int d^3p \sum_{r=1}^2 \{N_r^{(+)}(\vec{p}) + [1 - N_r^{(-)}(\vec{p})]\} E_p \quad (13.102)$$

и

$$Q' = Q - Q_0 = e \int d^3p \sum_r \{N_r^{(+)}(\vec{p}) - [1 - N_r^{(-)}(\vec{p})]\}. \quad (13.103)$$

Соотношения (13.102) и (13.103) представляют собой математическое выражение того, о чем мы говорили выше, обсуждая теорию дырок. Они явным образом показывают, что вклады в полный заряд и энергию состояний с отрицательной энергией имеют место лишь тогда, когда $N_r^{(-)}(\vec{p}) = 0$, т. е. когда эти состояния *не заполнены*. Вклад в заряд Q свободных состояний с отрицательной энергией имеет знак $(-e)$, противоположный знаку вклада состояний с положительной энергией. Вклад же в гамильтониан H незаполненных состояний \vec{p} с отрицательной энергией равен $+E_p$; следовательно, величина H' является теперь положительно-определенной. Таким образом, отсутствие частицы в состоянии с отрицательной энергией соответствует наличию ее (с обратным знаком) в состоянии с положительной энергией. Эта частица называется „позитроном“ для случая электронов, в общем же случае — „античастицей“.

Следует подчеркнуть, что теория дырок Дирака и процедура вычитания, к которой она приводит, являются возможными лишь благодаря квантованию с помощью соотношений антикоммутиации, приводящих к тому, что каждое состояние с отрицательной энергией занято лишь одной частицей. Трудность с положительным определением энергии в классической теории присуща всем теориям

полей с полуцелым спином. Связь между спином и статистикой, можно установить, если вместе с Паули [376] на квантовую теорию наложить следующие физические требования: 1) операторы двух физических наблюдаемых величин, относящихся к пространственно-временным точкам, разделенным пространственно-подобным интервалом, коммутируют (условие причинности) и 2) энергия системы положительно определена.

Первый постулат оправдан тем, что в квантовой теории отсутствие коммутации двух операторов наблюдаемых величин приводит к невозможности измерить их одновременно с произвольной степенью точности. Однако измерения в точках, разделенных пространственно-подобными интервалами, никогда не влияют друг на друга, так как принцип причинности в теории относительности требует, чтобы сигналы (энергия) не могли передаваться со скоростью, большей скорости света. Следовательно, коммутатор физически наблюдаемых величин, относящихся к точкам, разделенным пространственно-подобным интервалом, должен быть равен нулю. Второй же постулат самоочевиден.

Можно теперь показать (Паули [376], Паули и Беленфанте [377]), что квантование поля с целым спином с помощью антикоммутационных соотношений Иордана—Вигнера (ведущих к статистике Ферми—Дирака) нарушает первый постулат, в то время как квантование поля с полуцелым спином с помощью коммутационных соотношений Бозе (ведущих к статистике Бозе—Эйнштейна) нарушает второй постулат.

Обычно дают другое определение операторов для состояний с отрицательной энергией, т. е.

$$\begin{aligned} b_{r+2}(-\vec{p}) &= d_r^+(\vec{p}) & (r=1, 2), \\ b_{r+2}^+(-\vec{p}) &= d_r(\vec{p}) & (r=1, 2) \end{aligned} \quad (13.104)^{1)}$$

и перестановочные соотношения (13.92) теперь имеют вид

$$\begin{aligned} [d_r^+(\vec{p}), d_s(\vec{p}')]_+ &= \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \\ [d_r(\vec{p}), b_s(\vec{p}')]_+ &= [d_r^+(\vec{p}), b_s^+(\vec{p}')]_+ = 0, \\ [d_r(\vec{p}), b_s^+(\vec{p}')]_+ &= [d_r^+(\vec{p}), b_s(\vec{p}')]_+ = 0. \end{aligned} \quad (13.105)$$

Можно переписать их с помощью оператора числа частиц

$$\begin{aligned} N_r^{(-)}(\vec{p}) &= 1 - N_r^{(+)}(-\vec{p}) = 1 - b_{r+2}^+(-\vec{p}) b_{r+2}(-\vec{p}) = \\ &= b_{r+2}(-\vec{p}) b_{r+2}^+(-\vec{p}) = d_r^+(\vec{p}) d_r(\vec{p}). \end{aligned} \quad (13.106)$$

¹⁾ Такое определение возможно, так как операторы удовлетворяют антикоммутационным соотношениям, а последние остаются инвариантными при замене b на b^+ и обратно.

Операторы d^\dagger и d являются теперь операторами рождения и уничтожения античастиц, а $N_r^{(-)}(\vec{p})$ (в дальнейшем мы будем отбрасывать штрих) представляет собой оператор числа античастиц. Разложение оператора ψ имеет теперь вид

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sum_{r=1}^2 \{ b_r(\vec{p}) \omega^r(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + d_r^\dagger(\vec{p}) v^r(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \}, \quad (13.107)$$

где, как и в гл. 7, мы обозначили $\omega^{r+2}(\vec{p})$ через $v^r(\vec{p})$; $v^r(\vec{p})$ представляет собой спинор, описывающий частицу в состоянии с отрицательной энергией и импульсом $-\vec{p}$. Наше первоначальное разложение по ортогональным спинорам $\omega^r(\vec{p})$ обеспечивает то, что оператор $d_r^\dagger(\vec{p})$ рождает позитрон с амплитудой вероятности $v^r(\vec{p})$, как и должно быть в действительности для позитрона. Таким образом, $\psi(\vec{x})$ является оператором рождения позитронов и в то же время оператором уничтожения электронов. При такой формулировке дырочной теории вектор состояния вакуума Φ_0 характеризуется условием

$$N_r^{(+)}(\vec{p}) \Phi_0 = N_r^{(-)}(\vec{p}) \Phi_0 = 0 \quad \text{для всех } r \text{ и } \vec{p}; \quad (13.108)$$

т. е. вакуум обладает нулевой энергией, зарядом и импульсом, не содержит ни одной частицы и представляет собой состояние с наименьшей энергией. Это состояние является инвариантным по отношению ко всем лоренцовским преобразованиям. Другими словами, его можно характеризовать равенством

$$b_r(\vec{p}) \Phi_0 = d_r(\vec{p}) \Phi_0 = 0. \quad (13.109)$$

Заметим, что эта формулировка не содержит больше понятия „заполненной зоны“.

Метод ¹⁾, аналогичный развитому для случая мезонного поля, можно использовать и здесь для того, чтобы построить базисный вектор в представлении, в котором операторы числа частиц диаго-

¹⁾ Заметим, что перестановочные соотношения между операторами числа частиц $N^{(+)}(\vec{p})$ и операторами b и b^\dagger идентичны случаю Бозе [соотношения (13.66) и (13.67)], даже несмотря на то, что операторы b и b^\dagger удовлетворяют антикоммутационным соотношениям. То же имеет место для операторов $N^{(-)}(\vec{p})$ и d . Заметим также, что оператор $N^{(+)}(\vec{p})$ коммутирует с позитронными операторами d и d^\dagger . Также коммутируют и операторы $N^{(-)}(\vec{p})$ и b .

нальны. Так, $b_s^+(\vec{p})\Phi_0$ описывает состояние с одним электроном, со спином s и импульсом \vec{p} ; $b_{s_1}^+(\vec{p}_1)b_{s_2}^+(\vec{p}_2)\Phi_0$ — двухэлектронное состояние и т. д. Однако амплитуды разложения $c_0, c_1(\vec{p}s), c_2(\vec{p}_1s_1, \vec{p}_2s_2)$ являются теперь антисимметричными функциями своих переменных, какими и должны быть амплитуды, описывающие частицы, подчиняющиеся статистике Ферми—Дирака (см. также работы Фока [183] и Жана [245]).

Наконец, рассмотрим перестановочные соотношения в конфигурационном пространстве. Так как разложение $\bar{\psi}(\vec{x})$ в ряд имеет вид

$$\bar{\psi}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sum_{r=1}^2 \{ b_r^+(\vec{p}) \bar{w}^r(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d_r(\vec{p}) \bar{v}^r(\vec{p}) e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} \}, \quad (13.110)$$

то антикоммутатор ψ и $\bar{\psi}$ равен

$$\begin{aligned} [\psi_\alpha(\vec{x}), \bar{\psi}_\beta(\vec{x}')]_+ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \int d^3p' \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{E_{p'}}\right)^{1/2} \times \\ &\times \sum_r \sum_s \{ [b_r(\vec{p}), b_s^+(\vec{p}')]_+ e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} w_\alpha^r(\vec{p}) \bar{w}_\beta^s(\vec{p}') + \\ &+ [d_r^+(\vec{p}), d_s(\vec{p}')]_+ e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{+i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} v_\alpha^r(\vec{p}) \bar{v}_\beta^s(\vec{p}') \}. \end{aligned} \quad (13.111)$$

Используя перестановочные соотношения и равенства (7.32) и (7.37), можно привести правую часть соотношения (13.111) к следующему виду:

$$\begin{aligned} [\psi_\alpha(\vec{x}), \bar{\psi}_\beta(\vec{x}')]_+ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \left(\frac{m}{E_p}\right) \left\{ e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \left(\frac{m+\hat{p}}{2m}\right)_{\alpha\beta} - \right. \\ &\left. - e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \left(\frac{m-\hat{p}}{2m}\right)_{\alpha\beta} \right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \left(\frac{m}{E_p}\right) e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{\gamma_{\alpha\beta}^0 E_p}{m} = \\ &= \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(\vec{x}-\vec{x}'). \end{aligned} \quad (13.112)$$

Выраженное с помощью эрмитово-сопряженного оператора $\psi^\dagger(\vec{x}) = \bar{\psi}(\vec{x})\gamma^0$ перестановочное соотношение имеет вид

$$[\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}')]_+ = \delta(\vec{x}-\vec{x}') I_{\alpha\beta}. \quad (13.113)$$

Для изучения нерелятивистского предела квантовой теории полей со спином $1/2$ следует обратиться к статье Осборна [361].

§ 6. Зарядовое сопряжение

Следует заметить, что развитая выше теория позитронов инвариантна относительно одновременной замены (Фарри [200])

$$N^{(+)} \rightleftharpoons N^{(-)}, \quad e \rightleftharpoons -e.$$

Эту инвариантность обычно называют „инвариантностью по отношению к зарядовому сопряжению“ (Крамерс [287]); она наводит на мысль, что можно сформулировать теорию дырок, используя как для позитронов, так и для электронов лишь волновые функции, описывающие частицы с положительной энергией. Действительно, эта возможность следует из существования унитарной матрицы C , имеющей свойства

$$-\gamma^{\mu T} = C^{-1} \gamma^{\mu} C, \quad (13.114a)$$

$$C^{\dagger} C = C C^{\dagger} = 1, \quad (13.114б)$$

$$C^T = -C, \quad (13.114в)$$

$$C^{-1} = C^{\dagger} = -C^*, \quad (13.114г)$$

где верхний индекс T относится к транспонированной матрице $[(C^T)_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}]$.

Существование матрицы C является следствием того, что матрицы $-\gamma^{\mu T}$ удовлетворяют тем же самым антикоммутиационным соотношениям, что и γ^{μ} . Так как представление с помощью 4-мерных матриц является неприводимым, то существует преобразование подобия, которое преобразует любую матрицу γ^{μ} в матрицу $-\gamma^{\mu T}$. Более того, эта матрица преобразования C всегда может быть выбрана унитарной. Теперь легко установить, что [это следует из выражения (13.114а)] $C^T C^{-1}$ коммутирует со всеми γ^{μ} , и, следовательно, $C^T C^{-1} = aI$, где a — константа. Взяв обратные и сопряженные величины обеих частей этого соотношения, найдем (помня, что матрица C является унитарной), что $a = \pm 1$. Можно показать, что в действительности $a = -1$ (Паули [373, 378], Майорана [319], Крамерс [287]).

Рассмотрим теперь уравнение Дирака, описывающее частицу в электромагнитном поле:

$$\left(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m \right) \psi = e\gamma^{\mu} A_{\mu} \psi, \quad (13.115a)$$

$$\left(i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^{\mu}} \gamma^{\mu} + m \bar{\psi} \right) = -e \bar{\psi} \gamma^{\mu} A_{\mu}. \quad (13.115б)$$

Заметим, что если транспонировать уравнение (13.115б) и заменить $\gamma^{\mu T}$ в соответствии с выражением (13.114а) на γ^{μ} , то мы получим следующее уравнение:

$$\left(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m \right) C \bar{\psi}^T = -e \gamma^{\mu} A_{\mu} C \bar{\psi}^T. \quad (13.116)$$

Таким образом, если ψ описывает движение частицы с зарядом e , то $C\bar{\psi}^T$ описывает движение частицы с зарядом $-e$. Обычно функцию $C\bar{\psi}^T$ называют зарядово-сопряженной волновой функцией и обозначают через ψ^c , т. е.

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T. \quad (13.117)$$

Рассмотрим теперь свойства зарядово-сопряженных спиноров, описывающих свободные частицы. Из предыдущего мы знаем, что электрон описывается волновой функцией $u(\mathbf{p})$, которая в импульсном пространстве подчиняется уравнению

$$(\hat{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0. \quad (13.118)$$

Аналогичным образом позитрон с энергией-импульсом $+\mathbf{p}$ описывается спинором $v(\mathbf{p})$, соответствующим частице с отрицательной энергией и импульсом $-\vec{p}$, т. е. волновой функцией электрона, отсутствию которого (в зоне состояний с отрицательной энергией) он соответствует. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$(-\hat{p} - m)v(\mathbf{p}) = 0, \quad (13.119a)$$

или

$$\bar{v}(\mathbf{p})(-\hat{p} - m) = 0. \quad (13.119b)$$

Транспонируя уравнение (13.119b) и используя выражение (13.114a), находим, что спинор

$$C\bar{v}^T(\mathbf{p}) = u^c(\mathbf{p}) \quad (13.120a)$$

удовлетворяет уравнению $(\hat{p} - m)u^c(\mathbf{p}) = 0$. Следовательно, этот зарядово-сопряженный спинор относится к частице с энергией-импульсом $+\mathbf{p}$. Используя свойство матрицы C , можно написать соотношение, обратное (13.120a), т. е.

$$v(\mathbf{p}) = C[\bar{u}^c(\mathbf{p})]^T. \quad (13.120b)$$

На основании этого соотношения мы можем заменить спинор $v_r(\vec{p})$, соответствующий частице с отрицательной энергией и появившийся в разложении ψ [соотношение (13.107)], функцией $C[\bar{u}^c(\mathbf{p})]^T$. Отсюда следует, что ψ относится теперь лишь к частицам с положительной энергией.

Таким образом, мы видим, что при зарядовом сопряжении каждая частица превращается в свою „античастицу“. Обратное, требование инвариантности теории по отношению к зарядовому сопряжению означает, что частица и соответствующая ей античастица должны иметь равные и противоположные заряды и магнитные моменты, но одинаковые массу и спин.

Зарядовое сопряжение можно применить также и к нейтральным частицам, что ведет к делению этих частиц на два класса. Первый класс нейтральных частиц обладает тем свойством, что при зарядовом сопряжении содержащиеся в нем частицы превращаются сами в себя. В современной теории π^0 -мезон и фотон являются примерами бозонов, которые ведут себя подобным образом. В действительности же такой первой исследованной частицей был фермион, изученный в связи с возможным описанием нейтрино (Майорана [319]; см. также работы Паули [378], Мишеля [334]). В теории поля такие частицы описываются эрмитовыми операторами для случая бозе-частиц и самосопряженными операторами (т. е. $\psi^c = \psi$) для случая ферми-частиц.

Второй класс нейтральных частиц характеризуется тем, что входящим в него частицам соответствуют (нейтральные) античастицы, отличающиеся от них самих. Современное описание нейтрона предполагает, что нейтрон является как раз такой частицей. „Антинейтрон“ должен был бы иметь магнитный момент противоположного знака, чем знак момента нейтрона. Для выяснения места, которое занимают эти различия при описании нейтральных частиц в теории β -распада, отсылаем читателя к статье Мишеля [334].

§ 7. Корпускулярно-волновой дуализм

Выше мы проквантовали два поля, наиболее важных в современной физике. При этом мы видели, что можно построить квантовую теорию поля с помощью частиц конечной массы, которые переносят заряд, энергию и импульс поля. В отсутствие взаимодействия число частиц поля является интегралом движения. Следовательно, это обстоятельство должно вытекать из обычного уравнения Шредингера для n частиц. И, наоборот, можно исходить из уравнения Шредингера для n частиц и построить операторный формализм, который только что был описан. Покажем теперь, что это действительно можно сделать.

Для этой цели рассмотрим систему, состоящую из n одинаковых нерелятивистских частиц, описываемых уравнением Шредингера ¹⁾

$$\left\{ \sum_{k=1}^n H(x_k) \right\} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n; t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n; t)}{\partial t},$$

$$H(x_k) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_k^2 + V(x_k). \quad (13.121)$$

Чтобы проанализировать содержание этой теории, введем полный набор нормированных волновых функций n частиц. Они могут быть сконструированы из полного ортогонального набора волновых

¹⁾ Получающийся при этом формализм легко обобщить, включая взаимодействие между частицами (см., например, работу Фока [183]).

функций одной частицы. Так, если $\{u_\lambda(x)\}$ является таким набором, причем

$$(u_\lambda, u_\mu) = \int d^3x u_\lambda^*(x) u_\mu(x) = \delta_{\lambda,\mu} \quad (13.122)$$

(интегрирование содержит здесь также суммирование по спиновым индексам, которые включены в x), то несимметризованную волновую функцию n частиц можно образовать прямым перемножением n функций одной частицы. Обозначим такую функцию через

$$U_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_{\lambda_1}(x_1) u_{\lambda_2}(x_2) \dots u_{\lambda_n}(x_n). \quad (13.123)$$

Собственно говоря, симметризованные или антисимметризованные волновые функции можно получить, действуя оператором $S = (1/n!) \sum P$ или $A = (1/n!) \sum \delta_P P$ на U (см., например, работу Корсона [93]). Здесь P — оператор перестановки, который переставляет номера координат x_k , δ_P — четность перестановки P ; суммирование производится по всем $n!$ перестановкам номеров n .

Вместо того чтобы определить U с помощью набора $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$, можно определить эту функцию, указав, сколько собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ повторяется, насколько часто и какие. Следовательно, мы определим U с помощью бесконечной последовательности целых чисел n_1, n_2, \dots , которые называются „числами заполнения“: n_λ есть число появлений u_λ в U (независимо от аргумента). Ясно, что если мы имеем n частиц, то

$$\sum_\lambda n_\lambda = n. \quad (13.124)$$

Заметим, однако, что последовательность чисел заполнения не определяет однозначно U , так как функция PU , где P — произвольный оператор перестановки $x_1 \dots x_n$, будет иметь точно такие же числа заполнения, определяющие ее. Однако последовательность n_1, n_2, \dots должна однозначно определять, строго говоря, симметричность или антисимметричность U , т. е. либо SU (для симметричного случая), либо AU (для антисимметричного случая).

Теперь можно разложить Ψ в ряд по симметризованным должным образом функциям

$$\Psi = \sum_{n_1, n_2, \dots} (n; x_1, x_2, \dots, x_n | n_1, n_2, \dots) c(n_1, n_2, \dots; t), \quad (13.125)$$

где

$$\begin{aligned} (n; x_1, x_2, \dots, x_n | n_1, n_2, \dots) &= \sqrt{\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}} \Delta(u_{\lambda_1}(x_1) \dots u_{\lambda_n}(x_n)) = \\ &= \Phi_{n_1 n_2 n_3 \dots}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (13.126)$$

причем $\Delta = S = (1/n!) \sum P$ в симметричном случае и $\Delta = A = (1/n!) \sum \delta_P P$ в антисимметричном случае. В последнем случае

правая часть написанного выше уравнения сводится к обычному определителю Слетера, и n_i всегда ≤ 1 . Множитель $n!/n_1!n_2! \dots$ есть нормировочная постоянная, так что

$$\begin{aligned} & \left(\Phi_{n_1 n_2 n_3 \dots}^{(n)} \quad \Phi_{n'_1 n'_2 n'_3 \dots}^{(n)} \right) = \\ & = \int d^3 x_1 \int d^3 x_2 \dots \int d^3 x_n \Phi_{n_1 n_2 n_3 \dots}^* (x_1, x_2, \dots, x_n) \times \\ & \quad \times \Phi_{n'_1 n'_2 n'_3 \dots} (x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \delta_{n_3 n'_3} \dots \quad (13.127) \end{aligned}$$

Величины $c(n_1, n_2, \dots; t)$ являются теперь „волновыми функциями“ в новом представлении, т. е. в представлении чисел заполнения. Они представляют собой амплитуды вероятности обнаружения n_1 частиц системы в момент t в состоянии 1, n_2 частиц — в состоянии 2 и т. д.

В симметричном случае введем, следуя Иордану и Клейну [247], операторы a_i и a_i^\dagger , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} a_i^\dagger \Phi_{n_1 n_2 n_3 \dots n_i \dots}^{(n)} (x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \sqrt{n_i + 1} \Phi_{n_1 n_2 n_3 \dots n_i + 1 \dots}^{(n+1)} (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \quad (13.128a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_i \Phi_{n_1 n_2 n_3 \dots n_i \dots}^{(n)} (x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \sqrt{n_i} \Phi_{n_1 n_2 n_3 \dots n_i - 1 \dots}^{(n-1)} (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (13.128б) \end{aligned}$$

Легко показать, что в скалярном произведении (13.127) a_i и a_i^\dagger являются в действительности эрмитово-сопряженными друг другу. Оператор a_i^\dagger называется оператором рождения, так как, действуя на волновую функцию n частиц, превращает ее в волновую функцию $(n+1)$ частиц. Точнее, он увеличивает число частиц в i -ом состоянии на единицу. Наоборот, оператор a_i называется оператором уничтожения: он уменьшает число частиц в i -ом состоянии на единицу. Если теперь ввести оператор $N_i = a_i^\dagger a_i$, то легко установить, что

$$N_i \Phi_{n_1 n_2 n_3 \dots n_i \dots}^{(n)} = a_i^\dagger a_i \Phi_{n_1 n_2 n_3 \dots n_i \dots}^{(n)} = n_i \Phi_{n_1 n_2 n_3 \dots n_i \dots}^{(n)}; \quad (13.129)$$

оператор N_i называется оператором числа частиц в состоянии i , так как, действуя им на $\Phi_{n_1 n_2 n_3 \dots n_i \dots}^{(n)}$, мы находим число частиц в этом состоянии. Далее, мы можем ввести оператор полного числа частиц

$$N = \sum_i N_i = \sum_i a_i^\dagger a_i, \quad (13.130)$$

который указывает, сколько всего частиц имеется в системе.

По определению, операторы a_i и a_i^\dagger удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}; \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0. \quad (13.131)$$

Теперь легко показать¹⁾ (см. работы Иордана и Клейна [247], Фока [183]), что можно выразить полный гамильтониан с помощью этих операторов следующим образом:

$$\mathbf{H}\Phi_{n_1 n_2 \dots}^{(n)} = \left\{ \sum_{k=1}^n H(x_k) \right\} \Phi_{n_1 n_2 \dots}^{(n)} = \left\{ \sum_{ij} a_i^\dagger a_j h_{ij} \right\} \Phi_{n_1 n_2 \dots}^{(n)}, \quad (13.132)$$

где

$$h_{ij} = (u_i, H u_j) = \int d^3x u_i^*(x) H(x) u_j(x). \quad (13.133)$$

Введем далее операторы²⁾

$$\psi(x) = \sum_i u_i(x) a_i \quad (13.134a)$$

и

$$\psi^\dagger(x) = \sum_i u_i^*(x) a_i^\dagger, \quad (13.134b)$$

которые в соответствии со свойствами операторов a_i, a_i^\dagger удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\psi(x), \psi^\dagger(x')] &= \sum_{ij} [a_i, a_j^\dagger] u_i(x) u_j^*(x') = \\ &= \sum_j u_j(x) u_j^*(x') = \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (13.135)$$

где мы воспользовались полнотой набора $\{u_\lambda(x)\}$ (замкнутостью). Аналогично

$$[\psi(x), \psi(x')] = [\psi^\dagger(x), \psi^\dagger(x')] = 0. \quad (13.136)$$

Выразив полный гамильтониан с помощью этих операторов, мы можем переписать его в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_{ij} a_i^\dagger a_j h_{ij} = \\ &= \int d^3x \left(\sum_i u_i^*(x) a_i^\dagger \right) H(x) \left(\sum_j u_j(x) a_j \right) = \\ &= \int d^3x \psi^\dagger(x) H(x) \psi(x), \end{aligned} \quad (13.137)$$

а оператор полного числа — в виде

$$N = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) = \sum_{ij} a_i^\dagger a_j \int d^3x u_i^*(x) u_j(x) = \sum_i a_i^\dagger a_i. \quad (13.138)$$

¹⁾ Напомним, что

$$H(x_k) u_j(x_k) = \sum_i h_{ij} u_i(x_k).$$

²⁾ В связи с этим см. работу Пирена [388].

Волновую функцию n частиц в теории Шредингера можно теперь охарактеризовать следующим образом: она является решением уравнения

$$H\Psi = \left(\int d^3x \phi^\dagger(x) H(x) \phi(x) \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (13.139)^1$$

в котором Ψ есть собственная функция оператора N с собственным значением n , т. е.

$$\left(\int d^3x \phi^\dagger(x) \phi(x) \right) \Psi = n\Psi. \quad (13.140)$$

Такое рассмотрение возможно, так как для задачи, которую мы исследуем,

$$[H, N] = 0. \quad (13.141)$$

Вектор состояния, описывающий такую систему, представляет собой некоторую линейную комбинацию $\Phi_{n, n_0}^{(n)}$... с фиксированным n . Этот формализм проходит почти без изменения для случая, когда частицы подчиняются статистике Ферми—Дирака и, следовательно, описываются антисимметричными волновыми функциями. Однако в этом случае операторы a и a^\dagger удовлетворяют антикоммутационным соотношениям (см. § 5, а также работу Йордана и Вигнера [249]). Последние же обеспечивают условие: ни одно состояние i, j, \dots не занято более чем одной частицей.

Поскольку уравнение, описывающее изменение рассматриваемых операторов во времени,

$$i\hbar \dot{\phi}(x) = [\phi(x), H] = H(x) \phi(x) \quad (13.142)$$

формально идентично уравнению Шредингера для одной частицы, то описанный выше формализм часто называют „вторично квантованной“ теорией, а сам процесс „вторичного квантования“ рассматривают как превращение волновой функции Шредингера в оператор, удовлетворяющий определенным перестановочным соотношениям.

Хотя вышеизложенный формализм получен при рассмотрении случая, когда число частиц остается постоянным, должно быть ясно, что он допускает непосредственное обобщение на гамильтонианы, для которых N (т. е. полное число частиц) не является

¹⁾ В этом уравнении действие операторов ϕ на Ψ можно определить, возвращаясь к разложению ϕ по операторам рождения и уничтожения [соотношение (13.134)], а Ψ — по $\Phi^{(n)}$ [соотношение (13.125)], так как действие операторов a и a^\dagger на $\Phi^{(n)}$ нам известно. Таким путем можно раз и навсегда определить действие операторов ϕ и ϕ^\dagger на произвольную функцию Ψ , т. е. определить представление этих операторов (см. работу Фока [183]).

больше интегралом движения. Таким образом, этот формализм позволяет рассматривать такие состояния, в которых частицы рождаются и аннигилируют, например β -распад, рождение мезона при нуклон-нуклонных столкновениях и т. д. В этих процессах вектор состояния Ψ должен быть линейной комбинацией $\Phi^{(n)}$ с $n = 0, 1, 2, \dots$

Это рассмотрение также можно применить к любой релятивистской теории поля¹⁾, например поля Клейна—Гордона. В § 3 мы видели, что в случае свободного поля одной из особенностей квантовой теории поля является лаконичное и формальное квантовомеханическое описание системы n независимо действующих релятивистских частиц. Чтобы показать это с точки зрения настоящего параграфа, применим описанный выше формализм к частицам Клейна—Гордона в нерелятивистском приближении (Дирак [112], Швебер [433], Лопес [308]). Так как физические реализуемые состояния релятивистской частицы со спином 0 содержат множество решений уравнения Клейна—Гордона, соответствующих частицам с положительной энергией (напомним рассуждения § 2 гл. 2), то набор волновых функций одной частицы $\{u_\lambda(\mathbf{x})\}$ является здесь весьма многозначным²⁾. Соотношение (2.16) является теперь скалярным произведением и $\Phi_{n, n_1 \dots}^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ — симметризованные произведения $u_\lambda(\mathbf{x})$, т. е. решения уравнения Клейна—Гордона, отвечающие положительным энергиям. Соотношения (13.128а) и (13.128б) снова определяют операторы a и a^\dagger ; выводы, вытекающие из этих соотношений, остаются справедливыми и для рассматриваемого случая. Однако, если мы введем операторы

$$\varphi^{(+)}(\mathbf{x}) = \sum_n u_n(\mathbf{x}) a_n, \quad (13.143а)$$

$$\varphi^{(-)}(\mathbf{x}) = \sum_n u_n^*(\mathbf{x}) a_n^\dagger, \quad (13.143б)$$

$$\varphi^{(-)}(\mathbf{x}) = [\varphi^{(+)}(\mathbf{x})]^\dagger \quad (13.143в)$$

1) Релятивистская теория поля в конфигурационном пространстве рассмотрена в работе Вайтмана и Швебера [535].

2) Чтобы удовлетворить условию релятивистской ковариантности, включив временную координату и, следовательно, напомним x . Функция $u_\lambda(\mathbf{x})$ имеет вид $[2(2\pi)^3]^{-1/2} \exp(-ik \cdot \mathbf{x})$, где $k_0 = +\sqrt{k^2 + \mu^2}$, а индекс λ определяет энергию и импульс. Действительно, необходимо образовать волновые пакеты так, чтобы получить нормированные волновые функции. Так как при этом мы имеем дело лишь с решениями для частиц с положительными энергиями, то можем записать уравнение Клейна—Гордона следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{и} \quad \sqrt{-\nabla^2 + \mu^2} \varphi(\mathbf{x}) = i \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x^0} \\ & \sum_{k=1}^n H(x_k) = \sum_{k=1}^n \sqrt{-\nabla_k^2 + \mu^2} = \mathbf{H}. \end{aligned}$$

{соответствующие равенствам (13.134а) и (13.134б) в нерелятивистском случае}, то, поскольку набор $\{u_\lambda(\mathbf{x})\}$ не является полным (для полноты нужно включить в него решения, отвечающие отрицательным энергиям), мы не можем больше пользоваться свойством полноты, а поэтому $\varphi^{(+)}(\mathbf{x})$ и $\varphi^{(-)}(\mathbf{x}')$ будут удовлетворять не перестановочному соотношению с δ -функцией, а соотношению

$$\begin{aligned} [\varphi^{(+)}(\mathbf{x}), \varphi^{(-)}(\mathbf{x}')] &= \sum_{n; E+} u_n(\mathbf{x}) u_n^*(\mathbf{x}') = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\ (\hbar = c = 1; \quad k_0 &= +\sqrt{k^2 + \mu^2}). \end{aligned} \quad (13.144)$$

Сумма

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) + \varphi^{(-)}(\mathbf{x}) \quad (13.145)$$

представляет собой оператор квантованного поля, описываемого уравнением Клейна—Гордона, в гейзенберговском представлении и удовлетворяет уравнению

$$(\square + \mu^2)\varphi(\mathbf{x}) = 0. \quad (13.146)$$

Таким образом, мы снова получили, что квантование свободного поля позволяет описывать систему с помощью квантов, носителей энергии и импульса (а также заряда в случае комплексного поля). На примере квантованного поля, подчиняющегося уравнению Клейна—Гордона, видно, что теория квантованного поля не имеет трудностей, связанных с отрицательными энергиями: энергия поля является всегда положительно-определенной, так как каждый квант вносит *положительную* энергию в полную энергию поля¹⁾. Однако операторы квантованного поля в гейзенберговском представлении (в котором они зависят явно от времени) будут содержать как положительные, так и отрицательные частоты (энергии), причем на этот раз отрицательные частоты соответствуют операторам рождения²⁾. Корпускулярная картина квантовой теории поля является, однако, лишь одной стороной физического содержания теории. Другой ее стороной является волновая картина. По Бору, эти две стороны являются дополнительными (и исключают друг друга). Чтобы пояснить это, снова рассмотрим случай квантованного электромагнитного поля. Корпускулярная точка зрения соответствует опи-

¹⁾ Это верно также и для теории поля со спином $1/2$, если принять новую дираковскую интерпретацию вакуума.

²⁾ Для рассмотренного выше уравнения Клейна—Гордона см. соотношения (13.143б) и (13.145); напомним, что u_λ^* есть решение, отвечающее отрицательной энергии, если u_λ соответствует положительной энергии.

санию поля с помощью полного набора физически наблюдаемых величин, связанных с частицей, т. е. с помощью определенного числа фотонов с заданными импульсами и поляризациями. Волновая же картина соответствует описанию поля с помощью полного набора физически наблюдаемых величин, связанных с полем, т. е. с помощью некоторого числа операторов интенсивности квантованного поля, математические ожидания которых соответствуют измеряемым интенсивностям поля. Эти два набора, однако, не коммутируют между собой. Следовательно, точное знание числа фотонов, присутствующих в поле, исключает возможность точного нахождения интенсивностей поля. Таким образом, даже в вакууме (т. е. в состоянии, где нет ни одного фотона) среднеквадратичные интенсивности поля не равны нулю. Эти флуктуирующие интенсивности поля вакуума реально проявляются при измерениях. Например, спонтанное излучение атома в возбужденном состоянии можно рассматривать как излучение под действием флуктуаций вакуума. Другой эффект, за который также ответственны флуктуации вакуума, есть флуктуация положения заряда в пространстве; этот эффект вносит вклад в собственную энергию частицы (Вайскопф [518]). Уменьшение энергии связи несвободного электрона, обусловленное флуктуациями его положения, объясняет большую часть лэмбовского смещения уровня (Уэлтон [520], Вайскопф [519]).

В случае материальных полей этот корпускулярно-волновой дуализм и дополнительность проявляются в флуктуациях заряда и плотности тока в некотором конечном 4-объеме, когда число частиц строго определено. Таким образом, становится очевидным, что квантовая теория полей, даже в случае свободного поля, является более полной и плодотворной, чем корпускулярное рассмотрение теории поля. Только рассматривая систему с обеих точек зрения (корпускулярной и волновой), можно получить о ней правильное представление.

РАССЕЯНИЕ И S-МАТРИЦА

§ 1. Испускание и поглощение кванта

Рассмотрим взаимодействие спинорного (нуклонного) поля и незаряженного поля Клейна—Гордона (мезонного) посредством локальной прямой связи $G\bar{\psi}\Gamma\psi\varphi(\vec{x})$ (где $\Gamma=I$ или γ_5). При этом гамильтониан системы имеет вид

$$H = H_0 + H_I, \quad (14.1)$$

где

$$H_0 = \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \{ \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m \} \psi(\vec{x}) + \\ + \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi^2(\vec{x}) + [\nabla\varphi(\vec{x})]^2 + \mu^2\varphi(\vec{x})^2 \} \quad (14.2)$$

и

$$H_I = G \int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}) \Gamma \psi(\vec{x}) \varphi(\vec{x}). \quad (14.3)$$

В квантовой теории поля взаимодействие вызывает переходы между состояниями, определяемыми гамильтонианом свободных полей H_0 . Если предположить, что взаимодействие является слабым, то можно применить методы обычной теории возмущений.

Рассмотрим подробно член взаимодействия, причем сначала рассмотрим его спинорную часть $\bar{\psi}(\vec{x})\Gamma\psi(\vec{x})$. Подставим в это выражение разложения $\bar{\psi}(\vec{x})$ и $\psi(\vec{x})$ по операторам рождения и уничтожения. Эта подстановка покажет, что существуют четыре типа взаимодействия, которые представлены членами:

1) член $b_p^\dagger b_{p'}$ соответствует уничтожению нуклона с импульсом \vec{p} и последующему рождению нуклона с импульсом \vec{p}' , т. е. соответствует рассеянию нуклона;

2) член $d_p^\dagger d_{p'}$ соответствует рассеянию антинуклона;

3) член $b_p^\dagger d_{p'}$ соответствует аннигиляции нуклона и антинуклона, т. е. уничтожению пары;

4) член $b_p^\dagger b_{p'}^\dagger$ соответствует рождению пары.

Аналогично разложение мезонного поля по операторам рождения и уничтожения приводит [с учетом выражений (13.31), (13.50) и

$\hbar = c = 1$] к соотношению

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= \varphi^\dagger(\vec{x}) = V^{-1/2} \sum_k q_k^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \\ &= V^{-1/2} \sum_k \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{1/2} (a_k^\dagger + a_{-k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Отсюда следует, что член взаимодействия H_I приводит к восьми элементарным процессам, соответствующим:

а) испусканию бозона при 1) рассеянии нуклона, 2) рассеянии антинуклона, 3) аннигиляции пары, 4) рождении пары;

б) поглощению бозона при тех же четырех нуклон-антинуклонных процессах.

Эти процессы можно изобразить графически с помощью *упорядоченных во времени* фейнмановских диаграмм. Если изображать бозон пунктирной линией, направленной в сторону возрастания времени, а антинуклон — сплошной линией, направленной в сторону убывания времени, то процесс „а“ (1), соответствующий испусканию бозона при рассеянии нуклона, можно представить диаграммой на фиг. 17, а. Время возрастает в направлении, показанном на этой диаграмме стрелкой. В противоположность ранее рассмотренным фейнмановским диаграммам (см. гл. 8 и 9) диаграмму на фиг. 17, а нельзя топологически изменить. Это и означает „упорядоченность во времени“. Аналогичным образом процесс „а“ (2) может быть представлен на фиг. 17, б, другие процессы — на фиг. 17, с—г.

Интегрирование оператора взаимодействия H_I по d^3x приводит к тому, что импульс сохраняется в каждой вершине (соответствующей акту взаимодействия). Рассмотрим, например, процесс „а“ (1), соответствующий фиг. 17, а. Часть H_I , ответственная за этот процесс, равна для непрерывных значений p и k ¹⁾:

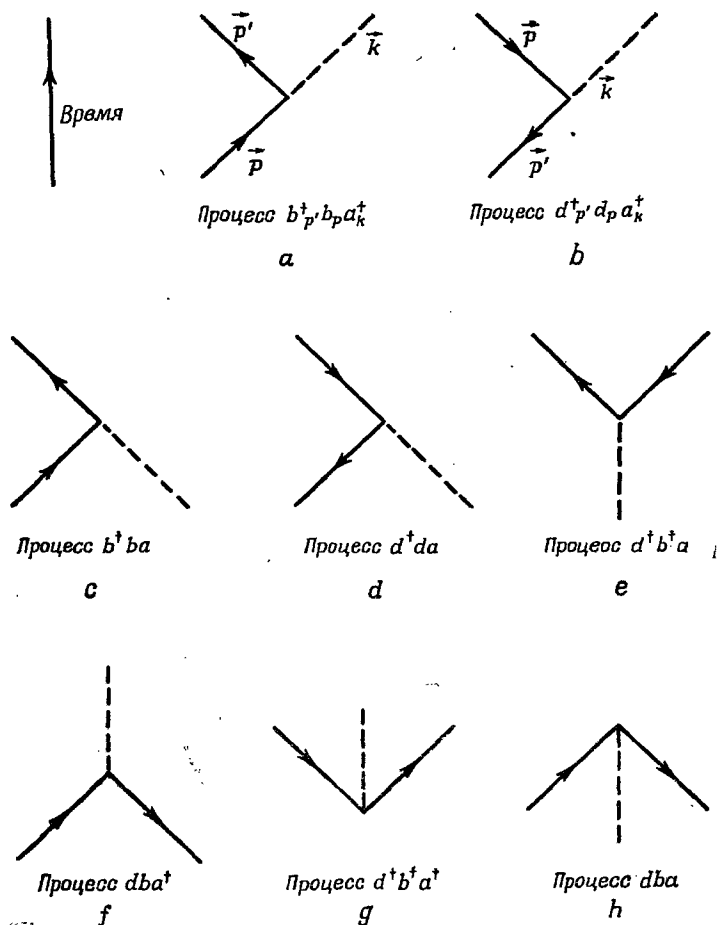
$$\begin{aligned} (H_I)_{a1} &= G (2\pi)^{-9/2} \int d^3x \int d^3p' \int d^3p \int d^3k \times \\ &\times \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \left(\frac{m}{E(p)}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{E(p')}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\omega(k)}\right)^{1/2} b_r^\dagger(\vec{p}') b_s(\vec{p}) a^\dagger(\vec{k}) \times \\ &\times \bar{w}^r(\vec{p}') \Gamma w^s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \end{aligned} \quad (14.5)$$

¹⁾ Начиная с этого места, обозначим a_k для непрерывного случая через $a(\vec{k})$. Аналогично напишем $E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$ и $\omega(k) = \sqrt{k^2 + \mu^2}$. Однако, чтобы не было возможных недоразумений, мы будем писать

$$E(\vec{p} + \vec{k}) = \sqrt{(\vec{p} + \vec{k})^2 + m^2} = \sqrt{p^2 + 2\vec{p}\cdot\vec{k} + k^2 + m^2}.$$

что после интегрирования по d^3x дает

$$(H_I)_{a1} = (2\pi)^{-3/2} G \int d^3p \int d^3p' \int d^3k \left(\frac{m^2}{2E(p)E(p')\omega(k)} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum_{r,s}^1, 2 \delta^3(-\vec{p}' + \vec{p} - \vec{k}) b_r^\dagger(\vec{p}') b_s(\vec{p}) a^\dagger(k) \bar{\omega}^r(\vec{p}') \Gamma \omega^s(\vec{p}), \quad (14.6)$$



Фиг. 17.

причем δ -функция соответствует сохранению импульса в вершине. Таким образом, если падающий нуклон (см. фиг. 17, а) имеет

импульс \vec{p} , рассеянный нуклон — импульс \vec{p}' , то эти импульсы связаны между собой соотношением $\vec{p}' = \vec{p} - \vec{k}$, где \vec{k} — импульс испущенного мезона.

Теория возмущений применяется теперь таким же образом, как и в случае обычной квантовой механики. Если мы ограничимся процессами второго порядка¹⁾, то матричный элемент процесса $i \rightarrow f$ будет иметь вид

$$T_{fi}^{(2)} = (\Phi_f, T^{(2)}\Phi_i) = \sum_{\substack{m \\ (E_m \neq E_0)}} \frac{(\Phi_f, H_I \Phi_m)(\Phi_m, H_I \Phi_i)}{E_0 - E_m}, \quad (14.7)$$

где Φ_f , Φ_i и Φ_m обозначают соответственно конечную, начальную и промежуточную волновые функции состояния системы. (Они являются собственными функциями гамильтониана H_0 .) Суммирование производится по всем промежуточным состояниям, отличным от начального состояния (с энергией E_0). Вероятность перехода дается соотношением (7.3).

§ 2. Рассеяние незаряженных мезонов нуклонами

В качестве иллюстрации приведенных выше замечаний вычислим здесь матричные элементы низшего порядка, описывающие рассеяние незаряженного мезона нуклоном, для случая псевдоскалярной мезонной теории с псевдоскалярной связью.

Рассеяние двух частиц происходит через следующие состояния.

Начальное состояние. Начальное состояние содержит мезон с импульсом \vec{k}_1 и нуклон с импульсом \vec{p}_1 и спином s_1 , т. е.

$$\Phi_i = b_{s_1}^+(\vec{p}_1) a^+(\vec{k}_1) \Phi_0. \quad (14.8)$$

Промежуточные состояния. Благодаря взаимодействию H_I существуют следующие четыре возможности, которые определяют возможные промежуточные состояния (второго порядка):

а) Нуклон поглощает мезон (это соответствует члену b^+ba в гамильтониане взаимодействия H_I), так что в промежуточном состоянии присутствует только лишь один нуклон с импульсом $\vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{k}_1$ и энергией $\sqrt{p_i^2 + m^2}$.

б) Нуклон испускает мезон с импульсом \vec{k}_2 , соответствующим конечному состоянию (член взаимодействия b^+ba^+), так что в промежу-

¹⁾ Никаких процессов первого порядка в действительности происходить не может, так как при этом не могут одновременно сохраняться энергия и импульс.

точном состоянии имеется два мезона с импульсами \vec{k}_1 и \vec{k}_2 и один нуклон с импульсом $\vec{p}_1 - \vec{k}_2$.

в) Рождаются пара нуклон — антинуклон и мезон ($d^+b^+a^+$), так что в промежуточном состоянии присутствуют два нуклона, один антинуклон и два мезона. Нуклон и мезон, которые родились при этом процессе, находятся в конечном состоянии.

г) Мезон, находящийся в начальном состоянии, рождает пару и, таким образом, „аннигилирует“ (d^+b^+a); следовательно, в промежуточном состоянии имеется два нуклона и один антинуклон и нет ни одного мезона.

Конечное состояние. Наконец, повторное действие оператора H_I в соотношении (14.7) приводит теперь к конечному состоянию, в котором присутствует один мезон с импульсом \vec{k}_2 и один нуклон со спином s_2 и импульсом \vec{p}_2 , т. е.

$$\Phi_f = b_{s_2}^+ (\vec{p}_2) a^+ (\vec{k}_2) \Phi_0. \quad (14.9)$$

Конечное состояние достигается следующим образом:

а) нуклон в промежуточном состоянии испускает мезон, соответствующий конечному состоянию, и переходит в свое конечное состояние (член взаимодействия b^+ba^+);

б) нуклон в промежуточном состоянии поглощает мезон, соответствующий начальному состоянию (член взаимодействия b^+ba);

в) антинуклон, рожденный в промежуточном состоянии, аннигилирует с нуклоном, находящимся в начальном состоянии, и поглощается мезон, соответствующий начальному состоянию (dba);

г) антинуклон, рожденный в промежуточном состоянии, аннигилирует с нуклоном, находящимся в начальном состоянии, и испускается мезон, соответствующий конечному состоянию (dba^+).

Эти процессы соответствуют упорядоченным во времени фейнмановским диаграммам, представленным на фиг. 18.

Рассмотрим сначала вклад в $T_{fi}^{(2)}$ от процесса „а“. Полезно переписать матричный элемент (14.7) для этого случая в виде

$$\begin{aligned} T_{fi}^{(2)a} &= \sum_m \left(\Phi_f, H_I^{(a2)} \frac{1}{E_0 - E_m} \Phi_m \right) \left(\Phi_m, H_I^{(a1)} \Phi_i \right) = \\ &= \left(\Phi_f, H_I^{(a2)} \frac{1}{E_0 - H_0} H_I^{(a1)} \Phi_i \right), \quad (14.10) \end{aligned}$$

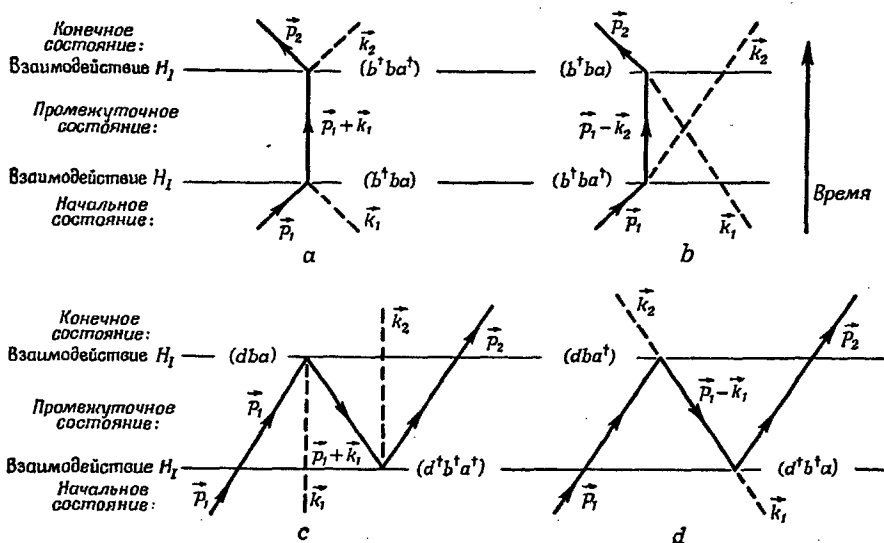
где $E_0 = E(p_1) + \omega(k_1)$ — энергия начального состояния¹⁾. Переписывая матричный элемент в форме (14.10), мы можем использовать полную набор собственных функций Φ_m гамильтониана H_0 и тот

1) Точнее говоря, необходимо включить в соотношение (14.10) множитель $(1 - \mathcal{P})$, где \mathcal{P} — проекционный оператор (проектирующий на начальное состояние). Однако $(\Phi_f, H_I \Phi_i) = 0$.

факт, что H_0 , действуя на Φ_m , дает $E_m \Phi_m$. Оператор $H_I^{(a1)}$ ответствен за переход от Φ_i к Φ_m и равен в этом случае

$$H_I^{(a1)} = (2\pi)^{-3/2} G \int d^3 p \int d^3 p' \int d^3 k \left(\frac{m^2}{2E(p)E(p')\omega(k)} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum_{r,s}^{1,2} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p} - \vec{k}) b_r^\dagger(\vec{p}') b_s(\vec{p}) a(\vec{k}) \bar{w}^r(\vec{p}') \gamma_5 w^s(\vec{p}). \quad (14.11)$$

Аналогично $H_I^{(a2)}$ дается равенством (14.6) с $\Gamma = \gamma_5$. Теперь, используя соотношения (14.8), (14.11) и свойство вакуума $a(\vec{k})\Phi_0 = 0$ и



Фиг. 18.

$b_s(\vec{p})\Phi_0 = d_s(\vec{p})\Phi_0 = 0$, можно легко найти волновую функцию промежуточного состояния $\Phi_m^a = H_I^{(a1)}\Phi_i$. Функция Φ_m^a выражается следующим образом:

$$\Phi_m^a = b_r^\dagger(\vec{p}') b_s(\vec{p}) a(\vec{k}) \Phi_i; \quad (14.12)$$

выражение (14.12) после применения перестановочных соотношений (13.59), (13.105) принимает вид

$$\Phi_m^a = b_r^\dagger(\vec{p}') b_s(\vec{p}) a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}_1) b_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \Phi_0 = \\ = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}_1) b_r^\dagger(\vec{p}') b_s(\vec{p}) b_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \Phi_0 = \\ = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}_1) \delta_{ss_1} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}_1) b_r^\dagger(\vec{p}') \Phi_0. \quad (14.13)$$

Следовательно, согласно выражению (14.11),

$$\begin{aligned} \Phi_m^a &= H_I^{(a1)} \Phi_i = \\ &= \frac{G}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m^2}{2E(\vec{p}_1 + \vec{k}_1) E(p_1) \omega(k_1)} \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \sum_{r=1}^2 \bar{\omega}^r(\vec{p}_1 + \vec{k}_1) \gamma_5 \omega^{s_1}(\vec{p}_1) b_r^\dagger(\vec{p}_1 + \vec{k}_1) \Phi_0, \end{aligned} \quad (14.14)$$

так что Φ_m^a описывает состояние с одним нуклоном с импульсом $\vec{p}_1 + \vec{k}_1$ (в выражении присутствует член $b_r^\dagger(\vec{p}_1 + \vec{k}_1) \Phi_0$). Оператор H_0 , действуя теперь на эту функцию, дает

$$E(\vec{p}_1 + \vec{k}_1) \Phi_m^a = \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)^2 + m^2} \Phi_m^a;$$

поэтому $(E_0 - H_0)^{-1}$, действуя на Φ_m^a , дает

$$[E_0 - E(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)]^{-1} \Phi_m^a.$$

Далее, применяя описанные выше методы, легко показать, что оператор $H_I^{(a2)}$, действуя на последнее выражение, дает

$$\begin{aligned} H_I^{(a2)} (E_0 - H_0)^{-1} H_I^{(a1)} \Phi_i = \\ = \frac{G^2}{2(2\pi)^3} \left(\frac{m}{E(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)} \right) \sum_{r=1}^2 \int d^3k \left(\frac{m^2}{\omega(k) \omega(k_1) E(\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{k}) E(p_1)} \right)^{1/2} \times \\ \times \frac{(\bar{\omega}^s(\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{k}) \gamma_5 \omega^r(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)) (\bar{\omega}^r(\vec{p}_1 + \vec{k}_1) \gamma_5 \omega^{s_1}(\vec{p}_1))}{E_0 - E(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)} \times \\ \times b_s^\dagger(\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) \Phi_0. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Наконец, чтобы получить $\Gamma_{fi}^{(2)a}$, мы должны вычислить матричный элемент $(\Phi_f, b^\dagger a^\dagger \Phi_0)$. Это легко сделать, вспомнив определение сопряженного оператора, именно:

$$(a^\dagger \Phi, \Psi) = (\Phi, a \Psi), \quad (14.16)$$

так что

$$\begin{aligned} (\Phi_f, b_s^\dagger(\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) \Phi_0) = \\ = (b_s^\dagger(\vec{p}_2) a^\dagger(\vec{k}_2) \Phi_0, b_s^\dagger(\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) \Phi_0) = \\ = \delta_{s_2 s} \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_1 - \vec{k}_1 + \vec{k}) \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{k}). \end{aligned} \quad (14.17)$$

Следовательно,

$$T_{r_1}^{(2) \alpha} = \frac{G^2}{2(2\pi)^3} \left(\frac{m}{E(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)} \right) \left(\frac{m^2}{\omega(k_2) \omega(k_1) E(p_2) E(p_1)} \right)^{1/2} \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_1 - \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \times \\ \times \sum_{r=1}^2 \frac{(\bar{w}^{\alpha_2}(\vec{p}_2) \gamma_5 \omega^r(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)) (\bar{w}^r(\vec{p}_1 + \vec{k}_1) \gamma_5 \omega^{\alpha_1}(\vec{p}_1))}{E_0 - E(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)}. \quad (14.18)$$

Наличие δ -функции соответствует сохранению в этом процессе полного импульса.

Ясно, что можно интерпретировать полученный матричный элемент следующим образом. Множитель

$$\frac{G}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \left(\frac{m^2}{\omega(k_1) E(p_1) E(p')} \right)^{1/2} \bar{w}^r(\vec{p}') \gamma_5 \omega^{\alpha_1}(\vec{p}_1) \quad (14.19)$$

соответствует поглощению мезона с импульсом \vec{k}_1 [множитель $1/\sqrt{2}(2\pi)^3 \omega(k_1)$] нуклоном, который находится в начальном состоянии с импульсом \vec{p}_1 и переходит при этом в состояние с импульсом \vec{p}' [множитель $G/(2\pi)^3 (m^2/E(p_1)E(p'))^{1/2} \bar{w}^r(\vec{p}') \gamma_5 \omega^{\alpha_1}(\vec{p}_1)$]. Поскольку импульс в этом процессе сохраняется, то возникает множитель

$$(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}_1 - \vec{k}_1).$$

Аналогично множитель

$$\frac{G}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \left(\frac{m^2}{\omega(k_2) E(p_2) E(p')} \right)^{1/2} \bar{w}^{\alpha_2}(\vec{p}_2) \gamma_5 \omega^r(\vec{p}') \quad (14.20)$$

соответствует матричному элементу перехода нуклона из состояния $(\vec{p}'r)$ в конечное состояние $(\vec{p}_2 s_2)$ с испусканием мезона с импульсом \vec{k}_2 . Импульс снова сохраняется, следовательно, снова необходимо ввести множитель

$$(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{k}_2 - \vec{p}').$$

Наконец, согласно теории возмущений, мы должны просуммировать по всем промежуточным состояниям (что соответствует здесь $\int d^3p \sum_r^{1,2}$) после того, как разделим это выражение на $E_0 - E_{\text{int}}$, причем в нашем примере $E_{\text{int}}^{\alpha} = E(p')$. Это, действительно, снова приводит к равенству (14.18).

Используя указанные выше соображения, мы можем теперь сразу выписать матричный элемент, соответствующий фиг. 18, *b*. Здесь

нуклон, находящийся в начальном состоянии, испускает мезон с импульсом \vec{k}_2 , соответствующим конечному состоянию, и, следовательно, переходит в состояние с импульсом $\vec{p}_1 - \vec{k}_2$. В промежуточном состоянии мы имеем, таким образом, два мезона и один нуклон, так что энергия этого состояния равна

$$E_{\text{int}}^b = \omega(k_1) + \omega(k_2) + E(\vec{p}_1 - \vec{k}_2). \quad (14.21)$$

Поэтому матричный элемент $T_{fi}^{(2)b}$ имеет вид

$$\begin{aligned} T_{fi}^{(2)b} = & \\ = & \frac{G^2}{2(2\pi)^3} \left(\frac{m}{E(\vec{p}_1 - \vec{k}_2)} \right) \left(\frac{m^2}{\omega(k_1)\omega(k_2)E(p_1)E(p_2)} \right)^{1/2} \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_1 - \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \times \\ & \times \sum_{r=1}^2 \frac{(\bar{w}^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_5 v^r(\vec{p}_1 - \vec{k}_2)) (\bar{w}^r(\vec{p}_1 - \vec{k}_2) \gamma_5 w^{s_1}(\vec{p}_1))}{E_0 - E(\vec{p}_1 - \vec{k}_2) - \omega(k_1) - \omega(k_2)}. \quad (14.22) \end{aligned}$$

Процедура, аналогичная описанной выше, показывает, что множитель, соответствующий испусканию мезона (с импульсом \vec{k}_2) при рождении пары, когда нуклон характеризуется переменными $(\vec{p}_2 s_2)$, а антинуклон — $(\vec{p}' r)$, имеет вид

$$\frac{G}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \left(\frac{m^2}{\omega(k_2)E(p_2)E(p')} \right)^{1/2} \bar{w}^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_5 v^r(\vec{p}'). \quad (14.23)$$

Аналогично множитель, соответствующий аннигиляции пары (нуклон $\vec{p}_1 s_1$, антинуклон $\vec{p}' r$) с поглощением мезона (с импульсом \vec{k}_1), записывается в виде

$$\frac{G}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \left(\frac{m^2}{\omega(k_1)E(p_1)E(p')} \right)^{1/2} \bar{v}^r(\vec{p}') \gamma_5 w^{s_1}(\vec{p}_1). \quad (14.24)$$

Матричный элемент, соответствующий упорядоченной во времени фейнмановской диаграмме (фиг. 18, с), равен поэтому

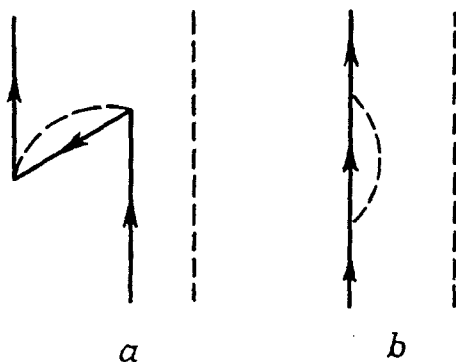
$$\begin{aligned} T_{fi}^{(2)c} = & \\ = & -\frac{G^2}{2(2\pi)^3} \left(\frac{m}{E(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)} \right) \left(\frac{m^2}{\omega(k_1)\omega(k_2)E(p_1)E(p_2)} \right)^{1/2} \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_1 - \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \times \\ & \times \sum_{r=1}^2 \frac{(\bar{w}^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_5 v^r(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)) (\bar{v}^r(\vec{p}_1 + \vec{k}_1) \gamma_5 w^{s_1}(\vec{p}_1))}{E_0 - E(p_1) - \omega(k_1) - E(p_2) - \omega(k_2) - E(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)}. \quad (14.25) \end{aligned}$$

Знак минус перед матричным элементом следует из принципа Паули.

Аналогичным образом получим для фиг. 18, *d*

$$T_{fi}^{(2)d} = -\frac{G^2}{2(2\pi)^3} \left(\frac{m}{E(\vec{p}_1 - \vec{k}_2)} \right) \left(\frac{m^2}{\omega(k_1)\omega(k_2)E(p_1)E(p_2)} \right)^{1/2} \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_1 - \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \times \\ \times \sum_{r=1}^2 \frac{(\bar{w}^{s_2}(\vec{p}_2) \gamma_5 v^r(\vec{p}_1 - \vec{k}_2)) (\bar{v}^r(\vec{p}_1 - \vec{k}_2) \gamma_5 w^{s_1}(\vec{p}_1))}{E_0 - E(p_1) - E(p_2) - E(\vec{p}_1 - \vec{k}_2)}. \quad (14.26)$$

Это и есть четыре матричных элемента наимизшего порядка, которые описывают мезон-нуклонное рассеяние. Во втором порядке возможны также и другие процессы, включающие мезон и нуклон, например на фиг. 19, *a* и *b* изображен процесс, соответствующий собственной энергии нуклона. Эти процессы, однако, не вносят вклада в рассеяние, и потому мы не рассматриваем их здесь.



Фиг. 19.

Для получения поперечного сечения рассеяния мы можем теперь, используя соотношения (7.32) и (7.37), провести суммирование по двум промежуточным состояниям и вычислить необходимые квадратуры. Здесь мы не будем делать таких вычислений. Вместо этого рассмотрим упрощение матричного элемента, которое получается в пределе, когда импульс мезона мал по сравнению с массой нуклона в системе центра инерции ($\vec{k}_1 = -\vec{p}_1 = \vec{k}_i$; $\vec{k}_2 = -\vec{p}_2 = \vec{k}_f$). Мы не будем касаться здесь применимости борновского приближения к этой задаче, поскольку ниже обсудим такую форму теории (см. т. II, гл. 40—43), в которой этот вопрос обходится.

Вспомнив обсуждение в гл. 4, § 2, оператора γ_5 [соотношение (4.33) и ниже], заметим, что в нашем приближении движение нуклонов

в системе центра инерции является нерелятивистским, поэтому матричный элемент

$$\overline{w^r}(\vec{p}_1 + \vec{k}_1) \gamma_5 w^{s_1}(\vec{p}_1) = \overline{w^r}(0) \gamma_5 w^{s_1}(-\vec{k}_1)$$

мал, так как он описывает переход между состояниями с положительной энергией частиц, импульсы которых мало отличаются друг от друга. Согласно выражению (4.41 б), величина его равна $i\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_1/2m$, где $\vec{\sigma}$ описывает спин нуклона (теперь уже 2-мерная матрица). Аналогично матричный элемент $\overline{w^{s_2}}(\vec{p}_2) \gamma_5 w^r(\vec{p}_1 + \vec{k}_1)$ в системе центра инерции равен в нашем приближении $-i\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_r/2m$. Форма $i\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_r/2m$ матричного элемента, соответствующего испусканию или поглощению мезона нуклоном при переходе нуклона из состояния с *положительной* энергией в состояние с *положительной* энергией, отражает некоторые важные особенности псевдоскалярной связи: 1) при таком переходе мезон поглощается или испускается в P -состоянии и 2) взаимодействие ослаблено, поскольку оно содержит „малый“ оператор γ_5 (см. гл. 4, § 2). Таким образом, диаграммы на фиг. 19, *a* и *b* соответствуют процессам, ведущим главным образом к рассеянию P -волны мезона. В пределе при $k \ll m$ энергетический знаменатель в выражении (14.18) имеет вид (в системе центра инерции)

$$\begin{aligned} E_0 - E(\vec{p}_1 + \vec{k}_1) &= E(k_i) + \omega(k_i) - m \approx \\ &\approx m + \omega(k_i) - m = \omega(k_i), \end{aligned} \quad (14.27)$$

т. е. матричный элемент (14.18) принимает теперь вид, отвлекаясь от δ -функции,

$$\begin{aligned} T_{fi}^{(2)a} &= \frac{G^2}{2(2\pi)^3(2m)^2} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_r)(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_i)}{[\omega(k_i)\omega(k_r)]^{1/2}} \frac{1}{\omega(k_i)} = \\ &= \left(\frac{G\mu}{2m}\right)^2 \frac{1}{2\mu^2(2\pi)^3} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_r)(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_i)}{[\omega(k_i)\omega(k_r)]^{1/2}\omega(k_i)}. \end{aligned} \quad (14.28)$$

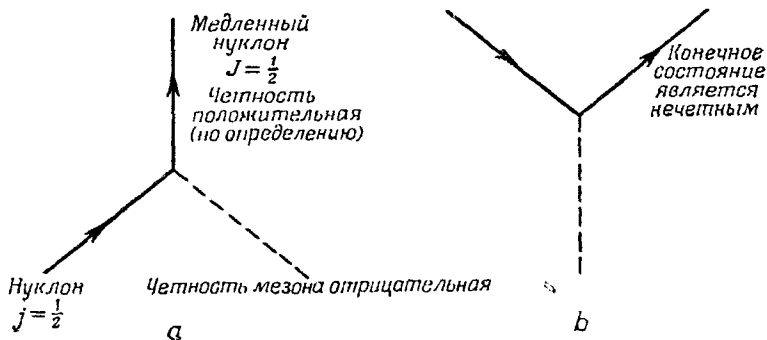
Второе выражение для матричного элемента показывает связь этого матричного элемента с матричными элементами для псевдоскалярной связи; это мы обсудим в гл. 26. Аналогично матричный элемент, представленный диаграммой на фиг. 19, *b*, в нашем приближении примет вид

$$T_{fi}^{(2)b} = \left(\frac{G\mu}{2m}\right)^2 \frac{1}{2\mu^2(2\pi)^3} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_i)(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_r)}{[\omega(k_i)\omega(k_r)]^{1/2}\omega(k_r)}. \quad (14.29)$$

С другой стороны, матричные элементы (14.25) и (14.26), описывающие рождение пары, велики, как это было указано в гл. 4, § 2. В нашем приближении эти матричные элементы являются

сферически симметричными, так что диаграммы на фиг. 18, *c* и *d* изображают процессы, которые в первую очередь ответственны за рассеяние *S*-волны. В т. II, гл. 41 и 42, мы увидим, что более точное рассмотрение задачи рассеяния без использования борновского приближения показывает, что сечение рассеяния *S*-волны значительно занижено по сравнению с сечением, вычисленным в борновском приближении, в то время как сечение *P*-рассеяния завышено.

В заключение этого параграфа обсудим качественно, следуя Чу [81], почему в пределе при $k \ll t$ диаграммы на фиг. 18, *a* и *b*



Ф и г. 20.

изображают главным образом *P*-рассеяние, а диаграммы на фиг. 18, *c* и *d* — *S*-рассеяние. Причина, по существу, заключается в следующем. В системе центра инерции нуклон движется весьма медленно по сравнению с мезоном, обладающим энергией $\omega(k) \ll t$. Поэтому в первом приближении можно полностью пренебречь движением нуклона. Рассмотрим теперь, как выполняются законы сохранения углового момента и четности в применении к двум различным типам процессов поглощения мезонов, соответствующим фиг. 20, *a* и *b*. Если считать совершенно произвольно внутреннюю четность нуклона в *S*-состоянии положительной, то четность антинуклона будет отрицательной. Поэтому четность системы после поглощения мезона будет положительной в случае рассеяния нуклона (фиг. 20, *a*) и отрицательной — в случае рождения пары нуклон — антинуклон. Если рассматриваемый мезон является псевдоскалярным, то четность системы перед поглощением будет положительной или отрицательной в зависимости от того, находится мезон в *P*- или *S*-состоянии соответственно. Поэтому псевдоскалярный мезон может быть поглощен только в нечетном состоянии в случае, изображенном на фиг. 20, *a*, и только в четном — в случае, изображенном на фиг. 20, *b*. Далее, поскольку нуклон находится в *S*-состоянии (фиг. 20, *a*) как

до, так и после поглощения мезона, то поглощаемый мезон должен находиться в P -состоянии. Аналогично (фиг. 20, b) мезон должен поглощаться, находясь в S -состоянии (с отрицательной четностью).

§ 3. S -матрица

В предыдущем параграфе был вычислен матричный элемент рассеяния мезона нуклоном в наинизшем приближении. Можно спросить, как должен выглядеть матричный элемент T_{if} в высших приближениях, т. е. когда рассматривается несколько промежуточных состояний. В дальнейшем мы будем интересоваться и существенно более сложными процессами, такими как рассеяние бозона несколькими фермионами. Таким образом, представляло бы значительный интерес построение матрицы (так называемой S -матрицы), элементы которой между определенными начальным и конечным состояниями соответствовали бы вероятностям перехода между этими состояниями. Такая матрица рассеяния впервые была введена Уилером [528] при рассмотрении структуры ядра и задачи рассеяния. Она была снова подробно исследована Гейзенбергом [230, 231] в связи с попыткой построения теории элементарных частиц.

Соображения, которые привели Гейзенберга к рассмотрению S -матрицы (Гейзенберг [223, 229]), связаны с тем, что, по его убеждению, трудность с расходимостью, присущая всем релятивистским теориям поля, может быть устранена введением новой фундаментальной постоянной, имеющей размерность длины. Эта гипотеза о фундаментальной длине была постулирована Гейзенбергом [223], Амбарцумяном и Иваненко [4], а также Марчем [320—324] и др. Гейзенберг полагал, что эта новая постоянная сыграет ту же роль в ограничении квантовой теории поля, какую сыграла постоянная Планка в ограничении применения обычной квантовой механики к атомным системам.

В обычной квантовой механике атомная система полностью определена гамильтонианом H системы. Однако наличие гамильтониана, который фигурирует в уравнении Шредингера $H\Psi = i\hbar\Psi$, означает возможность непрерывного смещения волновых функций во времени, что, по-видимому, противоречит существованию фундаментальной длины. Поэтому Гейзенберг вынужден был отказаться от уравнения Шредингера и понятия гамильтониана. Пытаясь выяснить, какого типа операторы и функции должны заменить эти понятия, он пришел к вопросу, какие величины в нынешней формулировке теории поля останутся физически наблюдаемыми в будущей „правильной“ теории, т. е. какие из физически наблюдаемых величин не зависят от существования минимальной длины. В частности, Гейзенберг рассматривал следующие физически наблюдаемые величины, которые обязательно должны описываться любой теорией:

- 1) энергию и импульс свободной частицы;

2) дискретные уровни энергии стационарной замкнутой системы;
 3) асимптотическое поведение волновых функций в процессах рассеяния, испускания и поглощения, и, следовательно, вероятность этих процессов, т. е. их поперечные сечения.

Чтобы положить поперечные сечения процессов и другие физически наблюдаемые величины (которые можно легко вычислить из гамильтониана, если он существует) в основу новой теории, Гейзенберг ввел некоторую унитарную матрицу S (характеристическую матрицу), из которой, по его мнению, можно получить вероятности перехода и положения связанных состояний. В своей оригинальной статье он определил S -матрицу с помощью решения стационарной задачи рассеяния. Обычное решение Ψ стационарной задачи в этом случае асимптотически ведет себя следующим образом:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi = \Psi_1 + \Psi_2,$$

где Ψ_1 — функция, описывающая падающую волну, а Ψ_2 описывает рассеянную волну. Тогда S -матрица определяется как оператор, который, действуя на функцию, описывающую падающую волну, превращает последнюю в функцию, которая описывает рассеянную волну, т. е.

$$\Psi_2 = S\Psi_1.$$

Гейзенберг полагал, что в будущей теории S -матрица примет на себя роль, которую играет теперь гамильтониан. Гейзенберговская теория S -матрицы была развита дальше Мёллером [341, 342], Штюкельбергом [467—470] и др.¹⁾ Связь между S -матрицей в обычной квантовой теории и S -матрицей, используемой для вычисления сечения и других физически наблюдаемых величин, обсуждалась во многих работах, в частности Липманом и Швингером [307]. Превосходный обзор применений S -матрицы к теории рассеяния дали Гелл-Манн и Гольдбергер [205].

На сегодняшний день, вообще говоря, ясно, что теория, содержащая только S -матрицу, не является достаточно полной. В частности, время не должно было бы больше появляться в этой теории, а это является уже довольно сильным ограничением выводов, получаемых из теории. Далее, с практической точки зрения, мы не можем больше рассматривать введение фундаментальной длины как метод исключения расходимости, принимая во внимание успех теории перенормировок. Тем не менее S -матрица играла центральную роль в развитии и успехах теории поля за последнее время.

Таким образом, фейнмановская квантовая электродинамика (Фейнман [168, 169]) представляет собой типичную теорию S -матрицы.

¹⁾ Обсуждение и ссылки, относящиеся к периоду до 1946 г., см. в статье Вентцеля [524].

Однако она обладает многими преимуществами по сравнению с ее прежней формулировкой, данной Гейзенбергом и др. Самое важное из них заключается в том, что эта теория не просто дает определение свойств S -матрицы, а описывает рецепт для реального вычисления ее и показывает, что такое вычисление может быть проведено в большинстве случаев. Кроме того, она много дает нам для понимания строения релятивистской теории поля. Далее, так как все матричные элементы этой теории ковариантны, то устранение расходимостей можно провести легко и однозначно.

Связь фейнмановского формализма S -матрицы с более обычной формой релятивистской квантовой теории описана в двух статьях Дайсона [126, 127], а также самого Фейнмана [170, 171] на основе лагранжевой формулировки квантовой механики. Чтобы уяснить формализм Фейнмана—Дайсона, мы рассмотрим сначала основные черты ковариантного формализма.

КОВАРИАНТНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

§ 1. Представление взаимодействия

Дайсоновское доказательство эквивалентности двух форм теории основано на переходе к представлению взаимодействия (IR). Это представление, впервые введенное Штюкельбергом [461, 466, 467] и широко применявшееся Томонага [486] и его сотрудниками (Коба и др. [279, 280], Канэсава [261, 262]) и Швингером [438, 439], можно получить унитарным преобразованием обычного уравнения Шредингера

$$(H_0 + H_I) \Phi(t) = i\hbar \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t}. \quad (15.1)$$

Здесь H_0 — гамильтониан невзаимодействующих полей, H_I — гамильтониан, описывающий взаимодействие между этими полями. Как указывалось выше (гл. 13 и 14), вектор состояния Φ в отсутствие взаимодействия ($H_I = 0$) описывает распространение в пространстве заданного постоянного числа свободных частиц с определенным импульсом и спином, не взаимодействующих между собой. Оператор H_I описывает взаимодействие этих частиц друг с другом и самих с собой.

Напишем теперь

$$\Psi(t) = e^{+iH_0 t/\hbar} \Phi(t). \quad (15.2)$$

Используя равенство (15.1) и (15.2), легко убедиться в том, что $\Psi(t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = e^{+iH_0 t/\hbar} H_I e^{-iH_0 t/\hbar} \Psi(t), \quad (15.3a)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H_I^{(IR)}(t) \Psi(t), \quad (15.3b)$$

где

$$H_I^{(IR)}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H_I e^{-iH_0 t/\hbar}$$

— оператор энергии взаимодействия в новом представлении. Этот оператор явно зависит от времени в противоположность шредингеровскому оператору H_I , который от времени не зависел. Вообще оператор $Q_{IR}(t)$ в представлении взаимодействия связан со шредингеровским оператором Q_S следующим образом:

$$Q_{IR}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} Q_S e^{-iH_0 t/\hbar}. \quad (15.4)$$

Отсюда следует, что в представлении взаимодействия зависимость операторов от времени определяется гамильтонианом свободного поля, так как, дифференцируя равенство (15.4), получаем

$$i\hbar \frac{\partial Q_{IR}(t)}{\partial t} = [Q_{IR}(t), H_0] \quad (15.5)$$

(заметим, что $H_0^{IR} = H_0^S$). Таким образом, в представлении взаимодействия операторы поля удовлетворяют уравнениям, описывающим свободные поля, в то время как зависимость от времени вектора состояния $\Psi(t)$ определяется, согласно соотношению (15.36), лишь энергией взаимодействия $H_I^{IR}(t)$.

Если мы рассмотрим, например, скалярную мезонную теорию с простой прямой связью, то в шредингеровском представлении гамильтониан свободных полей будет иметь вид

$$H_0 = \int d^3x \left\{ \bar{\psi}(\vec{x}) \left(\frac{1}{i} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m \right) \psi(\vec{x}) + \frac{1}{2} \pi^2(\vec{x}) + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2(\vec{x}) + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2(\vec{x}) \right\}, \quad (15.6)$$

а гамильтониан взаимодействия

$$H_I = G \int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}) \Gamma \psi(\vec{x}) \varphi(\vec{x}). \quad (15.7)$$

После перехода к представлению взаимодействия операторы поля $\psi_{IR}(\vec{x}, t)$, $\varphi_{IR}(\vec{x}, t)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(-i\vec{\nabla} + m)\psi_{IR}(\mathbf{x}) = 0, \quad (15.8)$$

$$(\square + \mu^2)\varphi_{IR}(\mathbf{x}) = 0, \quad (15.9)$$

и соотношение (15.3) теперь гласит

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = G \int_{ct=x_0} d^3x \bar{\psi}_{IR}(\mathbf{x}) \Gamma \psi_{IR}(\mathbf{x}) \varphi_{IR}(\mathbf{x}) \Psi(t), \quad (15.10)$$

т. е. в скалярной мезонной теории гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия имеет вид

$$H_I^{(IR)}(t) = G \int_{ct=x_0} d^3x \bar{\psi}_{IR}(\mathbf{x}) \Gamma \psi_{IR}(\mathbf{x}) \varphi_{IR}(\mathbf{x}). \quad (15.11)$$

Все операторы в правой части равенства (15.11) написаны в представлении взаимодействия и поэтому явно зависят от времени.

Преимущество представления взаимодействия обусловлено тем, что операторы поля удовлетворяют уравнениям свободного поля, поэтому инвариантные перестановочные соотношения можно написать для всех моментов времени. Это представление позволяет обобщить уравнение (15.3), сделав его ковариантным. Как было установлено

выше, уравнение (15.3) не является ковариантным, так как при определении входящей в него производной по времени $\partial/\partial t$ предусматривается выбор специальной лоренцовской системы координат.

Указанное обобщение содержится во введении понятия произвольной пространственно-временной поверхности вместо „плоской“ поверхности $t = \text{const}$. Единственное условие, которому должна удовлетворять указанная поверхность, заключается в том, что нормаль к ней в любой точке \mathbf{x} , $n_\mu(\mathbf{x})$ является времени-подобной, т. е. $n_\mu(\mathbf{x})n^\mu(\mathbf{x}) > 0$. Это означает, что никакие две точки поверхности не могут быть связаны световым сигналом, или, другими словами, любые две точки на этой поверхности разделены пространственно-подобным интервалом. Обозначим такую поверхность символом σ . Далее, каждой точке \vec{x} на этой поверхности можно сопоставить время $t(\vec{x})$, называемое локальным временем точки. В пределе, когда поверхность становится плоской, все точки имеют одинаковое время t , равное координате плоскости $t = \text{const}$. Теперь мы в состоянии естественным образом обобщить и $\Psi(t)$, записав эту функцию в виде $\Psi[t(\vec{x})]$. Далее, мы можем рассматривать основное уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H_I(t) \Psi(t) \quad (15.12)$$

как результат суммирования бесконечного ряда уравнений, полученных введением локального времени для каждой точки пространственно-подобной поверхности. Если гамильтониан взаимодействия в общем случае выразить как сумму по малым трехмерным ячейкам ΔV пространственно-подобной поверхности σ , т. е.

$$H_I = \sum_{\sigma} \mathcal{H}_I(\mathbf{x}) \Delta V, \quad (15.13)$$

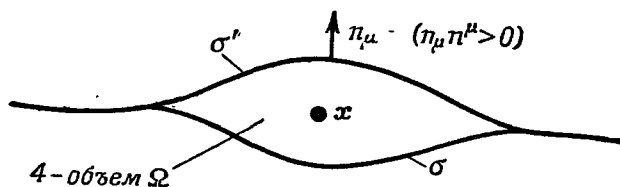
то уравнение, которое имеет место в малой ячейке вокруг пространственно-временной точки \vec{x} , $t(\vec{x})$, можно записать в виде

$$i\hbar \frac{\partial \Psi[t(\vec{x})]}{\partial t(\vec{x})} = \mathcal{H}_I(\mathbf{x}) \Delta V \Psi[t(\vec{x})]. \quad (15.14)$$

Полученное уравнение представляет собой обобщение уравнения (15.12). Итак, если вариация $\Psi(t)$, соответствующая жесткому бесконечно малому перемещению поверхности $t = \text{const}$ как целого, определяется интегралом $\int_t \mathcal{H}_I(\mathbf{x}) d^3x$, то становится очевидным,

что вариация $\Psi[t(\vec{x})]$ относительно точки \mathbf{x} будет определяться плотностью энергии взаимодействия $\mathcal{H}_I(\mathbf{x}) \Delta V$ в бесконечно малом интервале вокруг \mathbf{x} .

Далее, поскольку произведение $\Delta V \Delta t(\vec{x})$ является инвариантом, то напрашивается следующая инвариантная процедура дифференцирования. Рассмотрим функцию пространственно-подобной поверхности $\Psi[t(\vec{x})] = \Psi(\sigma)$. Сравним затем величины этих функций на



Фиг. 21.

двух пространственно-подобных поверхностях σ и σ' , которые отличаются на бесконечно малую величину в окрестности пространственно-временной точки x (см. фиг. 21). Определим теперь инвариантную операцию $\delta/\delta\sigma(x)$ как

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \Psi(\sigma) = \lim_{\Delta t \Delta V \rightarrow 0} \frac{\Psi[t(\vec{x}) + \Delta t(\vec{x})] - \Psi[t(\vec{x})]}{c \int_{\Delta V} d^3x \Delta t(\vec{x})}, \quad (15.15a)$$

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \Psi(\sigma) = \lim_{\Delta t \Delta V \rightarrow 0} \frac{\Psi(\sigma') - \Psi(\sigma)}{c \Delta t(\vec{x}) \Delta V}, \quad (15.15b)$$

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \Psi(\sigma) = \lim_{\Omega(x) \rightarrow 0} \frac{\Psi(\sigma') - \Psi(\sigma)}{\Omega(x)}. \quad (15.15b)$$

Здесь $\Omega(x)$ — объем, заключенный между поверхностью σ и σ' , причем σ' означает пространственно-подобную поверхность, полученную малой деформацией σ вблизи точки x . В пределе $\Omega(x)$ стягивается в точку x . Поэтому уравнение (15.14) можно переписать в виде

$$i\hbar c \frac{\delta\Psi(\sigma)}{\delta\sigma(x)} = \mathcal{H}_I^*(x) \Psi(\sigma). \quad (15.16)$$

Это уравнение уже ковариантно, так как оператор \mathcal{H}_I — инвариант в случае связи без производной (см. ниже замечания для случая связи с производной) и так как при определении пространственно-подобной поверхности не требуется какой-либо определенной лоренцевской системы отсчета. Поэтому уравнение движения системы можно переписать без указания системы координат, к которой оно относится. Уравнение (15.16) обычно называют уравнением Томагга — Швингера.

Для существования решений уравнения (15.16) должно удовлетворяться следующее условие интегрируемости:

$$\frac{\delta^2 \Psi(\sigma)}{\delta \sigma(\mathbf{x}) \delta \sigma(\mathbf{x}')} - \frac{\delta^2 \Psi(\sigma)}{\delta \sigma(\mathbf{x}') \delta \sigma(\mathbf{x})} = 0. \quad (15.17)$$

Это условие, по существу, представляет собой ограничение области изменения поверхности $\sigma(\mathbf{x})$. Кроме того, условие (15.17) означает, что

$$[\mathcal{H}_I(\mathbf{x}), \mathcal{H}_I(\mathbf{x}')] = 0 \quad (15.18)$$

для точек \mathbf{x} и \mathbf{x}' , лежащих на пространственно-подобной поверхности σ . В последующих параграфах мы покажем, что инвариантные перестановочные соотношения для операторов поля таковы, что соотношение (15.18) автоматически удовлетворяется для всех взаимодействующих полей со связью без производной. Когда плотность лагранжиана взаимодействия содержит производные по времени потенциалов, описывающих поле (как в случае взаимодействия заряженного бозонного поля с электромагнитным), то необходимо некоторое обобщение описанных выше методов. В этом случае, чтобы удовлетворялось условие интегрируемости (см., например, работу Кролла [293] и Мэттьюса [326]), плотность гамильтониана взаимодействия должна явно зависеть от поверхности. Вообще, условие интегрируемости и вытекающее из него соотношение (15.18) означают, что решение существует только тогда, когда поверхность σ является пространственно-подобной, так как, вообще говоря, соотношение (15.18) не выполняется, если \mathbf{x} и \mathbf{x}' разделены времени-подобным интервалом. Кроме того, они обеспечивают условие: когда пространственно-подобная поверхность является плоской ($t = \text{const}$), то любое решение уравнения (15.16) является также решением уравнения (15.12).

В нашей работе мы не будем пользоваться явным видом этих поверхностей. Во многих случаях указанные пространственно-подобные поверхности не применяются, хотя, конечно, они являются физически более реальными, чем плоские пространственно-подобные поверхности $t = \text{const}$. Физически маловероятным является предположение, что эрмитовские операторы поля, определенные точно в пространственно-временной точке, существуют и могут быть измерены в обычном квантово-механическом смысле. Действительно, Бор и Розенфельд [47, 48] в своих классических работах по вопросу измеримости электромагнитных полей уже показали, что измеримыми являются лишь средние по малому объему 4-пространства значения операторов поля. Связь между этими ограничениями измеримости и проблемой расходимостей собственного заряда и собственной энергии в релятивистских теориях поля до сих пор еще не установлена. Однако известно (Гейзенберг [227], Штукельберг [475], Штукельберг и Грин [476], Коринальдези [91, 92]), что в теорию вводятся еще и „граничные расходимости“, если пространственно-

временной объем Ω , в котором происходит рассеяние или производится измерение флуктуаций поля или распределения заряда — тока, имеет резкие пространственно-временные границы.

§ 2. Ковариантные перестановочные соотношения

Большой прогресс, достигнутый за последние годы при изучении релятивистских теорий полей, обязан, в частности, тому, что все расчеты удалось провести таким образом, что в каждой стадии проявлялась релятивистская инвариантность теории. Это дало возможность ввести представление взаимодействия и вместе с ним — инвариантные перестановочные соотношения. Здесь мы кратко их изучим.

Рассмотрим в первую очередь случай скалярного бозонного поля. В гл. 13 мы видели, что в шредингеровском представлении независимый от времени оператор поля $\varphi(\vec{x})$ разлагается в интеграл по операторам рождения и уничтожения частиц $a^+(\vec{k})$ и $a(\vec{k})$ следующим образом:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} (a^+(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}), \quad (15.19)$$

где

$$[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (15.20a)$$

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = 0. \quad (15.20b)$$

Соответствующие операторы поля в представлении взаимодействия $\varphi_{IR}(\vec{x}, t)$ имеют вид

$$\varphi_{IR}(\vec{x}) = e^{iH_0 t} \varphi(\vec{x}) e^{-iH_0 t}, \quad (15.21)$$

где

$$H_0 = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k. \quad (15.22)$$

Мы снова вернулись к дискретным значениям k , чтобы упростить дальнейшее изложение. Для получения оператора $\varphi_{IR}(\vec{x}, t)$ в представлении взаимодействия мы должны вычислить члены вида $\exp(iH_0 t) (a_k^\dagger + a_{-k}) \exp(-iH_0 t)$.

Рассмотрим оператор уничтожения и напомним

$$a'_k = e^{iH_0 t} a_k e^{-iH_0 t}. \quad (15.23)$$

Далее, a_k коммутирует с $a_k^\dagger a_k$, при $k \neq k'$. Следовательно, достаточно рассмотреть выражение

$$a'_k = e^{i a_k^\dagger a_k \omega_k t} a_k e^{-i a_k^\dagger a_k \omega_k t}. \quad (15.24)$$

Чтобы вычислить оператор a'_k , представим его в виде

$$a'_k(\lambda) = e^{ia_k^\dagger a_k \omega_k t \lambda} a_k e^{-ia_k^\dagger a_k \omega_k t \lambda}, \quad (15.25)$$

так что

$$a'_k(1) = a'_k \quad (15.26)$$

и есть интересующий нас оператор, причем

$$a'_k(0) = a_k. \quad (15.27)$$

Дифференцируя равенство (15.25) по λ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{da'_k(\lambda)}{d\lambda} &= e^{iN_k \omega_k t \lambda} i\omega_k t [N_k, a_k] e^{-iN_k \omega_k t \lambda} = \\ &= -i\omega_k t a'_k(\lambda), \end{aligned} \quad (15.28)$$

так что

$$a'_k(1) = a'_k(0) e^{-i\omega_k t}, \quad (15.29a)$$

или

$$a'_k = a_k e^{-i\omega_k t}. \quad (15.29b)$$

Аналогичное вычисление, проведенное для оператора рождения частицы, приводит к соотношению

$$a_k^\dagger = a_k^\dagger e^{+i\omega_k t}, \quad (15.30)$$

так что

$$\begin{aligned} \varphi_{IR}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} (a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t)} + a^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t)}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} (a(\vec{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(\vec{k}) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (15.31)$$

В форме (15.31), как указано, величина $k_0 = \omega_k = +\sqrt{k^2 + \mu^2}$ положительна. Поэтому заметим, что зависимость операторов рождения и уничтожения, входящих в оператор $\varphi_{IR}(\mathbf{x})$, от частоты различна. Оператор рождения частицы a_k^\dagger умножается на $e^{i\omega_k t}$, т. е. зависит от отрицательных частот, в то время как оператор уничтожения частицы зависит от положительных частот. Это различие между ними лоренц-инвариантно. Действительно, оно позволяет инвариантным образом разложить оператор $\varphi_{IR}(\mathbf{x})$ на части, соответствующие положительным и отрицательным частотам¹⁾

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) + \varphi^{(-)}(\mathbf{x}), \quad (15.32)$$

¹⁾ Начиная с этого места, мы больше не будем писать индекса IR у операторов в представлении взаимодействия, поскольку зависимость этих операторов от x уже указывает на выбор представления. Кроме того, все последующее изложение вплоть до гл. 25 ведется лишь в представлении взаимодействия.

где

$$\varphi^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} a(\vec{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (15.33a)$$

и

$$\varphi^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} a^\dagger(\vec{k}) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (15.33b)$$

а также

$$(\varphi^{(-)}(\mathbf{x}))^\dagger = \varphi^{(+)}(\mathbf{x}). \quad (15.34)$$

Оператор $\varphi^{(+)}(\mathbf{x})$ является оператором уничтожения, а оператор $\varphi^{(-)}(\mathbf{x})$ — оператором рождения частицы.

Вакуум, который мы раньше характеризовали следующим условием: $a(\vec{k})\Phi_0 = 0$ при всех k , теперь обладает свойством

$$\varphi^{(+)}(\mathbf{x})\Phi_0 = 0. \quad (15.35)$$

Мы можем пользоваться одинаковыми символами для обозначения вакуума свободного поля в обоих представлениях, поскольку в шредингеровском представлении функция Φ_0 была собственной функцией гамильтониана H_0 с собственным значением $E_0 = 0$, поэтому $\exp(iH_0 t)\Phi_0 = \Phi_0$, т. е. Φ_0 описывает вакуум также и в представлении взаимодействия.

Теперь легко написать перестановочные соотношения для операторов в представлении взаимодействия, используя перестановочные соотношения (15.20a) и (15.20б)

$$\begin{aligned} [\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}')] &= \frac{\hbar c}{2(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{\sqrt{\omega_k}} \int_{k'_0 > 0} \frac{d^3k'}{\sqrt{\omega_{k'}}} \times \\ &\times \{ [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + [a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] \times \\ &\times e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \}, \quad (15.36) \end{aligned}$$

откуда

$$[\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}')] = \frac{\hbar c}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} (e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} - e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}), \quad (15.37a)$$

$$[\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}')] = i\hbar c \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \sin k_0(x_0 - x'_0), \quad (15.37b)$$

при этом всюду $k_0 = +\omega_k$.

¹⁾ Для удобства читателя мы включили сюда множитель $(\hbar c)^{1/2}$, на который умножается разложение (15.19), если не пользоваться системой атомных единиц, где $\hbar = c = 1$.

Если определить величину $\Delta(x-x')$ равенством

$$\Delta(x-x') = -\frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} (e^{-ik \cdot (x-x')} - e^{ik \cdot (x-x')}), \quad (15.38)$$

то перестановочные соотношения можно переписать в виде

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = i\hbar c \Delta(x-x'). \quad (15.39)$$

Функция Δ — инвариантна относительно замены $(x \rightarrow x+1)$, так как она является функцией лишь разности $x-x'$. Кроме того, равенство (15.38) можно переписать в форме, в которой более явно видна инвариантность $\Delta(x-x')$ по отношению к однородным лоренцовским преобразованиям. Для этого напомним, что

$$\delta(k^2 - \mu^2) = \frac{1}{2|k_0|} \{\delta(k_0 + \omega_k) + \delta(k_0 - \omega_k)\}, \quad (15.40)$$

поэтому равенство (15.38) можно написать в виде

$$\Delta(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k e^{-ik \cdot x} \delta(k^2 - \mu^2) \varepsilon(k), \quad (15.41)$$

где $\varepsilon(k) = k_0/|k_0|$, и поэтому равно $+1$ при $k_0 > 0$ и -1 при $k_0 < 0$. В последнем выражении k_0 пробегает как положительные, так и отрицательные значения. Множитель $\varepsilon(k)$, являющийся скаляром, введен для того, чтобы при интегрировании равенства (15.41) по k_0 в выражении (15.38) между двумя экспоненциальными множителями появлялся нужный знак (минус). Поэтому правая часть выражения (15.41) инвариантна относительно всех собственных преобразований Лоренца, поскольку $k \cdot x$, k^2 и d^4k являются скалярами. Следовательно,

$$\Delta(x) = \Delta(ax), \quad (15.42)$$

где $(a)^\mu_\nu = a^\mu_\nu$ — однородное лоренцовское преобразование.

Далее, соотношение (15.37) показывает, что при $x_0 = x'_0$, т. е. для равных моментов времени, этот коммутатор равен нулю. Это и требуется, так как мы помним, что в квантовой механике отсутствие коммутации двух эрмитовых операторов означает, что соответствующие им две физические величины невозможно одновременно измерить с произвольной степенью точности. С другой стороны, равенство коммутатора нулю позволяет одновременно диагонализировать эрмитовы операторы, и, таким образом, становится возможным одновременно точно измерить физически наблюдаемые величины, соответствующие этим операторам. Конечно, измерения величин, соответствующих эрмитовым операторам поля $\varphi(\vec{x}, t)$ и $\varphi(\vec{x}', t)$, не могут влиять друг на друга, поскольку, согласно теории относительности, две пространственно-временные точки x и x' невозможно

связать никаким сигналом. Принимая во внимание сказанное, ясно, что функция $\Delta(\mathbf{x})$ равна нулю не только для интервала $x_0 = 0$, но также и для любого пространственно-подобного интервала, т. е. при $x^2 < 0$. Это следует из релятивистской инвариантности, поскольку подходящим выбором лоренцовского преобразования всегда можно преобразовать пространственно-подобный вектор \mathbf{x} так, что его образ \mathbf{x}' в новой системе будет иметь компоненту $x'_0 = 0$. Из соотношения (15.42) теперь следует, что функция $\Delta(\mathbf{x})$ обязательно равна нулю в пространственно-подобных точках \mathbf{x} , если она равна нулю при $x_0 = 0$.

Выражение (15.37) также указывает, что $\Delta(\mathbf{x})$ является нечетной функцией \mathbf{x} . Но так и должно быть, поскольку функция Δ пропорциональна коммутатору; далее, мы имеем

$$[\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}')] = -[\varphi(\mathbf{x}'), \varphi(\mathbf{x})], \quad (15.43a)$$

и поэтому

$$\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\Delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (15.43b)$$

Указанные свойства функции $\Delta(\mathbf{x})$ можно объединить, написав

$$\Delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x^2 \text{ соответствует пространственно-подобному интервалу,} \\ \varepsilon(\mathbf{x}) f(x^2) & \text{внутри светового конуса (} x^2 \text{ соответствует времени-подобному интервалу).} \end{cases}$$

Функция Δ внутри светового конуса определяется следующим требованием: она должна быть нечетной и инвариантной. Единственными инвариантами, которые можно построить из координат \mathbf{x} , являются x^2 — скалярная длина и $\varepsilon(\mathbf{x})$ — знаковая функция времени (заметим, что функция $\varepsilon(\mathbf{x})$ определена и имеет смысл лишь внутри светового конуса!). Последнее соответствует утверждению, что абсолютное прошлое и абсолютное будущее имеют инвариантный смысл. Следовательно, единственная нечетная инвариантная функция координат внутри светового конуса имеет вид $\varepsilon(\mathbf{x}) f(x^2)$.

Заметим далее, что рассмотренные нами ранее перестановочные соотношения в шредингеровском представлении для $\pi(\vec{x})$ и $\varphi(\vec{x})$ включены в соотношение (15.37). Поскольку, согласно выражению (15.21), шредингеровское представление и представление взаимодействия совпадают при $t = 0$ и, учитывая, что

$$\pi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)_{t=0},$$

имеем

$$\begin{aligned} [\pi(\vec{x}), \varphi(\vec{x}')] &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}')] \right\}_{x_0=x'_0=c} = i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right\}_{x_0=x'_0=0} = \\ &= \frac{-i\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \cos k_0(x_0 - x'_0) \Big|_{x_0=x'_0=0} = -i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (15.44)$$

Ясно, что в это соотношение также включены и перестановочные соотношения (13.18) для равных моментов времени, поскольку результат (15.44) получен лишь при одном условии $x_0 = x'_0$.

Наконец, из выражения (15.41) видно, что функция $\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$(\square_{\mathbf{x}} + \mu^2)\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \\ = \frac{+i}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ik \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} (k^2 - \mu^2) \delta(k^2 - \mu^2) \varepsilon(k) = 0, \quad (15.45)$$

так как $x\delta(x) = 0$. Это должно иметь место также и потому, что действуя на левую часть равенства (15.39) оператором $(\square_{\mathbf{x}} + \mu^2)$, мы получаем

$$(\square_{\mathbf{x}} + \mu^2)[\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}')] = [(\square + \mu^2)\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}')] = \\ = (\square_{\mathbf{x}} + \mu^2)\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0, \quad (15.46)$$

так как $\varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона.

Поскольку функция $\Delta(\mathbf{x})$ удовлетворяет гиперболическому дифференциальному уравнению второго порядка, то она однозначно определяется дифференциальным уравнением

$$(\square + \mu^2)\Delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (15.47a)$$

и двумя начальными условиями при $x_0 = 0$:

$$a) \quad \Delta(\vec{x}, x_0 = 0) = 0, \quad (15.47б)$$

$$б) \quad \left(\frac{\partial \Delta(\vec{x}, x_0)}{\partial x_0}\right)_{x_0=0} = -\delta(\vec{x}). \quad (15.47в)$$

Функцию $\Delta(\mathbf{x})$ можно выразить с помощью известных функций, вычисляя интеграл в равенстве (15.37б) (Дирак [107], см. также книгу Шиффа [429]). Положив $|\vec{x}| = r$ и $k_0 = +\sqrt{k^2 + \mu^2}$, найдем

$$\Delta(\vec{x}, x_0) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \sin k_0 x_0 = \\ = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} \frac{\sin kr \sin k_0 x_0}{kr} = \\ = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} \cos kr \sin k_0 x_0 = \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(r, x_0). \quad (15.48a)$$

Делая замену $k = \mu \operatorname{sh} y$, получаем ¹⁾

$$F(r, x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} \cos kr \sin k_0 x_0 =$$

$$= \begin{cases} +J_0(\mu \sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{при } x_0 > r, \\ 0 & \text{при } -r < x_0 < r, \\ -J_0(\mu \sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{при } x_0 < -r. \end{cases} \quad (15.486)$$

Проведя указанные в соотношении (15.48а) дифференцирования, мы можем написать функцию $\Delta(\mathbf{x})$ в форме, в которой явно проявляются как ее ковариантные свойства, так и сингулярность (см. также дополнение к статье Швингера [439]):

$$\Delta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(\mathbf{x}) \left\{ \delta(\mathbf{x}^2) + \frac{\mu^2}{2} \theta(\mathbf{x}^2) \frac{J_1(\mu \sqrt{\mathbf{x}^2})}{\mu \sqrt{\mathbf{x}^2}} \right\}, \quad (15.49a)$$

где $\theta(y) = 1$ при $y > 0$ и $\theta(y) = 0$ при $y < 0$. Для малых \mathbf{x}^2 вблизи границы светового конуса имеет место следующее разложение ²⁾:

$$\Delta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(\mathbf{x}) \left\{ \delta(\mathbf{x}^2) + \frac{\mu^2}{4} \theta(\mathbf{x}^2) + \dots \right\}, \quad (15.496)$$

в нем опущены члены, исчезающие при $\mathbf{x}^2 \rightarrow 0$; следовательно, функция $\Delta(\mathbf{x})$ обладает δ -образной сингулярностью, а также конечным разрывом (скачком) на границе светового конуса.

Существует другая инвариантная функция $\Delta^{(1)}$, которая также удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, однако является четной.

$$\Delta^{(1)}(-\mathbf{x}) = \Delta^{(1)}(\mathbf{x}), \quad (15.50a)$$

$$(\square + \mu^2) \Delta^{(1)}(\mathbf{x}) = 0. \quad (15.506)$$

Ее интегральное представление имеет вид

$$\Delta^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3 k}{k_0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \cos k_0 x_0 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 k e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \delta(k^2 - \mu^2). \quad (15.51)$$

1) Напомним, что

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(z \operatorname{ch} \beta) d\beta.$$

2) Напомним, что функция Бесселя разлагается в степенной ряд

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{iz}{2}\right)^{2l} [l\Gamma(\nu + l + 1)]^{-1}.$$

Продельвая выкладки, аналогичные описанным выше для функции $\Delta(\mathbf{x})$, легко убедиться в том, что

$$\Delta^{(1)}(\vec{x}, x_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F_1(r, x_0), \quad (15.51a)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(r, x_0) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} \cos k_0 x_0 \cos kr = \\ &= \begin{cases} +N_0(\mu \sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{при } |x_0| > r, \\ -iH_0^{(1)}(i\mu \sqrt{r^2 - x_0^2}) & \text{при } r > |x_0|. \end{cases} \end{aligned} \quad (15.51b)^1$$

Отсюда следует, что $\Delta^{(1)}$ не исчезает вне светового конуса. На больших пространственно-подобных расстояниях (т. е. при $r \gg x_0$) $\Delta^{(1)}$ падает экспоненциально. Функцию $\Delta^{(1)}$ можно также записать в форме, аналогичной равенству (15.49a) (см. дополнение к статье Швингера [439]). Здесь мы приведем лишь ее представление вблизи светового конуса, чтобы показать присущие ей сингулярности:

$$\Delta^{(1)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi^2} \left\{ P \frac{1}{x^2} - \frac{\mu^2}{2} \ln \left[\frac{\gamma}{2} (\mu^2 |x^2|)^{1/2} \right] + \frac{\mu^2}{4} + \dots \right\}, \quad (15.51b)$$

где символ P означает, что при интегрировании этой функции вокруг сингулярной точки следует брать главное значение интеграла, и $\gamma = 0,577\dots$ означает постоянную Эйлера. Здесь снова опущены члены, исчезающие в пределе при $x^2 \rightarrow 0$.

В следующем изложении мы будем использовать перестановочные соотношения между $\varphi^{(+)}(\mathbf{x})$ и $\varphi^{(-)}(\mathbf{x}')$. Согласно соотношениям (15.20) и (15.33), они имеют вид

$$[\varphi^{(+)}(\mathbf{x}), \varphi^{(+)}(\mathbf{x}')] = [\varphi^{(-)}(\mathbf{x}), \varphi^{(-)}(\mathbf{x}')] = 0 \quad (15.52)$$

$$\begin{aligned} [\varphi^{(+)}(\mathbf{x}), \varphi^{(-)}(\mathbf{x}')] &= \frac{\hbar c}{2(2\pi)^3} \int_{k_j > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{-ik \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \\ &= i\hbar c \Delta^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (15.53)$$

и

$$\begin{aligned} [\varphi^{(-)}(\mathbf{x}), \varphi^{(+)}(\mathbf{x}')] &= -\frac{\hbar c}{2(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{ik \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \\ &= i\hbar c \Delta^{(-)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (15.54)$$

¹⁾ Напомним, что

$$N_0(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \cos(z \operatorname{ch} \beta).$$

где в соответствии с прежним условием мы определили функцию

$$\Delta^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (15.55)$$

как зависящую от положительных частот часть функции $\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Аналогично

$$\Delta^{(-)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (15.56)$$

Из определений (15.55) и (15.56) следует, что

$$\Delta^{(+)}(\mathbf{x}) + \Delta^{(-)}(\mathbf{x}) = \Delta(\mathbf{x}). \quad (15.57)$$

Подобным же образом

$$\Delta^{(+)}(\mathbf{x}) - \Delta^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \cos k_0 x_0 = -i\Delta^{(1)}(\mathbf{x}) \quad (15.58)$$

или, переписав несколько иначе,

$$\Delta^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\Delta(\mathbf{x}) - i\Delta^{(1)}(\mathbf{x})], \quad (15.59a)$$

$$\Delta^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\Delta(\mathbf{x}) + i\Delta^{(1)}(\mathbf{x})]. \quad (15.59b)$$

Функция $\Delta^{(1)}$ появляется, когда вычисляют среднее по вакууму величины $[\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})]_+$. А именно, используя определение волновой функции вакуума [соотношение (15.35)] и соотношение (15.34), находим

$$\begin{aligned} (\Phi_0, \{\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x})\} \Phi_0) &= 2(\Phi_0, \{\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})\} \Phi_0) - i\hbar c \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \\ &= 2(\varphi^{(-)}(\mathbf{x})\Phi_0, \varphi^{(-)}(\mathbf{y})\Phi_0) - i\hbar c \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \\ &= 2(\Phi_0, \varphi^{(+)}(\mathbf{x})\varphi^{(-)}(\mathbf{y})\Phi_0) - i\hbar c \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \\ &= i\hbar c [2\Delta^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})] = \\ &= \hbar c \Delta^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (15.60)$$

§ 3. Перестановочные соотношения для дираковских операторов

Аналогичное рассмотрение может быть проведено для дираковских операторов. Оно приводит к следующему выражению для этих операторов в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{m}{E(p)} \right)^{1/2} \times \\ &\times \sum_{r=1}^2 \{ b_r(\vec{p}) \vec{w}^r(\vec{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + d_r^\dagger(\vec{p}) \vec{v}^r(\vec{p}) e^{+i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \}. \end{aligned} \quad (15.61)$$

Ковариантные перестановочные соотношения имеют вид

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \bar{\psi}_\beta(\mathbf{x}')\} = (-\hat{\nabla}_\mathbf{x} + im)_{\alpha\beta} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; m) = -iS_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (15.62)$$

где $\Delta(\mathbf{x}; m)$ дается равенством (15.41) с заменой μ на m , а функция S определяется соотношением

$$S(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -(i\hat{\nabla}_\mathbf{x} + m)\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; m). \quad (15.63)$$

Следовательно,

$$-iS(\vec{x} - \vec{x}', 0) = \left(-\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\right)_{x'_0 = x_0} = +\gamma^0 \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (15.64)$$

как это и вытекает из рассмотренных выше перестановочных соотношений в шредингеровском представлении [равенство (13.112)]. Далее, поскольку функции $\psi_\alpha(\mathbf{x})$ удовлетворяют уравнению Дирака, мы должны получить уравнение

$$(i\hat{\nabla}_\mathbf{x} - m)S(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0, \quad (15.65)$$

которое удовлетворяется тождественно, так как, согласно соотношениям (15.63), (15.65) и (15.47),

$$(i\hat{\nabla} - m)(i\hat{\nabla} + m)\Delta(\mathbf{x}) = -(\square + m^2)\Delta(\mathbf{x}) = 0. \quad (15.66)$$

Как и в случае бозонного поля, части операторов, зависящие от положительных и отрицательных частот, отвечают операторам уничтожения и рождения частиц соответственно. Однако здесь

$$\psi^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{p_0 > 0} d^3p \left(\frac{m}{E(p)}\right)^{1/2} \sum_{r=1,2} b_r(\vec{p}) \omega^r(\vec{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (15.67)$$

— оператор уничтожения фермиона, а

$$\psi^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{p_0 > 0} d^3p \left(\frac{m}{E(p)}\right)^{1/2} \sum_{r=1,2} d_r^\dagger(\vec{p}) v^r(\vec{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (15.68)$$

— оператор рождения антифермиона. Аналогично

$$\bar{\psi}^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{p > 0} d^3p \left(\frac{m}{E(p)}\right)^{1/2} \sum_{r=1,2} b_r^\dagger(\vec{p}) \bar{\omega}^r(\vec{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (15.69)$$

— оператор рождения фермиона, а

$$\bar{\psi}^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{p_0 > 0} d^3p \left(\frac{m}{E(p)}\right)^{1/2} \sum_{r=1,2} d_r(\vec{p}) \bar{v}^r(\vec{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (15.70)$$

— оператор уничтожения антифермиона¹⁾. Волновая функция вакуума Φ_0 определяется теперь следующим образом:

$$\psi^{(+)}(\mathbf{x}) \Phi_0 = \bar{\psi}^{(+)}(\mathbf{x}) \Phi_0 = 0. \quad (15.71)$$

Перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения гласят:

$$\begin{aligned} [\psi^{(+)}(\mathbf{x}), \psi^{(-)}(\mathbf{x}')]_+ &= [\bar{\psi}^{(-)}(\mathbf{x}), \bar{\psi}^{(+)}(\mathbf{x}')]_+ = 0, \\ [\bar{\psi}^{(+)}(\mathbf{x}), \psi^{(+)}(\mathbf{x}')]_+ &= [\bar{\psi}^{(-)}(\mathbf{x}), \psi^{(-)}(\mathbf{x}')]_+ = 0, \end{aligned} \quad (15.72)$$

а

$$\begin{aligned} [\psi_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{x}), \bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(\mathbf{x}')]_+ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \int d^3p' \left(\frac{m}{E(p)} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{E(p')} \right)^{1/2} \times \\ &\times \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 [b_r(\vec{p}), b_s^{\dagger}(\vec{p}')]_+ \omega_{\alpha}^r(\vec{p}) \bar{\omega}_{\beta}^s(\vec{p}') e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{m}{E(p)} \sum_{r=1}^2 \omega_{\alpha}^r(\vec{p}) \bar{\omega}_{\beta}^r(\vec{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E(p)} (\hat{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = \\ &= (i\hat{\nabla}_{\mathbf{x}} + m)_{\alpha\beta} \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E(p)} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = \\ &= i(i\hat{\nabla}_{\mathbf{x}} + m)_{\alpha\beta} \Delta^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; m) = \\ &= -iS_{\alpha\beta}^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (15.73)$$

При выводе последнего выражения мы использовали равенства (7.32), (13.91) и (15.55). Аналогичная процедура для операторов античастиц приводит к соотношению

$$[\psi_{\alpha}^{(-)}(\mathbf{x}), \bar{\psi}_{\beta}^{(+)}(\mathbf{x}')]_+ = -iS_{\alpha\beta}^{(-)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (15.74)$$

где

$$S_{\alpha\beta}^{(-)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -(i\hat{\nabla}_{\mathbf{x}} + m)_{\alpha\beta} \Delta^{(-)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; m). \quad (15.75)$$

¹⁾ Заметим, что из соотношений (15.67) — (15.70) следует, что

$$\begin{aligned} \overline{\psi^{(+)}}(\mathbf{x}) &= \bar{\psi}^{(-)}(\mathbf{x}), \\ \overline{\psi^{(-)}}(\mathbf{x}) &= \bar{\psi}^{(+)}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Кроме того, если ввести зарядово-сопряженный оператор

$$\psi^c(\mathbf{x}) = C\bar{\psi}^T(\mathbf{x}),$$

то операторы рождения и уничтожения античастиц можно выразить с помощью зарядово-сопряженных операторов:

$$\begin{aligned} \psi^{(-)}(\mathbf{x}) &= C[\psi^c(+)(\mathbf{x})]^T, \\ \bar{\psi}^{(+)}(\mathbf{x}) &= [C^{-1}\psi^c(+)(\mathbf{x})]^T. \end{aligned}$$

При выводе равенств (15.74) и (15.75) мы использовали определение проекционных операторов для решений уравнения Дирака (7.37), отвечающих состояниям с отрицательными энергиями.

§ 4. Квантование электромагнитного поля

Если пользоваться лагранжианом Ферми (10.71), то электромагнитное поле будет описываться 4-потенциалом $A_\mu(x)$, который удовлетворяет следующему уравнению:

$$\square A_\mu(x) = 0. \quad (15.76)$$

Пока не наложено условие Лоренца, электромагнитное поле можно рассматривать как суперпозицию четырех скалярных полей, соответствующих различным μ , причем массы квантов полей равны нулю [напомним, однако, что компонента $\mu = 0$ дает отрицательный вклад в гамильтониан (10.73)]. Поэтому мы можем воспользоваться разложением скалярного поля (15.31) (помня при этом, что каждому трехмерному импульсу \vec{k} соответствуют *четыре* независимых решения уравнения электромагнитного поля) и написать

$$A_\mu(x) = \frac{(\hbar c)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \{ a^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\mathbf{x}} + a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\mathbf{x}} \}, \quad (15.77)$$

где $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})$ — единичные векторы поляризации, которые можно выбрать так, чтобы они образовывали ортонормированную систему

$$\varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon^{(\lambda')\mu} = g^{\lambda\lambda'}. \quad (15.78)$$

[Вспомним случай частиц со спином $1/2$; см. также соотношение (15.100).] Величина $g^{\lambda\lambda'}$ в выражении (15.78) представляет собой метрический тензор (2.26). Сумма по (λ) в соотношении (15.77) есть обычная сумма (а не лоренц-инвариантное скалярное произведение) по четырем решениям, соответствующим различным поляризациям. В квантовой теории $a^{(\lambda)}(\vec{k})$ становится оператором уничтожения фотона с импульсом \vec{k} и поляризацией (λ) , $a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})$ — оператором рождения такого же фотона, а $N^{(\lambda)}(\vec{k}) = a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k})$ — оператором числа фотонов с импульсом \vec{k} и поляризацией λ .

В дальнейшем мы не будем иметь дела с состояниями с различной поляризацией. Поэтому мы будем пользоваться лишь величинами

$$A_\mu(\vec{k}) = \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) \quad (15.79a)$$

и

$$A_\mu^\dagger(\vec{k}) = \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}), \quad (15.79b)$$

причем в классической теории условие поперечности волн

$$k^\mu A_\mu(\vec{k}) = 0$$

ограничивает физически возможные состояния двумя состояниями, соответствующими поперечным волнам.

В представлении Шредингера импульс, канонически сопряженный оператору $A_\mu(\vec{x})$, имеет вид

$$\pi^\mu(\vec{x}) = -A^{\mu,0}(\vec{x}) = -\left(\frac{\partial A^\mu(\mathbf{x})}{\partial x_0}\right)_{x_0=0}. \quad (15.80)$$

Следовательно, канонические перестановочные соотношения гласят

$$[\pi^\mu(\vec{x}), A_\nu(\vec{x}')] = -i\hbar\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta_\nu^\mu, \quad (15.81)$$

$$\begin{aligned} -[A^{\mu,0}(\vec{x}), A_\nu(\vec{x}')] &= -i\hbar\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta_\nu^\mu = \\ &= \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} A^\mu(\vec{x}, t), (A_\nu(\vec{x}', t)) \right] \right\}_{t=0}. \end{aligned} \quad (15.82)$$

Рассуждения, аналогичные тем, которые привели нас к перестановочным соотношениям (15.39) для скалярного поля, теперь показывают, что ковариантные перестановочные соотношения для потенциалов электромагнитного поля имеют вид

$$[A_\mu(\mathbf{x}), A_\nu(\mathbf{x}')] = -i\hbar c g_{\mu\nu} D(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (15.83)$$

где функция $D(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ равна $\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ при $\mu = 0$. Отметим отличие в знаках в правой части соотношения (15.83) у временной и пространственных компонент этой функции.

В явном виде при $|\vec{x}| = r$ функция $D(\mathbf{x})$ выглядит следующим образом (см. работы Иордана и Паули [248]):

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} e^{+ik \cdot \vec{x}} \frac{\sin k_0 x_0}{k_0} d^3k = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin kr \sin kx_0}{kr} k dk = \\ &= -\frac{1}{4\pi r} \{\delta(r - x_0) - \delta(r + x_0)\} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}^2), \end{aligned} \quad (15.84)$$

а сингулярная функция $D^{(1)}(\mathbf{x})$ ¹⁾ —

$$\begin{aligned} D^{(1)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \cos k_0 x_0 = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin kr \cos kx_0}{kr} k dk = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} \left\{ P \frac{1}{r-x_0} + P \frac{1}{r+x_0} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} P \frac{1}{x^2}, \quad (15.85) \end{aligned}$$

где символ P означает, что при интегрировании этого выражения вокруг сингулярной точки $x^2=0$ следует брать главное значение интеграла. Нетрудно проверить, что операторы $A_\mu(\vec{k})$ в соотношении (15.79) удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[A_\mu(\vec{k}), A_\nu^+(\vec{k}')] = -g_{\mu\nu} \delta(\vec{k} - \vec{k}'); \quad (15.86)$$

при этом другие коммутаторы равны нулю.

В классической теории поля условие Лоренца $A_\mu^{\text{tr}}(\mathbf{x})=0$ обеспечивает соответствие уравнений (15.76) уравнениям Максвелла, а также положительную определенность полной энергии поля. В квантовой теории, однако, условие Лоренца нельзя накладывать в виде операторного условия, так как это противоречило бы перестановочным соотношениям (15.83), ибо

$$\left[\frac{\partial A_\mu(\mathbf{x})}{\partial x_\mu}, A_\nu(\mathbf{x}') \right] = -i\hbar c \frac{\partial D(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x^\nu} \neq 0.$$

Чтобы обойти эту трудность, соотношения (15.83) и (15.86) писали до 1949 г. отдельно для пространственных и временной компонент A_μ . Таким образом, используя дополнительное условие $A_\mu^{\text{tr}}\Psi=0$ для физически возможных состояний Ψ поля, можно исключить продольную и времени-подобную компоненту вектора A_μ . Роль динамических переменных будут играть оставшиеся поперечные компоненты 4-потенциала; только они и квантуются. При наличии

¹⁾ Заметим, что

$$P \frac{1}{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos kx}{x},$$

или, что эквивалентно,

$$i \int_0^\infty \exp(-ikx) dk = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x).$$

зарядов это соответствует отделению *мгновенного* кулоновского взаимодействия от запаздывающего поперечного электромагнитного взаимодействия. Однако такая процедура не является релятивистски инвариантной, поскольку для движущегося наблюдателя кулоновское взаимодействие (продольные волны) и поперечные волны снова смешиваются.

Совсем недавно Гупта [216] и Блейлер [41] развили метод, который основан на использовании одинаковым образом всех четырех потенциалов и, следовательно, всегда остается явно релятивистски инвариантным. Самым важным в этом методе является выяснение того обстоятельства, что рассмотрение дополнительного условия

$$A_{\mu}^{(+) }(\mathbf{x})\Psi = 0 \quad (15.87)$$

как уравнения является слишком жестким. Действительно, если мы наложим дополнительное условие (15.87) и будем рассматривать его как уравнение, то не найдется таких состояний, волновые функции Ψ которых удовлетворяли бы этому условию. Согласно условию (15.87), определенные сорта фотонов не только не могут присутствовать в поле, но, более того, эти фотоны не могут также и излучаться. Последнее обстоятельство несколько трудно для понимания. Гупта и Блейлер предложили изменить условие Лоренца так, чтобы оно содержало лишь оператор *уничтожения* частицы, т. е.

$$\left(\frac{\partial A_{\mu}^{(+)}(\mathbf{x})}{\partial x_{\mu}} \right) \Psi = 0 \quad (15.88)$$

для любого физически реализуемого состояния Ψ электромагнитного поля. Это является достаточным для того, чтобы обеспечить поперечную поляризацию фотонов и не нарушить соответствия с классической электродинамикой. Далее, если обозначить амплитуду вероятности обнаружения в состоянии Ψ одного фотона с импульсом $\mathbf{k} = \{k_0, \vec{k}\}$ (при $k, k^0 = 0$) и поляризацией μ через

$$f_{\mu}^{(1)}(\vec{k}) = (\Phi_0, A_{\mu}(\vec{k})\Psi), \quad (15.89)$$

то, согласно дополнительному условию (15.88), получим

$$k^{\mu} f_{\mu}^{(1)}(\vec{k}) = 0. \quad (15.90)$$

Это обеспечивает поляризацию фотонов перпендикулярно к направлению движения, что можно показать следующим образом. Напомним, что описание электромагнитного поля с помощью потенциалов является неоднозначным, т. е. можно всегда произвести калибровочное преобразование

$$A_{\mu}(\mathbf{x}) \rightarrow A_{\mu}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \Lambda(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu}}, \quad (15.91)$$

причем

$$\square \Delta(\mathbf{x}) = 0, \quad (15.92)$$

где Δ — числовая, неоператорная функция. Если фурье-образ функции $\Delta(\mathbf{x})$ обозначить через $\Delta(\mathbf{k})$, т. е.

$$\Delta(\mathbf{k}) = \int d^4k \Delta(\mathbf{x}) e^{-ik \cdot \mathbf{x}}, \quad (15.93)$$

то $\Delta(\mathbf{k})$ будет в действительности функцией лишь \vec{k} , так как, согласно выражению (15.92), фурье-образ $\Delta(\mathbf{k}) = 0$ при $k^2 = 0$. Преобразование (15.91) в импульсном пространстве записывается в виде

$$A_\mu(\vec{k}) \rightarrow A_\mu(\vec{k}) + k_\mu \Delta(\vec{k}). \quad (15.94)$$

Инвариантность по отношению к калибровочному преобразованию означает, что, если к функции $f_\mu^{(1)}(\vec{k})$ добавить произведение $k_\mu \Delta(\vec{k})$, то полученная функция $f_\mu^{(1)}(\vec{k}) + k_\mu \Delta(\vec{k})$ будет описывать то же самое физическое состояние, что и функция $f_\mu^{(1)}(\vec{k})$. Другими словами, состояния, описываемые функциями $f_\mu^{(1)}(\vec{k})$ и $f_\mu^{(1)}(\vec{k}) + k_\mu \Delta(\vec{k})$, эквивалентны (и неразличимы). Но если это так, то с помощью калибровочного преобразования

$$f_\mu^{(1)}(\vec{k}) \rightarrow f_\mu^{(1)}(\vec{k}) - \frac{k_\mu}{|\vec{k}|} f_0^{(1)}(\vec{k}) \quad (15.95)$$

(т. е. $\Delta(\vec{k}) = -f_0^{(1)}(\vec{k})/k_0$) всегда можно получить однофотонную амплитуду с нулевой временной компонентой, описывающую, однако, то же самое физическое состояние¹⁾. Для такой амплитуды условие поперечности волн (15.90) теперь уже гласит

$$\sum_{r=1}^3 k_r f_r^{(1)}(\vec{k}) = 0 = \vec{k} \cdot \vec{f}^{(1)}(\vec{k}) \quad (15.96)$$

и означает, что векторный потенциал (волновая функция), соответствующий состоянию с одним фотоном, является поперечным, т. е. $\vec{k} \cdot \vec{f}^{(1)}(\vec{k}) = 0$. Ясно, что доказательство поперечности можно провести совершенно аналогично и для n -фотонного состояния.

Неоднозначность в определении однофотонной амплитуды подчеркивается соотношением (15.94), а именно эквивалентность амплитуды $f_\mu^{(1)}(\vec{k}) + k_\mu \Delta(\vec{k})$ амплитуде $f_\mu^{(1)}(\vec{k})$ означает, что любую амплитуду, пропорциональную k_μ , можно положить равной нулю (так как ее можно исключить выбором калибровки). Таким образом,

¹⁾ В классической теории эти утверждения соответствуют тому, что калибровку поля излучения, $\text{div} A = 0$, $\varphi = 0$, можно получить из условия Лоренца $A^\mu{}_{;\mu} = 0$ с помощью калибровочного преобразования.

физический смысл имеет та часть амплитуды $f_{\mu}^{(1)}(\vec{k})$, которая ортогональна \vec{k}_{μ} (благодаря дополнительному условию), а не пропорциональна \vec{k}_{μ} (благодаря калибровочной инвариантности), т. е. ее пространственно-подобная часть. Поэтому мы можем выбрать (и этот выбор является простейшим) в качестве представителя класса функций, эквивалентных однофотонным амплитудам, амплитуду

$$f_{\mu}^{\prime(1)}(\vec{k}) = f_{\mu}^{(1)}(\vec{k}) - \vec{k}_{\mu} \frac{f_0^{(1)}(\vec{k})}{k_0},$$

т. е. амплитуду, временная компонента которой равна нулю и для которой выполняется соотношение $\vec{k} \cdot \vec{f}^{\prime(1)}(\vec{k}) = 0$. Такой выбор обеспечивает положительную определенность нормы волновой функции физически реализуемого однофотонного состояния Ψ (состояния, описываемого волновой функцией, единственная отличная от нуля, амплитуда которой равна $f_{\mu}^{\prime(1)}(\vec{k})$), т. е.

$$(\Psi, \Psi) = - \int d^3k f_{\mu}^{\prime(1)*}(\vec{k}) f^{\prime(1)\mu}(\vec{k}) \geq 0,$$

причем знак равенства имеет место только лишь при $f^{\prime(1)} = 0$. Аналогичные утверждения можно сделать и для n -фотонных амплитуд.

С помощью операторов в импульсном представлении 4-вектор энергии-импульса поля выражается в виде

$$P^{\mu} = - \int \hbar k^{\mu} A_{\nu}^{\dagger}(\vec{k}) A^{\nu}(\vec{k}). \quad (15.97)$$

Покажем далее, что выражение $-A_{\nu}^{\dagger}(\vec{k}) A^{\nu}(\vec{k})$ является, действительно, положительно-определенным. Для этого выберем такую специальную систему координат, в которой различные векторы поляризации $\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\vec{k})$ удовлетворяют условиям

$$k^{\mu} \varepsilon_{\mu}^{(1)}(\vec{k}) = k^{\mu} \varepsilon_{\mu}^{(2)}(\vec{k}) = 0, \quad (15.98a)$$

$$-k^{\mu} \varepsilon_{\mu}^{(3)}(\vec{k}) = +k^{\mu} \varepsilon_{\mu}^{(0)}(\vec{k}). \quad (15.98b)$$

В частности, например, этим условиям можно удовлетворить, повернув систему координат таким образом, чтобы $k^0 = |\vec{k}|$, $k^1 = |\vec{k}|$ и $k^2 = k^3 = 0$, т. е.

$$k_{\mu} = |\vec{k}|(1, 1, 0, 0) \quad (15.99)$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu}^{(0)}(\vec{k}) &= (1, 0, 0, 0), \\ \varepsilon_{\mu}^{(1)}(\vec{k}) &= (0, 0, 1, 0), \\ \varepsilon_{\mu}^{(2)}(\vec{k}) &= (0, 0, 0, 1), \\ \varepsilon_{\mu}^{(3)}(\vec{k}) &= (0, 1, 0, 0). \end{aligned} \quad (15.100)$$

При таком выборе единичных векторов поляризации и при условии, что

$$A_\mu(\vec{k}) = \sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}), \quad (15.101)$$

условие Лоренца (15.88) принимает вид

$$k^\mu A_\mu(\vec{k}) = 0 = |\vec{k}| [a^{(0)}(\vec{k}) - a^{(3)}(\vec{k})], \quad (15.102a)$$

или

$$a^{(0)}(\vec{k}) - a^{(3)}(\vec{k}) = 0. \quad (15.102b)$$

Следовательно, используя соотношения (15.78) и (15.102) и свойства действительности векторов поляризации, получаем

$$\begin{aligned} -A_\mu^\dagger(\vec{k}) A^\nu(\vec{k}) &= -\sum_{\lambda\lambda'} a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) a^{(\lambda')}(\vec{k}) g_{\lambda\lambda'} = \\ &= a^{(1)\dagger}(\vec{k}) a^{(1)}(\vec{k}) + a^{(2)\dagger}(\vec{k}) a^{(2)}(\vec{k}), \end{aligned} \quad (15.103)$$

т. е. фактически вклад в физические процессы дают только лишь поперечные фотоны.

Таким образом, мы видим, что благодаря дополнительному условию (15.102) 4-вектор энергии-импульса, действительно, является положительно-определенным. Этот результат станет более прозрачным, если заметить, что в системе координат, определенной соотношениями (15.98), дополнительное условие (15.102b) ограничивает допустимые состояния системы такими состояниями, которые содержат равное число продольных и времени-подобных фотонов с одинаковыми импульсами. Далее, времени-подобные фотоны дают отрицательный энергетический (и импульсный) вклад в полную энергию (и импульс) поля, так что этот вклад взаимно уничтожается с вкладом продольных фотонов.

Однако в изложенной теории все еще остается одна трудность, которая является результатом того, что мы описываем электромагнитное поле с помощью потенциалов A_μ , а не с помощью физически наблюдаемых величин — напряженностей поля $F_{\mu\nu}$. Эта трудность заключается в следующем. Хотя мы и показали, что для состояний, содержащих только лишь поперечные фотоны, норма волновой функции Ψ является положительно-определенной, однако это уже не имеет места для таких состояний, которые содержат времени-подобные фотоны, как видно из того факта, что среднее по вакууму оператора $A_\mu(\vec{k}) A_\nu^\dagger(\vec{k}')$, т. е.

$$(\Phi_0, A_\mu(\vec{k}) A_\nu^\dagger(\vec{k}') \Phi_0) = (A_\mu^\dagger(\vec{k}) \Phi_0, A_\nu(\vec{k}') \Phi_0) = -g_{\mu\nu} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (15.104)$$

при $\mu = \nu = 0$ отрицательно, в то время как произведение $A_0 A_0^\dagger$ является положительно-определенным, если оператор $A_0(\vec{k})$ эрмитов.

Таким образом, в самой теории имеется непоследовательность. Теперь уже невозможно исключить из теории состояний, содержащих времени-подобные фотоны, так как последние необходимы для правильного математического определения оператора $A_0(\mathbf{x})$.

Следовательно, мы должны найти такой способ определения скалярного произведения волновых функций, чтобы оно было *положительно-определенным* для тех состояний, которые содержат только лишь поперечные фотоны, и могло быть *неположительно-определенным* или *неопределенным* для тех состояний, которые содержат нефизические, т. е. времени-подобные и продольные фотоны. Это все, что мы должны требовать, поскольку для состояний, реализующихся в природе, указанное скалярное произведение является положительно-определенным.

Формулировка квантовой теории электромагнитного поля, которая решает эту задачу, была дана Гупта [216] и Блейлером [41]. Используя неопределенную метрику, введенную в совершенно другой связи Дираком [114] (см. также работу Паули [379]), они поновому определили скалярное произведение таким образом, что математическое ожидание оператора теперь выражается в виде

$$\langle F(\mathbf{x}) \rangle = (\Psi, \eta F(\mathbf{x}) \Psi), \quad (15.105)$$

где η — эрмитов оператор метрики

$$\eta^\dagger = \eta, \quad (15.106)$$

причем он выбран так, что удовлетворяет равенству

$$\eta^2 = 1. \quad (15.107)$$

Далее, потребуем, чтобы оператор η коммутировал с $A_k(\mathbf{x})$ ($k = 1, 2, 3$) и антикоммутировал с $A_0(\mathbf{x})$, т. е.

$$[A_k(\mathbf{x}), \eta] = 0, \quad (15.108a)$$

$$[A_0(\mathbf{x}), \eta]_+ = 0. \quad (15.108b)$$

Эти условия могут быть удовлетворены в специальной системе координат, определенной соотношениями (15.98)—(15.100), если η выбрать так, чтобы

$$\eta \Psi = \prod_k (-1)^{N_k^{(0)}} \vec{k} \Psi, \quad (15.109)$$

или в представлении, в котором диагональны не только операторы $N^{(\lambda)}(\vec{k})$, но и η , причем

$$(\Psi_i, \eta \Psi_j) = \delta_{ij} \prod_k (-1)^{n_k^{(0)}(\vec{k})}, \quad (15.110)$$

где $n_k^{(0)}(\vec{k})$ — число времени-подобных фотонов с импульсом \vec{k} в состоянии j .

Исследуем, далее, в системе координат, определенной соотношениями (15.98)—(15.100), векторы состояний, которые допускаются дополнительным условием (15.102б). Для простоты ограничимся состояниями с импульсом \vec{k} и обозначим собственные функции операторов $N^{(\lambda)}(\vec{k})$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) в пространстве чисел заполнения через $|n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}, n^{(0)}\rangle$. Теперь легко проверить, что волновые функции состояний

$$\begin{aligned}\Psi^{(0)} &= |n^{(1)}, n^{(2)}, 0, 0\rangle, \\ \Psi^{(1)} &= |n^{(1)}, n^{(2)}, 1, 0\rangle + |n^{(1)}, n^{(2)}, 0, 1\rangle, \\ \Psi^{(2)} &= |n^{(1)}, n^{(2)}, 2, 0\rangle + \sqrt{2}|n^{(1)}, n^{(2)}, 1, 1\rangle + \\ &\quad + |n^{(1)}, n^{(2)}, 0, 2\rangle, \\ \Psi^{(n)} &= \sum_{r=1}^n \sqrt{\frac{n!}{r!(n-r)!}} |n^{(1)}, n^{(2)}, n-r, r\rangle\end{aligned}\quad (15.111)$$

обладают свойством¹⁾

$$(a^{(3)}(\vec{k}) - a^{(0)}(\vec{k}))\Psi^{(m)} = 0, \quad (15.112)$$

т. е. все они удовлетворяют дополнительному условию. Более того, скалярное произведение двух волновых функций, согласно Гупта, выражается в виде

$$\begin{aligned}(\Psi^{(m)}, \eta\Psi^{(n)}) &= \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n \sqrt{\frac{m!}{r!(m-r)!}} \sqrt{\frac{n!}{s!(n-s)!}} \times \\ &\quad \times (-1)^s \langle n^{(1)}, n^{(2)}, m-r, r | n^{(1)'}, n^{(2)'}, n-s, s \rangle = \\ &= \delta_{n^{(1)} n^{(1)'}} \delta_{n^{(2)} n^{(2)'}} \delta_{nm} \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} (-1)^r = \\ &= \delta_{n^{(1)} n^{(1)'}} \delta_{n^{(2)} n^{(2)'}} \delta_{nm} \delta_{n0}. \quad (15.113)\end{aligned}$$

Последняя строка в этом равенстве получается, если при разложении бинома

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} b^r \quad (15.114)$$

положить

$$a = 1, \quad b = -1.$$

¹⁾ Напомним, что

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

Из наличия множителя δ_{n0} в скалярном произведении (15.113) следует, что в формализме Гупта векторы состояния $\Psi^{(0)}$ и $\Psi^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} c^{(j)} \Psi^{(j)}$ эквивалентны: они ведут к одним и тем же физически наблюдаемым следствиям. Эквивалентность состояний $\Psi^{(0)}$ и $\Psi^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} c^{(j)} \Psi^{(j)}$ точно соответствует неоднозначности, которая лежит в определении амплитуд $f_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ (благодаря инвариантности по отношению к калибровочному преобразованию), но теперь уже выраженной с помощью векторов состояний Ψ .

Чтобы убедиться в этом более явно, вычислим математическое ожидание оператора $A_{\mu}(\mathbf{x})$ по эквивалентным состояниям Ψ и Φ , где

$$\Psi = \prod_{\vec{k}} |n^{(1)}(\vec{k}), n^{(2)}(\vec{k}), 0, 0\rangle, \quad (15.115)$$

$$\begin{aligned} \Phi = \Psi + \prod_{\vec{k}} c(\vec{k}) \{ & |n^{(1)}(\vec{k}), n^{(2)}(\vec{k}), 1, 0\rangle + \\ & + |n^{(1)}(\vec{k}), n^{(2)}(\vec{k}), 0, 1\rangle \} = \Psi + \Psi'. \end{aligned} \quad (15.116)$$

Поскольку $A_{\mu}(\mathbf{x})$ является оператором рождения или уничтожения частицы, то, очевидно,

$$(\Psi, \eta A_{\mu}(\mathbf{x}) \Psi) = 0. \quad (15.117)$$

С другой стороны, используя соотношения (15.77), (15.101) и (15.110), находим

$$\begin{aligned} (\Phi, \eta A_{\mu}(\mathbf{x}) \Phi) &= (\Psi, \eta A_{\mu}^{(+)}(\mathbf{x}) \Psi') + (\Psi', \eta A_{\mu}^{(-)}(\mathbf{x}) \Psi) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} \{ c(\vec{k}) (\varepsilon_{\mu}^{(3)}(\vec{k}) + \varepsilon_{\mu}^{(0)}(\vec{k})) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \\ &\quad - c^*(\vec{k}) (\varepsilon_{\mu}^{(3)}(\vec{k}) + \varepsilon_{\mu}^{(0)}(\vec{k})) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \}. \end{aligned} \quad (15.118)$$

Далее, согласно соотношениям (15.99) и (15.100), в специальной системе координат, в которой мы работаем,

$$\varepsilon_{\mu}^{(0)}(\vec{k}) + \varepsilon_{\mu}^{(3)}(\vec{k}) = \frac{k_{\mu}}{|k|}. \quad (15.119)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\Phi, \eta A_{\mu}(\mathbf{x}) \Phi) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|^3}} k_{\mu} \{ c(\vec{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - c^*(\vec{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \} = \\ &= \frac{\partial \Lambda(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu}}, \end{aligned} \quad (15.120)$$

где

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|^3}} \{ c(\vec{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c^*(\vec{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \}, \quad (15.121a)$$

причем

$$\square \Delta(\mathbf{x}) = 0. \quad (15.1216)$$

Таким образом, эквивалентность векторов состояний Ψ и $\Psi + \Psi'$ отражает тот факт, что описание поля с помощью потенциалов всегда оставляет произвольность с точностью до калибровочного преобразования, при котором $A_\mu \rightarrow A_\mu + (\partial/\partial x^\mu) \Delta$. Однако скалярное произведение (15.110) приводит к тому, что эквивалентные волновые функции соответствуют одинаковым физическим результатам. Мы можем, если это нужно, выбрать волновую функцию Ψ состояния, не содержащего времени-подобных и продольных фотонов, в качестве представителя эквивалентного класса функций. Это, однако, соответствует выбору определенной калибровки.

Таким образом, формализм Гупта обладает тем преимуществом, что он включает состояния, содержащие времени-подобные и продольные фотоны, причем в математической схеме теории эти состояния определены достаточно однозначно [как это и должно быть при определении операторов $A_\mu(\mathbf{x})$], но тем не менее они не дают вклада в физически наблюдаемые величины.

Заметим, что формализм Гупта допускает также нужную нормировку волновых функций этих состояний¹⁾. Норма волновой функции $\Psi^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} c^{(j)} \Psi^{(j)}$, согласно формуле (15.113), тождественно равна $(\Psi^{(0)}, \Psi^{(0)})$. Более того, соотношение (15.104) теперь уже выполняется для $\mu = 0$ строго, так как

$$(A_0^+(\vec{k}) \Phi_0, \eta A_0^+(\vec{k}') \Phi_0) = (-1) \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (15.122)$$

Состояние $A_0^+(\vec{k}) \Phi_0$ в системе координат, определенной соотношениями (15.98)—(15.100), есть состояние с одним времени-подобным фотоном; причем в формализме Гупта—Блейлера вакуум определяется соотношением

$$A_\mu^{(+)}(\mathbf{x}) \Phi_0 = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (15.123)$$

означающим, что вакуум есть состояние, в котором отсутствуют фотоны любого сорта. Однако следует подчеркнуть, что определение (15.123) соответствует выбору определенной калибровки при описании вакуума. На самом деле существует столько же физически эквивалентных состояний вакуума, сколько существует возможностей выбора калибровки [см. выше соотношение (15.111) при $n^{(1)} = n^{(2)} = 0$]. Несмотря на это, при вычислении математического ожидания калибровочно-инвариантной величины [как например $F_{\mu\nu}(\mathbf{x})$]

¹⁾ Это было невозможно до введения неопределенной метрики. Волновая функция „эквивалентного“ состояния, содержащего бесконечное число времени-подобных и продольных фотонов, была ненормируема. В этой связи см. работы Ма [318], Белифанте [29], а также Кёстера и Яуха [85].

или энергии-импульса поля] для всех различных состояний вакуума получим один и тот же результат.

В заключение этой главы выпишем перестановочные соотношения для напряженностей поля

$$[F_{\mu\nu}(x)F_{\lambda\rho}(x')] = i\hbar c \left\{ g_{\mu\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x'^\rho} + \right. \\ \left. + g_{\nu\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x'^\lambda} - g_{\nu\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x'^\rho} - g_{\mu\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x'^\lambda} \right\} D(x - x'). \quad (15.124)$$

Для ознакомления с применениями этих перестановочных соотношений к совместным измерениям компонент электрического и магнитного полей в малой области 4-пространства мы отсылаем читателя к классическим работам Бора и Розенфельда [47, 48], а также к обзорной статье Коринальдези [92].

ИНВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 1. Теория

По аналогии с развитой в гл. 8 теорией возмущений напомним уравнение Томонага — Швингера (15.12) в виде интегрального уравнения

$$\Psi(t) = \Psi(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \Psi(t'). \quad (16.1)$$

Легко проверить, что решение уравнения (16.1) удовлетворяет также и уравнению Томонага — Швингера (15.12). Однако, кроме того, интегральное уравнение (16.1) включает еще и начальное условие: при $t = t_0$ функция Ψ сводится к вектору состояний $\Psi(t_0)$. В действительности в полной аналогии с выражением (8.2) можно написать

$$\Psi(t) = U(t, t_0) \Psi(t_0), \quad (16.2)$$

$$\Psi(t_0) = U^{-1}(t, t_0) \Psi(t), \quad (16.3)$$

причем

$$U(t_0, t_0) = 1, \quad (16.4)$$

где $U(t, t_0)$ — унитарный оператор (для сохранения нормировки), который, действуя на функцию $\Psi(t_0)$, дает $\Psi(t)$. Оператор

$$U(+\infty, -\infty) = S \quad (16.5)$$

является S -матрицей (Штюкельберг [466—468], или, как назвал его Швингер [438], оператором столкновения), которая определяет всевозможные изменения состояний системы в результате взаимодействия. Этот оператор тождественно совпадает с S -матрицей Гейзенберга, так как, по определению,

$$\Psi(+\infty) = S\Psi(-\infty), \quad (16.6)$$

а $\Psi(-\infty)$ и $\Psi(+\infty)$ являются асимптотическими формами падающей и расходящейся волн соответственно.

Оператор $U(t, t_0)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H_I(t) U(t, t_0). \quad (16.7)$$

Из уравнения (16.7) вытекает, что

$$-i\hbar \frac{\partial U^+(t, t_0)}{\partial t} = U^+(t, t_0) H_I(t), \quad (16.8)$$

поскольку оператор $H_I(t)$ является эрмитовым; следовательно, с помощью обычной процедуры можно получить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} (U^+(t, t_0) U(t, t_0)) = 0, \quad (16.9)$$

откуда, согласно формуле (16.4), имеем

$$U^+(t, t_0) U(t, t_0) = 1. \quad (16.10)$$

Это, однако, еще не означает унитарности оператора U . Чтобы оператор U был унитарным, должно выполняться равенство

$$U(t, t_0) U^+(t, t_0) = 1. \quad (16.11)$$

Условие (16.11) выполняется в том случае, если оператор U удовлетворяет групповому свойству

$$U(t, t_1) U(t_1, t_0) = U(t, t_0). \quad (16.12)$$

Соотношение (16.12) действительно выполняется, так как, если

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= U(t, t_1) \Psi(t_1), \\ \Psi(t_1) &= U(t_1, t_0) \Psi(t_0), \end{aligned} \quad (16.13)$$

то имеем

$$\Psi(t) = U(t, t_0) \Psi(t_0) = U(t, t_1) U(t_1, t_0) \Psi(t_0), \quad (16.14)$$

что и требуется для выполнения группового свойства (16.12). Если в соотношении (16.12) положить $t = t_0$, то получим

$$U(t_0, t_1) = U^{-1}(t_1, t_0). \quad (16.15)$$

Далее, из равенства

$$U(t_0, t_1) U(t_1, t_0) = 1, \quad (16.16)$$

умножая его слева на $U^+(t_0, t_1)$ и используя формулу (16.10), следует, что

$$U(t_1, t_0) = U^+(t_0, t_1) = U^{-1}(t_0, t_1), \quad (16.17)$$

что и требовалось доказать.

Непосредственным следствием группового свойства (16.12) является то, что оно позволяет выразить любое конечное преобразование в виде произведения последовательных бесконечно малых преобразований

$$U(t, t') = U(t, t_1) U(t_1, t_2) \dots U(t_{n-1}, t_n) U(t_n, t'), \quad (16.18)$$

где $U(t_j, t_{j+1})$ — бесконечно малое преобразование от момента времени t_j к моменту t_{j+1} . Далее, интегральное уравнение, которому

удовлетворяет $U(t, t')$, имеет вид

$$U(t, t') = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t d\tau H_I(\tau) U(\tau, t'); \quad (16.19)$$

поэтому, если разность $(t_j - t_{j+1})$ бесконечно мала, то

$$\begin{aligned} U(t_j, t_{j+1}) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_{j+1}}^{t_j} d\tau H_I(\tau) U(\tau, t_{j+1}) \approx \\ &\approx 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_{j+1}}^{t_j} dt' H_I(t') U(t_{j+1}, t_{j+1}) \approx \\ &\approx 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_{j+1}}^{t_j} dt' H_I(t'). \quad (16.20) \end{aligned}$$

Неограниченно увеличивая число интервалов и группируя члены, получаем

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \\ &+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots \quad (16.21)^1 \end{aligned}$$

Рассмотрим, далее, n -й интеграл

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n). \quad (16.22)$$

Дайсон [126, 127] заметил, что, по существу, интегрирование ведется по всему интервалу времени от t_0 до t с тем ограничением, что момент времени t_j лежит раньше момента t_{j-1} ($j \leq n$). Это ограничение можно устранить введением хронологического оператора P , который обладает тем свойством, что, действуя на произведение операторов, зависящих от времени, располагает последние в хронологическом порядке, т. е. оператор с большим значением времени в произведении стоит слева

$$P(H_I(t_1) \dots H_I(t_k)) = H_I(t_i) H_I(t_j) \dots H_I(t_k), \quad (16.23)$$

при $t_i > t_j \dots > t_k$.

¹ Формулу (16.21) можно также получить последовательной итерацией уравнения (16.19), т. е. формула (16.21) представляет собой разложение Неймана — Лиувилля интегрального уравнения (16.19).

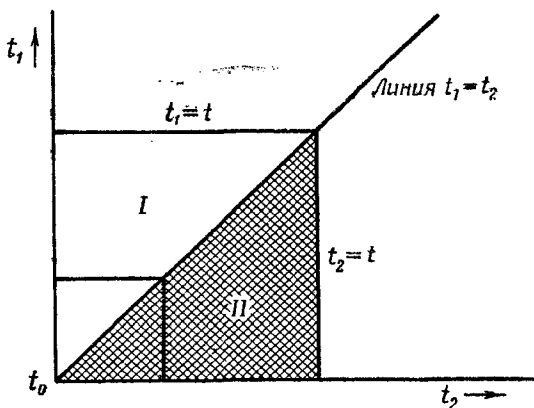
Используя симметрию подинтегрального выражения и тот факт, что возможное число перестановок упорядочения поверхностей равно $n!$, получаем

$$\int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) = \\ = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_{n-1} \int_{t_0}^t dt_n P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)). \quad (16.24)$$

Поучительно подробно рассмотреть эквивалентность этих двух форм интеграла для случая $n=2$. По определению хронологического оператора имеем

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 P(H_I(t_1) H_I(t_2)) = \\ = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1). \quad (16.25)$$

Область интегрирования в левой части равенства (16.25) на фиг. 22 изображена в виде квадрата. С другой стороны, в первом



Ф и г. 22.

члене правой части равенства интегрирование распространяется по области треугольника I (незаштрихованный треугольник), в то время как во втором члене интегрирование идет по области заштрихованного треугольника II. Хотя множители в произведении $H_I(t_2) H_I(t_1)$ не коммутируют между собой, но тем не менее мы вправе во втором интеграле поменять порядок интегрирования. Если во втором

интеграле мы будем вначале интегрировать по t_1 , то пределы интегрирования изменятся, и мы получим

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1). \quad (16.26a)$$

Если теперь произвести замену переменных $t_1 \rightarrow t_2$ и $t_2 \rightarrow t_1$, то выражение (16.26a) примет вид

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2), \quad (16.26б)$$

так что

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 P(H_I(t_1) H_I(t_2)) = 2! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2), \quad (16.27)$$

что доказывает справедливость равенства (16.24) для случая $n = 2$ ¹⁾.

Мы можем поэтому переписать разложение (16.21) следующим образом:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{-t}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t dt_1 P(H_I(t_1)) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{-t}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 P(H_I(t_1) H_I(t_2)) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-t}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)), \end{aligned} \quad (16.28)$$

или, просуммировав ряд,

$$U(t, t_0) = P \left[\exp \left(-\frac{t}{\hbar} \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right) \right]. \quad (16.29)$$

Проверим, является ли ряд (16.28) в действительности решением уравнения (16.7). Для этой цели продифференцируем равенство (16.28) по времени t ; в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-t}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_{n-1} \times \\ &\times n H_I(t) P(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_{n-1})). \end{aligned} \quad (16.30a)$$

¹⁾ Читателю, интересующемуся этим вопросом, рекомендуем начертить диаграмму n -го порядка, чтобы доказать это равенство для случая n переменных интегрирования.

При написании правой части соотношения (16.30а) мы воспользовались симметричностью подинтегрального выражения, а также тем обстоятельством, что оператор $H_I(t)$ всегда зависит от момента времени t , более позднего, чем моменты времени $t_1 \dots t_{n-1}$. Поэтому мы вынесли оператор $H_I(t)$ за знак P -произведения и написали его левее всех остальных множителей. Теперь соотношение (16.30а) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} &= H_I(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{n-1} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \times \\ &\quad \times P(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_{n-1})) = \\ &= H_I(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) = \\ &= H_I(t) U(t, t_0); \quad (16.30б) \end{aligned}$$

отсюда вытекает, что $U(t, t_0)$, действительно, является решением уравнения (16.7). Вспомнив, что

$$H_I(t) = \int d^3x \mathcal{H}_I(\mathbf{x}),$$

можно переписать соотношение (16.28) в форме, более явно указывающей на его ковариантность:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-it}{\hbar c}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t d^4x_1 \int_{t_0}^{t_1} d^4x_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} d^4x_n \times \\ &\quad \times P(\mathcal{H}_I(\mathbf{x}_1) \dots \mathcal{H}_I(\mathbf{x}_n)), \quad (16.31) \end{aligned}$$

так как

$$\int dt \int d^3x = \int \frac{d^4x}{c}.$$

Теперь понятие упорядочения во времени уже имеет инвариантный смысл. Таким образом, если мы обобщим соотношение (16.31) так, чтобы пределы интегрирования представляли собой пространственно-подобные поверхности σ и σ' , то $U(\sigma, \sigma')$ будет инвариантом, так как $\mathcal{H}_I(\mathbf{x}) = G\bar{\psi}(\mathbf{x})\Gamma\psi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$ является скаляром и элемент 4-объема d^4x является инвариантом. Соотношение (16.31) лежит в основе современной ковариантной теории возмущения.

§ 2. Адиабатическая гипотеза

В действительности в расчетах прибегают к адиабатической гипотезе (см., например, работу Дайсона [129]). Это достигается устремлением начального момента времени t_0 к $-\infty$ и усреднением всех

членов, зависящих периодически от t_0 . Аналогично конечный момент времени t устремляется к $+\infty$, и все осциллирующие члены усредняются. Однако при применении этой процедуры следует проявлять известную осторожность, так как, например, для члена n -го порядка существует $n!$ способов перехода к пределу $t_0 = -\infty$, поскольку по времени производится n -кратное интегрирование. Для устранения этих трудностей Дайсон [130—133] ввел так называемое „промежуточное представление взаимодействия“ (или сглаженное представление взаимодействия), которое заключается, по существу, в умножении гамильтониана взаимодействия на сходящийся множитель вида $e^{-\lambda|t|}$; затем после всех вычислений берется предел $\lambda \rightarrow 0$. Такой сходящийся множитель устраняет неоднозначность при переходе к пределам $t = \pm\infty$. Это эквивалентно усреднению по всем $n!$ возможным переходам к пределу.

Приняв адиабатическую гипотезу, можно считать волновые функции начального и конечного состояний собственными функциями оператора H_0 (так как при $t = \pm\infty$ $H_I = 0$), которые обычно называются функциями состояний „голых“ частиц. Мы можем поэтому рассмотреть процесс рассеяния следующим образом:

1. В момент $t = -\infty$ система находится в состоянии, описываемом функцией Φ (собственной функцией оператора H_0); в этом состоянии находится заданное число частиц с определенными спином и импульсом, причем частицы отделены друг от друга и не взаимодействуют между собой ($H_I = 0$). Заметим, что поэтому вектор Φ является постоянным, не зависящим от времени вектором состояния в представлении взаимодействия.

2. Далее, адиабатически включается взаимодействие, и состояние с волновой функцией Φ переходит в состояние с волновой функцией $\Psi(t_0) = U(t_0, -\infty)\Phi$, которое (как считают) соответствует реальному состоянию физических („одетых“) частиц с теми же импульсом и спином. Здесь также предполагается, что частицы все еще достаточно отделены друг от друга и не взаимодействуют между собой. Однако изменение состояния соответствует тому, что H_I обеспечивает собственное взаимодействие, в результате которого „голые“ частицы приобретают „шубу“ с полным набором виртуальных квантов и пар. Этот процесс обычно называют „одеванием“ частицы. „Голая“ частица с виртуальным квантом соответствует в представлении взаимодействия физически реальной частице, если импульс и энергия частицы в этом состоянии удовлетворяют соотношению $p^2 = m^2$.

3. Далее, частицы взаимодействуют между собой и благодаря этому взаимодействию рассеиваются. По прошествии достаточно большого времени $T = t - t_0$ частицы снова расходятся, но уже находясь теперь в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0)$; это состояние соответствует физически реальным („одетым“) частицам после рассеяния.

4. Далее, взаимодействие адиабатически выключается, и состояние с волновой функцией $\Psi(t)$ переходит в состояние с волновой функцией Φ' ; такое состояние соответствует „голым“ частицам после рассеяния, причем $\Phi' = U(\infty, t)\Psi(t)$.

Таким образом, мы изменили реальную задачу рассеяния $\Psi(t_0) \rightarrow \Psi(t)$ „эквивалентной“ задачей, вводя в рассмотрение „голые“ частицы при $t = \pm\infty$. Далее,

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0); \quad (16.32)$$

следовательно, это соотношение можно переписать в виде

$$U^{-1}(\infty, t)\Phi' = U(t, t_0)U(t_0, -\infty)\Phi. \quad (16.33)$$

Отсюда, согласно второму и четвертому положениям, имеем

$$\begin{aligned} \Phi' &= U(+\infty, t)U(t, t_0)U(t_0, -\infty)\Phi = \\ &= U(+\infty, -\infty)\Phi = S\Phi; \end{aligned} \quad (16.34)$$

это означает, что Φ' при $t = +\infty$ действительно является волновой функцией состояния „голых“ частиц, в которое они переходят в результате рассеяния из состояния, описываемого функцией Φ при $t = -\infty$.

Мы можем несколько уяснить и уточнить выше перечисленные положения, подробно рассмотрев вектор состояния

$$\Psi(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0)\Phi_a, \quad (16.35)$$

где Φ_a — волновая функция состояния „голых“ частиц, т. е. собственная функция оператора H_0 с собственным значением E_a .

Для дальнейшего анализа оказывается полезным получить явный вид оператора $U(t, t_0)$. Для этого напомним, что зависимость от времени вектора состояния $\Psi_S(t)$ в шредингеровском представлении выражается в виде

$$\Psi_S(t) = e^{-iH(t-t_0)}\Psi_S(t_0), \quad (16.36)$$

где H — не зависящий от времени полный гамильтониан системы. При этом предполагают, что H есть сумма двух частей H_0 и H_I , т. е.

$$H = H_0 + H_I, \quad (16.37)$$

причем каждая из частей является не зависящим от времени оператором в шредингеровском представлении. Предполагают также, что H_0 обладает только непрерывным спектром, причем

$$H_0\Phi_a = E_a\Phi_a, \quad (16.38a)$$

$$(\Phi_a, \Phi_b) = \delta_{ab}, \quad (16.38b)$$

и, кроме того, предполагают, что H обладает тем же непрерывным спектром, что и H_0 . Будем обозначать „сходящуюся“ и „расходя-

щуюся" волны (собственные функции H), соответствующие Φ_a , через Ψ_a^+ и Ψ_a^- соответственно. Эти функции удовлетворяют уравнениям Липмана — Швингера [307]

$$\Psi_a^+ = \Phi_a + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_I \Psi_a^+, \quad (16.39a)$$

$$\Psi_a^- = \Phi_a + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E_a - H_0 - i\varepsilon} H_I \Psi_a^-. \quad (16.39b)$$

и

$$(H_0 + H_I) \Psi_a^\pm = E_a \Psi_a^\pm. \quad (16.39b)$$

„Сходящаяся“ волна Ψ_a^+ является таким решением уравнения для задачи рассеяния, в котором содержится падающая плоская волна [соответствующая члену Φ_a в уравнении (16.39a)] и расходящаяся рассеянная волна [представленная вторым членом в правой части уравнения (16.39b)]. Величина $+i\varepsilon$ в знаменателе уравнения (16.39a) обеспечивает существование только расходящихся рассеянных волн (Дирак [115]). Аналогично Ψ_a^- является таким решением, в котором содержится плоская волна и сходящиеся рассеянные волны. Гамильтониан H может, кроме того, обладать собственными функциями, соответствующими связанным состояниям (обозначенным греческими индексами),

$$H\Psi_\beta = E_\beta\Psi_\beta. \quad (16.40)$$

Положим, что энергия этих состояний меньше, чем энергия любого собственного состояния гамильтониана H_0 , характеризуемого теми же квантовыми числами. Из эрмитовости гамильтониана H следует, что волновые функции связанных состояний ортогональны волновым функциям сплошного спектра, т. е.

$$(\Psi_\beta, \Psi_a^\pm) = 0. \quad (16.41)$$

Набор функций $\{\Psi^+ + \Psi_\beta\}$ является полным набором. Заметим также, что

$$(\Psi_a^+, \Psi_b^+) = \delta_{ab}. \quad (16.42)$$

Возвратившись к соотношению (16.36), заметим, что если заметить шредингеровский вектор состояния Ψ_S вектором состояния в представлении взаимодействия Ψ и воспользоваться соотношением

$$\Psi(t) = e^{iH_0 t} \Psi_S(t), \quad (16.43)$$

то получим

$$\Psi(t) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \Psi(t_0). \quad (16.44)$$

Таким образом, из соотношения (16.2) следует

$$U(t, t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (16.45)$$

Легко убедиться в том, что выражение (16.45) удовлетворяет дифференциальному уравнению (16.7).

Исследуем теперь выражение

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(0, t_0) \Phi_a = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} e^{iH_0 t_0} e^{-iE_a t_0} \Phi_a. \quad (16.46)$$

Если разложить Φ_a по полному набору собственных функций оператора H , т. е.

$$\Phi_a = \int dc \Psi_c^+ (\Psi_c^+, \Phi_a) + \sum_{\beta} \Psi_{\beta} (\Psi_{\beta}, \Phi_a), \quad (16.47)$$

где символ $\int dc$ означает интегрирование (а также и суммирование) по всем величинам, характеризующим собственные функции Ψ_c^+ , то в результате получим

$$U(0, t_0) \Phi_a = \int dc e^{i(E_c - E_a) t_0} \Psi_c^+ (\Psi_c^+, \Phi_a) + \sum_{\beta} e^{i(E_{\beta} - E_a) t_0} (\Psi_{\beta}, \Phi_a) \Psi_{\beta}. \quad (16.48)$$

Если теперь подставить выражение (16.39а) в матричный элемент (Ψ_c^+, Φ_a) , то, согласно соотношению (16.38б), найдем

$$\begin{aligned} (\Psi_c^+, \Phi_a) &= \left(\Phi_c + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{E_c - H_0 + i\varepsilon} H_I \Psi_c^+, \Phi_a \right) = \\ &= \delta_{ca} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{E_c - E_a - i\varepsilon} (\Psi_c^+, H_I \Phi_a). \end{aligned} \quad (16.49)$$

Следовательно, соотношение (16.48) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} U(0, t_0) \Phi_a &\doteq \Psi_a^+ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int dc' \int dE_c \frac{e^{i(E_c - E_a) t_0}}{E_c - E_a - i\varepsilon} (\Psi_c^+, H_I \Phi_a) \Psi_c^+ + \\ &+ \sum_{\beta} e^{i(E_{\beta} - E_a) t_0} (\Psi_{\beta}, \Phi_a) \Psi_{\beta}. \end{aligned} \quad (16.50)$$

В этом соотношении из интеграла по всем физическим величинам, характеризующим соотношения, описываемые функциями Ψ_c^+ , явно выделено интегрирование по энергии (Ватсон [511]). Далее,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{x - i\varepsilon} = i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^0 e^{ix\tau} e^{-\varepsilon|\tau|} d\tau, \quad (16.51)$$

откуда для фиксированного t_0

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{e^{i(E_c - E_a) t_0}}{E_c - E_a - i\varepsilon} &= \\ &= i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^0 e^{i(E_c - E_a)(t_0 + \tau)} e^{-\varepsilon|\tau|} d\tau = \\ &= i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{t_0} e^{i(E_c - E_a)\tau} e^{-\varepsilon|\tau - t_0|} d\tau, \end{aligned} \quad (16.52)$$

так что в пределе при $t_0 \rightarrow -\infty$ второй член в правой части соотношения (16.50) исчезает [величину ε оставляют конечной до тех пор, пока не вычислен предел при $t_0 \rightarrow -\infty$. Заметим, что в пределе при $t_0 \rightarrow +\infty$ мы получили бы $2\pi i \delta(E_c - E_a)$].

Член, обусловленный связанными состояниями [третий член в правой части соотношения (16.50)], при $t_0 \rightarrow -\infty$ осциллирует; следовательно, если оператор H имеет собственные функции, соответствующие связанным состояниям частиц, то предела выражения (16.50) при $t_0 \rightarrow -\infty$, вообще говоря, не существует. Из изложенной выше адиабатической гипотезы, которая, по существу, определяет функцию $U(t, -\infty)$ в виде (Гелл-Манн и Гольдбергер [205])

$$U(i, -\infty) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \int_{-\infty}^0 dT e^{\eta T} U(t, T), \quad (16.53)$$

следует, что вклад от члена, обусловленного связанным состоянием, также равен нулю. Таким образом, наложение адиабатической гипотезы, или математически эквивалентного ей условия (16.53), избавляет нас от рассмотрения таких начальных конфигураций, которые содержат связанные состояния частиц. Окончательно получим формулу

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(0, t_0) \Phi_a = \Psi_a^+, \quad (16.54)$$

которая указывает на то, что волновая функция состояния „голых“ частиц Φ_a при $t_0 \rightarrow -\infty$ переходит в момент $t = 0$ в функцию Ψ_a^+ , описывающую рассеянную волну.

Аналогично можно показать, что если определить (см. работу Гелл-Манна и Гольдбергера [205])

$$U(\infty, t) = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \eta \int_0^{\infty} dT e^{-\eta T} U(T, t) \quad (16.55)$$

и разложить Φ_a по полному набору $\{\Psi^- + \Psi_\beta\}$, то получим

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} U(0, t_0) \Phi_\beta = \Psi_\beta^-, \quad (16.56)$$

или

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} U^{-1}(0, t_0) \Psi_b^- = \Phi_b. \quad (16.57)$$

Таким образом, мы показали, что приведенные выше качественные соображения можно обосновать в некотором смысле несколько более строго. Заметим, кстати, что

$$S_{ab} = (\Phi_a, S\Phi_b) = (\Phi_a, U(+\infty, -\infty)\Phi_b), \quad (16.58a)$$

$$S_{ab} = (\Phi_a, U(+\infty, 0)U(0, -\infty)\Phi_b), \quad (16.58б)$$

$$S_{ab} = (U(0, +\infty)\Phi_a, U(0, -\infty)\Phi_b), \quad (16.58в)$$

$$S_{a\bar{b}} = (\Psi_a^-, \Psi_b^+). \quad (16.58г)$$

Соотношения (16.58) являются в действительности определением S -матрицы в стационарном (не зависящем от времени) формализме рассеяния (Гелл-Манн и Гольдбергер [205]).

Строго говоря, изложенный выше формализм неприменим в квантовой теории поля, так как оператор взаимодействия H_I также вызывает в этом случае сдвиг уровня, причем невозмущенный энергетический уровень E_a переходит под влиянием взаимодействия H_I в уровень $E_a + \Delta E_a$, где ΔE_a — „собственная энергия“ состояния a . С измененным формализмом, который применим также и в квантовой теории поля, читатель может познакомиться в статьях Пиренни [388, 390] и Гелл-Манна и Гольдбергера [205].

Что касается практических выводов из расчетов квантовой электродинамики, то адиабатическая гипотеза привела к результатам, прекрасно согласующимся с экспериментом. Это обстоятельство является весьма удивительным, так как совершенно ясно, что невозможно выключать (адиабатически или каким-либо иным образом) взаимодействие между полями. В действительности именно в этом отношении квантовая теория поля сильно отличается от обычной квантовой механики. В последней мы имеем дело с потенциалами конечного радиуса действия¹⁾, так что в задаче рассеяния волновые функции начального и конечного состояний действительно являются свободными (невозмущенными волновыми функциями). В теории же поля взаимодействие всегда присутствует, и, следовательно, никогда нельзя в действительности говорить о невозмущенных невзаимодействующих состояниях. И уж, конечно, нельзя пользоваться адиабатической гипотезой при рассмотрении связанного состояния.

В настоящее время все еще остается не вполне решенным вопрос о том, как обойтись без адиабатической гипотезы (в той или иной ее форме). В этой связи следует упомянуть работы Фридрикса [192] и в особенности Снайдера [455]. Они показали, что если заменить разложение (16.47) разложением по „волновым пакетам“, то применение адиабатической гипотезы становится ненужным и излишним. Мы будем рассматривать их работы как оправдание применения адиабатической гипотезы. Кстати, нет сомнения в том, что самые неприятные черты современных релятивистских теорий поля, а именно наличие расходимостей, присущи им вне всякой связи с какой-либо адиабатической гипотезой.

¹⁾ За исключением того случая, когда присутствует также кулоново поле, имеющее бесконечный радиус действия. Но в этом случае начальные и конечные состояния можно охарактеризовать точными волновыми функциями кулонова поля.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ S-МАТРИЦЫ

§ 1. Нормальное произведение

Каждому члену разложения в степенной ряд (16.31) могут соответствовать различные процессы, как виртуальные, так и реальные. Дайсон [129—131] и Вик [531] показали, как выразить $P(\mathcal{H}_I(\mathbf{x}_1) \dots \mathcal{H}_I(\mathbf{x}_n))$ в форме, в которой все виртуальные процессы представлены явно. Это так называемое разложение хронологического произведения на сумму *нормальных произведений*. Последний тип произведения определяется как такое произведение операторов рождения и уничтожения свободных частиц, в котором все операторы рождения стоят слева от всех операторов уничтожения. Тогда, если в любом начальном и любом конечном состояниях задано некоторое число частиц с определенными импульсами и спинами в каждом состоянии, то существует одно и только одно нормальное произведение, матричный элемент которого, соответствующий переходу между этими состояниями, отличен от нуля. Таким образом, разложение S-матрицы на сумму нормальных произведений эквивалентно перечислению всех матричных элементов S-матрицы в представлении, диагональном по числам заполнения свободных частиц. Диаграммы Фейнмана оказываются просто конкретным способом представления нормального произведения.

Здесь мы проведем преобразование S-матрицы к нормальной форме, следуя алгебраическому методу Вика [531]. Рассмотрим сначала простое произведение операторов в представлении взаимодействия Q, какое возникает в разложении (16.21). Разложение такого произведения на сумму нормальных произведений, в которых все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения¹⁾, можно получить с помощью перестановочных соотношений между множителями Q. Последние представляют операторные тождества, не зависящие от тех конкретных состояний, которые нас могут интересовать. Введем оператор N, который, действуя на произведение операторов рождения и уничтожения, записывает это произведение в нормальной форме, подразумевая при этом, что перестановка операторов должна производиться так, как если бы все коммутаторы и антикоммутаторы были равны нулю. Однако операция

¹⁾ Отметим, что из самого определения следует, что для нормального произведения операторов в представлении взаимодействия среднее значение по вакууму равно нулю [см., например, формулу (17.6)].

N включает в себя изменение знака, возникающее при перестановке операторов антикоммутирующих полей. Таким образом, для произведения двух множителей имеем

$$N(\varphi^{(-)}(y)\varphi^{(+)}(x)) = N(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)) = \varphi^{(-)}(y)\varphi^{(+)}(x), \quad (17.1)$$

и аналогично

$$N(\psi^{(+)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(y)) = -N(\bar{\psi}^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x)) = -\bar{\psi}^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x), \quad (17.2)$$

$$\begin{aligned} N(\psi^{(+)}(x)\psi^{(+)}(y)) &= -N(\psi^{(+)}(y)\psi^{(+)}(x)) = \\ &= \psi^{(+)}(x)\psi^{(+)}(y) = -\psi^{(+)}(y)\psi^{(+)}(x). \end{aligned} \quad (17.3)$$

По определению, для операции нормального произведения имеет силу дистрибутивный закон, т. е.

$$\begin{aligned} N[\varphi^{(+)}(x)\{\varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(-)}(z)\}] &= \\ &= N(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(y)) + N(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(z)). \end{aligned} \quad (17.4)$$

Поэтому из перестановочных соотношений [см. особенно формулу (15.74)] и определения нормального произведения следует, что разложение произведения $\bar{\psi}(x)\psi(y)$ на сумму нормальных произведений может быть выполнено следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y) &= (\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x) + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x))(\psi_\beta^{(+)}(y) + \psi_\beta^{(-)}(y)) = \\ &= \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\psi_\beta^{(+)}(y) + \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\psi_\beta^{(-)}(y) + \\ &\quad + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(+)}(y) + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(-)}(y) = \\ &= \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\psi_\beta^{(+)}(y) - \psi_\beta^{(-)}(y)\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x) - iS_{\beta\alpha}^{(-)}(y-x) + \\ &\quad + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(+)}(y) + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(-)}(y) = \\ &= N(\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\psi_\beta^{(+)}(y)) + N(\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\psi_\beta^{(-)}(y)) + \\ &\quad + N(\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(+)}(y)) + N(\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(-)}(y)) - \\ &\quad - iS_{\beta\alpha}^{(-)}(y-x) = \\ &= N(\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y)) - iS_{\beta\alpha}^{(-)}(y-x). \end{aligned} \quad (17.5)$$

При получении последнего равенства в формуле (17.5) мы использовали дистрибутивный закон. Используя аналогичные алгебраические операции, легко получить

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) &= N(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) - iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-y), \\ \psi(x)\psi(y) &= N(\psi(x)\psi(y)), \\ \bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y) &= N(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)), \\ \varphi(x)\varphi(y) &= N(\varphi(x)\varphi(y)) + i\hbar c\Delta^{(+)}(x-y), \\ \varphi(x)\psi(x) &= N(\varphi(x)\psi(x)). \end{aligned} \quad (17.6)$$

Теперь введем хронологический оператор Вика T , который определяется так же, как хронологический оператор Дайсона P , с той лишь разницей, что оператор T , по определению, включает в себя знак перестановки электроно-позитронных множителей, т. е.

$$T(UV \dots Z) = \delta_P XY \dots \quad (17.7)$$

Другими словами, оператор T , действуя на произведение зависящих от времени операторов $UV \dots Z$, переписывает его в хронологическом порядке $XY \dots$ (оператор, зависящий от наиболее позднего времени, стоит последним слева), причем все произведение имеет знак плюс или минус (δ_P) в зависимости от того, является ли перестановка фермионных множителей при переходе от левой стороны к правой стороне соотношения (17.7) четной или нечетной. Или, по определению, оператор T , переписывая все множители в хронологическом порядке, действует так, как если бы все коммутаторы и антикоммутаторы были равны нулю. Таким образом, в случае двух множителей получаем

$$T(\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y})) = +\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y}), \text{ если } x_0 > y_0, \quad (17.8a)$$

$$T(\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y})) = -\psi(\mathbf{y})\psi(\mathbf{x}), \text{ если } y_0 > x_0. \quad (17.8b)$$

В силу перестановочного соотношения $[\psi, \psi]_+ = 0$ правую часть соотношения (17.8) можно для обоих случаев записать в виде

$$T(\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y})) = \psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y}). \quad (17.9)$$

Аналогично имеем

$$T(\psi(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{y})) = +\psi(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{y}), \text{ если } x_0 > y_0, \quad (17.10)$$

$$T(\psi(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{y})) = -\bar{\psi}(\mathbf{y})\psi(\mathbf{x}), \text{ если } y_0 > x_0.$$

$$T(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})) = \varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}), \text{ если } x_0 > y_0, \quad (17.11)$$

$$T(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})) = \varphi(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x}), \text{ если } y_0 > x_0.$$

Теперь вернемся к основной проблеме: выражению хронологического произведения через сумму нормальных произведений. С этой целью для описания коммутаторов или антикоммутаторов, которые появляются при переходе от хронологического произведения двух множителей к нормальной форме, введем понятие свертки (contraction) двух множителей. Свертку мы будем обозначать точками, стоящими сверху справа у соответствующих множителей. Она определяется формулой

$$T(UV) = U'V' + N(UV), \quad (17.12)$$

где $U'V'$ — свернутые множители. Вычислим их для некоторых простых случаев. Из формулы (17.12) следует, что

$$\varphi^{(+)}(\mathbf{x})\varphi^{(-)}(\mathbf{y}) = T(\varphi^{(+)}(\mathbf{x})\varphi^{(-)}(\mathbf{y})) - N(\varphi^{(+)}(\mathbf{x})\varphi^{(-)}(\mathbf{y})). \quad (17.13)$$

Из определений T - и N -произведений, используя формулу (15.53), для случая $x_0 > y_0$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi^{(+)\prime}(\mathbf{x}) \varphi^{(-)\prime}(\mathbf{y}) &= \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \varphi^{(-)}(\mathbf{y}) - \varphi^{(-)}(\mathbf{y}) \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) = \\ &= [\varphi^{(+)}(\mathbf{x}), \varphi^{(-)}(\mathbf{y})] = \\ &= i\hbar c \Delta^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \text{ если } x_0 > y_0. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Аналогично

$$\varphi^{(+)\prime}(\mathbf{x}) \varphi^{(-)\prime}(\mathbf{y}) = 0, \text{ если } y_0 > x_0. \quad (17.15)$$

В более общем случае получаем

$$\begin{aligned} \varphi^\cdot(\mathbf{x}) \varphi^\cdot(\mathbf{y}) &= T(\varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y})) - N(\varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y})) = \\ &= +i\hbar c \Delta^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \text{ если } x_0 > y_0, \\ &= -i\hbar c \Delta^{(-)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \text{ если } y_0 > x_0. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Функцию, обладающую свойствами, указанными в правой части соотношения (17.16), обозначим, следуя Дайсону, через $1/2 \hbar c \Delta_F(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Аналогично, используя формулу (17.12) и правила антикоммутации, получим для фермионных множителей

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^\cdot(\mathbf{x}) \bar{\psi}_\beta^\cdot(\mathbf{y}) &= -iS_{\alpha\beta}^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \text{ если } x_0 > y_0, \\ \psi_\alpha^\cdot(\mathbf{x}) \bar{\psi}_\beta^\cdot(\mathbf{y}) &= +iS_{\alpha\beta}^{(-)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \text{ если } y_0 > x_0, \\ \psi_\alpha^\cdot(\mathbf{x}) \bar{\psi}_\beta^\cdot(\mathbf{y}) &= -\frac{1}{2} S_{F\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (17.17)$$

Таким же образом из определения N - и T -произведений следует

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_\beta^\cdot(\mathbf{y}) \psi_\alpha^\cdot(\mathbf{x}) &= -\psi_\alpha^\cdot(\mathbf{x}) \bar{\psi}_\beta^\cdot(\mathbf{y}) = \\ &= +\frac{1}{2} S_{F\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (17.18)$$

Отсюда ясно, что

$$\psi^\cdot \varphi^\cdot = \bar{\psi}^\cdot \varphi^\cdot = \psi^\cdot \bar{\psi}^\cdot = \bar{\psi}^\cdot \bar{\psi}^\cdot = 0. \quad (17.19)$$

Итак, если свернутое произведение не равно нулю, то порядок множителей в нем является существенным. Так как

$$-iS_{\alpha\beta}^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\Phi_0, \psi_\alpha(\mathbf{x}) \bar{\psi}_\beta(\mathbf{y}) \Phi_0) \quad (17.20a)$$

и

$$-iS_{\alpha\beta}^{(-)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\Phi_0, \bar{\psi}_\beta(\mathbf{y}) \psi_\alpha(\mathbf{x}) \Phi_0), \quad (17.20б)$$

то можно написать

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^\cdot(\mathbf{x}) \bar{\psi}_\beta^\cdot(\mathbf{y}) &= (\Phi_0, T(\psi_\alpha(\mathbf{x}) \bar{\psi}_\beta(\mathbf{y})) \Phi_0) = \\ &= -\frac{1}{2} S_{F\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (17.21)$$

Аналогично имеет место

$$\begin{aligned} \varphi^*(\mathbf{x}) \varphi^*(\mathbf{y}) &= (\Phi_0, T(\varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y})) \Phi_0) = \\ &= + \frac{1}{2} \hbar c \Delta_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (17.22)$$

Эту функцию иногда обозначают Δ^0 и называют каузальной функцией по Штюкельбергу (см. работу [474]), отметившему, что она представляет собой функцию Грина, которая обеспечивает правильную каузальную последовательность событий во времени в квантовой теории (см. также статью Фирца [176]).

§ 2. Теорема Вика

В § 1 мы видели, что свернутая пара множителей представляет собой c -число. Определим теперь нормальное произведение, внутри которого имеется одна или большее число свернутых пар множителей, так как это упрощает дальнейшие расчеты. Чтобы отличать различные свернутые пары, мы будем обозначать их двумя точками, тремя и т. д., стоящими сверху справа у соответствующих множителей пары. Пусть $UV \dots XYZ$ — операторы рождения или уничтожения; введем тогда следующее определение:

$$\begin{aligned} N(U^{\cdot} V^{\cdot\cdot} \dots R \dots X^{\cdot\cdot} YZ^{\cdot}) &= \\ &= \pm (U^{\cdot} Z^{\cdot})(V^{\cdot\cdot} X^{\cdot\cdot}) N(\dots R \dots Y), \end{aligned} \quad (17.23)$$

причем знак плюс или минус должен быть взят в зависимости от того, является ли перестановка фермионных множителей при переходе от левой стороны к правой четной или нечетной.

Теперь докажем одну очень полезную вспомогательную теорему.

Теорема.

Если Z — оператор, зависящий от времени, *предшествующего* каждому из времен, для которых заданы операторы $UV \dots XY$, то

$$\begin{aligned} N(UV \dots XY) Z &= N(UV \dots XY^{\cdot} Z^{\cdot}) + N(UV \dots X^{\cdot} YZ^{\cdot}) + \\ &+ \dots + N(U^{\cdot} V \dots XYZ^{\cdot}) + \\ &+ N(UV \dots XYZ). \end{aligned} \quad (17.24)$$

Поскольку для операции нормального произведения имеет место дистрибутивный закон, то ясно, что достаточно доказать соотношение (17.24) для случая, когда каждый из множителей $U, V \dots X, Y$ является либо оператором рождения, либо оператором уничтожения. Кроме того, согласно нашему определению нормального произведения, соотношение (17.24) остается правильным и при перегруппировке множителей $UV \dots XY$, если в *обеих* сторонах соотношения сделана *одна и та же* перегруппировка. Поэтому можно предпо-

ложить, что операторы $UV \dots XY$ расположены в нормальном порядке, т. е. все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения.

Докажем теорему, предполагая, что Z является оператором рождения, а все операторы $UV \dots XY$ — операторами уничтожения. Этого, очевидно, достаточно. Если все $UV \dots XY$ являются операторами уничтожения и Z — оператором рождения, то можно добавить любое число операторов рождения во всех членах в обеих сторонах соотношения (17.24) слева от всех множителей под знаком N -произведения, не нарушая справедливости нашей теоремы, так как свертка двух операторов рождения дает нуль. Если, с другой стороны, Z — оператор уничтожения и $UV \dots XY$ — операторы рождения и уничтожения, то соотношение (17.24) сводится к тривиальному тождеству, поскольку свертка двух операторов уничтожения дает нуль, если время, от которого зависит оператор уничтожения, *предшествует* времени, от которого зависит оператор рождения [см., например, формулу (17.15)]. Таким образом, в этом случае в правой стороне формулы (17.24) остается лишь последний член и соотношение сводится к тождеству.

Доказательство теоремы проводится методом индукции. Ясно, что теорема верна для случая одного множителя под знаком N -произведения, так как при этом (напомним, что время, от которого зависит оператор Z , предшествует времени, от которого зависит оператор Y , по определению)

$$N(Y)Z = YZ = T(YZ), \quad (17.25)$$

а T -произведение, по определению (17.12), равно

$$T(YZ) = Y'Z' + N(YZ). \quad (17.26)$$

Предположим теперь, что соотношение (17.24) верно для n множителей, и умножим его еще на один оператор уничтожения D слева, считая, что время, от которого зависит оператор D , более позднее, чем время, от которого зависит оператор Z . Тогда

$$\begin{aligned} DN(UV \dots XY)Z &= \\ &= N(DUV \dots XY'Z') + \dots + N(DU'V \dots XYZ') + \\ &\quad + DN(UV \dots XYZ), \end{aligned} \quad (17.27)$$

так как оператор D может быть внесен под знак N -произведения во всех членах, где оператор Z свернут. Однако, по определению, поскольку оператор Z является оператором рождения, а все $UV \dots$ — операторами уничтожения, то

$$N(UV \dots XYZ) = \delta_P ZUV \dots XY, \quad (17.28)$$

где δ_P — знак четности перестановки фермионных множителей; итак мы имеем

$$DN(UV \dots XYZ) = \delta_P DZUV \dots XY. \quad (17.29)$$

С другой стороны, поскольку Z зависит от времени, предшествующего времени, от которого зависит оператор D , то

$$DZ = T(DZ) = D'Z' + N(DZ) = D'Z' + \delta_Q ZD \quad (17.30)$$

и, следовательно,

$$DZUV \dots XY = D'Z'UV \dots XY + \delta_Q ZDUV \dots XY. \quad (17.31)$$

Далее, в силу нашего определения нормального произведения со свернутыми множителями внутри него

$$D'Z'UV \dots XY = \delta_P N(D'UV \dots XYZ'). \quad (17.32)$$

Аналогично

$$ZDUV \dots XY = \delta_Q \delta_P N(DUV \dots XYZ); \quad (17.33)$$

в результате получаем

$$DN(UV \dots XYZ) = \delta_P DZUV \dots XY = \delta_P^2 N(D'UV \dots XYZ') + \\ + \delta_Q^2 \delta_P^2 N(DUV \dots XYZ). \quad (17.34)$$

Так как $\delta_Q^2 = \delta_P^2 = 1$, то мы доказали нашу теорему (17.24) для случая $n+1$ оператора уничтожения и, следовательно, методом индукции дано общее доказательство теоремы.

Эту теорему можно без труда обобщить. Умножим соотношение (17.24) слева на множитель $R''S''$; тогда благодаря определению (17.23) мы можем придать соотношению (17.24), например, следующий вид:

$$N(UR''V \dots S''XY)Z = N(UR''V \dots S''XY'Z') + \dots + \\ + N(U'R''V \dots S''XYZ') + \\ + N(UR''V \dots S''XYZ). \quad (17.35)$$

Аналогично можно умножить соотношение (17.24) на несколько таких свернутых множителей. Таким образом, теорема (17.24) остается верной и в том случае, когда внутри произведения $UV \dots XY$ проделано любое число сверток (но, конечно, одних и тех же в каждом члене).

Теорема Вика формулируется следующим образом:

T -произведение может быть однозначно представлено в виде суммы нормальных произведений

$$T(UV \dots XYZ) = N(UV \dots XYZ) + N(U'V' \dots XYZ) + \dots + \\ + N(U''V'' \dots X''Y'Z') + \dots + \\ + N(U'V''W'' \dots X''Y'Z''), \quad (17.36)$$

где сумма в правой стороне включает в себя все возможные свертки.

Доказательство снова проводим методом индукции. Теорема верна для одного множителя. Она верна и для двух множителей, как это видно из формулы (17.12). Предположим, что соотношение (17.36) верно для n множителей. Затем умножим его справа на оператор Ω , предшествующий во времени всем остальным множителям

$$T(UV \dots XYZ)\Omega = T(UV \dots XYZ\Omega). \quad (17.37)$$

Члены в правой части соотношения (17.36), имеющие теперь форму $N(UV \dots XYZ)\Omega$, могут быть сведены к нормальным произведениям с помощью теоремы (17.24). Таким образом, теорема (17.36) верна для $n+1$ множителя, если Ω предшествует по времени $UV \dots XYZ$. Последнее ограничение может быть, однако, легко устранено. Когда оператор Ω вносится под знак T - и N -произведений, мы можем изменить порядок операторов, так как, по определению T - и N -произведений, соотношение (17.36) инвариантно по отношению к одной и той же перегруппировке множителей в обеих сторонах соотношения. Таким образом, теорема доказана в общем случае для $n+1$ множителя.

Можно выписать также правила, аналогичные приведенным выше, для разложения простого произведения операторов на сумму нормальных произведений (Дайсон [129, 130]). В этом случае символ свертки обозначается линией, соединяющей соответствующие множители, а сама свертка может быть определена с помощью соотношения (17.6) следующим образом:

$$\underbrace{\psi_\alpha(\mathbf{x})\bar{\psi}_\beta(\mathbf{x}')}_{} = -iS_{\alpha\beta}^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = (\Phi_0, \psi_\alpha(\mathbf{x})\bar{\psi}_\beta(\mathbf{x}')\Phi_0), \quad (17.38)$$

$$\underbrace{\bar{\psi}_\beta(\mathbf{x}')\psi_\alpha(\mathbf{x})}_{} = -iS_{\alpha\beta}^{(-)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = (\Phi_0, \bar{\psi}_\beta(\mathbf{x}')\psi_\alpha(\mathbf{x})\Phi_0), \quad (17.39)$$

$$\underbrace{\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}')}_{} = i\Delta^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = (\Phi_0, \varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}')\Phi_0), \quad (17.40)$$

$$\underbrace{\bar{\psi}(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{y})}_{} = \underbrace{\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y})}_{} = \underbrace{\varphi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})}_{} = \underbrace{\varphi(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{x})}_{} = 0. \quad (17.41)$$

Теорема разложения, которая легко может быть доказана методом индукции, в этом случае формулируется так:

$$UV \dots XYZ = N(UV \dots XYZ) + N(\underbrace{UV \dots XYZ}_{} + \dots + N(\underbrace{UV \dots XYZ}_{} + \dots), \quad (17.42)$$

где сумма в правой стороне снова включает в себя все возможные типы свертки.

§ 3. Применение к S -матрице

Только что доказанные теоремы не могут быть непосредственно применены к преобразованию S -матрицы по следующим причинам: во-первых, в разложение S -матрицы входит хронологический оператор Дайсона P , а не оператор Вика T ; во-вторых, S -матрица содержит некоммутирующие операторы, зависящие от одного и того же времени, и T -оператор не может определить их порядок.

В квантовой электродинамике, где член взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{H}_I(\mathbf{x}) = j_\mu(\mathbf{x}) A^\mu(\mathbf{x}),$$

вторая трудность может быть устранена, если учесть, что выражение для плотности тока

$$j_\mu(\mathbf{x}) = e\bar{\psi}(\mathbf{x})\gamma_\mu\psi(\mathbf{x}) \quad (17.43)$$

фактически неверно. Действительно, рассмотрим среднее значение тока в состоянии вакуума

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(\mathbf{x}) \rangle_0 &= e \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} \sum_{\alpha\beta} (\bar{\Phi}_0, \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\psi_\beta(\mathbf{x}')\Phi_0) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} = \\ &= -ie \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} \sum_{\alpha\beta} S_{\beta\alpha}^{(-)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} = \\ &= -ie \text{Sp}(\gamma_\mu S^{(-)}(0)). \end{aligned} \quad (17.44)$$

Выражение (17.44) бесконечно. Уже в 1934 г. Гейзенберг [225, 226] знал об этой трудности. Он отметил, что бесконечность среднего значения тока в состоянии вакуума обусловлена „фоном“ (т. е. полностью заполненными состояниями с отрицательной энергией). В связи с этим он предложил переопределить 4-вектор плотности следующим образом:

$$j'_\mu(\mathbf{x}) = \frac{e}{2} [\bar{\psi}(\mathbf{x})\gamma_\mu, \psi(\mathbf{x})] = \frac{e}{2} \sum_{\alpha\beta} [\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta(\mathbf{x})] (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}; \quad (17.45)$$

в этом случае

$$(\bar{\Phi}_0, j'_\mu(\mathbf{x})\Phi_0) = 0. \quad (17.46)$$

Это выражение получается при симметризации теории относительно частиц и античастиц. Можно легко показать (Вик [531]), что этот симметризованный ток (мы теперь опускаем штрих) можно записать как нормальное произведение

$$j_\mu(\mathbf{x}) = eN(\bar{\psi}(\mathbf{x})\gamma_\mu\psi(\mathbf{x})), \quad (17.47)$$

поэтому, когда ток $j_\mu(\mathbf{x})$ встречается в хронологическом произведении, нормальное произведение упорядочивает множители

в выражении для тока $j_p(x)$. Итак, S-матрицу в квантовой электродинамике можно записать следующим образом:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{ie}{\hbar c} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \dots$$

$$\dots \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_n T \{ N(\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1)) \dots N(\bar{\psi}(x_n) \hat{A}(x_n) \psi(x_n)) \}, \quad (17.48)$$

где множитель \hat{A} мы включили в нормальное произведение, так как относительный порядок множителей $\bar{\psi}(x) \gamma^p \psi(x)$ и $A_p(x)$ несущественен, потому что они коммутируют. Кроме того, мы переписали разложение Дайсона (15.28), заменив P-оператор T-оператором, так как между ними теперь нет разницы, поскольку фермионные множители всегда встречаются *парами*, в которых оба множителя зависят от одного и того же времени.

Мы будем называть T-произведение, в котором имеются нормальные произведения, смешанным T-произведением. Век обобщил теорему (17.36) и на такие смешанные T-произведения. Эта теорема формулируется так:

Смешанное T-произведение можно разложить согласно формуле (17.36), если опустить свертки между N-упорядоченными множителями.

Доказательство теоремы основывается на следующем приеме. Предположим, что мы использовали дистрибутивный закон для сведения смешанного T-произведения типа (17.48) к сумме таких смешанных T-произведений, каждое из которых содержит только операторы рождения и уничтожения XYZ (т. е. только матрицы $A^{(+)}$, $\psi^{(+)}$, $\psi^{(-)}$ и т. д., а не операторы A , $\bar{\psi}$, ψ). Тогда мы можем рассматривать смешанное T-произведение

$$T(N(RST) \dots N(XYZ))$$

(где все три множителя RST, ..., XYZ под знаком каждого N-произведения зависят от одного и того же времени) как предел T-произведения, т. е.

$$T(RST \dots XYZ),$$

где время, от которого зависят операторы рождения внутри каждого из произведений RST, ..., XYZ, на бесконечно малую величину позднее времени, от которого зависят операторы уничтожения. Теперь можно применить теорему (17.36). Поскольку свертки, которые должны быть опущены по теореме для смешанного T-произведения, фактически равны нулю [оператор уничтожения зависит от времени, предшествующего времени, от которого зависит оператор рождения, см., например (17.15)], то теорема доказана.

В псевдоскалярной мезонной теории, где

$$\mathcal{H}_I(\mathbf{x}) = G \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma_5 \psi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}), \quad (17.49)$$

также не нужно проводить свертку множителей $\bar{\psi}(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ внутри каждого оператора $\mathcal{H}_I(\mathbf{x})$, так как в этом случае

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) (\gamma_5)_{\alpha\beta} \psi_\beta(\mathbf{x}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \text{Sp} (\gamma_5 S_F(\xi)) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \text{Sp} [(i\hat{\nabla}_\epsilon - m) \gamma_5] \Delta_F(\xi) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (17.50)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \text{Sp} \gamma_5 &= 0, \\ \text{Sp} \gamma_\mu \gamma_5 &= \frac{1}{2} \text{Sp} (\gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (17.51)$$

Вследствие же соотношения (17.51) и правил антикоммутации для ψ и $\bar{\psi}$ можно написать

$$\mathcal{H}_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} G [\bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma_5 \psi(\mathbf{x})] \varphi(\mathbf{x}) = GN (\bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma_5 \varphi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})), \quad (17.52)$$

что сводит S -матрицу для этого случая к форме, аналогичной рассмотренной в квантовой электродинамике.

§ 4. Представление инвариантных функций

Мы определили функцию Δ_F , возникающую при свертке двух бозонных множителей следующим образом [см. выражение (17.22)]:

$$+\Delta_F(\mathbf{x}) = \begin{cases} +2i\Delta^{(+)}(\mathbf{x}) & \text{для } x_0 > 0, \\ -2i\Delta^{(-)}(\mathbf{x}) & \text{для } x_0 < 0. \end{cases} \quad (17.53)$$

Напомним теперь [см. формулы (15.57), (15.59)], что

$$\Delta(\mathbf{x}) = \Delta^{(+)}(\mathbf{x}) + \Delta^{(-)}(\mathbf{x}) \quad (17.54)$$

и

$$\Delta^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\Delta(\mathbf{x}) - i\Delta^{(1)}(\mathbf{x})], \quad (17.55)$$

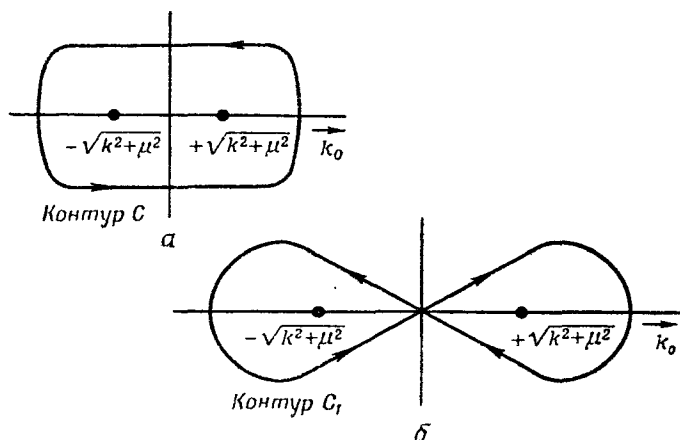
$$\Delta^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\Delta(\mathbf{x}) + i\Delta^{(1)}(\mathbf{x})]. \quad (17.56)$$

Функции Δ , $\Delta^{(1)}$ и $\Delta^{(\pm)}$ были уже определены в гл. 15. Функцию Δ_F можно выразить тогда в следующем виде:

$$\Delta_F(\mathbf{x}) = \Delta^{(1)}(\mathbf{x}) + i\varepsilon(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{x}), \quad (17.57)$$

где функция $\varepsilon(\mathbf{x}) = x^0/|x^0|$ указывает знак времени. Так как $\Delta^{(1)}(\mathbf{x})$ является четной функцией переменной \mathbf{x} , а $\Delta(\mathbf{x})$ и $\varepsilon(\mathbf{x})$ — нечетными

функциями переменной x , то ясно, что $\Delta_F(x)$ есть четная функция переменной x . Хотя функция $\Delta(x)$ равна нулю вне светового конуса, функция $\Delta^{(1)}(x)$ отлична от нуля, поэтому функция $\Delta_F(x)$ также отлична от нуля [и фактически равна $\Delta^{(1)}(x)$] вне светового конуса.



Ф и г. 23.

Для получения интегрального представления функции $\Delta_F(x)$ напомним здесь интегральные представления функций $\Delta(x)$ и $\Delta^{(1)}(x)$ [см. формулы (15.41) и (15.51)]

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k e^{-ik_\mu x^\mu} \delta(k^2 - \mu^2) \varepsilon(k), \quad (17.58)$$

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k e^{-ik_\mu x^\mu} \delta(k^2 - \mu^2). \quad (17.59)$$

Полностью эквивалентные определения этих сингулярных функций даются следующими выражениями:

$$\Delta(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_C \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k^2 - \mu^2} d^4k, \quad (17.60)$$

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_1} \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k^2 - \mu^2} d^4k. \quad (17.61)$$

В этих выражениях интегрирование должно проводиться сначала по переменной k_0 , причем контуры интегрирования C и C_1 в комплексной плоскости приведены на фиг. 23, а и б, соответственно. После

этого должно выполняться интегрирование по вещественным переменным k^1 , k^2 и k^3 .

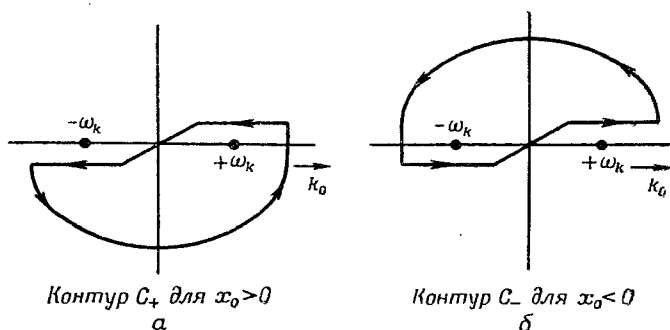
Таким образом, поскольку

$$\Delta^{(+)}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} e^{-ik_\mu x^\mu} \delta(k^2 - \mu^2) d^4k, \quad (17.62)$$

то для $x_0 > 0$ будем иметь

$$\Delta^{(+)}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C_+} \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k^2 - \mu^2} d^4k \quad \text{для } x_0 > 0, \quad (17.63)$$

где контур интегрирования C_+ идет по вещественной оси k_0 от $+\infty$ до $-\infty$, обходя полюс в точке $k_0 = +\omega_k$ сверху, а полюс в точке



Фиг. 24.

$k_0 = -\sqrt{k^2 + \mu^2} = -\omega_k$ снизу, и замыкается большой полуокружностью в нижней полуплоскости (фиг. 24, а). Если $x_0 < 0$, то для функции $\Delta^{(-)}(x)$ имеет место следующее представление:

$$\Delta^{(-)}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C_-} \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k^2 - \mu^2} d^4k \quad \text{для } x_0 < 0; \quad (17.64)$$

контур интегрирования C_- приведен на фиг. 24, б. Тогда, исходя из определения (17.53) функции Δ_F , можно написать

$$+\Delta_F(x) = \frac{+2i}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{d^4k}{k^2 - \mu^2} e^{-ik_\mu x^\mu}, \quad (17.65)$$

где C_F — контур интегрирования, приведенный на фиг. 25. В самом деле, если $x_0 > 0$, то можно замкнуть контур в нижней полуплоскости, и тогда, согласно формуле (17.63),

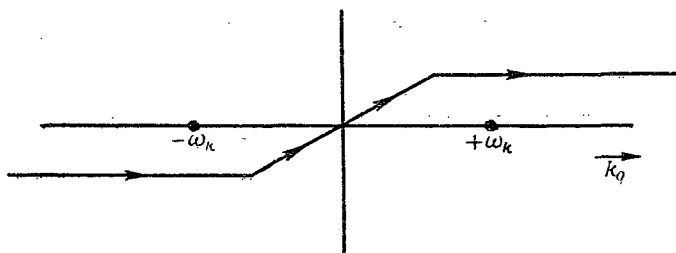
$$+\Delta_F(x) = 2i\Delta^{(+)}(x) \quad \text{для } x_0 > 0. \quad (17.66)$$

Аналогично, если $x_0 < 0$, то мы получаем, замыкая контур в верхней полуплоскости,

$$+\Delta_F(x) = -2i\Delta^{(-)}(x) \text{ для } x_0 < 0, \quad (17.67)$$

что находится в согласии с предыдущим определением (17.53).

Тот же результат, который получается при интегрировании по контуру C_F , можно получить при интегрировании по вещественной оси k_0 от $-\infty$ до $+\infty$, если добавить к массе μ малую отрицательную мнимую величину, которую следует устремить к нулю после выполнения интегрирования. В этом случае знаменатель в выражении (17.65) получает вид $(k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)$. Добавление к массе μ



Контур C_F

Фиг. 25.

малой отрицательной мнимой величины приводит к смещению полюсов. Теперь они оказываются в точках

$$k_0 = \pm \sqrt{k^2 + (\mu - i\varepsilon)^2} = \pm \sqrt{k^2 + \mu^2 - i\varepsilon'} = \pm \sqrt{k^2 + \mu^2 \mp i\varepsilon''}, \quad (17.68)$$

так что полюс $-\omega_k$ сдвигается вверх, а полюс $+\omega_k$ — вниз, как и должно быть.

Для полноты мы здесь приведем еще опережающую и запаздывающую сингулярные функции $\Delta_A(x)$ и $\Delta_R(x)$, которые определяются следующими интегральными представлениями:

$$\Delta_A(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C_A} \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k^2 - \mu^2} d^4k, \quad (17.69)$$

$$\Delta_R(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C_R} \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k^2 - \mu^2} d^4k, \quad (17.70)$$

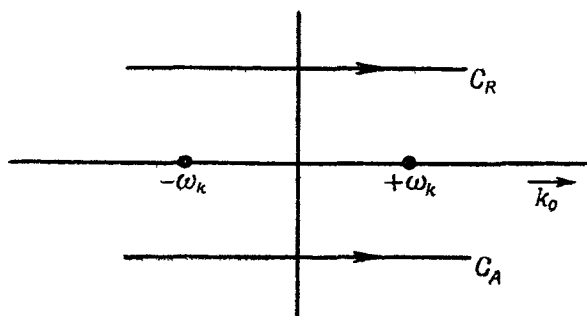
где контуры интегрирования C_A и C_R приведены на фиг. 26. Если $x_0 > 0$, то можно замкнуть контуры по большой полуокружности

в нижней полуплоскости, тогда мы получим

$$\begin{aligned}\Delta_A(x) &= 0 && \text{для } x_0 > 0, \\ \Delta_R(x) &= -\Delta(x) && \text{для } x_0 > 0.\end{aligned}\quad (17.71)$$

Аналогично, если $x_0 < 0$, то контур можно замкнуть в верхней полуплоскости, так что

$$\begin{aligned}\Delta_A(x) &= \Delta(x) && \text{для } x_0 < 0, \\ \Delta_R(x) &= 0 && \text{для } x_0 < 0;\end{aligned}\quad (17.72)$$



Контурь C_A и C_R

Ф и г. 26.

отсюда и наименования для этих сингулярных функций: „опережающая“ и „запаздывающая“. Из самих определений следует, что

$$\Delta(x) = \Delta_A(x) - \Delta_R(x), \quad (17.73)$$

$$\Delta_A(x) = \Delta_R(-x). \quad (17.74)$$

Симметричная во времени сингулярная функция $\bar{\Delta}(x)$ определяется выражением

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{2}(\Delta_A(x) + \Delta_R(x)), \quad (17.75)$$

так что

$$\bar{\Delta}(x) = +\frac{1}{2}\Delta(x) \text{ для } x_0 < 0, \quad (17.76a)$$

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{2}\Delta(x) \text{ для } x_0 > 0, \quad (17.76b)$$

или

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{2}\varepsilon(x)\Delta(x). \quad (17.77)$$

Функции $\bar{\Delta}$ и $\Delta^{(1)}$ широко использовались Швингером [436, 438—440].

Функции $\Delta_F(\mathbf{x})$, $\bar{\Delta}(\mathbf{x})$, $\Delta_A(\mathbf{x})$, $\Delta_R(\mathbf{x})$ удовлетворяют неоднородному уравнению Клейна—Гордона с $\delta^4(\mathbf{x})$ в качестве функции источника в правой части; функции же $\Delta^{(\pm)}(\mathbf{x})$, $\Delta(\mathbf{x})$, $\Delta^{(1)}(\mathbf{x})$ удовлетворяют однородному уравнению Клейна—Гордона.

Соотношение между функциями S_F и Δ_F снова дается выражением

$$S_F(\mathbf{x}) = -(i\hat{\nabla} + m)\Delta_F(\mathbf{x}), \quad (17.78)$$

так что

$$\begin{aligned} S_F(\mathbf{x}) &= -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_\mu x^\mu} d^4p = \\ &= -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{\hat{p} - m + i\epsilon} e^{-ip_\mu x^\mu} d^4p. \end{aligned} \quad (17.79)$$

Таким образом, $-1/2 S_F(\mathbf{x}) = K_+(\mathbf{x})$ представляет функцию распространения Фейнмана, рассмотренную раньше в связи с позитронной теорией Фейнмана. Функции $S^{(1)}$, $S^{(+)}$, S_A , S_R и т. д. связаны с соответствующими функциями $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(+)}$, Δ_A , Δ_R и т. д. соотношениями вида (17.78).

ДИАГРАММЫ ФЕЙНМАНА

Чтобы освоиться с формализмом S -матрицы и иметь возможность выписывать матричные элементы, не прибегая каждый раз непосредственно к теореме Вика, мы рассмотрим несколько примеров, которые помогут нам вывести некоторые правила.

§ 1. Взаимодействие с внешним электромагнитным полем

Вначале рассмотрим случай взаимодействия электронно-позитронного поля с заданным внешним электромагнитным полем. Тогда, энергия взаимодействия $\mathcal{H}_I(\mathbf{x}) = j^\mu(\mathbf{x}) A_\mu^e(\mathbf{x})$ и S -матрица получает вид

$$S = 1 + \left(-\frac{ie}{\hbar c}\right) \int d^4x_1 N(\bar{\psi}(\mathbf{x}_1) \hat{A}^e(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_1)) + \\ + \left(-\frac{ie}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \{N(\bar{\psi}(\mathbf{x}_1) \hat{A}^e(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_1)) \times \\ \times N(\bar{\psi}(\mathbf{x}_2) \hat{A}^e(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_2))\} + \dots \quad (18.1)$$

Рассмотрим член первого порядка

$$N(\bar{\psi}(\mathbf{x}_1) \hat{A}^e(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_1)).$$

Нормальное произведение спинорных множителей было уже выписано ранее [см. выражение (17.5)]. Теперь операторы рождения и уничтожения в нормальных произведениях представим прямыми: для электронов — со стрелкой, направленной вверх (в направлении возрастания времени), для позитронов — со стрелкой, направленной вниз (в направлении убывания времени). Тогда:

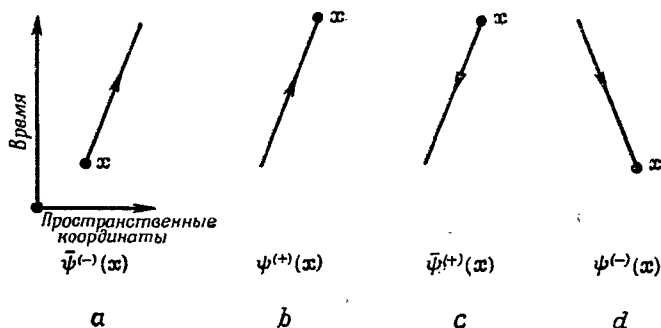
1. Оператор $\bar{\psi}^{(-)}(\mathbf{x})$, соответствующий рождению электрона в пространственно-временной точке \mathbf{x} , представляется направленной прямой, выходящей из точки \mathbf{x} вверх (фиг. 27, *a*).

2. Оператор $\psi^{(+)}(\mathbf{x})$ (уничтожение электрона в точке \mathbf{x}) представляется направленной вверх прямой, кончающейся в точке \mathbf{x} (фиг. 27, *b*).

3. Оператор $\bar{\psi}^{(+)}(\mathbf{x})$ (уничтожение позитрона в точке \mathbf{x}) представляется направленной вниз прямой, выходящей из точки \mathbf{x} (фиг. 27, *c*).

4. Оператор $\psi^{(-)}(\mathbf{x})$ (рождение позитрона в точке \mathbf{x}) представляется направленной вниз прямой, кончающейся в точке \mathbf{x} (фиг. 27, *d*).

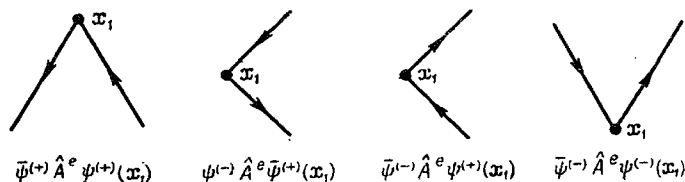
На пространственно-временных диаграммах, как это видно из фиг. 27, время растет по направлению вверх, так что предлагаемое



Ф и г. 27.

направление стрелок для позитронных множителей находится в согласии со взглядом Фейнмана на позитроны — как на электроны, движущиеся в направлении убывания времени.

Видно, что при таком описании операторы $\bar{\psi}$ представляются линиями, выходящими из точки \mathbf{x} (вверх или вниз), а операторы ψ — линиями, заканчивающимися в точке \mathbf{x} ; далее, линии с положительными частотами лежат ниже точки \mathbf{x} , а линии с отрицательными частотами — выше точки \mathbf{x} (позднее во времени). Тогда,



Ф и г. 28.

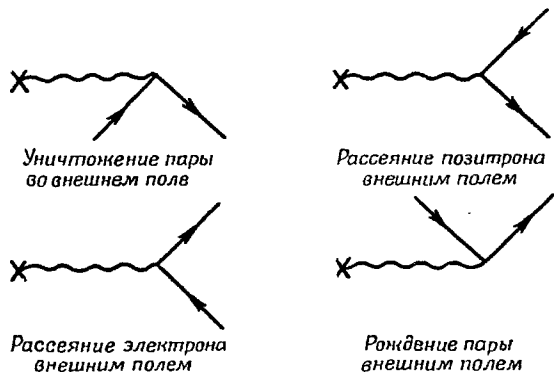
при этих условиях, член первого порядка в разложении S -матрицы можно представить четырьмя диаграммами Фейнмана, приведенными на фиг. 28. Подразумевается, что внешнее поле должно действовать в точке \mathbf{x}_1 . Иногда это изображается явно путем представления внешнего потенциала волнистой линией с крестом на конце. Используя последнее условие, можно изобразить все так, как показано на фиг. 29.

Рассмотрим следующий член второго порядка. Используя теорему Вика и выражая свертку двух спинорных множителей через функцию

распространения Фейнмана K_+ , мы получаем (опуская множители \hat{A}^e)

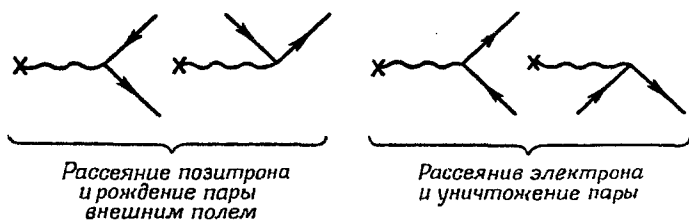
$$T \{ N(\bar{\psi}_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_1)) N(\bar{\psi}_\rho(x_2) \psi_\sigma(x_2)) \} = \\ = N(\bar{\psi}_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_1) \bar{\psi}_\rho(x_2) \psi_\sigma(x_2)) + N(\bar{\psi}_\alpha(x_1) K_{+\beta\rho}(x_1 - x_2) \psi_\sigma(x_2)) + \\ + N(\bar{\psi}_\rho(x_2) K_{+\sigma\alpha}(x_2 - x_1) \psi_\beta(x_1)) - K_{+\beta\rho}(x_1 - x_2) K_{+\sigma\alpha}(x_2 - x_1). \quad (18.2)$$

Если представить первый член разложения (18.2) диаграммами Фейнмана, то он будет соответствовать двум любым элементарным процессам из числа приведенных на фиг. 28. На фиг. 30 приводится



Фиг. 29.

несколько возможных процессов. Каждой диаграмме, приведенной на фиг. 30, соответствует другая, на которой точки x_1 и x_2 меняются



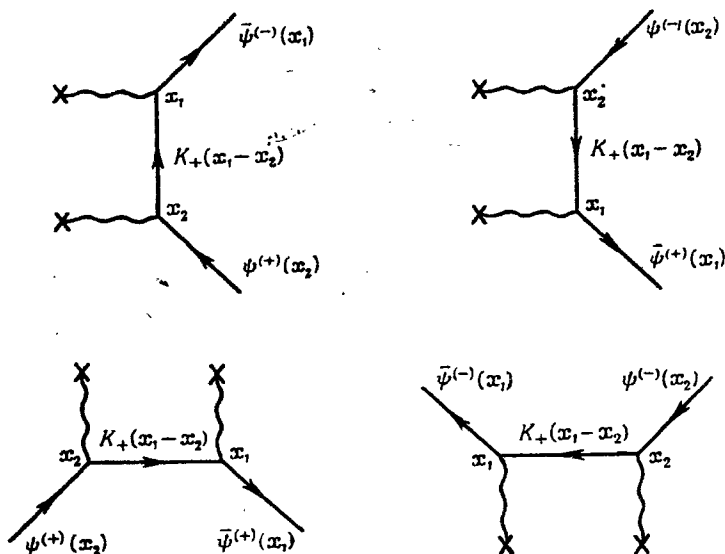
Фиг. 30.

местами. Для процессов с одной частицей такое же соответствие представлено явно вторым и третьим членами в правой стороне разложения (18.2). Эти члены приводят к одинаковым диаграммам Фейнмана, которые отличаются только наименованием пространственно-временных точек. Поскольку по переменным x_1 и x_2 проводится интегрирование, то мы можем объединить второй и третий члены в один. Это даст множитель 2!, сокращающийся с множителем 1/2!

стоящим перед членом второго порядка в разложении S -матрицы [см. формулу (18.1)]. Если мы теперь представим функцию $K_+(x_1 - x_2)$, появляющуюся при свертке операторов $\psi(x_1)$ и $\bar{\psi}(x_2)$, внутренней линией, направленной от точки x_2 к точке x_1 , то член

$$N(\bar{\psi}_\alpha(x_1) \hat{A}_{\alpha\beta}^e(x_1) K_{+\beta\rho}(x_1 - x_2) \hat{A}_{\rho\sigma}^e(x_2) \psi_\sigma(x_2)) \quad (18.3)$$

даст четыре диаграммы, приведенные на фиг. 31.



Фиг. 31.

Наконец, последний член в разложении (18.2)

$$\text{Sp}(\hat{A}^e(x_1) K_+(x_1 - x_2) \hat{A}^e(x_2) K_+(x_2 - x_1)),$$

представляем диаграммой на фиг. 32. Он описывает вакуумный процесс и соответствует рождению пары и ее последующей аннигиляции. Матричный элемент его дается выражением

$$\begin{aligned} M_V^{(2)} &= -\frac{1}{2!} \left(\frac{-ie}{\hbar c}\right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \times \\ &\times \sum_{\alpha\beta\rho\sigma} A_\mu^\alpha(x_1) A_\nu^\sigma(x_2) \{(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\rho\sigma} K_{+\beta\rho}(x_1 - x_2) K_{+\sigma\alpha}(x_2 - x_1)\} = \\ &= \frac{1}{2!} \left(\frac{e}{\hbar c}\right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \text{Sp} \{ \hat{A}^e(x_1) K_+(x_1 - x_2) \hat{A}^e(x_2) K_+(x_2 - x_1) \} \quad (18.4) \end{aligned}$$

и должен быть интерпретирован как амплитуда вероятности того, что вакуум остается вакуумом, т. е. вероятности того, что ни в начале, ни в конце нет частиц. Если вычислить этот матричный элемент, то оказывается, что он имеет бесконечную мнимую часть. Позднее (в § 3) мы увидим, как можно устранить эту трудность.

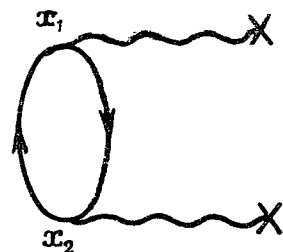
Из этих примеров ясно, что существует одно-однозначное соответствие между разложением на сумму нормальных произведений и диаграммами Фейнмана при условии, что две диаграммы Фейнмана, различающиеся только индексами вершин, считаются отличными друг от друга. Отметим, что нужно выбирать правильный знак матричного элемента, соответствующего каждой диаграмме, который фактически автоматически получается правильным при использовании разложения Вика.

В качестве примера рассмотрим амплитуду рассеяния позитрона внешним полем в низшем приближении. Пусть начальное состояние есть

$$\Psi_i = d_{s_1}^+(\vec{p}_1) \Phi_0 \quad (18.5)$$

и нас после рассеяния интересует состояние

$$\Psi_f = d_{s_2}^+(\vec{p}_2) \Phi_0. \quad (18.6)$$



Фиг. 32.

Амплитуда вероятности (первого порядка по внешнему потенциалу) для этого процесса равна

$$M = (\Psi_f, [1 + S^{(1)}] \Psi_i). \quad (18.7)$$

Рассмотрим член

$$M^{(2)} = (\Psi_f, S^{(1)} \Psi_i) = - \left(\frac{ie}{\hbar c} \right) \int d^4x_1 (d_{s_2}^+(\vec{p}_2) \Phi_0, N \{ \bar{\psi}(x_1) \hat{A}^e(x_1) \psi(x_1) \} d_{s_1}^+(\vec{p}_1) \Phi_0). \quad (18.8)$$

При разложении нормального произведения вклад дает только член $-\psi_{\beta}^{(-)}(x) \bar{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x)$: оператор $\bar{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x)$ уничтожает позитрон в начальном состоянии, а оператор $\psi_{\beta}^{(-)}(x)$ рождает позитрон в конечном состоянии. Далее, согласно соотношениям (15.68) и (15.70), имеем

$$-\psi_{\beta}^{(-)}(x) \bar{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x) = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \int d^3p' \left(\frac{m^2}{E(p)E(p')} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum_{rs}^{1,2} v_{\beta}^r(\vec{p}) \bar{v}_{\alpha}^s(\vec{p}') e^{ip \cdot x} e^{-ip' \cdot x} d_r^{\dagger}(\vec{p}) d_s(\vec{p}'). \quad (18.9)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 M^{(2)} = & + \left(\frac{ie}{\hbar c} \right) \frac{+1}{(2\pi)^3} \int d^4 x_1 \int d^3 p \int d^3 p' \times \\
 & \times \sum_{rs}^{1,2} (\Phi_0, d_{s_2}(\vec{p}_2) d_r^\dagger(\vec{p}) d_s(\vec{p}') d_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \Phi_0) \times \\
 & \times \left(\frac{m^2}{E(p)E(p')} \right)^{1/2} \bar{v}_s(\vec{p}') \hat{A}^e(\mathbf{x}_1) v_r(\vec{p}) e^{+i(p-p') \cdot \mathbf{x}_1} = \\
 = & \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{ie}{\hbar c} \right) \int d^4 x_1 \bar{v}_{s_1}(\vec{p}_1) \hat{A}^e(\mathbf{x}_1) v_{s_2}(\vec{p}_2) \times \\
 & \times e^{-i(p_1-p_2) \cdot \mathbf{x}_1} \left(\frac{m^2}{E(p_1)E(p_2)} \right)^{1/2}. \quad (18.10)
 \end{aligned}$$

Если ввести обозначение

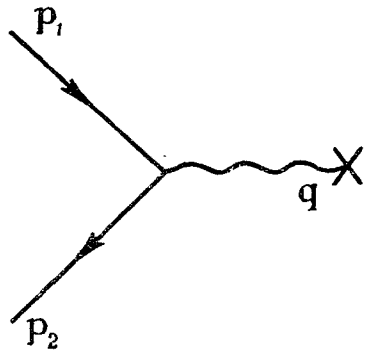
$$\hat{a}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi^4)} \int \hat{A}^e(\mathbf{x}) e^{+i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} d^4 x, \quad (18.11)$$

то матричный элемент получает вид

$$M^{(2)} = \left(\frac{e}{\hbar c} \right) \left(\frac{m}{E(p_1)} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{E(p_2)} \right)^{1/2} (2\pi i) \bar{v}_{s_1}(\vec{p}_1) \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) v_{s_2}(\vec{p}_2). \quad (18.12)$$

Это как раз тот матричный элемент, который мы должны были бы написать в теории Фейнмана. Отметим, однако, что здесь матричный элемент $M^{(2)}$ имеет знак плюс; в случае рассеяния электронов матричный элемент $M^{(2)}$ имеет знак минус. Множители $(m/E)^{1/2}$ являются точными нормировочными множителями волновых функций начального и конечного состояний.

Соотношение (18.12) показывает, что если мы чертим диаграммы Фейнмана в импульсном пространстве, то понятия „начальный“ и „конечный“ относятся к последовательности явлений вдоль пути частицы. Другими словами, если мы имеем дело с позитроном, то конечное состояние (если время растет снизу вверх) находится внизу диаграммы, как это показано на фиг. 33.



Фиг. 33.

Если применить только что описанный метод к диаграммам, содержащим две электронные или две позитронные линии, то автоматически будет включен правильный обменный член, обусловленный принципом Паули. Для практических целей, когда рассматриваются тождественные частицы (все электроны, а также все позитроны

тождественны), необходимо только из матричного элемента прямого рассеяния вычесть такой же самый матричный элемент, в котором конечные состояния частиц переставлены [напомним также соотношение (9.43)].

Таким образом, мы установили связь между формализмом теории поля и гораздо более простым формализмом Фейнмана, развитым в гл. 8 на основе интуитивных соображений.

§ 2. Диаграммы Фейнмана в мезонной теории

Рассмотрим теперь псевдоскалярную мезонную теорию с псевдоскалярной связью, для которой

$$\mathcal{H}_I(x) = G(\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi)(x). \quad (18.13)$$

В этом случае матричный элемент первого порядка S_1 равен нулю, поскольку энергия и импульс не могут сохраняться при излучении или поглощении свободного мезона свободным нуклоном. Поэтому рассмотрим член второго порядка

$$S^{(2)} = \left(-\frac{iG}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \{ T(\bar{\psi}(x_1)\gamma_5\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_5\psi(x_2)) \times \\ \times T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) \}. \quad (18.14)$$

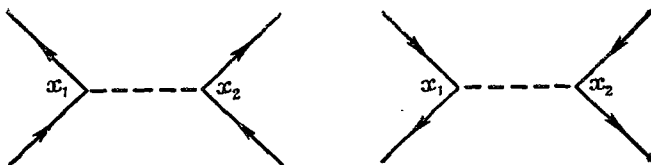
Мы записали отдельно T -произведение для нуклонных и мезонных множителей, потому что они коммутируют между собой. Ранее было показано, что свертка $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ равна нулю [см. выражение (17.50)]. Поэтому разложение T -произведения фермионных множителей на сумму нормальных произведений фактически тождественно разложению (18.2). Таким образом, необходимо рассмотреть только мезонные множители. Используя теорему Вика, мы получаем для них

$$T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) = N(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) + \frac{1}{2} \hbar c \Delta_F(x_1 - x_2). \quad (18.15)$$

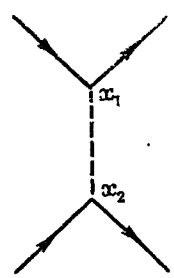
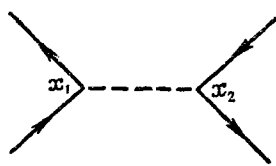
Если свертку двух бозонных множителей $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ представить пунктирной линией, соединяющей точки x_1 и x_2 , оператор рождения мезона $\varphi^{(-)}(x_1)$ — пунктирной линией, выходящей из точки x_1 и направленной вверх, и оператор уничтожения мезона $\varphi^{(+)}(x_1)$ — пунктирной линией, направленной к точке x_1 , то диаграммы на фиг. 34—41 будут представлять матричные элементы второго порядка, входящие в $S^{(2)}$. Рассмотрим отдельно эти диаграммы и соответствующие им матричные элементы.

$$1. N(\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi)N(\varphi\varphi).$$

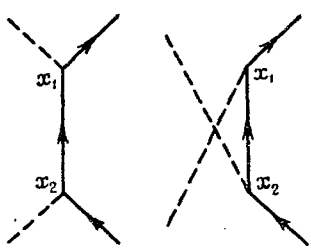
Этот член равен $(S^{(1)})^2$ и не дает вклада, так как энергия и импульс не сохраняются.



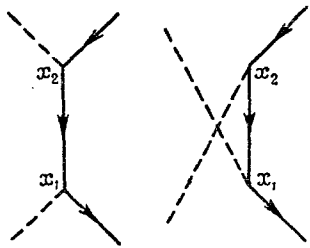
Ф и г. 34.



Ф и г. 35.

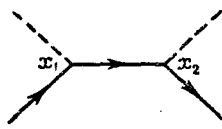


*Рассеяние мезона
на нуклоне*
а

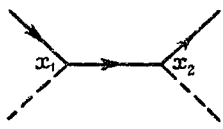


*Рассеяние мезона
на антинуклоне*
б

Ф и г. 36.



*Аннигиляция нуклона
и антинуклона
с излучением
двух мезонов*
а



*Рождение нуклонной
пары двумя
взаимодействующими
мезонами*
б

Ф и г. 37.

2. $N(\bar{\psi}\bar{\psi}\psi\psi)\varphi^*\varphi^*$.

Это выражение соответствует обмену бозонами между двумя фермионами и, следовательно, аналогично выражению для мёллеровского рассеяния нуклонов. Для взаимодействия тождественных частиц следует взять не только две диаграммы на фиг. 34, но и еще две, в которых точки x_1 и x_2 переставлены. Это справедливо для каждой диаграммы в данном параграфе, за исключением диаграммы на фиг. 40, соответствующей флуктуациям вакуума. Если сложить матричные элементы, соответствующие этим топологически эквивалентным диаграммам, то при этом как раз сокращается множитель $1/2!$ в разложении по теории возмущений. Обменное рассеяние будет автоматически учитываться при вычислении матричного элемента между начальным и конечным состояниями.



Фиг. 38.



Фиг. 39.



Фиг. 40.

Рассеянию антинуклона на нуклоне соответствуют две диаграммы на фиг. 35. Вторая возникает благодаря возможности аннигиляции двух частиц с испусканием виртуального бозона, который рождает частицы в конечном состоянии.

Только что рассмотренные процессы соответствуют наличию в начальном и конечном состояниях двух фермионов.

3. $N(\bar{\psi}K_+\psi)N(\varphi\varphi)$.

Матричный элемент $S^{(2)}$ содержит также ряд членов, соответствующих различным процессам с одним бозоном и одним фермионом в начальном и конечном состояниях. Диаграммы этих процессов приведены на фиг. 36. Кроме того, член $N(\bar{\psi}K_+\psi)N(\varphi\varphi)$ может привести к процессам, указанным на фиг. 37.

4. $N(\bar{\psi}K_+\psi)\varphi^*\varphi^*$.

Член $N(\bar{\psi}K_+\psi)\varphi^*\varphi^*$ соответствует случаю, когда в начальном и конечном состояниях имеется один фермион и ни одного бозона и представляет собственную энергию фермиона, которая будет весьма подробно рассмотрена ниже. Диаграммы собственной энергии приведены на фиг. 38.

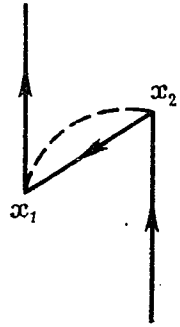
5. $N(\varphi\varphi)K_+K_+$.

Аналогично член $K_+K_+N(\varphi\varphi)$ соответствует случаю, когда в начальном и конечном состояниях имеется один бозон и ни одного фермиона, и представляет собственную энергию бозона, диаграмма которой приведена на фиг. 39.

6. $K_+K_+\Delta_F$.

Наконец, член $K_+K_+\Delta_F$, диаграмма Фейнмана которого приведена на фиг. 40, отвечает случаю, когда в начальном и конечном состояниях нет частиц. Он соответствует флуктуациям вакуума и будет рассмотрен в § 3.

Следует, по-видимому, еще раз подчеркнуть, что так же, как и в исходной позитронной теории Фейнмана (см. гл. 8) последовательность времен в промежуточных состояниях несущественна. Поэтому диаграмма на фиг. 41 представляет частный случай диаграммы на фиг. 38, если $x_1^0 < x_2^0$. Другими словами, мы можем произвольно деформировать диаграммы Фейнмана, но так, чтобы сохранялось правильное направление внешних линий, т. е. конечного и начального состояний.



Фиг. 41.

§ 3. Вакуумные амплитуды

Теперь обратимся к исследованию вакуумных матричных элементов высшего порядка. Рассмотрим вначале случай электронно-позитронного поля, взаимодействующего с внешним электромагнитным полем. Среднее значение по вакууму матричного элемента $S^{(3)}$, соответствующее вкладу третьего порядка в амплитуду перехода вакуума в вакуум под влиянием внешнего поля, дается выражением

$$M_V^{(3)} = \left(\Phi_0, \left(-\frac{ie}{\hbar c} \right)^3 \frac{1}{3!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \times \right. \\ \left. \times T \{ N(\bar{\psi} \hat{A}^e \psi(x_1)) N(\bar{\psi} \hat{A}^e \psi(x_2)) N(\bar{\psi} \hat{A}^e \psi(x_3)) \} \Phi_0 \right). \quad (18.16)$$

В этот матричный элемент дадут вклад только те нормальные произведения в разложении T -произведения, в которых все фермионные множители свернуты. Имеются два таких нормальных произведения, которые соответствуют двум следующим возможностям свертки:

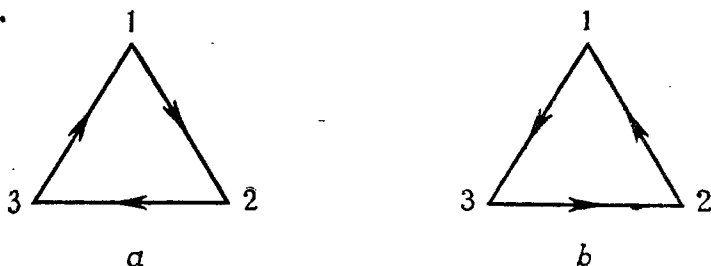
$$- \psi^*(x_1) \bar{\psi}^*(x_2) \psi^{**}(x_2) \bar{\psi}^{***}(x_3) \psi^{***}(x_3) \bar{\psi}^{***}(x_1) \quad (18.17a)$$

и

$$- \psi^*(x_1) \bar{\psi}^*(x_3) \psi^{**}(x_3) \bar{\psi}^{***}(x_2) \psi^{***}(x_2) \bar{\psi}^{***}(x_1). \quad (18.17b)$$

Эти члены соответствуют двум диаграммам, приведенным на фиг. 42, причем электромагнитное поле действует в точках 1, 2, 3.

Следует обратить внимание на знак минус перед выражениями (18.17 а) и (18.17 б). Он обусловлен тем, что при свертывании первого и последнего фермионных множителей мы всегда должны переставить свертываемый множитель с нечетным числом множителей ψ или $\bar{\psi}$. Итак, знак минус появляется по той же причине, что и перед последним членом в правой стороне соотношения (18.2). Вообще перед матричным элементом любой замкнутой диаграммы Фейнмана стоит множитель -1 .



Ф и г. 42.

Следовательно, матричный элемент, соответствующий диаграммам на фиг. 42, имеет следующий вид:

$$M_V^{(3)} = -\frac{1}{3!} \left(-\frac{ie}{\hbar c}\right)^3 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \times \\ \times \{ \text{Sp} (\hat{A}(x_1) K_+(x_1-x_2) \hat{A}(x_2) K_+(x_2-x_3) \hat{A}(x_3) K_+(x_3-x_1) + \\ + \text{Sp} (A(x_1) K_+(x_1-x_3) \hat{A}(x_3) K_+(x_3-x_2) \times \\ \times \hat{A}(x_2) K_+(x_2-x_1)) \}. \quad (18.18)$$

Хотя второй член можно сделать по форме тождественным первому с помощью замены переменных, тем не менее мы оставим $M_V^{(3)}$ в форме (18.18) по причинам, которые вскоре выяснятся.

Покажем теперь, что матричный элемент (18.18) фактически равен нулю. Для этого проведем следующее доказательство. Рассмотрим матрицы γ , подчиняющиеся перестановочным соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I. \quad (18.19)$$

Если мы будем транспонировать это соотношение, то получим

$$(\gamma^\mu)^T (\gamma^\nu)^T + (\gamma^\nu)^T (\gamma^\mu)^T = 2g^{\mu\nu} I. \quad (18.20)$$

Итак, транспонированные матрицы γ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и сами матрицы γ . Поэтому существует преобразование подобия, которое переводит матрицу γ^μ

в матрицу $(\gamma^\mu)^T$ (см. гл. 13, § 6). Если обозначить матрицу преобразования через C , то

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}. \quad (18.21)$$

Напомним, что матрицу C можно выбрать унитарной и антисимметричной, т. е.

$$C^\dagger C = CC^\dagger = 1, \quad (18.22)$$

$$C^T = -C. \quad (18.23)$$

Это свойство антисимметрии эквивалентно утверждению, что существует такое представление матриц γ , в котором все матрицы γ являются чисто мнимыми, т. е. $i\gamma_\mu$ вещественно для $\mu = 0, 1, 2, 3$ (Майорана [319], Рака [399], Фарри [201]). Связь между существованием преобразования подобия (18.21) и общими свойствами симметрии при перестановке положительных и отрицательных зарядов в квантовой электродинамике рассматривалась Фарри [200], Крамерсом [287], Пайсом и Йостом [367], Вольфенштейном и Равенхоллом [540] (см. также гл. 13, § 6 и гл. 25, § 2).

Если подставить в первый член в формуле (18.18) под знаком шпура множитель $C^{-1}C = I$, то получим

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\) = & \text{Sp} [C\hat{A}(\mathbf{x}_1)C^{-1}CK_+(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)C^{-1}C\hat{A}(\mathbf{x}_2)C^{-1}CK_+(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \times \\ & \times C^{-1}C\hat{A}(\mathbf{x}_3)C^{-1}CK_+(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)C^{-1}]. \end{aligned} \quad (18.24)$$

Далее, из формулы (18.21) следует, что

$$\begin{aligned} CK_+(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)C^{-1} &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{\hat{p}^T + m}{p^2 - m^2} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} d^4p = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{\hat{p}^T + m}{p^2 - m^2} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} d^4p = K_+^T(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1). \end{aligned} \quad (18.25)$$

Поэтому шпур в выражении (18.24) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\) = & (-1)^3 \text{Sp} (\hat{A}^T(\mathbf{x}_1)K_+^T(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\hat{A}^T(\mathbf{x}_2)K_+^T(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) \times \\ & \times \hat{A}^T(\mathbf{x}_3)K_+^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)) = \\ & = -\text{Sp} (K_+(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)\hat{A}(\mathbf{x}_3)K_+(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)\hat{A}(\mathbf{x}_2)K_+(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\hat{A}(\mathbf{x}_1)) = \\ & = -\text{Sp} (\hat{A}(\mathbf{x}_1)K_+(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)\hat{A}(\mathbf{x}_3)K_+(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) \times \\ & \times \hat{A}(\mathbf{x}_2)K_+(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)), \end{aligned} \quad (18.26)$$

так что два члена в выражении (18.18) сокращаются и, действительно, $M_V^{(3)} = 0$. Фактически уже каждый член в отдельности равен нулю, поскольку заменой переменных можно преобразовать выра-

жение (18.26) к исходной форме [см. левую сторону выражения (18.24)]; при этом оказывается, что выражение для шпура меняет знак.

Взаимному сокращению двух членов в выражении (18.18) можно дать следующее физическое толкование: первый член, соответствующий диаграмме на фиг. 42, *a*, может рассматриваться как описывающий движение электрона по одному пути, тогда как второй член, соответствующий диаграмме на фиг. 42, *b*, — как описывающий движение электрона по другому пути. Однако при изменении направления движения электрон ведет себя как позитрон, т. е. изменяется знак его заряда и, следовательно, знак каждого взаимодействия с потенциалом. Поэтому сумма матричных элементов, соответствующих двум таким диаграммам, равна нулю. В общем случае матричный элемент, соответствующий замкнутой петле с нечетным числом вершин, по аналогичным причинам равен нулю. Эта теорема принадлежит Фарри [200].

Обозначим, следуя Фейнману, сумму матричных элементов всех диаграмм с замкнутыми петлями через L , т. е.

$$\sum_n M_n^{(2)} = -L, \quad (18.27)$$

где знак минус подчеркивает тот факт, что мы имеем дело с замкнутыми петлями. Кроме этих одиночных петель, возможно рождение двух независимых пар, каждая из которых может сама аннигилировать. Вклад таких пар петель равен $L^2/2!$, поскольку в L^2 каждая пара петель учитывается дважды. Поэтому полная амплитуда перехода вакуума в вакуум есть

$$(\Phi_0, S\Phi_0) = 1 - L + \frac{L^2}{2!} - \frac{L^3}{3!} + \dots = e^{-L}. \quad (18.28)$$

Величина L имеет бесконечную мнимую часть, соответствующую собственной энергии вакуума; однако эта бесконечность не влияет на нормировочную константу, так как вероятность того, что вакуум останется вакуумом, дается выражением

$$|(\Phi_0, S\Phi_0)|^2 = \exp(-2 \operatorname{Re} L); \quad (18.29)$$

вещественная часть L , вообще говоря, конечна.

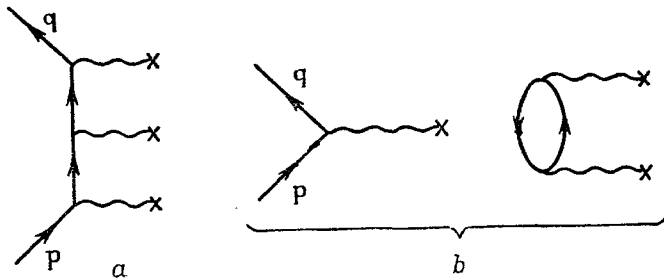
Рассмотрим теперь рассеяние электрона в третьем порядке. Кроме троекратного взаимодействия с внешним полем (фиг. 43, *a*), возможно появление однократного рассеяния электрона вместе с несвязанным с ним вакуумным процессом, как это показано на фиг. 43, *b*. Матричный элемент, соответствующий переходу из состояния с импульсом p в состояние с импульсом q , для диаграммы Фейнмана на фиг. 43, *b* можно записать в следующем виде:

$$(q | S^{(3b)} | p) = (q | R^{(1)} | p) (0 | S^{(2)} | 0), \quad (18.30)$$

где $(q|R^{(1)}|p)$ — первое борновское приближение для матричного элемента, соответствующего однократному рассеянию, т. е.

$$(q|R|p) = (-2\pi i) \left(\frac{e}{\hbar c}\right) \left(\frac{m^2}{E(p)E(q)}\right)^{1/2} \vec{u}(q) \hat{a}(q-p) u(\vec{p}), \quad (18.31)$$

и $(0|S^{(2)}|0)$ — среднее значение матричного элемента второго порядка S -матрицы по вакууму. Отсутствие связи между двумя частями диаграммы на фиг. 43, *b* проявляется в том, что матричный элемент (18.30) представляет произведение двух множителей, не имеющих общих переменных.



Фиг. 43.

Аналогично в случае процессов более высокого порядка мы получаем однократное рассеяние вместе с любым возможным вакуумным процессом. Поэтому полную амплитуду перехода из состояния с импульсом p в состояние с импульсом q можно записать в следующем виде:

$$(q|S|p) = (q|R|p)(0|S|0) = (q|R|p)e^{-L}, \quad (18.32)$$

где $(0|S|0)$ — среднее значение S -матрицы по вакууму, представляемое вакуумными диаграммами Фейнмана, тогда как $(q|R|p)$ представляется только связанными диаграммами для процесса рассеяния, т. е. диаграммами, на которых нет несвязанных вакуумных процессов. Величину $(q|S|p)$ Фейнман [168] назвал абсолютной амплитудой вероятности перехода, а величину $(q|R|p)$ — относительной амплитудой вероятности перехода.

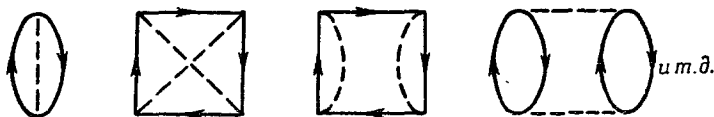
На деле для задачи электронов,двигающихся во внешнем поле, мы должны вычислить L только 1 раз для заданного поля и рассматривать только матричные элементы рассеяния связанных диаграмм [матрица R в выражении (18.32)]. Тогда абсолютная амплитуда вероятности для данного процесса дается относительной амплитудой вероятности $|(p|R|q)|^2$, умноженной на вероятность перехода вакуума в вакуум $[\exp(-2 \operatorname{Re} L)]$.

Аналогичная ситуация имеет место и в общем случае теории полей. Вакуумные процессы соответствуют диаграммам, приведенным на фиг. 44. Их матричный элемент дается выражением

$$(\Phi_0 | S | \Phi_0) = e^{-L}. \quad (18.33)$$

В случае отсутствия внешнего поля величина L является чисто мнимой, так что вероятность перехода в вакуум равна единице.

Таким образом, если мы сосредоточиваем наше внимание на любом реальном процессе, например на процессе, приведенном на фиг. 34, с матричным элементом M , то в высших порядках эти же диаграммы будут появляться вместе с несвязанными вакуумными процессами.



Фиг. 44.

Суммирование по всем вакуумным процессам сводится к простому умножению матричного элемента M на $\exp(-L)$, т. е. на фазовый множитель, по абсолютной величине равный единице. Поэтому в дальнейшем мы можем не рассматривать все несвязанные диаграммы.

§ 4. Правила для диаграмм Фейнмана

В предыдущих параграфах мы установили одно-однозначное соответствие между матричными элементами n -го порядка S -матрицы (нашими нормальными произведениями) и диаграммами Фейнмана с n вершинами, если совпадают пространственно-временные точки $x_1 \dots x_n$. Так как разложение T -произведения включает в себя все возможные свертки, то подобным образом существует одно-однозначное соответствие между всеми возможными диаграммами с данным числом n вершин (с совпадающими точками) и нормальным разложением S_n .

Это последнее обстоятельство и есть причина того, что концепция диаграмм Фейнмана оказалась весьма полезной. На практике выписываются все возможные топологически различные диаграммы¹⁾ в соответствии с членом энергии взаимодействия. Если последний имеет вид $\bar{\psi}\Gamma\psi\phi$, то в каждой вершине должны встречаться две фермионные и одна бозонная линии. Матричный элемент, соответствующий любой диаграмме n -го порядка, можно получить, выписывая следующие множители:

¹⁾ Диаграммы, отличающиеся только перестановкой индексов вершин, не рассматриваются как различные.

1. $(-i/\hbar c)^n$ из разложения по теории возмущений.
2. $(G\Gamma)_{\alpha\beta}$ в каждой вершине.
3. $1/2\hbar c\Delta_F(x_j - x_l)$ для внутренней бозонной линии, соединяющей точки x_j и x_l .
4. $[-1/2S_F(x_l - x_j)]_{\alpha\beta} = [K_+(x_l - x_j)]_{\alpha\beta}$ для внутренней фермионной линии, направленной от точки x_j к точке x_l . Предполагается, что вершине x_l соответствует множитель $(G\Gamma)_{\alpha\alpha}$, а вершине x_j — множитель $(G\Gamma)_{\beta\beta}$.
5. Соответственно выбранные операторы уничтожения и рождения $\psi^{(\pm)}(x)$, $\bar{\psi}^{(\pm)}(x)$, $\varphi^{(\pm)}(x)$ для каждой внешней свободной фермионной или бозонной линии, выходящей из точки x или приходящей в точку x .
6. (-1) для каждой внутренней замкнутой фермионной петли.
7. После этого необходимо провести интегрирование по переменным x_1, x_2, \dots, x_n .

Если квантованное бозонное поле есть электромагнитное поле, которое представляется волнистыми линиями, то множитель, отмеченный в п. 2, заменяется на следующий:

2. $(e\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ в каждой вершине, а множитель, отмеченный в п. 3, — на
3. $-1/2\hbar c D_F(x_j - x_l) g_{\mu\nu}$ для внутренней фотонной линии, соединяющей точки x_j и x_l .

Предполагается, что множители $(e\gamma^\mu)$ и $(e\gamma^\nu)$ имеются в соответствующих вершинах. Суммирование проводится по поляризационным индексам μ и ν .

Аналогично в п. 4 величина $G\Gamma$ заменяется на величину $e\gamma^\mu$, и в п. 5 функция φ — на A_μ , где индекс μ совпадает с индексом матрицы γ^μ , действующей в той же вершине. Отметим, что мы опустили множитель $1/n!$, поскольку рассматриваются только топологически различные диаграммы. Ясно, что имеется $n!$ перестановок точек $x_1 \dots x_n$ между собой, которые оставляют диаграммы топологически неизменными и различаются только индексами вершин. Это последнее замечание неприменимо к флуктуациям вакуума.

Строго говоря, если рассматривается электромагнитное поле, то необходимо принимать во внимание дополнительное условие для потенциалов. В представлении взаимодействия в присутствии электрических зарядов это условие можно взять (Блейлер [41]) в виде

$$\left(\Psi(t), \eta \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \Psi(t) \right)_{x_0=t} = 0. \quad (18.34)$$

Однако если мы ограничиваемся рассмотрением задач рассеяния, в которых в начальном и конечном состояниях заданы „голые“ частицы при $t = \pm\infty$, то можно в целом использовать формализм, развитый в гл. 15, § 4, поскольку эволюция системы описывается

через состояния „голых“ частиц. Поэтому для задач рассеяния нет нужды в введении какой-либо модификации дополнительного условия (в связи с этим см. работу Кёстера и Яуха [85]).

В приведенном выше рассмотрении не использовалось то, что при отсутствии внешних полей полная энергия и импульс системы при столкновениях не меняются. Поэтому следует ожидать, что мы получим существенное упрощение, если перейдем в импульсное пространство:

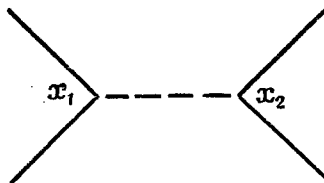
ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

§ 1. Рассеяние двух фермионов

Для иллюстрации методов, используемых в импульсном представлении, рассмотрим снова рассеяние двух фермионов. Согласно правилам, установленным в предыдущей главе, оператор, соответствующий диаграмме на фиг. 45, можно легко написать в пространстве координат. Он дается следующим выражением:

$$S_{NN}^{(2)} = \left(\frac{-i}{\hbar c}\right)^2 G^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 N(\bar{\psi}(x_1) \Gamma \psi(x_1) \times \\ \times \frac{\hbar c}{2} \Delta_F(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \Gamma \psi(x_2)). \quad (19.1)$$

Здесь мы еще не разложили операторы фермионного поля на операторы рождения и уничтожения. Отметим снова, что множитель $1/2!$ в формуле (19.1) опущен, поскольку имеется $2!$ диаграмм указанного типа, а именно диаграмма на фиг. 45 и такая же диаграмма с переставленными x_1 и x_2 . Если мы рассматриваем рассеяние нуклона на нуклоне, то $\bar{\psi}$ должно быть оператором рождения и ψ — оператором уничтожения нуклона. Величина $S_{NN}^{(2)}$ поэтому должна иметь форму $N(b^\dagger b b^\dagger b)$. Для написания последней формулы мы использовали разложение операторов рождения и уничтожения, согласно формулам (15.67) и (15.69). Для получения амплитуды вероятности рассматриваемого процесса нужно взять матричный элемент $S_{NN}^{(2)}$ между начальным и конечным состояниями Φ_i и Φ_f , соответственно. Определим эти состояния следующим образом:



Фиг. 45.

$$\Phi_i = b_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) b_{r_1}^\dagger(\vec{q}_1) \Phi_0, \\ \Phi_f = b_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2) b_{r_2}^\dagger(\vec{q}_2) \Phi_0, \quad (19.2)$$

где $\vec{p}_1 s_1$, $\vec{q}_1 r_1$ и $\vec{p}_2 s_2$, $\vec{q}_2 r_2$ — импульсы и спины нуклонов соответственно до и после столкновения. Тогда рассмотрение, аналогичное проведенному в гл. 18 [см. формулы (18.5) — (18.12)], показывает,

что действие величины $\bar{\psi}(\mathbf{x}_1)\Gamma\psi(\mathbf{x}_1)$ сводится к уничтожению частицы, характеризующейся переменными p_1s_1 в состоянии с волновой функцией $w^{s_1}(\vec{p}_1)$ в исходном состоянии, и рождению частицы p_2s_2 с волновой функцией $w^{s_2}(\vec{p}_2)$. Оператор $\bar{\psi}(\mathbf{x}_2)\Gamma\psi(\mathbf{x}_2)$ дает то же самое для частиц, характеризующихся переменными qr . Кроме того, $S^{(2)}$ дает также матричный элемент обменного рассеяния, в котором волновые функции двух частиц в конечном состоянии переставлены.

С другой стороны, мы можем в выражении (19.1) сразу заменить операторы $\bar{\psi}(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ соответствующими амплитудами свободных частиц, которые они рождает или поглощают,

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}_1) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \bar{w}^{s_2}(\vec{p}_2) e^{+i\vec{p}_2 \cdot \mathbf{x}_1} \left(\frac{m}{E(p_2)}\right)^{1/2}, \quad (19.3)$$

$$\psi(\mathbf{x}_1) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} w^{s_1}(\vec{p}_1) e^{-i\vec{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \left(\frac{m}{E(p_1)}\right)^{1/2}, \quad (19.4)$$

где $p^2 = m^2$ и $p_0 = E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$.

Тогда матричный элемент необменного рассеяния (мы сохраняем множители \hbar и c) получает следующий вид:

$$M = \left(-\frac{iG}{\hbar c}\right)^2 \hbar c \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4k \left(\frac{m^4}{E(p_1)E(p_2)E(q_1)E(q_2)}\right)^{1/2} \times \\ \times e^{i\vec{p}_2 \cdot \mathbf{x}_1} e^{-i\vec{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\vec{q}_2 \cdot \mathbf{x}_2} e^{-i\vec{q}_1 \cdot \mathbf{x}_2} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \times \\ \times (\bar{w}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \Gamma_a w_a^{s_1}(\vec{p}_1)) (\bar{w}_b^{r_2}(\vec{q}_2) \Gamma_b w_b^{r_1}(\vec{q}_1)) \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (19.5)^1$$

Матричный элемент обменного рассеяния получается перестановкой в элементе — M волновых функций конечных состояний двух частиц, так что часть с волновыми функциями получает вид

$$[\bar{w}_a^{r_2}(\vec{q}_2) \Gamma_a w_a^{s_1}(\vec{p}_1)] [\bar{w}_b^{s_2}(\vec{p}_2) \Gamma_b w_b^{r_1}(\vec{q}_1)] e^{i(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) \cdot \mathbf{x}_1} e^{i(\vec{p}_2 - \vec{q}_1) \cdot \mathbf{x}_2}. \quad (19.6)$$

Выполняя указанные интегрирования по переменным \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , мы получаем для матричного элемента M следующее выражение:

$$M = -\frac{i}{\pi} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \int d^4k \delta^{(4)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 + \mathbf{k}) \delta^{(4)}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{k}) \times \\ \times [\bar{w}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \Gamma_a w_a^{s_1}(\vec{p}_1)] [\bar{w}_b^{r_2}(\vec{q}_2) \Gamma_b w_b^{r_1}(\vec{q}_1)] \times \\ \times \left(\frac{m^4}{E(p_1)E(p_2)E(q_1)E(q_2)}\right)^{1/2} \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (19.7)$$

¹⁾ Чтобы различать две частицы, мы используем при соответствующих им волновых функциях дополнительные индексы a и b .

Мы специально оставили матричный элемент в форме (19.7), в которой его можно легко интерпретировать. Представим себе (фиг. 46), что падающий нуклон a с импульсом p_1 и спином s_1 [волновая функция $w_a^{s_1}(\vec{p}_1)$] излучает (множитель $G\Gamma$) бозонный квант с импульсом k и затем движется в конечном состоянии с импульсом p_2 [волновая функция $w_a^{s_2}(\vec{p}_2)$].

Дельта-функция $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 - p_1 + k)$, возникающая при интегрировании по переменной x_1 , указывает, что при излучении сохраняется энергия и импульс. Итак, нуклон продолжает двигаться с импульсом $p_2 = p_1 - k$. Аналогично нуклон b с импульсом q_1 [волновая функция $w_b^{s_1}(\vec{q}_1)$] поглощает квант (множитель $G\Gamma$), испущенный нуклоном a , и затем продолжает двигаться в конечном состоянии [волновая функция $w_b^{s_2}(\vec{q}_2)$]. Благодаря наличию δ -функции

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_2 - q_1 - k)$$

энергия и импульс при этом процессе снова сохраняются¹⁾. Функция пространства для бозе-квантов имеет вид

$$\frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon},$$

причем необходимо провести интегрирование по всем виртуальным квантам, т. е. по внутренним линиям. Величина

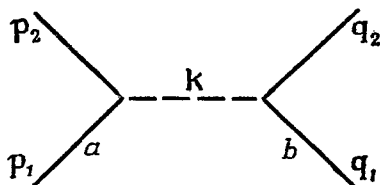
$$\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right)^4 \left(\frac{m^4}{E(p_1)E(p_2)E(q_1)E(q_2)}\right)^{1/2}$$

представляет нормировочные множители нуклонных волновых функций. Наконец, все выражение умножается на множитель $(-i/\hbar c)^2$, возникающий при разложении на основании теории возмущений.

В данном примере мы можем выполнить интегрирование по k и получить окончательное выражение для нашего матричного элемента

$$M = -\frac{i}{\pi} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \delta^{(4)}(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \left(\frac{m^4}{E(p_1)E(p_2)E(q_1)E(q_2)}\right)^{1/2} \times \\ \times [\overline{w}_a^{s_2}(\vec{p}_2) \Gamma_a w_a^{s_1}(\vec{p}_1)] [\overline{w}_b^{s_2}(\vec{q}_2) \Gamma_b w_b^{s_1}(\vec{q}_1)] [(q_2 - q_1)^2 - \mu^2]^{-1}. \quad (19.8)$$

¹⁾ В старой теории возмущений энергия *не сохранялась* в промежуточных состояниях, хотя импульс и масса *сохранялись*. В теории возмущений Фейнмана и Дайсона энергия и импульс *сохраняются*, но масса (являющаяся инвариантом теории) *не сохраняется*. В этом источник инвариантного характера теории возмущений Фейнмана. См. также работы Умэдзавы и Кавабе [489, 493].



Фиг. 46.

Выражение (19.8) с точностью до нормировочного множителя совпадает с выражением (9.43), полученным прежде; это подтверждает правильность вывода, проведенного в гл. 9. Дельта-функция $\delta^{(4)}$ снова выражает сохранение полной энергии и импульса в данном процессе.

§ 2. Собственная энергия нуклона

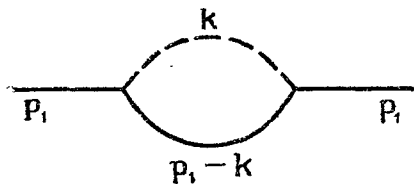
В качестве второго иллюстрационного примера рассмотрим собственную энергию нуклона. Ей соответствует диаграмма Фейнмана, приведенная на фиг. 38, и, следовательно, следующий оператор:

$$S_{SE}^{(2)} = \left(-\frac{iG}{\hbar c}\right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 N \left[\bar{\psi}(x_1) \Gamma \left(-\frac{1}{2} S_F(x_1 - x_2)\right) \times \right. \\ \left. \times \Gamma \psi(x_2) \right] \frac{\hbar c}{2} \Delta_F(x_1 - x_2); \quad (19.9)$$

матричный элемент этого оператора в импульсном пространстве при использовании соотношения (19.3), (19.4), (17.65), (17.79) принимает следующий вид:

$$M = \left(-\frac{iG}{\hbar c}\right)^2 \left(\frac{i}{(2\pi)^4}\right)^2 \frac{\hbar c}{(2\pi)^3} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4q \int d^4k \times \\ \times e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_2} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \times \\ \times \bar{w}^s(\vec{p}_2) \Gamma \frac{\hat{q} + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \Gamma w^s(\vec{p}_1) \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left(\frac{m^2}{E(p_1)E(p_2)}\right)^{1/2} = \\ = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{G^2}{4\pi\hbar c}\right) \int d^4k \int d^4q \delta^{(4)}(p_2 - q - k) \delta^{(4)}(p_1 - k - q) \times \\ \times \bar{w}^s(\vec{p}_2) \Gamma \frac{\hat{q} + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \Gamma w^s(\vec{p}_1) \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left(\frac{m^2}{E(p_1)E(p_2)}\right)^{1/2}. \quad (19.10)$$

Этот матричный элемент можно снова легко интерпретировать с помощью диаграммы Фейнмана в импульсном пространстве (фиг. 47).



Фиг. 47.

Нуклон с импульсом p_1 (множитель $w^s(\vec{p}_1)$) испускает бозон (множитель $G\Gamma$) с импульсом k . Дельта-функция $\delta^{(4)}(p_1 - k - q)$ указывает, что при этом процессе энергия и импульс сохраняются, так что после излучения мезона нуклон движется с импульсом $q = p_1 - k$. Функция распространения для него

(обратный оператор Дирака) есть $(\hat{q} - m)^{-1}$. Виртуальный мезон с импульсом k , функция распространения которого (обратный оператор Клейна — Гордона) есть $(k^2 - \mu^2)^{-1}$, поглощается затем нуклоном (множитель $G\Gamma$), причем снова сохраняются энергия и импульс [$\delta^{(4)}(p_2 - q - k)$]. Далее, необходимо провести интегрирование по всем

виртуальным квантам (внутренним линиям), т. е. по переменным \mathbf{q} и \mathbf{k} . Выполняя интегрирование по \mathbf{q} , получаем

$$M = \frac{1}{2\pi^2} \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \frac{m}{E(p_1)} \left(\frac{G^2}{4\pi\hbar c} \right) \int d^4k \times \\ \times \bar{w}^s(\vec{p}_2) \Gamma \frac{\hat{p}_2 - \hat{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon'} \Gamma \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} w^s(\vec{p}_1). \quad (19.11)$$

Функция $\delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ снова соответствует сохранению полной энергии и импульса. Энергия и импульс нуклона до и после процесса одинаковы, иначе матричный элемент был бы равен нулю. Поэтому существует только диагональный элемент, для которого $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$. Этот единственный, отличный от нуля элемент можно переписать в несколько иной форме, если учесть, что в данном случае операторы рождения и уничтожения рожают и уничтожают частицы с одинаковыми энергиями и импульсами, так что в формуле (19.9) можно сделать подстановку:

$$\bar{\psi}(x_1) \rightarrow \bar{w}^s(\vec{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_1} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{E(p)} \right)^{1/2}, \\ \psi(x_2) \rightarrow w^s(\vec{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{E(p)} \right)^{1/2}. \quad (19.12)$$

Интегрирование по переменным \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 можно заменить на интегрирование по переменным $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, причем последнее интегрирование дает величину VT , равную пространственно-временному объему, по которому проводится интегрирование. При этом мы получаем следующее выражение для нашего матричного элемента:

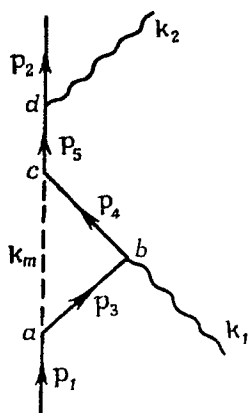
$$M = \frac{1}{4\pi^3} \left(\frac{G^2}{4\pi\hbar c} \right) \frac{V}{(2\pi)^3} T \frac{m}{E(p)} \int d^4k \times \\ \times \bar{w}^s(\vec{p}) \Gamma \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon'} \Gamma \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} w^s(\vec{p}). \quad (19.13)$$

Пропорциональность матричного элемента M объему V обусловлена тем, что спинорные волновые функции были нормированы в бесконечном пространстве. Если бы мы нормировали их на объем V , то множитель $V/(2\pi)^3$ не появился бы, и матричный элемент был бы просто пропорционален времени T . Значение указанной зависимости от T мы рассмотрим кратко при обсуждении собственной энергии в гл. 20.

§ 3. Явная форма матричного элемента

Из рассмотренных выше примеров следует, что нет необходимости сначала выписывать матричный элемент в пространстве координат. Он может быть сразу написан в импульсном пространстве.

В качестве примера рассмотрим более сложную диаграмму Фейнмана (фиг. 48). Физически эта диаграмма представляет поправку к комптоновскому рассеянию на протоне, обусловленную излучением виртуального нейтрального мезона. Вначале фермион (протон) находится в свободном состоянии $\psi^{s_1}(\vec{p}_1)$, потом рассеивается в точке a с излучением виртуального мезона, поглощает падающий световой квант в точке b , поглощает обратно виртуальный мезон в точке c , наконец, излучает световой квант в точке d и затем продолжает двигаться в свободном состоянии $\psi^{s_2}(\vec{p}_2)$. Таким образом, диаграмма содержит четыре внешних линии, которые не оканчиваются на диаграмме. Эти линии соответствуют фермиону и фотону в начальном и конечном состояниях. Диаграмма имеет также четыре внутренних линии, а именно ab , bc , cd и ac , из которых три первых линии соответствуют распространению фермионов, а последняя линия — распространению виртуального мезона. Диаграмма имеет четыре вершины и, следовательно, соответ-



Фиг. 48.

ствует процессу четвертого порядка, который можно получить из матричного элемента $S^{(4)}$; причем последний задается формулой

$$S^{(4)} = e^2 G^2 \left(-\frac{i}{\hbar c} \right)^4 \frac{1}{4!} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 x_3 \int d^4 x_4 \times \\ \times T \{ N(\bar{\Psi} \hat{A} \Psi(x_1)) N(\bar{\Psi} \hat{A} \Psi(x_2)) N(\bar{\Psi} \hat{\Gamma} \Psi(x_3)) N(\bar{\Psi} \hat{\Gamma} \Psi(x_4)) \}. \quad (19.14)$$

Напомним, что на фиг. 48 не следует уделять внимания направлению во времени внутренних фермионных и бозонных линий. Однако, чтобы выписать матричный элемент, мы должны обратить внимание на *порядок*, в котором отдельные процессы встречаются вдоль фермионной линии (причем этот порядок не обязательно должен совпадать с последовательностью их во времени). С какого конца диаграммы (по времени) мы должны начать, зависит от договоренности. Оказывается, удобно начать с конечного состояния и затем двигаться назад вдоль фермионной линии.

Напомним следующие правила, выведенные нами в предыдущих примерах. Выпишем множители:

1. $\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p} - m}$ для каждой внутренней нуклонной линии с импульсом p .

2. $\frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mu^2}$ для каждой внутренней мезонной линии с импульсом k .

3. — $\frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} g_{\mu\nu}$ для каждой внутренней фотонной линии с импульсом k , соединяющей вершины, в которых имеются матрицы γ^μ и γ^ν .

4. $e\gamma^\mu$ для излучения или поглощения в вершине виртуального (внутреннего) фотона заряженным фермионом.

5. $G\Gamma$ для излучения или поглощения в вершине виртуального (внутреннего) мезона нуклоном.

6. $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \frac{(\hbar c)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2|k_0|}}$ для каждой внешней фотонной линии, которая излучается или поглощается в вершине (в которой имеется матрица γ^μ). $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})$ — 4-вектор поляризации ($\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu = -1$) излучаемого или поглощаемого фотона с вектором энергии-импульса k [$k_0 = |k|$]; отметим также, что $k^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0$ и поляризацией λ .

7. $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(\hbar c)^{1/2}}{\sqrt{2\omega_k}}$ для каждого внешнего мезона с энергией $\omega_k = \sqrt{k^2 + \mu^2}$, который излучается или поглощается нуклоном в вершине (в которой действует оператор $G\Gamma$).

8. $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(p)}} \bar{\omega}^s(\vec{p})$ для каждой внешней нуклонной линии с импульсом \vec{p} и спином s , выходящей из диаграммы.

9. $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(p)}} \omega^s(\vec{p})$ для каждой внешней нуклонной линии с импульсом \vec{p} и спином s , входящей в диаграмму.

10. $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}' \pm \mathbf{k})$ в каждой вершине, что соответствует сохранению энергии-импульса для всех линий, сходящихся в эту вершину; \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы фермионных линий и \mathbf{k} — импульс внутренней или внешней фотонной или мезонной линии, кончающейся в этой вершине.

11. (-1) для каждой замкнутой нуклонной петли.

12. $(-i/\hbar c)^n$ в соответствии с n -ым членом разложения по теории возмущений.

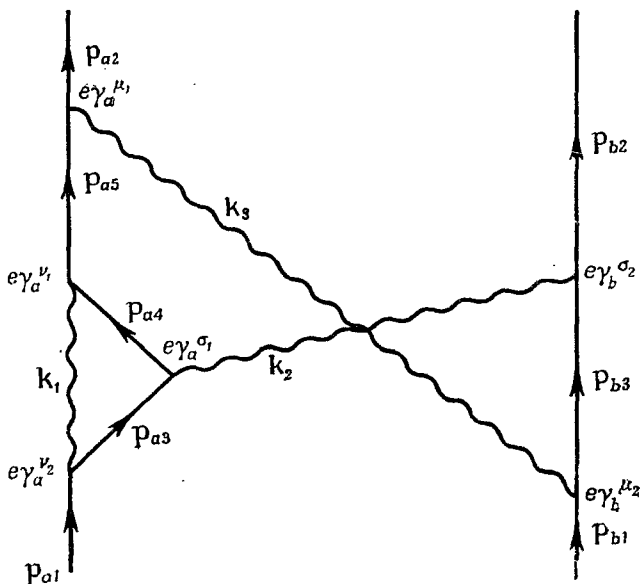
Далее, необходимо проинтегрировать по импульсам всех внутренних линий.

Применяя эти правила, мы можем сразу выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме на фиг. 48. Он имеет следующий вид:

$$M = \left(-\frac{i}{\hbar c}\right)^4 \int d^4 k_m \int d^4 p_3 \int d^4 p_4 \int d^4 p_5 \times \\ \times [(2\pi)^4]^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{k}_m) \delta^{(4)}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5 - \mathbf{k}_1) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \delta^{(4)}(\mathbf{p}_5 - \mathbf{p}_4 - \mathbf{k}_m) \delta^{(4)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_5 + \mathbf{k}_2) \times \\
& \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{E(\mathbf{p}_2)} \right)^{1/2} \omega^{s_2}(\mathbf{p}_2) \frac{(\hbar c)^{1/2} e \gamma^\nu \varepsilon_\nu^{(\lambda_2)}(\vec{k}_2)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2} |k_2^0|} \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}_5 - m} \times \\
& \times G \Gamma \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}_4 - m} \frac{(\hbar c)^{1/2} e \gamma^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda_1)}(\vec{k}_1)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2} |k_1^0|} \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}_3 - m} \times \\
& \times G \Gamma \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{E(\mathbf{p}_1)} \right)^{1/2} \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1) \frac{i \hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{\mathbf{k}_m^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (19.15)
\end{aligned}$$

При написании этого матричного элемента мы двигались вдоль нуклонной линии, выписывая для каждого встречающегося процесса



Фиг. 49.

соответствующие ему множители. Отметим, что фотон, излученный в точке d , имеет импульс $-\mathbf{k}_2$. Это связано с тем, что оператор излучения имеет экспоненциальный множитель $e^{+ik_{2\mu}x^\mu}$ и интегрирование по соответствующей переменной x дает член $-\mathbf{k}_2$ в аргументе δ -функции, что находится в согласии с наглядным представлением, в котором импульс \mathbf{k}_2 мы вычитаем из импульса \mathbf{p}_5 , чтобы получить конечный импульс нуклона \mathbf{p}_2 . Аналогично фотон, поглощенный в точке b , имеет импульс $+\mathbf{k}_1$ (оператор уничтожения имеет фазовый множитель $e^{-ik_{1\mu}x}$). Знак импульса \mathbf{k}_m несущее

ственен, если он последовательно используется в δ -функции. Если предположить, что мезон излучается в точке a , то его импульс в этой вершине будет $+\mathbf{k}_m$, так что $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{k}_m$; тогда в вершине c мезон поглощается и, следовательно, $\mathbf{p}_4 + \mathbf{k}_m = \mathbf{p}_5$.

Ясно, что в нашем примере благодаря наличию δ -функций можно провести три интегрирования по внутренним импульсам. Остающаяся δ -функция снова выражает сохранение полной энергии и импульса для внешних линий.

Рассмотрим теперь случай двух заряженных фермионов, электромагнитно взаимодействующих между собой, как это показано на диаграмме фиг. 49. При выписывании матричного элемента, соответствующего этой диаграмме, мы снова будем следовать вдоль каждой фермионной линии от конечного состояния к начальному. С какой частицы мы начнем, не играет роли, так как операторы, относящиеся к различным частицам, коммутируют между собой. Однако существенным является тот факт, что фотонные линии \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 пересекаются. Это означает, что следует обратить особое внимание на правильный порядок вершинных операторов $e\gamma^\mu$, так как мы должны затем провести суммирование по их поляризационным индексам. (Порядок вершинных операторов был бы несущественен, если бы рассматривалось мезонное взаимодействие нуклонов, для которого в этом случае вершинным оператором является матрица γ_5 .) Применяя найденные выше правила, получаем следующее выражение для матричного элемента процесса [операторы (матрицы γ) для двух частиц различаются с помощью индексов a и b]:

$$\begin{aligned}
 M = & \left(-\frac{i}{\hbar c} \right)^6 \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 \int d^4 p_{a3} \int d^4 p_{a4} \int d^4 p_{a5} \int d^4 p_{b3} \times \\
 & \times [(2\pi)^4]^6 \delta^{(4)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_{a3} - \mathbf{p}_{a1}) \delta^{(4)}(\mathbf{p}_{a4} + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_{a5}) \times \\
 & \times \delta^{(4)}(\mathbf{p}_{a5} - \mathbf{p}_{a4} - \mathbf{k}_1) \delta^{(4)}(\mathbf{p}_{a2} - \mathbf{p}_{a5} - \mathbf{k}_3) \times \\
 & \times \delta^{(4)}(\mathbf{p}_{b2} - \mathbf{p}_{b3} - \mathbf{k}_2) \delta^{(4)}(\mathbf{p}_{b3} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{p}_{b1}) \times \\
 & \times \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_a}{E(p_{a2})} \right)^{1/2} \overline{w}^{s_{a2}}(\vec{p}_{a2}) e\gamma_a^{\mu_1} \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}_{a5} - m_a} e\gamma_a^{\nu_1} \times \right. \\
 & \times \left. \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}_{a4} - m_a} e\gamma_a^{\sigma_1} \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}_{a5} - m_a} e\gamma_a^{\nu_2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_a}{E(p_{a1})} \right)^{1/2} w^{s_{a1}}(\vec{p}_{a1}) \right] \times \\
 & \times \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_b}{E(p_{b2})} \right)^{1/2} \overline{w}^{s_{b2}}(\vec{p}_{b2}) e\gamma_b^{\sigma_2} \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}_{b3} - m_b} e\gamma_b^{\nu_3} \times \right. \\
 & \times \left. \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_b}{E(p_{b1})} \right)^{1/2} w^{s_{b1}}(\vec{p}_{b1}) \right] \times \\
 & \times \left[\frac{-i\hbar c}{(2\pi)^4} g^{\mu_1 \nu_2} \frac{1}{\mathbf{k}_3^2 + i\delta} \left[\frac{-i\hbar c}{(2\pi)^4} g^{\nu_1 \nu_3} \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + i\delta} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \left[\frac{-i\hbar c}{(2\pi)^4} g^{\sigma_1 \sigma_2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + i\delta} \right] \right] \right. \quad (19.16)
 \end{aligned}$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, а это означает суммирование по поляризациям виртуальных фотонов. Знак, который мы приписываем импульсам k_1, k_2, k_3 , снова является несущественным. Однако надо быть последовательным при рассмотрении сохранения импульса, т. е. рассматривать один конец линии кванта как излучение кванта и второй конец — как его поглощение.

§ 4. Взаимодействие мезонов с электромагнитным полем

В гл. 12 мы видели, что взаимодействие заряженных бозонов с электромагнитным полем описывается следующей плотностью лагранжиана \mathcal{L}_I :

$$\mathcal{L}_I(\mathbf{x}) = ie \left[\varphi^\dagger(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \varphi^\dagger(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} \varphi(\mathbf{x}) \right] A^\mu(\mathbf{x}) + e^2 A_\mu(\mathbf{x}) A^\mu(\mathbf{x}) \varphi^\dagger(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}), \quad (19.17)$$

где φ при рассмотрении квантованных полей являются операторами поля. Если, как и в предыдущих случаях, перейти к представлению взаимодействия и ковариантному уравнению Томонаги — Швингера, то оказывается, что плотность гамильтониана взаимодействия, получаемая при прямом применении канонического формализма, не удовлетворяет условию интегрируемости (15.17). Канэсава и Томонага [261, 262] (см. работы Неймана и Фарри [354], а также Киносита [274], Киносита и Намбу [274]) показали, что правильное ковариантное обобщение плотности гамильтониана взаимодействия дается выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I(\mathbf{x}; \sigma) &= -ie \left[\varphi^\dagger(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \varphi^\dagger(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} \varphi(\mathbf{x}) \right] A^\mu(\mathbf{x}) - \\ &- e^2 \varphi^\dagger(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \left(A^\mu(\mathbf{x}) A_\mu(\mathbf{x}) + [n_\mu(\mathbf{x}) A^\mu(\mathbf{x})]^2 \right) = \\ &= \mathcal{H}'_I(\mathbf{x}) + \mathcal{H}''_I(\mathbf{x}; \sigma), \quad (19.18) \end{aligned}$$

где n_μ — нормаль к пространственно-подобной поверхности σ в точке \mathbf{x} . Отметим, что этот гамильтониан явно зависит от поверхности σ . Он сводится к обычному гамильтониану взаимодействия в случае плоской поверхности $t = \text{const}$ или $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$. Зависимость гамильтониана $\mathcal{H}_I(\mathbf{x})$ от пространственно-подобной поверхности является характерной чертой для всех видов связи с производными.

Теперь, так же, как и в гл. 16, можно ввести S -матрицу, используя в качестве гамильтониана взаимодействия \mathcal{H}_I выражение (19.18). Однако можно показать (Мэттьюс [327]), что при вычислении S -матрицы в этой теории зависящие от нормали члены всегда точно сокращаются с некоторыми сингулярными выражениями, возникающими при учете эффектов высших порядков для не зависящей от нормали

части гамильтониана \mathcal{H}_I . В действительности, при правильном рассмотрении нужно полностью пренебречь частью, зависящей от нормали, и в то же время использовать для представления взаимодействия простые правила, развитые в гл. 18. Таким образом, гамильтониан, который необходимо использовать, имеет вид

$$\mathcal{H}'(\mathbf{x}) = -ie \left[\varphi^\dagger(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \varphi^\dagger(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} \varphi(\mathbf{x}) \right] A^\mu(\mathbf{x}) - e^2 \varphi^\dagger(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) A^\mu(\mathbf{x}) A_\mu(\mathbf{x}), \quad (19.19)$$

и мы должны применять следующие выражения для сверток двух бозонных множителей, содержащих производные¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_\mu} \varphi^\dagger(\mathbf{x}') &= \left(\Phi_0, T \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_\mu} \varphi^\dagger(\mathbf{x}') \right) \Phi_0 \right) = \\ &= \frac{\hbar c}{2} \frac{\partial \Delta_F(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x_\mu}, \end{aligned} \quad (19.20a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi^\dagger(\mathbf{x}')}{\partial x'_\nu} &= \left(\Phi_0, T \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi^\dagger(\mathbf{x}')}{\partial x'_\nu} \right) \Phi_0 \right) = \\ &= \frac{\hbar c}{2} \frac{\partial^2 \Delta_F(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x_\mu \partial x'_\nu}. \end{aligned} \quad (19.20b)$$

Если использовать эти формулы, то развитые раньше графические методы можно непосредственно обобщить и на данный случай. Член порядка e в гамильтониане $\mathcal{H}'(\mathbf{x})$ приведет к диаграммам взаимодействия, содержащим две мезонные линии (которые будут теперь представляться направленными пунктирными линиями, чтобы указать знак заряда!) и одну фотонную линию в каждой вершине, как показано на фиг. 50, *a*. Член взаимодействия $\varphi^\dagger(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) A_\mu A^\mu(\mathbf{x})$ приведет к одновременному излучению или поглощению двух фотонов в вершине, как показано на фиг. 50, *b*.

Правила для получения матричного элемента, соответствующего диаграмме n -порядка (т. е. диаграмме, содержащей n вершин), можно снова получить с помощью применения теоремы Вика к разложению S -матрицы для гамильтониана взаимодействия (19.19) (см. работу Рорлиха [405], где это проведено детально). Отметим, что в данном случае вклад n -порядка в S -матрицу содержит члены всех порядков между e^n и e^{2n} .

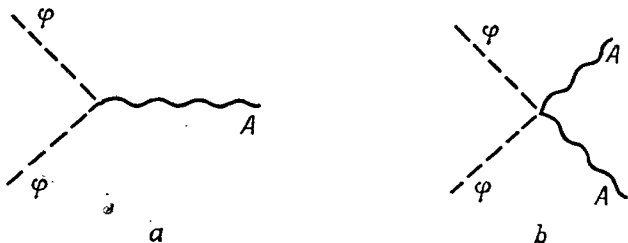
По полученным правилам в импульсном пространстве выписываются следующие множители:

¹⁾ Согласно приведенным правилам, опускаются сингулярные выражения, возникающие при дифференцировании сингулярных функций (Мэттьюс [327] и Рорлих [405]).

1. $-e(p_\mu + p'_\mu)$ в каждой одиночной вершине, где p_μ и p'_μ — импульсы мезонной линии для входящего и выходящего из вершины мезона соответственно.

2. $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}' \pm \mathbf{k})$ в каждой одиночной вершине, где \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы соответствующих мезонных линий и \mathbf{k} — импульс внутренней или внешней фотонной линии, кончающейся в этой вершине (знак плюс или минус берется в зависимости от того, излучается фотон или поглощается).

3. $e^2 (2\pi)^4 g_{\mu\nu} \delta^{(4)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}' \pm \mathbf{k} \pm \mathbf{k}')$ в каждой двойной вершине (т. е. вершине, в которой поглощаются или излучаются две фотонные линии с поляризациями μ и ν). Каждому фотону, излучаемому или поглощаемому в двойной вершине, придается соответствующий ему множитель (см. правила 4 и 6).



Фиг. 50.

4. $-\frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} g_{\mu\nu}$ для каждой внутренней фотонной линии с импульсом \mathbf{k} , соединяющей вершины, в которых имеются множители $(p + p')^\mu$ и $(p + p')^\nu$ для каждой одиночной вершины, множители $g^{\mu\rho}$ и $g^{\nu\sigma}$ в случае двойной вершины (индексы ρ, σ относятся ко второму фотону, излучаемому или поглощаемому в двойной вершине) и множители $(p + p')^\mu$ и $g^{\nu\rho}$ в смешанном случае.

5. $\frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \mu^2}$ для каждой внутренней мезонной линии с импульсом \mathbf{p} .

6. $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \frac{(\hbar c)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}$ для каждой внешней фотонной линии, которая излучается или поглощается в одиночной или двойной вершине; $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})$ — 4-вектор поляризации [$\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu = -1$, $k_\mu \varepsilon^\mu(\vec{k}) = 0$] излучаемого или поглощаемого фотона с энергией $k_0 = |\mathbf{k}|$, импульсом \vec{k} и поляризацией λ .

7. $\frac{(\hbar c)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}$ для каждой внешней мезонной линии с импульсом \vec{k} и энергией $\omega_k = \sqrt{k^2 + \mu^2}$, входящей или выходящей из диаграммы,

8. $(-i/\hbar c)^n$ из разложения по теории возмущений.

Наконец, следует проинтегрировать по всем внутренним импульсам и умножить интеграл на весовой множитель $w = 2^n$, где

$$g = d - a - b;$$

здесь d — число двойных вершин на диаграмме, a — число замкнутых фотонных линий (соответствующих тому случаю, когда один и тот же фотон излучается и поглощается в двойной вершине) и b — число пар двойных вершин, соединенных двумя фотонными линиями.

§ 5. Поперечные сечения: комптоновское рассеяние

Правила, выведенные в этой главе, дают нам возможность выписать матричный элемент, соответствующий любой заданной диаграмме Фейнмана, а следовательно, и вычислить S -матрицу. Матричный элемент S -матрицы между заданными начальным и конечным состояниями является *амплитудой* вероятности перехода из данного начального состояния в данное конечное состояние. Запишем эту амплитуду перехода в следующем виде:

$$T_{ba} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma \mathbf{p}_b - \Sigma \mathbf{p}_a) (b | M' | a), \quad (19.21)$$

где мы явно выписали δ -функции, соответствующие сохранению полной энергии и импульса во время процесса ($\Sigma \mathbf{p}_a$ — 4-импульс всех падающих частиц, $\Sigma \mathbf{p}_b$ — 4-импульс всех выходящих частиц). В гл. 9 был уже рассмотрен случай не зависящего от времени внешнего поля. В этом случае импульс не сохраняется, так что амплитуда перехода имеет следующий вид:

$$T_{ba} = -2\pi i \delta^{(4)}(\Sigma p_{0a} - \Sigma p_{0b}) (b | M' | a). \quad (19.22)$$

Способ получения поперечных сечений для этих случаев был кратко описан в гл. 9, поэтому мы рассмотрим только положение, в котором отсутствует внешнее поле.

Вероятность перехода из состояния a в состояние b , очевидно, дается выражением

$$|T_{ba}|^2 = (2\pi)^8 \delta^{(4)}(\mathbf{0}) \delta^{(4)}(\Sigma \mathbf{p}_b - \Sigma \mathbf{p}_a) |(b | M' | a)|^2. \quad (19.23)$$

Причина того, что эта вероятность бесконечна [множитель $\delta^{(4)}(\mathbf{0})$], связана с тем, что наши волновые функции не нормируемы. Для выхода из этого положения необходимо построить волновой пакет для падающих и выходящих частиц (Снайдер [455]). Вместо этого мы, следуя Липману и Швингеру [307], снова заменим множитель $\delta^{(4)}(\mathbf{0})$ на соответствующий множитель $(2\pi)^{-4} VT$, где V — (большой) объем и T — (длительное) время, в течение которого происходит процесс рассеяния. Вероятность перехода в единицу

времени в единице объема в некоторую совокупность конечных состояний, плотность которых ρ_b , дается тогда следующим выражением:

$$\omega_{ba} = (2\pi)^4 \int d\rho_b \delta^{(4)}(\Sigma \mathbf{p}_b - \Sigma \mathbf{p}_a) |(b | M' | a)|^2. \quad (19.24)$$

Поперечное сечение можно получить из величины ω_{ba} , если разделить ее на поток падающих частиц, пересекающих единичную площадь в 1 сек.

Для иллюстрации применения формулы (19.24) вычислим поперечное сечение рассеяния фотона на свободных электронах (комptonовское рассеяние) в низшем приближении теории возмущений.

Имеются две диаграммы Фейнмана ¹⁾, дающие вклад в низшее приближение. На первой из них электрон в состоянии $\mathbf{p}_1 s_1$ поглощает фотон с импульсом \mathbf{k}_1 и вектором поляризации $\mathbf{e}^{(\lambda_1)}(\vec{k}_1)$ и излучает второй фотон с импульсом \mathbf{k}_2 и поляризацией $\mathbf{e}^{(\lambda_2)}(\vec{k}_2)$, переходя при этом в конечное состояние с импульсом \mathbf{p}_2 и спином s_2 . Во втором процессе акт излучения конечного фотона предшествует акту поглощения начального фотона. Используя правила, выведенные в § 3, легко проверить, что матричный элемент, соответствующий этим диаграммам Фейнмана, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} T_{ba} = & \delta^{(4)}(\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1) \frac{r_0}{2\pi i} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 \omega_1 \omega_2}} \times \\ & \times \bar{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \left\{ \gamma \cdot \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)^2 - m^2} \gamma \cdot \mathbf{e}_1 + \right. \\ & \left. + \gamma \cdot \mathbf{e}_1 \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2)^2 - m^2} \gamma \cdot \mathbf{e}_2 \right\} \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1), \quad (19.25a) \end{aligned}$$

$$T_{ba} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1) (\mathbf{p}_2 s_2, \mathbf{k}_2 \mathbf{e}_2 | M' | \mathbf{p}_1 s_1, \mathbf{k}_1 \mathbf{e}_1); \quad (19.25b)$$

здесь (поскольку не возникает неясностей) мы записали $\mathbf{e}^{(\lambda_1)}(\vec{k}_1)$ как \mathbf{e}_1 и $\omega(\vec{k}_1)$ как ω_1 ; аналогично для \mathbf{e}_2, ω_2 и E_1, E_2 . В формуле (19.25a) r_0 есть классический радиус электрона $e^2/4\pi\epsilon_0 c^2$. Этот множитель получен следующим образом: если применить правила § 3, то в формуле (19.25a) возникнет численный множитель $\alpha/2\pi i$; если нормировочный множитель волновой функции фотона $1/\sqrt{2|\mathbf{k}|}$ выразить через энергию фотона $\hbar c|\mathbf{k}|$, то при этом мы получим в числителе дополнительный множитель $\hbar c$, который вместе с множителем m переводит величину α в величину r_0 . Множитель m^2 в числителе появился следующим образом: один множитель m возник из нормировочного множителя волновой функции электрона, второй — при переходе от величины α к величине r_0 . Поскольку мы

¹⁾ Эти диаграммы приведены на фиг. 36, а для случая взаимодействия мезона и нуклона,

приняли систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$, $\hbar\omega$ — энергия фотона обозначается через $\omega = |k|$.

Множитель в фигурных скобках в формуле (19.25а) обозначим через R . Величину R можно упростить, если учесть, что электрон и фотон являются свободными, т. е.

$$\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_2^2 = m^2, \quad (19.26)$$

а также

$$\mathbf{k}_1^2 = \mathbf{k}_2^2 = 0, \quad (19.27a)$$

$$\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{k}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 = 0. \quad (19.27b)$$

Мы достигнем дальнейшего упрощения результатов, если выберем систему координат, в которой электрон вначале покоился, т. е. в которой $\mathbf{p}_1 = (m, 0, 0, 0)$. Выберем также такие векторы поляризации, которые имеют только пространственные компоненты; этого всегда можно достичь с помощью подходящего калибровочного преобразования (см. гл. 15, § 5). Вследствие такого выбора калибровки имеем

$$\mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 = 0, \quad (19.28)$$

поскольку вектор \mathbf{p}_1 имеет только временную компоненту, а векторы $\boldsymbol{\varepsilon}$ — только пространственные компоненты. Наконец, отметим, что оператор R действует справа на дираковскую волновую функцию, являющуюся собственной функцией оператора \hat{p}_1 с собственным значением m . Используем перестановочные соотношения для матриц γ

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (19.29)$$

чтобы написать

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_1)(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1) = -(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1)(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_1) + 2\mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1. \quad (19.30)$$

Однако второй член равен нулю вследствие соотношения (19.28). Аналогично можно показать, что произведение $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_1$ антикоммутирует с произведением $\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2$. Используя эти результаты, можно исключить члены $\hat{p}_1 + m$, встречающиеся в выражении R . Наконец, используя формулу (19.27б), мы можем написать

$$T_{ba} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1) \frac{-ir_0 m^2}{(2\pi)^5 \sqrt{E_1 E_2 \omega_1 \omega_2}} \times \\ \times \overline{\omega^{s_2}(\vec{p}_2)} \left\{ \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 \frac{\hat{k}_1}{2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \frac{\hat{k}_2}{2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 \right\} \omega^{s_1}(\vec{p}_1). \quad (19.31)$$

Для получения вероятности перехода необходимо возвести величину T_{ba} в квадрат. Если нас не интересует спин электрона в конечном состоянии и мы ограничиваемся случаем, в котором в начальном состоянии имеются неполяризованные электроны, то, как было видно в гл. 9, суммирование величины $|\overline{\omega^{s_2}(\vec{p}_2)} R \omega^{s_1}(\vec{p}_1)|^2$ по

индексу s_2 и усреднение по индексу s_1 соответствует вычислению некоторого шпура. Несколько громоздкие вычисления приводят тогда к следующему результату:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} \left| \overline{\omega^{s_2}}(\vec{p}_2) R \omega^{s_1}(\vec{p}_1) \right|^2, \quad (19.32a)$$

$$F = \frac{1}{8m^2} \text{Sp} \{ (\hat{p}_2 + m) R (\hat{p}_1 + m) R' \}, \quad (19.32б)$$

$$F = \frac{1}{4m^2} \left[\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1}{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_2} + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1} - 2 + 4(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2 \right], \quad (19.32в)$$

$$F = \frac{1}{4m^2} \left[\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - 2 + 4 \cos^2 \Theta \right], \quad (19.32г)$$

где при переходе от формулы (19.32в) к формуле (19.32г) мы использовали то, что в лабораторной системе координат $\mathbf{p}_1 = (m, 0, 0, 0)$, а Θ есть угол между направлениями поляризации падающего и излученного фотона. Выражение (19.32г) представляет существенную часть формулы Клейна—Нишины (Клейн и Нишина [278], Нишина [358], Тамм [478], см. также книгу Гайтлера [232]).

Для вычисления поперечного сечения процесса мы должны знать плотность падающих частиц. Последнюю можно получить при рассмотрении плотности 4-мерного тока в начальном состоянии электронно-позитронной системы и вектора Пойтинга в случае электромагнитного поля. Рассмотрим среднее значение оператора 4-мерного тока в начальном состоянии $b_{s_1}^+(\vec{p}_1) \Phi_0$, в котором имеется один электрон с импульсом \vec{p}_1 и спином s_1 :

$$\langle j_\mu(\mathbf{x}) \rangle = (b_{s_1}^+(\vec{p}_1) \Phi_0, \frac{1}{2} e [\bar{\psi}(\mathbf{x}), \gamma_\mu \psi(\mathbf{x})] b_{s_1}^+(\vec{p}_1) \Phi_0). \quad (19.33)$$

Ясно, что при разложении входящих в ток операторов по операторам рождения и уничтожения для определенных импульсов и спинов вклад в матричный элемент (19.33) будут давать только члены, пропорциональные b^+b , откуда следует, что

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(\mathbf{x}) \rangle &= e (b_{s_1}^+(\vec{p}_1) \Phi_0, \overline{\psi^{(+)}(\mathbf{x})} \gamma_\mu \psi^{(+)}(\mathbf{x}) b_{s_1}^+(\vec{p}_1) \Phi_0) = \\ &= \frac{e}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_1} \overline{\omega^{s_1}(\vec{p}_1)} \gamma_\mu \omega^{s_1}(\vec{p}_1) = \\ &= \frac{e}{(2\pi)^3} \frac{p_{1\mu}}{E_1} = \frac{1}{(2\pi)^3} e v_{1\mu}, \end{aligned} \quad (19.34)$$

где $v_{1\mu}$ — скорость падающей частицы. Следовательно, плотность падающих электронов равна $1/(2\pi)^3$; эта величина является стандартным весовым множителем при нормировке на δ -функцию. Аналогично легко показать, что плотность падающих фотонов также равна $1/(2\pi)^3$.

Величина w_{ba} , даваемая формулой (19.24), является вероятностью перехода в единице объема в единицу времени для полученной выше плотности падающих частиц. Для получения вероятности на единицу плотности падающих частиц мы должны разделить величину w_{ba} в данном случае на величину $1/(\pi)^6$. Вероятность перехода в некоторую совокупность конечных состояний, плотность которых

$$d\rho_b = d^3k_2 d^3p_2, \quad (19.35)$$

дается поэтому выражением

$$w_{1 \rightarrow 2} = r_0^2 \int d^3k_2 \int d^3p_2 \delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \frac{m^4}{E_1 E_2 \omega_1 \omega_2} F. \quad (19.36)$$

(Множители 2π сокращаются следующим образом: величина $|T_{ba}|^2$, согласно формуле (19.31), дает вклад $(2\pi)^{-10}$; величина w_{ba} , согласно формуле (19.24), имеет множитель $(2\pi)^4$ и падающий ток — множитель $(2\pi)^6$.)

Проведя интегрирование по d^3p_2 , мы можем теперь исключить δ -функцию, зависящую от импульсных переменных, так что

$$w_{1 \rightarrow 2} = r_0^2 \int d^3k_2 \delta^{(1)}(E_f - E_i) \frac{m^4}{E_1 E_2 \omega_1 \omega_2} F, \quad (19.37)$$

где $E_i = p_{10} + k_{10}$ — полная энергия системы в начальном состоянии и $E_f = p_{20} + k_{20}$ — полная энергия системы в конечном состоянии. Запишем элемент импульсного пространства в следующем виде:

$$d^3k_2 = (k_{20})^2 dk_{20} d\Omega = (k_{20})^2 \left(\frac{dk_{20}}{dE_f} \right) d\Omega dE_f. \quad (19.38)$$

Теперь можно выполнить интегрирование по dE_f и, таким образом, устранить последнюю оставшуюся δ -функцию, зависящую от энергии. Наконец, мы получаем

$$w_{1 \rightarrow 2} = r_0^2 \frac{m^4}{E_1 E_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \left(\frac{d\omega_2}{dE_f} \right)_{E_f = E_i} F d\Omega. \quad (19.39)$$

Отметим, что интегрирование по d^3p_2 определяет импульсы частиц в конечном состоянии через импульсы частиц в начальном состоянии с помощью закона сохранения импульса; аналогично интегрирование по dE_f определяет полную энергию в конечном состоянии с помощью закона сохранения энергии.

Выполним теперь дифференцирование, указанное в выражении (19.38). Учитывая, что в лабораторной системе координат

$$\begin{aligned} E_f &= \omega_2 + E_2 = \omega_1 + E_1 = \omega_2 + \sqrt{p_2^2 + m^2} = \\ &= \omega_2 + \sqrt{\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \varphi + \omega_2^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (19.40)$$

и используя соотношение Комптона

$$\omega_1 \omega_2 (1 - \cos \varphi) = m(\omega_1 - \omega_2), \quad (19.41)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{dE_r}{d\omega_2} &= 1 + \frac{\omega_2 - \omega_1 \cos \varphi}{E_2} = \frac{E_2 + \omega_2 - \omega_1 \cos \varphi}{E_2} = \\ &= \frac{m + \omega_1 (1 - \cos \varphi)}{E_2} = \frac{m}{E_2} \frac{\omega_1}{\omega_2}. \end{aligned} \quad (19.42)$$

Вероятность перехода, при котором рассеянный фотон излучается в телесный угол $d\Omega$ с энергией ω_2 , дается тогда выражением

$$\omega_{1 \rightarrow 2} = r_0^2 \frac{m^3}{E_1} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 F d\Omega. \quad (19.43)$$

Дифференциальное поперечное сечение $d\sigma$ определяется как вероятность перехода, деленная на падающий поток ($c=1$) и на число рассеивателей в единице объема $[m/E(p_1)]$. Следовательно, оно дается выражением

$$d\sigma = r_0^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 m^2 F d\Omega; \quad (19.44)$$

это хорошо известная формула Клейна — Нишины.

Рассмотрим здесь только поперечное сечение в нерелятивистском пределе, т. е. в случае, когда $\omega_1 = \omega_2 \ll m$ и $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = (m, 0, 0, 0)$. В этом пределе формула (19.32г) сводится к следующей:

$$F_{nr} = \frac{1}{m^2} \cos^2 \Theta \quad (19.45)$$

и дифференциальное поперечное сечение получает вид

$$d\sigma_{nr} = r_0^2 \cos^2 \Theta d\Omega; \quad (19.46)$$

это есть *классическая* формула Томсона для рассеяния излучения с малой энергией на статическом заряде. Дифференциальное поперечное сечение для неполяризованного света можно получить, просуммировав по двум поляризациям фотона в конечном состоянии и усреднив по двум начальным состояниям. Это суммирование может быть легко выполнено¹⁾; оно дает следующий результат:

$$d\bar{\sigma} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \varphi) d\Omega, \quad (19.47)$$

1) Напомним, что 3-векторы $\epsilon_r^{(1)}(\vec{k})$, $\epsilon_r^{(2)}(\vec{k})$, $\vec{k}/|k|$ являются взаимно ортогональными, так что для них имеет место соотношение

$$\epsilon_r^{(1)}(\vec{k}) \epsilon_s^{(1)}(\vec{k}) + \epsilon_r^{(2)}(\vec{k}) \epsilon_s^{(2)}(\vec{k}) + \frac{k_r k_s}{|k|^2} = \delta_{rs},$$

где индексы $r, s = 1, 2, 3$ означают компоненты векторов. Мы можем поэтому написать

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_r^{(\lambda)}(\vec{k}) \epsilon_s^{(\lambda)}(\vec{k}) = \delta_{rs} - \frac{k_r k_s}{|k|^2}.$$

Таким же образом легко проверить, что

где φ — угол между векторами \vec{k}_1 и \vec{k}_2 , т. е. угол рассеяния. Полное поперечное сечение теперь получается путем интегрирования по телесному углу $d\Omega$ и равно

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \quad (19.48)$$

В гл. 24 мы увидим, что формула (19.48) (формула томсоновского рассеяния) играет важную роль в понимании перенормировки заряда.

В заключение этой главы отметим, что вследствие унитарности S -матрицы имеют место определенные соотношения между ее членами различного порядка. Так, если мы разложим S -матрицу в степенной ряд по константе связи, как это имеет место в случае разложения Дайсона, т. е.

$$S = 1 + eS_1 + e^2S_2 + \dots, \quad (19.49)$$

то условие унитарности S -матрицы получает вид

$$\begin{aligned} S^\dagger S &= 1 + e(S_1^\dagger + S_1) + \\ &+ e^2(S_1^\dagger S_1 + S_2 + S_2^\dagger) + \\ &+ e^3(S_1^\dagger S_2 + S_2^\dagger S_1 + S_3^\dagger + S_3) + \\ &+ e^4(S_1^\dagger S_3 + S_2^\dagger S_2 + S_3^\dagger S_1 + S_4^\dagger + S_4) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (19.50)$$

и каждое выражение в круглых скобках должно равняться нулю. Полученные соотношения между величинами S_n оказываются очень полезными при проведении расчетов (см., например, работу Йоста и др. [253]).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} [\vec{\varepsilon}^{(\lambda_1)}(\vec{k}_1) \cdot \vec{\varepsilon}^{(\lambda_2)}(\vec{k}_2)]^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{r, s=1}^3 \varepsilon_r^{(\lambda_1)}(\vec{k}_1) \varepsilon_r^{(\lambda_2)}(\vec{k}_2) \varepsilon_s^{(\lambda_1)}(\vec{k}_1) \varepsilon_s^{(\lambda_2)}(\vec{k}_2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r, s} \left(\delta_{rs} - \frac{k_{1r} k_{1s}}{|\vec{k}_1|^2} \right) \left(\delta_{rs} - \frac{k_{2r} k_{2s}}{|\vec{k}_2|^2} \right) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \varphi), \end{aligned}$$

где φ — угол между векторами \vec{k}_1 и \vec{k}_2 , т. е. угол рассеяния.

ПЕРЕНОРМИРОВКА
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ
ПОЛЯ

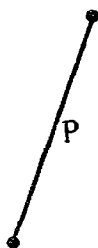
СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ФЕРМИОНА

§ 1. Степень расходимости

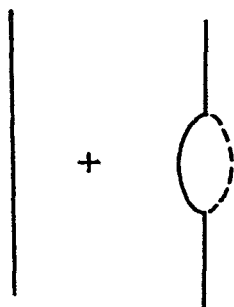
При разложении S -матрицы мы видели, что один из возможных процессов второго порядка соответствует излучению, а затем поглощению фермионом виртуального бозона. Диаграмма Фейнмана, соответствующая этому процессу, вновь приведена на фиг. 51.



Фиг. 51.



Фиг. 52.



Фиг. 53.

Матричный элемент такого процесса был уже выписан ранее (19.13); он имеет вид

$$M = \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{1}{4\pi^3} T \frac{m}{E(p)} \bar{\omega}^s(\vec{p}) \int d^4k \Gamma \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ \times \Gamma \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon'} \omega^s(\vec{p}), \quad (20.1)$$

где волновые функции нормированы на объем V . Обозначим через $\Sigma^{(2)}(p)$ следующий оператор:

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \int \Gamma \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \Gamma \frac{d^4k}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon'}. \quad (20.2)$$

Может случиться так, что диаграмма на фиг. 51 является частью некоторой большой диаграммы, так что две внешние фермионные линии будут соответствовать фактически функциям распространения фермиона. Множители, соответствующие такой внутренней части, даются тогда выражением

$$4\pi \left[\frac{i}{(2\pi)^4} \right]^2 \frac{1}{\hat{p} - m} \Sigma^{(2)}(p) \frac{1}{\hat{p} - m}. \quad (20.3)$$

Чрезвычайно важно понимать, что диаграмму на фиг. 51 всегда можно рассматривать как модификацию функции распространения свободной частицы $(\hat{p} - m)^{-1}$ (фиг. 52) с помощью добавления дополнительного члена, который соответствует диаграмме на фиг. 51. Модифицированная функция распространения тогда соответствует диаграмме на фиг. 53 и аналитически дается множителем

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\hat{p} - m} + \frac{1}{\hat{p} - m} \frac{i}{4\pi^3} \Sigma^{(2)}(\mathbf{p}) \frac{1}{\hat{p} - m} \right]. \quad (20.4)$$

Согласно теории Фейнмана, в случае свободной частицы функция распространения (20.4) должна описывать изменение волновой функции частицы во времени. Мы знаем также, что волновая функция свободной частицы зависит от времени только через множитель $\exp[-iE(\mathbf{p})t]$, где $E(\mathbf{p}) = \sqrt{p^2 + m^2}$. Таким образом, изменение волновой функции свободной частицы, обусловленное оператором $\Sigma^{(2)}$, может соответствовать только изменению величины $E(\mathbf{p})$. Далее, если матричный элемент (20.1) эквивалентен эффекту собственной энергии, т. е. изменению энергии частицы на величину ΔE , то амплитуда перехода из начального состояния в конечное изменится на множитель $\exp(-i\Delta E T)$ или в первом порядке на величину $-i\Delta E T$. Поэтому имеем

$$-i\Delta E T = \frac{1}{4\pi^3} T \frac{m}{E(\mathbf{p})} \bar{\omega}(\vec{p}) \Sigma^{(2)}(\mathbf{p}) \omega(\vec{p})$$

или

$$\Delta E = \frac{i}{4\pi^3} \frac{m}{E(\mathbf{p})} \bar{\omega}(\vec{p}) \Sigma^{(2)}(\mathbf{p}) \omega(\vec{p}). \quad (20.5)$$

Конечно, эффекты собственной энергии возникают не только из простого дополнительного члена (20.2), но и из более сложных диаграмм. К этому вопросу мы вернемся в следующей главе.

Вычислим теперь величину ΔE . Здесь для наших целей достаточно применить нековариантное рассмотрение, в котором при интегрировании выражения (20.1) сначала выполняется интегрирование по dk_0 .

Ниже в этой главе мы вычислим выражение (20.1) с помощью более современных методов, данных Фейнманом [169]. Для выполнения интегрирования перепишем интеграл (20.2) в следующем виде:

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{p}) = g^2 \int d^4k \Gamma \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(\vec{p} - \vec{k})^2 - [E(\mathbf{p}) - k_0]^2 + m^2 - i\epsilon} \times \\ \times \Gamma \frac{1}{k^2 - k_0^2 + \mu^2 - i\epsilon'}, \quad (20.6)$$

где $g^2 = G^2/4\pi\hbar c$ и

$$p_0 = E(\mathbf{p}) = \sqrt{m^2 + p^2}.$$

Кроме того, величина

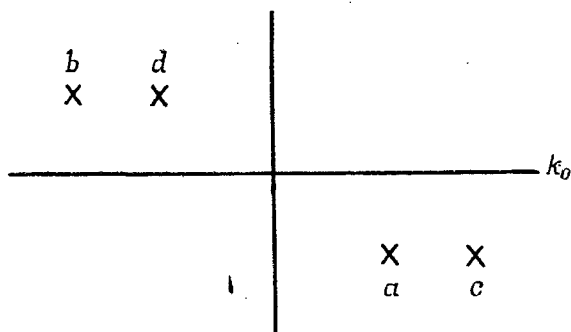
$$E(\vec{p} - \vec{k}) = +\sqrt{(\vec{p} - \vec{k})^2 + m^2} \quad (20.7)$$

представляет энергию нуклона в промежуточном состоянии, так что знаменатель функции распространения нуклона в формуле (20.6) имеет вид

$$E^2(\vec{p} - \vec{k}) - [E(p) - k_0]^2 - i\varepsilon. \quad (20.8)$$

Аналогично можно написать

$$\omega(k) = +\sqrt{k^2 + \mu^2}; \quad (20.9)$$



Фиг. 54.

эта величина представляет энергию мезона в промежуточном состоянии, так что знаменатель функции распространения мезона имеет вид

$$\omega^2(k) - k_0^2. \quad (20.10)$$

Таким образом, интеграл (20.2) можно переписать в следующей форме:

$$\Sigma^{(2)}(p) = g^2 \int \Gamma \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{[E^2(\vec{p} - \vec{k}) - (k_0 - E(p))^2 - i\varepsilon][\omega^2(k) - k_0^2 - i\varepsilon]} \times \times \Gamma d^3k dk_0. \quad (20.2a)$$

Если выполнять интегрирование в комплексной плоскости k_0 , то необходимо учесть, что имеются четыре полюса, показанные на фиг. 54. В частности, мы имеем:

$$\begin{aligned} \text{Для полюса } a: & k_0 = +\omega(k) - i\varepsilon, \\ \text{„ „ } b: & k_0 = -\omega(k) + i\varepsilon, \\ \text{„ „ } c: & k_0 = E(p) + E(\vec{p} - \vec{k}) - i\varepsilon, \\ \text{„ „ } d: & k_0 = E(p) - E(\vec{p} - \vec{k}) + i\varepsilon. \end{aligned}$$

Если мы интегрируем по вещественной оси k_0 , то мы можем замкнуть контур интегрирования либо в верхней полуплоскости, либо в нижней. Оказывается более удобно выбрать нижнюю полуплоскость, т. е. обходится полюса a и c . Поскольку выражение (20.2) ведет себя при больших k_0 как k_0^{-4} , то вклад в интеграл дают только вычеты в полюсах. В явном виде вклад полюса a пропорционален величине

$$I_a = \frac{1}{2\omega(k)[E(\vec{p}-\vec{k}) + \omega(k) - E(p)][E(\vec{p}-\vec{k}) - \omega(k) + E(p)]}, \quad (20.11)$$

а вклад полюса c пропорционален величине

$$I_c = \frac{1}{2E(\vec{p}-\vec{k})[\omega(k) + E(p) + E(\vec{p}-\vec{k})][\omega(k) - E(p) - E(\vec{p}-\vec{k})]}. \quad (20.12)$$

Если написать

$$(\hat{p} - \hat{k} + m) = (\hat{p} + m) + \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \gamma_0 k_0, \quad (20.13)$$

то выражение для $\Sigma^{(2)}$ можно переписать в следующей форме:

$$\Sigma^{(2)} = 2\pi i g^2 \int d^3 k J = 2\pi i g^2 \int (J_1 + J_2 - J_3) d^3 k, \quad (20.14)$$

где

$$J_1 + J_2 = [\bar{\Gamma}(\hat{p} + m)\Gamma + \bar{\Gamma}\vec{\gamma} \cdot \vec{k}\Gamma] \{I_a + I_c\} \quad (20.15)$$

и

$$J_3 = \Gamma\gamma_0\Gamma \{\omega(k)I_a + [E(p) + E(\vec{p}-\vec{k})]I_c\}. \quad (20.16)$$

Чтобы показать поведение величины $\Sigma^{(2)}$ в простом случае, рассмотрим в дальнейшем случай $\Gamma = \vec{\gamma}_5$ и предположим также, что фермион покоится, т. е. $\vec{p} = 0$. Предположение $\Gamma = \vec{\gamma}_5$ ведет к тому, что член J_1 в матричном элементе $\bar{\omega}\Sigma^{(2)}\omega$ равен нулю. Это можно показать следующим образом: матрица $\vec{\gamma}_5$ антикоммутирует со всеми матрицами $\vec{\gamma}_\mu$, встречающимися в операторе \hat{p} , поэтому мы можем написать

$$\bar{\omega}\vec{\gamma}_5(\hat{p} + m)\vec{\gamma}_5\omega = -\bar{\omega}(\vec{p})\vec{\gamma}_5^2(\hat{p} - m)\omega(\vec{p}). \quad (20.17)$$

Поскольку рассматриваемая частица является свободной, то $(\hat{p} - m)\omega(\vec{p}) = 0$ и, следовательно, соотношение (20.17) равно нулю. Кроме того, так как матрица $\vec{\gamma}_5$ антикоммутирует с матрицей $\vec{\gamma}$, можно написать

$$\bar{\omega}\vec{\gamma}_5\vec{\gamma} \cdot \vec{k}\vec{\gamma}_5\omega = (\bar{\omega}\vec{\gamma}\omega) \cdot \vec{k}; \quad \vec{\gamma}_5^2 = -1. \quad (20.18)$$

Однако из нашего рассмотрения в гл. 4 мы знаем, что величина $\bar{\omega}(\vec{p})\vec{\gamma}\omega(\vec{p})$ равна нулю, если $\vec{p} = 0$. Итак, предположение $\vec{p} = 0$

ведет к тому, что член J_2 в матричном элементе $\bar{\omega} \Sigma^2 \omega$ будет также равен нулю. Таким образом, для рассматриваемого специального случая вклад дает только член J_3 . В частности, матричный элемент $\bar{\omega} J_3 \omega$ равен

$$\bar{\omega} J_3 \omega = - \{ \omega(k) I_a + [E(p) + E(\vec{p} - \vec{k})] I_b \} \bar{\omega} \gamma_0 \omega. \quad (20.19)$$

Так как $\bar{\omega} \gamma_0 \omega = 1$, если $\vec{p} = 0$, то, используя простые дроби, можно переписать выражение (20.19) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} J_3 \omega &= \\ &= \frac{1}{4E(\vec{p} - \vec{k})} \left[\frac{1}{E(\vec{p} - \vec{k}) + \omega(k) - E(p)} + \frac{1}{E(\vec{p} - \vec{k}) - \omega(k) + E(p)} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4E(\vec{p} - \vec{k})} \left[\frac{1}{E(\vec{p} - \vec{k}) + E(p) - \omega(k)} + \frac{1}{E(\vec{p} - \vec{k}) + E(p) + \omega(k)} \right], \end{aligned} \quad (20.20a)$$

$$\bar{\omega} J_3 \omega = \frac{1}{4E(\vec{p} - \vec{k})} \left[\frac{1}{E(\vec{p} - \vec{k}) + \omega(k) - E(p)} - \frac{1}{E(\vec{p} - \vec{k}) + E(p) + \omega(k)} \right]. \quad (20.20б)$$

Появление множителя $1/E(\vec{p} - \vec{k})$ следовало ожидать. В старой теории он возникал вследствие использования проекционных операторов для разделения состояний с положительной и отрицательной энергией; фактически множители в выражении (20. 20 б) непосредственно связаны со старой теорией возмущений. Мы уже отмечали, что $E(\vec{p} - \vec{k})$ есть энергия фермиона в промежуточном состоянии и $\omega(k)$ — энергия мезона в промежуточном состоянии. Следовательно, величина $[E(\vec{p} - \vec{k}) + \omega(k)]$ есть полная энергия системы в промежуточном состоянии, а величина $[E(\vec{p} - \vec{k}) + \omega(k) - E(p)]$ — разность энергий промежуточного и начального состояний; именно этот вид знаменателя и следовало ожидать. Члены, которые сократились в выражении (20. 20), содержали величину $[\omega(k) - E(\vec{p} - \vec{k}) - E(p)]$ в знаменателе, т. е. относились к частицам с отрицательной энергией в промежуточном состоянии. Необходимо рассмотреть также член с $[E(\vec{p} - \vec{k}) + E(p) + \omega(k)]$. Он представляет переход из состояния с отрицательной энергией $-E(\vec{p} - \vec{k})$ в промежуточное состояние, в котором имеется нуклон с энергией $E(p)$ и мезон с энергией $\omega(k)$; в этом случае знаменатель

$$[E(p) + \omega(k) - \{-E(\vec{p} - \vec{k})\}] = E(\vec{p} - \vec{k}) + E(p) + \omega(k).$$

Этот член должен был бы представлять в выражении для собственной энергии абсолютный вакуум. Однако в действительности

промежуточное состояние, в котором нуклон имеет энергию $+E(p)$, уже занято реальным нуклоном. Таким образом, этот специфический переход не может иметь места, и собственная энергия вакуума в итоге *уменьшается*, что и дает знак минус перед соответствующим членом в формуле (20. 20).

Для получения величины ΔE нужно [см. выражение (20. 14)] еще выполнить интегрирование по трехмерному пространству k , т. е. взять интеграл $\int J_3 k^2 dk$. Этот интеграл расходится. При больших k величины $E(\vec{p}-\vec{k})$ и $[E(\vec{p}-\vec{k}) + \omega(k) - E(p)]$ возрастают как первая степень k , а величина $[E(\vec{p}-\vec{k}) - \omega(k) + E(p)]$ стремится к постоянному значению $E(p)$. Таким образом, наиболее сильная расходимость могла бы возникнуть из членов с отрицательной энергией в выражении (20. 20), которые имелись бы в однонуклонной теории, но сокращаются в теории дырок. Тем не менее оставшиеся члены ведут себя как $(k^2/k^2) dk$ при больших k , что приводит к линейной расходимости. Однако два оставшихся члена в выражении (20. 20) имеют противоположные знаки, так что в действительности интеграл оказывается расходящимся не линейно, а логарифмически. Следовательно, в теории дырок собственная энергия расходится логарифмически.

То, что собственная энергия должна быть бесконечной, было выяснено давно — уже в 1929 г. Тогда Гейзенберг и Паули [222, 223] указали на это, а Валлер [505], Оппенгеймер [359], Розенфельд [412] и др. вычислили собственную энергию электрона в теории Дирака для одного электрона и нашли, что его собственная энергия расходится квадратично. В 1934 г. Вайскопф [515, 516] произвел новый расчет собственной энергии электрона, используя теорию дырок Дирака, и нашел, что расходимость является только логарифмической.

Большинство выполненных ранее расчетов собственной энергии были более сложными, чем приведенные в данной главе (ср. работы Умэдзавы и Кавабе [489, 492] и Гупта [217]). В частности, при расчете электромагнитной собственной энергии обычно разделяли электромагнитное поле на вклад статического кулонова поля и поперечных электромагнитных волн¹⁾, что возможно в нерелятивистском пределе, где вклад статической части преобладает. Поэтому было опубликовано много работ, в которых вычислялись вклады отдельных частей поля в собственную энергию и обсуждался их физический смысл (см., например, работу Вайскопфа [518]).

§ 2. Попытки сделать собственную энергию конечной

Важно сравнить собственную энергию, встречающуюся в квантовой электродинамике, с собственной энергией, встречающейся в клас-

¹⁾ См., например, книгу Гайтлера [232].

сической теории излучения ¹⁾, и понять различие между ними. Простейшим путем введения собственной энергии в классическую электродинамику является отождествление ее с электрической и магнитной энергией собственного поля электрона. В другом подходе учитывается то, что собственное поле электрона делает более затруднительным ускорение электрона во внешнем поле; это эквивалентно появлению у электрона дополнительной массы (Лоренц [309, 310]). Эта собственная масса дается выражением, аналогичным выражению для собственной энергии, однако между ними имеется определенное различие, которое вызывает значительные затруднения в классической теории собственной энергии. В классической теории собственная энергия (с точностью до численного множителя) равна e^2/r_0 , где r_0 — „радиус“ электрона. Таким образом, точечный электрон имеет бесконечную собственную энергию.

Если приписать электрону конечный радиус, то выражение для взаимодействия поля с электроном будет содержать форм-фактор, который будет существенно отличаться от единицы тогда, когда длина волны λ будет приблизительно равна радиусу r_0 . Положив

$$r_0 = \frac{\hbar c}{k_{\text{макс.}}}, \quad (20.21)$$

мы увидим, что классическая собственная энергия e^2/r_0 пропорциональна величине $k_{\text{макс.}}$, т. е. мы получаем линейную расходимость по k . О величине $k_{\text{макс.}}$ обычно говорят как об обрезании.

Очень широко распространенная в свое время теория приписывала внутреннюю массу электрона энергии взаимодействия (Абрагам и Беккер [1]). В этом случае электронный радиус равен

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}; \quad (20.22)$$

эту величину обычно называют „классическим радиусом электрона“ (см., однако, работы Пуанкаре [392—394], где рассмотрены недостатки этой модели).

В противоположность классической теории собственная энергия, вычисленная на основании теории дырок Дирака, пропорциональна величине

$$\frac{e^2}{\hbar c} mc^2 \ln \left(\frac{\hbar k_{\text{макс.}}}{mc} \right), \quad (20.23)$$

т. е. расходится только логарифмически. Кроме того, в квантовой теории собственная энергия зависит от массы покоя электрона m , тогда как в классической теории величина m вообще не входит в выражение для собственной энергии. Это важное различие вновь указывает на то, что проблема собственной энергии в квантовой теории имеет совсем другую природу, чем в классической теории.

¹⁾ См., например, обсуждение в книге Гайтлера [232].

Серьезные отклонения от классического поведения начинаются уже на расстояниях порядка комптоновской длины волны \hbar/mc , что является наиболее важным. Классический радиус электрона в 137 раз меньше, чем комптоновская длина волны электрона. Таким образом, если мы будем рассматривать все более и более малые расстояния, то необходимо принимать во внимание квантовые эффекты прежде, чем скажутся возможные эффекты классического радиуса электрона; поэтому маловероятно, что решение классической задачи собственной энергии окажется или необходимым, или достаточным для решения квантово-механической задачи.

Если в теории дырок Дирака мы припишем бóльшую часть массы электрона его собственной энергии, то, согласно формуле (20.23), мы должны постулировать радиус обрезания порядка

$$R_{\text{макс.}} = \frac{\hbar}{mc} e^{-137}. \quad (20.24)$$

Следует принять во внимание, что на расстояниях, гораздо больших, чем даваемое формулой (20.24), а именно на расстояниях порядка комптоновской длины волны мезона $\hbar/\mu c$, могут рождаться виртуальные мезоны, которые в свою очередь могут сильно взаимодействовать с виртуальными нуклонами. Таким образом, квантовая электродинамика может оказаться неприменимой гораздо раньше, чем будут достигнуты энергии, соответствующие расстояниям, вычисляемым по формуле (20.24). Отметим, что причиной неприменимости квантовой электродинамики может быть то, что начинают играть роль не только электромагнитное и электронно-позитронное, но и другие поля.

Несмотря на различие между классической и квантовой теориями, были предприняты многочисленные попытки найти такую формулировку классической теории Максвелла-Лоренца в присутствии точечного заряда, в которой не было бы расходимостей. Существовала надежда, что если бы удалось построить классическую электродинамику, в которой не было бы трудностей с бесконечной собственной энергией и конечными собственными натяжениями (разрывающийся электрон), и если бы эту теорию удалось проквантовать, то проблема построения внутренне последовательной квантовой электродинамики могла бы быть решена. Было много успешных попыток построить такую классическую теорию, но ни одна из них ничего не внесла в решение квантовой задачи.

Так, например, Вентцель [522, 523]¹⁾ пытался рассматривать точечный заряд как предельный случай, в котором пространственно-подобный вектор (радиус электрона) стремится к нулю. С другой стороны, Дирак [110, 111]²⁾ пытался использовать существ-

1) См. также его книгу [525].

2) См. также работу Елизера [146], где дан обзор предыдущих работ.

зование у уравнений Максвелла запаздывающих и опережающих решений. Он определил „собственное“ и „внешнее“ поля как полусумму и полуразность соответственно запаздывающего и опережающего полей. Это разделение полей является инвариантным. Он допустил, что теория Максвелла-Лоренца описывает поле вплоть до точечного электрона, и показал, что члены, которые приводят к бесконечностям, можно вычесть лоренц-инвариантным способом. Это соответствует вычитанию собственного поля из полного поля для получения силы, действующей на данный электрон. Способ вычитания не нарушает никаких законов сохранения; кроме того, правильно принимается во внимание реакция поля излучения на движение электронов. Однако в этой классической теории Дирака свободный электрон может двигаться самоускоренно. Поэтому эта теория является неудовлетворительной.

Другой возможной в классических рамках теорией, тесно связанной с приведенной выше классической теорией Дирака, является теория действия на расстоянии, предложенная Уилером и Фейнманом [529, 530]. В этой теории электромагнитное поле снова инвариантно разбивается на собственное и внешнее поля. Однако постулируется, что собственное поле данного электрона не действует обратно на частицу, которая его порождает. Поэтому в этой теории не существует понятия собственной энергии частицы. Формализм развит как теория действия на расстоянии, в которой поля являются просто вспомогательными понятиями, не имеющими собственных степеней свободы. Авторы проинтегрировали уравнения движения частиц, так что поля явно не проявляются. В этой теории требуется, чтобы взаимодействие между частицами осуществлялось полусуммой запаздывающего и опережающего полей. С этой точки зрения, реакция излучения возникает вследствие действия статистического механизма (в отличие от чистой электродинамики) в мире, в котором все испущенное излучение в конце концов поглощается.

Другой очень интересной теорией точечного электрона является теория Штюкельберга [462, 463], в которой получается не только конечная собственная энергия, но и равное нулю внутреннее натяжение. Вследствие кулоновского отталкивания точечный заряд стремится разорваться, что ведет к бесконечной собственной энергии и конечным собственным натяжениям. Идея Штюкельберга состоит в том, что в дополнение к электромагнитному взаимодействию существует другое взаимодействие, характеризующееся „новым“ (т. е. мезонным) зарядом; эффект этого взаимодействия проявляется в притяжении одинаковых зарядов, полностью уничтожающем кулоновское отталкивание. Он постулировал взаимодействие электрона с короткодействующим скалярным полем, в случае которого две одинаковые частицы притягиваются друг к другу. Короткий радиус действия новых сил необходим для того, чтобы не было наблюдаемых эффектов при взаимодействии расположенных далеко друг от друга

зарядов. Если константа связи со скалярным полем равна f , то Штюкельберг нашел, что при $e^2 = f^2$ полная классическая собственная энергия конечна, а собственное натяжение равно нулю.

Бопп [49], Ланде и Томас (см. работы [296 — 298]) развили теорию, аналогичную теории Штюкельберга, но вместо скалярного поля они взяли векторное. Хотя векторное поле приводит к отталкиванию между частицами одного заряда, они предположили, что следует вычитать полную энергию векторного поля из полной энергии электрона. При этом компенсация возможна, но энергия не является более положительно-определенной.

Фактически первой релятивистски и калибровочно инвариантной теорией, дающей конечное собственное натяжение и конечную собственную энергию в классическом случае, была теория Борна [51, 52, 54] и Инфельда. В этой теории уравнения Максвелла заменены системой нелинейных уравнений, которые переходят в уравнения Максвелла в пределе слабых полей. Квантование в этой теории становится почти невозможным из-за ее нелинейности. Кроме того, все же остаются сингулярности в величинах, описывающих поле в присутствии точечных зарядов.

Нелинейные унитарные теории поля¹⁾ были предложены Ми²⁾, Розеном (см. работы [407—409]), Джелом (не опубликовано, 1947/48 г.), Финкельштейном (см. работы [177, 178]) и Дреллом [122]. В унитарной теории поля частицы возникают не как сингулярности, а как малые объемы, в которых сконцентрированы энергия и заряд поля. В такой теории уравнения движения частиц следуют из уравнений поля. Именно в этом отношении унитарная теория отличается от теории, в которой частицы представляются сингулярностями поля. В последнем случае уравнения поля становятся неприменимыми в этих сингулярностях, и поэтому вообще нельзя определить движение частиц.

Унитарная теория должна быть обязательно нелинейной, поскольку одна частица не может действовать на другую, если уравнения линейны. Если в этой теории мы фиксируем заряд частицы, то отсюда будет однозначно следовать дискретный спектр масс. Розен (см. работы [407, 408]) и Джел (не опубликовано) показали, что в некоторых известных классических теориях поля, таких как теория дираковского поля, взаимодействующего с полем Клейна—Гордона с помощью скалярной связи, возможно существование статических и сферически симметричных решений, которые могут быть интерпретированы как частицы. Эти решения повсюду свободны от сингулярностей и являются квадратично интегрируемыми, так что классические бесконечности не могут возникнуть. Квантование унитарных теорий поля было формально исследовано Финкельштейном [177].

1) Мы не рассматриваем здесь общую теорию относительности Эйнштейна или его единых теорий, которые являются первоклассными унитарными теориями.

2) См. книгу Паули [368], в которой дан обзор этой работы.

Недавно Дирак [118—121] развил классическую теорию непрерывно распределенных зарядов, которые движутся согласно уравнениям движения Лоренца. Характерной чертой этой теории является то, что в ней встречается только отношение заряда к массе e/m , а не заряд e и масса m отдельно. По-видимому, в современной формулировке теории можно ввести только отношение e/m . Дирак надеялся, что можно будет найти новый метод квантования этой теории, который ввел бы постоянную \hbar и в то же время объяснил то, что электрический заряд встречается только кратным величине e . Это дало бы соотношение между величинами e и \hbar и, таким образом, определило бы величину постоянной тонкой структуры $e^2/4\pi\hbar c$.

Многие другие классические теории имели своей целью введение радиуса электрона релятивистски инвариантным способом. Трудности, которые встречались на этом пути, состоят в том, что необходимо определить распределение заряда таким образом, чтобы это было совместно с релятивистской интерпретацией причинности. Рассмотрим, например, поведение абсолютно жесткого электрона под действием пакета электромагнитных волн. Как только пакет достигнет края распределения заряда, электрон как целое придет в движение. Таким образом, импульс внутри электрона распространяется мгновенно, что находится в противоречии с релятивистскими законами причинности. Поэтому были сделаны попытки добиться того, чтобы эти нарушения причинности происходили в достаточно малых пространственно-временных интервалах, и, таким образом, не возникало противоречия с опытом (в связи с этим см. работу Кретьена и Пайерлса [82]).

Такие линейные теории с протяженным источником были развиты только недавно; в случае классической теории лучшими среди них являются теории Боппа [50], Пайерлса и Мак-Мануса [317] и Фейнмана [165]. Мак-Манус [317] предположил нелокальное взаимодействие типа, указанного в гл. 11, § 3. В явном виде он предложил взаимодействие типа

$$\iint j^\nu(x') F[(x-x')^2] A_\nu(x) d^4x d^4x', \quad (20.25)$$

что соответствует усреднению по пространственно-временной области. Функция F является релятивистски инвариантной, поскольку она зависит только от инвариантного 4-мерного расстояния между двумя точками. Требуется, чтобы функция F достаточно быстро убывала, когда величина $R^2 = |x-x'|^2$ становится большой; таким образом, должно удовлетворяться следующее соотношение:

$$\int F(x^2) d^4x = 1; \quad (20.26)$$

это соотношение необходимо для того, чтобы полный заряд был конечен и равен e . Такую функцию F можно получить, если рассматривать 4-мерный фурье-образ $F(R^2)$, определенный следующим

образом:

$$F(\mathbf{R}^2) = \int e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} g(\mathbf{K}^2) d^4K \quad (20.27)$$

с подходящей функцией $g(\mathbf{K}^2)$. Такую функцию g можно, например, определить так:

$$g(\mathbf{K}^2) = \frac{K_0^4}{(2\pi)^4 (K_0^4 + \mathbf{K}^4)}, \quad K_0 = \frac{1}{r_0}. \quad (20.28)$$

Таким образом, конечный радиус электрона r_0 вводится релятивистски инвариантным образом. Эта теория Мак-Мануса, в которой заряд электрона распределен в пространстве и во времени, дает конечную собственную энергию электрона.

Фейнман [165] ввел конечный радиус электрона непосредственно во взаимодействие между двумя электронами, а не во взаимодействие между электроном и электромагнитным полем, поскольку он формулировал свою теорию как теорию действия на расстоянии. Затем было последовательно показано, что теории Мак-Мануса и Фейнмана являются эквивалентными для определенного класса функций F . Большим преимуществом этих теорий является то, что они могут быть проквантованы (Фейнман [166]) и фактически дают конечную собственную энергию в низшем порядке теории возмущений.

Однако в квантовой теории существуют также и другие расходимости, которые не встречаются в классической теории, а именно обусловленные поляризацией вакуума. Этот процесс соответствует рождению пары электромагнитным полем и последующей аннигиляции этой пары. Чтобы устранить возникающие расходимости в нелокальной теории, мы должны рассмотреть лагранжиан взаимодействия следующего вида:

$$\int \bar{\psi}(x') \gamma^{\mu} \psi(x'') A_{\mu}(x''') F(x - x', x - x'', x - x''') \times \\ \times d^4x' d^4x'' d^4x'''. \quad (20.29)$$

В этом случае нельзя больше говорить о токе j_{μ} в одной 4-точке, поскольку выражение для тока содержит как переменную x , так и переменную x' . В действительности, хотя полный заряд сохраняется, мы не имеем больше локального уравнения непрерывности для электрического заряда, поскольку взаимодействие (20.29) не является калибровочно инвариантным. Кретьен и Пайерлс [83] попытались дать формулировку нелокальной электродинамики, в которой удовлетворялось бы требование калибровочной инвариантности. Хотя им и удалось построить такую теорию, они все же не смогли устранить в ней расходимости, связанные с вакуумной поляризацией.

§ 3. Вычисление собственной энергии с помощью метода Фейнмана

Несмотря на то, что классические попытки получить конечную собственную энергию не были особенно успешными, они все же используются в большом числе работ по квантовой теории поля в качестве полезных методов для формального устранения расходимостей из квантовой теории. Обычно удобно ввести обрезание типа, предложенного Фейнманом [166]; оно делает собственную энергию конечной, но зависящей от параметра обрезания λ . Это обрезание может рассматриваться как частный случай взаимодействия в форме (20.29), в котором множитель

$$\frac{1}{2} \Delta_F(x-y) = \varphi^*(x) \varphi^*(y),$$

появляющийся при обычной локальной формулировке теории поля, заменяется на новую функцию

$$f_F(x-y) = \int d^4x' \int d^4y' F(x-x') F(y-y') \varphi^*(x') \varphi^*(y'). \quad (20.30)$$

Выбрав подходящие функции F , можно сделать функцию $f_F(x-y)$ плавной функцией аргумента $(x-y)^2$, не имеющей сингулярностей. Ясно, что имеется много возможностей выбора функций $f_F(x)$, соответствующих различным функциям F ; простейшей из них, по-видимому, является функция, предложенная Фейнманом [166], которая заменяет функцию распространения бозона $(k^2 - \mu^2)^{-1}$ на величину

$$\begin{aligned} F_F(k^2) &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{k^2 - \mu^2} - \frac{1}{k^2 - \mu^2 - \lambda^2} \right] G(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{k^2 - \mu^2} \left(\frac{-\lambda^2}{k^2 - \mu^2 - \lambda^2} \right) G(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (20.31)$$

Величина G зависит от переменной λ , большой по сравнению с величинами m и μ , и нормирована так, что

$$\int_0^\infty G(\lambda) d\lambda = 1. \quad (20.32)$$

Следовательно, если не проводить интегрирование по λ , то в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ мы вернемся обратно к локальной теории. Каждый интеграл по промежуточным бозонным квантам, который раньше содержал множитель $(k^2 - \mu^2)^{-1}$, теперь получает дополнительный улучшающий сходимость множитель $C(k^2)$, причем

$$C(k^2) = - \int_0^\infty \lambda^2 (k^2 - \mu^2 - \lambda^2)^{-1} G(\lambda) d\lambda; \quad (20.33)$$

этого множителя достаточно, чтобы сделать сходящимися все интегралы по виртуальным бозонным квантам. Полюса по-прежнему определены в смысле Фейнмана, т. е. масса μ имеет малую отрицательную мнимую часть.

В качестве примера современной ковариантной техники интегрирования¹⁾ проведем снова расчет собственной энергии нуклона, используя метод обрезания Фейнмана. Если интегрирование по $d\lambda$ будем проводить в конце расчета и учтем, что

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} - \frac{1}{k^2 - \mu^2 - \lambda^2} = - \int_0^{\lambda^2} dL \frac{1}{(k^2 - \mu^2 - L)^2}, \quad (20.34)$$

то интеграл собственной энергии [см. выражения (20.2), (20.5)] получит вид

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{-i}{4\pi^3} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{m}{E(p)} \bar{\psi}(\vec{p}) \times \\ &\times \int_0^{\lambda^2} dL \int d^4k \frac{\Gamma(\hat{p} - \hat{k} + m)\Gamma}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k^2 - \mu^2 - L)^2} \psi(\vec{p}). \end{aligned} \quad (20.35)$$

Рассмотрим сначала интеграл по переменной k . Благодаря обрезанию этот интеграл теперь сходится. Поскольку мы имеем дело со свободными частицами ($p^2 = m^2$), то знаменатель фермиона $(p-k)^2 - m^2$ можно упростить

$$p^2 - 2p \cdot k + k^2 - m^2 = k^2 - 2p \cdot k. \quad (20.36)$$

Далее, мы объединим знаменатели, чтобы получить знаменатель, являющийся функцией только k^2 , используя для этого замечательную формулу Фейнмана

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2}. \quad (20.37)^2)$$

¹⁾ См. статью Фейнмана [169], особенно дополнение.

²⁾ Эту формулу можно получить, если учесть, что

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \left(\frac{1}{b-a} \right) \int_a^b \frac{dx}{x^2}$$

и ввести в последний интеграл новую переменную $x = az + b(1-z)$. Соотношение (20.37) справедливо для всех значений a и b . Если, однако, a и b имеют противоположный знак, то z необходимо рассматривать как комплексную переменную, и путь интегрирования должен отклоняться от вещественной оси, чтобы обойти сингулярность в точке $z = b/(b-a)$. Фактически можно выбрать любой путь интегрирования, соединяющий точки $z = 0$ и $z = 1$ (но не проходящий через сингулярность), поскольку вычет подинте-

Поскольку в нашем примере имеется множитель $(k^2 - \mu^2 - L)^{-2}$, то используем формулу

$$\frac{1}{a^2 b} = \int_0^1 \frac{2z dz}{[az + b(1-z)]^3}, \quad (20.38)$$

которая получается из формулы (20.37) дифференцированием по a . Объединенный знаменатель тогда принимает вид

$$\begin{aligned} (k^2 - \mu^2 - L)z + (k^2 - 2p \cdot k)(1-z) &= \\ &= k^2 - 2p \cdot k(1-z) - (\mu^2 + L)z = \\ &= [k - p(1-z)]^2 - m^2(1-z)^2 - (\mu^2 + L)z, \end{aligned} \quad (20.39)$$

где мы снова использовали соотношение $p^2 = m^2$. Введем теперь переменную $k' = k - p(1-z)$, тогда интеграл можно записать следующим образом:

$$2 \int_0^1 dz z \int d^4 k' \frac{\Gamma(\hat{p}z - \hat{k}' + m) \Gamma}{[k'^2 - m^2(1-z)^2 - (\mu^2 + L)z]^3}. \quad (20.40)$$

Теперь знаменатель является функцией k^2 (мы опустили штрихи), поэтому интеграл

$$\int d^4 k k_\mu f(k^2)$$

равен нулю вследствие симметрии. Вообще из свойства симметрии следует, что

$$\int d^4 k \text{ (нечетное число множителей } k_\mu) f(k^2) = 0, \quad (20.41)$$

$$\int d^4 k k_\mu k_\nu f(k^2) = -\frac{1}{4} g_{\mu\nu} \int d^4 k k^2 f(k^2). \quad (20.42)$$

Частичного выражения в точке сингулярности равен нулю. Интеграл Фейнмана (20.37) фактически представляет частный случай следующей общей формулы:

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = (n-1)! \int \dots \int \frac{dz_1 \dots dz_n}{[a_1 z_1 + \dots + a_n z_n]^n}$$

$$\sum_{i=1}^n z_i = 1.$$

Для вычисления последнего интеграла необходимо ввести функцию $\delta\left(\sum_{i=1}^n z_i - 1\right)$ в подынтегральное выражение (см. также книгу Гурса и Гедрика [212]). Интеграл можно записать также в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} &= (n-1)! \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \dots \int_0^{z_{n-2}} dz_{n-1} \times \\ &\times [a_n z_{n-1} + a_{n-1}(z_{n-2} - z_{n-1}) + \dots + a_1(1 - z_1)]^{-n}. \end{aligned}$$

Поэтому член с \hat{k} в интеграле (20.40) равен нулю, что эквивалентно в случае отсутствия обрезания сведению расходимости интеграла от линейной к логарифмической.

Таким образом, мы должны вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k \frac{1}{(k^2 - C + i\varepsilon)^3}, \quad (20.43)$$

где $C = m^2(1-z)^2 + (\mu^2 + L)z$ — положительно-определенная величина. Как уже указывалось, при интегрировании по вещественной оси k_0 полюса смещаются при прибавлении добавки Фейнмана $-i\varepsilon$ к массам частиц. Однако мы можем повернуть путь интегрирования в комплексной области на 90° так, чтобы интегрирование велось по мнимой оси от $-i\infty$ до $+i\infty$. Это возможно, потому что при вращении контур нигде не пересекает сингулярностей; последние расположены *выше* отрицательной вещественной оси и *ниже* положительной вещественной оси. Следовательно, можно ввести новую переменную интегрирования $k_0 = ik_4$, так что интеграл (20.43) преобразуется в интеграл в 4-мерном евклидовом пространстве:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dk_0}{(k^2 - C + i\varepsilon)^3} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_4 d^3k}{(k_4^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + C)^3}. \quad (20.44)$$

Если ввести четырехмерные сферические координаты, элемент объема в которых равен $2\pi^2 k^3 dk$, то наш интеграл I , наконец, получит вид

$$I = -2\pi^2 i \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{(k^2 + C)^3} = -i\pi^2 \int_0^\infty \frac{x dx}{(x + C)^3} = \frac{-i\pi^2}{2C}. \quad (20.45)$$

Отметим, что величину такого рода интегралов с различными степенями в знаменателе можно получить из величины I с помощью интегрирования или дифференцирования по параметру C .

Таким образом, собственная энергия равна (опуская интеграл $\int d\lambda$)

$$\begin{aligned} \Delta E = & -\frac{m}{E(p)} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dz z \times \\ & \times \int_0^{\lambda^2} dL \bar{w}(\vec{p}) [\Gamma(pz + m) \Gamma] w(\vec{p}) \frac{1}{[m^2(1-z)^2 + (\mu^2 + L)z]}. \quad (20.46) \end{aligned}$$

Если мы снова остановимся на случае $\Gamma = \gamma_5$ и учтем, что $\hat{p}\omega(\vec{p}) = m\omega(\vec{p})$, то получим

$$\Delta E = \frac{m}{E(p)} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{1}{4\pi} \bar{\omega}(\vec{p}) \omega(\vec{p}) \int_0^1 dz z (1-z) \times \\ \times \int_0^{\lambda^2} dL \frac{m}{[m^2(1-z)^2 + (\mu^2 + L)z]}. \quad (20.47)$$

Интегрирование по переменной L тогда дает

$$\Delta E = \frac{m}{E(p)} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{1}{4\pi} \bar{\omega}(\vec{p}) \omega(\vec{p}) m \int_0^1 dz (1-z) \times \\ \times \ln \left[\frac{m^2(1-z)^2 + (\mu^2 + \lambda^2)z}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right]. \quad (20.48)$$

В пределе $\lambda \rightarrow \infty$ можно пренебречь в числителе логарифма членами $\mu^2 z + m^2(1-z)^2$ по сравнению с членом $\lambda^2 z$. Если, кроме того, мы будем пренебрегать массой μ по сравнению с массой m , то получим

$$\Delta E = \frac{m}{E(p)} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{m}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \bar{\omega}(\vec{p}) \omega(\vec{p}). \quad (20.49a)$$

Величина ΔE расходится логарифмически в пределе $\lambda \rightarrow \infty$. Отметим, что при вычислении этого выражения для собственной энергии мы не делали предположения $\vec{p} = 0$. Интеграл (20.48) можно вычислить без всяких приближений, тогда он равен

$$\Delta E = \frac{m}{E(p)} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{m}{8\pi} \left\{ \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{\mu^2}{m^2} + 2 \left(\frac{\mu}{m} \right)^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{2m^2} \right) \ln \frac{\mu}{m} - \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{\mu}{m} \right)^3 \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{2m^2}} \arcsin \cos \frac{\mu}{2m} \right\}. \quad (20.49b)$$

Интересно отметить (см., например, работу Энацу [147]), что собственная энергия в скалярном случае расходится также логарифмически, но имеет противоположный по сравнению с псевдоскалярным случаем знак, так что $\Delta E \sim - (3g^2/4\pi) \ln \lambda/m$. Знак собственной энергии во втором порядке для электрона в квантовой электродинамике такой же, как и в псевдоскалярном случае, причем $\Delta E \sim (3e^2/2\pi) \ln \lambda/m$. Поэтому, если принять идею Штюкельберга о компенсации расходимости, то можно сделать собственную энергию электрона второго порядка конечной, если в дополнение к электромагнитному полю предположить, что электрон взаимодействует со скалярным полем с константой связи $g^2 = 2e^2$ (Саката [415], Пайс [364], см. также обзорную статью Саката и Умэдзавы [416])¹⁾.

1) Обсуждение проблем, связанных с собственным натяжением для фермиона в квантовой теории, рассмотрено в работах Пайса и Эпштейна [365], Порлиха [404], Вилларса [503], Боровица и Кона [62].

Метод обрезания Фейнмана, который мы только что описали, может рассматриваться как частный случай общего *формального* ковариантного метода рассмотрения расходящихся интегралов, данного Паули и Вилларсом [380]¹⁾. Их метод известен как метод „регуляризации“. Он состоит в том, что сначала проводится регуляризация всех сингулярных выражений, а затем выполняется предельный переход. Таким образом, если

$$I(m) = \int J(m) d^4k \quad (20.50)$$

есть расходящийся интеграл по внутренней линии с массой m , то регуляризованный интеграл $I_R(m)$ определяется выражением

$$I_R(m) = \sum_i C_i I(m_i) = \int \sum_i C_i J_{\epsilon}(m_i) d^4k, \quad (20.51)$$

где $C_0 = 1$ и $m_0 = m$.

Некоторые ограничения, накладываемые на величины C_i и m_i , достаточны для того, чтобы сделать интеграл (20.51) сходящимся. В электродинамике для достижения поставленной цели требуется наложить следующие условия:

$$\sum_i C_i = 0, \quad (20.52a)$$

$$\sum_i C_i m_i^2 = 0. \quad (20.52b)$$

Предельный переход состоит в том, что вспомогательные массы m ($i = 1, 2, \dots$) следует устремить к бесконечности.

Условия (20.52) обеспечивают отсутствие сингулярностей на световом конусе у функций Δ и $\Delta^{(1)}$ в отличие от нерегуляризованных функций [напомним соотношения (15.49б) и (15.51в) и отметим, что условия (20.52) как раз устраняют сингулярности]. Условий (20.52) также достаточно, чтобы получить сходящееся выражение для собственной энергии электрона, если только проводится регуляризация всего выражения как целого, а не отдельных его частей. После выполнения конечного предельного перехода снова возникает логарифмическая расходимость.

Приведенная выше методика является, по терминологии Паули и Вилларса, „формалистической“ теорией, в которой даны чисто формальные рецепты для вычисления расходящихся интегралов, в отличие от „реалистических“ теорий, в которых математическая схема, обеспечивающая сходимость, получается в результате учета взаимодействия с другими полями (см., например, работу Пайса [364]).

¹⁾ См. также работы Штюкельберга [472, 473] и Ривьера [403].

ПЕРЕНОРМИРОВКА

§ 1. Перенормировка массы
и нерелятивистский лэмбовский сдвиг

В гл. 20, § 3, была вычислена собственная энергия свободной частицы. При наблюдении свободной частицы единственными ее измеримыми характеристиками являются энергия E и импульс \vec{p} . Из них можно образовать только одну инвариантную величину $E^2 - p^2$, а именно массу частицы

$$E^2 - p^2 = m^2. \quad (21.1a)$$

Если мы имеем релятивистски инвариантное взаимодействие с полем, то влияние этого взаимодействия на свободную частицу может привести только к изменению ее массы, скажем, на величину δm . Изменение энергии свободной частицы дается тогда выражением

$$E + \Delta E = \sqrt{(m + \delta m)^2 + p^2}. \quad (21.1b)$$

Разлагая последнее выражение по δm , получаем

$$E + \Delta E = \sqrt{m^2 + p^2} + \frac{m \delta m}{\sqrt{m^2 + p^2}} + O(\delta m^2). \quad (21.1b)$$

Итак, в первом порядке

$$\Delta E = \frac{m \delta m}{E}. \quad (21.1г)$$

Другими словами, в инвариантной теории собственная энергия в первом порядке определенным образом зависит от импульса частицы, а именно: она должна быть обратно пропорциональна $\sqrt{m^2 + p^2}$. Обратно пропорциональную зависимость собственной энергии от E — исходной энергии свободной частицы, определил уже Вайскопф при рассмотрении собственной энергии в теории дырок с помощью развитой им теории возмущений.

Полученная нами в псевдоскалярной мезонной теории формула (20.49) для свободной энергии первого порядка имеет требуемый вид. Так как для нуклона $\omega\omega = 1$, то

$$\Delta E = \frac{m}{E} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{m}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} + O \left(\frac{\mu}{m} \right) \right]. \quad (21.2a)$$

Поэтому для изменения массы мы получаем

$$\delta m = \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{m}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} + O \left(\frac{\mu}{m} \right) \right]. \quad (21.26)$$

Таким образом, в ковариантной теории Фейнмана явно выражено то обстоятельство, что собственная энергия соответствует изменению массы. Утверждение, согласно которому собственная энергия свободной частицы может привести *только* к изменению ее массы, лежит в основе современного способа разрешения трудностей, связанных с расходимостями. Впервые такого рода предложение было сделано Крамерсом [290] в 1947 г. для случая классической электродинамики. Он указал, что мы никогда не можем экспериментально наблюдать m_0 — массу „голового“ электрона, а можем наблюдать только $(m_0 + \delta m)$ — *наблюдаемую* массу электрона, которую мы обычно обозначаем через m , т. е.

$$m = m_0 + \delta m. \quad (21.3)$$

Поэтому Крамерс предложил обратиться к исходной точке зрения Гейзенберга на квантовую механику, согласно которой только наблюдаемая величина m , а не отдельно величины m_0 или δm , должна рассматриваться в теории. Этот принцип известен как *принцип перенормировки массы*. Крамерс готов был допустить, что изменение массы электрона может быть бесконечным (надеясь, однако, что в будущей теории оно будет конечно и мало), но не считал это обстоятельство существенным, так как физически наблюдаемые величины, например уровни энергии или поперечные сечения, конечны, если их выразить через наблюдаемую массу m . Этот принцип на практике оказался чрезвычайно плодотворным и в последние годы привел к успешному развитию квантовой электродинамики и псевдоскалярной мезонной теории.

Впервые принцип перенормировки массы был применен к задаче о лэмбовском сдвиге, решение которой мы и приведем в качестве примера. Когда в 1947 г. Крамерс предложил этот принцип, Лэмб и Ризерфорд [295] как раз измерили смещение уровня $2S$ водорода по отношению к уровню $2P$. Следуя идее Крамерса, Бете [33] интерпретировал сдвиг уровней как эффект взаимодействия электрона с полем излучения. В действительности Бете просто рассчитал собственную энергию электрона, связанного в атоме. Однако, согласно идее Крамерса, большая часть этой собственной энергии уже принимается во внимание, если мы используем в расчетах наблюдаемую массу электрона m вместо массы „голового“ электрона m_0 . Таким образом, истинный сдвиг уровней есть разница между собственными энергиями связанного и свободного электронов.

В нерелятивистском приближении, которое использовал Бете в 1947 г., необходимо рассматривать только взаимодействие электрона с поперечными электромагнитными волнами. Гамильтониан,

описывающий электрон, движущийся в некотором поле с потенциалом $V(\vec{x})$ и взаимодействующий с полем излучения, должен быть взят в виде

$$H = H_{\text{rad}} + H_{\text{mat}} + H_{\text{int}} = H_0 + H_I, \quad (21.4)^1$$

где

$$H_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) d^3x, \quad (21.4a)$$

$$H_{\text{mat}} = \frac{p^2}{2m_0} + V(\vec{x}), \quad (21.4b)$$

$$H_I = \frac{-e}{m_0c} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{x}). \quad (21.4b)$$

Здесь выбрана радиационная калибровка $\text{div} \vec{A} = 0$, так что поле излучения описывается только вектором-потенциалом \vec{A} и $\vec{\mathfrak{E}} = -\partial \vec{A} / \partial x^0$, а $\vec{\mathfrak{H}} = \text{rot} \vec{A}$. В шредингеровском представлении разложение квантованного поля $\vec{A}(\vec{x})$ по операторам рождения и уничтожения фотонов с импульсом \vec{k} и поляризацией λ имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) = & \left(\frac{\hbar c}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3k}{V \omega_k} \times \\ & \times \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) (c_\lambda(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + c_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}). \end{aligned} \quad (21.5a)$$

Отметим, что суммирование по поляризационному индексу λ ведется здесь только от 1 до 2, т. е. по двум поперечным направлениям, а поскольку $\text{div} \vec{A} = 0$, то $\vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0$ ($\lambda = 1, 2$). Перестановочные соотношения для операторов поля имеют обычный вид

$$\begin{aligned} [c_\lambda(\vec{k}), c_{\lambda'}(\vec{k}')] &= [c_\lambda^\dagger(\vec{k}), c_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')] = 0, \\ [c_\lambda(\vec{k}), c_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')] &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \end{aligned} \quad (21.5b)$$

и

$$N_\lambda(\vec{k}) = c_\lambda^\dagger(\vec{k}) c_\lambda(\vec{k})$$

¹⁾ В дальнейшем нас будут интересовать только эффекты собственной энергии, обусловленные членом H_{int} . Поэтому мы опускаем член порядка A^2 , который появляется при калибровочно инвариантно введении взаимодействия заряженной частицы с полем излучения, получаемом при замене $p_i \rightarrow p_i - (e/c) A_i$. Член A^2 дает в собственной энергии частицы несущественную константу (т. е. константу, не зависящую от импульса частицы). Однако этот член играет большую роль в проблемах, в которых рассматривается рассеяние излучения на заряженных частицах, и, конечно, в калибровочной инвариантности теории.

— оператор числа фотонов с импульсом \vec{k} и поляризацией λ и

$$H_{\text{рад}} = \hbar c \sum_{\vec{k}, \lambda} \omega_k N_\lambda(\vec{k}),$$

где $\omega_k = |\vec{k}|$.

Гамильтониан (21.4) описывает взаимодействие точечной нерелятивистской частицы с полем излучения. Однако вследствие наличия члена взаимодействия H_I заряженная частица может, например, испустить виртуальные фотоны со сколь угодно большим импульсом и при этом приобрести столь большой импульс отдачи, что ее движение не может больше рассматриваться нерелятивистски. Таким образом, строго говоря, гамильтониан (21.4) является внутренне непоследовательным. Эту трудность можно частично обойти, если рассматривать частицу с распределенным зарядом и члену взаимодействия придать вид

$$-\frac{e}{n_0 c} \int F(\vec{x} - \vec{x}') \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{x}') d^3x',$$

где функция $F(\vec{x})$ описывает форму распределения заряда. Далее, если a — радиус распределения заряда ($a \approx \hbar/mc$), то волны с длиной, меньшей a , не будут взаимодействовать с частицей; другими словами, только те величины \vec{k} , для которых $\hbar k < mc$, будут давать вклад в разложение (21.5а).

Рассмотрим теперь свободный электрон; в этом случае $V(\vec{x}) = 0$. Если бы H_I было равно нулю, то собственные функции оператора H были бы и собственными функциями оператора H_0 , т. е. произведениями собственных функций операторов $p^2/2m_0$ и $H_{\text{рад}}$. Если мы положим, что связь между частицами и полем излучения мала и поэтому применима теория возмущений, то член H_I даст сдвиг невозмущенных собственных значений энергии. Рассчитаем это изменение энергии во втором приближении для невозмущенного состояния, в котором имеется только один электрон с импульсом \vec{p} и нет фотонов, т. е. для состояния, волновая функция которого

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \Phi_0,$$

где V — нормировочный объем для электронной волновой функции и Φ_0 описывает вакуум поля излучения, так что $c_\lambda(\vec{k}) \Phi_0 = 0$. Отметим, что энергия этого состояния E_0 равна $p^2/2m_0$, т. е. кинетической энергии электрона.

Проводя вычисления таким же образом, как и в гл. 14, § 1, легко получить, что сдвиг уровня энергии, обусловленный излучением и последующим поглощением фотона электроном, во втором

приближении¹⁾ дается следующим выражением:

$$\Delta E^{(2)} = \sum_{i \neq 0} \frac{(H_I)_{0i} (H_I)_{i0}}{E_0 - E_i}, \quad (21.6a)$$

$$\Delta E^{(2)} = \left(\Psi_0, H_I \frac{1}{E_0 - H_0} H_I \Psi_0 \right), \quad (21.6б)$$

$$\begin{aligned} \Delta E^{(2)} = & \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{\hbar c}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{\omega_k}} \int \frac{d^3 k'}{\sqrt{\omega_{k'}}} \int d^3 x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}} \times \\ & \times \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}})(\vec{p}' \cdot \vec{\varepsilon}_{\lambda'}(\vec{k}') e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}})}{E_0 - \frac{(\vec{p} - \hbar \vec{k}')^2}{2m_0} - \hbar c k'} F(\vec{k}) F^*(\vec{k}') \times \\ & \times (\Phi_0, c_\lambda(\vec{k}) c_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \Phi_0), \quad (21.6в) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E^{(2)} = & - \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{\hbar c}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{\omega_k} |F(\vec{k})|^2 \times \\ & \times \sum_{\lambda=1}^2 \frac{|\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k})|^2}{-\hbar \vec{p} \cdot \vec{k} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} + \hbar c k}. \quad (21.6г) \end{aligned}$$

Отметим, что поскольку \vec{p}/m_0 является скоростью частицы \vec{v} , то первый член в знаменателе в выражении (21.6г) будет порядка v/c по сравнению с членом $\hbar c k$. Поскольку мы проводим расчет в нерелятивистском приближении, то будем пренебрегать этим членом по сравнению с членом $\hbar c k$. Кроме того, следует помнить, что функция $F(\vec{k})$ обрезает вклад больших k ($k > 1/a$) в интеграле, входящем в выражение (21.6г). Поэтому мы можем также пренебречь членом $\hbar^2 k^2/2m_0$ по сравнению с членом $\hbar c k$. Наконец, принимая во внимание, что \vec{k} и $\vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k})$ взаимно ортогональны, получаем

$$\sum_{\lambda=1}^2 |\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k})|^2 = p^2 - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{k^2}.$$

Теперь мы можем выполнить интегрирование по угловым переменным в выражении (21.6г), выбрав вектор \vec{p} в качестве полярной оси; тогда получим

$$\Delta E^{(2)} \approx - \frac{p^3}{2m_0} \frac{4}{3\pi} \frac{e^2}{4\pi \hbar c} \left(\frac{\hbar}{m_0 c} \right) \int_0^\infty dk |F(k)|^2. \quad (21.6д)$$

¹⁾ Член $\vec{p} \cdot \vec{A}$ не дает вклада в первом приближении, так как $(\Psi_0, \vec{p} \times \vec{A} \Psi_0) = 0$; однако в этом приближении член A^2 дает постоянный член.

Отсюда следует, что для точечного заряда, для которого $F(k) = 1$, величина $\Delta E^{(2)}$ расходится линейно. Важно, что полученный вклад в собственную энергию фактически пропорционален $p^2/2m_0$ (кинетической энергии частицы), поэтому энергия частицы во втором приближении дается выражением

$$E = E_0 + \Delta E^{(2)}, \quad (21.7a)$$

$$E = \frac{p^2}{2m_0} \left[1 - \frac{4\alpha}{3\pi} \left(\frac{\hbar}{m_0 c} \right) \int_0^\infty dk |F(k)|^2 \right], \quad (21.7б)$$

$$E = \frac{p^2}{2m_0} \left[1 - \frac{\delta m}{m_0} \right], \quad (21.7в)$$

где

$$\delta m = + \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{\hbar}{c} \int_0^\infty dk |F(k)|^2. \quad (21.7г)$$

Теперь примем точку зрения Крамерса. Определим δm как электромагнитную массу, которую частица приобретает (сверх „голой“ механической массы) вследствие взаимодействия с полем излучения. Однако наблюдаемой массой является только $m_0 + \delta m$, поскольку не существует экспериментов, которые могли бы выделить из массы заряженной частицы часть, имеющую электромагнитное происхождение, и часть, имеющую механическое происхождение. Поэтому величину $m_0 + \delta m$ мы отождествим с наблюдаемой экспериментальной массой m . (Имеются, конечно, электромагнитные вклады в m_0 высших порядков, и, строго говоря, следует взять сумму всех этих вкладов плюс m_0 и приравнять полученную величину m .) Так как в нашей теории с обрезанием величина δm мала (порядка α), то соотношение (21.7в) мы можем рассматривать как член второго порядка, возникающий в разложении выражения

$$E = \frac{p^2}{2(m_0 + \delta m)} \approx \frac{p^2}{2m_0} \left(1 - \frac{\delta m}{m_0} + \dots \right). \quad (21.7д)$$

Поэтому, если выразить теперь энергию через наблюдаемую величину m , то результат расчета по теории возмущений покажет, что энергия частицы фактически равна $E = p^2/2m$ и, таким образом, имеет определенный смысл. Отметим, что при формальном подходе к перенормировке массы безразлично, является ли величина δm конечной или бесконечной.

Рассматриваемая до сих пор теория еще неудовлетворительна в одном отношении: в исходном гамильтониане встречается „голая“ масса. Применим снова принцип Крамерса, чтобы переписать гамильтониан в следующем виде:

$$H = H_{\text{rad}} + \frac{p^2}{2(m - \delta m)} - \frac{e}{(m - \delta m)c} \vec{p} \cdot \vec{A} \approx \\ \approx H_{\text{rad}} + \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{\delta m}{m} \frac{p^2}{2m}; \quad (21.4г)$$

здесь мы пренебрегли членом порядка e^3 . Теперь мы будем рассматривать как возмущение не только член $(e/mc)(\vec{p} \cdot \vec{A})$, но и член $(\delta m/m)(p^2/2m)$, где величина δm берется равной

$$\delta m = \frac{4\alpha}{3\pi} \left(\frac{\hbar}{c}\right) \int_0^\infty dk |F(k)|^2. \quad (21.7\text{г})$$

Если мы сделаем это, то в e^2 -приближении энергия одноэлектронного состояния будет точно равна $p^2/2m$. Обратно, мы могли бы определить величину δm в e^2 -приближении из требования, что энергия частицы должна равняться $p^2/2m$. Член $(\delta m/m)(p^2/2m)$ обычно называют контрчленом перенормировки массы.

Рассмотрим теперь случай электрона, связанного с протоном и движущегося по боровской орбите, т. е. случай, когда $V(x) = -Ze^2/|x|$. Гамильтониан для этой системы должен быть взят в виде

$$H = H_{\text{rad}} + \frac{p^2}{2m} + V(x) - \frac{e}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{\delta m}{m} \frac{p^2}{2m}, \quad (21.4\text{д})$$

где величина δm задается выражением (21.7г). Исходя из того, что будут рассматриваться только связанные состояния электрона, можно существенно упростить этот гамильтониан. Для связанных состояний величина координаты электрона x всегда будет порядка боровского радиуса. Поэтому, поскольку функция $F(k)$ обрезает импульсы, большие mc , и следовательно, $k \cdot x \approx \alpha$, то мы можем пренебречь экспоненциальными множителями в разложении (21.5а), т. е. заменить их единицами. Такого рода приближение известно как дипольное. Оно эквивалентно пренебрежению эффектами запаздывания и отдачи в процессе излучения и поглощения фотона электроном. Другими словами, рассматривается взаимодействие электрона только с такими длинными волнами, что можно пренебречь переносимыми ими импульсом [множитель $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$]. Следовательно, разложение вектора-потенциала $\vec{A}(\vec{x})$ в этом приближении имеет вид

$$\vec{A}(\vec{x}) = \left(\frac{\hbar c}{2(2\pi)^3}\right)^{1/2} \int \frac{d^3k}{v_{\omega_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) (c_\lambda(\vec{k}) + c_\lambda^\dagger(\vec{k})). \quad (21.5\text{в})$$

Применяя снова теорию возмущений, но выбирая теперь в качестве невозмущенных собственных функций собственные функции гамильтониана

$$H_{\text{rad}} + \frac{p^2}{2m} + V(x),$$

получаем (Бете [33]) для сдвига уровня электрона, находящегося в состоянии m , следующее выражение:

$$\Delta E = -\frac{2\alpha}{3\pi c^2} \int_0^\infty k dk |F(k)|^2 \sum_n \frac{|v_{nm}|^2}{E_n - E_m + k} + \frac{\delta m}{m} \frac{p^2 |m m|}{2m}, \quad (21.8a)$$

где индекс n , характеризующий энергетические состояния электрона, пробегает все значения, а v — оператор скорости электрона. Далее, мы можем написать

$$\frac{1}{E_n - E_m + k} = \frac{1}{k} - \frac{E_n - E_m}{k(E_n - E_m + k)},$$

благодаря чему выражение (21.8a) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta E = & -\frac{2\alpha}{3\pi c^2} \int_0^\infty dk |F(k)|^2 \sum_n |v_{mn}|^2 + \frac{\delta m}{m} \frac{p^2 |m m|}{2m} + \\ & + \frac{2\alpha}{3\pi c^2} \int_0^\infty dk |F(k)|^2 \sum_n \frac{|v_{mn}|^2 (E_n - E_m)}{E_n - E_m + k}. \end{aligned} \quad (21.8б)$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_n v_{mn} v_{nm} = |v^2|_{mm},$$

отмечаем, что первый член в выражении (21.8б) представляет как раз собственную энергию электрона, имеющего кинетическую энергию, соответствующую состоянию m . Следовательно, этот член точно сокращается с контрчленом — вторым членом в выражении (21.8б). Таким образом, сдвиг уровней дается выражением

$$\Delta E = \frac{2\alpha}{3\pi c^2} \int_0^K dk \sum_n \frac{|v_{mn}|^2 (E_n - E_m)}{E_n - E_m + k}, \quad (21.8в)$$

$$\Delta E = \frac{2\alpha}{3\pi c^2} \sum_n |v_{mn}|^2 (E_n - E_m) \ln \frac{K}{|E_n - E_m|}, \quad (21.8г)$$

где K — энергия обрезания ($K \sim mc^2$). Предполагается, что эта величина велика по сравнению со всеми разностями энергий $E_n - E_m$ в атоме.

Бете в своей работе [33] фактически не использовал контрчлена и не рассматривал электрон как частицу, имеющую конечные размеры порядка комптоновской длины волны. Вместо этого он доказал, что при перенормировке необходимо вычесть из собственной энергии связанного электрона поправку к кинетической энергии, обусловленную собственной массой. При этом степень расходимости собственной энергии связанного электрона уменьшается от линейной

к логарифмической [ср. $K \rightarrow +\infty$ в выражении (21.8г)]. Бете затем предположил, что в теории дырок этот же принцип приведет к сходящемуся результату (поскольку там собственная энергия расходится только логарифмически), и поэтому ввел в нерелятивистской теории обрезание для энергии фотона порядка mc^2 . При этом условии он получил формулу для сдвига уровней (21.8г), вычисление ¹⁾ по которой дает для 2S-состояния (Бете [33], Бете и др. [35]) величину сдвига уровней 1040 мзгц, что находится в удивительно хорошем согласии с наиболее поздними экспериментальными данными (Трибассер и др. [487]) — $1057,77 \pm 0,10$ мзгц.

Последующие релятивистские расчеты подтвердили предположение о сходимости выражения для сдвига уровней, рассчитанного с помощью принципа перенормировки Крамерса. Эти релятивистские расчеты были проделаны Швингером и Вайскопфом [437], Френчем и Вайскопфом [191], Кроллом и Лэмбом [292], Фейнманом [166], Швингером [438] и Бете [34, 35]; в результате был получен сдвиг

¹⁾ Вычисление проводится следующим образом: поскольку аргумент логарифма в выражении (21.8г) в нерелятивистском приближении будет достаточно велик, то удобно записать

$$\begin{aligned} & \sum_n (E_n - E_m) |p_{nm}|^2 \ln \frac{|E_n - E_m|}{Ry} = \\ & = \left\{ \sum_n (E_n - E_m) |p_{nm}|^2 \right\} \ln \frac{(E - E_m)_{\text{ср.}}}{Ry}. \end{aligned}$$

Приведенное соотношение есть определение величины $(E - E_m)_{\text{ср.}}$. Было найдено (Бете и др. [35], что для 2S-уровня атома водорода $(E - E_{2S})_{\text{ср.}} \approx 16,6 Ry$. Для атома водорода с

$$H_{\text{mat}} = \frac{p^2}{2m} + V(x); \quad V(x) = \frac{-Ze^2}{r}$$

легко получить, что

$$\begin{aligned} \sum_n (E_n - E_m) |p_{nm}|^2 &= \frac{1}{2} ([p, [H_{\text{mat}}, p]])_{mm} = \\ &= \frac{1}{2} \int \psi_m^*(x) \nabla^2 V(x) \psi_m(x) d^3x = 2\pi \hbar^2 e^2 Z |\psi_m(0)|^2. \end{aligned}$$

В этом приближении сдвиг уровней имеется только в S-состояниях. Так как для S-состояния с квантовым числом n

$$|\psi_n(0)|^2 = \left(\frac{Z}{na\pi^{1/3}} \right)^3$$

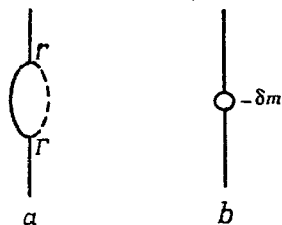
(где a — боровский радиус), то выражение для сдвига уровней получает вид

$$\Delta E(S_{\text{оост.}}) = \frac{8}{3\pi} \frac{\alpha^3 Z^4}{n^3} Ry \ln \frac{K}{(E - E_m)_{\text{ср.}}}.$$

Оно дает для 2S-состояния 1040 мзгц.

уровней, равный 1052 мгц. Дальнейшие уточнения расчета, особенно при учете компонент с большими импульсами для электрона в 2S-состоянии (Баранджер [16—18], Карплус и др. [268]), привели к теоретической величине, которая с точностью до 0,5 мгц совпадает с экспериментальной.¹⁾

Перенормировку массы можно включить в полностью релятивистскую теорию следующим образом. Лагранжиан свободного поля содержит член $m_0\bar{\psi}\psi$, где m_0 — масса свободной частицы. Этот член можно записать в виде $m\bar{\psi}\psi - \delta m\bar{\psi}\psi$. Затем член $-\delta m\bar{\psi}\psi$ рассматривается как часть энергии возмущения, связанной со взаимодействием между частицей и полем излучения. Точнее говоря, этот член должен всегда рассматриваться вместе с диаграммой собственной энергии, с вкладом которой он сокращается в случае свободной частицы. Другими словами, мы всегда должны рассматривать вместе диаграммы, изображенные на фиг. 55, добавляя диаграмму *b* к диаграмме *a*; маленький кружок на диаграмме 55, *b* является представлением оператора $-\delta m$. Расходящаяся величина δm должна быть определена так, чтобы вклад диаграмм собственной энергии типа *a* точно сокращался с вкладом диаграмм типа *b*, если нуклон является свободным, т. е. чтобы масса свободной частицы была равна m . Поэтому величина δm будет задаваться разложением в степенной ряд по константе связи при вычислении S-матрицы. Величина $\delta m^{(2)}$ была уже вычислена для случая нейтральной псевдоскалярной мезонной теории с прямой связью и дается формулой (20.6).



Фиг. 55.

§ 2. Радиационные поправки к формулам рассеяния²⁾

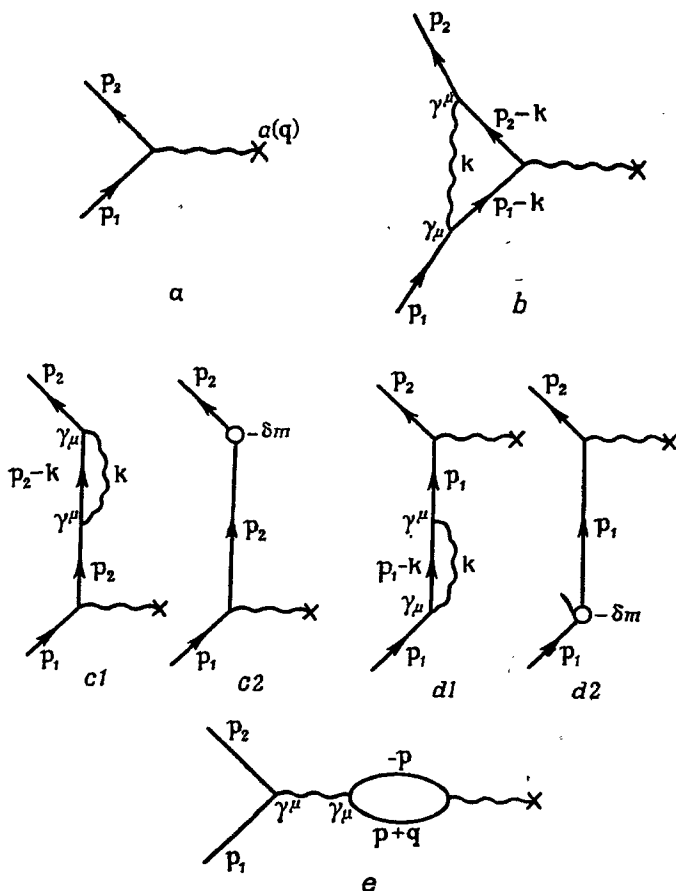
Чтобы проиллюстрировать методику перенормировки (см. работы Льюиса [305], Эпштейна [148]), рассмотрим теперь детально рассеяние электрона на внешнем электромагнитном поле, включив радиационные поправки к формулам рассеяния. Для этого случая плотность гамилтониана взаимодействия дается выражением

$$\mathcal{H}_I(x) = eN[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu(x)] + eN[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu^e(x)] - \delta m\bar{\psi}\psi(x). \quad (21.9)$$

¹⁾ В настоящее время существует расхождение между теоретической величиной лэмбовского сдвига и его экспериментальным значением, равное 0,6 мгц; только 0,1 мгц из этой величины может быть объяснена объемным распределением заряда протона, определенным в опытах по рассеянию быстрых электронов протонами. См., например, работы Хофштадтера [Hofstadter, Rev. Mod. Phys., 28, No. 3 (1956)] и Йенни и Леви, Равенхолла [Yennie D., Leby M., Ravenhall D., Rev. Mod. Phys., 29, 144 (1957)]. — *Прим. перев.*

²⁾ Полуклассическое рассмотрение радиационных поправок, которое допускает простое физическое толкование, было проведено Уэлтоном [520] и Коба [281]. См. также прекрасную обзорную статью Вайскопфа [519].

Первый член представляет взаимодействие электронно-позитронного поля с квантованным полем излучения, второй член — взаимодействие с внешним полем и третий член — контрчлен, дающий перенормировку массы. Вклад в рассеяние дают те члены третьего



Фиг. 56.

порядка в разложении S -матрицы, диаграммы которых приведены на фиг. 56. На фиг. 56, согласно условию, принятому раньше, действие внешнего поля изображается волнистой линией с крестом на конце.

Матричный элемент, соответствующий диаграмме на фиг. 56, а, был исследован раньше. Для перехода из состояния с импульсом \vec{p}_1

в состоянии с импульсом \vec{p}_2 он дается следующим выражением

$$T^{(a)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = -2\pi i u(\vec{p}_2) M^{(a)} u(\vec{p}_1), \quad (21.10a)$$

$$M^{(a)} = e\hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1). \quad (21.10b)$$

Мы опустили здесь нормировочные множители $[m/E(p)]^{1/2}$. Используя установленные выше правила, получаем для оператора $M^{(b)}$, соответствующего диаграмме Фейнмана на фиг. 56, *b*, следующее выражение:

$$M^{(b)} = -\frac{i\alpha}{4\pi^3} \int d^4k \gamma^\mu \frac{1}{(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m} e\hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \\ \times \frac{1}{(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m} \gamma^\mu \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{мин.}}^2 + i\epsilon}, \quad (21.11)$$

$$M^{(b)} = \Delta^\nu(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) e a_\nu(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (21.12)$$

где $\alpha = e^2/4\pi\hbar c = \frac{1}{137}$ (величина электрического заряда e берется в рациональной системе единиц). Диаграмма на фиг. 56, *b* называется вершинной диаграммой, и $\Delta(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$ является вершинным оператором порядка α . В формуле (21.11) мы заменили функцию распространения фотона k^{-2} на величину $(k^2 - \lambda_{\text{мин.}}^2)^{-1}$ для того, чтобы избавиться от расходимости, появляющейся при малых k . Интерпретация этого приема будет рассмотрена в дальнейшем.

Аналогичным образом можно выписать операторы, соответствующие диаграммам на фиг. 56, *c1* и *d1*; они имеют следующий вид:

$$M^{(c1)} = -\frac{ie}{4\pi^3} \Sigma^{(2)}(\mathbf{p}_2) \frac{1}{\hat{p}_2 - m} \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (21.13)$$

$$M^{(d1)} = -\frac{ie}{4\pi^3} \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{1}{\hat{p}_1 - m} \Sigma^{(2)}(\mathbf{p}_1), \quad (21.14)$$

где $\Sigma^{(2)}(\mathbf{p})$ — оператор собственной энергии второго порядка; в случае электродинамики он дается выражением

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{p}) = \alpha \int d^4k \gamma^\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{мин.}}^2 + i\epsilon}. \quad (21.15)$$

Диаграммы на фиг. 56, *c2* и *d2* представляют поправку к массе и даются выражениями

$$M^{(c2)} = e\delta m \frac{1}{\hat{p}_2 - m} \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (21.16)$$

$$M^{(d2)} = e\delta m \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{1}{\hat{p}_1 - m}. \quad (21.17)$$

Наконец, диаграмма на фиг. 56, *e*, соответствующая эффекту поляризации вакуума, будет рассмотрена в § 5, а соответствующий ей матричный элемент дается выражением

$$M^{(e)} = \frac{i\alpha}{4\pi^3} \gamma^\mu \frac{1}{(p_2 - p_1)^2} K_{\mu\nu} a^\nu (p_2 - p_1), \quad (21.18)$$

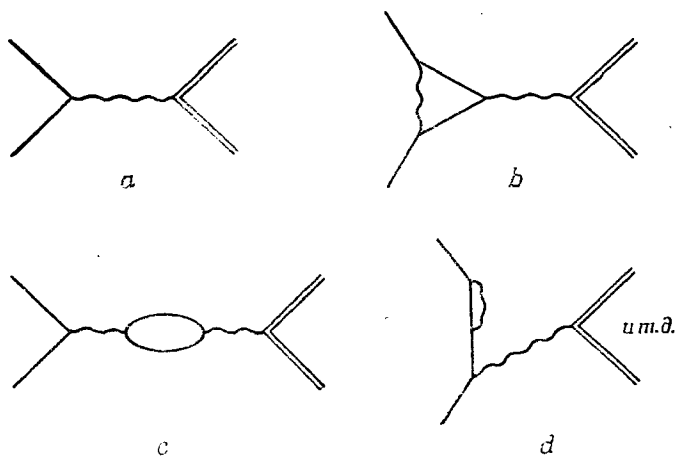
где

$$K_{\mu\nu}(q) = \int d^4p \text{Sp} [\gamma_\mu (\hat{p} + \hat{q} - m)^{-1} \gamma_\nu (\hat{p} - m)^{-1}] \quad (21.19)$$

и

$$q = p_2 - p_1. \quad (21.20)$$

Следует отметить, что здесь мы ограничились частным случаем внешнего поля, однако также просто можно рассмотреть случай, в котором внешнее поле заменяется внутренней фотонной линией.



Фиг. 57.

В этом случае все множители $\gamma^\mu a_\mu (p_2 - p_1)$ должны быть заменены на множители $k^{-2} e \gamma^\mu$, каждый из которых представляет функцию распространения фотона, входящего в определенную вершину (должна быть также δ -функция, соответствующая закону сохранения импульса $p_2 - p_1 = k$). Затем можно провести последующий анализ. При этом диаграммы на фиг. 56 можно рассматривать как части более сложных диаграмм, которые, например, приведены на фиг. 57 и которые соответствуют взаимодействию электрона с протоном, обозначенным двойной линией.

Рассмотрим вклад от процессов, изображенных на фиг. 57, *b* — *d*. Интеграл (21.11) для Δ логарифмически расходится. Он может быть

вычислен¹⁾, если использовать метод регуляризации Фейнмана (см. дополнение В в работе Фейнмана [169]). Для этой цели функция распространения фотона $(\mathbf{k}^2 - \lambda_{\text{мин.}}^2)^{-1}$ заменяется в выражении (21.11) на величину

$$(\mathbf{k}^2 - \lambda_{\text{мин.}}^2)^{-1} \rightarrow (\mathbf{k}^2 - M^2)^{-1};$$

здесь M — большая „регуляризующая масса“. Регуляризованное выражение можно записать в следующей форме:

$$\Delta_{\text{pR}}(\mathbf{q}) = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\ln \frac{M}{m} + \frac{9}{4} - 2 \ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин.}}} \right) \gamma_{\mu} + \Delta_{\text{pC}}(\mathbf{q}). \quad (21.21)$$

Величина $\Delta_{\text{pC}}(\mathbf{q})$ представляет собой интеграл, сходящийся при больших импульсах \mathbf{k} (но расходящийся в пределе $\lambda_{\text{мин.}} \rightarrow 0$). Он был вычислен Фейнманом для случая $0 \leq \mathbf{q}^2 \leq 4m^2$ и $\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_2^2 = m^2$, причем были отброшены члены, обращающиеся в нуль при переходе к пределу $\lambda_{\text{мин.}} \rightarrow 0$ и $M \rightarrow \infty$. Если ввести величину θ с помощью соотношения $\sin^2 \theta = \mathbf{q}^2/4m^2$, то при сделанных предположениях выражение для Δ_{pC} получит вид

$$\Delta_{\text{pC}}(\mathbf{q}) = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \left[2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин.}}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) + \theta \text{tg } \theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{\text{tg } 2\theta} \int_0^{\theta} x \text{tg } x \, dx \right] \gamma_{\mu} + \frac{\hat{q}\gamma_{\mu} - \gamma_{\mu}\hat{q}}{4m} \frac{2\theta}{\sin 2\theta} \right\}. \quad (21.22)$$

Для малых \mathbf{q} величина $\Delta_{\text{pC}}(\mathbf{q})$ имеет форму

$$\Delta_{\text{pC}}(\mathbf{q}) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{4m} (\hat{q}\gamma_{\mu} - \gamma_{\mu}\hat{q}) + \frac{2\mathbf{q}^2}{3m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин.}}} - \frac{3}{8} \right) \gamma_{\mu} \right]. \quad (21.23)$$

Все эти выражения имеют силу только в том случае, если частицы в состояниях \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 являются свободными, т. е. $\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_2^2 = m^2$.

Следует отметить, что выражения (21.22) и (21.23) стремятся к нулю, если величина приращения импульса \mathbf{q} стремится к нулю, и что расходящийся первый член выражения (21.21) не зависит от \mathbf{q} . Другими словами, только та часть Δ_{p} , которая остается, если $\mathbf{q} \rightarrow 0$ или если \mathbf{p}_2 стремится к \mathbf{p}_1 , содержит расходящийся интеграл.

В том, что это действительно так, можно убедиться следующим образом (Фейнман [169]). Положим, что величина \mathbf{p}_1 фиксирована, и разложим величину Δ_{p} , определенную выражениями (21.11) и (21.12),

¹⁾ Три знаменателя могут быть объединены либо при повторном использовании формулы Фейнмана (20.37), либо с помощью формулы

$$(abc)^{-1} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy [a(1-x) + bxy + cx(1-y)]^{-3}.$$

в ряд по степеням разности $p_2 - p_1$, вернее по степеням компонент этого 4-вектора. При этом разлагается выражение $[\hat{p}_2 - \hat{k} - m]^{-1}$, а именно [ср. с формулой (21.29)]

$$\frac{1}{\hat{p}_2 - \hat{k} - m} = \frac{1}{\hat{p}_1 + (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) - \hat{k} - m} = \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k} - m} - \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k} - m} (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k} - m} + \dots \quad (21.23a)$$

Ясно, что первый член имеет порядок $1/k$ при больших k , второй член — порядок $1/k^2$ и т. д. Итак, если разложение (21.23a) подставить обратно в интеграл (21.11), то только первый член его приведет к логарифмически расходящемуся интегралу по k ; во втором члене подинтегральное выражение будет вести себя как dk/k^2 , и, следовательно, интеграл будет сходиться, а все последующие члены содержат еще лучше сходящиеся интегралы; член, пропорциональный $(p_2 - p_1)^n$, будет содержать интеграл, подинтегральное выражение которого имеет форму dk/k^{n+1} . Это доказывает наше предыдущее утверждение, что только $\Delta_p(p_1, p_1)$ расходится [т. е. зависит от регуляризующей массы M , как в выражении (21.21)], а величина

$$\Delta_{pC}(p_1, p_2) = \Delta_p(p_1, p_2) - \Delta_p(p_1, p_1) \quad (21.236)$$

конечна (т. е. представляется интегралом, сходящимся по k , и не зависит от регуляризующей массы). Поэтому выражение (21.236) может рассматриваться как определение исправленной, конечной части Δ_p , которую в выражении (21.22) мы обозначили как Δ_{pC} (по крайней мере для случая, когда частицы в состояниях p_1 и p_2 являются свободными).

Принцип перенормировки с помощью вычитания [аналогичный примененному в выражении (21.23)] в чрезвычайно общей форме используется в теории перенормировки. Разлагается оператор, в нашем случае $\Delta_p(p_1, p_2)$, в степенной ряд по некоторой величине, относящейся к внешним переменным, в нашем случае $p_2 - p_1$. Тогда, только первый член (или несколько первых членов) разложения будут содержать расходящиеся интегралы по внутренним переменным (в нашем случае по k). Такие члены затем отбрасываются релятивистски инвариантным образом. Для обоснования этого в некоторых случаях отмечается, что они являются ненаблюдаемыми, как например при перенормировке массы (см. § 1) или при перенормировке заряда (см. § 5), или что они сокращаются с другими расходящимися величинами, как это будет показано в следующем параграфе для случая Δ_p ; в некоторых случаях они сокращаются со специальными членами, вводимыми в исходный лагранжиан, например в случае, рассмотренном в гл. 22, § 4. Конечные члены,

остающиеся после применения этой методики, берутся затем как перенормированные выражения для операторов. С этой методикой мы снова встретимся при перенормировке заряда в § 5 и во многих местах в конце этого тома, особенно в гл. 24.

§ 3. Перенормировка волновой функции

Теперь приступим к исследованию выражений (21.13) и (21.14). Появление в них множителей $(p-m)^{-1}$ создает трудности, так как матричные элементы $M^{(c1)}$ и $M^{(c2)}$ должны быть взяты с двумя волновыми функциями свободных частиц, в результате чего знаменатели обращаются в нуль. Правда, сумма числителей $M^{(c1)}$ и $M^{(c2)}$ также сокращается, но это ведет только к результату 0/0, который является неопределенным. Для получения однозначного результата мы должны явно ввести затухающие множители, которые необходимы для правильного определения начального и конечного „голых“ состояний (см. гл. 16, § 2). В нашем случае неоднозначность существенно связана с предельным процессом, при котором начальное и конечное время матрицы $U(t, t_0)$ устремляется к $\pm\infty$. Предельный переход может нарушить унитарность S -матрицы, если не уделить этому специального внимания. Фейнман [169] и Дайсон [127, 130]¹⁾ показали, как преодолеть эту трудность. Если явно ввести затухающую функцию $g(t)$, которая автоматически включает и выключает взаимодействие между полями, то гамильтониан взаимодействия заменяется на выражение²⁾

$$\mathcal{H}_I(x) \rightarrow eg(t)j_\mu(x)A^\mu(x) - \delta m\bar{\psi}(x)\psi(x)[g(t)]^2. \quad (21.24)$$

Предполагается, что время T , в течение которого изменяется $g(t)$, очень велико по сравнению с длительностью процесса рассеяния. Если фурье-образ $g(t)$ обозначить через $G(\Gamma_0)$, то

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\Gamma_0) e^{-i\Gamma_0 t} d\Gamma_0 \equiv \int G(\Gamma_0) e^{-i\Gamma \cdot x} d\Gamma_0, \quad (21.25)$$

где вектор Γ_μ имеет компоненты

$$\Gamma = (\Gamma_0, 0, 0, 0).$$

Нормировка выбирается следующей:

$$g(0) = \int G(\Gamma_0) d\Gamma_0 = 1. \quad (21.26)$$

¹⁾ См. также стр. 542 в работе Карплуса и Кролла [263].

²⁾ Член δm , представляющий собственную энергию, будучи радиационным эффектом второго порядка, должен умножаться на $[g(t)]^2$.

и предполагается, что функция $G(\Gamma_0)$ ведет себя почти как δ -функция, т. е. является большой только тогда, когда величина Γ_0 не превышает Γ^{-1} .

Если гамильтониан взаимодействия (21.24) подставить в разложение S -матрицы, то, например, выражение (21.14) заменится следующим:

$$M^{(21)} = -\frac{ie}{4\pi^3} \int \int \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \Gamma - \Gamma') \frac{1}{\gamma^\mu (p_{1\mu} + \Gamma_\mu + \Gamma'_\mu) - m} \times \\ \times \Sigma^{(2)}(\mathbf{p}_1 + \Gamma) G(\Gamma_0) G(\Gamma'_0) d\Gamma_0 d\Gamma'_0. \quad (21.27)$$

Если $\Gamma \rightarrow \infty$, то и $\Gamma_0 \rightarrow 0$ и $\Gamma'_0 \rightarrow 0$ и подинтегральное выражение может быть разложено. Тогда функция распространения электрона получает вид

$$\frac{1}{\gamma^\mu (p_{1\mu} + \Gamma_\mu + \Gamma'_\mu) - m} = \frac{\gamma^\mu (p_{1\mu} + \Gamma_\mu + \Gamma'_\mu) + m}{2\mathbf{p}_1 \cdot (\Gamma + \Gamma') + (\Gamma + \Gamma')^2} \approx \\ \approx \frac{\hat{p} + m}{2p_{10}(\Gamma_0 + \Gamma'_0)}, \quad (21.28)$$

где мы использовали соотношение для свободной частицы $\mathbf{p}_1^2 = m^2$.

Аналогично, если разложить $\Sigma^2(\mathbf{p})$, используя следующее общее разложение, верное для двух любых операторов A и B (Фейнман [169])

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} \pm \dots, \quad (21.29)$$

то можно также оставить только члены порядка Γ в выражении $\Sigma^{(2)}$:

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{p}_1 + \Gamma) = \alpha \int d^4k \gamma^\mu \frac{1}{\gamma^\nu (p_{1\nu} + k_\nu + \Gamma_\nu) - m} \gamma^\mu \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{мин.}}^2 + i\epsilon} = \\ = \Sigma^{(2)}(\mathbf{p}_1) - \alpha \int d^4k \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{мин.}}^2 + i\epsilon} \times \\ \times \Gamma_\nu \gamma^\mu \frac{1}{(\hat{p}_1 + \hat{k}) - m} \gamma^\nu \frac{1}{(\hat{p}_1 + \hat{k}) - m} \gamma^\mu = \\ = \Sigma^{(2)}(\mathbf{p}_1) - \alpha I^\nu(\mathbf{p}_1) \Gamma_\nu, \quad (21.30)$$

где $I^\nu(\mathbf{p})$ — логарифмически расходящийся интеграл. Используя соотношение (21.30), мы можем записать подинтегральное выражение в формуле (21.27) в следующем виде:

$$\frac{1}{\gamma^\mu (p_{1\mu} + \Gamma_\mu + \Gamma'_\mu) - m} [\Sigma^{(2)}(\mathbf{p}_1) - \alpha I^\nu(\mathbf{p}_1) \Gamma_\nu]. \quad (21.31)$$

Теперь, если ввести таким же образом затухающий множитель $g(t)$ в выражение (21.17) для $M^{(a_2)}$, то получим

$$M^{(a_2)} = \int \int \varepsilon \hat{m} \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}') \frac{1}{\gamma^\mu (p_{1\mu} + \Gamma_\mu + \Gamma'_\mu) - m} \times \\ \times G(\Gamma_0) G(\Gamma'_0) d\Gamma_0 d\Gamma'_0. \quad (21.32)$$

Так как $\Sigma^{(2)}(\mathbf{p}_1^2 = m^2)$, по существу (т. е. с точностью до множителя $-i/4\pi^3$), определяется как \hat{m} , то ясно, что матричный элемент $M^{(a_2)}$ сокращается с частью матричного элемента $M^{(a_1)}$, содержащей $\Sigma^{(2)}(\mathbf{p}_1)$. Это фактически является перенормировкой массы. Поэтому получаем

$$M^{(a_1)} + M^{(a_2)} = \frac{i\alpha e}{4\pi^3} \int \int d\Gamma_0 d\Gamma'_0 G(\Gamma_0) G(\Gamma'_0) \times \\ \times \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}') \frac{1}{\gamma^\mu (p_{1\mu} + \Gamma_\mu + \Gamma'_\mu) - m} \Gamma^\nu(\mathbf{p}_1) \Gamma_\nu. \quad (21.33)$$

Далее, релятивистская инвариантность требует, чтобы величина $\Gamma^\nu(\mathbf{p})$ при преобразованиях Лоренца преобразовывалась как 4-вектор, и, следовательно, она должна иметь вид

$$\Gamma^\nu(\mathbf{p}_1) = I_{(1)}(\mathbf{p}_1^2) \gamma^\nu + I_{(2)}(\mathbf{p}_1^2) (\hat{p}_1 - m) \gamma^\nu + I_{(3)}(\mathbf{p}_1^2) \gamma^\nu (\hat{p}_1 - m) + \\ + I_{(4)}(\mathbf{p}_1^2) (\hat{p}_1 - m) \gamma^\nu (\hat{p}_1 - m) + \dots, \quad (21.34)$$

где $I_{(1)}, I_{(2)}, \dots$ — функции инварианта \mathbf{p}^2 . Так как $\Gamma^\nu(\mathbf{p}_1)$ — оператор, действующий на дираковский спинор, описывающий свободную частицу с импульсом \mathbf{p}_1 , то вклад дают только первые два члена. Кроме того, второй член, очевидно, дает результат порядка Γ и поэтому им можно пренебречь. Следовательно, необходимо рассматривать только первый член. Для $\mathbf{p}_1^2 = m^2$ можно написать следующее выражение:

$$\Gamma^\nu(\mathbf{p}_1^2) = I_{(1)} \gamma^\nu, \quad (21.35)$$

где $I_{(1)} = I_{(1)}(m^2)$ является здесь константой. Теперь будем симметризовать множитель Γ_ν , входящий в формулу (21.33), написав $\Gamma \rightarrow 1/2(\Gamma + \Gamma')$. Принимая во внимание, что оператор (21.33) действует на дираковский спинор, описывающий свободную частицу, можно добавить к Γ оператор $1/2(\hat{p} - m)$; тогда соотношение (21.33) получает вид

$$M^{(a_1)} + M^{(a_2)} = \frac{i\alpha e}{4\pi^3} \int \int d\Gamma_0 d\Gamma'_0 G(\Gamma_0) G(\Gamma'_0) \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}') \times \\ \times \frac{1}{\gamma^\mu (p_{1\mu} + \Gamma_\mu + \Gamma'_\mu) - m} I_{(1)} \times \\ \times \frac{1}{2} [\gamma^\nu (\Gamma'_\nu + \Gamma_\nu + p_{1\nu}) - m]. \quad (21.36)$$

В пределе $\Gamma_0 \rightarrow 0$ получим

$$M^{(d1)} + M^{(d2)} = \frac{1}{2} \frac{iae}{4\pi^3} I_{(1)} \hat{a} (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (21.37)$$

где на множитель $1/2$ следует обратить особое внимание. Аналогичным образом можно рассмотреть выражения (21.13) и (21.16); при этом получается следующее соотношение:

$$M^{(c1)} + M^{(c2)} = \frac{1}{2} \frac{iae}{4\pi^3} \hat{a} (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) I_{(1)}. \quad (21.38)$$

Величина $\Delta^\nu(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$ в выражении (21.12), как легко видеть, в пределе $\mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}_1$ переходит в величину $I^\nu(\mathbf{p}_1)$, определяемую выражением (21.30). Далее, в конце § 2 было показано, что только та часть величины Δ^ν , которая остается при переходе к пределу $\mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}_1$, может быть расходящейся. Поэтому, используя выражение (21.35), расходящуюся часть $M^{(b)}$ [формула (21.12)] можно записать в виде

$$M^{(b)'} = \Delta^\nu(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) ea_\nu (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = -\frac{iae}{4\pi^3} \hat{a} (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) I_{(1)}. \quad (21.39)$$

Поэтому, хотя каждый из матричных элементов, представленных диаграммами на фиг. 56, *b*, *c* и *d*, в отдельности расходится, сумма их конечна и фактически равна следующей величине:

$$M = e\Lambda_{\nu c}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) a^\nu (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (21.40)$$

где $\Lambda_{\nu c}$ определяется формулой (21.22). Далее, в гл. 24 мы покажем, что такое сокращение расходимостей между частями собственной энергии и вершинными частями имеет место в квантовой электродинамике во всех порядках; это является следствием требования калибровочной инвариантности теории (Уорд [506, 507]).

Чтобы понять физический смысл расходимости в сумме двух матричных элементов, соответствующих диаграммам на фиг. 56, *c* и *d*, проведем следующее рассмотрение. Вычислим эффект взаимодействия электрона с внешним полем вплоть до порядка e^3 . Для случая первого порядка по e мы должны рассмотреть диаграмму на фиг. 56, *a*, где представлено взаимодействие электрона только с внешним полем. Для случая третьего порядка по e необходимо сделать два изменения. Во-первых, вероятность P того, что электрон будет взаимодействовать с внешним полем, когда около него имеется виртуальный фотон, отлична от нуля. Это описывается диаграммой на фиг. 56, *b*. Во-вторых, вероятность того, что электрон взаимодействует с внешним полем, когда около него нет виртуального фотона, теперь уже не равна единице, а равна $1 - P$, т. е. уменьшается на величину вероятности нахождения виртуального фотона около электрона (это выполняется автоматически, если S -матрица унитарна, так как усло-

вие унитарности гарантирует сохранение полной вероятности). Упомянутая вероятность P дается выражением

$$P = \int a^2(k) d^3k = -\frac{i\alpha}{4\pi^3} I_{(1)}, \quad (21.41)$$

где величина $a(k)$ — амплитуда вероятности того, что имеется виртуальный квант с импульсом k .

Уменьшение вероятности обнаружения электрона, не окруженного виртуальными квантами, эквивалентно изменению нормировки волновой функции электрона. Поэтому диаграммы, представленные на фиг. 56, c и d , часто относят к *перенормировке волновой функции*. Диаграмма на фиг. 56, c есть перенормировка падающей волновой функции. Диаграмма на фиг. 56, d относится к перенормировке уходящей волновой функции. Волновая функция, т. е. амплитуда вероятности, должна быть перенормирована на множитель $(1 - P)^{1/2}$, так что поправка первого порядка есть $1/2 P$, что и объясняет множитель $1/2$ в выражении (21.38).

§ 4. Аномальный магнитный момент и лэмбовский сдвиг

В последнем параграфе мы видели, что после перенормировки массы сумма вкладов от процессов, изображенных на фиг. 56, b , c и d , конечна, и соответствующий им матричный элемент дается выражением (21.40). Смысл этих радиационных поправок, по-видимому, легче всего понять, если рассматривать их как „эквивалентный“ потенциал, в котором движется электрон. Таким образом, мы можем рассмотреть выражение (21.10) вместе с выражением (21.40)

$$M = e [\gamma^0 + \Delta_C^0(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)] a_\nu(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \quad (21.42)$$

и принять, что M является оператором, который в первом приближении, как это определяется выражением (21.9), возмущает движение свободного электрона и вызывает рассеяние его из состояния \mathbf{p}_1 в состояние \mathbf{p}_2 .

Предположим теперь, что электрон, кроме собственного магнитного момента $e\hbar/2mc$, обусловленного зарядом e и спином $1/2$ (напомним, что это рассматривалось в гл. 5, § 3), имеет дополнительный магнитный момент $\Delta\mu$ ($e\hbar/2mc$). Если электрон имеет такой дополнительный магнитный момент, то его гиромагнитное отношение больше не будет точно равняться 2. Ту часть магнитного момента, которая делает величину гиромагнитного отношения отличной от 2, часто называют „аномальным“ магнитным моментом. Дополнительное взаимодействие электронно-позитронного поля с внешним электромагнитным полем, обуславливающее появление такого дополнительного момента, может быть учтено добавлением члена

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2} \Delta\mu \frac{e\hbar}{2mc} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \sigma^{\mu\nu} \psi(\mathbf{x}) F_{\mu\nu}^e(\mathbf{x}) \quad (21.43a)$$

к плотности функции Лагранжа (12.16), описывающей электронно-позитронное поле, взаимодействующее с внешним полем $F_{\mu\nu}^e(\mathbf{x})$. Этот член даст следующий вклад в плотность энергии взаимодействия (мы положили $\hbar = c = 1$):

$$\mathcal{H}'_I(\mathbf{x}) = \Delta\mu \left(\frac{-e}{2m} \right) \frac{1}{2} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \sigma^{\mu\nu} \psi(\mathbf{x}) F_{\mu\nu}^e(\mathbf{x}). \quad (21.43б)$$

В первом порядке вклад $\mathcal{H}'_I(\mathbf{x})$ в рассеяние электрона дается тогда выражением

$$M' = -i \int d^4x \mathcal{H}'_I(\mathbf{x}),$$

или, более подробно, для рассеяния, при котором электрон совершает переход ¹⁾ из состояния \mathbf{p}_1 в состояние $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}$, мы получаем следующее выражение:

$$M' = (-i) \left(\frac{-e \Delta\mu}{2m} \right) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}} \times \\ \times \bar{w}(\vec{p}_2) \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^e(\mathbf{x}) w(\vec{p}_1), \quad (21.44а)$$

$$M' = -2\pi i \bar{w}(\vec{p}_2) \left[\frac{-e \Delta\mu}{2m} \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(\mathbf{q}) \right] w(\vec{p}_1), \quad (21.44б)$$

$$M' = -2\pi i \bar{w}(\vec{p}_2) \left[\frac{ie \Delta\mu}{2m} \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \{q_\nu a_\mu(\mathbf{q}) - q_\mu a_\nu(\mathbf{q})\} \right] w(\vec{p}_1), \quad (21.44в)$$

$$M' = -2\pi i \bar{w}(\vec{p}_2) \left[-i \frac{\Delta\mu e}{2m} \sigma_{\nu\mu} q^\nu a^\mu(\mathbf{q}) \right] w(\vec{p}_1). \quad (21.44г)$$

При получении выражения (21.44г) из выражения (21.44в) мы использовали антисимметрию величины $\sigma_{\mu\nu}$, а именно $\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$.

Сравним этот матричный элемент с выражением (21.23), справедливым для малых $\mathbf{q} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$, т. е. для полей, которые медленно меняются в пространстве и времени. Последнее утверждение становится ясным, если учесть, что в координатном пространстве $q_\mu a_\nu(\mathbf{q})$ соответствует $\partial A_\nu^e(\mathbf{x})/\partial x^\mu$ и аналогично \mathbf{q}^2 соответствует \square . Поэтому в выражении (21.23) мы будем пренебрегать высшими производными. Тогда первый член выражения (21.33) может быть переписан в следующем виде:

$$\frac{\alpha}{2m} \left[\frac{1}{2m} \frac{1}{2} (\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu) q^\nu \right] = -i \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{2m} \sigma_{\nu\mu} q^\nu \right). \quad (21.23в)$$

¹⁾ Вспомним, что

$$A_\mu^e(\mathbf{x}) = \int d^4q e^{-iq \cdot \mathbf{x}} a_\mu(\mathbf{q})$$

и, следовательно,

$$F_{\mu\nu}^e(\mathbf{x}) = \int d^4q e^{-iq \cdot \mathbf{x}} F_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = -i \int d^4q e^{-iq \cdot \mathbf{x}} (q_\nu a_\mu(\mathbf{q}) - q_\mu a_\nu(\mathbf{q})).$$

Если сравнить выражения (21.23в) и (21.44г) [напомним также выражения (21.10) и (21.12)], то ясно, что для слабых полей вклад (21.23) в радиационные поправки второго порядка к рассеянию может быть интерпретирован как следствие наличия у электрона аномального магнитного момента, величина которого равна

$$\Delta\mu = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (21.45a)$$

Итак, радиационные поправки приводят к тому, что в нерелятивистском приближении (малые q) при взаимодействии с магнитным полем электрон ведет себя так, как будто он обладает магнитным моментом, равным $1 + (\alpha/2\pi)$ магнетонов Бора.

Существование этого аномального магнитного момента впервые экспериментально обнаружили в 1947 г. Нейф, Нельсон и Раби [349], Нагл, Джулиан и Захариас [350]. Брейт [64—66] первый указал, что наблюдаемый эффект мог бы быть объяснен наличием у электрона малого дополнительного спинового магнитного момента. Швингер [436] впервые показал, что часть радиационных поправок в квантовой электродинамике соответствует дополнительному магнитному моменту, который связан со спином электрона и величина которого равна $\alpha/2\pi$ [см. также работу Люттингера [312]]. Карплус и Кролл [263], используя формализм Дайсона — Фейнмана, вычислили радиационную поправку *четвертого порядка* к магнитному моменту электрона. Она равна $-2,973 \alpha^2/\pi^2$ магнетонов Бора, так что магнитный момент квазисвободного электрона равен в этом приближении следующей величине:

$$\frac{e\hbar}{2mc} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 2,973 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right\} = 1,001145 \text{ магнетонов Бора.} \quad (21.45б)$$

Величина магнитного момента электрона была наиболее точно экспериментально измерена в 1952 г. Кёнигом, Проделом, Кушем [282]; она равна $1,001145 \pm 0,000013$ магнетонов Бора.

Аналогично лэмбовский сдвиг можно получить при рассмотрении второго члена формулы (21.23). Строго говоря, электронная линия на фиг. 55 в этом случае не является больше свободной (т. е. $\mathbf{p}^2 \neq m^2$), так как электрон связан в атоме. Но если пренебречь поправками, возникающими при учете того, что $\mathbf{p}^2 \neq m^2$, то сдвиг уровня будет просто средней величиной второго члена формулы (21.23) для рассматриваемых состояний атома водорода. Последнее утверждение не вполне точно, так как второй член формулы (21.23) стремится к бесконечности, если фиктивную массу кванта $\lambda_{\text{мин}}$ устремить к нулю. Такая „инфракрасная катастрофа“ должна быть ложной, и, действительно, она не встречается в лэмбовском сдвиге уровней связанных электронов.

В этом можно убедиться из нерелятивистского рассмотрения лэмбовского сдвига, данного в § 1, где мы предполагали, что све-

товые кванты имеют равную нулю массу покоя и что электрон связан. Поскольку только состояния с $n \neq m$ дают вклад, т. е. приносят к множителю $E_n - E_m$ в числителе, выражение (21.8в) для лэмбовского сдвига имеет резонансный знаменатель $E_n - E_m + k$, который не равен нулю для световых квантов нулевой энергии ($k = 0$).

Затем можно провести следующее рассмотрение. Пусть нерелятивистский лэмбовский сдвиг вычислен для световых квантов с равной нулю массой покоя по формуле (21.8в), а потом вычислен снова для фотонов с массой покоя $\lambda_{\text{мин.}}$. В последнем расчете величина k в знаменателе (21.8в) должна быть заменена на величину

$$\omega_k = (k^2 + \lambda_{\text{мин.}}^2)^{1/2}. \quad (21.45в)$$

Разность между результатами этих двух вычислений представляет разность между лэмбовскими сдвигами связанного электрона, взаимодействующего с поперечными квантами, имеющими нулевую и конечную массу покоя соответственно. Эта разность равна

$$\Delta E(0) - \Delta E(\lambda_{\text{мин.}}) = \frac{2\alpha}{3\pi c^2} \int_0^K dk \sum_n |v_{mn}|^2 (E_n - E_m) \times \\ \times \left[\frac{1}{E_n - E_m + k} - \frac{1}{E_n - E_m + (k^2 + \lambda_{\text{мин.}}^2)^{1/2}} \right]. \quad (21.45г)$$

Интеграл в выражении (21.45г) сходится как на нижнем пределе $k = 0$, так и на верхнем пределе $k = K$; поэтому величину K можно заменить на ∞ . Кроме того, существенный вклад в выражение (21.45г) дают только значения $k \leq \lambda_{\text{мин.}}$, поэтому, если мы выберем $\lambda_{\text{мин.}} \ll mc^2$, то все важные промежуточные состояния (n, k) в формуле (21.45г) будут нерелятивистскими; следовательно, приближения, использованные в § 1, включая и дипольное приближение, являются оправданными.

Теперь к формуле (21.45г) добавим среднее значение второго члена формулы (21.23) для рассматриваемых состояний атома водорода, оставляя массу фотона $\lambda_{\text{мин.}}$ конечной. В самом деле, для того чтобы оправдать использование оператора лэмбовского сдвига свободного электрона (21.23) для рассматриваемой задачи связанных состояний, мы выберем величину $\lambda_{\text{мин.}}$ большой по сравнению с величиной энергии связи в атоме водорода, т. е. выберем $\lambda_{\text{мин.}} \gg 1Ry$. Это условие, очевидно, совместимо с требованием $\lambda_{\text{мин.}} \ll mc^2$. Вычисление показывает, что в сумме выражения (21.45г) и среднего значения выражения (21.23) сокращается член $\ln \lambda_{\text{мин.}}$, и, как и следовало ожидать, результат не зависит от фиктивной массы фотона. Френч и Вайскопф [191] указали, что следует учесть также вклад продольных и временно-подобных фотонов в нерелятивистскую часть формулы (21.45г). Если это сделано, то результат эквивалентен сумме

выражения (21.8г) и среднего значения второго члена формулы (21.23) при условии, что

$$\ln \lambda_{\text{мин.}} = \ln 2K - \frac{5}{6}. \quad (21.45д)$$

Из только что описанных вычислений для лэмбовского сдвига получается ранее упоминавшийся результат — 1052 мггц (после включения эффектов поляризации вакуума). С уточнением этих вычислений и обсуждением высших приближений читатель может ознакомиться в статьях Баранджера, Бете и Фейнмана [18], Карплуса и др. [268], Салпетера [425]¹⁾.

Теперь вернемся к обсуждению значения $\lambda_{\text{мин.}}$ для проблем, связанных с *рассеянием свободных электронов*. Тот факт, что выражения (21.23) и (21.40) расходятся логарифмически при $\lambda_{\text{мин.}} \rightarrow 0$, принято называть „инфракрасной расходимостью“. Вышеописанный метод, позволяющий устранить инфракрасные расходимости в случае связанных электронов, неприменим в случае свободных электронов. В то же время ясно, что нельзя вычислять поперечные сечения рассеяния непосредственно из выражений (21.23), (21.40), положив в них $\lambda_{\text{мин.}} \rightarrow 0$. Эта трудность устранится, если учесть, что невозможно указать эксперимент, в котором можно было бы гарантировать, что электрон в течение процесса рассеяния не излучает ни одного фотона. При постановке эксперимента в лучшем случае можно добиться того, что если электрон и излучает фотон, то энергия фотона меньше, чем некоторая величина k_0 , которая определяется точностью измерительных приборов. Оказывается, что дифференциальное поперечное сечение для рассеяния с *излучением* фотона (тормозное излучение) с энергией, меньшей k_0 , также содержит инфракрасную расходимость и что эта расходимость точно сокращается с аналогичной расходимостью в радиационных поправках (см. фиг. 56, *b*). В общем случае инфракрасные расходимости всегда сокращаются, если рассматривать *все* возможные процессы (включая и излучение реальных квантов) в данном приближении. С общим рассмотрением этой проблемы читатель может ознакомиться в статьях Блоха и Нордсика [45], Паули и Фирца [375], Бете и Оппенгеймера [32], Йоста [250, 251], Брауна и Фейнмана [71] и Яуха и Рорлиха [242] (см. также § 8).

§ 5. Поляризация вакуума

До сих пор мы не рассматривали член, соответствующий диаграмме на фиг. 56, *e*. Для интерпретации этого члена представим, что замкнутая электронно-позитронная петля производит ток

$$j_{\mu}(\mathbf{q}) = \frac{i\alpha}{4\pi^3} K_{\mu\nu}(\mathbf{q}) a^{\nu}(\mathbf{q}); \quad (21.46)$$

¹⁾ Кроме того, см. работы Кролла и Поллока [294], а также Карплуса и Клейна [267], где вычислены радиационные поправки к сверхтонкой структуре.

этот ток является источником фотона с импульсом \mathbf{q} , который взаимодействует с электроном и рассеивает его. Требование инвариантности этого индуцированного тока по отношению к калибровочному преобразованию

$$a^\nu \rightarrow a^\nu + q^\nu \Delta \quad (21.47)$$

приводит к соотношению

$$K_{\mu\nu}(\mathbf{q}) q^\nu = 0. \quad (21.48)$$

Аналогично для сохранения величины $j_\mu(\mathbf{q})$ необходимо, чтобы удовлетворялось уравнение непрерывности

$$q^\mu j_\mu(\mathbf{q}) = q^\mu K_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = 0, \quad (21.49)$$

что эквивалентно соотношению (21.48), так как тензор $K_{\mu\nu}$ симметричен. Оператор $K_{\mu\nu}(\mathbf{q})$ обычно называют поляризационным тензором. Если тензор $K_{\mu\nu}(\mathbf{q})$ мы запишем в форме

$$K_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = K_{(1)}(\mathbf{q}^2) g_\mu g_\nu + \mathbf{q}^2 K_{(2)}(\mathbf{q}^2) g_{\mu\nu}, \quad (21.50)$$

где вследствие релятивистской инвариантности $K_{(1)}$ и $K_{(2)}$ являются функциями только инварианта \mathbf{q}^2 , то соотношение (21.48) эквивалентно условию

$$K_{(1)}(\mathbf{q}^2) = -K_{(2)}(\mathbf{q}^2). \quad (21.51)$$

Таким образом, ток $j_\mu(\mathbf{q})$ в выражении (21.46) должен иметь вид

$$j_\mu(\mathbf{q}) = \frac{i\alpha}{4\pi^3} (g_\mu g_\nu - g_{\mu\nu} \mathbf{q}^2) K_{(1)}(\mathbf{q}^2) a^\nu(\mathbf{q}), \quad (21.52a)$$

или

$$j_\mu(\mathbf{q}) = \frac{i\alpha}{4\pi^3} K_{(1)}(\mathbf{q}^2) J_\mu^e(\mathbf{q}), \quad (21.52b)$$

где величина $J_\mu^e(\mathbf{q})$ — ток, производящий внешнее поле $a_\mu(\mathbf{q})$. Для получения формулы (21.52b) мы использовали уравнения Максвелла для внешнего поля, а именно

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^e(\mathbf{x})}{\partial x_\nu} = J_\mu^e(\mathbf{x}); \quad (21.53a)$$

в импульсном пространстве эти уравнения имеют вид

$$(g_\mu g_\nu - g_{\mu\nu} \mathbf{q}^2) a^\nu(\mathbf{q}) = J_\mu^e(\mathbf{q}) \quad (21.53b)$$

и связывают внешнее поле с производящим его током.

Выражение $K_{(1)}$ можно вычислить следующим образом:

$$K_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = \int d^4p \frac{\text{Sp} \{ \gamma_\mu (\hat{p} + \hat{q} + m) \gamma_\nu (\hat{p} + m) \}}{[(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 - m^2] [\mathbf{p}^2 - m^2]}, \quad (21.54a)$$

$$K_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = \int_0^1 dz \int d^4p \frac{\text{Sp} \{ \gamma_\mu (\hat{p} + \hat{q} + m) \gamma_\nu (\hat{p} + m) \}}{[(\mathbf{p} + \mathbf{q}z)^2 + \mathbf{q}^2(z - z^2) - m^2]^2}, \quad (21.54b)$$

$$K_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = \int_0^1 dz \int d^4p \frac{\text{Sp} \{ \gamma_\mu (\hat{p} + \hat{q}(1 - z) + m) \gamma_\nu (\hat{p} - \hat{q}z + m) \}}{[\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2(z - z^2) - m^2]^2}. \quad (21.54b)$$

При получении выражения (21.54в) из (21.54б) мы сместили начало координат области интегрирования $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \mathbf{q}z$. Поскольку постоянная m имеет малую отрицательную мнимую часть, мы можем снова повернуть контур интегрирования так, чтобы интегрирование по переменной p_0 производилось от $-i\infty$ до $+i\infty$. Если мы вычислим шпур в выражении (20.54в), принимая во внимание соотношения (7.56) и (7.57), а также то, что шпур от нечетного числа матриц γ равен нулю, и если опустим члены, нечетные по переменной p [формула (20.41)] и используем соотношение симметрии (20.42), то получим

$$K_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = 4 \int_0^1 dz \int d^4p \frac{-(2q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2)(z - z^2) - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} p^2 - m^2\right)}{[p^2 + q^2(z - z^2) - m^2]^2}. \quad (21.54г)$$

Это выражение для $K_{\mu\nu}(\mathbf{q})$ квадратично расходится, поскольку в подинтегральном выражении в числитель входит шестая степень переменной интегрирования p (т. е. $p^2 d^4p$), а в знаменатель — только четвертая. Однако если мы потребуем, чтобы соотношение (21.54г) было калибровочно инвариантным [формулы (21.50), (21.51)], то в результате получим

$$\int d^4p \frac{-q^2(z - z^2) - \frac{1}{2} p^2 + m^2}{[p^2 + q^2(z - z^2) - m^2]^2} = 0.$$

Хотя полученный интеграл, строго говоря, не имеет смысла, так как он расходится, мы используем это выражение¹⁾ (являющееся результатом физического требования калибровочной инвариантности) для того, чтобы переписать выражение (21.54г) в следующем виде:

$$K_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = -8(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \int_0^1 dz (z - z^2) \int d^4p [p^2 + q^2(z - z^2) - m^2]^{-2}, \quad (21.54д)$$

$$K_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) K_{(1)}(\mathbf{q}^2). \quad (21.54е)$$

Если величину $K_{(1)}(\mathbf{q}^2)$ разложить по степеням q^2/m^2 :

$$K_{(1)}(\mathbf{q}^2) = K_{(1)}^{(0)} + \frac{q^2}{m^2} K_{(1)}^{(1)} + \dots, \quad (21.55)$$

то ясно, что величина $K_{(1)}^{(0)}$ расходится логарифмически, но все остальные члены конечны. В этом можно убедиться следующим образом. Разложение по q^2 снижает степень переменной интегрирования \mathbf{p} , причем уменьшение показателя степени \mathbf{p} равно увеличению показателя степени внешней переменной \mathbf{q} , что было показано в конце § 2.

¹⁾ При несколько более удовлетворительном рассмотрении нужно было бы первоначально „регуляризовать“ выражение (21.54г) по электронным массам (см. дополнение С в работе Фейнмана [169], а также работу Паули и Вилларса [380]).

Таким образом, член в выражении для $K_{(1)}$, не зависящий от величины q^2 , умножается на интеграл по p , подинтегральное выражение которого имеет нулевой порядок (т. е. dp/p); этот интеграл дает логарифмическую расходимость для $K_{(1)}^{(0)}$. Следующий член в выражении для $K_{(1)}$ имеет порядок q^2 и умножается на сходящийся интеграл, подинтегральное выражение которого ведет себя при больших p , как dp/p^3 ; следовательно, $K_{(1)}^{(1)}$ и все высшие члены в разложении (21.55) будут сходящимися интегралами по p . Теперь можно снова использовать метод, примененный при получении выражения (21.23б), а именно из величины $K_{(1)}(q^2)$ вычесть ее величину при $q^2 = 0$ и таким образом получить конечный результат. Ниже покажем, что идея перенормировки заряда указывает как раз на то, что именно остающаяся конечная часть $K_{(1)}(q^2) - K_{(1)}(0)$ описывает наблюдаемые эффекты поляризации вакуума.

Используя метод, который уже применялся при ковариантном вычислении собственной энергии электрона (см. гл. 20, § 3), мы можем вычислить (см. дополнение С в работе Фейнмана [169]) выражение для $K_{\mu\nu}(q)$; при этом получается следующий результат:

$$K_{\mu\nu}(q) = 4\pi^2 i (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \left[-\frac{2}{3} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln \frac{\lambda}{m} - \frac{4m^2 + 2q^2}{3q^2} \left(1 - \frac{\theta}{\operatorname{tg} \theta} \right) + \frac{1}{9} \right], \quad (21.55a)$$

где $q^2 = 4m^2 \sin^2 \theta$. Расходящийся логарифмически член $-(8\pi^2 i/3) \ln(\lambda/m)$ соответствует члену $K_{(0)}^{(0)}$.

Если на внешнее поле наложить условие Лоренца, имеющее следующий вид:

$$q^\nu a_\nu(q) = 0,$$

и использовать формулу (21.55), то матричный элемент (21.18) можно переписать в следующем виде:

$$M^{(e)} = e \frac{i\alpha}{4\pi^3} K_{(1)}(q^2) \hat{a}(q) = e \frac{i\alpha}{4\pi^3} \left[K_{(1)}^{(0)} + \frac{q^2}{m^2} K_{(1)}^{(1)} + \frac{q^4}{m^4} K_{(1)}^{(2)} + \dots \right] \hat{a}(q). \quad (21.56)$$

Теперь можно объединить первый член в правой части этого выражения с матричным элементом (21.10), соответствующим диаграмме на фиг. 5б, а. Тогда, хотя член $(i\alpha/4\pi^3) K_{(1)}^{(0)}$ фактически расходится, мы можем рассматривать его просто как постоянный множитель, уменьшающий величину внешнего поля. Это дает ненаблюдаемую перенормировку внешнего поля. Из соотношения (21.52б) видно, что расходящаяся часть индуцированного заряда $j_\mu(q)$ точно пропорциональна индуцирующему внешнему заряду $J_\mu^e(q)$. Поэтому

перенормировку можно рассматривать как такую методику, при которой перенормируется плотность внешнего 4-мерного тока $J_{\mu}^e(\mathbf{q})$, а тем самым и заряд в целом.

Отметим общие черты перенормировки заряда и массы. В обоих случаях расходимость связана с ненаблюдаемыми явлениями. Так, при перенормировке массы расходимость δm изменяет только m_0 — механическую массу электрона. Поскольку наблюдаемой является только $m_0 + \delta m = m$, то расходимость исчезает, если результат записать через наблюдаемую массу. Это же имеет место и при перенормировке заряда. Внешний 4-мерный ток J_{μ}^e невозможно экспериментально отделить от пропорционального ему индуцированного тока. Действительно, точно так же, как вокруг электрона *всегда* имеется облако виртуальных фотонов (и поэтому мы всегда измеряем m), так и внешний ток *всегда* поляризует вакуум, и во всех измерениях внешнего тока (и заряда) измеряется не величина $J_{\mu}^e(\mathbf{x})$, а величина

$$J_{\mu R}^e(\mathbf{x}) = \left[1 + \frac{i\alpha}{4\pi^3} K_{(1)}^{(0)} \right] J_{\mu}^e(\mathbf{x}), \quad (21.57)$$

где $J_{\mu R}^e(\mathbf{x})$ — „перенормированная“ плотность 4-мерного тока. Поэтому, если результат записать через наблюдаемую плотность внешнего тока $J_{\mu R}^e(\mathbf{x})$ (вместо J_{μ}^e), то он будет конечным, а именно

$$M^{(a)} + M^{(e)} = e \hat{a}_R(\mathbf{q}) + e \frac{i\alpha}{4\pi^3 m^2} K_{(1)}^{(1)} \mathbf{q}^2 \hat{a}(\mathbf{q}) + \dots \quad (21.58)$$

Следовало бы также перенормировать и остальные члены ряда (21.58), но в том порядке, который мы рассматриваем, они уже перенормированы. Однако диаграммы высших порядков приводят к перенормировке этих членов.

Из сделанных выше замечаний достаточно ясно, что даже при *отсутствии* бесконечностей, мы должны были бы перенормировать теорию. Происхождение перенормировки связано с тем, что состояние системы описывается с помощью невозмущенных „голых“ волновых функций, хотя в реальном физическом мире мы никогда не можем выключить взаимодействие между полями. Поэтому появляются поправки к „голому“ заряду и массе. Однако так как на опыте могут наблюдаться только „голая“ масса („голый“ заряд) *плюс* поправки к ней, то мы всегда должны выразить наблюдаемые величины через перенормированные константы. Поэтому в некотором смысле вопросы расходимостей и перенормировки разделены. Тем не менее, поскольку все локальные релятивистские теории поля со взаимодействием расходятся, мы будем использовать понятие „перенормировки“, чтобы выразить то обстоятельство, что расходимостей не возникает, если наблюдаемые величины выражены через перенормированный заряд и массу.

Вычисление члена $K_{(1)}^{(1)}$ может быть проведено непосредственно; тогда первый порядок по q^2/m^2 индуцированного тока дается выражением

$$j_{\mu}(q) = \frac{\alpha}{15\pi m^2} q^2 J_{\mu}^e(q). \quad (21.59)^1$$

Итак, электростатический потенциал между двумя классическими пробными зарядами в вакууме теперь больше не дается точно законом Кулона, а изменяется под влиянием поляризации вакуума. Это известно как эффект Юлинга [488], который впервые вычислил отклонения от закона Кулона (т. е. коэффициент $K_{(1)}^{(1)}$ и т. д.) сразу же после первого обсуждения поляризации вакуума Дираком [106, 107] и Гейзенбергом [225, 226]²⁾.

Эффект Юлинга дает поправку к лэмбовскому сдвигу, равную — 27 мгц. Так как расхождение между экспериментом и теорией в настоящее время не превышает 0,5 мгц, то это является прямым доказательством того, что поляризация вакуума является реальным эффектом.

Сам эффект поляризации вакуума существенно размывает эффективный заряд точечных зарядов на расстояниях порядка \hbar/mc [см. разложение (21.58)]. Физическую картину, происходящую в поляризационных явлениях, можно представить следующим образом. Заряд Q_0 в результате взаимодействия с электронно-позитронным полем окружает себя облаком из электронов и позитронов; часть из них, имеющая полный заряд δQ (того же знака, что и Q_0), уходит на бесконечность (см. дополнение к статье Швингера [440]), а часть с полным зарядом — δQ остается в облаке, непосредственно связанном с пробным телом, т. е. на расстояниях, меньших \hbar/mc . При наблюдении заряда тела на больших по сравнению с \hbar/mc расстояниях мы измеряем эффективный заряд $Q = Q_0 - \delta Q$. Однако при наблюдении с расстояний, много меньших \hbar/mc , наблюдался бы заряд Q_0 .

Эффекты поляризации вакуума высших порядков в случае внешнего поля были рассмотрены в работах Челена [254, 255],

¹⁾ Отметим, что разложение (21.56) и, следовательно, (21.59) верно только в том случае, если $q^2 < m^2$. Когда $q^2 > (2m)^2$, внешнее поле может рождать *реальные* пары; тогда матричный элемент $M^{(e)}$ будет иметь как вещественную, так и мнимую части. Мнимая часть соответствует убыванию во времени амплитуды вероятности того, что будет происходить только чистый процесс рассеяния (без рождения реальных пар). С другой стороны, будет соответственно возрастать во времени амплитуда вероятности перехода в конечное состояние, в котором имеется некоторое число (реальных) электронно-позитронных пар. Возрастанне и соответствующее убывание этих совокупностей матричных элементов таково, что полная вероятность перехода из начального состояния равна единице и S -матрица унитарна (в связи с этим см. работу Далица [96]).

²⁾ Обзор этих работ см. в статье Вайскопфа [517]; см. также статьи Валатина [496, 497].

Фарри [202], Швингера [441], Умэдзавы и Какефучи [494] и др. В квантовой электродинамике поляризация вакуума в четвертом приближении была проанализирована в работах Йоста и Люттингера [252], а также Баранджера и др. [18], Дайсона, Салпетера. В последней работе вычислен вклад поляризации вакуума в лэмбовский сдвиг. В общем случае замкнутые петли, содержащие больше двух фотонов или взаимодействий с внешним полем, сходятся.

Положение, аналогичное рассмотренному выше, получается и в случае, когда мы рассматриваем не взаимодействие с внешним полем, а взаимодействие двух зарядов. Обусловленные поляризацией вакуума поправки низшего порядка к рассеянию Мёллера представлены на диаграмме фиг. 57, с. В этом случае мы можем рассмотреть радиационные поправки, заменяя функцию распространения фотона $(1/k^2)g_{\mu\nu}$ в матричных элементах рассеяния Мёллера на величину (с точностью до постоянных множителей)

$$\alpha \frac{1}{k^2} K_{\mu\nu}(k) \frac{1}{k^2}, \quad (21.60)$$

где $K_{\mu\nu}$ — тензор поляризации (21.46). Тензор $K_{\mu\nu}$, как и в формуле (21.54), можно снова разложить, и постоянный расходящийся член можно включить в перенормировку заряда e^2 , который встречается в матричном элементе низшего порядка, соответствующем диаграмме рассеяния Мёллера.

Отметим, наконец, что тензор $K_{\mu\nu}(k)$ в случае $k^2 = 0$ описывает в низшем приближении „собственную энергию“ фотона, которая в данном случае возникает вследствие рождения виртуальных электронно-позитронных пар и их последующей аннигиляции. Весьма удовлетворительным представляется то, что величина $K_{\mu\nu}(k)f^\nu(k)$ равна нулю [здесь $f^\nu(k)$ — 4-мерный потенциал, описывающий фотон с вектором энергии-импульса k , для которого $k^2 = 0$ и $k_\nu f^\nu(k) = 0$]. В этом можно убедиться из соотношения (21.54e). Вследствие этого собственная энергия фотона равна нулю; это есть результат требования калибровочной инвариантности теории. Из соотношения (21.46) следует также, что движущийся в пространстве одиночный фотон не индуцирует токов в вакууме. Несколько другим путем можно установить, что эффекты поляризации вакуума не имеют места при свободном распространении электромагнитных волн. Однако последнее утверждение верно только в случае рассмотрения эффектов в низшем порядке по внешнему или радиационному полю. Если же рассматривать нелинейные эффекты во внешнем поле (т. е. квадратичные члены и члены высших порядков по A^μ), то, как мы увидим в гл. 22, § 4, становится возможным наблюдать такие процессы, как рассеяние фотона внешним полем. Аналогично в высших порядках возможно рассеяние фотона на фотоне вследствие процессов вакуумной поляризации высших порядков (замкнутые петли).

Перенормировка заряда, обусловленная поляризацией вакуума, требуется не только вследствие виртуального рождения электронных пар, но также и заряженных мезонных пар, нуклонных пар и т. д. Фактически заряженные частицы различного вида дают вклад в поляризацию вакуума, и вклады различных частиц будут просто складываться (Фельдман [152], Умэдзава и Кавабе [490, 491, 493], Умэдзава и Камефучи [494]). Таким образом, указанная перенормировка заряда может быть применена к заряду любой частицы, которая может взаимодействовать с электромагнитным полем. Другими словами, если предположить, что *неперенормированные* заряды всех частиц равны, то будут равны также и перенормированные заряды, независимо от специфических форм взаимодействия, дающих вклад в поляризацию вакуума.

До сих пор мы рассматривали только радиационные поправки низшего порядка к формулам рассеяния на внешнем поле (см. фиг. 56, *a*). Ясно, что в высших порядках возникают гораздо более сложные диаграммы, чем приведенные на фиг. 56. Мы вернемся к ним в гл. 24 при общем рассмотрении перенормировки.

§ 6. Перенормировка в мезонной теории

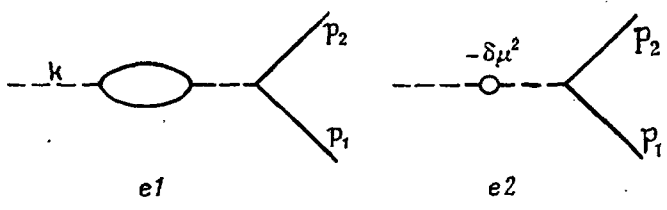
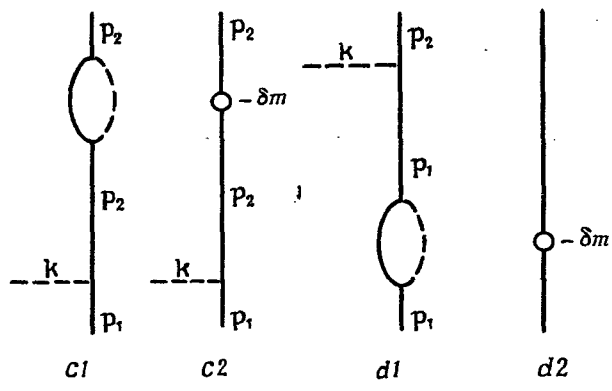
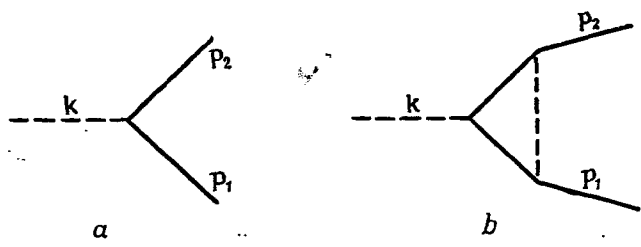
Соображения, использованные нами в электродинамике, могут быть без труда перенесены в мезонную теорию. Рассмотрим диаграммы от *b* до *e* на фиг. 58, которые представляют радиационные поправки низшего порядка к элементарной вершинной части (фиг. 58, *a*), соответствующей рассеянию нуклона на мезоне. Мы не предполагаем, что нуклон или мезон являются свободными. Соответствующие им линии могут быть частями более сложных диаграмм. В этом случае диаграмме, изображенной на фиг. 58, *a*, будет соответствовать множитель

$$M^{(a)} = \left[\frac{i}{(2\pi)^4} \right]^3 (-i) (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}) G \frac{1}{\hat{p}_2 - m} \Gamma \frac{1}{\hat{p}_1 - m} \frac{1}{k^2 - \mu^2}. \quad (21.61)$$

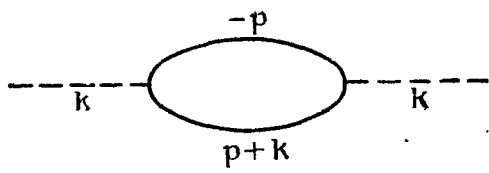
Отметим, что в случае мезонной теории имеется на одну диаграмму больше, чем в случае электродинамики; эта „лишняя“ диаграмма приведена на фиг. 58, *e2*. Это связано с тем, что мезон имеет массу покоя. Диаграмма на фиг. 59 (являющаяся частью диаграммы на фиг. 58, *e1*) соответствует оператору (мы опускаем постоянные множители)

$$M = \frac{1}{k^2 - \mu^2} \left[g^2 \int d^4p \text{Sp} \left\{ \Gamma \frac{1}{\hat{p} + \hat{k} - m} \Gamma \frac{1}{\hat{p} - m} \right\} \right] \frac{1}{k^2 - \mu^2}. \quad (21.62)$$

Если падающий мезон свободен, то мезонные функции распространения в формуле (21.62) следует опустить. Рассмотрим именно этот случай. Для вычисления интеграла применим регуляризацию.



Фиг. 58.



Фиг. 59.

Это будет выполнено следующим образом. Объединим два знаменателя в формуле (21.62), используя формулу Фейнмана

$$(ab)^{-1} = \int_0^1 dz [az + (1-z)b]^{-2}, \quad (21.63)$$

так что наш интеграл (21.62) получит следующий вид (введены регуляризующие массы нуклонов):

$$M' = -g^2 \int_0^1 dz \int d^4p \sum_i C_i \frac{\text{Sp} [\Gamma (\hat{p} + \hat{k} + m_i) \Gamma (\hat{p} + m_i)]}{(p^2 + 2z p \cdot k + zk^2 - m_i^2 + i\varepsilon)^2}. \quad (21.64)$$

Полученный интеграл, очевидно, является функцией только k^2 , в чем можно убедиться, смещая начало координат переменной интегрирования и используя свойство симметрии

$$\int d^4p p_\mu f(p^2) = 0.$$

В случае $\Gamma = \gamma_5$ матричный элемент, по существу, имеет форму

$$M' = V(k^2) \approx g^2 \int_0^1 dz \int d^4p \sum_i C_i \frac{4[p^2 + k^2(z^2 - z) - m_i^2]}{[p^2 + k^2(z - z^2) - m_i^2 + i\varepsilon]^2}. \quad (21.65)$$

Очевидно, V представляет квадратично расходящийся интеграл. Мы можем разложить V около точки $k^2 = \mu^2$ так же, как разлагали тензор поляризации; тогда мы получим

$$V(k^2) = V^{(0)} + (k^2 - \mu^2)V^{(1)} + (k^2 - \mu^2)^2 V^{(2)} + \dots \quad (21.66)$$

Разложение в ряд Тейлора соответствует дифференцированию подинтегрального выражения и, следовательно, возрастанию степеней знаменателя в выражении (21.65), так что $V^{(1)}$ расходится только логарифмически, а $V^{(2)}$ и все высшие члены сходятся.

Теперь мы можем рассматривать первый член ряда (21.66) как поправку к массе мезона вследствие взаимодействия с нуклонным полем. В самом деле, если имеется поправка к массе бозона, то в лагранжиане свободного поля „голую“ массу бозона μ_0^2 можно заменить на величину $\mu^2 - \delta\mu^2$, где μ — экспериментальная масса бозона. Возмущение — $\delta\mu^2\varphi^2(\mathbf{x})$ должно тогда использоваться вместе с любым членом поляризации вакуума типа, представленного на фиг. 59. Член — $\delta\mu^2\varphi^2(\mathbf{x})$ в гамильтониане взаимодействия приводит к тому, что к величине M [формула (21.62)] необходимо добавить выражение

$$M' = \frac{1}{k^2 - \mu^2} (-\delta\mu^2) \frac{1}{k^2 - \mu^2}, \quad (21.67)$$

которое сокращается с членом $V^{(0)}$ в разложении (21.66), если выбрать $\delta\mu^2 = V^{(0)}$.

Аналогичный член не встречается в электродинамике, так как вследствие калибровочной инвариантности не может появиться член вида A^2 , а это и приводит к тому, что масса фотона равняется нулю.

Для свободного бозона ($k^2 = \mu^2$), согласно формуле (21.66), имеет место только перенормировка массы. Для процессов, в которых участвует виртуальный ($k^2 \neq \mu^2$), а не свободный бозон, мы должны принять во внимание и другие члены разложения (21.66). Поэтому рассмотрим матричный элемент, соответствующий диаграмме на фиг. 58, *e1*. Если эта диаграмма лежит внутри некоторой большей диаграммы, то ей соответствует следующий множитель (опускаем постоянные множители):

$$M^{(e1)} = G \frac{1}{\hat{p}_2 - m} \Gamma \frac{1}{\hat{p}_1 - m} \frac{1}{k^2 - \mu^2} V(k^2) \frac{1}{k^2 - \mu^2} \delta^4(p_2 - p_1 - k). \quad (21.68)$$

Аналогично диаграмме 58, *e2* соответствует множитель

$$M^{(e2)} = -G \frac{1}{\hat{p}_2 - m} \Gamma \frac{1}{\hat{p}_1 - m} \frac{1}{k^2 - \mu^2} \delta \mu^2 \frac{1}{k^2 - \mu^2} \delta^4(p_2 - p_1 - k). \quad (21.69)$$

Если величину $V(k^2)$ в формуле (21.68) разложить согласно формуле (21.66), то первый член с $V^{(0)}$ точно сокращается с $M^{(e2)}$ (перенормировка массы). Рассмотрим член с $V^{(1)}$; он дает следующий вклад в матричный элемент $M^{(e1)}$:

$$\begin{aligned} M_{(1)}^{(e1)} &= G \frac{1}{\hat{p}_2 - m} \Gamma \frac{1}{\hat{p}_1 - m} \frac{1}{k^2 - \mu^2} V^{(1)}(k^2 - \mu^2) \frac{1}{k^2 - \mu^2} \delta^4(p_2 - p_1 - k) = \\ &= G V^{(1)} \frac{1}{\hat{p}_2 - m} \Gamma \frac{1}{\hat{p}_1 - m} \frac{1}{k^2 - \mu^2} \delta^4(p_2 - p_1 - k). \end{aligned} \quad (21.70)$$

Полученная величина равна (бесконечной) константе, умноженной на матричный элемент $M^{(a)}$. Если выписать постоянные множители, π и т. д., то матричный элемент $M_{(1)}^{(e1)}$ точно равен

$$M_{(1)}^{(e1)} = V^{(1)} M^{(a)}. \quad (21.71)$$

Поэтому можно объединить величины $M^{(a)}$ и $M_{(1)}^{(e1)}$ и рассматривать $[1 + V^{(1)}] G$ как новую перенормированную и наблюдаемую константу связи. Отметим, что величина $V^{(1)}$ совсем не зависит от процесса рассеяния. Последний член $V^{(2)}$ конечен и представляет наблюдаемую радиационную поправку к матричному элементу $M^{(a)}$.

Рассмотрим следующую диаграмму, изображенную на фиг. 58, *b*; она представляет собой вершинную часть. Рассмотрение, аналогичное проведенному в квантовой электродинамике, приведет к тому, что матричный элемент $M^{(b)}$ может быть получен из матричного элемента $M^{(a)}$ заменой в последнем оператора Γ на оператор

$$\Gamma \rightarrow C\Gamma + \Delta(p_2, p_1), \quad (21.72)$$

где C — расходящаяся константа. Фактически, если мы рассматриваем только нейтральные мезоны, расходимость C сокращается с двумя членами, соответствующими диаграммам на фиг. 58, $c1$ и $d1$. Однако в дальнейшем мы должны также рассматривать и заряженные мезоны, например в случае изменения состояния нуклона (нейтрон переходит в протон) при излучении или поглощении мезона; при этом упомянутое сокращение расходимости больше не имеет места. Мы можем, однако, интерпретировать эту расходимость как перенормировку константы связи (см., однако, работу Челена [260], где рассмотрена неоднозначность такой перенормировки; см. также т. II, гл. 44, § 4). Теперь рассмотрим диаграмму на фиг. 58, c , ей соответствует оператор

$$M^{(c)} = M^{(c1)} + M^{(c2)}, \quad (21.73)$$

где

$$M^{(c1)} = \frac{1}{\hat{p}_2 - m} \sum (\mathbf{p}_2) M^{(a)}, \quad (21.74a)$$

$$M^{(c2)} = -\frac{1}{\hat{p}_2 - m} \delta m M^{(a)}. \quad (21.74b)$$

Здесь \sum — инвариантный матричный оператор (точнее инвариантом является $\bar{\psi} \sum \psi$), поэтому оператор $\sum(\mathbf{p})$ можно разложить около точки $\hat{p} = m$ следующим образом:

$$\sum(\mathbf{p}) = \delta m + B(\hat{p} - m) + \sum_c(\mathbf{p}), \quad (21.75)$$

где δm и B — расходящиеся константы. Так как оператор $\sum(\mathbf{p})$ линейно расходится¹⁾, то оператор $\sum_c(\mathbf{p})$ — сходится. Как и раньше, мы определим

$$\sum(\mathbf{p}^2 = m^2) = \delta m. \quad (21.76)$$

Поэтому можно написать

$$M^{(c1)} + M^{(c2)} = B M^{(a)} + \frac{1}{\hat{p}_2 - m} \sum_c(\mathbf{p}_2) M^{(a)}. \quad (21.77)$$

Теперь снова можно объединить член $B M^{(a)}$ с матричным элементом $M^{(a)}$ и переопределить величину константы связи.

§ 7. Применения

В предыдущих параграфах было дано краткое описание современных методов обращения с расходимостями, которые возникают в высших членах разложения в степенной ряд решений уравнений

¹⁾ Эта линейная расходимость случайно сводится к логарифмической вследствие приблизительного взаимного сокращения членов, происходящих от состояний с положительной и отрицательной энергией.

движения в релятивистской теории поля. Эти методы были применены для расчета радиационных поправок низшего порядка для наиболее элементарных процессов рассеяния, в которых принимают участие электроны и фотоны.

Первым таким процессом, для которого были вычислены радиационные поправки (кроме лэмбовского сдвига — для него необходимо рассматривать проблему связанных состояний), был процесс, рассмотренный нами при исследовании методики перенормировки, т. е. кулоновское рассеяние электронов. Радиационные поправки к формуле рассеяния Резерфорда (см. гл. 9, § 1) в низшем приближении были впервые вычислены Швингером [440]. Расчет проводился в первом борновском приближении как по отношению к кулонову полю, так и по отношению к полю излучения. Расчет имеет силу, если отдельно выполняются соотношения $\alpha \ll 1$ и $Z\alpha \ll 1$ (Z — заряд ядра). Поперечное сечение рассеяния для этого процесса (включая и радиационные поправки) может быть получено обычным путем из квадрата амплитуды перехода

$$T = -2\pi i \bar{u}(\vec{p}_2) M u(\vec{p}_1), \quad (21.78)$$

где величина M дается формулой (21.40)¹⁾. Использование формулы (21.40) не является полностью корректным, так как матричный элемент M из формулы (21.40) содержит инфракрасную расходимость в пределе $\lambda_{\text{мнв.}} \rightarrow 0$.

Способ устранения этой трудности был уже указан раньше, в конце § 4. Он основывается на том, что параллельно рассеянию без излучения имеется отличная от нуля (и фактически бесконечная) вероятность того, что электрон при рассеянии испустит один фотон. Во втором порядке имеются две такие диаграммы: на одной электрон сначала рассеивается внешним полем, а затем испускает фотон; на второй имеет место обратный процесс — сначала испускается фотон, а затем электрон рассеивается. Матричные элементы, соответствующие этим двум диаграммам, можно легко выписать, если использовать правила гл. 19, § 3. Для перехода $\mathbf{p}_1 \rightarrow \mathbf{p}_2$ с испусканием фотона с энергией-импульсом \mathbf{k} и поляризацией $\epsilon^{(\lambda)}(\vec{k})$ [напомним, что $\mathbf{k} \cdot \epsilon^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0$] матричные элементы этих диаграмм имеют вид

$$T_1 = -2\pi i \bar{u}(\vec{p}_2) \left[\frac{e}{\sqrt{2}(2\pi)^3 k_0} \gamma \cdot \epsilon^{(\lambda)}(\vec{k}) \frac{\hat{p}_2 + \hat{k} + m}{(p_2 + k)^2 - m^2} \times \right. \\ \left. \times e \hat{a}(\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} - \mathbf{p}_1) \right] u(\vec{p}_1), \quad (21.79)$$

$$T_1 = -2\pi i \bar{u}(\vec{p}_2) M_1 u(\vec{p}_1) \quad (21.79a)$$

¹⁾ См. также вывод формулы Резерфорда в гл. 9, § 1.

и

$$T_2 = -2\pi i \bar{u}(\vec{p}_2) \left[e \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 + \mathbf{k}) \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k})^2 - m^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{e}{\sqrt{2(2\pi)^3 k_0}} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)}(\vec{k}) \right] u(\vec{p}_1), \quad (21.80)$$

$$T_2 = -2\pi i \bar{u}(\vec{p}_2) M_2 u(\vec{p}_1). \quad (21.80a)$$

Рассмотрим случай, когда излучаемый фотон является очень мягким, т. е. когда $k_0 \ll m$ и $k_0 \ll |\vec{p}_1|, |\vec{p}_2|$. Принимая во внимание, что

$$\hat{p}\hat{q} = -\hat{q}\hat{p} + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \quad (21.81)$$

и что для рассматриваемой задачи

$$\mathbf{k}^2 = 0, \quad (21.82a)$$

$$(\hat{p}_1 - m) u(\vec{p}_1) = 0; \quad \mathbf{p}_1^2 = m^2, \quad (21.82b)$$

$$\bar{u}(\vec{p}_2)(\hat{p}_2 - m) = 0; \quad \mathbf{p}_2^2 = m^2, \quad (21.82b)$$

мы можем получить следующее выражение:

$$T_1 + T_2 \approx -2\pi i \frac{e}{\sqrt{2(2\pi)^3 k_0}} \times \\ \times \bar{u}(\vec{p}_2) \left[\left(\frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{s}^{(\lambda)}(\vec{k})}{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}} - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{s}^{(\lambda)}(\vec{k})}{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}} \right) e \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \right] u(\vec{p}_1), \quad (21.83a)$$

$$T_1 + T_2 \approx \frac{e}{\sqrt{2(2\pi)^3 k_0}} \left[\frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{s}^{(\lambda)}(\vec{k})}{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}} - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{s}^{(\lambda)}(\vec{k})}{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}} \right] T^{(a)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \quad (21.83b)$$

где $T^{(a)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ дается формулой (21.10). Вероятность того, что электрон при рассеянии из состояния \mathbf{p}_1 в состояние \mathbf{p}_2 испустит один фотон (энергия которого лежит в пределах 0 и $\Delta E \ll m$, а поляризация произвольна), дается тогда выражением

$$\sum_{\lambda=0}^3 \int_0^{\Delta E} d^3k |T_1 + T_2|^2 = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda=0}^3 \int_0^{\Delta E} \frac{d^3k}{k_0} \times \\ \times \left| \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{s}^{(\lambda)}(\vec{k})}{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}} - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{s}^{(\lambda)}(\vec{k})}{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}} \right|^2 |T^{(a)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|^2. \quad (21.84)$$

Из формулы (21.84) видно, что эта вероятность логарифмически расходится на нижнем пределе.

Если, кроме этого, изменение импульса электрона мало, т. е. $|\vec{q}| = |\vec{p}_1 - \vec{p}_2| \ll m$, то этот результат можно упростить, переходя

к системе координат, в которой электрон, по существу, покоится как в начальном, так и в конечном состояниях. В этой системе

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k} = m k_0. \quad (21.85a)$$

Множитель под знаком абсолютного значения в интеграле (21.84) имеет тогда числитель

$$(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(\lambda)} = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(\lambda)}.$$

Если принять во внимание только поперечные кванты (а только такие кванты могут фактически излучаться) и усреднить по всем направлениям вектора \vec{k} , то получим

$$\left\langle \sum_{\lambda=1}^2 (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(\lambda)}(\vec{k}))^2 \right\rangle = -\frac{2}{3} \mathbf{q}^2. \quad (21.85b)$$

Простые алгебраические выкладки приводят к следующему результату:

$$\sum_{\lambda=0}^3 \int_{k_{\text{мин.}}}^{\Delta E} d^3 k |T_1 + T_2|^2 = -\frac{2\alpha}{3\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{m^2} |T^{(a)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|^2 \ln \frac{\Delta E}{k_{\text{мин.}}}, \quad (21.86)$$

если нижний предел интегрирования по переменной k в интеграле (21.84) заменить на $k_{\text{мин.}}$. Величина ΔE относится к той системе координат, где электрон, по существу, покоится. Кроме этой величины, все остальные множители релятивистски инвариантны. Расчеты для случая произвольного изменения начальных энергии и импульса электрона см. в работах Йоста [250, 251], Швингера [439], а также Блоха и Нордсика [45].

Вероятность того, что электрон рассеивается из состояния $u(\vec{p}_1)$ в состояние $u(\vec{p}_2)$ без излучения фотона, дается квадратом выражения (21.78), или в явной форме:

$$\begin{aligned} |T|^2 &= \left| -2\pi i \bar{u}(\vec{p}_2) [M^{(a)} + e\Delta_{\nu C}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) a^\nu (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)] u(\vec{p}_1) \right|^2 = \\ &= |T^{(a)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|^2 - \\ &- 2\pi i T^{(a)\dagger}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \bar{u}(\vec{p}_2) e\Delta_{\nu C}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) a^\nu (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) u(\vec{p}_1) + \\ &+ 2\pi i (\bar{u}(\vec{p}_2) e\Delta_{\nu C}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) a^\nu (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) u(\vec{p}_1))^\dagger T^{(a)}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1), \quad (21.87) \end{aligned}$$

где мы пренебрегаем членами порядка e^4 . Из соотношения (21.23) следует, что часть величины $\Delta_{\nu C}$, которая имеет инфракрасную расходимость и которую мы обозначим $\Delta'_{\nu C}$, дает следующий вклад

в соотношении (21.87):

$$\begin{aligned} & -2\pi i \bar{u}(\vec{p}_2) e \Delta'_{\nu C}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) a^\nu(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) u(\vec{p}_1) = \\ & = \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин.}}} \right) [-2\pi i \bar{u}(\vec{p}_2) e \hat{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) u(\vec{p}_1)] = \\ & = \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин.}}} \right) T^{(a)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \quad (21.88) \end{aligned}$$

(мы снова предполагаем, что изменение импульса \vec{q} мало). Тогда, выделяя расходящуюся инфракрасную часть второго и третьего членов, можем переписать соотношение (21.87) в следующем виде:

$$|T|^2 = |T^{(a)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|^2 + \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин.}}} \right) |T^{(a)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|^2. \quad (21.89)$$

Сравнивая выражения (21.86) и (21.89) можно видеть (см. также работу Бете и Оппенгеймера [32]), что сумма $|T|^2$ и $\int |T_1 + T_2|^2$, т. е. полное поперечное сечение всех возможных процессов рассеяния до порядка e^6 , конечна и свободна от расходимостей в пределе $k_{\text{мин.}}, \lambda_{\text{мин.}} \rightarrow 0$. Однако полное поперечное сечение зависит от энергии ΔE , соответствующей энергии, ниже которой реальные фотоны не могут быть выделены в экспериментах по рассеянию. Величина ΔE определяется разрешением по энергии детектора, используемого в эксперименте.

Швингер [440]¹⁾ вычислил поперечное сечение для упругого рассеяния (упругое фактически является неупругим, но потери энергии меньше, чем ΔE) в предельно релятивистском, а также в промежуточном и нерелятивистском случаях. Читатель может ознакомиться с деталями вычислений и дальнейшей дискуссией в статье Швингера. Здесь мы приведем только поперечное сечение в нерелятивистском пределе, которое содержит вклад поляризации вакуума под действием внешнего поля [формула (21.56)]; в этом случае имеем

$$\frac{d\sigma/d\Omega}{(d\sigma/d\Omega)_R} = 1 - \frac{8\alpha}{3\pi} \left(\frac{19}{30} + \ln \frac{m}{2\Delta E} \right) v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (21.90)$$

где $(d\sigma/d\Omega)_R$ — резерфордское поперечное сечение, даваемое формулой (9.17) (смысл величин v и θ такой же, как в упомянутой формуле).

Позднее, в 1953 г., Ньютон [355] вычислил поправку порядка $Z\alpha$ к результату Швингера. При этом он рассмотрел все диаграммы, которые содержат до двух взаимодействий с кулоновым полем, но только один виртуальный фотон. Они могут также рассматриваться как радиационные поправки к формуле Мак-Кинли — Фешбаха (6.2). Радиационные поправки четвертого порядка к формулам рассеяния электрона на внешнем поле (т. е. вклад от диаграмм, содержащих

¹⁾ См. также работу Фукуда и др. [193].

два виртуальных фотона, но только одно взаимодействие с внешним полем) были вычислены в работе Уинсера, Берсона и Кролла [521].

Второй задачей рассеяния, для которой вычислены радиационные поправки, является комптоновское рассеяние фотона на частице со спином 0 или $1/2$. В работе Коринальдези и Йоста [90] были вычислены радиационные поправки в случае рассеяния фотона на частице со спином 0, а Шафрот [428] дал формальное, хотя численно неверное (см. работу Толла [485]), рассмотрение поправок к формуле Клейна—Нишины. Браун и Фейнман [71] вычислили все радиационные поправки низшего порядка и получили поперечное сечение до порядка e^6 как в нерелятивистском, так и в ультрарелятивистском пределах. В их статье читатель может ознакомиться с ясным и подробным изложением практической вычислительной техники, применяемой при вычислении радиационных поправок.

В гл. 24, § 6 мы покажем, что в пределе стремящейся к нулю энергии фотона все радиационные поправки к формуле комптоновского рассеяния стремятся к нулю. Мы рассмотрим там этот факт, являющийся важным для принципа перенормировки заряда (Тирринг [480]).

Мы уже упоминали о выполненном Карплусом и Кроллом [263] расчете радиационных поправок четвертого порядка к величине магнитного момента электрона. Читатель может ознакомиться в их статье с выделением расходимостей в собственной энергии и вершинной части для случая, когда $p^2 \neq m^2$, т. е. когда все линии являются внутренними.

Следующим процессом, для которого были вычислены радиационные поправки низшего порядка, является внутреннее рождение пар (Далиц [96]). Радиационные поправки к формулам тормозного излучения были вычислены Митра [337].

В общем эти электромагнитные радиационные поправки к формулам процессов рассеяния довольно малы (1% и ниже), так что даже в наиболее благоприятных условиях их трудно наблюдать. Тем не менее успех теории в предсказании правильной величины смещения уровней в лэмбовском сдвиге оставляет мало сомнений в том, что эти эффекты действительно имеют место.

В мезонной теории радиационные поправки низшего и в некоторых случаях более высокого порядка были рассмотрены многими авторами. Эти вопросы будут детально изложены во втором томе (см. т. II, гл. 39 и 47, а также гл. 44 и 46).

§ 8. Представление взаимодействия Фарри для связанных состояний

В § 4 мы встретились с некоторой трудностью при получении формулы лэмбовского сдвига для связанных электронов из ранее выведенных формул (см. § 2 и 3) радиационных поправок для сво-

бодных электронов. Строго говоря, все результаты, полученные до настоящего параграфа, применимы только к задачам рассеяния в тех случаях, когда *все* частицы в начальном и конечном состояниях свободны. Имеется, однако, широкий класс интересных экспериментов по рассеянию, при которых электрон связан в атоме (например, релеевское рассеяние) и для рассмотрения которых описанные выше методы непригодны.

В 1951 г. Фарри [202] указал, как можно обобщить формализм Фейнмана—Дайсона на такие случаи, когда электрон находится в связанном состоянии. Ясно, что эта задача может быть рассмотрена в рамках шредингеровского представления, если в качестве невозмущенного гамильтониана электронно-позитронного поля выбрать следующий оператор:

$$H_0 = \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \{ -i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m \} \psi(\vec{x}) + \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) V(\vec{x}) \psi(\vec{x}), \quad (21.91)$$

где $V(\vec{x})$ описывает внешний статический потенциал, в котором электрон находится в связанном состоянии. Гамильтониан взаимодействия, описывающий взаимодействие между веществом и излучением, дается формулой

$$H_I = \frac{1}{2} e \int d^3x [\bar{\psi}(\vec{x}) \gamma^\mu \psi(\vec{x})] A_\mu(\vec{x}), \quad (21.92)$$

где $A_\mu(\vec{x})$ — квантованный электромагнитный потенциал в шредингеровском представлении. Собственные функции гамильтониана H_0 являются векторами состояния систем с определенным числом (не взаимодействующих) электронов и позитронов в (одночастичных) состояниях, описываемых решениями уравнения Дирака с потенциалом $V(\vec{x})$. Точнее говоря, можно показать, что рассмотрение, проведенное в гл. 13, § 5, может быть использовано аналогичным образом и для гамильтониана (21.91), если разлагать встречающиеся в нем операторы поля $\psi(\vec{x})$ и $\psi^\dagger(\vec{x})$ по полной системе решений уравнения Дирака во внешнем потенциале $V(\vec{x})$.

Точно такая же методика была применена в первых релятивистских вычислениях лэмбовского сдвига (см., например, работы Френча [191], Кролла и Лэмба [292]). Однако такое рассмотрение является нековариантным, и выделение расходимостей далеко от однозначности (см., например, работу Кролла и Лэмба [292]).

В методе Фарри упомянутое выше выделение расходимостей производится в рамках ковариантного формализма, причем эффекты внешнего потенциала включены в переменные поля.

Рассмотрим снова уравнение движения вектора состояния в представлении взаимодействия

$$i\hbar c \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \tau} = \int d\sigma(\mathbf{x}) \mathcal{H}_I(\mathbf{x}) \Psi(\tau), \quad (21.93)$$

где $\mathcal{H}_I(\mathbf{x})$ — плотность энергии взаимодействия, задаваемая формулой (21.9). Здесь мы написали уравнение Томонага—Швингера для случая плоской пространственно-подобной поверхности, уравнение которой имеет вид

$$n_\mu x^\mu = \tau, \quad (21.94)$$

где n_μ — постоянный единичный вектор нормали к плоскости τ . Если $\mathbf{n} = (1, 0, 0, 0)$, то τ — гиперплоскость $t = \text{const}$ и $d\sigma = d^3x$; тогда уравнение (21.93) сводится к более знакомой формуле

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \int d^3x \left\{ \frac{e}{2} [\bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma^\mu, \psi(\mathbf{x})] A_\mu(\mathbf{x}) + \right. \\ \left. + \frac{e}{2} [\bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma^\mu, \psi(\mathbf{x})] A_\mu^e(\mathbf{x}) - \delta m \bar{\psi}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \right\} \Psi(t). \quad (21.94a)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H_I(t) \Psi(t). \quad (21.94b)$$

Так же, как и Фарри, проведем следующее унитарное преобразование вектора состояния $\Psi(t)$:

$$\Psi_F(t) = V^{-1}(t) \Psi(t). \quad (21.95)$$

Вектор состояния Ψ_F удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_F(t)}{\partial t} = V^{-1}(t) H_I(t) V(t) \Psi_F(t) + i\hbar \frac{\partial V^{-1}(t)}{\partial t} V(t) \Psi_F(t). \quad (21.96)$$

Если унитарный оператор $V (V^\dagger = V^{-1})$ выбирать так, чтобы он удовлетворял уравнению

$$i\hbar \frac{\partial V^{-1}(t)}{\partial t} V(t) = -i\hbar V^{-1}(t) \frac{\partial V(t)}{\partial t} = \\ = -V^{-1}(t) \int_{x_0=t} d^3x \frac{e}{2} [\bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma^\mu, \psi(\mathbf{x})] A_\mu^e(\mathbf{x}) V(t), \quad (21.97a)$$

или

$$i\hbar \frac{\partial V(t)}{\partial t} = \int_{x_0=t} d^3x \frac{e}{2} [\bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma^\mu, \psi(\mathbf{x})] A_\mu^e(\mathbf{x}) V(t), \quad (21.97b)$$

то вектор состояния Ψ_F будет подчиняться уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_F(t)}{\partial t} = \int_{x_0=t} d^3x \left\{ \frac{e}{2} [\bar{\psi}_F(\mathbf{x}) \gamma^\mu, \psi_F(\mathbf{x})] A_{F\mu}(\mathbf{x}) - \right. \\ \left. - \delta m \bar{\psi}_F(\mathbf{x}) \psi_F(\mathbf{x}) \right\} \Psi_F(t), \quad (21.98)$$

где преобразованные операторы ψ_F и A_F определяются следующим образом:

$$\psi_F(\mathbf{x}) = V^{-1}(t) \psi(\mathbf{x}) V(t), \quad x_0 = t, \quad (21.99)$$

$$A_{F\mu}(\mathbf{x}) = V^{-1}(t) A_\mu(\mathbf{x}) V(t), \quad x_0 = t. \quad (21.100)$$

Выведем уравнения движения, которым удовлетворяет оператор $\psi_F(\mathbf{x})$. Для этой цели продифференцируем соотношение (21.99) по $x_0 = ct$ и, используя уравнение (21.97), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_F(\mathbf{x})}{\partial x^0} &= \frac{\partial V^{-1}(t)}{\partial x^0} \psi(\mathbf{x}) V(t) + V^{-1}(t) \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial V(t)}{\partial x^0} + V^{-1}(t) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x^0} V(t) = \\ &= -\frac{i}{\hbar c} V^{-1}(t) \left[\frac{e}{2} \int_{x'_0=t} d^3x' [\bar{\psi}(\mathbf{x}') \gamma^\mu, \psi(\mathbf{x}')] A_\mu^e(\mathbf{x}'), \psi(\mathbf{x}) \right] V(t) + \\ &+ V^{-1}(t) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x^0} V(t). \quad (21.101) \end{aligned}$$

Вычисление коммутатора в формуле (21.101) дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{x'_0=t} d^3x' [\bar{\psi}(\mathbf{x}') \gamma^\mu, \psi(\mathbf{x}')] A_\mu^e(\mathbf{x}') = \\ = i \int d^3x' S(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \gamma^\mu A_\mu^e(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') = \\ = -\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu^e(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}), \quad (21.102) \end{aligned}$$

так как $-iS(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ для $t = t'$ равно $\gamma^0 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ [см. формулу (15.64)]. Тогда, принимая во внимание, что $\psi(\mathbf{x})$ является оператором в представлении взаимодействия и, следовательно,

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x^0} = (-\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - i\gamma^0 m) \psi(\mathbf{x}), \quad (21.103)$$

после приведения членов получаем, что оператор ψ_F подчиняется следующему уравнению:

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \psi_F(\mathbf{x}) = \frac{e}{\hbar c} \gamma^\mu A_\mu^e(\mathbf{x}) \psi_F(\mathbf{x}), \quad (21.104)$$

т. е. он удовлетворяет уравнению Дирака в присутствии внешнего электромагнитного поля $A_\mu^e(\mathbf{x})$. Аналогично, поскольку операторы $A_\mu(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ коммутируют между собой, мы находим, что

$$A_{F\mu}(\mathbf{x}) = A_\mu(\mathbf{x}). \quad (21.105)$$

Представление, характеризуемое уравнениями (21.98), (21.104) и соотношением (21.105), известно обычно как представление взаимодействия Фарри для связанных состояний, поскольку с его помощью могут быть рассмотрены задачи для связанных состояний.

В этом можно убедиться следующим образом. Пусть $\varphi_n(\mathbf{x})$ является решением уравнения (21.104) в неоператорном смысле, где индекс n определяет квантовые числа состояния (как связанные

состояния, так и состояния рассеяния). Если оператор $\psi_F(\mathbf{x})$ разложить по функциям $\varphi_n(\mathbf{x})^{\dagger}$, а именно

$$\psi_F(\mathbf{x}) = \sum_{n, E_+} b_n \varphi_n(\mathbf{x}) + \sum_{n, E_-} d_n^{\dagger} \varphi_n(\mathbf{x}), \quad (21.106)$$

где в первый член включены только решения с положительной энергией (E_+), а во второй член — только решения (21.104) с отрицательной энергией, тогда оператор b_n^{\dagger} будет являться оператором рождения электрона в состоянии n . Состояние n может быть связанным состоянием электрона во внешнем поле, так что наше утверждение доказано. Отметим, что в данном случае зависимость функций $\varphi_n(\mathbf{x})$ от времени не такая, как для свободных частиц, ибо в выражении $\exp(-iE_n x^0)$ значения E_n равны энергиям в состояниях n . Решение уравнения (21.98) можно снова представить в виде

$$\Psi_F(t_2) = U_F(t_2, t_1) \Psi_F(t_1), \quad (21.107)$$

где оператор $U_F(t_2, t_1)$ дается разложением Дайсона

$$U_F(t_2, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar c}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d^4 x_1 \int_{t_1}^{t_2} d^4 x_2 \dots \\ \dots \int_{t_1}^{t_2} d^4 x_n T(\mathcal{H}_{FI}(\mathbf{x}_1) \mathcal{H}_{FI}(\mathbf{x}_2) \dots \mathcal{H}_{FI}(\mathbf{x}_n)), \quad (21.108)$$

$$\mathcal{H}_{FI}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} e [\bar{\psi}_F(\mathbf{x}) \gamma^{\mu}, \psi_F(\mathbf{x})] A_{\mu}(\mathbf{x}) - \delta m \bar{\psi}_F(\mathbf{x}) \psi_F(\mathbf{x}). \quad (21.109)$$

Рассмотрим теперь вектор состояния $\Phi_a = b_a^{\dagger} \Phi_{F0}$ связанной системы, описывающий состояние, в котором имеется один „голый“ электрон в некотором *связанном состоянии* a и нет фотонов. Энергия этого состояния равна E_a — собственному значению энергии уравнения Дирака, соответствующего собственной функции φ_a во внешнем поле. Однако вследствие взаимодействия $\mathcal{H}_{FI}(\mathbf{x})$ энергия этого состояния изменяется. Фактически имеется полная аналогия со случаем, рассмотренным в гл. 20, § 1, и изменение энергии ΔE_a в состоянии Φ_a дается выражением

$$e^{-i\Delta E_a(t_2-t_1)} = (\Phi_a, U_F(t_2, t_1) \Phi_a), \quad (21.110)$$

где разность времен $t_2 - t_1$ должна быть взята большой и необходимо провести усреднение по положениям концов интервала t_2 и t_1 ,

1) Это разложение имеет смысл только в случае достаточно слабых полей, для которых существует щель между собственными значениями с положительной и отрицательной энергией. Если это не так, то не существует стабильного вакуумного состояния Φ_{F0} . См. работы Снайдера и Вайнберга [454], Фарри [202], Салама и Мэттьюса [421].

зависимость от которых выражения (21.117) имеет осциллирующий характер. (Вспомним обсуждение в гл. 16, § 2; его легко можно обобщить на настоящий случай, т. е. случай, когда H_0 имеет связанные состояния.)

Величина ΔE_a имеет как вещественную, так и мнимую части. Вещественная часть соответствует сдвигу уровня, обусловленному взаимодействием с полем излучения. Мнимая часть ΔE_a отрицательна и соответствует распаду состояния Φ_a , при котором электрон переходит в более низкое энергетическое состояние; этот переход сопровождается излучением одного или большего числа фотонов. Итак, мнимая часть ΔE_a дает время жизни (или ширину уровня) в состоянии a . Эта мнимая часть ΔE_a равна нулю для основного состояния.

Оператор $U_F(t_2, t_1)$ можно снова проанализировать с помощью диаграмм Фейнмана. Приведенное рассмотрение и анализ в представлении взаимодействия свободных частиц различаются только сверткой двух фермионных множителей, которая в данном случае дается выражением

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} S_F^e(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) &= (\Phi_{F0}, T(\psi_{F_2}(\mathbf{x}_2) \bar{\psi}_F(\mathbf{x}_1)) \Phi_{F0}) = \\ &= + \sum_{n, E+} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \bar{\varphi}_n(\mathbf{x}_1) \quad \text{для } x_{20} > x_{10}, \\ &= - \sum_{n, E-} \varphi_n(\mathbf{x}_2) \bar{\varphi}_n(\mathbf{x}_1) \quad \text{для } x_{10} > x_{20} \end{aligned} \quad (21.111)$$

и не является больше функцией разности пространственно-временных координат, а есть функция переменных \vec{x}_1 и \vec{x}_2 в отдельности и разности $t_2 - t_1$ в случае статического поля. Кроме того, в данном случае среднее значение тока в состоянии вакуума не равно больше нулю, т. е.

$$\frac{1}{2} e (\Phi_{F0}, [\bar{\psi}_F(\mathbf{x}) \gamma_\mu, \psi_F(\mathbf{x})] \Phi_{F0}) = j_\mu(\mathbf{x}) \neq 0, \quad (21.112)$$

а соответствует току, индуцированному в вакууме вследствие наличия внешнего поля, и, следовательно, содержит вклад всех явлений поляризации вакуума. Поскольку ток не равен нулю, разложение T -произведения в формуле (21.108) на сумму нормальных произведений должно включать свертки множителей $[\bar{\psi}_F(\mathbf{x}_1) \gamma_\mu, \psi_F(\mathbf{x}_1)]$, которые встречаются в выражении для \mathcal{H}_{F1} .

Именно в представлении взаимодействия Фарри для связанных состояний были проведены последние и наиболее удовлетворительные расчеты радиационных поправок второго порядка к уровням энергии в связанных состояниях.

Читатель может ознакомиться с деталями этих вычислений, в частности с ковариантным выделением расходимостей (ультрафиолетовой и инфракрасной) в задаче связанных состояний, по очень ясным статьям

Кролла и Поллока [294], Баранджера, Бете и Фейнмана [18]. Кролл и Поллок исследовали влияние радиационных поправок на разделение сверхтонкой структуры. Это чрезвычайно важно, потому что наиболее точное численное значение постоянной тонкой структуры α получается из определения разделения сверхтонкой структуры в водороде. В свою очередь Баранджер, Бете и Фейнман вычислили лэмбовский сдвиг уровней и получили поправки от больших импульсов к ранее упоминавшимся расчетам лэмбовского сдвига, выполненным Бете, Френчем, Вайскопфом, Лэмбом и Кроллом, Фейнманом. Проблема естественной ширины линий в представлении Фарри была рассмотрена Лоу [311].

Радиационные поправки к сверхтонкой структуре и к уровням энергии связанных электронов были вычислены также Карплусом, Клейном и Швингером (см. работы [268, 269]). В этих более формальных вычислениях использовалась новая техника расчетов, развитая Швингером [441, 442], которую из-за ограниченности объема мы не можем привести в этой книге. Мы указываем читателю главным образом статьи, написанные в духе такого аспекта теории поля, который представлен в данном томе. В статьях Кролла, Поллока, Баранджера и др. используется метод Фейнмана—Дайсона; кроме того, они, по-видимому, имеют то преимущество, что физический смысл вычислений и приближений становится яснее, чем при более формальном подходе Карплуса, Клейна и Швингера.

Представление Фарри было также использовано для вычисления релеевского рассеяния. Это — рассеяние фотона на связанном электроном. В общем виде эта задача для современных методов слишком сложна, даже во втором приближении. Схема расчетов была развита Брауном, Пайерлсом и Вудурдом (см. работы [69, 70]; там имеются также ссылки на более ранние работы).

Представление взаимодействия для связанных состояний не является строго говоря, полностью ковариантным, поскольку внешнее поле выбирается в выделенной системе координат. (Однако в связи с этим см. работы Эддингтона [136, 137], Дирака, Пайерлса, Прайса [113].) Другими словами, протон при описании атома водорода берется бесконечно тяжелым. Обсуждение полностью ковариантного описания системы двух тел отложим до гл. 25.

РАСХОДИМОСТИ

До сих пор мы рассматривали некоторые простые расходящиеся матричные элементы. Однако необходимо еще исследовать, не расходятся ли матричные элементы, соответствующие некоторым другим типам диаграмм, кроме тех, которые мы уже рассмотрели. Другими словами, мы должны рассмотреть в более общем виде, какие из диаграмм ведут к бесконечностям.

§ 1. Общие положения¹⁾

Рассмотрим общий вид диаграммы, содержащей как бозонные, так и фермионные линии, причем одни из них являются внутренними, а другие — внешними. Если мы вычисляем S -матрицу по теории Фейнмана, то могут возникнуть три типа расходимостей, которые можно, согласно Дайсону [126] классифицировать следующим образом:

1. Сингулярности, вызванные совпадением двух или большего числа полюсов в подинтегральном выражении.

2. Расходимости при малых импульсах, связанные с наличием в подинтегральном выражении множителя $1/p^2$.

3. Расходимости при больших импульсах, обусловленные недостаточно быстрым убыванием всего подинтегрального выражения на бесконечности.

Расходимости первого типа могут возникнуть, например, при рассмотрении многочастичного процесса рассеяния, если для некоторых специальных значений импульса частицы этот процесс может быть разделен на ряд независимых процессов, в которых участвуют различные группы частиц (обсуждение такого типа расходимостей см. в статье Идена [138])²⁾. Расходимости второго типа называются обычно „инфракрасной катастрофой“ (см. гл. 21, § 4).

¹⁾ По существу все выводы этого параграфа относятся к так называемым связным диаграммам (определение их см. в гл. 24 на стр. 376). — *Прим. перев.*

²⁾ Если представить S -матрицу в виде функции импульсов и энергий падающих частиц, то, начиная с определенных значений энергии, становится отличной от нуля вероятность рождения новых частиц. При пороговой энергии матричные элементы содержат сингулярности первого типа, которые соответствуют точкам ветвления. — *Прим. перев.*

Здесь мы не будем останавливаться на расходимостях первого или второго типа, а сконцентрируем наше внимание на действительно вызывающих наибольшие трудности расходимостях третьего типа, примеры которых в нескольких частных случаях были рассмотрены в предыдущих главах.

Рассмотрим теперь общий вид диаграммы. Известно, что интегрирование необходимо проводить по всем внутренним импульсам p_j независимо от того, являются ли они импульсами бозонов или фермионов. Итак, мы должны проинтегрировать по $d^4 p_j = dp_j^0 dp_j^1 dp_j^2 dp_j^3$; Дайсон [127] показал, что для исследования возможных расходимостей можно повернуть контур интегрирования по переменной p_j^0 так, чтобы интегрирование по ней проводилось по мнимой оси в комплексной плоскости p^0 (см. гл. 20). Он, кроме того, показал [127]¹⁾, что это всегда возможно и не вносит новых расходимостей. Такого рода преобразование имеет то преимущество, что после выполнения его все четыре компонента можно рассматривать единообразно, а именно, если положить $p_j^0 = ip_j^4$, где p_j^4 вещественно, обычные (рационализованные) знаменатели получают вид

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2 = -(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + m^2). \quad (22.1)$$

Форма (22.1) является отрицательно-определенной, так что все выражение можно проинтегрировать в *евклидовом* 4-пространстве p . После этого преобразования легко рассмотреть интеграл, соответствующий определенной диаграмме Фейнмана, и установить степень его расходимости.

Если число импульсных множителей в числителе *меньше*, чем в знаменателе, то мы получим *сходящийся* результат. В противном случае, если число импульсов в числителе *больше* или *равно* числу импульсов в знаменателе, то можно получить (но не обязательно во всех случаях) *расходящийся* результат. Определим „размерность“ интеграла как разность полного числа импульсов в числителе и полного числа импульсов в знаменателе и обозначим ее через D ; тогда достаточным условием для сходимости является условие $D < 0$, а $D \geq 0$ — условием, при котором может появиться расходимость.

Вначале рассмотрим взаимодействие фермионного и бозонного полей для случая прямой связи. В дальнейшем кратко обсудим и случай связи с производными. Из проведенного нами ранее рассмотрения следует, что для случая прямой связи в каждой „вершине“ произвольной диаграммы встречаются одна бозонная и две фермионные линии. Для описания диаграмм примем следующие обозначения:

- F — число фермионных линий,
- B — число бозонных линий,
- C — число вершин,

¹⁾ См. также его работу [130].

- F_e — число внешних фермионных линий,
 B_e — число внешних бозонных линий,
 F_i — число внутренних фермионных линий,
 B_i — число внутренних бозонных линий.

Задав определенное число и вид внешних линий, можно описать физически наблюдаемый процесс. Задание определенных значений для F_i и B_i указывает, в каком приближении мы рассчитываем процесс; при этом можно произвольно выбрать относительное взаимное расположение внутренних линий.

В случае прямой связи оператор взаимодействия Γ (где Γ равно γ_μ , γ_5 или Λ) не содержит импульса ни одной из участвующих в процессе частиц. Внешние линии также не влияют на возможность появления расходимостей, так как по ним не проводится интегрирование. Следующие факторы, однако, влияют на число импульсов, появляющихся в числителе и знаменателе подинтегрального выражения:

1. Каждая внутренняя фермионная или бозонная линия дает четыре импульса в числитель как вклад элемента интегрирования d^4p . Это дает вклад в величину D , равный $4(F_i + B_i)$.

2. В каждое интегрирование по всему 4-пространству в каждой вершине дает вклад 4-мерная δ -функция. Это эквивалентно включению четырех импульсов в знаменатель. Напомним, однако, что одна из этих δ -функций выражает просто сохранение полного импульса в начальном и конечном состояниях процесса и поэтому не приводит к уменьшению размерности подинтегрального выражения. Итак, вершины дают вклад в величину D , равный $-4(C - 1)$.

3. Каждая внутренняя фермионная линия дает одну степень p в знаменатель, так как соответствующая ей функция распространения имеет вид $(\hat{p} - m)^{-1}$. Это дает вклад в величину D , равный $-F_i$.

4. Каждая внутренняя бозонная линия дает две степени p в знаменатель, так как ей соответствует функция распространения $(p^2 - \mu^2)^{-1}$. Это дает вклад в величину D , равный $-2B_i$. Поэтому D дается выражением

$$D = 3F_i + 2B_i - 4(C - 1). \quad (22.2)$$

Мы можем выразить эту величину через число внешних линий, если учесть, что число вершин связано с числом фермионных и бозонных линий. В частности, так как в каждой вершине сходятся две фермионные линии, то число концов фермионных линий равно удвоенному числу вершин. Поскольку каждая внутренняя фермионная линия имеет два конца, а каждая внешняя — один, то

$$2F_i + F_e = 2C. \quad (22.3)$$

Аналогично в каждой вершине кончается одна бозонная линия, и, следовательно, число концов бозонных линий равно числу вершин, т. е.

$$2B_i + B_e = C. \quad (22.4)$$

Подставляя соотношения (22.3) и (22.4) в (22.2), получаем

$$D = 4 - \frac{3}{2} F_e - B_e. \quad (22.5)$$

Существенным оказывается то, что коэффициент при члене S равен нулю. Это означает, что в любой теории с прямой связью степень расходимости не зависит от числа вершин на диаграмме¹⁾.

В дальнейшем мы рассмотрим важный класс *расходящихся* диаграмм, которые характеризуются тем, что если любую из их внутренних линий разрезать и заменить двумя внешними линиями, то матричный элемент, соответствующий им, будет сходиться²⁾. Такого рода диаграммы мы назовем примитивными расходящимися диаграммами (Дайсон [127]). Они представляют собой базисные радиационные поправки, из которых могут быть получены (с помощью соответствующих вставок) все остальные расходящиеся радиационные поправки. Теперь перечислим основные расходящиеся диаграммы. В связи с этим напомним, что фермионная линия нигде не может закончиться обрывом, поэтому число F_e всегда должно быть четным.

§ 2. Случай, которые были уже рассмотрены

Случай $F_e = 2$, $B_e = 0$.

Простейшая (и только примитивно расходящаяся) диаграмма собственной энергии фермиона приведена на фиг. 60, *a*. Существуют,



Ф и г. 60.

конечно, и другие (непримитивно расходящиеся) диаграммы собственной энергии, содержащие больше одного виртуального бозона; пример такой диаграммы приведен на фиг. 60, *b*. Из формулы (22.5) следует, что $D = 1$, т. е. возможно появление линейной расходимости. Фактически, как было показано в гл. 20, расходимость яв-

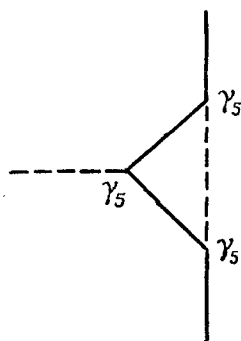
¹⁾ Следует отметить, однако, что условие сходимости или расходимости ($D \geq 0$) является достаточным, но не необходимым. Так, диаграммы низшего порядка (не содержащие радиационных поправок), которые представляют возможный процесс, и все диаграммы высшего порядка (содержащие радиационные поправки и поэтому, возможно, приводящие к расходимостям в зависимости от расположения внутренних линий) имеют одно и то же условие для D .

²⁾ Так как известно, что матричный элемент, соответствующий им, сходится, когда одна из переменных p_j фиксирована и интегрирование проводится по всем остальным переменным; сходимость всего выражения гарантирована при условии, что $D \leq 1$.

ляется только логарифмической и соответствует случаю $D=0$. По-видимому, должно существовать общее правило (которое, однако, не доказано), что если D является нечетным, то фактически появляется только следующая меньшая четная расходимость по сравнению с максимально возможной.

Случай $F_e=0$, $B_e=2$.

Это случай собственной энергии бозона, которую мы уже довольно подробно рассмотрели в гл. 21, § 5 и 6. Из формулы (22.5) мы получаем, что $D=2$. Эта квадратичная расходимость, в самом деле, имеет место в случае мезонов; в случае фотонов, как мы видели, имеет место только логарифмическая расходимость, что является следствием калибровочной инвариантности теории.



Фиг. 61.

Случай $F_e=2$, $B_e=1$.

Диаграмма типа лэмбовского сдвига (фиг. 61) является простейшим примером диаграмм такого рода. В этом случае $D=0$ и в принципе возможна логарифмическая расходимость. Однако, как мы доказали в гл. 21, § 3, в случае электромагнитного поля и нейтрального псевдоскалярного мезонного поля эта расходимость точно сокращается с расходимостями, возникающими в матричных элементах, соответствующих двум диаграммам собственной энергии. В более

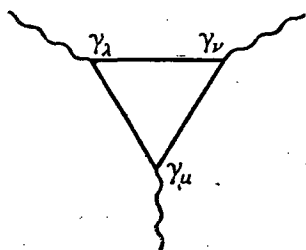
общих случаях эта диаграмма на самом деле приводит к логарифмической расходимости. Более сложные типы вершинных диаграмм будут рассмотрены в гл. 24.

§ 3. Треугольные диаграммы

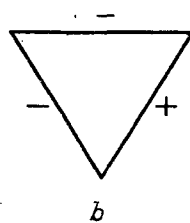
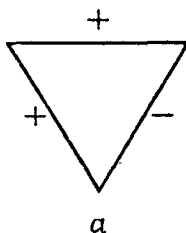
Случай $F_e=0$, $B_e=3$.

В этом случае $D=1$ и мы можем иметь линейную расходимость. Характерная диаграмма такого типа приведена на фиг. 62. По очевидным причинам эти диаграммы часто называют треугольными. В зависимости от конкретной природы фермионного треугольника при взаимодействии с одним или большим числом бозонных полей возможно много различных видов этой диаграммы. Рассмотрим сначала случай *одного* бозонного поля, в частности случай одного электромагнитного поля, т. е. диаграмму на фиг. 62. При вычислении оказывается, что вместо расходящегося интеграла мы получаем нуль. Этот случай можно рассмотреть, обобщая метод, примененный при исследовании внешнего поля (см. гл. 18, § 3). Получающийся результат можно понять следующим образом. Фермионные линии представляют положительные или отрицательные электроны. Пред-

положим, например, что заряды приведены на фиг. 63. Тогда диаграмму на фиг. 63, *b* можно получить из диаграммы на фиг. 63, *a* обращением направления электронных линий, после чего необходимо сложить вклады обеих диаграмм, чтобы получить полный вклад в *S*-матрицу. Итак, если соответствующие матричные элементы обозначить через $M^{(a)}$ и $M^{(b)}$, то нужно взять $M^{(a)} + M^{(b)}$. Однако обратное направление линий заряженного фермиона попросту означает обратный знак заряда. Поэтому матричный элемент $M^{(b)}$ отличается от



Фиг. 62.



Фиг. 63.

матричного элемента $M^{(a)}$ только множителем $(-1)^3 = -1$, следовательно, $M^{(a)} + M^{(b)} = 0$. В общем случае любой замкнутый многоугольник из электронных линий (замкнутая петля), имеющий нечетное число вершин, дает в электродинамике вклад, равный нулю. Эта теорема была впервые сформулирована и доказана Фарри [200].

Если продолжить рассмотрение бозонного поля, взаимодействующего с фермионным, и предположить, что это *псевдоскалярное мезонное* поле, то диаграмма по-прежнему даст нуль, что вытекает из природы оператора взаимодействия γ_5 (Салам [418, 419]). Это можно показать так. Предположим, что три внутренних импульса фермиона есть p_1 , p_2 и p_3 . Тогда матричный элемент пропорционален величине

$$\gamma_5 \frac{1}{\hat{p}_1 - m} \gamma_5 \frac{1}{\hat{p}_2 - m} \gamma_5 \frac{1}{\hat{p}_3 - m}. \tag{22.6}$$

Если проведем рационализацию знаменателя и учтем, что операторы γ_5 и γ_μ , встречающиеся в \hat{p} , антикоммутируют между собой, то числитель выражения (22.6) примет следующий вид:

$$-\gamma_5 (\hat{p}_1 + m) (-\hat{p}_2 + m) (\hat{p}_3 + m). \tag{22.7}$$

Чтобы получить элемент *S*-матрицы, мы должны взять шпур от выражения (22.6), так как импульсы и спины фермионов произвольны. В связи с этим напомним, что

$$\text{Sp}(\gamma_\mu) = \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_5) = \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) = \text{Sp}(\gamma_5) = 0, \tag{22.8}$$

поскольку $\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu = - \sum_{\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\rho \gamma^\sigma$. Аналогично

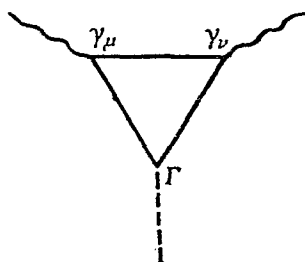
$$\text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = - \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5) = - \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = 0. \quad (22.9)$$

Таким образом, благодаря свойствам операции шпура, действительно, шпур выражения (22.6) равен нулю и треугольные диаграммы не дают вклада в случае псевдоскалярной мезонной теории¹⁾. Непосредственным физическим следствием этого является невозможность распада тяжелого псевдоскалярного мезона на два (или, в общем случае, на четное число) более легких псевдоскалярных мезона.

Теперь рассмотрим бозонное поле, являющееся скалярным мезонным полем. Каждый из трех операторов взаимодействия есть в данном случае $\Gamma = 1$, и выражением, соответствующим (22.7), является

$$(\hat{p}_1 + m)(\hat{p}_2 + m)(\hat{p}_3 + m). \quad (22.10)$$

Если взять шпур этого выражения, то те члены, которые содержат одну матрицу γ или три матрицы γ , дадут нуль; однако будут неравные нулю члены, либо содержащие две матрицы γ , либо вообще



Ф и г. 64.

их не содержащие, так что в итоге мы получаем отличный от нуля результат. Фактически, поскольку величина D нечетная, мы снова получим логарифмическую расходимость, т. е. расходимость порядка $D = 0$, а не максимально возможную расходимость $D = 1$. Введение члена $a\varphi^3$ в лагранжиан, где a — бесконечная величина, позволяет избавиться от этой расходимости.

Допустим теперь, что имеются два различных бозонных поля; например, допустим, что имеются два взаимодействия с фотонами

и одно с мезоном (Штейнбергер [460]), как это показано на фиг. 64. Эта диаграмма описывает физический процесс распада мезона на два фотона (Янг [541], см. также т. II, гл. 27). В этом случае константа связи e встречается только дважды, т. е. четное число раз, и поэтому теорема зарядового сопряжения Фарри неприменима. Кроме того, причина, приводящая к равенству нулю шпуров, больше не действует независимо от того, $\Gamma = 1$ или $\Gamma = \gamma_5$. В частности, в нашем случае матричный элемент пропорционален величине

$$\Gamma(\hat{p}_1 + m) \gamma_\nu (\hat{p}_2 + m) \gamma_\mu (\hat{p}_3 + m). \quad (22.11)$$

¹⁾ Это утверждение может быть доказано в псевдоскалярной теории в общем случае замкнутой петли с нечетным числом вершин, если использовать свойство инвариантности S -матрицы по отношению к пространственным отражениям (см. стр. 223 в работе Салама [418]). Общие правила отбора, которые являются следствием теорем, аналогичных теореме Фарри для процессов с участием нуклонов и антинуклонов, приведены в работах Фукуды, Хайякавы и Миямото [196, 197], Пайса и Йоста [367], Вольфенштейна и Равенхолла [540].

Если $\Gamma = 1$, то отличный от нуля вклад дают члены, содержащие четное число матриц γ . Если же $\Gamma = \gamma_5$, то в дополнение к матрице γ_5 мы имеем больше четырех операторов, включающих γ ; с их помощью можно получить еще одну матрицу γ_5 , что даст $\gamma_5^2 = -1$. Поэтому и в случае псевдоскалярной мезонной теории мы получаем отличный от нуля результат.

Если приходящий мезон на фиг. 64 является скалярным, то корректное использование условия калибровки (Фукуда и Миямото [194, 195], Швингер [441]), аналогичного примененному при рассмотрении поляризации вакуума (см. гл. 21, § 5), показывает, что, хотя $D = 1$, в разложение дает вклад фактически только член, имеющий размерность $D = -1$, и поэтому результат сходится. В случае псевдоскалярного мезонного поля матричный элемент, соответствующий диаграмме на фиг. 64, также является калибровочно инвариантным и сходящимся. Распад нейтрального псевдоскалярного π -мезона наблюдается экспериментально.

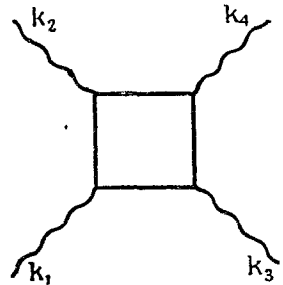
Наконец, рассмотрим случай, когда два бозонных поля являются мезонными полями. В этом случае получается отличный от нуля результат для распада скалярного мезона на два псевдоскалярных мезона.

§ 4. Квадратные диаграммы

Случай $B_e = 4, F_e = 0$.

В этом случае из формулы (22.5) мы получаем $D = 0$. Рассмотрим сначала рассеяние света на свете. Диаграмма Фейнмана для этого процесса приведена на фиг. 65. В результате этого процесса два падающих фотона с импульсами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_3 рассеиваются друг на друге и дают два выходящих фотона с импульсами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_4 . Процесс, представленный на фиг. 65, добавляет к лагранжиану член четвертого порядка по электромагнитному полю. Таким же образом он добавляет к уравнениям электромагнитного поля некоторые члены третьего порядка по полю.

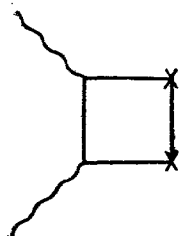
Как это было установлено еще в 1934 г. (Халперн [219]), рождение виртуальных пар в вакууме приводит к нелинейным взаимодействиям между электромагнитными полями. Эйлер (см. работы [149, 150]) и Гейзенберг (см. работу [228]) пытались рассмотреть эту проблему в 1936 г., но вследствие трудности расчетов четвертого порядка в старой теории смогли провести вычисления только в пределе малых энергий фотонов. Поперечное сечение рассеяния двух фотонов с равной и очень малой энергией ($\hbar\omega \ll mc^2$), как показал Эйлер [150], возрастает как шестая степень энергии. Однако последующие вычисления Ахиезера [2] показали, что в предельно релятивистском случае поперечное се-



Фиг. 65.

чение убывает как $(\hbar\omega)^{-2}$. Полностью проблема была решена только в современной квантовой электродинамике Фейнманом (см. дополнение D к статье [169]), Карплусом и Нейманом [264, 265]¹⁾. Они получили, что матричный элемент процесса не содержит логарифмической расходимости, поскольку в действительности вклад дает только член с размерностью $D = -4$ ²⁾, и поэтому матричный элемент процесса быстро сходится.

Когда Гейзенберг рассматривал эту проблему в 1936 г., он высказал предположение, что сходимость квантовой электродинамики может быть получена с помощью введения сильной нелинейности уравнений поля при больших энергиях фотонов, а также, что рассеяние света на свете может наблюдаться на звездах. Однако расчеты Карплуса и Неймана показали, что даже в наиболее благоприятном случае, когда энергия квантов равна $2mc^2$ (или около 1 Мэв), т. е. когда энергии достаточно для рождения реальных пар, поперечное сечение имеет порядок только $3 \cdot 10^{-30} \text{ см}^2$ ³⁾. Этот эффект трудно наблюдать в космических масштабах, поскольку даже в межзвездном пространстве рассеяние излучения на межзвездном водороде (и пыли) много больше рассеяния света на свете.



Фиг. 66.

Предметом экспериментального исследования может быть также другой электромагнитный процесс, для которого $B_e = 4$, $F_e = 0$. Это — рассеяние света на электростатическом поле во втором порядке⁴⁾. Изображая взаимодействие со статическим полем на диаграммах Фейнмана с помощью крестиков, мы можем представить этот процесс так, как показано на фиг. 66. В частности, процесс может наблюдаться в сильном кулоновом поле тяжелого ядра с зарядом Z . Взаимодействие, изображенное крестиком, дает вклад Ze^2 вместо

¹⁾ См. также работу Уорда [506].

²⁾ Это снова обусловлено требованием калибровочной инвариантности теории, согласно которому любой дополнительный член четвертого порядка к лагранжиану электромагнитного поля должен содержать \mathcal{E}^4 , \mathcal{H}^4 и т. п., а не A^4 . Поскольку напряженность электрического поля \mathcal{E} пропорциональна kA , то матричный элемент, соответствующий диаграмме на фиг. 65, должен содержать четвертую степень k , или, точнее говоря, произведение четырех определенных компонент волновых векторов от k_1 до k_4 . Как мы видели при рассмотрении поляризации вакуума, это уменьшает высшую степень *электронного импульса* в подинтегральном выражении на четыре единицы.

³⁾ Порядок величины поперечного сечения можно, очевидно, получить, если учесть, что есть четыре взаимодействия e , каждое из которых дает вклад $e/\sqrt{\hbar c}$ в матричный элемент. Это означает, что поперечное сечение должно быть порядка $(e^2/\hbar c)^4 (\hbar/mc)^2 \sim 4 \cdot 10^{-30} \text{ см}^2$.

⁴⁾ В первом порядке рассеяние на статическом поле дает вклад, равный нулю, так как этот порядок описывается треугольной диаграммой, к которой применима теорема Фарри; фактически теорема Фарри была получена именно для этого случая.

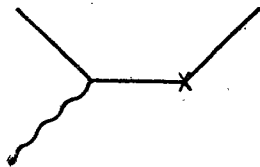
вклада квантового взаимодействия e . Это дает в поперечное сечение дополнительный множитель $(Z^2 e^2 / \hbar c)^2$ по сравнению с тем, что получается для сечения рассеяния света на свете. Тогда для Z порядка 100 поперечное сечение будет около $0,5 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-30} = 1,5 \cdot 10^{-26}$ см², или 15 мбарн.

Этот тип рассеяния был впервые предложен в 1933 г. Дельбрюком [99] и поэтому часто называется „рассеянием Дельбрюка“. Оно было рассчитано Ахиезером и Померанчуком [3], Кеммером и Людвигом (см. работы [271, 272]) для некоторых предельных случаев еще до появления современной квантовой электродинамики. Рассеяние Дельбрюка для простого случая рассеяния фотона вперед, когда его импульс практически не меняется, было вычислено Рорлихом и Глюкштерном [406], причем они использовали как само приближение Фейнмана, так и метод аналитического продолжения.

Метод аналитического продолжения был использован Толлом¹⁾, который также вычислил поперечное сечение рассеяния вперед, и Рорлихом и Глюкштерном [406]²⁾; этот метод состоит в следующем.

Предположим, что известно полное поперечное сечение процесса реального образования пар в частном случае кулонова поля. Диаграмма этого процесса приведена на фиг. 67. Тогда, если такой процесс поглощения имеет место, то должен происходить также дисперсионный процесс, который является рассеянием Дельбрюка. С помощью одной из оптических теорем (см., например, работу Лакса [300]) можно установить соотношение между связанной с поглощением (мнимой) частью амплитуды рассеяния Дельбрюка вперед и полным сечением процесса поглощения, представленного на фиг. 67. Аналитические свойства матрицы рассеяния используются затем для нахождения дисперсионной (вещественной) части этой амплитуды; получаемые результаты имеют вид, аналогичный обычным дисперсионным соотношениям³⁾. Было найдено, что дифференциальное поперечное сечение рассеяния Дельбрюка вперед продолжает непрерывно возрастать с ростом энергии γ -квантов. Это один из небольшого числа процессов, для которых имеет место такого рода непрерывный рост.

Менее точные расчеты, чем расчеты Рорлиха и Глюкштерна, были выполнены Бете и Рорлихом [36] с целью получения углового



Фиг. 67.

¹⁾ T o l l J. S., Ph. dissertation, Princeton University, 1952.

²⁾ См. также работы Йоста, Люттингера и Слотника [253], Гелл-Манна, Гольдбергера и Тирринга [206].

³⁾ Связь между причинностью и дисперсионными соотношениями рассматривалась в работе Гелл-Манна и др. [203], где даны также ссылки на более ранние работы.

сечения рассеяния Дельбрюка для малых углов порядка $\theta \approx mc^2/\hbar\omega$ и меньше. К сожалению, до сих пор не проведены расчеты рассеяния Дельбрюка для углов и энергий, представляющих экспериментальный интерес, а именно для больших углов и энергий в несколько $M\text{эв}$.

Последние экспериментальные исследования (Вильсон [539]) показывают, что вероятность существования рассеяния Дельбрюка несколько больше 50%. Экспериментальные проверки существования такого рода процессов с замкнутыми петлями все еще остаются желательными, но уже не столь крайне необходимыми, как раньше, поскольку, как уже указывалось, вклад эффектов вакуумной поляризации в лэмбовский сдвиг, равный — 27 $мггц$, является реальным и наблюдается на опыте.

До сих пор мы рассматривали в качестве бозонного поля только электромагнитное поле. Можно исследовать также рассеяние мезонов на мезонах, учитывая диаграммы рассмотренного типа (Салам [418, 419]). В этом случае калибровочная инвариантность не может быть применена для уменьшения порядка расходимости, и фактически как в случае скалярных, так и в случае псевдоскалярных мезонов получается расходящийся результат. Это первый (и единственный) процесс в псевдоскалярной теории, который приводит к расходимости, не устраняющейся перенормировкой массы или константы связи. В духе развиваемой теории необходимо устранить расходимость в рассеянии мезона на мезоне с помощью подходящей перенормировки. Для этой цели в исходный лагранжиан нужно ввести член $\lambda\varphi^4$ с соответственно выбранным (бесконечным) коэффициентом λ .

Член с φ^4 не является полностью инородным в теории. При взаимодействии скалярных или псевдоскалярных мезонов с электромагнитным полем мы также встречаемся с членами типа $\varphi^\dagger\varphi A_\mu A^\mu$ в лагранжиане взаимодействия, т. е. с членами четвертого порядка по бозонным волновым функциям. Конечно, то, что коэффициент λ должен быть бесконечным для компенсации бесконечности, возникающей в матричном элементе четвертого порядка рассеяния мезона на мезоне, представляет нечто новое. Неизвестно, может ли величина λ , кроме бесконечной части, иметь также и конечную часть, т. е. может ли комбинация $\lambda\varphi^4$ и матричного элемента, соответствующего диаграмме на фиг. 65, давать также и *конечные эффекты* в пределе малых энергий мезонов.

Диаграмма рассеяния мезона на мезоне может представлять собой часть других, более сложных диаграмм. Как показал Салам [418, 419], это не ведет к каким-либо внутренним трудностям теории.

На этом мы заканчиваем рассмотрение диаграмм, которые ведут к расходимостям при взаимодействии фермионов и бозонов. Большинство из этих расходимостей может быть устранено перенормировкой массы и константы связи. Конкретнее говоря, мы имеем:

В электродинамике перенормировка массы и константы связи устраняет все расходимости.

В псевдоскалярной мезонной теории перенормировка массы и константы связи устраняет все расходимости, кроме той, которая обусловлена квадратной диаграммой и для устранения которой необходимо вводить в лагранжиан член $\lambda\varphi^4$.

В скалярной мезонной теории как треугольные, так и квадратные диаграммы приводят к расходимостям, которые не могут быть устранены перенормировкой массы и константы связи; для устранения этих расходимостей необходимо вводить в лагранжиан члены $a\varphi^3$ и $b\varphi^4$.

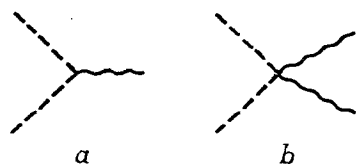
В случае теории нескольких мезонных полей со спином 0 члены, которые должны быть введены в лагранжиан, имеют тот же вид, как и в скалярной и псевдоскалярной теории.

Из этого заключения следует, что, с точки зрения теории поля, теория псевдоскалярного мезонного поля несколько проще, чем теория скалярного мезонного поля.

ПЕРЕНОРМИРУЕМЫЕ И НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫЕ ТЕОРИИ

§ 1. Взаимодействие бозонных полей

Теперь обратимся к рассмотрению расходящихся диаграмм для случая взаимодействия двух бозонных полей. Мы по-прежнему будем рассматривать только прямую связь. В частности, рассмотрим взаимодействие заряженных бозонов со спином 0 (т. е. заряженных π -мезонов) с электромагнитным полем (т. е. с фотонами). Пусть C — число



Фиг. 68.

вершин, P — число линий бозонных частиц (мезонов), Q — число фотонных линий на соответствующих диаграммах и индексы i и e снова служат для обозначения внутренних и внешних линий соответственно. Выражение для величины D (Рорлих [405]) мы можем получить с помощью метода, использованного в гл. 22. Прежде чем

приступить к этому, сделаем одно ограничение: мы будем рассматривать только взаимодействие вида $p^\mu A_\mu$ (где p^μ обозначает импульс бозонной частицы), а не взаимодействие $A^\mu A_\mu$. Это говорит о том, что будут рассматриваться только диаграммы с вершинами, представленными на фиг. 68, *a*, а не диаграммы с вершинами, представленными на фиг. 68, *b*. При этом ограничении импульсы вводятся в подынтегральное выражение следующим образом:

1. Каждая внутренняя линия частицы или кванта дает вклад d^4p в числитель. Это дает полный вклад в величину D , равный $+4(P_i + Q_i)$.

2. Каждой вершине соответствует δ^4 -функция. Это эквивалентно введению четырех импульсов в знаменатель. Одна δ^4 -функция выражает закон сохранения полного импульса. Таким образом, вклад вершин в величину D равен $-4(C-1)$. Кроме того, в каждой вершине имеет место взаимодействие. В нашем случае мы допускаем только взаимодействие $p^\mu A_\mu$. Тогда это дает дополнительный вклад в величину D , равный $+C$.

3. Каждая внутренняя линия частицы дает в знаменатель вклад второй степени по p , так как функция распространения ее имеет вид $(p^2 - \mu^2)^{-1}$. Это дает вклад в величину D , равный $-2P_i$.

4. Каждая внутренняя фотонная линия дает в знаменатель вклад второй степени по p , так как функция распространения фотона

имеет вид $1/p^2$. Это дает вклад в величину D , равный $-2Q_i$. Следовательно, для D получается следующее выражение:

$$D = 2P_i + 2Q_i - 3C + 4. \quad (23.1)$$

Мы можем выразить эту величину через число внешних линий с помощью соотношений

$$2Q_i + Q_e = C, \quad (23.2)$$

$$2P_i + P_e = 2C. \quad (23.3)$$

Подставляя соотношения (23.2) и (23.3) в (23.1), получаем

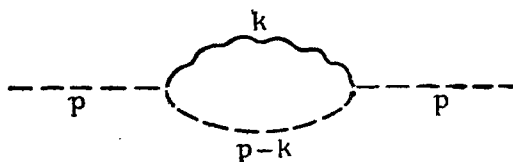
$$D = 4 - P_e - Q_e. \quad (23.4)$$

Так же, как и в случае взаимодействия между бозоном и фермионом, коэффициент при величине C оказывается равным нулю и степень расходимости не зависит от числа вершин.

Теперь мы перечислим все те диаграммы, которые приводят к расходимостям. При этом мы должны учесть, что линия частицы нигде не может закончиться обрывом (вследствие сохранения заряда), так что величина P_e всегда должна быть четной.

Случай $P_e = 2, Q_e = 0$.

На фиг. 69 приведена простейшая диаграмма для этого случая. Величину $D = 2$ можно получить из формулы (23.4). Эта квадратичная расходимость собственной энергии бозона со спином 0 фактически имеет место. Напомним, что для фермиона собственная



Фиг. 69.

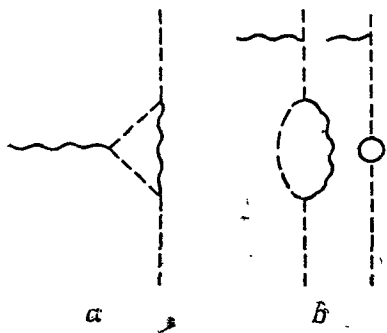
энергия, обусловленная взаимодействием с фотонами, расходится логарифмически, тогда как в классической теории собственная энергия электрона расходится линейно. Это ясно указывает на то, что мы не можем доверять любой классической оценке собственной энергии как бозона, так и фермиона.

Случай $P_e = 2, Q_e = 1$.

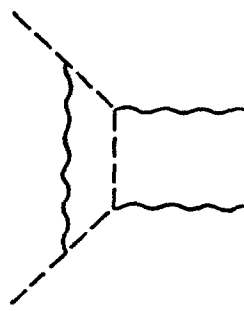
Это — лэмбовский сдвиг для бозона. Как и в случае фермиона, имеются три диаграммы этого процесса, они приведены на фиг. 70, *a* — *c*. Матричный элемент каждой диаграммы в отдельности расходится с $D = 1$, т. е. имеет место линейная расходимость, но сумма матричных элементов, соответствующих всем трем диаграммам, конечна.

Случай $P_e = 2, Q_e = 2$.

Как показано на фиг. 71, этот случай соответствует радиационным поправкам к формулам комптоновского рассеяния, т. е. рассеяния фотона на бозоне со спином 0. Соотношение (23.4) дает $D = 0$.



Фиг. 70.



Фиг. 71.

Однако фактически вследствие требования калибровочной инвариантности теории только следующий член с $D = -2$ имеет отличный от нуля коэффициент. Следовательно, мы получаем сходящийся результат.

Случай $P_e = 0, Q_e = 2$.

Это — новый вклад в поляризацию вакуума, обусловленный рождением пар виртуальных заряженных мезонов (фиг. 72). В этом случае $D = 2$. Однако вследствие требования калибровочной инвариантности теории эта квадратичная расходимость отсутствует.

В разложении поляризационного тензора остается следующий член

с $D = 0$, т. е. логарифмически расходящийся член и высшие конечные члены, имеющие физическое значение. Перед ними стоят численные коэффициенты, отличные от тех, которые стоят перед членами, обусловленными виртуальными электронными парами (Швингер [441]). Вклад конечных членов по-прежнему обратно пропорционален квадрату массы виртуальной частицы. В гл. 21, § 5, мы уже упоминали, что поляризация вакуума, обусловленная виртуальными электронными парами, дает вклад -27 мггц в лэмбовский сдвиг. Вклад в лэмбовский сдвиг, обусловленный мезонной поляризацией вакуума, меньше на множитель $(275)^2$ и равен только $0,3 \text{ кггц}$ и поэтому не наблюдаем.



Фиг. 72.

Поскольку теоретическая и экспериментальная величины лэмбовского сдвига теперь согласуются в пределах $0,5 \text{ мггц}$, то можно

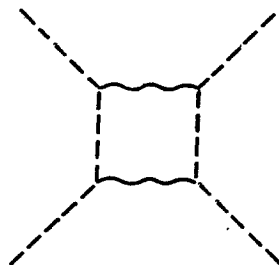
заклучить, что не существует никаких заряженных частиц, которые могли бы рождаться парами и имели бы массу, меньшую семи электронных масс.

Случай $P_e = 0$, $Q_e = 4$.

Это — рассеяние света на свете; квадрат из внутренних линий на соответствующей диаграмме будет образован линиями бозонов со спином 0. Поскольку $D = 0$, то эта диаграмма приводит к сходящемуся результату, так как из калибровочной инвариантности теории вытекает, что вклад дает только следующий член с $D = -4$, а также члены высших порядков.

Случай $P_e = 4$, $Q_e = 0$.

Этот случай соответствует рассеянию двух бозонных частиц друг на друге вследствие электромагнитного взаимодействия между ними; диаграмма процесса приведена на фиг. 73. Поскольку $D = 0$ и, так как условие калибровочной инвариантности не приводит к уменьшению степени расходимости, фактически имеется логарифмическая расходимость. Так же как и в случае рассеяния мезона на мезоне, обусловленном виртуальными нуклонными парами (см. гл. 22), мы можем избавиться от этой расходимости, вводя в исходный лагранжиан член $\lambda\phi^4$, где коэффициент λ бесконечен.



Фиг. 73.

§ 2. Двухфотонное взаимодействие

Вернемся теперь к диаграмме на фиг. 68, *b*, на которой два фотона одновременно взаимодействуют в вершине. С таким положением мы уже встречались на фиг. 50, *b*. Размерность D подинтегрального выражения может быть получена обычным путем. В этом случае мы рассматриваем вклад в подинтегральное выражение, обусловленный взаимодействием $A_\mu A^\mu$ в каждой вершине, и таким образом имеем

$$D = -4C + 4 + 2P_i + 2Q_i. \quad (23.5)$$

Далее,

$$2P_i + P_e = 2C \quad (23.6)$$

и

$$2Q_i + Q_e = 2C. \quad (23.7)$$

Следовательно, подставляя соотношения (23.6) и (23.7) в формулу (23.5), получаем

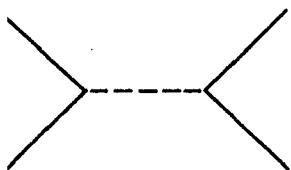
$$D = 4 - P_e - Q_e. \quad (23.8)$$

Так как формулы (23.8) и (23.4) идентичны, то двухфотонное взаимодействие не приводит к дополнительным осложнениям. Диаграммы,

на которых один конец внутренней фотонной линии попадает в вершину со взаимодействием однофотонного типа (см. фиг. 68, *a*), а второй конец — в вершину со взаимодействием двухфотонного типа (см. фиг. 68, *b*), не приводят к внутренним трудностям.

§ 3. Связь с производными

Теперь рассмотрим связь с производными и сравним этот случай со случаем прямой связи для взаимодействия фермиона и бозона. В гл. 11 было показано, что для связи с производными в случае скалярной или псевдоскалярной теории взаимодействия в вершине



Фиг. 74.

определяется величиной $\Gamma \gamma_p \partial / \partial x_p$, где производная действует на мезонный оператор. Это приводит к тому, что в подинтегральное выражение вводится дополнительный импульс $\partial / \partial x_p \rightarrow k^p$ в каждой вершине и, следовательно, член $+C$ — в величину D . Итак, в отличие от всех рассмотренных до этого параграфов теорий величина D *зависит* от величины C и имеется бесконечное число *типов*

расходящихся диаграмм. Таким образом, если мы попытаемся применить принципы перенормировки к рассматриваемому взаимодействию, то, чтобы сделать теорию конечной, потребуется бесконечное число перенормировочных констант. Поскольку в современной формулировке теории перенормировки требуется один эксперимент для определения каждой перенормированной константы, то, чтобы сделать теорию имеющей смысл, необходимо проделать бесконечное число таких экспериментов, а это невозможно и не имеет физического смысла.

Таким образом, эта теория не перенормируема. В заблуждение вводит то, что в низшем порядке в случае связи с производными мы получаем конечный результат. Например, матричный элемент, соответствующий диаграмме на фиг. 74, для случая связи $\gamma_5 \gamma_p \partial / \partial x_p$ не только конечен, но фактически точно совпадает с матричным элементом в случае прямой связи γ_5 . Примерно до 1947 г. все вычисления проводились только в этом порядке, поскольку вообще не существовало методов обращения с расходимостями. Поэтому в ранних вычислениях, казалось, не было различия между трудностями теорий с прямой связью и со связью с производными. Фактически в случае псевдоскалярной теории связь с производными предпочтительней, потому что оператор $\gamma_5 \gamma_p$ имеет большую величину в нерелятивистском пределе (см. гл. 4, § 2).

Мы уверены, что невозможность перенормировки теории является достаточной причиной для того, чтобы отказаться в *настоящее время* от всех типов связи с производными. С современной методикой это необходимо. Конечно, возможно, что с помощью некоторой

искусной переформулировки теории удастся сделать перенормируемыми некоторые типы теорий связи с производными. Но если это возможно, то структура теории должна быть фундаментально изменена, и тогда результаты, получаемые в низшем порядке в этой переформулированной теории, будут полностью отличаться от тех результатов, которые получаются теперь в теории связи с производными без переформулировки. Каким бы ни было окончательное мнение о сходимости теории со связью с производными, результаты, получаемые в ней с помощью современных методов в низшем порядке, не будут законными ни в одном случае.

Более того, мы можем с уверенностью рассматривать как благоприятное обстоятельство тот факт, что некоторые теории, которые на первый взгляд кажутся приемлемыми, не выдерживают проверки на перенормируемость. Когда была открыта релятивистская электродинамика, то оказалось, что только уравнения Максвелла совместны с требованием релятивистской инвариантности и микроскопической причинности и что нет других уравнений поля такого типа, совместных с этими требованиями; это рассматривалось как большой триумф теории. Этот же принцип позволил нам в гл. 10, в сущности, однозначно найти лагранжианы свободных полей. Существование требований, которые позволяют выбрать очень небольшое число возможных лагранжианов свободного поля, всегда рассматривалось как очень ценное качество теории.

Требований микроскопической причинности и релятивистской инвариантности недостаточно для существенного ограничения числа возможных лагранжианов взаимодействия, в чем мы убедились в гл. 11. Поэтому можно ожидать, что должен существовать некоторый принцип, ограничивающий число возможных выражений для лагранжиана взаимодействия. Мы уверены, что в настоящее время, пока не созданы сходящиеся релятивистские теории поля, такого рода принципом является требование перенормируемости теории. В самом деле, следует ожидать, что правильное заключение о приемлемости взаимодействия может быть сделано только в том случае, когда результаты этого взаимодействия исследуются во всех приближениях, а это как раз точно то, что пытаются сделать в перенормируемой теории.

Вероятно, теория перенормировок не является окончательным решением проблемы расходимостей, которые присущи релятивистским теориям квантованных локальных полей. Мы надеемся, что будущая правильная теория не только не будет содержать расходимостей, но, кроме того, даст спектр масс элементарных частиц, величину константы связи, а также величину постоянной тонкой структуры¹⁾

¹⁾ В начале развития теории перенормировки существовала надежда, что величину постоянной тонкой структуры можно будет получить, исходя из следующего требования: расходимости, встречающиеся в последовательных порядках теории возмущений, должны сокращаться друг с другом. Эта идея была предложена Паули. Однако было показано (Йост и Люттингер [252]),

(величины, которые в настоящее время берутся из эксперимента). Несомненно, что многие стороны теории перенормировок будут включены (или будут присутствовать) в будущую правильную теорию. Точно так же вполне вероятно, что в будущей теории вопросы взаимного отношения и одновременного сосуществования всех „элементарных“ частиц (таких, как электроны, нуклоны и т. д.) будут являться существенной частью теории. Существует надежда, что с помощью изучения современной формы перенормированной квантовой электродинамики и перенормируемых мезонных теорий можно выяснить, без чего в современных теориях можно обойтись, что именно является следствием таких весьма общих принципов, как релятивистская инвариантность и причинность, и что, следовательно, будет присутствовать в будущей теории. Может даже случиться так, что такого рода изучение позволит получить другую формулировку теории, в которой мы будем иметь дело только с конечными величинами и которая прольет свет на вопросы, перечисленные выше.

Возражения против связи с производными, вытекающие из перенормируемости, имеются не только в случае псевдоскалярной мезонной теории с псевдовекторной связью и скалярной мезонной теории с векторной связью, но и для тензорной связи векторного поля. Мы напомним читателю соотношение (11.9), где было указано, что взаимодействие вида $\bar{\psi}_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$ может быть использовано для описания дополнительного взаимодействия дираковской частицы (электрона или протона) с электромагнитным полем. Указанный тип связи с производными также расходится.

Это может показаться весьма удивительным, если учесть, что электрон, и в особенности протон, имеют магнитный момент, отличающийся от даваемого теорией Дирака. В любом медленно меняющемся магнитном поле взаимодействие с дополнительным магнитным моментом может быть описано на практике с помощью члена $\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Однако этот член не может рассматриваться как часть фундаментального взаимодействия между электромагнитным полем и электроном или протоном, поскольку это привело бы к неперенормируемым расходимостям. Наоборот, дополнительный момент возникает из радиационных поправок, получающихся, если исходить из простого фундаментального дираковского взаимодействия $\gamma_{\mu}A^{\mu}$. В случае электрона (Швингер [436, 440], Люттингер [312]) мы видели, что эти радиационные поправки в самом деле дают наблюдаемый дополнительный магнитный момент (см. гл. 21, § 4); в случае протона

что такая компенсация не имеет места. Так, вклад в поляризацию вакуума имеет расходимости *одного и того же знака* во втором и четвертом порядках. Такого же рода идея, рассматривающая конечность и сходимость вкладов в собственную энергию, была сформулирована Рака [400], но опровергнута Франком [188] с помощью явного вычисления вклада четвертого порядка в собственную энергию фермиона.

(Люттингер [313, 314], Кейс [78, 79], Ривьер [403], Боровиц и Кон [61]) должно быть верно то же самое, если принять во внимание радиационные поправки, связанные с виртуальным испусканием мезонов (см. также т. II, гл. 46). Поскольку дополнительный магнитный момент не является внутренне присущим частице, а обуславливается радиационными поправками, можно ожидать, что он зависит от частоты внешнего магнитного поля, и, вероятно, эта зависимость от частоты может быть наблюдаема (Томпсон [482]). Было бы, конечно, ошибочным рассматривать взаимодействие

$$\Delta\mu\sigma_{xy}F_{xy}$$

($\Delta\mu$ — дополнительный магнитный момент) как часть взаимодействия электрона (или протона) с электромагнитным полем и рассчитывать, например, вклад этого взаимодействия в формулы рассеяния электронов или нуклонов большой энергии на электромагнитном поле. Такие расчеты дали бы очень большое поперечное сечение, которое должно было бы рассматриваться как ложное.

§ 4. Высшие спины

Спины, более высокие, чем $1/2$, дают бóльшие степени импульсов в подинтегральное выражение. Обычно это обусловлено появлением производных в лагранжиане взаимодействия. Все они ведут к перенормируемым расходимостям в теории, за исключением только нейтральных мезонов со спином 1. В последнем случае теория полностью аналогична электродинамике (отличие заключается в конечности массы мезона, что исключает калибровочную инвариантность). Неизвестно, однако, существуют ли такие нейтральные мезоны со спином 1. В случае взаимодействия с нуклонами нейтральных мезонов со спином, бóльшим 1, мы получаем расходимости.

Здесь мы исключили из рассмотрения заряженные мезоны со спином 1, потому что член взаимодействия их с электромагнитным полем содержит дополнительные производные, и поэтому теория становится перенормируемой. По аналогичным причинам теория взаимодействия заряженных мезонов со спином 1 с нуклонами также является перенормируемой. В этом случае трудности связаны с тем, что источник поля заряженных мезонов изменяется, когда излучается заряженный мезон; протон может испустить заряженный мезон, но после этого процесс не может повториться. Исключением из этого общего правила является, по-видимому, смешанная теория Бете и Бирда [23], в которой как псевдоскалярные, так и псевдовекторные мезоны связаны с нуклоном с помощью псевдовекторной связи. При такой формулировке теории, которая развита в этой статье, расходимости не возникают. Однако общее исследование до сих пор не проведено. Во всяком случае, поскольку взаимодействие заряженных мезонов со спином 1 с электромагнитным полем является непере-

нормируемым, смешанную теорию Бете и Бирда не следует рассматривать серьезно.

В этой книге мы не будем рассматривать никаких частиц со спином 1, или заряженных частиц со спином 1. Хотя лагранжиан для таких случаев и может быть выписан, вычисление взаимодействий ведет к принципиальным трудностям. Поскольку нам неизвестны способы, с помощью которых можно было бы обойти трудности с расходимостями в этих перенормируемых теориях и которые не нарушали бы микроскопической причинности, мы не будем рассматривать такие теории.

§ 5. Взаимодействие β -распада

Методы, предложенные Ферми и Юкава для расчета взаимодействия между нуклонами и лептонами (общее наименование β -частиц и нейтрино), были уже рассмотрены в гл. 11. Обозначим лептоны на диаграммах Фейнмана с помощью пунктирных линий. Тогда взаимодействие Ферми будет представляться диаграммой, изображенной на фиг. 75. Определим размерность D подынтегрального выражения с помощью метода, который неоднократно применялся. В частности,

$$D = -4C + 4 + 3P_i + 3L_i, \quad (23.9)$$

где L — означает число лептонных линий. Кроме того,

$$2P_i + P_e = 2C \quad (23.10)$$

и

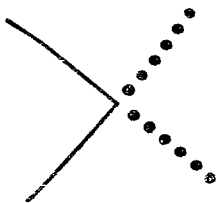
$$2L_i + L_e = 2C. \quad (23.11)$$

Тогда, подставляя соотношения (23.10) и (23.11) в (23.9), получаем

$$D = 2C + 4 - \frac{3}{2}P_e - \frac{3}{2}L_e. \quad (23.12)$$

Итак, чем больше вершин, тем больше D , и, следовательно, теория Ферми является перенормируемой. Возможно, конечно, что взаимодействие Ферми не имеет места при очень больших энергиях и что следует проводить обрезание при энергиях, сравнимых с массой нуклона. Поскольку явление β -распада происходит при малых энергиях, обрезание не делает незаконным рассмотрение его с помощью взаимодействия Ферми. Это просто означает, что, когда энергия сравнима с массой нуклона, явление становится более сложным и не описывается больше взаимодействием Ферми. Если интегралы по импульсам лептонов обрезать на энергии, равной массе нуклона, то взаимодействие, представляемое диаграммой на фиг. 75, очень слабо.

Существует и другая возможность: β -распад может являться двухступенчатым процессом, как его впервые рассматривал Юкава.



Фиг. 75.

Вначале нуклон излучает бозон

$$N \rightarrow N' + B, \quad (23.13)$$

который затем распадается на два лептона

$$B \rightarrow e + \nu, \quad (23.14)$$

где e — электрон, ν — нейтрино. Известно, что B не может являться π -мезоном, так как последний не распадается на электрон и нейтрино (см. т. II, гл. 27). Однако некоторые типы K -мезонов (частицы с массой около 1000), по-видимому, распадаются на электроны и другие частицы (см. т. II, гл. 51) и, может быть, являются B -частицами, постулированными в теории Юкавы.

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

Мы теперь покажем, что с помощью перенормировки массы и заряда действительно можно устранить все ультрафиолетовые расходимости в разложении S -матрицы в квантовой электродинамике.

В гл. 22 мы видели, что интеграл, соответствующий определенной диаграмме, может расходиться только в случае, если

$$\frac{3}{2}F_e + B_e < 5,$$

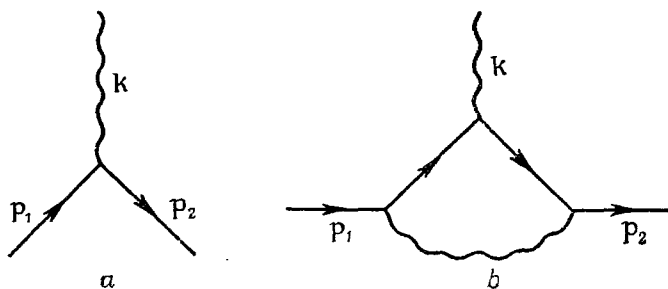
где F_e и B_e — число внешних фермионных и бозонных линий, соответственно. Из приведенного неравенства следует, что существует конечное число типов диаграмм, которые могут вносить расходимости в теорию. Причиной этого является то, что степень расходимости интегралов, соответствующих этим диаграммам, не зависит от порядка диаграмм. Перенормировка состоит в том, чтобы с помощью вычитательной методики устранить бесконечности, а также в теоретическом оправдании такой методики. Мы будем излагать здесь методы перенормировки квантовой электродинамики, следуя близко двум статьям Дайсона [126, 127]. Общее доказательство перенормируемости дадим согласно Уорду [508—509].

§ 1. Определения

Вначале определим понятия связной, приводимой и неприводимой диаграмм, а также вершинной части и части собственной энергии.

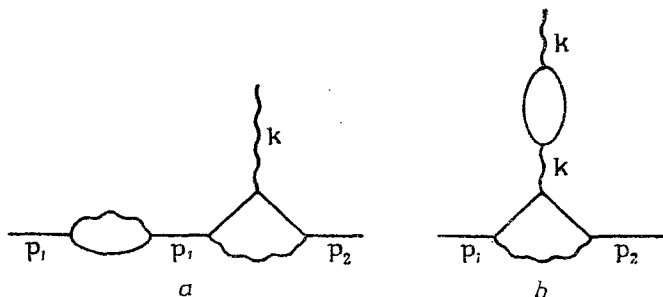
Диаграмма называется *связной* (connected), если любая ее часть связана с остальной частью диаграммы по меньшей мере двумя линиями. *Вершинная часть* определяется как связная часть (состоящая только из вершин и внутренних линий), соединенная с остальной частью диаграммы двумя фермионными и одной бозонной линиями. На фиг. 76, *a* приведена простейшая вершинная часть. Имеются также вершинные части V высших порядков (см., например, фиг. 76, *b*), которыми можно заменить любую из вершин в диаграмме G , причем модифицированная таким образом диаграмма G' будет иметь определенный физический смысл. Матричный элемент, соответствующий диаграмме G' , можно получить из матричного элемента, соответствующего диаграмме G , заменой оператора γ_p для данной рассматриваемой вершины на оператор

$\Delta_{\mp}(V, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, который зависит только от структуры вершинной части V и от импульсов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 двух фермионных линий, связывающих вершинную часть V с остальной частью диаграммы [см. фиг. 76 и формулу (21.12)].



Фиг. 76.

Аналогично *частью собственной энергии* на диаграмме G называется связанная часть (состоящая только из вершин и внутренних линий), которую можно вставить в середину одиночной фотонной или электронной линии диаграммы G так, чтобы модифицированная диаграмма была совместна с правилами построения диаграмм Фейнмана, т. е. в каждой вершине должен быть точно представлен



Фиг. 77.

оператор взаимодействия \mathcal{H}_I . На фиг. 55, a и b и на фиг. 60, a и b приведена часть собственной энергии электрона, а на фиг. 78, b — простейшая часть собственной энергии фотона. На фиг. 77, a часть собственной энергии электрона W вставлена в линию с импульсом \mathbf{p}_1 (см. диаграмму на фиг. 76, b), а на фиг. 77, b часть собственной энергии фотона вставлена в фотонную линию с импульсом \mathbf{k} (см. диаграмму на фиг. 76, b). Эти линии с импульсами \mathbf{p}_1 и \mathbf{k} могут быть как внешними, так и внутренними по отношению ко всей диаграмме в целом. В частности, часть собственной

энергии электрона W может состоять только из одной точки, соответствуя члену $-\delta m \bar{\psi}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})$ в гамильтониане взаимодействия $\mathcal{H}_I(\mathbf{x})$.

Определим, следуя Дайсону, импульсные фурье-образы операторов ψ и A следующим образом:

$$\psi(\mathbf{x}) = \int e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \psi(\mathbf{p}) d^4p, \quad (24.1)$$

$$A_{\mu}(\mathbf{x}) = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} A_{\mu}(\mathbf{k}) d^4k \quad (24.2)$$

и аналогично во всей этой главе определим $S_F(\mathbf{p})$ и $D_F(\mathbf{k})$ как фурье-образ функций $S_F(\mathbf{x})$ и $D_F(\mathbf{x})$ соответственно. В явном виде

$$D_F(\mathbf{k}) = \frac{+i}{2\pi} \frac{1}{k^2}; \quad S_F(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\hat{p} - m}. \quad (24.3)$$

Если диаграмму G , модифицированную вследствие любой из указанных выше вставок, обозначить теперь через G' , то с помощью выведенных нами ранее правил для выписывания матричного элемента можно найти, что матричный элемент, соответствующий диаграмме G' , может быть получен из матричного элемента, соответствующего диаграмме G , если сделать следующие изменения:

а) для внешней электронной линии с импульсом \mathbf{p}_1

$$\psi(\mathbf{p}_1) \rightarrow S_F(\mathbf{p}_1) [\Sigma(W, \mathbf{p}_1) - 2\pi i \delta m] \psi(\mathbf{p}_1), \quad (24.4)$$

$$\bar{\psi}(\mathbf{p}_1) \rightarrow \bar{\psi}(\mathbf{p}_1) [\Sigma(W, \mathbf{p}_1) - 2\pi i \delta m] S_F(\mathbf{p}_1); \quad (24.5)$$

б) для внутренней электронной линии с импульсом \mathbf{p}_1

$$S_F(\mathbf{p}_1) \rightarrow S_F(\mathbf{p}_1) [\Sigma(W, \mathbf{p}_1) - 2\pi i \delta m] S_F(\mathbf{p}_1); \quad (24.6)$$

в) для внешней фотонной линии с импульсом \mathbf{k}

$$A_{\mu}(\mathbf{k}) \rightarrow A_{\mu}(\mathbf{k}) \Pi(W', \mathbf{k}) D_F(\mathbf{k}); \quad (24.7)$$

г) для внутренней фотонной линии с импульсом \mathbf{k}

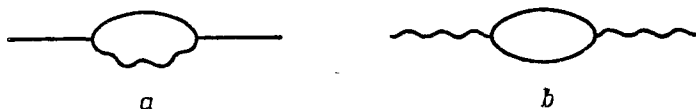
$$D_F(\mathbf{k}) \rightarrow D_F(\mathbf{k}) \Pi(W', \mathbf{k}) D_F(\mathbf{k}); \quad (24.8)$$

д) вершинный оператор γ_{μ} заменим на

$$\Delta_{\mu}(V, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2). \quad (24.9)$$

Здесь операторы Σ (или Π) зависят только от структуры диаграмм W (или W') и от импульсов \mathbf{p}_1 (или \mathbf{k}), но не от остальной части диаграммы. В пунктах „а“ и „б“ добавлен член $-2\pi i \delta m$, который представляет вклад от члена $-\delta m \bar{\psi} \psi$, согласно предыдущему рассмотрению в гл. 21. Для оператора Π собственной энергии фотона не нужно вводить такой контрчлен, поскольку собственная энергия фотона равна нулю вследствие требования калибровочной инвариантности теории. [Однако для мезонов член перенормировки

массы мезона является необходимым (см. гл. 21, § 6).] Аналогично вершинная часть $\Delta_p(V, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ зависит только от структуры диаграммы V и от импульсов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 , соответствующих двум связанным с ней фермионным линиям. Отметим, что любой из операторов Δ_p , Σ и Π может быть вычислен независимо от остальной части диаграммы, и полученный результат будет иметь общий характер. Это может быть использовано в различных приложениях.



Фиг. 78.

Если из диаграммы G исключить все части собственной энергии, а также вершинные части¹⁾, то мы получим приведенную диаграмму G_0 , которая называется *остовом* G . Диаграмма, совпадающая со своим остовом, называется *неприводимой*. Части собственной энергии второго порядка W и W' на фиг. 78 являются единственными примерами неприводимых частей собственной энергии. Части собственной энергии высших порядков являются *приводимыми*, т. е. не неприводимыми, и могут быть получены с помощью вставок частей собственной энергии и вершинных частей в линии и вершины диаграмм W и W' на фиг. 78. Однако вершинные части более высоких



Фиг. 79.

порядков, чем второй (пример вершинной части высших порядков приведен на фиг. 76, *b*), могут быть как приводимыми, так и неприводимыми. Вершинная часть, или часть собственной энергии, называется *собственной*, если она не может быть разделена на две части, соединенные одиночной линией; в противном случае она называется *несобственной*. На фиг. 79 приведен пример несобственной части собственной энергии фермиона.

Теперь мы можем получить приводимую диаграмму G определенного порядка, скажем порядка n , вставляя независимо и всевозможными путями части собственной энергии и вершинные части требуемых порядков в различные линии и вершины неприводимой диаграммы G_0 низшего порядка. Эти диаграммы G образуют хорошо определенный класс L и поэтому могут быть точно перечислены.

¹⁾ Однако так, чтобы при этом диаграмма не выродилась в прямую линию. — *Прим. перев.*

Предположим, что M_0 — матричный элемент диаграммы G_0 . Тогда любой матричный элемент M из класса L будет давать дополнительные вклады в процесс, которому соответствует матричный элемент S -матрицы M_0 . Обозначим сумму *всех* вкладов, включая и M_0 , через M_S . Вследствие независимости всех вставок, сделанных в различные вершины и линии диаграммы G_0 , сумма M_S может быть получена из матричного элемента M_0 , если модифицировать в нем множители следующим образом:

Каждый множитель $S_F(p)$ в матричном элементе M_0 , соответствующий внутренней электронной линии диаграммы G_0 , заменяется на выражение

$$S'_F(p) = S_F(p) + S_F(p) \Sigma^*(p) S'_F(p) \quad (24.10)$$

(доказательство будет дано ниже). Аналогично, для каждой внешней электронной линии необходимо сделать замену

$$\psi(p) \rightarrow \psi'(p) = \psi(p) + S'_F(p) \Sigma^*(p) \psi(p), \quad (24.11)$$

$$\bar{\psi}(p) \rightarrow \bar{\psi}'(p) = \bar{\psi}(p) + \bar{\psi}(p) \Sigma^*(p) S'_F(p). \quad (24.12)$$

Для фотонных линий сделаем следующие замены:

$$D_F(k) \rightarrow D'_F(k) = D_F(k) + D_F(k) \Pi^*(k) D'_F(k), \quad (24.13)$$

$$A_\mu(k) \rightarrow A'_\mu(k) = A_\mu(k) + A_\mu(k) \Pi^*(k) D'_F(k). \quad (24.14)$$

И наконец, вершинный оператор γ_μ должен быть заменен на оператор

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Delta_\mu(p_1, p_2). \quad (24.15)$$

Здесь $\Sigma^*(p)$ и $\Pi^*(k)$ представляют суммы операторов $\Sigma(W, p)$ и $\Pi(W', p)$ *только по собственным частям собственной энергии*. Предполагается, что в сумму Σ^* включен вклад контрчленов собственной энергии. Аналогично $\Delta_\mu(p_1, p_2)$ есть сумма *всех собственных* вершинных частей $\Delta_\mu(V, t_1, t_2)$, поскольку, если вершинная часть является несобственной, она состоит из собственной вершинной части плюс одна или большее число частей собственной энергии, а последние уже включены в величины S'_F и D'_F .

Несобственные части являются неперекрывающимися комбинациями собственных частей, которые уже учтены в неявном определении функций S'_F и D'_F , данном выше. В этом легко убедиться: например, несобственная диаграмма типа диаграммы, приведенной на фиг. 79, уже включена в определение

$$S'_F(p, W) = S_F(p) + S_F(p) \Sigma(p, W) S'_F(p, W), \quad (24.16a)$$

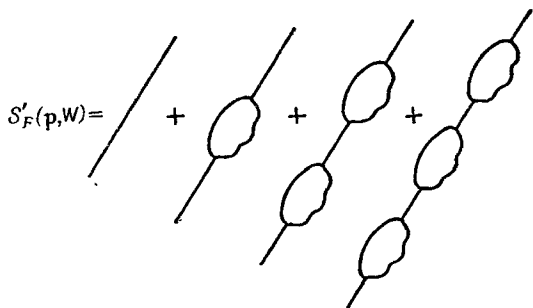
где W соответствует оператору собственной энергии фермиона (см. диаграмму на фиг. 78, а). Если разрешить это уравнение

относительно функции S'_F , то получим

$$\begin{aligned} S'_F(p, W) &= \frac{1}{1 - S_F(p) \Sigma(p_1, W)} S_F(p) = \\ &= S_F(p) + S_F(p) \Sigma(p, W) S_F(p) + \\ &+ S_F(p) \Sigma(p, W) S_F(p) \Sigma(p, W) S_F(p) + \dots; \end{aligned} \quad (24.166)$$

графическим представлением выражения (24.16а) является диаграмма на фиг. 80.

Приведенное выше формальное преобразование можно принять лишь с оговорками, поскольку мы оперировали с расходящимися



Фиг. 80.

величинами. При практическом применении всегда используют регуляризацию, так что все интегралы становятся конечными, хотя и зависящими от регуляризации. Величины, которые являются конечными и при отсутствии обрезания, остаются неизменными, в то время как логарифмически расходящиеся величины становятся конечными логарифмическими функциями регуляризующих масс.

Матричный элемент S -матрицы будет вычисляться правильно, если включить *только* вклады от неприводимых диаграмм, после того как сделаны замены (24.10)—(24.15) в каждом матричном элементе, соответствующем остову (неприводимым диаграммам). Уравнения (24.10)—(24.15) являются интегральными уравнениями. Например, в координатном пространстве уравнение (24.10) имеет вид

$$\begin{aligned} S'_F(x - y) &= \\ &= S_F(x - y) + \int d^4x' \int d^4y' S_F(x - x') \Sigma^*(x' - y') S'_F(y' - y). \end{aligned} \quad (24.17)$$

Уравнению (24.15) соответствует в координатном пространстве замена

$$\gamma_a \delta^{(4)}(x - x') \delta^{(4)}(x' - x'') \rightarrow \Gamma_1(x - x'; x' - x''). \quad (24.18)$$

Для вычисления операторов Δ_μ , Σ^* и Π^* необходимо выписать в явном виде интегралы в импульсном пространстве, соответствующие каждой части собственной энергии W и вершинной части V . Для процессов высших порядков части W и V часто являются приводимыми (W и W' всегда приводимы) и содержат внутри себя вершинные части и части собственной энергии. В этом случае снова удобно опустить приводимые части V и W и, сделав подстановку (24.10)—(24.15), включить их вклад в интегралы, соответствующие неприводимым частям V и W . Тогда получаются интегральные уравнения для Δ_μ , Σ^* и Π^* .

Следует отметить, однако, что приводимые части собственной энергии должны получаться при вставке вершинных частей только в одну, а не в две вершины неприводимых частей собственной энергии, представленных на фиг. 78, *a* и *b*; в противном случае одна и та же часть собственной энергии может учитываться больше 1 раза. Принимая во внимание это обстоятельство, мы можем практически сразу выписать интегральные уравнения, которым удовлетворяют функции Σ^* и Π^* (α — постоянная тонкой структуры):

$$\begin{aligned} \Sigma^*(x - x') &= \\ &= -2\pi\alpha \int d^4y \int d^4y' \gamma_\mu S'_F(x - y) \Gamma_\mu(y - x', y - y') D'_F(y' - x), \end{aligned} \quad (24.19)$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \Pi^*(x - x') &= \\ &= +2\pi\alpha \int d^4y \int d^4y' \text{Sp} [\gamma_\mu S'_F(x - y) \Gamma_\nu(y - x', y - y') S'_F(y' - x)]. \end{aligned} \quad (24.20)$$

С другой стороны, для функции Δ не удается выписать замкнутое выражение через функции Γ , S'_F и D'_F . Однако можно выписать интегральное уравнение для вершинного оператора Γ в виде степенного ряда; в импульсном пространстве это уравнение имеет следующий вид (Швингер [442], Эдвардс [144]):

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p_1, p_2) &\equiv \gamma_\mu + \Delta_\mu(p_1, p_2) = \\ &= \gamma_\mu - 2\alpha \int \Gamma_\nu(p_1, p_1 - k) S'_F(p_1 - k) \Gamma_\mu(p_1 - k, p_2 - k) \times \\ &\quad \times S'_F(p_2 - k) \Gamma_\nu(p_2 - k, p_2) D'_F(k) d^4k + \dots \end{aligned} \quad (24.21)$$

Другими словами, чтобы получить интегральное уравнение для функции Γ_μ , мы должны начертить все неприводимые вершинные диаграммы и в матричный элемент, соответствующий каждой из них, подставить S'_F вместо S_F , Γ_μ вместо γ_μ и D'_F вместо D_F . Тогда получается полный ряд функции Γ_μ .

Теперь обратимся к задаче отождествления расходимостей, встречающихся в теории, и выработке рецептов их устранения.

§ 2. Отделение расходимостей из неприводимых диаграмм

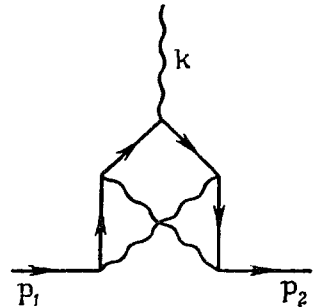
Следуя Дайсону, мы будем называть *примитивным* расходящийся матричный элемент M , если при фиксированном значении одного из 4-векторов импульса в подинтегральном выражении интегрирование по всем остальным переменным дает сходящийся результат. Фиксирование четырех переменных интегрирования p_r^j означает замену внутренней линии на соответствующей диаграмме на две внешние линии. Пусть G есть примитивная расходящаяся диаграмма, имеющая F_e внешних фермионных линий, B_e внешних фотонных линий; тогда, как мы показали в гл. 22 (см. примечание 2 на стр. 357), диаграмма может расходиться при условии, если $3/2 F_e + B_e < 5$.

Поэтому единственно возможными примитивными расходящимися диаграммами являются диаграммы, перечисленные нами в гл. 22, а именно:

- | | |
|--|------------------------|
| 1) часть собственной энергии электрона | $(F_e = 2, B_e = 0)$; |
| 2) часть собственной энергии фотона | $(B_e = 2, F_e = 0)$; |
| 3) вершинная часть | $(F_e = 2, B_e = 1)$; |
| 4) рассеяние света на свете | $(B_e = 4, F_e = 0)$. |

Благодаря теореме Фарри треугольные диаграммы можно не рассматривать. Кроме того, как мы установили ранее, матричный элемент рассеяния света на свете фактически сходится благодаря требованию калибровочной инвариантности теории.

Отметим, что большинство диаграмм не удовлетворяет следующему условию: соответствующие им интегралы должны сходиться, если в подинтегральном выражении фиксировать один из внутренних импульсов. Фактически по самому определению расходящиеся матричные элементы приводимых диаграмм не могут быть примитивно расходящимися. Следовательно, примитивные расходимости соответствуют неприводимым диаграммам, т. е. остовам, которые перечислены выше (в п. 1—4). Имеется только одна неприводимая часть собственной энергии электрона или фотона (см. фиг. 78), однако могут быть неприводимые вершинные части любого порядка. Одна такая возможная неприводимая вершинная часть высшего порядка приведена на фиг. 81.



Фиг. 81.

Дайсон [127] предложил однозначный метод разделения *примитивных* расходящихся интегралов на конечную и бесконечную части. Это в каждом случае достигается с помощью разложения подинтегрального выражения в ряд Тейлора по внешним импульсам [вспомним формулы (21.23а), (21.29), (21.54), (21.66) и в особенности рассуждения, следующие за формулой (21.23)]. Итак, если $R(p, t)$

представляет подинтегральное выражение, в котором p и t — внешний и внутренний импульсы соответственно, то мы можем написать

$$R(p, t) = R(0, t) + p_{\mu} \left(\frac{\partial R(p, t)}{\partial p_{\mu}} \right)_{p=0} + \frac{1}{2} p_{\mu} p_{\nu} \left(\frac{\partial^2 R(p, t)}{\partial p_{\mu} \partial p_{\nu}} \right)_{p=0} + \dots \quad (24.22)$$

Каждое дифференцирование увеличивает разность степеней внутреннего импульса t числителя и знаменателя на единицу. Поэтому логарифмически, линейно или квадратично расходящиеся интегралы дают разложения R , в которых расходятся только один, два или три первых члена. Вид расходящихся членов можно получить из соображений релятивистской инвариантности. Рассмотрим теперь выделение расходимостей из неприводимых расходящихся диаграмм.

Часть собственной энергии электрона

Единственную неприводимую часть собственной энергии электрона можно представить в виде интеграла

$$\Sigma(W, p) = \int R_e(p, k) d^4k, \quad (24.23)$$

который линейно расходится

$$[R_e(p, k) \sim e^2 \gamma^{\mu} S_F(p - k) \gamma_{\mu} D_F(k)].$$

Разложение в ряд Тейлора дается выражением

$$R_e(p, k) = R_e(0, k) + p_{\mu} \left(\frac{\partial R_e(p, k)}{\partial p_{\mu}} \right)_{p=0} + R_{eC}(p, k). \quad (24.24)$$

Поскольку интеграл Σ расходится линейно, член R_{eC} представляет сходящийся интеграл (подинтегральное выражение содержит две дополнительные степени переменной k в знаменателе по сравнению с $R_e(p, k)$). Поэтому выражение (24.33) можно записать в виде

$$\Sigma(W, p) = A' + B'_{\mu} p^{\mu} + \Sigma_C(W, p), \quad (24.25)$$

где A' и B'_{μ} — расходящиеся матричные операторы, не зависящие от величин p . Вследствие ковариантности мы должны иметь

$$\Sigma_C(W, p) = R_1(p^2) + R_2(p^2) \hat{p} \quad (24.26)$$

и

$$B'_{\mu} = B' \gamma_{\mu}. \quad (24.27)$$

Так как интеграл Σ_C сходится, то его можно записать однозначно в форме ¹⁾

$$\Sigma_C(W, p^2) = A'' + B''(\hat{p} - m) + (\hat{p} - m) S_C(W, p), \quad (24.28)$$

¹⁾ На практике это достигается разложением функции $S_F(p - k)$ в подинтегральном выражении R_e согласно формуле

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B A^{-1} + A^{-1} B (A + B)^{-1} B A^{-1},$$

полученной из формулы (21.29), если положить $A = \hat{k}$ и $B = \hat{p} - m$.

где функция $S_C(W, p)$ равна нулю для случая свободных электронов, т. е. если удовлетворяются соотношения $\hat{p} = m$ и $p^2 = m^2$. Если положить

$$A' + A'' + mB' = A^{(W)}, \quad (24.29a)$$

$$B' + B'' = B^{(W)} \quad (24.29б)$$

и включить вклад члена $-\delta m \bar{\psi} \psi$, то после суммирования по всем неприводимым диаграммам (имеется только одна!) мы получим следующее выражение:

$$\Sigma_I^*(p) = A_I - 2\pi i \delta m_I + B_I(\hat{p} - m) + (\hat{p} - m) S_C(I, p); \quad (24.30)$$

это выражение представляет вклад неприводимых (индекс I) диаграмм собственной энергии в функцию $\Sigma^*(p)$. В выражении (24.30) мы обозначили

$$\Sigma A^{(W^i)} = A^{(W)} = A_I. \quad (24.31)$$

В выражении (24.31) суммирование проводится по неприводимым W^i . Аналогично $B^{(W)} = B_I$ и т. д. Перенормировка массы определяется так, что для $\hat{p} = m$, т. е. для свободного электрона масса должна точно равняться m . Поэтому

$$\bar{\psi}(p) \Sigma_I^*(W, p) \psi(p) = 0, \quad \text{если } \hat{p} = m, \quad (24.32)$$

откуда следует, что

$$A_I = 2\pi i \delta m_I. \quad (24.33)$$

Часть собственной энергии фотона

Неприводимая часть собственной энергии фотона W' , изображенная на фиг. 78, b , может быть представлена в виде интеграла

$$\Pi(W', k) = \int R_p(k, q) d^4q; \quad (24.34)$$

этот интеграл расходится квадратично, так как в подинтегральном выражении имеются только две функции S_F . Поэтому в данном случае мы напишем

$$R_p(k, q) = R_p(0, q) + k_\mu \frac{\partial R_p(0, q)}{\partial k_\mu} + \\ + \frac{1}{2} k_\mu k_\nu \frac{\partial^2 R_p(0, q)}{\partial k_\mu \partial k_\nu} + R_{pC}(k, q). \quad (24.35)$$

Поскольку у знаменателя подинтегрального выражения интеграла $R_{pC}(k, q)$ имеется три дополнительные степени q по сравнению с интегралом $R_p(k, q)$, то $R_{pC}(k, q)$ представляет сходящийся интеграл по переменной q . Проводя рассмотрение таким же образом,

как и в случае собственной энергии электрона, мы получаем на основании ковариантности следующее выражение:

$$\Pi(W', \mathbf{k}) = A_1 + B_{1\mu} k^\mu + C_{\mu\nu} k^\mu k^\nu + \Pi_C(W', \mathbf{k}), \quad (24.36)$$

где A_1 , $B_{1\mu}$ и $C_{\mu\nu}$ являются постоянными тензорами с одними и теми же компонентами во всех системах отсчета, отсюда

$$B_{1\mu} = 0, \quad (24.37)$$

$$C_{\mu\nu} = C g_{\mu\nu}. \quad (24.38)$$

Кроме того, из требования калибровочной инвариантности следует, что появление члена с константой A_1 запрещено, поэтому его нужно положить равным нулю. Следовательно, поскольку $C_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = C k^2$, то мы можем написать

$$\Pi(W', \mathbf{k}) = k^2 D_C(W', \mathbf{k}) + C' k^2, \quad (24.39a)$$

где

$$D_C(W', \mathbf{k}) = 0 \quad \text{для} \quad k^2 = 0 \quad (24.39b)$$

и константа C включена в константу C' . Наконец, так как существует только одна неприводимая часть собственной энергии фотона, то мы получим

$$\Pi_I^*(\mathbf{k}) = k^2 C_I + k^2 D_C(I, k^2), \quad (24.40)$$

где константа C' обозначена через C_I . Величина $\Pi_I^*(\mathbf{k})$ снова представляет вклад в Π^* всех *неприводимых* диаграмм собственной энергии фотона.

Вершинная часть

Вклад вершинной части, в крайнем случае, может расходиться логарифмически. Поэтому при разложении в ряд Тейлора подинтегрального выражения Δ_μ для вершинной части не требуется членов с производными, следовательно,

$$\Delta_\mu(V, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = L_\mu^{(V)} + \Delta_{\mu C}(V, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \quad (24.41)$$

где $L_\mu^{(V)}$ — постоянный расходящийся оператор, а $\Delta_{\mu C}$ — сходящийся интеграл, равный нулю при $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$. Требование ковариантности приводит к тому, что

$$L_\mu^{(V)} = L^{(V)} \gamma_{\mu}. \quad (24.42)$$

Кроме того, если $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ и \mathbf{p}_1 удовлетворяют соотношению $\hat{p}_1 = m$, то оператор $\Delta_{\mu C}$ сводится к постоянной, умножаемой на оператор γ_μ , и может быть включен в член $L \gamma_\mu$. Поэтому можно предположить, что оператор $\Delta_{\mu C}$ в выражении (24.41) равен нулю не только в случае $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$, но также и в случае $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = m$. Физический смысл этого следующий: величина $\Delta_{\mu C}$ дает вклад, равный нулю, в постоянном электромагнитном потенциале, так как последний сообщает частице импульс, равный нулю. Это должно

быть так, потому что постоянный электромагнитный потенциал всегда можно устранить с помощью калибровочного преобразования. Далее, поскольку величина $\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$ представляет 4-вектор тока электрона без радиационных поправок, величина $\bar{\psi}\Gamma_{\mu}\psi$ может быть интерпретирована как 4-вектор тока электрона с включением радиационных поправок. Поэтому в выражении (24.41) подразумевается, что весь статический заряд включен в член $L\gamma_{\mu}$, так как для свободного электрона $\Delta_{\mu C}(V, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 0$ и, следовательно, $\bar{\psi}\Gamma_{\mu}\psi = L\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$.

Суммируя выражение (24.41) по всем неприводимым вершинным частям, получаем

$$\sum \Delta_{\mu}(V^i, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \Delta_{\Gamma_{\mu}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = L\Gamma_{\mu} + \Delta_{\Gamma_{\mu C}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \quad (24.43)$$

где L_{Γ} — расходящаяся константа, а суммирование проводится по всем неприводимым V^i .

Соотношения (24.30), (24.40) и (24.43) являются основными для отделения расходящихся членов в матричных элементах, соответствующих неприводимым диаграммам. Укажем, что в статье Карплуса и Кролла [263] отделение расходимостей проведено в явном виде для диаграмм собственной энергии и вершинных диаграмм низших порядков. Вышеуказанный метод идентичен методу, приведенному в гл. 21, где мы рассматривали перенормировку радиационных поправок низшего порядка, используя, однако, метод регуляризации.

Теперь необходимо вывести формулы, аналогичные формулам (24.30), (24.40) и (24.43), которые давали бы вклад приводимых собственных диаграмм в функции Σ^* , Π^* и Γ_{μ} и в которых конечная и бесконечная части были бы снова разделены релятивистски инвариантным и однозначным образом. Только из соображений инвариантности ясно, что эти функции должны иметь вид

$$\Sigma^*(\mathbf{p}) = (A - 2\pi i \delta m) + B(\hat{p} - m) + S_C(\mathbf{p})(\hat{p} - m), \quad (24.44)$$

$$\Pi^*(\mathbf{k}) = C\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}^2 D_C(\mathbf{k}^2), \quad (24.45)$$

$$\Delta_{\mu}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = L\gamma_{\mu} + \Delta_{\mu C}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \quad (24.46)$$

где

$$S_C(\mathbf{p}) = \Delta_{\mu C}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0, \quad \text{если } \hat{\mathbf{p}} = m, \quad (24.47)$$

и

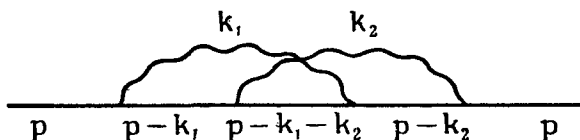
$$D_C(\mathbf{k}^2) = 0, \quad \text{если } \mathbf{k}^2 = 0, \quad (24.48)$$

где A , B , C и L являются расходящимися константами.

Однако формулы (24.44) — (24.46) представляют только окончательную форму этих выражений. Для данной приводимой диаграммы мы должны сначала показать, как можно провести отделение расходящихся величин так, чтобы получить однозначный, ковариантный и сходящийся результат.

§ 3. Отделение расходимостей из приводимых диаграмм

В § 2 мы рассмотрели инвариантный метод Дайсона отделения расходимостей из неприводимых диаграмм. Чтобы показать возможность перенормировки теории в целом, необходимо рассмотреть диаграммы всех возможных типов и всех порядков как приводимые, так и неприводимые. Поэтому покажем, как отделяются расходимости из приводимых диаграмм.

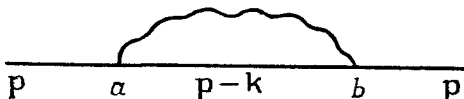


Ф и г. 82.

Диаграммы G , получаемые из неприводимой диаграммы G_0 путем вставки частей V , W и W' в различные линии и вершины диаграммы G_0 , могут быть разделены на три широких класса:

- 1) диаграммы с полностью неперекрывающимися вставками;
- 2) диаграммы, в которые сделаны вставки такого рода, что одна из них полностью содержится внутри другой;
- 3) диаграммы с перекрывающимися вставками.

В первых двух классах расходимости могут быть устранены с помощью инвариантного метода Дайсона отделения расходимости,



Ф и г. 83.

приведенного в § 2. В неперекрывающихся вставках отделение расходимостей может быть проведено независимо в каждой вставке. Во вставках второго типа можно *последовательно* устранить расходимости с помощью описанного выше метода, начиная с *самой внутренней* вставки и кончая расходимостью, которую дает сама диаграмма G . Аналогично комбинация двух первых типов расходимостей не представляет трудности. Однако для перекрывающихся вставок метод Дайсона недостаточен, так как в таких случаях мы одновременно встречаемся с интегралами больше чем от одной переменной, которые расходятся и остаются расходящимися, если интегрирование проводится по любой одной переменной, в то время как все остальные переменные фиксированы. Этим третий тип вставок отличается от первого и второго типов, в которых мы имели каждый

раз только по одной переменной и для которых фактически удалось отделить расходимости с помощью формулы (24.22).

Пример такого рода перекрывающихся расходимостей приведен на фиг. 82. На ней представлена диаграмма собственной энергии электрона, которую можно получить вставкой вершинной части V в вершину a или b диаграммы, изображенной на фиг. 83. Диаграмме на фиг. 82 соответствует следующий матричный элемент:

$$\Sigma(W_2, p) = e^4 \int \int d^4 k_1 d^4 k_2 F^\mu(p, k_1) G_{\nu\mu}(p, k_1, k_2) H^\nu(p, k_2), \quad (24.49)$$

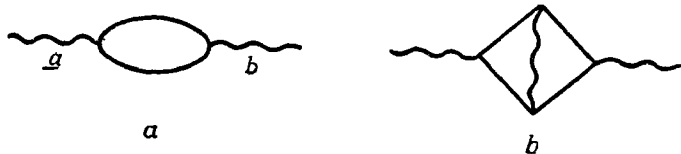
где

$$F^\mu(p, k_1) = \frac{1}{k_1^2} \gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{k}_1 + m}{(p - k_1)^2 - m^2}, \quad (24.50)$$

$$G^{\nu\mu}(p, k_1, k_2) = \gamma^\nu \frac{\hat{p} - \hat{k}_1 - \hat{k}_2 + m}{(p - k_1 - k_2)^2 - m^2} \gamma^\mu, \quad (24.51)$$

$$H^\nu(p, k_2) = \frac{1}{k_2^2} \frac{\hat{p} - \hat{k}_2 + m}{(p - k_2)^2 - m^2} \gamma^\nu. \quad (24.52)$$

Расходится не только двойной интеграл по переменным k_1 и k_2 (линейная расходимость), но расходится (логарифмически) также и любой из интегралов по k_1 или k_2 , если интегрирование проводить по одной из этих переменных, а другую фиксировать.



Фиг. 84.

Аналогично рассмотрим вставку вершинной части в вершину a диаграммы собственной энергии фотона второго порядка, представленной на фиг. 84, a . Эта вставка может в то же время рассматриваться и как вставка в другую вершину b (фиг. 84, b). Вообще, вклады приводимых диаграмм (см. фиг. 84, b) в величины Π^* (или Σ^*) представляют собой интеграл, который включает в себя расходимости, соответствующие каждому способу, с помощью которого эта диаграмма может быть построена вставками вершинных частей в любую или обе вершины исходной неприводимой диаграммы (фиг. 84, a). Дайсон назвал их „ b -расходимостями“.

Эти „ b -расходимости“ приводят к трудностям, потому что становится возможным рассматривать приводимую часть собственной энергии как построенную из неприводимой многими различными способами; при этом вершинная часть может рассматриваться как вставка

в одну или другую вершину неприводимой диаграммы второго порядка, и каждый возможный способ фактически вносит свой собственный вклад в получающиеся расходимости.

Чтобы рассмотреть этот случай, Дайсон (1949 г., не опубликовано) и Салам [418, 419] дали однозначные правила для отделения расходимостей из перекрывающихся диаграмм, которые сводятся к правилам, данным в § 2 для неперекрывающихся диаграмм. Эти правила позволяют отделить из перекрывающихся расходящихся частей однозначные, ковариантные и абсолютно сходящиеся части.

Следует, по-видимому, подчеркнуть, что трудности в получении правильных рецептов для отделения расходимостей из перекрывающихся диаграмм связаны только с трудностью нахождения такого правильного способа перечисления *всех* расходящихся частей, который позволил бы строго интерпретировать все вычитательные операции как перенормировку и однозначно выделить конечную часть. Доказано, что это является очень сложной задачей, так как при этом необходимо анализировать чрезвычайно сложные многократные интегралы, для которых не существует адекватной системы обозначений. (По предложенному Саламом определению, адекватной системой обозначений называется система, которая „кажется краткой и понятной по крайней мере двум лицам, одно из которых, по-видимому, является ее автором“.) Впервые такого рода система обозначений была дана Саламом в его важной статье [418], в которой на ясной и строгой основе дан полный анализ перенормировки. Теперь кратко, не входя в детали, изложим метод Салама.

Рассмотрим n -кратный интеграл I_n , получающийся из диаграммы с такими n „базисными“ импульсами t_i , что векторы распространения, относящиеся к другим линиям, могут быть выражены как линейные комбинации выбранных импульсов t_i (и импульсов, соответствующих внешним линиям). Различные множители S_F и D_F , появляющиеся в интеграле I_n , могут быть функциями как одной переменной t_i , так и функциями двух или большего числа переменных. Интеграл (24.49) является примером интеграла I_n для случая $n = 2$. По терминологии Салама, интегрирование по меньшему, чем n , числу переменных, когда оставшиеся переменные фиксированы, называется субинтегрированием. Сходимость при каждом субинтегрировании можно определить, вычисляя степень переменной t_j (по которой производится интегрирование) в числителе и знаменателе подинтегрального выражения (см. гл. 22, § 1). При вычислении степеней все переменные интегрирования должны считаться равноправными. Именно при этом мы приходим к заключению, что двойной интеграл по переменным k_1 и k_2 (24.49) расходится линейно, поскольку имеется одиннадцать степеней k в числителе и только десять в знаменателе. Для сходимости интеграла I_n в целом необходимо, чтобы сходилось не только окончательное интегрирование по переменным $t_1 \dots t_n$, но и все возможные субинтегрирования по меньшему числу базисных

переменных, т. е. по $t_i, t_i t_j, \dots, t_i t_j \dots t_{n-1}$, когда эти базисные переменные выбраны всеми возможными способами. Возможен случай, когда некоторые интегралы сходятся (что определяется с помощью вычисления степеней t_i), а некоторые субинтегрирования расходятся. В таком случае говорят, что интегралы являются поверхностно-сходящимися.

Чтобы сделать интеграл I_n сходящимся, нужно вычесть из подинтегрального выражения ряд расходящихся членов, прежде всего тех, которые соответствуют всем возможным субинтегрированиям по базисным переменным от одного интегрирования до $(n - 1)$ интегрирования, и, наконец, тех, которые соответствуют конечному интегрированию по всем n переменным. Расходящиеся члены вычитаются, согласно приведенным ниже правилам.

Сначала зафиксируем все переменные в подинтегральном выражении, кроме переменной t_1 , и вычтем расходящиеся члены, соответствующие субинтегрированию по переменной t_1 , согласно правилам, данным Дайсоном [формула (24.22)]. При этом в вычитаемых членах остаются неизменными те множители, которые не содержат переменной t_1 , а переменным t_2, t_3, \dots, t_n и внешним импульсам в множителях, содержащих переменную t_1 , придаются значения импульсов для свободных частиц. Такое же вычитание должно быть сделано соответственно каждому субинтегрированию по любой другой одиночной переменной t_2, \dots, t_n . Во вновь получаемом подинтегральном выражении следует зафиксировать все переменные, кроме переменных t_1 и t_2 , и вычесть расходящиеся члены, соответствующие субинтегрированию по переменным $t_1 t_2$. Эти члены выделяются из *нового* подинтегрального выражения; в них сохраняются неизменными множители, не содержащие переменных t_1 и t_2 , а в тех множителях, в которых имеются переменные t_1 и t_2 , либо и t_1 и t_2 , импульсам t_3, t_4, \dots, t_n (и внешним импульсам) придаются значения импульсов свободных частиц. Такое же вычитание должно быть сделано и для всех других возможных комбинаций переменных $t_i t_j$, взятых попарно. Таким же образом необходимо вычесть расходящиеся члены, соответствующие субинтегрированиям по переменным $t_i t_j t_k, \dots, t_1 t_2 \dots t_{n-1}$, причем, прежде чем проводить вычитание расходящихся членов, соответствующих некоторому субинтегрированию, из подинтегрального выражения должны быть вычтены расходящиеся члены, которые соответствуют всем возможным субинтегрированиям предыдущего низшего порядка. „Истинная расходимость“ по некоторому субинтегрированию может быть теперь определена как расходящаяся часть, которую нужно вычесть из „модифицированного“ подинтегрального выражения (определенного выше), чтобы субинтегрирование давало сходящийся результат.

После того как таким же образом вычтены истинные расходимости во всех субинтегрированиях вплоть до порядка $n - 1$, должно быть проведено окончательное вычитание для отделения

истинных расходимостей при интегрировании по всем n переменным. И наконец, если во время этой вычитательной процедуры окажется, что некоторое субинтегрирование является *поверхностно-сходящимся*, то соответствующее вычитание делать не нужно.

Вся изложенная выше методика может быть математически представлена в следующей форме:

$$I_n = \sum_{i=1}^n D(t_i) R(t_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} \dots t_n) + \\ + \sum_{ij} D(t_i, t_j) R(t_1 \dots t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n) + \\ + \dots + D(t_1 \dots t_n) + I_G(t_1 \dots t_n). \quad (24.53)$$

Здесь $D(t_i t_j \dots)$ — „истинные расходимости“, соответствующие субинтегрированиям по переменным $t_i t_j \dots$, множитель „ R “ называется „приведенным интегралом“, величина $D(t_1 t_2 \dots t_n)$ представляет „истинную расходимость“ при окончательном интегрировании по всем n переменным. Салам [419] показал, что такая вычитательная методика в перенормируемой теории поля позволяет, фактически, *однозначно* выделить *абсолютно сходящийся* член I_G .

Отметим, что если интеграл I_n не содержит перекрывающихся сомножителей, то его можно представить в виде

$$I_n = \left(\int F_1(t_1) d^4 t_1 \right) \left(\int F_2(t_2) d^4 t_2 \right) \dots \left(\int F_n(t_n) d^4 t_n \right). \quad (24.54)$$

В этом случае можно применить метод Дайсона отделения расходимостей по каждой переменной отдельно, тогда мы получим, что сходящаяся часть выражения (24.54) примет вид

$$I_G = \prod_{r=1}^n \left(\int \{F_r(t_r) - D_r(t_r)\} d^4 t_r \right), \quad (24.55)$$

где $D_r(t_r)$ — член, дающий истинные расходимости при интегрировании по переменной t_r .

Если определить истинную расходимость D и приведенный интеграл R , так же как и в формуле (24.53), то в случае неперекрывающихся расходимостей из формул (24.54) и (24.55) получим

$$I_n = \sum_i D(t_i) R(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n) - \\ - \sum_{ij} D(t_i t_j) R(t_1 \dots t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n) + \\ + (-1)^{n-1} D(t_1 \dots t_n) + I_G(t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (24.56)$$

Здесь в отличие от формулы (24.53) члены имеют попеременно то положительный, то отрицательный знаки.

Теперь выражения (24.53) и (24.56) можно применить для вывода соотношений (24.44) — (24.46). Затем, если функции S'_{F1} , D'_{F1} и $\Gamma_{\mu 1}$ являются конечными, имеющими физический смысл частями функций S'_F , D'_F , Γ_μ и получаются из последних *отбрасыванием* расходящихся частей функций Σ^* , Π^* и Δ_μ , то можно показать, что после подходящей перенормировки массы конечные и соответствующие им бесконечные функции связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} S'_F(e) &= Z_2 S'_{F1}(e_1), \\ D'_F(e) &= Z_3 D'_{F1}(e_1), \\ \Gamma_\mu(e) &= Z_1^{-1} \Gamma_{\mu 1}(e_1), \end{aligned} \quad (24.57)$$

где Z_1 , Z_2 , Z_3 — расходящиеся константы, а $e_1 = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e$ — перенормированный заряд.

Мы не будем приводить здесь этого доказательства. Оно содержится в статьях Салама [418, 419], где имеется также доказательство перенормируемости мезонных теорий, не содержащих связей с производными (см. также работу Такеда [477]). Вместо этого приведем видоизмененную вычитательную методику, данную Уордом [509], в которой удалось обойти построение приводимых частей собственной энергии. Это достигается с помощью выведенного им [507] формального тождества, которое мы приведем в следующем параграфе.

В заключение этого параграфа следует отметить, что при рассмотрении приводимых частей собственной энергии использование приведенных выше правил Салама является необходимым, если мы хотим правильно представить вычитание с помощью множителя Z . Только в случае если приняты эти (однозначные) правила для отделения расходимостей, можно провести доказательство перенормируемости теории в рамках, указанных Дайсоном [127]. Однако для *практических* приложений правильная *конечная* часть может быть получена с помощью изложенного ниже более „наивного“ приближения, которое мы рассмотрим на примере перекрывающейся диаграммы, изображенной на фиг. 82.

Эта диаграмма может рассматриваться как полученная при вставке вершинной части $\Delta_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{p})$ в вершину b (или a) диаграммы, представленной на фиг. 83. Далее, этот оператор может быть разделен, согласно формуле (24.43), на сходящуюся и расходящуюся части следующим образом:

$$\Delta_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{p}) = L\gamma_\mu + \Delta_{\mu\sigma}(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{p}). \quad (24.58)$$

Расходящийся множитель $L\gamma_\mu$ может быть включен в перенормировку заряда матричного элемента, диаграмма которого приведена на фиг. 83, если объединить матричные элементы, соответствующие диаграммам на фиг. 82 и 83. Другая возможность состоит в отбрасы-

вании расходящихся членов, при этом неявно подразумевается, что вклад этих членов сводится (это всегда можно считать) к умножению матричного элемента диаграмм низшего порядка на некоторую постоянную, т. е. к переопределению заряда (константы связи), входящего сомножителем в этот матричный элемент. Если мы вставим вершинную часть $\Delta_{\mu C}(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{p})$ вместо оператора γ_{μ} в вершину a (или b) на диаграмме, приведенной на фиг. 83, то конечная часть величины Σ (соответствующая диаграмме на фиг. 82) может быть вычислена с помощью вычитания расходящихся частей, согласно формуле (24.30); *точно такой же* конечный результат получается с помощью правил Салама. Однако расходящиеся члены (если их сохранить) получаются в этих двух методиках неодинаковыми. Фактически, если принять эту „наивную“ методику, то не удастся доказать перенормируемость теории, так как в этом случае расходимости не могут быть должным образом интерпретированы с помощью множителей Z , которые перенормируют заряд e одним и тем же способом в матричном элементе любой диаграммы.

§ 4. Тождество Уорда

Если мы продифференцируем тождество

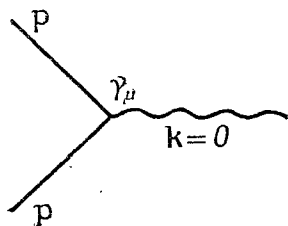
$$S_F(\mathbf{p}) S_F^{-1}(\mathbf{p}) = 1$$

по переменной p_{μ} , то после приведения членов мы получим

$$\frac{\partial S_F(\mathbf{p})}{\partial p^{\mu}} = - S_F(\mathbf{p}) \frac{\partial S_F^{-1}(\mathbf{p})}{\partial p^{\mu}} S_F(\mathbf{p}). \quad (24.59)$$

Если явно подставить выражение для $S_F^{-1}(\mathbf{p})$ [формула (24.3)], то соотношение (24.59) получает вид

$$\frac{\partial S_F(\mathbf{p})}{\partial p^{\mu}} = - 2\pi S_F(\mathbf{p}) \gamma_{\mu} S_F(\mathbf{p}). \quad (24.60)$$



Фиг. 85.

Правая часть соотношения (24.60) представляет множитель, точно соответствующий простейшей вершинной диаграмме (фиг. 85), на которой импульс внешнего фотона равен нулю. Таким образом, формальное дифференцирование функции распространения $S_F(\mathbf{p})$ по переменной p_{μ} соответствует вставке внешней фотонной линии с равным нулю импульсом.

Рассмотрим теперь диаграмму собственной энергии W , представленную на фиг. 78, a . Ей соответствует оператор

$$\Sigma(\mathbf{p}, W) = - \frac{e^2}{2\pi} \int d^4 k \gamma^{\nu} S_F(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \gamma_{\nu} D_F(\mathbf{k}). \quad (24.61)$$

Если мы продифференцируем оператор $\Sigma(\mathbf{p}, W)$ по переменной p_μ , то, используя соотношение (24.60), получим

$$\frac{\partial \Sigma(\mathbf{p}, W)}{\partial p^\mu} = + e^2 \int d^4 k \gamma^\nu S_F(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \gamma_\mu S_F(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \gamma^\nu D_F(\mathbf{k}). \quad (24.62)$$

Однако с точностью до множителя (-2π) это — оператор $\Delta(V, \mathbf{p}, \mathbf{p})$, соответствующий вершинной диаграмме, приведенной на фиг. 76, *b*, если положить импульс \mathbf{k} внешнего фотона равным нулю¹⁾.

Очевидно, что собственная вершинная диаграмма $\Delta(V)$ может быть получена из собственной диаграммы собственной энергии $\Sigma^*(W, \mathbf{p})$ с помощью вставки внешней фотонной линии в любую электронную линию диаграммы W . Однако, как мы видели, вставка в электронную линию фотонной линии с импульсом, равным нулю, формально соответствует дифференцированию функции распространения этой линии по компоненте внешнего импульса p^μ . Таким образом, дифференцирование выражения для собственной энергии $\Sigma(W, \mathbf{p})$ по переменной p_μ эквивалентно вставке фотонной линии в *каждую*²⁾ электронную линию диаграммы W , если импульс электрона на этой линии есть \mathbf{p} . Поэтому, если просуммировать все собственные диаграммы собственной энергии, а затем продифференцировать сумму по переменной \mathbf{p} , то мы получим *все* собственные вершинные диаграммы и, следовательно,

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Sigma^*(\mathbf{p})}{\partial p^\mu} = \Delta_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}). \quad (24.63)$$

1) Численный множитель -2α получается в выражении (24.61), если учесть, что величина $\Sigma(\mathbf{p}, V')$, согласно формуле (21.13), определяется как соответствующий V матричный элемент, умноженный на величину $i/(2\pi)^3$. Кроме того, отметим, что $\Delta_\mu(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, V)$ определяется как такой оператор, который заменяет γ_μ на простейшей вершинной диаграмме, приведенной на фиг. 78, *a*; этой диаграмме соответствует оператор

$$\left(-\frac{i}{\hbar c}\right) (2\pi)^{4\frac{1}{2}(4)} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \pm \mathbf{k}) \frac{i}{(2\pi)^3} S_F(\mathbf{p}) \gamma_\mu \frac{i}{(2\pi)^3} S_F(\mathbf{p}_2) \frac{1}{(2\pi)^3} D_F(\mathbf{k}),$$

так что новый вершинный оператор соответствует вершинной части V . Следовательно, оператор Δ_μ , соответствующий вершине на фиг. 76, *b*, имеет вид

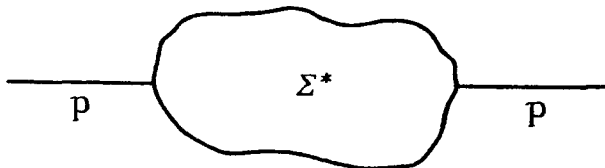
$$\Delta_\mu(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, V) = -2\alpha \int d^4 k \gamma^\nu S_F(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}) \gamma_\mu S_F(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \gamma^\nu D_F(\mathbf{k}).$$

{См. правила, выведенные в гл. 19, а также определения функций $S_F(\mathbf{p})$ и $D_F(\mathbf{k})$, т. е. формулу (24.3).}

2) Следует отметить, что замкнутые петли не дают вклада в собственную часть собственной энергии Σ^* . Это можно показать следующим образом: в случае замкнутой петли в качестве переменной интегрирования мы можем взять t_μ — импульс всех электронных линий на этой петле; вставка фотонной линии с импульсом, равным нулю, в такую петлю может быть получена с помощью дифференцирования подинтегрального выражения по переменной t_μ . Тогда интегрирование полученного подинтегрального выражения по переменной интегрирования t_μ , очевидно, даст нуль (Уорд [506]).

Это соотношение между функциями Σ^* и Δ было впервые выведено Уордом [506, 507].

Несколько другой вывод этого тождества, указывающий на связь его с требованием калибровочной инвариантности теории, использует то обстоятельство, что постоянный внешний электромагнитный потенциал передает импульс, равный нулю. Рассмотрим собственный оператор собственной энергии $\Sigma^*(\mathbf{p})$ (фиг. 86) в присутствии постоянного потенциала a_μ и обозначим его в этом случае через $\Sigma_a^*(\mathbf{p})$ (импульс \mathbf{p} не изменяется!). Теперь разложим величину $\Sigma_a^*(\mathbf{p})$ в ряд



Ф и г. 86.

по степеням числа раз действий внешнего потенциала. Тогда получим

$$\Sigma_a^*(\mathbf{p}) = \Sigma^*(\mathbf{p}) + 2\pi e a^\mu \Delta_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \frac{(2\pi e)^2}{2!} a^\mu a^\nu \Xi_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \dots \quad (24.64)$$

Однако вследствие требования калибровочной инвариантности теории оператор $\Sigma_a^*(\mathbf{p})$ должен определяться выражением

$$\begin{aligned} \Sigma_a^*(\mathbf{p}) &= \Sigma^*(\mathbf{p} - e\mathbf{a}) = \\ &= \Sigma^*(\mathbf{p}) - e a^\mu \left(\frac{\partial \Sigma^*(\mathbf{p})}{\partial p^\mu} \right)_{\mathbf{a}=0} + \frac{1}{2!} e^2 a^\mu a^\nu \left(\frac{\partial^2 \Sigma^*(\mathbf{p})}{\partial p^\mu \partial p^\nu} \right)_{\mathbf{a}=0} + \dots, \end{aligned} \quad (24.65)$$

поэтому, сравнивая разложения (24.64) и (24.65), получаем

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Sigma^*(\mathbf{p})}{\partial p^\mu} = \Delta_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}), \quad (24.66)$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2 \Sigma^*(\mathbf{p})}{\partial p^\mu \partial p^\nu} = \Xi_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}). \quad (24.67)$$

Здесь $\Xi_{\mu\nu}$ — оператор комптоновского рассеяния для фотонов с нулевой энергией.

Отметим [это немедленно следует из тождества (24.63)], что в выражениях (24.44) и (24.46) мы должны иметь $B + 2\pi L = 0$; это доказывает взаимное сокращение расходимости в лэмбовском сдвиге

и расходимости при перенормировке волновой функции (см. гл. 22) во всех порядках квантовой электродинамики.

С помощью тождества (24.63) можно получить следующее соотношение между функциями S'_F и Γ_μ . Из выражения (24.10) следует, что

$$(S'_F(\mathbf{p}))^{-1} = S_F^{-1}(\mathbf{p}) - \Sigma^*(\mathbf{p}) = 2\pi \left(\hat{p} - m - \frac{1}{2\pi} \Sigma^*(\mathbf{p}) \right). \quad (24.68)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p^\mu} (S'_F(\mathbf{p}))^{-1} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p^\mu} [S_F^{-1}(\mathbf{p}) - \Sigma^*(\mathbf{p})] = \\ &= \gamma_\mu + \Delta_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \Gamma_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (24.69)$$

Это — другая возможная форма тождества Уорда.

§ 5. Доказательство перенормируемости

Приведенное ниже доказательство перенормируемости в квантовой электродинамике принадлежит Уорду [509]. При его выводе широко используется формальное тождество (24.63).

Интегрируя соотношение (24.63), находим

$$\Sigma^*(\mathbf{p}) - \Sigma^*(\mathbf{p}') = -2\pi \int_{\mathbf{p}'}^{\mathbf{p}} dq^\mu \Delta_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad (24.70a)$$

$$\Sigma^*(\mathbf{p}) - \Sigma^*(\mathbf{p}') = -2\pi \int_0^1 dx (p^\mu - p'^\mu) \Delta_\mu(\mathbf{p}^x, \mathbf{p}^x). \quad (24.70b)$$

Вторую форму (24.70b) мы получили с помощью замены переменных

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}^x = x\mathbf{p} + (1-x)\mathbf{p}'. \quad (24.71)$$

Здесь определена величина \mathbf{p}' как импульс свободного электрона, так что после интегрирования величину \mathbf{p}'^2 нужно положить равной m^2 , а оператор \hat{p}' — равным m , где m — экспериментальная масса электрона. Тогда в член $\Sigma^*(\mathbf{p}')$ автоматически включена перенормировка массы, так как величина $\Sigma^*(\mathbf{p}')$ для $\hat{p}' = m$, по определению, равна величине δm . В дальнейшем не будем выписывать члена $\Sigma^*(\mathbf{p}')$, предполагая, что член с величиной δm включен в определение оператора $\Sigma^*(\mathbf{p})$. Как видно из уравнения (24.21), мы можем правильно получить значение оператора Δ_μ , если на каждой неприводимой вершинной диаграмме Фейнмана заменим каждую матрицу γ_μ на величину Γ_μ , каждую функцию S_F на функцию S'_F , каждую функцию D_F

на функцию D'_F и просуммируем полученный ряд. Кроме того, на диаграмме Δ_μ нет перекрывающихся частей, поскольку она построена из неприводимых диаграмм.

Аналогично определим оператор Δ_μ с помощью соотношения

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Pi^*(\mathbf{k})}{\partial k^\mu} = \Delta_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{k}), \quad (24.72)$$

следовательно,

$$\Pi^*(\mathbf{k}) = -2\pi \int_0^{\mathbf{k}} dq^\mu \Delta_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = -2\pi \int_0^1 dy k^\mu \Delta_\mu(\mathbf{k}y, \mathbf{k}y), \quad (24.73)$$

где собственную энергию фотона $\Pi^*(\mathbf{0})$ мы положили равной нулю вследствие требования калибровочной инвариантности теории.

Необходимо ясно понимать, что сделанные выше определения с помощью дифференцирования по сути являются неявными определениями, причем при вычислении функций Σ и Δ_μ используются неприводимые диаграммы. Фактически необходимо определить функцию

$$W_\mu(\mathbf{k}) = -2ik_\mu + \Delta_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{k}), \quad (24.74)$$

которая связана с функцией D'_F соотношением, аналогичным (24.69), а именно

$$W_\mu(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial k^\mu} [D'_F(\mathbf{k})]^{-1}, \quad (24.75)$$

так что

$$[D'_F(\mathbf{k})]^{-1} = 2\pi \int_0^1 dy k^\mu W_\mu(\mathbf{k}y). \quad (24.76)$$

Из соотношения (24.76) следует, что расходящаяся функция W_μ может встречаться в интегральных уравнениях, определяющих функции D_F , Π^* и т. д.

Если найденный результат выразить с помощью диаграмм Фейнмана, то величина W_μ будет представлять вклад всех неприводимых диаграмм, получаемых из диаграмм собственной энергии фотона вставкой во внутреннюю электронную линию внешней фотонной линии, содержащей переменные внешнего фотона (фиг. 87).

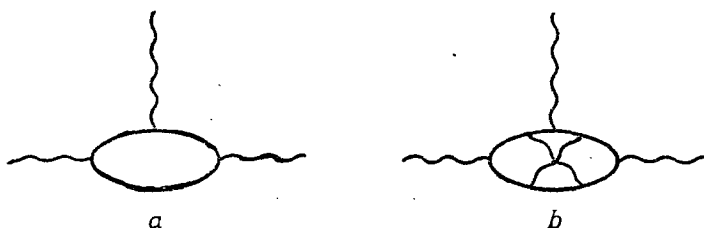
В этом случае при получении матричного элемента из матричного элемента, соответствующего исходной диаграмме Фейнмана, мы опять должны сделать замену

$$\gamma_\mu \rightarrow \Gamma_\mu, \quad D_F \rightarrow D'_F \quad \text{и} \quad S_F \rightarrow S'_F.$$

Тогда первые два члена, а именно член $2ik_p$ и член, соответствующий простейшей „пузырьковой“ диаграмме, даются выражением

$$W_\mu(k) = -2ik_p - \frac{2}{3}\alpha \int \text{Sp} \{ \Gamma^\nu(p, p+k) \times \\ \times S'_F(p+k) \Gamma_\mu(p+k, p+k) S'_F(p+k) \times \\ \times \Gamma_\nu(p+k, p) S'_F(p) \} d^4p + \dots \quad (24.77)$$

Следующий за ними член соответствует „пузырьковой“ диаграмме с двумя пересекающимися фотонными линиями внутри нее (см. фиг. 87).



Фиг. 87.

Имеются также члены более высоких порядков. Итак, теперь и величина Δ_μ , и величина W_μ определены как суммы вкладов неприводимых диаграмм.

Здесь мы можем дать схему для определения с помощью последовательных приближений конечных частей функций Γ_μ , S'_F и D'_F , которые должны быть подставлены в матричный элемент остова для вычисления суммы всех вкладов в матричный элемент.

Чтобы сделать это, вспомним, что оператор Γ_μ логарифмически расходится, следовательно, оператор $\Gamma_{\mu 1}$, определенный с помощью соотношения

$$\Gamma_{\mu 1}(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Delta_\mu(p_1, p_2) - \Delta_\mu(p', p'), \quad (24.78)$$

где p' — снова 4-импульс свободного электрона (т. е. $\hat{p}' = m$), является конечным. Аналогично величина Δ_μ расходится линейно, так как величина Π^* расходится квадратично. [Фактически, ковариантность снижает эту расходимость до логарифмической, потому что не существует инвариантного — 4-вектора, т. е. величина $\Delta_\mu(0, 0)$ в формуле (24.79) равна нулю.] Поэтому величина

$$\Delta_\mu(yk, yk) - \Delta_\mu(0, 0) - (yk)_\nu \left(\frac{\partial \Delta_\mu}{\partial (yk)_\nu} \right)_{k=0} \quad (24.79)$$

сходится. Введем, следуя Уорду, вычитательную методику, с помощью которой можно сделать ядра в уравнениях (24.10) — (24.15) конеч-

ными. Решениями этих новых уравнений будут *конечные* функции S'_{F1} , D'_{F1} и $\Gamma_{\mu 1}$. Итак, мы можем написать

$$S'_{F1}(p) = \\ = S_F(p) - 2\pi S_F(p) \int_0^1 dx (p^\mu - p'^\mu) \{ \Delta_\mu(p^x, p^x) - \Delta_\mu(p', p') \} S'_{F1}(p), \quad (24.80)$$

$$D'_{F1}(k) = D_F(k) - 2\pi D_F(k) \int_0^1 dy k^\mu \times \\ \times \left\{ \Delta_\mu(ky, ky) - \Delta_\mu(0, 0) - (yk_\nu) \left(\frac{\partial \Delta_\mu(ky, ky)}{\partial (yk_\nu)} \right)_{k=0} \right\} D'_{F1}(k), \quad (24.81)$$

$$\Gamma_{\mu 1}(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Delta_\mu(p_1, p_2) - \Delta_\mu(p', p'). \quad (24.82)$$

Функции S'_{F1} , D'_{F1} и $\Gamma_{\mu 1}$, определяемые этими интегральными уравнениями, являются теперь *конечными*. Покажем далее, что эта модификация исходных интегральных уравнений (24.10)—(24.15) с помощью вычитания бесконечных членов эквивалентна перенормировке заряда. Иначе говоря, мы покажем, что конечные и соответствующие им бесконечные функции, определяемые уравнениями (24.10), (24.13) и (24.15), связаны следующими соотношениями:

$$S'_F = Z_2 S'_{F1}(e_1), \quad (24.83)$$

$$D'_F = Z_3 D'_{F1}(e_1), \quad (24.84)$$

$$\Gamma_\mu = Z_1^{-1} \Gamma_{\mu 1}(e_1), \quad (24.85)$$

где Z_1 , Z_2 , Z_3 —(бесконечные) константы, которые должны быть определены, и

$$e_1 = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e. \quad (24.86)$$

С помощью этих соотношений, впервые выписанных Дайсоном [127], можно интерпретировать *вычитание* бесконечных постоянных как *выделение* бесконечных постоянных множителей.

В правильности соотношений (24.83)—(24.85) можно убедиться, подставив выражения (24.83)—(24.85) для функций S'_F , D'_F , Γ_μ в исходную систему интегральных уравнений, определяющих эти функции, а именно:

$$S'_F = S_F + S_F \Sigma^* S'_F, \quad (24.87)$$

$$D'_F = D_F + D_F \Pi^* D'_F, \quad (24.88)$$

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + \Sigma \Delta_\mu(V^i), \quad (24.89)$$

где величины Σ^* и Π^* задаются выражениями (24.19) и (24.20) соответственно, а суммирование проводится по неприводимым V^i . Далее, в уравнении (24.21) для функции Γ_μ в каждом члене с коэффициентом $(e^2)^n$ содержится точно n функций D'_F , $2n$ функций S'_F и $(2n+1)$ функций Γ . Следовательно, если в этих уравнениях величину e заменить на величину e_1 , согласно соотношению (24.86), и функции D'_F , S'_F и Γ_μ — соответствующими конечными выражениями, с которыми они связаны соотношениями (24.83)—(24.85), то получим

$$\Delta_\mu(e, \Gamma_\mu, S'_F, D'_F) = Z_1^{-1} \Delta_\mu(e_1, \Gamma_{\mu 1}, S'_{F1}, D'_{F1}). \quad (24.90)$$

Аналогично в выражении для величины Δ_μ [формула (24.77)] каждый член с коэффициентом $(e^2)^n$ содержит $(2n+1)$ функций Γ и S'_F и $(n-1)$ функций D'_F , так что, если мы снова заменим величины e на e_1 , S'_F на S'_{F1} , D'_F на D'_{F1} , Γ_μ на $\Gamma_{\mu 1}$, то получим

$$\Delta_\mu(e, \Gamma_\mu, S'_F, D'_F) = Z_1^{-1} Z_3^{-1} Z_2 \Delta_\mu(e_1, \Gamma_{\mu 1}, S'_{F1}, D'_{F1}), \quad (24.91a)$$

или

$$W_\mu(e, \Gamma_\mu, S'_F, D'_F) = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{-1} W_\mu(e_1, \Gamma_{\mu 1}, S'_{F1}, D'_{F1}). \quad (24.91b)$$

Поэтому, используя выражения (24.70) и (24.73), получаем

$$\Sigma^*(e_1) = -2\pi Z_1^{-1} \int_0^1 dx (p^\mu - p'^\mu) \Delta_\mu(p^x, p^x; e_1, \Gamma_1, S'_{F1}, D'_{F1}) \quad (24.92)$$

и

$$\Pi^*(e_1) = -2\pi Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{-1} \int_0^1 dy k^\mu \Delta_\mu(yk, yk; e_1, \Gamma_1, S'_{F1}, D'_{F1}). \quad (24.93)$$

Если выразить интегральные уравнения (24.87)—(24.89) через величины (24.92) и (24.93), то найдем

$$\begin{aligned} Z_2 S'_{F1}(e_1) &= \\ &= S_F - 2\pi S_F Z_1^{-1} Z_2 \int_0^1 dx (p^\mu - p'^\mu) \Delta_\mu(p^x, p^x; e_1, \Gamma_1, S'_{F1}, D'_{F1}) S'_{F1}(e_1), \end{aligned} \quad (29.94)$$

$$\begin{aligned} Z_3 D'_{F1}(e_1) &= \\ &= D_F - 2\pi D_F Z_1^{-1} Z_2 \int_0^1 dy k^\mu \Delta_\mu(yk, yk; e_1, \Gamma_1, S'_{F1}, D'_{F1}) D'_{F1}(e_1), \end{aligned} \quad (24.95)$$

$$Z_1^{-1} \Gamma_{\mu 1}(e_1) = \gamma_\mu + Z_1^{-1} \Delta_\mu(e_1, \Gamma_1, S'_{F1}, D'_{F1}). \quad (24.96)$$

Эти уравнения должны быть идентичны интегральным уравнениям (24.80)—(24.82) для конечных операторов S'_{F1} , D'_{F1} и $\Gamma_{\mu 1}$. Две

системы уравнений будут фактически тождественны, если в формулах (24.82) и (24.96)

$$Z_1(e_1) \gamma_\mu = \gamma_\mu - \Delta_\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}'; e_1). \quad (24.97)$$

Если этот результат подставить в уравнение (24.80), то мы получим, что уравнения (24.94) и (24.80) будут идентичны при условии

$$Z_1 = Z_2, \quad (24.98)$$

и, наконец, уравнения (24.81) и (24.95) совпадают, если

$$(Z_3 - 1) \mathbf{k}^2 = i k^\mu k^\nu \int_0^1 dy y \left(\frac{\partial \Delta_\mu(\mathbf{k}y, \mathbf{k}y)}{\partial (y k^\nu)} \right)_{\mathbf{k}=0}, \quad (24.99)$$

или, иначе, если

$$Z_3 = 1 + \frac{k^\mu k^\nu}{\mathbf{k}^2} C_{\mu\nu}, \quad (24.100a)$$

где

$$C_{\mu\nu} = i \int_0^1 dy y \left(\frac{\partial \Delta_\mu(\mathbf{k}y, \mathbf{k}y)}{\partial (y k^\nu)} \right)_{\mathbf{k}=0}. \quad (24.100b)$$

При получении соотношения (24.99) мы полагали в формуле (24.81) $\Delta_\mu(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$; последнее вытекает из требования ковариантности. Наконец, из требования ковариантности опять-таки вытекает, что $C_{\mu\nu} = C g_{\mu\nu}$, следовательно,

$$Z_3 = 1 + C, \quad (24.101)$$

а величина $C g_{\mu\nu}$ дается формулой (24.100b).

Таким образом, мы показали, что соотношения (24.83)—(24.85) правильны, если величина e_1 дается формулой (24.86) и если множители Z определяются соотношениями (24.97), (24.98), (24.100).

Отметим, что из уравнений (24.80) и (24.81) получаются следующие результаты для свободного электрона:

$$S'_{F1}(\mathbf{p})|_{\hat{p}=m} = S_F(\mathbf{p}), \quad (24.102)$$

$$\Gamma_{\mu 1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|_{\hat{p}_1=\hat{p}_2=m} = \gamma_\mu; \quad (24.103)$$

для свободного фотона

$$D'_F(\mathbf{k})|_{\mathbf{k}^2=0} = D_F(\mathbf{k}). \quad (24.104)$$

Из этих соотношений видно, что во всех порядках по константе связи не существует *наблюдаемых* радиационных поправок к формулам движения свободного электрона или фотона. Фактически соотношения (24.102)—(24.104) могут рассматриваться как определение перенормировки массы и заряда, согласно которому свободный (физический) электрон должен обладать определенной массой m

(экспериментальная масса электрона) и определенным зарядом e_1 (экспериментальный заряд электрона), а свободный фотон должен без возмущений распространяться в свободном пространстве с равной нулю массой покоя.

Обратимся теперь к уравнению (24.11). Принимая во внимание, что \mathbf{p} соответствует импульсу свободного электрона, и используя соотношения (24.102) и (24.68), легко показать, что если $\hat{p} = m$, то

$$S'_F(\mathbf{p}) = Z_2 S_F(\mathbf{p}) \quad (24.105a)$$

и

$$\Sigma^*(\mathbf{p}) = +2\pi(1 - Z_2^{-1})(\hat{p} - m); \quad (24.105b)$$

поэтому

$$\psi'(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}) + 2\pi(Z_2 - 1) S_F(\mathbf{p})(\hat{p} - m)\psi(\mathbf{p}). \quad (24.106)$$

Соотношение (24.106) неопределенно, так как, если оператор $(\hat{p} - m)$ действует на функцию $\psi(\mathbf{p})$, то в результате получается нуль, если же этот оператор действует на функцию $S_F(\mathbf{p})$, то в результате получается константа $(1/2\pi)$.

Таким образом, в зависимости от порядка, в котором производится вычисление, функция $\psi'(\mathbf{p})$ равна либо $\psi(\mathbf{p})$, либо $Z_2\psi(\mathbf{p})$. В гл. 21 мы видели, что эта неоднозначность может быть устранена, если при вычислении S -матрицы принять особые меры, с помощью которых можно было бы гарантировать унитарность ее на каждом этапе вычислений. Фактически мы там уже указали, что правильная перенормировка волновой функции дается выражением

$$\psi'(\mathbf{p}) = Z_2^{1/2}\psi(\mathbf{p}), \quad (24.107)$$

так как из формул (24.97) и (24.98) и нашего рассмотрения в гл. 21 следует, что постоянная Z_2 может быть интерпретирована как вероятность нахождения „голого“ электрона (см. также работы Карплуса и Кролла [263]). Аналогичные рассуждения приводят к тому, что

$$\bar{\psi}'(\mathbf{p}) = Z_2^{1/2}\bar{\psi}(\mathbf{p}) \quad (24.108)$$

и что

$$A'_\mu(\mathbf{k}) = Z_3^{1/2}A_\mu(\mathbf{k}). \quad (24.109)$$

Рассмотрим теперь неприводимый матричный элемент рассеяния M . Пусть на диаграмме, которой соответствует матричный элемент M , имеется: F_e внешних электронных линий, B_e внешних фотонных линий и n вершин. Тогда, согласно анализу, проведенному в настоящей главе, матричный элемент M будет содержать n множителей Γ_μ , F_e множителей ψ или $\bar{\psi}$, B_e множителей A , F_i множителей S_F , соответствующих F_i внутренним электронным линиям, и B_i множителей D'_F для внутренних фотонных линий. Напомним, что

число внутренних и внешних линий связано соотношением

$$n = \frac{1}{2} F_e + F_i = B_e + 2B_i. \quad (24.110)$$

Следовательно, если в матричном элементе M заменить функции Γ_μ , S'_F и D'_F на соответствующие им конечные выражения $\Gamma_{\mu 1}$, S'_{F1} и D'_{F1} , с которыми они связаны соотношениями (24.83)—(24.85), то множители Z будут встречаться в матричном элементе только в комбинации

$$(Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2})^n.$$

Этого множителя как раз достаточно, чтобы перевести множитель e^n , на который умножается матричный элемент M , в множитель e_1^n . Таким образом, из матричного элемента M выпадают как величина e , так и множители Z , остаются только конечные операторы $\Gamma_{\mu 1}(e_1)$, $D_{F1}(e_1)$, $S_{F1}(e_1)$ и перенормированный заряд e_1 . Наконец, если мы отождествим величину e_1 с конечным наблюдаемым зарядом электрона, то выражение для матричного элемента M не будет больше содержать расходимостей. Поскольку для матричного элемента M мы выбрали наиболее общую формулу, то мы тем самым полностью завершили устранение ультрафиолетовых расходимостей из S -матрицы¹⁾.

В заключение этого параграфа отметим, что из соотношения (24.98) снова следует, что расходимость в перенормировке волновой функции точно сокращается с расходимостью в вершинной части во всех порядках. Это прямое следствие тождества Уорда и, следовательно, калибровочной инвариантности. Поэтому единственная истинная расходимость в квантовой электродинамике связана с собственной энергией фотона, т. е. с явлениями поляризации вакуума, и включена в расходящуюся константу Z_3 .

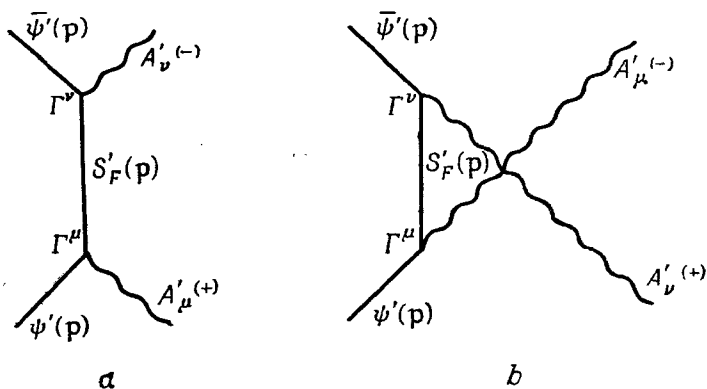
§ 6. Смысл перенормировки заряда

Чтобы выяснить смысл перенормировки заряда, рассмотрим комптоновское рассеяние фотонов с очень низкой частотой на свободном электроны (Тирринг [480]). Имеется два типа неприводимых диаграмм, дающих вклад. Первый тип представлен двумя диаграммами на фиг. 88. Второй тип можно получить с помощью вставки двух фотонных линий в оператор Σ^* , как это показано на фиг. 89. Если рассмотреть предельный случай фотонов с частотой, равной нулю, то диаграммы на фиг. 88 дадут следующий оператор (в который включены все радиационные поправки):

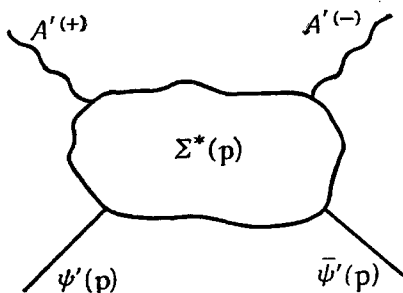
$$M^{(a)} = (2\pi)^2 e^2 \bar{\psi}'(\mathbf{p}) \{ \Gamma^\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) S'_F(\mathbf{p}) \Gamma^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \\ + \Gamma^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) S'_F(\mathbf{p}) \Gamma^\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \} \psi'(\mathbf{p}) A_\mu^{(+)} A_\nu^{(-)}, \quad (24.111)$$

¹⁾ Инфракрасные расходимости и их сокращение при выполнении программы перенормировки рассмотрены Яухом и Рорлихом [242].

где \mathbf{p} — импульс электрона, а $A'^{(+)}$, $A'^{-)}$ — операторы рождения и уничтожения для фотонов с частотой, равной нулю, включающие и радиационные поправки [формула (24.14)]. Вспомнивая приведенное



Фиг. 88.



Фиг. 89.

выше рассмотрение (см. § 4), видим, что диаграмме на фиг. 89 соответствует матричный элемент

$$M^{(b)} = e^2 \bar{\psi}'(\mathbf{p}) \left\{ \frac{\partial^2 \Sigma^*}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \right\} \psi'(\mathbf{p}) A'_\mu^{(+)} A'_\nu^{(-)}. \quad (24.112)$$

Используя тождество

$$\frac{\partial S'_F}{\partial p_\mu} = -S'_F \frac{\partial S'^{-1}_F}{\partial p_\mu} S'_F \quad (24.113)$$

и соотношение (24.69), легко получить

$$\frac{\partial^2 S'_F(\mathbf{p})}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = (2\pi)^2 \{ S'_F(\mathbf{p}) \Gamma^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) S'_F(\mathbf{p}) \Gamma^\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) S'_F(\mathbf{p}) + S'_F(\mathbf{p}) \Gamma^\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) S'_F(\mathbf{p}) \Gamma^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{p}) S'_F(\mathbf{p}) \} + S'_F(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 \Sigma^*(\mathbf{p})}{\partial p_\mu \partial p_\nu} S'_F(\mathbf{p}). \quad (24.114)$$

Поэтому мы можем написать полный матричный элемент M в виде

$$M = M^{(a)} + M^{(b)} = e^2 \bar{\psi}'(\mathbf{p}) \left\{ S_F'^{-1}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 S_F'(\mathbf{p})}{\partial p_\mu \partial p_\nu} S_F'^{-1}(\mathbf{p}) \right\} \psi'(\mathbf{p}) A_\mu^{(+)} A_\nu^{(-)}. \quad (24.115)$$

Если использовать соотношения (24.105) и (24.107)—(24.109) и выполнить указанные внутри скобок в выражении (24.115) операции, то оказывается, что все множители Z_2 сокращаются и матричный элемент M получает вид

$$M = Z_3 e^2 \bar{\psi}(\mathbf{p}) \{ \gamma^\mu S_F(\mathbf{p}) \gamma^\nu + \gamma^\nu S_F(\mathbf{p}) \gamma^\mu \} \psi(\mathbf{p}) A_\mu^{(+)} A_\nu^{(-)}. \quad (24.116)$$

Если положить $Z_3 e^2 = e_1^2$, то матричный элемент M будет в точности равен матричному элементу второго порядка для рассеяния фотонов с частотой, равной нулю. Следовательно, в этом пределе все радиационные поправки исчезают. Матричный элемент M приводит тогда к хорошо известной формуле Томсона

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e_1^2}{4\pi mc^3} \right)^2 \quad (24.117)$$

(вывод см. в гл. 19, § 5, а также см. работу Брауна и Фейнмана [71], где рассмотрены и радиационные поправки).

Итак, мы видим, что перенормировка заряда может рассматриваться как экспериментально определяемая так, чтобы комптоновское рассеяние при малых частотах давалось формулой Томсона. Это определяет экспериментальный заряд электрона e_1 .

Физически такое утверждение может быть сделано потому, что томсоновское рассеяние представляет чисто классический эффект и зависит только от полного заряда. В этом случае длина волны фотона так велика, что детали распределения заряда в рассеивателе являются несущественными. Поскольку вследствие закона сохранения заряда радиационные поправки не могут изменить полный заряд, мы можем непосредственно использовать формулу Томсона для определения экспериментального заряда электрона e_1 .

Можно было бы определить заряд и из другого требования, а именно: закон Кулона должен иметь силу на больших расстояниях при взаимодействии двух покоящихся электронов. Это определение привело бы к той же самой величине заряда e_1 . Фактически можно показать (Челен [258, 260]), что перенормировка заряда определяется в квантовой электродинамике существенно однозначно вследствие закона сохранения заряда.

§ 7. Общие замечания

До сих пор мы рассматривали проблему перенормируемости спинорной квантовой электродинамики. Салам [420] доказал перенормируемость теорий заряженных скалярного и псевдоскалярного

мезонных полей, взаимодействующих с электромагнитным полем. В этом случае помимо перенормировки массы и заряда в лагранжиан нужно еще добавить контрчлен $\delta\lambda\varphi^2$ (величина $\delta\lambda$ — бесконечна) для того, чтобы последовательно сократились все расходимости, появляющиеся при рассмотрении мёллеровского рассеяния одной бесспиновой частицы на другой (см. гл. 23). Доказательство перенормируемости, т. е. существования соотношений типа (24.57), в этом случае гораздо более сложно, чем в спинорной электродинамике, ввиду наличия более сложных перекрывающихся диаграмм. Уорд [509] обобщил свой метод, приведенный в § 5, и на этот случай. Однако, как и в случае спинорной электродинамики, метод Салама более прозрачен и дает более ясную физическую картину перенормировки, чем более простой, но более формальный и неявный метод Уорда.

Доказательство перенормируемости теории поля мезонов, взаимодействующих с нуклонами, если оператор взаимодействия не содержит производных, также было дано Саламом [418, 419]. В случае псевдоскалярных мезонов необходимо снова добавить к гамильтониану бесконечный контрчлен $\delta\lambda\varphi^2$ для заряженных мезонов и $\delta\lambda\varphi^4$ для нейтральных. В случае скалярных мезонов, как указывалось в гл. 22, к члену с φ^4 необходимо добавить член $\delta\chi\varphi^3$ для того, чтобы сократились расходимости, которые дают части диаграмм с тремя внешними мезонными линиями. Было найдено, что можно перенормировать без каких-либо существенно новых усложнений комбинированное взаимодействие мезонных, нуклонных, фотонных и электронно-позитронных полей (Мэттьюс [328—330], Салам [417], Уорд [509]).

Приведенные в этой главе методы вычитаний основываются на использовании обычного представления взаимодействия и с их помощью рассматривается только устранение расходимостей из S -матрицы. Существуют другие методы устранения этих расходимостей. Например, для сокращения эффектов, связанных с перенормировкой заряда в лагранжиан можно ввести другие контрчлены (такие же, как член перенормировки массы). Тогда все с самого начала можно выразить через перенормированный заряд (как и через перенормированную массу). Такая формулировка теории была дана Гупта [218]. Формализм Гупта фактически описывает перенормировку заряда как перенормировку единиц, в которых измеряется электромагнитное поле, а не как перенормировку константы связи. Такеда [477] использовал один из вариантов метода Салама для получения требуемых контрчленов. Прекрасное изложение этих методов дано в статье Мэттьюса и Салама [333], где также ясно и просто рассматриваются задачи мезонных взаимодействий. Все эти методы, в конечном счете, эквивалентны, т. е. они могут быть связаны друг с другом с помощью (неограниченных) „унитарных“ преобразований.

Наконец, рассмотрим кратко пределы применимости теории перенормировок, с которой мы имели дело до сих пор. Первым и наи-

более важным является то, что приведенные выше соображения (т. е. анализ Дайсоном расходимостей с помощью примитивных расходимостей) существенно зависят от разложения S -матрицы по степеням константы связи. Таким образом, предполагалось, что степенной ряд разложения S -матрицы сходится после того, как выполнена перенормировка. В гл. 16, § 2, мы видели, что ряд может и не сходиться в задачах, включающих связанные состояния. Это в явном виде было показано Феррети [157—161]. Он рассматривал унитарный оператор

$$V(t) = \prod_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_{n+1}}^{t_n} \lambda(t') H_I(t') dt' \right\}, \quad (24.118)$$

где t_1, \dots, t_n — последовательность времен в интервале от $-\infty$ до t , которые в пределе становятся бесконечно близкими друг к другу. Оператор $V(t)$ диагонализует полный гамильтониан $H_0 + \lambda H_I$, т. е. V есть такой оператор, что величина

$$E(\lambda) = V^{-1}(H_0 + \lambda H_I)V \quad (24.119)$$

является диагональной в представлении, в котором диагонален гамильтониан H_0 . В выражение для оператора Феррети явно ввел адиабатическую гипотезу, положив, что константа связи λ является функцией времени и очень медленно растет от величины $\lambda = 0$ при $t' = -\infty$ до величины $\lambda = 1$ при $t' = t$. Как мы установили раньше, это необходимо для того, чтобы оператор $V(t)$ сделать полностью определенным.

Далее, если произведение $V(t)$ формально разложить в степенной ряд по константе связи (см. гл. 16), то мы получим следующий результат:

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \dots \int_{-\infty}^{t_n-1} dt_n \lambda(t_1) H_I(t_1) \dots \lambda(t_n) H_I(t_n). \quad (24.120)$$

Затем Феррети рассмотрел, при каких условиях оператор $V(t)$ равен оператору $S(t)$. В довольно общем виде он показал, что это равенство несправедливо, если полный гамильтониан $H_0 + \lambda H_I$ имеет дискретные собственные значения. Это верно даже в том случае, когда дискретные собственные значения могут быть вычислены с помощью теории возмущений. При наличии связанных состояний S -матрица не стремится к какому-либо определенному пределу, когда скорость вариации величины λ делается бесконечно медленной (см. также обсуждение в гл. 16, § 2). Собственно говоря, Феррети удалось показать, что в случае существования дискретных собственных значений ряд для оператора $S(t)$ фактически расходится (см. также работу Глазера и Циммермана [208]). Поэтому, если даже

не рассматривать вопроса о сходимости, перенормировка S -матрицы в том виде, в котором она была проведена в данной главе, строго говоря, применима только к чистым процессам рассеяния свободных частиц.

Сходимость S -матрицы для процессов рассеяния была исследована в работах Херста [239, 240], Тирринга [481], Петермана [385, 386] и др. Они доказали *расходимость* разложения теории возмущений (опуская члены перенормировки) в случае скалярной мезонной теории с нелинейным взаимодействием в виде $\lambda\phi^3$. Кроме того, Тирринг и Петерман в своей работе фактически показали, что включение перенормировки не меняет положения. Дайсон [134]¹⁾ выдвинул ряд аргументов в пользу того, что подобным же образом разложение S -матрицы в замкнутой квантовой электродинамике должно рассматриваться только как асимптотическое разложение. Если это действительно так, то успех теории существенно зависит от малости константы связи.

Феррети [161, 162] пытался дать формулировку теории, в которой удалось бы избежать разложения по степеням константы связи λ . Он предложил найти сначала дифференциальные уравнения, которым бы удовлетворяли физически наблюдаемые величины, являющиеся функциями величины λ . Затем по программе, выдвинутой Феррети, величина $Q(\lambda + \delta\lambda)$ должна была выражаться через данную наблюдаемую величину $Q(\lambda)$ и другие наблюдаемые величины. Ему удалось доказать, что можно перенормировать величину $Q(\lambda + \delta\lambda)$ в первом порядке по $\delta\lambda$. Аналогичные идеи были выдвинуты независимо в работах Фейнмана [170, 171], Томонага (не опубликовано, 1951) и Швингера [442, 443]. Недавно Кайяньелло [76, 77] дал явное компактное выражение для общего вида матричного элемента n -го порядка S -матрицы и, таким образом, продвинулся в направлении, которое позволит обойти разложения в степенной ряд.

Однако наибольший успех в формулировке теории поля без разложения в степенной ряд был до сих пор достигнут в рамках гейзенберговского представления. Именно этому представлению посвящен ряд вопросов, которые мы рассмотрим в гл. 25.

§ 8. Перенормировка в представлении связанных состояний

Доказательство перенормируемости, приведенное в данной главе, может быть легко распространено на проблемы рассеяния, включающие внешние поля, и в более общем виде на проблемы, рассматриваемые в представлении взаимодействия Фарри для связанных состояний (см. гл. 21, § 8). Следует напомнить, что принципиальное различие между представлением взаимодействия частиц в свободных состояниях и представлением взаимодействия частиц в связанных

¹⁾ См. также работы Хори [236] и Риддела [402].

состояниях состоит в том, что в последнем представлении свертки электронных операторов определяются выражением

$$-\frac{1}{2} S_F^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\Phi_{F0}, T(\psi_F(\mathbf{x}) \bar{\psi}_F(\mathbf{y})) \Phi_{F0}), \quad (24.121)$$

где операторы ψ_F , $\bar{\psi}_F$ удовлетворяют уравнению Дирака в присутствии внешнего поля $A^e(\mathbf{x})$. Функция $-\frac{1}{2} S_F^e(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ тождественна с функцией распространения Фейнмана во внешнем поле K_+^A , которую мы рассматривали в гл. 8, § 4. Как следует из уравнений движения для операторов ψ_F , $\bar{\psi}_F$ и определения (24.121), она удовлетворяет следующим уравнениям:

$$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e\gamma^\mu A_\mu^e(\mathbf{x}) - m) S_F^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2i\delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (24.122a)$$

$$i \frac{\partial S_F^e(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y^\mu} \gamma^\mu + S_F^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [e\gamma^\mu A_\mu^e(\mathbf{y}) + m] = -2i\delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (24.122b)$$

Функция $\delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ в правой стороне уравнения (24.122) возникает при дифференцировании по времени соотношения (24.121). Чтобы показать это, запишем T -произведение в виде

$$T(\psi_F(\mathbf{x}) \bar{\psi}_F(\mathbf{y})) = \frac{1}{2} [\psi_F(\mathbf{x}), \bar{\psi}_F(\mathbf{y})] + \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\psi_F(\mathbf{x}), \bar{\psi}_F(\mathbf{y})]_+. \quad (24.123)$$

Если оператор $i\gamma^0 \partial / \partial x^0$ действует на выражение (24.123), то при действии его на функцию $\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ мы получаем функцию $2i\gamma^0 \delta^{(1)}(x_0 - y_0)$. Благодаря наличию этой зависящей от времени δ -функции мы можем использовать канонические правила антикоммутиации для операторов ψ_F и $\bar{\psi}_F$, что дает функцию $\gamma^0 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$, тогда

$$\begin{aligned} & \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - e\gamma^\mu A_\mu^e(\mathbf{x}) - m \right) (\Psi_{0F}, T(\psi_F(\mathbf{x}) \bar{\psi}_F(\mathbf{y})) \Psi_{0F}) = \\ & = -\frac{1}{2} \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e\gamma^\mu A_\mu^e(\mathbf{x}) - m \right) S_F^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\ & = (\Psi_{0F}, T \left(\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - e\gamma^\mu A_\mu^e(\mathbf{x}) - m \right) \psi_F(\mathbf{x}) \bar{\psi}_F(\mathbf{y}) \right) \Psi_{0F}) + \\ & \quad + i\delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = i\delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (24.124) \end{aligned}$$

где при получении последнего равенства мы использовали уравнение движения для оператора $\psi_F(\mathbf{x})$. Уравнения (24.122a) и (24.124) идентичны. Вывод уравнения (24.122b) можно провести таким же образом.

Если ввести фурье-образ

$$S_F^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 e^{-i p_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{i p_2 \cdot \mathbf{x}_2} S_F^e(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \quad (24.125a)^1$$

$$S_F(\mathbf{p}) = \frac{-2i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p} - m}, \quad (24.125b)$$

то уравнения (24.122a) и (24.122b) могут быть легко преобразованы в импульсное представление. С помощью одной итерации из комбинации этих уравнений можно получить следующее точное уравнение:

$$\begin{aligned} S_F^e(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= S_F(\mathbf{p}_1) \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) - \\ &- \left(\frac{(2\pi)^4}{-2i} \right) S_F(\mathbf{p}_1) e \hat{a}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) S_F(\mathbf{p}_2) + \\ &+ \left(\frac{(2\pi)^4}{-2i} \right)^2 S_F(\mathbf{p}_1) \left[\int d^4 q \int d^4 q' \times \right. \\ &\left. \times e \hat{a}(\mathbf{q}) S_F^e(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}') e \hat{a}(\mathbf{q}') \right] S_F(\mathbf{p}_2). \quad (24.126) \end{aligned}$$

Отметим теперь, что, используя уравнение (24.126), мы можем выразить любое расходящееся выражение, в котором содержатся функции S_F^e в представлении взаимодействия Фарри для связанных состояний, через расходящиеся выражения, содержащие только функции S_F , и конечные выражения, в которых содержатся функции S_F^e {член, содержащий функции S_F^e в правой стороне уравнения (24.126), конечен, поскольку в этот член введены по крайней мере две дополнительные внешние линии, соответствующие двум множителям $\hat{a}(\mathbf{q})$ }. Первые два члена в правой стороне уравнения (24.126) представляют собой начало разложения функции S_F^e во внешнем поле. Ясно, что первый член приведет ко всем диаграммам в представлении взаимодействия свободных частиц и может быть перенормирован согласно методам, изложенным в настоящей главе. Член $S_F(\mathbf{p}_1) \hat{a}(\mathbf{q}) S_F(\mathbf{p}_2)$ приведет к диаграммам, рассмотренным в гл. 21, § 2. Там было показано, что только диаграмме внешней поляризации вакуума соответствует истинная расходимость, тогда как сумма всех остальных членов дает *конечный* вклад. Фактически, как только с помощью

¹⁾ Если внешнее поле не зависит от времени (этот случай наиболее интересен с точки зрения практических применений), то в формуле (24.125a) функция $S_F^e(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ должна быть заменена на

$$\delta^{(1)}(p_{10} - p_{20}) S_F^e(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2).$$

перенормировки напряженности внешнего поля устраняется расходимость, соответствующая поляризации вакуума внешним полем во *втором* порядке, внешнее поле больше не вносит расходимостей¹⁾; все вклады высших порядков в поляризацию вакуума внешним полем являются конечными (см. работы Лоу [311], Кролла и Поллока [294], Баранджера [16—18], где расходимость, связанная с поляризацией вакуума внешним полем выделена в явном виде).

¹⁾ Остаются, конечно, расходимости, обусловленные полностью разъединенными диаграммами флуктуаций вакуума, приводящими к множителю $\exp(-L)$, на который множится любой матричный элемент. Раньше уже указывалось, что расходящаяся (мнимая) часть величины L не приводит к каким-либо трудностям, потому что если мы вычисляем *вероятность* какого-либо процесса, то вклад дает только вещественная часть величины L . Ясно, что последний множитель должен быть включен в вычисляемое поперечное сечение.

НОВЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ

До сих пор мы концентрировали свое внимание главным образом на описании чистых процессов рассеяния между начальным и конечным состояниями свободных частиц. Именно для рассмотрения такого рода процессов был развит формализм S -матрицы. Этот формализм позволяет описать результаты измерений поведения всей системы в целом (т. е. дать суммарное описание во всем пространстве-времени (Фейнман [168, 169])). Существует, однако, другой класс наблюдаемых величин, которые не могут быть описаны, если известна только S -матрица. Так, например, S -матрица не позволяет определить связанные состояния системы (Йост [251]) и не позволяет описать результаты возможных локальных измерений, таких как измерение плотности тока или напряженности поля в какой-либо пространственно-временной области (Бор и Розенфельд [47, 48]). Для описания такого рода случаев необходимо обобщить рассматривавшийся до сих пор формализм. Мы увидим, что именно гейзенберговское представление хорошо подходит для описания такого рода случаев.

§ 1. Гейзенберговское представление

Гейзенберговское представление, как было показано в гл. 13, § 1, определяется тем, что в нем вектор состояния системы постоянен, а все взаимодействие включено в операторы. Поэтому в случае электродинамики операторы¹⁾ удовлетворяют следующим уравнениям движения:

$$(i\hat{V} - m)\psi(\mathbf{x}) = \delta m\psi(\mathbf{x}) + e\gamma_\mu A^\mu(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}), \quad (25.1)$$

$$\square A_\mu(\mathbf{x}) = j_\mu(\mathbf{x}) = \frac{e}{2} [\bar{\psi}(\mathbf{x})\gamma_\mu\psi(\mathbf{x})], \quad (25.2)$$

а вектор состояния Ψ не зависит от времени

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0. \quad (25.3)$$

¹⁾ Во всей этой главе для обозначения операторов и векторов состояния в гейзенберговском представлении применяется жирный шрифт.

перенормировки напряженности внешнего поля устраняется расходимость, соответствующая поляризации вакуума внешним полем во *втором* порядке, внешнее поле больше не вносит расходимостей¹⁾; все вклады высших порядков в поляризацию вакуума внешним полем являются конечными (см. работы Лоу [311], Кролла и Поллока [294], Баранджера [16—18], где расходимость, связанная с поляризацией вакуума внешним полем выделена в явном виде).

¹⁾ Остаются, конечно, расходимости, обусловленные полностью разъединенными диаграммами флуктуаций вакуума, приводящими к множителю $e^{\hbar L}$ (— L), на который множится любой матричный элемент. Раньше уже указывалось, что расходящаяся (мнимая) часть величины L не приводит к каким-либо трудностям, потому что если мы вычисляем *вероятность* какого-либо процесса, то вклад дает только вещественная часть величины L . Ясно, что последний множитель должен быть включен в вычисляемое поперечное сечение.

НОВЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ

До сих пор мы концентрировали свое внимание главным образом на описании чистых процессов рассеяния между начальным и конечным состояниями свободных частиц. Именно для рассмотрения такого рода процессов был развит формализм S -матрицы. Этот формализм позволяет описать результаты измерений поведения всей системы в целом (т. е. дать суммарное описание во всем пространстве-времени (Фейнман [168, 169])). Существует, однако, другой класс наблюдаемых величин, которые не могут быть описаны, если известна только S -матрица. Так, например, S -матрица не позволяет определить связанные состояния системы (Йост [251]) и не позволяет описать результаты возможных локальных измерений, таких как измерение плотности тока или напряженности поля в какой-либо пространственно-временной области (Бор и Розенфельд [47, 48]). Для описания такого рода случаев необходимо обобщить рассматривавшийся до сих пор формализм. Мы увидим, что именно гейзенберговское представление хорошо подходит для описания такого рода случаев.

§ 1. Гейзенберговское представление

Гейзенберговское представление, как было показано в гл. 13, § 1, определяется тем, что в нем вектор состояния системы постоянен, а все взаимодействие включено в операторы. Поэтому в случае электродинамики операторы¹⁾ удовлетворяют следующим уравнениям движения:

$$(i\hat{V} - m)\psi(\mathbf{x}) = \delta m\psi(\mathbf{x}) + e\gamma_\mu A^\mu(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}), \quad (25.1)$$

$$\square A_\mu(\mathbf{x}) = j_\mu(\mathbf{x}) = \frac{e}{2} [\bar{\psi}(\mathbf{x})\gamma_\mu\psi(\mathbf{x})], \quad (25.2)$$

а вектор состояния Ψ не зависит от времени

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0. \quad (25.3)$$

¹⁾ Во всей этой главе для обозначения операторов и векторов состояния в гейзенберговском представлении применяется жирный шрифт.

Уравнения (25.1) и (25.2) могут быть получены из следующей плотности функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}) = & -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu(\mathbf{x})}{\partial x_\nu} \frac{\partial A^\mu(\mathbf{x})}{\partial x^\nu} - \frac{1}{4} \left[\bar{\Psi}(\mathbf{x}), \left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \Psi(\mathbf{x}) \right] - \\ & - \frac{1}{4} \left[i \frac{\partial \bar{\Psi}(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} \gamma^\mu + m \bar{\Psi}(\mathbf{x}), \Psi(\mathbf{x}) \right] - \frac{e}{2} [\bar{\Psi}(\mathbf{x}) \gamma^\mu, \Psi(\mathbf{x})] A_\mu(\mathbf{x}) + \\ & + \delta m \bar{\Psi}(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I. \end{aligned} \quad (25.4)$$

Мы видим, что невозможно выписать перестановочные соотношения для гейзенберговских операторов, которые имели бы силу для всех времен. Это требует знания решений уравнений движения (25.1) и (25.2) для всех времен, что фактически и является задачей, которую мы должны решить. Однако из приведенного лагранжиана можно получить канонические перестановочные соотношения, которые верны для операторов, зависящих от одного и того же времени ¹⁾,

$$[\Psi(\vec{x}, t), \bar{\Psi}(\vec{x}', t)]_+ = \gamma_0 \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (25.5a)$$

$$\left[A_\mu(\vec{x}, t), \frac{\partial A_\nu(\vec{x}', t)}{\partial t} \right] = -i\hbar c g_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (25.5b)$$

тогда как все остальные коммутаторы (антикоммутаторы) равны нулю. Эти перестановочные соотношения можно обобщить на случай произвольного пространственно-подобного интервала (Швингер и Вайскопф [437]); тогда они будут иметь вид

$$[\Psi(\mathbf{x}), \bar{\Psi}(\mathbf{x}')]_+ = -iS(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (25.6a)$$

$$[A_\mu(\mathbf{x}), A_\nu(\mathbf{x}')] = -i\hbar c g_{\mu\nu} D(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (25.6b)$$

$$[\Psi(\mathbf{x}), \Psi(\mathbf{x}')]_+ = [\bar{\Psi}(\mathbf{x}), \bar{\Psi}(\mathbf{x}')]_+ = 0, \quad (25.7a)$$

$$[\Psi(\mathbf{x}), A_\nu(\mathbf{x}')] = [\bar{\Psi}(\mathbf{x}), A_\nu(\mathbf{x}')] = 0, \quad (25.7b)$$

если $(x_\mu - x'_\mu)^2 < 0$.

Зная лагранжиан, можно также построить тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ (см., например, работы Швингера [441, 444, 445, 447]), из которого можно определить полный 4-вектор энергии-импульса поля P_μ . Временная компонента его P_0 есть гамильтониан системы, который может быть выражен через переменные поля и сопряженные им импульсы. При отсутствии внешних полей эрмитовские операторы энергии-импульса удовлетворяют соотношениям

$$[P_\mu, P_\nu] = 0; \quad (25.8)$$

¹⁾ Более современные методы получения перестановочных соотношений можно найти в статьях Пайерлса [384], Швингера [443, 444, 447], Бертона и Таушека [73, 74], Чини [84].

эти соотношения выражают сохранение полной энергии и полного импульса поля. Оператор P_μ есть оператор пространственно-временного смещения в следующем смысле:

$$i [P_\mu, F(x)] = \frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}. \quad (25.9)$$

В последнем соотношении $F(x)$ — произвольный гейзенберговский оператор, который зависит от переменной x только через операторы $A_\nu(x)$ и $\psi(x)$.

Поскольку операторы P_μ коммутируют друг с другом, мы можем выбрать представление, в котором каждый вектор состояния есть собственная функция всех операторов P_μ с собственным значением p_μ , т. е.

$$P_\mu \Psi_a = p_\mu^{(a)} \Psi_a. \quad (25.10)$$

Тогда каждый вектор состояния Ψ будет описывать стационарные состояния с определенной энергией и импульсом. Должно быть ясно, что задание определенных энергии и импульса *не характеризует* однозначно состояние. В этом представлении, используя соотношение (25.10), можно написать матричный элемент выражения (25.9) в виде

$$\begin{aligned} i(\Psi_a, [P_\mu, F(x)] \Psi_b) &= i(p_\mu^{(a)} - p_\mu^{(b)}) (\Psi_a, F(x) \Psi_b) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Psi_a, F(x) \Psi_b). \end{aligned} \quad (25.11)$$

Отсюда

$$(\Psi_a, F(x) \Psi_b) = (\Psi_a, F(0) \Psi_b) e^{-i(p^{(b)} - p^{(a)}) \cdot x}, \quad (25.12)$$

где $F(0)$ — оператор $F(x)$, вычисленный в точке $x = 0$. Соотношение (25.12) выражает зависимость от координаты x матричного элемента произвольного гейзенберговского оператора в представлении, в котором операторы P_μ диагональны. Этим представлением мы будем пользоваться во всей данной главе.

Чтобы иметь возможность построить теорию, обычно делается два физических предположения (которые, однако, до сих пор не доказаны) (Челен [256], Вайтман, не опубликовано, 1952):

1. Собственные значения $p_\mu^{(a)}$ представляют собой временно-подобные или равные нулю (световой конус) векторы, т. е. $p_\mu^{(a)} p^{(\mu) a} \geq 0$. Это чрезвычайно правдоподобное предположение требует, чтобы полная масса системы была всегда вещественной. Однако полная масса может равняться нулю в случае, когда имеются только фотоны. Данное предположение можно выразить также иначе: не существует решений уравнения (25.10) с пространственно-подобными импульсами.

2. Существует состояние с наименьшим собственным значением временной компоненты p_0 , т. е. полной энергии. Это состояние,

по определению, называется вакуумом и характеризуется волновой функцией Ψ_0 . Поскольку энергию вакуума можно всегда сделать равной нулю с помощью добавления подходящей константы к оператору P_0 , то в дальнейшем мы будем считать, что энергия вакуума равна нулю. Итак, по этому предположению собственные значения оператора P_0 для любого состояния таковы, что $p_0^{(n)} \geq 0$ для всех n .

В квантовой электродинамике требования $p_0^{(0)} = 0$ недостаточно для однозначного определения вакуумного состояния, потому что остается еще свобода по отношению к калибровочным преобразованиям. В гл. 15, § 4 мы установили, что фактически имеется бесконечное число вакуумных состояний, отличающихся только выбором калибровки. В дальнейшем примем специальную калибровку (Челен [256]), для которой

$$(\Psi_0, \eta A_\mu(x) \Psi_0) = 0. \quad (25.13)$$

Предполагается, что соотношение (25.13) не противоречит второму постулату.

Из соображений удобства мы определим гейзенберговский вектор состояния так, чтобы он совпадал с вектором состояния в представлении взаимодействия в момент времени $t = 0$ (вспомним рассмотрение в гл. 13, § 1). Если в представлении взаимодействия вектор состояния $\Psi(t)$ есть решение уравнения

$$i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H_I(t) \Psi(t), \quad (25.14)$$

то соответствующий ему гейзенберговский вектор состояния Ψ определяется следующим образом:

$$U(t, 0) \Psi = \Psi(t), \quad (25.15)$$

где унитарный оператор $U(t, 0)$ удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial U(t, 0)}{\partial t} = H_I(t) U(t, 0) \quad (25.16a)$$

с граничным условием

$$U(0, 0) = 1. \quad (25.16b)$$

Соотношение между операторами в представлении взаимодействия и соответствующими им операторами в гейзенберговском представлении получается, если потребовать, чтобы средние величины, выраженные через соответствующие векторы состояний, были одинаковы. Таким образом, по определению,

$$(\Psi, F(x) \Psi) = (\Psi(t), F(x) \Psi(t)), \quad (25.17)$$

где время t , от которого зависит вектор состояния $\Psi(t)$, совпадает со значением времени x_0 , от которого зависит оператор $F(x)$.

Тогда, используя соотношение (25.15), получаем

$$\begin{aligned} (\Psi, F(\mathbf{x})\Psi) &= (U(t, 0)\Psi, F(\mathbf{x})U(t, 0)\Psi) = \\ &= (\Psi, U^{-1}(t, 0)F(\mathbf{x})U(t, 0)\Psi), \end{aligned} \quad (25.18a)$$

или

$$F(\mathbf{x}) = U^{-1}(t, 0)F(\mathbf{x})U(t, 0), \quad (25.18б)$$

где снова $t = x_0$.

Явное представление для оператора U можно получить следующим способом. Вспомним, что мы можем перейти от шредингеровского представления, в котором вектор состояния Ψ_S удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \Psi_S(t)}{\partial t} = (H_0 + H_I)\Psi_S(t) = H\Psi_S(t) \quad (25.19)$$

(H_0 и H_I — не зависящие от времени операторы), к представлению взаимодействия с помощью унитарного преобразования

$$\Psi(t) = e^{+iH_0 t} \Psi_S(t). \quad (25.20)$$

Оба представления совпадают в момент времени $t = 0$. Далее, принимая во внимание, что оператор $H = H_0 + H_I$ не зависит от времени, можно прямо перейти от шредингеровского представления к гейзенберговскому с помощью унитарного преобразования

$$\Psi = e^{iHt} \Psi_S(t). \quad (25.21)$$

Ясно, что вектор состояния Ψ действительно удовлетворяет уравнению (25.3). Подставляя в выражение (25.21) вектор состояния $\Psi_S(t)$, задаваемый формулой (25.20), находим

$$\Psi = e^{iHt} e^{-iH_0 t} \Psi(t). \quad (25.22)$$

Сравнивая формулы (25.15) и (25.22), получаем следующее представление оператора U :

$$U(t, 0) = e^{+iH_0 t} e^{-iHt}. \quad (25.23)$$

Во всей этой главе мы будем много раз использовать „истинное“ вакуумное состояние Ψ_0 для взаимодействующих полей. Чрезвычайно важно иметь возможность выразить вектор состояния Ψ_0 через вектор состояния Φ_0 — вакуумное состояние свободных частиц. Чтобы сделать это, отметим, что Ψ_0 — собственное значение оператора H с наименьшей энергией $p_0^{(0)} = 0$, тогда как Φ_0 — собственная функция оператора H_0 с собственным значением $\varepsilon_0 = 0$. Имеются два стандартных метода рассмотрения проблемы (Гелл-Манн и Лоу [203]). Первый из них состоит в введении представления взаимодействия в момент времени $t = -\infty$, а не в момент времени $t = 0$, как мы делали. Затем предполагается, что верна адиабатическая гипотеза, так что в момент времени $t = -\infty$ константа связи равна

нулю и операторы H и H_0 совпадают. Тогда в момент времени $t = -\infty$, $\Psi(-\infty) = \Phi_0$ и с точностью до фазового множителя мы можем написать (вспомним обсуждение в гл. 16, § 2)

$$\Psi_0 = U(0, -\infty)\Phi_0. \quad (25.24a)$$

Поскольку состояние вакуума является устойчивым, т. е. $S\Phi_0 = \lambda\Phi_0$ (λ — константа, по модулю равная единице), то с точностью до константы, по модулю равной единице, можно также написать

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= U(0, -\infty)S^{-1}\Phi_0 = \\ &= U(0, -\infty)U(-\infty, +\infty)\Phi_0 = \\ &= U(0, +\infty)\Phi_0. \end{aligned} \quad (25.24b)$$

Второй метод — теория возмущений для стационарных состояний. Рассмотрим в момент времени $t = 0$ функции $\Psi_0 = \Psi_0(t = 0) = \Psi_0$ и Φ_0 в представлении взаимодействия, которые удовлетворяют уравнениям Шредингера

$$H_0\Phi_0 = \varepsilon_0\Phi_0, \quad (25.25)$$

$$\{H_0 + H_I(0)\}\Psi_0 = E_0\Psi_0. \quad (25.26)$$

В этих уравнениях мы сохраним обозначения E_0 и ε_0 для собственных значений. Уравнение (25.26) можно переписать в несколько иной форме

$$(H_0 - \varepsilon_0)\Psi_0 = (E_0 - \varepsilon_0 - H_I(0))\Psi_0. \quad (25.26a)$$

Теперь введем проекционный оператор \mathfrak{S}_0 на состояние Φ_0 , который, действуя на функцию произвольного состояния Ψ , обладает свойством

$$\mathfrak{S}_0\Psi = a\Phi_0. \quad (25.27a)$$

где a — константа. Этот оператор удовлетворяет также следующим соотношениям:

$$\mathfrak{S}_0^2 = \mathfrak{S}_0, \quad (25.27b)$$

$$[\mathfrak{S}_0, H_0] = 0. \quad (25.27v)$$

Если мы теперь применим оператор \mathfrak{S}_0 к обеим сторонам уравнения (25.26a), то получим тождество

$$\mathfrak{S}_0(E_0 - \varepsilon_0 - H_I(0))\Psi_0 = 0. \quad (25.26b)$$

Другими словами, вектор состояния $(E_0 - \varepsilon_0 - H_I(0))\Psi_0$ всегда ортогонален вектору состояния Φ_0 . Поэтому, используя тождество (25.26b), мы можем переписать уравнение (25.26a) в следующем виде:

$$(H_0 - \varepsilon_0)\Psi_0 = (1 - \mathfrak{S}_0)(E_0 - \varepsilon_0 - H_I(0))\Psi_0. \quad (25.26v)$$

Правая сторона уравнения (25.26v) обладает таким свойством, что если на нее действует оператор $(H_0 - \varepsilon_0)$, то результат не равняется

нулю. Следовательно, если переписать (25.26в) в виде интегрального уравнения (Липман и Швингер [307]), т. е. разделить его на оператор $(H_0 - \varepsilon_0)$, то получим

$$\Psi_0 = c' \Phi_0 + (H_0 - \varepsilon_0)^{-1} (1 - \mathfrak{S}_0) (E_0 - \varepsilon_0 - H_I(0)) \Psi_0 \quad (25.28a)$$

и поэтому

$$c \Psi_0 = [1 - (H_0 - \varepsilon_0)^{-1} (1 - \mathfrak{S}_0) (E_0 - \varepsilon_0 - H_I(0))]^{-1} \Phi_0, \quad (25.28б)$$

где c и c' — нормировочные константы.

Гелл-Манн и Лоу (см. дополнение к статье [203]) дали нестрогое доказательство того, что уравнение (25.28б) можно заменить формальным уравнением (25.24); точнее говоря, они показали, что можно написать

$$c \Psi_0 = \frac{U(0, \pm\infty) \Phi_0}{(\Phi_0, U(0, \pm\infty) \Phi_0)} = c \Psi_0. \quad (25.29)$$

Как в числителе, так и в знаменателе формулы (25.29) имеются бесконечные фазовые множители (соответствующие флуктуациям вакуума, см. гл. 18, § 3), которые сокращаются в частном.

Доказательство очень похоже на то, которое мы кратко изложили в гл. 16, § 2, но несколько более сложно, вследствие наличия сдвига уровней $E_0 - \varepsilon_0$. В самом деле, если, следуя Гелл-Манну и Лоу, включить в оператор H_I затухающий множитель $\exp(-\alpha |t|)$, необходимый для придания строгого смысла оператору $U(0, -\infty)$, и определить $U_\alpha(t, 0)$ как решение уравнения (25.16а), в котором оператор $H_I t$ заменен на $H_I(t) \exp(-\alpha |t|)$, т. е.

$$i \frac{\partial U_\alpha(t, 0)}{\partial t} = H_I(t) e^{-\alpha |t|} U_\alpha(t, 0), \quad (25.16в)$$

и, кроме того, до конца этой главы обозначить

$$\Psi_0(\alpha) = U_\alpha^{-1}(-\infty, 0) \Phi_0 = U_\alpha(0, -\infty) \Phi_0, \quad (25.29a)$$

то легко проверить, что благодаря уравнениям (25.25) и (25.29a) имеет место уравнение

$$\begin{aligned} & \{H_0 U_\alpha(0, -\infty) - U_\alpha(0, -\infty) H_0\} \Phi_0 = \\ & = H_0 \Psi_0(\alpha) - \varepsilon_0 \Psi_0(\alpha) = \\ & = [H_0, U_\alpha(0, -\infty)] \Phi_0 = \\ & = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^0 dt_n e^{\alpha(t_1 + t_2 + \dots + t_n)} \times \\ & \quad \times \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial t_l} P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) \Phi_0; \quad (25.30) \end{aligned}$$

последнее равенство в уравнении (25.30) есть следствие того, что в представлении взаимодействия H_0 есть оператор смещения во времени, т. е.

$$i[H_0, F(\mathbf{x})] = \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x^0}. \quad (25.31)$$

Вследствие симметрии подинтегрального выражения уравнение (25.30) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (H_0 - \varepsilon_0) \Psi_0(\alpha) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \\ &\dots \int_{-\infty}^0 dt_n e^{\alpha(t_1+t_2+\dots+t_n)} \frac{\partial}{\partial t_1} P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) \Phi_0 = \\ &= \left\{ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \right. \\ &\dots \int_{-\infty}^0 dt_n \frac{\partial}{\partial t_1} (e^{\alpha(t_1+t_2+\dots+t_n)} P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) + \\ &\quad \left. + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \right. \\ &\left. \dots \int_{-\infty}^0 dt_n e^{\alpha(t_1+t_2+\dots+t_n)} P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) \right\} \Phi_0 = \\ &= -H_I(0) \Psi_0(\alpha) + i\alpha G \frac{\partial \Psi_0(\alpha)}{\partial G}, \quad (25.32) \end{aligned}$$

где второй член в правой стороне уравнения (25.32) получен с помощью теоремы Эйлера в предположении, что оператор H_I зависит только от величины G (но не от G^2). Следовательно, мы имеем

$$\{H_0 + H_I(0) - \varepsilon_0\} \Psi_0(\alpha) = i\alpha G \frac{\partial \Psi_0(\alpha)}{\partial G}. \quad (25.32a)$$

Теперь мы можем проверить (ср. с работой Гелл-Манна и др. [206]), что член в правой стороне действительно представляет сдвиг уровня, так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\Phi_0, i\alpha G \frac{\partial \Psi_0(\alpha)}{\partial G} \right) = (E_0 - \varepsilon_0) (\Phi_0, \Psi_0). \quad (25.33)$$

Это доказывает исходное предположение, что выражение (25.29) есть решение уравнения (25.26).

В дальнейшем в этой главе мы будем широко использовать выражение (25.29). Однако сначала исследуем некоторые трансформационные свойства операторов и состояний в гейзенберговском представлении.

§ 2. Рассмотрение инвариантных свойств

Большинство результатов, которые мы формулируем в этом параграфе, есть следствие инвариантности теории по отношению к преобразованиям Лоренца и сделанных предположений о физических состояниях системы полей. Следовательно, эти результаты применимы также к любой релятивистской инвариантной теории поля.

Прежде чем углубляться в математические детали, следует напомнить еще раз, что означает лоренц-инвариантность теории. С этой целью рассмотрим две системы координат S и S' , связанные неоднородным преобразованием Лоренца,

$$x'_\mu = a_\nu^\mu x_\nu + L_\mu, \quad (25.34)$$

где L_μ — постоянный 4-вектор смещения. Наблюдатель в системе S будет иметь определенный набор наблюдаемых величин, соответствующих им операторов и полную систему собственных функций; то же будет иметь и наблюдатель в системе S' . Далее, для того чтобы теория имела физический смысл, необходимо, чтобы существовал набор правил, с помощью которых наблюдатель в системе S может проверить эксперименты, сообщенные ему наблюдателем в системе S' . Существование этого набора правил дает возможность наблюдателю в системе S' выразить операторы и собственные функции в системе S через соответствующие величины в своей системе. С точки зрения математического аппарата наличие этих правил подразумевает, что существует унитарный оператор \mathfrak{v} , который зависит от величин a_ν^μ и L_μ . Этот оператор такой, что если \mathbf{Q} и Ψ — операторы и собственные функции в системе S , то $\Psi' = \mathfrak{v}\Psi$ и $\mathbf{Q}' = \mathfrak{v}\mathbf{Q}\mathfrak{v}^{-1}$ представляют соответствующие величины в системе S' . Кроме того, если теория должна быть лоренц-инвариантной, то все физические законы должны иметь одинаковый вид, когда их выражают через операторы и собственные функции как в системе S , так и в системе S' .

Рассмотрим сначала случай не взаимодействующих полей; для определенности возьмем поле Дирака со спином $1/2$ и выясним, каковы должны быть трансформационные свойства операторов и состояний системы, чтобы теория в самом деле была лоренц-инвариантной.

Для не взаимодействующих полей ($H_I = 0$) представление взаимодействия идентично гейзенберговскому представлению. Чтобы избежать в дальнейшем путаницы, мы не будем использовать здесь жирный шрифт для обозначения величин в представлении взаимодействия, которые, как установлено, фактически являются величинами в гейзенберговском представлении свободных полей.

Для упрощения выкладок рассмотрим случай одной частицы. Этот случай описывается вектором состояния $\Phi_{(1)}$, причем един-

ственная неравная нулю амплитуда есть

$$f_{\alpha}(\mathbf{x}) = (\Phi_0, \psi_{\alpha}(\mathbf{x}) \Phi_{(1)}). \quad (25.35)$$

Это, очевидно, следует из свойств оператора $\psi(\mathbf{x})$ и вектора вакуумного состояния Φ_0 . Оператор $\psi(\mathbf{x})$ есть оператор уничтожения электрона. Следовательно, при действии на вектор одноэлектронного состояния $\Phi_{(1)}$ он уничтожает имеющийся в нем электрон и в результате получается вакуумное состояние. Величина $f_{\alpha}(\mathbf{x})$ должна быть интерпретирована как амплитуда вероятности нахождения одного электрона (вспомним, однако, что она не дает вероятность нахождения частицы в точке \mathbf{x}). Поскольку функция $\psi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению свободного поля

$$\left(-i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + m\right) \psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (25.36)$$

то, подействовав на обе стороны выражения (25.35) оператором $(\hat{p} - m)$, получим, что величина $f(\mathbf{x})$ также удовлетворяет уравнению Дирака

$$\left(-i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + m\right) f(\mathbf{x}) = 0. \quad (25.37)$$

Таким образом, можно заключить, что функция $f(\mathbf{x})$ по сути представляет „одночастичную“ дираковскую „волновую функцию“, которая была детально рассмотрена в гл. 4. Имеется, однако, одно существенное различие, являющееся следствием того, что вакуум есть состояние с наименьшей энергией. Поэтому требуется, чтобы

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(\mathbf{x}) \Phi_0 &= 0, & \text{или} & & b_r(\vec{p}) \Phi_0 &= 0, \\ \bar{\psi}^{(+)}(\mathbf{x}) \Phi_0 &= 0, & \text{или} & & d_r(\vec{p}) \Phi_0 &= 0, \end{aligned} \quad (25.38)$$

так что если выражение (25.35) переписать, используя формулы (15.61) и (25.38), то получим

$$f_{\alpha}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E_p}} (\Phi_0, b_r(\vec{p}) \Phi_{(1)}) \omega^r(\vec{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}. \quad (25.39)$$

Следовательно, мы видим, что $f(\mathbf{x})$ есть суперпозиция решений уравнения Дирака, относящихся к состояниям с *положительной* энергией в отличие от случая, рассмотренного в гл. 4, где *a priori* допускалось, что функция $f(\mathbf{x})$ может быть решением уравнения Дирака, относящимся как к положительной, так и к отрицательной энергиям. Это различие, хотя и важное для физического понимания теории, не существенно для обсуждения инвариантности теории.

Далее, в гл. 5 мы видели, что если при однородном преобразовании Лоренца

$$x'_y = a^{\mu}_{\nu} x_{\mu}, \quad \text{или} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{a}\mathbf{x} \quad (25.40)$$

„волновая функция“ $f(\mathbf{x})$ преобразуется по следующим правилам:

$$f'_\alpha(\mathbf{x}') = \sum_{\beta=1}^4 S_{\alpha\beta}(\mathbf{a}) f_\beta(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{x}'), \quad (25.41)$$

где S — несингулярная 4-мерная матрица, действующая на спинорные индексы α функции f и удовлетворяющая требованиям

$$S^{-1}\gamma^\lambda S = a^\lambda_\nu \gamma^\nu, \quad (25.42)$$

$$\det S = 1, \quad (25.43)$$

то уравнение Дирака для одной частицы в самом деле имеет инвариантную форму, т. е. функция f' удовлетворяет тому же уравнению в штрихованных координатах, которому удовлетворяет функция f в нештрихованных.

Теперь определим трансформационные свойства операторов поля и векторов состояния так, чтобы соотношение (25.41) имело силу для одночастичной амплитуды. Тогда, в случае, когда имеется n свободных, невзаимодействующих частиц, описываемых вектором состояния $\Phi_{(n)}$ и амплитудой

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = (\Phi_0, N(\psi_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) \dots \psi_{\alpha_n}(\mathbf{x}_n)) \Phi_{(n)}), \quad (25.44)$$

мы автоматически получаем, что амплитуда $f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ будет преобразовываться (как и следовало ожидать) непосредственно как произведение одночастичных волновых функций, т. е.

$$f'_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n}(\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n) = \sum_{\beta_1 \dots \beta_n} S_{\alpha'_1 \beta_1} \dots S_{\alpha'_n \beta_n} f_{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{a}^{-1}\mathbf{x}'_n). \quad (25.45)$$

Как и в случае, рассмотренном в гл. 5, мы применим преобразование шредингеровского типа, при котором преобразуются волновые функции (здесь векторы состояний), но *один и тот же* набор операторов используется наблюдателями как в системе S , так и в системе S' . Далее, результаты возможных экспериментов в системе, содержащей одну частицу, будут описываться наблюдателем в системе S' с помощью амплитуды

$$f'(\mathbf{x}') = (\Phi'_0, \psi(\mathbf{x}') \Phi'_{(1)}), \quad (25.46)$$

тогда как наблюдатель в системе S опишет те же эксперименты в своей системе с помощью амплитуды

$$f(\mathbf{x}) = (\Phi_0, \psi(\mathbf{x}) \Phi_{(1)}). \quad (25.47)$$

Эти две амплитуды связаны между собой соотношением (25.41). С другой стороны, как мы указывали выше, векторы состояний связаны между собой соотношением

$$\Phi' = \mathcal{V}\Phi, \quad (25.48)$$

являющимся математической формулировкой тех правил, которыми по условию определяется, какие из проведенных в различных системах отсчета экспериментов должны считаться идентичными друг другу. Чтобы связь между амплитудами (25.41) имела место, должно выполняться соотношение

$$(\Phi_0, S(\mathbf{a})\psi(\mathbf{x})\Phi_{(1)}) = (\Phi'_0, \psi(\mathbf{x}')\Phi'_{(1)}). \quad (25.49)$$

Вспомнив, что оператор \mathcal{U} является унитарным, мы можем выразить трансформационные свойства этого оператора в следующем виде:

$$\mathcal{U}(\mathbf{a})\psi(\mathbf{x})\mathcal{U}(\mathbf{a})^{-1} = S(\mathbf{a})^{-1}\psi(\mathbf{x}') = S(\mathbf{a})^{-1}\psi(\mathbf{a}\mathbf{x}). \quad (25.50)$$

Приведенные выражения (25.48) и (25.50) дают схему преобразования операторов и векторов состояния в теории поля. Лоренц-инвариантность теории теперь очевидна, поскольку при описании теории поля с помощью величин $f_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1)$, $f_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ и т. д. уравнения, которым подчиняются преобразованные амплитуды f' в штрихованных координатах, могут быть просто получены, если поставить штрихи в уравнениях, которым подчиняются амплитуды f .

Так как вакуум должен быть одинаковым для всех наблюдателей, то он характеризуется выражением

$$\mathcal{U}\Phi_0 = \Phi_0, \quad (25.51)$$

т. е. кроме того, что он является состоянием с наименьшей энергией, он является также инвариантным.

Обратимся теперь к гейзенберговскому представлению для случая взаимодействующих полей. Можно определить трансформационные свойства операторов и состояний так, чтобы они были простыми и соответствовали соотношениям (25.48) и (25.50) в случае свободных полей. Итак, при неоднородном собственном преобразовании Лоренца

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{L} \quad (25.52)$$

преобразованное гейзенберговское состояние дается формулой

$$\Psi' = \mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{L})\Psi, \quad (25.53)$$

тогда как преобразованные операторы, например, в случае скалярной мезонной теории даются выражениями ¹⁾

$$\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{L})\varphi(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{L})^{-1} = \varphi(\mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{L}), \quad (25.54)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{L})\psi(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{L})^{-1} = S(\mathbf{a})^{-1}\psi(\mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{L}). \quad (25.55)$$

¹⁾ Отметим, что случай бесконечно малых смещений, описываемый соотношением (25.9), включен в соотношения (25.54) и (25.55), потому что при чистом переносе ($\mathbf{a} = 1$)

$$\mathbf{v}(1, \mathbf{L}) = \mathbf{v}(\mathbf{L}) = e^{(i\mathbf{L}\cdot\mathbf{P})},$$

где \mathbf{P} — оператор энергии-импульса поля. Если \mathbf{L} соответствует бесконечно малому смещению в пространстве-времени, т. е. $\mathbf{L} = \eta\mathbf{l}$, где η — бесконечно

Вакуум в случае взаимодействующих полей опять является инвариантом, характеризуется соотношением

$$\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{L}) \Psi_0 = \Psi_0 \quad (25.56)$$

и по сделанному нами предположению является состоянием с наиминимальшей энергией. Ясно, что формула (25.56) описывает состояние с равными нулю зарядом, импульсом и моментом количества движения.

Трансформационные свойства, описанные до сих пор, относятся только к собственным преобразованиям Лоренца. Трансформационные свойства операторов (особенно спинорных операторов) при отражениях пространства и времени несколько более запутаны и требуют дальнейшего рассмотрения. В частности, при отражении во времени оператор ϑ не является больше унитарным (Вигнер [536]). С преобразованиями отражения читатель может ознакомиться в исчерпывающей статье Вайтмана и Швебера [535] ¹⁾.

В случае электродинамики инвариантность теории по отношению к зарядовому сопряжению может быть сформулирована аналогичным способом (Пайс и Йост [367], Вольфенштейн и Равенхолл [540], Мишель [335]). Напомним, что зарядовое сопряжение представляет операцию изменения знака заряда e всех частиц на обратный, причем все остальные характеристики, например импульсы или спины, остаются неизменными.

Унитарный оператор зарядового сопряжения ϑ_c , который осуществляет эту операцию в электродинамике, дается выражениями

$$\psi^c(\mathbf{x}) = \vartheta_c \psi(\mathbf{x}) \vartheta_c^{-1} = C \bar{\psi}^T(\mathbf{x}), \quad (25.57)$$

$$\bar{\psi}^c(\mathbf{x}) = \vartheta_c \bar{\psi}(\mathbf{x}) \vartheta_c^{-1} = (C^{-1} \psi(\mathbf{x}))^T, \quad (25.58)$$

где индекс T означает транспонированную величину по отношению к спинорным индексам. Здесь C — матрица, с которой мы встре-

малая величина, то из соотношения (25.54) следует, что

$$\begin{aligned} \vartheta(\eta l) \varphi(\mathbf{x}) \vartheta^{-1}(\eta l) &= \varphi(\mathbf{x} + \eta l) \approx \\ &\approx (1 + i\eta l \cdot \mathbf{P}) \varphi(\mathbf{x}) (1 - i\eta l \cdot \mathbf{P}) \approx \\ &\approx \varphi(\mathbf{x}) + i\eta l_\mu [\mathbf{P}^\mu, \varphi(\mathbf{x})] \approx \varphi(\mathbf{x}) + \eta l_\mu \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_\mu}, \end{aligned}$$

или

$$i[\mathbf{P}_\mu, \varphi(\mathbf{x})] = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_\mu}.$$

Последнее соотношение совпадает с соотношением (25.9). Аналогично мы можем написать для однородного преобразования Лоренца ($\mathbf{L} = 0$)

$$\vartheta(\mathbf{a}, 0) = e^{\frac{1}{2}(\alpha_{\mu\nu} M^{\mu\nu})},$$

где $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ — тензор момента количества движения системы полей.

¹⁾ В связи с этим см. также работу Вика, Вайтмана и Вигнера [532].

чались уже в гл. 13, § 6 и в гл. 18, § 3. Она действует на спинорные индексы, обладает следующими свойствами:

$$C^{-1}\gamma_{\mu}C = -\gamma_{\mu}^T, \quad (25.59)$$

$$C^T C^{-1} = -1 \quad (25.60)$$

и определяется с точностью до константы, по модулю равной единице. Инвариантность квантовой электродинамики по отношению к зарядовому сопряжению будет гарантирована, если

$$\mathcal{v}_c \mathbf{A}_{\mu}(\mathbf{x}) \mathcal{v}_c^{-1} = -\mathbf{A}_{\mu}(\mathbf{x}). \quad (25.61)$$

Действительно, если мы подействуем на уравнение (25.1) оператором \mathcal{v}_c слева и оператором \mathcal{v}_c^{-1} справа, то, используя соотношение (25.61) и умножая справа на матрицу C^{-1} , мы получим точное уравнение движения для сопряженного спинора $\bar{\psi}$

$$+i \frac{\partial \bar{\psi}(\mathbf{x})}{\partial x^{\mu}} \gamma^{\mu} + m \bar{\psi}(\mathbf{x}) = -\delta m \bar{\psi}(\mathbf{x}) - e \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma_{\mu} \mathbf{A}^{\mu}(\mathbf{x}). \quad (25.62)$$

Аналогично такая же операция над уравнением спинора $\bar{\psi}$ дает уравнение движения для спинора ψ . Наконец, поскольку

$$\mathcal{v}_c \mathbf{j}_{\mu}(\mathbf{x}) \mathcal{v}_c^{-1} = -\mathbf{j}_{\mu}(\mathbf{x}), \quad (25.63)$$

то из соотношения (25.61) следует, что уравнение (25.2) инвариантно по отношению к зарядовому сопряжению. Это завершает доказательство инвариантности электродинамики по отношению к зарядовому сопряжению.

Далее, оператор \mathcal{v}_c оставляет инвариантными перестановочные соотношения операторов поля и коммутирует с оператором \mathbf{P}_0 , гамильтонианом поля. Поэтому он представляет интеграл движения. Кроме того, поскольку два последовательных зарядовых сопряжения любого вектора состояния приводят к этому же вектору состояния, оператор \mathcal{v}_c имеет два собственных значения: $+1$ и -1 . Из соотношения (25.63) следует, что оператор \mathcal{v}_c антикоммутирует с полным зарядом и, следовательно, операторы \mathcal{v}_c и \mathbf{Q} могут быть одновременно приведены к диагональному виду только для состояний с равным нулю зарядом. Вакуум в дальнейшем мы можем характеризовать еще и тем, что он инвариантен по отношению к зарядовому сопряжению, т. е.

$$\mathcal{v}_c \Psi_0 = \Psi_0. \quad (25.64)$$

Соображения, аналогичные рассмотренным выше, могут быть применены и в случае заряженных мезонных полей и мезонных взаимодействий. Мы отсылаем читателя к статьям Пайса и Йоста [367], Вольфенштейна и Равенхолла [540] и Мишель [335], в которых он сможет ознакомиться с обсуждением этих случаев.

§ 3. Средние значения в состоянии вакуума

Обратимся теперь к изучению средних значений гейзенберговских операторов в состоянии вакуума.

Рассмотрим сначала среднее значение хронологического T -произведения двух бозонных операторов в состоянии вакуума. Обозначим этот матричный элемент через

$$R(x_1, x_2) = (\Psi_0, T(\varphi(x_1)\varphi(x_2))\Psi_0) \quad (25.65)$$

и рассмотрим, например, следующую последовательность времен $x_{10} > x_{20}$. Если гейзенберговские операторы и векторы состояния в правой стороне формулы (25.65) выразить теперь через соответствующие величины в представлении взаимодействия, используя формулы (25.15), (25.18) и (25.24а), то получим для $x_{10} > x_{20}$

$$R(x_1, x_2) = (U(0, +\infty)\Phi_0, U^{-1}(t_1, 0)\varphi(x_1)U(t_1, 0) \times \\ \times U^{-1}(t_2, 0)\varphi(x_2)U(t_2, 0)U(0, -\infty)\Phi_0). \quad (25.66)$$

Мы опустили знаменатель в выражении (25.29); это означает что если мы вычисляем выражение (25.66) с помощью диаграмм Фейнмана, то необходимо опустить все несвязанные диаграммы с вакуумными замкнутыми петлями. Далее, оператор U — унитарный и обладает следующими групповыми свойствами [вспомним формулы (16.9) — (16.17)]:

$$U(t_1, t_3)U(t_3, t_2) = U(t_1, t_2) \quad (25.67)$$

и

$$U^{-1}(t_1, t_2) = U^\dagger(t_1, t_2) = U(t_2, t_1). \quad (25.68)$$

Следовательно,

$$U^{-1}(t_1, t_2)U(t_1, t_3) = U(t_2, t_3), \quad (25.69)$$

причем оператор $U(t, t')$ удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial U(t, t')}{\partial t} = H_I(t)U(t, t'), \quad (25.70a)$$

где

$$H_I(t) = G \int d\sigma(\mathbf{x}) N(\bar{\psi}(\mathbf{x})\Gamma\psi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})),$$

и граничному условию

$$U(t, t) = 1. \quad (25.70б)$$

Решение уравнения (25.70), как мы видели в гл. 16, может быть представлено в виде

$$U(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \dots \int_{t'}^t dt_n T(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)). \quad (25.71)$$

Поэтому матричный элемент R можно переписать в следующем виде:

$$R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\Phi_0, U^{-1}(0, +\infty) U^{-1}(t_1, 0) \varphi(\mathbf{x}_1) \times \\ \times U(t_1, t_2) \varphi(\mathbf{x}_2) U(t_2, -\infty) \Phi_0), \quad (25.72a)$$

$$R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\Phi_0, T(U(+\infty, t_1) \varphi(\mathbf{x}_1) U(t_1, t_2) \varphi(\mathbf{x}_2) U(t_2, -\infty)) \Phi_0), \quad (25.72b)$$

$$R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\Phi_0, T(U(+\infty, -\infty) \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2)) \Phi_0). \quad (25.72в)$$

Очевидно, введение хронологического оператора в формуле (25.72б) вполне законно. Этот оператор позволяет затем переставить множители под знаком T -произведения и получить формулу (25.72в). Оператор в последней формуле можно выписать в явном виде

$$T(U(+\infty, -\infty) \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2)) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 y_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 y_n T(\mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_n) \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2)). \quad (25.73)$$

Легко проверить, что выражение (25.73) верно при произвольных временах x_{10} и x_{20} . С помощью теоремы Вика мы можем выписать матричный элемент $R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ в виде разложения в степенной ряд. Первые члены этого ряда имеют вид

$$R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} \Delta_F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \\ + \frac{1}{8} G^2 \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 \Delta_F(\mathbf{x}_1 - y_1) \text{Sp}(\Gamma S_F(y_1 - y_2) \Gamma \times \\ \times S_F(y_2 - y_1)) \Delta_F(y_2 - \mathbf{x}_2) + \dots \quad (25.74)$$

Если выразить полученный результат с помощью диаграммы Фейнмана, то ясно, что матричный элемент $R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ соответствует простой бозонной линии и всем возможным вставкам в нее частей собственной энергии и вершинных частей. Именно такую функцию в гл. 24 мы назвали штрихованной бозонной функцией распространения

$$R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} \Delta'_F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\Psi_0, T(\varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2)) \Psi_0). \quad (25.75)$$

Таким же образом легко показать, что

$$-\frac{1}{2} S'_F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\Psi_0, T(\phi(\mathbf{x}_1) \bar{\psi}(\mathbf{x}_2)) \Psi_0), \quad (25.76a)$$

$$-\frac{1}{2} S'_F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\Phi_0, T(S\psi(\mathbf{x}_1) \bar{\psi}(\mathbf{x}_2)) \Phi_0); \quad (25.76б)$$

в формуле (25.766) вместо оператора $U(+\infty, -\infty)$ мы написали S -матрицу. Если использовать трансформационные свойства вакуумного состояния и операторов поля, а также первое и второе предположения о состояниях полевой системы, сделанные в § 1, то можно получить некоторые общие свойства функций Δ'_F и S'_F (Челен [256])¹⁾. В дальнейшем предполагается, что мы имеем дело с перенормированными гейзенберговскими операторами ψ и $\bar{\psi}$ (см. также следующий параграф). Сингулярные функции Δ' и S' , рассматриваемые ниже, будут поэтому также перенормированными и связанными с перенормированными сингулярными функциями с помощью обычных множителей Z .

Сначала рассмотрим бозонную функцию распространения $\Delta'_F(x_1, x_2)$. Поскольку оператор ϑ , дающий собственное преобразование Лоренца, является унитарным, выражение (25.75) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \Delta'_F(x_1, x_2) = (\Psi_0, T(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) \Psi_0), \quad (25.77a)$$

$$\frac{1}{2} \Delta'_F(x_1, x_2) = (\vartheta \Psi_0, \vartheta T(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) \vartheta^{-1} \vartheta \Psi_0). \quad (25.77b)$$

Затем, используя формулу (25.55) и инвариантность вакуума [формула (25.56)], получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta'_F(x_1, x_2) &= (\Psi_0, \vartheta T(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) \vartheta^{-1} \Psi_0) = \\ &= (\Psi_0, T(\varphi(ax_1 + L) \varphi(ax_2 + L)) \Psi_0). \end{aligned} \quad (25.78)$$

Рассмотрим теперь случай чистой трансляции ($a = I$). Тогда из формул (25.78) и (25.77a) следует, что

$$\Delta'_F(x_1, x_2) = \Delta'_F(x_1 + L, x_2 + L). \quad (25.79)$$

Поскольку это соотношение имеет место при произвольных L , то ясно, что $\Delta'_F(x_1, x_2)$ может быть функцией только разности координат x_1 и x_2 , т. е.

$$\Delta'_F(x_1, x_2) = \Delta'_F(x_1 - x_2). \quad (25.80)$$

Аналогично, если мы рассмотрим собственное однородное преобразование Лоренца, то получим, что

$$\Delta'_F(x_1 - x_2) = \Delta'_F(a(x_1 - x_2)); \quad (25.81)$$

поэтому Δ'_F может быть функцией только инварианта $(x_1 - x_2)^2$. Далее, следовало бы рассмотреть свойства матричного элемента при отражениях пространства и времени. Однако, поскольку соответствующие трансформационные свойства ранее не рассматривались, здесь мы этого делать не будем.

¹⁾ См. также работу Лемана [301].

Обратимся теперь к свойствам функции Δ'_F , вытекающим из наших базисных предположений о состояниях системы. Рассмотрим снова случай $x_{10} > x_{20}$. Используя полноту состояний Ψ_n , формулу (25.75) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta'_F(x_1 - x_2) &= (\Psi_0, \varphi(x_1) \varphi(x_2) \Psi_0) = \\ &= \sum_n (\Psi_0, \varphi(x_1) \Psi_n) (\Psi_n, \varphi(x_2) \Psi_0). \end{aligned} \quad (25.82)$$

Используя затем формулу (25.12), мы можем переписать выражение (25.82) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta'_F(x_1 - x_2) &= \sum_n (\Psi_0, \varphi(0) \Psi_n) (\Psi_n, \varphi(0) \Psi_0) e^{-i p^{(n)} \cdot (x_1 - x_2)} = \\ &= \sum_n |(\Psi_0, \varphi(0) \Psi_n)|^2 e^{-i p^{(n)} \cdot (x_1 - x_2)}. \end{aligned} \quad (25.83)$$

Если ввести теперь функцию плотности состояний, то суммирование по индексу n можно заменить интегрированием по переменной p . Тогда можно написать

$$\frac{1}{2} \Delta'_F(x_1 - x_2) = \int d^4 p \rho(p^2) e^{-i p \cdot (x_1 - x_2)} \quad \text{для } x_{10} > x_{20}, \quad (25.84)$$

где

$$\rho(p^2) = \sum_n |(\Psi_0, \varphi(0) \Psi_n)|^2 \geq 0. \quad (25.85)$$

Сумма, определяющая функцию $\rho(p^2)^{1)}$, берется по всем состояниям, принадлежащим собственному значению p_n . Замена суммы на интеграл возможна потому, что $p_0^{(n)} \geq 0$ и $(p^{(n)})^2 \geq 0$. Из последнего условия следует, что не существует состояний Ψ_n с пространственно-подобными импульсами, а также подразумевается, что функция $\rho(p^2)$ равна нулю, если $p^2 < 0$. А это достаточные условия для замены суммы интегралом. Далее, функцию Δ'_F можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta'_F(x_1 - x_2) &= \int d^4 p \rho(p^2) e^{-i p \cdot (x_1 - x_2)} = \\ &= \int_0^{+\infty} dm^2 \rho(m^2) \int_{p_0 > 0} d^4 p \delta(m^2 - p^2) e^{-i p \cdot (x_1 - x_2)} \quad \text{для } x_{10} > x_{20}, \end{aligned} \quad (25.86a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta'_F(x_1 - x_2) &= \\ &= \int_0^{+\infty} dm^2 \rho(m^2) \int_{p_0 > 0} d^4 p \delta(m^2 - p^2) e^{+i p \cdot (x_1 - x_2)} \quad \text{для } x_{10} < x_{20}. \end{aligned} \quad (25.86b)$$

¹⁾ Из требования инвариантности (25.81) следует, что ρ есть функция только p^2 .

В правой стороне этих выражений имеются интегралы по переменной p , которые, очевидно (с точностью до множителя $-(2\pi)^4$), представляют собой сингулярные функции $\Delta^{(+)}$ и $\Delta^{(-)}$ (но не штрихованные) для частиц с массой m . Поэтому функцию Δ'_F можно, наконец, выразить (вспомним гл. 17, § 4) в виде следующего интеграла:

$$\Delta'_F(x_1 - x_2) = \int_0^{+\infty} dm^2 \rho(m^2) \Delta_F(x_1 - x_2; m). \quad (25.87)$$

Аналогичный результат справедлив и для сингулярных функций $\Delta'^{(\pm)}$ и $\Delta'^{(1)}$ с той же самой весовой функцией ρ . Например,

$$\begin{aligned} \Delta'(x_1 - x_2) &= -i(\Psi_0, [\varphi(x_1), \varphi(x_2)] \Psi_0) = \\ &= \int_0^{\infty} dm^2 \rho(m^2) \Delta(x_1 - x_2; m). \end{aligned} \quad (25.88)$$

Итак, мы установили, что функцию Δ'_F (а также другие сингулярные функции) можно выразить в виде интеграла Стильтеса по массам. Этот факт имеет важное значение, так как из него вытекают многие аналитические свойства функции Δ'_F (см. гл. 8 в книге Виддера [534] и гл. 5 в книге Титчмарша [484]). Эти свойства можно проще всего выразить с помощью фурье-образа функции $\Delta'_F(x)$, т. е.

$$\Delta'_F(k^2) = \frac{2i}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} dm^2 \rho(m^2) \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (25.89)$$

Можно показать, например, что $\Delta'_F(k^2)$ есть регулярная функция в верхней полуплоскости. Могут быть сделаны также некоторые общие утверждения об ее асимптотическом поведении (Виддер [534]). В частности, из выражения (25.89) следует, что функция $\Delta'_F(k^2)$, никогда не может быть меньше (даже асимптотически), чем функция $\Delta_F(k^2)$.

В случае свободного бозонного поля с массой μ ясно, что функция плотности ρ имеет вид

$$\rho(m^2) = \delta(m^2 - \mu^2), \quad (25.90)$$

так что выражение (25.87) сводится к функции распространения свободной бозе-частицы. В общем случае дискретные собственные значения оператора P^2 приводят к появлению δ -функций в функции плотности ρ . Эти дискретные собственные значения выражают тогда стабильные состояния полевой системы.

Аналогичное рассмотрение можно провести и в случае спиноров (Леман [301]). Так, рассмотрим, например, матричный элемент

$$Q_{\alpha\beta}(x_1 - x_2) = (\Psi_0, \psi_{\alpha}(x_1) \bar{\psi}_{\beta}(x_2) \Psi_0). \quad (25.91)$$

Из требования инвариантности при однородных преобразованиях вытекает, что

$$Q_{\alpha\beta}(y) = \sum_{\delta\tau} S_{\alpha\delta}^{-1}(a) S_{\tau\beta}(a) Q_{\delta\tau}(ay), \text{ где } y = x_1 - x_2. \quad (25.92)$$

Мы можем затем разложить величину $Q_{\alpha\beta}(y)$ по шестнадцати линейно независимым матрицам Γ_i , рассмотренным в гл. 4. Тогда получим

$$Q_{\alpha\beta}(y) = \delta_{\alpha\beta} Q^{(S)}(y) + (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} Q_\mu^{(V)}(y) + (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} Q_{\mu\nu}^{(T)}(y) + i(\gamma_5 \gamma^\mu)_{\alpha\beta} Q_\mu^{(A)}(y) + (\gamma_5)_{\alpha\beta} Q^{(P)}(y), \quad (25.93)$$

где $S, V, T \dots$ означают скаляр, вектор, тензор, аксиальный вектор и псевдоскаляр. Если использовать свойство шпуров матриц Γ и соотношения

$$S^{-1}(a) \gamma^\mu S(a) = a_\nu^\mu \gamma^\nu, \quad (25.94)$$

$$S^{-1}(a) \sigma^{\mu\nu} S(a) = a_\beta^\mu a_\tau^\nu \sigma^{\beta\tau} \text{ и т. д.},$$

то можно прийти к следующему заключению: требование (25.92), а также требование инвариантности по отношению к отражениям и зарядовому сопряжению подразумевает, что величина Q выражается в виде

$$Q(y^2) = Q^{(S)}(y^2) + \gamma^\mu Q_\mu^{(V)}(y^2). \quad (25.95)$$

Написав $Q = Q(y^2)$ в формуле (25.95), мы тем самым в явной форме представили инвариантность по отношению к однородным преобразованиям Лоренца. Проводя вычисления таким же образом, как в случае бозонных полей, можно прийти (Леман [301])¹⁾ к выводу, что

$$iQ(x_1 - x_2) = S'^{(+)}(x_1 - x_2) = \int_0^\infty dm^2 \rho_1(m^2) S'^{(+)}(x_1 - x_2; m^2) + \int_0^\infty dm^2 \rho_2(m^2) \Delta^{(+)}(x_1 - x_2; m^2), \quad (25.96)$$

где ρ_1 и ρ_2 положительно-полуопределенные (positive semidefinite) функции плотности в мезонной теории, которые могут быть, однако, отрицательными в квантовой электродинамике (Челен [256]). Такой же результат получается для сингулярных функций S', S'_F и т. д. с теми же самыми весовыми функциями ρ_1 и ρ_2 .

Выражения (25.87) и (25.96) дают общее представление функций распространения, в которые включены все радиационные поправки.

¹⁾ См. также работу Гелл-Манна и Лоу [207].

Они могут быть получены из общих соображений инвариантности и некоторых весьма правдоподобных предположений о свойствах состояний системы.

§ 4. S-матрица в гейзенберговском представлении

После этих предварительных формальных соображений мы можем теперь проанализировать некоторые из рассмотренных нами ранее проблем и получить ряд новых результатов. Ограничимся областью квантовой электродинамики, хотя ясно, что аналогичные утверждения могут быть сделаны и в случае перенормируемых мезонных теорий (см. § 8).

Сначала рассмотрим определение S-матрицы в гейзенберговском представлении (Янг и Фельдман [542], Челен [255]). С этой целью проинтегрируем уравнения движения (25.1), (25.2), используя функции Грина D_R , S_R и S_A , определенные в гл. 17, § 4. Тогда мы получим (опуская член с δm)

$$A_\mu(x) = A_\mu^{\text{in}}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} D_R(x-x') J_\mu(x') d^4x', \quad (25.97)$$

$$\psi(x) = \psi^{\text{in}}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} S_R(x-x') e\gamma_\mu A^\mu(x') \psi(x') d^4x'; \quad (25.98)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{\text{in}}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} e\bar{\psi}(x') \gamma_\mu A^\mu(x') S_A(x'-x) d^4x'. \quad (25.99)$$

Эти уравнения могут рассматриваться как определения приходящих (incoming) гейзенберговских полей ψ^{in} и A^{in} . Если использовать предельные процессы, в которых мы предполагали, что взаимодействие при переходе к пределу $x_0 \rightarrow -\infty$ может быть включено адиабатически [т. е. $e \rightarrow e \exp(-\alpha|x_0|)$], то мы получим, что операторы ψ и ψ^{in} , а также A_μ и A_μ^{in} совпадают в момент времени $x_0 = -\infty$. [Обсуждение см. в работах Челена [259], Циммермана [550] и Кита [276]. В последней работе показано, почему решение уравнений (25.97) — (25.99) в виде степенного ряда никогда не даст связанных состояний. Можно установить связь этого замечания с замечаниями, сделанными нами в конце гл. 6 и 24, если учесть, что такое решение в виде степенного ряда дает S-матрицу; см. ниже]. Операторы поля с индексом „in“ удовлетворяют однородным уравнениям свободных полей и, следовательно, перестановочным соотношениям для свободных полей, т. е.

$$[\psi_\alpha^{\text{in}}(x), \bar{\psi}_\beta^{\text{in}}(x')]_+ = -iS_{\alpha\beta}(x-x'), \quad (25.100)$$

$$[A_\mu^{\text{in}}(x), A_\nu^{\text{in}}(x')] = -ig_{\mu\nu}D(x-x'). \quad (25.101)$$

Мы можем выписать также другую систему решений, проводя интегрирование от $+\infty$ до t и используя опережающие функции Грина S_A и D_A

$$A_\mu(x) = A_\mu^{\text{out}}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} D_A(x-x') j_\mu(x') d^4x', \quad (25.102)$$

$$\psi(x) = \psi^{\text{out}}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} S_A(x-x') e\gamma_\mu A^\mu(x') \psi(x') d^4x', \quad (25.103)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{\text{out}}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(x') e\gamma_\mu A^\mu(x') S_R(x'-x) d^4x', \quad (25.104)$$

где снова операторы с индексом „out“, определяемые уравнениями (25.102)—(25.104), удовлетворяют уравнениям свободных полей и перестановочным соотношениям

$$[A_\mu^{\text{out}}(x), A_\nu^{\text{out}}(x')] = -ig_{\mu\nu} D(x-x'), \quad (25.105)$$

$$[\psi^{\text{out}}(x), \bar{\psi}^{\text{out}}(x')]_+ = -iS(x-x'). \quad (25.106)$$

Поскольку операторы „приходящего“ и „уходящего“ (outgoing) полей удовлетворяют одним и тем же перестановочным соотношениям, должно существовать следующее унитарное преобразование:

$$\psi^{\text{out}}(x) = S^{-1} \psi^{\text{in}}(x) S, \quad (25.107)$$

$$\bar{\psi}^{\text{out}}(x) = S^{-1} \bar{\psi}^{\text{in}}(x) S, \quad (25.108)$$

$$A_\nu^{\text{out}}(x) = S^{-1} A_\nu^{\text{in}}(x) S. \quad (25.109)$$

Можно показать, что оператор S тождественно равен S -матрице (Янг и Фельдман [542], Челен [255]), которую мы рассматривали в предыдущих главах. Преимуществом настоящего метода является отсутствие связи его с какой-либо пространственно-подобной поверхностью и нормалью к ней¹⁾.

§ 5. Величина перенормировочных констант

Челен в своей недавней важной работе [256], используя формулировку квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении, смог получить замкнутые выражения для перенормировочных констант Z_1 , Z_2 , Z_3 и δm . Здесь мы изложим кратко результаты его анализа, следуя работе Лемана [301].

¹⁾ Формулировку теории рассеяния через операторы с индексами „in“ и „out“ и связь их с операторами в представлении взаимодействия см. в статье Швебера [435].

В § 3 мы видели, что все штрихованные величины, введенные в гл. 24, можно выразить через соответствующие гейзенберговские операторы. Поэтому, используя соотношения (24.107) — (24.109), можно определить перенормированные гейзенберговские переменные (отмечаемые индексом 1) и наблюдаемый заряд e_1 с помощью соотношений

$$\hat{\psi} = Z_2^{1/2} \psi_1, \quad (25.110)$$

$$\bar{\hat{\psi}} = Z_2^{1/2} \bar{\psi}_1, \quad (25.111)$$

$$A_\mu = Z_3^{1/2} A_{\mu 1}, \quad (25.112)$$

$$e = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e_1, \quad (25.113)$$

$$Z_1(e_1) = 1 - L(e_1), \quad (25.114)$$

$$Z_2 = 1 + B(e_1), \quad Z_3 = 1 + C(e_1), \quad (25.115)$$

где расходящиеся величины L , B , C были определены ранее [см. (24.97) (24.98) (24.100) и (24.101)].

Уравнения движения (25.1) и (25.2) можно записать для перенормированных операторов (мы опускаем индекс 1) в виде

$$(+i\hat{V} - m)\hat{\psi}(x) = \delta m \hat{\psi}(x) + e Z_1 Z_2^{-1} \gamma_\mu A^\mu(x) \hat{\psi}(x), \quad (25.116)$$

$$\square A_\mu(x) = \frac{1}{2} e Z_1 Z_3^{-1} [\bar{\hat{\psi}}(x) \gamma_\mu \hat{\psi}(x)]. \quad (25.117)$$

Перенормированные операторы теперь удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям на пространственно-подобной поверхности, т. е. для $(x - x')^2 < 0$:

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -i g_{\mu\nu} Z_3^{-1} D(x - x'), \quad (25.118)$$

$$[\hat{\psi}(x), \bar{\hat{\psi}}(x')]_+ = -i Z_2^{-1} S(x - x'). \quad (25.119)$$

Используя эти соотношения, а также формулу (25.96) и соотношение, аналогичное (25.88) для электродинамики (т. е. среднее значение по вакууму для перенормированных операторов), получаем

$$Z_3^{-1} = \int_0^\infty \rho(\mu^2) d\mu^2, \quad (25.120)$$

$$Z_2^{-1} = \int_0^\infty \rho_1(m^2) dm^2 \quad (25.121)$$

(в случае электродинамики функция ρ_1 может быть отрицательной).

Выражение (25.120) можно получить, дифференцируя выражения (25.118) и (25.88) по переменной x_0 , полагая затем $x_0 = x'_0$ и сравнивая получающиеся выражения. [Напомним, что $\partial \Delta(x)/\partial x_0$ для $x_0 = 0$ равно $-\delta(\vec{x})$; см. формулу (15.49 а)]. Аналогично соотно-

шение (25.121) можно получить, сравнивая для равных времен $x_0 = x'_0$ формулу (25.119) с выражением

$$(\Psi_0, [\psi(x), \bar{\psi}(x')]_+ \Psi_0) = -iS'(x - x') \quad (25.96a)$$

[здесь функция S' получена из правой стороны соотношения (25.96) с помощью простой замены $\Delta^{(+)}$ и $S^{(+)}$ на Δ и S соответственно]. Напомним, что для $x_0 = 0$, $S(x) = \gamma^{08}(\vec{x})$ и $\Delta(x) = 0$.

Поскольку ρ положительно-определенная функция, то из формулы (25.120) следует, что $Z_3^{-1} > 0$. Кроме того, если предположить, что в теорию включено описание физического состояния одного бозона с массой μ ($\mu = 0$ в случае электродинамики), то функция $\rho(m^2)$ должна иметь вид

$$\rho(m^2) = \delta(m^2 - \mu^2) + \rho'(m^2), \quad (25.90a)$$

где $\rho'(m^2)$ — снова положительно-определенная функция. Поэтому величина Z_3^{-1} должна быть положительной и больше единицы. Так как, весьма вероятно, величина Z_3^{-1} может быть бесконечной (Челен [257]), то, по-видимому, соотношение (25.118) указывает на то, что перестановочные соотношения для равных времен для перенормированных полей фактически расходятся более сильно, чем δ -функция. Однако прежде чем делать этот вывод, необходимо было бы провести строгое исследование соотношений типа (25.88), (25.96), причем расходимость интеграла

$$\int \rho'_i(m^2) dm^2$$

должна была бы быть рассмотрена в свете теории распределения Шварца [432].

Замкнутые выражения можно также получить для величин δt и Z_1 (или L) (Челен [256])¹⁾. С помощью указанного метода можно провести программу перенормировки, не прибегая к теории возмущений. Кроме того, Челен показал, что функция плотности встречается в формулах для наблюдаемых величин в виде

$$\int dm^2 \frac{\rho(m^2)}{m^2(\rho^2 - m^2)}.$$

Этот интеграл должен быть конечным, если теория последовательна. Челену [257] недавно удалось доказать замечательную теорему о том, что по крайней мере одна (а возможно, и все) перенормировочная константа (L , C , B) должна быть бесконечной.

¹⁾ См. также работу Мэттьюса и Салама [333].

§ 6. Проблема связанных состояний

До сих пор в этой главе мы рассматривали только задачи рассеяния и не рассматривали задач, в которые включены связанные состояния. Сейчас мы кратко опишем некоторые успешные попытки, которые были сделаны при рассмотрении проблем связанных состояний в теории поля.

К проблеме связанных состояний можно подойти двумя тесно связанными путями. Один из них состоит в обобщении понятия функций распространения Фейнмана на системы многих частиц (Фейнман [168, 169], Швингер [442], Салпетер и Бете [422], Гелл-Манн и Лоу [203], Нисидзима [357], Фрезе [189, 190] и др.). Другой — в рассмотрении непосредственно амплитуды. Мы приведем оба метода.

Рассмотрим одну частицу. В случае свободного поля можно интерпретировать матричный элемент

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} S_F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= (\Phi_0, T(\psi(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{x}'))\Phi_0) = \\ &= (\psi(\mathbf{x})\gamma_0\Phi_0, \bar{\psi}(\mathbf{x}')\Phi_0), \text{ если } x_0 > x'_0 \end{aligned} \quad (25.122)$$

как амплитуду вероятности нахождения электрона в точке \mathbf{x} , если в момент времени x'_0 электрон находился в точке \vec{x}' . (Это, строго говоря, не совсем верно, поскольку мы не можем интерпретировать \mathbf{x} как собственное значение оператора положения.)

При наличии взаимодействия (предположим, что применима адиабатическая гипотеза) можно дать следующее описание проблемы: „голый“ электрон рождается в момент времени $t = -\infty$. При этом вектор состояния есть $\bar{\psi}(\mathbf{x}')\Phi_0$. Этот вектор состояния может быть получен во все последующие моменты времени с помощью оператора $U(t, -\infty)$, так что вероятность найти электрон в состоянии $\psi(\mathbf{x})\Phi_0$ в момент времени $t = x_0 = +\infty$ (т. е. во время, гораздо более позднее, чем $x_0 = -\infty$) с точностью до множителя γ_0 [см. формулу (25.76)] дается выражением

$$\begin{aligned} (\Phi_0, \psi(\mathbf{x})\bar{S}\bar{\psi}(\mathbf{x}')\Phi_0) &= (\Phi_0, T(S\psi(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{x}'))\Phi_0) = \\ &= -\frac{1}{2} S'_F(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (25.123)$$

Теперь выражение (25.123) можно обобщить на произвольные точки пространства-времени \mathbf{x} , \mathbf{x}' . Кроме того, поскольку несвязанные диаграммы не должны рассматриваться в выражении (25.123), то, используя формулу (25.33), можно написать

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} S'_F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{(\Phi_0, T(S\psi(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{x}'))\Phi_0)}{(\Phi_0, S\Phi_0)} = \\ &= (\Psi_0, T(\psi(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{x}'))\Psi_0) = \\ &= K_+^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (25.124)$$

и рассматривать это выражение как определение функции распространения Фейнмана (в которую включены радиационные поправки) для случая одной частицы. Швингер [442] назвал эту функцию $K_+^{(1)}$ функцией Грина одночастичной системы. В недавней серии своих работ, озаглавленной „Теория квантованных полей“, [441, 442, 444—446, 448, 449], он развил общую теорию функций Грина в теории поля¹⁾. Она основывается на лагранжевой формулировке квантовой механики (см. гл. 6.33 в книге Дирака [108], а также работу Фейнмана [167]). Данное им определение функции Грина для одно- и двухчастичных систем совпадает (с точностью до множителя i) с определениями (25.124) и (25.125). Он вывел также неоднородные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти функции Грина, и определил соответствующие однородные уравнения как волновые уравнения для амплитуд. Мы не будем излагать здесь эту теорию, а будем исходить из более интуитивного и менее формального рассмотрения Салпетера — Бете [422] и Гелл-Манна и Лоу [203]. Связь швингеровского метода функций Грина и приближения Фейнмана — Дайсона рассмотрена в статье Утияма и др. [495].

Функцию распространения для системы двух частиц мы можем определить так же, как и для одной частицы, а именно:

$$K_+^{(2)}(x_3, x_4; x_1, x_2) = \frac{(\Phi_0, T(S\psi(x_3)\psi(x_4)\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2))\Phi_0)}{(\Phi_0, S\Phi_0)}, \quad (25.125a)$$

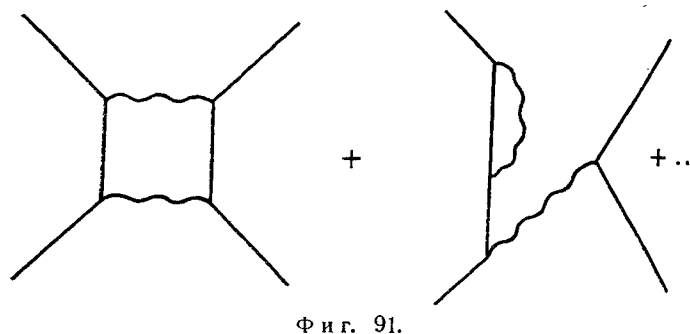
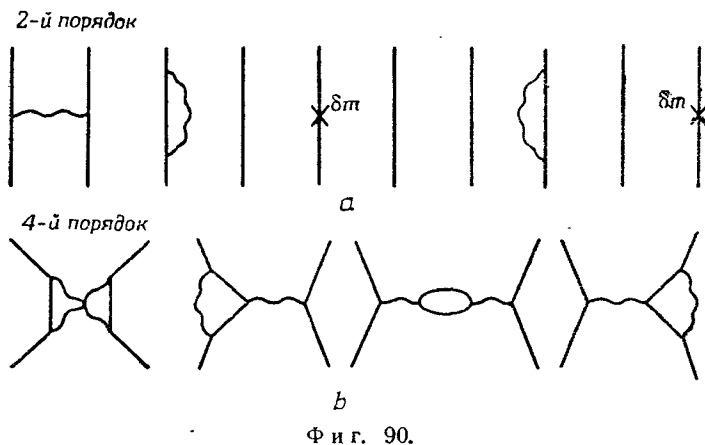
$$K_+^{(2)}(x_3, x_4; x_1, x_2) = (\Psi_0, T(\psi(x_3)\psi(x_4)\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2))\Psi_0). \quad (25.125b)$$

Если выражение (25.125a) разложить в степенной ряд, то становится ясным, что функция $K_+^{(2)}$ идентична двухчастичной функции распространения, которая была рассмотрена в гл. 8. Теперь продолжим начатый там анализ и рассмотрим более сложные диаграммы, следуя рассмотрению Салпетера и Бете [422].

Понятия приводимых и неприводимых диаграмм для случая двух частиц определим таким же образом, как мы это делали в гл. 24. Назовем диаграмму приводимой, если ее можно разделить на две несвязанные части, проводя при этом линию так, чтобы она вообще не пересекала бозонной линии, а каждую из двух фермионных линий пересекала только 1 раз. Неприводимые диаграммы могут быть упорядочены в соответствии со степенью константы связи, встречающейся в матричном элементе, отвечающем данной диаграмме. Неприводимые диаграммы до четвертого порядка включительно приведены

¹⁾ Аналогичные вопросы исследовались также в следующих работах: Фрадкин Е. С., ЖЭТФ, 26, 751 (1954) и 29, 121 (1955); Галанин А. Д., Иоффе Б. Л., Померанчук И. Я., ДАН СССР, 98, 361 (1954). — *Прим. перев.*

на фиг. 90. Диаграммы же, приведенные на фиг. 91, являются приводимыми. Ясно, что приводимые диаграммы могут быть всегда разделены на неприводимые части.



Если мы обозначим сумму всех неприводимых диаграмм через

$$\sum_{(m)} G^{(m)}(1, 2; 3, 4) = G(1, 2; 3, 4),$$

то двухчастичную функцию распространения $K_+^{(2)}(3, 4; 1, 2)$ можно будет записать (Салпетер и Бете [422] в следующем виде:

$$\begin{aligned} K_+^{(2)}(3, 4; 1, 2) &= K_+^{(1)}(3, 1) K_+^{(1)}(4, 2) = \\ &= i \int \int \int \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 K_+^{(1)}(3, 5) K_+^{(1)}(4, 6) \times \\ &\quad \times \sum_{(m)} G^{(m)}(5, 6; 7, 8) K_+^{(2)}(7, 8; 1, 2). \quad (25.126) \end{aligned}$$

Хотя это интегральное уравнение содержит бесконечный ряд $\sum_{(m)} G^{(m)}$, ясно, что оно имеет гораздо меньше членов, чем исходное уравнение. Однако этот ряд еще не сходится (Херст [238]). Если провести итерацию по Нейману — Лиувиллю для уравнения (25.126), то станет ясным, что приводимые диаграммы также правильно включены в рассмотрение с помощью интегрального уравнения. В этом известное преимущество теории, в которой константа связи мала и разложение $\sum_{(m)} G^{(m)}$ может рассматриваться как асимптотический ряд.

Например, большая часть энергии связи между протоном и электроном может быть получена при повторном учете диаграммы, приведенной на фиг. 90, *a*. Преимущество, достигаемое при использовании уравнения (25.126) с ядром $G^{(1)}$, такое же, как если бы мы решали уравнение Шредингера с потенциалом, вместо того чтобы рассматривать этот потенциал как возмущение (ср. с гл. 40).

В низшем порядке функция взаимодействия $G^{(1)}$ в электродинамике дается выражением

$$G^{(1)}(5, 6; 7, 8) = + e^2 D_F(5, 6) \delta^{(4)}(5, 7) \delta^{(4)}(6, 8) \gamma_a^\mu \gamma_{b\mu}, \quad (25.127)$$

где индексы *a* и *b* относятся к двум фермионам. Следует отметить, что в формуле (25.126) можно опустить все члены, соответствующие частям собственной энергии фермионов, так как их влияние было уже учтено в выражении для $G^{(m)}$, поскольку каждая фермионная линия представляется множителем

$$K_{\pm}^{(1)} = -\frac{1}{2} S'_F.$$

Связь ядра $K_{\pm}^{(2)}$ со свойствами стационарных состояний системы двух нуклонов может выражаться следующим образом (Гелл-Манн и Лоу [203]). Пусть $t_1, t_2 > t_3, t_4$, тогда, используя полноту системы стационарных состояний Ψ_n , выражение (25.125 б) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} K_{+}^{(2)}(1, 2; 3, 4) &= \sum_n (\Psi_0, T(\psi(x_1)\psi(x_2))\Psi_n)(\Psi_n, T(\bar{\psi}(x_3)\bar{\psi}(x_4))\Psi_0) = \\ &= \sum_n \chi_n(x_1, x_2) \bar{\chi}_n(x_3, x_4), \end{aligned} \quad (25.128)$$

$$\text{где} \quad \chi_n(x_1, x_2) = (\Psi_0, T(\psi(x_1)\psi(x_2))\Psi_n) \quad (25.129a)$$

$$\text{и} \quad \bar{\chi}_n(x_3, x_4) = (\Psi_0, \bar{T}(\bar{\psi}(x_3)\bar{\psi}(x_4))\Psi_n)^* \gamma_a^0 \gamma_b^0. \quad (25.129b)$$

Здесь оператор \bar{T} упорядочивает операторы в обратном хронологическом порядке по сравнению с оператором T , т. е. оператор, зависящий от более позднего времени, стоит справа от оператора, зависящего от более раннего времени. Таким образом, мы видим,

что функция распространения двух частиц может быть построена с помощью „двухчастичных амплитуд“ точно так же, как была построена соответствующая функция (8.25) в случае одной частицы. Весьма возможно, что полное знание этой функции распространения достаточно для определения уровня энергии связанного состояния двух частиц.

Чтобы представить эту возможность более подробно, отметим, что движение центра инерции может быть исключено следующим образом. Поскольку векторы состояния Ψ_0 и Ψ_n являются собственными функциями оператора P_μ с собственными значениями $p_\mu^{(0)}$ и $p_\mu^{(n)}$ соответственно, то, используя формулу (25.9), можно написать

$$\begin{aligned} (p_\mu^{(n)} - p_\mu^{(0)}) (\Psi_0, T(\psi(x_1)\psi(x_2))\Psi_n) &= \\ &= (p_\mu^{(n)} - p_\mu^{(0)}) \chi_n(x_1, x_2) = \\ &= (\Psi_0, [T(\psi(x_1)\psi(x_2)), P_\mu] \Psi_n) = \\ &= i \left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} \right) (\Psi_0, T(\psi(x_1)\psi(x_2))\Psi_n) = \\ &= i \left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} \right) \chi_n(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (25.130)$$

Последнее уравнение выражает с помощью амплитуды $\chi_n(x_1, x_2)$ свойства симметрии состояний Ψ_n и Ψ_0 . Кроме того, поскольку при пространственно-временной трансляции L вектор состояния Ψ_n преобразуется согласно формуле

$$v(L)\Psi_n = e^{+iP \cdot L} \Psi_n = e^{+ip^{(n)} \cdot L} \Psi_n \quad (24.131)$$

инвариантность матричного элемента (25.129) при такого рода трансляции требует, чтобы выполнялось соотношение

$$\begin{aligned} \chi_n(x_1, x_2) &= (v(L)\Psi_0, v(L)T(\psi(x_1)\psi(x_2))v^{-1}(L)v(L)\Psi_n) = \\ &= (\Psi_0, T(\psi(x_1+L)\psi(x_2+L))\Psi_n) e^{+i(p^{(n)}-p^{(0)}) \cdot L} = \\ &= \chi_n(x_1+L, x_2+L) e^{+i(p^{(n)}-p^{(0)}) \cdot L}. \end{aligned} \quad (25.132)$$

Это — интегральная форма выражения (25.130).

Соотношение (25.132) должно быть верным для произвольного смещения пространства-времени L . Поэтому можно написать (с точностью до нормировочной константы)

$$\chi_n(x_1, x_2) = e^{-i(p^{(n)}-p^{(0)}) \cdot x} f_n(x), \quad (25.133)$$

где

$$x = \frac{(m_1 x_1 + m_2 x_2)}{(m_1 + m_2)} = \{T, \vec{X}\}$$

— координата центра инерции¹⁾, а $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ — относительная координата двух частиц.

Теперь по аналогии со случаем одной частицы мы можем написать [см. выражения (8.52) и (8.53)] уравнение распространения для амплитуды $\chi(1, 2)$, причем ядром уравнения является функция $K_+^{(2)}(3, 4; 1, 2)$, а именно:

$$\chi(3, 4) = \int \int K_+^{(2)}(3, 4; 1, 2) \gamma_a^0 \gamma_b^0 \chi(1, 2) d^3x_1 d^3x_2. \quad (25.134)$$

Здесь интегрирование по переменным x_1 и x_2 должно снова проводиться по замкнутой трехмерной поверхности, причем пространственно-временные точки 3 и 4 должны лежать внутри этой поверхности.

Чтобы получить уравнение для амплитуды связанных состояний χ_a , Гелл-Манн и Лоу отметили, что, если опустить случайное вырождение, энергия связанного состояния χ_a , для которого

$$p_\mu^{(a)} p^{(a)\mu} < (m_a + m_b)^2, \quad (25.135)$$

будет различной в каждом состоянии, характеризуемом теми же самыми значениями других констант движения (таких, как пространственные компоненты полного импульса, четность, внутренний момент количества движения и т. д.); таким образом, функция χ_a будет иметь характеристическую зависимость от времени, которая будет отличаться от зависимости в каждом другом состоянии. Поэтому они ввели предельный процесс, в котором при $T \rightarrow -\infty$ все осциллирующие члены должны быть взяты стремящимися к нулю. Как пример такого предельного процесса они дали следующее выражение:

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} g(T) = \lim_{T \rightarrow -\infty} \frac{1}{T} \int_{2T}^T g(\tau) d\tau. \quad (25.136)$$

Если теперь выражение (25.133) подставить в правую часть выражения (25.134) и использовать формулы (25.126), (25.128), (25.129) и выражение (25.136), то можно получить следующее уравнение для амплитуд χ_a (Гелл-Манн и Лоу [203]):

$$\begin{aligned} \chi_a(1, 2) = & -i \int \int \int \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 \times \\ & \times K_+^{(1)}(1, 5) K_+^{(1)}(2, 6) G(5, 6; 7, 8) \chi_a(7, 8). \end{aligned} \quad (25.137)$$

¹⁾ Выражение для \mathbf{X} справедливо в нерелятивистском случае; для релятивистских систем $\mathbf{X} = (E_1 \vec{r}_1 + E_2 \vec{r}_2) / (E_1 + E_2)$ [см., например, Широков Ю. М., ЖЭТФ, 21, 748 (1951)]. — *Прим. перев.*

Точно такое же уравнение было выведено Салпетером и Бете, которые использовали несколько более интуитивные аргументы, основывающиеся на адиабатическом включении взаимодействия. Для проблем рассеяния левая сторона формулы (25.137) должна быть заменена на разность

$$\chi_n(1, 2) - \varphi_n(1, 2),$$

где функция φ_n — произведение двух дираковских волновых функций для свободной частицы; она может рассматриваться как падающая плоская волна.

Дифференциальное уравнение, пригодное как для рассмотрения процесса рассеяния, так и для исследования свойств связанных состояний, может быть получено, если учесть (см. гл. 24), что

$$K_+^{(1)} = -1/2 S_F'$$

и что

$$S_F'(x - x') = S_F(x - x') + \int d^4y \int d^4y' S_F(x - y) \Sigma^*(y - y') S_F'(y' - x'). \quad (25.138)$$

Тогда, применяя оператор Дирака к уравнению (25.138), получаем

$$\begin{aligned} \left(-i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + m\right) S_F'(x - x') &= \\ &= 2i\delta^{(4)}(x - x') + \int d^4y \Sigma^*(x - y) S_F'(y - x'). \end{aligned} \quad (25.139)$$

Если мы применим дифференциальный оператор $-i\gamma^{\mu}(\partial/\partial x^{\mu}) + m$ для каждой частицы в уравнении (25.137), то получим

$$\begin{aligned} \left(-i\gamma_a^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_1^{\mu}} + m_a\right) \left(-i\gamma_b^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_2^{\mu}} + m_b\right) \chi_n(x_1, x_2) &= \\ &= -i \int \int d^4x_7 d^4x_8 G(x_1, x_2; x_7, x_8) \chi_n(x_7, x_8) - \\ &\quad - i \int \int \int \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 d^4y d^4y' \times \\ &\quad \times \left(\Sigma^*(x_1 - y) \frac{1}{2} S_F'(y - x_5)\right)_a \left(i\Sigma^*(x_2 - y') \frac{1}{2} S_F'(y' - x_6)\right)_b \times \\ &\quad \times G(x_5, x_6; x_7, x_8) \chi_n(x_7, x_8). \end{aligned} \quad (25.140)$$

Если в уравнении (25.140) опустить части собственной энергии фермиона, то оно приобретет особенно простую форму, поскольку выпадет последний член в правой стороне. Если в дополнение к этому мы ограничимся низшим порядком взаимодействия, который дается формулой (25.127), то уравнение (25.140) будет точно совпадать с уравнением „лестничного приближения“, которое мы написали в гл. 9.

Наиболее существенным результатом, полученным нами, является полностью релятивистское волновое уравнение для системы двух тел (25.140). Однако этого удалось достичь ценой уменьшения ясности физической интерпретации амплитуды. В частности, до сих пор физически не объяснена зависимость амплитуды от относительного времени $x_{10} - x_{20}$. Неясно также, какое граничное условие должно быть наложено на амплитуду при бесконечных значениях относительного времени. Кроме того, до сих пор не сформулирована связь этой амплитуды с характеристиками возможных экспериментов над системой двух тел. [См., однако, работу Блоха [44], где дан анализ и объясняются измерения в старом многовременном формализме Дирака, Фока и Подольского (см. работы [104, 105]); уравнение, полученное на основании его, имеет сходство с уравнением Бете — Салпетера]. Последняя трудность связана с отсутствием положительно-определенной нормы для амплитуды.

Недавно удалось достигнуть значительных результатов (Вик [533] и Кутковский [94]) в выяснении некоторых непонятных черт уравнения Бете — Салпетера. Вик указал, что дополнительное условие для амплитуды Бете — Салпетера может быть получено из ее определения (25.129), если добавить простые условия стабильности.

Итак, из формулы (25.133) следует, что для покоящейся системы, т. е. для $\vec{p}^{(a)} = 0$, двухчастичная амплитуда $\chi_\alpha(x_1, x_2)$ имеет вид

$$\chi_\alpha(x_1, x_2) = e^{-iET} f_\alpha(x), \quad (25.141)$$

где E — полная энергия системы, а T — „время“ координаты центра инерции; здесь x снова является относительной координатой двух частиц, т. е. $x = x_1 - x_2$. Если ввести энергию связи связанного состояния B , то

$$E = m_e + m_p - B < m_e + m_p, \quad (25.142)$$

где m_e и m_p — массы покоя электрона и протона. Если мы выпишем формулы (25.129а) для случая $x_{10} > x_{20}$, т. е.

$$\chi_\alpha(x_1, x_2) = \sum_n (0 | \psi_e(x_1) | n) (n | \psi_p(x_2) | \alpha), \quad (25.143)$$

то состояния n , дающие не равный нулю вклад, будут принадлежать к определенному классу. Ясно, что соответствующие волновые функции должны быть собственными функциями оператора полного заряда с собственным значением — e . Кроме того, в системе координат, в которой полный импульс равен нулю, они должны быть собственными функциями полного момента количества движения с собственным значением $1/2\hbar$. Далее, все известные в природе состояния, для которых полный заряд равен — e , момент количества движения равен $+1/2\hbar$, удовлетворяют неравенству

$$E_n^2 - p_n^2 \geq m_e^2, \quad (25.144)$$

где E_n и p_n — полная энергия и импульс в состоянии n . Знак равенства имеет место только для физического одноэлектронного состояния, т. е. состояния, в котором имеется один и только один реальный (лабораторный) электрон. Вик назвал это неравенство условием стабильности для электрона. Затем он предположил, что физическое одноэлектронное состояние [для которого в формуле (25.144) нужно взять знак равенства] есть состояние с наименьшей энергией из числа тех, которые дают вклад в сумму (25.143).

Аналогичным образом, когда относительное время t отрицательно, можно показать, что состояния n' , дающие вклад в амплитуду, характеризуются, в частности, тем, что собственные значения энергии и импульса удовлетворяют неравенству

$$E_{n'}^2 - p_{n'}^2 \geq m_p^2; \quad (25.145)$$

это неравенство Вика назвал условием стабильности для протона. Три неравенства (25.142), (25.144) и (25.145) легли в основу дальнейшего рассмотрения. С помощью формул (25.143) и (25.133) можно легко показать, что для $t > 0$ амплитуда $f_\alpha(\mathbf{x})$ имеет следующий вид:

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_n (0 | \psi_e(\mathbf{0}) | n) (n | \psi_p(\mathbf{0}) | \alpha) e^{-i(p^{(n)} - \frac{m_e}{m_p + m_e} p^{(\alpha)}) \cdot \mathbf{x}}, \quad (25.146)$$

где $p^{(\alpha)}$ — 4-импульс в состоянии α . Используя неравенства (25.142), (25.144) и (25.145), можно получить

$$p_0^{(n)} - \frac{m_e}{m_p + m_e} p_0^{(\alpha)} \geq \frac{m_e}{m_p + m_e} B > 0. \quad (25.147)$$

Следовательно, для $t > 0$ амплитуда $f_\alpha(\mathbf{x})$ имеет только положительные частоты. Аналогично из формулы (25.133) и приведенных выше неравенств следует, что для $t < 0$ амплитуда $f_\alpha(\mathbf{x})$ представляет собой суперпозицию членов только с отрицательной частотой. Таким образом, амплитуда $f_\alpha(\mathbf{x})$ имеет свойства функции распространения Фейнмана.

Поэтому для $t > 0$ мы можем написать

$$f(\mathbf{x}) = \int d^3p \int_{\omega_{\text{мин.}}}^{+\infty} d\omega g(\vec{p}, \omega) \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x} - i\omega t), \quad (25.148)$$

где

$$\omega_{\text{мин.}} = \left(\frac{m_e}{m_p} p + m_e \right) B + (m_e^2 + p^2)^{1/2} - m_e. \quad (25.149)$$

Если амплитуду $f(\mathbf{x})$ рассматривать как функцию комплексной переменной t , то она может быть аналитически продолжена в нижнюю полуплоскость, в область, где $0 \geq \arg t > -\pi$. Аналогично, начиная с отрицательной вещественной оси, можно аналитически про-

должить функцию $f(\mathbf{x})$ в верхнюю полуплоскость, в область, где $\pi \gg \arg t > 0$. Кроме того, поскольку $B > 0$, функция $f(\mathbf{x})$ стремится к нулю, когда $t \rightarrow \infty$ в любом направлении в верхней или нижней полуплоскости, отличном от вещественной оси.

Если перейти в импульсное пространство и написать

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}),$$

где $f_1(\mathbf{x}) = 0$ для $t < 0$ и $f_2(\mathbf{x}) = 0$ для $t > 0$, то при

$$\varphi_1(\vec{p}, p_0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \int_0^{+\infty} dt e^{ip_0 t} f(\mathbf{x}), \quad (25.150a)$$

$$\varphi_2(\vec{p}, p_0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \int_{-\infty}^0 dt e^{ip_0 t} f(\mathbf{x}), \quad (25.150b)$$

используя выражение (25.147), легко получить, что

$$\varphi_1(\vec{p}, p_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{\min.}}^{+\infty} g(\vec{p}, \omega) (\omega - p_0 - i\varepsilon)^{-1} d\omega, \quad (25.150b)$$

где ε — бесконечно малая положительная константа. Из теории преобразований Стильтьеса следует, что $\varphi_1(\vec{p}, p_0)$ — аналитическая функция переменной p_0 на всей комплексной плоскости, в области

$$2\pi > \arg(p_0 - \omega_{\min.}) \geq 0. \quad (25.151)$$

Аналогичное утверждение может быть сделано относительно функции φ_2 . Можно также показать, что функция $\varphi(\mathbf{p}) = \varphi(\vec{p}, p_0) = \varphi_1 + \varphi_2$ определена во всей комплексной плоскости p_0 с двумя разрезами от $\omega_{\min.}$ до $+\infty$ и от $-\infty$ до $\omega_{\max.}$, где

$$-\omega_{\max.} = \left(\frac{m_p}{m_e} + m_e\right) B + (m_p^2 + p^2)^{1/2} - m_p. \quad (25.152)$$

Следовательно, функция может быть продолжена аналитически из верхней полуплоскости в нижнюю через щель между двумя разрезами, существование которой зависит от того, является ли $B > 0$ или нет.

Эти аналитические свойства волновой функции могут быть использованы для преобразования уравнения Бете — Салпетера (с помощью вращения пути интегрирования в комплексной плоскости) в уравнение, в котором переменная p_0 чисто мнимая (или относительное время чисто мнимое). При этом можно проводить вычисления в евклидовом пространстве, что значительно упрощает математический аппарат.

Вику и Куткоскому, после того как было выполнено преобразование к евклидовому пространству, фактически удалось получить

полную систему решений для связанных состояний в „лестничном приближении“ уравнения Бете—Салпетера в случае двух скалярных бозонов, взаимодействующих через скалярные фотоны. С деталями читатель может ознакомиться в их статьях (см. также работы Хайяси и Мунаката [221], а также работы Гольдштейна [209]).

§ 7. Многочастичные амплитуды

Хотя уравнение (25.140) и может быть использовано при рассмотрении задач связанных состояний, однако оно имеет ограниченную применимость. Это следует из того, что мы вывели уравнение (25.140) с помощью функции распространения, в которой в начальном и конечном состояниях могут находиться только два фермиона. Поэтому, строго говоря, уравнение описывает только основное состояние рассматриваемой связанной системы, поскольку возбужденные состояния могут распадаться (например, с излучением фотона), что приводит к конечному состоянию, в котором имеются, кроме двух фермионов, и другие частицы. В уравнении для двух тел, которое мы до сих пор рассматривали, мы пренебрегали возможностью распада и предполагали, что рассматриваемое связанное состояние стабильно.

Ясно, что мы сможем охватить все случаи, если включим в рассмотрение амплитуды, аналогичные $\chi_n(x_1, x_2)$, но соответствующие наличию не только двух фермионов, но и других частиц. Эти высшие амплитуды можно определить с помощью формул, аналогичных формулам (25.129).

Если Ψ — вектор состояния рассматриваемой системы, например атома водорода, то двухчастичную амплитуду Фейнмана $\chi(1, 2)$ можно определить, как и раньше, в виде

$$\chi(x_1, x_2) = (\Psi_0, T(\psi_e(x_1)\psi_p(x_2))\Psi), \quad (25.153)$$

где индексы e и p относятся соответственно к операторам электрона и протона. Одночастичные амплитуды

$$\chi(x_1) = (\Psi_0, \psi_e(x_1)\Psi) \quad \text{или} \quad \chi(x_2)$$

тождественно равны нулю, так как векторы состояния Ψ и Ψ_0 описывают состояния с зарядом, равным нулю (т. е. являются собственными функциями оператора полного заряда Q с собственным значением 0), тогда как вектор состояния $\psi(x_1)\Psi_0$ описывает состояния с зарядом $\pm e$ и поэтому ортогонален к вектору состояния Ψ_0 . Амплитуда Фейнмана для двух фермионов и одного бозона имеет вид

$$\chi(x_1x_2; z_1^{\mu_1}) = (\Psi_0, T(\psi_e(x_1)\psi_p(x_2)A_{\mu_1}(z_1))\Psi); \quad (25.154)$$

аналогично амплитуда, соответствующая наличию двух бозонов и двух фермионов, задается выражением

$$\chi(x_1x_2; z_1^{\mu_1}, z_2^{\mu_2}) = (\Psi_0, T(\psi_e(x_1)\psi_p(x_2)A_{\mu_1}(z_1)A_{\mu_2}(z_2))\Psi). \quad (25.155)$$

Выбор этих амплитуд не является однозначным. Они соответствуют одному возможному способу описания состояния с помощью системы амплитуд. Так, например, амплитуды

$$\Theta(x_1, x_2) = (\Psi_0, N(\psi_e(x_1)\psi_p(x_2))\Psi), \quad (25.156)$$

$$\Theta(x_1, x_2; z_{1\mu_1}) = (\Psi_0, N(\psi_e(x_1)\psi_p(x_2)A_{\mu_1}(z_1))\Psi) \text{ и т. д.,}$$

определенные через нормальные произведения операторов, дают другое возможное описание (Мэттьюс и Салам [332, 333], Фрезе [189]). Мы можем также вернуться к представлению взаимодействия и описать систему с помощью совокупности амплитуд

$$f_t(x_1, x_2) = (\Psi_0(t), N(\psi(x_1)\psi(x_2))\Psi(t)) \text{ и т. д.,} \quad (25.157)$$

где $\Psi(t)$ — вектор состояния двухчастичной системы в представлении взаимодействия, $\Psi_0(t)$ — вектор вакуумного состояния для взаимодействующих полей и $\psi(x_1)$ и $\psi(x_2)$ — операторы в представлении взаимодействия, удовлетворяющие уравнениям свободных полей.

Амплитуды χ , Θ , f и т. д. определяют различные корпускулярные аспекты теории поля (Вайтман и Швебер [535]). Корпускулярный аспект квантованной теории поля представляет собой полное описание системы поля через наблюдаемые частицы, т. е. амплитуды, которые дают вероятность нахождения в некоторый момент времени определенного числа частиц с определенными свойствами. Этими свойствами могут быть, например, импульсы и спины частиц.

В последнее время было проведено широкое обсуждение такого рода различных амплитуд и соотношений между ними (Гелл-Манн и Гольдбергер [204], Фрезе [189, 190], Мэттьюс и Салам [332], Дайсон [135], Швебер [434], Иден [143], Кэстер [86] и др.).

Описание системы с помощью амплитуд позволяет построить естественную теорию возмущений, в которой состояние описывается конечным числом амплитуд (см. т. II, гл. 40). Уравнение движения для рассмотренной выше двухчастичной амплитуды $\chi(x_1, x_2)$, получаемое с помощью такого приближения, тесно связано с уравнением Бете — Салпетера (Иден и Рикейзен [141], Иден [143]).

§ 8. Другие результаты, полученные в теории

В заключение этой главы о современном развитии теории мы хотим принести извинения авторам ряда важных работ, содержание которых не приведено в этой книге ввиду ограниченности объема.

По-видимому, наиболее существенными из этих работ являются работы Дирака [116], Фейнмана [170, 171], Швингера [442—446, 448, 449], Пайерлса [384], Эдвардса и Пайерлса [145], Намбу [352] и др., в которых рассматриваются основные положения теории поля, базирующиеся на лагранжевой формулировке квантовой механики.

Мы также, по-видимому, недостаточно подчеркнули трактовку релятивистских теорий поля в конфигурационном пространстве

С этими вопросами читатель может ознакомиться в статьях Фока [183—185], Дирака [112], Беккера и Лейбфрида [25, 26], Брауна и Равенхолла [67], Жана [243—245], Лопеса [308], Сато [426], Дирака [117], Швебера [433], Гюнтера [214, 215], Мэттьюса и Салама [331], Вайтмана и Швебера [535] (в последней работе см. ссылки на другие работы) и многих др. Использование конфигурационного пространства лежит в основе таких методов, как метод Тамма — Данкова (Тамм [479], Данков [97], Леви [303, 304]), который будет детально рассмотрен во втором томе (гл. 40—44).

Следует упомянуть также современные расчеты тонкой структуры спектра водорода и позитрония, основывающиеся на уравнении Бетё — Салпетера для двух частиц и использующие теорию возмущений (Салпетер и Бетё [422], Швингер [442]). В частности, работы Салпетера [424], Салпетера и Ньюкомба [423], Брауна [68] и Арновита [10], в которых рассматривается массовая поправка к тонкой и сверхтонкой структуре спектров атома водорода, и Карплуса и Клейна [269], где рассматривается то же для позитрония¹⁾, должны быть приняты во внимание. В работах Идена [139, 140, 142]²⁾ было обобщено уравнение Бетё — Салпетера на случай распада возбужденных состояний и вообще на случай эффектов связанных состояний, что позволяет вычислить время жизни возбужденных состояний, исходя из ковариантного уравнения для частиц.

Теория ширины линий и связанных с этим явлений была рассмотрена в рамках ковариантной формулировки квантовой электродинамики в работах Арноуса, Блейлера, Зинау, Гайтлера [6—9] и Лоу [311].

В связи с программой перенормировки следует сослаться на недавние работы Валатина [496—499]. Он переопределил уравнения для функций распространения S_F и D_F , включив в них предельный переход, который является обобщением предельного перехода, предложенного в работах Дирака [107] и Гейзенберга [225, 226]. Эти переопределения уравнения дают конечные (перенормированные) функции распространения без появления расходящихся интегралов. Затем Валатин показал, что в случае разложения в степенной ряд имеется одно-однозначное соответствие с результатами, полученными Дайсоном [126, 127].

Гелл-Манн и Лоу [207] исследовали перенормированные функции распространения D'_{F1} и S'_{F1} для импульсов, много больших, чем масса электрона (т. е. для малых пространственно-временных интервалов)³⁾. Они нашли, что вследствие перенормируемости теории степенные

1) См. также работу Фултона и Мартина [199].

2) См. также работы Идена и Рикейзена [141], Фултона и Карплуса [198].

3) Асимптотическое поведение перенормированных функций распространения при больших импульсах (на малых расстояниях) было исследовано также в квантовой электродинамике [см. работы: Ландау Л. Д., Абрикосов А. А. и Халатников И. М., ДАН СССР, 95, 497, 773, 1177; 96, 261 (1954); Фрадкий Е. С., ЖЭТФ, 28, 750 (1955)] и в псевдоскалярной

ряды, определяющие функции D'_{F1} и S'_{F1} (в асимптотической области), удовлетворяют определенным функциональным уравнениям. Одним из наиболее интересных заключений, к которым пришли эти авторы, является то, что в перенормируемой теории форма распределения поляризационного заряда, окружающего находящийся в вакууме пробный заряд, не зависит на расстояниях, меньших, чем \hbar/mc , от перенормированной константы связи (точнее, от этой константы зависит только масштабный множитель). Эти же авторы исследовали также вопросы, касающиеся величин перенормировочных констант, которые подобным же образом связаны с поведением функций распространения при больших импульсах (см. работу Челена [260]), но в этом случае они получили менее характерные результаты. Им, однако, удалось показать, что перенормированная константа связи e_0^2 , встречающаяся в теории возмущений в виде степенного ряда по перенормированной константе связи e_1^2 с расходящимися коэффициентами, может быть или а) действительно бесконечной, как указывает теория возмущений, или б) конечной величиной, не зависящей от значения константы e_1^2 . На основании своей работы они не могут исключить случай „б“.

мезонной теории [см. работы: Абрикосов А. А., Галанин А. Д., Халатиников И. М., ДАН СССР, 97, 793 (1954); Фрадкин Е. С., ЖЭТФ, 29, 377 (1955); см. также Бог олюбов Н. Н. и Широков Д. В., УФН, 55, 149 (1955); 57, 3 (1955)]. — *Прим. перев.*

ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Исследуем здесь степень, в которой псевдоскалярную и псевдовекторную связи можно считать эквивалентными. Из рассмотрения, проведенного в гл. 23, мы знаем, что эти два вида связи являются фундаментально различными, так как псевдоскалярное взаимодействие перенормируемо, тогда как псевдовекторное — перенормируемо. Тем не менее покажем, что до определенного порядка эти два вида связи дают схожие результаты. В этом легко убедиться на простом примере.

§ 1. Рассеяние свободных частиц

Рассмотрим мёллеровское рассеяние двух нуклонов, обусловленное обменом мезоном. В нейтральной мезонной теории с псевдоскалярной связью

$$G\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

этому рассеянию соответствует матричный элемент

$$M_{ps} = (\pi i)^{-1} \frac{G^2}{4\pi} (\bar{u}(\vec{p}_2) \gamma_5 u(\vec{p}_1))_a (\bar{u}(\vec{p}'_2) \gamma_5 u(\vec{p}'_1))_b \times \\ \times \Delta_F(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2), \quad (26.1)$$

где индексы a и b относятся к двум нуклонам. В случае псевдовекторной связи

$$\frac{F}{\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

матричный элемент имеет вид

$$M_{1v} = (\pi i)^{-1} \left(\frac{F^2}{4\pi\mu^2} \right) (\bar{u}(\vec{p}_2) \gamma_5 (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) u(\vec{p}_1))_a \times \\ \times (\bar{u}(\vec{p}'_2) \gamma_5 (\hat{p}'_2 - \hat{p}'_1) u(\vec{p}'_1))_b \Delta_F(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2). \quad (26.2)$$

Поскольку начальное и конечное состояния являются состояниями свободных частиц, то, используя тот факт, что матрица γ_5 антикоммутирует со всеми матрицами γ^μ , мы можем написать

$$\bar{u}(\vec{p}_2) \gamma_5 (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) u(\vec{p}_1) = 2M \bar{u}(\vec{p}_2) \gamma_5 u(\vec{p}_1), \quad (26.3)$$

где M — масса нуклона.

Поэтому в этом порядке оба матричных элемента совпадают, если

$$G = \frac{2M}{\mu} F. \quad (26.4)$$

Для π -мезонов $\mu = 0,15M$, так что $F = 0,075 G$.

В дальнейшем мы исследуем, в какой мере эти виды связей эквивалентны в высших порядках. Обычным методом рассмотрения этой проблемы является метод канонических преобразований (Дайсон [125], Кейс [80], Фолди [187]).

§ 2. Преобразование Дайсона

Рассмотрим гамильтониан мезонного и нуклонного полей, связанных прямой псевдоскалярной связью,

$$H = \int d^3x \psi^\dagger (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta M) \psi(\vec{x}) + \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi^2(\vec{x}) + (\nabla \varphi(\vec{x}))^2 + \mu^2 \varphi^2(\vec{x}) \} + G \int d^3x \psi^\dagger \beta \gamma_5 \varphi \psi(\vec{x}). \quad (26.5)$$

Мы опять рассматриваем случай нейтрального мезонного поля. Обобщение на случай симметричной мезонной теории может быть проведено непосредственно.

Теперь проведем унитарное преобразование гамильтониана

$$H' = e^{iS} H e^{-iS}, \quad (26.6)$$

где оператор S должен быть определен так, чтобы член с псевдоскалярной связью был устранен, а на его месте оказался бы член с псевдовекторной связью. Это преобразование упрощает переход к нерелятивистскому гамильтониану при рассмотрении нерелятивистских проблем. Во всей этой главе, за исключением мест, где это будет специально оговорено, мы будем использовать шредингеровское представление.

Предположим (Дайсон [125], Фолди [187], Бергер и др. [30]), что эрмитовский оператор S может быть выбран в следующем виде:

$$S = \int \psi^\dagger s \psi d^3x = \int \sum_{\alpha\beta=1}^4 \psi_\alpha^\dagger s_{\alpha\beta} \psi_\beta d^3x, \quad (26.7)$$

где

$$s = i\gamma_5 w(\varphi(x)); \quad (26.8)$$

здесь w — функция только φ , а матрица $\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ — антиэрмитова и квадрат ее равен -1 . Отметим, что S не является матрицей, а является c -числом в спиновом пространстве и поэтому коммутирует с любой из дираковских матриц.

Чтобы вычислить выражение (26.6), проделаем следующую операцию, которая была уже использована в гл. 15. Определим

$$\psi'(\vec{x}, \xi) = e^{iS\xi} \psi(\vec{x}) e^{-iS\xi}. \quad (26.9)$$

Тогда оператором, который мы хотим вычислить, является $\psi'(\vec{x}, 1)$, а непреобразованным оператором — $\psi'(\vec{x}, 0)$. Далее

$$\frac{d\psi'(\vec{x}, \xi)}{d\xi} = ie^{iS\xi} [S, \psi(\vec{x})] e^{-iS\xi} = i[S, \psi'(\vec{x}, \xi)]. \quad (26.10)$$

Припоминая, что перестановочные соотношения

$$[\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}')]_+ = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (26.11)$$

$$[\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta(\vec{x}')]_+ = [\psi_\alpha^\dagger(\vec{x}), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}')]_+ = 0$$

инвариантны по отношению к унитарному преобразованию (26.6) и что операторы φ и ψ коммутируют между собой, получаем, используя выражение (26.7),

$$\begin{aligned} [S, \psi'_\rho(\vec{x}, \xi)] &= \int d^3x' \sum_{\alpha\beta} [\psi'^\dagger_\alpha(\vec{x}', \xi) s_{\alpha\beta} \psi'_\beta(\vec{x}', \xi) \psi'_\rho(\vec{x}, \xi)] = \\ &= - \sum_{\beta} s_{\rho\beta} \psi'_\beta(\vec{x}, \xi) = -s\psi'(\vec{x}, \xi). \end{aligned} \quad (26.12)$$

Уравнение (26.10) имеет теперь вид

$$\frac{d\psi'(\vec{x}, \xi)}{d\xi} = -is\psi'(\vec{x}, \xi) \quad (26.13)$$

и после интегрирования дает

$$\psi'(\vec{x}, \xi) = e^{-is\xi} \psi'(\vec{x}, 0). \quad (26.14)$$

При получении формулы (26.14) мы использовали начальное условие: $\psi'(\vec{x}, 0)$ является непреобразованным оператором. Преобразованный оператор тогда дается выражением

$$e^{iS} \psi(\vec{x}) e^{-iS} = e^{-is} \psi(\vec{x}). \quad (26.15)$$

Поскольку оператор s , задаваемый формулой (26.8), является эрмитовым, то, взяв эрмитово-сопряженное от последнего выражения, получим следующее соотношение:

$$e^{iS} \psi^\dagger(\vec{x}) e^{-iS} = \psi^\dagger(\vec{x}) e^{+is} = \psi^\dagger(\vec{x}) e^{+is}. \quad (26.16)$$

Убедимся в том, что при вычислении выражения (26.6) окажется весьма полезной следующая формула:

$$e^{iS} Q e^{-iS} = Q + i[S, Q] + \frac{i^2}{2!} [S, [S, Q]] + \frac{i^3}{3!} [S, [S, [S, Q]]] + \dots \quad (26.17)$$

Это соотношение легко доказать, если разложить $\exp(iS\lambda) Q \exp(-iS\lambda)$ в ряд Тейлора около точки $\lambda = 0$.

Кроме того, отметим, что, поскольку операторы $\varphi(\vec{x})$ и $\varphi(\vec{x}')$ коммутируют так же, как и оператор S , с любой дираковской матрицей

$$e^{iS} (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\vec{x}))_{\alpha\beta} e^{-iS} = (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\vec{x}))_{\alpha\beta}, \quad (26.18)$$

где индексы α, β означают, что рассматривается $\alpha\beta$ матричный элемент матриц γ (эти матричные элементы являются числами!). Поэтому, используя формулы (26.15), (26.16) и (26.18), получаем

$$\begin{aligned} H_1 &= e^{iS} \int d^3x \sum_{\alpha\beta} \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\vec{x}))_{\alpha\beta} \psi_\beta(\vec{x}) e^{-iS} = \\ &= \int d^3x \sum_{\alpha\beta} (\psi^\dagger(\vec{x}) e^{iS})_\alpha (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\vec{x}))_{\alpha\beta} (e^{-iS}\psi(\vec{x}))_\beta = \\ &= \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) e^{iS} (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\vec{x})) e^{-iS} \psi(\vec{x}). \end{aligned} \quad (26.19)$$

Далее, припоминая, что матрицы β и γ_5 антикоммутируют, мы можем преобразовать множитель $\beta \exp(-iS)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta e^{-iS} &= \beta e^{+\gamma_5 \omega(\varphi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta (\gamma_5)^n \frac{\omega^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_5)^n (-1)^n \beta \frac{\omega^n}{n!} = e^{iS} \beta. \end{aligned} \quad (26.20)$$

Аналогично

$$\beta \gamma_5 e^{-iS} = e^{iS} \beta \gamma_5, \quad (26.21)$$

так что выражение (26.19) можно записать в виде

$$H_1 = \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) e^{2iS} (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\vec{x})) \psi(\vec{x}). \quad (26.22)$$

То же получим и для члена

$$\begin{aligned} H_2 &= e^{iS} \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \psi(\vec{x}) e^{-iS} = \\ &= \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) e^{iS} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} e^{-iS} \psi(\vec{x}). \end{aligned} \quad (26.23)$$

Дальнейший перенос множителя $\exp(-is)$ невозможен, так как операторы $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ и φ не коммутируют. Однако, учитывая, что матрицы α и γ_5 коммутируют, и используя формулу (26.17), мы можем написать

$$e^{is\vec{\alpha}} \cdot \vec{p} e^{-is} = e^{is\vec{\alpha}} \alpha e^{-is} \cdot e^{is\vec{p}} e^{-is} = \vec{\alpha} \cdot e^{is\vec{p}} e^{-is} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}). \quad (26.24)$$

В этом месте удобно ввести 4-мерную матрицу σ_i , которая связана с матрицами α_i и γ_5 следующим образом:

$$\sigma_i = +i\gamma_5\alpha_i. \quad (26.25)$$

Таким образом, выражение (26.23) можно переписать в виде

$$H_2 = \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \psi(\vec{x}) - \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \omega \psi(\vec{x}). \quad (26.26)$$

Наконец, мы должны вычислить

$$H_3 = e^{is} \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2(\vec{x}) + (\nabla\varphi(\vec{x}))^2 + \mu^2\varphi^2(\vec{x})) e^{-is}. \quad (26.27)$$

Для вычисления этого члена предположим, следуя Дайсону [125], что неизвестная функция $\omega(\varphi)$ имеет вид

$$\omega(\varphi) = \lambda\varphi(\vec{x}), \quad (26.28)$$

где λ — константа, которая должна быть определена. Поскольку операторы $\varphi(\vec{x})$ и $\varphi(\vec{x}')$ коммутируют, мы должны вычислить только величину

$$e^{is\pi}(\vec{x}) e^{-is} = \pi'(\vec{x}). \quad (26.29)$$

Используя формулу (26.17), получаем

$$\pi'(\vec{x}) = \pi(\vec{x}) + i\lambda \int d^3x' [\psi^\dagger(\vec{x}') i\gamma_5\psi(\vec{x}') \varphi(\vec{x}'), \pi(\vec{x})]; \quad (26.30)$$

все высшие члены (повторные коммутаторы) равны нулю благодаря перестановочному соотношению между операторами $\varphi(\vec{x})$ и $\pi(\vec{x})$:

$$[\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (26.31)$$

которое представляет c -число. Следовательно,

$$\pi'(\vec{x}) = \pi(\vec{x}) - i\lambda\psi^\dagger(\vec{x})\gamma_5\psi(\vec{x}), \quad (26.32)$$

и формула (26.27) получает вид

$$\begin{aligned}
 H_3 &= \frac{1}{2} \int d^3x (\pi'^2(\vec{x}) + (\nabla\varphi(\vec{x}))^2 + \mu^2\varphi^2(\vec{x})) = \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2(\vec{x}) + (\nabla\varphi(\vec{x}))^2 + \mu^2\varphi^2(\vec{x})) - i\lambda \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma_5 \psi(\vec{x}) \pi(\vec{x}) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma_5 \psi(\vec{x}) \right)^2. \quad (26.33)
 \end{aligned}$$

Приводя члены, получаем следующее выражение для преобразованного гамильтониана:

$$\begin{aligned}
 H' &= \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta M) \psi(\vec{x}) + \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + \mu^2\varphi^2) + \\
 &+ \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) (e^{2is} - 1) \beta M \psi(\vec{x}) + \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) e^{2is} G \beta \gamma_5 \varphi(\vec{x}) \psi(\vec{x}) - \\
 &- \lambda \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) (\vec{\sigma} \cdot \nabla\varphi(\vec{x})) \psi(\vec{x}) - i\lambda \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma_5 \psi(\vec{x}) \pi(\vec{x}) - \\
 &- \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma_5 \psi(\vec{x}) \right)^2. \quad (26.34)
 \end{aligned}$$

Хотя формула (26.34) является точной, однако мы не можем подобрать величину λ так, чтобы полностью устранить псевдоскалярную связь. Это является следствием нашего предположения (26.28). Если оставить функцию ψ произвольной (Бергер, Фолди и Осборн [30]) до тех пор, пока не будет завершено вычисление выражения (26.6), то функция ψ может быть затем определена таким образом, чтобы в преобразованном гамильтониане не осталось псевдоскалярной связи.

Если в выражении (26.34) разложить экспоненциальный множитель и оставить члены, квадратичные по φ , и если выбрать

$$-\lambda = \frac{G}{2M}, \quad (26.35)$$

то псевдоскалярная связь будет фактически в этом порядке устранена, и преобразованный гамильтониан получит вид

$$H' = H_N + H_M + H_I', \quad (26.36a)$$

где

$$\begin{aligned}
 H_I' &= \frac{G}{2M} \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}) + i\gamma_5 \pi(\vec{x})) \psi(\vec{x}) + \\
 &+ \frac{G^2}{2M} \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \beta \psi(\vec{x}) \varphi^2(\vec{x}) - \\
 &- \frac{G^2}{8M^2} \left(\int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma_5 \psi(\vec{x}) \right)^2. \quad (26.36b)
 \end{aligned}$$

§ 3. Интерпретация

Сейчас мы кратко проанализируем преобразованный гамильтониан (26.36). Первый член в выражении (26.36б) имеет обычную форму члена связи с производными в мезон-нуклонном гамильтониане. Напомним, что оператор $\pi(\vec{x})$, по существу, равен $\partial\varphi/\partial t$, так что этот член взаимодействия можно записать в следующем виде:

$$\sim \bar{\psi}(\vec{x}) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(\vec{x}) \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \quad (26.37)$$

— это обычное выражение для псевдовекторного взаимодействия. Таким образом, мы показали эквивалентность псевдоскалярного и псевдовекторного взаимодействий в первом порядке по константе связи. Константа связи для связи с производными F/μ связана с константой связи G соотношением

$$\frac{F}{\mu} = \frac{G}{2M}. \quad (26.38)$$

„Двухмезонный член“

$$\frac{G^2}{2M} \int \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \varphi^2(\vec{x}) \quad (26.39)$$

аналогичен квадратичному члену $(e^2/2m)A^2$, который встречается в нерелятивистской теории излучения. Он возникает при устранении переходов, связанных с виртуальными парами. Он дает (в теории возмущений) большой, не зависящий от спина вклад в ядерные силы (см. статью Лепора [302], в которой использовано представление взаимодействия). Важность этого члена в любом расчете мезон-нуклонного рассеяния была подчеркнута в работе Дрелла и Хенли [123], где было показано, что этот член приводит к сильному отталкиванию для S -волны при взаимодействии мезонов с нуклонами. Важность этого эффекта видна из того, что член псевдовекторной связи пропорционален константе F/μ , тогда как член с φ^2 пропорционален величине $M(F/\mu)^2$. Этот член будет подробно рассмотрен во втором томе, гл. 39, 44 и 47.

Наконец, контактный член

$$\left(\int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma_5 \psi(\vec{x}) \right)^2$$

всегда присутствует в гамильтониане для связи с производными. Если лагранжиан \mathcal{L} содержит член связи с производными (26.37), то импульс, сопряженный полю φ , будет равен

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi} - \frac{F}{\mu} \psi^\dagger \gamma_5 \psi. \quad (26.40)$$

Устранение члена с $\dot{\varphi}$ из гамильтониана приводит тогда к контактному члену

$$\left(\int \psi^\dagger \gamma_5 \psi d^3x \right)^2.$$

Эквивалентность псевдоскалярной и псевдовекторной связей может быть наиболее ясно доказана с помощью преобразования Фолди (Фолди [187], Вентцель [526], Бергер и др. [30]), в котором оператор S дается выражением

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma_5 \psi(\vec{x}) \arctg\left(\frac{G\varphi(\vec{x})}{M}\right). \quad (26.41)$$

С помощью этого канонического преобразования можно полностью устранить псевдоскалярную связь. Однако член псевдовекторной связи в этом случае появляется с нелинейным коэффициентом.

Наиболее общая форма теоремы эквивалентности была установлена в работе Молдауэра и Кейса [338], где показано, что в первом порядке по константе связи все возможные линейные взаимодействия между скалярными (или псевдоскалярными) мезонами и нуклонами либо дают нуль, либо эквивалентны скалярной (псевдоскалярной) связи.

Теорема эквивалентности в присутствии внешнего электромагнитного поля была доказана в работах Кейса [80], Дрелла и Хенли [123]. Чрезвычайно изящный способ вывода теоремы эквивалентности, который использует произвольность выбора лагранжиана с точностью до 4-мерной дивергенции, был дан в работе Келли [270].

П Р И Л О Ж Е Н И Е А

Здесь мы дадим несколько более строгий вывод формулы (8.54), основанный на использовании теоремы Грина, которая в 4-пространстве имеет вид

$$\int_V \frac{\partial F_\mu(x)}{\partial x_\mu} d^4x = \int_S F_\mu(x) n^\mu(x) d\sigma(x); \quad (\text{A.1})$$

здесь S — поверхность, охватывающая пространственно-временной объем V , n^μ — внешняя нормаль к элементу поверхности $d\sigma(x)$ в точке x . Предположим, что функция $\psi(x)$ — решение уравнения Дирака в форме волнового пакета

$$i\gamma_\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} - m\psi(x) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Пусть функция $F_\mu(x')$, входящая в (A.1), равна $K_+(x-x') \times \times \gamma_\mu \psi(x')$, где x и x' — пространственно-временные точки внутри объема. Тогда получим

$$i \frac{\partial}{\partial x_\mu} (K_+(x-x') \gamma_\mu \psi(x')) = \left(i \frac{\partial K_+(x-x')}{\partial x'_\mu} \gamma_\mu + m K_+(x-x') \right) \psi(x') + K_+(x-x') \left(i \gamma_\mu \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'_\mu} - m \psi(x') \right). \quad (\text{A.3})$$

Второй член равен нулю, согласно уравнению (A.2). Тогда, подставляя формулу (A.3) в формулу (A.1) и учитывая, что

$$i \frac{\partial K_+(x-x')}{\partial x'_\mu} \gamma_\mu + m K_+(x-x') = -i\delta^{(4)}(x-x'), \quad (\text{A.4})$$

получаем

$$\psi(x) = - \int_S K_+(x-x') \gamma_\mu \psi(x') n^\mu(x') d\sigma(x'), \quad (\text{A.5})$$

где n^μ — внешняя нормаль. С другой стороны, мы можем написать

$$\psi(x) = \int_S K_+(x-x') \gamma_\mu \psi(x') n^\mu(x') d\sigma(x'), \quad (\text{A.6})$$

Устранение члена с $\dot{\varphi}$ из гамильтониана приводит тогда к контактному члену

$$\left(\int \psi^\dagger \gamma_5 \psi d^3x \right)^2.$$

Эквивалентность псевдоскалярной и псевдовекторной связей может быть наиболее ясно доказана с помощью преобразования Фолди (Фолди [187], Вентцель [526], Бергер и др. [30]), в котором оператор S дается выражением

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma_5 \psi(\vec{x}) \operatorname{arctg} \left(\frac{G\varphi(\vec{x})}{M} \right). \quad (26.41)$$

С помощью этого канонического преобразования можно полностью устранить псевдоскалярную связь. Однако член псевдовекторной связи в этом случае появляется с нелинейным коэффициентом.

Наиболее общая форма теоремы эквивалентности была установлена в работе Молдауэра и Кейса [338], где показано, что в первом порядке по константе связи все возможные линейные взаимодействия между скалярными (или псевдоскалярными) мезонами и нуклонами либо дают нуль, либо эквивалентны скалярной (псевдоскалярной) связи.

Теорема эквивалентности в присутствии внешнего электромагнитного поля была доказана в работах Кейса [80], Дрелла и Хенли [123]. Чрезвычайно изящный способ вывода теоремы эквивалентности, который использует произвольность выбора лагранжиана с точностью до 4-мерной дивергенции, был дан в работе Келли [270].

П Р И Л О Ж Е Н И Е А

Здесь мы дадим несколько более строгий вывод формулы (8.54), основанный на использовании теоремы Грина, которая в 4-пространстве имеет вид

$$\int_V \frac{\partial F_\mu(x)}{\partial x_\mu} d^4x = \int_S F_\mu(x) n^\mu(x) d\sigma(x); \quad (\text{A.1})$$

здесь S — поверхность, охватывающая пространственно-временной объем V , n^μ — внешняя нормаль к элементу поверхности $d\sigma(x)$ в точке x . Предположим, что функция $\psi(x)$ — решение уравнения Дирака в форме волнового пакета

$$i\gamma_\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} - m\psi(x) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Пусть функция $F_\mu(x')$, входящая в (A.1), равна $K_+(x-x') \times \times \gamma_\mu \psi(x')$, где x и x' — пространственно-временные точки внутри объема. Тогда получим

$$i \frac{\partial}{\partial x_\mu} (K_+(x-x') \gamma_\mu \psi(x')) = \left(i \frac{\partial K_+(x-x')}{\partial x'_\mu} \gamma_\mu + m K_+(x-x') \right) \psi(x') + K_+(x-x') \left(i \gamma_\mu \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'_\mu} - m \psi(x') \right). \quad (\text{A.3})$$

Второй член равен нулю, согласно уравнению (A.2). Тогда, подставляя формулу (A.3) в формулу (A.1) и учитывая, что

$$i \frac{\partial K_+(x-x')}{\partial x'_\mu} \gamma_\mu + m K_+(x-x') = -i\delta^{(4)}(x-x'), \quad (\text{A.4})$$

получаем

$$\psi(x) = - \int_S K_+(x-x') \gamma_\mu \psi(x') n^\mu(x') d\sigma(x'), \quad (\text{A.5})$$

где n^μ — внешняя нормаль. С другой стороны, мы можем написать

$$\psi(x) = \int_S K_+(x-x') \gamma_\mu \psi(x') n^\mu(x') d\sigma(x'), \quad (\text{A.6})$$

но теперь мы должны интерпретировать n^μ как *внутреннюю нормаль*. Если $\psi(\mathbf{x})$ — решение в форме волнового пакета, то вклад в выражение (А.6) будут давать только пространственно-подобные поверхности, охватывающие объем V . Тогда выражения (А.6) и (8.54) будут тождественны.

Аналогичный вывод годится и для уравнения Клейна — Гордона. В этом случае теорема Грина (А.1) записывается в форме

$$\int_V d^4x \{H \square G - G \square H\} = \int_S \left\{ H \frac{\partial G}{\partial x_\mu} - G \frac{\partial H}{\partial x_\mu} \right\} n_\mu(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}), \quad (\text{А.7})$$

если предположить, что функция F^μ равна

$$H \frac{\partial G}{\partial x_\mu} - G \frac{\partial H}{\partial x_\mu}.$$

Выбрав функцию H равной $I_+(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ и функцию G равной бозонной волновой функции $\psi(\mathbf{x})$, где точки \mathbf{x} и \mathbf{x}' лежат внутри области V , мы получим выражение (8.74), приведенное в тексте.

Аналогичное применение теоремы Грина в случае трех измерений позволяет получить формулы для нерелятивистского случая [формулу (8.2)], если учесть, что в этом случае $K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = 0$ при $t_1 > t_2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

При выводе формулы (10.3) мы видели, что приращение плотности лагранжиана при вариации по переменной φ_r можно представить в виде

$$\delta \mathcal{L} = \sum_r \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{r, \mu}} \right\} \delta \varphi_r + \sum_r \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{r, \mu}} \delta \varphi_r \right), \quad (\text{Б.1})$$

так что если мы имеем систему полей, удовлетворяющих уравнениям движения (10.5), то приращение $\delta \mathcal{L}$ будет задаваться выражением

$$\delta \mathcal{L} = \sum_r \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{r, \mu}} \delta \varphi_r \right). \quad (\text{Б.2})$$

Это выражение позволяет вывести законы сохранения, рассматривая различные частные вариации переменной поля φ_r .

Рассмотрим сначала случай, когда лагранжиан \mathcal{L} не содержит явно пространственно-временных координат, а вариация представляет собой бесконечно малое смещение в пространстве-времени

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \lambda \mathbf{a} = \mathbf{x}', \quad (\text{Б.3})$$

при котором

$$\varphi_r(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi_r(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{a}) = \varphi_r'(\mathbf{x}'). \quad (\text{Б.4})$$

Тогда, оставляя только члены первого порядка по величине λ , мы получаем

$$\delta\varphi_r(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial\varphi_r'}{\partial\lambda} \right)_{\lambda=0} = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_r(\mathbf{x}). \quad (\text{Б.5})$$

Аналогично при этой операции происходит приращение лагранжиана

$$\delta\mathcal{L} = a^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}. \quad (\text{Б.6})$$

Тогда из формулы (Б.2) следует, что

$$a^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = a^\mu \sum_r \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{r,\nu}} \frac{\partial\varphi_r}{\partial x^\mu} \right). \quad (\text{Б.7})$$

Поскольку величина a^μ произвольна, то в формуле (Б.7) подразумевается, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{r,\nu}} \frac{\partial\varphi_r}{\partial x^\mu} - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\nu} T'_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{Б.8})$$

Последнее выражение есть закон сохранения канонического тензора энергии-импульса $T'_{\mu\nu}$. Таким же образом, как это было сделано в тексте [формулы (10.34) — (10.36)], из соотношения (Б.8) может быть выведено постоянство во времени полной энергии и импульса полевой системы. Отметим, что тензор энергии-импульса, получаемый из формулы (Б.8), не должен быть симметричным.

Рассмотрение, аналогичное проведенному выше, может быть сделано в случае, когда вариация переменной φ_r вызывается бесконечно малым преобразованием Лоренца

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{a}\mathbf{x} \approx (\mathbf{I} + \lambda\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{x}, \\ \varepsilon^{\mu\nu} + \varepsilon^{\nu\mu} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

при котором вследствие линейности преобразования Лоренца

$$\varphi_r(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi_r'(\mathbf{x}') = \sum_s B_r^s(\mathbf{a}) \varphi_s(\mathbf{x}). \quad (\text{Б.10a})$$

Для случая бесконечно малого преобразования можно написать

$$B_r^s(\mathbf{a}) \approx \delta_r^s + \frac{1}{2} \lambda b_r^{s\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}. \quad (\text{Б.10б})$$

Лоренц-инвариантность лагранжиана означает, что он сохраняет при преобразовании Лоренца свой функциональный вид, т. е.

$$\mathcal{L}(\varphi_r'(\mathbf{x}'), \varphi_{r,\mu}'(\mathbf{x}')) = \mathcal{L}(\varphi_r(\mathbf{x}), \varphi_{r,\mu}(\mathbf{x})), \quad (\text{Б.11a})$$

или

$$\mathcal{L}'(\mathbf{x}') = \mathcal{L}(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{x}). \quad (\text{Б.11б})$$

Из соотношения (Б.2) тогда следует, что определенный тензор $m'_{\mu\nu\rho}$, где

$$m'_{\mu\nu\rho} = \sum_{rs} b_r^{s\nu\lambda} \varphi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{r,\rho}} + x^\nu T'^{\mu\rho} - x^\mu T'^{\nu\rho} \quad (\text{Б.12})$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial m'^{\mu\nu\rho}}{\partial x^\rho} = 0. \quad (\text{Б.13})$$

Белинфанте [27] показал, как переопределить канонический тензор энергии-импульса $T'^{\mu\nu}$ так, чтобы новый тензор $T^{\mu\nu}$ был всегда симметричным и таким, чтобы

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (\text{Б.14})$$

Кроме того, тензор момента количества движения определяется из последнего тензора с помощью соотношения

$$m_{\mu\nu\rho} = x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho} \quad (\text{Б.15})$$

и имеет следующее свойство:

$$\frac{\partial m_{\mu\nu\rho}}{\partial x_\rho} = \frac{\partial m'_{\mu\nu\rho}}{\partial x_\rho} = 0, \quad (\text{Б.16а})$$

из которого вытекает

$$\int m_{\mu\nu\rho} d^3x = \int m'_{\mu\nu\rho} d^3x. \quad (\text{Б.16б})$$

Из выражения (Б.16б) видно, что тензор $m_{\mu\nu\rho}$ приводит к тем же самым физическим следствиям, что и тензор $m'_{\mu\nu\rho}$, т. е. дает шесть тех же самых констант движения.

Отметим, что если φ — скалярное поле, то $b_r^{s\mu\nu} = 0$, и из формул (Б.12) и (Б.13) следует, что канонический тензор энергии-импульса всегда симметричен.

Наконец, рассмотрим случай, когда лагранжиан \mathcal{L} описывает комплексное поле. Поскольку лагранжиан \mathcal{L} вещественен (эрмитов в теории квантованных полей), то ясно, что в лагранжиане может встречаться только комбинация $\varphi_r^* \varphi_r$. Поэтому лагранжиан \mathcal{L} является инвариантом по отношению к преобразованию

$$\varphi_r \rightarrow \varphi_r e^{+i\epsilon} \approx (1 + i\epsilon) \varphi_r, \quad (\text{Б.17})$$

где ε — вещественная бесконечно малая константа. Таким образом, при преобразовании (Б.17)

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad (\text{Б.18})$$

и

$$\delta \varphi_r = +i\varphi_r \varepsilon, \quad (\text{Б.19a})$$

$$\delta \varphi_r^* = -i\varphi_r^* \varepsilon; \quad (\text{Б.19б})$$

тогда из формулы (Б.2) следует, что

$$\delta \mathcal{L} = 0 = +i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sum_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{r, \mu}} \varphi_r - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{r, \mu}^*} \varphi_r^* \right) \quad (\text{Б.20a})$$

$$\frac{\partial j^\mu(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} = 0. \quad (\text{Б.20б})$$

Последнее соотношение выражает собой закон сохранения заряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрахам М., Веcker R., Theorie der Electricität, Leipzig, 1933.
(Имеется перевод: Абрагам М., Беккер Р., Теория электричества, изд. 2, М.—Л., 1939.)
2. Ахиезер А., Phys. Zs. Sowjetunion, 11, 263 (1937).
3. Ахиезер А., Померанчук И., Phys. Zs. Sowjetunion, 11, 478 (1937).
4. Амбарцумян В., Иваненко Д., Zs. f. Phys., 64, 563 (1930).
5. Anderson C. D., Phys. Rev., 41, 405 (1932).
6. Arnous E., Zienau S., Helv. Phys. Acta, 24, 279 (1951).
7. Arnous E., Bleuler K., Helv. Phys. Acta, 25, 581 (1952).
8. Arnous E., Helv. Phys. Acta, 25, 631 (1952).
9. Arnous E., Heitler W., Proc. Roy. Soc., 220A, 290 (1953).
10. Arnowitz R., Phys. Rev., 92, 1002 (1953).
11. Ashkin A., Ph. D. dissertation, Cornell University, 1952.
12. Ashkin A., Page L. A., Woodward W. M., Phys. Rev., 94, 357 (1954).
13. Bade W. L., Jehle H., Rev. Mod. Phys., 25, 714 (1953).
14. Baranger E. U., Phys. Rev., 93, 1127L (1954). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 5, ИЛ, 1956.)
15. Baranger E. U., Ph. D. dissertation, Cornell University, 1954.
16. Baranger M., Ph. D. dissertation, Cornell University, 1951.
17. Baranger M., Phys. Rev., 84, 866 (1951).
18. Baranger M., Bethe H. A., Feynman R. P., Phys. Rev., 92, 482 (1953).
19. Bargmann V., Wigner E. P., Proc. Am. Acad. Arts. Sci., 34, 211 (1948).
20. Bartlett J. H., Watson R. E., Phys. Rev., 56, 612 (1939).
21. Bartlett J. H., Watson R. E., Proc. Am. Acad. Arts. Sci., 74, 53 (1940).
22. Bartlett J. H., Welton T. A., Phys. Rev., 59, 281 (1941).
23. Beard D. B., Bethe H. A., Phys. Rev., 83, 1106 (1951).
24. Becker R., Göttinger Nachrichten, 1945.
25. Becker R., Leibfried G., Phys. Rev., 69, 34 (1946).
26. Becker R., Leibfried G., Zs. f. Phys., 125, 347 (1948).
27. Belinfante F. J., Physica, 6, 887 (1939).
28. Belinfante F. J., Physica, 7, 305 (1940).
29. Belinfante F. J., Phys. Rev., 76, 226 (1949).
30. Berger J. M., Foldy L. L., Osborn R. K., Phys. Rev., 87, 1061 (1952).
31. Bethe H. A., Bacher R. F., Rev. Mod. Phys., 8, 82 (1936). (Имеется перевод: Бете Г., Бечер Р., Физика ядра, т. I, Устойчивые состояния ядер, Харьков, 1938.)
32. Bethe H. A., Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 70, 451 (1946).
33. Bethe H. A., Phys. Rev., 72, 339 (1947). (Имеется перевод в сборнике „Сдвиг уровней атомных электронов“, ИЛ, 1950.)
34. Bethe H. A., Report to the Eighth Solvay Congress on Elementary Particles, Solvay 1948.
35. Bethe H. A., Brown L. M., Stehn J. R., Phys. Rev., 77, 370 (1950).
36. Bethe H. A., Rohrlich F., Phys. Rev., 86, 10 (1952).
37. Bhabha H. J., Proc. Roy. Soc., 154A, 195 (1936).
38. Bhabha H. J., Rev. Mod. Phys., 21, 451 (1949).
39. Bitter F., Feshbach H., Phys. Rev., 92, 837L (1953). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 5, ИЛ, 1956.)

40. Blatt J. M., Weisskopf V., *Theoretical Nuclear Physics*, New York, 1952. (Имеется перевод: Блатт Дж., Вайскопф В., Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954.)
41. Bleuler K., *Helv. Phys. Acta*, **23**, 567 (1950).
42. Bloch C., *Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd.*, **26**, No. 1 (1950).
43. Bloch C., *Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd.*, **27**, No. 8 (1952).
44. Bloch F., *Phys. Zs. Sowjetunion*, **5**, 301 (1934).
45. Bloch F., *Nordsieck A., Phys. Rev.*, **52**, 54 (1937).
46. Bodmer A. R., *Proc. Phys. Soc.*, **66A**, 1041 (1953).
47. Bohr N., Rosenfeld L., *Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd.*, **12**, No. 8 (1933).
48. Bohr N., Rosenfeld L., *Phys. Rev.*, **78**, 794 (1950).
49. Bopp F., *Ann d. Phys.*, **38**, 345 (1940).
50. Bopp F., *Ann d. Phys.*, **42**, 573 (1942/43).
51. Born M., *Proc. Roy. Soc.*, **143A**, 410 (1934).
52. Born M., Infeld W., *Proc. Roy. Soc.*, **144A**, 425 (1934).
53. Born M., *Nature*, **136**, 952 (1935).
54. Born M., *Ann. Inst. Poincaré*, **7**, 155 (1937).
55. Born M., *Proc. Roy. Soc.*, **165A**, 291 (1938).
56. Born M., *Proc. Roy. Soc.*, **166A**, 552 (1938).
57. Born M., *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **8**, 309 (1938).
58. Born M., *Proc. Roy. Soc. (Edinburgh)*, **59**, 219 (1938).
59. Born M., Green H. S., *Proc. Roy. Soc. (Edinburgh)*, **62**, 470 (1949).
60. Born M., *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 463 (1949).
61. Borowitz S., Kohn W., *Phys. Rev.*, **76**, 818 (1949).
62. Borowitz S., Kohn W., *Phys. Rev.*, **86**, 985 (1952).
63. Bothe W., *Zs. f. Naturforsch.*, **4A**, 88 (1949).
64. Breit G., *Phys. Rev.*, **72**, 984L (1947).
65. Breit G., *Phys. Rev.*, **73**, 1410L (1948).
66. Breit G., *Phys. Rev.*, **74**, 656 (1948).
67. Brown G. E., Ravenhall D. G., *Proc. Roy. Soc.*, **208A**, 552 (1951).
68. Brown G. E., *Proc. Roy. Soc.*, **215A**, 371 (1952).
69. Brown G. E., Woodward J. B., *Proc. Phys. Soc.*, **65A**, 977 (1952).
70. Brown G. E., Peierls R. E., Woodward J. B., *Proc. Roy. Soc.*, **227A**, 51 (1954).
71. Brown L. M., Feynman R. P., *Phys. Rev.*, **85**, 231 (1952).
72. Buechner W. W., Burrill A. E., Sperduto A., Van de Graaff R. J., Feshbach H., *Phys. Rev.*, **72**, 678 (1947).
73. Burton W. K., Touschek B. F., *Phil. Mag.*, **44**, 161 (1953).
74. Burton W. K., Touschek B. F., *Phil. Mag.*, **44**, 1180 (1953).
75. Caianiello E. R., Fubini S., *Nuovo Cimento*, **9**, 1218 (1952).
76. Caianiello E. R., *Nuovo Cimento*, **10**, 1634 (1953).
77. Caianiello E. R., *Nuovo Cimento*, **11**, 492 (1954).
78. Case K. M., *Phys. Rev.*, **74**, 1884L (1948).
79. Case K. M., *Phys. Rev.*, **76**, 1 (1949).
80. Case K. M., *Phys. Rev.*, **76**, 14 (1949).
81. Chew G., *Proceedings of the Third Rochester Conference on High Energy Nuclear Physics*, New York, 1952.
82. Chrétien M., Peierls R. E., *Nuovo Cimento*, **10**, 668 (1953).
83. Chrétien M., Peierls R. E., *Proc. Roy. Soc.*, **223A**, 468 (1954).
84. Cini M., *Nuovo Cimento*, **9**, 1025L (1953).
85. Coester F., Jauch J. M., *Phys. Rev.*, **78**, 149 (1950).
86. Coester F., *Phys. Rev.*, **95**, 1318 (1954).
87. Cohen S., Ph. D. dissertation, Cornell University, 1954.
88. Conversi M., Pancini E., Piccioni O., *Phys. Rev.*, **71**, 209L (1947).
89. Cooper L. N., Henley E. M., *Phys. Rev.*, **92**, 831 (1953). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 5, ИЛ, 1956.)

90. Corinaldesi E., Jost R., *Helv. Phys. Acta*, **21**, 183 (1948).
91. Corinaldesi E., *Nuovo Cimento*, **8**, 494 (1951).
92. Corinaldesi E., *Nuovo Cimento, Suppl.*, **10**, No. 2, 83 (1953).
93. Corson E. M., *Perturbation Methods in Quantum Mechanics of n-Electron System*, New York, 1951.
94. Cutkosky R. E., *Phys. Rev.*, **96**, 1135 (1954).
95. Dalitz R. H., *Proc. Roy. Soc.*, **206A**, 509 (1951).
96. Dalitz R. H., *Proc. Roy. Soc.*, **206A**, 521 (1951).
97. Dancoff S. M., *Phys. Rev.*, **78**, 382 (1950).
98. Darwin C. G., *Proc. Roy. Soc.*, **118A**, 654 (1928).
99. Delbrück M., *Zs. f. Phys.*, **84**, 144 (1933).
100. Deutsch M., *Phys. Rev.*, **82**, 455L (1951).
101. Deutsch M., Dulit E., *Phys. Rev.*, **84**, 601L (1951).
102. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **117A**, 610 (1928).
103. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **126A**, 360 (1930).
104. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **136A**, 453 (1932).
105. Дирак П. А. М., Фок В., Подольский Б., *Phys. Zs. Sowjetunion* **2**, 468 (1932).
106. Dirac P. A. M., *Rapports du 7^e Conseil Solvay 1933*, Brussels, 1934.
107. Dirac P. A. M., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **30**, 150 (1934).
108. Dirac P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, 2nd ed., Oxford, 1935. (Имеется перевод: Дирак П. А. М., *Основы квантовой механики*, изд. 2, М.—Л., 1937.)
109. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **155A**, 447 (1936).
110. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **167A**, 148 (1938).
111. Dirac P. A. M., *Ann. Inst. Poincaré*, **9**, 13 (1938).
112. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **180A**, 1 (1942).
113. Dirac P. A. M., Peieris R. E., Pryce M. H. L., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **38**, 193 (1942).
114. Dirac P. A. M., *Comm. Dublin Inst. for Advanced Studies*, **A**, No. 1 (1943).
115. Dirac P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, 3rd ed., Oxford, 1947.
116. Dirac P. A. M., *Phys. Rev.*, **73**, 1092 (1948).
117. Dirac P. A. M., *Ann. Inst. Poincaré*, **11**, 15 (1949).
118. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **209A**, 291 (1951).
119. Dirac P. A. M., *Ann. Inst. Poincaré*, **13**, 1 (1952).
120. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **212A**, 330 (1952).
121. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **223A**, 438 (1954).
122. Drell S. D., *Phys. Rev.*, **79**, 220 (1950).
123. Drell S. D., Henley E. M., *Phys. Rev.*, **88**, 1053 (1952).
124. Duffin R., *Phys. Rev.*, **77**, 242 (1950).
125. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **73**, 929 (1948).
126. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **75**, 486 (1949). (Имеется перевод в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950.)
127. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **75**, 1736 (1949). (Имеется перевод в сборнике «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 205.)
128. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **77**, 420 (1950).
129. Dyson F. J., *Advanced Quantum Mechanics*, Cornell University, 1951.
130. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **82**, 428 (1951).
131. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **83**, 608 (1951).
132. Dyson F. J., *Proc. Roy. Soc.*, **207A**, 395 (1951).
133. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **83**, 1207 (1951).
134. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **85**, 631 (1952).
135. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **91**, 1543 (1953).
136. Eddington A., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **35**, 186 (1939).
137. Eddington A., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **38**, 201 (1942).
138. Eden R. J., *Proc. Roy. Soc.*, **210A**, 388 (1952).

139. Eden R. J., Proc. Roy. Soc., 215A, 133 (1952).
140. Eden R. J., Proc. Roy. Soc., 217A, 390 (1953).
141. Eden R. J., Rickayzen G., Proc. Roy. Soc., 219A, 109 (1953).
142. Eden R. J., Proc. Roy. Soc., 219A, 516 (1953).
143. Eden R. J., Proc. Cambr. Phil. Soc., 50, 592 (1954).
144. Edwards S. F., Phys. Rev., 90, 284 (1953). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 378.)
145. Edwards S. F., Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., 224A, 24 (1954). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 3, ИЛ, 1955, стр 112.)
146. Eliezer C. J., Rev. Mod. Phys., 19, 147 (1947).
147. Enatsu H., Progr. Theor. Phys., 6, 643 (1951).
148. Epstein S. T., Phys. Rev., 73, 177L (1948); Phys. Rev., 73, 630L (1948).
149. Euler H., Kockel B., Naturwiss., 23, 246 (1935).
150. Euler H., Ann. d. Phys., 26, 398 (1936).
151. Feingold A. M., Rev. Mod. Phys., 23, 10 (1951).
152. Feldman D., Phys. Rev., 76, 1369 (1949).
153. Fermi E., Atti. Accad. Lincei, 9, 881 (1929).
154. Fermi E., Atti. Accad. Lincei, 12, 431 (1930).
155. Fermi E., Rev. Mod. Phys., 4, 87 (1932).
156. Fermi E., Zs. f. Phys., 88, 161 (1934).
157. Ferretti B., Nuovo Cimento, 7, 79 (1950).
158. Ferretti B., Nuovo Cimento, 7, 375 (1950).
159. Ferretti B., Nuovo Cimento, 7, 783 (1950).
160. Ferretti B., Nuovo Cimento, 7, 899 (1950).
161. Ferretti B., Nuovo Cimento, 8, 108 (1951).
162. Ferretti B., Nuovo Cimento, 10, 1079 (1953).
163. Feshbach H., Phys. Rev., 84, 1206 (1951).
164. Feshbach H., Phys. Rev., 88, 295 (1952).
165. Feynman R. P., Phys. Rev., 74, 939 (1948).
166. Feynman R. P., Phys. Rev., 76, 1430 (1948).
167. Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., 20, 367 (1948).
168. Feynman R. P., Phys. Rev., 76, 749 (1949). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 138).
169. Feynman R. P., Phys. Rev., 76, 769 (1949). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 161.)
170. Feynman R. P., Phys. Rev., 80, 440 (1950).
171. Feynman R. P., Phys. Rev., 84, 108 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 3, ИЛ, 1955.)
172. Fierz M., Helv. Phys. Acta, 12, 3 (1939).
173. Fierz M., Pauli W., Proc. Roy. Soc., 173A, 211 (1939).
174. Fierz M., Phys. Rev., 78, 184L (1950).
175. Fierz M., Helv. Phys. Acta, 23, 412 (1950).
176. Fierz M., Helv. Phys. Acta, 23, 731 (1950). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 239.)
177. Finkelstein R. J., Phys. Rev., 75, 1079 (1949).
178. Finkelstein R. J., LeLevier R., Ruderman M., Phys. Rev., 83, 326 (1951).
179. Fitch V. L., Rainwater J., Phys. Rev., 92, 789 (1953).
180. Фок В. (не опубликовано).
181. Фок В., Zs. f. Phys., 38, 242 (1926).
182. Фок В., Zs. f. Phys., 39, 226 (1926).
183. Фок В., Zs. f. Phys., 75, 622 (1932).
184. Фок В., Compt. Rend. (СССР), 1, 267 (1933).
185. Фок В., Phys. Zs. Sowjetunion, 6, 425 (1934).
186. Foldy L. L., Wouthuysen S. A., Phys. Rev., 78, 29 (1950).

187. Foldy L. L., Phys. Rev., **84**, 168 (1951).
188. Frank R. M., Phys. Rev., **83**, 1189 (1951).
189. Freese E., Zs. f. Naturforsch., **8a**, 776 (1953).
190. Freese E., Nuovo Cimento, **11**, 312 (1954).
191. French J. B., Weisskopf V., Phys. Rev., **75**, 1240 (1949). (Имеется перевод в сборнике „Сдвиг уровней атомных электронов“, ИЛ, 1950.)
192. Friedrichs K. O., Comm. on Pure and App. Math., **1**, 361 (1948).
193. Fukuda H., Miyamoto Y., Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., **4**, 47, 121 (1949).
194. Fukuda H., Miyamoto Y., Progr. Theor. Phys., **4**, 347 (1949).
195. Fukuda H., Miyamoto Y., Progr. Theor. Phys., **4**, 392 (1949).
196. Fukuda H., Hayakawa S., Miyamoto Y., Progr. Theor. Phys., **5**, 283 (1950).
197. Fukuda H., Hayakawa S., Miyamoto Y., Progr. Theor. Phys., **5**, 352 (1950).
198. Fulton T., Karplus R., Phys. Rev., **93**, 1109 (1954).
199. Fulton T., Martin P. C., Phys. Rev., **93**, 903 (1954).
200. Furry W. H., Phys. Rev., **51**, 125 (1937).
201. Furry W. H., Phys. Rev., **54**, 56 (1938).
202. Furry W. H., Phys. Rev., **81**, 115 (1951).
203. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., **84**, 350 (1951).
204. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Phys. Rev., **87**, 218A (1952).
205. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Phys. Rev., **91**, 398 (1953).
206. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Thirring W., Phys. Rev., **95**, 1612 (1954).
207. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., **95**, 1300 (1954). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 3, ИЛ, 1955, стр. 145.)
208. Glaser W., Zimmerman W., Zs. f. Phys., **134**, 346 (1952).
209. Goldstein J. S., Phys. Rev., **91**, 1516 (1953).
210. Gordon W., Zs. f. Phys., **40**, 117 (1926).
211. Gordon W., Zs. f. Phys., **48**, 11 (1928).
212. Goursat E., Hedrick E. R., A Course in Mathematical Analysis, **1**, Boston, 1904.
213. Green H. S., Proc. Roy. Soc., **197A**, 73 (1949).
214. Günther M., Phys. Rev., **88**, 1411 (1952).
215. Günther M., Phys. Rev., **94**, 1347 (1954).
216. Gupta S. N., Proc. Phys. Soc., **63A**, 681 (1950).
217. Gupta S. N., Phys. Rev., **77**, 294L (1950).
218. Gupta S. N., Proc. Phys. Soc., **64A**, 426 (1951).
219. Halpern O., Phys. Rev., **44**, 855 (1934).
220. Harish-Chandra, Proc. Roy. Soc., **192A**, 195 (1948).
221. Hayashi C., Munakata Y., Progr. Theor. Phys., **7**, 481; **8**, 142 (1952).
222. Heisenberg W., Pauli W., Zs. f. Phys., **56**, 1 (1929).
223. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **65**, 4 (1930).
224. Heisenberg W., The Physical Principles of Quantum Theory, Chicago, 1930. (Имеется перевод: Гейзенберг В., Физические принципы квантовой теории, М.—Л., 1932.)
225. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **90**, 209 (1934).
226. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **92**, 692 (1934); **98**, 714 (1936).
227. Heisenberg W., Leipziger Ber., **86**, 317 (1934).
228. Heisenberg W., Euler H., Zs. f. Phys., **98**, 714 (1936).
229. Heisenberg W., Ann. d. Phys., **32**, 20 (1938).
230. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **120**, 513 (1943).
231. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **120**, 673 (1943).
232. Heitler W., The Quantum Theory of Radiation, 2nd ed., Oxford, 1944. (Имеется перевод: Гайтлер В., Квантовая теория излучения, М.—Л., 1940.)

233. Hill E. L., Rev. Mod. Phys., 23, 253 (1951).
234. Hofstadter R., Fechter H. R., McIntyre J. A., Phys. Rev., 92, 978 (1953).
235. Hofstadter R., Hahn B., Knudsen A. W., McIntyre J. A., Phys. Rev., 95, 512 (1954). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 5, ИЛ, 1956.)
236. Hori S., Progr. Theor. Phys., 8, 569 (1952).
237. Huff L. D., Phys. Rev., 38, 501 (1931).
238. Hurst C. A., Phys. Rev., 85, 920L (1952).
239. Hurst C. A., Proc. Roy. Soc., 214A, 44 (1952).
240. Hurst C. A., Proc. Camb. Phil. Soc., 48, 625 (1952).
241. Jancovici B. G., Phys. Rev., 95, 389 (1954).
242. Jauch J. M., Rohrllich F., Helv. Phys. Acta, 27, 613 (1954).
243. Jean M., Compt. Rend., 232, 1183 (1951).
244. Jean M., Compt. Rend., 232, 1291 (1951).
245. Jean M., Ann. d. Phys., 8, 338 (1953).
246. Johnson M. H., Lippmann B. A., Phys. Rev., 76, 828 (1949).
247. Jordan P., Klein O., Zs. f. Phys., 45, 751 (1927).
248. Jordan P., Pauli W., Zs. f. Phys., 47, 151 (1928).
249. Jordan P., Wigner E. P., Zs. f. Phys., 47, 631 (1928).
250. Jost R., Phys. Rev., 72, 815 (1947).
251. Jost R., Helv. Phys. Acta, 20, 256 (1947).
252. Jost R., Luttinger J. M., Helv. Phys. Acta, 23, 201 (1950).
253. Jost R., Luttinger J. M., Slotnick M., Phys. Rev., 80, 189 (1950).
254. Källén G., Helv. Phys. Acta, 22, 637 (1949).
255. Källén G., Ark. f. Phys., 2, No. 37, 371 (1950).
256. Källén G., Helv. Phys. Acta, 25, 417 (1952).
257. Källén G., Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., 27, No. 12 (1953).
258. Källén G., Helv. Phys. Acta, 26, 755 (1953).
259. Källén G., Physica, 19, 850 (1953).
260. Källén G., Nuovo Cimento, 12, 217 (1954).
261. Kanetsawa S., Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., 3, 1 (1948).
262. Kanetsawa S., Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., 3, 101 (1948).
263. Karplus R., Kroil N. M., Phys. Rev., 77, 536 (1950).
264. Karplus R., Neuman M., Phys. Rev., 80, 380 (1950).
265. Karplus R., Neuman M., Phys. Rev., 83, 776 (1951).
266. Karplus R., Klein A., Phys. Rev., 86, 257L (1952).
267. Karplus R., Klein A., Phys. Rev., 85, 972 (1952). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 284.)
268. Karplus R., Klein A., Schwinger J., Phys. Rev., 86, 288 (1952). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 305.)
269. Karplus R., Klein A., Phys. Rev., 87, 848 (1952).
270. Kelly E. J., Phys. Rev., 79, 399 (1950).
271. Kemmer N., Helv. Phys. Acta, 10, 112 (1937).
272. Kemmer N., Ludwig G., Helv. Phys. Acta, 10, 182 (1937).
273. Kinoshita T., Progr. Theor. Phys., 5, 473 (1950).
274. Kinoshita T., Nambu Y., Progr. Theor. Phys., 5, 749 (1950).
275. Kita H., Progr. Theor. Phys., 7, 217 (1952).
276. Kita H., Progr. Theor. Phys., 10, 231 (1953).
277. Klein O., Zs. f. Phys., 41, 407 (1927).
278. Klein O., Nishina Y., Zs. f. Phys., 52, 853 (1929).
279. Koba Z., Tati T., Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., 2, 101 (1947).
280. Koba Z., Tati T., Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., 2, 198 (1947).
281. Koba Z., Progr. Theor. Phys., 4, 319 (1949).

282. Koenig S. H., Prodehl A. G., Kusch P., Phys. Rev., **88**, 191 (1952).
 283. Konopinski E. J., Uhlenbeck G. E., Phys. Rev., **48**, 7 (1935).
 284. Konopinski E. J., Uhlenbeck G. E., Phys. Rev., **48**, 107L (1935).
 285. Konopinski E. J., Rev. Mod. Phys., **15**, 209 (1943).
 286. Konopinski E. J., Langer L. M., Annual Review of Nuclear Science, **2**, Stanford, 1953.
 287. Kramers H. A., Proc. Kgl. Ned. Acad. Wet., **40**, 814 (1937).
 288. Kramers H. A., Quantentheorie des Elektrons und der Strahlung, Leipzig, 1938.
 289. Kramers H. A., Belinfante F. J., Lubanski J. K., Physica, **8**, 597 (1941).
 290. Kramers H. A., Rapports du 8^e Conseil Solvay 1948, Brussels, 1950, p. 241.
 291. Kristensen P., Møller C., Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., **27**, No. 7 (1952).
 292. Kroll N. M., Lamb W. E., Phys. Rev., **75**, 388 (1949).
 293. Kroll N. M., Phys. Rev., **75**, 1321A (1949).
 294. Kroll N. M., Pollock F., Phys. Rev., **86**, 876 (1952).
 295. Lamb W. E., Retherford R. C., Phys. Rev., **72**, 241 (1947). (Имеется перевод в сборнике „Сдвиг уравнений атомных электронов“. ИЛ, 1950.)
 296. Landé A., Phys. Rev., **60**, 121 (1941).
 297. Landé A., Thomas L., Phys. Rev., **60**, 514 (1941).
 298. Landé A., Thomas L., Phys. Rev., **65**, 175 (1944).
 299. Lattes C. M. G., Occhialini C. P. S., Powell C. F., Nature, **160**, 453, 486 (1947).
 300. Lax M., Phys. Rev., **78**, 306 (1950).
 301. Lehmann H., Nuovo Cimento, **11**, 342 (1954). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 3, ИЛ, 1955, стр. 133.)
 302. Lepore J. V., Phys. Rev., **88**, 750 (1952).
 303. Lévy M. M., Phys. Rev., **88**, 72 (1952).
 304. Lévy M. M., Phys. Rev., **88**, 725 (1952).
 305. Lewis H. W., Phys. Rev., **73**, 173 (1948).
 306. Lipkin H. J., Phys. Rev., **85**, 517 (1952).
 307. Lippmann B. A., Schwinger J., Phys. Rev., **79**, 469 (1950).
 308. Lopes L., An. Acad. Brazil. Cienc., **23**, 39 (1951).
 309. Lorentz H. A., The Theory of Electrons, Leipzig, 1916. (Имеется перевод: Лорентц Г., Теория электронов, М.—Л., 1934.)
 310. Lorentz H. A., The Collected Papers of Lorentz, Hague, 1937.
 311. Low F., Phys. Rev., **88**, 53 (1952).
 312. Luttinger J. M., Phys. Rev., **74**, 893 (1948). (Имеется перевод в сборнике „Сдвиг уровней атомных электронов“, ИЛ, 1950.)
 313. Luttinger J. M., Phys. Rev., **75**, 309L (1949).
 314. Luttinger J. M., Phys. Rev., **75**, 1277L (1949).
 315. Lyman E. M., Hanson A. O., Scott M. B., Phys. Rev., **84**, 626 (1951).
 316. McKinley W. A., Feshbach H., Phys. Rev., **74**, 1759 (1948).
 317. McManus H., Proc. Roy. Soc., **195A**, 323 (1948).
 318. Ma S. T., Phys. Rev., **75**, 535 (1949).
 319. Majorana E., Nuovo Cimento, **14**, 171 (1937).
 320. March A., Zs. f. Phys., **104**, 93 (1936).
 321. March A., Zs. f. Phys., **104**, 161 (1936).
 322. March A., Zs. f. Phys., **105**, 620 (1937).
 323. March A., Zs. f. Phys., **106**, 49 (1937).
 324. March A., Zs. f. Phys., **106**, 291 (1937).
 325. Massey H. S. W., Corben H. C., Proc. Cambr. Phil. Soc., **35**, 463 (1939).
 326. Matthews P. T., Phys. Rev., **75**, 1270 (1949).

327. Matthews P. T., Phys. Rev., 76, 684L, 1419L (1949).
328. Matthews P. T., Phys. Rev., 80, 292 (1950).
329. Matthews P. T., Phil. Mag., 42, 221 (1951).
330. Matthews P. T., Phys. Rev., 81, 936 (1951).
331. Matthews P. T., Salam A., Phys. Rev., 86, 715 (1952).
332. Matthews P. T., Salam A., Proc. Roy. Soc., 221A, 128 (1954).
333. Matthews P. T., Salam A., Phys. Rev., 94, 185 (1954).
334. Michel L., Proc. Phys. Soc., 63A, 514 (1950).
335. Michel L., Nuovo Cimento, 10, 319 (1953).
336. Mie G., Ann. d. Phys., 85, 711 (1928).
337. Mitra A., Nature, 169, 1009 (1952).
338. Moldauer P., Case K. M., Phys. Rev., 91, 459A (1953).
339. Møller C., Zs. f. Phys., 70, 786 (1931).
340. Møller C., Ann. d. Phys., 14, 531 (1932).
341. Møller C., Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., 23, No. 1 (1945).
342. Møller C., Kgl. Dansk. Vidensk., Selsk. Math.-Fys. Medd., 26, No. 19 (1946).
343. Møller C., Comm. Dublin Inst. for Advanced Studies, 4, No. 5 (1948).
344. Møller C., Ann. Inst. Poincaré, 11, 251 (1949).
345. Mott N. F., Proc. Roy. Soc., 124A, 425 (1929).
346. Mott N. F., Proc. Roy. Soc., 135A, 429 (1932).
347. Mott N. F., Sneddon I. N., Wave Mechanics and its Application, Oxford, 1948.
348. Mott N. F., Massey H. S. W., Theory of Atomic Collisions, 2nd ed., Oxford, 1949. (Имеется перевод: Мотт Н. и Мессси Г., Теория атомных столкновений, М.—Л., ИЛ, 1951.)
349. Nafe J. E., Nelson E. B., Rabi I. I., Phys. Rev., 71, 914 (1947). (Имеется перевод в сборнике „Сдвиг уровней атомных электронов“, ИЛ, 1950.)
350. Nagle D. E., Julian R. S., Zacharias J. R., Phys. Rev., 72, 971 (1947).
351. Nambu Y., Progr. Theor. Phys., 5, 614 (1950).
352. Nambu Y., Progr. Theor. Phys., 7, 131 (1952).
353. Nelson E. C., Phys. Rev., 60, 830 (1941).
354. Neuman M., Furry W. H., Phys. Rev., 76, 1677 (1949).
355. Newton R. G., Ph. D. dissertation, Harvard University, 1953.
356. Newton T. D., Wigner E. P., Rev. Mod. Phys., 21, 400 (1949).
357. Nishijima K., Progr. Theor. Phys., 10, 549 (1953).
358. Nishina Y., Zs. f. Phys., 52, 869 (1929).
359. Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 35, 461 (1930).
360. Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 35, 939 (1930).
361. Osborn R. K., Phys. Rev., 86, 340 (1952).
362. Page L. A., Ph. D. dissertation, Cornell University, 1950.
363. Page L. A., Phys. Rev., 81, 1062L (1951).
364. Pais A., Verh. Kgl. Acad. (Amsterdam), 19 (1947).
365. Pais A., Epstein S. T., Rev. Mod. Phys., 21, 445 (1949).
366. Pais A., Uhlenbeck G. E., Phys. Rev., 79, 145 (1950).
367. Pais A., Jost R., Phys. Rev., 87, 871 (1952).
368. Pauli W., Enz. der Math. Wiss., 5, 539 (1921). (Имеется перевод: Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.)
369. Pauli W., Zs. f. Phys., 43, 601 (1927).
370. Pauli W., Handbuch der Physik, Bd. 24, 1, Berlin, 1933. (Имеется перевод: Паули В., Общие принципы волновой механики, М.—Л., 1948.)
371. Pauli W., Weisskopf V., Helv. Phys. Acta, 7, 709 (1934).
372. Pauli W., Zeeman Verhandlungen, Hague, 1935, S. 31.
373. Pauli W., Ann. Inst. Poincaré, 6, 137 (1936).

374. Pauli W., Ann. Inst. Poincaré, 6, 196 (1936).
375. Pauli W., Fierz M., Nuovo Cimento, 15, 167 (1938).
376. Pauli W., Phys. Rev., 58, 716 (1940).
377. Pauli W., Belinfante F. J., Physica, 7, 177 (1940).
378. Pauli W., Rev. Mod. Phys., 13, 203 (1941).
379. Pauli W., Rev. Mod. Phys., 15, 175 (1943).
380. Pauli W., Villars F., Rev. Mod. Phys., 21, 434 (1949). (Имеется перевод в сборнике „Сдвиг уровней атомных электронов“, ИЛ, 1950.)
381. Pauli W., Progr. Theor. Phys., 5, 526 (1950).
382. Pauli W., Nuovo Cimento, 10, 648 (1953).
383. Peierls R. E., McManus H., Phys. Rev., 70, 795A (1948).
384. Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., 214A, 143 (1952).
385. Petermann M. A., Helv. Phys. Acta, 26, 291 (1953).
386. Petermann M. A., Archives des Sciences Physiques et Naturelles (Genève), 6, 5 (1953).
387. Pidd R. W., Hammer C. L., Raka E. C., Phys. Rev., 92, 436 (1953). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 5, ИЛ, 1956.)
388. Pirenne J., Helv. Phys. Acta, 21, 226 (1948).
389. Pirenne J., Physica, 15, 1023 (1949).
390. Pirenne J., Phys. Rev., 86, 395 (1952).
391. Podolsky B., см. Дирак П. А. М., Фок В., Подольский Б. Phys. Zs. Sowjetunion, 468 (1932).
392. Poincaré H., Compt. Rend., 40, 1504 (1905).
393. Poincaré H., Rend. Palermo, 21 (1906).
394. Poincaré H., La Mécanique Nouvelle, Paris, 1924.
395. Pond T. A., Dicke R. H., Phys. Rev., 85, 489L (1952).
396. Proca A. L., Journ. Phys. et radium., 7, 347 (1936).
397. Pryce M. H. L., Proc. Roy. Soc., 195A, 62 (1948).
398. Rabi I. I., Zs. f. Phys., 49, 507 (1928).
399. Racah G., Nuovo Cimento, 14, 322 (1937).
400. Racah G., Phys. Rev., 70, 406 (1946).
401. Randels R. B., Chao K. T., Crane H. R., Phys. Rev., 68, 64 (1945).
402. Riddell R. J., Phys. Rev., 91, 1243 (1953).
403. Rivier D., Helv. Phys. Acta, 22, 265 (1949).
404. Rohrllich F., Phys. Rev., 77, 357 (1950).
405. Rohrllich F., Phys. Rev., 80, 666 (1950).
406. Rohrllich F., Glückstern R. L., Phys. Rev., 86, 1 (1952).
407. Rosen N., Phys. Rev., 55, 94 (1939).
408. Rosen N., Menius A., Phys. Rev., 62, 436 (1942).
409. Rosen N., Rosenstock H. B., Phys. Rev., 85, 257 (1952).
410. Rosenfeld L., Ann. Inst. Poincaré, 2, 25 (1931).
411. Rosenfeld L., Solomon J., Journ. phys. et radium., 2, 139 (1931).
412. Rosenfeld L., Zs. f. Phys., 70, 454 (1931).
413. Rosenfeld L., Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, 6, 30 (1940).
414. Rossi B., High Energy Particles, New York, 1952. (Имеется перевод: Росси Б., Частицы большой энергии, М., 1955.)
415. Sakata S., Progr. Theor. Phys., 2, 145 (1947).
416. Sakata S., Umezawa H., Progr. Theor. Phys., 5, 682 (1950).
417. Salam A., Phys. Rev., 79, 910 (1950).
418. Salam A., Phys. Rev., 82, 217 (1951).
419. Salam A., Phys. Rev., 84, 426 (1951).
420. Salam A., Phys. Rev., 86, 731 (1952).
421. Salam A., Matthews P. T., Phys. Rev., 90, 690 (1953). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 3, ИЛ, 1955, стр. 122.)

422. Salpeter E. E., Bethe H. A., Phys. Rev., 84, 1232 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 334.)
423. Salpeter E. E., Newcomb W. A., Phys. Rev., 87, 150 (1952).
424. Salpeter E. E., Phys. Rev., 87, 328 (1952). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 352.)
425. Salpeter E. E., Phys. Rev., 89, 92 (1953).
426. Sato I., Sci. Rep. of Tohoku Univ., ser. 1, 34, 75 (1950).
427. Sauter F., Zs. f. Phys., 69, 742 (1931).
428. Schafroth R., Helv. Phys. Acta, 22, 392 (1949).
429. Schiff L. I., Quantum Mechanics, New York, 1949. (Готовится русский перевод 2-го издания.)
430. Schiff L. I., Phys. Rev., 92, 988 (1953). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 5, ИЛ, 1956.)
431. Schrödinger E., Ann. d. Phys., 81, 109 (1926).
432. Schwartz L., Théorie des Distributions, Actualités Scientifiques et Industriels, Nos. 1091, 1122, Paris, 1950/1951.
433. Schweber S. Ph. D. dissertation, Princeton University, 1952.
434. Schweber S., Phys. Rev., 94, 1089 (1954).
435. Schweber S., Nuovo Cimento, 11 (1955).
436. Schwinger J., Phys. Rev., 73, 416L (1948).
437. Schwinger J., Weisskopf V., Phys. Rev., 73, 1272A (1948).
438. Schwinger J., Phys. Rev., 74 1439 (1948). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 12.)
439. Schwinger J., Phys. Rev., 75, 651 (1949). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 40.)
440. Schwinger J., Phys. Rev., 76, 790 (1949). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 78.)
441. Schwinger J., Phys. Rev., 82, 664 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 254.)
442. Schwinger J., Proc. Am. Acad. Arts. Sci., 37, 452 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 3, ИЛ, 1955, стр. 28.)
443. Schwinger J., Phys. Rev., 82, 914 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 115.)
444. Schwinger J., Phys. Rev., 91, 713 (1953). (Имеется перевод: Швингер Ю., Теория квантовых полей, М., 1956, гл. I.)
445. Schwinger J., Phys. Rev., 91, 728 (1953). (Имеется перевод: Швингер Ю., Теория квантовых полей, М., 1956, гл. II.)
446. Schwinger J., Phys. Rev., 92, 1283 (1953). (Имеется перевод: Швингер Ю., Теория квантовых полей, М., 1956, гл. III.)
447. Schwinger J., Phil. Mag., 44, 1171 (1953). (Имеется перевод: Швингер Ю., Теория квантовых полей, М., 1956, Приложение.)
448. Schwinger J., Phys. Rev., 93, 615 (1954). (Имеется перевод: Швингер Ю., Теория квантовых полей, М., 1956, гл. IV.)
449. Schwinger J., Phys. Rev., 94, 1362 (1954). (Имеется перевод: Швингер Ю., Теория квантовых полей, М., 1956, гл. V.)
450. Scott M. B., Hanson A. O., Lyman E. M., Phys. Rev., 84, 638 (1951).
451. Shull C. G., Chase C. T., Meyers F. E., Phys. Rev., 63, 29 (1943).
452. Smith J. H., Ph. D. dissertation, Cornell University, 1950.
453. Smith J. H., Phys. Rev., 95, 271 (1954).
454. Snyder H. S., Weinberg J., Phys. Rev., 57, 307 (1940).
455. Snyder H. S., Phys. Rev., 83, 1154 (1951).
456. Sommerfeld A., Atombau und Spektrallinien, Bd. 2, 1931—1939. (Имеется перевод: Зоммерфельд, Строение атома и спектры, т. 2, М., 1957.)

457. Stearns M., Stearns M. B., De Benedetti S., Leipuner L., Phys. Rev., 93, 1123L (1954).
458. Stearns M., Phys. Rev., 95, 1353L (1954).
459. Stearns J., Phys. Rev., 96, 804L (1954).
460. Steinberger J., Phys. Rev., 76, 1180 (1949).
461. Stückelberg E. C. G., Ann. d. Phys., 21, 367 (1934).
462. Stückelberg E. C. G., Nature, 144, 118 (1939).
463. Stückelberg E. C. G., Helv. Phys. Acta, 14, 51 (1941).
464. Stückelberg E. C. G., Helv. Phys. Acta, 14, 321 (1941).
465. Stückelberg E. C. G., Helv. Phys. Acta, 14, 588 (1941).
466. Stückelberg E. C. G., Helv. Phys. Acta, 17, 43 (1944).
467. Stückelberg E. C. G., Nature, 153, 143 (1944).
468. Stückelberg E. C. G., Arch. Sci. Phys. et Naturelles (Genève), 61, 155 (1944).
469. Stückelberg E. C. G., Helv. Phys. Acta, 18, 21 (1945).
470. Stückelberg E. C. G., Helv. Phys. Acta, 18, 195 (1945).
471. Stückelberg E. C. G., Phys. Cambr. Conference Rep., 1947, p. 199.
472. Stückelberg E. C. G., Rivier D., Phys. Rev., 74, 218 (1948).
473. Stückelberg E. C. G., Rivier D., Phys. Rev., 74, 986 (1948).
474. Stückelberg E. C. G., Rivier D., Helv. Phys. Acta, 22, 265 (1949).
475. Stückelberg E. C. G., Phys. Rev., 81, 130 (1951).
476. Stückelberg E. C. G., Green T. A., Helv. Phys. Acta, 24, 153 (1951).
477. Takeda G., Progr. Theor. Phys. (Japan), 7, 359 (1952).
478. Тамм И., Zs. f. Phys., 62, 545 (1930).
479. Тамм И., Journ. of Phys. (CCCP), 9, 449 (1945).
480. Thirring W., Phil. Mag., 41, 1193 (1950).
481. Thirring W., Helv. Phys. Acta, 26, 33 (1953).
482. Thompson R., Ph. D. dissertation, Cornell University, 1950.
483. Tiomno J., Wheeler J. A., Am. Sci., 37, April and July (1949).
484. Titchmarsh E. C., Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford, 1937. (Имеется перевод: Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948.)
485. Toll J. S., Phys. Rev., 90, 372A (1953).
486. Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., 1, 27 (1946). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 1.)
487. Triebwasser S., Dayhoff E. S., Lamb W. E., Phys. Rev., 89, 98 (1953).
488. Uehling E. A., Phys. Rev., 48, 55 (1935).
489. Umezawa H., Kawabe R., Progr. Theor. Phys., 4, 420 (1949).
490. Umezawa H., Kawabe R., Progr. Theor. Phys., 4, 423 (1949).
491. Umezawa H., Kawabe R., Progr. Theor. Phys., 4, 443 (1949).
492. Umezawa H., Kawabe R., Progr. Theor. Phys., 4, 461 (1949).
493. Umezawa H., Kawabe R., Progr. Theor. Phys., 5, 266 (1950).
494. Umezawa H., Kametuchi S., Progr. Theor. Phys., 6, 543 (1951).
495. Utiyama R., Supakawa S., Imamura T., Progr. Theor. Phys., 8, 77 (1952). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 3, ИЛ, 1955, стр. 80.)
496. Valatin J. G., Proc. Roy. Soc., 222A, 93 (1954).
497. Valatin J. G., Proc. Roy. Soc., 222A, 228 (1954).
498. Valatin J. G., Proc. Roy. Soc., 225A, 535 (1954).
499. Valatin J. G., Proc. Roy. Soc., 226A, 254 (1954).
500. Van de Graaff R. J., Buechner W. W., Feshbach H., Phys. Rev., 69, 452 (1946).
501. Van der Waerden B. L., Cöttinger Nachrichten, 1929, S. 100.
502. Van der Waerden B. L., Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Berlin, 1932. (Имеется перевод: Ван дер Верден Б., Метод теории групп в квантовой механике, Харьков — Киев, 1938.)

503. Villars F., Phys. Rev., 79, 122 (1950).
504. Volkow D. M., Zs. f. Phys., 94, 250 (1935).
505. Waller I., Zs. f. Phys., 62, 673 (1930).
506. Ward J. C., Phys. Rev., 77, 293L (1950).
507. Ward J. C., Phys. Rev., 78, 182L (1950).
508. Ward J. C., Proc. Phys. Soc., 64A, 54 (1951).
509. Ward J. C., Phys. Rev., 84, 897 (1951).
510. Wataghin G., Zs. f. Phys., 88, 92 (1934).
511. Watson K. M., U. S. Atomic Energy Commission document, AEC-U, 2765, 1953.
512. Weiss P., Proc. Roy. Soc., 156A, 192 (1936).
513. Weiss P., Proc. Roy. Soc., 169A, 102 (1938).
514. Weiss P., Proc. Roy. Soc., 169A, 119 (1938).
515. Weisskopf V., Zs. f. Phys., 89, 27 (1934).
516. Weisskopf V., Zs. f. Phys., 90, 817 (1934).
517. Weisskopf V., Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., 14, No. 6 (1936).
518. Weisskopf V., Phys. Rev., 56, 72 (1939).
519. Weisskopf V., Rev. Mod. Phys., 21, 305 (1949). (Имеется перевод в сборнике „Сдвиг уровней атомных электронов“, ИЛ, 1950.)
520. Welton T. A., Phys. Rev., 74, 1157 (1948).
521. Weneser J., Bersohn R., Kroil N. M., Phys. Rev., 91, 1257 (1953).
522. Wentzel G., Zs. f. Phys., 86, 479 (1933).
523. Wentzel G., Zs. f. Phys., 87, 726 (1934).
524. Wentzel G., Rev. Mod. Phys., 19, 1 (1947).
525. Wentzel G., Quantum Theory of Fields, New York, 1949. (Имеется перевод: Вентцель Г., Введение в квантовую теорию волновых полей, М. — Л., 1947.)
526. Wentzel G., Phys. Rev., 86, 802 (1952).
527. Weyl H., Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2nd ed., Leipzig, 1931.
528. Wheeler J. A., Phys. Rev., 52, 1107 (1937).
529. Wheeler J. A., Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., 17, 157 (1945).
530. Wheeler J. A., Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., 21, 425 (1949).
531. Wick G. C., Phys. Rev., 80, 268 (1950). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 245.)
532. Wick G. C., Wightman A. S., Wigner E. P., Phys. Rev., 88, 101 (1952).
533. Wick G. C., Phys. Rev., 96, 1124 (1954).
534. Widder D. V., The Laplace Transform, Princeton, 1946.
535. Wightman A. S., Schweber S. S., Phys. Rev., 93, 812 (1955).
536. Wigner E. P., Göttinger Nachrichten, 31, 546 (1932).
537. Wigner E. P., Annals of Mathematics, 40, 149 (1939).
538. Wigner E. P., Zs. f. Phys., 124, 665 (1947).
539. Wilson R. R., Phys. Rev., 90, 720L (1953).
540. Wolfenstein L., Ravenhall D. G., Phys. Rev., 88, 279 (1952).
541. Yang C. N., Phys. Rev., 77, 242 (1950).
542. Yang C. N., Feldman D., Phys. Rev., 79, 972 (1950).
543. Yennie D. R., Wilson R. N., Ravenhall D. G., Phys. Rev., 92, 1325L (1953).
544. Yennie D. R., Ravenhall D. G., Wilson R. N., Phys. Rev., 95, 500 (1954). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики“, № 5, ИЛ, 1956.)
545. Yukawa H., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 17, 48 (1935).
546. Yukawa H., Phys. Rev., 76, 300 (1949).
547. Yukawa H., Phys. Rev., 76, 1731 (1949).
548. Yukawa H., Phys. Rev., 77, 219 (1950).
549. Yukawa H., Phys. Rev., 77, 849 (1950).
550. Zimmermann W., Zs. f. Phys., 135, 473 (1953).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатическая гипотеза** 229—235
 — — определение истинного вакуума 419, 420
 — — перенормировка волновой функции 323, 403
 — — связанные состояния 234, 235, 408
 — — S -матрица 230—235, 407, 408
Амплитуды вероятности, интерпретация векторов состояний в теории поля 162—164
 — — — уравнений Клейна—Гордона 22
 — — — состояний частицы в одночастичной теории 421
 — — — — теории поля 161, 216, 422, 447
Аннигиляции оператор; см. Уничтожения оператор
Антикоммутирующие соотношения для перенормированных операторов 432, 435
 — — — различных времен 211
 — — — совместность 168, 169
 — — — статистика Ферми — Дирака 165—168, 170
Антиузел 181
Антисимметричные волновые функции, связь с квантованием полей 173—178
 — — — спин 168
 — — — статистика Ферми — Дирака 170
Античастицы 55, 56, 167, 171
Бета-распада теория, возможные виды связи 141, 142
 — — перенормируемость 374, 375
Бете — Салпетера уравнение; см. Релятивистское волновое уравнение для связанных состояний
 — — вывод с помощью теории поля 437—447
 — — — граничные условия 444, 445
 — — — решения 445, 446
Бете — Салпетера уравнение, теория Фейнмана 104
Бозе — Эйнштейна статистика, перестановочные соотношения Иордана — Клейна 162
 — — симметрия волновой функции частицы 163
 — — спин 168
Бозон; см. Частица со спином 0, частица со спином 1
 — — рассеяние на фермионе 184, 260
Борна — Инфельда теория 299
Борна приближение для кулоновского рассеяния электронов 94—97
 — — разложение S -матрицы 184, 287
 — — теория рассеяния 64
 b -расходимости 389—394
Вакуум, амплитуды 160, 261
 — поляризация; см. Поляризация вакуума
 — процессы 261, 266
Вектор состояния вакуума 161
 — — — для взаимодействующих полей 418—420, 425, 426
 — — — свойства преобразований 161, 424, 426
 — — — скалярного поля 161, 203
 — — — спинорного поля 169, 211
 — — — электромагнитного поля 222
Вероятность перехода 66
Вершинная диаграмма 319, 358
 — часть диаграммы 377
Вершинные поправки в квантовой электродинамике 319, 321, 322, 386
 — — — мезонной теории 341
 — — — лэмбовский сдвиг 329—331
Вершинный оператор, отделение бесконечной части в вершинном операторе 321, 322, 386, 387, 398
Взаимодействие между бозонными и фермионными полями 135—141
 — — двумя фермионными полями, 141, 142

- Взаимодействие между заряженным полем и электромагнитным полем 145—147
- — полями, правила для диаграмм Фейнмана 267, 275
 - — — уравнения поля 142—144
 - — — формализм Лагранжа 135—142
 - с электромагнитным полем 87—91, 145—147
 - частиц Дирака с электромагнитным полем 57—59
 - — Клейна — Гордона с электромагнитным полем 23, 24
- Взаимодействия представление для системы полей мезон — нуклон 197—199, 246
- — — квантовой электродинамики 244
 - — — полей 209—223
 - — — скалярного поля 201—209
 - — — определение 196—200
- Вика теорема 240, 245
- Водорода атом, лэмбовский сдвиг 309—316, 329—331, 353
- — уравнение Дирака 60, 61
 - — уровни энергии 60
- Волновая функция; *см. также* Вектор состояния
- — для частиц со спином $(0, \frac{1}{2}, 1)$ 18, 27, 132, 373, 374
 - — локализованная 23
 - — перенормировка 323
 - — полевой системы 153
- Вычисление шпуров 72—74
- Вычитательные процедуры в классической электродинамике 296
- — перенормировка теории 322, 384—394, 398
 - — собственная энергия фермиона 317, 342, 384—394
- Гамильтона принцип 118—120
- Гамильтониан взаимодействия 181, 197
- — для вещественного скалярного поля 124, 156, 160
 - — — взаимодействующих полей 144
 - — — комплексного скалярного поля 128, 163
 - — — нерелятивистского лэмбовского сдвига 310
 - — — поля со спином $\frac{1}{2}$ 131
 - — — системы бозон — фермион 181, 197
 - — — частиц со спином $\frac{1}{2}$ 29, 30
 - — — электромагнитного поля 133, 217, 218
- Гамильтониан взаимодействия, канонические переменные 121, 122
- — — определение из лагранжиана 122
 - — — плотность 122
 - — — формализм 121—123
- Гамма-матрицы, свойства 34, 44, 45, 73, 171
- Гейзенберговское представление 413, 414, 433—435
- — — определение 150, 151
 - — — уравнения движения для операторов 151, 153, 154, 415
 - — — штрихованная функция распространения 427—432
- Грина теорема 459, 460
- функции; *см.* Функция распространения, Инвариантные сингулярные функции
 - — для системы двух частиц 438—444
 - — — частиц Дирака 80—82, 437
 - — — Клейна — Гордона 92, 93
 - — — интегральное представление 84, 246—251
 - — — нерелятивистского уравнения Шредингера 75—79
- Гупта формализм; *см.* Квантование поля электромагнитного
- Дайсона преобразование 451—456
- Дальнейшее, электромагнитная теория 298
- Дельбрюка рассеяние 362—364
- Диаграммы; *см. также* Фейнмана диаграммы
- неприводимые 379
 - несобственные 379
 - остов 379
 - приводимые 379
 - примитивные 357, 383
 - связные 376
 - собственные 379
- Дирака матрицы, свойства 30—33, 44, 45, 171
- уравнение 27—43; *см. также* Уравнения частицы со спином $\frac{1}{2}$
 - — в теории поля 129, 146, 164
 - — инвариантность 37—43
 - — ковариантная форма 33—36
- Дифференциальное поперечное сечение для кулоновского рассеяния электронов 61, 62, 96, 346
- — — мёллеровского рассеяния 106
 - — — рассеяния мезонов на нуклонах 190

- Дифференциальное поперечное сечение, определение 66, 282
 Дополнительное условие в квантовой электродинамике 214, 267
 Дырок теория 55—57, 80, 83, 84; *см. также* Позитронов теория
 — квантование поля со спином $1/2$ 164—169
 — рассеяние позитронов на электронах 108, 109
 Заряда перенормировка 334—338, 400, 404
 — в квантовой электродинамике 335, 400, 403—406
 — мезонной теории; *см.* Константа связи
 — калибровочная инвариантность в квантовой электродинамике 396, 404
 — комптоновское рассеяние 404—406
 — мёллеровское рассеяние 337
 — смысл 404—406
 — эффекты поляризации вакуума 331—338, 404, 412
 — сохранение, калибровочная инвариантность лагранжиана 462, 463
 Зарядовое сопряжение 171—173
 — инвариантность квантовой электродинамики 425, 426
 — эффекты замкнутых петель в квантовой электродинамике 262, 263, 358, 359
 Излучения теория 311—315
 Измеримость, перестановочные соотношения 168, 204
 Импульс канонический 121
 — как переменная в теории поля 121, 414, 424
 — сохранение импульса во времени-упорядоченной фейнмановской диаграмме 183
 — тензор энергии-импульса 124
 Импульсное представление по Гейзенбергу 414, 415
 — квантование поля 155—169
 — фейнмановских диаграмм 91, 269—282
 — фейнмановской теории позитрона 84—87, 91, 92
 Инвариантность; *см. также* Лоренц-инвариантность, Преобразований свойства
 — волновые функции частиц 20
 — интегралы движения 126, 460—463
 Инвариантность квантовой электродинамики относительно зарядового сопряжения 425, 426
 — локализованные волновые функции 23
 — формализм Лагранжа 124, 125, 460—463
 Инвариантные сингулярные функции; *см.* Грина функции, Функция распространения
 — — интегральное представление 246—251
 — — перестановочные соотношения 204—211
 — — свертка пары операторов 239, 240
 Инверсия времени, теория Дирака 40, 45
 Интегралы движения в теории Дирака 54, 55
 — инвариантность 460—463
 Инфракрасные расходимости 321, 329, 354
 — — рассеяние 343—345
 — — связанные состояния 329—331
 Испускание квантов 181, 258
 Испускания оператор; *см.* Рождения оператор
 Калибровочная инвариантность, вершинный оператор 385, 386
 — квантование электромагнитного поля 215—222
 — классическая электромагнитная теория 133
 — — рассеяние света на свете 361, 369
 — — собственная энергия фотона 332, 337, 369, 385, 386
 — — тождество Уорда 396
 — — уравнения Максвелла 134
 — — формализм Лагранжа 145—148
 — — 4-вектор тока 129, 145—148
 Калибровочные преобразования 129, 145, 147
 Канонические переменные поля 121
 Квадратные диаграммы, рассеяние света на свете 361, 362, 368
 — — степень расходимости 362, 368
 — — устранение расходимости 365
 Квантование в ограниченном кубе 154
 — классической системы 153
 — перестановочные соотношения 113—115, 151—153, 159—163
 — поля 152—170
 — — ковариантный формализм 196—223
 — — скалярного 155—163, 201—210

- Квантование поля спинорного 163—173, 210—213
 — — электромагнитного 213, 223
 Квантовая электродинамика в предствлении взаимодействия 244, 317
 — — — Гейзенберга 412—415, 431—435
 — — — Фарри 348—353, 409—411
 — — калибровочная инвариантность 148, 216—218, 220—222, 396, 397, 404
 — — лагранжиан 146, 412
 — — нелинейные эффекты 362—364
 — — перенормировочные константы 364, 393, 400, 402—404, 434—435
 — — расходимости 317—337, 357—365, 383—393
 — — уравнения движения 147, 148
 — — устранения расходимостей 317—337, 383—412; *см. также* Перенормировка
 Клейна — Гордона уравнение; *см.* Уравнение частиц со спином 0
 — — оператор тока 19, 24
 — — релятивистские обозначения 26
 — — решения 21—23
 — — трансформационные свойства 20
 Комптоновское рассеяние 282—288
 — — диаграммы Фейнмана 274, 282, 404, 405
 — — перенормировка заряда в квантовой электродинамике 405—406
 Константа связи, обозначение 135
 — — определение 135
 — — перенормировка в мезонной теории 341, 342
 Константы перенормировки
 — — величина 434—436
 — — определение 308, 317, 335, 393, 402—406
 Контрчлены в теории перенормировок, собственная энергия бозона 340
 — — — — фермиона 313, 317
 — — — — эффекты замкнутых петель в мезонной теории 364
 Корпускулярная интерпретация теории поля 114, 179, 448, 449
 Корпускулярно-волновой дуализм 173—180
 Кулоновское рассеяние заряженных мезонов 97
 — — электронов 61, 94—97, 317—338, 342—346
 Лагранжиан векторного мезонного поля 133
 — — взаимодействующих полей 134, 143, 144
 Лагранжиан в квантовой электродинамике 145, 413
 — — действительного скалярного поля 123
 — — комплексного скалярного поля 128
 — — максвелловского поля 131
 — — плотность 118
 — — свойства преобразований 118
 — — спинорного поля со спином $1/2$ 129
 Лестничное приближение 104—106, 444, 447
 Лоренца преобразования бесконечно малые 41
 — — неоднородные 421
 — — несобственные 44, 45
 — — однородные 37
 — — собственные 44
 Лоренц-инвариантность, взаимодействия 135—141
 — — лагранжиана системы 118
 — — свойства преобразований операторов в теории поля 421—423
 — — сингулярных функций 204, 207, 429, 430, 431
 — — уравнения Дирака 37—55
 — — Клейна — Гордона 20
 Лоренцская калибровка 101, 216
 Лэмбовский сдвиг, величина в атоме водорода 314, 331
 — — вершинный оператор 330—332, 353
 — — перенормировка массы 306—314
 Магнитный момент заряженной частицы со спином $1/2$ 59
 — — радиационные поправки 327—329, 372, 373
 — — электрона, аномальная часть 327—329
 Максвелла уравнение, калибровочное преобразование 132
 Матричное представление алгебры Дирака 51
 — — оператора рождения 157, 161
 — — — уничтожения 157, 161
 Матричный элемент оператора рождения 157, 161
 — — — уничтожения 157, 161
 — — — перехода 66, 184
 — — полученный из фейнмановской диаграммы 91, 188, 269—280
 Мезоатомы 56
 Мезон как псевдоскалярная частица 181
 — — рассеяние на нуклоне 184—192, 260, 261
 — — ядерные силы 143, 144, 457

- Метрический тензор 24
 Мёллеровское рассеяние 105—108, 337
 Момент количества движения; *см.*
 Спин
 — — — в теории Дирака 54, 55
 — — — — — поля 126, 425, 462, 463
- Нейтрино 142, 173, 375
 Нерелятивистский предел матричных элементов в теории Дирака 49
 — — — уравнений Дирака 52
 — — — Клейна — Гордона 20, 23
 Нормальное произведение, определенное 235
 — — — амплитуд состояний частицы 422, 447
 — — — представленное в виде Фейнмановских диаграмм 252—256, 259—263
- Нормировка векторов состояний в теории поля 163
 — дираковских волновых функций 67
 Нулевой уровень импульса поля 158
 — — — энергии поля 159
- Обменное рассеяние 102, 103, 270
 Обозначения для производных от переменных поля 115, 159
 — — — символа Фейнмана 34
 — — — релятивистские 24
- Оператор импульса 125, 424
 — момента 54, 125, 424, 463
 — определение 115, 159
 — полной энергии 125, 144
 — положения 22, 54
 — проектирования 70, 417, 418
 — рождения 115, 158, 168, 200, 210
 — свойства 159—163, 169
 — уничтожения 115, 159, 200, 210
 — числа частиц 159, 163, 167—169, 213
 — — — для антифермионов 165—169
 — — — — бозонов 159
 — — — — фермионов 165—169
 — — — — фотонов 213
- Паули принцип, антикоммутационные соотношения Йордана — Вигнера 165—168
 — — — рассеяние двух фермионов 102, 103, 269
 — — — собственная энергия фермиона 290
 — — — спин 168
 — — — функция распространения Фейнмана 83
- Перекрывающиеся расходимости 392—397
- Перенормировка в квантовой электродинамике 317—338, 366—369, 376—405
 — — — мезонной теории 338—342
 — — — теории β -распада 374, 375
 — — — волновой функции 323—326
 — — — заряда 332—339, 404—406
 — — — константы связи 338—342
 — — — контрчлены в лагранжиане системы 311—317, 360—364, 407
 — — — массы 308—316, 324
- Перестановочные соотношения; *см.* Антиккоммутации соотношения
 — — — канонические 152, 414
 — — — ковариантные для различных времен 201—209
- Периодическое граничное условие 155
 Плотность вероятности тока и заряда 18—30, 35, 36, 129, 130, 146, 147, 462, 463
- Поглощение кванта 181, 182
 Поглощения оператор; *см.* Уничтожения оператор
- Позитрон, рассеяние позитронов во внешнем поле 252—258
 — — — на электронах 108, 109
- Позитроний 55
 Позитронов теория 75—87; *см. также* Дырок теория
- Полноты соотношения для векторов состояния в теории поля 430, 440, 444
 — — — дираковских спиноров 69
 — — — решений уравнения Шредингера 76, 232
- Поляризация вакуума 55, 331—337, 354, 369, 370
 — — — лэмбовский сдвиг 337, 370
 — — — перенормировка заряда 335, 404, 411
- Представление; *см.* Матричное представление
 — взаимодействия 196—200
 — Гейзенберга 150, 152, 413—415
 — импульсное 154, 414
 — соотношения между различными представлениями 150—152, 232, 415—417
 — Фарри 347—352
 — числа частиц (чисел заполнения) 159—162, 173—178
 — Шредингера 150, 151
- Преобразование свойства; *см.* Лоренца преобразование, Релятивистская инвариантность
 — — векторов состояний вакуума 161, 169, 424, 426

- Преобразований свойства, величина операторов Дирака 44, 49
 — — волновой функции Дирака 37
 — — — — Клейна — Гордона 18
 — — операторов и векторов состояний 420—422
 — — при зарядовом сопряжении 422, 423
 — — уравнение движения 20
 Прimitивные расходимости в бозонной электродинамике 366—369
 — — — квантовой электродинамике 357—365, 383
 — — — мезонной теории 357—365
 — — — определение 356, 383
 Принцип соответствия 140
 Причинность 139, 140, 168, 301, 363, 371
 Промежуточное состояние 184
 Пространственно-подобная поверхность 89, 122, 198
 Процессы с замкнутыми петлями; *см.* Собственная энергия бозона, вакуума
- Радиационные поправки, адиабатическая гипотеза 323, 326, 403, 404, 408
 — — в квантовой электродинамике 317—338
 — — — мезонной теории 339—344
 — — рассеяние электронов в кулоновом поле 317—347, 409—411
 Разложения коэффициенты, интерпретаций вектора состояния в теории поля 162, 422
 Рассеяние бозона на фермионе 184—192, 258
 — борновское приближение 66, 184
 — двух фермионов 269—272
 — как поглощение и излучение кванта 180
 — Комптона 281—286
 — Мёллера 105—108, 338
 — позитронов во внешнем поле 256, 257
 — — на электронах 108, 109
 — Резерфорда 61, 94—97, 317—337, 340—344
 — Рорлиха 353
 — света в кулоновом поле 363
 — — на свете 361, 369
 — S -матрица 181—184, 230, 233, 252—287, 317—338, 340—345, 348—350
 Расходимости; *см.* Перенормировка
 — b -расходимости 388—394
 — в квантовой электродинамике 376—404
- Расходимости в псевдоскалярной мезонной теории 338—342, 358—365
 — — разложении S -матрицы по теории возмущений 317, 376—412
 — — скалярной мезонной теории 361—365
 — вакуумных процессов 261—267
 — — вершинного оператора 322, 341, 358, 386—387, 390
 — инфракрасные 321, 330, 331, 343, 354
 — общий анализ 354—366
 — отделение 322—342, 383—394, 399, 400
 — примитивные 357, 383
 — собственной энергии бозона 340, 341, 358
 — — фермиона 290—307, 317, 358, 384, 388
 — — фотона 336—338, 385, 389
 — теория перенормировки 322—404
 Резерфорда — Мотта формула 62, 96
 Релятивистская инвариантность; *см.* Лоренц-инвариантность
 Релятивистское волновое уравнение 19—26, 26—41, 131—134
 — — для связанных состояний 97—99, 103, 104, 437—447
 — — инвариантное рассмотрение 20
 Решение уравнения Дирака 33, 55, 58, 59
 — — Клейна — Гордона 21, 23
 Рождение пары в фейнмановской теории позитрона 82
 — — рассеяние света на свете 361
 Рождения оператор, графическое представление 181, 252, 253, 258, 267
 — — для квантов со спином $(0, \frac{1}{2}, 1)$ 159, 161, 165, 168, 202, 203, 210, 211, 212, 310
 — — — определение 115, 158—161
- Свободного поля уравнения; *см.* Релятивистское волновое уравнение
 Связанные состояния; *см.* Релятивистское волновое уравнение для связанных состояний
 — — сходимость S -матрицы 234, 407
 — — теория рассеяния 231—235
 Связь между полями; *см.* Взаимодействие между полями
 — — — локальная 135
 — — — нелокальная 139, 300, 301
 — — — прямая 135
 — — — псевдовекторная 136
 — — — псевдоскалярная 136
 — — — скалярная 135

- Связь между полями с производными 136
- Симметричные волновые функции, квантование поля 115
- — — спин 167
- — — статистика Бозе—Эйнштейна 163
- Система координат центра инерции в бозон-фермионном рассеянии 190
- — — — для релятивистской системы двух тел 442
- Скобки Пуассона 152
- S-матрица, адиабатическая гипотеза 229—235, 322—326, 407—410
- в представлении взаимодействия 224, 225, 232—235
- — — Гейзенберга 431—433
- диаграммы Фейнмана 252—287
- определены 193, 224
- расходимости в теории поля 290—296, 302—308, 317—412
- связанные состояния 233—235, 409—412
- сходимость ряда теории возмущения 408, 409
- теория рассеяния 193—195, 229—231, 252—287, 317—338, 340—345, 348—350
- унитарность 224, 322, 407
- Собственная энергия бозона 338—340, 357, 367
- — вакуума 265, 419, 420
- — в теории Фейнмана 408—412
- — массы 302—311, 320
- — оператор 290, 379—382
- — отделены бесконечности 340, 383—395
- — перенормировка константы связи 338—340
- — степень расходимости 290—295, 357
- — фермиона 291—295, 357
- — фотона 335—337
- Собственные значения оператора заряда 163, 166, 167
- — — импульса 158, 163, 415
- — — положения 22, 23
- — — числа частиц 159, 165
- — — энергии 158, 163, 166, 167, 415
- функции оператора заряда 166—169, 445
- — — импульса 160, 415
- — — положения 22, 23, 54
- — — числа частиц 159—163
- — полнота 69, 77, 232, 430, 440
- Соотношения ортогональности для векторов состояний в теории поля 162, 230—232
- — — дираковских волновых функций 66
- — — нерелятивистских волновых функций 76, 174
- Состояния с отрицательной энергией 20—23, 32, 55—57, 164, 180, 415
- Сохранения теоремы для заряда 18, 29, 129, 130, 146, 147, 462, 463
- — — тензора момента количества движения 126, 462
- — — — энергии-импульса 125, 460, 461
- — инвариантные принципы 124, 460—463
- Спин дираковской частицы 54
- перенормируемость 373, 374
- свойства преобразований 20
- статистика 83, 167
- частицы Клейна—Гордона 20
- Спинные матрицы Паули 30
- Спинор 27
- свойства преобразований 37
- Спонтанная эмиссия 179
- Средние значения, амплитуды частиц 422, 447, 448
- — интерпретация вектора состояния в теории поля 162, 256, 422, 440
- Статистика Бозе—Эйнштейна 163
- Ферми—Дирака 165
- Статистическая интерпретация вектора состояний в одночастичной теории 22
- — — теории поля 162
- Сходимость разложения S-матрицы 406—409
- ядра уравнения Бете—Салпетера 440
- S-функции; *см.* Грина функция, Функция распространения
- Теория возмущений инвариантная 224—229
- — ряды Неймана—Лиувилля 79
- — стационарная 65
- — функции Грина 78, 81—83
- Тока 4-вектор для комплексного скалярного поля 99, 147
- — — спинорного поля со спином $1/2$ 147
- — — уравнения Дирака 29, 35
- — — Клейна—Гордона 19, 20
- — определение с помощью плотности лагранжиана 129, 146, 462, 463

- Томонага — Швингера уравнение 198, 199, 348
 Томсоновское рассеяние 287
 — — перенормировка заряда 404
 Тонкой структуры постоянная 319, 353, 371
 Треугольные диаграммы 262, 358
- Унитарные теории поля 300
 Уничтожения оператор, графическое представление 181, 182, 252, 253, 258, 267
 — — для квантов 115, 116, 157, 159—163, 165, 168, 203, 210—212
 — — определение 115, 116, 159—163
 Уорда тождество 394—396
 — — калибровочная инвариантность 396—397
 Уравнение частиц со спином 1 128—132; *с.м. также* Фотон, Максвелла уравнение
 — — — — 0; *с.м.* Клейна — Гордона уравнение
 — — — — в присутствии электромагнитного поля 23, 26
 — — — — как операторное уравнение 197
 — — — — ковариантная форма 26
 — — — — $1/2$; *с.м.* Дирака уравнение
 — — — — в присутствии электромагнитного поля 58, 59
 — — — — как операторное уравнение 197
 — — — — ковариантная форма 32—35
 Уравнения движения; *с.м.* Релятивистское волновое уравнение
 — — взаимодействующих полей 142—144
 — — вывод из плотности лагранжиана 118, 119
 — — операторов в гейзенберговском представлении 151, 413
 — — — — представлении взаимодействия 197
- Фарри теорема 262, 263, 359
 — представление для связанных состояний 347—353, 409—412
 Фейнмана диаграммы 82, 84, 252—268; *с.м. также* Диаграммы
 — — в квантовой электродинамике 253, 254, 267
 — — мезонной теории 258—261
 — — правила для получения матричного элемента из диаграмм Фейнмана 266—268, 275
- Фейнмана диаграммы, разложенные S-матрицы 252—268
 — — упорядоченные во времени 181—186
 — — теория позитронов; *с.м.* Позитронная теория, Дырок теория
 Ферми — Дирака статистика, антикоммутиационные соотношения 165—170
 — — антисимметрия волновых функций 170
 — — спин 83, 168
 Фолдн — Ваутхейсена преобразование 57—59
 Фолдн-преобразование 458
 Форм-факторы 139, 300—302
 Фотон; *с.м.* Квантование поля электромагнитного
 — комптоновское рассеяние 281—287, 369
 — — рассеяние 361, 370
 — — Дельбрюка 363
 — — собственная энергия 338, 370, 386—388
 Функции *K*; *с.м.* Инвариантные сингулярные функции
 Функция распространения; *с.м.* Грина функция
 — — для бозе-частиц 92, 93
 — — двух взаимодействующих частиц 99—104, 437—439
 — — — — дираковских частиц 79—81, 252, 436—438
 — — представление 76—80, 84, 247—252
 — — теория Фейнмана 76—93
- Хронологическое произведение операторов, определение амплитуд частиц 447, 448
 Хронологический оператор по Вку 238
 — — — — Дайсону 226
- Частица со спином 0, нерелятивистское уравнение 18
 — — — — релятивистское уравнение 19
 — — — — статистика 168
 — — — — $1/2$ волновая функция 27, 37, 59, 421
 — — — — релятивистское уравнение 35—59, 421
 — — — — свойства 55—59, 444
 — — — — статистика 83, 167
 — — — — 1 131, 373—374; *с.м. также* Фотон

- Четность 59, 192
4-вектор, обозначенные 25
- Ширина линий 352, 353, 449
Шредингера представление 150
— уравнение; *см.* Томонага — Швингера уравнение
— — для нерелятивистской системы 18
— — — системы бозон—фермион 180
- Эквивалентности теоремы 451—458
Электромагнитное поле, ковариантное квантование 212—223
— — корпускулярный аспект 212
— — лагранжиан 131
— — уравнение Дирака 57—59
— — — Клейна — Гордона 23, 24
— — уравнения движения 131, 132
Электроны, рассеяние на внешнем поле 87—92, 94—97, 317—338, 342—347
- Электроны, рассеяние на ядрах 63—65
— свободные 164—170, 209—212
— собственная энергия 290—317, 378, 384
Энергии-импульса оператор, диагональное представление 415—417
— — для поля частиц со спином $\frac{1}{2}$ 130
— — — скалярного поля 124, 125
— — — электромагнитного поля 134, 217
Энергия-импульс, закон сохранения 124, 125
— сохранение на диаграммах Фейнмана 91, 271
— частицы 18, 26
- Юкавы теория 143, 144
Юлинга эффект 56, 336
- Ядерные силы 143, 144, 457
Ячеек метод в теории поля 120
— — нормировка спиноров 273

